Automatické řízení

Miloš Schlegel
Jana Kőnigsmarková

Katedra kybernetiky
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

23. září 2013

Obsah přednášky

- Vybrané statě z lineární algebry
- Základy komplexní analýzy
- Úvod do obyčejných diferenciálních rovnic

- *Soustava lineárních rovnic*

  $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ neznámý vektor,
  $Ax = b$ má řešení $\Leftrightarrow$ $b \in \mathcal{R}(A)$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}([A|b]) = \mathrm{rank}(A)$

- *Vektorový prostor nad tělesem $\mathcal{T}$*

  $\mathcal{V}$ vektorový prostor

  i) $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ je jednoznačně určen $v_1 + v_2 \in \mathcal{V}$,
  ii) $\forall v \in \mathcal{V}, \lambda \in \mathcal{T}$ je jednoznačně určen $\lambda v \in \mathcal{V}$ a

  operace $+$ je asociativní a komutativní, operace skalárního násobení je asociativní a distributivní, existuje neutrální prvek $o : v + o = o + v = v$, $\forall v$ existuje $(-v) \in \mathcal{V} : v + (-v) = o$, pro jednotkový prvek je $1v = v$.

- *Norma*

  i) Pozitivita : $\|x\| > 0$, pro $x \neq 0$,
  ii) Homogenita: $\|ax\| = |a|\|x\|$, pro $a \in \mathbb{R}$
  iii) Trojúhelníková nerovnost: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

- *Skalární součin*
    i) Symetrie : $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
    ii) Linearita: $\langle x, ay + bz\rangle = a\langle x, y\rangle + b\langle x, z\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$
    iii) Pozitivita: $\langle x, x\rangle > 0$, pro $x \neq 0$.
    - př. : $x'Qy$ je skalární součin (je-li Q Hermitovská, pozitivně definitní matice)
    - př. : $\int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{dt}$ je skalární součin v prostoru spojitých funkcí
    - $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ (Cauchy-Schwarz)

- *Věta o projekci* (Princip ortogonality)
  Nechť $\mathcal{M}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathcal{V}$ a nechť $y \in \mathcal{V}$, $y \neq \mathcal{M}$, potom řešení $\hat{m}$ minim. problému

$$\min_{m \in \mathcal{M}} \|y - m\|$$

  vyhovuje podmínce $(y - \hat{m}) \perp \mathcal{M}$.

- *Lineární transformace a matice*
  $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou vektorové prostory; T je lineární, jestliže:
  $$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$
  Matice A s maticovým násobením $Ax = \left[\sum_k a_{ik} x_k\right]$ reprezentuje lineární zobrazení při dané bázi.

- *Maticové identity*
  i) $\det(I - AB) = \det(I - BA)$, $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times p}$,
  Důkaz
  $$\det(MN) = \det M \det N = \det(NM) \tag{1}$$
  Zvolíme-li $M = \begin{bmatrix} I & A \\ B & I \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix}$, potom
  $MN = \begin{bmatrix} I & A \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I - AB \end{bmatrix}$, $NM = \begin{bmatrix} I - AB & 0 \\ B & I \end{bmatrix}$.
  Dosazením do (1) obdržíme hledaný vztah. □

  ii) $(I - AB)^{-1} A = A(I - BA)^{-1}$,
  iii) $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1}$,
  Důsledek (iii): $(I - ab^T)^{-1} = I + \frac{1}{1 - b^T a} ab^T$.

- *Range, Rank (Obor hodnot, hodnost)*
  $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times p}, (A' = A^H)$
  $\mathcal{R}(A) = \{y : y = Ax, x \in \mathbb{C}^n\}$
  $\mathcal{N}(A) = \{x : Ax = 0, x \in \mathbb{C}^n\}$
  $\mathcal{R}^{\perp}(A) = \{y : x'y = 0, \forall x \in \mathcal{R}(A)\}$

  i) $\mathcal{R}^{\perp}(A) = \mathcal{N}(A')$,

  Důkaz

$$y \in \mathcal{R}^{\perp}(A) \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{R}(A) : x'y = 0 \Leftrightarrow \forall z : (Az)'y = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall z : z'A'y = 0 \Leftrightarrow A'y = 0 \Leftrightarrow y \in \mathcal{N}(A')$$

$\square$

  ii) $\mathcal{N}^{\perp}(A) = \mathcal{R}(A')$,
  iii) $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - n \leq \mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$

Metoda nejmenších čtverců (přeurčený problém)

$$
\begin{aligned}
Ax &= y \\
e &= y - Ax \\
\min_x &\|y - Ax\|_2
\end{aligned}
$$

(zavedl Legendre (1805), Gauss přibližně ve stejné době)

Z principu ortogonality plyne

$$
\begin{aligned}
(y - A\hat{x}) &\perp \mathcal{R}(A) \\
&\Updownarrow \\
a_i'(y - A\hat{x}) &= 0, \text{ pro } \forall i, A = [a_1, \ldots, a_n], a_i \text{ sloupce matice } A \\
&\Updownarrow \\
A'(y - A\hat{x}) &= 0 \\
A'A\hat{x} &= A'y (\text{ soustava normálních rovnic})
\end{aligned}
$$

Jestliže $A'A$ je regulární, $\hat{x} = (A'A)^{-1}A'y$.

Tato metoda nejmenších čtverců (MNČ) může být zobecněna pro nekonečně dimenzionální vektorové prostory (Hilbertovy prostory),

$$A = [a_1, \ldots, a_{n_A}], B = [b_1, \ldots, b_{n_B}]$$

$$\prec A, B \succ [\langle a_i, b_j \rangle], \text{ matice typu } n_A \times n_B$$

$\langle a_i, b_j \rangle$ skalární součin vektorů a_i, b_j

$\prec A, B \succ$ budeme nazývat Gramův součin (Gram product)

Jestliže uvažujeme, že $a_i, b_i \in \mathbb{R}^m$, potom

$$\langle a_i, b_j \rangle = a_i' b_j \text{ a } \prec A, B \succ = A'B$$

Lze však uvažovat nekonečně dimenzionální vektorový prostor (Hilbertův prostor); n_A, n_B však bude i zde konečné.

Například uvažujeme prostor $\mathcal{L}^2(-\infty, +\infty)$
$\mathcal{L}^2 = \{a(t) : \int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t)\mathrm{dt} < +\infty\}$
$\langle a(t), b(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} a^*(t) b(t) \mathrm{dt}$
Prostor $\mathcal{L}^2$ je Hilbertův prostor. (To co platí v Eukleidovském prostoru platí i v Hilbertově prostoru.)

Pro Gramův součin platí : (plyne z vlastností skalárního součinu)

$$\prec AF, BG + CH \succ = F' \prec A, B \succ G + F' \prec A, C \succ H,$$

kde F, G, H jsou konstantní (konečně rozměrné matice) a A, B, C jsou pole, jejichž sloupce jsou (nekonečně dimenzinální) vektory.

