

Automatické řízení

Semestrální práce

Miroslav Bulka, Jan Cibulka

81.121.1025



AUTOMATICKÉ ŘÍZENÍ- ZADÁNÍ REFERÁTU



I. Model neurčitosti

1. Při konstantním přítoku $Q_{10} = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ vypočtete potřebné nastavení přepouštěcího ventilu S_p a výtokového ventilu S_2 tak, aby výšky hladin v nádobách při ustáleném stavu byly $H_{10} = 0,8 \text{ m}$ a $H_{20} = 0,2 \text{ m}$ (tzv. pracovní bod). Hodnoty známých parametrů: $S = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ (plocha dna nádob), $c_p = c_2 = 0.6$. *malá podle LS1*
2. Určete linearizovaný stavový model v daném pracovním bodě a v pracovním bodě, který by odpovídal 20% zvýšení přítoku Q_{10} .
 - (A) Nastavení přepouštěcích ventilů S_p a S_2 zůstane stejné, se zvyšujícím se přítokem Q_1 se mění výšky hladin H_1 a H_2 .
 - (B) Spolu se zvyšujícím se přítokem Q_1 se mění nastavení ventilů S_p a S_2 tak, aby výška hladin zůstala konstantní, tedy $H_1(t) = H_{10}$, $H_2(t) = H_{20}$.
3. Určete přenos systému $Q_1(t) \rightarrow H_2(t)$ v závislosti na výšce hladiny H_1 a H_2 (případ 2A) či nastavení ventilu S_p, S_2 (případ 2B). Znázorněte pro oba případy v komplexní rovině neurčitost přenosu za předpokladu, že skutečný pracovní bod je libovolně mezi původním pracovním bodem a pracovním bodem při 20 % zvýšeném přítoku.
 - (a) Určete numericky skutečnou neurčitost danou intervalem pro výšky hladin H_1 , H_2 (resp. S_p , S_2) a přítok Q_1 .
 - (b) Definujte model neurčitosti pomocí vhodně zvoleného modelu perturbací, nominálního modelu P_0 a váhové funkce $W(s)$ tak, aby velikost neurčitosti byla minimální a přesto pokrývala skutečnou neurčitost získanou v bodě (b).

Pro zobrazení neurčitosti použijte 10 frekvencí $\omega_1, \dots, \omega_{10}$, které pokryjí fázové zpoždění $(0, \pi)$ fázové frekvenční charakteristiky procesu.

4. Porovnejte velikosti obou neurčitostí (2A a 2B).

II. Návrh regulátoru

Dále předpokládejte, že přítok $Q_1(t)$ je realizován vodním čerpadlem, které je poháněno stejnosměrným motorem. Chování čerpadla budeme pro jednoduchost aproximovat systémem prvního řádu s časovou konstantou $T = 0.5\text{s}$ a statickým zesílením $K_s = Q_{10}$. Dále uvažujme PI regulátor, který řídí napětí na kotvě motoru čerpadla s cílem řídit výšku hladiny H_2 . Rovněž předpokládejme, že všechny externí signály regulační smyčky jsou rozumně malé, takže systém není příliš vychýlen ze svého pracovního bodu a může být považován za lineární.

1. Navrhnete parametry PI regulátoru s přenosem $C(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s})$ tak, aby byly splněny následující návrhové požadavky pro všechny systémy z modelu neurčitosti získaného v bodě 3(b) pro 2A (mění se výška hladin), tedy pro libovolný pracovní bod, který se nachází mezi původním pracovním bodem a pracovním bodem při zvýšeném přítoku.
 - (a) Vnitřní stabilita uzavřené smyčky – ověřte analyticky i graficky (Nyquistovo kritérium).
 - (b) Robustnost ve stabilitě – maximální hodnota amplitudy citlivostní funkce $S(j\omega)$ je $M_S < 2$.
 - (c) Předpokládejte, že díky dalším nepřesnostem, šumům a nelinearitám je dostupná šířka pásma omezená na $\Omega_a = 10$ [rad/s]. Útlum komplementární citlivostní funkce $T(j\omega)$ na frekvenci Ω_a musí být alespoň -10 dB.
 - (d) Zajistěte, aby energie libovolného šumu měření $n(t)$ nebyla zesílena více než 1.5 krát.
2. Předpokládejte, že měření, tedy senzor hladiny H_2 , je zatíženo harmonickým šumem $n(t)$ s frekvencí 50Hz a výstup soustavy omezenou harmonickou poruchou $d(t)$ s frekvencí 0.1Hz. Ověřte, zda žádný z těchto signálů není na výstupu systému (tedy $H_2(t)$) smyčkou s navrženým PI regulátorem zesílen.
3. Předpokládejte, že je systém v rovnovážném stavu a $e(t) = 0$. Na vstup řízené soustavy začne působit porucha d_i s omezenou energií $\|d_i\|_2 < 1$. Určete k jakému maximálnímu kolísání hladiny H_2 od požadovaného stavu může dojít.
4. Určete signály $n(t)$ a $d(t)$, kde $\|n(t)\|_\infty < 1$, $\|d(t)\|_\infty < 1$, které jsou zpětnovazební smyčkou nejvíce zesíleny ve smyslu
 - (a) maximální hodnoty signálu,
 - (b) energie signálu.

Určete hodnoty těchto zesílení.

Poznámka: K řešení využijte libovolné prostředky Matlabu/Simulinku, Robust Control Toolbox, Symbolic Toolbox, webový applet "PID Control Laboratory".

