O CONCEITO DE SENTENÇA ABERTA SIMPLES E COMPOSTA

SENTENÇAS ABERTAS

Considere a seguinte oração:

“Alguém foi um craque do futebol na Argentina”

Você consegue dizer se essa oração é verdadeira ou falsa?

A resposta é “certamente não”. Veja que não é possível afirmar se essa oração é verdadeira ou falsa, pois o sujeito não está muito claro, uma vez que “Alguém” é um pronome indefinido. Portanto, não consideramos esse tipo de oração uma sentença ou proposição.

Agora suponhamos que o pronome “Alguém” seja substituído pelo nome do jogador Maradona:

“Maradona foi um craque do futebol na Argentina”

Veja que a sentença é verdadeira.

Suponhamos que o pronome “Alguém” seja substituído pelo nome do jogador Pelé:

“Pelé foi um craque do futebol na Argentina”

Essa sentença, então, nesse caso, torna-se uma proposição falsa.

Atenção

Ou seja, nessa oração, o pronome “Alguém” é variável, isto é, pode ser substituído por um nome que fará com que essa sentença tenha um valor verdadeiro ou falso. A partir disso, podemos dizer que temos uma sentença aberta ou uma proposição aberta.

Agora vamos considerar a sentença $2x - 3 = 5$. Quando substituímos a variável x, por exemplo, pelo valor 4, temos:

$$\mathbf{2x - 3 = 5}$$

$$\mathbf{2\times(4) - 3 = 5}$$

$$\mathbf{8 - 3 = 5}$$

$$\mathbf{5 = 5}$$

Veja que essa sentença se torna uma proposição verdadeira.

Agora vamos substituir a variável x pelo valor 2.

$$2x - 3 = 5$$

$$2\times(2) - 3 = 5$$

$$4 - 3 = 5$$

$$1 \neq 5$$

Essa sentença, para $x = 2$, é falsa.

Comentário

Dizemos, nesse caso, que a sentença $2x - 3 = 5$ é uma sentença aberta na variável x. Podemos atribuir qualquer valor numérico para a variável x e avaliar se o resultado se torna uma proposição verdadeira ou falsa.
Agora podemos definir uma sentença aberta do seguinte modo de **forma mais precisa**:

Vamos considerar um conjunto A (não vazio) e "a" um elemento desse conjunto. Ou seja, $a \in A$.

Definimos uma sentença aberta no conjunto A ou uma sentença aberta com uma variável no conjunto A como sendo uma expressão que chamamos de p(x), tal que para todo elemento "a" do conjunto A, p(a) pode assumir o valor lógico V (verdadeiro) ou F (falso).

Em outras palavras, dizemos que p(x) é uma sentença aberta no conjunto A se, e somente se, p(x) assumir o valor verdadeiro ou falso sempre que substituirmos a variável x por qualquer **elemento arbitrário** do conjunto A.

Também podemos chamar a sentença aberta em A de **função proposicional em A** ou **condição em A**.

Observação: lembre-se de que sentença ou proposição é uma oração declarativa verdadeira ou falsa.

Exemplos

Considerando o conjunto dos números naturais N = {1, 2, 3, . . . }, temos os seguintes exemplos de sentenças abertas:$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x + 2 > 10$

Para $x = 1$, por exemplo, temos que $1 = 2 > 10$ (falso).

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Para $x = 2$, temos que

$x^2 - 5 \times (2) + 6 = 0$

$4 - 10 + 6 = 0$ (verdadeiro).

CONJUNTO UNIVERSO

Chamamos de conjunto universo ou domínio da sentença aberta (**em geral, usamos a letra U**), ou simplesmente universo, o conjunto formado por todos os elementos com os quais estamos verificando um determinado assunto.

Exemplos

Vejamos alguns exemplos:

$x + 15 = 8$

Considere a expressão $x + 15 = 8$ uma sentença aberta em Z (o conjunto dos números inteiros formado por números positivos e negativos). Nesse caso, U = Z.

