KKY/AŘ

Semestrální práce – Spojené nádoby

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

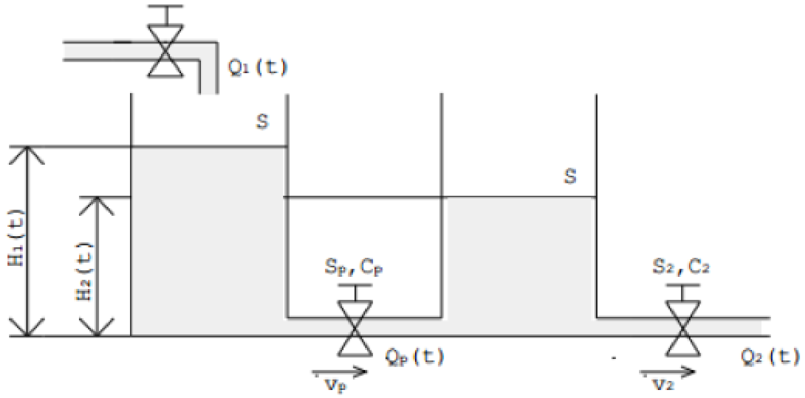
Zimní semestr 2014

Vypracovali: Filip Berka, Lukáš Picek

I. Model neurčitosti

1.) Při konstantním přítoku $Q_{10} = 1,5 \cdot 10^{-4}\, m^3 s^{-1}$ vypočtěte potřebné nastavení ventilů S_p a výtokového ventilu S_2 tak, aby výšky hladin v nádobách při ustáleném stavu byly $H_{10} = 0,6\, m$ a $H_{20} = 0,1\, m$ (tzv. pracovní bod). Hodnoty známých parametrů: $S = 25 \cdot 10^{-4}\, m^2$ (plocha dna nádob), $c_p = c_2 = 0,6$.

Zadaný model:



Označíme-li $V_1(t)$ resp. $V_2(t)$ objem kapaliny v první resp. v druhé nádrži, lze odvodit tyto rovnice:

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = S\frac{dH_1(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_p(t)$$
$$\frac{dV_2(t)}{dt} = S\frac{dH_2(t)}{dt} = Q_p(t) - Q_1(t)$$

Kde $Q_p = c_p S_p v_p(t)$ a $Q_2 = c_2 S_2 v_2(t)$

Rychlost proudění určíme z Bernoulliova zákona:

Průtokový ventil: $p_0 + \rho g H_1(t) = p_0 + \rho g H_2(t) + \frac{1}{2}\rho v_p^2(t)$

$$v_p(t) = \sqrt{2g\big(H_1(t) - H_2(t)\big)}$$

Výtokový ventil: $p_0 + \rho g H_2(t) = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2(t)$

$$v_2(t) = \sqrt{\big(2gH_2(t)\big)}$$

Po dosazení do diferenciálních rovnic získáme nelineární popis systému:

$$\frac{dH_1(t)}{dt} = -\frac{1}{S}c_p S_p\sqrt{2g\big(H_1(t) - H_2(t)\big)} + \frac{1}{S}Q_1(t)$$
$$\frac{dH_2(t)}{dt} = \frac{1}{S}c_p S_p\sqrt{2g\big(H_1(t) - H_2(t)\big)} - \frac{1}{S}c_2 S_2\sqrt{\big(2gH_2(t)\big)}$$

Pro ustálený stav platí, že hladiny se nemění, tj. $\frac{dH_1(t)}{dt} = \frac{dH_2(t)}{dt} = 0$. Rovnice budou vypadat takto:

$$0 = -\frac{1}{S}c_pS_p\sqrt{2g\big(H_1(t) - H_2(t)\big)} + \frac{1}{S}Q_1(t)$$
$$0 = \frac{1}{S}c_pS_p\sqrt{2g\big(H_1(t) - H_2(t)\big)} - \frac{1}{S}c_2S_2\sqrt{\big(2gH_2(t)\big)}$$

Z takto vzniklých rovnic vyjádříme a dopočítáme nastavení ventilů (přítok $Q_1(t)$ nyní považujeme za konstantní a hladiny v nádržích jsou na svých ustálených hodnotách H_{10} a H_{20})

$$S_p = \frac{Q_1}{c_p\sqrt{2g(H_{10} - H_{20})}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-4}}{0{,}6\sqrt{2 \cdot 9{,}81(0{,}6 - 0{,}1)}} = 7{,}9819 \cdot 10^{-5}$$
$$S_2 = \frac{Q_1}{c_2\sqrt{2gH_{20}}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-4}}{0{,}6\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1}} = 1{,}7848 \cdot 10^{-4}$$

2.) Určete linearizovaný stavový model v daném pracovním bodě a v pracovním bodě, který by odpovídal 20 % zvýšení přítoku Q_{10}.

(A) Nastavení přepouštěcích ventilů S_p a S_2 zůstane stejné, se zvyšujícím se přítokem se mění výšky hladin H_1 a H_2.

Uvažujeme nelineární systém popsaný rovnicemi:

$$\frac{dH_1(t)}{dt} = f[H_1, H_2, Q_1]$$
$$\frac{dH_2(t)}{dt} = f[H_1, H_2]$$

Zavedeme odchylkové proměnné:

$$\mathit{\Delta} H_1(t) = H_1(t) - H_{1r} \;\rightarrow\; H_1(t) = H_{1r} + \mathit{\Delta} H_1(t)$$
$$\mathit{\Delta} H_2(t) = H_2(t) - H_{2r} \;\rightarrow\; H_2(t) = H_{2r} + \mathit{\Delta} H_2(t)$$
$$\mathit{\Delta} Q_1(t) = Q_1(t) - Q_{konst} \;\rightarrow\; Q_1(t) = Q_{konst} + \mathit{\Delta} Q_1(t)$$

Po dosazení do nelineárních rovnic, Taylorově rozvoji 1. řádu a úpravách dostáváme statový model:

$$\begin{bmatrix} \mathit{\Delta}\dot{H}_1(t) \\ \mathit{\Delta}\dot{H}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_pS_p\sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_{1r} - H_{2r}}} & \frac{c_pS_p\sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_{1r} - H_{2r}}} \\ \frac{c_pS_p\sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_{1r} - H_{2r}}} & -\frac{c_pS_p\sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_{1r} - H_{2r}}} - \frac{c_2S_2\sqrt{2g}}{\sqrt{H_{2r}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathit{\Delta} H_1(t) \\ \mathit{\Delta} H_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \\ 0 \end{bmatrix} \mathit{\Delta} Q_1(t)$$

$$\mathit{\Delta} y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathit{\Delta} H_1(t) \\ \mathit{\Delta} H_2(t) \end{bmatrix}$$

