

# Automatické řízení

## Semestrální práce

Miroslav Bulka, Jan Cibulka

81.121.1025



# AUTOMATICKÉ ŘÍZENÍ- ZADÁNÍ REFERÁTU



## I. Model neurčitosti

1. Při konstantním přítoku  $Q_{10} = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  vypočtete potřebné nastavení přepouštěcího ventilu  $S_p$  a výtokového ventilu  $S_2$  tak, aby výšky hladin v nádobách při ustáleném stavu byly  $H_{10} = 0,8 \text{ m}$  a  $H_{20} = 0,2 \text{ m}$  (tzv. pracovní bod). Hodnoty známých parametrů:  $S = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  (plocha dna nádob),  $c_p = c_2 = 0.6$ . *malá podle LS1*
2. Určete linearizovaný stavový model v daném pracovním bodě a v pracovním bodě, který by odpovídal 20% zvýšení přítoku  $Q_{10}$ .
  - (A) Nastavení přepouštěcích ventilů  $S_p$  a  $S_2$  zůstane stejné, se zvyšujícím se přítokem  $Q_1$  se mění výšky hladin  $H_1$  a  $H_2$ .
  - (B) Spolu se zvyšujícím se přítokem  $Q_1$  se mění nastavení ventilů  $S_p$  a  $S_2$  tak, aby výška hladin zůstala konstantní, tedy  $H_1(t) = H_{10}$ ,  $H_2(t) = H_{20}$ .
3. Určete přenos systému  $Q_1(t) \rightarrow H_2(t)$  v závislosti na výšce hladiny  $H_1$  a  $H_2$  (případ 2A) či nastavení ventilu  $S_p, S_2$  (případ 2B). Znázorněte pro oba případy v komplexní rovině neurčitost přenosu za předpokladu, že skutečný pracovní bod je libovolně mezi původním pracovním bodem a pracovním bodem při 20 % zvýšeném přítoku.
  - (a) Určete numericky skutečnou neurčitost danou intervalem pro výšky hladin  $H_1$ ,  $H_2$  (resp.  $S_p$ ,  $S_2$ ) a přítok  $Q_1$ .
  - (b) Definujte model neurčitosti pomocí vhodně zvoleného modelu perturbací, nominálního modelu  $P_0$  a váhové funkce  $W(s)$  tak, aby velikost neurčitosti byla minimální a přesto pokrývala skutečnou neurčitost získanou v bodě (b).

Pro zobrazení neurčitosti použijte 10 frekvencí  $\omega_1, \dots, \omega_{10}$ , které pokryjí fázové zpoždění  $(0, \pi)$  fázové frekvenční charakteristiky procesu.

4. Porovnejte velikosti obou neurčitostí (2A a 2B).

## II. Návrh regulátoru

Dále předpokládejte, že přítok  $Q_1(t)$  je realizován vodním čerpadlem, které je poháněno stejnosměrným motorem. Chování čerpadla budeme pro jednoduchost aproximovat systémem prvního řádu s časovou konstantou  $T = 0.5\text{s}$  a statickým zesílením  $K_s = Q_{10}$ . Dále uvažujme PI regulátor, který řídí napětí na kotvě motoru čerpadla s cílem řídit výšku hladiny  $H_2$ . Rovněž předpokládejme, že všechny externí signály regulační smyčky jsou rozumně malé, takže systém není příliš vychýlen ze svého pracovního bodu a může být považován za lineární.

