

1 Normy signálů a systémů

1.1 Norma signálů

- (i) $\|u\| \geq 0$
- (ii) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0, \forall t$
- (iii) $\|au\| = |a|\|u\|, \forall a \in \mathbb{R}$
- (iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

1-Norma : $\|u\|_1 \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt$

2-Norma : $\|u\|_2 \triangleq (\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt)^{\frac{1}{2}} \quad \left(= (\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega)^{\frac{1}{2}}, \text{ např. pro } \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt < \infty \right)$

∞ -Norma : $\|u\|_{\infty} \triangleq \sup_t |u(t)|$

1.1.1 Výkon signálu

$$P_u = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t) dt, \quad \text{průměrný výkon signálu } u.$$

Jestliže pro u existuje $P_u \in \mathbb{R}$, potom budeme nazývat signál u výkonovým signálem.

$$\text{pow}(u) \triangleq \sqrt{P_u},$$

$\text{pow}(u)$ není norma, poněvadž $\text{pow}(u)$ může být nulové i pro nenulový signál. Splňuje však vlastnosti normy (i), (iii), (iv).

Věta 1.1. Platí:

a) $\|u\|_2 < +\infty \Rightarrow \text{pow}(u) = 0$

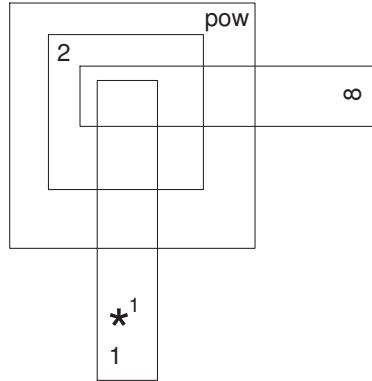
Důkaz. $\|u\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt < \infty \Rightarrow \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t) dt \leq \frac{1}{2T} \|u\|_2^2$, pro $T \rightarrow +\infty$ je potom přímo $\text{pow}(u) = 0$. □

b) Jestliže u je výkonový signál a $\|u\|_{\infty} < +\infty$, potom $\text{pow}(u) < \|u\|_{\infty}$

Důkaz. $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t) dt \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|u\|_{\infty}^2 dt = \|u\|_{\infty}^2$. □

c) $\|u\|_1 < +\infty, \|u\|_{\infty} < +\infty \Rightarrow \|u\|_2 \leq (\|u\|_{\infty} \|u\|_1)^{\frac{1}{2}} < +\infty$

Důkaz. $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| |u(t)| dt \leq \|u\|_{\infty} \|u\|_1$. □



Obrázek 1.1: Vennův diagram pro signály s konečnými hodnotami $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ a $\text{pow}()$.

1.1.2 Vztahy mezi normami a $\text{pow}()$

Příklad 1.1. Pro prvek $*^1$ z obrázku 1.1:

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, & \text{pro } t \in (0, 1); \\ 0, & \text{pro } t > 1. \end{cases}$$

$$\|u_1\|_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 \Rightarrow \|u_1\| < +\infty$$

$$\|u_1\|_2 = \int_0^1 \frac{1}{t} dt \text{ diverguje} \Rightarrow \|u_1\|_2 = +\infty$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^1 \frac{1}{t} dt \text{ diverguje} \Rightarrow u_1 \text{ není výkonový signál}$$

$$u_1 \text{ není omezená funkce} \Rightarrow \|u_1\|_\infty = +\infty$$

Poznámka 1.1. Nalezněte signály do všech podmnožin Vennova diagramu.

1.1.3 Výkonová analýza signálů

Pro výkonový signál u definujeme jeho autokorelační funkci vztahem

$$R_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t+\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

tj. $R_u(\tau)$ je průměrná hodnota součinu $u(t)u(t+\tau)$. Zřejmě platí

$$R_u(0) = \text{pow}^2(u) \geq 0.$$

Musíme rozšířit naši definici výkonového signálu na takové signály, pro které existuje limita (1.1) pro libovolné τ , ne pouze pro $\tau = 0$ (jako dříve).

Věta 1.2. Pro takto definované výkonové signály platí

$$|R_u(\tau)| \leq R_u(0).$$

Důkaz. Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti plyne

$$\left| \int_{-T}^T u(t)v(t)dt \right| \leq \left(\int_{-T}^T u^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-T}^T v^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Odtud pro $v(t) = u(t + \tau)$ obdržíme

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t + \tau)dt \right| \leq \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t + \tau)dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Limitním přechodem $T \rightarrow \infty$ dostaneme

$$|R_u(\tau)| \leq R_u(0).$$

□

Necht' S_u označuje Fourierovu transformaci $R_u(\tau)$, tj.

$$S_u(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

Obráceně (inverzní Fourierovou transformací)

$$R_u(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.$$

Dále

$$\text{pow}^2(u) = R_u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(j\omega)d\omega.$$

Slovy: Průměrný výkon signálu u lze rozložit na "frekvenční složky". Funkci $\frac{1}{2\pi}S_u(j\omega)$ lze interpretovat jako výkonovou hustotu. Z tohoto důvodu je funkce $S_u(j\omega)$ nazývána *výkonovou spektrální hustotou signálu u* .

Nyní uvažujme dva výkonové signály u a v . Jejich *vzájemnou korelační funkci* definujeme vztahem

$$R_{uv}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)v(t + \tau)dt$$

a její Fourierovu transformaci

$$S_{uv}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uv}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

nazýváme *vzájemnou výkonovou spektrální hustotou* signálů u a v .

Nyní odvodíme důležité vztahy týkající se lineárního systému s přenosovou funkcí $H(s)$. Předpokládáme, že $H(s)$ je stabilní a ryzí.

Věta 1.3. $R_{uy} = h * R_u$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)u(t-\alpha)d\alpha \\
u(t)y(t+\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)u(t)u(t+\tau-\alpha)d\alpha \\
\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t)y(t+\tau)dt &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T}^{+T} h(\alpha)u(t)u(t+\tau-\alpha)d\alpha dt \\
R_{uy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)R_u(\tau-\alpha)d\alpha
\end{aligned}$$

□

Věta 1.4. $R_y = h * h_{\text{rev}} * R_u$, kde $h_{\text{rev}}(t) \triangleq h(-t)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
y(t+\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)u(t+\tau-\alpha)d\alpha \\
y(t)y(t+\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)y(t)u(t+\tau-\alpha)d\alpha
\end{aligned}$$

Průměrná hodnota $y(t)y(t+\tau)$ je rovna (podrobně viz výše)

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)R_{yu}(\tau-\alpha)d\alpha = h * R_{yu}.$$

Podobně odvodíme

$$R_{yu} = h_{\text{rev}} * R_u.$$

Celkem tedy

$$R_y = h * h_{\text{rev}} * R_u.$$

□

Věta 1.5. $S_y(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_u(j\omega)$

Důkaz. Dokazovaný vztah dostaneme Fourierovou transformací vztahu z předchozího tvrzení. □

1.2 Normy systémů

Předpokládejme: LTI systém, kauzální a konečně dimenzionální

↓

$$y = h * u \Leftrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

h impulsní char. (váhová funkce) systému, u vstup systému, y výstup systému,

$$H(s) \triangleq \int_0^{+\infty} h(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{h(\cdot)\}$$

Z předpokladů plyne:

$h(t) = 0$, pro $t < 0$ (kauzalita)

$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$, $a(s), b(s)$ jsou polynomy (konečně dimenzionální)

Definice 1.1.

$H(s)$ je *stabilní*, jestliže je holomorfní (analytická) v uzavřené pravé polorovině komplexní roviny ($\text{Re}(s) \geq 0$).

$H(s)$ je *ryzí*, jestliže $H(j\omega)$ je konečné ($\text{st}(b(s)) \leq \text{st}(a(s))$).

$H(s)$ je *striktně ryzí*, jestliže $H(j\infty) = 0$ ($\text{st}(b(s)) < \text{st}(a(s))$).

$H(s)$ je *dvojitě ryzí*, jestliže $H(s)$ i $H^{-1}(s)$ jsou ryzí ($\text{st}(b(s)) = \text{st}(a(s))$).

V dalším textu budeme místo pojmu dvojitě ryzí používat ekvivalentní pojem invertovatelný.

$$\text{2-Norma: } \|H\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\infty\text{-Norma: } \|H\|_\infty \triangleq \sup_\omega |H(j\omega)|$$

Jestliže je $H(s)$ stabilní, potom platí

$$\|H\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{Parsevalova věta}).$$

Platí $\|GH\|_\infty \leq \|G\|_\infty \|H\|_\infty$ (submultiplikativní vlastnost - důležité)

Platí:

- i) $\|H\|_2$ je konečná právě tehdy, jestliže H je striktně ryzí a nemá póly na imaginární ose.

Důkaz. Necht' H je striktně ryzí a nemá póly na imaginární ose, potom lze ukázat, že pro vhodné kladné konstanty c, τ platí $\frac{c}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} = \left| \frac{c}{\tau j\omega + 1} \right| \geq |H(j\omega)|$. Poněvadž $\frac{c}{\tau s + 1}$ má konečnou 2-normu $\left(\left\| \frac{c}{\tau s + 1} \right\| = \frac{c}{\sqrt{2}\tau} \right)$, má konečnou normu i $H(s)$. □

- ii) $\|H\|_\infty$ je konečná právě tehdy, jestliže H je ryzí a nemá póly na imaginární ose.

Důkaz. Důkaz plyne z faktu, že $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) < \infty$. □

1.2.1 Výpočet ∞ -Normy systému

Vhodně zvolíme konečnou posloupnost $\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, potom odhad pro $\|H\|_\infty$ je $\max_{k \in \{1, \dots, N\}} |H(j\omega_k)|$. Pro jednodušší přenosy lze postupovat následovně

- 1) $\frac{d|H(j\omega)|^2}{d\omega} = 0$ (lze vypočítat pro racionální $H(s)$)
- 2) Řešení polynomiální rovnice z bodu 1.
- 3) Výběr z bodů podezřelých z extrému.

1.2.2 Relace vstup - výstup

Známe, jak velký je vstup, jak velký může být výstup? Touto otázkou se budeme zde zabývat. Předpokládejme H *stabilní* a *striktně ryzí*. Výsledky jsou shrnuty v následujících dvou tabulkách.

- Prvek (1, 1) tabulky 1.1 se speciálními vstupy.

$$Y(s) = H(s)\mathcal{L}\{\delta(t)\} = H(s)$$

$$\|y\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \|H\|_2.$$

	$u(t) = \delta(t)$	$u(t) = \sin(\omega t)$
$\ y\ _2$	$\ H\ _2$	$+\infty$
$\ y\ _\infty$	$\ h\ _\infty$	$ H(j\omega) $
$\text{pow}(y)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}} H(j\omega) $

Tabulka 1.1: Speciální vstup $u(t) = \delta(t)$ a $u(t) = \sin(\omega t)$.

	$\ u\ _2$	$\ u\ _\infty$	$\text{pow}(u)$
$\ y\ _2$	$\ H\ _\infty$	∞	∞
$\ y\ _\infty$	$\ H\ _2$	$\ h\ _1$	∞
$\text{pow}(y)$	0	$\leq \ H\ _\infty$	$\ H\ _\infty$

Tabulka 1.2: Zesílení systému.

- Prvek (2,1) tabulky 1.1.

$$Y(s) = H(s)\mathcal{L}\{\delta(t)\} = H(s)$$

$$\|y\|_\infty = \sup_t |y(t)| = \sup_t |h(t)|$$

- Prvek (3,2) tabulky 1.1.
Necht' $\varphi \triangleq \arg H(j\omega)$, potom

$$\begin{aligned} \text{pow}^2(y) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |H(j\omega)|^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \\ &= |H(j\omega)|^2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \\ &= |H(j\omega)|^2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T\omega} \int_{-\omega T + \varphi}^{\omega T + \varphi} \sin^2(\theta) d\theta = \\ &= |H(j\omega)|^2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} |H(j\omega)|^2. \end{aligned}$$

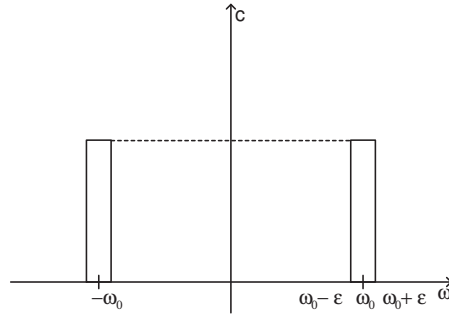
Definice 1.2. Zesílení systému definujeme jako indukovanou normu, tj. $\|H\| = \sup_{\|u\|=1} \frac{\|y\|}{\|u\|}$, přičemž $\|\cdot\| \triangleq \|\cdot\|_p$, kde $p = 1, 2, \infty$.

- Pro prvek (1,1) v tabulce 1.2 zesílení systému platí:

$$\begin{aligned} \|H\| &= \sup_{\|u\|_2=1} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 |U(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\|H\|_\infty \|u\|_2}{\|u\|_2} = \|H\|_\infty \end{aligned}$$

Nyní ukážeme, že $\|H\|_\infty$ je nejmenší taková horní mez. Pro tento účel zkonstruujeme vstup $U(j\omega)$ ve frekvenční oblasti následovně:

- (1) nalezneme ω_0 , pro které platí $|H(j\omega_0)| = \|H\|_\infty$
(2) definujeme $U(j\omega) = \begin{cases} c, & \text{je-li } |\omega - \omega_0| < \varepsilon \text{ nebo } |\omega + \omega_0| < \varepsilon; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$



Obrázek 1.2: $U(j\omega)$.

$$\|u\|_2 = \|U\|_2 = 1 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}}$$

Pro takovýto vstup platí

$$\begin{aligned} \|Y\|_2^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\pi} \{ |H(-j\omega_0)|^2 c^2 2\varepsilon + |H(j\omega_0)|^2 c^2 2\varepsilon \} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} [|H(-j\omega_0)|^2 \pi + |H(j\omega_0)|^2 \pi] = |H(j\omega_0)|^2 = \|H\|_\infty^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Tedy dokázali jsme, že $\|H\|_\infty = \sup_{\|u\|_2=1} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}$.

- Pro prvek (2, 1) tabulky 1.2:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t-\tau)d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(\tau)d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|h\|_2 \|u\|_2 = \|H\|_2 \|u\|_2. \end{aligned}$$

Tedy $\|y\|_\infty \leq \|H\|_2 \|u\|_2$.

Abychom ukázali, že $\|H\|_2$ je nejmenší taková horní mez, zvolme vstup

$$u(t) = h(-t) / \|h\|_2.$$

Pro něj platí $\|u\|_2 = 1$ a $|y(0)| = \|H\|_2$, tedy $\|y\|_\infty \geq \|H\|_2$. Dokázali jsme tedy, že

$$\|H\|_2 = \sup_{\|u\|_2=1} \frac{\|y\|_\infty}{\|u\|_2}.$$

- Pro prvek (2, 2) tabulky 1.2:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau \|u\|_\infty = \|h\|_1 \|u\|_\infty.$$

Abychom ukázali, že $\|h\|_1$ je nejmenší taková horní mez, zvolme

$$u(t-\tau) \triangleq \text{sgn}(h(\tau)), \quad \forall \tau.$$

Potom $\|u\|_\infty = 1$ a $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau = \|h\|_1$.

- Prvek (3, 2) tabulky 1.2:

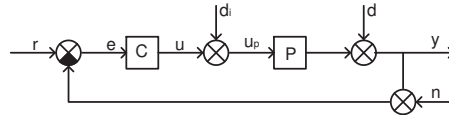
Jestliže u je výkonový signál a $\|u\|_\infty \leq 1$, potom $\text{pow}(u) \leq 1$. Platí tedy

$$\sup_u \{\text{pow}(y) : \|u\|_\infty \leq 1\} \leq \sup_u \{\text{pow}(y) : \text{pow}(u) \leq 1\}.$$

Poznámka 1.2. Domácí cvičení: Dokažte platnost tabulky 1.2 "zesílení systému" pro ostatní případy.

2 Stabilita a kvalita zpětnovazebních systémů

2.1 Standardní zpětná vazba



Obrázek 2.1: Standardní zpětná vazba.

Předpoklad: C a P jsou ryzí přenosové funkce.

Signály r, d_i, d, n budeme nazývat exogenní signály; signály e, u, y , vnitřními signály.

Příklad 2.1.

$$P = \frac{s-1}{s+2}, \quad C = -1$$

$$U(s) = \frac{C}{1+CP} [R(s) - N(s) - D(s)] + \frac{CP}{1+CP} D_i(s)$$

$$\frac{C}{1+CP} = \frac{-1}{1 - \frac{s-1}{s+2}} = \frac{-(s+2)}{3}$$

$$\frac{CP}{1+CP} = -\frac{\frac{s-1}{s+2}}{1 - \frac{s-1}{s+2}} = -\frac{s-1}{3}$$

Definice 2.1. Zpětnovazební systém je *dobře postavený*, jestliže všechny přenosové funkce zpětnovazebního systému jsou definovány a jsou ryzí.

Lemma 2.1. Zpětnovazební systém na obr. 2.1 je *dobře postavený právě tehdy, jestliže*

$$1 + CP$$

je invertovatelný (dvojitě ryzí).

Důkaz. Nejprve uvedeme všechny možné přenosové funkce spojené se zpětnovazebním systémem na

obr. 2.1.

$$\begin{array}{ll}
r \rightarrow e : \frac{1}{1+CP} & d_i \rightarrow e : \frac{-P}{1+CP} \\
r \rightarrow u : \frac{C}{1+CP} & d_i \rightarrow u : \frac{CP}{1+CP} \\
r \rightarrow y : \frac{CP}{1+CP} & d_i \rightarrow y : \frac{P}{1+CP} \\
\\
d \rightarrow e : \frac{-1}{1+CP} & n \rightarrow e : \frac{-1}{1+CP} \\
d \rightarrow u : \frac{-C}{1+CP} & n \rightarrow u : \frac{-C}{1+CP} \\
d \rightarrow y : \frac{1}{1+CP} & n \rightarrow y : \frac{-CP}{1+CP}
\end{array}$$

Z tohoto seznamu je zřejmé, že existují pouze čtyři různé funkce (nehledíme-li na znaménko), a to:

$$S = \frac{1}{1+CP}, \quad T = \frac{CP}{1+CP}, \quad S_i = \frac{C}{1+CP}, \quad S_0 = \frac{P}{1+CP}.$$

(Aström hovoří o gangu čtyř)

K tomu, aby všechny tyto čtyři přenosové funkce byly ryzí je zřejmě nutné a stačí, aby přenos $1+CP$ byl invertovatelný. \square

Důsledek 2.1. Jsou-li C a P ryzí přenosy, potom $1+CP$ je invertovatelný právě tehdy, jestliže

$$CP(\infty) \triangleq \lim_{s \rightarrow \infty} C(s)P(s) \neq -1.$$

Důkaz. Položme $L = \frac{n(s)}{d(s)} = C(s)P(s)$, kde $n(s)$ a $d(s)$ jsou polynomy. Podle předpokladu $\text{st}(n) \leq \text{st}(d)$. Nyní $1+CP = 1+L = 1 + \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{d(s)+n(s)}{d(s)} = \frac{b(s)}{a(s)}$. Odtud $\text{st}(b) < \text{st}(a)$ právě tehdy, jestliže $\text{st}(n) = \text{st}(d)$ a v součtu $d(s) + n(s)$ se zruší koeficient u nejvyšší mocniny, tj. $L(\infty) = -1$. \square

2.1.1 Vnitřní stabilita

Definice 2.2. Zpětnovazební systém je *vnitřně stabilní*, jestliže všechny přenosové funkce zpětnovazebního systému jsou stabilní.

Necht' H je ryzí stabilní přenos, potom ho můžeme vyjádřit ve tvaru

$$H = H_0 + H_1,$$

kde H_0 je konstanta a H_1 je striktně ryzí.

Příklad 2.2.

$$\frac{s}{s+1} = \frac{s+1-1}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1}.$$

V časové oblasti potom platí

$$y(t) = H_0 u(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t-\tau) u(\tau) d\tau.$$

Je-li $|u(t)| \leq c, \forall t$, potom

$$|y(t)| \leq |H_0|c + \int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(\tau)| d\tau \cdot c.$$

Odtud plyne: Výstup systému je omezený, jestliže je omezený vstup. (Srovnej s odvozením prvku (2,2) tabulky 1.2.) Ze stejného důvodu plyne: Vnitřní stabilita zajišťuje omezení všech vnitřních signálů zpětnovazebního systému za předpokladu, že jsou omezeny všechny exogenní signály.

Zkoumáme-li pouze stabilitu ve smyslu "omezený vstup-omezený výstup", potom je možné, že některé vnitřní signály jsou neomezené a mohou způsobit např. zničení systému.

Dále budeme předpokládat, že C a P jsou podíly nesoudělných polynomů, tj.

$$C = \frac{N_C}{D_C}, \quad P = \frac{N_P}{D_P}.$$

Charakteristický polynom uzavřené smyčky je potom daný vztahem

$$D_C D_P + N_C N_P.$$

Věta 2.1. *Zpětnovazební systém je vnitřně stabilní právě tehdy, jestliže charakteristický polynom uzavřené smyčky je stabilní, tj. nemá žádné kořeny (nuly) v oblasti $\text{Re}(s) \geq 0$.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že uzavřený systém je vnitřně stabilní, tj. přenosy

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1+PC} = \frac{D_C D_P}{D_C D_P + N_C N_P} \\ T &= \frac{PC}{1+PC} = \frac{N_P N_C}{D_C D_P + N_C N_P} \\ S_i &= \frac{C}{1+PC} = \frac{N_C D_P}{D_C D_P + N_C N_P} \\ S_o &= \frac{P}{1+PC} = \frac{N_P D_C}{D_C D_P + N_C N_P} \end{aligned} \quad (2.1)$$

jsou stabilní. Nyní je důležité si uvědomit, že z toho nutně neplyne, že charakteristický polynom $D_C D_P + N_C N_P$ je též stabilní. Mohlo by se totiž stát, že všechny výše uvedené přenosy mají společnou nestabilní nulu, která se zkrátí s nestabilním pólem, tj. kořenem charakteristického polynomu. Ukážeme, že tato situace za daných předpokladů nemůže nastat.

Nechť s_0 je nestabilní nula všech přenosů (2.1), potom

$$D_C D_P(s_0) = N_C N_P(s_0) = N_C D_P(s_0) = N_P D_C(s_0) = 0.$$

Poněvadž dvojice polynomů N_C, D_C a N_P, D_P jsou podle předpokladu nesoudělné, platí

$$(s - s_0) | D_C D_P \Rightarrow (s - s_0) | D_C \vee (s - s_0) | D_P.$$

Nyní probereme všechny možné situace:

- (i) $(s - s_0) | D_C \wedge (s - s_0) \nmid D_P \Rightarrow (s - s_0) | N_C$, spor.
- (ii) $(s - s_0) \nmid D_C \wedge (s - s_0) | D_P \Rightarrow (s - s_0) | N_P$, spor.
- (iii) $(s - s_0) | D_C \wedge (s - s_0) | D_P \Rightarrow (s - s_0) | N_C \vee (s - s_0) | N_P$, spor.

Ve všech případech jsme ukázali, že ke krácení v první polovině u všech přenosů (2.1) nemůže dojít, v důsledku toho je charakteristický polynom $D_C D_P + N_C N_P$ stabilní.

Obráceně. Necht' charakteristický polynom $D_C D_P + N_C N_P$ je stabilní, potom jsou zřejmě stabilní i všechny přenosové funkce (2.1). \square

Věta 2.2. *Zpětnovazební systém je vnitřně stabilní právě tehdy, jestliže jsou splněny následující dvě podmínky:*

- (i) Přenos $1 + CP$ nemá žádné nuly v oblasti $\text{Re}(s) \geq 0$.
- (ii) Při vytváření součinu CP nedochází k žádnému krácení v oblasti $\text{Re}(s) \geq 0$.

Důkaz. Zpětnovazební systém z obr. 2.1 je vnitřně stabilní právě tehdy, jestliže jsou stabilní všechny čtyři následující přenosy

$$S = \frac{1}{1+CP}, \quad T = \frac{CP}{1+CP}, \quad S_i = \frac{C}{1+CP}, \quad S_o = \frac{P}{1+CP}.$$

\Rightarrow Předpokládejme, že zp. systém je vnitřně stabilní. Tedy speciálně přenos $S = \frac{1}{1+CP}$ je stabilní. Odtud plyne, že $S^{-1} = 1 + CP$ nemá žádné nuly v oblasti $\text{Re}(s) \geq 0$. To dokazuje podmínku (i). K důkazu podmínky (ii) využijeme větu 2.1, ze které plyne, že charakteristický polynom $D_C D_P + N_C N_P$ nemá kořeny v oblasti $\text{Re}(s) \geq 0$. Tedy dvojice polynomů (N_C, D_P) a (N_P, D_C) nemají žádný společný kořen v oblasti $\text{Re}(s) \geq 0$. (Kdyby ho měly, potom by byl i kořenem polynomu $D_C D_P + N_C N_P$).