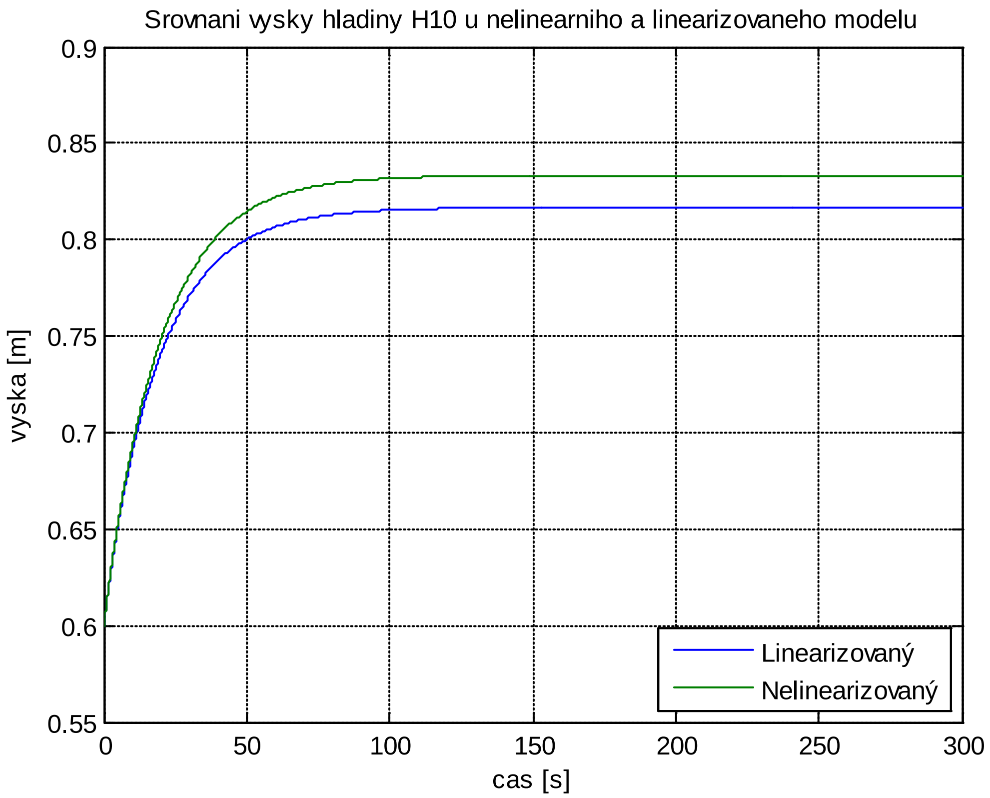
Konkrétně:

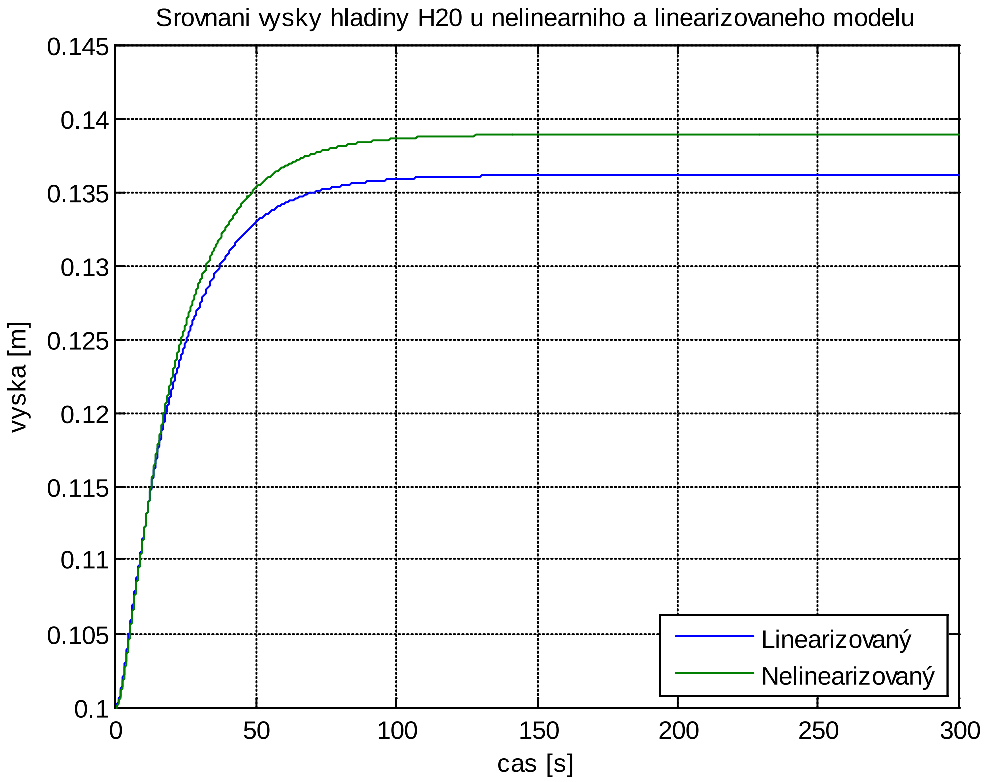
$$\begin{bmatrix} \mathit{\Delta}\dot{H}_1(t) \\ \mathit{\Delta}\dot{H}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}06 & 0{,}06 \\ 0{,}06 & -0{,}36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathit{\Delta} H_1(t) \\ \mathit{\Delta} H_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix} \mathit{\Delta} Q_1(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix}$$

Pro 20 % navýšení přítoku Q_{10}:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{H}_1(t) \\ \Delta \dot{H}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}072 & 0{,}072 \\ 0{,}072 & -0{,}432 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta Q_1(t)$$





(B) Spolu se zvyšujícím se přítokem Q_1 se mění nastavení ventilů S_p a S_2 tak, aby výška hladin zůstala konstantní, tedy $H_1(t) = H_{10}$, $H_2(t) = H_{20}$.

Odvození je podobné jako v případě A, kromě toho, že derivujeme podle S_p a S_2, hladiny považujeme za konstanty. Dostáváme:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{S}_p(t) \\ \Delta\dot{S}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{S}c_p\sqrt{2g(H_{10}-H_{20})} & 0 \\ \frac{1}{S}c_p\sqrt{2g(H_{10}-H_{20})} & \frac{1}{S}c_2\sqrt{2gH_{20}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta S_p(t) \\ \Delta S_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta Q_1(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta S_p(t) \\ \Delta S_2(t) \end{bmatrix}$$

Konkrétně:

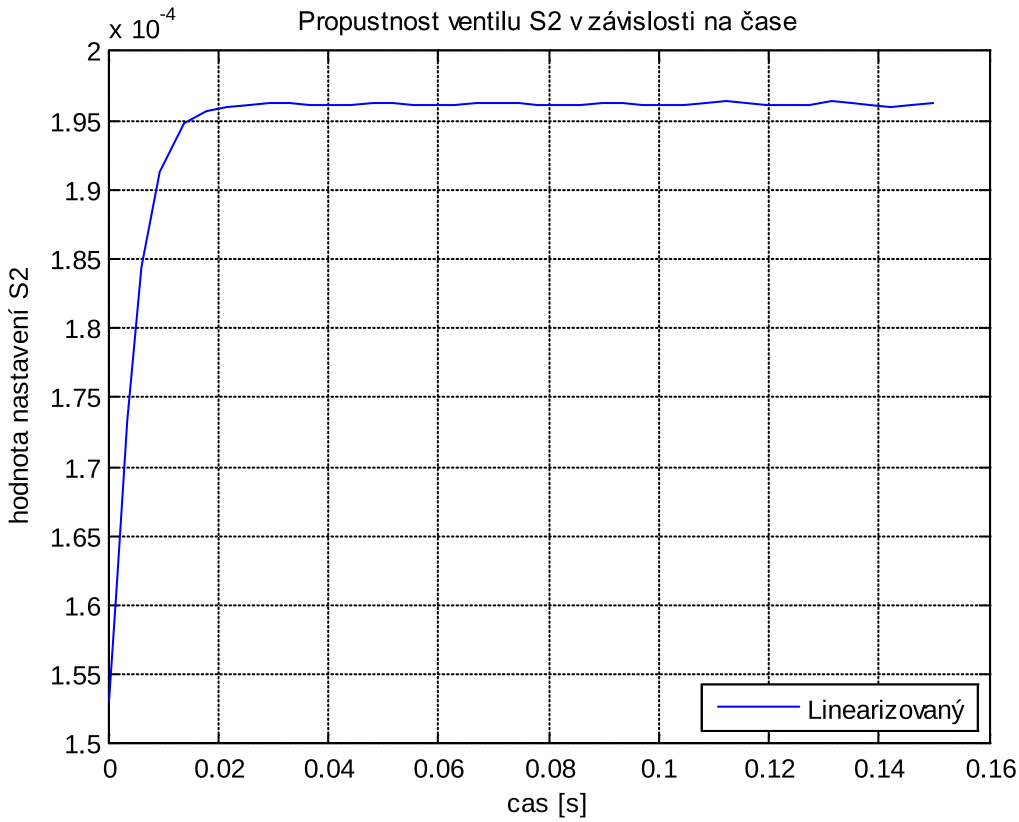
$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{S}_p(t) \\ \Delta\dot{S}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -751{,}7 & 0 \\ 751{,}7 & -336{,}17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta S_p(t) \\ \Delta S_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta Q_1(t)$$