1. Navrhnete parametry PI regulátoru s přenosem  $C(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s})$  tak, aby byly splněny následující návrhové požadavky pro všechny systémy z modelu neurčitosti získaného v bodě 3(b) pro 2A (mění se výška hladin), tedy pro libovolný pracovní bod, který se nachází mezi původním pracovním bodem a pracovním bodem při zvýšeném přítoku.
  - (a) Vnitřní stabilita uzavřené smyčky – ověřte analyticky i graficky (Nyquistovo kritérium).
  - (b) Robustnost ve stabilitě – maximální hodnota amplitudy citlivostní funkce  $S(j\omega)$  je  $M_S < 2$ .
  - (c) Předpokládejte, že díky dalším nepřesnostem, šumům a nelinearitám je dostupná šířka pásma omezená na  $\Omega_a = 10$  [rad/s]. Útlum komplementární citlivostní funkce  $T(j\omega)$  na frekvenci  $\Omega_a$  musí být alespoň -10 dB.
  - (d) Zajistěte, aby energie libovolného šumu měření  $n(t)$  nebyla zesílena více než 1.5 krát.
2. Předpokládejte, že měření, tedy senzor hladiny  $H_2$ , je zatíženo harmonickým šumem  $n(t)$  s frekvencí 50Hz a výstup soustavy omezenou harmonickou poruchou  $d(t)$  s frekvencí 0.1Hz. Ověřte, zda žádný z těchto signálů není na výstupu systému (tedy  $H_2(t)$ ) smyčkou s navrženým PI regulátorem zesílen.
3. Předpokládejte, že je systém v rovnovážném stavu a  $e(t) = 0$ . Na vstup řízené soustavy začne působit porucha  $d_i$  s omezenou energií  $\|d_i\|_2 < 1$ . Určete k jakému maximálnímu kolísání hladiny  $H_2$  od požadovaného stavu může dojít.
4. Určete signály  $n(t)$  a  $d(t)$ , kde  $\|n(t)\|_\infty < 1$ ,  $\|d(t)\|_\infty < 1$ , které jsou zpětnovazební smyčkou nejvíce zesíleny ve smyslu
  - (a) maximální hodnoty signálu,
  - (b) energie signálu.

Určete hodnoty těchto zesílení.

*Poznámka:* K řešení využijte libovolné prostředky Matlabu/Simulinku, Robust Control Toolbox, Symbolic Toolbox, webový applet "PID Control Laboratory".

# Obsah

<b>1</b>	<b>Řešení - Model neurčitosti</b>	<b>5</b>
1.1	První úkol - výpočet nastavení ventilů . . . . .	5
1.2	Druhý úkol - linearizace ve dvou pracovních bodech . . . . .	6
1.2.1	Konstantní průtoky - mění se hladina . . . . .	6
1.2.2	Konstantní hladina - mění se průtoky . . . . .	6
1.3	Třetí úkol - určení přenosu systému . . . . .	8
1.3.1	Numerické určení neurčitosti . . . . .	10
1.4	Čtvrtý úkol - Porovnání velikostí neurčitostí . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Řešení - Návrh regulátoru</b>	<b>13</b>
2.1	První úkol - návrh parametrů PI regulátoru . . . . .	13
2.1.1	Vnitřní stabilita uzavřené smyčky (Nquistovo kritérium) . . . . .	13
2.1.2	Robustnost ve stabilitě . . . . .	13
2.1.3	Podmínka útlumu komplementární citlivostní funkce . . . . .	13
2.1.4	Energie šumu omezená. . . . .	13
2.2	Druhý úkol . . . . .	13
2.3	Třetí úkol . . . . .	14
2.4	Čtvrtý úkol . . . . .	14

# 1 Řešení - Model neurčitosti

## 1.1 První úkol - výpočet nastavení ventilů

Máme konstantní přítok  $Q_1 = Q_{10} = 1.5 \cdot 10^{-4} m^3 s^{-1}$ , přičemž víme, že:

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_1}{dt} \\ \frac{dV_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - Q_p \\ Q_p - Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - c_p S_p v_p \\ c_p S_p v_p - c_2 S_2 v_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Z Bernoulliho zákona pak odvodíme:

$$\begin{bmatrix} v_p \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2g \cdot (H_1 - H_2)} \\ \sqrt{2g \cdot (H_2)} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Daný systém popisují diferenciální rovnice:

$$\begin{bmatrix} \frac{dH_1}{dt} \\ \frac{dH_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \cdot Q_1 - \frac{S_p C_p}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot (H_1 - H_2)} \\ \frac{S_p C_p}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot (H_1 - H_2)} - \frac{S_2 C_2}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot H_2} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Zavedením  $x_1(t) = H_1(t)$ ;  $x_2(t) = H_2(t)$ ;  $u(t) = Q_1(t)$  získáme