\Leftarrow Necht' platí podmínky (i) a (ii). Uvažujme-li C a P ve tvaru (polynom lomeno polynom) jako výše a předpokládáme-li, že s_0 je kořenem charakteristického polynomu $D_C D_P + N_C N_P$, tj.

$$(D_C D_P + N_C N_P)(s_0) = 0,$$

potom k důkazu stability S musíme ukázat, že $\text{Re}(s_0) < 0$. Předpokládejme opak, tj. $\text{Re}(s_0) \geq 0$. Jestliže

$$D_C D_P(s_0) = 0,$$

potom též

$$N_C N_P(s_0) = 0.$$

To však není možné, neboť potom by byla porušena podmínka (ii) věty. Tedy musí platit

$$D_C D_P(s_0) \neq 0$$

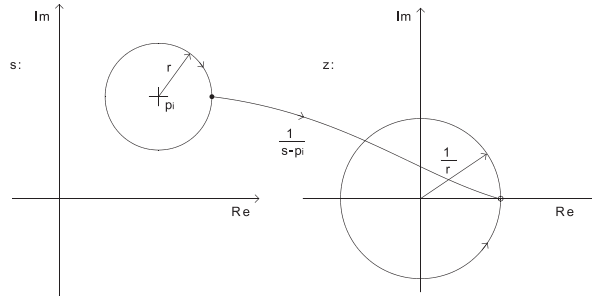
a charakteristická rovnice může být upravena na $1 + \frac{N_C N_P}{D_C D_P}(s_0) = 0$, neboli

$$1 + CP(s_0) = 0.$$

To však je ve sporu s podmínkou (i) věty. Tedy charakteristický polynom je stabilní a podle věty 2.1 je zpětnovazební systém vnitřně stabilní. \square

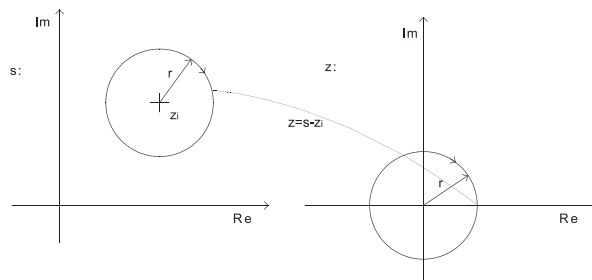
2.2 Nyquistovo kritérium stability

Princip argumentu - předběžné úvahy:



Obrázek 2.2: Pól.

$$s = p_i + re^{-j\alpha}, \quad \alpha \in (0, 2\pi), \quad z = \frac{1}{s - p_i} = \frac{1}{p_i + re^{-j\alpha} - p_i} = \frac{1}{re^{-j\alpha}} = \frac{1}{r}e^{j\alpha}$$



Obrázek 2.3: Nula.

$$s = z_i + re^{-j\alpha}, \quad z = s - z_i = z_i + re^{-j\alpha} - z_i = re^{-j\alpha}$$

Racionální lomenná funkce:

$$L(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$\arg L(s) = \sum_{i=1}^m \arg(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \arg(s - p_i)$$

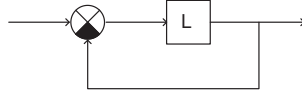
$\Delta \arg L(s)$ = přírůstek argumentu odpovídající pohybu s po uzavřené orientované křivce
(orientované souhlasně se směrem hodinových ručiček)

Věta 2.3. *Princip argumentu*

Necht' $L(s)$ je ryzí racionální funkce s reálnými koeficienty komplexní proměnné $s \in \mathbb{C}$ mající uvnitř uzavřené záporně orientované křivky (ve směru hodinových ručiček) v \mathbb{C} Z nul a P pólů, potom pro přírůstek argumentu $L(s)$ podél této křivky platí $\Delta \arg L(s) = (P - Z)2\pi$.

Důkaz. viz výše

□



Obrázek 2.4

Uvažujme zpětnovazební systém s racionálním přenosem L v přímé větvi a jednotkovou zápornou zpětnou vazbu.

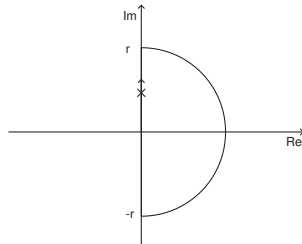
Tento systém je stabilní (viz věta 2.1) právě tehdy, jestliže přenos $1 + L$ nemá žádné nuly v oblasti $\operatorname{Re}(s) \geq 0$. Je-li $L = \frac{B}{A}$, potom

$$1 + L = 1 + \frac{B}{A} = \frac{A + B}{A}.$$

Přenos $1 + L$ má tedy póly totožné s póly otevřeného systému a jeho nuly jsou póly uzavřeného systému. Předpokládejme ještě, že přenos otevřeného systému L má P nestabilních pólů (póly v oblasti $\operatorname{Re}(s) > 0$) a Z nestabilních nul (nul v oblasti $\operatorname{Re}(s) > 0$), potom z principu argumentu pro tzv. D -křivku (viz obrázek 2.5) (obepínající celou pravou polovinu komplexní roviny) platí

$$\Delta \arg(1 + L) = (P - Z)2\pi \triangleq N2\pi.$$

Požadujeme-li, aby uzavřený systém neměl žádné póly v oblasti $\operatorname{Re}(s) > 0$, tj. $Z = 0$, potom přírůstek argumentu podél (záporně orientované) D -křivky je $N2\pi = P2\pi$, tj. křivka $1 + L(j\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$ obkličuje počátek komplexní roviny P -krát v kladném směru (proti směru hodinových ručiček). Dosažené výsledky můžeme nyní shrnout do Nyquistova kritéria stability.



Obrázek 2.5: D -křivka.

Věta 2.4. (Nyquistovo kritérium stability) Necht' L je ryzí přenosová funkce otevřeného systému mající P pólů v pravé otevřené polovině komplexní roviny ($\operatorname{Re}(s) > 0$) potom uzavřený systém má Z pólů v pravé otevřené polovině komplexní roviny právě tehdy, jestliže křivka $L(s)$, kde s probíhá D -křivku v záporném smyslu (ve smyslu hodin. ručiček) obkličuje bod $(-1, 0)$ $N = (P - Z)$ -krát v kladném směru (proti smyslu hod. ruč.).

Poznámka 2.1. Nyquistovo kritérium platí i pro přenos otevřené smyčky ve tvaru $L(s) = L_0(s)e^{-Ds}$, kde $L_0(s)$ je ryzí racionální přenos a dokonce i pro ještě obecnější případy. Pro případ $L(s) = L_0(s)e^{-Ds}$ lze jeho platnost dokázat užitím vztahu

$$e^{-Ds} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{D}{n}s + 1\right)^n}$$

a faktu, že $\frac{1}{\left(\frac{D}{n}s + 1\right)^n}$ konverguje stejnoměrně k e^{-Ds} na libovolné omezené a uzavřené (kompaktní) podmnožině komplexní roviny.

Příklad 2.3. Stabilizace systému s přenosem

$$P(s) = \frac{e^{-Ds}}{s - p}, \quad D, p > 0,$$

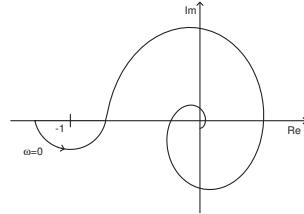
proporcionálním regulátorem

$$C(s) = K.$$

$$L(s) = C(s)P(s) = K \frac{e^{-Ds}}{s-p} \Rightarrow$$

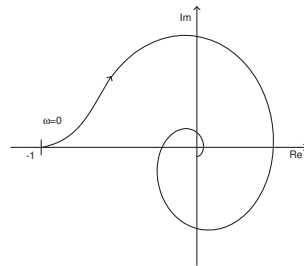
$$P = 1, Z = 0; N = P$$

Případ $D = 1, p = 0.8, K = 1$, obr. 2.6. Nyquistova křivka $L(j\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$ obkličuje bod -1 právě jednou \Rightarrow uzavřená smyčka je stabilní.



Obrázek 2.6

Případ $D = 1, p = 1, K = 1$, 2.7. Nyquistova křivka prochází bodem -1 . Při zmenšení K bod -1 neobkličuje, při zvětšení K obkličuje -1 -krát nebo -2 -krát atd. Nikdy 1-krát. \Rightarrow Systém pro $Dp = 1$ není stabilizovatelný proporcionálním regulátorem.



Obrázek 2.7

Závěr: Systém $P(s) = \frac{e^{-Ds}}{s-p}$ je stabilizovatelný P regulátorem právě tehdy, jestliže $pD < 1$.

Příklad 2.4. Stabilizace systému

$$P(s) = \frac{e^{-Ds}}{s-p}, \quad D, p > 0,$$

PD regulátorem

$$C(s) = K(1 + Ts).$$

Pro $K = 1$ platí

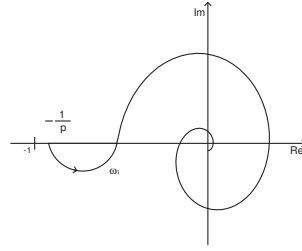
$$L(s) = \frac{e^{-Ds}}{s-p}(1 + Ts).$$

Lze ukázat, že nutné a postačující podmínky stabilizovatelnosti v tomto případě jsou:

- (i) $\frac{d}{d\omega} \text{Im}L(j\omega) |_{\omega=0} < 0$, (porovnej s příkladem P-regulátoru v příkladu 2.3)
- (ii) $\frac{1}{-p} < \text{Re}L(j\omega_1)$, $(L(0) = -\frac{1}{p})$, kde ω_1 je nejmenší kladný kořen rovnice $\text{Im}L(j\omega) = 0$.

Z obrázku 2.8 je zřejmé, že při splnění podmínek (i) a (ii) lze nalézt K takové, že Nyquistova křivka obkličuje bod -1 právě 1-krát. Odtud plyne, že uzavřená smyčka je pro takové K stabilní.

Jednoduchou analýzou podmínek (i) a (ii) lze dospět k závěru, že systém $P(s) = \frac{e^{-Ds}}{s-p}$, $D, p > 0$, je stabilizovatelný PD regulátorem právě tehdy, jestliže $pD < 2$.



Obrázek 2.8: Nyquistova křivka splňující podmínky (i) a (ii).

2.2.1 Poznámky k Nyquistovu kritériu stability

Nejprve uvažujeme statický lineární systém

$$y = Au,$$

kde A je matice, jejíž prvky jsou obecně komplexní čísla. Velikost vstupu a výstupu budeme měřit obyčejnou Eukleidovskou normou, tj.

$$u = \sqrt{\sum_i |u_i|^2}.$$

V takovém případě platí

$$\|y\|^2 = u' A' A u,$$

kde $'$ označuje komplexně sdruženou transpozici (Hermitovskou transpozici), Matice $A' A$ je symetrická pozitivně semidefinitní, tedy její vlastní čísla jsou reálná kladná a platí

$$\|y\|^2 \leq \lambda_{\max}(A' A) \|u\|^2.$$

Zesílení systému nyní může být definováno vztahem

$$\gamma = \max_u \frac{\|y\|}{\|u\|} = \sqrt{\lambda_{\max}(A' A)} \triangleq \bar{\sigma}(A).$$

Čísla $\sqrt{\lambda_i(A' A)}$ nazýváme singulární čísla matice, a největší z nich označujeme $\bar{\sigma}(A)$.

Zobecnění na dynamické lineární systémy je přímočaré. Uvažujeme prostor integrovatelných funkcí $\mathcal{L}_2(0, +\infty)$ s normou

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pro vektorové signály $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ zobecníme normu $\|u\|_2$ následovně

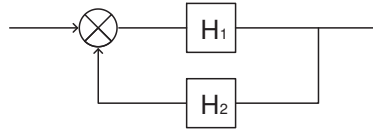
$$\|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^m \|u_i\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i |U_i(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zesílení vícerozměrného dynamického systému lze opět definovat vztahem

$$\gamma = \sup_{u \in \mathcal{L}_2} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2},$$

kde

$$\gamma = \|H\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(H(j\omega)).$$

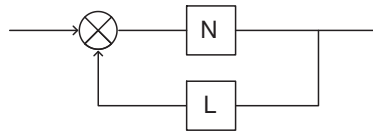


Obrázek 2.9

Věta 2.5. (*Small gain theorem*) Uvažujme zpětnovazební obvod zobrazený na obr. 2.9, kde H_1 a H_2 jsou stabilní systémy a prostory signálů jsou dobře definovány. Necht' zesílení systémů H_1 a H_2 je po řadě γ_1 a γ_2 , potom uzavřená smyčka je vstupně / výstupně stabilní, jestliže $\gamma_1\gamma_2 < 1$ a zesílení uzavřené smyčky je dáno vztahem

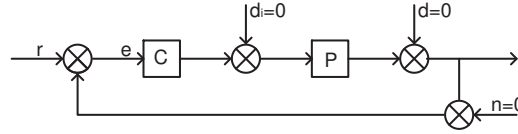
$$\gamma = \frac{\gamma_1}{1 - \gamma_1\gamma_2}.$$

Poznámka 2.2. Věta 2.5 může být aplikována na vícerozměrné nelineární systémy. Například na zpětnovazební obvod složený z lineární a nelineární části (viz obr. 2.10).



Obrázek 2.10

2.3 Asymptotické sledování



Obrázek 2.11

Věta o konečné hodnotě

Předpokádejme $x(t) = 0$, pro $t < 0$, potom platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} - \int_0^{+\infty} x(t)(-s)e^{-st} dt = \\ &= x(t)e^{-st} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = sX(s) - x(0). \end{aligned}$$

Tedy $\int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = sX(s) - x(0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} : \\ \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} dt &= x(+\infty) - x(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0). \\ x(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s). \end{aligned}$$

Tvrzení 2.1. Necht' $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ a $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(\infty)$ existuje, potom

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

Předpoklad existence limity $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ může být nahrazen předpokladem, že $X(s)$ je ryzí a má všechny póly v \mathbb{C}^- (levé otevřené polorovině komplexní roviny).

Věta 2.6. Necht' $r(t) = c \cdot 1(t)$, potom $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ právě tehdy, jestliže $L = PC$ má pól v bodě $s = 0$ nebo ekvivalentně citlivostní funkce $S = \frac{1}{1+PC}$ má nulu v bodě $s = 0$.

Důkaz. Podle věty o konečné hodnotě platí

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{c}{s} S(s) \right) = \lim_{s \rightarrow 0} cS(s)$$

Odtud $e(\infty) = 0$ právě tehdy, jestliže $S(0) = 0$. Dále $S(0) = \frac{1}{1+L(0)}$ a tedy $S(0) = 0$ implikuje $L(0) = \infty$. \square

Obdobným způsobem lze dokázat následující tvrzení

Věta 2.7. Necht' $r(t) = ct \cdot 1(t)$, potom $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ právě tehdy, jestliže $L = PC$ má dvojnásobný pól v bodě $s = 0$ nebo ekvivalentně citlivostní funkce $S = \frac{1}{1+PC}$ má dvojnásobnou nulu v bodě $s = 0$.

Věta 2.8. Necht' $r(t)$ je libovolná periodická funkce s periodou T (tj. $r(t+T) = r(t), \forall t \geq 0$) a $r(t) = 0$, pro $t < 0$, potom $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ právě tehdy, jestliže $S = (1 - e^{-Ts})S_0$, kde S_0 je stabilní přenos (tj. nemá žádné póly v pravé uzavřené polorovině komplexní roviny).

Důkaz. Pro Laplaceovu transformaci periodické funkce $r(t)$ platí:

$$\begin{aligned} R(s) &= \int_0^{+\infty} r(t)e^{-st} dt = \int_0^T r(t)e^{-st} dt + \int_T^{2T} r(t)e^{-st} dt + \int_{2T}^{3T} r(t)e^{-st} dt + \dots = \\ &= \int_0^T r(t)e^{-st} dt + e^{-Ts} \int_0^T r(t)e^{-st} dt + e^{-2Ts} \int_0^T r(t)e^{-st} dt + \dots = \\ &= (1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots) \int_0^T r(t)e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T r(t)e^{-st} dt \triangleq \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \tilde{R}(s). \end{aligned}$$

Poznamenejme, že $\tilde{R}(s)$ je stabilní a obecně platí $\tilde{R}(0) \neq 0$.

Nyní

$$E(s) = S(s)R(s) = S(s) \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \tilde{R}(s)$$

Limita $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ existuje právě tehdy, jestliže $E(s)$ je stabilní (tj. nemá žádné póly v oblasti $\operatorname{Re}(s) \geq 0$). Poněvadž $\frac{1}{1 - e^{-Ts}}$ má spočetně mnoho pólů na imaginární ose ($s = \pm jk \frac{2\pi}{T}, k = 0, 1, \dots$) a přenos $\tilde{R}(s)$ tyto póly v $E(s)$ obecně nezkrátí, musí být zkráceny nulami citlivostní funkce S . Tj. S musí být ve tvaru

$$S(s) = (1 - e^{-Ts})S_0(s),$$

kde $S_0(s)$ je stabilní. □

2.4 Chování zpětnovazebního systému

Název citlivostní funkce má následující původ. Předpokládejme, že přenos řízeného procesu závisí na nějakém parametru, řekněme x . Tj. $P = P(x)$. Přenos uzavřeného systému $T = \frac{PC}{1+PC}$ v důsledku toho též závisí na parametru x . Zajímá nás, jaká nastane relativní změna přenosu uzavřené smyčky, jestliže nastala jistá relativní změna přenosu P . Tedy zajímá nás poměr

$$\frac{\frac{dT}{T}}{\frac{dP}{P}} = \frac{PdT}{TdP}.$$

Nyní ukážeme, že tento poměr je dán citlivostní funkcí $S = \frac{1}{1+PC}$.

Platí

$$\begin{aligned} dP &= P'dx \\ dT &= \left(\frac{PC}{1+PC} \right)' dx = \frac{P'C}{(1+PC)^2} dx \\ \frac{\frac{dT}{T}}{\frac{dP}{P}} &= \frac{\frac{P'C}{(1+PC)^2} dx}{\frac{P'dx}{P}} = \frac{1}{1+PC} = S. \end{aligned}$$

Naším cílem nyní bude specifikovat požadavky na chování (na kvalitu řízení) zpětnovazebního systému. Tyto požadavky budou jistým způsobem opět vyjadřovat hlavní cíl užívání zpětné vazby - sledování referenční veličiny regulovanou veličinou.

Obvykle není referenční veličina (požadovaná veličina) známa dopředu a proto je vhodné uvažovat celou množinu možných referenčních signálů.

Nejprve uvažujme sinusové vstupy. Předpokládejme, že r je libovolná sinusovka s amplitudou menší než 1 a že požadujeme, aby regulační odchylka e měla amplitudu menší než ε . V tom případě lze náš požadavek vyjádřit nerovností

$$\|S\|_{\infty} < \varepsilon, \quad (2.2)$$

kteřá vyplývá z tabulky 1.1. Jestliže definujeme váhovou funkci $W_1(s) = \frac{1}{\varepsilon}$, potom lze požadavek (2.2) přepsat na

$$\|W_1 S\|_\infty < 1. \quad (2.3)$$

Zvolíme-li váhovou funkci frekvenčně závislou obdržíme zajímavější a realističtější požadavek. Předpokládejme, že $W_1(s)$ je reálná racionální funkce. Poněvadž pro vážení požadavku je významná pouze absolutní hodnota $|W_1(j\omega)|$, mohou být všechny nestabilní póly $W_1(s)$ zrcadlením převedeny do levé otevřené poloviny komplexní roviny bez změny amplitudy $|W_1(j\omega)|, \forall \omega$.

Nyní uvažujme čtyři možné případy, vedoucí na omezení ∞ -normy přenosu $W_1 S$. První tři vyžadují stabilní W_1 .

1. Předpokládejme, že množina referenčních signálů je množina všech signálů ve tvaru $r = W_1 r_0$, kde r_0 je libovolná sinusová funkce splňující podmínku $|r_0(t)| \leq 1$. Tedy referenční signál r je též sinusový, avšak s frekvenčně závislou amplitudou. Maximální amplituda regulační odchylky e je pak omezena hodnotou $\|W_1 S\|_\infty$.
2. Nejprve připomeňme, že

$$\|r\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |r(j\omega)|^2 d\omega$$

a $\|r\|_2^2$ je energie obsažená v signálu $r(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Tedy $\frac{1}{2\pi} |r(j\omega)|^2$ lze interpretovat jako energetickou spektrální hustotu nebo energetické spektrum signálu r . Předpokládejme, že množina všech uvažovaných referenčních signálů je dána vztahem

$$\{r : r = W_1 r_0, \|r_0\|_2 \leq 1\}, \quad (2.4)$$

neboli

$$\left\{ r : \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{r(j\omega)}{W_1(j\omega)} \right|^2 d\omega \leq 1 \right\}.$$

Například, jestliže W_1 je pásmová propustnost, potom je energetické spektrum omezeno na příslušné pásmo propustnosti. Obecněji, W_1 může tvarovat energetické spektrum tak, jak je vhodné pro danou úlohu. Nyní předpokládejme, že chybu sledování měříme 2-normou signálu e , potom z tabulky 1.2 obdržíme

$$\sup_r \|e\|_2 = \sup \{ \|SW_1 r_0\|_2 : \|r_0\|_2 \leq 1 \} = \|W_1 S\|_\infty.$$

Tedy $\|W_1 S\|_\infty < 1$ znamená, že $\|e\|_2 < 1$ pro všechny r z uvažované množiny (2.4).

3. Nyní budeme postupovat stejným způsobem jako v předchozím případě s výjimkou toho, že $\|\cdot\|_2$ nahradíme veličinou $\text{pow}(\cdot)$. Z tabulky 1.2 je zřejmé, že $\|W_1 S\|_\infty \geq \text{pow}(e)$ pro všechny výkonové signály $\text{pow}(r_0) \leq 1$. Tedy W_1 lze použít k tvarování výkonové spektrální hustoty předpokládané třídy referenčních signálů r .
4. V některých aplikacích může být požadováno, aby graf $|S(j\omega)|$ ležel pod jistou křivkou (to může vycházet z dřívějších zkušeností návrháře). Tento požadavek lze přepsat do tvaru

$$|S(j\omega)| < |W_1(j\omega)|^{-1}, \quad \forall \omega$$

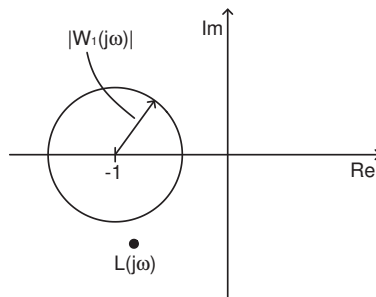
neboli

$$\|W_1 S\|_\infty < 1.$$

Požadavek $\|W_1 S\|_\infty < 1$ má hezkou grafickou interpretaci.

$$\begin{aligned}\|W_1 S\|_\infty < 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{W_1(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < 1, \quad \forall \omega \\ &\Leftrightarrow |W_1(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \quad \forall \omega\end{aligned}$$

Poslední nerovnost vyjadřuje požadavek, že bod $L(j\omega)$ leží vně kruhu se středem -1 a poloměrem $|W_1(j\omega)|$.



Obrázek 2.12

Další návrhové požadavky lze klást na odezvy vnitřních signálů zpětnovazební smyčky příslušné k dalším dvěma exogenním signálům d_i a n . Platí

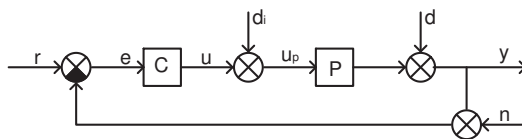
$$\begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} PS & S \\ T & CS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_i \\ n \end{bmatrix},$$

kde

$$T = 1 - S = \frac{PC}{1 + PC}$$

je nazývána komplementární citlivostní funkcí. Poznamenejme, že požadavek s váhovou funkcí W na PS je ekvivalentní požadavku s váhovou funkcí WP na S . Podobně, užití váhové funkce W na $CS = T/P$ je ekvivalentní užití váhové funkce W/P na T . Tedy návrhové požadavky na odchylku e vedou na užití váhové funkce na S a požadavky na řízení u vedou na váhovou funkci aplikovanou na T . Všechny dále uvažované požadavky na chování zpětnovazebního obvodu budou redukovány na váhování S nebo T a nebo jejich kombinaci.

Příklad 2.5. Uvažujme zpětnovazební smyčku na obr. 2.13



Obrázek 2.13

kde $P(s) = \frac{1}{10s+1}$, $C(s) = k$.

Nalezněte nejmenší kladné zesílení k takové, že platí:

- Zpětnovazební systém je vnitřně stabilní.
- $|e(\infty)| \leq 0.1$, jestliže $r(t) = 1(t)$, $d_i(t) = n(t) = 0$.
- $\|y\|_\infty \leq 0.1$, jestliže $\|d_i\|_2 \leq 1$, $r = n = 0$.

Řešení:

(a) Užitím věty 2.1:

- $1 + PC = 1 + \frac{k}{10s+1} = \frac{10s+1+k}{10s+1}$ nemá žádné nestabilní nuly
 - v součinu PC nedochází ke krácení nestabilních pólů a nul
- \Rightarrow zpětnovazební systém je vnitřně stabilní pro libovolné $k > 0$.

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(S(s) \frac{1}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k}{10s+1}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10s+1}{10s+1+k} = \frac{1}{1+k} \\
 \frac{1}{1+k} &\leq 0.1 \\
 0.1 + 0.1k &\geq 1 \\
 k &\geq \frac{1-0.1}{0.1} = 9 \\
 \Rightarrow |e(\infty)| &\leq 0.1 \quad \text{pro } k \geq 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad \text{Přenos } d_i \rightarrow y : H &= \frac{P}{1+PC} = \frac{\frac{1}{10s+1}}{1 + \frac{k}{10s+1}} = \frac{1}{10s + (k+1)} \\
 \sup_{\|d_i\|_2 \leq 1} \frac{\|y\|_\infty}{\|d_i\|_2} &= \|H\|_2 \quad \text{viz Tab. 1.2}
 \end{aligned}$$

Předchozí vztah plyne z Cauchyovy - Schwarzovy nerovnosti

$$\begin{aligned}
 |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t-\tau)d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(\tau)d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \|h\|_2 \|u\|_2 = \|H\|_2 \|u\|_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|H\|_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_{D^-} H(s)H(-s)ds = \\
 &= \sum_{\substack{\text{Re}(s) < 0, s \text{ je pól } H(s)}} \text{res } H(s)H(-s) \\
 \|h\|_2 &= \left(\int_0^{+\infty} h^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{k+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{10} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{k+1}} &\leq 0.1 \\
 \sqrt{5} &\leq \sqrt{k+1} \\
 5 &\leq k+1 \\
 k &\geq 4.
 \end{aligned}$$

3 Neurčitost a robustnost

Žádný matematický model není přesný! Modelování reálných systémů spočívá v umění vědět, co zanedbat. Rozdíl mezi modelem a reálným systémem vyjadřujeme pomocí hypotetické neurčitosti modelu. Rozlišujeme strukturální a nestrukturální neurčitost.