Odhad metodou nejmenších čtverců
$e = y - Ax$
$A = [a_1, \dots, a_n]$, a_i vektory, n konečné (případně i nekonečně dimenzionální)
Chceme nalézt $\hat{x}$

$$\hat{x} = \arg\min_x \|e\| = \arg\min_x \|y - Ax\|,$$

kde y, A jsou dané a $\|e\| = \sqrt{\langle e, e \rangle}$ (norma indukovaná skalárním součinem) (Jinými slovy : hledáme bod $\hat{y} = A\hat{x}$ z $\mathcal{R}(A)$, který je nejblíže bodu y.)
Budeme předpokládat, že vektory $a_1, \dots, a_n$ jsou nezávislé.

Lemma

(Gram Matrix Lemma)
Vektory $a_1, \dots, a_n$ jsou nezávislé právě tehdy, jestliže Gramova matice $\prec A, A \succ = [\langle a_i, a_j \rangle]$ je regulární.

Z principu ortogonality plyne $\hat{e} = (y - A\hat{x}) \perp \mathcal{R}(A)$.

Důkaz Nejprve dokážeme, že y lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $y = y_1 + y_2$, kde $y_1 \in \mathcal{R}(A)$ a $y_2 \in \mathcal{R}^{\perp}(A)$. Tj. $y_1 = A\alpha$, kde α je vhodný vektor. Poněvadž požadujeme $y_2 = y - y_1 \in \mathcal{R}^{\perp}(A)$, musí platit

$$\begin{aligned}
&\langle a_i, (y - A\alpha)\rangle = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
&\prec A, (y - A\alpha) \succ = 0, \qquad \text{Gramův součin} \\
&\prec A, y \succ - \prec A, A\alpha \succ = 0, \\
&\prec A, A \succ \alpha = \prec A, y \succ, \\
&\alpha = \prec A, A \succ^{-1} \prec A, y \succ . \qquad (2)
\end{aligned}$$

Zbývá dokázat jednoznačnost. Nechť ještě $y = y_{1a} + y_{2a}$, kde $y_{1a} \neq y_1$, $y_{1a} \in \mathcal{R}(A)$, $y_{2a} \in \mathcal{R}^{\perp}(A)$, potom $y_1 - y_{1a} = y_2 - y_{2a}$. Platí $y_1 - y_{1a} \in \mathcal{R}(A)$, $y_2 - y_{2a} \in \mathcal{R}^{\perp}(A)$, odtud $y_1 - y_{1a} = 0$ a $y_2 - y_{2a} = 0$. Tedy rozklad je jednoznačný.
Nyní podobně rozložíme chybový vektor $e = y - Ax$, tj. $e = e_1 + e_2$, $e_1 \in \mathcal{R}(A)$, $e_2 \in \mathcal{R}^{\perp}(A)$.
Pro takový rozklad platí $\|e\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$.
Dále rovnost $e = y - Ax$ lze přepsat na

$$e_1 + e_2 = y_1 + y_2 - Ax,$$

$$e_2 - y_2 = y_1 - e_1 - Ax.$$

Pravá strava poslední rovnosti leží v $\mathcal{R}(A)$ a levá v $\mathcal{R}^{\perp}(A)$. Z toho plyne, že $e_2 = y_2$ a výběr x tedy nemá žádný vliv na e_2. Obdobně $y_1 - e_1 - Ax = 0 \Rightarrow e_1 = y_1 - Ax = A(\alpha - x)$. Chceme-li minimalizovat $\|e\|^2$, musíme minimalizovat $\|e_1\|^2$ (e_2 je konstantní podle předchozího), tedy

$$\hat{x} = \alpha. \qquad (3)$$

Spojeními (2) a (3) jsme tedy dokázali, že $\hat{x} = \prec A, A \succ^{-1} \prec A, y \succ$. □

Tento výsledek je aplikovatelný na mnoho praktických problémů optimalizace.

- Pro případ, že uvažovaný vektorový prostor je $\mathbb{R}^m$, $(\mathbb{C}^m)$ a minimalizaci Eukleidovské normy

$$\|e\|^2 = e'e = \sum_{i=1}^{m} |e_i|^2 \qquad (= e'Se)$$

máme

$$\hat{x} = (A'A)^{-1}A'y \qquad (= (A'SA)^{-1}A'Sy).$$

Volíme-li S diagonální s kladnými prvky je

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^{m} s_{ii}|e_i|^2 \qquad \text{vážené nejmenší čtverce.}$$

V pravděpodobnostním přístupu: s_{ii} by měly být inverzní k rozptylu, $S = (E[ee'])^{-1}$.

- Příklad minimalizace normy v nekonečně rozměrném prostoru - Fourierova řada

$$\int_0^T [y(t) - a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 - \dots a_n(t)x_n]^2 \mathrm{dt} \to \min$$

$a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$ jsou následující funkce

$$1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \dots, \cos(N\omega t), \sin(N\omega t),$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, N je přirozené číslo, $n = 2N + 1$.

$\Downarrow$

$$A = [1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \dots, \cos(N\omega t), \sin(N\omega t)]$$

$$\prec A, A \succ = [\langle a_i, a_j \rangle]_{ij} = \left[\int_0^T a_i(t) a_j(t) \mathrm{dt}\right]_{ij}$$

$$\prec A, y \succ = [\langle a_i, y \rangle]_{ij} = \left[\int_0^T a_i(t) y(t) \mathrm{dt}\right]_{ij}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \mathrm{dt}$$

$$\alpha_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos(k\omega t) \mathrm{dt}$$

$$\beta_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin(k\omega t) \mathrm{dt}$$

$x_1 = \alpha_0, x_2 = \alpha_1, x_3 = \beta_1, \dots, x_{n-1} = \alpha_N, x_n = \beta_N$
Pozn. Matice $\prec A, A \succ$ je diagonální, poněvadž vybrané funkce jsou ortogonální.

Řešení přeurčené soustavy

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad m \geq n$$

v Matlabu metodou nejmenších čtverců $\|Ax - b\|^2 \to \min$

a) $x = A \setminus b$

b) $x = \mathrm{pinv}(A) * b$

c) $x = \mathrm{inv}(A' * A) * A' * b$

d) $[q, r] = qr(A)$

ad d) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ plné sloupcové hodnosti, potom je možné (mnoha způsoby) nalézt ortogonální matici U takovou, že

$$UA = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix},$$

kde R je regulární horní trojúhelníhová matice.
Nyní řešme MNČ rovnici

$$y = Ax \quad (\|y - Ax\|^2 \to \min).$$

Lze ukázat, že

$$\hat{x} = R^{-1} y_1,$$

kde y_1 je tvořen prvními n komponentami Uy.

Rekurzivní metoda nejmenších čtverců

$y_i = A_i x + e_i, \quad i = 0, 1, \ldots,$
kde $y_i \in \mathbb{C}^m$, $A_i \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$, $e_i \in \mathbb{C}^m$.
Vektor e_i reprezentuje chybu mezi měřením y_k a modelem $A_k x$, kde A_k je známá matice a x má být odhadnut.

$$\hat{x}_k = \arg\min_x \left(\sum_{i=1}^{k} (y_i - A_i x)^T S_i (y_i - A_i x) \right) =$$

$$= \arg\min_x \left(\sum_{i=1}^{k} e_i' S_i e_i \right),$$

kde $S_i \in \mathbb{C}^{m \times m}$ je pozitivně definitní Hermitovská matice (matice vah).
Označme

$$\bar{y}_{k+1} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{k+1} \end{bmatrix}, \bar{A}_{k+1} = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{k+1} \end{bmatrix}, \bar{e}_{k+1} = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{k+1} \end{bmatrix},$$

a $\bar{S}_{k+1} = \text{diag}\,(S_0, S_1, \ldots, S_{k+1})$, kde S_i je váhová matice pro e_i.