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \cdot u - \frac{S_p C_p}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot (x_1 - x_2)} \\ \frac{S_p C_p}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot (x_1 - x_2)} - \frac{S_2 C_2}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot x_2} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Za předpokladu neměnicích se hladin  $H_1$  a  $H_2$  budou obě derivace nulové. Položíme je tedy nulou a díky tomu získáme požadované nastavení přepouštěcího ventilu  $S_p$  a výtokového ventilu  $S_2$ :

$$\begin{bmatrix} S_p \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_{10}}{C_p \cdot \sqrt{2g(H_1 - H_2)}} \\ \frac{C_p S_p \sqrt{(H_1 - H_2)}}{C_2 \sqrt{H_2}} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

kde po dosazení získáme:

$$\begin{bmatrix} S_p \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2864 \cdot 10^{-5} \\ 1.2620 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

## 1.2 Druhý úkol - linearizace ve dvou pracovních bodech

### 1.2.1 Konstantní průtoky - mění se hladina

Nejdříve si zavedeme značení:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Chování těchto stavových proměnných je popsáno rovnicí 4. My chceme získat linearizovaný stavový model, a to ve tvaru:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (9)$$

Pro systém popsáný rovnicí 4 budou parametry linearizovaného stavového modelu, provedeme-li klasickou linearizaci, mít následující podobu:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{C_p S_p \sqrt{2g}}{2 \cdot S \sqrt{(H_1 - H_2)}} & \frac{C_p S_p \sqrt{2g}}{2 \cdot S \sqrt{(H_1 - H_2)}} \\ \frac{C_p S_p \sqrt{2g}}{2 \cdot S \sqrt{(H_1 - H_2)}} & -\frac{C_p S_p \sqrt{2g}}{2 \cdot S \sqrt{(H_1 - H_2)}} - \frac{C_2 S_2 g}{S \sqrt{(2 \cdot g \cdot H_2)}} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Parametry modelu pro konstantní přítok  $Q_1 = Q_{10} = 1.5 \cdot 10^{-4} m^3 s^{-1}$ :

$$A = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.05 \\ 0.05 & -0.2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Parametry modelu pro zvýšený přítok  $Q_{20} = Q_{10} \cdot 1.2 = 1.8 \cdot 10^{-4} m^3 s^{-1}$ :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0417 & 0.0417 \\ 0.0417 & -0.1667 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 1.2.2 Konstantní hladina - mění se průtoky

V tomto případě budeme usilovat o to, aby se hladiny neměnily. Bude tedy platit:

$$\begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Naopak budeme měnit nastavení ventilů. Takovéto nastavení jsme pro konstantní přítok  $Q_{10}$  již spočetli, viz výsledek 6. Aby byla výška hladin konstantní i při přítoku  $1.2 \cdot Q_{10}$ , budeme muset nastavení ventilů přepočítat pomocí vztahu 5, čímž získáme následující výsledné nastavení:

$$\begin{bmatrix} S_p \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.7437 \cdot 10^{-5} \\ 1.5145 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

K získání linearizovaného stavového modelu v tomto pracovním bodě využijeme zavedeného vztahu 10. Jeho parametry budou vypadat následovně:

$$A = \begin{bmatrix} -0.06 & 0.06 \\ 0.06 & -0.24 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 1.3 Třetí úkol - určení přenosu systému

Nyní nás zajímá přenos systému  $Q_1(t) \rightarrow H_2(t)$ . Je tedy zřejmé, že měříme pouze veličinu  $H_2(t)$ . Matici  $C$  stavového popisu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (14)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (15)$$

budeme nyní uvažovat jako:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Přenos systému poté určíme ze stavové rovnice linearizovaného modelu pomocí známého vztahu:

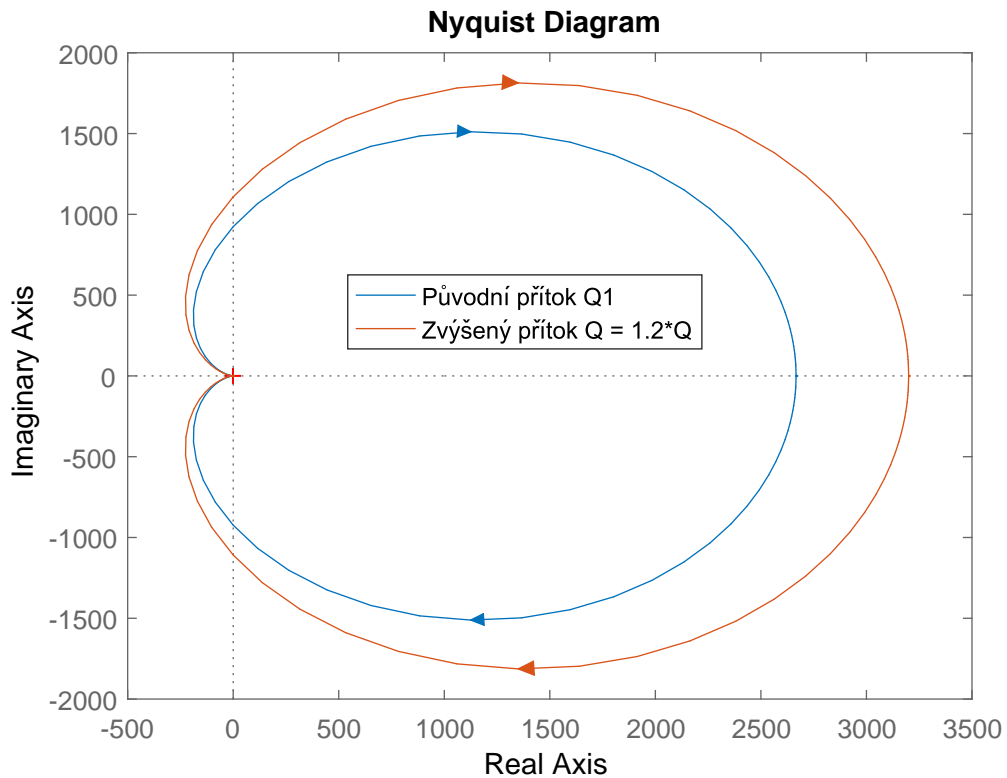
$$P(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B. \quad (16)$$

V kapitolách 1.2.1 a 1.2.2 jsme získali tři různé stavové reprezentace pro různé situace, jako jsou různá nastavení ventilů a přítoků. Nejdříve spočteme přenosy pro systém popsaný v kapitole 1.2.1, tedy pro přítok  $Q_{10}$  ( $P_1(s)$ ) a pro jeho zvýšenou variantu ( $P_2(s)$ ):

$$P_1(s) = \frac{20}{s^2 + 0.25s + 0.0075} \quad (17)$$

$$P_2(s) = \frac{16.67}{s^2 + 0.2083s + 0.005208}, \quad (18)$$

jejichž znázornění v komplexní rovině si můžeme prohlédnout na obrázku 1.



Obrázek 1: Nyquistova frekvenční charakteristika pro dané přenosy.

