

Experimentos con el algoritmo de Ford-Fulkerson en python

Francisco Gerardo Meza Fierro

1. Introducción

En esta práctica se estudia el flujo máximo que existe en un grafo ponderado propuesto. El grafo es creado en base a métodos usados en prácticas de este mismo repositorio [1], tal como la función de Ford-Fulkerson. Además, el grafo se percola y se vuelve a calcular el flujo. Por último se miden los tiempos de ejecución del código y se discuten los resultados.

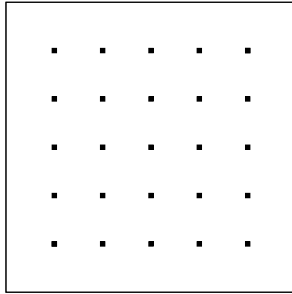
Igual que en la previa práctica, las imágenes que presenta esta práctica fueron obtenidas a través de `gnuplot` y `R` mediante archivos generados a través de `python`.

2. Creación de los nuevos grafos

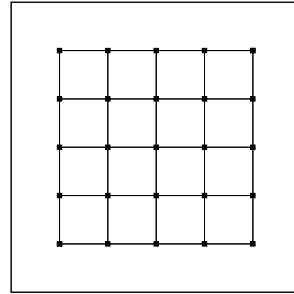
Los nuevos grafos propuestos para esta práctica se pintan formando una cuadrícula.

La conexión entre los nodos se lleva a cabo considerando la distancia Manhattan y mediante un umbral l donde si $l = 1$ cada nodo se conecta con los nodos que se encuentren a una unidad de distancia, si $l = 2$ cada nodo se conecta con los nodos que se encuentren a dos unidades de distancia y así sucesivamente. Las aristas creadas de esta manera no son dirigidas. La ponderación de estas aristas se genera de manera aleatoria siguiendo una distribución normal propuesta con una media de 2 y una desviación estándar de 0,5.

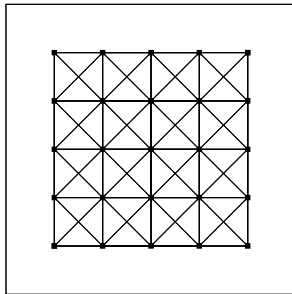
La figura 1 muestra ejemplos de estos grafos.



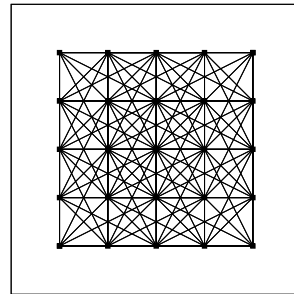
(a) Ejemplo de cómo los nodos son pintados.



(b) $l = 1$.



(c) $l = 2$.



(d) $l = 3$.

Figura 1: Grafo de 25 nodos con distintos valores de l .

Además de esas conexiones, los grafos tienen la probabilidad p de que, de manera aleatoria, dos de sus nodos se conecten entre ellos creando una arista adicional. Las aristas generadas de esta

manera son dirigidas. La ponderación de estas aristas se genera de manera aleatoria siguiendo una distribución exponencial propuesta con una media de 20.

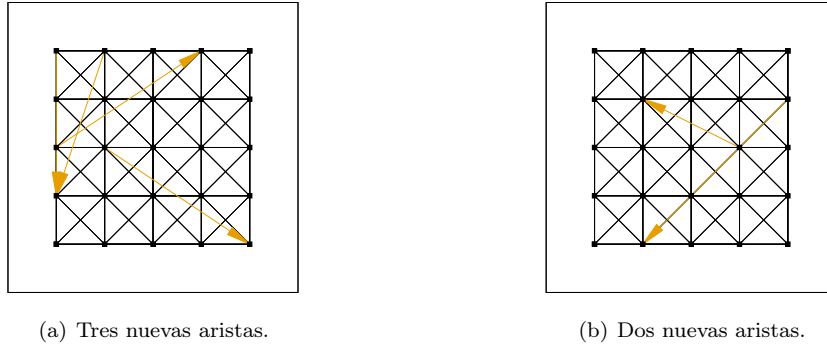


Figura 2: Grafos de 25 nodos con un valor de $p = 0,01$.

