

# Automatické řízení

## Semestrální práce

Miroslav Bulka, Jan Cibulka

3. února 2017



# AUTOMATICKÉ ŘÍZENÍ- ZADÁNÍ REFERÁTU



## I. Model neurčitosti

- Při konstantním přítoku  $Q_{10} = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  vypočtete potřebné nastavení přepouštěcího ventilu  $S_p$  a výtokového ventilu  $S_2$  tak, aby výšky hladin v nádobách při ustáleném stavu byly  $H_{10} = 0,8 \text{ m}$  a  $H_{20} = 0,2 \text{ m}$  (tzv. pracovní bod). Hodnoty známých parametrů:  $S = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  (plocha dna nádob),  $c_p = c_2 = 0.6$ . *malá podle LS1*
- Určete linearizovaný stavový model v daném pracovním bodě a v pracovním bodě, který by odpovídal 20% zvýšení přítoku  $Q_{10}$ .
  - Nastavení přepouštěcích ventilů  $S_p$  a  $S_2$  zůstane stejné, se zvyšujícím se přítokem  $Q_1$  se mění výšky hladin  $H_1$  a  $H_2$ .
  - Spolu se zvyšujícím se přítokem  $Q_1$  se mění nastavení ventilů  $S_p$  a  $S_2$  tak, aby výška hladin zůstala konstantní, tedy  $H_1(t) = H_{10}$ ,  $H_2(t) = H_{20}$ .
- Určete přenos systému  $Q_1(t) \rightarrow H_2(t)$  v závislosti na výšce hladiny  $H_1$  a  $H_2$  (případ 2A) či nastavení ventilu  $S_p, S_2$  (případ 2B). Znázorněte pro oba případy v komplexní rovině neurčitost přenosu za předpokladu, že skutečný pracovní bod je libovolně mezi původním pracovním bodem a pracovním bodem při 20 % zvýšeném přítoku.
  - Určete numericky skutečnou neurčitost danou intervalem pro výšky hladin  $H_1$ ,  $H_2$  (resp.  $S_p$ ,  $S_2$ ) a přítok  $Q_1$ .
  - Definujte model neurčitosti pomocí vhodně zvoleného modelu perturbací, nominálního modelu  $P_0$  a váhové funkce  $W(s)$  tak, aby velikost neurčitosti byla minimální a přesto pokrývala skutečnou neurčitost získanou v bodě (b).

Pro zobrazení neurčitosti použijte 10 frekvencí  $\omega_1, \dots, \omega_{10}$ , které pokryjí fázové zpoždění  $(0, \pi)$  fázové frekvenční charakteristiky procesu.

- Porovnejte velikosti obou neurčitostí (2A a 2B).

## II. Návrh regulátoru

Dále předpokládejte, že přítok  $Q_1(t)$  je realizován vodním čerpadlem, které je poháněno stejnosměrným motorem. Chování čerpadla budeme pro jednoduchost aproximovat systémem prvního řádu s časovou konstantou  $T = 0.5\text{s}$  a statickým zesílením  $K_s = Q_{10}$ . Dále uvažujme PI regulátor, který řídí napětí na kotvě motoru čerpadla s cílem řídit výšku hladiny  $H_2$ . Rovněž předpokládejme, že všechny externí signály regulační smyčky jsou rozumně malé, takže systém není příliš vychýlen ze svého pracovního bodu a může být považován za lineární.

1. Navrhnete parametry PI regulátoru s přenosem  $C(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s})$  tak, aby byly splněny následující návrhové požadavky pro všechny systémy z modelu neurčitosti získaného v bodě 3(b) pro 2A (mění se výška hladin), tedy pro libovolný pracovní bod, který se nachází mezi původním pracovním bodem a pracovním bodem při zvýšeném přítoku.
  - (a) Vnitřní stabilita uzavřené smyčky – ověřte analyticky i graficky (Nyquistovo kritérium).
  - (b) Robustnost ve stabilitě – maximální hodnota amplitudy citlivostní funkce  $S(j\omega)$  je  $M_S < 2$ .
  - (c) Předpokládejte, že díky dalším nepřesnostem, šumům a nelinearitám je dostupná šířka pásma omezená na  $\Omega_a = 10$  [rad/s]. Útlum komplementární citlivostní funkce  $T(j\omega)$  na frekvenci  $\Omega_a$  musí být alespoň -10 dB.
  - (d) Zajistěte, aby energie libovolného šumu měření  $n(t)$  nebyla zesílena více než 1.5 krát.
2. Předpokládejte, že měření, tedy senzor hladiny  $H_2$ , je zatíženo harmonickým šumem  $n(t)$  s frekvencí 50Hz a výstup soustavy omezenou harmonickou poruchou  $d(t)$  s frekvencí 0.1Hz. Ověřte, zda žádný z těchto signálů není na výstupu systému (tedy  $H_2(t)$ ) smyčkou s navrženým PI regulátorem zesílen.
3. Předpokládejte, že je systém v rovnovážném stavu a  $e(t) = 0$ . Na vstup řízené soustavy začne působit porucha  $d_i$  s omezenou energií  $\|d_i\|_2 < 1$ . Určete k jakému maximálnímu kolísání hladiny  $H_2$  od požadovaného stavu může dojít.
4. Určete signály  $n(t)$  a  $d(t)$ , kde  $\|n(t)\|_\infty < 1$ ,  $\|d(t)\|_\infty < 1$ , které jsou zpětnovazební smyčkou nejvíce zesíleny ve smyslu
  - (a) maximální hodnoty signálu,
  - (b) energie signálu.

Určete hodnoty těchto zesílení.

*Poznámka:* K řešení využijte libovolné prostředky Matlabu/Simulinku, Robust Control Toolbox, Symbolic Toolbox, webový applet "PID Control Laboratory".

# Obsah

<b>1</b>	<b>Řešení - Model neurčitosti</b>	<b>5</b>
1.1	První úkol - výpočet nastavení ventilů . . . . .	5
1.2	Druhý úkol - linearizace ve dvou pracovních bodech . . . . .	6
1.2.1	Konstantní průtoky - mění se hladina . . . . .	6
1.2.2	Konstantní hladina - mění se průtoky . . . . .	6
1.3	Třetí úkol - určení přenosu systému . . . . .	8
1.3.1	Numerické určení neurčitosti . . . . .	10
1.4	Čtvrtý úkol - Porovnání velikostí neurčitostí . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Řešení - Návrh regulátoru</b>	<b>14</b>
2.1	První úkol - návrh parametrů PI regulátoru . . . . .	14
2.1.1	Vnitřní stabilita uzavřené smyčky . . . . .	15
2.1.2	Robustnost ve stabilitě . . . . .	17
2.1.3	Podmínka útlumu komplementární citlivostní funkce . . . . .	18
2.1.4	Omezení zesílení energie šumu . . . . .	18
2.2	Druhý úkol - kontrola zesílení poruch . . . . .	19
2.3	Třetí úkol - určení maximálního kolísání hladiny . . . . .	19
2.4	Čtvrtý úkol - určení nejvíce zesílených signálů . . . . .	20
2.4.1	Ve smyslu maximální hodnoty signálu . . . . .	22
2.4.2	Ve smyslu energie signálu . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Závěr</b>	<b>25</b>

# 1 Řešení - Model neurčitosti

## 1.1 První úkol - výpočet nastavení ventilů

Máme konstantní přítok  $Q_1 = Q_{10} = 1.5 \cdot 10^{-4} m^3 s^{-1}$ , přičemž víme, že:

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_1}{dt} \\ \frac{dV_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - Q_p \\ Q_p - Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - c_p S_p v_p \\ c_p S_p v_p - c_2 S_2 v_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Z Bernoulliho zákona pak odvodíme:

$$\begin{bmatrix} v_p \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2g \cdot (H_1 - H_2)} \\ \sqrt{2g \cdot H_2} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Daný systém popisují diferenciální rovnice:

$$\begin{bmatrix} \frac{dH_1}{dt} \\ \frac{dH_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \cdot Q_1 - \frac{S_p C_p}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot (H_1 - H_2)} \\ \frac{S_p C_p}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot (H_1 - H_2)} - \frac{S_2 C_2}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot H_2} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Zavedením  $x_1(t) = H_1(t)$ ;  $x_2(t) = H_2(t)$ ;  $u(t) = Q_1(t)$  získáme