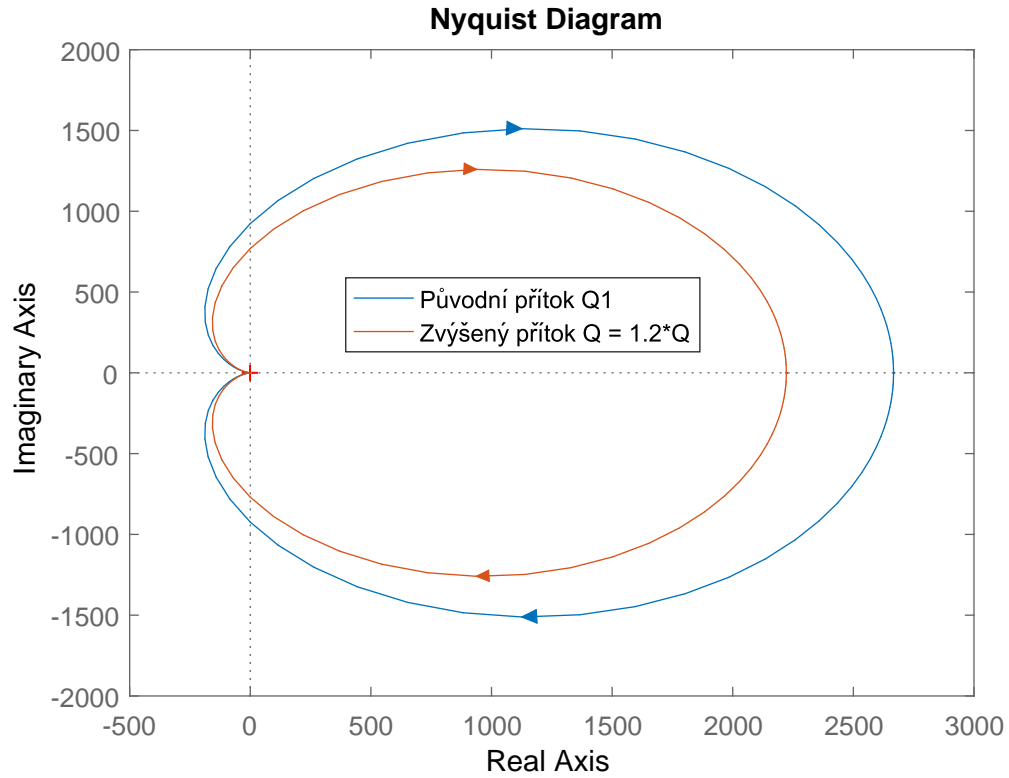


Pro získání přenosů pro systém popsany v kapitole 1.2.2 budeme postupovat stejně a získáme znovu dva přenosy pro pro přítok  $Q_{10}$  ( $P_1(s)$ ) a pro jeho zvýšenou variantu ( $P_2(s)$ ):

$$P_1(s) = \frac{20}{s^2 + 0.25s + 0.0075} \quad (19)$$

$$P_2(s) = \frac{24}{s^2 + 0.3s + 0.0108}, \quad (20)$$

jejichž znázornění v komplexní rovině si můžeme prohlédnout na obrázku 2.



Obrázek 2: Nyquistova frekvenční charakteristika pro dané přenosy.

### 1.3.1 Numerické určení neurčitosti

Nyní budeme uvažovat, že máme množinový model, ve kterém jsou všechny přenosy  $P$ , které vznikly z nominálního přenosu  $P_0$  aditivní perturbací:

$$P = P_0 + W_a \Delta, \quad (21)$$

kde  $\|\Delta\|_\infty < 1$  a  $W_a(s)$  je pevně daná přenosová funkce. Tu můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$W_a(s) = P_0(s) - P(s), \quad (22)$$

kde za  $P(s)$  budeme dosazovat přenosy spočtené výše, tedy výsledky 17, 18, 19 a 20. Nejprve se tedy zabývejme přenosy týkající se varianty A, tedy přenosy  $P_1(s)$  pro  $Q_{10}$  (viz 17) a  $P_1(s)$  pro  $1.2 \cdot Q_{10}$  (viz 18), které jsme spočetli výše. Dále předpokládáme, že pracovní bod se nachází libovolně mezi těmito dvěma pracovními body, lišící se v přítoku  $Q$ . Je zřejmé, že nominální model bude vhodné určit pro pracovní bod ležící zhruba uprostřed tohoto intervalu, tedy pro konstantní přítok  $1.1 \cdot Q_{10}$ . Při jeho určení budeme postupovat stejně jako během určování  $P_1(s)$  a  $P_2(s)$ . Nominální přenos tedy bude mít tvar:

$$P_0(s) = \frac{18.18}{s^2 + 0.2273s + 0.006198}. \quad (23)$$

Váhovou funkci pro námi zvolenou aditivní neurčitost spočteme ze vztahu 22:

$$W_a = \frac{1.818s^2 + 8.882 \cdot 10^{-16}s - 0.0124}{s^4 + 0.4773s^3 + 0.07052s^2 + 0.003254s + 4.649 \cdot 10^{-5}}. \quad (24)$$

Zajímavé bude zejména grafické znázornění neurčitosti. To provedeme pro různé kombinace přenosových funkcí, které odpovídají systému za předpokladu různých velikostí konstantních přítoků, přičemž zavedeme omezení:

$$Q_{10} \leq Q_1 \leq 1.2 \cdot Q_{10}, \quad (25)$$

z nichž jednomu bude odpovídat námi zvolený nominální model  $P_0$ . Zobrazení k komplexní rovině je ke shlédnutí na obrázku 1.3.1.