Las aristas en color naranja representan las aristas que fueron agregadas con la probabilidad p .

3. Flujo máximo

Para calcular el flujo máximo de los grafos, se implementó la función de Ford-Fulkerson y para apoyo visual se marcaron con color verde el nodo fuente y con color morado el nodo sumidero.

3.1. Percolando nodos

Para medir los flujos máximos, se fueron removiendo nodos de manera aleatoria y la función de Ford-Fulkerson se casa cada vez que un nodo era removido. Estos flujos se fueron guardando y el proceso se repitió diez veces para un mismo tamaño de grafo con cien nodos y un umbral de conexión igual a cinco.

La figura 4 muestra el resultado de estos flujos obtenidos.

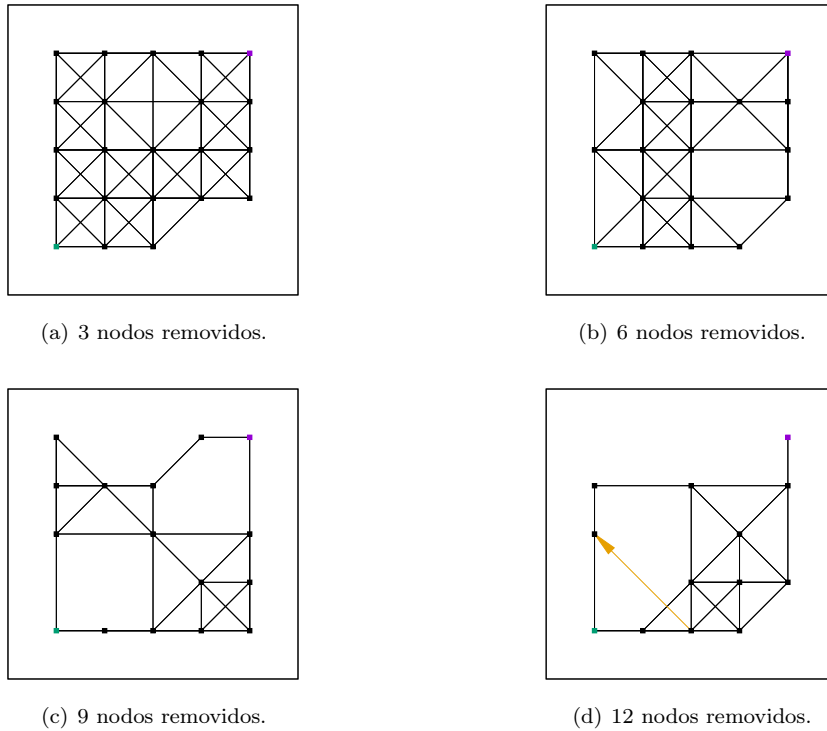


Figura 3: Grafos de 25 nodos con nodos removidos.