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \cdot u - \frac{S_p C_p}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot (x_1 - x_2)} \\ \frac{S_p C_p}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot (x_1 - x_2)} - \frac{S_2 C_2}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot x_2} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Za předpokladu neměnicích se hladin  $H_1$  a  $H_2$  budou obě derivace nulové. Položíme je tedy nulou a díky tomu získáme požadované nastavení přepouštěcího ventilu  $S_p$  a výtokového ventilu  $S_2$ :

$$\begin{bmatrix} S_p \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_{10}}{C_p \cdot \sqrt{2g(H_1 - H_2)}} \\ \frac{C_p S_p \sqrt{(H_1 - H_2)}}{C_2 \sqrt{H_2}} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

kde po dosazení získáme:

$$\begin{bmatrix} S_p \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2864 \cdot 10^{-5} \\ 1.2620 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

## 1.2 Druhý úkol - linearizace ve dvou pracovních bodech

### 1.2.1 Konstantní průtoky - mění se hladina

Nejdříve si zavedeme značení:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Chování těchto stavových proměnných je popsáno rovnicí 4. My chceme získat linearizovaný stavový model, a to ve tvaru:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (9)$$

Pro systém popsáný rovnicí 4 budou parametry linearizovaného stavového modelu, provedeme-li klasickou linearizaci, mít následující podobu:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{C_p S_p \sqrt{2g}}{2 \cdot S \sqrt{(H_1 - H_2)}} & \frac{C_p S_p \sqrt{2g}}{2 \cdot S \sqrt{(H_1 - H_2)}} \\ \frac{C_p S_p \sqrt{2g}}{2 \cdot S \sqrt{(H_1 - H_2)}} & -\frac{C_p S_p \sqrt{2g}}{2 \cdot S \sqrt{(H_1 - H_2)}} - \frac{C_2 S_2 g}{S \sqrt{(2 \cdot g \cdot H_2)}} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Parametry modelu pro konstantní přítok  $Q_1 = Q_{10} = 1.5 \cdot 10^{-4} m^3 s^{-1}$ :

$$A = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.05 \\ 0.05 & -0.2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Parametry modelu pro zvýšený přítok  $Q_{20} = Q_{10} \cdot 1.2 = 1.8 \cdot 10^{-4} m^3 s^{-1}$ :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0417 & 0.0417 \\ 0.0417 & -0.1667 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 1.2.2 Konstantní hladina - mění se průtoky

V tomto případě budeme usilovat o to, aby se hladiny neměnily. Bude tedy platit:

$$\begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Naopak budeme měnit nastavení ventilů. Takovéto nastavení jsme pro konstantní přítok  $Q_{10}$  již spočetli, viz výsledek 6. Aby byla výška hladin konstantní i při přítoku  $1.2 \cdot Q_{10}$ , budeme muset nastavení ventilů přepočítat pomocí vztahu 5, čímž získáme následující výsledné nastavení:

$$\begin{bmatrix} S_p \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.7437 \cdot 10^{-5} \\ 1.5145 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

K získání linearizovaného stavového modelu v tomto pracovním bodě využijeme zavedeného vztahu 10. Jeho parametry budou vypadat následovně:

$$A = \begin{bmatrix} -0.06 & 0.06 \\ 0.06 & -0.24 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 1.3 Třetí úkol - určení přenosu systému

Nyní nás zajímá přenos systému  $Q_1(t) \rightarrow H_2(t)$ . Je tedy zřejmé, že měříme pouze veličinu  $H_2(t)$ . Matici  $C$  stavového popisu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (14)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (15)$$

budeme nyní uvažovat jako:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Přenos systému poté určíme ze stavové rovnice linearizovaného modelu pomocí známého vztahu:

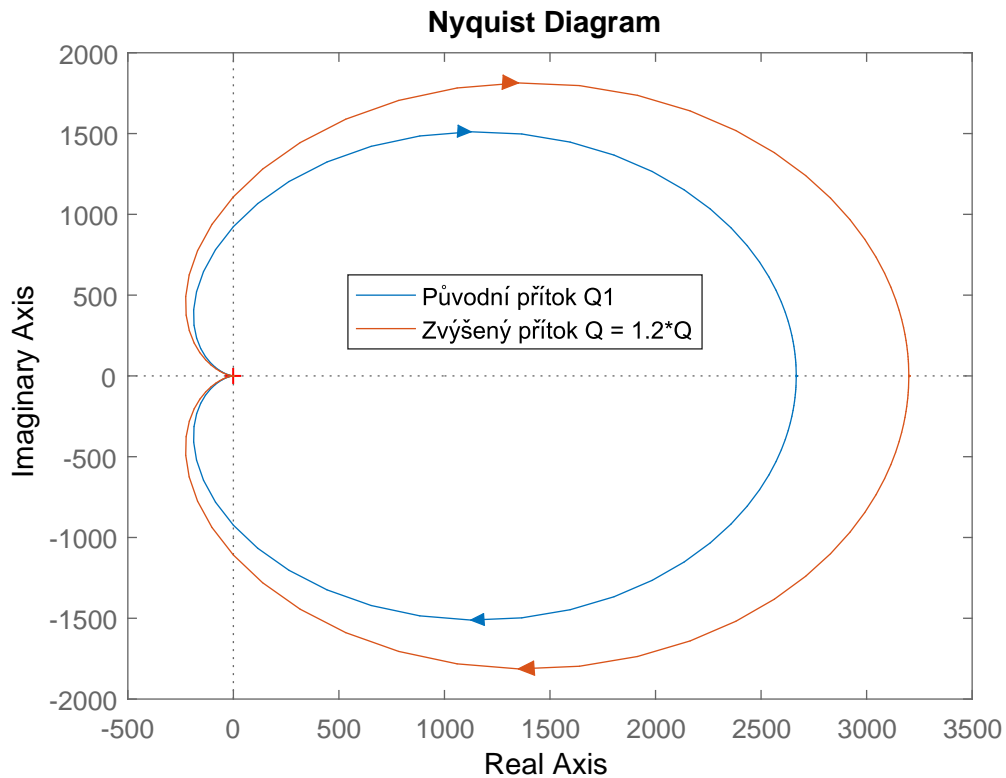
$$P(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B. \quad (16)$$

V kapitolách 1.2.1 a 1.2.2 jsme získali tři různé stavové reprezentace pro různé situace, jako jsou různá nastavení ventilů a přítoků. Nejdříve spočteme přenosy pro systém popsaný v kapitole 1.2.1, tedy pro přítok  $Q_{10}$  ( $P_1(s)$ ) a pro jeho zvýšenou variantu ( $P_2(s)$ ):

$$P_1(s) = \frac{20}{s^2 + 0.25s + 0.0075} \quad (17)$$

$$P_2(s) = \frac{16.67}{s^2 + 0.2083s + 0.005208}, \quad (18)$$

jejichž znázornění v komplexní rovině si můžeme prohlédnout na obrázku 1.



Obrázek 1: Nyquistova frekvenční charakteristika pro dané přenosy.