Obsah

1	Řešení - Model neurčitosti	5
1.1	První úkol - výpočet nastavení ventilů	5
1.2	Druhý úkol - linearizace ve dvou pracovních bodech	6
1.2.1	Konstantní průtoky - mění se hladina	6
1.2.2	Konstantní hladina - mění se průtoky	6
1.3	Třetí úkol - určení přenosu systému	8
1.3.1	Numerické určení neurčitosti	10
1.4	Čtvrtý úkol - Porovnání velikostí neurčitostí	12
2	Řešení - Návrh regulátoru	13
2.1	První úkol - návrh parametrů PI regulátoru	13
2.1.1	Vnitřní stabilita uzavřené smyčky	14
2.1.2	Robustnost ve stabilitě	16
2.1.3	Podmínka útlumu komplementární citlivostní funkce	17
2.1.4	Omezení zesílení energie šumu	17
2.2	Druhý úkol	18
2.3	Třetí úkol	18
2.4	Čtvrtý úkol	18

1 Řešení - Model neurčitosti

1.1 První úkol - výpočet nastavení ventilů

Máme konstantní přítok $Q_1 = Q_{10} = 1.5 \cdot 10^{-4} m^3 s^{-1}$, přičemž víme, že:

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_1}{dt} \\ \frac{dV_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - Q_p \\ Q_p - Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - c_p S_p v_p \\ c_p S_p v_p - c_2 S_2 v_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Z Bernoulliho zákona pak odvodíme:

$$\begin{bmatrix} v_p \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2g \cdot (H_1 - H_2)} \\ \sqrt{2g \cdot (H_2)} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Daný systém popisují diferenciální rovnice:

$$\begin{bmatrix} \frac{dH_1}{dt} \\ \frac{dH_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \cdot Q_1 - \frac{S_p C_p}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot (H_1 - H_2)} \\ \frac{S_p C_p}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot (H_1 - H_2)} - \frac{S_2 C_2}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot H_2} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Zavedením $x_1(t) = H_1(t)$; $x_2(t) = H_2(t)$; $u(t) = Q_1(t)$ získáme

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \cdot u - \frac{S_p C_p}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot (x_1 - x_2)} \\ \frac{S_p C_p}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot (x_1 - x_2)} - \frac{S_2 C_2}{S} \cdot \sqrt{2g \cdot x_2} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Za předpokladu neměnicích se hladin H_1 a H_2 budou obě derivace nulové. Položíme je tedy nulou a díky tomu získáme požadované nastavení přepouštěcího ventilu S_p a výtokového ventilu S_2 :

$$\begin{bmatrix} S_p \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q_{10}}{C_p \cdot \sqrt{2g(H_1 - H_2)}} \\ \frac{C_p S_p \sqrt{(H_1 - H_2)}}{C_2 \sqrt{H_2}} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

kde po dosazení získáme:

$$\begin{bmatrix} S_p \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2864 \cdot 10^{-5} \\ 1.2620 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

1.2 Druhý úkol - linearizace ve dvou pracovních bodech

1.2.1 Konstantní průtoky - mění se hladina

Nejdříve si zavedeme značení:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Chování těchto stavových proměnných je popsáno rovnicí 4. My chceme získat linearizovaný stavový model, a to ve tvaru:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (9)$$

Pro systém popsáný rovnicí 4 budou parametry linearizovaného stavového modelu, provedeme-li klasickou linearizaci, mít následující podobu:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{C_p S_p \sqrt{2g}}{2 \cdot S \sqrt{(H_1 - H_2)}} & \frac{C_p S_p \sqrt{2g}}{2 \cdot S \sqrt{(H_1 - H_2)}} \\ \frac{C_p S_p \sqrt{2g}}{2 \cdot S \sqrt{(H_1 - H_2)}} & -\frac{C_p S_p \sqrt{2g}}{2 \cdot S \sqrt{(H_1 - H_2)}} - \frac{C_2 S_2 g}{S \sqrt{(2 \cdot g \cdot H_2)}} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Parametry modelu pro konstantní přítok $Q_1 = Q_{10} = 1.5 \cdot 10^{-4} m^3 s^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.05 \\ 0.05 & -0.2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Parametry modelu pro zvýšený přítok $Q_{20} = Q_{10} \cdot 1.2 = 1.8 \cdot 10^{-4} m^3 s^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0417 & 0.0417 \\ 0.0417 & -0.1667 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.2.2 Konstantní hladina - mění se průtoky

V tomto případě budeme usilovat o to, aby se hladiny neměnily. Bude tedy platit:

$$\begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Naopak budeme měnit nastavení ventilů. Takovéto nastavení jsme pro konstantní přítok Q_{10} již spočetli, viz výsledek 6. Aby byla výška hladin konstantní i při přítoku $1.2 \cdot Q_{10}$, budeme muset nastavení ventilů přepočítat pomocí vztahu 5, čímž získáme následující výsledné nastavení:

$$\begin{bmatrix} S_p \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.7437 \cdot 10^{-5} \\ 1.5145 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

K získání linearizovaného stavového modelu v tomto pracovním bodě využijeme zavedeného vztahu 10. Jeho parametry budou vypadat následovně:

$$A = \begin{bmatrix} -0.06 & 0.06 \\ 0.06 & -0.24 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.3 Třetí úkol - určení přenosu systému

Nyní nás zajímá přenos systému $Q_1(t) \rightarrow H_2(t)$. Je tedy zřejmé, že měříme pouze veličinu $H_2(t)$. Matici C stavového popisu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (14)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (15)$$

budeme nyní uvažovat jako:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Přenos systému poté určíme ze stavové rovnice linearizovaného modelu pomocí známého vztahu:

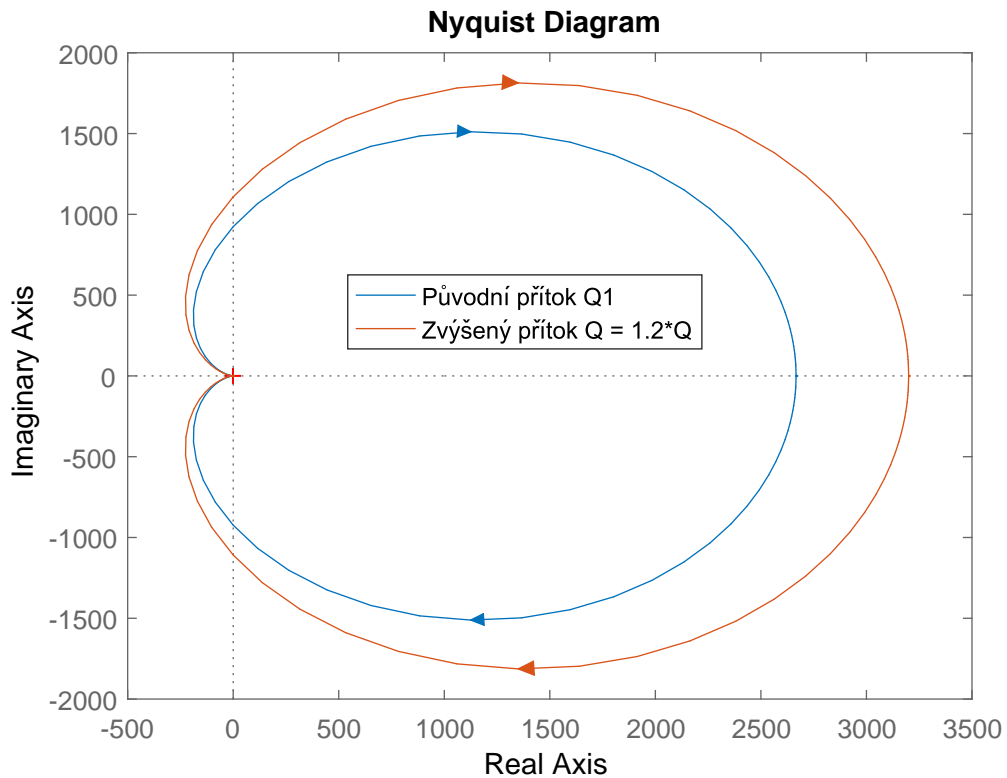
$$P(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B. \quad (16)$$

V kapitolách 1.2.1 a 1.2.2 jsme získali tři různé stavové reprezentace pro různé situace, jako jsou různá nastavení ventilů a přítoků. Nejdříve spočteme přenosy pro systém popsaný v kapitole 1.2.1, tedy pro přítok Q_{10} ($P_1(s)$) a pro jeho zvýšenou variantu ($P_2(s)$):

$$P_1(s) = \frac{20}{s^2 + 0.25s + 0.0075} \quad (17)$$

$$P_2(s) = \frac{16.67}{s^2 + 0.2083s + 0.005208}, \quad (18)$$

jejichž znázornění v komplexní rovině si můžeme prohlédnout na obrázku 1.



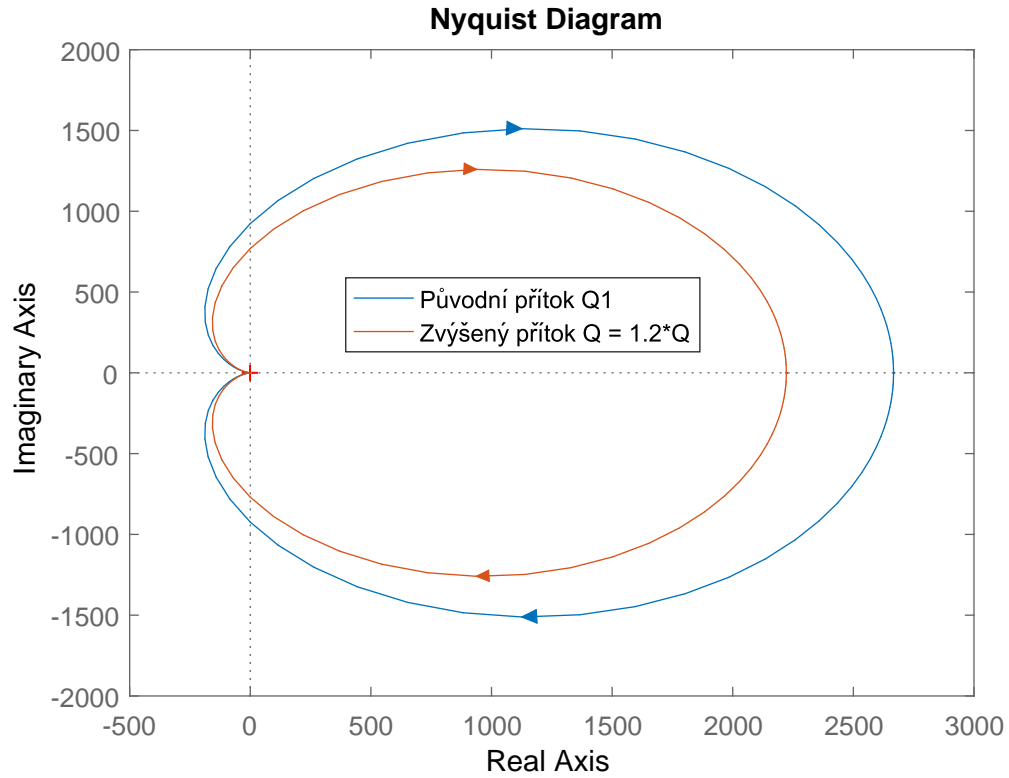
Obrázek 1: Nyquistova frekvenční charakteristika pro dané přenosy.