3.1 Neurčitost řízeného systému (procesu)

Neurčitost procesu vyjadřujeme obvykle tak, že neuvažujeme jediný model, avšak celou množinu \mathcal{P} možných modelů. Při návrhu regulátoru potom požadujeme, aby návrhové požadavky byly splněny pro všechny procesy $P \in \mathcal{P}$. Takto navržený regulátor nazýváme robustní, poněvadž jeho správná funkce je zaručena pro celou množinu \mathcal{P} uvažovaných procesů.

3.2 Strukturální neurčitost

Uvažujme model procesu

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1},$$

kde a je konstanta, o které víme pouze to, že leží v intervalu $\langle a_{\min}, a_{\max} \rangle$. Tedy předpokládáme, že P patří do množinového strukturovaného modelu

$$\mathcal{P} = \left\{ \frac{1}{s^2 + as + 1} : a_{\min} \leq a \leq a_{\max} \right\}.$$

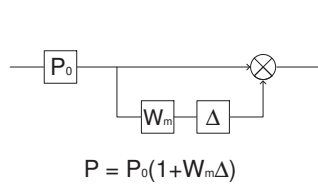
Jeden typ strukturované neurčitosti odpovídá množině modelů parametrizované konečným počtem skalárních parametrů. Jiný typ může být reprezentován konečným počtem přenosů procesů získaných například na základě provedených experimentů s reálným procesem.

3.3 Nestrukturální neurčitost

Pro naše účely bude důležitější tzv. nestrukturální neurčitost a to především ze dvou důvodů. Za prvé, je rozumné předpokládat, že všechny modely uvažované v uzavřené zpětnovazební smyčce obsahují jistou nestrukturální neurčitost, především nemodelovanou dynamiku na vysokých frekvencích (ta je přítomna vždy a může podstatným způsobem ovlivnit stabilitu nebo obecněji chování uzavřené smyčky). Za druhé, nestrukturální neurčitost se modeluje snadno pomocí normy přenosové funkce. Například, je-li P_0 pevný přenos, tak lze vytvořit množinu uvažovaných přenosových funkcí (množinový model) vztahem

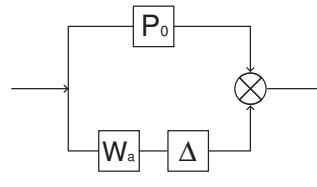
$$\mathcal{P} = \{P : P = P_0 + W_a \Delta, \|\Delta\|_{\infty} \leq 1\},$$

kde W_a je vhodně zvolená váhová přenosová funkce.



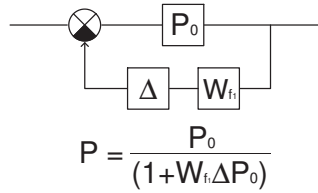
$$P = P_0(1 + W_m\Delta)$$

Obrázek 3.1: multiplikativní



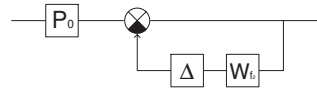
$$P = P_0 + W_a\Delta$$

Obrázek 3.2: aditivní



$$P = \frac{P_0}{(1 + W_t\Delta P_0)}$$

Obrázek 3.3: zpětnovazební



$$P = P_0/(1 + W_t\Delta)$$

Obrázek 3.4: zpětnovazební

3.3.1 Čtyři typy nestrukturální neurčitosti

Multiplikativní neurčitost

Nechť P_0 je nominální přenos procesu. Kromě přenosu P_0 budeme uvažovat všechny přenosy P , které vzniknou z P_0 multiplikativní perturbací

$$P = P_0(1 + W_m\Delta) = P_0 + P_0W_m\Delta, \quad (3.1)$$

kde $\|\Delta\|_\infty < 1$, W_m je pevná stabilní přenosová funkce a navíc předpokládáme, že při vytváření P podle vztahu (3.1) nedojde ke krácení nestabilních pólů (tj. P a P_0 mají stejné nestabilní póly). Z (3.1) obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_0} - 1 &= W_m\Delta, \\ \left| \frac{P(j\omega)}{P_0(j\omega)} - 1 \right| &= |W_m(j\omega)\Delta| \leq |W_m(j\omega)|, \quad \forall \omega. \end{aligned}$$

Hodnota $|W_m(j\omega)|$ tedy určuje profil neurčitosti tak, že podíl (relativní chyba) $\frac{P(j\omega)}{P_0(j\omega)}$ leží v kruhu o středu 1 a poloměru $|W_m(j\omega)|$ pro libovolnou frekvenci ω .

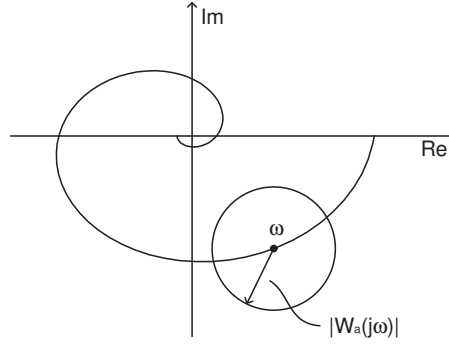
Aditivní neurčitost

$$P = P_0 + W_a\Delta = P_0 \left(1 + \frac{W_a}{P_0}\Delta \right), \quad (3.2)$$

odtud

$$W_m = \frac{W_a}{P_0}.$$

Grafická interpretace aditivní neurčitosti je zobrazena na obr. 3.5.



Obrázek 3.5: Grafická interpretace aditivní perturbace.

Zpětnovazební neurčitost

$$P = \frac{P_0}{1 + W_{f_1} \Delta P_0}, \quad P = \frac{P_0}{1 + W_{f_2} \Delta}. \quad (3.3)$$

Zpětnovazební neurčitost nelze jednoduše převést na multiplikativní.

Modely s neurčitostí	Perturbace
$P_0(1 + W_m \Delta)$	multiplikativní
$P_0 + W_a \Delta$	aditivní
$P_0 / (1 + W_{f_1} \Delta P_0)$	zpětnovazební
$P_0 / (1 + W_{f_2} \Delta)$	zpětnovazební

Tabulka 3.1: Shrnutí.

Příklad 3.1. Předpokládejme, že modelovaný proces je stabilní a že pomocí experimentální frekvenční identifikace získáme amplitudy a fáze přenosu procesu na frekvencích ω_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Dále předpokládejme, že tuto identifikační proceduru zopakujeme, řekněme n -krát. Necht' (M_{ik}, φ_{ik}) , $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$ označují obdržené dvojice amplituda-fáze. Definujme nominální přenos

$$P_0(j\omega_i) = M_i e^{j\varphi_i},$$

kde $M_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{ik}$, $\varphi_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_{ik}$. Dále definujme váhovou funkci $W_m(j\omega_i)$ tak, aby

$$\left| \frac{M_{ik} e^{j\varphi_{ik}}}{M_i e^{j\varphi_i}} - 1 \right| \leq |W_m(j\omega_i)|, \quad \forall i, \forall k.$$

Příklad 3.2. Předpokládejme, že nominální přenos procesu je dán vztahem

$$P_0(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Může se např. jednat o ss-motor se zanedbatelným viskózním třením. Dále předpokládejme, že při přesnějším modelování je nutné uvažovat též dopravní zpoždění, které změní nominální model na

$$P(s) = e^{-\tau s} \frac{1}{s^2}.$$

Dopravní zpoždění τ však není přesně známo; uvažujme však $0 \leq \tau \leq 0.1$. Toto dopravní zpoždění může být interpretováno jako multiplikativní perturbace.

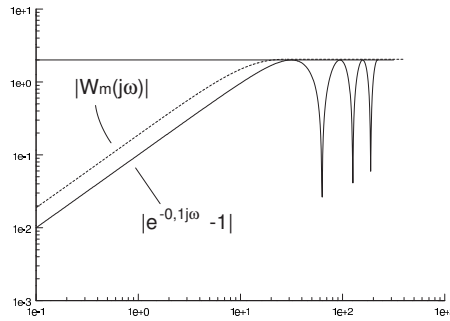
Váhová funkce W_m musí splňovat následující podmínku

$$\frac{P(j\omega)}{P_0(j\omega)} = \frac{e^{-\tau j\omega} \frac{1}{(j\omega)^2}}{\frac{1}{(j\omega)^2}} = e^{-\tau j\omega},$$

$$\left| \frac{P(j\omega)}{P_0(j\omega)} - 1 \right| = |e^{-\tau j\omega} - 1| \leq |W_m(j\omega)|.$$

Tato podmínka je splněna například pro volbu

$$W_m(s) = \frac{0.21s}{0.1s + 1}.$$



Obrázek 3.6

Příklad 3.3. Na začátku tohoto oddílu jsme uvažovali přenos procesu

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1}, \quad 0.4 \leq a \leq 0.8.$$

Tedy $a_0 = 0.6 + 0.2\Delta$, $-1 \leq \Delta \leq 1$. Množinu přípustných přenosů procesu lze v tomto případě vyjádřit následovně

$$\mathcal{P} = \left\{ P = \frac{P_0}{1 + W_f \Delta P_0} : -1 \leq \Delta \leq 1 \right\},$$

kde

$$P_0(s) = \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1}, \quad W_f(s) = 0.2s.$$

3.4 Robustní stabilita

Definice 3.1. Vlastnost zpětnovazebního systému budeme nazývat robustní (nebo přesněji robustní vzhledem k množině \mathcal{P}), jestliže tato vlastnost platí pro všechny přenosy procesu $P \in \mathcal{P}$.

Definice 3.2. Regulátor C je robustně stabilní, jestliže zajišťuje vnitřní stabilitu uzavřeného obvodu pro všechny procesy $P \in \mathcal{P}$.

Analogicky s definicí 3.2 můžeme hovořit o robustní bezpečnosti v zesílení a robustní bezpečnosti ve fázi.

Věta 3.1. *Necht' zpětnovazební systém s přenosem otevřené smyčky $L_0 = P_0 C$ je vnitřně stabilní, potom je zpětnovazební systém (se stejným regulátorem C) vnitřně stabilní i pro všechny přenosy $P \in \mathcal{P}_m \triangleq \{P = P_0(1 + W_m \Delta) : \|\Delta\|_\infty < 1, W_m \text{ stabilní}\}$ právě tehdy, jestliže*

$$\|T_0 W_m\|_\infty < 1,$$

$$\text{kde } T_0 = \frac{P_0 C}{1 + P_0 C}.$$

Důkaz. Je-li $P \in \mathcal{P}_m$, potom je přenos otevřené smyčky dán vztahem

$$L = P_0(1 + W_m \Delta) \cdot C = P_0 C + P_0 C W_m \Delta.$$

Vzdálenost nominální Nyquistovy křivky $L_0 = P_0 C$ na frekvenci ω od bodu -1 je $|1 + L_0(j\omega)|$. Uzavřená smyčka zůstane zřejmě vnitřně stabilní při záměně P_0 za P právě tehdy, jestliže

$$|1 + L_0(j\omega)| > |L_0(j\omega) W_m \Delta|.$$

(Vzdálenost L_0 od bodu $-1 >$ amplituda aditivní perturbace L_0 .)

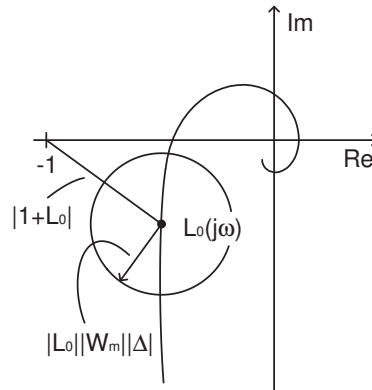
Neboli

$$\frac{|W_m(j\omega)| |L_0(j\omega)|}{|1 + L_0(j\omega)|} < 1,$$

$$\|W_m T_0\|_\infty < 1.$$

□

Na obr. 3.7 je znázorněna hlavní myšlenka předchozího důkazu.



Obrázek 3.7: Idea důkazu věty 3.1.

$$|L_0| |W_m| |\Delta| < |1 + L_0| \Rightarrow \frac{|L_0|}{|1 + L_0|} |W_m| < 1.$$

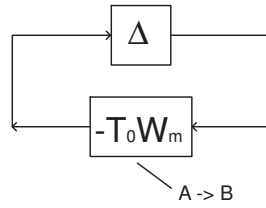
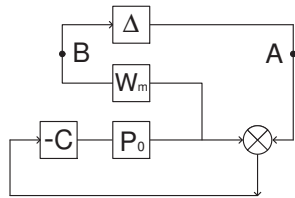
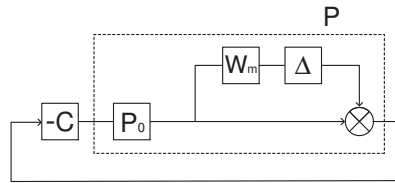
Shrnutí testů robustní stability

Podmínky robustní stability pro ostatní modely s neurčitostí jsou shrnuty v Tabulce 3.2.

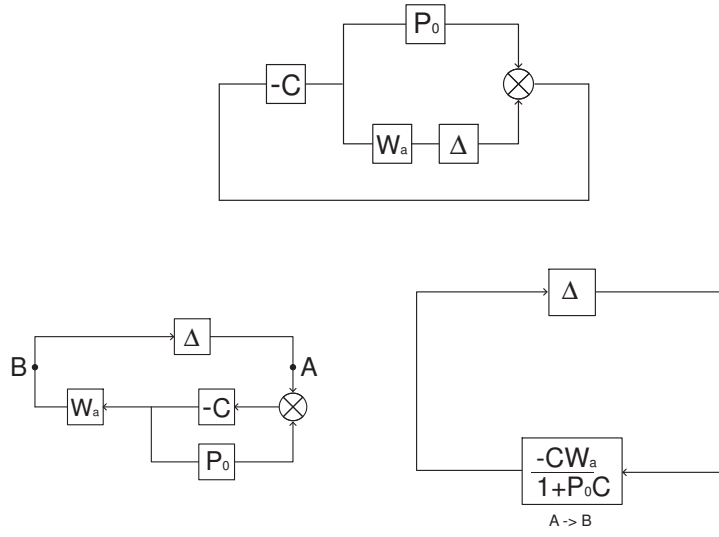
Perturbace	Podmínka
$(1 + W_m \Delta) P_0$	$\ W_m T_0\ _\infty < 1$
$P_0 + W_a \Delta$	$\ W_a C S_0\ _\infty < 1$
$P_0 / (1 + W_{f_1} \Delta P_0)$	$\ W_{f_1} P_0 S_0\ _\infty < 1$
$P_0 / (1 + W_{f_2} \Delta)$	$\ W_{f_2} S_0\ _\infty < 1$

Tabulka 3.2: Podmínky robustní stability.

Podmínka $\|W_m T_0\|_\infty < 1$ a věta o malém zesílení.

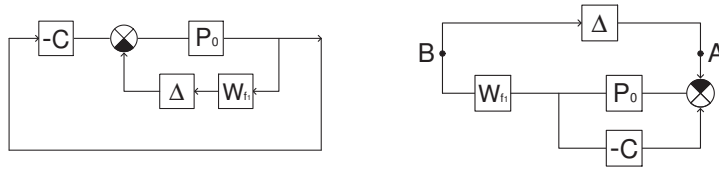


Příklad 3.4. Dokažte podmínky robustní stability uvedené v Tab. 3.2 v řádce 2 až 4.



Obrázek 3.8: Řádek 2.

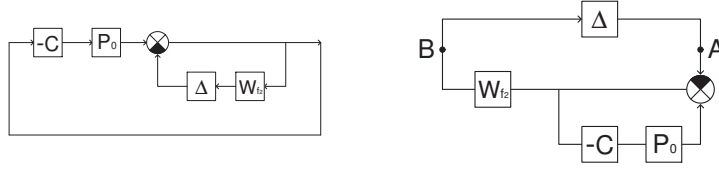
$$\left\| \frac{-CW_a}{1+P_0C} \right\|_{\infty} = \|W_a C S_0\|_{\infty} < 1.$$



Obrázek 3.9: Řádek 3.

$$\left\| \frac{-W_{f1}P_0}{1+P_0C} \right\|_{\infty} = \|W_{f1}P_0S_0\|_{\infty} < 1.$$

$$\left\| \frac{-W_{f2}}{1+P_0C} \right\|_{\infty} = \|W_{f2}S_0\|_{\infty} < 1.$$



Obrázek 3.10: Řádek 4.

3.5 Robustní kvalita řízení

Předpokládáme, že přenosová funkce řízeného procesu P patří do množiny \mathcal{P} (vymezené nominálním přenosem P_0 a modelem neurčitosti). Pojem *robustní kvalita řízení* označuje skutečnost, že zpětnovazební smyčka je vnitřně stabilní a příslušná specifikace kvality řízení platí pro všechny přenosové funkce v \mathcal{P} .

Připomeňme, že dříve uvažovaná podmínka kvality řízení pro nominální přenos P_0 je $\|W_1 S_0\|_\infty < 1$ a podmínka robustní stability je $\|W_2 T_0\|_\infty < 1$, kde W_2 označuje váhovou funkci multiplikativní perturbace modelu výše označovanou symbolem W_m . Jestliže je tedy P_0 perturbovaný na $P_0(1 + \Delta W_2)$, potom S_0 je perturbovaný na

$$\frac{1}{1 + (1 + \Delta W_2)L_0} = \frac{1}{1 + L_0 + \Delta W_2 L_0} = \frac{S_0}{1 + \Delta W_2 T_0}.$$

Podmínku robustní kvality řízení lze tedy vyjádřit následovně

$$\|W_2 T_0\|_\infty < 1 \quad \wedge \quad \left\| \frac{W_1 S_0}{1 + \Delta W_2 T_0} \right\|_\infty < 1, \quad (3.4)$$

pro všechny přípustné Δ . Následující věta ukazuje, že tyto dvě podmínky mohou být vyjádřeny pomocí jediné podmínky na funkci $s \mapsto |W_1(s)S_0(s)| + |W_2(s)T_0(s)|$, která je dále označovaná jako $|W_1 S_0| + |W_2 T_0|$.

Věta 3.2. *Nutná a postačující podmínka pro robustní kvalitu řízení je*

$$\| |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \|_\infty < 1. \quad (3.5)$$

Lemma 3.1. *Podmínka (3.5) je ekvivalentní s podmínkou*

$$\|W_2 T_0\|_\infty < 1 \quad \wedge \quad \left\| \frac{W_1 S_0}{1 - |W_2 T_0|} \right\|_\infty < 1. \quad (3.6)$$

Důkaz.

(1) *Necht' platí (3.5), potom*

$$|W_1 S_0| + |W_2 T_0| < 1.$$

Odtud $|W_2 T_0| < 1$ a tedy postupně

$$\begin{aligned} |W_1 S_0| &< 1 - |W_2 T_0|, \\ \frac{|W_1 S_0|}{1 - |W_2 T_0|} &< 1, \\ \left\| \frac{W_1 S_0}{1 - |W_2 T_0|} \right\|_\infty &< 1. \end{aligned}$$

(2) *Necht' platí (3.6), potom postupně platí*

$$\begin{aligned} \frac{|W_1 S_0|}{1 - |W_2 T_0|} &< 1 \\ |W_1 S_0| &< 1 - |W_2 T_0| \\ |W_1 S_0| + |W_2 T_0| &< 1 \\ \| |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \|_\infty &< 1. \end{aligned}$$

□

Důkaz. (Důkaz věty 3.2)

(⇐) Předpokládejme, že platí (3.5), nebo ekvivalentně

$$\|W_2 T_0\|_\infty < 1 \quad \wedge \quad \left\| \frac{W_1 S_0}{1 - |W_2 T_0|} \right\|_\infty < 1. \quad (3.7)$$

Pro pevné Δ platí

$$1 = |1 + \Delta W_2 T_0 - \Delta W_2 T_0| \leq |1 + \Delta W_2 T_0| + |\Delta W_2 T_0|$$

a tedy

$$1 - |W_2 T_0| \leq |1 + \Delta W_2 T_0|.$$

Odtud

$$\left\| \frac{W_1 S_0}{1 - |W_2 T_0|} \right\|_\infty \geq \left\| \frac{W_1 S_0}{1 + \Delta W_2 T_0} \right\|_\infty.$$

Poslední nerovnost spolu s (3.7) implikuje

$$\left\| \frac{W_1 S_0}{1 + \Delta W_2 T_0} \right\|_\infty < 1.$$

(⇒) Předpokládejme, že platí (3.4). Zvolme ω tak, že $\frac{|W_1 S_0|}{1 - |W_2 T_0|}$ je maximální. Nyní zvolme Δ tak, že

$$|1 - W_2 T_0| = |1 + \Delta W_2 T_0|.$$

(Takové $\Delta(j\omega)$ otočí $W_2(j\omega)T_0(j\omega)$ tak, že $\Delta(j\omega)W_2(j\omega)T_0(j\omega)$ je záporné reálné.) Přesný postup, jak konstruovat takové přípustné Δ je z důvodu stručnosti vynechán. Nyní platí

$$\left\| \frac{W_1 S_0}{1 - |W_2 T_0|} \right\|_\infty = \frac{|W_1 S_0|}{1 - |W_2 T_0|} = \frac{|W_1 S_0|}{|1 + \Delta W_2 T_0|} \leq \left\| \frac{W_1 S_0}{1 + \Delta W_2 T_0} \right\|_\infty.$$

Odtud a z (3.4) plyne

$$\left\| \frac{W_1 S_0}{1 - |W_2 T_0|} \right\|_\infty < 1.$$

□

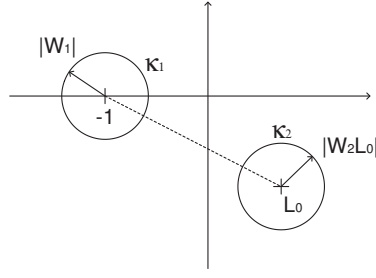
Test robustnosti kvality řízení má zajímavou grafickou interpretaci. Pro každou frekvenci ω sestrojme dva uzavřené kruhy: jeden se středem -1 a poloměrem $|W_1(j\omega)|$; druhý se středem $L_0(j\omega)$ a poloměrem $|W_2(j\omega)L_0(j\omega)|$. Podmínka (3.6) platí právě tehdy, jestliže průnik těchto kruhů je prázdný. Způsob sestavení výše uvedených kruhů je zřejmý z obr. 3.11

Nyní dokážeme platnost tohoto grafického testu. Dva kruhy z obr. 3.11 se neprotínají zřejmě právě tehdy, jestliže pro libovolné ω a libovolné Δ , $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ platí

$$\begin{aligned} |L_0 + \Delta W_2 L_0 + 1| &> |W_1| \\ \left| (1 + L_0) \left(1 + \frac{\Delta W_2 L_0}{1 + L_0} \right) \right| &> |W_1|. \end{aligned}$$

Zvolíme-li Δ tak, že $L_0 + \Delta W_2 L_0 + 1 = \alpha(1 + L_0)$, kde α je reálné kladné (tj. $L_0 + \Delta W_2 L_0$ leží na úsečce spojující body -1 a L_0), obdržíme dále

$$\left| (1 + L_0) \left(1 - \frac{|W_2||L_0|}{|1 + L_0|} \right) \right| > |W_1|$$



Obrázek 3.11: Grafický test robustnosti kvality řízení.

a konečně

$$\frac{|W_1|}{|1 + L_0| |1 - |W_2||\frac{L_0}{1+L_0}|} = \frac{|W_1 S_0|}{|1 - |W_2 T_0||} < 1.$$

Tedy

$$\left\| \frac{W_1 S_0}{1 - |W_2 T_0|} \right\|_\infty < 1.$$

Platnost druhé podmínky $\|W_2 T_0\|_\infty < 1$ z (3.6) je zřejmá, neboť v případě prázdného průniku kruhů κ_1 a κ_2 z obr. 3.11, musí kruh κ_2 protínat úsečku spojující body -1 a L_0 . Obrácením uvedeného postupu lze důkaz dokončit.

Podmínku robustnosti kvality řízení (3.4) lze interpretovat tak, že je dosažena úroveň robustnosti 1. Obecněji, definujeme úroveň robustnosti α , jestliže platí

$$\|W_2 T_0\|_\infty < 1 \quad \wedge \quad \left\| \frac{W_1 S_0}{1 + \Delta W_2 T_0} \right\|_\infty < \alpha, \quad \forall \Delta.$$

Ponevadž pro libovolnou frekvenci ω platí

$$\max_{|\Delta| \leq 1} \left| \frac{W_1 S_0}{1 + \Delta W_2 T_0} \right| = \frac{|W_1 S_0|}{1 - |W_2 T_0|},$$

je zřejmé, že minimální úroveň robustnosti kvality řízení α je

$$\left\| \frac{W_1 S_0}{1 - |W_2 T_0|} \right\|_\infty. \quad (3.8)$$

Alternativně nás může zajímat, jak velkou neurčitost Δ můžeme připustit, abychom neporušili podmínku robustnosti kvality řízení.