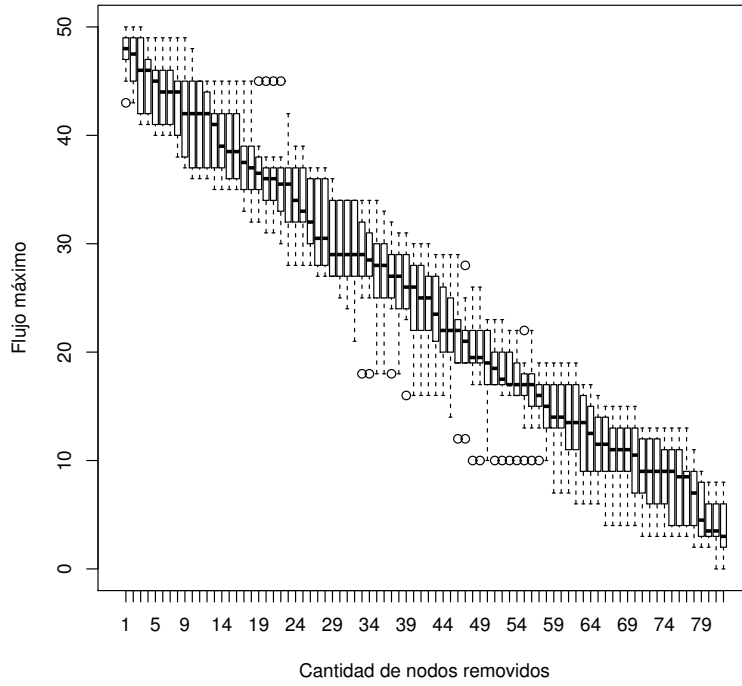


Figura 4: Flujos máximos removiendo nodos.

Es evidente que el flujo máximo tendría que disminuir a medida que los nodos fueron siendo removidos ya que, como se observa en la figura 3, a medida que los nodos se quitan del grafo, las aristas que conectaban a esos nodos también son excluidas del grafo, dejando menos caminos que conecten los nodos fuente y sumidero.

3.2. Percolando aristas.

De manera análoga, se calculó el flujo cuando se remueven aristas. La diferencia es que no se fueron quitando una a una las aristas para calcular el flujo como se hizo con los nodos, debido a la inmensa cantidad de aristas que posee el grafo a estudiar de cien nodos. Lo que se hizo fue que en cada paso se quitaron cada vez el 10 % de las aristas y se hicieron también diez repeticiones para un grafo con cien nodos y un umbral de conexión igual a cinco.

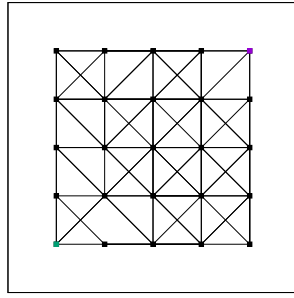
Los flujos obtenidos se reflejan en la figura 6 y se observa lo mismo que lo ocurrido cuando se removieron los nodos: el flujo máximo obtenido va disminuyendo a medida que las aristas están siendo removidas del grafo, lo cual es también evidente ya que, como lo muestra la figura 5, a medida que las aristas se remueven del grafo, las opciones de contactar los nodos fuente y sumidero se reducen.

4. Tiempos de ejecución

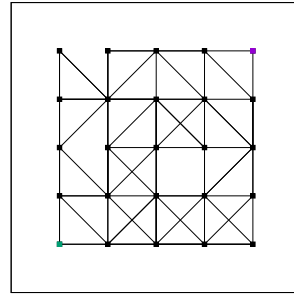
Los mismos ejemplos que se hicieron para generar las figuras 4 y 6 se usaron para medir los tiempos. Esto es, cada vez que un nodo era removido y se calculaba el nuevo flujo máximo mediante la función de Ford-Fulkerson, el tiempo de ejecución era medido desde que se elegía de manera aleatoria el nodo que sería removido hasta que la función arrojaba el nuevo flujo máximo y cada uno de estos tiempos fue registrado.

De manera análoga se registraban los tiempos para cuando las aristas eran removidas: el tiempo era medido desde cada vez que se removían nuevas aristas hasta que se calculaba el nuevo flujo máximo.

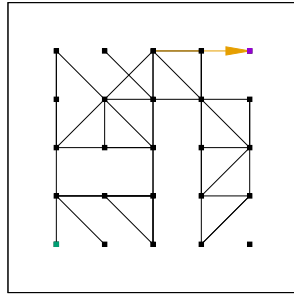
Estos tiempos están reflejados en la figura 7 y es evidente que cada vez los tiempos serían menores ya que al momento de remover aristas o nodos, la función de Ford-Fulkerson tendría menos datos por analizar, lo que conlleva a una ejecución más rápida.