Resolvendo essa equação, encontramos o seguinte resultado:

$$x + 15 = 8$$

$$x = 8 - 15$$

$$x = -7$$

Note que o valor encontrado $x = -7$ é um elemento do conjunto universo U = Z. Portanto, -7 é o valor da variável que torna a sentença verdadeira.

$x + 15 < 8$

Agora considerando a expressão $x + 15 < 8$. Vamos atribuir um valor qualquer à variável x, por exemplo, -5. Temos:

$$x + 15 < 8$$

$$-5 + 15 < 8$$

$$10 < 8$$

Veja que esse valor torna a sentença falsa.

CONJUNTO VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto universo A. Chamamos de conjunto verdade de p(x), o conjunto formado por todos os elementos $a \in A$, tal que p(a) é uma proposição verdadeira.

Denotamos o conjunto verdade por:

$$\mathbf{V_p = x \mid x \in A \land p(x) \text{ é } V}$$

Também podemos usar:

$V_p = \{x \mid x \in A \land p(x)\}$

$V_p = \{x \in A \mid p(x)\}$

Atenção
$V_p \subset A$ (o conjunto verdade de p(x) em A é um subconjunto do conjunto universo A).

Exemplos

Vejamos alguns exemplos:

$2x^2 + 5x = 0$

Considere a sentença aberta $2x^2 + 5x = 0$ em Z. Vamos determinar o seu conjunto verdade resolvendo a equação do 2º grau.

Solução:

$$2x^2 + 5x = 0$$

$$x \times (2x + 5) = 0$$

$$x = 0$$

$$2x^2 + 5x = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -5 \div 2 \notin Z$$

$$V_p = \{x \mid x \in Z \land 2x^2 + 5x = 0\}$$

$$V_p = \{0\}$$

$x + 10 < 3$

Considere a sentença aberta $x + 10 < 3$ em N. Vamos determinar o seu conjunto verdade resolvendo a inequação.

$$x + 10 < 3$$

$$x < 3 - 10$$

$$x < -7$$

O conjunto dos números naturais é formado somente por números positivos. Portanto, o conjunto universo é vazio.

$$V_p = \{x \mid x \in N \wedge x + 10 < 3\}$$

$$V_p = \{ \emptyset \}$$

Com relação às sentenças abertas, podemos considerar diferentes situações:

p(x) manifesta uma condição universal no conjunto A.

Por exemplo:
Seja "$2x + 1 > x$" uma sentença aberta em N.
Veja que todos os elementos de N fazem parte do conjunto verdade.
$V_p = N$
p(x) manifesta uma condição possível no conjunto A.

Por exemplo:
Seja "$2x + 3 > 6$" uma sentença aberta em N.
Nessa sentença, apenas alguns elementos de N fazem parte do conjunto verdade.
$V_p = \{2, 3, 4, \ldots\}$
p(x) manifesta uma condição impossível no conjunto A.

Por exemplo:
Seja "$x + 3 = x$" uma sentença aberta em N.
Nessa sentença, nenhum elemento de N faz parte do conjunto verdade. $V_p = \emptyset$

CONJUNTO VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA COM DUAS VARIÁVEIS

As sentenças abertas também podem ter mais de uma variável. Vamos verificar como é o conjunto verdade de uma sentença aberta com duas variáveis.

Numa sentença aberta com duas variáveis, consideramos dois conjuntos, A e B. Seja "a" um elemento do conjunto A, ($a \in A$) e "b" um elemento do conjunto B, ($b \in B$). Chamamos de sentença aberta em $A \times B$, uma expressão $p(x, y)$ em que $p(a, b)$ pode assumir o valor lógico falso (F) ou verdadeiro (V) para todo par ordenado $(a, b) \in A \times B$.