Náš problém je ekvivalentní následujícímu problému

$$\min(\bar{e}_{k+1}' \bar{S}_{k+1} \bar{e}_{k+1})$$

při omezení $\bar{y}_{k+1} = \bar{A}_{k+1} \bar{x}_{k+1} + \bar{e}_{k+1}$.

Podle předchozího je řešení dáno vztahem

$$\left(\bar{A}'_{k+1}\bar{S}_{k+1}\bar{A}_{k+1}\right)\hat{x}_{k+1} = \bar{A}'_{k+1}\bar{S}_{k+1}\bar{y}_{k+1}$$

nebo v sumační formě

$$\left(\sum_{i=0}^{k+1} A'_i S_i A_i\right)\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} A'_i S_i y_i.$$

Definujeme $Q_{k+1} \triangleq \sum_{i=0}^{k+1} A'_i S_i A_i$. Platí $Q_{k+1} = Q_k + A'_{k+1} S_{k+1} A_{k+1}$.
Celkem plyne

$$Q_{k+1}\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} A'_i S_i y_i,$$

$$\hat{x}_{k+1} = Q_{k+1}^{-1}\left(A'_{k+1} S_{k+1} y_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} A'_i S_i y_i\right),$$

$$\hat{x}_{k+1} = Q_{k+1}^{-1}\left(Q_k \hat{x}_k + A'_{k+1} S_{k+1} y_{k+1}\right).$$

Tedy nový odhad je lineární kombinací starého odhadu a nových dat. Další úprava vede na

$$\hat{x}_{k+1} = Q_{k+1}^{-1}\left(Q_{k+1}\hat{x}_k - A'_{k+1} S_{k+1} A_{k+1}\hat{x}_k + A'_{k+1} S_{k+1} y_{k+1}\right).$$

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + Q_{k+1}^{-1} A_{k+1} S_{k+1}\left(y_{k+1} - A_{k+1}\hat{x}_k\right).$$

- bohužel, jak přicházejí další a další data (tj. K roste), zesílení Kalmanova filtru konverguje k nule. Jeden další bod dat neovlivní velké množství předchozách dat. Proto je vhodné aplikovat techniku "zapomínání".

- pro výpočet Q_{k+1}^{-1} lze použít též rekurzi plynoucí z lemmatu o inverzi:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}.$$

Vyjde $Q_{k+1}^{-1} = Q_k^{-1} - Q_k^{-1}(A')_{k+1}^{-1}(A_{k+1}Q_k^{-1}A'_{k+1} + S_{k+1}^{-1})^{-1}A_{k+1}Q_{k+1}^{-1}$
Pro $P_{k+1} = Q_{k+1}^{-1}$ obdržíme
$P_{k+1} = P_k - P_k(A')_{k+1}^{-1}(A_{k+1}P_kA'_{k+1} + S_{k+1}^{-1})^{-1}A_{k+1}P_{k+1}$ (diskrétní Ricatiova rovnice).

Interpretace:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A_{k+1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e_k \\ e_{k+1} \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

$\hat{x}_k$ a y_{k+1} jsou k dispozici pro výpočet nového odhadu; můžeme tedy $\hat{x}_k$ a y_{k+1} interpretovat jako nové měření pro získání nového odhadu. Tj. platí (4) . Kritérium, podle kterého vybíráme nový odhad, je tedy

$$\hat{x}_{k+1} = \arg\min(e'_kQ_ke_k + e'_{k+1}S_{k+1}e_{k+1}).$$

$Q_k = P_k^{-1}$ je tedy váhový faktor pro předchozí odhad.

Řešení rovnice $y = \prec A, x \succ$ MNČ

Nechť A je pole m vektorů $A = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$, kde a_i, $i = 1, \ldots, m$ jsou vektory z libovolného vektorového prostoru se skalárním součinem (Hilbertův prostor). Hledáme vektor minimální délky splňující rovnici

$$y = \prec A, x \succ,$$

kde $\prec \cdot, \cdot \succ$ je Gramův součin zavedený výše.

Příklad: Nechť $y[0]$ je výstup nekauzálního FIR filtru

$$y[0] = \sum_{i=-N}^{N} h_i x[-i].$$

Popište množinu vstupních posloupností $x[i]$ takovou, že $y[0] = 0$. Posloupnosti s minimální energií jsou takové, pro které je $\sum_{i=-N}^{N} x^2[-i] \to \min.$

$$h_{-N}x_N + h_{-N+1}x_{N-1} + \ldots + h_N x_{-N} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_{-N} & h_{-N+1} & \ldots & h_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N \\ x_{N-1} \\ \vdots \\ x_{-N} \end{bmatrix} = 0.$$

Explicitní popis všech řešení
Nechť $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Potom $y = \prec A, x \succ$ přejde na $y = [\langle a_i, x\rangle] = [a_i' x]$, tj. na

$$A'x = y, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

kde A' má plnou řádkovou hodnost. Odtud plyne, že A' má též m nezávislých sloupců (musí tedy být $n \geq m$).
Podle Gramova maticového lemmatu je $\prec A, A \succ = A'A$ regulární. Nyní snadno ověříme, že

$$\check{x} = A(A'A)^{-1}y$$

je partikulární řešení rovnice $A'x = y$, neboť

$$A'\check{x} = A'A(A'A)^{-1}y = y.$$

Ukážeme, že toto řešení je současně hledané řešení s minimální normou.

Nejprve však nalezneme partikulární řešení pro obecnější rovnici

$$y = \prec A, x \succ: \tag{5}$$

$$\check{x} = A \prec A, A \succ^{-1} y. \tag{6}$$

Poněvadž platí $\prec A, A\alpha \succ = \left[\langle a_i, \sum_{j=1}^m a_j\alpha_j\rangle\right] = \left[\sum_{j=1}^m \alpha_j\langle a_i, a_j\rangle\right] = \prec A, A \succ \alpha$, platí též $\prec A, \check{x} \succ = \prec A, A \prec A, A \succ^{-1} y \succ = \prec A, A \succ \prec A, A \succ^{-1} y = y$ a (6) je řešení (5). Obecné řešení soustavy (5) je ve tvaru

$$x = \check{x} + x_h,$$

kde x_h je řešení soustavy

$$\prec A, x_h \succ = 0$$

$$A' x_h = 0 \qquad \text{(pro speciální případ uvažovaný výše)}$$

Nechť x je partikulární řešení rovnice $y = \prec A, x \succ$.
Položme $x = x_A + x_{A^\perp}$, kde $x_A \in \mathcal{R}(A)$, $x_{A^\perp} \in \mathcal{R}^\perp(A)$, potom platí

$$\langle x, x \rangle = \langle x_A, x_A \rangle + \langle x_{A^\perp}, x_{A^\perp} \rangle.$$