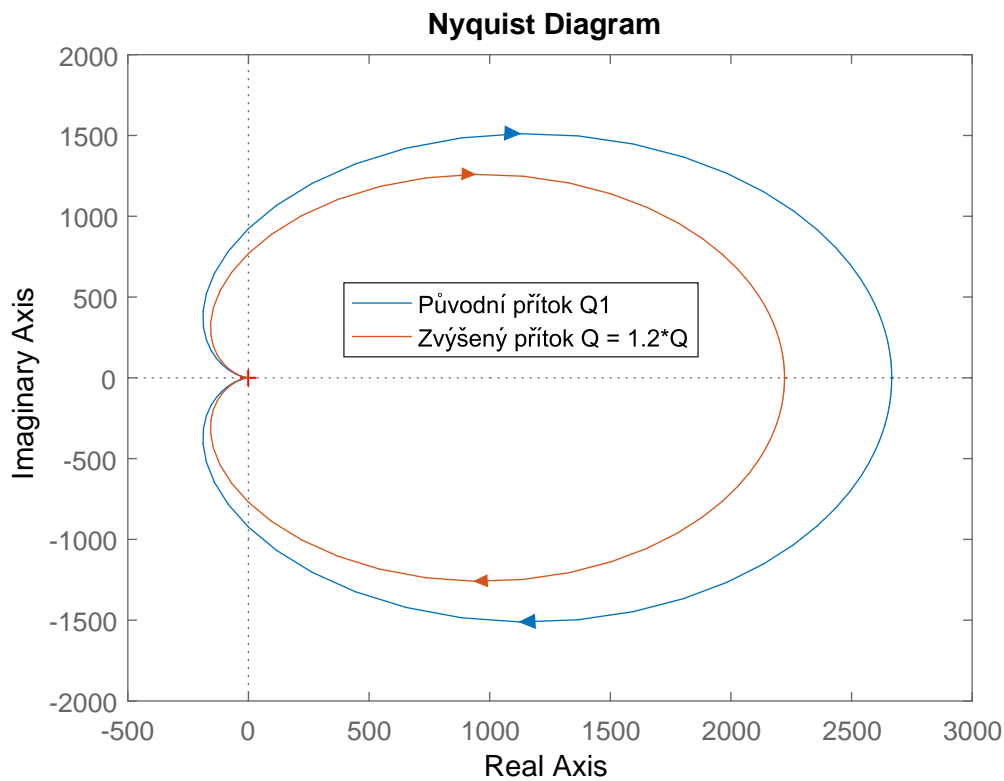


Pro získání přenosů pro systém popsaný v kapitole 1.2.2 budeme postupovat stejně a získáme znovu dva přenosy pro pro přítok  $Q_{10}$  ( $P_1(s)$ ) a pro jeho zvýšenou variantu ( $P_2(s)$ ):

$$P_1(s) = \frac{20}{s^2 + 0.25s + 0.0075} \quad (19)$$

$$P_2(s) = \frac{24}{s^2 + 0.3s + 0.0108}, \quad (20)$$

jejichž znázornění v komplexní rovině si můžeme prohlédnout na obrázku 2.



Obrázek 2: Nyquistova frekvenční charakteristika pro dané přenosy.

### 1.3.1 Numerické určení neurčitosti

Nyní budeme uvažovat, že máme množinový model, ve kterém jsou všechny přenosy  $P$ , které vznikly z nominálního přenosu  $P_0$  aditivní perturbací:

$$P = P_0 + W_a \Delta, \quad (21)$$

kde  $\|\Delta\|_\infty < 1$  a  $W_a(s)$  je pevně daná přenosová funkce. Tu můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$W_a(s) = P_0(s) - P(s), \quad (22)$$

kde za  $P(s)$  budeme dosazovat přenosy spočtené výše, tedy výsledky 17, 18, 19 a 20. Nejprve se tedy zabýváme přenosy týkající se varianty A, tedy přenosy  $P_1(s)$  pro  $Q_{10}$  (viz 17) a  $P_1(s)$  pro  $1.2 \cdot Q_{10}$  (viz 18), které jsme spočetli výše. Dále předpokládáme, že pracovní bod se nachází libovolně mezi těmito dvěma pracovními body, lišící se v přítoku  $Q$ . Je zřejmé, že nominální model bude vhodné určit pro pracovní bod ležící zhruba uprostřed tohoto intervalu, tedy pro konstantní přítok  $1.1 \cdot Q_{10}$ . Při jeho určení budeme postupovat stejně jako během určování  $P_1(s)$  a  $P_2(s)$ . Nominální přenos tedy bude mít tvar:

$$P_0(s) = \frac{18.18}{s^2 + 0.2273s + 0.006198}. \quad (23)$$

Váhouvou funkci pro námi zvolenou aditivní neurčitost spočteme ze vztahu 22:

$$W_a = \frac{1.818s^2 + 8.882 \cdot 10^{-16}s - 0.0124}{s^4 + 0.4773s^3 + 0.07052s^2 + 0.003254s + 4.649 \cdot 10^{-5}}. \quad (24)$$

Zajímavé bude zejména grafické znázornění neurčitosti. To provedeme pro různé kombinace přenosových funkcí, které odpovídají systému za předpokladu různých velikostí konstantních přítoků, přičemž zavedeme omezení:

$$Q_{10} \leq Q_1 \leq 1.2 \cdot Q_{10}, \quad (25)$$

z nichž jednomu bude odpovídat námi zvolený nominální model  $P_0$ . Zobrazení k komplexní rovině je ke shlédnutí na obrázku 3.

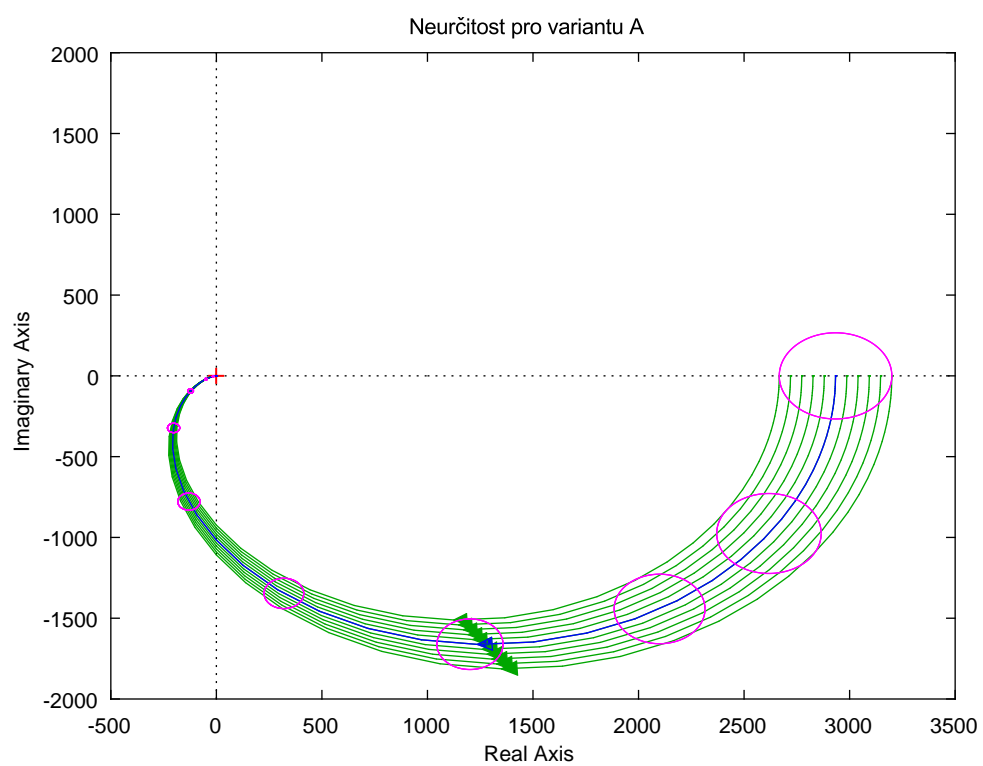
S přenosy  $P_1(s)$  a  $P_2(s)$  týkajícími se varianty B (viz tvary přenosů 19 a 20) budeme pracovat stejně. V tomto případě bude mít nominální přenos tvar:

$$P_0(s) = \frac{22}{s^2 + 0.275s + 0.009075}, \quad (26)$$

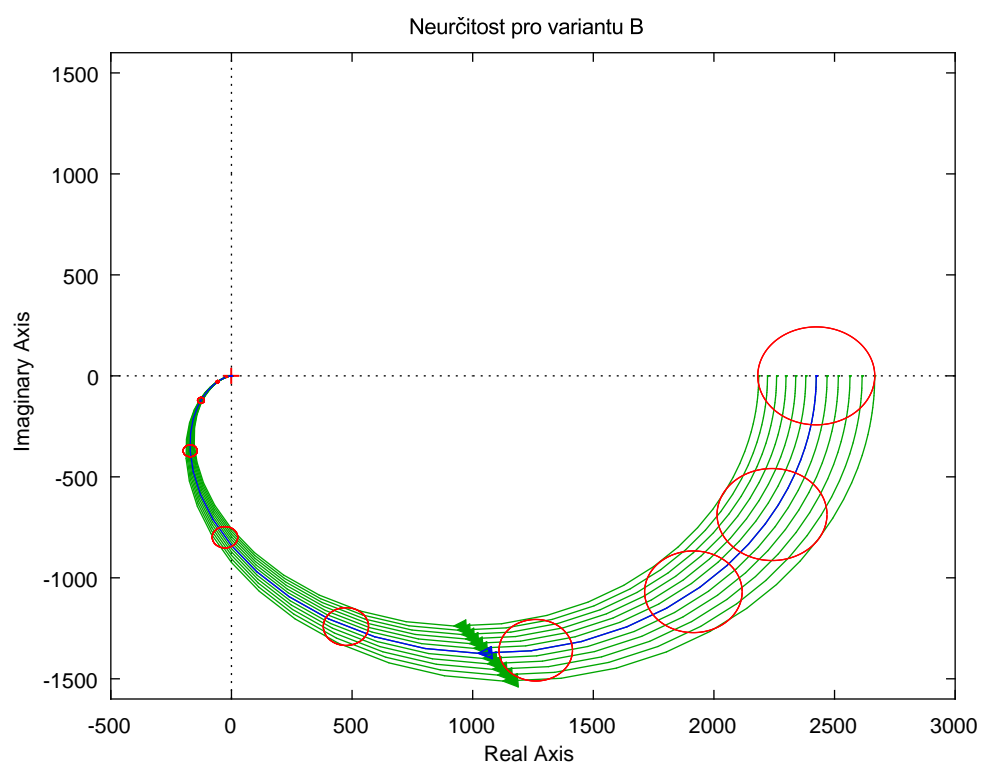
načež dále opět využijeme vztahu 22 k určení váhové funkce:

$$W_a = \frac{-2s^2 + 8.882 \cdot 10^{-16}s - 0.0165}{s^4 + 0.525s^3 + 0.08532s^2 + 0.004331s + 6.806 \cdot 10^{-5}}. \quad (27)$$

Grafické znázornění provedeme rovněž stejně jako v předchozím bodě za respektování omezení 25. Znázornění je možno vidět na obrázku 4.



Obrázek 3: Grafické znázornění neurčitosti pro variantu A.

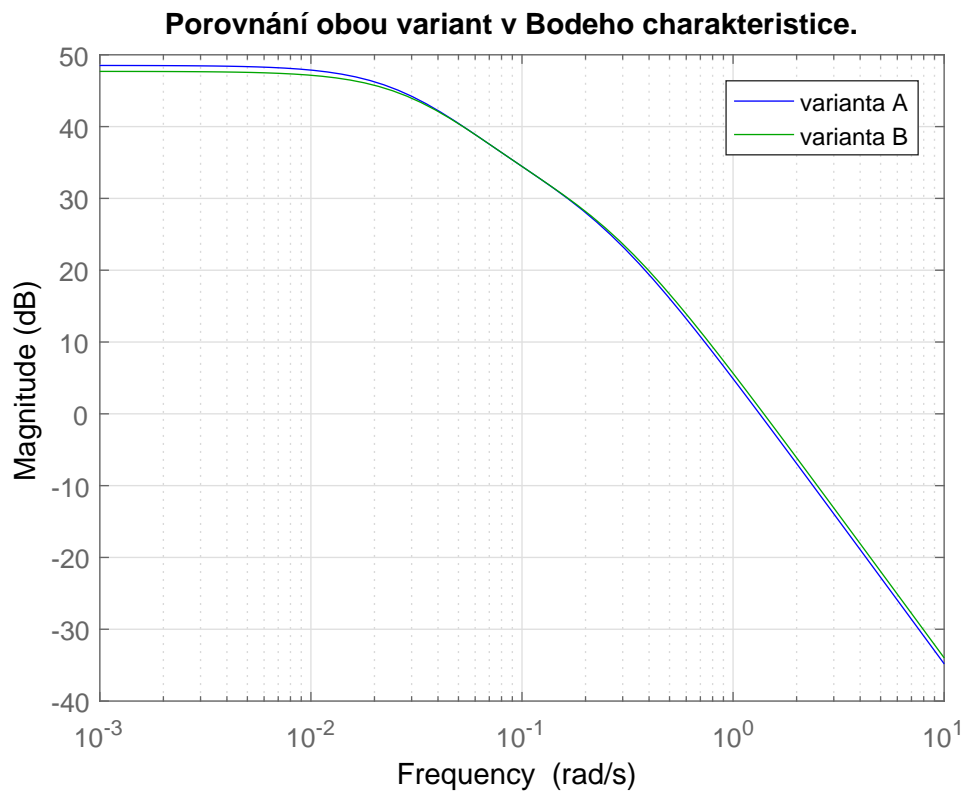


Obrázek 4: Grafické znázornění neurčitosti pro variantu B.

Na obrázcích 3 a 4 si všimněme, že je zde vykresleno několik zelených křivek pro přenosové funkce za předpokladu různých, na intervalu 25 vhodně rozmístěných, konstantních přítoků. Modrá křivka představuje náš nominální model  $P_0$ . V případě aditivní perturbace se velikost neurčitosti rovná  $|W_a|$ , která určuje poloměr kružnic, které mají střed na křivce značící nominální přenos. Na obrázcích jich vidíme hned několik, a to pro 10 vhodně zvolených frekvencí  $\omega$ , které pokrývají fázové zpoždění  $(0, 2\pi)$ .

#### 1.4 Čtvrtý úkol - Porovnání velikostí neurčitostí

Porovnání neurčitostí pro oba případy provedeme vykreslením příslušných Bodeho frekvenčních charakteristik, kde pozorujeme nepatrné rozdíly, viz obrázek 5.



Obrázek 5: Porovnání neurčitostí

## 2 Řešení - Návrh regulátoru

V následující části budeme předpokládat, že přítok  $Q_1(t)$  již není konstantní, ale je realizován vodním čerpadlem, jehož chování budeme aproximovat systémem prvního řádu s časovou konstantou  $T = 0.5s$  a statickým zesílením  $K = Q_{10}$ . Přenosová funkce od napětí na kotvě stejnosměrného motoru má tedy tvar:

$$F_c(s) = \frac{Q_{10}}{1 + 0.5s}. \quad (28)$$

Jelikož se budeme dle zadání snažit pomocí PI regulátoru (viz kapitola 2.1) řídit výšku hladiny  $H_2$ , vybereme přenos systému z kapitoly 1.2.1, kde uvažujeme variantu A, tedy měnící se hladiny. Použijeme tudíž (nominální) přenos systému (viz 23) a se zahrnutím přenosu motoru čerpadla (viz 28) získáme přenos soustavy ve tvaru:

$$P_{S0}(s) = F_c(s) \cdot P_0(s) = \frac{0.002727}{0.5s^3 + 1.114s^2 + 0.231s + 0.0062}. \quad (29)$$

Vedle nominálního přenosu budeme použijeme ještě dva další přenosy. Nejvhodnější bude uvažovat právě mezní situace, tedy pro případ minimálního přítoku  $Q_{10}$  a maximálního uvažovaného (zvýšeného) přítoku  $1.2 \cdot Q_{10}$ . Přenosy pro tyto varianty jsme spočetli v 17 a 18. Po dosazení získáme:

$$P_{S1}(s) = F_c(s) \cdot P_1(s) = \frac{0.003}{0.5s^3 + 1.125s^2 + 0.2537s + 0.0075} \quad (30)$$

$$P_{S2}(s) = F_c(s) \cdot P_2(s) = \frac{0.002501}{0.5s^3 + 1.104s^2 + 0.2109s + 0.005208}. \quad (31)$$

### 2.1 První úkol - návrh parametrů PI regulátoru

Dále budeme uvažovat, že napětí na kotvě motoru čerpadla je řízeno pomocí PI regulátoru za účelem řídit výšku hladiny  $H_2$ . Ještě poznamenejme, že dle podmínek uvedených v zadání můžeme systém považovat za lineární. Přenos PI regulátoru bude mít tvar:

$$C(s) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right). \quad (32)$$

Úkolem je navrhnout parametry PI regulátoru tak, aby byly splněny návrhové požadavky pro všechny systémy z modelu neurčitosti pro variantu A, tedy pro měnící se výšky hladin. Tím je myšleno, že požadavky budou platit pro libovolný pracovní bod, který se nachází mezi původním pracovním bodem a pracovním bodem při zvýšení přítoku, tedy pro takový přítok  $Q$ , který splňuje podmínku 25.