Atenção
Ao retirar o modal, também trocar o texto da caixa de atenção para:

Sejam dois conjuntos A e B; dizemos que o produto cartesiano de A por B é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), em que $a \in A$ e $b \in B$. O produto cartesiano de A por B é indicado por $A \times B$ (lê: A cartesiano B), assim: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Vejamos exemplos de sentença aberta com duas variáveis:

Exemplos

1. Considere os conjuntos Ae B, em que $A = \{1, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Dadas as expressões a seguir, vamos verificar que elas são sentenças abertas em $A \times B$.

Podemos definir que uma expressão p(x, y) é uma sentença aberta em $A \times B$ se, e somente se, p(x, y) é verdadeira ou falsa sempre que as variáveis x e y são substituídas pelos elementos a e b de qualquer par ordenado pertencente ao produto cartesiano $A \times B$

Agora vamos definir o que entendemos por conjunto verdade de uma sentença aberta com duas variáveis: é o conjunto de todos os elementos $(a, b) \in A \times B$, tais que p(a, b) é uma proposição verdadeira.

Denotamos o conjunto verdade por:

$$\mathbf{V_p = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge p(x, y) \text{ é } V\}}$$

Também podemos usar:

$$\mathbf{V_p = \{(x, y) \in A \times B \mid p(x, y)\}}$$

Observação: $V_p \subset A \times B$ (o conjunto verdade de p(x, y) em A\times B é um subconjunto do conjunto $A \times B$).

2. Considere a sentença aberta $x + y = 6$ em $N \times N$, em que N é o conjunto dos números naturais. O conjunto verdade é

$$\mathbf{V_p = \{(x, y) \in N \times N \wedge x + y = 6\} = \{(1, 5), (3, 3), (2, 4)\}}$$

Considere a sentença aberta $x + 2 > y$ em $A \times B$, em que $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. O conjunto verdade é

$$\mathbf{V_p = \{(x, y) \in A \times B \wedge x + 2 > y\} = \{(3, 4)\}}$$

PREDICADOS

Vamos considerar inicialmente a seguinte expressão:

“Paulo é inteligente”

Nessa expressão, temos:

- Sujeito: Paulo.
- Predicado: inteligente.
- Note que inteligente é uma propriedade ou característica de Paulo.

Agora veja as seguintes expressões:

“x é alto e elegante”

“x é professor de y”

Nessas expressões, temos agora a presença de variáveis.

Atenção

Na afirmação “x é alto e elegante”, por exemplo, x é o sujeito e alto e elegante é o predicado. Veja que o predicado é utilizado para representar a propriedade de ser alto e elegante.

Portanto, fica fácil compreender que o predicado atribui ao sujeito uma propriedade ou uma característica.

Representamos um predicado, por exemplo, por p(x) ou p(x, y).

Por exemplo:

p(x) denota a afirmação “x é alto e elegante”

q(x, y) denota a afirmação “x é professor de y”

Na lógica dos predicados, eles são representados por meio dos símbolos predicativos: p, q, r... etc. e variáveis: x, y, z... etc.

Veja alguns exemplos de predicados:

Exemplo

a) $p(x) = "2x = 8"$

b) $p(x) = "5x - 10 = 0"$

c) $p(x) = "x + y > 2"$

Exemplos

Vejamos exemplos de predicados:

a) Dado o predicado $p(x) = "x^2 - 6x + 5 = 0"$, determine o seu conjunto verdade em N, em que N é o conjunto dos números naturais.

b) Dados os conjuntos $A = \{-2, 0, 1\}$ e $B = \{-1, 0, 3\}$, determine o conjunto verdade de $p(x, y) = "x + y > 2"$, $x \in A$ e $y \in B$.

OPERAÇÕES LÓGICAS SOBRE SENTENÇAS ABERTAS

As operações de sentenças abertas ocorrem por meio da utilização dos conectivos lógicos do cálculo proposicional. A partir da combinação de sentenças por meio dos conectivos, formamos novas sentenças abertas ou proposições.

Veja os conectivos lógicos:

$\neg$ *(não)*

Negação

$\wedge$ *(e)*

Conjunção

$\vee$ *(ou)*

Disjunção

$\rightarrow$ *(Se... então)*

Condicional

$\leftrightarrow$ *(Se, e somente se)*

Bicondicional

Com essas operações, obteremos um conjunto verdade para cada operação, como veremos a seguir.