Poznamenejme, že rozklad x na x_A a $x_{A^\perp}$ je jednoznačný vzhledem ke skutečnosti, že sloupce A jsou lineárně nezávislé. Chceme-li tedy minimalizovat $\langle x, x \rangle$, musí být $\langle x_{A^\perp}, x_{A^\perp} \rangle = 0 \Rightarrow x_{A^\perp} = 0$. Poněvadž však dříve odvozené partikulární řešení

$$\check{x} = A \prec A, A \succ^{-1} y \in \mathcal{R}(A)$$

je zřejmé, že hledané řešení je $\hat{x} = \check{x} = x_A$, tj.

$$\hat{x} = A \prec A, A \succ^{-1} y. \tag{7}$$

Příklad: $\quad m\ddot{p}(t) = x(t)$
$m = 1, \ldots$ hmota, $p(t), \ldots$ poloha hmotného bodu, $x(t), \ldots$ působící síla
Předpokládejme (požadujme) $p(0) = 0, \dot{p}(0) = 0, p(T) = y = 1$ (bez omezení na rychlost $\dot{p}(t)$)
Potom platí

$$y = p(T) = \int_0^T (T - t)x(t)\mathrm{dt} = \langle a(t), x(t)\rangle,$$

kde $a(t) = T - t$. Hledejme řešení $x(t)$, pro které platí

$$\int_0^T x^2(t)\mathrm{dt} = \langle x(t), x(t)\rangle \to \min.$$

Podle (7) je hledané řešení dáno vztahem
$\hat{x}(t) = a(t)\left(\int_0^T a^2(t)\mathrm{dt}\right)^{-1} y = (T - t)[\frac{1}{3}T^3]^{-1}y = \frac{3(T-t)y}{T^3}$
$\hat{x}(t) = \frac{3(T-t)}{T^3}$

Nyní přidejme omezení na konečnou rychlost $\dot{p}(T) = 0$. V tomto případě požadujeme

$$1 = y_1 = p(T) = \int_0^T (T-t)x(t)\mathrm{d}t = \langle a_1(t), x(t)\rangle,$$

$$0 = y_2 = \dot{p}(T) = \int_0^T x(t)\mathrm{d}t = \langle a_2(t), x(t)\rangle,$$

kde $a_1(t) = T - t, a_2(t) = 1$.
Hledané řešení je podle (7) dáno vztahem

$$\hat{x}(t) = A \prec A, A \succ^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

kde $A = [a_1, a_2] = [T - t, 1]$,

$$\prec A, A \succ = \begin{bmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \langle a_1, a_2\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \langle a_2, a_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T (T-t)^2\mathrm{d}t & \int_0^T (T-t)\mathrm{d}t \\ \int_0^T (T-t)\mathrm{d}t & \int_0^T \mathrm{d}t \end{bmatrix} = $$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\prec A, A \succ^{-1} = \frac{1}{T^3(4-3T)} \begin{bmatrix} 12 & -6T^2 \\ -6T^2 & 4T^3 \end{bmatrix},$$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{T^3(4-3T)}(12(T-t) - 6T^2) = \frac{6(2t + T^2 - 2T)}{T^3(3T-4)}$$

- p-norma vektoru $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$,

  - Euklidovská norma vektoru ($p = 2$), tj. $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,

- p-norma matice $\|A\|_p = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$.
- maticová norma generovaná Euklidovskou normou

$$\|A\|_2 \triangleq \sup_{x \neq o} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2. \tag{8}$$

- Frobeniova norma matice

$$\|A\|_F \triangleq \left(\sum_{j=1^n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{trace}(A'A))^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Vlastní čísla, singulární čísla, perturbace

- A čtvercová matice řádu n, polynom $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ je charakteristický polynom matice A, jeho kořeny se nazývají vlastní čísla matice A, soubor všech vlastních čísel matice A se nazývá spektrum matice A a značí se $\Lambda(A)$. Nechť $\lambda \in \Lambda(A)$, potom nenulový vektor $v \in \mathbb{C}^n$ takový, pro který $(\lambda I - A)v = 0$, tj. $Av = \lambda v$, je vlastním vektorem matice A příslušný vlastnímu číslu λ.
- Řekneme, že matice A a B jsou podobné, jestliže existuje regulární matice T taková, že $A = TBT^{-1}$. Označujeme $A \sim B$.
- **Věta** Jsou-li matice A, B podobné, mají stejná vlastní čísla.
  Důkaz Jestliže jsou matice A, B podobné, existuje regulární matice T a lze psát $A = TBT^{-1}$. Potom $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - TBT^{-1}) = \det[T(\lambda I - B)T^{-1}] = \det(T)\det(\lambda I - B)\det(T^{-1}) = \det(\lambda I - B)$. □
- Nechť A je matice typu $n \times m$. Odmocniny z nenulových vlastních čísel matice A^*A (nebo AA^*) nazýváme singulárními čísly A a označujeme $\sigma(A)$, tj.
  $$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}, \tag{10}$$
  kde $i = 1, \ldots, k$ a $k = \mathrm{rank}(A)$.
- **Věta**(SVD) Nechť $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ a $\mathrm{rank}(A) = k$. Potom existují unitární matice $U \in \mathbb{C}^{m\times m}, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takové, že matici A lze vyjádřit jako součin
  $$A = U\Sigma V^*,$$
  kde $\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0\} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

- **Věta** Nechť $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, platí
$$\|A\|_2 = \sigma_1(A). \tag{11}$$
Důkaz Ze vztahu (8) pro normu matice a věty o singulárním rozkladu plyne
$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|U\Sigma V^* x\|_2.$$
Protože U a V jsou unitární matice a po substituci $y = V^*x$ ($\|x\|_2 = \|Vy\|_2 = \|y\|_2$) dostaneme, že
$$\max_{\|x\|_2=1} \|U\Sigma V^* x\|_2 = \max_{\|y\|_2=1} \|\Sigma y\|_2.$$
Předchozí rovnost můžeme dále rozepsat (pro $\operatorname{rank}(A) = k$ a podle vztahu pro normu vektoru) následně
$$\begin{aligned} \|A\|_2 = \max_{\|y\|_2=1} \|\Sigma y\|_2 = \\ = \max_{\|y\|_2=1} \sqrt{|\sigma_1 y_1|^2 + \ldots + |\sigma_k y_k|^2 + |0\cdot y_{k+1}|^2 + \ldots + |0 \cdot y_n|^2} = \\ = \max_{\|y\|_2=1} \sqrt{\sigma_1^2|y_1|^2 + \ldots + \sigma_k^2|y_k|^2} \le \max_{\|y\|_2=1} \sqrt{\sigma_1^2(|y_1|^2 + \ldots + |y_n|^2)} = \sigma_1(A). \end{aligned}$$
Nakonec pro vektor $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T$, tj. $x = v_1$, se maxima přímo dosahuje, tedy celkem $\|A\|_2 = \sigma_1(A)$. □
- **Věta** Nechť $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ a $\operatorname{rank}(A) = n$, platí
$$\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sigma_n(A). \tag{12}$$