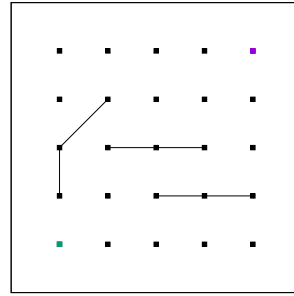
(a) 20 % de aristas removidas.



(b) 30 % de aristas removidas.



(c) 50 % de aristas removidas.



(d) 80 % de aristas removidas.

Figura 5: Grafos de 25 nodos con aristas removidas.

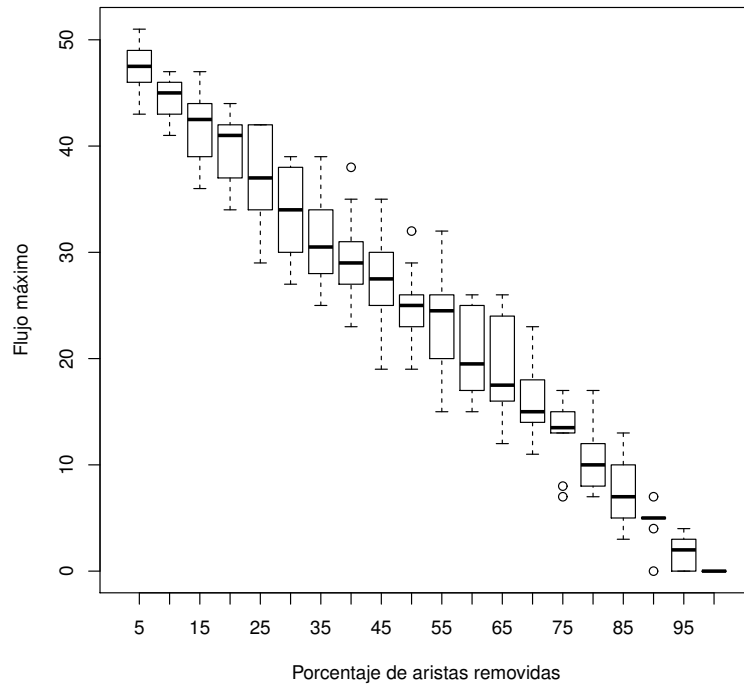
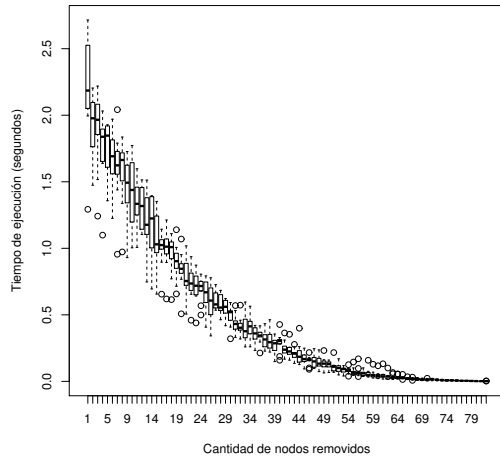
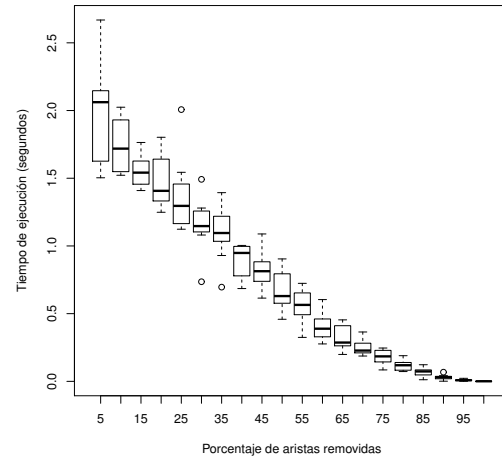


Figura 6: Flujos máximos removiendo nodos.



(a) Percolación de nodos.



(b) Percolación de aristas.

Figura 7: Tiempos de ejecución de las percolaciones.

Referencias

- [1] Francisco Meza. *FlujoEnRedes*
<https://github.com/Cicciofano/FlujoEnRedes>, 2018.