Pro získání přenosů pro systém popsaný v kapitole 1.2.2 budeme postupovat stejně a získáme znovu dva přenosy pro pro přítok Q_{10} ($P_1(s)$) a pro jeho zvýšenou variantu ($P_2(s)$):

$$P_1(s) = \frac{20}{s^2 + 0.25s + 0.0075} \quad (19)$$

$$P_2(s) = \frac{24}{s^2 + 0.3s + 0.0108}, \quad (20)$$

jejichž znázornění v komplexní rovině si můžeme prohlédnout na obrázku 2.



Obrázek 2: Nyquistova frekvenční charakteristika pro dané přenosy.

1.3.1 Numerické určení neurčitosti

Nyní budeme uvažovat, že máme množinový model, ve kterém jsou všechny přenosy P , které vznikly z nominálního přenosu P_0 aditivní perturbací:

$$P = P_0 + W_a \Delta, \quad (21)$$

kde $\|\Delta\|_\infty < 1$ a $W_a(s)$ je pevně daná přenosová funkce. Tu můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$W_a(s) = P_0(s) - P(s), \quad (22)$$

kde za $P(s)$ budeme dosazovat přenosy spočtené výše, tedy výsledky 17, 18, 19 a 20. Nejprve se tedy zabývejme přenosy týkající se varianty A, tedy přenosy $P_1(s)$ pro Q_{10} (viz 17) a $P_1(s)$ pro $1.2 \cdot Q_{10}$ (viz 18), které jsme spočetli výše. Dále předpokládáme, že pracovní bod se nachází libovolně mezi těmito dvěma pracovními body, lišící se v přítoku Q . Je zřejmé, že nominální model bude vhodné určit pro pracovní bod ležící zhruba uprostřed tohoto intervalu, tedy pro konstantní přítok $1.1 \cdot Q_{10}$. Při jeho určení budeme postupovat stejně jako během určování $P_1(s)$ a $P_2(s)$. Nominální přenos tedy bude mít tvar:

$$P_0(s) = \frac{18.18}{s^2 + 0.2273s + 0.006198}. \quad (23)$$

Váhovou funkci pro námi zvolenou aditivní neurčitost spočteme ze vztahu 22:

$$W_a = \frac{1.818s^2 + 8.882 \cdot 10^{-16}s - 0.0124}{s^4 + 0.4773s^3 + 0.07052s^2 + 0.003254s + 4.649 \cdot 10^{-5}}. \quad (24)$$

Zajímavé bude zejména grafické znázornění neurčitosti. To provedeme pro různé kombinace přenosových funkcí, které odpovídají systému za předpokladu různých velikostí konstantních přítoků, přičemž zavedeme omezení:

$$Q_{10} \leq Q_1 \leq 1.2 \cdot Q_{10}, \quad (25)$$

z nichž jednomu bude odpovídat námi zvolený nominální model P_0 . Zobrazení k komplexní rovině je ke shlédnutí na obrázku 1.3.1.

