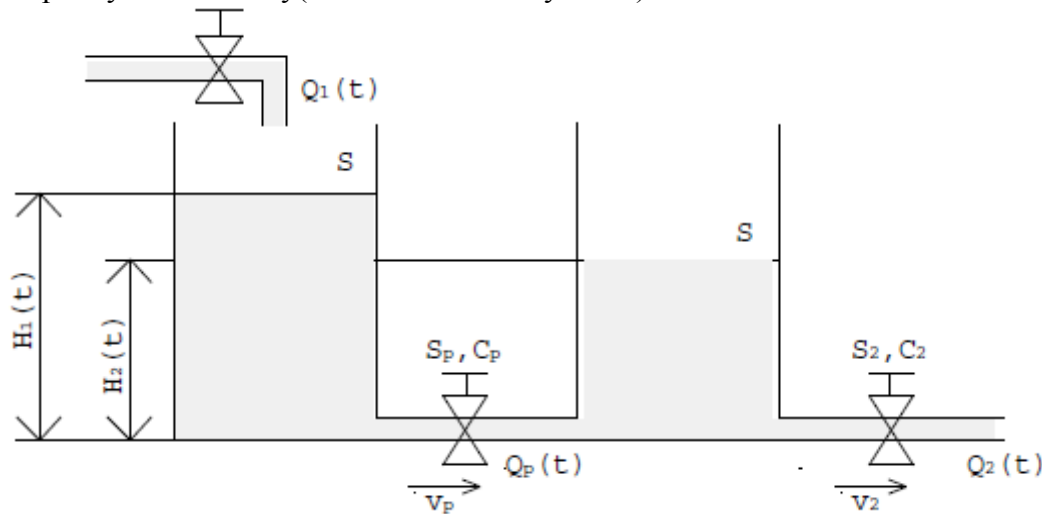


# Obsah

<b>Obsah .....</b>	<b>1</b>
<b>1. Zadání .....</b>	<b>2</b>
<b>2. Stavový popis systému .....</b>	<b>4</b>
2.1. Odvození rovnic .....	4
2.2. Výpočet nastavení přepouštěcího a výtokového ventilu .....	4
2.3. Linearizace .....	5
2.4. Porovnání nelineárního a linearizovaných modelů .....	6
2.4.1. Přechodové charakteristiky .....	6
2.4.2. Statická charakteristika .....	7
2.5. Výpočet přenosů .....	8
2.5.1. Určení nul pólů , časové konstanty a zesílení .....	8
2.5.2. Určení impulzních a přechodových funkcí .....	9
2.5.2.1. Impulzní funkce .....	9
2.5.2.2. Přechodová funkce .....	9
2.5.3. Porovnání charakteristi .....	10
2.6. Stavová reprezentace ve Frobeniově a Jordanově tvaru .....	11
2.6.1. Frobeniova forma .....	11
2.6.2. Jordanova forma .....	11
2.6.3. Ověření ekvivalence Frobeniovy a Jordanovy formy .....	11
2.6.4. Stabilita .....	12
2.6.5. Řiditelnost .....	12
2.6.6. Pozorovatelnost .....	13
<b>3. Model systému s čerpadlem .....</b>	<b>13</b>
3.1. Stavový model .....	13
3.2. Přenos systému s čerpadlem .....	14
3.3. Stabilita regulované soustavy .....	14
3.3.1. Nastavení PID regulátoru .....	14
3.3.2. Hurwitzovo kritérium stability .....	15
3.3.3. Nyquistovo kritérium stability .....	15
3.3.4. Porovnání výstupu regulované a neregulované soustavy a výstup regulátoru .....	16
3.3.5. Porovnání bodů frekvenční charakteristiky s Nyquistovou křivkou .....	17
3.3.5.1. Odezvy systému na harmonické signály .....	18
3.3.6. Bodeho charakteristiky .....	20
3.3.6.1. Bezpečnost v zesílení .....	20
3.3.6.2. Bezpečnost ve fázi .....	20
3.3.7. Přechodová charakteristika uzavřeného systému .....	21
3.4. Kritické zesílení K .....	21
3.4.1. Rozložení pólů a nul pro otevřený systém .....	21
3.4.2. Rozložení pólů a nul pro uzavřený systém .....	22
3.4.3. Bodeho charakteristiky pro otevřený systém .....	22
3.4.4. Bodeho charakteristiky pro uzavřený systém .....	23
3.5. GMK .....	24
3.6. Dopravní zpoždění .....	27
<b>4. Závěr .....</b>	<b>28</b>

# 1. Zadání

1. Určete stavový popis spojitých nádob s řízeným přítokem kapaliny do 1. nádoby a s volným odtokem kapaliny do 2. nádoby (nelineární model systému).



a) Při konstantním přítoku  $Q_{10} = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  vypočítejte potřebné nastavení přepustčícího ventilu  $S_p$  a výtokového ventilu  $S_2$  tak, aby výšky hladin v nádobách při ustáleném stavu byly  $H_{10} = 0.6 \text{ m}$  a  $H_{20} = 0.35 \text{ m}$  (tzv. pracovní bod). Hodnoty známých parametrů:  $S = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  (plocha nádob),  $c_p = c_2 = 0.6$

b) Určete linearizovaný stavový model v daném pracovním bodě a v pracovním bodě, který by odpovídal 20% zvýšení přítoku  $Q_{10}$

c) Simulujte chování nelineárního modelu a linearizovaných modelů pro různé hodnoty konstantního vstupu (přítoku  $Q_{10}$ ) a snažte se o porovnání chování nelineárního a linearizovaných modelů v okolí pracovního bodu. Považujte výšky hladin  $y_1(t) = H_1(t)$ ,  $y_2(t) = H_2(t)$  za výstupní veličiny a zakreslete statické a přechodové charakteristiky nelineárního a linearizovaných modelů, přičemž se snažte o porovnání charakteristik vždy v rámci jednoho grafu.

d) Určete oba přenosy  $F_1(p) = \frac{Y_1(p)}{Q_1(p)}$  a  $F_2(p) = \frac{Y_2(p)}{Q_1(p)}$ , stanovte jejich nuly, póly časové

konstanty a statické zesílení. Přenos  $F_2(p)$  rozložte na parciální zlomky a vypočítejte impulsní a přechodovou funkci a porovnejte je s experimentálně naměřenými křivkami.

e) K přenosu  $F_2(p)$  linearizovaného systému určete stavovou reprezentaci ve Frobeniově a Jordanově tvaru. Simulací ověřte jejich ekvivalenci ve smyslu stejného vstupně-výstupního chování. Analyzujte stabilitu, říditelnost a pozorovatelnost linearizovaného systému a jeho ekvivalentních stavových reprezentací.

2. Uvažujte první linearizovaný model systému a předpokládejte, že přítok vody  $Q_1(t)$  do nádob bude realizovat vodní čerpadlo, poháněné stejnosměrným el. motorem. Chování čerpadla s motorem budeme pro jednoduchost aproximovat chováním aperiodického členu 1. řádu s časovou konstantou  $T = 0.5 \text{ s}$  a se statickým zesílením  $K_S = Q_{10}$ .

a) Určete stavový model celé soustavy a přenosové funkce od napětí na kotvě stejnosměrného el. motoru  $u(t) = U_K(t)$  na jednotlivé výšky hladin  $y_1(t) = H_1(t)$ ,  $y_2(t) = H_2(t)$ . Při jeho odvození vycházejte ze stavového modelu samotných nádobek.

b) V dalším se budeme zabývat problémem řešení výšky hladiny  $H_2(t)$  na požadovanou konstantní hodnotu  $H_{2Z} = \text{konst}$  pomocí PI regulátoru, který bude připojen k dané soustavě a jehož přenos má

tvar:  $F_{\text{reg}}(p) = \frac{U_K(p)}{E(p)} = K \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I p}\right)$ , kde  $E(p)$  je obraz regulační odchylky:  $E(p) = H_{2Z}(p) - H_2(p)$ .

c) Na základě experimentů nastavte parametry PI regulátoru  $K$  a  $T_I$  tak, aby uzavřený systém byl stabilní. Stabilitu ověřte podle Hurwitzova a Nyquistova kritéria stability. Porovnejte výstup regulované a neregulované soustavy a zakreslete také výstup regulátoru.

- Využitím SIMULINKU identifikujte 4 různé body frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky při vhodně zvolených frekvencích a srovnajte s Nyquistovou křivkou.

- Zakreslete Bodeho charakteristiky a určete bezpečnost v zesílení a ve fázi.

- Zakreslete přechodovou charakteristiku uzavřeného systému a zhodnoťte charakter přechodového děje.

d) Určete experimentálně přibližnou hodnotu zesílení  $K$ , při kterém dojde v uzavřeném regulačním obvodu k netlumenému kmitání ( $K=K_{krit}$  – kritické zesílení).

- Zakreslete rozložení nul a pólů otevřeného a uzavřeného regulačního obvodu pro tuto hodnotu  $K$

- Zakreslete pro tuto situaci opět Bodeho charakteristiky!

e) Proveďte kvalitativní rozbor vlivu volby parametrů PI regulátoru na možné změny tvaru GMK a zakreslete příslušné průběhy! Podle přechodových charakteristik uzavřeného systému posuďte vliv změn zesílení  $K$  na kvalitu regulace pro příslušné tvary GMK.

f) Uvažujte nyní případ, že řízený systém bude obsahovat jisté dopravní zpoždění. Pro vybrané nastavení parametrů PI regulátoru určete velikost dopravního zpoždění, při kterém by se uzavřený regulační obvod dostal právě na mez asymptotické stability.

## 2. Stavový popis systému

### 2.1. Odvození rovnic

Označíme-li  $V_1(t)$  resp.  $V_2(t)$  objem kapaliny v první resp. druhé nádrži, můžeme psát

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = S \frac{dH_1(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_p(t); \quad \frac{dV_2(t)}{dt} = S \frac{dH_2(t)}{dt} = Q_p(t) - Q_2(t)$$

příčemž průtokové resp. výtokové množství kapaliny lze vyjádřit pomocí průtokové resp. výtokové rychlosti kapaliny

$$Q_p(t) = c_p S_p v_p(t) \quad \text{a} \quad Q_2(t) = c_2 S_2 v_2(t)$$

Rychlosti proudění kapaliny  $v_p(t)$  a  $v_2(t)$  lze určit na sledované proudnici z Bernoulliho zákona (součet atmosférického, hydrostatického a hydrodynamického tlaku je konstantní).

$$\text{Průtokový ventil: } p_0 + \rho g H_1(t) = p_0 + \rho g H_2(t) + \frac{1}{2} \rho v_p^2(t) \Rightarrow v_p(t) = \sqrt{2g[H_1(t) - H_2(t)]}$$

$$\text{Výtokový ventil: } p_0 + \rho g H_2(t) = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2(t) \Rightarrow v_2(t) = \sqrt{2gH_2(t)}$$

Po dosazení rovnic pro průtokový a výtokový ventil do rovnic pro průtokové resp. Výtokové množství kapaliny. A následně z těchto rovnic do první rovnice dostaneme dvě nelineární diferenciální rovnice prvního řádu, které můžeme považovat za stavové rovnice.

Reálný systém lze tedy pospsat matematickým modelem ve tvaru nelineárního dynamického systému 2. řádu se stavovými proměnnými  $H_1(t)$ ,  $H_2(t)$  a s lineární výstupní rovnicí.