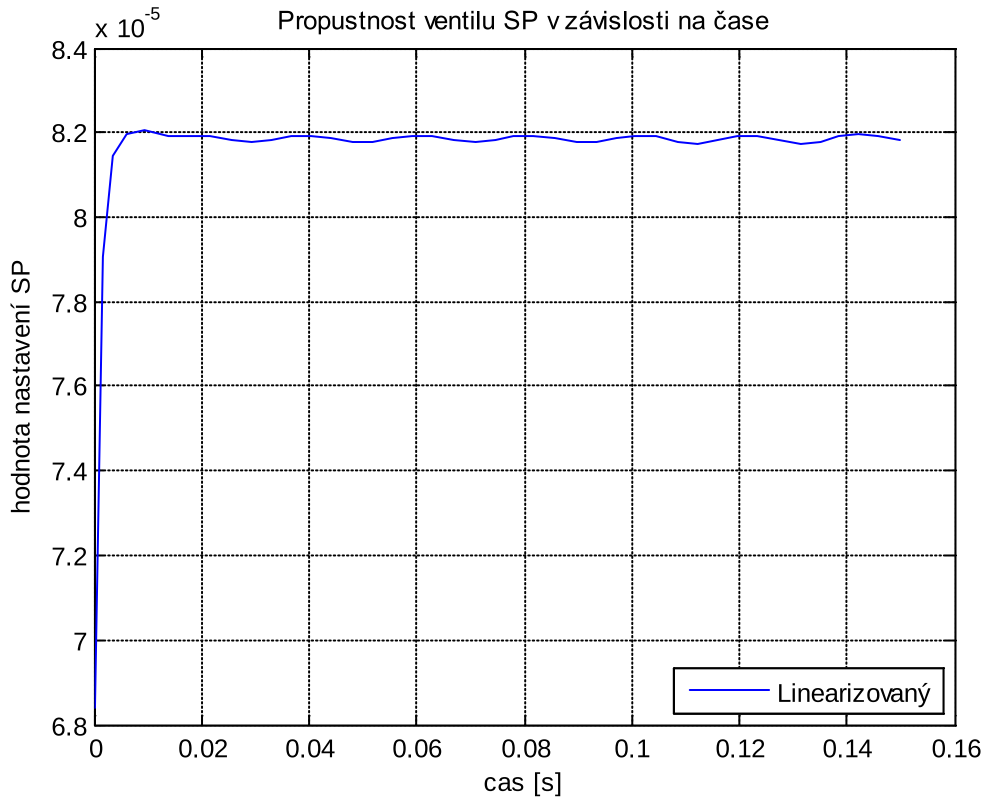
$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta S_p(t) \\ \Delta S_2(t) \end{bmatrix}$$

Pro 20 % navýšení přítoku Q_{10}:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{S}_p(t) \\ \Delta\dot{S}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -902{,}04 & 0 \\ 902{,}04 & -403{,}41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta S_p(t) \\ \Delta S_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta Q_1(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta S_p(t) \\ \Delta S_2(t) \end{bmatrix}$$





3.) Určete přenos systému $Q_1(t) \rightarrow H_2(t)$ v závislosti na výšce hladiny H_1 a H_2 (případ 2A) či nastavení ventilu S_p, S_2 (případ 2B). Znázorněte pro oba případy v komplexní rovině neurčitost přenosu za předpokladu, že skutečný pracovní bod je libovolně mezi původním pracovním bodem a pracovním bodem při 20 % zvýšením přítoku.

Přenosy ze stavové reprezentace můžeme vypočítat ze znalosti vztahu:

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Jestliže dosadíme, dostaneme přenosy:

$$P_{H2}(s, Q_1) = \frac{1{,}6 \cdot 10^5 Q_1}{s^2 + 2{,}8 \cdot 10^3 Q_1 s + 8 \cdot 10^5 Q_1^2}$$

Konkrétně pro $Q_1 = Q_{10} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$:

$$P_{H2}(s) = \frac{24}{s^2 + 0{,}42s + 0{,}018}$$

A pro ventil:

$$P_{S2}(s, Q_1) = \frac{2{,}0045 \cdot 10^9 Q_1}{s^2 + 7{,}2525 \cdot 10^6 Q_1 s + 1{,}1231 \cdot 10^{13} Q_1^2}$$

Konkrétně pro $Q_1 = Q_{10} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$:

$$P_{S2}(s) = \frac{300675}{s^2 + 1088s + 2{,}527 \cdot 10^5}$$

(a) **Určete numericky skutečnou neurčitost danou intervalem pro výšky hladin H_1 a H_2 (resp. S_p, S_2) a přítok Q_1.**

Jako nominální systém jsme zvolili ten, který by odpovídal pracovnímu bodu pro přítok Q_{10} zvýšený o 10%.

$$Q_{nom} = 1{,}1 \cdot Q_{10} = 1{,}65 \cdot 10^{-4}.$$

Neurčitost je pak v intervalu $Q_{nom} \pm 1{,}5 \cdot 10^{-5}$, pro oba případy.

(b) Definujte model neurčitosti pomocí vhodně zvoleného modelu perturbací, nominálního modelu P_0 a váhové funkce $W(s)$ tak, aby velikost neurčitosti byla minimální a přesto pokrývala skutečnou neurčitost získanou v bodě (a).

Zvolili jsme aditivní perturbaci:

$$P = \{P = P_0 + W\Delta; \|\Delta\|_\infty < 1\}$$

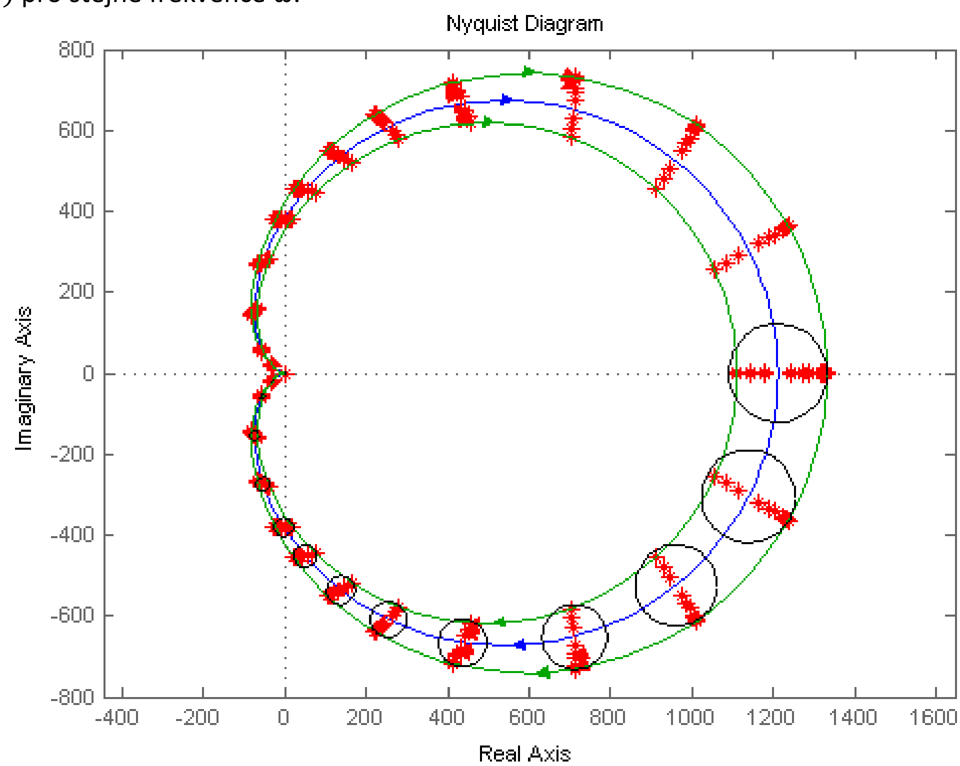
Kde

$$P_0(s) = \frac{26{,}4}{s^2 + 0{,}462s + 0{,}02178}$$

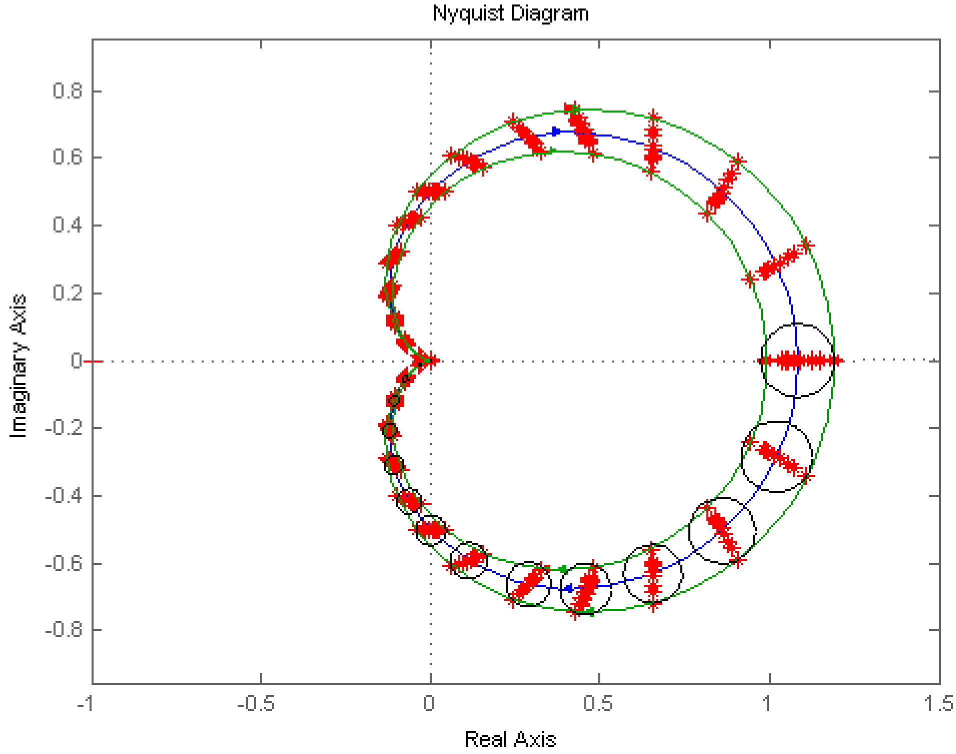
Jedná se o definici množiny přenosů, které mají neurčitost $Q_{nom} \pm 1{,}5 \cdot 10^{-5}$. $W(s)$ je taková funkce, že body $P(j\omega)$ v komplexní množině pro jakoukoliv frekvenci ω a jakoukoliv neurčitostí z množiny P budou ležet uvnitř kružnice se středem $P_0(j\omega)$ a poloměrem $|W(j\omega)|$.
Funkci $W(j\omega)$ jsme nalezli podle vztahu:

$$W(j\omega) = \left(\frac{P(j\omega, Q_{10})}{P_0(j\omega)} - 1\right) P_0(j\omega)$$

Pro oba případy jsme pak vykreslili frekvenční charakteristiky nominálních přenosů a pro 10 zvolených frekvencí ω pak vždy 10 bodů, které by odpovídaly přenosům z množiny P. Tyto skupinky bodů jsme obalili kružnicemi s poloměrem absolutní hodnoty nalezené funkce $W(j\omega)$ pro stejné frekvence ω.



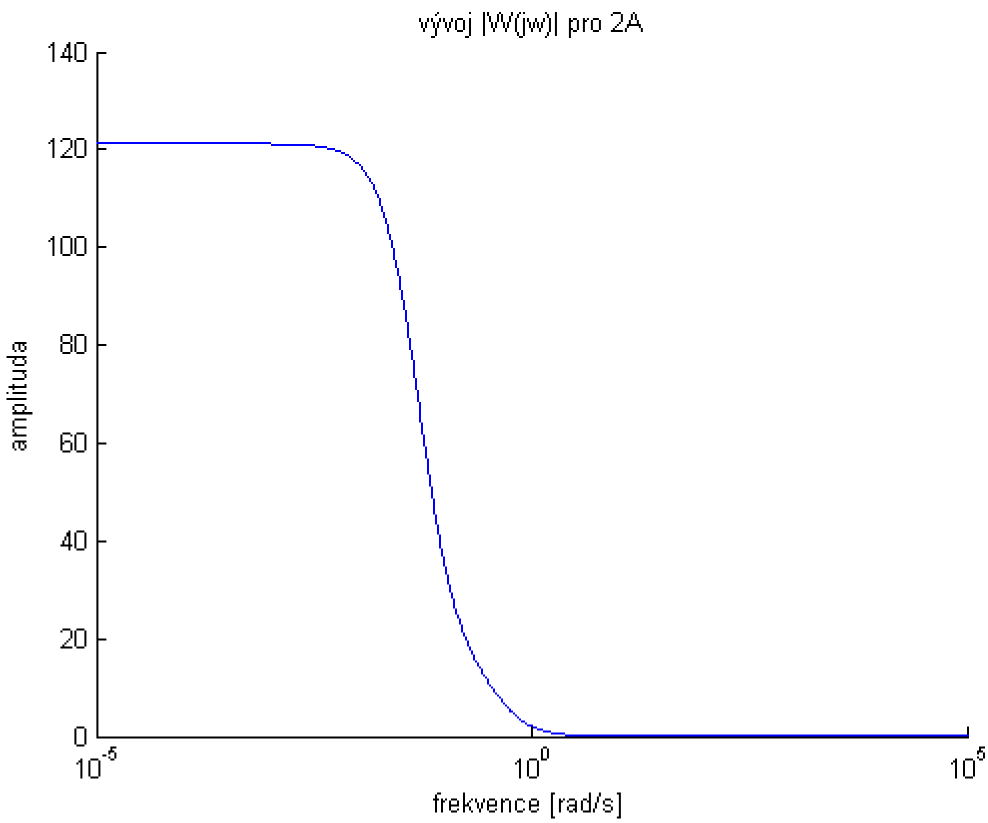
Z obrázku vidíme, že s rostoucí frekvencí ω klesá neurčitost a kružnice se zmenšují.