- ekonomický tvar singulárního rozkladu $A = \sum_{i=1}^{k} \sigma_1 u_i v_i^*$
- vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ báze prostoru $\mathcal{R}(A)$, vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ báze prostoru $\mathcal{R}(A')$, vektory $u_{k+1}, \dots, u_m$ báze prostoru $\mathcal{N}(A')$, vektory $v_{k+1}, \dots, v_n$ báze prostoru $\mathcal{N}(A)$
- $\mathcal{N}(A'A) = \mathcal{N}(A)$
- pseudoinverze Penroseova-Moorova $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U$, kde $\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

  $\Sigma_r = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$, $r = \mathrm{rank}(A)$.
- $\kappa(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_{\min}(A)}$ číslo podmíněnosti obecné nesingulární matice
- $\min_{\mathrm{rank}(M_k)=k} \|M - M_k\| = \sigma_{k+1}(M)$,
  minima se dosahuje pro $M_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(M) u_i v_i^*$

- **Věta** (Perturbace v součtu) (Eukleidovská norma) Nechť $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$ a $\mathrm{rank}(M) = n$, platí

$$\min_{\Delta\in\mathbb{C}^{m\times n}} \{\|\Delta\|_2 : \mathrm{rank}(M+\Delta) < n\} = \sigma_n(M). \tag{13}$$

- **Věta** (Perturbace v součinu, Small gain theorem) (Eukleidovská norma) Nechť $M \in \mathbb{C}^{m\times p}$, platí

$$\min_{\Delta\in\mathbb{C}^{p\times m}} \{\|\Delta\|_2 : \mathrm{rank}(I - M\Delta) \le m-1\} = \frac{1}{\sigma_1(M)}. \tag{14}$$

Důkaz Matice $(I - M\Delta) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ a $\mathrm{rank}(I - M\Delta) \le m-1$. Existuje tedy nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^m$, že $(I - M\Delta)x = o$. Potom

$$\begin{aligned} Ix &= M\Delta x \quad \text{a} \\ \|x\|_2 &= \|M\Delta x\|_2 \le \|M\|_2\|\Delta x\|_2 = \sigma_1(M)\|\Delta x\|_2, \\ \|x\|_2 &\le \sigma_1(M)\|\Delta x\|_2. \\ \frac{1}{\sigma_1(M)} &\le \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \le \|\Delta\|_2. \end{aligned}$$

Dostali jsme $\|\Delta\|_2 \ge \frac{1}{\sigma_1(M)}$. Nyní ukážeme platnost rovnosti. Nechť singulární rozklad matice M je ve tvaru $M = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^*$, (pro $\mathrm{rank}(M) = k$). Zvolme $\Delta = \frac{1}{\sigma_1(M)} v_1 u_1^*$. Potom pro $x = u_1$ máme

$$(I - M\Delta)x = (I - M\Delta)u_1 = \left(I - M\frac{v_1u_1^*}{\sigma_1(M)}\right)u_1 = u_1 - \frac{Mv_1}{\sigma_1(M)} \quad \text{a dále}$$

$$u_1 - \frac{Mv_1}{\sigma_1(M)} = u_1 - u_1 = o.$$

Z volby Δ je $\|\Delta\|_2 = \frac{1}{\sigma_1(M)}$ a dohromady s nerovností $\|\Delta\|_2 \le \frac{1}{\sigma_1(M)}$ dostaneme $\min_{\Delta\in\mathbb{C}^{p\times m}}\{\|\Delta\|_2 : \mathrm{rank}(I - M\Delta) \le m-1\} = \frac{1}{\sigma_1(M)}$. $\square$

Základy komplexní analýzy

- $\mathbb{C} = \{[x, y], x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, (komplexní číslo je uspořádaná dvojice reálných čísel $z = [x, y]$)
- $[x, y] + [w, z] = [x + w, y + z]$
  $[x, y] \cdot [w, z] = [xw - yz, xz + yw]$
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je komutativní těleso
- $i \triangleq [0, 1]$ a platí $i^2 = [0, 1] \cdot [0, 1] = -1$.
- komplexní číslo lze potom vyjádřit v algebraickém tvaru $[x, y] = x + iy$
- $|x + iy| = |[x, y]| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- komplexní čísla (kromě nuly) je možné vyjádřit v goniometrickém tvaru $z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\alpha + i \sin\alpha)$
- $z = r\mathrm{e}^{i\alpha}$, $\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$

- *komplexní funkcí $f(z)$ komplexní proměnné* rozumíme libovolné přiřazení, které $z \in D \subset \mathbb{C}^*(= \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ přiřazuje jednu nebo více hodnot $w \in H \subset \mathbb{C}^*$.
- Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné definovaná v nějakém okolí $\mathcal{U}(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Existuje-li konečná limita $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}$, říkáme, že f má *derivaci $f'(z_0)$ v bodě z_0*.
- f je *holomorfní* v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, pokud existuje $\varepsilon > 0$ tak, že f má v každém bodě $z \in \mathcal{U}(z_0, \varepsilon)$ derivaci. Funkce je holomorfní v otevřené množině, je-li holomorfní v každém bodě $z_0 \in \Omega$.
- Nechť je funkce f definovaná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$. Potom je holomorfní funkce F primitivní funkcí k f na Ω, jestliže $\forall z \in \Omega : F'(z) = f(z)$, (množinu všech primitivních funkcí k funkci f označujeme $\int f(z)$).

- *lineární funkce* $f: az+b,\ a, b, \in \mathbb{C}, a \neq 0, \quad D(f) = \mathbb{C}^*$
  - jednoznačná, prostá, spojitá na $\mathbb{C}^*$,
  - geometrická interpretace v Gaussově rovině (pro $a = |a|\mathrm{e}^{i\alpha}$):
  - geometrické zobrazení složené z rotace se středem v počátku o orientovaný úhel velikosti α, stejnolehlost se středem v počátku a koeficientem $|a|$, translace o vektor $[\mathrm{Re}(b), \mathrm{Im}(b)]$
- funkce *argument komplexního čísla* $f: \mathrm{Arg} z = \{\phi \in \mathbb{R} : z = |z|(cos\phi + i\sin\phi)\}$, $D(f) = \mathbb{C} \backslash \{0\}$
  - nekonečněznačná funkce
  - funkční hodnota $\mathrm{Arg} z$, pro kterou je $\phi \in (-\pi, \pi\rangle$ je nazývána hlavní hodnota komplexního čísla a označuje se $\arg z$
- *exponenciální funkce* $f: \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} \triangleq \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$
  - jednoznačná funkce, $H(f) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$
  - periodická s periodou $2\pi i$ ($\mathrm{e}^{z+2\pi i} = \mathrm{e}^{x+iy+2\pi i} = \mathrm{e}^x(\cos(y+2\pi) + \sin(y+2\pi)) = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \sin(y)) = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^z$)
- *logaritmická funkce* $f: w = \mathrm{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{e}^w = z\}, \quad D(f) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$
  - nekonečněznačná funkce, $D(f) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$
  - hlavní hodnota logaritmu $\ln z = \ln|z| + i \arg z$

- **Věta** (Cauchy) Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a funkce f je holomorfní na Ω. Pak pro každou jednoduchou uzavřenou po částech hladkou orientovanou křivku γ v Ω platí $\int_\gamma f(z)\mathrm{dz} = 0$.