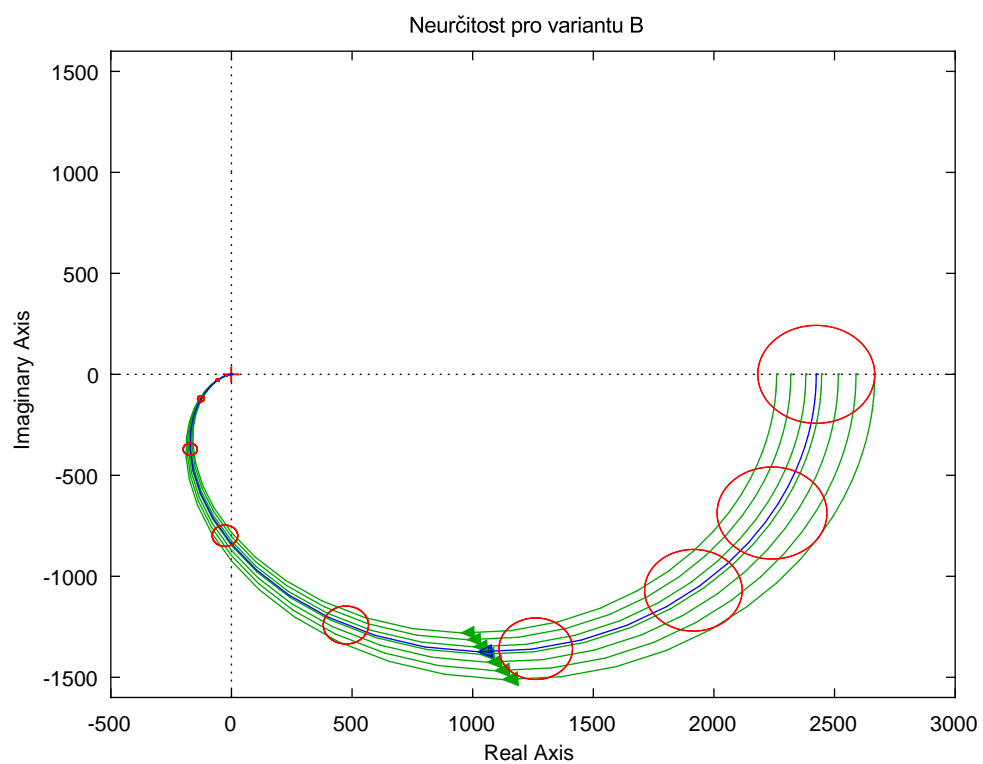
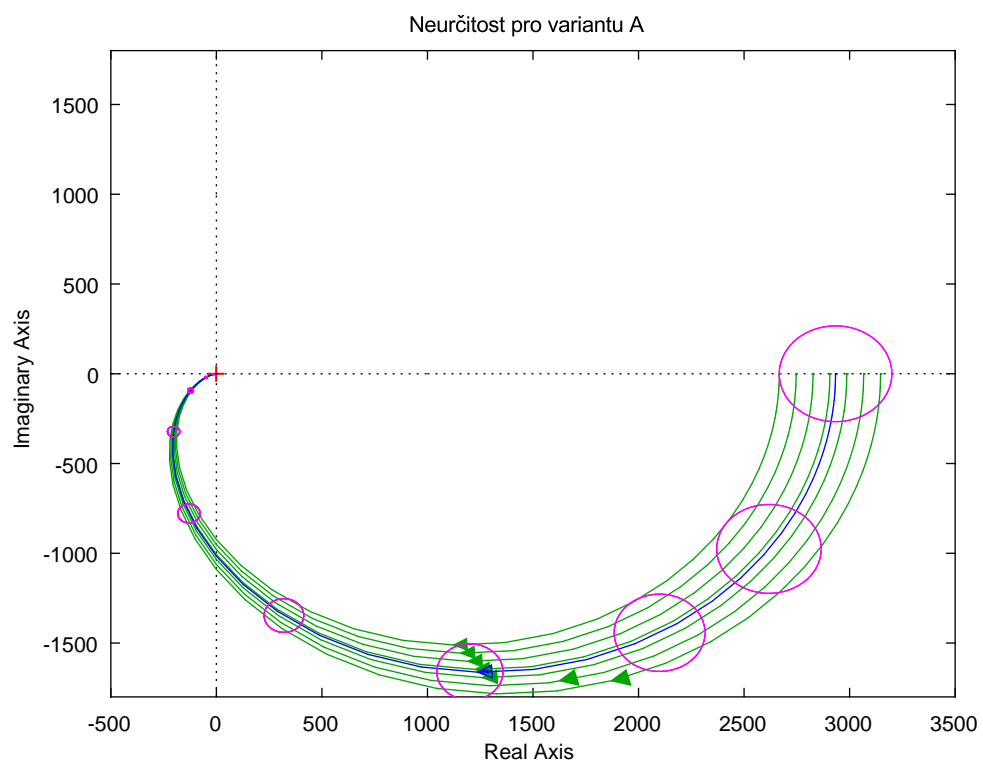
S přenosy $P_1(s)$ a $P_2(s)$ týkajícími se varianty B (viz tvary přenosů 19 a 20) budeme pracovat stejně. V tomto případě bude mít nominální přenos tvar:

$$P_0(s) = \frac{22}{s^2 + 0.275s + 0.009075}, \quad (26)$$

načež dále opět využijeme vztahu 22 k určení váhové funkce:

$$W_a = \frac{-2s^2 + 8.882 \cdot 10^{-16}s - 0.0165}{s^4 + 0.525s^3 + 0.08532s^2 + 0.004331s + 6.806 \cdot 10^{-5}}. \quad (27)$$

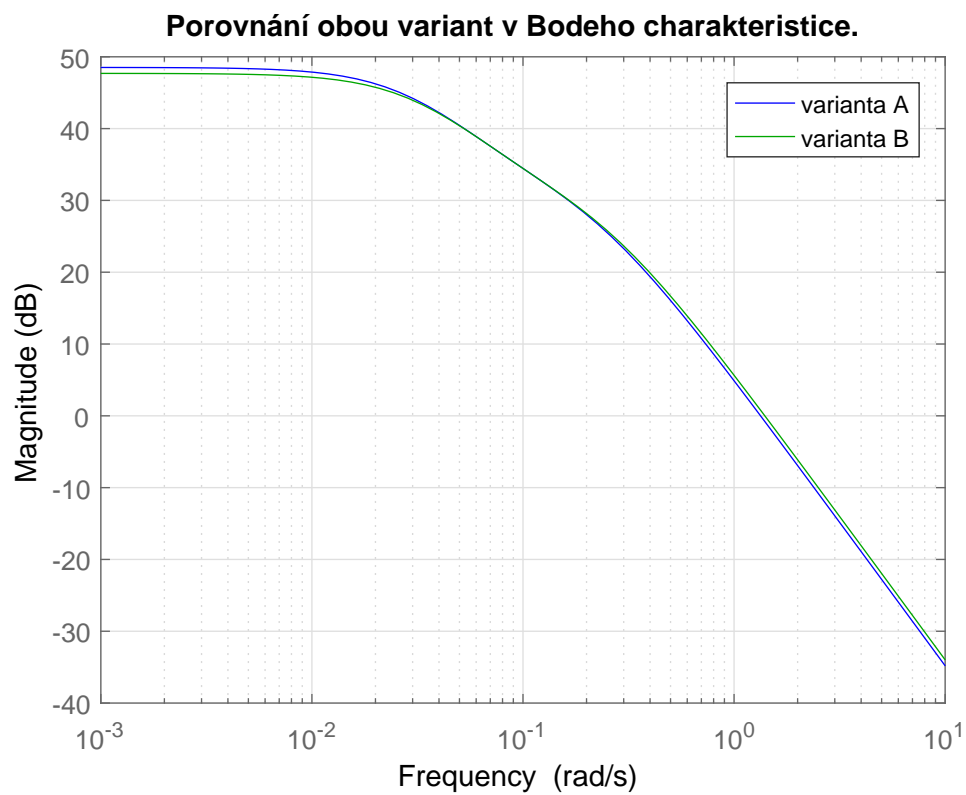
Grafické znázornění provedeme rovněž stejně jako v předchozím bodě za respektování omezení 25. Znázornění je možno vidět na obrázku 1.3.1.