Pro tento účel předpokládáme $\|\Delta\|_\infty < \beta$. Nyní věta 3.1 říká, že podmínka vnitřní stability uzavřené smyčky je robustní právě tehdy, jestliže

$$\|\beta W_2 T_0\|_\infty < 1.$$

Dále budeme říkat, že úroveň neurčitosti β je přípustná, jestliže

$$\|\beta W_2 T_0\|_\infty < 1 \quad \wedge \quad \left\| \frac{W_1 S_0}{1 + \Delta W_2 T_0} \right\|_\infty < 1, \quad \forall \Delta, \quad \|\Delta\|_\infty < \beta.$$

Ponevadž opět platí

$$\max_{|\Delta| \leq 1} \left| \frac{W_1 S_0}{1 + \beta \Delta W_2 T_0} \right| = \frac{|W_1 S_0|}{1 - \beta |W_2 T_0|},$$

musí být

$$\frac{|W_1 S_0|}{1 - \beta |W_2 T_0|} < 1$$

a maximální přípustná hodnota parametru β je

$$\beta^* = \left\| \frac{W_2 T_0}{1 - |W_1 S_0|} \right\|_{\infty}^{-1}.$$

3.6 Robustní stabilita pro násobné perturbace

Předpokládejme, že nominální přenos P_0 je perturbován na přenos

$$P = P_0 \frac{1 + \Delta_2 W_2}{1 + \Delta_1 W_1},$$

kde W_1, W_2 jsou stabilní a Δ_1, Δ_2 přípustné. Ukážeme, že robustní stabilita je dosažena při splnění podmínky

$$\| |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \|_{\infty} < 1.$$

Tj. za podmínky, která je formálně shodná s podmínkou robustní kvality řízení (viz věta 3.2).

Naznačíme důkaz tohoto tvrzení. Ze čtvrté řádky Tab. 3.2 obdržíme pro pevné Δ_2 , že podmínka robustní stability pro proměnné Δ_1 je

$$\left\| W_1 \frac{1}{1 + (1 + \Delta_2 W_2) L_0} \right\|_{\infty} < 1,$$

pro všechny přípustné Δ_2 . Neboli

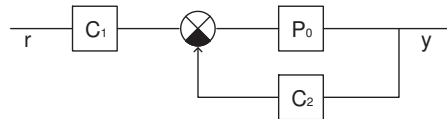
$$\left\| \frac{W_1 S_0}{1 + \Delta_2 W_2 T_0} \right\|_{\infty} < 1.$$

Odtud stejným způsobem jako v důkazu věty 3.2 obdržíme

$$\| |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \|_{\infty} < 1.$$

3.7 Robustnost odezvy uzavřené smyčky

Uvažujme blokový diagram uzavřené smyčky s dvěma stupni volnosti na obr. 3.12



Obrázek 3.12: Regulátor se dvěma stupni volnosti.

Definujme

$$S_0 \triangleq \frac{1}{1 + P_0 C_2}, \quad T_0 = 1 - S_0.$$

Přenosová funkce z r do y potom je

$$Q_0 = P_0 S_0 C_1.$$

Necht' M označuje přenosovou funkci z r do y , kterou bychom chtěli dosáhnout vhodnou volbou C_1 a C_2 . Necht' e je rozdílový signál mezi y a výstupem přenosu M pro stejný vstup r , potom přenos z r do e je dán vztahem

$$R_0 = Q_0 - M = P_0 S_0 C_1 - M.$$

Ideální výběr C_1 je tedy

$$C_1 = \frac{M}{P_0 S_0}.$$

Tato volba může způsobit, že uzavřená smyčka není vnitřně stabilní. Předpokládejme však, že to není náš případ (předpokládejme tedy vhodné omezení na M).

Uvažujme nyní multiplikativní perturbaci přenosu P_0 ,

$$P = (1 + \Delta W_2) P_0, \quad \Delta \text{ přípustné,}$$

potom R_0 přejde na

$$\begin{aligned} R &= \frac{P C_1}{1 + P C_2} - M = \frac{P}{1 + P C_2} \frac{M}{P_0 S_0} - M = \frac{(1 + \Delta W_2) P_0}{1 + (1 + \Delta W_2) P_0 C_2} \frac{M}{P_0 S_0} - M = \\ &= M \left[\frac{(1 + \Delta W_2)}{S_0 + (1 + \Delta W_2) T_0} - 1 \right] = M \frac{1 + \Delta W_2 - S_0 - (1 + \Delta W_2) T_0}{S_0 + (1 + \Delta W_2) T_0} = \\ &= M \frac{(1 + \Delta W_2)(1 - T_0) - S_0}{(1 - T_0) + (1 + \Delta W_2) T_0} = \frac{\Delta W_2 S_0 M}{1 + \Delta W_2 T_0}. \end{aligned}$$

Definujeme-li $W_1 = W_2 M$, obdržíme

$$\max_{\Delta} \|R\|_{\infty} = \left\| \frac{W_1 S_0}{1 - |W_2 T_0|} \right\|_{\infty}.$$

Pravá strana souhlasí s dříve nalezeným vztahem (3.8).

Poznámka 3.1. V klasické teorii řízení se řeší problém nalezení C_1, C_2 někdy tak, že se požaduje shoda přenosu uzavřené smyčky Q_0 s přenosem M pomocí podmínky $|Q_0(j\omega)| = |M(j\omega)|$. Nalezené řešení může velmi dobře vyhovovat této podmínce, avšak fáze $Q_0(j\omega)$ a $M(j\omega)$ se mohou velmi lišit dokonce i v případě, že oba systémy jsou minimálně fázové. Tato skutečnost bude analyzována později.

3.8 Obecnější případy robustní kvality řízení

	Nominální podmínka kvality řízení	
Perturbace	$\ W_1 S_0\ _\infty < 1$	$\ W_1 T_0\ _\infty < 1$
$(1 + \Delta W_2)P_0$	$\ W_1 S_0 + W_2 T_0 \ _\infty < 1$	—
$P_0 + \Delta W_2$	$\ W_1 S_0 + W_2 C S_0 \ _\infty < 1$	—
$P_0 / (1 + \Delta W_2 P_0)$	—	$\ W_1 T_0 + W_2 P_0 S_0 \ _\infty < 1$
$P_0 / (1 + \Delta W_2)$	—	$\ W_1 T_0 + W_2 S_0 \ _\infty < 1$

Tabulka 3.3

Neuvedené položky odpovídají případům, kdy nutné a postačující podmínky robustní kvality řízení nejsou jednoduché.

3.9 Shrnutí

Za předpokladu, že nominální zpětnovazební systém je vnitřně stabilní, je podmínka nominální kvality řízení $\|W_1 S_0\|_\infty < 1$ a podmínka robustní stability $\|W_2 T_0\|_\infty < 1$.

Podmínka pro současnou platnost nominální kvality řízení a robustní stability tedy je

$$\| \max\{|W_1 S_0|, |W_2 T_0|\} \|_\infty < 1. \quad (3.9)$$

Podmínka robustní kvality řízení je

$$\|W_2 T_0\|_\infty < 1 \quad \wedge \quad \left\| \frac{W_1 S_0}{1 + \Delta W_2 T_0} \right\|_\infty < 1, \quad \forall \Delta$$

a test pro tuto podmínku je

$$\| |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \|_\infty < 1. \quad (3.10)$$

Poněvadž platí

$$\max\{|W_1 S_0|, |W_2 T_0|\} \leq |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \leq 2 \max\{|W_1 S_0|, |W_2 T_0|\},$$

podmínka (3.9) není příliš odlišná od podmínky (3.10). Například, jestliže nominální kvalita a robustní stabilita je garantována s bezpečnostním faktorem 2, tj.

$$\|W_1 S_0\|_\infty < \frac{1}{2}, \quad \|W_2 T_0\|_\infty < \frac{1}{2},$$

potom podmínka (3.10) robustní kvality je automaticky splněna.

Nyní uvažujme kompromisní podmínku

$$\left\| (|W_1 S_0|^2 + |W_2 T_0|^2)^{\frac{1}{2}} \right\|_\infty < 1. \quad (3.11)$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\max\{|W_1 S_0|, |W_2 T_0|\} \leq (|W_1 S_0|^2 + |W_2 T_0|^2)^{\frac{1}{2}} \leq |W_1 S_0| + |W_2 T_0|$$

a

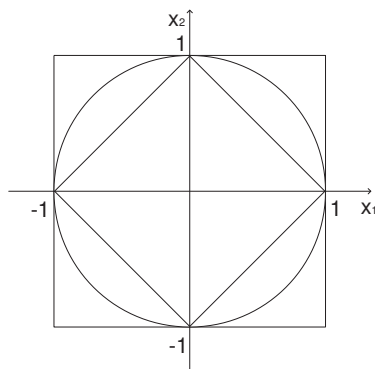
$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|W_1 S_0| + |W_2 T_0|) \leq (|W_1 S_0|^2 + |W_2 T_0|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \max\{|W_1 S_0|, |W_2 T_0|\},$$

je podmínka (3.11) dobrou aproximací k oběma podmínkám (3.9) a (3.10).

Předchozí úvahy těsně souvisí s vlastnostmi tří norem v \mathbb{R}^2 . Necht' $x = [x_1, x_2]' \in \mathbb{R}^2$, potom podmínky (3.9), (3.10) a (3.11) odpovídají po řadě normám

$$\max\{|x_1|, |x_2|\}, \quad |x_1| + |x_2|, \quad \left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Jejich srovnání ilustruje obr. 3.13.

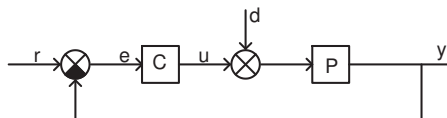


Obrázek 3.13: Normy v \mathbb{R}^2 .

Třetí uvedená norma je nejčastěji používaná euklidovská vzdálenost. Praktický závěr těchto úvah je ten, že užitím různých podmínek (3.9), (3.10) a (3.11) obdržíme výsledky, které se příliš neliší.

4 Stabilizace

V této části budeme uvažovat jednoduchou regulární smyčku zobrazenou na obr. 4.1, kde P je striktně ryzí a C je ryzí přenos.



Obrázek 4.1

Problém návrhu regulátoru je často formulován následovně: Je dán přenos P , navrhnete C tak, aby uzavřený systém byl 1) vnitřně stabilní a 2) měl požadovanou kvalitu řízení (např. aby výstup y sledoval asymptoticky skokový vstup r).

Jedna z možných metod řešení takového problému je nejprve parametrizovat všechny regulátory, které stabilizují danou smyčku (tj. platí 1)) a poté zkoumat, zda existuje taková hodnota parametru, která splňuje požadavek 2).

V této části takovou parametrizaci nejprve odvodíme a poté ji budeme aplikovat k nalezení regulátoru, který splňuje dvě podmínky: asymptotické sledování a požadavek stability samotného regulátoru.

4.1 Parametrizace stabilizujících regulátorů pro stabilní proces P

Předpokládejme, že P je stabilní a hledejme všechny regulátory C takové, že uzavřená smyčka je vnitřně stabilní. Množinu všech stabilních, ryzích, reálných racionálních funkcí označme symbolem \mathcal{S} .

Poznamenejme, že \mathcal{S} je uzavřená množina vůči sčítání a násobení, tj. jestliže $F, G \in \mathcal{S}$, potom $F + G, FG \in \mathcal{S}$. Dále, $1 \in \mathcal{S}$. (\mathcal{S} je tedy komutativní okruh).

Věta 4.1. *Necht' $P \in \mathcal{S}$. Množina všech regulátorů C , pro které je zpětnovazební systém vnitřně stabilní je parametrizována vztahem*

$$C = \frac{Q}{1 - PQ}, \quad (4.1)$$

kde Q probíhá množinu \mathcal{S} .

Důkaz. Necht' C splňuje podmínku vnitřní stability uzavřené smyčky. Označme symbolem Q přenos ze signálu r na signál u , tj.

$$Q = \frac{C}{1 + PC}.$$

Potom $Q \in \mathcal{S}$ a

$$C = \frac{Q}{1 - PQ}.$$

Obráceně. Předpokládejme, že $Q \in \mathcal{S}$ a definujme

$$C = \frac{Q}{1 - PQ},$$

potom všechny přenosové funkce svázané se zpětnovazební smyčkou (gang čtyř) jsou stabilní a ryzí, neboť platí

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 + PC} = \frac{1}{1 + P \frac{Q}{1 - PQ}} = \frac{1 - PQ}{1 - PQ + PQ} = 1 - PQ, \\ T &= \frac{PC}{1 + PC} = \frac{P \frac{Q}{1 - PQ}}{1 + P \frac{Q}{1 - PQ}} = PQ, \\ S_i &= \frac{C}{1 + PC} = \frac{\frac{Q}{1 - PQ}}{1 + P \frac{Q}{1 - PQ}} = Q, \\ S_o &= \frac{P}{1 + PC} = \frac{P}{1 + P \frac{Q}{1 - PQ}} = P(1 - PQ). \end{aligned}$$

□

Předpokládejme, že chceme nalézt C takový, že uzavřená smyčka je vnitřně stabilní a y asymptoticky sleduje skokovou změnu v signálu r (když $d = 0$). Použijeme-li parametrizaci regulátoru (4.1), z důkazu věty 4.1 plyne, že

$$S = 1 - PQ.$$

Z věty 2.6 plyne, že y asymptoticky sleduje skokovou změnu v r právě tehdy, jestliže S má nulu v bodě $s = 0$, tj.

$$P(0)Q(0) = 1.$$

Tedy naše úloha má řešení právě tehdy, jestliže $P(0) \neq 0$. Množina všech řešení je

$$\left\{ C = \frac{Q}{1 - PQ} : Q \in \mathcal{S}, Q(0) = \frac{1}{P(0)} \right\}.$$

Příklad 4.1. Necht'

$$P(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$$

a hledejme stabilizující regulátor, který dosahuje asymptotické sledování signálu r , pro případ, že $r(t)$ je libovolný polynom v t prvního řádu. Užijme parametrizaci (4.1). Podle věty 2.7 musí mít dvojnásobnou nulu v bodě $s = 0$.

Položme

$$Q(s) = \frac{as + b}{s + 1},$$

potom

$$S(s) = 1 - P(s)Q(s) = 1 - \frac{as + b}{(s + 1)^2(s + 2)} = \frac{s^3 + 4s^2 + (5 - a)s + (2 - b)}{(s + 1)^2(s + 2)}.$$

Tedy musí být $a = 5$, $b = 2$. Dále

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{5s + 2}{s + 1} \\ C(s) &= \frac{(5s + 2)(s + 1)(s + 2)}{s^2(s + 4)}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že regulátor má dvojnásobný pól v bodě $s = 0$. Tato skutečnost je v souladu s principem vnitřního modelu, neboť generátor všech polynomů prvního řádu lze popsat přenosem $\frac{1}{s^2}$.

Poznámka 4.1. Parametrizace stabilizujících regulátorů daná větou 4.1 je snadno použitelná pouze pro případ, kdy Q je nejvýše druhého řádu. V takovém případě jsou koeficienty Q nezávislé (až na podmínku, že koeficienty jmenovatele Q mají stejné znaménko). Je-li Q vyššího řádu, podmínka $Q \in \mathcal{S}$ vyvolává složitou závislost mezi koeficienty jmenovatele Q a parametrizace (4.1) přestává být efektivní.

Poznámka 4.2. Okruh O je množina prvků, pro které jsou definovány operace sčítání a násobení a existuje jednotkový prvek $1 \cdot a = a$, $\forall a \in O$. Invertovatelné prvky v O jsou nazývány jednotky. Příkladem okruhu je například:

- $\mathbb{R}[s]$ - množina všech polynomů s reálnými koeficienty, jednotky jsou konstanty.
- $\mathbb{R}^{p \times p}[s]$ množina čtvercových matic, jejichž prvky jsou polynomy, jednotky jsou unimodulární matice, $\det A(\lambda) = \text{konst.}$
- $RH_\infty \equiv \mathcal{S}$ množina všech stabilních, ryzích, racionálních funkcí s reálnými koeficienty je také okruh. Obecněji, čtvercové matice s prvky z RH_∞ tvoří též okruh.

Racionální přenosová funkce lze faktorizovat nad okruhem $\mathbb{R}[s]$, např. $g(s) = \frac{s+1}{s-1} = \frac{n(s)}{m(s)}$, $n, m \in \mathbb{R}[s]$.

4.2 Nesoudělná faktorizace přenosu

Nyní předpokládejme, že P je nestabilní a opět hledejme regulátor C , který vnitřně stabilizuje uzavřenou smyčku. Poněvadž P je racionální funkce, můžeme psát

$$P = \frac{n}{m},$$

kde n a m jsou nesoudělné polynomy. Podobně pro hledaný regulátor položíme $C = x/y$, kde x, y jsou též nesoudělné polynomy. Nyní platí

$$S = \frac{1}{1 + \frac{nx}{my}} = \frac{my}{nx + my} \triangleq mY,$$

$$T = \frac{\frac{nx}{my}}{1 + \frac{nx}{my}} = \frac{nx}{nx + my} \triangleq nX,$$

kde X, Y jsou racionální funkce. Všimněme si, že $C = \frac{x}{y} = \frac{X}{Y}$. Jestliže regulátor C vnitřně stabilizuje uzavřenou smyčku, potom musí být obě racionální funkce X, Y stabilní. Dále z platnosti vztahu $S + T = 1$ obdržíme

$$nX + mY = 1. \quad (4.2)$$

Dokázali jsme tedy následující tvrzení: Každý (vnitřně) stabilizující regulátor lze vyjádřit ve tvaru

$$C = \frac{X}{Y}, \quad (4.3)$$

kde X, Y je řešení rovnice (4.2). Toto řešení lze vyjádřit v parametrickém tvaru

$$C = \frac{x + mQ}{y - nQ},$$

kde Q je parametr probíhající množinu všech stabilních racionálních funkcí (s omezením $y - nQ \neq 0$). Bohužel takto získaný regulátor (4.3) nemusí být nutně ryzí.

Příklad 4.2. Necht' $P(s) = \frac{1}{s}$, potom $n(s) = 1$, $m(s) = s$. Jedno řešení rovnice

$$nX + mY = 1$$

je $X(s) = 1$, $Y(s) = 0$. Pro toto řešení není regulátor $C = X/Y$ definován. Jiné řešení je $X(s) = -s + 1$, $Y(s) = 1$. Tomu odpovídá regulátor

$$C = \frac{X}{Y} = \frac{-s + 1}{1},$$

který není ryzí.

Hledejme nyní obecné řešení rovnice

$$nX + mY = 1,$$

kde jak dané funkce N, M , tak hledané funkce X, Y jsou racionální funkce.

Necht' X_p, Y_p je partikulární řešení rovnice (4.2), tj.

$$nX_p + mY_p = 1,$$

potom obecné řešení rovnice (4.2) je dáno vztahy

$$X = X_p - mZ,$$

$$Y = Y_p + nZ,$$

kde Z je libovolná racionální funkce, neboť

$$X_h = -mZ,$$

$$Y_h = nZ$$

je obecné řešení homogenní rovnice

$$nX_h + mY_h = 0.$$

Snadno ověříme, že pro případ uvažovaný v příkladu 2 vždy obdržíme buď $Y = 0$ nebo stupeň X je větší než stupeň Y .

Tyto potíže lze překonat, jestliže nahradíme polynomy N, M, X, Y prvky množiny \mathcal{S} (tato množina se často označuje symbolem RH_∞).

Dvě racionální funkce $N, M \in \mathcal{S}$ jsou *vzájemně nesoudělné* nad okruhem \mathcal{S} , jestliže existují dvě další racionální funkce $X, Y \in \mathcal{S}$ splňující rovnici

$$NX + MY = 1.$$

Poznamenejme, že jestliže tato rovnice platí, potom N a M nesmí mít žádné společné nuly v oblasti $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ a ani v bodě $s = \infty$, poněvadž kdyby taková společná nula s_0 existovala, potom

$$0 = N(s_0)X(s_0) + M(s_0)Y(s_0) \neq 1.$$

Lze ukázat, že tato podmínka je pro vzájemnou nesoudělnost N, M též postačující.

Necht' G je reálná racionální přenosová funkce. Její reprezentace ve tvaru

$$G = \frac{N}{M}, \quad N, M \in \mathcal{S},$$

kde N, M jsou vzájemně nesoudělné, je nazývána *nesoudělná faktorizace* G nad okruhem \mathcal{S} .

Naším nejbližším cílem je nalézt metodu pro výpočet čtyř přenosových funkcí z \mathcal{S} splňujících dvě rovnice

$$G = \frac{N}{M}, \quad NX + MY = 1.$$

Nejprve na příkladu uvedeme jednoduchou konstrukci prvních dvou funkcí N, M .

Příklad 4.3. Necht' $G = \frac{1}{s-1}$. K získání nesoudělné faktorizace $G = \frac{N}{M}$, $N, M \in \mathcal{S}$ stačí jednoduše vydělit čítele a jmenovatel $(1$ a $s-1)$ společným stabilním polynomm, řekněme $(s+1)^k$:

$$\frac{N(s)}{M(s)} = \frac{1}{s-1}, \quad N(s) = \frac{1}{(s+1)^k}, \quad M(s) = \frac{s-1}{(s+1)^k}.$$

Jestliže $k > 1$, potom N a M nejsou vzájemně nesoudělné, poněvadž mají společnou nulu v bodě $s = \infty$. Tedy

$$N(s) = \frac{1}{s+1}, \quad M(s) = \frac{s-1}{s+1}.$$

Obecněji k získání N a M stačí vydělit čítec i jmenovatel G polynomem $(s+1)^k$, kde k je rovné maximu z jejich stupňů. Získání dalších dvou funkcí X, Y však není tak snadné. Pro tento účel budeme potřebovat Eukleidův algoritmus, který počítá největší společný dělitel dvou daných polynomů, řekněme $n(\lambda)$ a $m(\lambda)$. Jestliže n a m jsou nesoudělné, Eukleidův algoritmus může být užit též k výpočtu polynomů $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ splňujících rovnici

$$nx + my = 1. \quad (4.4)$$

Algoritmus 4.1. (Eukleidův algoritmus)

Vstup: polynomy n, m , $\deg(n) \geq \deg(m)$,
 $(\deg(n)$ označuje stupeň polynomu n)
Krok 1: Vyděl polynom n polynomem m a nalezní podíl q_1 a zbytek r_1 :
 $n = mq_1 + r_1$,
 $\deg(r_1) < \deg(m)$
Krok 2: Proveď krok 1 pro polynomy m a r_1 :
 $m = r_1q_2 + r_2$,
 $\deg(r_2) < \deg(r_1)$
Krok 3: Proveď krok 1 pro polynomy r_1 a r_2 :
 $r_1 = r_2q_3 + r_3$
 $\deg(r_3) < \deg(r_2)$.
Krok k : Proveď krok 1 pro polynomy r_{k-2} a r_{k-1}
 \vdots
Stop: Algoritmus ukončí v kroku k , když $\deg(r_k) = 0$.

Řešení x a y rovnice (4.4) získáme z mezivýsledků Eukleidova algoritmu. Jak to lze provést budeme ilustrovat na příkladu, kdy algoritmus skončí v kroku $k = 3$. V tomto případě platí

$$\begin{aligned} n &= mq_1 + r_1, \\ m &= r_1q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_2 & 1 & 0 \\ -1 & q_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -q_1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}.$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic obdržíme

$$r_3 = (1 + q_2q_3)n + [-q_3 - q_1(1 + q_2q_3)]m.$$

Odtud

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{r_3}(1 + q_2q_3), \\ y &= \frac{1}{r_3}[-q_3 - q_1(1 + q_2q_3)]. \end{aligned}$$

Poznámka 4.3. (O parametrizaci stabilizujících regulátorů)

V případě stabilního procesu P je množina všech regulátorů C , které vnitřně stabilizují zpětnovazební systém, dána parametrizací (věta 4.1)

$$C = \frac{Q}{1 - PQ}, \quad (4.5)$$

kde Q je stabilní ryzí racionální funkce ($Q \in \mathcal{S}$). Tuto parametrizaci lze využít i v případě, že P je nestabilní (nebo v případě, kdy má P póly v "zakázané oblasti"). V tomto případě však musí Q navíc splňovat jisté interpolační podmínky. O které podmínky se jedná je zřejmé ze vztahů pro přidružené citlivostní funkce k dané zpětnovazební syměce. Platí

$$S = 1 - PQ, \quad (4.6)$$

$$T = PQ, \quad (4.7)$$

$$S_i = Q, \quad (4.8)$$

$$S_o = (1 - PQ)P. \quad (4.9)$$

Aby všechny tyto funkce byly stabilní musí platit

- (i) Q je ryzí stabilní (póly Q neleží v zakázané oblasti)
 - (ii) libovolný zakázaný pól P je současně nula Q , jejíž násobnost je přinejmenším stejná
 - (iii) libovolný zakázaný pól P je současně nula funkce $(1 - PQ)$, jejíž násobnost je přinejmenším stejná.
- Jestliže jsou podmínky (i), (ii), (iii) splněny, potom všechna zkrácení nestabilních pólů ve vztahu (4.9) mohou být provedena analyticky ještě před implementací regulátoru.

Příklad 4.4. Necht' $n(\lambda) = \lambda^2$, $m(\lambda) = 6\lambda^2 - 5\lambda + 1$. Eukleidův algoritmus a řešení rovnice (4.4) postupuje následovně

$$\begin{aligned} q_1(\lambda) &= \frac{1}{6}, \\ r_1(\lambda) &= \frac{5}{6}\lambda - \frac{1}{6}, \\ q_2(\lambda) &= \frac{36}{5}\lambda - \frac{114}{25}, \\ r_2(\lambda) &= \frac{6}{25}. \end{aligned}$$

Poněvadž r_2 je nenulová konstanta ($\deg(r_2) = 0$), algoritmus zastavíme v kroku 2. Výsledné rovnosti jsou

$$\begin{aligned} n &= mq_1 + r_1, \\ m &= r_1q_2 + r_2. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} r_2 &= (1 + q_1q_2)m - q_2n, \\ x &= -\frac{q_2}{r_2}, \quad y = \frac{1 + q_1q_2}{r_2}, \end{aligned}$$

tj.

$$x = -30\lambda + 19, \quad y = 5\lambda + 1.$$

Nyní načtrneme, jak lze využít Eukleidův algoritmus k získání nesoudělné faktorizace přenosu G . Hlavní idea tohoto postupu spočívá v užití vhodné transformace $s \rightarrow \lambda$ převádějící polynomy v λ na funkce v \mathcal{S} .