S:

$$\frac{dH_1(t)}{dt} = -\frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[H_1(t) - H_2(t)]} + \frac{1}{S} Q_1(t) \dots \dots \dots = f_1[H_1(t), H_2(t), Q_1(t)]$$

$$\frac{dH_2(t)}{dt} = \frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[H_1(t) - H_2(t)]} - \frac{1}{S} c_2 S_2 \sqrt{2gH_2(t)} \dots \dots \dots = f_2[H_1(t), H_2(t), Q_1(t)]$$

$$y_1(t) = H_1(t)$$

$$y_2(t) = H_2(t)$$

### 2.2. Výpočet nastavení přepouštěcího a výtokového ventilu

$$Q_1 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Za předpokladu konstantního přítoku se při ustáleném stavu hladiny v čase nemění. Nepotřebujeme tedy počítat diferenciální změnou a proměnné nebudou závislé na čase.

$$\Rightarrow \begin{matrix} V_1 = Q_1 - Q_p & V_1 = H_1 \cdot S & Q_p = C_p \cdot S_p \cdot v_p \\ V_2 = Q_p - Q_2 & V_2 = H_2 \cdot S & Q_2 = C_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \end{matrix}$$

$$V_1 \text{ a } V_2 = \text{konst.} \Rightarrow Q_1 = Q_p = Q_2$$

Z Bernoulliho zákona:

$$p_0 + H_1 \rho g = p_0 + H_2 \rho g + \frac{1}{2} \rho v_p^2 \Rightarrow v_p = \sqrt{2g[H_1 - H_2]} = 2,21472346$$

$$p_0 + \rho g H_2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gH_2} = 2,62049614$$

$$\Rightarrow \text{po dosazení: } S_p = 1,12881 \cdot 10^{-4} m^2 \\ S_2 = 9,540186 \cdot 10^{-5} m^2$$

## 2.3. Linearizace

Označíme:  $x_1(t) = H_1(t), x_2(t) = H_2(t), u(t) = Q_1(t)$  , pak:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u(t)}{S} - \frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[x_1(t) - x_2(t)]} \\ \frac{1}{S} c_p S_p \sqrt{2g[x_1(t) - x_2(t)]} - \frac{1}{S} c_2 S_2 \sqrt{2g x_2(t)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{Zavedeme: } \Delta x(t) = x(t) - x_0 \\ \Delta u(t) = u(t) - u_0$$

$$\Delta \dot{x}(t) = A \Delta x(t) + B \Delta u(t) \\ \Delta y(t) = C \Delta x(t) + D \Delta u(t)$$

Pak linearizací získáváme:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-C_p S_p}{2S} \cdot \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{x_1(t) - x_2(t)}} & \frac{C_p S_p}{2S} \cdot \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{x_1(t) - x_2(t)}} \\ \frac{C_p S_p}{2S} \cdot \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{x_1(t) - x_2(t)}} & -\frac{C_p S_p}{2S} \cdot \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{x_1(t) - x_2(t)}} - \frac{C_2 S_2}{2S} \cdot \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{x_2(t)}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Pracovní bod:  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0,00015$ ;  $H_1 = 0,6$ ;  $H_2 = 0,35$ ;  $S_p = 0,000113$ ;  $S_2 = 0,0000954$ :

$$A = \begin{bmatrix} -0,12 & 0,12 \\ 0,12 & -0,21 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Výpočet druhého pracovního bodu:

Označíme  $Q_1'$  nový přítok, zvýšený o 20%,  $H_1'$  a  $H_2'$  budou nové výšky hladin.

$$\text{Pak: } Q_1' = 1,2 \cdot Q_1$$

$$H_2' = \frac{Q_1'^2}{2g} \cdot \frac{1}{(S_2 C_2)^2} = 0,504 \text{ m}$$

Vypočtem:

$$H_1' = H_2' + \frac{Q_1'^2}{2g} \cdot \frac{1}{(S_P C_P)^2} = 0,863 \text{ m}$$

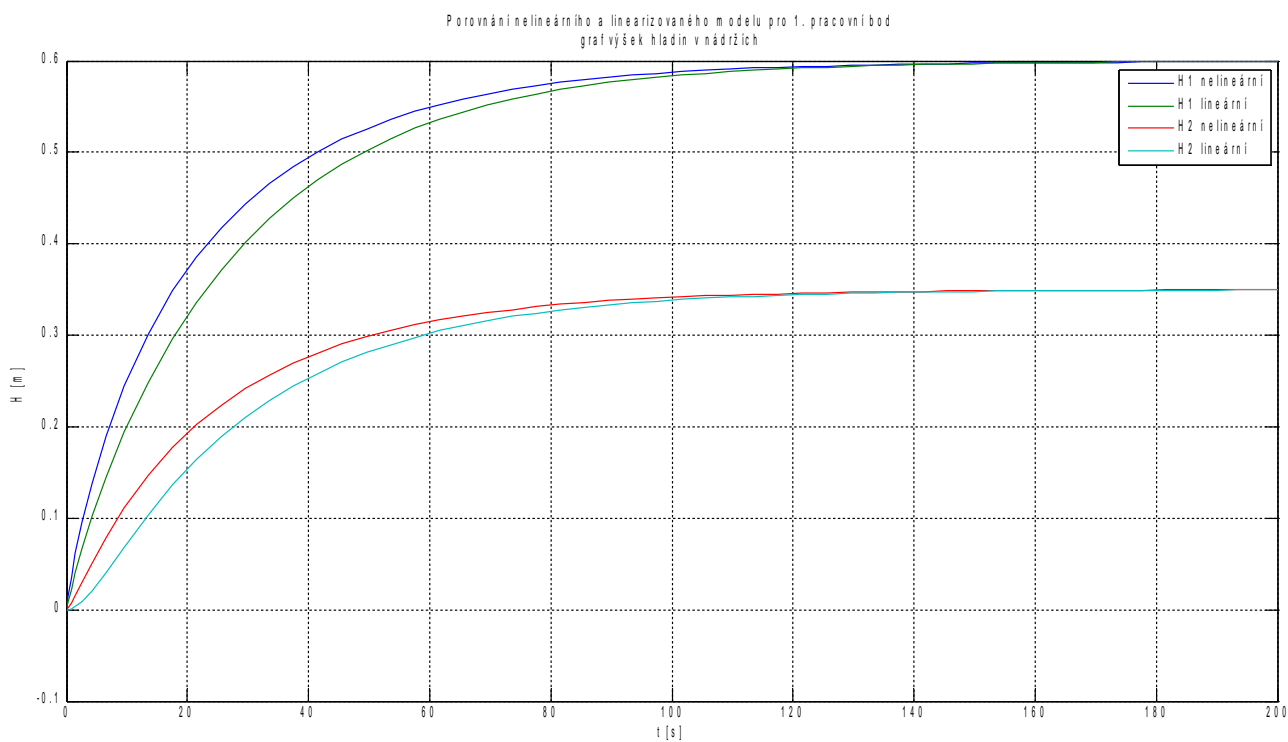
2. pracovní bod:  $Q_1 = 0,00018$   $H_1 = 0,863$ ;  $H_2 = 0,504$ ;  $S_P = 0,000113$ ;  $S_2 = 0,0000954$ :

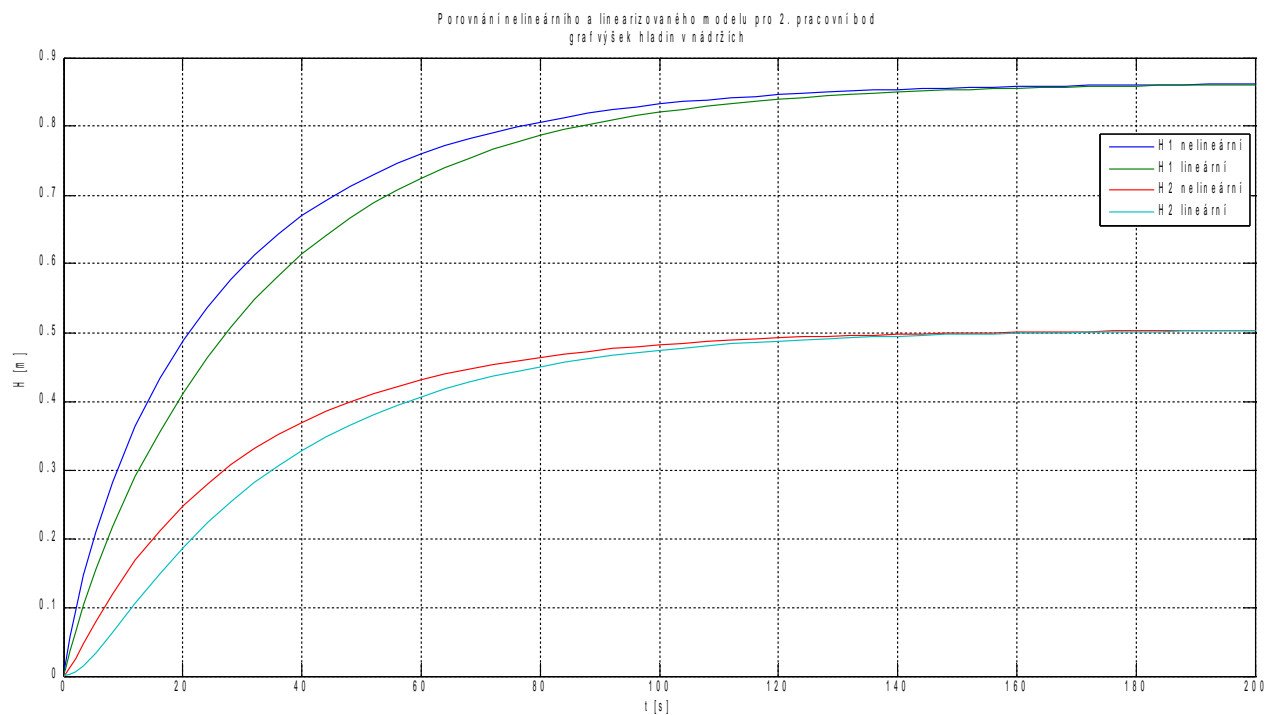
$$A = \begin{bmatrix} -0,1 & 0,1 \\ 0,1 & -0,17 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2.4. Porovnání nelineárního a linearizovaných modelů

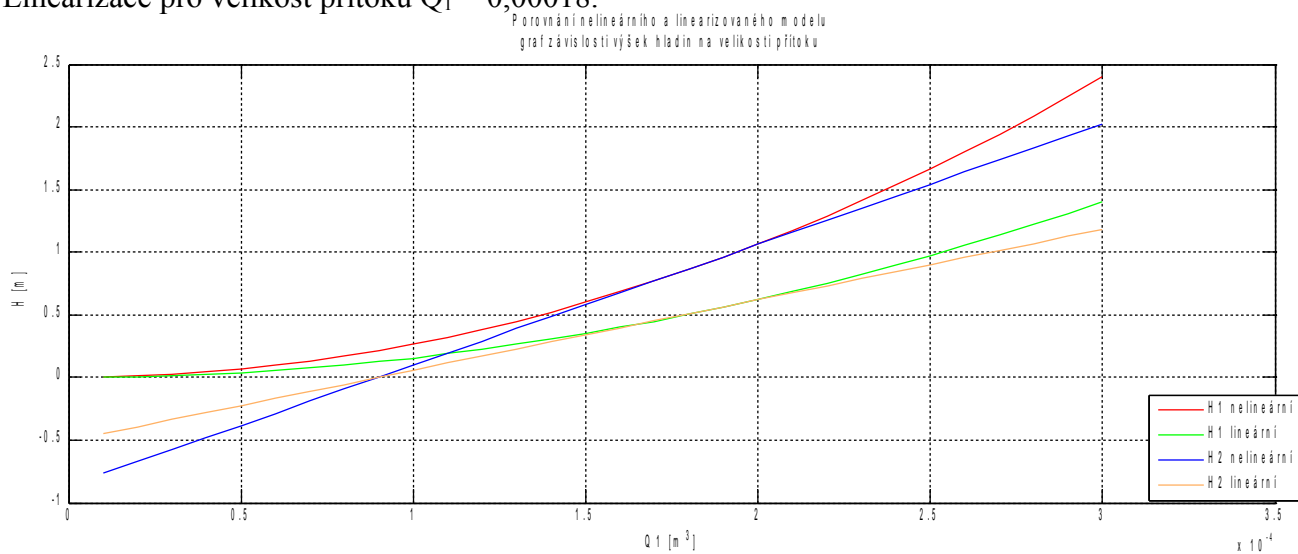
### 2.4.1. Přechodové charakteristiky





## 2.4.2. Statická charakteristika

Linearizace pro velikost průtoku  $Q_1 = 0,00018$ .