Na obrázcích 1.3.1 a 1.3.1 si všimněme, že je zde vykresleno několik zelených křivek pro přenosové funkce za předpokladu různých, na intervalu 25 vhodně rozmístěných, konstantních přítoků. Modrá křivka představuje náš nominální model P_0 . V případě aditivní perturbace se velikost neurčitosti rovná $|W_a|$, která určuje poloměr kružnic, které mají střed na křivce značící nominální přenos. na obrázcích jich vidíme hned několik, a to pro 10 vhodně zvolených frekvencí ω , které pokrývají fázové zpoždění $(0, 2\pi)$.

1.4 Čtvrtý úkol - Porovnání velikostí neurčitostí

Porovnání neurčitostí pro oba případy provedeme vykreslením příslušných Bodeho frekvenčních charakteristik, kde pozorujeme nepatrné rozdíly, viz obrázek 1.4.



2 Řešení - Návrh regulátoru

V následující části budeme předpokládat, že přítok $Q_1(t)$ již není konstantní, ale je realizován vodním čerpadlem, jehož chování budeme aproximovat systémem prvního řádu s časovou konstantou $T = 0.5s$ a statickým zesílením $K = Q_{10}$. Přenosová funkce od napětí na kotvě stejnosměrného motoru má tedy tvar:

$$F_c(s) = \frac{Q_{10}}{1 + 0.5s}. \quad (28)$$

Jelikož se budeme dle zadání snažit pomocí PI regulátoru (viz kapitola 2.1) řídit výšku hladiny H_2 , vybereme přenos systému z kapitoly 1.2.1, kde uvažujeme variantu A, tedy měnící se hladiny. Použijeme tudíž (nominální) přenos systému (viz 23) a se zahrnutím přenosu motoru čerpadla (viz 28) získáme přenos soustavy ve tvaru:

$$P_{S0}(s) = F_c(s) \cdot P_0(s) = \frac{0.002727}{0.5s^3 + 1.114s^2 + 0.231s + 0.0062}. \quad (29)$$

Vedle nominálního přenosu budeme použijeme ještě dva další přenosy. Nejvhodnější bude uvažovat právě mezní situace, tedy pro případ minimálního přítoku Q_{10} a maximálního uvažovaného (zvýšeného) přítoku $1.2 \cdot Q_{10}$. Přenosy pro tyto varianty jsme spočetli v 17 a 18. Po dosazení získáme:

$$P_{S1}(s) = F_c(s) \cdot P_1(s) = \frac{0.003}{0.5s^3 + 1.125s^2 + 0.2537s + 0.0075} \quad (30)$$

$$P_{S2}(s) = F_c(s) \cdot P_2(s) = \frac{0.002501}{0.5s^3 + 1.104s^2 + 0.2109s + 0.005208}. \quad (31)$$

2.1 První úkol - návrh parametrů PI regulátoru

Dále budeme uvažovat, že napětí na kotvě motoru čerpadla je řízeno pomocí PI regulátoru za účelem řídit výšku hladiny H_2 . Ještě poznamenejme, že dle podmínek uvedených v zadání můžeme systém považovat za lineární. Přenos PI regulátoru bude mít tvar:

$$C(s) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right). \quad (32)$$

Úkolem je navrhnout parametry PI regulátoru tak, aby byly splněny návrhové požadavky pro všechny systémy z modelu neurčitosti pro variantu A, tedy pro měnící se výšky hladin. Tím je myšleno, že požadavky budou platit pro libovolný pracovní bod, který se nachází mezi původním pracovním bodem a pracovním bodem při zvýšení přítoku, tedy pro takový přítok Q , který splňuje podmínku 25.

Pro návrh parametrů PI regulátoru jsme využili Matlabovský nástroj PID Tuner. Výsledkem je určení K a T_i :

$$K = 10$$

$$T_i = 0.1$$

Regulátor tedy bude mít po dosazení do 32 přenos:

$$C(s) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{10s + 0.1}{s}. \quad (33)$$

V další části se budeme zabývat návrhovými požadavky.

2.1.1 Vnitřní stabilita uzavřené smyčky

Pro grafické ověření vnitřní stability poslouží Nyquistovo kritérium. K jeho použití potřebujeme znát přenos otevřené smyčky L_0 :

$$L_0 = CP_{S0} = \frac{0.02727s + 0.0002727}{0.5s^4 + 1.114s^3 + 0.231s^2 + 0.0062s}. \quad (34)$$