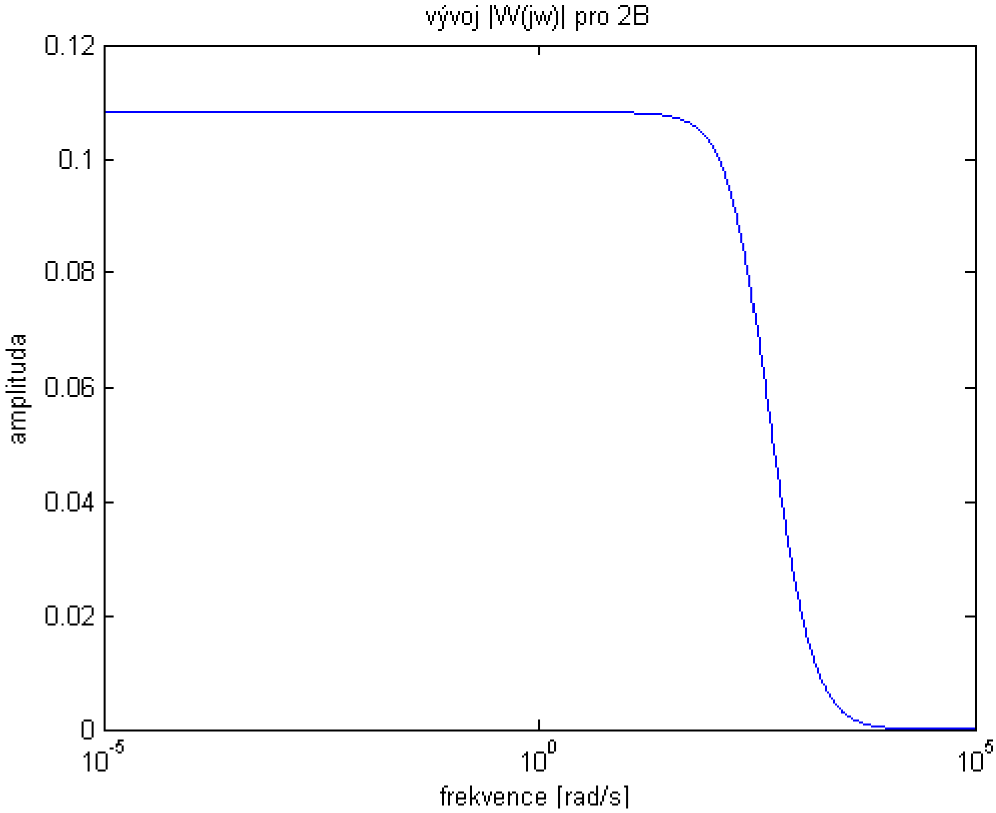


Z tohoto obrázku opět vidíme, že neurčitost zde také klesá s rostoucí frekvencí ω.

4.) Porovnejte velikosti obou neurčitostí (2A a 2B)

Velikosti obou funkcí $W(j\omega)$ zobrazíme jako závislost jejich absolutních hodnot na frekvenci ω.





Z obrázků vidíme, že v druhém případě jsou kružnice na nízkých frekvencích mnohem menší než v prvním případě. Se zvyšující frekvencí ω se obě neurčitosti blíží nule.

II. Návrh regulátoru

Dále předpokládejte, že přítok $Q_1(t)$ je realizován vodním čerpadlem, které je poháněno stejnosměrným motorem. Chování čerpadla budeme pro jednoduchost aproximovat systémem prvního řádu s časovou konstantou $T = 0,5\ s$ a statickým zesílením $K_s = Q_1$. Dále uvažujme PI regulátor, který řídí napětí na kotvě motoru čerpadla s cílem řídit hladinu výšky H_2. Rovněž předpokládejme, že všechny externí signály regulační smyčky jsou rozumně malé, takže systém není příliš vychýlen ze svého pracovního bodu a může být považován za lineární.

Do smyčky nám přibyl nový prvek – čerpadlo. Přenos čerpadla:

$$P_č(s) = \frac{Q_1}{0{,}5s + 1}$$

Čerpadlo do smyčky předřadíme před přenos $P(s)$.

1.) Navrhněte parametry PI regulátoru s přenosem $C(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$ tak, aby byly splněny následující návrhové požadavky pro všechny systémy z modelu neurčitosti získaného v bodě 3(b) pro 2A (mění se výška hladin), tedy pro libovolný pracovní bod, který se nachází mezi původním pracovním bodem a pracovním bodem při zvýšeném přítoku.

(a) Vnitřní stabilita uzavřené smyčky – ověřte analyticky i graficky (Nyquistovo kritérium).
(b) Robustnost ve stabilitě – maximální hodnota amplitudy citlivostní funkce $S(j\omega)$ je $M_s < 2$.
(c) Předpokládejte, že díky dalším nepřesnostem, šumům a nelinearitám je dostupná šířka pásma omezená na $\Omega_a = 10[rad/s]$. Útlum komplementární citlivostní funkce $T(j\omega)$ na frekvenci Ω_a musí být alespoň -10 dB.
(d) Zajistěte, aby energie libovolného šumu měření $n(t)$ nebyla zesílena více než 1,5 krát.

Pro tento úkol jsme zvolili strategii brute force experimentování s volbou parametrů PI regulátoru K a T_i. Jde o postupné dosazování všech kombinací těchto parametrů (omezení na $K = 1:2:60$ a $T_i = 1:1:50$) do přenosu regulátoru $C(s)$ a prozkoumání vždy všech 4 podmínek a to jednak pro přenos, kde $Q_1 = Q_{10}$, a přenos, kde $Q_1 = 1{,}2 \cdot Q_{10}$, tedy mezní přenosy z intervalu neurčitosti, ostatní přenosy se nacházejí „mezi" nimi. Prostor se pak rozdělí na přípustné kombinace parametrů (zelená) a nepřípustné kombinace parametrů (červená), pro něž není splněna alespoň jedna podmínka.

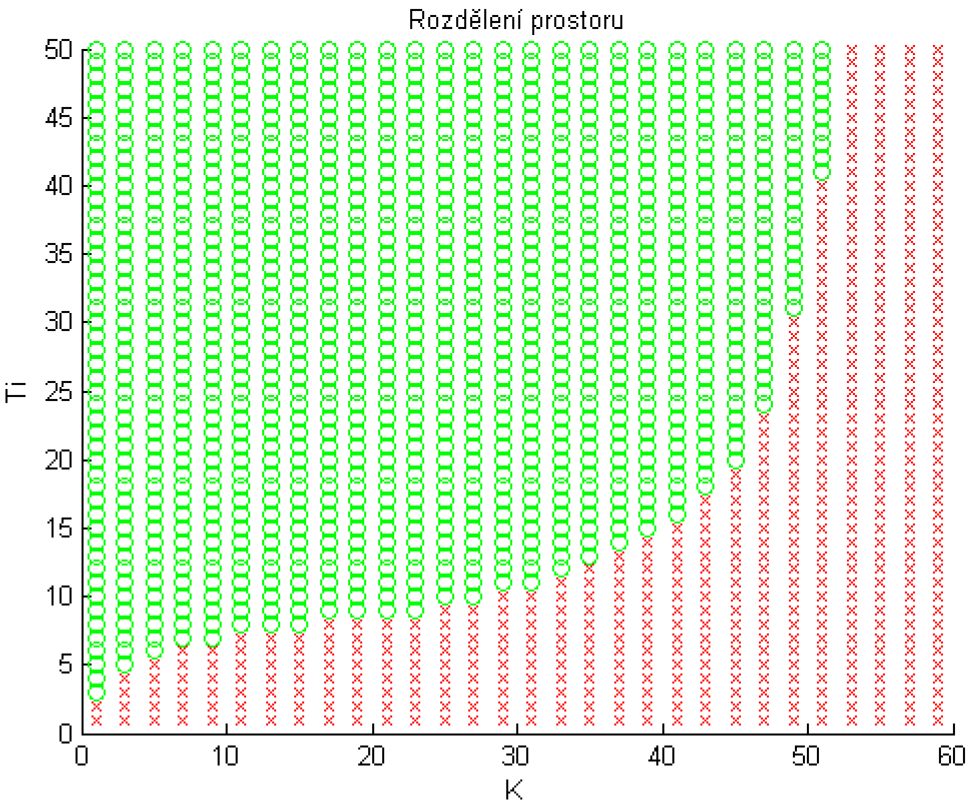
Nyní probereme testy jednotlivých podmínek:

a) Vnitřní stabilita systému je zajištěna pokud platí:
   (i) Přenos $1 + CP$ nemá žádné nuly v oblasti $Re(s) \geq 0$
   (ii) Při vytváření součinu CP nedochází k žádnému krácení v oblasti $Re(s) \geq 0$.
   Tedy všechny přenosy (gang 4) zpětnovazební smyčky jsou stabilní.
   Nyquistovo kritérium – bod $[-1{,}0]$ nebude obklíčen.

b) Pomocí matlabu vypočteme amplitudovou frekvenční charakteristiku citlivostní funkce $S(j\omega)$, ze které vybereme maximum, jestliže toto maximum je menší než práh M_s, pak je test splněn.

c) Pomocí matlabu vypočteme amplitudovou frekvenční charakteristiku komplementární citlivostní funkce $T(j\omega)$, ze které vybereme hodnotu na frekvenci $\omega = 10\ [rad/s]$. Pokud je tato hodnota menší než práh $-10\ dB$, pak je test splněn.