## 2.5. Výpočet přenosů

Uvažujeme model linearizovaný v bodě  $Q_1 = 0,00018$ . (Při zaokrouhlení došlo k menší chybě)

$$A = \begin{bmatrix} -0,1 & 0,1 \\ 0,1 & -0,17 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Přenos:

$$F(p) = C \cdot (pI - A)^{-1} \cdot B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} p+0,1 & -0,1 \\ -0,1 & p+0,17 \end{bmatrix}^{Adj} \cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F(p) = \begin{bmatrix} \frac{400p+68}{p^2+0,27p+0,007} \\ \frac{40}{p^2+0,27p+0,007} \end{bmatrix}$$

Dostáváme:  $F_1(p) = \frac{400p+68}{p^2+0,27p+0,007}, F_2(p) = \frac{40}{p^2+0,27p+0,007}$

### 2.5.1. Určení nul pólů , časové konstanty a zesílení

dané přenosy můžeme upravit do tvaru:

$$F_1(p) = 400 \cdot \frac{p+0,17}{(p+0,03) \cdot (p+0,24)}$$

$$F_2(p) = \frac{40}{(p+0,03) \cdot (p+0,24)}$$

nuly:

$F_1$ :  $q = -0,17$      $F_2$ : -

póly: (společné pro oba přenosy)

$p_1 = -0,03$        $p_2 = -0,24$

časové konstanty:

$\tau = -1/q = 5,88$

$T_1 = -1/p_1 = 33,33$        $T_2 = -1/p_2 = 4,16$

Statické zesílení:

$F_1$ :  $k_1 = 9714,28$        $F_2$ :  $k_2 = 5714,29$



## 2.5.2 Určení impulzních a přechodových funkcí

Rozklad na parciální zlomky:

$$F_1(p) = \frac{400p + 68}{(p + 0,03)(p + 0,24)} = \frac{A}{p + 0,03} + \frac{B}{p + 0,24} = \frac{\frac{800}{3}}{p + 0,03} + \frac{\frac{400}{3}}{p + 0,24}$$

$$F_2(p) = \frac{40}{(p + 0,03)(p + 0,24)} = \frac{A}{p + 0,03} + \frac{B}{p + 0,24} = \frac{\frac{4000}{21}}{p + 0,03} - \frac{\frac{4000}{21}}{p + 0,24}$$

### 2.5.2.1. Impulzní funkce

- impulzní funkce je reakce systému na Diracův impuls  $\delta(t)$
- po zlaplaceování:

$$G_1(p) = F_1(p) \cdot L\{\delta(t)\} = F_1(p) \cdot 1$$

$$G_2(p) = F_2(p) \cdot L\{\delta(t)\} = F_2(p) \cdot 1$$

$$G_1(p) = \frac{\frac{800}{3}}{p + 0,03} + \frac{\frac{400}{3}}{p + 0,24}, \quad G_2(p) = \frac{\frac{4000}{21}}{p + 0,03} - \frac{\frac{4000}{21}}{p + 0,24}$$

- po odlaplaceování:

$$g_1(t) = L^{-1}\{G_1(p)\}$$

$$g_2(t) = L^{-1}\{G_2(p)\}$$

$$g_1(t) = \frac{800}{3} e^{-0,03t} + \frac{400}{3} e^{-0,24t}, \quad g_2(t) = \frac{4000}{21} e^{-0,03t} - \frac{4000}{21} e^{-0,24t}$$

### 2.5.2.2. Přechodová funkce

- přechodová funkce je reakce systému na jednotkový skok 1 ;  $t > 0$
- po zlaplaceování:

$$H_1(p) = L\{1\} \cdot F_1(p) = \frac{1}{p} \cdot F_1(p)$$

$$H_2(p) = L\{1\} \cdot F_2(p) = \frac{1}{p} \cdot F_2(p)$$

$$H_1(p) = \frac{400p + 68}{p(p + 0,03)(p + 0,24)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 0,03} + \frac{C}{p + 0,24} = \frac{\frac{85000}{9}}{p} - \frac{\frac{80000}{9}}{p + 0,03} - \frac{\frac{5000}{9}}{p + 0,24}$$

$$H_2(p) = \frac{40}{p(p + 0,03)(p + 0,24)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 0,03} + \frac{C}{p + 0,24} = \frac{\frac{50000}{9}}{p} - \frac{\frac{400000}{63}}{p + 0,03} + \frac{\frac{50000}{63}}{p + 0,24}$$

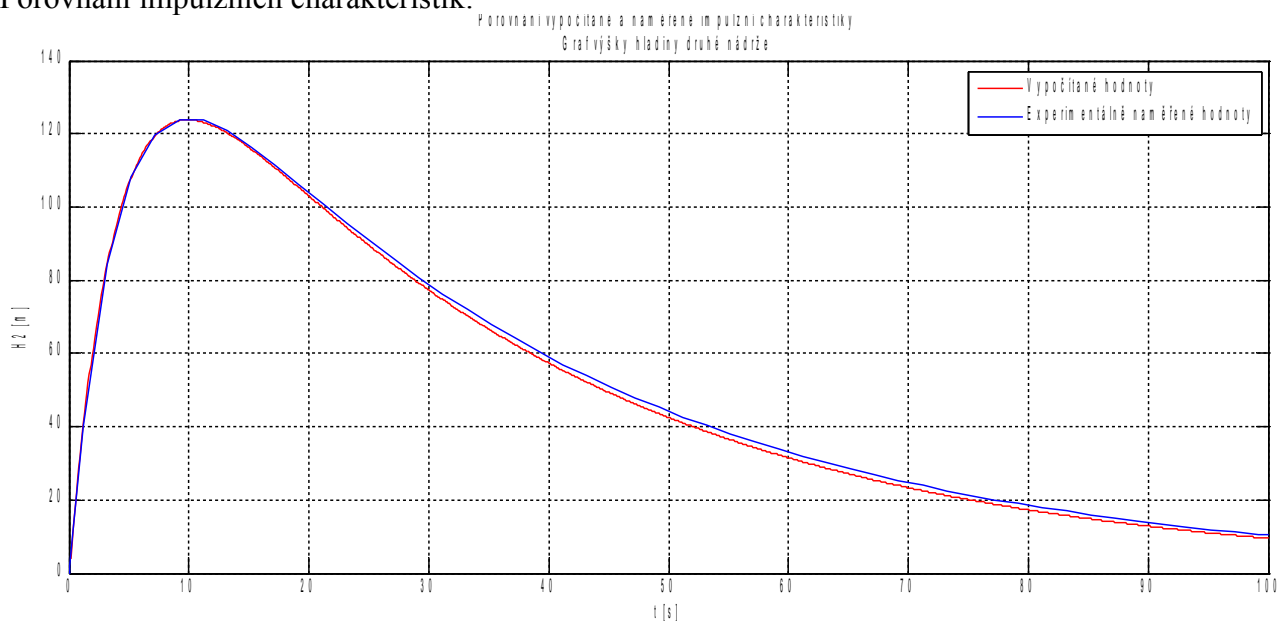
- po odlaplaceování:

$$h_1(t) = \frac{85000}{9} - \frac{80000}{9} e^{-0,03t} - \frac{5000}{9} e^{-0,24t}$$

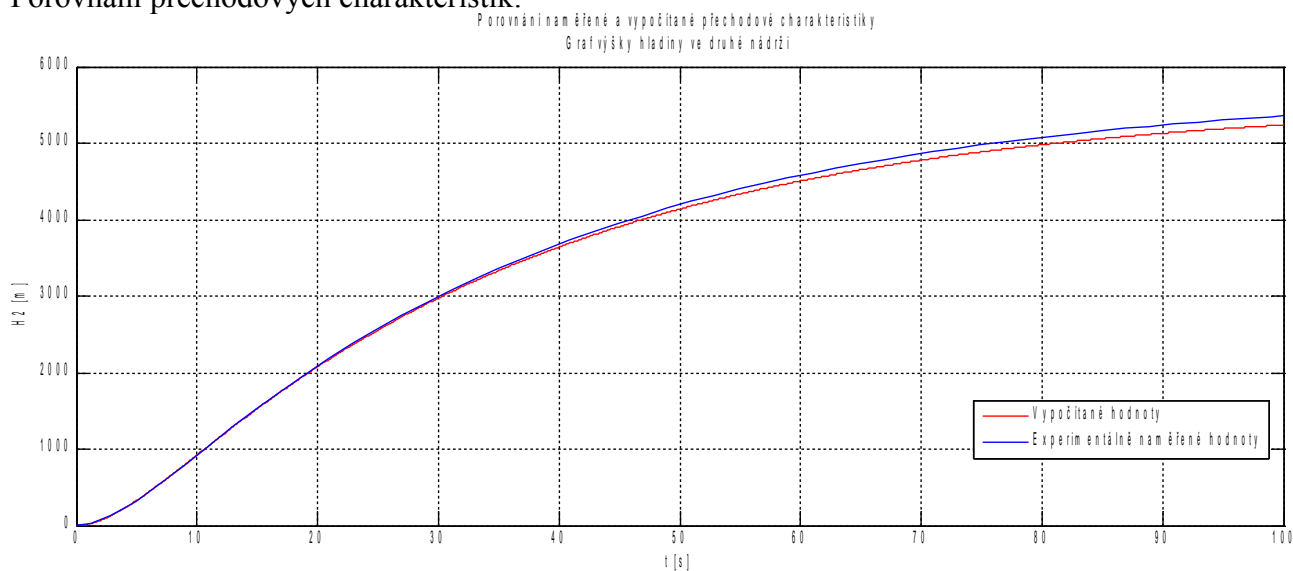
$$h_2(t) = \frac{50000}{9} - \frac{400000}{63} e^{-0,03t} + \frac{50000}{63} e^{-0,24t}$$

### 2.5.3. Porovnání charakteristik

Porovnání impulzních charakteristik:



Porovnání přechodových charakteristik:



## 2.6. Stavová reprezentace ve Frobeniově a Jordanově tvaru

Pro přenos:  $F_2(p) = \frac{40}{p^2 + 0,27p + 0,007}$  dostáváme stavovou reprezentaci:

### 2.6.1. Frobeniova forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,007 & -0,27 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 40], D = [0]$$

Přenos systému rozložíme na parciální zlomky:

$$F_2(p) = \frac{40}{(p+0,03)(p+0,24)} = \frac{A}{p+0,03} + \frac{B}{p+0,24} = \frac{\frac{4000}{21}}{p+0,03} - \frac{\frac{4000}{21}}{p+0,24}$$

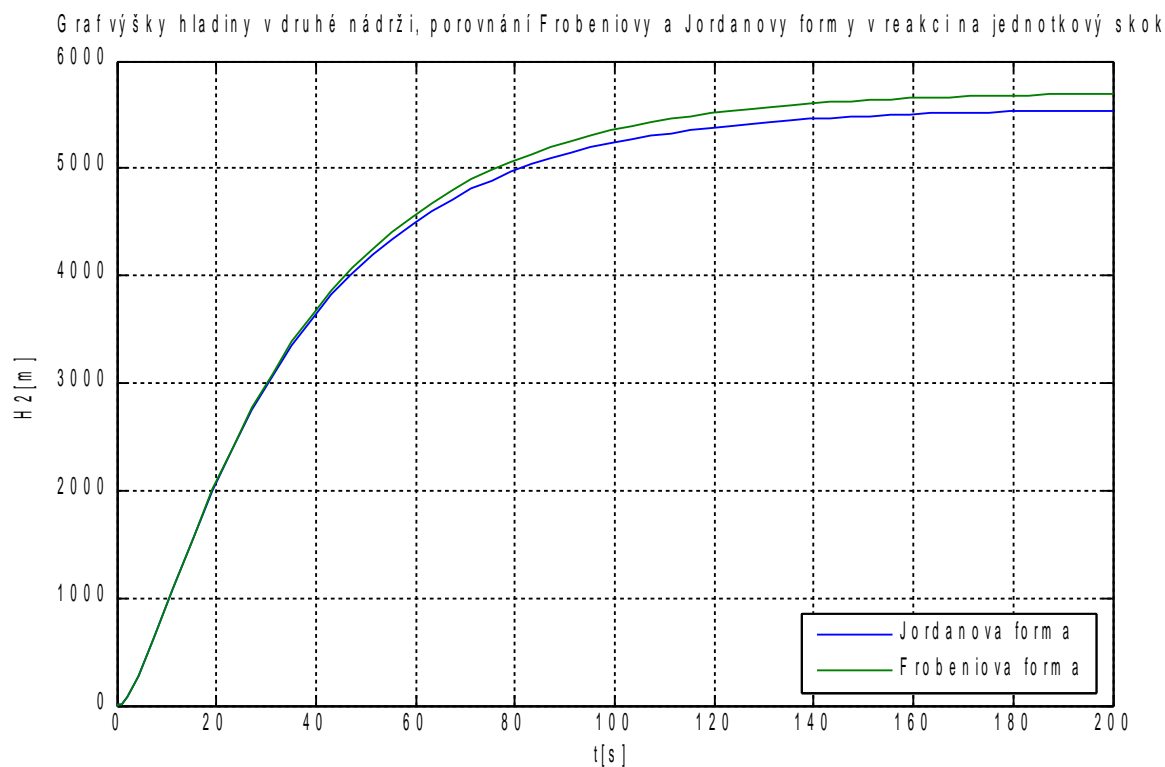
z něhož určíme stavovou reprezentaci

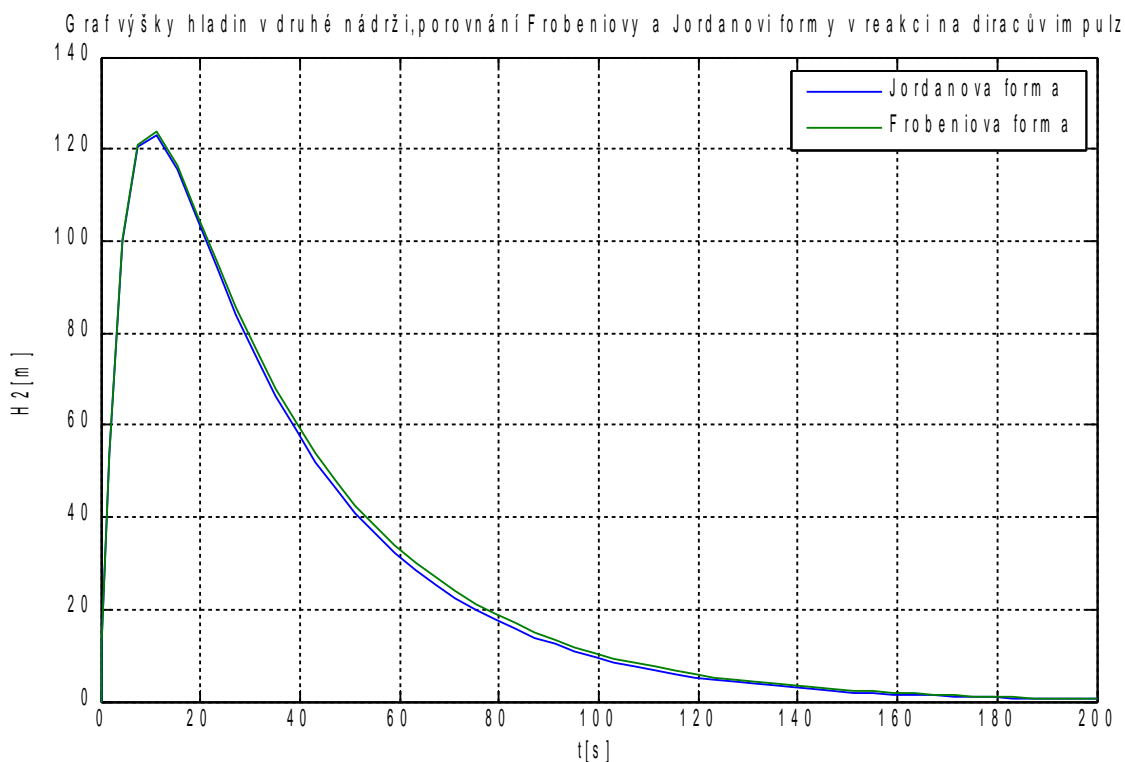
### 2.6.2. Jordanova forma

$$A = \begin{bmatrix} -0,03 & 0 \\ 0 & -0,24 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{4000}{21} & -\frac{4000}{21} \end{bmatrix}, D = [0]$$