Algoritmus 4.2 (výpočet nesoudělné faktorizace)

Vstup: G

Krok 1: Je-li G stabilní, polož $N = G$, $M = 1$, $X = 0$, $Y = 1$ a ukonči algoritmus; jinak pokračuj krokem 2.

Krok 2: Transformuj $G(s)$ na $\tilde{G}(\lambda)$ užitím transformace $s = (1 - \lambda)/\lambda$.

Vyjádři $\tilde{G}(\lambda)$ jako podíl nesoudělných polynomů v λ :

$$\tilde{G}(\lambda) = \frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}.$$

Krok 3: Užitím Eukleidova algoritmu nalezni polynomy $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ splňující rovnici $nx + my = 1$.

Krok 4: Transformuj polynomy $n(\lambda)$, $m(\lambda)$, $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ na funkce $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$, $Y(s)$ užitím transformace $\lambda = 1/(s+1)$.

Transformace $s \rightarrow \lambda$ ($\lambda \rightarrow s$) užitá v předchozím algoritmu není jediná možná. Musí splňovat pouze jediný požadavek: zobrazit polynomy n, m, x, y na racionální funkce N, M, X, Y patřící do \mathcal{S} . Poslední požadavek splňuje transformace $\lambda = 1/(s+1)$, neboť každý polynom $p(\lambda)$ se pomocí této transformace zobrazí na racionální funkci patřící do \mathcal{S} . Důkaz posledního tvrzení plyne z uzavřenosti \mathcal{S} vůči sčítání a násobení a z následujícího vztahu

$$p(\lambda) = \sum_i a_i \lambda^i = \sum_i a_i \left(\frac{1}{s+1} \right)^i.$$

Příklad 4.5. Pro

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

výše uvedený algoritmus dává:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\lambda) &= \frac{1}{\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} - 1\right) \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} - 2\right)} = \frac{\lambda^2}{(1-2\lambda)(1-3\lambda)} = \\ &= \frac{\lambda^2}{6\lambda^2 - 5\lambda + 1}, \end{aligned}$$

$$n(\lambda) = \lambda^2,$$

$$m(\lambda) = 6\lambda^2 - 5\lambda + 1,$$

$$x(\lambda) = -30\lambda + 19$$

$$y(\lambda) = 5\lambda + 1$$

$$N(s) = \lambda^2|_{\lambda=1/(s+1)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$M(s) = 6\lambda^2 - 5\lambda + 1|_{\lambda=1/(s+1)} = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2}$$

$$X(s) = -30\lambda + 19|_{\lambda=1/(s+1)} = \frac{19s-11}{s+1}$$

$$Y(s) = 5\lambda + 1|_{\lambda=1/(s+1)} = \frac{s+6}{s+1}$$

4.2.1 Nesoudělná faktorizace stavového modelu

V této části je uvedena nesoudělná faktorizace nad okruhem \mathcal{S} ryzi přenosové funkce G zadaná stavovým modelem.

Předpokládejme, že A, B, C, D jsou reálné matice po řadě typu $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$, 1×1 . Přenosová funkce příslušná stavovému modelu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{4.10}$$

je dána vztahem

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \tag{4.11}$$

Poznamenejme, že je-li G striktně ryzí, potom $D = 0$. Místo (4.11) budeme užívat zápis

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Náš cíl je vyjít z realizace $G(s)$ ve tvaru (4.12) a určit stavové realizace čtyř přenosových funkcí N, M, X, Y patřících do \mathcal{S} takových, že

$$G = \frac{N}{M}, \quad NX + MY = 1.$$

Nejprve ukážeme, jak nalézt N a M . Zvolme $F \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tak, že $A + BF$ je stabilní (tj. všechna vlastní čísla matice $A + BF$ leží v oblasti $\operatorname{Re}(s) < 0$). Nyní definujme signál $v \triangleq u - Fx$, potom z (4.10) obdržíme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BF)x + Bv \\ u &= Fx + v \\ y &= (C + DF)x + Dv. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic plyne, že pro přenosovou funkci z v do u platí

$$M(s) \triangleq \begin{bmatrix} A + BF & B \\ F & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

a že přenosová funkce z v do y je

$$N(s) \triangleq \begin{bmatrix} A + BF & B \\ C + DF & D \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Tedy

$$u = Mv, \quad y = Nv,$$

a tudíž

$$y = NM^{-1}u, \quad G = \frac{N}{M}.$$

Z definic (4.13) a (4.14) plyne, že N a M jsou ryzí a stabilní, tj. $N, M \in \mathcal{S}$.

Odvození vztahů pro X a Y vychází ze standardní teorie stavového regulátoru s rekonstruktorem stavu. Výpočetní procedura je následující: Určíme matici $H \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ takovou, že $A + HC$ je stabilní a položíme

$$X(s) \triangleq \begin{bmatrix} A + HC & H \\ F & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$Y(s) \triangleq \begin{bmatrix} A + HC & -B - HD \\ F & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Celý výpočet lze shrnout do následující procedury:

Algoritmus 4.3

- Krok 1: Nalezni realizaci (A, B, C, D) přenosové funkce G .
- Krok 2: Urči matice F a H tak, že $A + BF$ a $A + HC$ jsou stabilní.
- Krok 3: Pomocí vztahů (4.13) - (4.16) vypočítej čtyři stabilní racionální funkce N, M, X, Y .

4.3 Parametrizace stabilizujících regulátorů pro obecný případ

Nechť $P = N/M$ je nesoudělná faktorizace nad okruhem \mathcal{S} a necht' $X, Y \in \mathcal{S}$ splňují rovnici

$$NX + MY = 1.$$

Věta 4.2. *Množina všech regulátorů C splňujících podmínku vnitřní stability uzavřeného systému je parametrizována vztahem*

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ}, \quad Q \in \mathcal{S}.$$

Poznamenejme, že věta 4.2 pro případ $P \in \mathcal{S}$ dává stejnou parametrizaci stabilizujících regulátorů jako věta 4.1, neboť pro $N = P, M = 1, X = 0, Y = 1$ (viz krok 1 algoritmu 4.2) obdržíme

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ} = \frac{Q}{1 - PQ}, \quad Q \in \mathcal{S}.$$

K důkazu věty 4.2 budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 4.1. *Nechť $C = N_C/M_C$ je nesoudělná faktorizace nad okruhem \mathcal{S} , potom je zpětnovazební systém vnitřně stabilní právě tehdy, jestliže*

$$(NN_C + MM_C)^{-1} \in \mathcal{S}.$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že uzavřený systém je vnitřně stabilní, tj. přenosy

$$\begin{aligned} S &= \frac{MM_C}{NN_C + MM_C} \\ T &= \frac{NN_C}{NN_C + MM_C} \\ S_i &= \frac{MN_C}{NN_C + MM_C} \\ S_o &= \frac{NM_C}{NN_C + MM_C} \end{aligned}$$

jsou stabilní (náleží do \mathcal{S}). Nyní (podobně jako v důkazu věty 2.1) je důležité si uvědomovat, že z toho nutně neplyne, že všechny nuly funkce $NN_C + MM_C$ leží v levé otevřené polorovině komplexní roviny. Mohlo by se totiž stát, že všechny výše uvedené přenosy mají společnou nulu, která se zkrátí s nestabilní nulou funkce $NN_C + MM_C$. Tato situace však za daných předpokladů (podobně jako v důkazu věty 2.1) nastat nemůže. Tedy všechny nuly funkce $NN_C + MM_C$ jsou stabilní.

Zbývá dokázat, že $NN_C + MM_C$ je invertovatelná funkce v \mathcal{S} . K tomu stačí dokázat, že její stupeň čitatele je roven jejímu stupni jmenovatele. Poněvadž N/M a N_C/M_C jsou nesoudělné faktorizace nad okruhem \mathcal{S} , platí pro stupeň ν čitatele a stupeň μ jmenovatele funkce $NN_C + MM_C$ následující vztahy:

$$\begin{aligned} \nu(NN_C + MM_C) &= \nu\left(\frac{n}{d} \frac{n_c}{d_c} + \frac{m}{d} \frac{m_c}{d_c}\right) = \nu\left(\frac{nn_c + mm_c}{dd_c}\right) = \\ &= \max\{\deg(nn_c), \deg(mm_c)\} \end{aligned}$$

Poněvadž jako vždy předpokládáme, že P je ryzí, musí být $\deg(m) > \deg(n)$ a tedy

$$\nu(NN_C + MM_C) = \deg(mm_c) = \deg(d) + \deg(d_c) = \mu(NN_C + MM_C).$$

Funkce $NN_C + MM_C$ je tudíž skutečně invertovatelná.

Obráceně. Je-li $(NN_C + MM_C)^{-1} \in \mathcal{S}$, potom jsou všechny přenosové funkce přidružené ke zpětnovazební smyčce stabilní a tedy ona samotná je vnitřně stabilní. \square

Důkaz. (věta 4.2) Předpokládejme, že $Q \in \mathcal{S}$ a

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ}.$$

Definujme dále

$$N_C = X + MQ, \quad M_C = Y - NQ,$$

potom z platnosti rovnice

$$NX + MY = 1$$

postupně plyne

$$\begin{aligned} N(N_C - MQ) + M(M_C + NQ) &= 1 \\ NN_C + MM_C &= 1. \end{aligned}$$

Tedy $C = N_C/M_C$ je nesoudělná faktorizace a z lemmatu 4.1 plyne, že zpětnovazební systém je vnitřně stabilní.

Obráceně, necht' C je libovolný regulátor, který zajišťuje vnitřní stabilitu uzavřené smyčky. K dokončení důkazu musíme nalézt $Q \in \mathcal{S}$ tak, že

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ}.$$

Necht' $C = N_C/M_C$ je nesoudělná faktorizace nad okruhem \mathcal{S} a definujme

$$V \triangleq (NN_C + MM_C)^{-1},$$

potom platí

$$NN_C V + MM_C V = 1. \quad (4.17)$$

Z lemmatu 4.1 vyplývá, že $V \in \mathcal{S}$. Dále necht' Q je řešení rovnice

$$M_C V = Y - NQ. \quad (4.18)$$

Substitucí (4.18) do (4.17) obdržíme

$$NN_C V + M(Y - NQ) = 1. \quad (4.19)$$

Z platnosti rovnice

$$NX + MY = 1$$

plyne

$$N(X + MQ) + M(Y - NQ) = 1. \quad (4.20)$$

Srovnáním (4.19) a (4.20) dostaneme

$$N_C V = X + MQ. \quad (4.21)$$

Nyní z (4.18) a (4.21) obdržíme

$$C = \frac{N_C V}{M_C V} = \frac{X + MQ}{Y - NQ}.$$

Zbývá ukázat, že $Q \in \mathcal{S}$. Vynásobením (4.18) faktorem X a (4.21) faktorem Y a odečtením získáme

$$\begin{aligned} (NX + MY)Q &= YN_C V - XM_C V \\ Q &= YN_C V - XM_C V \end{aligned}$$

a poněvadž pravá strana patří do \mathcal{S} , je důkaz dokončen. \square

Příklad 4.6. Necht' $P(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$. Užitím algoritmu 4.2 obdržíme

$$\begin{aligned} N(s) &= \frac{1}{(s+1)^2} \\ M(s) &= \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2} \\ X(s) &= \frac{19s-11}{s+1} \\ Y(s) &= \frac{s+6}{s+1}. \end{aligned}$$

Podle věty 4.2 regulátor

$$C(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{19s-11}{s+6}$$

vnitřně stabilizuje uzavřenou smyčku.

Poznámka 4.4. Poznamenejme, že podobně jako v případě stabilního procesu P , jsou všechny přenosové funkce přidružené k uzavřené smyčce afinní funkce v parametru Q . Jednoduchým výpočtem obdržíme

$$\begin{aligned} S &= M(Y - NQ), \\ T &= N(X + MQ), \\ S_i &= M(X + MQ), \\ S_o &= N(Y - NQ). \end{aligned}$$

Dále si všimněme, že lemma 4.1 nabízí alternativní možnost nalezení řešení rovnice $NX + MY = 1$ pro daná $N, M \in \mathcal{S}$. Nejprve nalezneme stabilizující regulátor C pro $P = N/M$. Použijeme-li například Evansovu metodu GMK, může to být jednodušší než hledat řešení X, Y algoritmem 4.2. Dále sestrojme nesoudělnou faktorizaci regulátoru C , $C = N_C/M_C$ nad okruhem \mathcal{S} . Nyní podle lemmatu 4.1 je funkce

$$V \triangleq NN_C + MM_C$$

invertovatelná v \mathcal{S} ($V^{-1} \in \mathcal{S}$) a v důsledku toho platí

$$VV^{-1} = (NN_CV^{-1} + MM_CV^{-1}) = 1.$$

Tedy $X = N_CV^{-1}$ a $Y = M_CV^{-1}$ je řešení rovnice $NX + MY = 1$.

4.4 Asymptotické sledování

Na příkladu ukážeme, jak lze užitím věty 4.2 nalézt stabilizující regulátor, který zajišťuje asymptotické sledování.

Necht'

$$P(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}.$$

Hledejme regulátor, který má následující vlastnosti:

1. Uzavřená smyčka je vnitřně stabilní.
2. Konečná hodnota odezvy y na jednotkový skok (pro $d = 0$) je rovna 1.
3. Konečná hodnota odezvy y na sinusovou poruchu $d = \sin(10t)$ (pro $r = 0$) je rovna 0.

Nejprve parametrizujme všechny stabilizující regulátory C . Vhodné funkce N, M, X, Y jsou uvedené v příkladu 4.6. Podle věty 4.2

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ}, \quad Q \in \mathcal{S}.$$

Všechny takové regulátory splňují požadavek 1.

Přenos T z r do y je potom

$$\begin{aligned} T &= \frac{PC}{1+PC} = \frac{\frac{N}{M} \frac{X+MQ}{Y-NQ}}{1 + \frac{N}{M} \frac{X+MQ}{Y-NQ}} = \frac{N(X+MQ)}{M(Y-NQ) + N(X+MQ)} = \\ &= N(X+MQ). \end{aligned}$$

Užitím věty o konečné hodnotě obdržíme, že požadavek 2. je splněn právě tehdy, je-li

$$N(0)[X(0) + M(0)Q(0)] = 1. \quad (4.22)$$

Podobně, přenosová funkce S_o z d do y je ve tvaru

$$\begin{aligned} S_o &= \frac{P}{1+PC} = \frac{\frac{N}{M}}{1 + \frac{N}{M} \frac{X+MQ}{Y-NQ}} = \frac{N(Y-NQ)}{M(Y-NQ) + N(X+MQ)} = \\ &= N(Y-NQ) \end{aligned}$$

a požadavek 3. je tedy splněn právě tehdy, jestliže

$$N(10j)[Y(10j) - N(10j)Q(10j)] = 0. \quad (4.23)$$

Určíme-li z (4.22) a (4.23) $Q(0)$ a $Q(10j)$ obdržíme

$$\begin{aligned} Q(0) &= 6, \\ Q(10j) &= (6 + 10j)(1 + 10j) = -94 + 70j, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} Q(0) &= 6, \\ \operatorname{Re}Q(10j) &= -94, \\ \operatorname{Im}Q(10j) &= 70. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nyní musíme nalézt $Q \in \mathcal{S}$ splňující tyto rovnosti. Metoda, která s jistotou vede k cíli je následující: Uvažujme Q ve tvaru polynomu v proměnné $(s+1)^{-1}$ s dostatečným počtem koeficientů. V našem případě máme tři podmínky a proto položíme

$$Q(s) = x_1 + x_2 \frac{1}{s+1} + x_3 \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Tři rovnice lze nyní napsat ve tvaru $Ax = b$ a řešením této soustavy lineárních rovnic obdržíme

$$x_1 = -79, \quad x_2 = -723, \quad x_3 = 808,$$

neboli

$$Q(s) = \frac{-79s^2 + 881s + 6}{(s+1)^2}.$$

Nyní ze vztahu

$$C = \frac{Q}{1-PQ}$$

určíme

$$C = \frac{-60s^4 - 598s^3 + 2515s^2 - 1794s + 1}{s(s^2 + 100)(s+9)}.$$

Celá procedura výpočtu regulátoru může být tedy shrnuta do čtyř kroků:

1. Parametrizuj všechny stabilizující regulátory.
2. Redukuj požadavky na asymptotické sledování na podmínky na parametr Q .
3. Nalezní parametr Q vyhovující těmto podmínkám.
4. Urči regulátor C podle vztahu $C = Q/(1-PQ)$.

4.5 Silná stabilizace

Pro stabilní procesy je vhodné aplikovat stabilní regulátory, poněvadž při rozpojené smyčce není žádoucí, aby stav regulátoru nabýval neomezené hodnoty. V případě, že proces je nestabilní, není požadavek na stabilní regulátor příliš opodstatněný. Odpověď na otázku, zda lze daný proces stabilizovat stabilním regulátorem je však významná pro řešení problému stabilizace více různých procesů jediným pevným regulátorem.

Budeme říkat, že proces P je *silně stabilizovatelný*, jestliže vnitřní stabilita uzavřené smyčky může být dosažena regulátorem se stabilní přenosovou funkcí C .

Je-li P silně stabilizovatelný, potom jeho póly a nuly musí splňovat jistou vlastnost. V následující větě je bod $s = \infty$ zahrnut mezi reálné nuly procesu P .

Věta 4.3. *P je silně stabilizovatelný právě tehdy, jestliže mezi libovolnými dvěma nestabilními reálnými nulami leží sudý počet pólů P .*

V předchozím příkladu má přenos P dvě nestabilní nuly (započítáme i nulu v bodě $s = \infty$) $s = 1, \infty$. Mezi tímto párem nul leží jediný pól $s = 2$. Tento přenos P tedy nesplňuje podmínku uvedenou ve větě 4.3 a v důsledku toho P není silně stabilizovatelný.

Uvažujme jiný příklad. Necht'

$$P = \frac{(s-1)^2(s^2-s+1)}{(s-2)^2(s+1)^3}.$$

Tento systém má tři nestabilní reálné nuly, dvě v bodě $s = 1$ a jednu v bodě $s = \infty$. Další dvě nestabilní komplexní nuly nejsou pro podmínku věty 4.3 důležité. Při počítání pólů ležících mezi dvěma reálnými nulami se lze omezit na různé nuly (mezi dvěma totožnými nulami neleží žádný pól). Mezi nulami $s = 1, \infty$ leží dva póly v bodě $s = 2$. Tedy podle věty 4.3 je P silně stabilizovatelný.

Příklad 4.7. Necht'

$$P(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}.$$

Ukážeme, že libovolný regulátor, který zajistí vnitřní stabilitu uzavřené smyčky je nestabilní. Nejprve nalezneme nesoudělnou faktorizaci P nad okruhem \mathcal{S} :

$$N(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2},$$

$$M(s) = \frac{s(s-2)}{(s+1)^2},$$

$$X(s) = \frac{14s-1}{s+1},$$

$$Y(s) = \frac{s-9}{s+1}.$$

Podle věty 4.2 můžeme tvrdit, že všechny stabilizující regulátory jsou ve tvaru

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ}, \quad Q \in \mathcal{S}.$$

Poněvadž $X + MQ$ a $Y - NQ$ jsou nesoudělné, neboť

$$N(X + MQ) + M(Y - NQ) = 1$$

a v důsledku toho nemají polynomy $X + MQ$ a $Y - NQ$ společnou nulu v oblasti $\operatorname{Re}(s) > 0$, stačí k důkazu, že všechny stabilizující regulátory C jsou nestabilní ukázat, že $Y - NQ$ má nestabilní nulu pro všechny $Q \in \mathcal{S}$. V našem případě platí

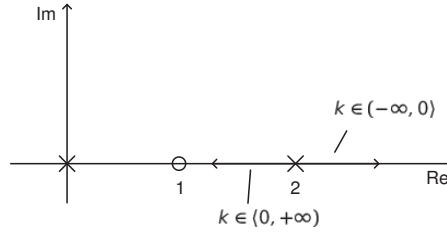
$$N(1) = 0, \quad N(\infty) = 0$$

a tedy pro libovolné $Q \in \mathcal{S}$ platí

$$\begin{aligned}(Y - NQ)(1) &= Y(1) = -4, \\ (Y - NQ)(\infty) &= Y(\infty) = 1.\end{aligned}$$

Tedy funkce $Y - NQ$ mění na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ znaménko. Ze spojitosti $Y - NQ$ plyne, že uvnitř intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ existuje s_0 takové, že $(Y - NQ)(s_0) = 0$.

Ke stejnému závěru ovšem můžeme dospět jednoduše pomocí klasické metody geometrického místa kořenů. Z obr. 4.2 je patrné, že nepřinese-li regulátor další nestabilní pól otevřené smyčky do intervalu



Obrázek 4.2

$(1, +\infty)$ nemůže pól otevřené smyčky $s = 2$ přejít do levé poloviny komplexní roviny.

Důkaz. Důkaz věty 4.3 (Nutnost). Důkaz je veden analogicky k příkladu 4.7. Předpokládejme, že podmínka věty 4.3 na nuly a póly není splněna. Ukážeme, že libovolný regulátor, který zajistí vnitřní stabilitu uzavřené smyčky je nestabilní. Necht' nesoudělná faktorizace P nad okruhem \mathcal{S} je

$$P = \frac{N}{M}, \quad NX + MY = 1$$

a uvažujme jistý stabilizující regulátor C ve tvaru

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ}, \quad Q \in \mathcal{S}.$$

Stačí ukázat, že $Y - NQ$ má nestabilní nulu. Podle předpokladu, existuje jistá dvojice reálných nestabilních nul N , řekněme v bodech $s = \sigma_1, \sigma_2$, s lichým počtem nul M ležících mezi body σ_1, σ_2 . Odtud plyne, že $M(\sigma_1)$ a $M(\sigma_2)$ jsou reálná čísla s opačnými znaménky. To samé platí pro hodnoty $Y(\sigma_1)$ a $Y(\sigma_2)$, neboť $MY = 1$ pro všechny nestabilní nuly funkce N . V důsledku toho musí mít funkce $Y - NQ$ reálnou nulu v intervalu (σ_1, σ_2) .

Důkaz postačitelnosti je ilustrován nejprve na příkladu. □

Příklad 4.8. Necht'

$$P(s) = \frac{s - 1}{(s - 2)^2}.$$

Tento přenos má dva póly v bodě $s = 2$ mezi dvěma nulami v bodech $s = 1, \infty$. Podle věty 4.3 je tedy P silně stabilizovatelný. Abychom ukázali, že existuje stabilní stabilizující regulátor C , musíme nalézt $Q \in \mathcal{S}$, pro který inverze funkce $u \triangleq Y - NQ$ patří do \mathcal{S} , tj. $u^{-1} \in \mathcal{S}$. Ekvivalentně, musíme nalézt $u \in \mathcal{S}$ tak, že $u^{-1} \in \mathcal{S}$ a $u = Y$ v bodech $s = 1, \infty$ (ve dvou nulách N). Pro přenos P obdržíme

$$N(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)^2}, \quad M(s) = \frac{(s - 2)^2}{(s + 1)^2}.$$

Nyní

$$Y(1) = \frac{1}{M(1)} = 4, \quad Y(\infty) = \frac{1}{M(\infty)} = 1.$$

Takže náš problém se redukuje na konstrukci $u \in \mathcal{S}$ tak, že

$$u^{-1} \in \mathcal{S}, \quad u(1) = 4, \quad u(\infty) = 1.$$

Funkci u sestrojíme ve dvou krocích. V prvním kroku nalezneme $u_1 \in \mathcal{S}$ tak, že

$$u_1^{-1} \in \mathcal{S}, \quad u_1(1) = 4.$$

Nejjednodušší volba pro splnění těchto podmínek je konstantní u_1 , $u_1 = 4$. Nyní budeme hledat u ve tvaru

$$u = (1 + aF)^l u_1,$$

kde a je konstanta, l je celé číslo a $F \in \mathcal{S}$. Abychom zajistili platnost $u(1) = u_1(1)$, zvolme F tak, že $F(1) = 0$, například

$$F(s) = \frac{s-1}{s+1}.$$

Nyní pro splnění podmínky $u(\infty) = 1$ potřebujeme, aby platilo $(1+a)^l 4 = 1$, tj.

$$a = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{l}} - 1, \quad (4.25)$$

a pro splnění podmínky $u^{-1} \in \mathcal{S}$ postačí, jestliže $\|aF\|_\infty < 1$ (to plyne z jednotkové kladné zpětné vazby kolem přenosu $1 + aF$ a z věty o malém zesílení), neboli

$$|a| < \frac{1}{\|F\|_\infty} = 1. \quad (4.26)$$

Pro splnění podmínek (4.25) a (4.26) zvolme nejprve dostatečně velké l tak, aby

$$\left| \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{l}} - 1 \right| < 1$$

a potom a podle vztahu (4.25). Vyhovuje například volba $l = 1$, $a = -\frac{3}{4}$. V takovém případě dostaneme

$$u(s) = \left(1 - \frac{3s-1}{4s+1}\right) 4 = \frac{s+7}{s+1}.$$

Nyní můžeme ze známých funkcí u, M, N jednoznačně určit regulátor C následovně:

$$u = Y - NQ \Rightarrow Q = \frac{Y-u}{N} \Rightarrow C = \frac{X + MQ}{Y - NQ} = \frac{1 - Mu}{Nu}.$$

V našem případě obdržíme

$$C(s) = \frac{27}{s+7}.$$

Všimněme si, že pro nalezení přenosu regulátoru C jsme nemuseli konstruovat funkce X a Y .

Nyní popíšeme konstruktivní proceduru pro určení stabilního stabilizujícího regulátoru pro zjednodušující případ, zde P má pouze reálné jednonásobné nestabilní nuly (včetně ∞) a jednonásobné reálné nestabilní póly.

Procedura

- Krok 0: Určeme nesoudělnou faktorizaci P nad okruhem S : $P = N/M$. Nalezneme nezáporné reálné nuly N a seřadíme je podle velikosti $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m = \infty$. Definujeme $r_i \triangleq 1/M(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Přenos P je silně stabilizovatelný právě tehdy, jestliže r_1, r_2, \dots, r_m mají stejná znaménka. Jestliže je tomu tak, pokračujeme.