Pro návrh parametrů PI regulátoru jsme využili Matlabovský nástroj PID Tuner. Výsledkem je určení  $K$  a  $T_i$ :

$$K = 10$$

$$T_i = 0.1$$

Regulátor tedy bude mít po dosazení do 32 přenos:

$$C(s) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{10s + 0.1}{s}. \quad (33)$$

V další části se budeme zabývat návrhovými požadavky.

### 2.1.1 Vnitřní stabilita uzavřené smyčky

Pro grafické ověření vnitřní stability poslouží Nyquistovo kritérium. K jeho použití potřebujeme znát přenos otevřené smyčky  $L_0$ :

$$L_0 = CP_{S0} = \frac{0.02727s + 0.0002727}{0.5s^4 + 1.114s^3 + 0.231s^2 + 0.0062s}. \quad (34)$$

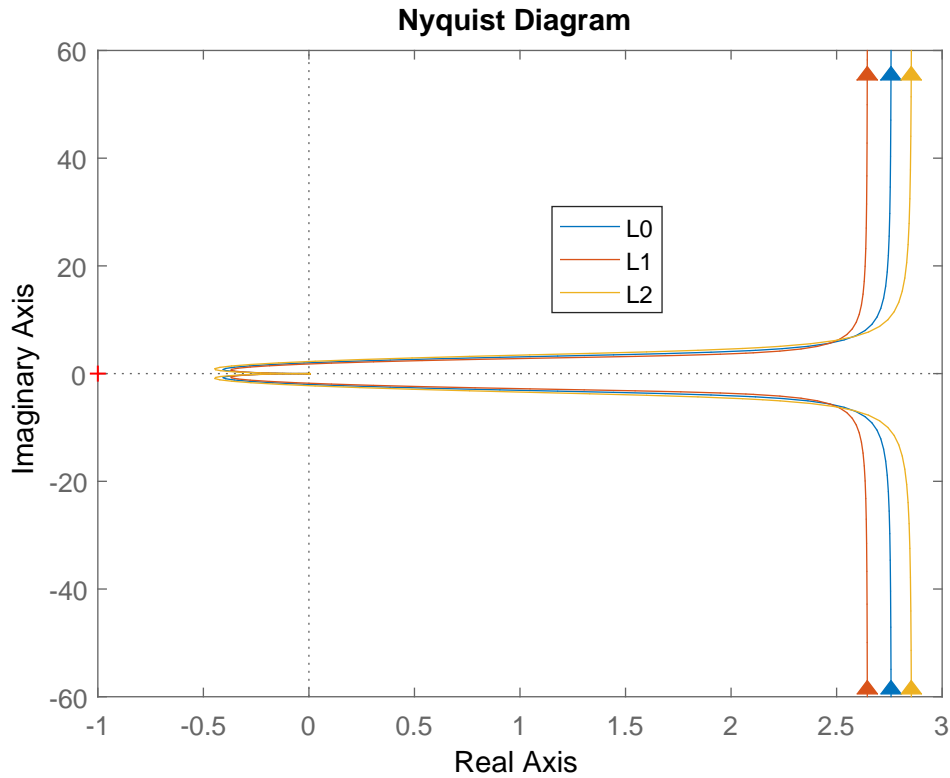
$$L_1 = CP_{S1} = \frac{0.03s + 0.0003}{0.5s^4 + 1.125s^3 + 0.2537s^2 + 0.0075s}. \quad (35)$$

$$L_2 = CP_{S2} = \frac{0.025s + 0.0002501}{0.5s^4 + 1.104s^3 + 0.2109s^2 + 0.005208s}. \quad (36)$$

Nyní zjistíme počet nestabilních pólů  $P$  a nestabilních nul  $Z$  a definujeme:

$$N = P - Z. \quad (37)$$

Z přenosu zjistíme, že  $P = 1$  a  $Z = 0$ , tedy  $N = 1$  pro všechny tři případy. Nyquistovo kritérium stability říká, že křivka  $L_0(j\omega)$  musí obkličovat bod  $(-1, 0)$  právě  $N$ -krát v kladném směru. Vykresleme tedy Nyquistovu křivku pro otevřený systém.



Obrázek 6: Grafická interpretace Nyquistova kritéria stability.

Z Nyquistovy křivky na obrázku 6 vidíme, že křivka  $L_0(j\omega)$  obkličuje bod  $(-1, 0)$  právě jednou v kladném směru, což je důkaz splnění Nyquistova kritéria stability.

Analyticky ověříme vnitřní stabilitu pomocí známého faktu, že zpětnovazební systém je vnitřně stabilní právě tehdy, jestliže jeho charakteristický polynom nemá žádné nuly v oblasti  $Re(s) \geq 0$ . Charakteristický polynom má tvar:

$$1 + L_0 = 1 + CP_{S0} = \frac{0.5s^4 + 1.114s^3 + 0.231s^2 + 0.03347s + 0.0002727}{0.5s^4 + 1.114s^3 + 0.231s^2 + 0.0062s} \quad (38)$$

$$1 + L_1 = 1 + CP_{S1} = \frac{0.5s^4 + 1.125s^3 + 0.2537s^2 + 0.0375s + 0.0003}{0.5s^4 + 1.125s^3 + 0.2537s^2 + 0.0075s} \quad (39)$$

$$1 + L_2 = 1 + CP_{S2} = \frac{0.5s^4 + 1.104s^3 + 0.2109s^2 + 0.03021s + 0.0002501}{0.5s^4 + 1.104s^3 + 0.2109s^2 + 0.005208s}. \quad (40)$$

Jak můžeme pozorovat, charakteristický polynom ani v jednom případě žádné nestabilní nuly neobsahuje. I tato podmínka stability je tedy splněna.



### 2.1.2 Robustnost ve stabilitě

Zde budeme pracovat se dvěma důležitými přenosy, a to s citlivostní funkcí:

$$S_0 = \frac{1}{1 + CP_{S_0}} \quad (41)$$

a s komplementární citlivostní funkcí

$$T_0 = \frac{CP_{S_0}}{1 + CP_{S_0}}. \quad (42)$$

Máme požadavek, aby maximální hodnota amplitudy citlivostní funkce byla omezena:

$$M_S < 2. \quad (43)$$

Pro určení váhové funkce  $W_1$  využijeme podmínku kvality řízení pro nominální přenos  $P_0$ , kde musí platit:

$$\|S_0\|_\infty < 2, \quad (44)$$

$$\|W_1 S_0\|_\infty < 1, \quad (45)$$

a tedy  $W_1$  nastavíme na 0.5. Po dosazení zjistíme, že protože:

$$\|W_1 S_0\|_\infty = 0.6767 < 1, \quad (46)$$

je podmínka 43 splněna. Pro zajímavost můžeme prozkoumat i robustní kvalitu řízení. Pro tu musí platit nutná a postačující podmínka:

$$\| |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \|_\infty < 1, \quad (47)$$

kde  $W_1$  specifikuje kvalitu řízení a  $W_2$  specifikuje neurčitost systému. Tu určíme využitím přenosu  $W_a$  (viz 24) takto:

$$W_2 = W_m = \frac{W_a}{P_0} = \frac{1.818s^4 + 0.4144s^3 - 0.001124s^2 - 0.002825s - 7.686e - 05}{18.18s^4 + 8.678s^3 + 1.282s^2 + 0.05917s + 0.0008452}, \quad (48)$$

kde  $W_m$  specifikuje neurčitost systému, pokud bychom uvažovali multiplikativní perturbaci. My ale pracujeme s aditivní neurčitostí danou  $W_a$ , jejíž znalost využijeme pro výpočet  $W_m$  pro náš případ (viz 48). Po tomto ujasnění již můžeme pracovat se známými vztahy. Dosazením do 47 získáme:

$$\| |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \|_\infty = 0.7077 < 1. \quad (49)$$