### 2.6.3. Ověření ekvivalence Frobeniovy a Jordanovy formy





#### 2.6.4. Stabilita

Pro určení zda je systém stabilní jsme zvolili Hurwitzovo kritérium stability, kde se vychází z přenosu a jeho výpočet je poměrně jednoduchý..

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & 0 \\ a_n & a_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,27 & 0 \\ 1 & 0,007 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = 0,27, \quad H_2 = 0,27 \cdot 0,007 - 0 \cdot 1 = 1,89 \cdot 10^{-3}$$

Všechny **subdeterminanty** jsou **kladné** => systém je **stabilní**.

#### 2.6.5. Řiditelnost

Systém je říditelný, jestliže pro libovolný počátečný stav  $x_0$  existuje řízení  $u$  na konečném intervalu, které převádí stav  $x_0$  do počátku stavového prostoru.

Systém je říditelný právě tehdy, má-li matice říditelnosti systému plnou řádkovou hodnotu.

Lineární,  $t$ -invariantní systém charakterizovaný dynamickými rovnicemi:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad , \text{ kde } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m} \text{ má matici říditelnosti:}$$

$$X = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

Hodnost matice řiditelnosti lineárního systému je 2 => systém má plnou řádkovou hodnost...je **řiditelný**

Hodnost matice řiditelnosti pro Frobeniovu formu je 2 => systém má plnou řádkovou hodnost...je **řiditelný**

Hodnost matice řiditelnosti pro Jordanovu formu je 2 => systém má plnou řádkovou hodnost...je **řiditelný**

### 2.6.6. Pozorovatelnost

Systém nazýváme pozorovatelný jestliže libovolný počáteční stav  $x_0$  v čase 0 lze rekonstruovat ze známého vstupu  $u(t)$  a výstupu  $y(t)$  na intervalu  $[0; t_1]$  pro libovolný čas  $t_1 > 0$ .

Systém je pozorovatelný právě tehdy, když má matice pozorovatelnosti plnou sloupcovou hodnost.

Lineární, t-invariantní systém charakterizovaný dynamickými rovnicemi:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad , \text{ kde } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m} \text{ má matici}$$

pozorovatelnosti:  $Q = [C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]^T$

Hodnost matice pozorovatelnosti lineárního systému je 2 => systém má plnou sloupcovou hodnost...je **pozorovatelný**

Hodnost matice pozorovatelnosti pro Frobeniovu formu je 2 => systém má plnou sloupcovou hodnost...je **pozorovatelný**

Hodnost matice pozorovatelnosti pro Jordanovu formu je 2 => systém má plnou sloupcovou hodnost...je **pozorovatelný**

## 3. Model systému s čerpadlem

### 3.1. Stavový model

Pro vytvoření stavového modelu systému s vodním čerpadlem využíváme matice lineárního systému. Aby byl stavový model kompletní musíme přidat stavovou proměnnou  $Q_1(t)$ . Její derivaci vyjádříme pomocí přenosu čerpadla s motorem:

$$\begin{aligned} F_{Mc}(p) &= \frac{Q_{10}}{0,5 * p + 1} = Q_1 \frac{(p)}{U_K}(p) \\ Q_1(p) &= \frac{Q_{10} * U_K(p)}{0,5 * p + 1} = \frac{2 * Q_{10} * U_K(p)}{p + 2} \\ (p + 2) Q_1(p) &= 2 * Q_{10} * U_K(p) \\ p * Q_1(p) &= 2 * Q_{10} * U_K(p) - 2 * Q_1(p) \\ \dot{Q}_1(t) &= 2 * Q_{10} * U_K(t) - 2 * Q_1(t) \\ \dot{Q}_1(t) &= 0,0003 * U_K(t) - 2 * Q_1(t) \end{aligned}$$

Stavový model:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{Q}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,12 & 0,12 & 400 \\ 0,12 & -0,21 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ Q_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * U_K(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ Q_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} * U_K(t)$$

### 3.2. Přenos systému s čerpadlem

Přenosová funkce od napětí na kotvě na výšky hladin určíme jako součin  $F_{MC}(p) \cdot F_1(p)$ , resp.  $F_{MC}(p) \cdot F_2(p)$  :

$$F_{MC,Y_1}(p) = F_{MC}(p) \cdot F_1(p) = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{0,5p+1} \cdot \frac{400p+84}{p^2+0,33p+0,0108} = \frac{0,06p+0,0126}{0,5p^3+1,165p^2+0,3354p+0,0108}$$

$$F_{MC,Y_2}(p) = F_{MC}(p) \cdot F_2(p) = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{0,5p+1} \cdot \frac{48}{p^2+0,33p+0,0108} = \frac{0,0072}{0,5p^3+1,165p^2+0,3354p+0,0108}$$

### 3.3. Stabilita regulované soustavy

#### 3.3.1. Nastavení PID regulátoru

Výšku hladiny řídíme pomocí PID regulátoru připojeného k soustavě', jehož přenos má tvar:

$$F_{reg}(p) = K * \left(1 + \frac{1}{T_i * p}\right) = \frac{100,925p+3,67}{27,5p}$$

Experimentálně jsme zjistili parametry regulátoru **K=3,67** **Ti=27,5**

Přenos otevřeného systému je:

$$F_0(p) = F_R(p) \cdot F_{MC,Y_2}(p) = \frac{0,0072KT_i p + 0,0072K}{0,5T_i p^4 + 1,165T_i p^3 + 0,3354T_i p^2 + 0,0108T_i p}$$

$$F_0 = \frac{0,72666p + 0,026424}{13,75p^4 + 32,0375p^3 + 9,2235p^2 + 0,297p}$$

Přenos uzavřeného systému je:

$$F_u(p) = \frac{F_0(p)}{1 + F_0(p)} = \frac{0,72666p + 0,026424}{13,75p^4 + 32,0375p^3 + 9,2235p^2 + 1,023p + 0,026424}$$

Všechny koeficienty jmenovatele jsou nenulové a kladné=> Stodolovy podmínky jsou splněny

### 3.3.2. Hurwitzovo kritérium stability

Hurwitzova matice:

$$\begin{bmatrix} 32,03753 & 1,023 & 0 & 0 \\ 13,75 & 9,2235 & 0,026424 & 0 \\ 0 & 32,0375 & 1,023 & 0 \\ 0 & 13,75 & 9,2235 & 0,026424 \end{bmatrix}$$