- Krok 1: Položme $u_1(s) = r_1$.
Pokračuj.
Před krokem $k + 1$ je tedy zkonstruována funkce
 $u_k, u_k^{-1} \in S$, $u_k(\sigma_k) = r_i$, $i = 1, \dots, k$.
- Krok $k + 1$: Zvol $F \in \mathcal{S}$ tak, aby $F(\sigma_i) = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, k$. Urči
 $l \geq 1$ a a tak, aby
 $[1 + aF(\sigma_{k+1})]^l u_k(\sigma_{k+1}) = r_{k+1}$,
 $|a| < \frac{1}{\|F\|_\infty}$.
Polož $u_{k+1} = (1 + aF)^l u_k$.
Pokračuj až do kroku m .
- Krok $m + 1$: Polož $u = u_m$ a $C = (1 - Mu) \diagup (Nu)$.

4.6 Simultánní stabilizace

Dva procesy P_1 a P_2 jsou simultánně (zároveň) stabilizovatelné, jestliže existuje pevný regulátor C , který zajišťuje vnitřní stabilitu uzavřeného systému pro oba přenosy P_1 a P_2 .
Nechť

$$P_i = \frac{N_i}{M_i}, \quad N_i X_i + M_i Y_i = 1, \quad i = 1, 2,$$

$$N_i, M_i, X_i, Y_i \in S.$$

Definujme

$$N = N_2 M_1 - N_1 M_2, \quad M = N_2 X_1 + M_2 Y_1, \quad P = \frac{N}{M}.$$

V případě, že P_1 je již stabilní, položme

$$N_1 = P_1, \quad M_1 = 1, \quad X_1 = 0, \quad Y_1 = 1,$$

potom

$$N = N_2 - P_1 M_2, \quad M = M_2$$

a $P = P_2 - P_1$.

Věta 4.4. Přenosy P_1 a P_2 jsou simultánně stabilizovatelné právě tehdy, jestliže je přenos P silně stabilizovatelný.

Důkaz. Přenosy P_1 a P_2 jsou simultánně stabilizovatelné právě tehdy, jestliže existují Q_1 a $Q_2 \in \mathcal{S}$ tak, že

$$\frac{X_1 + M_1 Q_1}{Y_1 - N_1 Q_1} = \frac{X_2 + M_2 Q_2}{Y_2 - N_2 Q_2}.$$

Poněvadž oba tyto zlomky obsahují nesoudělné funkce (nad okruhem S), tato rovnice platí právě tehdy, jestliže $U \in \mathcal{S}$ tak, že platí

$$U^{-1} \in \mathcal{S},$$

$$X_1 + M_1 Q_1 = U(X_2 + M_2 Q_2),$$

$$Y_1 - N_1 Q_1 = U(Y_2 - N_2 Q_2).$$

Pro zjednodušení napíšeme poslední dvě rovnice v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} I & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ M_1 & -N_1 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} 1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 & Y_2 \\ M_2 & -N_2 \end{bmatrix}.$$

Vynásobením zprava maticí

$$\begin{bmatrix} N_2 & Y_2 \\ M_2 & -X_2 \end{bmatrix}$$

obdržíme

$$\begin{bmatrix} I & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ M_1 & -N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 & Y_2 \\ M_2 & -X_2 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} 1 & Q_2 \end{bmatrix}.$$

Nyní, první sloupec matice

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ M_1 & -N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2 & Y_2 \\ M_2 & -X_2 \end{bmatrix}$$

je

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}.$$

Označme její druhý sloupec jako

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

potom je předchozí maticová rovnice ekvivalentní s dvěma následujícími rovnicemi

$$\begin{aligned} M + NQ_1 &= U, \\ X + YQ_1 &= UQ. \end{aligned}$$

Platí tedy následující tvrzení: přenosy P_1 a P_2 jsou simultánně stabilizovatelné právě tehdy, jestliže existují $Q_1, Q_2, U \in \mathcal{S}$ tak, že

$$\begin{aligned} U^{-1} &\in \mathcal{S}, \\ M + NQ_1 &= U, \\ X + YQ_1 &= UQ_2. \end{aligned}$$

To však je ekvivalentní s podmínkou, že existují $Q_1, U \in \mathcal{S}$ tak, že

$$\begin{aligned} U^{-1} &\in \mathcal{S}, \\ M + NQ_1 &= U, \end{aligned}$$

nebot'

$$Q_2 = \frac{(X + YQ_1)}{U} \in \mathcal{S}.$$

Dále, poněvadž platí

$$(M + NQ_1)U^{-1} = MU^{-1} + NQ_1U^{-1} = 1,$$

jsou funkce M, N nesoudělné nad okruhem \mathcal{S} a podle lemmatu 4.1 je $P = N/M$ stabilizovatelný regulátorem Q_1 . \square

Příklad 4.9. (Simultánní stabilizace) Uvažujme

$$P_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad P_2(s) = \frac{as+b}{(s+1)(s-1)},$$

kde a a b jsou reálné konstanty, $a \neq 1$. Poněvadž P_1 je stabilní, obdržíme

$$P = P_2(s) - P_1(s) = -\frac{(1-a)s - (1+b)}{(s+1)(s-1)}.$$

Nuly P jsou $s = \frac{1+b}{1-a}, \infty$ a jediný nestabilní pól p je v bodě $s = 1$. Podle věty 4.3 je P silně stabilizovatelný právě tehdy, jestliže je buď nula $\frac{1+b}{1-a}$ negativní nebo leží napravo od nestabilního pólu $s = 1$, tj. platí podmínka

$$\frac{1+b}{1-a} < 0 \quad \vee \quad \frac{1+b}{1-a} > 1.$$

Podle věty 4.4 je tato podmínka nutná a postačující pro simultánní stabilizaci přenosů P_1 a P_2 .

4.7 Q (afinní) optimalizace

Dosud jsme se zabývali parametrizací všech regulátorů zajišťujících vnitřní stabilitu uzavřené smyčky. Ukázali jsme, že množinu všech takových regulátorů lze parametrizovat parametrem Q , který probíhá množinu S všech stabilních racionálních ryzích přenosových funkcí. Rozumný regulátor však musí kromě toho splňovat požadavky na kvalitu řízení. Například může být požadováno, aby nominální komplementární funkce T_0 byla co možná nejpřesněji rovna zadané funkci H_0 . Jinými slovy požadujeme, aby $\|T_0 - H_0\| \rightarrow \min$. Poněvadž T_0 je afinní funkce v parametru Q , předpokládáme $T_0 = H_1 + QV$ a definujeme následující problém kvadratické optimalizace.

Problém (kvadraticky optimální syntéza)

Nalezněte $Q^* \in S$ tak, že

$$Q^* = \arg \min_{Q \in S} \|H_0 - T_0\|_2^2 = \arg \min_{Q \in S} \|H_0 - H_1 - QV\|_2^2,$$

kde kvadratická norma (nazývaná též H_2 norma) funkce $X(s)$ je definována vztahem (blíže viz předchozí oddíly)

$$\|X\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)X(-j\omega)d\omega \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Lemma 4.2. *Necht' $S_0 \subset S$ je množina všech stabilních striktně ryzích racionálních funkcí analytických v oblasti $\operatorname{Re}\{s\} \leq 0$. Dále předpokládejme, že $X_s(s) \in S_0$ a $X_n(s) \in S_0^\perp$, potom*

$$\|X_s + X_n\|_2^2 = \|X_s\|_2^2 + \|X_n\|_2^2.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \|X_s + X_n\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [X_s(j\omega) + X_n(j\omega)][X_s(-j\omega) + X_n(-j\omega)]d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_s(j\omega)X_s(-j\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_n(j\omega)X_n(-j\omega)d\omega + \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [X_s(j\omega)X_n(-j\omega) + X_s(-j\omega)X_n(j\omega)]d\omega = \\ &= \|X_s\|_2^2 + \|X_n\|_2^2 + 2\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} X_s(j\omega)X_n(-j\omega)d\omega. \end{aligned}$$

Dále

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_s(j\omega)X_n(-j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_s(s)X_n(-s)ds.$$

Poněvadž komplexní funkce $X_s(s)X_n(-s)$ je analytická (holomorfní) v pravé polorovině komplexní roviny, platí

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_s(j\omega)X_n(-j\omega)d\omega = 0$$

a tudíž též platí tvrzení lemmatu. □

V dalším budeme obecnou komplexní funkci $X(s)$ rozkládat na stabilní část $X_s(s)$ a nestabilní $X_n(s)$. Budeme to provádět pomocí částečného rozkladu na parciální zlomky. Řešme následující úlohu. Požadujeme

$$\|H(s) - T(s)\|_2^2 \rightarrow \min,$$

kde $H(s)$ je stabilní racionální funkce. Vzhledem k definici komplementární funkce požadujeme

$$\|H(s) - QP\|_2^2 \rightarrow \min.$$

Lemma 4.3. *Necht' $V(s)$ je racionální funkce, která nemá žádné nuly na imaginární ose, potom platí*

$$Q^* = \arg \min_{Q(s) \in S} \|W(s) - Q(s)V(s)\|_2^2 = (V_m(s))^{-1}[V_a^{-1}(s)W(s)]_S, \quad (4.27)$$

kde

$$V(s) = V_m(s)V_a(s) \quad (4.28)$$

a $V_m(s)$ je faktor s nulami v levé otevřené polorovině komplexní roviny a $V_a(s)$ je "all-pass" faktor s jednotkovým zesílením ($|V_a| = 1$) a dále $[X]_S$ označuje stabilní část X .

Důkaz. Užijeme-li (4.28), obdržíme

$$\begin{aligned} \|W(s) - Q(s)V(s)\|_2^2 &= \|W(s) - Q(s)V_m(s)V_a(s)\|_2^2 = \\ &= \|V_a(s)(V_a^{-1}(s)W(s) - Q(s)V_m(s))\|_2^2 = \|V_a^{-1}(s)W(s) - Q(s)V_m(s)\|_2^2. \end{aligned}$$

Nyní rozložíme $V_a^{-1}W$ na stabilní a nestabilní část, tj.

$$V_a^{-1}W = [V_a^{-1}W]_S + [V_a^{-1}W]_n.$$

Užitím tohoto rozkladu obdržíme

$$\|V_a^{-1}W - QV_m\|_2^2 = \|[V_a^{-1}W]_n + [V_a^{-1}W]_S - QV_m\|_2^2$$

a užitím lematu 4.2 dostaneme

$$\|V_a^{-1}W - QV_m\|_2^2 = \|[V_a^{-1}W]_n\|_2^2 + \|[V_a^{-1}W]_S - QV_m\|_2^2.$$

odtud plyne, že pro optimální Q platí

$$[V_a^{-1}W]_S - QV_m = 0 \Rightarrow Q = V_m^{-1}[V_a^{-1}W]_S.$$

□

Poznámka 4.5. Faktorizace (4.28) je v literatuře známa pod názvem "inner-outer".

Poznámka 4.6. Řešení (4.28) je ryzí pouze tehdy, jestliže V má relativní řád 0 nebo jestliže současně V má relativní řád 1 a W má relativní řád alespoň 1. Ovšem pro neryzí řešení existuje ryzí aproximace vytvorená přidáváním vhodného počtu pólů do funkce $Q(s)$.

Nyní se vrátíme k řešení původní úlohy. V případě, že P je minimálně fázová funkce, potom

$$\arg \min_{Q \in S} \|H - QP\|_2^2 = P^{-1}[H]_S = P^{-1}H.$$

V případě, že P je stabilní, avšak obsahuje nestabilní nuly, potom

$$\arg \min_{Q \in S} \|H - QP\|_2^2 = P_m^{-1}[P_a^{-1}H]_S.$$

Příklad 4.10. $H = \frac{1}{s+2}$
 $P = \frac{s-1}{(s+1)^2} = \frac{s-1}{s+1} \frac{s+1}{(s+1)^2} = P_a P_m$
 $Q^* = (s+1) \left[\frac{s+1}{s-1} \frac{1}{s+2} \right]_S = (s+1) \frac{\frac{1}{3}}{s+2} = \frac{1}{3} \frac{s+1}{s+2}$
 $\frac{s+1}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} = \frac{A(s-1)+B(s+2)}{(s-1)(s+2)} = \frac{(A+B)s-A+2B}{(s-1)(s+2)}$
 $\Rightarrow A+B=1, -A+2B=1 \Rightarrow A=\frac{1}{3}, B=\frac{2}{3}$
 $P^{-1}H = \frac{(s+1)^2}{s-1} \frac{1}{s+2} = \frac{(s+1)^2}{(s-1)(s+2)},$ není stabilní.

Příklad 4.11.

$$\begin{aligned} T &= QP \\ T^* &= 1. \\ \|1 - QP\|_2^2 &\rightarrow \min \\ P(s) &= \frac{s-1}{(s+1)^3} \\ P(s) &= P_m(s)P_a(s) = \left[\frac{-(s+1)}{(s+1)^3} \right] \left[\frac{1-s}{1+s} \right] \\ Q^* &= P_m(s)^{-1} [P_a^{-1}(s)]_S = \frac{-(s+1)^2}{1} \left[\frac{1+s}{1-s} \right]_S = \frac{-(s+1)^2}{1} \\ \tilde{Q} &= \frac{1}{(\tau s+1)^2} \frac{-(s+1)^2}{1} = -\frac{(s+1)^2}{(\tau s+1)^2} \\ \tilde{C} &= \frac{\tilde{Q}}{1 - P\tilde{Q}} = \frac{-\frac{(s+1)^2}{(\tau s+1)^2}}{1 + \frac{s-1}{(s+1)^3} \frac{(s+1)^2}{(\tau s+1)^2}} = \\ &= \frac{-(s+1)^3}{(s+1)(\tau s+1)^2 + (s-1)} = \frac{-(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)}{(s+1)(\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1) + s - 1} = \\ &= \frac{-(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)}{s[\tau^2 s^2 + (2\tau + \tau^2)s + (2 + 2\tau)]} \end{aligned}$$

Příklad 4.12.

$$\begin{aligned} P_0(s) &= \frac{-3s+18}{(s+6)(s+3)} \\ H_0(s) &= \frac{16}{s^2+5s+16} \\ \|H_0(s) - QP_0(s)\|_2^2 &\rightarrow \min \\ P_0(s) &= \frac{18(1+\frac{1}{6}s)}{(s+6)(s+3)} \frac{(1-\frac{1}{6}s)}{(1+\frac{1}{6}s)} = P_m P_a \\ Q^* &= \frac{(s+6)(s+3)}{18(1+\frac{1}{6})} \left[\frac{(1+\frac{1}{6}s)}{(1-\frac{1}{6}s)} \frac{16}{s^2+5s+16} \right]_S \\ \frac{16(1+\frac{1}{6}s)}{(1-\frac{1}{6}s)(s^2+5s+16)} &= \frac{A}{(1-\frac{1}{6}s)} + \frac{B}{s^2+5s+16} + \frac{Cs}{s^2+5s+16} \\ A = \frac{16}{41}, B = 16\frac{25}{41}, C = \frac{96}{41}, \\ \left[\frac{(1+\frac{1}{6}s)}{(1-\frac{1}{6}s)} \frac{16}{s^2+5s+16} \right]_S &= \frac{16\frac{25}{41} + \frac{96}{41}s}{s^2+5s+16} = \frac{16}{41} \frac{25+6s}{s^2+5s+16}. \end{aligned}$$

5 Návrhová omezení

Předtím, než se budeme zabývat robustním návrhem zpětnovazebního systému, je užitečné vyjasnit, jaká jsou omezení na dosažitelnou kvalitu regulace. V této části budeme zkoumat dva druhy těchto omezení: za prvé plynoucí z algebraických vztahů mezi citlivostními funkcemi přidruženými k zpětnovazební smyčce, za druhé ze skutečnosti, že uzavřená smyčka musí být vnitřně stabilní. V celé této části budeme předpokládat, že uzavřená smyčka je vnitřně stabilní.

5.1 Algebraická omezení

Existují tři omezení tohoto druhu:

1. Vztah $S + T = 1$. Tato identita je přímým důsledkem definic S a T . Poněvadž

$$1 = |S(j\omega) + T(j\omega)| \leq |S(j\omega)| + |T(j\omega)|,$$

je zřejmé, že pro žádnou frekvenci ω nemůže současně platit $|S(j\omega)| < \frac{1}{2}$ a $|T(j\omega)| < \frac{1}{2}$.

2. Nutná podmínka pro robustní kvalitu regulace je, že příslušné váhové funkce W_1 a W_2 splňují podmínku

$$\min\{|W_1(j\omega)|, |W_2(j\omega)|\} < 1, \quad \forall \omega \quad (5.1)$$

Důkaz. Uvažujme pevnou frekvenci ω a předpokládejme $|W_1| \leq |W_2|$ (argument $j\omega$ je pro stručnost vynechán), potom

$$|W_1| = |W_1(S + T)| \leq |W_1S| + |W_1T| \leq |W_1S| + |W_2T|.$$

Tedy podmínka robustní kvality řízení (věta 3.2)

$$\| |W_1S| + |W_2T| \|_\infty < 1$$

implikuje platnost podmínky $|W_1| < 1$ a vzhledem k předpokladu $|W_1| \leq |W_2|$ též podmínky

$$\min\{|W_1|, |W_2|\} < 1, \quad \forall \omega.$$

Stejně závěry lze učinit v případě předpokladu $|W_2| \leq |W_1|$. □

Z právě dokázaného plyne, že na libovolné frekvenci musí být buď $|W_1|$ nebo $|W_2|$ menší než 1. Typicky, $|W_1(j\omega)|$ je monotónně klesající funkce (pro dosažení dobrého sledování na nízkých frekvencích) a $|W_2(j\omega)|$ je monotónně rostoucí (neurčitost roste se stoupající frekvencí).

Poznámka 5.1. Na tomto místě je vhodné si připomenout typický požadavek na kvalitu řízení spočívající v požadavku $|S_0(j\omega)| < |W_1^{-1}(j\omega)|$, kde $|W_1^{-1}(j\omega)|$ specifikuje požadavek na přesnost sledování sinusové referenční funkce s frekvencí ω (nebo přesnost odregulování stejné poruchy působící na výstup řízeného systému). Je-li například

$$W_1^{-1}(s) = \frac{M_s s}{\tau s + 1},$$

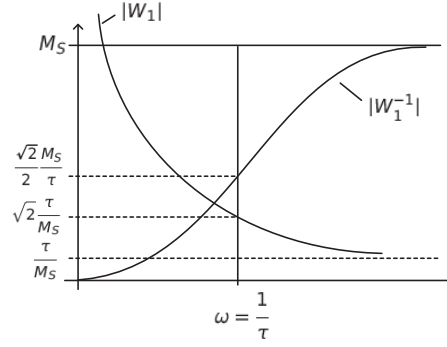
potom

$$W_1(s) = \frac{\tau s + 1}{M_s s}$$

a

$$|W_1(j\omega)| = \left| \frac{\tau j\omega + 1}{M_s j\omega} \right| = \frac{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}}{M_s \omega}.$$

Tvar funkcí $|W_1^{-1}(j\omega)|$ a $|W_1(j\omega)|$ je zobrazen na obr. 5.1. Dále typický požadavek na robustní



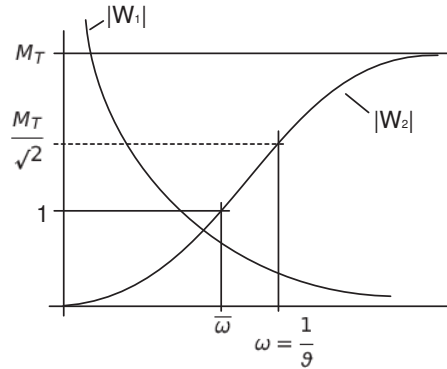
Obrázek 5.1: Typický průběh váhové funkce $|W_1(j\omega)|$.

stabilitu může být

$$W_2(s) = \frac{M_T \vartheta s}{\vartheta s + 1}$$

$$|W_2(j\omega)| = \frac{M_T \vartheta \omega}{\sqrt{\vartheta^2 \omega^2 + 1}}$$

Průběh váhové funkce $|W_2(j\omega)|$ je zobrazen na obr. 5.2. Užijeme-li označení zavedené v obr. 5.2,



Obrázek 5.2: Typický průběh váhové funkce $|W_2(j\omega)|$.

potom návrhová podmínka (5.1) je ekvivalentní podmínce

$$|W_1(j\bar{\omega})| < 1, \tag{5.2}$$

kde $\bar{\omega}$ je frekvence, pro níž platí $|W_2(j\bar{\omega})| = 1$, tj.

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\vartheta \sqrt{M_T^2 - 1}}.$$

Po vyčíslení (5.2) obdržíme

$$M_s > \sqrt{\tau^2 + \vartheta^2 (M_T^2 - 1)}.$$

3. Jestliže p je nestabilní pól přenosu otevřené smyčky $L = PC$ a z nestabilní nula téhož přenosu L , potom platí

$$\begin{aligned} S(p) &= 0, & S(z) &= 1, \\ T(p) &= 1, & T(z) &= 0. \end{aligned}$$

Tyto interpolační podmínky plynou přímo z definic S a T . Například

$$S(p) = \frac{1}{1 + L(p)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

5.2 Analytická omezení

Nejprve uvedeme základní tvrzení z teorie komplexních funkcí, které v dalším užijeme. Množinu všech komplexních čísel včetně bodu $s = \infty$ budeme označovat \mathbb{C} .

Princip maximálního modulu

Necht' Ω je oblast (neprázdná otevřená souvislá množina) v komplexní rovině a necht' F je nekonstantní holomorfní funkce v Ω , potom $|F|$ nenabývá své maximální hodnoty ve vnitřním bodě Ω .

Jednoduchá aplikace této věty pro Ω ztotožněné s otevřenou pravou polorovinou komplexní roviny a pro $F \in \mathcal{S}$ dává

$$\|F\|_{\infty} = \sup_{\operatorname{Re}(s) > 0} |F(s)|.$$

Cauchyova věta

Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je omezená otevřená množina se souvislým doplňkem a necht' D je uzavřená neprotínající se křivka v Ω . Jestliže F je holomorfní v Ω , potom

$$\oint_D F(s) ds = 0.$$

Cauchyův integrální vzorec

Necht' F je holomorfní na uzavřené neprotínající se křivce D a v oblasti Ω tvořící vnitřek této křivky. Dále necht' $s_0 \in \Omega$, potom

$$F(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_D \frac{F(s)}{s - s_0} ds.$$

Užitím Cauchyova integrálního vzorce lze odvodit Poissonův integrální vzorec, který budeme též potřebovat.

Lemma 5.1. *Necht' F je holomorfní a omezená v oblasti $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ a necht' $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, $\sigma_0 > 0$, potom*

$$F(s_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega.$$

Důkaz. Uvažujme Nyquistovu uzavřenou křivku D s dostatečně velkým poloměrem r tak, aby s_0 ležel uvnitř D . Cauchyův integrální vzorec pak dává

$$F(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_D \frac{F(s)}{s - s_0} ds.$$

Dále poněvadž bod $-\bar{s}_0$ není obklíčen křivkou D , podle Cauchyovy věty platí

$$0 = \frac{1}{2\pi j} \oint_D \frac{F(s)}{s + \bar{s}_0} ds.$$

Odečtením těchto rovností obdržíme

$$F(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_D F(s) \frac{\bar{s}_0 + s_0}{(s - s_0)(s + \bar{s}_0)} ds.$$

Tedy

$$F(s_0) = I_1 + I_2,$$

kde

$$I_1 \triangleq \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r F(j\omega) \frac{\sigma_0}{(s_0 - j\omega)(\bar{s}_0 + j\omega)} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r F(j\omega) \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega,$$

$$I_2 \triangleq \frac{1}{j\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(re^{j\varphi}) \frac{\sigma_0}{(re^{j\varphi} - s_0)(re^{j\varphi} + \bar{s}_0)} rje^{j\varphi} d\varphi.$$

Pro $r \rightarrow \infty$

$$I_1 \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega.$$

Zbývá tedy ukázat, že $I_2 \rightarrow 0$ pro $r \rightarrow \infty$. Platí

$$I_2 \leq \frac{\sigma_0}{\pi} \|F\|_{\infty} \frac{1}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|e^{j\varphi} - s_0 r^{-1}| |e^{j\varphi} + \bar{s}_0 r^{-1}|} d\varphi.$$

Integrál

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|e^{j\varphi} - s_0 r^{-1}| |e^{j\varphi} + \bar{s}_0 r^{-1}|} d\varphi$$

konverguje pro $r \rightarrow \infty$. Platí tedy

$$I_2 \leq \text{konstanta} \times \frac{1}{r},$$

a důkaz je dokončen. \square

Tvrzení lemmatu 5.1 lze vyjádřit slovy následovně: Za uvedených předpokladů je funkční hodnota $F(s_0)$ v bodě ležícím v pravé polorovině komplexní roviny kompletně určena souřadnicemi tohoto bodu a funkčními hodnotami dané funkce F na imaginární ose.

5.2.1 Omezení na váhové funkce W_1 a W_2

Předpokládejme, že přenos otevřené smyčky L má nulu v bodě z , $\text{Re}(z) \geq 0$, potom

$$\|W_1 S\|_{\infty} \geq |W_1(z)|. \quad (5.3)$$

To je přímý důsledek principu maximálního modulu, neboť platí

$$|W_1(z)| = |W_1(z)S(z)| \leq \sup_{\text{Re}(s) \geq 0} |W_1(s)S(s)| = \|W_1 S\|_{\infty}. \quad (5.4)$$

Odtud plyne, že nutná podmínka pro splnění podmínky nominální kvality řízení $\|W_1 S_0\|_{\infty} < 1$ je $|W_1(z)| < 1$. Jinými slovy: modul váhové funkce W_1 v libovolné nestabilní nule P nebo C musí být menší než 1.