- **Věta** (Cauchy - Goursat) Nechť ϕ je jednoduchá po částech hladká orientovaná křivka $\mathbb{C}$ a Ω je její vnitřek. Je-li funkce f holomorfní v Ω, konečná a spojitá v uzávěru $\bar{\Omega}$, potom $\int_\gamma f(z)\mathrm{dz} = 0$.

- **Věta** (Cauchy - Goursat, pro vícenásobně souvislou oblast) Nechť $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, $n \in N$ jsou jednoduché uzavřené po částech hladké souhlasně orientované křivky v $\mathbb{C}$ takové, že $\overline{\mathrm{Int}\phi_j} \subset \mathrm{Int}\phi$ pro $j = 1, 2, ..., n$ a $\overline{\mathrm{Int}\phi_j} \cap \overline{\mathrm{Int}\phi_j} = \emptyset$, pro $i \neq j$. Je-li f holomorfní v $\Omega = \mathrm{Int}\phi_j \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{\mathrm{Int}\phi_j}$, konečná a spojitá v uzávěru $\bar{\Omega}$, potom $\int_\gamma f(z)\mathrm{dz} = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{dz}$.

- **Věta** (Cauchyův integrální vzorec) Nechť D je jednoduše souvislá oblast a komplexní funkce f je na ní holomorfní. Potom pro každou jednoduchou uzavřenou kladně orientovanou křivku $\Gamma \subset D$ a pro každý bod $z_0 \in \mathrm{Int}\Gamma$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{dz}.$$

Věta (Princip maxima) Je-li komplexní funkce $f(z)$ holomorfní a nekonstantní funkcí na oblasti D, potom $|f(z)|$ nenabývá svého maxima v žádném bodě $z \in D$.

Důkaz

- předpokládejme sporem, že $\exists z_0 \in D: \ |f(z_0)| = \max_{z \in D} |f(z)| \triangleq a$, potom pro $\forall z \in D$ platí buď $|f(z)| = a$ nebo $|f(z)| < a$,
- zvolme kružnici $C(z_0, R) \subseteq D$, podle Cauchyova integrálního vzorce platí pro každou $C(z_0, r)$, $0 \leq r \leq R$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} dz$$

- kružnici $C(z_0, r)$ lze parametrizovat jako $\phi(\alpha) = z + r\mathrm{e}^{(j\alpha)}$, $\alpha \in (0, 2\pi\rangle$, potom je

$$a = |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi j} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r\mathrm{e}^{j\alpha})}{r\mathrm{e}^{j\alpha}} r\mathrm{e}^{j\alpha} d\alpha \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z + r\mathrm{e}^{j\alpha}) \right| d\alpha$$

- získali jsme $a = |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + r\mathrm{e}^{j\alpha})| d\alpha$
a následně $0 \leq \int_0^{2\pi} |f(z + r\mathrm{e}^{j\alpha})| d\alpha - 2\pi a = \int_0^{2\pi} \Big(|f(z + r\mathrm{e}^{j\alpha})| - a \Big) d\alpha$
- protože ale $\max_{z \in D} |f(z)| = a$, je $|f(z + r\mathrm{e}^{j\alpha})| \leq a$
- potom ale integrand je nekladný a integrál nezáporný, tak musí platit $|f(z_0 + r\mathrm{e}^{j\alpha})| = a$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$ a hodnoty v bodech kružnice jsou a pro $r \leq R$
- je-li $|f|$ analytická funkce, konstantní v $\overline{D}$, je konstantní i f v $\overline{D}$
- získali jsme $f(z) = f(z_0)$, pro $\forall z \in \overline{D}(z_0, R)$, kde $\overline{D}(z_0, R) = \{z : |z - z_0| \leq R\}$

- nyní zvolme libovolný bod $\xi \in D$ a spojnici C tohoto bodu s bodem z_0, ukážeme, že potom lze zvolit uzavřené oblasti, přes které přejdeme ze z_0 do ξ - označme $2d$ minimální vzdálenost od spojnice bodů k hranici oblasti D, nalezneme body $z_0, z_1, \dots, \xi$ na spojnici C, že $|z_{i+1} - z_i| \leq d$, že $D_i = \{z : |z - z_i| \leq d\}$, a $D_i \subset D$ a pokrývají příslušnou spojnici - každý D_i obsahuje bod z_{i+1}, střed následného D_{i+1} - potom ale $z_1 \in D_0$ a musí platit pro $z \in D_1$, že $f(z) = f(z_0) = f(z_1)$ - následně bychom přešli přes všechny D_i až do bodu ξ a získali bychom, že $f(\xi) = f(z_0)$, a protože ξ byl libovolný bod v D, je tedy f konstantní v celé oblasti D, což vede ke sporu. □

Věta (Důsledek principu maxima) Nechť je komplexní funkce f holomorfní na omezené oblasti D a spojitá na uzávěru oblasti D, tj. $\overline{D}$. Potom funkce $|f|$ nabývá svého maxima právě na hranici oblasti D, tj. ∂D.

Důkaz

- neboť je komplexní funkce f spojitá na uzavřené omezené množině, tj. kompaktní, je omezená a $|f|$ nabývá zde v nějakém bodě z svého maxima, protože ale podle věty o principu maxima nemůže nastat případ, aby $z \in D$, musí být $z \in \partial D$. □

- *Laurentovou řadou* v komplexním oboru se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ rozumíme výraz $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde pro $n \in Z$ je $a_n \in \mathbb{C}$. Řadu mocninou $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, nazýváme regulární část Laurentovy řady a funkční řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ představuje hlavní část Laurentovy řady.
- **Věta** (O rozvoji holomorfní funkce v Laurentovu řadu) Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní na mezikruží $P(z_0, r, R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$. Potom existuje právě jedna Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, že pro každé $z \in P(z_0, r, R)$ platí $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.
- Bod $z_0 \in \mathbb{C}^*$ je izolovaná singularita funkce f, jestliže je $f(z)$ holomorfní funkcí na redukovaném okolí bodu z_0. Izolované singularity rozlišujeme na
  – odstranitelná singularita , je-li $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$
  – pól , je-li $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}^*$
  – podstatná singularita , pokud $\lim_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje.
- pro singularitu typu pól funkce $f(z)$ platí, že existuje $k \in N$ a holomorfní funkce $h(z)$ na $\mathcal{U}(z_0)$, pro $h(z) \neq 0$, takové že $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} h(z)$, pro $z \in \mathcal{U}(z_0)$, a k je určeno jednoznačně a nazývá se násobnost pólu.

- Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, (resp. $z_0 = \infty$) je izolovaná singularita funkce $f(z)$ a nechť $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \ldots + a_{-2}\frac{1}{(z-z_0)^2} + a_{-1}\frac{1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$ $\left(\text{resp. } \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{(z-z_0)^n}\right)$ je Laurentův rozvoj funkce $f(z)$ na prstencovém okolí bodu z_0 (resp. ∞). Residuem funkce f $(\mathrm{res}_{z=z_0} f(z))$ v bodě z_0 (resp. ∞) nazýváme koeficient a_{-1} (resp. $-a_1$).
- Výpočet resiuda v pólech
  Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól funkce f násobnosti menší nebo rovné $k \in N$, potom platí

$$\mathrm{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{dz}^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z)\right].$$

  Nechť ∞ je pól funkce $f(z)$ násobnosti menší nebo rovné $k \in N$, potom platí

$$\mathrm{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z \to \infty} z^{k+2} \frac{\mathrm{d}^{k+1} f(z)}{\mathrm{dz}^{k+1}}.$$

- Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní v $\mathbb{C}$ vyjma konečného počtu bodů $z_1, z_2, \ldots, z_k$. Potom

$$\mathrm{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{res}_{z=z_j} f(z) = 0.$$

Věta (Cauchyova, Residuová) Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast a Γ jednoduchá uzavřená orientovaná (ve směru hodinových ručiček) křivka v Ω. Jestliže f je holomorfní uvnitř Γ a na, vyjma bodů $z_1, z_2, ..., z_n$, které leží v $\mathrm{Int}\Gamma$, potom $\int_\Gamma f(z)\mathrm{dz} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}[f, z_k]$.

Důkaz

- pro holomorfní funkci $f(z)$ s využitím Laurentovy řady můžeme psát $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a
$\int_\Gamma f(z)\mathrm{dz} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \int_\Gamma (z-z_0)^n \mathrm{dz} =$
$= \sum_{-\infty}^{-2} a_n \int_\Gamma (z-z_0)^n \mathrm{dz} + a_{-1} \int_\Gamma \frac{\mathrm{dz}}{(z-z_0)^n} + \sum_0^{\infty} a_n \int_\Gamma (z-z_0)^n \mathrm{dz}.$
Podle Cauchyho věty je poslední člen nulový,
dále přímým výpočtem integrálů prvního členu, jako např. $\int_\Gamma (z-z_0)^{-2}\mathrm{dz}$, pro $\Gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi)$, pro vhodný poloměr r, dostaneme

$$\int_\Gamma (z-z_0)^{-2}\mathrm{dz} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{2it}} ire^{it}\mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} ie^{-it}\mathrm{dt} = -1 + 1 = 0,$$

obdobně pro ostatní členy v prvním členu získáme rovněž nulu a celkem tak zbyde jen prostřední člen $a_{-1} \int_\Gamma \frac{\mathrm{dz}}{z-z_0}$. Potom získáme

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{dz} = a_{-1} \int_\Gamma \frac{\mathrm{dz}}{z-z_0}$$

a pro $\Gamma(t) = \mathrm{e}^{it} + z_0$ vypočteme $\int_\Gamma \frac{\mathrm{dz}}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{it}}\mathrm{dt} = 2\pi i.$
Celkem je $\int_\Gamma f(z)\mathrm{dz} = 2\pi i \mathrm{Res}[f, z_k]$.
Nakonec následným rozšířením pro více singulárních bodů obdržíme hledaný vztah. $\square$

Věta (Cauchyova - Princip argumentu) Nechť uzavřená orientovaná (ve směru hodinových ručiček) křivka Γ_s v $s-$rovině obkličuje Z nul a P pólů funkce $F(s)$, potom odpovídající uzavřená křivka Γ_F v $F(s)-$ rovině obkličuje počátek $F(s)-$roviny $N = (Z - P)-$ krát při stejné orientaci.

Důkaz Aplikujme Cauchyovu residuovou větu na funkci $\frac{f}{f'}$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f}{f'}\mathrm{ds} = \sum \mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f}'}\right).$$

V okolí nuly z_i funkce $f(s)$ stupně m_i lze psát: $f(s) = (s - z_i)^{m_i} g(s)$, kde $g(s)$ je nenulová analytická funkce v z_i, potom

$$\frac{f}{f'} = \frac{m_i(s - z_i)^{m_i - 1} g(s) + (s - z_i)^{m_i} g'(s)}{(s - z_i)^{m_i} g(s)} = \frac{m_i}{s - z_i} + \frac{g'(s)}{g(s)}$$

a residuum odpovídá členu m_i. Analogicky pro pól p_j funkce $f(s)$ stupně n_j můžeme psát $f(s) = \frac{h(s)}{(s-p_j)^{n_j}}$ a dostaneme

$$\frac{f'}{f} = \frac{-n_j}{s - p_j} + \frac{h'(s)}{h(s)}.$$

Odtud celkem pro jednotlivé póly a nuly funkce $f(s)$ dostaneme $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f}{f'}\mathrm{ds} = \sum m_i - \sum n_j = Z - P$.

Dále upravme výraz
$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f}{f'}\mathrm{ds} = \frac{1}{2\pi i}[\log f]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2\pi i}[\log|f|]_{\mathcal{C}} + \frac{1}{2\pi}[\arg|f|]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2\pi}\Delta(\arg f) = N_0$.
Porovnáním pravých stran u výrazů s křivkovými integrály obdržíme celkově $N_0 = Z - P$. $\square$

Nyquistovo kritérium stability

- **Věta** Nechť $L(s)$ je přenos otevřené smyčky a předpokládejme, že $L(s)$ je stabilní. Potom je přenos uzavřeného systému stabilní právě tehdy, jestliže uzavřená křivka $\Omega = \{L(i\omega) : -\infty < \omega < \infty\} \subset \mathbb{C}$ neobkličuje kritický bod $s = -1$, (tj. $[-1, 0]$).

Věta (Parseval) Nechť $F(j\omega)$ a $G(j\omega)$ označují po řadě Fourierovy transformace reálných funkcí $f(t)$ a $g(t)$, potom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G(-j\omega)\mathrm{d}\omega$$

Důkaz Užijeme-li vztah pro inverzní Fourierovu transformaci obdržíme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\right] g(t)\mathrm{dt}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j\omega t}g(t)\mathrm{dt}\right]\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G(-j\omega)\mathrm{d}\omega.$$

Speciální případ pro $g(t) = f(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2\mathrm{d}\omega.$$

$\square$

Úvod do obyčejných diferenciálních rovnic

- rovnice, v níž se vyskytuje neznámá funkce jedné reálné proměnné spolu se svými derivacemi
- ODR prvního řádu v implicitním tvaru $F(t, y(t), \dot{y}(t)) = 0$, kde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je zadaná funkce, $y(t)$ hledaná funkce.
- ODR prvního řádu v explicitním tvaru $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, kde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je daná funkce, $y(t)$ hledaná funkce.
- Cauchyova počáteční úloha obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \qquad (15)\\
y(t_0) &= y_0 \qquad \text{(počáteční podmínka)}
\end{aligned}
$$

Věty o existenci a jednoznačnosi řešení úlohy (15)