det(1)=32,03753

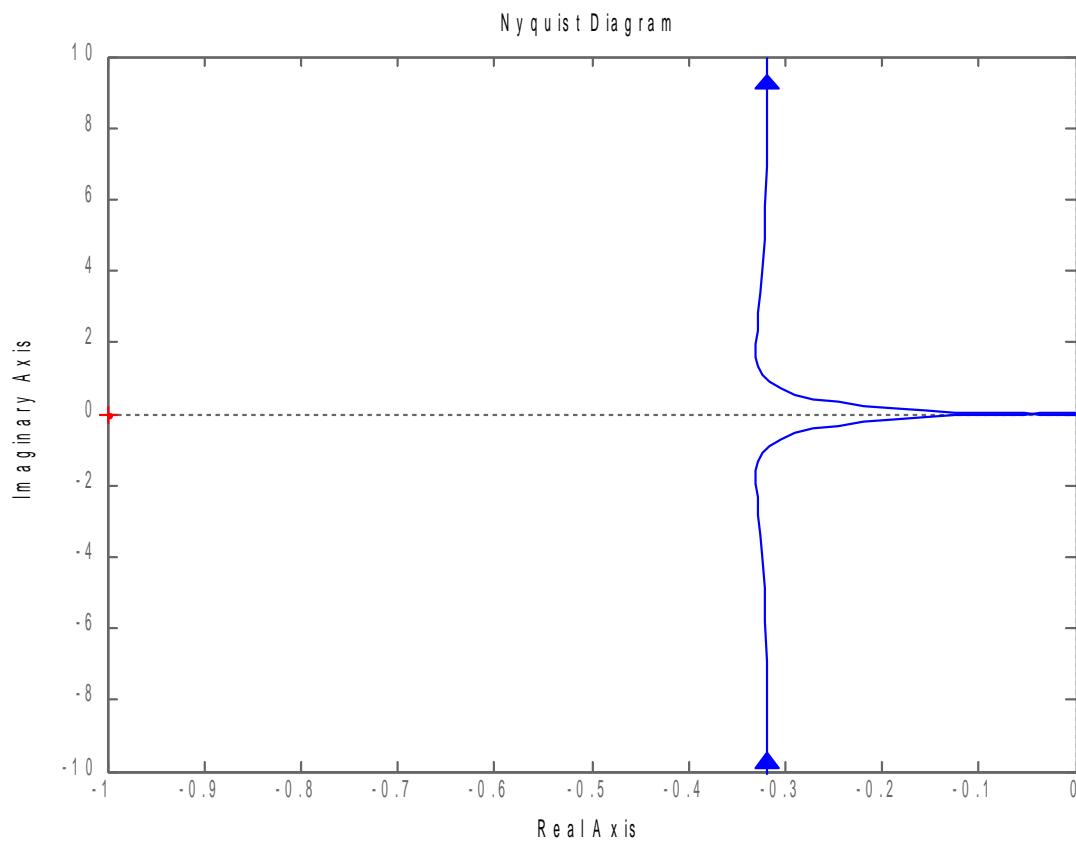
det(2)=281,37

det(3)=260,72

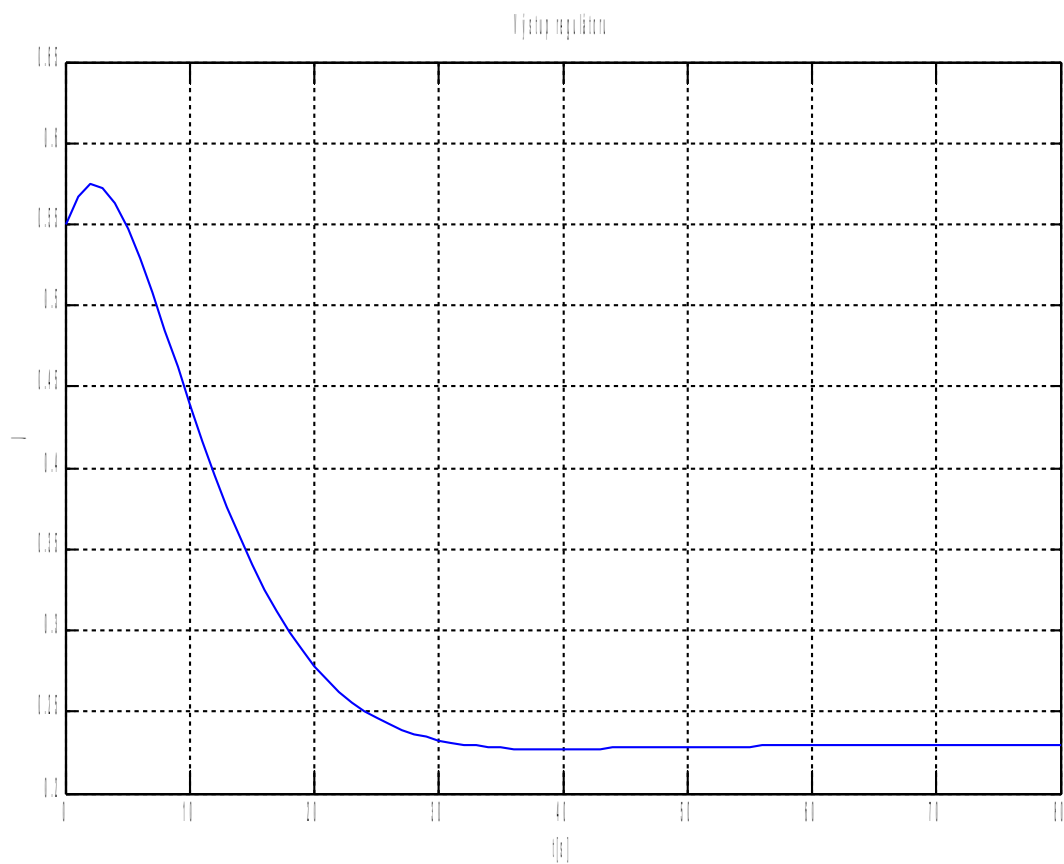
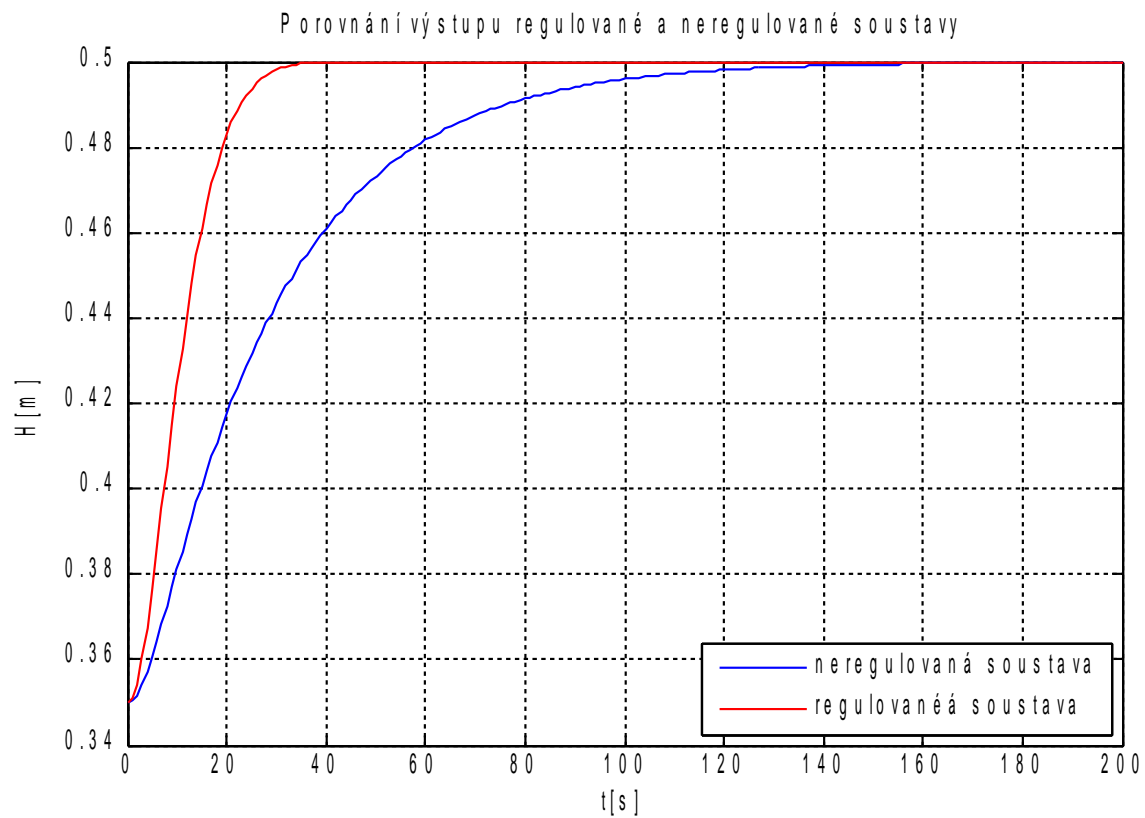
det(4)=5,9

Determinant i subdeterminanty jsou kladné=>Systém je stabilní

### 3.3.3. Nyquistovo kritérium stability

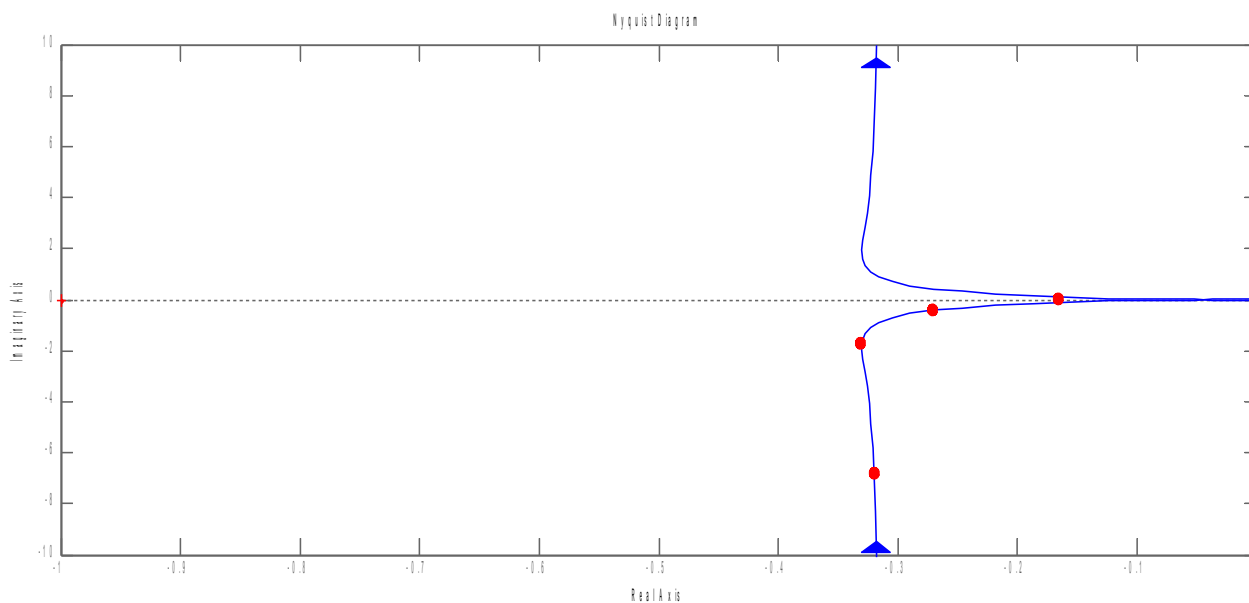


### 3.3.4. Porovnání výstupu regulované a neregulované soustavy a výstup regulátoru





### 3.3.5. Porovnání bodů frekvenční charakteristiky s Nyquistovou křivkou



Body frekvenční charakteristiky jsme naměřili experimentálně:

frekvence	zesílení	fáze
0.0128	6,95	-1,606
0.0474	1,875	-1,7538
0.158	0,5	-2,054
0.305	0,2	-2,501

Hodnoty získané z Nyquistova diagramu:

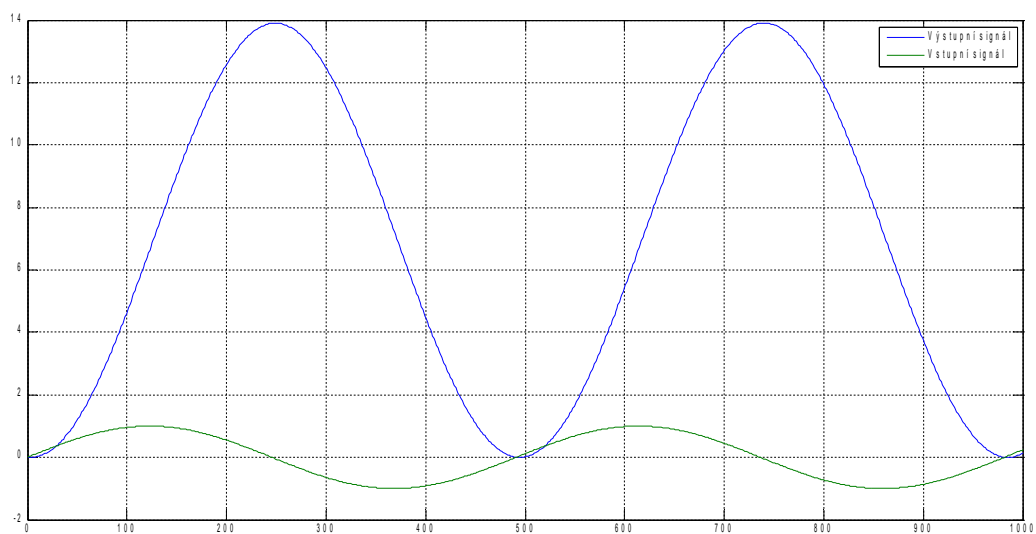
frekvence	zesílení	fáze
0.0128	6,9539	1,5248
0.0474	1,8676	1,3931
0.158	0,5003	1,0005
0.305	0,2024	0,6158

Odchyłky jsou patrně způsobeny krokem simulace, není tedy možné odečíst hodnoty z grafů přesně.

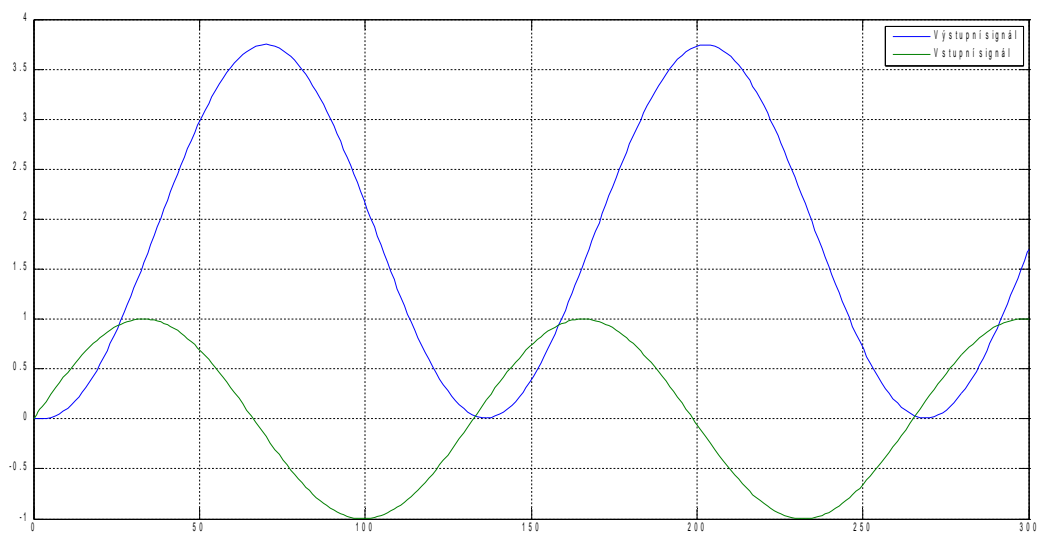
### 3.3.5.1. Odezvy systému na harmonické signály (slouží k určení amplitudy a fáze)

detail výstupu:

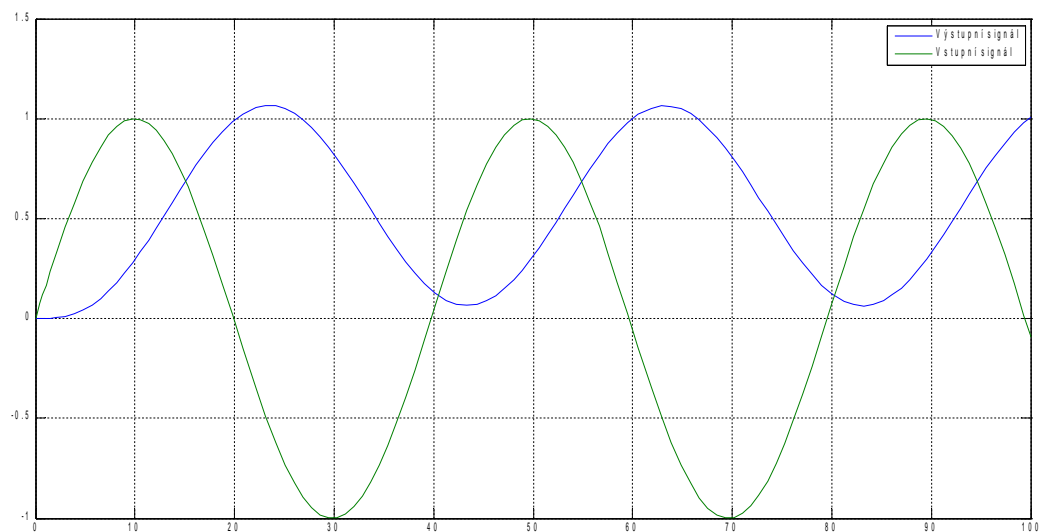
$$\omega=0,0128 \text{ rad/s}$$



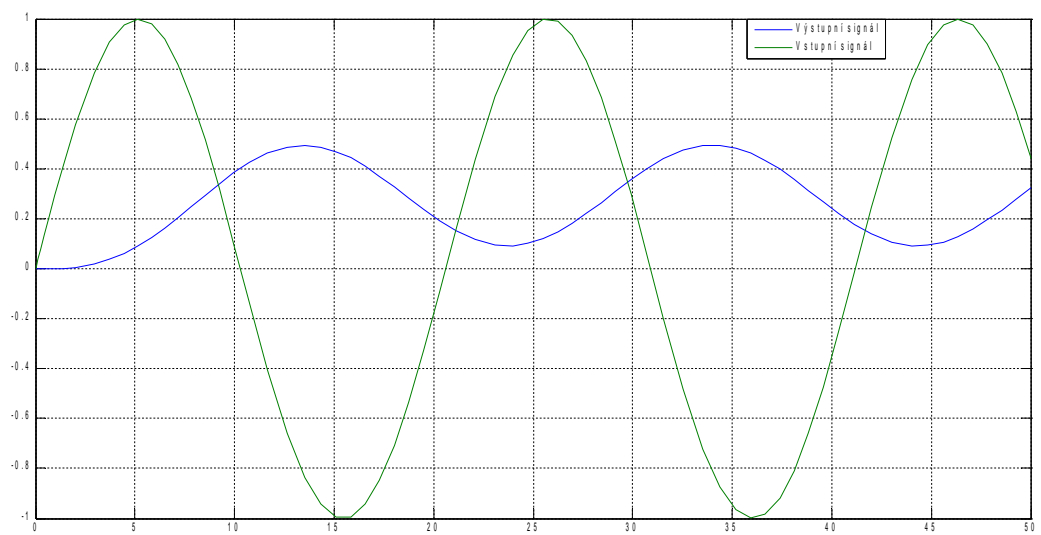
$$\omega=0,0474$$



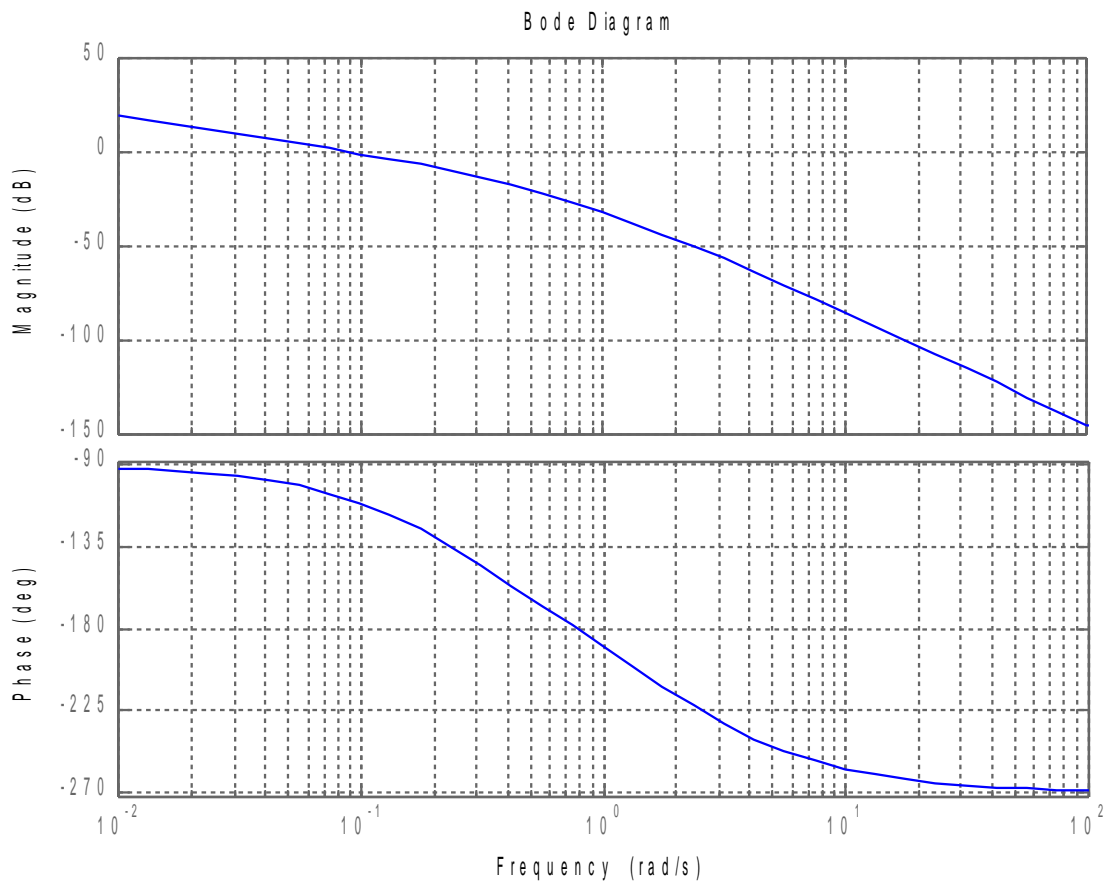
$\omega=0.158 \text{ rad/s}$



$\omega=0.305 \text{ rad/s}$



### 3.3.6. Bodeho charakteristiky



Hodnoty určené z Bodeho charakteristik:

$$\omega_{\text{krit}} = 0,759 \text{ rad/s}$$

$$K_0 = |F(j\omega)| = 0.04$$

#### 3.3.6.1. Bezpečnost v zesílení

$$1/K_0 = 25$$

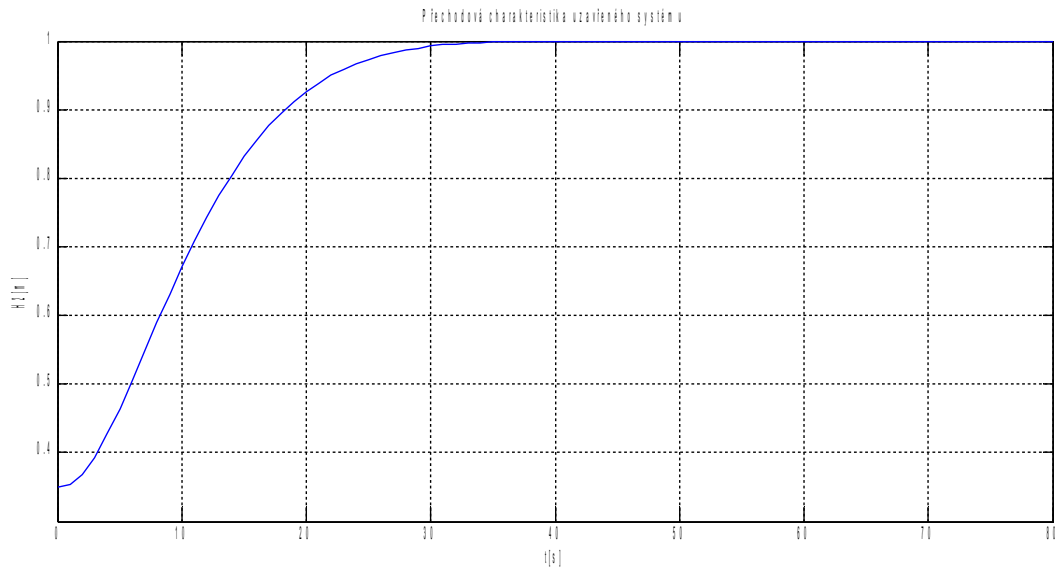
$$\omega_0 = 0.0857$$

$$\arg(F(\omega_0)) = -1,902$$

#### 3.3.6.2. Bezpečnost ve fázi

$$\gamma = 3,14 - 1,902 = 1,238$$

### 3.3.7. Přechodová charakteristika uzavřeného systému



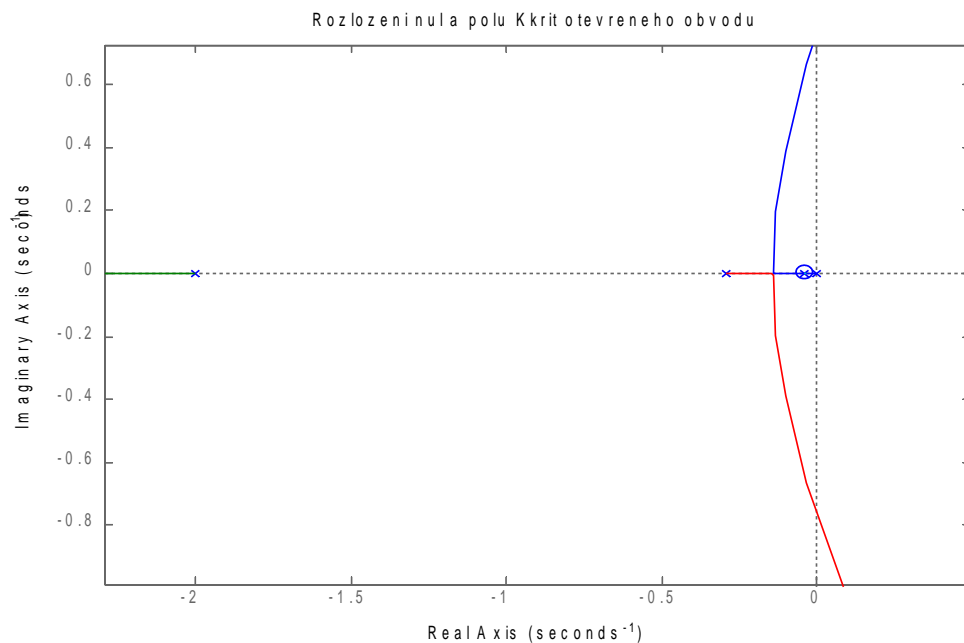
Na přechodové charakteristice je patrné, že regulátor urychlí ustálení na požadované hodnotě. Viz výše porovnání výstupu regulované a neregulované soustavy. V našem nastavení nedochází k předmitu ani podmitu při přechodu na ustálený stav.

### 3.4. Kritické zesílení K

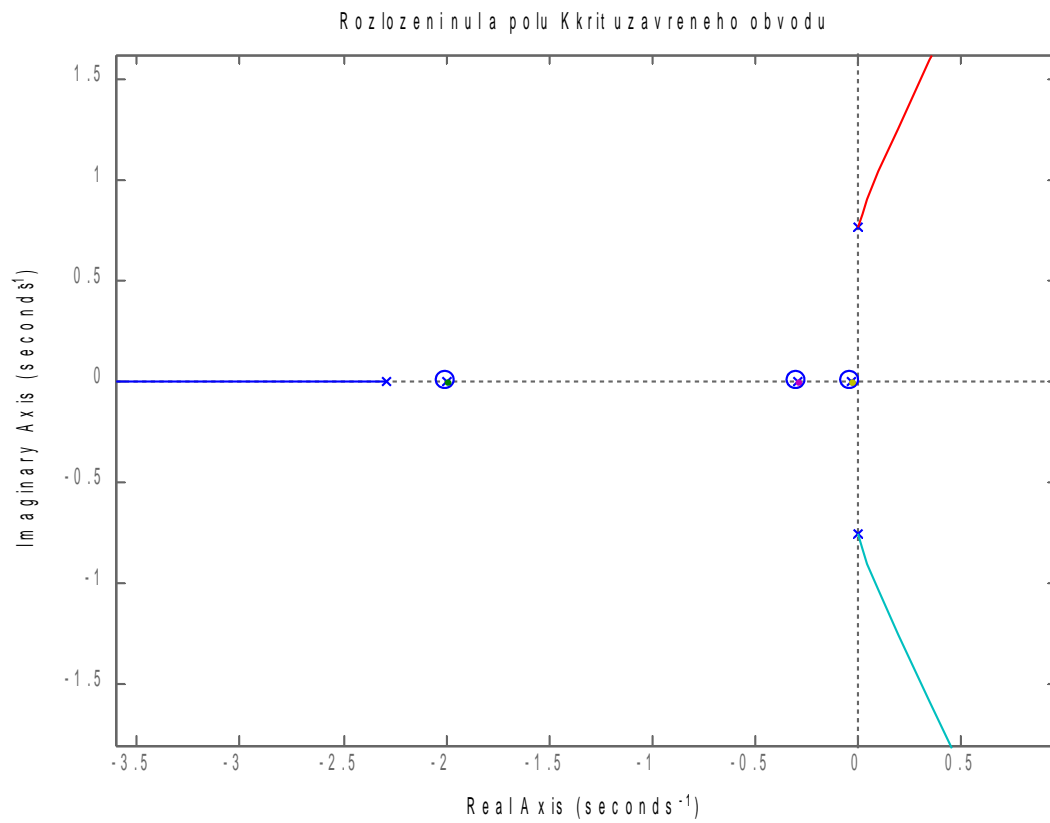
$$K_{krit} = \frac{1}{K_0} * K = 25 * 3.67 = 91,75$$