Podobně, necht' L má nestabilní pól p , potom

$$\|W_2 T_0\|_{\infty} \geq |W_2(p)|, \quad (5.5)$$

tj. nutná podmínka pro dosažení robustní stability $\|W_2 T_0\|_{\infty} < 1$ je, že modul váhové funkce W_2 v libovolném nestabilním pólu P nebo C musí být menší než 1.

5.3 All-Pass a minimálně fázové přenosové funkce

V následujícím budou důležité dva typy přenosových funkcí: all-pass (vše propustné) a minimálně fázové. Funkce $F \in \mathcal{S}$ je *all-pass*, jestliže je její modul rovný jedné ve všech bodech imaginární osy, tj. $|F(j\omega)| = 1, \forall \omega$. Není obtížné dokázat, že taková funkce má symetrické rozložení nul a pólů kolem imaginární osy v tom smyslu, že s_0 je nula F právě tehdy, jestliže její zrcadlení $-\bar{s}_0$ je pól F . V důsledku toho, chceme-li, aby F byla stabilní, musí všechny její nuly být nestabilní. Tedy libovolná all-pass funkce je až na znaménko součin faktorů ve tvaru

$$\frac{s - s_0}{s + \bar{s}_0}, \quad \operatorname{Re}(s_0) > 0.$$

Příklady all-pass funkcí jsou

$$1, \quad \frac{s - 1}{s + 1}, \quad \frac{s^2 - s + 2}{s^2 + s + 2}.$$

Funkce $F \in \mathcal{S}$ je minimálně fázová, jestliže nemá žádné nuly v oblasti $\operatorname{Re}(s) > 0$. Název minimálně fázová funkce lze vysvětlit následovně. Existuje nekonečně mnoho funkcí majících stejnou amplitudovou charakteristiku jako libovolná minimálně fázová funkce G . Jsou to například všechny funkce ve tvaru GF , kde F je all-pass funkce. Všechny tyto funkce však mají větší fázové zpoždění. Příklady minimálně fázových funkcí jsou:

$$1, \quad \frac{1}{s + 1}, \quad \frac{s}{s + 1}, \quad \frac{s + 2}{s^2 + s + 1}.$$

Užitečným faktem je, že libovolná funkce patřící do \mathcal{S} může být vyjádřena jako součin all-pass a minimálně fázové funkce. Například

$$\frac{4(s - 2)}{s^2 + s + 1}, \quad \left(\frac{s - 2}{s + 2} \right) \left[\frac{4(s + 2)}{s^2 + s + 1} \right].$$

Lemma 5.2. *Necht' $G \in \mathcal{S}$, potom existuje all-pass funkce G_{ap} a minimálně fázová funkce G_{mp} taková, že $G = G_{\text{ap}}G_{\text{mp}}$. Tyto funkce jsou určeny jednoznačně až na znaménko.*

Ve zbytku této části budeme z důvodu jednoduchosti předpokládat, že přenos otevřené smyčky nemá žádné póly na imaginární ose. Vyjádříme citlivostní funkci jako

$$S = S_{\text{ap}}S_{\text{mp}},$$

potom S_{mp} nemá žádné nuly na imaginární ose a S_{mp} není striktně ryzí, poněvadž S není striktně ryzí. Tedy $S_{\text{mp}}^{-1} \in \mathcal{S}$.

Pro jednoduchou ilustraci využití all-pass funkcí předpokládejme, že proces P má reálnou nulu z , $z > 0$, a reálný pól p , $p > 0$. Dále předpokládejme, že regulátor nemá nestabilní nulu ani nestabilní pól, potom

$$S_{\text{ap}}(s) = \frac{s - p}{s + p}, \quad T_{\text{ap}} = \frac{s - z}{s + z}.$$

Z předchozího plyne, že $S(z) = 1$ a tudíž

$$S_{\text{mp}}(z) = S_{\text{ap}}^{-1}(z) = \frac{z + p}{z - p}.$$

Podobně z rovnosti $T(p) = 1$ plyne

$$T_{\text{mp}}(p) = T_{\text{ap}}^{-1}(p) = \frac{p + z}{p - z}.$$

Nyní platí

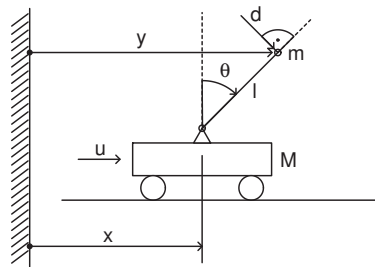
$$\|W_1 S\|_\infty = \|W_1 S_{\text{mp}}\|_\infty \geq |W_1(z) S_{\text{mp}}(z)| = \left| W_1(z) \frac{z+p}{z-p} \right| \quad (5.6)$$

a podobně

$$\|W_2 T\|_\infty \geq \left| W_2(p) \frac{p+z}{p-z} \right|. \quad (5.7)$$

Jestliže je pól p blízko nuly z , potom $|p-z|$ je malé číslo a dříve odvozená omezení kvality řízení (5.3) a (5.5) jsou podstatným způsobem zesílena.

Příklad 5.1. Stabilizace inverzního kyvadla na vozíku.



Obrázek 5.3: Inverzní kyvadlo na vozíku.

- M ... hmota vozíku
- m ... hmota závaží kyvadla (rameno nehmotné)
- l ... délka kyvadla
- u ... horizontální aktivní síla (vstup systému)
- d ... porucha - síla působící kolmo na kyvadlo v bodě závaží

Eulerovou-Newtonovou metodou lze odvodit následující pohybové rovnice

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) &= u + d \cos \theta, \\ m(\ddot{x} \cos \theta + l\ddot{\theta} - g \sin \theta) &= d. \end{aligned}$$

Linearizací kolem nestabilního rovnovážného bodu $(x, \theta) = (0, 0)$ obdržíme:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= u + d, \\ \ddot{x} + l\ddot{\theta} - g\theta &= \frac{1}{m}d. \end{aligned}$$

Užitím Laplaceovy transformace obdržíme

$$\begin{bmatrix} (M+m)s^2 & mls^2 \\ s^2 & ls^2 - g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U + D \\ \frac{1}{m}D \end{bmatrix}.$$

Dále

$$\begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = \frac{1}{A(s)} \begin{bmatrix} ls^2 - g & -g \\ -s^2 & \frac{M}{m}s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix},$$

kde $A(s) = s^2[Ms^2 - (M+m)g]$.

Konečně

$$Y = X + l\Theta = \frac{1}{A(s)} \begin{bmatrix} -g & \frac{M}{m}ls^2g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ D \end{bmatrix}.$$

Odvodili jsme tedy, že přenosová funkce $P(s)$ z u do x je dána vztahem

$$P_0(s) = \frac{ls^2 - g}{s^2[Ms^2 - (M+m)g]}. \quad (5.8)$$

Poznamenejme, že přenos P_0 odpovídá případu, kdy chceme inverzní kyvadlo stabilizovat pouze od měřené polohy vozíku. Úhel kyvadla tedy v tomto případě nelze využít.

Z (5.8) plyne, že P_0 má tři nestabilní póly

$$s = 0, 0, \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}$$

a jednu nestabilní nulu v bodě $s = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Zavedeme-li nový parametr $r = m/M$, potom nula a pól v $\operatorname{Re}(s) > 0$ jsou

$$z = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad p = z\sqrt{1+r}.$$

Poznamenejme, že pro pevné r a rostoucí l klesá hodnota z a p , a v důsledku toho je snazší systém stabilizovat (časová konstanta je delší).

Nyní budeme aplikovat dříve odvozenou nerovnost (5.7) na $\|W_2 T_0\|_\infty$:

$$\|W_2 T_0\|_\infty \geq \left| W_2(p) \frac{p+z}{p-z} \right|. \quad (5.9)$$

Čím je robustní stabilizace přenosu P_0 těžší, tím bude pravá strana nerovnosti (5.9) větší. Faktor, který na to má vliv je

$$\frac{p+z}{p-z} = \frac{\sqrt{1+r}+1}{\sqrt{1+r}-1}.$$

Tato hodnota je vždy větší než 1 a blíží se 1 pouze pro případ, kdy $r \rightarrow \infty$, tj. tehdy, jestliže hmota závaží kyvadla m je mnohem větší než hmota vozíku M . Bohužel pro tento případ bude také velká hodnota p a poněvadž je W_2 typicky horní propust, je také $|W_2(p)|$ v (5.9) velké.

Pro odvození dalšího typu návrhového omezení bude užitečné následující lemma.

Lemma 5.3. *Pro libovolný bod $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, $\sigma_0 > 0$, platí*

$$\log |S_{\text{mp}}(s_0)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log |S(j\omega)| \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega.$$

Důkaz. Položme $F(s) \triangleq \ln S_{\text{mp}}(s)$. Lze ukázat, že F je holomorfní a omezená v uzavřené oblasti $\operatorname{Re}(s) \geq 0$. (Tento fakt plyne ze skutečnosti, že $S_{\text{mp}}, S_{\text{mp}}^{-1} \in \mathcal{S}$) a $\ln S_{\text{mp}}(s)$ se chová dobře v oblasti $\operatorname{Re}(s) \geq 0$. Použitím lemmatu 5.1 dostaneme

$$F(s_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega$$

a dále

$$\operatorname{Re}(F(s_0)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}(F(j\omega)) \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega. \quad (5.10)$$

Poněvadž

$$S_{\text{mp}} = e^F = e^{\operatorname{Re}(F)} e^{j\operatorname{Im}(F)},$$

platí

$$|S_{\text{mp}}| = e^{\text{Re}(F)}$$

neboli

$$\ln |S_{\text{mp}}| = \text{Re}(F).$$

Tedy z (5.10) obdržíme

$$\ln |S_{\text{mp}}(s_0)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |S_{\text{mp}}(j\omega)| \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega$$

a poněvadž $|S| = |S_{\text{mp}}|$ na imaginární ose platí též

$$\ln |S_{\text{mp}}(s_0)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |S(j\omega)| \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega.$$

Odtud již plyne tvrzení lemmatu 5.3, uvážíme-li, že platí $\log x = \log e \ln x$. □

5.3.1 Zákon zachování bláta (Bodeho integrální věta)

Věta 5.1. *Necht' $\{p_i\}$ označuje množinu pólů přenosu otevřené smyčky L ležících v oblasti $\text{Re}(s) > 0$, relativní řád L je alespoň 2 a uzavřená smyčka je vnitřně stabilní, potom platí*

$$\int_0^{+\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = \pi(\log e) \left(\sum_i \text{Re}(p_i) \right).$$

Důkaz. V lemmatu 5.3 položíme $\omega_0 = 0$. Dostaneme

$$\log |S_{\text{mp}}(\sigma_0)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log |S(j\omega)| \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + \omega^2} d\omega,$$

neboli

$$\int_0^{+\infty} \log |S(j\omega)| \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} \log |S_{\text{mp}}(\sigma_0)|.$$

Vynásobením σ_0 obdržíme

$$\int_0^{+\infty} \log |S(j\omega)| \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} \sigma_0 \log |S_{\text{mp}}(\sigma_0)|.$$

Nyní lze ukázat, že levá strana konverguje k hodnotě

$$\int_0^{+\infty} \log |S(j\omega)| d\omega$$

jestliže $\sigma_0 \rightarrow \infty$. (Idea důkazu je, že pro velmi velká σ_0 je funkce

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \omega^2}$$

skoro rovna 1 až do velkých hodnot ω . Na druhé straně $\log |S(j\omega)|$ konverguje k 0 pro $\omega \rightarrow \infty$.) Zbývá tedy dokázat, že

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2} \log |S_{\text{mp}}(\sigma)| = (\log e) \left(\sum_i \text{Re}(p_i) \right) \quad (5.11)$$

Pro tento účel lze psát

$$S = S_{\text{ap}} S_{\text{mp}},$$

kde

$$S_{\text{ap}}(s) = \prod_i \frac{s - p_i}{s + p_i}.$$

Nyní dokážeme, že

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma \ln S(\sigma) = 0. \quad (5.12)$$

Poněvadž L má relativní řád nejméně 2, platí

$$L(\sigma) \approx \frac{c}{\sigma^k} \text{ pro } \sigma \rightarrow \infty,$$

kde c je nějaká konstanta a $k \geq 2$. Tedy pro $\sigma \rightarrow \infty$ platí

$$\sigma \ln S(\sigma) = -\sigma \ln(1 + L(\sigma)) \approx -\sigma \ln \left(1 + \frac{c}{\sigma^k}\right).$$

Užitím Maclaurinovy řady

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots \quad (5.13)$$

obdržíme

$$\sigma \ln(\sigma) \approx -\sigma \left(\frac{c}{\sigma^k} - \dots \right),$$

a tudíž platí (5.12). K důkazu (5.11), vzhledem k platnosti (5.12), stačí ukázat, že platí

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2} \ln |[S_{\text{ap}}(\sigma)]^{-1}| = \sum \text{Re}(p_i).$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\ln ([S_{\text{ap}}(\sigma)]^{-1}) = \ln \prod_i \frac{\sigma + p_i}{\sigma - p_i} = \sum_i \ln \frac{\sigma + p_i}{\sigma - p_i},$$

stačí ukázat, že

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2} \ln \left| \frac{\sigma + \overline{p_i}}{\sigma - p_i} \right| = \text{Re}(p_i). \quad (5.14)$$

Pro tento účel píšme $p_i = x + jy$ a uijíme znovu (5.13):

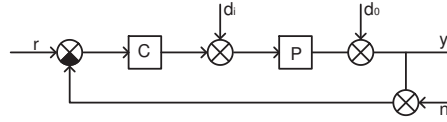
$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2} \ln \left| \frac{\sigma + \overline{p_i}}{\sigma - p_i} \right| &= \frac{\sigma}{2} \ln \left| \frac{1 + \overline{p_i} \sigma^{-1}}{1 - p_i \sigma^{-1}} \right| = \frac{\sigma}{4} \ln \frac{(1 + x \sigma^{-1})^2 + (y \sigma^{-1})^2}{(1 - x \sigma^{-1})^2 + (y \sigma^{-1})^2} = \\ &= \frac{\sigma}{4} \{ \ln[(1 + x \sigma^{-1})^2 + (y \sigma^{-1})^2] - \ln[(1 - x \sigma^{-1})^2 + (y \sigma^{-1})^2] \} = \\ &= \frac{\sigma}{4} \left\{ 2 \frac{x}{\sigma} + 2 \frac{x}{\sigma} + \dots \right\} = x + \dots = \text{Re}(p_i). \end{aligned}$$

Přechodem $\sigma \rightarrow \infty$ obdržíme (5.14) a důkaz je dokončen. □

5.4 Návrhová omezení - shrnutí

Uvažujme zpětnovazební smyčku s jedním stupněm volnosti na obr. 5.4.

Typické požadavky na funkci regulační smyčky jsou následující:



Obrázek 5.4

- (1) Vnitřní stabilita uzavřené smyčky.
- (2) $|S_0(j\omega)| \ll 1$ pro všechny frekvence $\omega \in \Omega_e$, na kterých působí exogenní signály r, d_i, d_o .
- (3) $|T_0(j\omega)| \ll 1$ pro všechny frekvence $\omega \in \Omega_n$ vyskytující se v šumu n čidla regulované veličiny.
- (4) Robustnost vzhledem ke stabilitě a kvalitě řízení.

Obvykle $\Omega_e \cap \Omega_n \neq \emptyset$ a požadavky (2) a (3) nelze současně splnit. Návrh regulátoru je potom umění hledání kompromisů. Výsledkem mohou být váhové funkce W_1 a W_2 , které definují kompromisní požadavek

$$\| |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \|_\infty < 1.$$

Pro návrh váhových funkcí je důležité ještě další omezení vyplývající ze skutečnosti, že reálný řízený systém (proces) má omezený frekvenční rozsah, ve kterém vykazuje lineární chování. Maximální frekvence vyskytující se ve všech požadavcích může být tedy pouze tzv. efektivní šířka pásma ω_a procesu. To znamená, že například Bodeho integrální větu 5.1 bychom měli uvažovat ve tvaru

$$\int_0^{\omega_a} \log |S(j\omega)| d\omega = \pi (\log e) \left(\sum_i \operatorname{Re}(p_i) \right).$$

V důsledku toho splnění požadavku (2) může vést nutně k tomu, že $\|S\|_\infty \gg 1$ a to implikuje dále $\|T\|_\infty \gg 1$. Což naznačuje, že robustnost ve stabilitě bude malá.

6 Tvarování Nyquistovy křivky

V této části se budeme věnovat grafické technice návrhu regulátoru na základě požadavku robustní kvality řízení pro stabilní, minimálně fázové procesy.

6.1 Základní technika tvarování

Připomeňme, že problém robustní kvality řízení spočívá v nalezení regulátoru s ryzí přenosovou funkcí C takovou, že zpětnovazební smyčka je pro nominální model P_0 vnitřně stabilní a platí nerovnost

$$\| |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \|_\infty < 1. \quad (6.1)$$

Tedy vstupní data návrhového problému jsou P_0, W_1, W_2 a výstupem je navržený regulátor C splňující podmínku robustní kvality řízení (6.1).

V oddílu 5 bylo ukázáno, že tento problém nemá pro libovolná vstupní data vždy řešení. Například, požadavek na kvalitu řízení $|W_1 S_0| < 1$ může být příliš přísný pro nominální přenos P_0 a model neurčitosti daný váhovou funkcí W_2 . Nutná a postačující podmínka existence řešení není bohužel známa.

V této části se budeme zabývat grafickou metodou, která v případě existence řešení většinou vede k jeho nalezení.

Hlavní idea spočívá v konstrukci přenosové funkce otevřené smyčky L_0 tak, že abychom dosáhli aproximativní splnění nerovnosti (6.1), a v důsledku toho mohli zkonstruovat přenos regulátoru $C = L_0/P_0$. Při konstrukci L_0 však musíme uvažovat omezující podmínky spočívající v požadavku vnitřní stability uzavřené smyčky a ryzosti přenosu C . Tedy L_0 nemůže být volena volně, ale musí splňovat tyto vedlejší podmínky. Jestliže P_0 nebo P_0^{-1} není stabilní, potom L_0 (pro splnění podmínky vnitřní stability) musí obsahovat nestabilní póly přenosu P_0 . Tedy v takovém případě máme další nepříjemnou vedlejší podmínku při volbě L_0 . Z tohoto důvodu budeme v celé této části předpokládat, že P a P^{-1} jsou stabilní přenosy (jinými slovy: P je stabilní a minimálně fázový).

V symbolech W_1, W_2 a L má podmínka robustní kvality řízení tvar

$$\Gamma(j\omega) = \left| \frac{W_1(j\omega)}{1 + L_0(j\omega)} \right| + \left| \frac{W_2(j\omega)L_0(j\omega)}{1 + L_0(j\omega)} \right| < 1. \quad (6.2)$$

Hlavní idea tvarování Nyquistovy křivky je volit $L_0(j\omega)$ tak, aby $\Gamma(j\omega) < 1$, $\forall \omega$ (alespoň aproximativně). V dalším vypustíme z důvodu stručnosti argument $j\omega$.

Nyní budeme hledat alternativní podmínky, za kterých platí (6.2). Připomeňme, že v oddílu 5 bylo ukázáno, že nutně musí platit

$$\min\{|W_1|, |W_2|\} < 1.$$

Budeme tedy dále předpokládat, že pro libovolné ω platí $|W_1| < 1$ nebo $|W_2| < 1$. V dalším budeme tyto dvě poslední podmínky uvažovat odděleně a v obou případech odvodíme podmínky odpovídající podmínce (6.2).

Začneme s nerovnostmi plynoucími z definice Γ :

$$(|W_1| - |W_2|)|S_0| + |W_2| \leq \Gamma \leq (|W_1| + |W_2|)|S_0| + |W_2|, \quad (6.3)$$

$$(|W_2| - |W_1|)|T_0| + |W_1| \leq \Gamma \leq (|W_2| + |W_1|)|T_0| + |W_1|, \quad (6.4)$$

$$\frac{|W_1| + |W_2 L_0|}{1 + |L_0|} \leq \Gamma \leq \frac{|W_1| + |W_2 L_0|}{|1 - |L_0||} \quad (6.5)$$

Poznámka 6.1. Odvození nerovností (6.3), (6.4), (6.5).

$$\begin{aligned}\Gamma &= |W_1 S_0| + |W_2(1 - S_0)| = |W_1 S_0| + |W_2 - W_2 S_0| \geq |W_1 S_0| + |W_2| - |W_2 S_0| = \\ &= (|W_1| - |W_2|)|S_0| + |W_2|.\end{aligned}$$

$$\Gamma = |W_1 S_0| + |W_2 - W_2 S_0| \leq |W_1 S_0| + |W_2| + |W_2 S_0| = (|W_1| + |W_2|)|S_0| + |W_2|.$$

$$\begin{aligned}\Gamma &= |W_1(1 - T_0)| + |W_2 T_0| \geq |W_1| - |W_1 T_0| + |W_2 T_0| = (|W_2| - |W_1|)|T_0| + |W_1| \\ \Gamma &= |W_1(1 - T_0)| + |W_2 T_0| \leq |W_1| + |W_1 T_0| + |W_2 T_0| = (|W_2| + |W_1|)|T_0| + |W_1|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma &= \left| \frac{W_1}{1 + L_0} \right| + \left| \frac{W_2 L_0}{1 + L_0} \right| = \frac{|W_1| + |W_2 L_0|}{|1 + L_0|} \\ \frac{|W_1| + |W_2 L_0|}{1 + |L_0|} &\leq \Gamma \leq \frac{|W_1| + |W_2 L_0|}{|1 - L_0|}\end{aligned}$$

Předpokládejme, že $|W_2| < 1$, a navíc, že pravá strana (6.3) je menší než 1, tj.

$$(|W_1| + |W_2|)|S_0| + |W_2| < 1,$$

neboli

$$\frac{(|W_1| + |W_2|)}{1 - |W_2|}|S_0| < 1,$$

potom platí

$$\Gamma < 1.$$

Tedy

$$\Gamma < 1 \Leftrightarrow \frac{(|W_1| + |W_2|)}{1 - |W_2|}|S_0| < 1. \quad (6.6)$$

Podobně odvodíme

$$\Gamma < 1 \Rightarrow \frac{|W_1| - |W_2|}{1 - |W_2|}|S_0| < 1. \quad (6.7)$$

Obdobným způsobem lze za předpokladu $|L_0| > 1$ odvodit z (6.5) implikace

$$\Gamma < 1 \Leftrightarrow |L_0| > \frac{|W_1| + 1}{1 - |W_2|} \quad (6.8)$$

$$\Gamma < 1 \Rightarrow |L_0| > \frac{|W_1| - 1}{1 - |W_2|}. \quad (6.9)$$

Jestliže $|W_1| \gg 1$, potom pravé strany (6.6) a (6.7) jsou téměř totožné; to samé platí i o pravých stranách (6.8) a (6.9). Tedy za tohoto dodatečného předpokladu můžeme podmínku $\Gamma < 1$ aproximovat podmínkou

$$\frac{|W_1|}{1 - |W_2|}|S_0| < 1 \quad (6.10)$$

nebo podmínkou

$$|L_0| > \frac{|W_1|}{1 - |W_2|}. \quad (6.11)$$

Poznamenejme, že podmínka (6.10) je podobná podmínce nominální kvality řízení $|W_1 S_0| < 1$ s tím rozdílem, že váhová funkce W_1 je zvětšena dělením hodnotou $1 - |W_2|$, $|W_2| < 1$. Tedy robustní kvalita řízení je dosažena splněním podmínky nominální kvality s větší váhovou funkcí.

Nyní předpokládejme, že $|W_1| < 1$. Z nerovnosti (6.4) podobným způsobem obdržíme:

$$\begin{aligned}\Gamma < 1 &\Leftarrow \frac{|W_2| + |W_1|}{1 - |W_1|} |T_0| < 1, \\ \Gamma < 1 &\Rightarrow \frac{|W_2| - |W_1|}{1 - |W_1|} |T_0| < 1.\end{aligned}$$

Obdobně z nerovnosti (6.5) za předpokladu $|L_0| > 1$ obdržíme

$$\begin{aligned}\Gamma < 1 &\Leftarrow |L_0| < \frac{1 - |W_1|}{|W_2| + 1} \\ \Gamma < 1 &\Rightarrow |L_0| > \frac{1 - |W_1|}{|W_2| - 1}.\end{aligned}$$

Jestliže $|W_2| \gg 1$, potom lze podmínku $\Gamma < 1$ aproximovat podmínkou

$$\frac{|W_2|}{1 - |W_1|} |T_0| < 1 \quad (6.12)$$

nebo podmínkou

$$|L_0| < \frac{1 - |W_1|}{|W_2|}. \quad (6.13)$$

Podmínka (6.12) říká, že robustní kvalita řízení je dosažena splněním podmínky robustní stability s větší váhovou funkcí než té, která přísluší podmínce robustní stability.

Výše uvedené závěry jsou shrnuty v následující tabulce:

$ W_1 \gg 1 > W_2 $	$ L_0 > \frac{ W_1 }{1 - W_2 }$
$ W_1 < 1 \ll W_2 $	$ L_0 < \frac{1 - W_1 }{ W_2 }$

Například, první řádka tabulky říká, že pro všechny frekvence, pro které platí $|W_1| \gg 1 > |W_2|$, by přenos otevřené smyčky L_0 měl splňovat podmínku

$$|L_0| > \frac{|W_1|}{1 - |W_2|}.$$

Uvažujme nyní typickou situaci, kdy $|W_1(j\omega)|$ je klesající funkce a $|W_2(j\omega)|$ je rostoucí funkce vzhledem k nezávislé proměnné ω .