Nutná a postačující podmínka pro robustní kvalitu řízení je tedy splněna. Nyní ověříme podmínku pro robustní stabilitu, která říká:

$$\|W_2 T_0\|_\infty < 1. \quad (50)$$

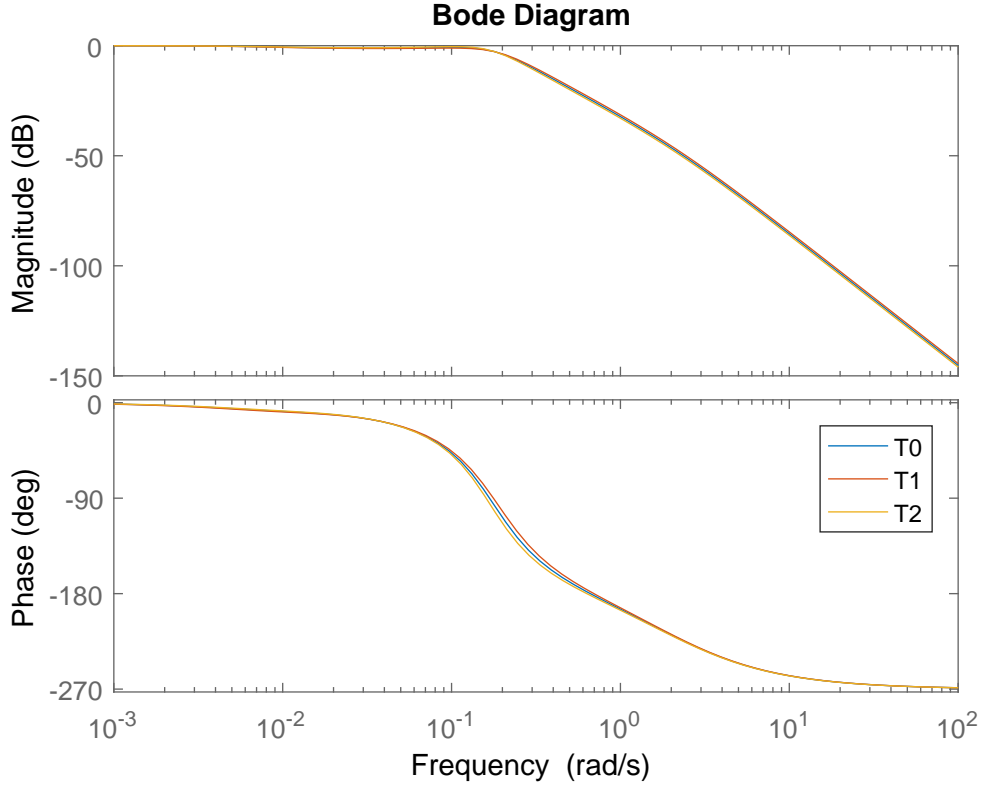
Po dosazení získáme:

$$\|W_2 T_0\|_\infty = 0.082 < 1. \quad (51)$$

Ověřili jsme si tedy robustnost ve stabilitě pro danou množinu modelů.

### 2.1.3 Podmínka útlumu komplementární citlivostní funkce

Útlum komplementární citlivostní funkce  $T(j\omega)$  na frekvenci  $\Omega_a = 10 \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}]$ , na kterou je omezená dostupná šířka pásma, musí být alespoň  $-10 \text{ dB}$ . K ověření tohoto požadavku si vykresleme Bodeho frekvenční charakteristiky:



Vyčteme, že útlum na frekvenci  $\Omega_a$  je roven pro varianty přenosu 0, 1 a 2:  $-85.4368$ ,  $-84.6093$  a  $-86.1905 \text{ dB}$ , což náš požadavek bohatě splňuje.

### 2.1.4 Omezení zesílení energie šumu

Posledním požadavkem je zajistit, aby energie libovolného šumu měření  $n(t)$  nebyla zesílena více než 1.5 krát. K výpočtu hodnoty tohoto zesílení poslouží  $\|H\|_\infty$  norma komplementární citlivostní funkce:

$$\|T_0\|_\infty = 1.0 < 1.5. \quad (52)$$

I tohoto omezení jsme tedy docílili. Platnost si opět ověříme i pro další přenosy množinového modelu.

$$\|T_1\|_\infty = 1.0 < 1.5. \quad (53)$$

$$\|T_2\|_\infty = 1.0 < 1.5. \quad (54)$$

## 2.2 Druhý úkol - kontrola zesílení poruch

V dalším kroku budeme předpokládat, že měření, které provádí senzor hladiny  $H_2$ , bude zatíženo harmonickým šumem  $n(t)$  o frekvenci 50 Hz. Je známo, že pokud  $n(t)$  je šum měření, je přenos  $n \rightarrow y$  má tvar:

$$-T(j\omega) = \frac{-C(j\omega)P(j\omega)}{1 + C(j\omega)P(j\omega)}. \quad (55)$$

Nyní dosazením dané frekvence  $\omega = 2\pi \cdot 50$  zjistíme, zda je signál zesílen.

$$|-T_0(j\omega)| = 1.7618 \cdot 10^{-9}$$

$$|-T_1(j\omega)| = 1.9380 \cdot 10^{-9}$$

$$|-T_2(j\omega)| = 1.6153 \cdot 10^{-9}.$$

Vidíme tedy, že takovéto šumy měření jsou na výstupu výrazně zeslabeny. Dále předpokládáme, že i výstup soustavy je zatížen omezenou harmonickou poruchou  $d(t)$  o frekvenci 0.1 Hz. Opět víme, že pokud  $d(t)$  zatěžuje výstup soustavy, je přenos  $d \rightarrow y$  vyjádřen jako:

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)P(j\omega)}. \quad (56)$$

Opět dosadíme danou frekvenci šumu, tedy  $\omega = 2\pi \cdot 0.1$ , a zkontrolujeme zesílení na výstupu.

$$|S_0(j\omega)| = 1.0671$$

$$|S_1(j\omega)| = 1.0734$$

$$|S_2(j\omega)| = 1.0617.$$

Zde již naopak pozorujeme mírné zesílení šumů na výstupu systému.

## 2.3 Třetí úkol - určení maximálního kolísání hladiny

Předpokládejme, že je systém v rovnovážném stavu a regulační odchylka  $e(t) = 0$ . Na vstup řízené soustavy začíná působit porucha  $d_i$  s omezenou energií  $\|d_i\|_2 < 1$ . Cílem bude určit maximální kolísání hladiny  $H_2$ , ke kterému by mohlo od požadovaného stavu dojít. Víme, že přenos  $d_i \rightarrow y$  bude ve tvaru:

$$\frac{P(j\omega)}{1 + C(j\omega)P(j\omega)}. \quad (57)$$

Dále využijeme znalosti, že pokud velikost vstupu je měřena pomocí  $\|H\|_2$  normy a výstup  $\|H\|_\infty$  normou, bude zesílení systému dáno  $\|H\|_2$  normou přenosu zmíněného přenosu 57. Platí tedy:

$$\|H\|_2 = \sup_{\|u\|_2=1} \frac{\|y\|_\infty}{\|u\|_2} \quad (58)$$

Spočtením  $\|H\|_2$  normy znovu pro všechny tři případy získáme:

$$\left\| \frac{P_0(j\omega)}{1 + C(j\omega)P(j\omega)} \right\|_2 = 0.0232$$

$$\left\| \frac{P_1(j\omega)}{1 + C(j\omega)P_1(j\omega)} \right\|_2 = 0.0229$$

$$\left\| \frac{P_2(j\omega)}{1 + C(j\omega)P_2(j\omega)} \right\|_2 = 0.0235$$

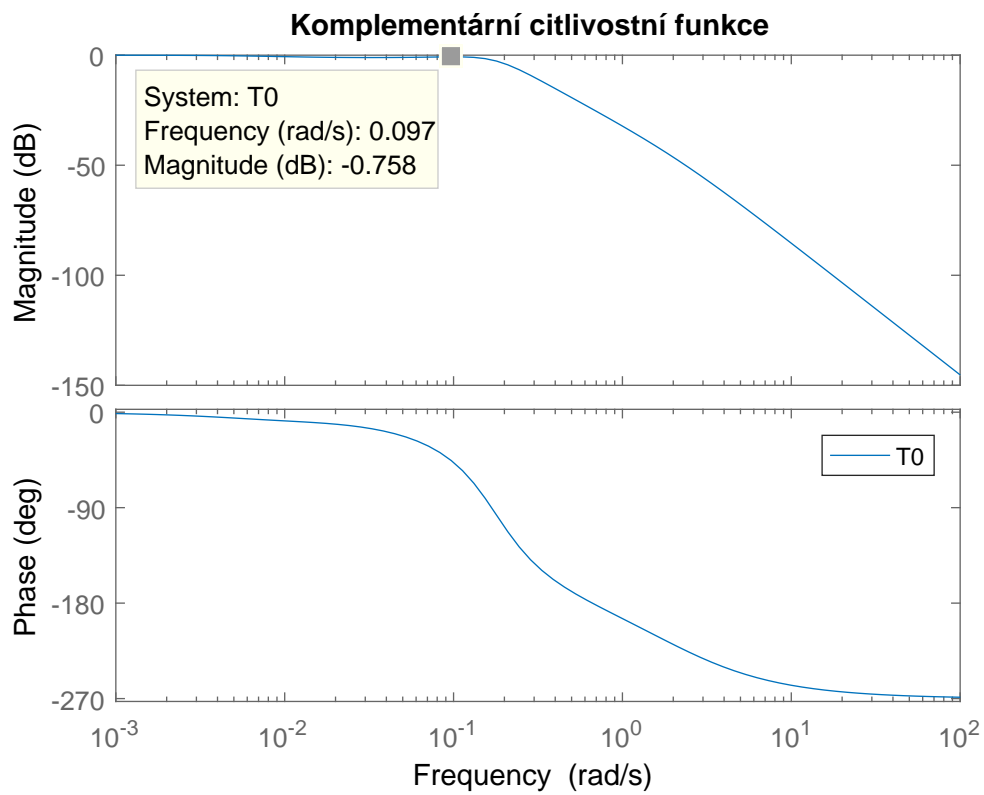
## 2.4 Čtvrtý úkol - určení nejvíce zesílených signálů

Nakonec určíme signály  $d(t)$  a  $n(t)$ , jejichž  $\|h\|_\infty$  norma je omezená na:

$$\|d(t)\|_\infty < 1, \quad (59)$$

$$\|n(t)\|_\infty < 1. \quad (60)$$

Tyto signály jsou zpětnovazební smyčkou nejvíce zesíleny buďto ve smyslu maximální hodnoty signálu, nebo ve smyslu energie signálu. Ke zjištění, na jakých frekvencích jsou tyto signály zesíleny nejvíce, nám pomůže vykreslení Bodeho frekvenčních charakteristik záporné komplementární citlivostní funkce  $-T(j\omega)$  a citlivostní funkce  $S(j\omega)$ , určených v kapitole 2.2 pro nominální systém a tyto hodnoty z nich vyčíst.

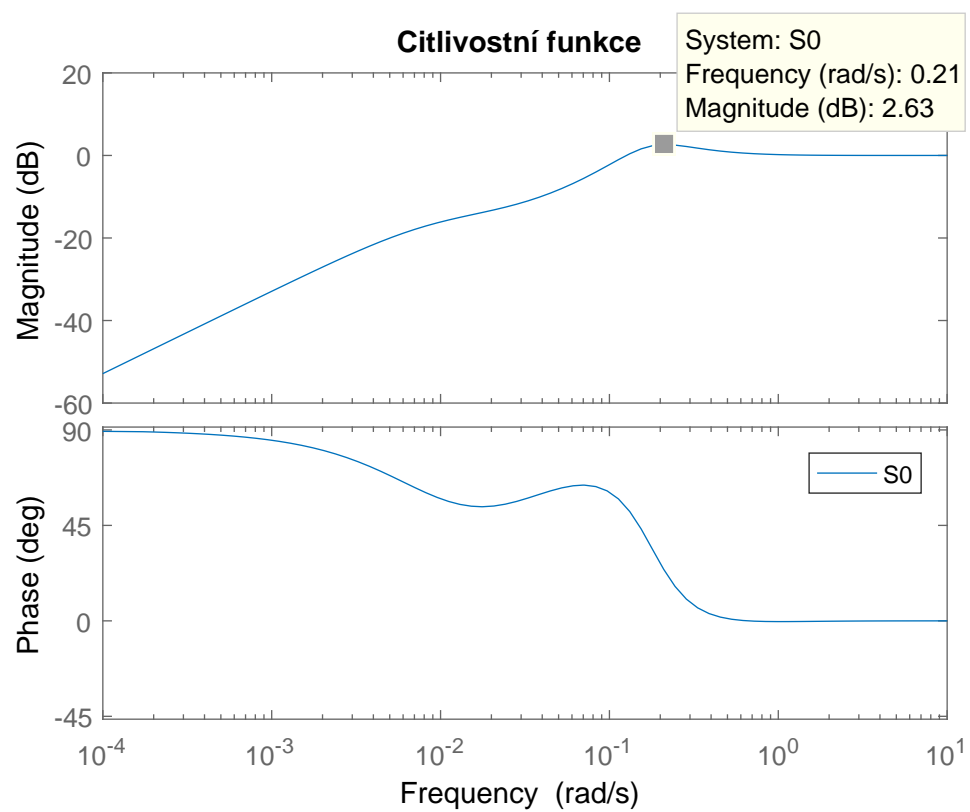


Obrázek 7: Bodeho frekvenční charakteristika pro  $-T(j\omega)$ .

Z každého Bodeho diagramu (obrázky 7 a 8) odečteme jednu frekvenci, tedy v našem případě:

$$\Omega_n = 0.097 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (61)$$

$$\Omega_d = 0.21 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (62)$$



Obrázek 8: Bodeho frekvenční charakteristika pro  $S(j\omega)$ .

### 2.4.1 Ve smyslu maximální hodnoty signálu

Největší zesílení daných externích signálů budeme pozorovat v případě působení periodických signálů o námi určených frekvencích  $\Omega_n$  a  $\Omega_d$  (viz 61 a 62). Pokud zesílení uvažujeme ve smyslu maximální hodnoty, bude tento periodický signál představovat obdélníkový signál s příslušnou frekvencí, tedy:

$$u(t - \tau) \triangleq \text{sgn}(h(\tau)), \quad (63)$$

což lze vyčíst ze známých tabulek stejně tak jako tvar určující zesílení  $\|h\|_1$ , což je jednotková norma impulsní funkce přenosu  $T(j\omega)$  pro poruchu měření  $n(t)$  a přenosu  $S(j\omega)$  pro poruchu na výstupu systému  $d(t)$ , přičemž platí:

$$|y(t)| \leq \|h\|_1 \|u\|_\infty. \quad (64)$$

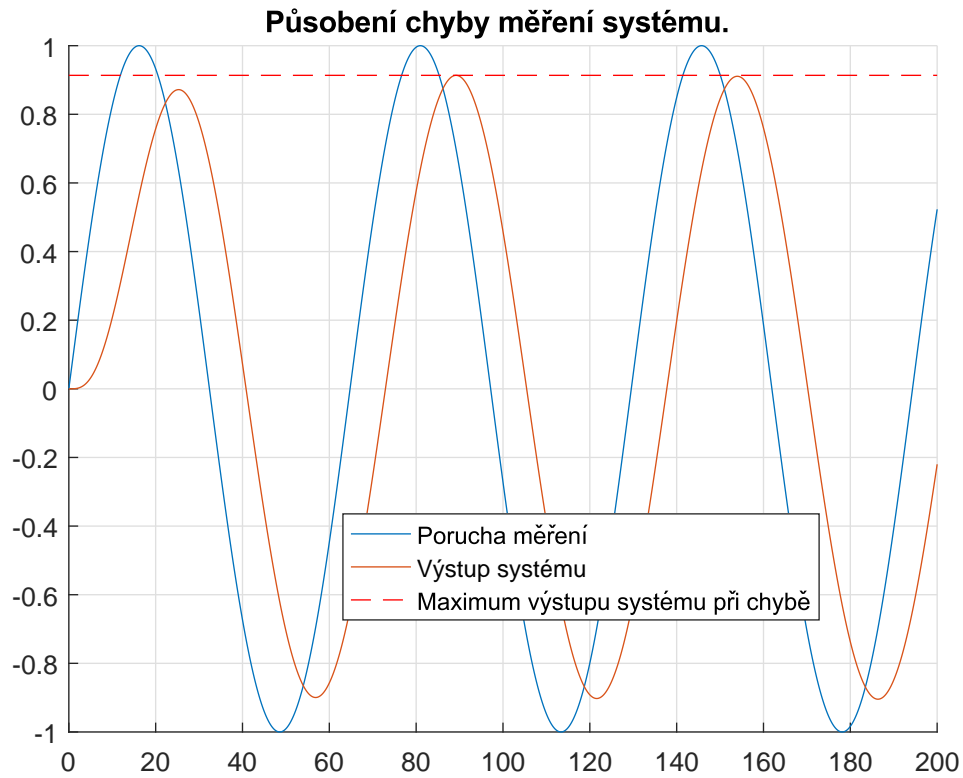
Výsledkem je:

$$\|h_{T_0}\|_1 = 3.4253,$$

$$\|h_{S_0}\|_1 = 2.4253.$$

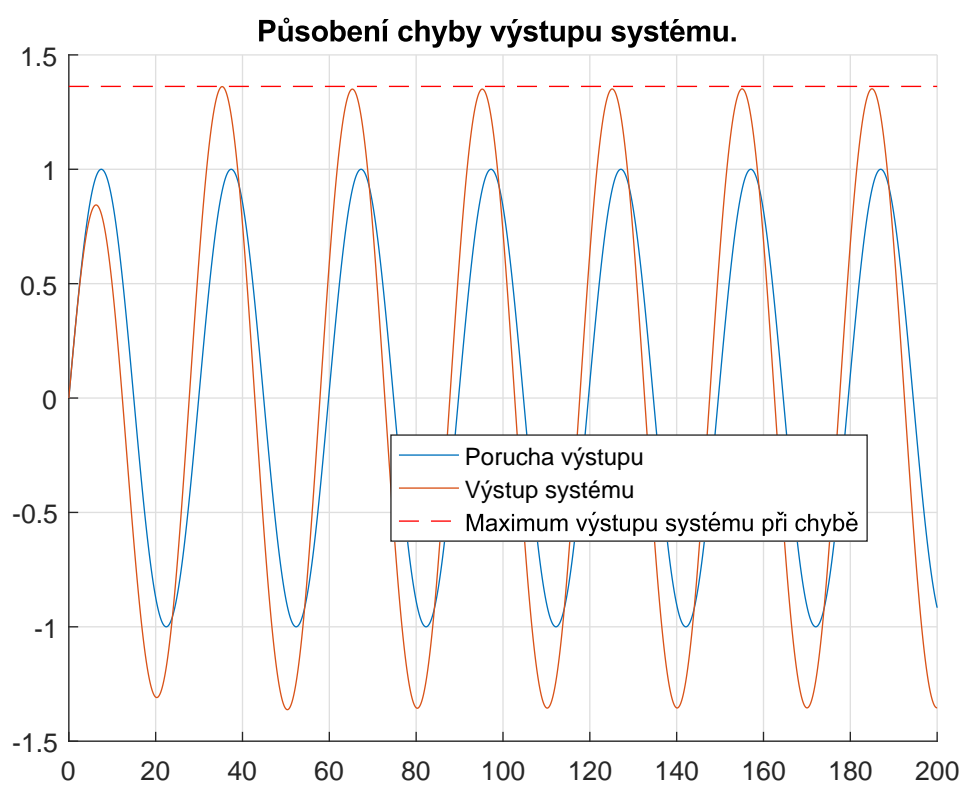
### 2.4.2 Ve smyslu energie signálu

Pokud zesílení uvažujeme ve smyslu energie, bude působící periodický signál představovat sinusovku, tedy  $\sin(t)$ . Ten budeme měřit normou  $\|\sin(t)\|_\infty = 1$ . Jelikož výstup tentokrát měříme 2-normou, vyčteme z tabulek, že maximální zesílení systému bude rovno  $\infty$ .



Obrázek 9: Odezva systému při působení sinusové poruchy měření  $n(t)$ .

Z obrázků 7 a 8 můžeme vyčíst, že maximální zesílení na výstupu za předpokladu působení poruchy měření  $n(t)$  je -0.758 dB a v případě působení poruchy  $d(t)$  na výstup soustavy činí 2.63 dB. Z grafů na obrázcích 9 a 10 snadno vyčteme hodnotu maximálního zesílení. Pokud převedeme tyto hodnoty do jednotek dB, získáme pro poruchu měření  $n(t)$  zesílení -0.7855 dB a pro poruchu na výstupu soustavy  $d(t)$  zesílení 2.6851 dB. Všimněme si, že tyto hodnoty téměř přesně odpovídají těm, které jsme odečetli z Bodeho frekvenční charakteristiky.



Obrázek 10: Odezva systému při působení sinusového poruchy  $d(t)$  na výstup soustavy.



### 3 Závěr

První polovina práce se zabývá určením linearizovaného stavového modelu v různých pracovních bodech, lišících se ve velikosti přítoku. Rovněž jsme uvažovali dvě varianty, a to jak měnící se výšky hladin, tak i konstantní hladiny za měnícího se nastavení ventilů. Pro všechny případy jsme dále určili přenosové funkce a dále jsme se zabývali neurčitostí. Jako model neurčitosti jsme volili aditivní perturbaci, přičemž jsme zajistili, aby neurčitost byla minimální, ale přesto pokrývala skutečnou neurčitost systému. Neurčitosti pro obě varianty jsme následně porovnali.

V druhé polovině práce jsme řešili návrh regulátoru. Navíc se nám systém ještě rozrostl o přenos motoru čerpadla, který realizoval přítok. Pro jednoduchost jsme jej realizovali pomocí aproximace systémem prvního řádu. Hlavním úkolem bylo navrhnout parametry PI regulátoru, tak aby byla splněna řada uvedených kritérií. Vedle těch základních, jako je například vnitřní stabilita uzavřené smyčky, jsme, jelikož pracujeme s neurčitostí, řešili rovněž robustnost ve stabilitě. K ověřování některých kritérií jsme používali také grafické metody. V dalším bodě jsme uvažovali zatížení senzoru hladiny a výstupu soustavy harmonickými šumy a zjišťovali jsme, zda jsou tyto signály na výstupu uzavřené smyčky zesíleny, nebo tlumeny. Dále jsme určili maximální hodnotu kolísání měřené hladiny za přítomnosti poruchy působící na vstup soustavy. V posledním bodě jsme zkoumali signály jako poruchy působící na senzor měření a na výstup soustavy a hledali jsme, kde jsou zpětnovazební smyčkou nejvíce zesíleny, a to ve smyslu maximální hodnoty signálu, kde jsme je uvažovali jako obdélníkový periodický signál, a ve smyslu energie signálu, kde jsme je interpretovali jako sinusový signál.