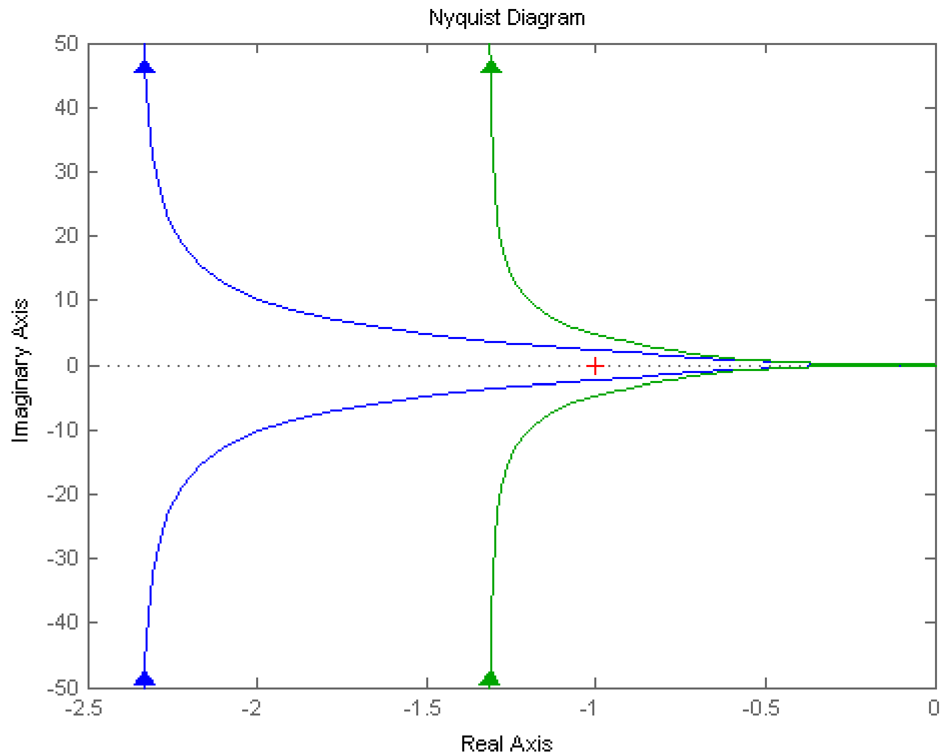
d) Pro tuto podmínku využijeme vztahu z tabulky zesílení. Pro přenos energie šumu na výstup platí: $\|u\|_2 \to \|y\|_2 : \|H\|_\infty$. Jde tedy o $\infty - normu$ komplementární citlivostní funkce $T(j\omega)$. Pokud je tato norma menší než práh 1,5, pak je test splněn.



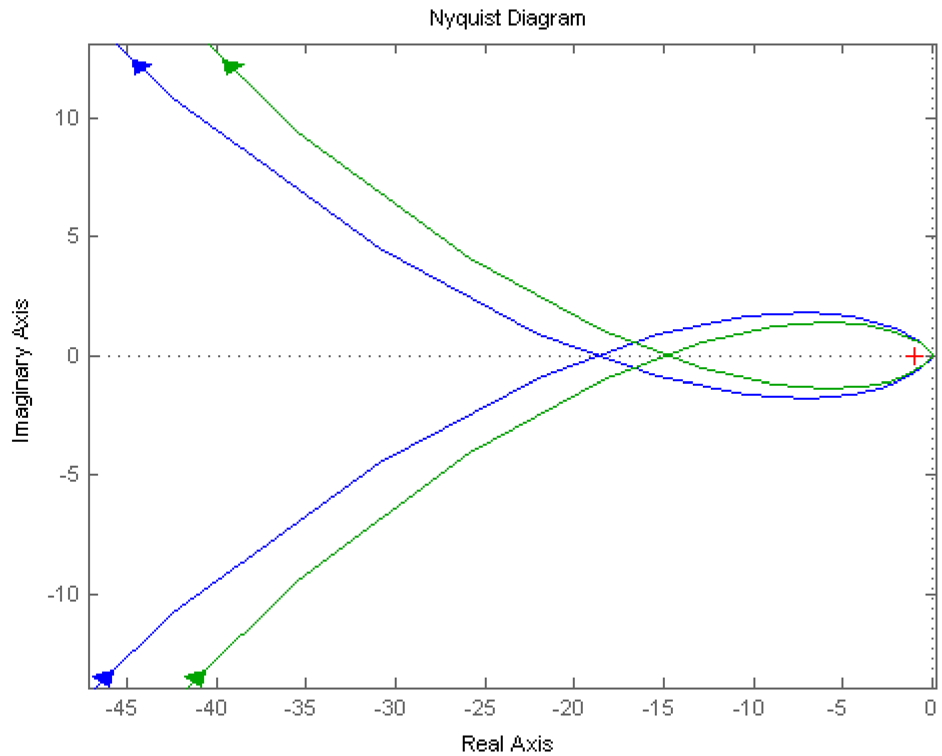
Zelená oblast na obrázku nám znázorňuje splnění podmínek při měnícím se zesílení K a parametru T_i.

Nyní uvedeme příklady pro každou podmínku:

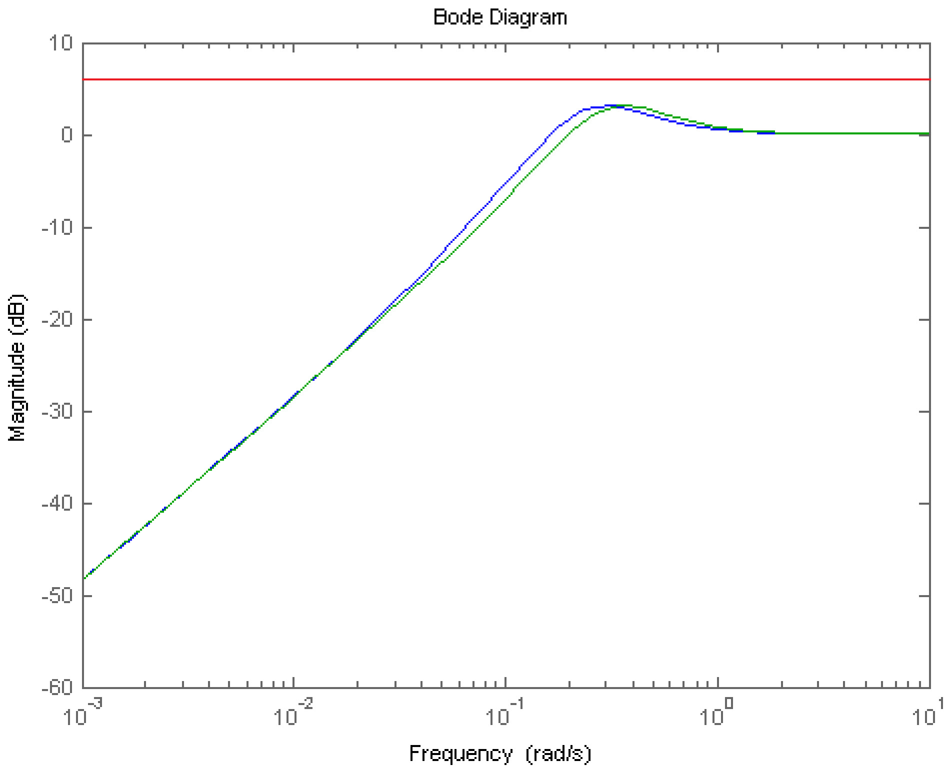
a) Příklad vnitřně stabilního a nestabilního systému:
Pro volbu $K = 20$ a $T_i = 15$ dostáváme stabilní uzavřené systémy:



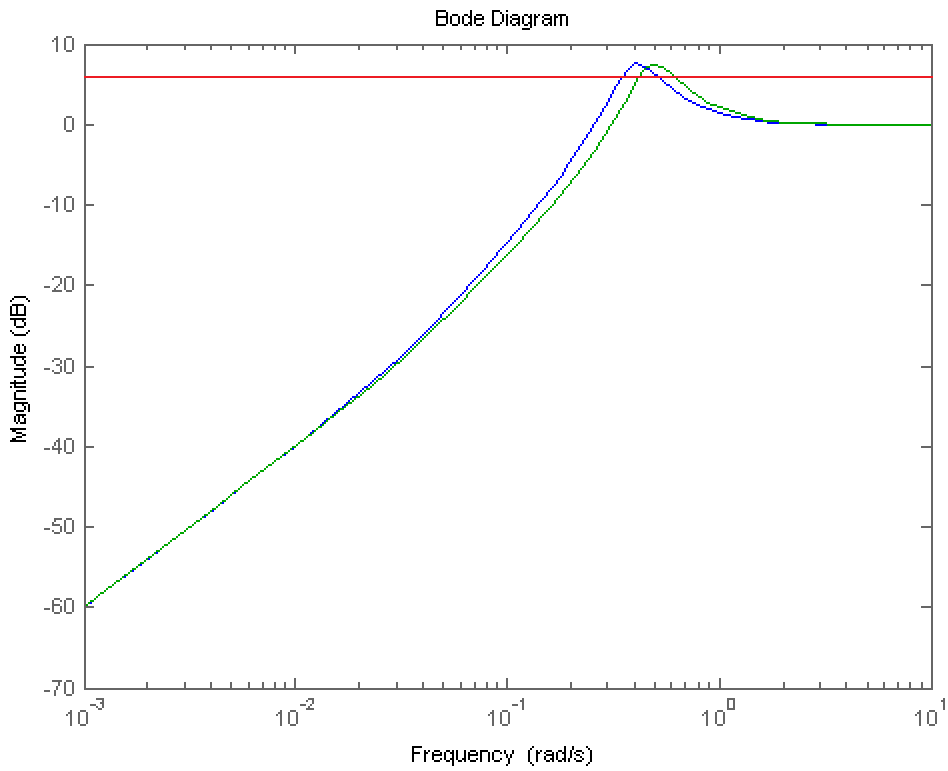
Pro volbu $K = 100$ a $T_i = 1$ dostáváme nestabilní uzavřené systémy:



b) Příklad splnění/překročení prahu maximální amplitudy citlivostní funkce
Pro volbu $K = 20$ a $T_i = 15$ dostáváme:

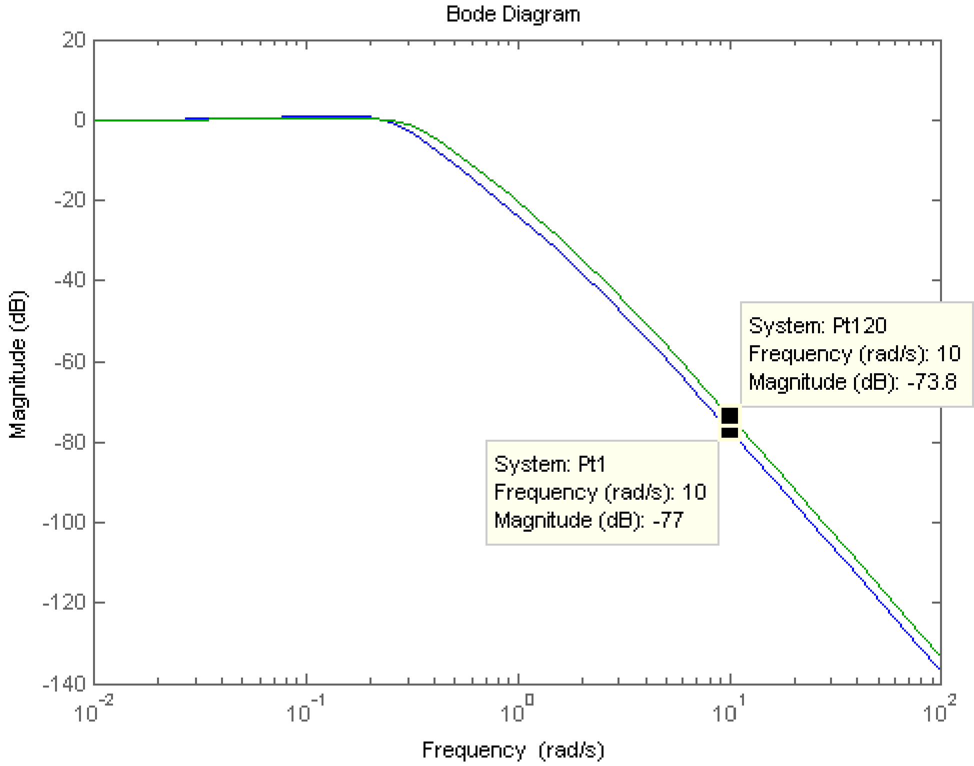


Vidíme, že pro toto nastavení regulátoru není práh překročen.
Pro volbu $K = 50$ a $T_i = 10$ dostáváme:



Zde vidíme, že obě křivky překračují zadaný práh.

c) Příklad splnění požadavku na komplementární citlivostní funkci:
Pro volbu $K = 20$ a $T_i = 15$ dostáváme:



Příklad nesplnění této podmínky se nepodařilo najít.

d) Příklad splnění/překročení prahu pro zesílení energie šumu
Pro volbu $K = 20$ a $T_i = 15$ dostáváme:

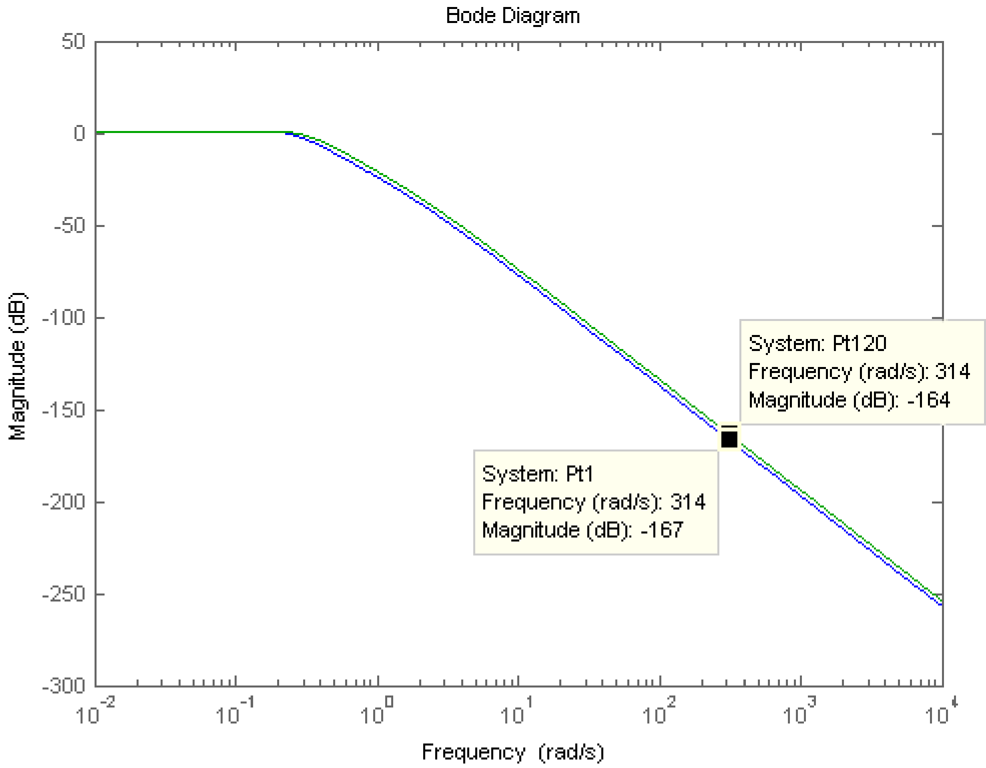
$$\left\|H_{Q_{10}}\right\|_\infty = 1{,}1275 < 1{,}5$$
$$\left\|H_{1.2Q_{10}}\right\|_\infty = 1{,}0752 < 1{,}5$$