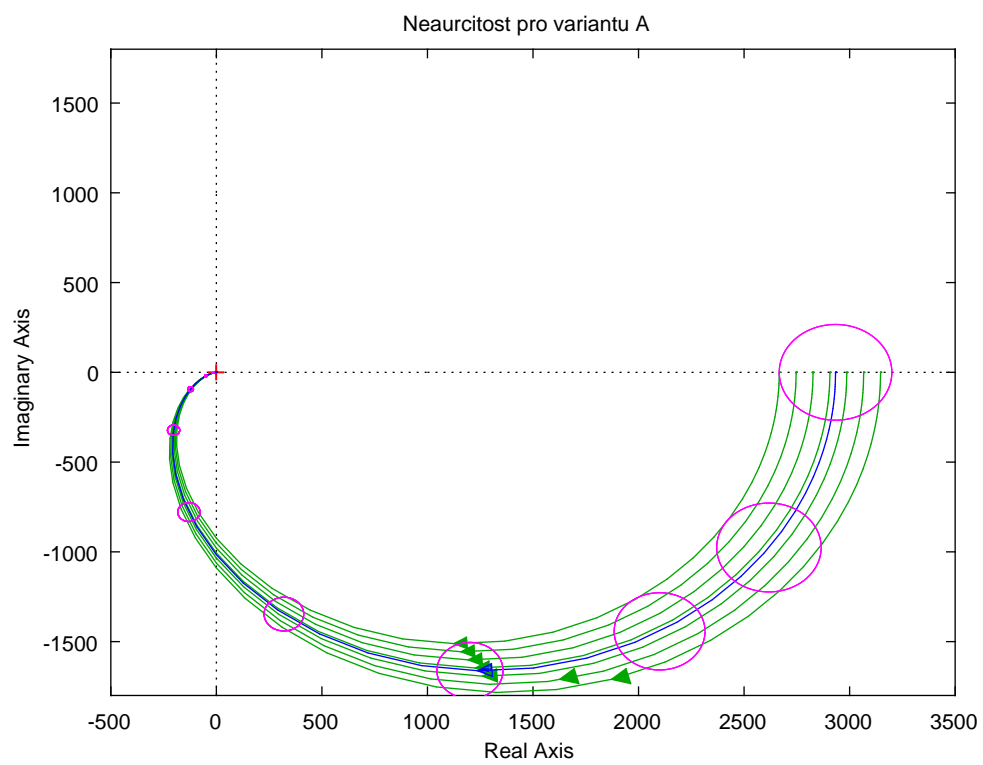
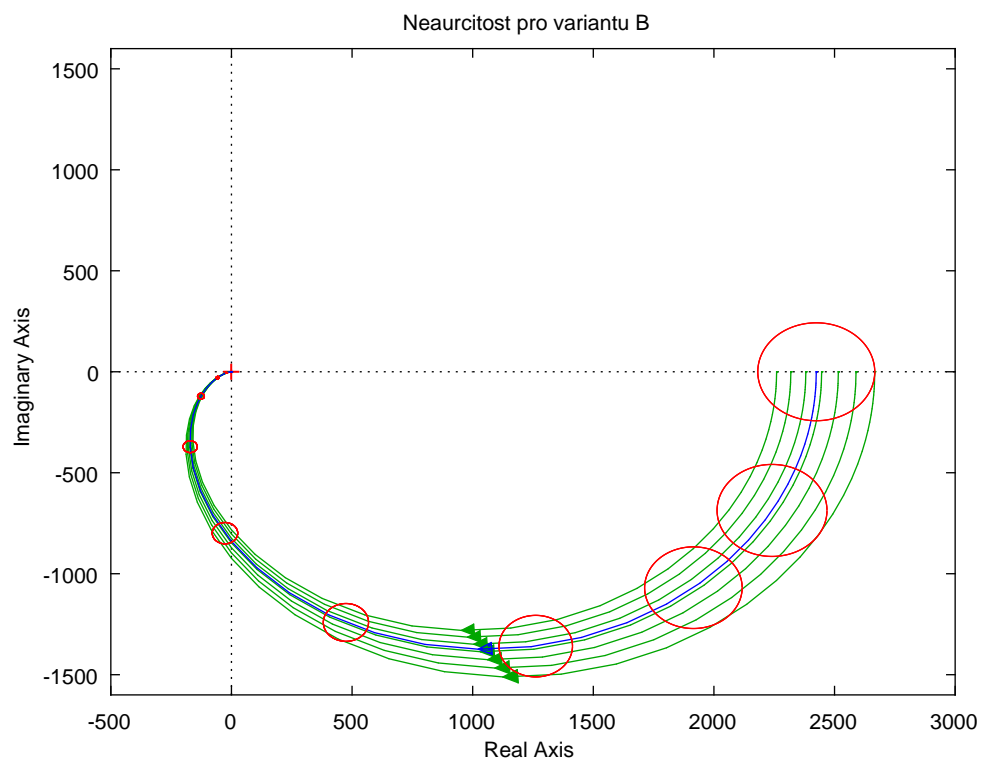
S přenosy  $P_1(s)$  a  $P_2(s)$  týkajícími se varianty B (viz tvary přenosů 19 a 20) budeme pracovat stejně. V tomto případě bude mít nominální přenos tvar:

$$P_0(s) = \frac{22}{s^2 + 0.275s + 0.009075}, \quad (26)$$

načež dále opět využijeme vztahu 22 k určení váhové funkce:

$$W_a = \frac{-2s^2 + 8.882 \cdot 10^{-16}s - 0.0165}{s^4 + 0.525s^3 + 0.08532s^2 + 0.004331s + 6.806 \cdot 10^{-5}}. \quad (27)$$

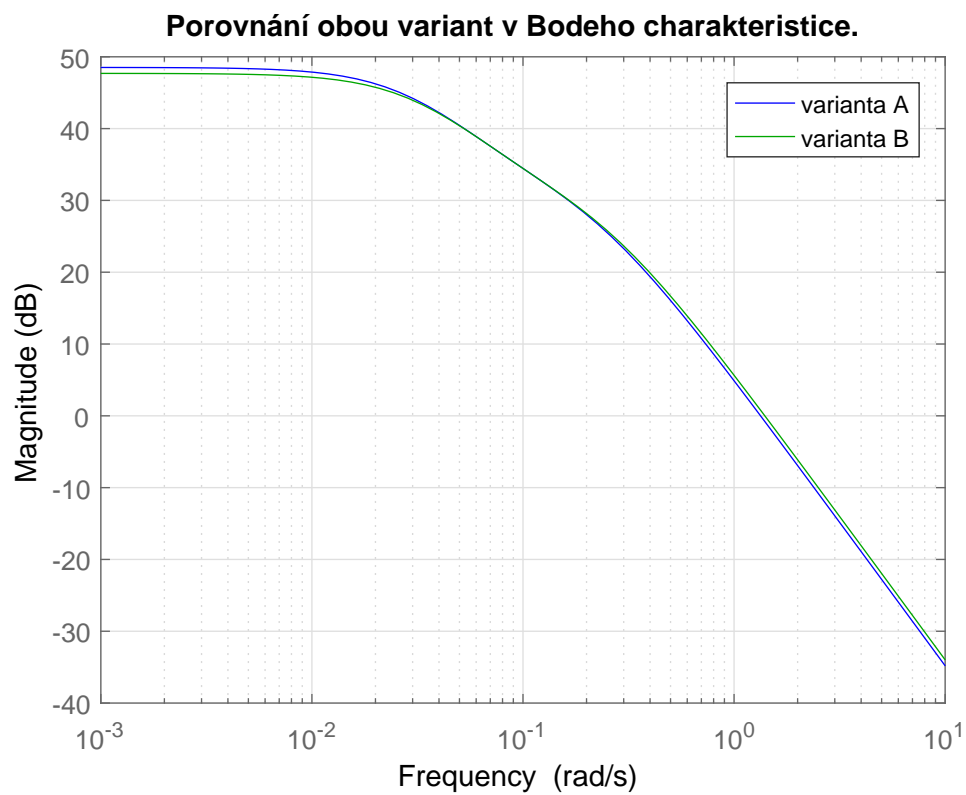
Grafické znázornění provedeme rovněž stejně jako v předchozím bodě za respektování omezení 25. Znázornění je možno vidět na obrázku 1.3.1.