experimentálně: K<sub>krit</sub>=92

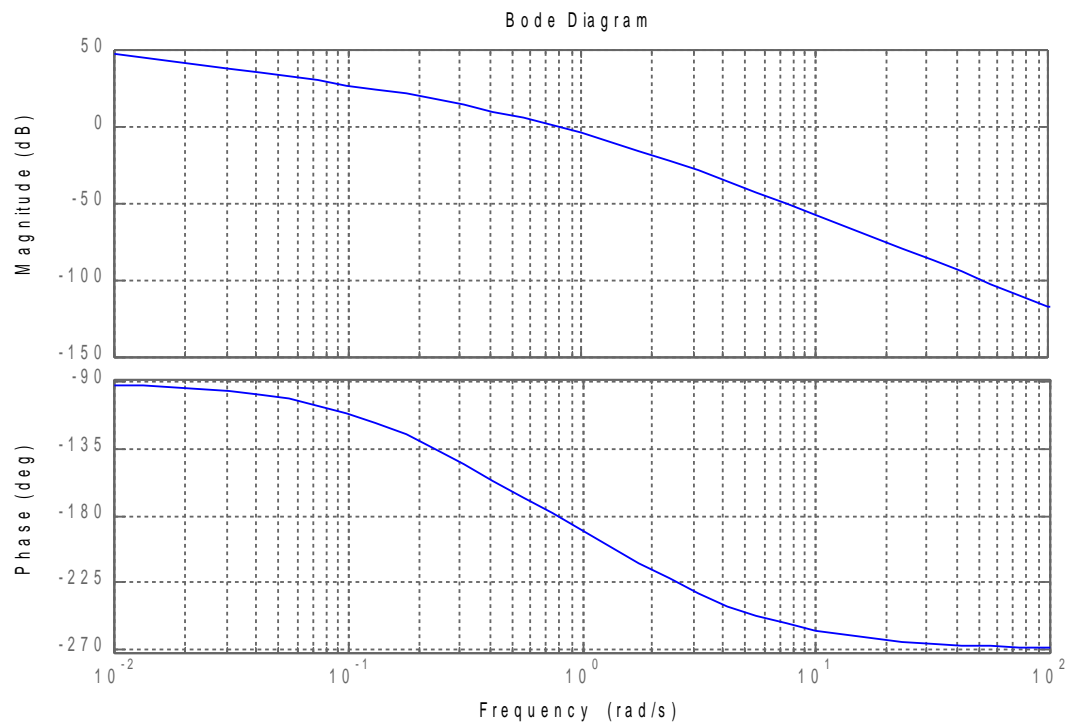
#### 3.4.1. Rozložení pólů a nul pro otevřený systém



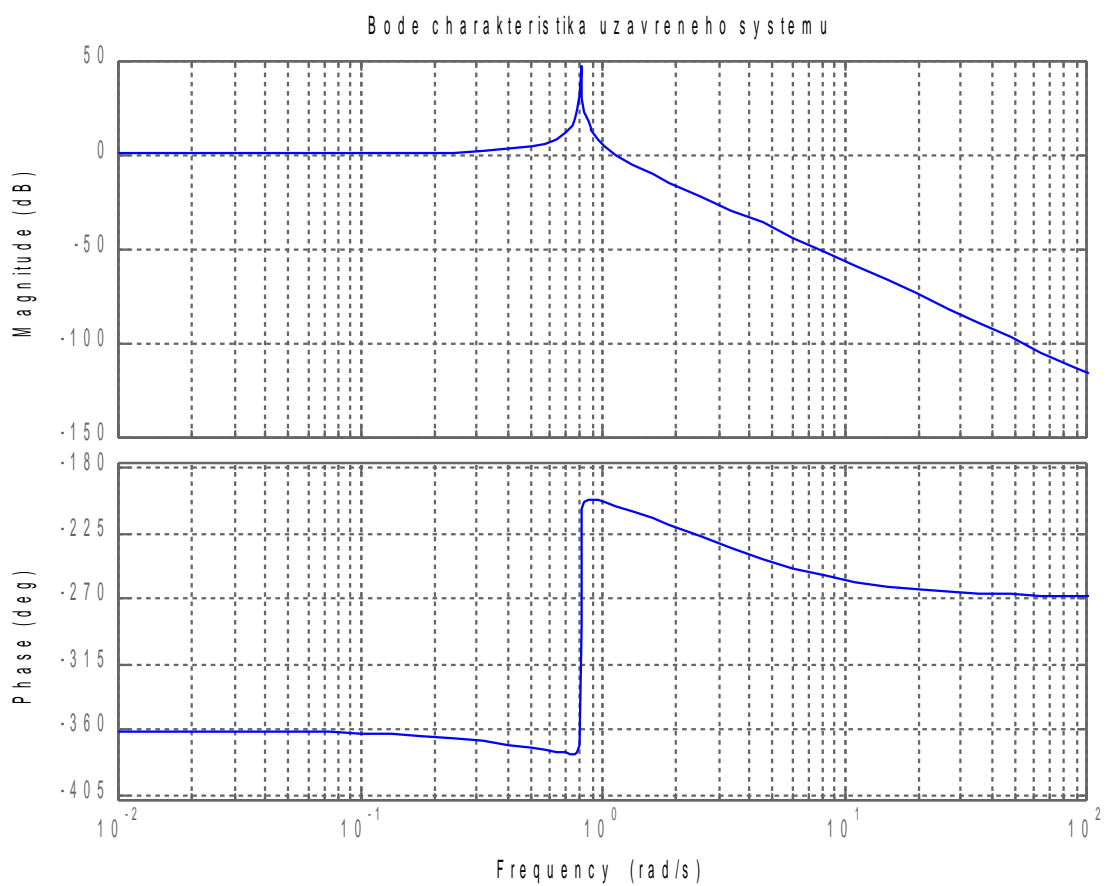
### 3.4.2. Rozložení pólů a nul pro uzavřený systém



### 3.4.3. Bodeho charakteristiky pro otevřený systém



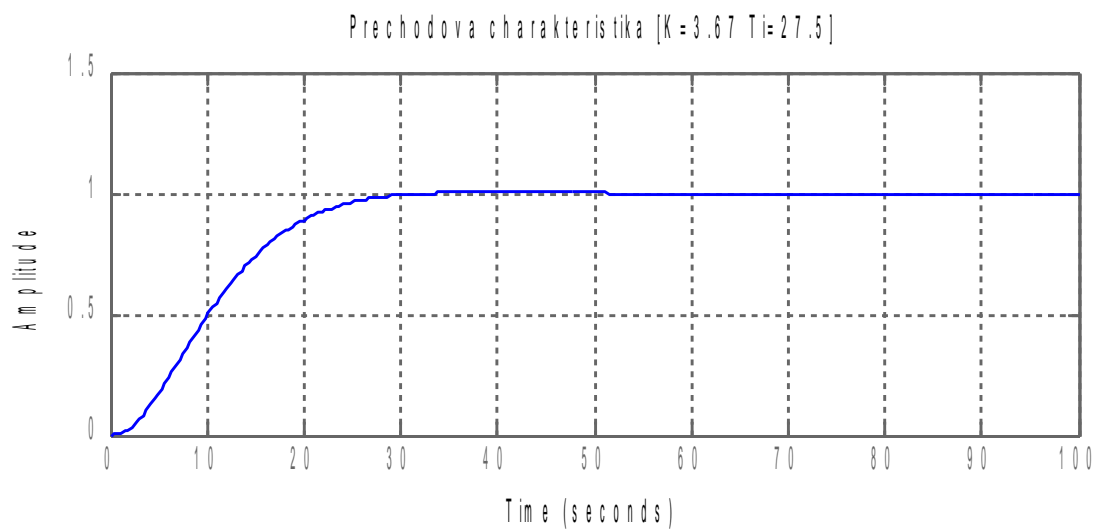
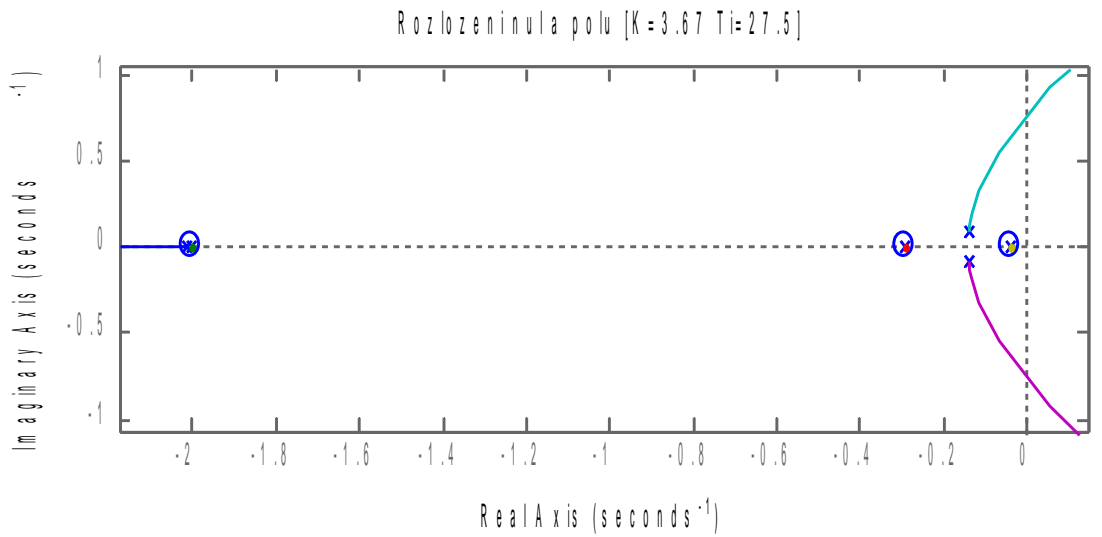
### 3.4.4. Bodeho charakteristiky pro uzavřený systém



### 3.5. GMK

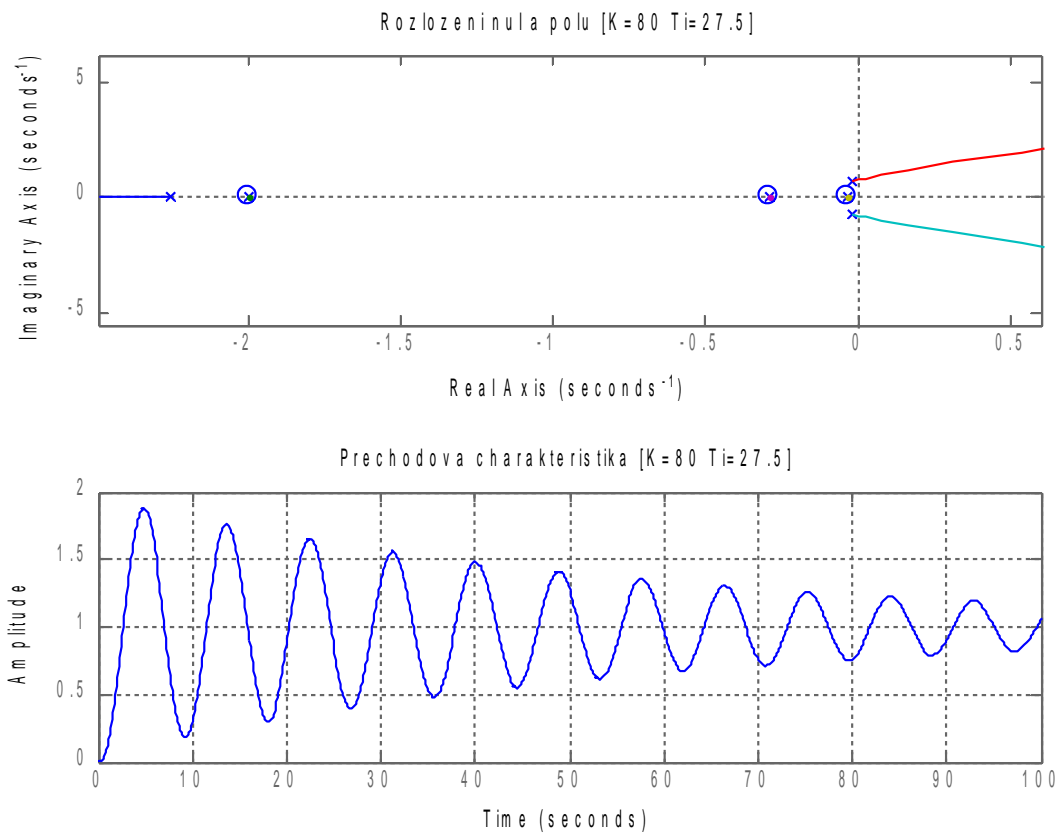
Rozbor je proveden pro tři různé hodnoty K a tři různé hodnoty Ti:

$K=3.66$   $T_i=27.5$

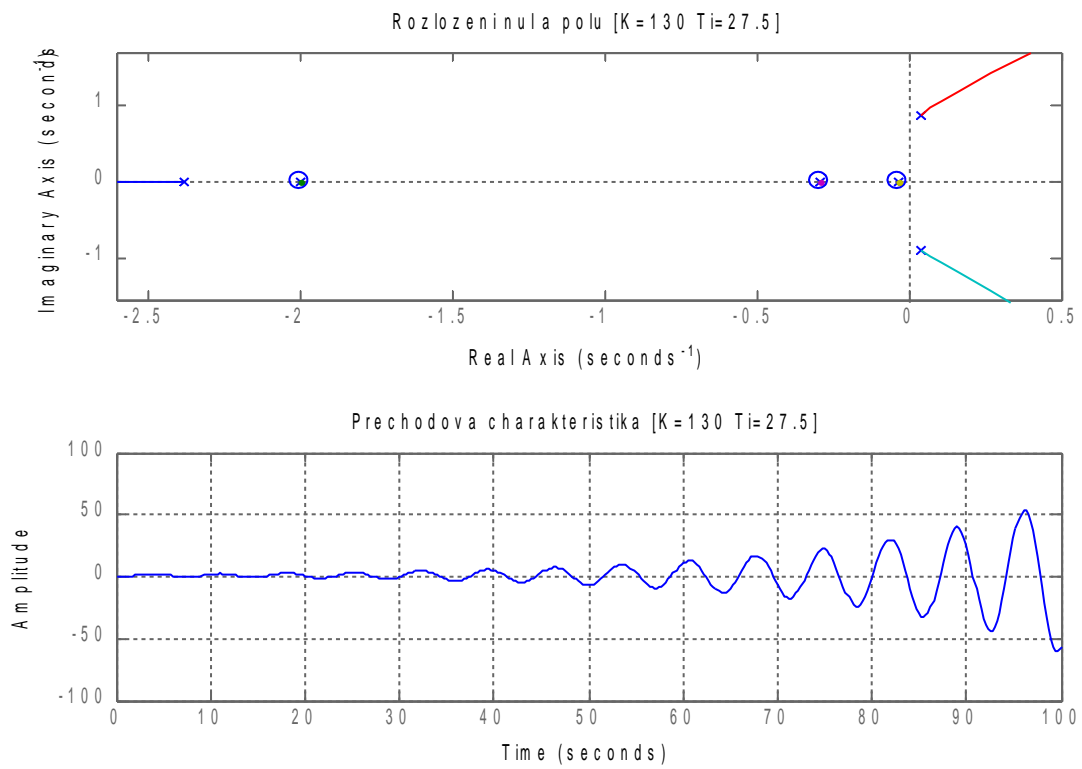




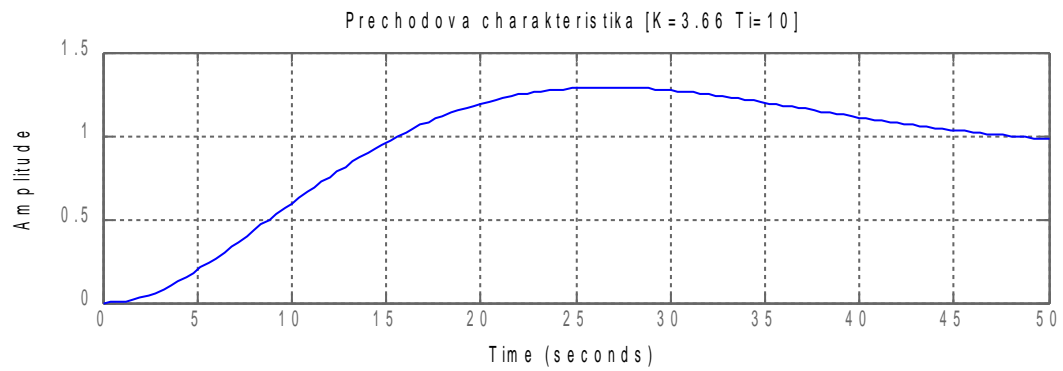
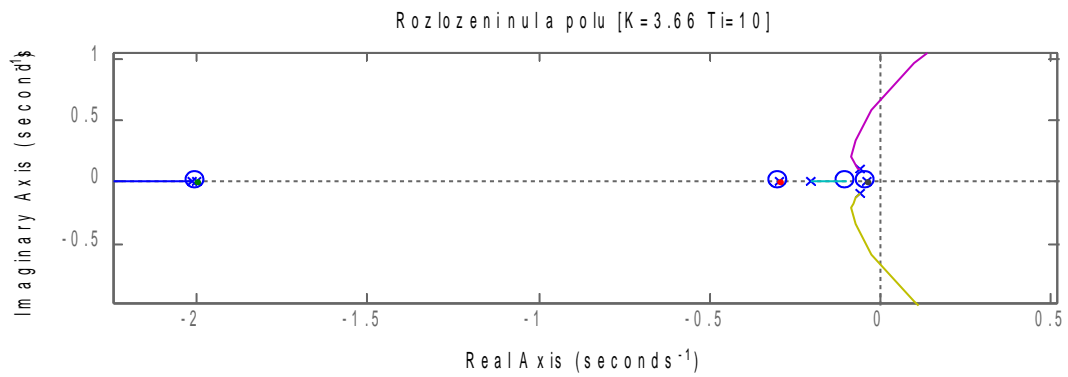
$K < K_{krit}$ :  $K=80$   $T_i=27,5$



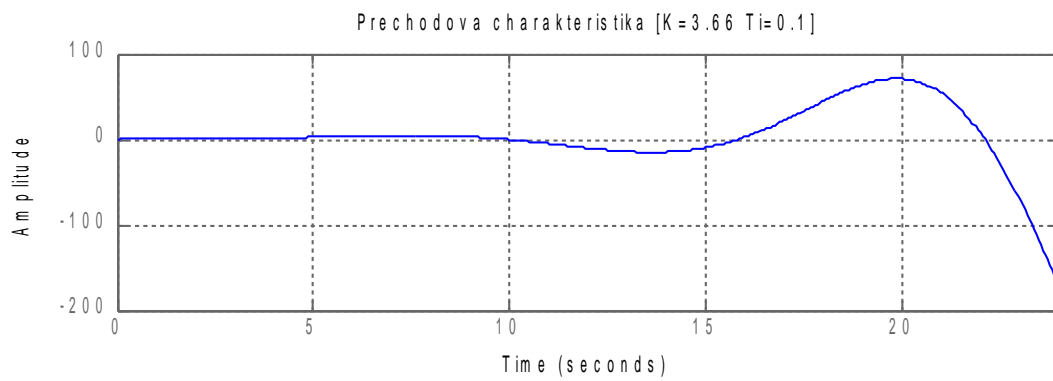
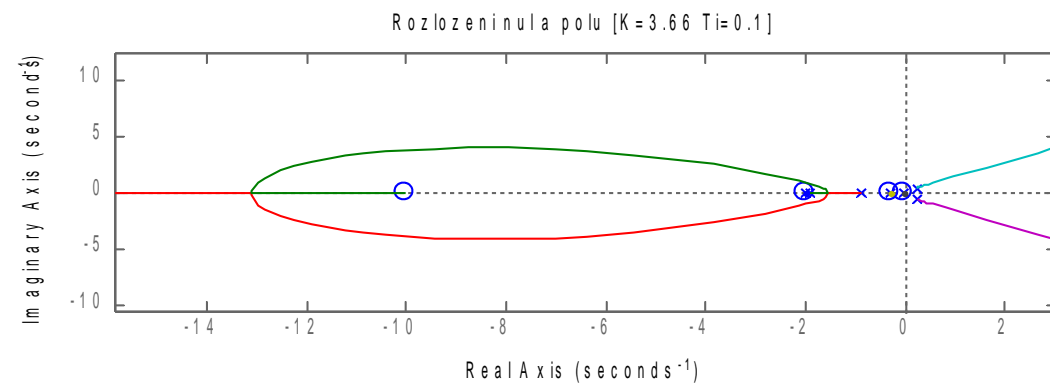
$K > K_{krit}$ :  $K=100$   $T_i=27,5$



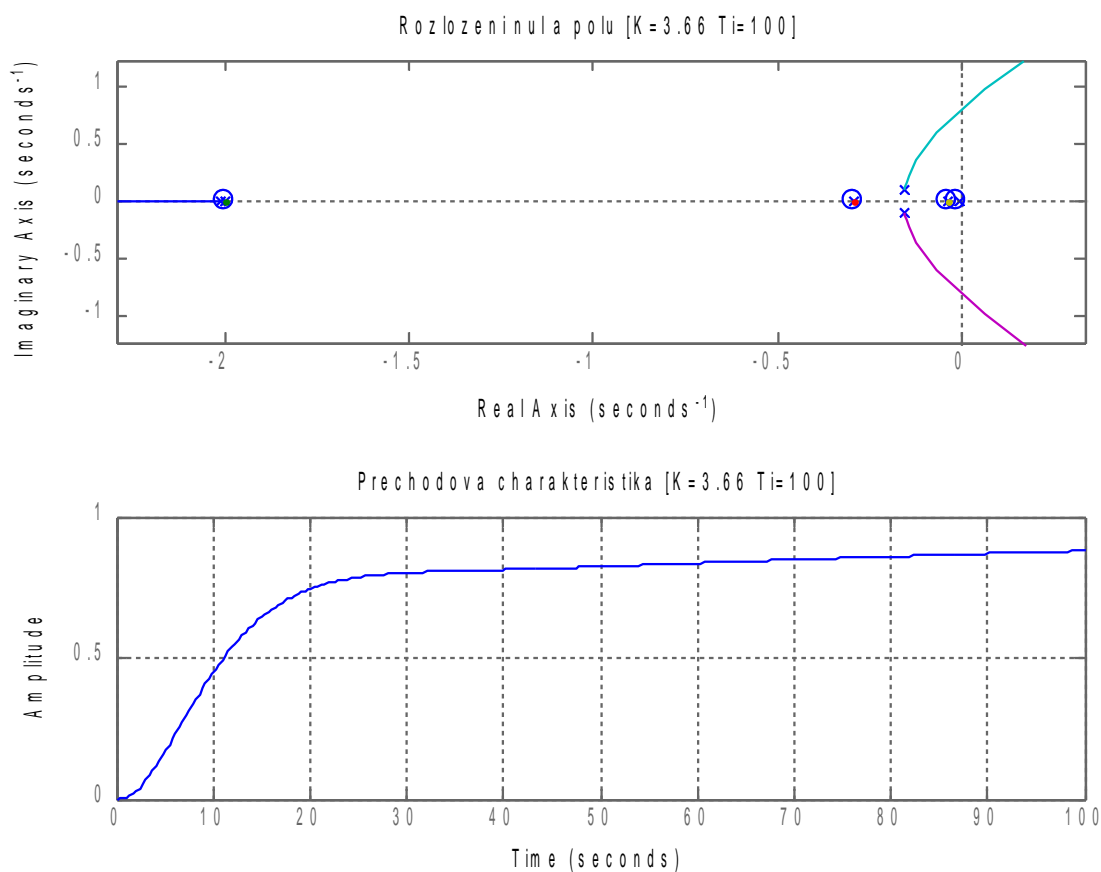
Zmenšení  $T_i$ :  $K=3.66$   $T_i=10$



$T_i$  ještě více zmenšíme:  $K=3.66$   $T_i=0.1$



Ti zvětšíme:  $K=3.66$   $T_i=100$



Experimenty s nastavením regulátoru jsme došli k závěru, že zvyšováním zesílení  $K$  a snižováním konstanty  $T_i$  se zrychluje průběh přechodového děje. Postupně se tento charakter dostane na mez stability a dále do oblasti nestability. Naopak snižování zesílení a zvyšování  $T_i$  nám zajistí stabilitu, stejně tak i pomalejší průběh přechodového děje.

### 3.6. Dopravní zpoždění

Dopravní zpoždění určíme pomocí bezpečnosti ve fázi a příslušné frekvence:

$$\tau_d = \frac{\gamma [\text{rad}]}{\omega [\text{rad/s}]}$$

$$\tau_d = \frac{1,238}{0.0857} = 14,44 \text{ sec}$$

## 4. Závěr

V semestrální práci jsme se zabývali analýzou systému dvou spojitých nádob. Systém jsme linearizovali, a poté porovnávali odchylky od nelineárního systému. Na závěr první části jsme určili stavové reprezentace.

V druhé části práce jsme přidali motor s čerpadlem a opět provedli analýzu. Následovalo nastavení PI regulátoru. Jakým způsobem ovlivní nastavení regulátoru samotnou regulaci je popsáno v závěru práce.