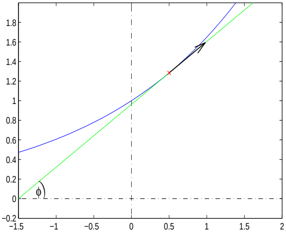
- Věta. (Peanova věta o existenci) Nechť je daná úloha (15), kde funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá a definovaná na otevřené množině, bod (t_0, y_0) patří do definičního oboru této funkce, potom Cauchyova úloha má alespoň jedno maximální řešení.
- Věta. (O existenci a jednoznačnosti) Nechť je daná úloha (15), funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá a definovaná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, bod (t_0, y_0) patří do definičního oboru této funkce, nechť je dále na Ω spojitá funkce $\frac{\partial f}{\partial y}$, potom Cauchyova úloha má právě jedno maximální řešení.
- Věta. (Picardova-Lindelőffova) Nechť je daná úloha (15), funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na obdélníku $V = \langle t_0 - a, t_0 + a\rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b\rangle$, kde $a, b > 0$, nechť existuje $L \in \mathbb{R}$, že pro každé dva body $(t, y_1) \in V$, $(t, y_2) \in V$ platí

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

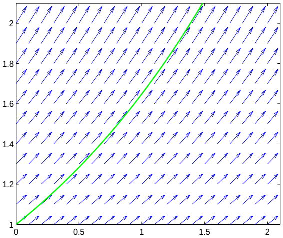
  Nechť f je na V nenulová funkce, $M \triangleq \max_{(t,y)\in V} |f(t, y)| > 0$, položme $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, potom existuje právě jedna funkce ϕ definovaná na intervalu $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, která je řešením úlohy (15) na tomto intervalu.

Grafická interpretace

- je-li funkce $y(t)$ řešením rovnice $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ a v bodě t_0 má hodnotu y_0, potom představuje hodnota $f(t_0, y_0)$ směrnici tečny ke grafu funkce $y(t)$ v bodě (t_0, y_0)
- trojice $(t_0, y_0, f(t_0, y_0))$ se nazývá lineární element diferenciální rovnice $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, lze jej znázornit jako vázaný vektor v bodě (t_0, y_0), přímka, která prochází tímto bodem ve směru vektoru má směrnici právě $f(t_0, y_0)$
- množina všech lineárních elementů tvoří směrové pole
- ze směrového pole máme informaci o průběhu obecných řešení rovnice $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, z nichž nám jedno konkrétní řešení určuje počáteční podmínka



Obrázek: Lineární element diferenciální rovnice, $\mathrm{tg}\ \phi = f(t_0, y_0)$.



Obrázek: Směrové pole, pro diferenciální rovnici $\dot{y}(t) = \frac{1}{2}y$, zeleně - řešení pro počáteční podímínku $y(0) = 1$.

- lineární obyčejná diferenciální rovnice $n-$tého řádu s konstatními koeficienty

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b, \tag{16}$$

- obecné řešení úlohy (16) je superpozicí homogenního řešení y_h a partikulárního řešení y_p, tj. $y = y_h + y_p$, kde homogenní řešení je řešením homogenní části $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots a_{n-1}\dot{y} + a_n y$ a y_p je jedno pevné řešení rovnice (16)
- n počátečních podmínek $y(t_0) = y_0$, $\dot{y}(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ vybere z obecného řešení nehomogenní lineární ODR právě jedno konkrétní řešení $y(t)$
- systém všech homogenních řešení rovnice lineární ODR tvoří lineární prostor dimenze n, systém funkcí $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, který tvoří bázi tohoto prostoru nazýváme fundamentálním systémem, můžeme psát $y_h(t) = C_1\phi_1 + \ldots C_n\phi_n$, kde $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$
- nechť $\phi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ řeší homogenní rovnici, potom

$$\begin{aligned} \lambda^n \mathrm{e}^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} \mathrm{e}^{\lambda t} + \ldots + a_n &= 0, \\ \mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda_n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n) &= 0, \\ \lambda_n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n &= 0 \qquad \text{charakteristický polynom} \end{aligned}$$

  λ musí být kořenem charakteristického polynomu, aby funkce $\mathrm{e}^{\lambda t}$ byla řešením homogennní diferenciální rovnice
- řešení např. metoda variace konstant
- lineární ODR $n-$tého řádu můžeme převést na soustavu lineárních ODR prvního řádu

- uvažujme lineární obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu s konstatními koeficienty

$$\dot{y}(t) + ay(t) = b \tag{17}$$

- obecné řešení úlohy (17) je superpozicí homogenního řešení y_h (řešení homogenní části $\dot{y}(t) + ay(t) = 0$) a partikulárního řešení y_p, tj. $y = y_h + y_p$, počáteční podmínka $y(t_0) = y_0$ vybere konkrétní řešení
- Příklad. Určete řešení rovnice $\dot{y} + 3y = 1$, $y(0) = 3$.

$$\begin{aligned}
y_h :\ & \dot{y} + 3y = 0,\\
& \lambda + 3 = 0,\\
& \lambda = -3, \qquad\qquad \text{tj.}\ \ y_h = C_1 \mathrm{e}^{-3t},\\
y_p :\ & y_p = C_1(t)\mathrm{e}^{-3t},\\
& \dot{C}_1 \mathrm{e}^{-3t} - 3C_1\mathrm{e}^{-3t} - 3C_1\mathrm{e}^{-3t} = 1,\\
& \dot{C}_1 = \mathrm{e}^{3t},\\
& C_1(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}, \qquad \text{tj.}\ \ y_p = \frac{1}{3},\\
y = y_p + y_h &= C_1\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{3},\\
y(0) = C_1 + \frac{1}{3} &= 3, \qquad \text{tj.} C_1 = \frac{8}{3}\\
y(t) &= \frac{8}{3}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

- numerické metody pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \tag{18}$$

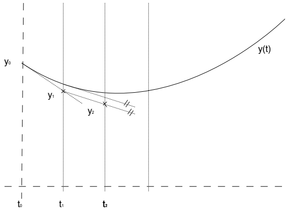
$$y(t_0) = y_0 \tag{19}$$

- základní Eulerova metoda - nejjednodušší jednokroková explicitní metoda - aproximujeme derivaci v rovnici (18) pomocí diference pro y v daném bodě

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \tag{20}$$

pro dostatečně malé h, potom $t_0, t_1 = t_0 + h, \ldots$ a pro označení $y(t_n) = y_n$ dostaneme

$$y_{n+1} = y_h + hf(t_n, y_n),$$
$$y_0 = y(t_0)$$



Obrázek: Eulerova metoda.

- numerické metody pro ODR lze rozdělit např. na explicitní nebo implicitní, jednokrokové či vícekrokové
- vícekrokové metody nejsou samostartující, $k-$kroková metoda předem vyžaduje k hodnot
- jednokrokové využívají aproximace funkčních hodnot funkce i uvnitř jednotlivých intervalů, schéma bývá složitější
- implicitní metody jsou vhodné pro stiff (tuhé) systémy
- příklady některých základních numerických metod
  - Adams-Bashforthovy metody - založené na aproximaci neznámé funkce jednoduššími funkcemi, např. explicitní dvoukroková metoda, 2. řádu $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[3f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})]$
  - explicitní Runge-Kuttovy metody, např. metoda 4. řádu

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n), k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1), \\
k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

  - implicitní Eulerova metoda, jednokroková, 1. řádu, $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$
  - Adams-Moultonovy metody - implicitní, využívají aproximace funkce, např. metoda 2. řádu $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n))$