Na obrázcích 1.3.1 a 1.3.1 si všimněme, že je zde vykresleno několik zelených křivek pro přenosové funkce za předpokladu různých, na intervalu 25 vhodně rozmístěných, konstantních přítoků. Modrá křivka představuje náš nominální model  $P_0$ . V případě aditivní perturbace se velikost neurčitosti rovná  $|W_a|$ , která určuje poloměr kružnic, které mají střed na křivce značící nominální přenos. na obrázcích jich vidíme hned několik, a to pro 10 vhodně zvolených frekvencí  $\omega$ , které pokrývají fázové zpoždění  $(0, 2\pi)$ .

#### 1.4 Čtvrtý úkol - Porovnání velikostí neurčitostí

Porovnání neurčitostí pro oba případy provedeme vykreslením příslušných Bodeho frekvenčních charakteristik, kde pozorujeme nepatrné rozdíly, viz obrázek 1.4.



## 2 Řešení - Návrh regulátoru

V následující části budeme předpokládat, že přítok  $Q_1(t)$  již není konstantní, ale je realizován vodním čerpadlem, jehož chování budeme aproximovat systémem prvního řádu s časovou konstantou  $T = 0.5s$  a statickým zesílením  $K = Q_{10}$ .

Přenosová funkce od napětí na kotvě stejnosměrného motoru má tedy tvar:

$$F_c(s) = \frac{Q_{10}}{1 + 0.5s}. \quad (28)$$

Jelikož se budeme dle zadání snažit pomocí PI regulátoru (viz kapitola 2.1) řídit výšku hladiny  $H_2$ , vybereme přenos systému z kapitoly 1.2.1, kde uvažujeme variantu A, tedy měnící se hladiny. Použijeme tudíž přenos systému xxx-číslo-xxx a se zahrnutím přenosu motoru čerpadla (viz 28) získáme přenos soustavy ve tvaru:

$$P_S(s) = F_c(s) \cdot P_{neco}(s) = \frac{Q_{10}xxxxxxxx}{1 + 0.5xxxxxxxxxxxx}. \quad (29)$$

### 2.1 První úkol - návrh parametrů PI regulátoru

Dále budeme uvažovat, že napětí na kotvě motoru čerpadla je řízeno pomocí PI regulátoru za účelem řídit výšku hladiny  $H_2$ . Ještě poznamenejme, že dle podmínek uvedených v zadání můžeme systém považovat za lineární. Přenos PI regulátoru bude mít tvar:

$$C(s) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right). \quad (30)$$

Úkolem je navrhnout parametry PI regulátoru tak, aby byly splněny návrhové požadavky pro všechny systémy z modelu neurčitosti pro variantu A, tedy pro měnící se výšky hladin. Tím je myšleno, že požadavky budou platit pro libovolný pracovní bod, který se nechází mezi původním pracovním bodem a pracovním bodem při zvýšení přítoku, tedy pro takový přítok  $Q$ , který splňuje podmínku 25. V další části se tedy budeme zabývat návrhovými požadavky.

Nejsem si jistý jestli tady jde o subukoly nebo jenom podmínky pro jeden úkol.

#### 2.1.1 Vnitřní stabilita uzavřené smyčky (Nquistovo kritérium)

#### 2.1.2 Robustnost ve stabilitě

#### 2.1.3 Podmínka útlumu komplementární citlivostní funkce

#### 2.1.4 Energie šumu omezená.

### 2.2 Druhý úkol

Harmonické poruchy.

### **2.3 Třetí úkol**

Maximální kolísání hladiny.

### **2.4 Čtvrtý úkol**

Určení hodnoty nějakých signálů.