Pro volbu $K = 50$ a $T_i = 28$ dostáváme:

$$\left\|H_{Q_{10}}\right\|_\infty = 1{,}5018 > 1{,}5$$
$$\left\|H_{1.2Q_{10}}\right\|_\infty = 1{,}5358 > 1{,}5$$

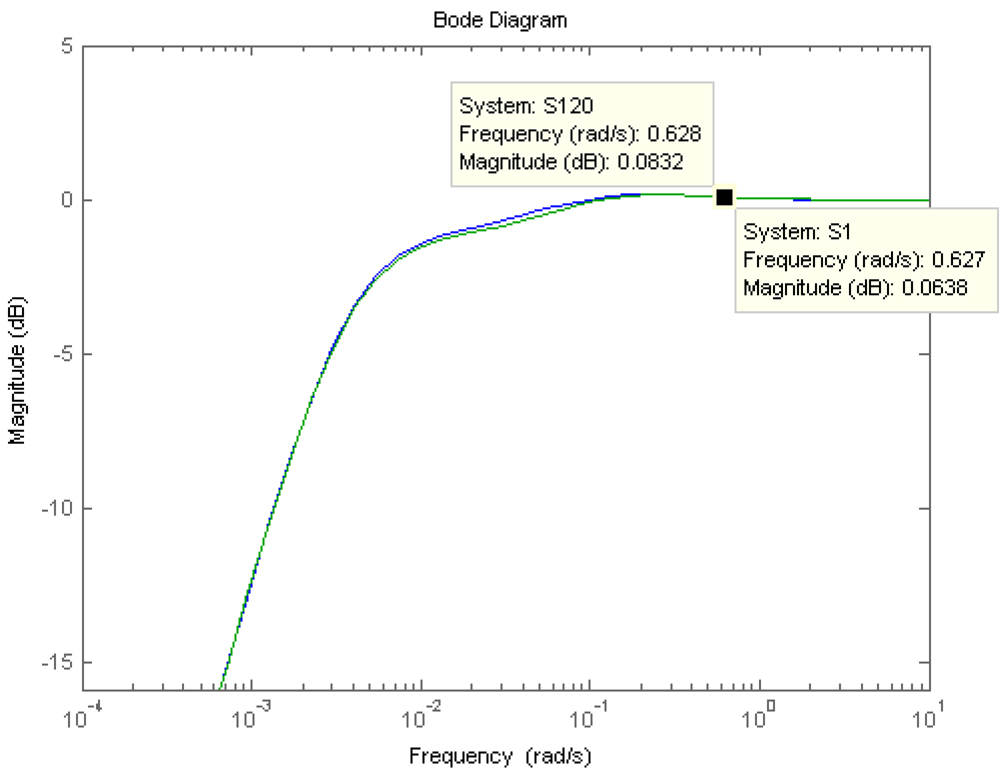
2.) Předpokládejte, že měření, tedy senzor hladiny H_2, je zatíženo harmonickým šumem $n(t)$ s frekvencí 50Hz a výstup soustavy omezenou harmonickou poruchou $d(t)$ s frekvencí 0,1Hz. Ověřte, zda žádný z těchto signálů není na výstupu (tedy $H_2(t)$) smyčkou s navrženým PI regulátorem zesílen.

Přenos $n(t) \rightarrow y(t)$ odpovídá komplementární citlivostní funkci $T(j\omega)$. Pro frekvenci 50 Hz a volbu $K = 20$ a $T_i = 15$ dostáváme:



Z obrázku vidíme, že pro frekvenci 50 $Hz \sim 314{,}1593\ rad/s$ je šum zeslaben.

Přenos $d(t) \rightarrow y(t)$ odpovídá citlivostní funkci $S(j\omega)$. Pro frekvenci 0,1 Hz se nám nepovedlo najít takové parametry, aby platilo, že se $d(t)$ zeslabí. Našli jsme ale takové parametry (z množiny testovaných kombinací), pro něž bylo toto zesílení minimální. Pro volbu $K = 1$ a $T_i = 50$ dostáváme:



Z obrázku vidíme, že pro frekvenci $0{,}1 Hz \sim 0{,}628\ rad/s$ je šum o trochu zesílen.

3.) Předpokládejte, že systém je v rovnovážném stavu a $e(t) = 0$. Na vstup řízené soustavy začne působit porucha d_i s omezenou energií $\|d_i\|_2 < 1$. Určete k jakému maximálnímu kolísání hladiny H_2 od požadovaného stavu může dojít.

Využijeme tabulky zesílení. Zajímá nás tentokrát vztah: $\|u\|_2 \to \|y\|_\infty : \|H\|_2$. Přenos $d_i(t) \to y(t)$ je dán výstupní citlivostní funkcí $S_0(j\omega)$. Maximální rozkmit hladiny tedy určíme jako $2 - normu$ této funkce.

$$\left\|S_{0,Q1}(j\omega)\right\|_2 = 0{,}014832$$
$$\left\|S_{0,1,2Q1}(j\omega)\right\|_2 = 0{,}016131$$

4.) Určete signály $n(t)$ a $d(t)$, kde $\|n(t)\|_\infty < 1$, $\|d(t)\|_\infty < 1$, které jsou zpětnovazební smyčkou nejvíce zesíleny ve smyslu

(a) Maximální hodnoty signálu

Využijeme tabulky zesílení. Zajímá nás vztah $\|u\|_\infty \to \|y\|_\infty : \|h\|_1$, tj. $1 - norma$ impulsní funkce komplementární citlivostní funkce $T(j\omega)$ pro signál $n(t)$ a citlivostní funkce $S(j\omega)$ pro signál $d(t)$.

$$\left\|h_{S,Q_1}\right\|_1 = 1{,}316$$
$$\left\|h_{S,1,2Q_1}\right\|_1 = 1{,}2519$$
$$\left\|h_{T,Q_1}\right\|_1 = 2{,}316$$
$$\left\|h_{T,1,2Q_1}\right\|_1 = 2{,}2519$$

Maximální hodnoty dosáhneme, pokud signál bude mít charakter signa impulsní funkce.

Jako další signály jsme testovali vše, co v Simulinku nabízí blok signál generátor (sine, square, sawtooth) pro frekvence, které odpovídaly maximálně zesíleným frekvencím podle $S(j\omega)$ a $T(j\omega)$. Žádná z těchto funkcí však nebyla zesílena více než $sign(h(t))$. Nejvíce se jí blížil square wave.

(b) Energie signálu

Využijeme tabulku zesílení. Zajímá nás vztah $\|u\|_\infty \to \|y\|_2 : \infty$. Pro všechny periodické signály, které smyčka neutlumí, platí, že energie výstupního signálu bude nekonečná.