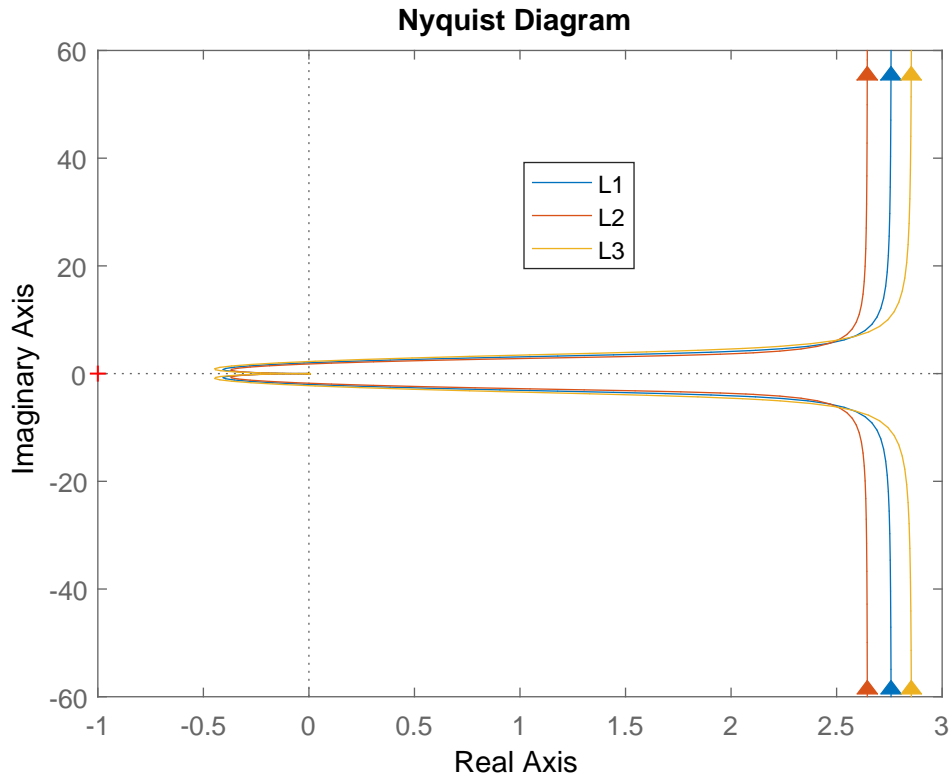
$$L_1 = CP_{S1} = \frac{0.03s + 0.0003}{0.5s^4 + 1.125s^3 + 0.2537s^2 + 0.0075s}. \quad (35)$$

$$L_2 = CP_{S2} = \frac{0.025s + 0.0002501}{0.5s^4 + 1.104s^3 + 0.2109s^2 + 0.005208s}. \quad (36)$$

Nyní zjistíme počet nestabilních pólů P a nestabilních nul Z a definujeme:

$$N = P - Z. \quad (37)$$

Z přenosu zjistíme, že $P = 1$ a $Z = 0$, tedy $N = 1$ pro všechny tři případy. Nyquistovo kritérium stability říká, že křivka $L_0(j\omega)$ musí obkličovat bod $(-1, 0)$ právě N -krát v kladném směru. Vykresleme tedy Nyquistovu křivku pro otevřený systém.



Z Nyquistovy křivky na obrázku 2.1.1 vidíme, že křivka $L_0(j\omega)$ obkličuje bod $(-1, 0)$ právě jednou v kladném směru, což je důkaz splnění Nyquistova kritéria stability.

Analyticky ověříme vnitřní stabilitu pomocí známého faktu, že zpětnovazební systém je vnitřně stabilní právě tehdy, jestliže jeho charakteristický polynom nemá žádné nuly v oblasti $Re(s) \geq 0$. Charakteristický polynom má tvar:

$$1 + L_0 = 1 + CP_{S0} = \frac{0.5s^4 + 1.114s^3 + 0.231s^2 + 0.03347s + 0.0002727}{0.5s^4 + 1.114s^3 + 0.231s^2 + 0.0062s} \quad (38)$$

$$1 + L_1 = 1 + CP_{S1} = \frac{0.5s^4 + 1.125s^3 + 0.2537s^2 + 0.0375s + 0.0003}{0.5s^4 + 1.125s^3 + 0.2537s^2 + 0.0075s} \quad (39)$$

$$1 + L_2 = 1 + CP_{S2} = \frac{0.5s^4 + 1.104s^3 + 0.2109s^2 + 0.03021s + 0.0002501}{0.5s^4 + 1.104s^3 + 0.2109s^2 + 0.005208s}. \quad (40)$$

Jak můžeme pozorovat, charakteristický polynom ani v jednom případě žádné nestabilní nuly neobsahuje. I tato podmínka stability je tedy splněna.

2.1.2 Robustnost ve stabilitě

Zde budeme pracovat se dvěma důležitými přenosy, a to s citlivostní funkcí:

$$S_0 = \frac{1}{1 + CP_{S_0}} \quad (41)$$

a s komplementární citlivostní funkcí

$$T_0 = \frac{CP_{S_0}}{1 + CP_{S_0}}. \quad (42)$$

Máme požadavek, aby maximální hodnota amplitudy citlivostní funkce byla omezena:

$$M_S < 2. \quad (43)$$

Pro určení váhové funkce W_1 využijeme podmínku kvality řízení pro nominální přenos P_0 , kde musí platit:

$$\|S_0\|_\infty < 2, \quad (44)$$

$$\|W_1 S_0\|_\infty < 1, \quad (45)$$

a tedy W_1 nastavíme na 0.5. Po dosazení zjistíme, že protože:

$$\|W_1 S_0\|_\infty = 0.6767 < 1, \quad (46)$$

je podmínka 43 splněna. Dále musí platit nutná a postačující podmínka pro robustní kvalitu řízení:

$$\| |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \|_\infty < 1, \quad (47)$$

kde W_1 specifikuje kvalitu řízení a W_2 specifikuje neurčitost systému. Tu určíme využitím přenosu W_a (viz 24) takto:

$$W_2 = W_m = \frac{W_a}{P_0} = \frac{1.818s^4 + 0.4144s^3 - 0.001124s^2 - 0.002825s - 7.686e - 05}{18.18s^4 + 8.678s^3 + 1.282s^2 + 0.05917s + 0.0008452} \quad (48)$$