Dále typicky na nízkých frekvencích požadujeme

$$|W_1| > 1 > |W_2|$$

a naopak na vysokých frekvencích žádáme

$$|W_1| < 1 < |W_2|.$$

Návrh tvarování L lze hrubě popsat následovně:

1. V log-log souřadnicích (modul versus frekvence) zobrazíme nejprve graf první funkce

$$\frac{|W_1|}{1 - |W_2|}$$

na nízkých frekvencích, kde platí $|W_1| > 1 > |W_2|$. Dále na vysokých frekvencích, kde platí $|W_1| < 1 < |W_2|$, zobrazíme graf druhé funkce

$$\frac{1 - |W_1|}{|W_2|}.$$

2. Do stejného grafu nyní vhodným způsobem umístíme graf $|L_0|$ tak, aby byly splněny následující podmínky:

- na nízkých frekvencích leží graf $|L_0|$ nad grafem první funkce a současně platí $|L_0| \gg 1$.
- na vysokých frekvencích leží graf $|L_0|$ pod grafem druhé funkce a současně platí $|L_0| \ll 1$.
- na velmi vysokých frekvencích klesá $|L_0|$ nejméně stejně rychle jako funkce $|P_0|$ (to zajišťuje, aby přenos regulátoru C byl ryzí).
- na středních frekvencích volme L_0 tak, aby byl zajištěn hladký přechod L_0 z nízkých na vysoké frekvence a aby strmost grafu L_0 v okolí frekvence ω_{gc} , $|L(j\omega_{gc})| = 1$ byla co možná nejmenší (důvod pro tento požadavek je vysvětlen níže).

3. Určeme stabilní, minimálně fázový přenos L_0 , jehož amplitudová frekvenční charakteristika je právě zkonstruovaná křivka. Normalizujeme L_0 tak, aby $L_0(0) > 0$.

Příklad 6.1. Na začátku tvarování frekvenční charakteristiky otevřené smyčky je nutné znát pouze relativní řád P_0 . Ten určuje strmost amplitudové charakteristiky P_0 na vysokých frekvencích. Tvarovaná amplitudová charakteristika L_0 musí mít alespoň stejnou strmost na vysokých frekvencích, abychom docílili ryzí C . Přesná znalost P_0 vstupuje do hry až na samém konci návrhové procedury při výpočtu C z L_0 ($C = L_0/P_0$).

Předpokládejme, že relativní řád P_0 je 1 a zvolme váhovou funkci

$$W_2 = \frac{s+1}{20(0.01s+1)}.$$

Připomeňme, že W_2 určuje relativní neurčitost P_0 podle vztahu

$$\left| \frac{P}{P_0} - 1 \right| = |W_2|.$$

V tomto případě $|W_2(j0)| = 0.05$ a dále $|W_2(j\omega)|$ stoupá monotónně až na hodnotu 5. Průsečík s 1 nastává na frekvenci $\omega = 20 \text{ rad/s}$.

Necht' cílem zpětnovazebního řízení regulátorem C je sledování sinusového referenčního signálu ve frekvenčním intervalu 0 až 1 rad/s. Nespecifikujme zatím, jakou chybu sledování budeme tolerovat. V ideálním případě bychom volili W_1 konstantní v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a jinde nulové. Taková volba však nevede na racionální funkci. Nicméně snadno lze ověřit, že věta 3.2 platí i pro takovéto nespojitě funkce. Tj., že za předpokladu nominální stability uzavřené smyčky podmínka

$$\|W_2 T_0\|_\infty < 1 \quad \wedge \quad \left\| \frac{W_1 S_0}{1 + \Delta W_2 T_0} \right\|_\infty < 1, \quad \forall \Delta$$

platí právě tehdy, jestliže

$$\| |W_1 S| + |W_2 T| \|_\infty < 1.$$

Volme tedy

$$|W_1(j\omega)| = \begin{cases} a, & \text{pro } \omega \in \langle 0, 1 \rangle; \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases}$$

kde a je zatím neurčená konstanta.

Nyní zkusme nejjednodušší volbu L_0

$$L_0(s) = \frac{b}{cs+1}.$$

Zde je rozumné volit $c = 1$, aby $|L|$ začala klesat až na konci pracovního intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Dále je žádoucí, aby b bylo co možná největší, avšak podmínka (6.13) musí být splněna pro $\omega \geq 20$, tj.

$$|L| \leq \frac{1 - |W_1|}{|W_2|} = \frac{1}{|W_2|}, \quad \omega \geq 20.$$

Tuto podmínku splňuje volba $b = 20$. Máme tedy

$$L_0(s) = \frac{20}{s+1}.$$

Zbývá zkontrolovat, jakou míru robustnosti jsme dosáhli. Pro tento účel zvolme maximální a tak, aby platila podmínka

$$|L_0| > \frac{a}{1 - |W_2|}, \quad \omega \leq 1.$$

Funkce na pravé straně je rostoucí na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, zatímco funkce $|L_0|$ je klesající. Hledanou hodnotu a získáme řešením rovnice

$$|L_0(j1)| = \frac{a}{1 - |W_2(j1)|}.$$

Obdržíme $a = 13.15$. Nyní ověříme robustnost kvality řízení. Sestrojíme graf

$$\Gamma(j\omega) = \left| \frac{W_1(j\omega)}{1 + L_0(j\omega)} \right| + \left| \frac{W_2(j\omega)L_0(j\omega)}{1 + L_0(j\omega)} \right| = |W_1(j\omega)S_0(j\omega)| + |W_2(j\omega)T_0(j\omega)|.$$

Odtud zjistíme, že maximální hodnota $\Gamma(j\omega)$ je přibližně rovna 0.92. Poněvadž je to menší než 1, robustnost kvality řízení je zajištěna.

Celý postup můžeme nyní rekapitulovat. Pro váhovou funkci

$$|W_1(j\omega)| = \begin{cases} 13.15, & \text{pro } \omega \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0, & \text{jinde,} \end{cases}$$

jsme zvolili $L_0(s) = 20/(s+1)$. Chyba sledování je potom menší než

$$\max_{\omega \in \langle 0, 1 \rangle} |S_0(j\omega)| = \frac{1}{\min_{\omega \in \langle 0, 1 \rangle} |1 + L_0(j\omega)|} = 0.067.$$

Je-li chyba 6.7% příliš velká, musíme zvolit $|L_0|$ větší na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Například, můžeme zvolit

$$L_0(s) = \left(\frac{s+10}{s+1} \right) \left(\frac{20}{s+1} \right).$$

Přídavný kompenzátor (derivačně-integrační) má modul zhruba rovný 10 na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a 1 pro $s \rightarrow \infty$. Zvolíme-li W_1 ve stejném tvaru, nyní vyjde $a = 93.46$. Opět zjistíme, že $\Gamma(j\omega) < 1$ pro $\forall \omega$, avšak chyba sledování nyní vyjde menší než $1/93.46 = 0.0107$, tj. 1,07%.

Celý výše uvedený postup návrhu je demonstrován pomocí níže uvedeného kódu v jazyku Matlab a obrázků 6.1 až 6.4.

```
W2 = tf([1,1],[0.2 20]);
Oms = linspace(0,100,1000);
logOms = log10(Oms);
FRW2=freqresp(W2,Oms);
AMW2 = squeeze(abs(FRW2(1,1,:)));
dbAMW2 = 20*(log10(AMW2));

W1 = 13.15*(Oms<1);
indLub = and((W1>1),(AMW2'<1));
indLlb = and((W1<1),(AMW2'>1));

figure(1);
plot(logOms, dbAMW2,'r'); hold on;
plot(logOms, 20*log10(W1),'b');
legend('|W_2|', '|W_1|')

Llb=W1./(1-AMW2');
Lub=(1-W1)./(AMW2');
L01=tf([20],[1,1]);
FRL01 = freqresp(L01, Oms);
AML01 = squeeze(abs(FRL01(1,1,:)));
```

```

dbAML01 = 20*(log10(AML01));
L02=tf([20, 200],[1,2,1]);
FRL02 = freqresp(L02, 0ms);
AML02 = squeeze(abs(FRL02(1,1,:)));
dbAML02 = 20*(log10(AML02));

figure(2);
Oms2=logspace(-2,2,100);
FRW2_2=freqresp(W2,Oms2);
AMW2_2 = squeeze(abs(FRW2_2(1,1,:)));
P0=tf([1, 10, 25],[25, 75, 75, 25]);
FRP0 = freqresp(P0, Oms2);
FRP0v = squeeze(FRP0);
plot(real(FRP0v), imag(FRP0v)); hold on;
v_ind = [FRP0v(8), FRP0v(35), FRP0v(45), FRP0v(50), FRP0v(60)];
v_ind2 = [AMW2_2(8), AMW2_2(35), AMW2_2(45), AMW2_2(50), AMW2_2(60)];
circle_m(v_ind(1),v_ind2(1)); hold on;
circle_m(v_ind(2),v_ind2(2)); hold on;
circle_m(v_ind(3),v_ind2(3)); hold on;
circle_m(v_ind(4),v_ind2(4)); hold on;
circle_m(v_ind(5),v_ind2(5));
axis equal;

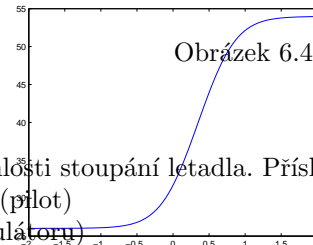
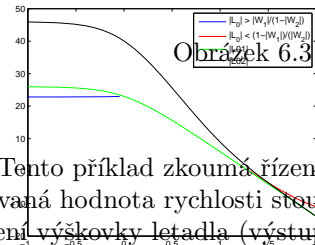
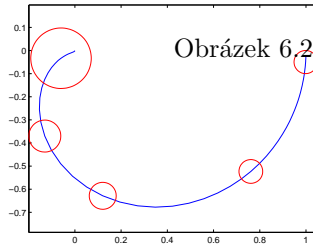
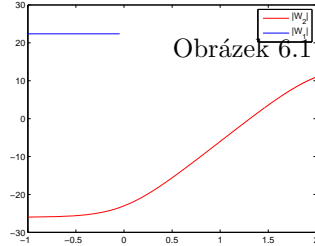
figure(3);
plot(logOms(indLub), 20*log10(Llb(indLub)), 'b'); hold on;
plot(logOms(indLlb), 20*log10(Lub(indLlb)), 'r'); hold on;
plot(logOms, dbAML01, 'g'); hold on;
plot(logOms, dbAML02, 'black');
legend('|L_0| > |W_1|/(1-|W_2|)', '|L_0| < (1-|W_1|)/(|W_2|)', '|L01|', '|L02|')

C_1=L01/P0; C_2=L02/P0;

figure(4);
FRL01_2 = freqresp(L01, Oms2);
AML01_2 = squeeze(FRL01_2(1,1,:));
dbAML01_2 = 20*(log10(abs(AML01_2)));
logOms2 = log10(Oms2);
C1 = AML01_2./FRP0v;
plot(logOms2, 20*log10(abs(C1)))

function circle_m(s,r)
a = linspace(0,2*pi, 100);
v = s*r*exp(j*a);
plot(real(v), imag(v),'r');
end

```

Příklad 6.2. Tento příklad zkoumá řízení rychlosti stoupání letadla. Příslušné signály regulátoru jsou
 r požadovaná hodnota rychlosti stoupání (pilot)
 u vychýlení výškovky letadla (výstup regulátoru)
 y skutečná rychlost stoupání letadla (regulovaná veličina)

Předpokládejme, že hrubá aproximace příslušných dynamických vlastností letadla je dána nominálním přenosem

$$P_0(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2 \cdot 0.7 \cdot 5s + 5^2}.$$

Takový přenos modeluje pohyb letadla jako pohyb tuhého tělesa (pružné deformace letadla jsou zanedbány). Běžná praxe je, že raději definujeme tvar L_0 , než váhovou funkci W_1 . Nejjednodušší klesající přenosová funkce je

$$L_0(s) = \frac{\omega_{gc}}{s},$$

kde ω_{gc} je zvolená frekvence, pro kterou je $|L(j\omega_{gc})| = 1$. Tento nejjednodušší tvar frekvenční charakteristiky otevřené smyčky má následující vlastnosti:

- 1) Dobré sledování a potlačení poruch na nízkých frekvencích ($|S|$ je zde malé).
- 2) Dobrá robustnost ($|T|$ je malé) na vysokých frekvencích.
- 3) Vnitřní stabilita.

V principu, čím větší je ω_{gc} , tím je lepší kvalita řízení, neboť $|S|$ je malé na větším frekvenčním intervalu, jak plyne ze vztahu

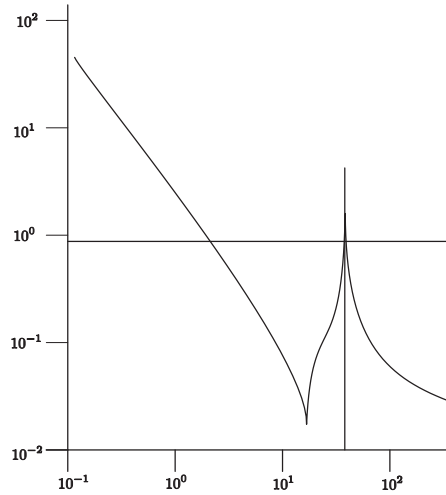
$$S_0(s) = \frac{1}{1 + L_0(s)} = \frac{s}{s + \omega_{gc}}.$$

Pro takto zvolené $L_0(s)$ a $\omega_{gc} = 10$ nám vyjde regulátor

$$C(s) = 10 \frac{s^2 + 2 \cdot 0.7 \cdot 5s + 5^2}{s(s + 1)}. \quad (6.14)$$

Ve skutečnosti však existuje omezení na volbu ω_{gc} , poněvadž vždy musíme uvažovat jistý stupeň neurčitosti modelu P_0 na vysokých frekvencích. V našem případě, jak již bylo řečeno, P_0 popisuje pouze pohyb tuhého tělesa, zatímco skutečné letadlo je pružné a má vlastní kmitavé módy jako např. pružný nosník. Předpokládejme, že první kmitavý mód je na frekvenci, řekněme 45 rad/s. Jestliže vložíme tento mód do

přenosové funkce P_0 , potom P_0 bude mít stabilní pól v blízkosti bodu $s = 45j$. Z toho plyne, že $|P_0(j\omega)|$ bude relativně velké v blízkosti $\omega = 45$ a pro daný regulátor (6.14) bude graf $|L(j\omega)|$ mít tvar zobrazený na obr. 6.5. Poněvadž modul $L_0(j\omega)$ je větší než 1 na frekvenci 45 rad/s, zpětnovazební systém je po-



Obrázek 6.5: Amplitudová char. L_0 - příklad 6.2.

tenciálně nestabilní (v závislosti na průběhu fázové charakteristiky v okolí této frekvence). Standardní způsob, jak omezit vliv nemodelované dynamiky na chování uzavřené smyčky, je zajistit, aby $|L_0|$ byla dostatečně malá od frekvence, kde se začíná zvětšovat neurčitost nominálního modelu. Například, můžeme požadovat, aby

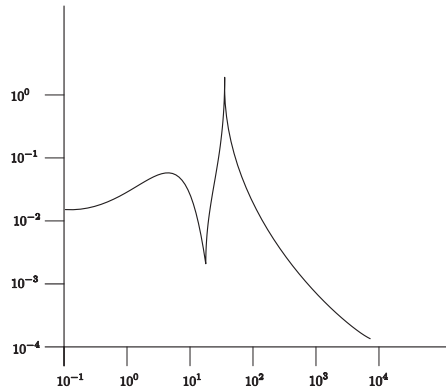
$$|L(j\omega)| \leq 0.5, \quad \forall \omega > 45.$$

Poznamenejme, že tímto požadavkem jsme vlastně implicitně definovali váhovou funkci W_2 . Největší volba ω_{gc} je tedy $\omega_{gc} = 45/2$.

Příklad 6.3. Uvažujme rozšířený nominální model z příkladu 6.2 do tvaru

$$P_0(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2 \cdot 0.7 \cdot 5s + 5^2} \frac{s^2 + 2 \cdot 0.05 \cdot 30s + 30^2}{s^2 + 2 \cdot 0.01 \cdot 45s + 45^2}.$$

Jde o model, který zahrnuje první kmitavý mód konstrukce letounu. Tento mód je velmi málo tlumený - koeficient tlumení $\xi = 0.01$. Příslušná vlastní frekvence a koeficient tlumení jsou obvykle známy s přesností 2 – 3%. Vedle přidáných kmitavých pólů obsahuje rozšířený P_0 také dvojici slabě tlumených nul. Amplitudová frekvenční charakteristika P_0 je zobrazena na obr. 6.6.



Obrázek 6.6: Ampl. frekv. char. P_0 .

Předpokládejme opět, že

$$L_0(s) = \frac{\omega_{gc}}{s}.$$

Odtud plyne, že čítecel regulátoru $C = L_0/P_0$ bude obsahovat čítecel

$$s^2 + 2 \cdot 0.01 \cdot 45s + 45^2,$$

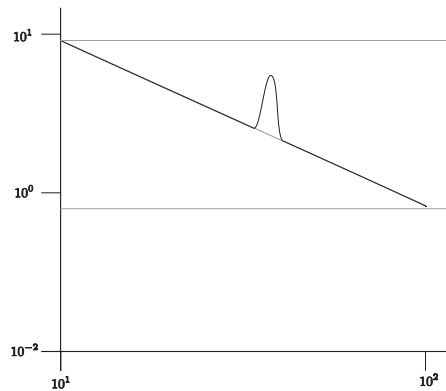
tj. C bude fungovat jako notch filter (hluboká a strmá zádrž na frekvenci 45 rad/s). Poněvadž však jsou parametry 45 a 0.01 neurčité, je rozumnější volit mělčí a více plochou zádrž.

$$L_0(s) = \frac{\omega_{gc}}{s} \frac{s^2 + 2 \cdot 0.03 \cdot 45s + 45^2}{s^2 + 2 \cdot 0.01 \cdot 45s + 45^2}$$

(ta vede na mělčí zádrž na frekvenci 45 rad/s v přenosu regulátoru). Ze stejného důvodu jako v příkladu 6.2 požadujeme, aby

$$|L(j\omega)| \leq 0.5, \quad \forall \omega \geq 45.$$

Tento požadavek vede na omezení velikosti ω_{gc} na hodnotu $\omega_{gc} \doteq 8$ a na amp. frekv. char. otevřené smyčky zobrazenou na obr. 6.7



Obrázek 6.7: Amp. frekv. char. L_0 - příklad 6.3.

7 Optimální regulátory

Nejprve připomeňme (viz část 3 - shrnutí), že norma

$$\|(|W_1 S_0|^2 + |W_2 T_0|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{\infty}$$

je rozumná míra kvality řízení, neboť se vyskytuje v kompromisní podmínce

$$\|(|W_1 S_0|^2 + |W_2 T_0|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{\infty} < 1.$$

mezi podmínkou robustní kvality řízení

$$\| |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \|_{\infty} < 1$$

a podmínkou současné platnosti nominální kvality řízení a robustní stability

$$\| \max\{|W_1 S_0|, |W_2 T_0|\} \|_{\infty} < 1.$$

V této části budeme uvažovat návrhové problémy, kde P_0, W_1 a W_2 jsou pevně dány a volný je pouze navrhovaný regulátor C . Optimální regulátor je takový regulátor C , pro který nabývá funkce

$$\Psi(C) = \|(|W_1 S_0|^2 + |W_2 T_0|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{\infty} \quad (7.1)$$

svého minima.

Poznamenejme, že kritériální funkce (7.1) může být vyjádřena v následující alternativní podobě

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S_0 \\ W_2 T_0 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma} \left(\begin{bmatrix} W_1 S_0 \\ W_2 T_0 \end{bmatrix} \right),$$

kde $\bar{\sigma}(M)$ označuje maximální singulární číslo matice M . Takto formulovaná úloha se nazývá úloha smíšených citlivostních funkcí (mixed sensitivity problem). V dalším se budeme zabývat řešením této úlohy tvarováním L_0 .

7.1 Tvarování L_0

Ukážeme, že podmínka $\Psi(C) < \gamma$, $\gamma > 0$ vede pro libovolné ω na omezení ve tvaru zakázaných a dovolených kruhů v komplexní rovině pro přenos otevřené smyčky $L_0(j\omega)$.

Uvažujme podmínku

$$\Psi(C) = \frac{|W_1(j\omega)|^2}{|1 + L_0(j\omega)|^2} + \frac{|W_2(j\omega)|^2 |L_0(j\omega)|^2}{|1 + L_0(j\omega)|^2} < \gamma, \quad \forall \omega > 0, \quad (7.2)$$

kde $L_0(j\omega) = P_0(j\omega)C(j\omega)$ je nominální přenos otevřené smyčky a $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

Tato podmínka může být vyjádřena v ekvivalentním tvaru

$$\frac{p^2(\omega)}{[1 + u(\omega)]^2 + v^2(\omega)} + \frac{q^2(\omega)[u^2(\omega) + v^2(\omega)]}{[1 + u(\omega)]^2 + v^2(\omega)} < 1, \quad \forall \omega > 0, \quad (7.3)$$

kde

$$p(\omega) = \frac{|W_1(j\omega)|}{\sqrt{\gamma}}, \quad q(\omega) = \frac{|W_2(j\omega)|}{\sqrt{\gamma}},$$

$$L_0(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega).$$

V dalším uvažujeme pevné ω a místo $p(\omega)$, $q(\omega)$, ... užíváme symboly p, q, \dots . Při tomto označení lze podmínku (7.3) vyjádřit ve tvaru

$$(q^2 - 1) \left[\left(u - \frac{1}{q^2 - 1} \right)^2 + v^2 \right] < \frac{1 - (q^2 - 1)(p^2 - 1)}{q^2 - 1}. \quad (7.4)$$

Jestliže v nerovnosti (7.4) budeme uvažovat rovnost levé a pravé strany, potom obdržíme rovnici kružnice pro proměnné u a v . Střed c a poloměr r této kružnice jsou dány následujícími vztahy

$$c = \frac{1}{q^2 - 1}, \quad (7.5)$$

$$r^2 = \frac{1 - (q^2 - 1)(p^2 - 1)}{(q^2 - 1)^2}. \quad (7.6)$$

Nyní se zabýváme otázkou, kde musí ležet $L_0 = u + jv$, aby byla splněna podmínka (7.4). Odpověď závisí na hodnotě parametru q . Rozlišíme tři případy:

- (i) $0 \leq q < 1$: V tomto případě leží střed kružnice c v intervalu $(-\infty, 1)$ a pravá strana (7.6) je vždy kladná. Poněvadž $q^2 - 1 < 0$, znaménko nerovnosti v (7.4) se po vynásobení činitelem $q^2 - 1$ změní na opačné a tedy bod L_0 musí ležet vně kružnice

$$(u - c)^2 + v^2 = r^2. \quad (7.7)$$

- (ii) $q = 1$: V tomto případě přechází kružnice (7.7) na přímku rovnoběžnou s imaginární osou, která protíná reálnou osu v bodě $-0.5 + 0.5p^2$, (neboť $\lim_{q \rightarrow 1^-} c + \sqrt{r^2} = \lim_{q \rightarrow 1^+} c - \sqrt{r^2} = -0.5 + 0.5p^2$) a bod L_0 musí ležet napravo od této přímky.
- (iii) $1 < q < \infty$: V tomto případě leží střed kružnice c v intervalu $(0, +\infty)$. Je-li

$$p > \frac{q}{\sqrt{q^2 - 1}},$$

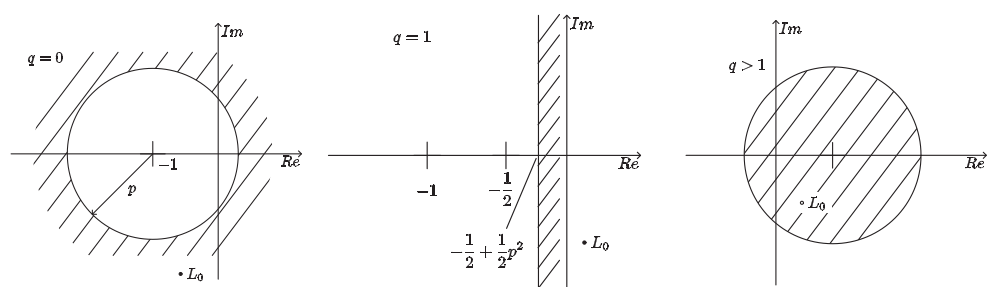
potom pravá strana (7.6) je záporná a nerovnost (7.4) není splněna pro žádné u a v . Má-li být tedy (7.4) splněna pro libovolné ω , musí platit

$$p(\omega) < \frac{q(\omega)}{\sqrt{q^2(\omega) - 1}} \quad (7.8)$$

pro všechny ω , pro které $q(\omega) > 1$. V takovém případě L_0 musí ležet uvnitř kružnice (7.7).

Z výše uvedené diskuze plynou následující závěry:

- 1) Jsou-li dány váhové funkce W_1 , W_2 a konstanta γ , potom je možné pro libovolnou frekvenci ω určit buď zakázaný nebo dovolený kruh pro polohu $L_0(j\omega)$. V typickém případě je $|W_2| < 1$ na nízkých frekvencích (malá neurčitost modelu) a $|W_2| > 1$ na vysokých frekvencích (velká neurčitost modelu). Tedy $q < 1$ platí na nízkých a $q > 1$ na vysokých frekvencích. V důsledku toho je typická varianta zakázaných a dovolených kruhů podobná té, která je zobrazena na obr. 7.1
- 2) Poněvadž $L_0 = P_0 C$, můžeme pro každou frekvenci ω určit zakázaný či dovolený kruh i pro $C(j\omega)$. Kruh pro C získáme z bodů kruhu pro L_0 jejich vynásobením komplexním číslem P_0^{-1} . Poznamenejme, že násobení komplexním číslem z odpovídá středové souměrnosti s koeficientem $|z|$ a otočení kolem počátku o úhel $\arg z$.



Obrázek 7.1: Zakázané a dovolené kruhy pro L_0 .