Dosazením do 47 získáme:

$$\| |W_1 S_0| + |W_2 T_0| \|_\infty = 0.7250 < 1. \quad (49)$$

Nutná a postačující podmínka pro robustní kvalitu řízení je tedy splněna. Ještě ověříme podmínku pro robustní stabilitu, která říká:

$$\|W_2 T_0\|_\infty < 1. \quad (50)$$

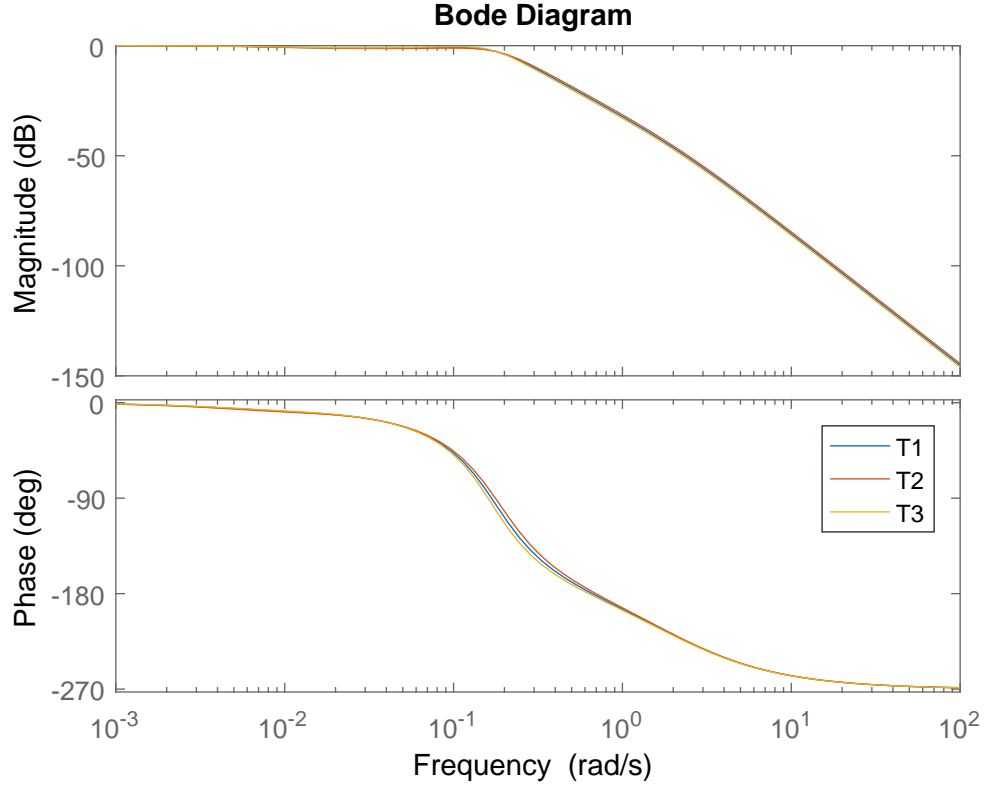
Po dosazení získáme:

$$\|W_2 T_0\|_\infty = 0.082 < 1. \quad (51)$$

Ověřili jsme si tedy robustnost ve stabilitě pro danou množinu modelů.

2.1.3 Podmínka útlumu komplementární citlivostní funkce

Útlum komplementární citlivostní funkce $T(j\omega)$ na frekvenci $\Omega_a = 10 \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}]$, na kterou je omezená dostupná šířka pásma, musí být alespoň -10 dB . K ověření tohoto požadavku si vykresleme Bodeho frekvenční charakteristiky:



Vyčteme, že útlum na frekvenci Ω_a je roven pro varianty přenosu 0, 1 a 2: -85.4368 , -84.6093 a -86.1905 dB , což náš požadavek bohatě splňuje.

2.1.4 Omezení zesílení energie šumu

Posledním požadavkem je zajistit, aby energie libovolného šumu měření $n(t)$ nebyla zesílena více než 1.5 krát. K výpočtu hodnoty tohoto zesílení poslouží $\|H\|_\infty$ norma komplementární citlivostní funkce:

$$\|T_0\|_\infty = 1.0 < 1.5. \quad (52)$$

I tohoto omezení jsme tedy docílili. Platnost si opět ověříme i pro další přenosy množinového modelu.

$$\|T_1\|_\infty = 1.0 < 1.5. \quad (53)$$

$$\|T_2\|_\infty = 1.0 < 1.5. \quad (54)$$

2.2 Druhý úkol

V dalším kroku budeme předpokládat, že měření, které provádí senzor hladiny H_2 , bude zatíženo harmonickým šumem $n(t)$ o frekvenci 50 Hz. Dále předpokládáme, že i výstup soustavy je zatížen omezenou harmonickou poruchou $d(t)$ o frekvenci 0.1 Hz.

2.3 Třetí úkol

Předpokládejme, že je systém v rovnovážném stavu a regulační odchylka $e(t) = 0$. Na vstup řízené soustavy začíná působit porucha d_i s omezenou energií $\|d_i\|_2 < 1$. Cílem bude určit maximální kolísání hladiny H_2 , ke kterému by mohlo od požadovaného stavu dojít.

2.4 Čtvrtý úkol

Nakonec určíme signály $d(t)$ a $n(t)$, jejichž $\|H\|_\infty$ norma je omezená na:

$$\|d(t)\|_\infty < 1, \quad (55)$$

$$\|n(t)\|_\infty < 1. \quad (56)$$

Tyto signály jsou zpětnovazební smyčkou nejvíce zesíleny buďto ve smyslu maximální hodnoty signálu, nebo ve smyslu energie signálu.