Agora vamos analisar cada operação sobre as sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ em A, e um elemento $a \in A$ seguida de um exemplo. Cada sentença aberta possui um conjunto verdade dado por V_p e V_q, respectivamente.

OPERAÇÃO NEGAÇÃO

A operação de negação da sentença aberta $p(x)$ é a sentença $\neg p(x)$ em A.

Exemplo: considerando o conjunto universo $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (conjunto dos números naturais).

Seja a sentença aberta $p(x)$: $x + 2 < 6$.

$V_p = \{1, 2, 3\}$.

O conjunto verdade é

$V_{\neg p} = C_N V_p = N - V_p = N - \{1, 2, 3\} = \{4, 5, 6, \ldots\}$.

Observação: $C_N V_p$ é o complementar em relação a N.

OPERAÇÃO CONJUNÇÃO

Operação de conjunção é a sentença aberta $p(x) \wedge q(x)$ em A, satisfeita por um elemento $a \in A$. Essa operação tem o valor lógico verdadeiro quando $a \in A$ satisfaz p(x) e q(x).

Exemplo: considerando o conjunto universo Z (conjunto dos números inteiros).
Sejam as sentenças p(x): $x^2 + 6x + 5 = 0$ e q(x): $x^2 + 5x = 0$.
Temos: $p(x) \wedge q(x)$.
A sentença aberta p(x) tem conjunto verdade $V_p = \{-1, -5\}$.
A sentença aberta q(x) tem conjunto verdade $V_p = \{0, -5\}$.
Veja que o conjunto verdade de $p(x) \wedge q(x)$ é
$V_{p \wedge q} = V_p \cap V_q = \{-1, -5\} \cap \{0, -5\} = \{-5\}$.

OPERAÇÃO DISJUNÇÃO

Operação de disjunção é a sentença $p(x) \vee q(x)$ em A, satisfeita por um elemento $a \in A$. Essa operação tem o valor lógico verdadeiro quando $a \in A$ satisfaz p(x) e q(x).

Exemplo: considerando o conjunto universo Z (conjunto dos números inteiros).
Sejam as sentenças p(x): $x^2 + 6x + 5 = 0$ e q(x): $x^2 + 5x = 0$.
Temos: $p(x) \vee q(x)$.
A sentença aberta p(x) tem conjunto verdade $V_p = \{-1, -5\}$.
A sentença aberta q(x) tem conjunto verdade $V_p = \{0, -5\}$.
Veja que o conjunto verdade de $p(x) \vee q(x)$ é
$V_{p \vee q} = V_p \cup V_q = \{-1, -5\} \cup \{0, -5\} = \{1, -1, -5\}$.

OPERAÇÃO CONDICIONAL

Operação condicional é a sentença aberta $p(x) \rightarrow q(x)$ em A. A condicional tem o valor falso quando todo elemento $a \in A$ satisfaz a sentença aberta p(x) e não satisfaz a sentença q(x).

Exemplo: considerando o conjunto universo N (conjunto dos números naturais).
Sejam as sentenças p(x): $x + 1 < 6$ e q(x): x é divisor de 10.
Temos: $p(x) \rightarrow q(x)$.
A sentença aberta p(x) tem conjunto verdade $V_p = \{1, 2, 3, 4\}$.
A sentença aberta q(x) tem conjunto verdade $V_p = \{1, 5, 10\}$.
Observação: usando equivalência estudada no cálculo proposicional, temos que:
$p(x) \rightarrow q(x) \Leftrightarrow \neg p(x) \vee q(x)$
Com essa equivalência garantimos que os conjuntos verdade coincidem.
Logo, o conjunto verdade de $p(x) \rightarrow q(x)$ é
$V_{p \rightarrow q} = V_{\neg p \vee q} = V_{\neg p} \cup V_q = C_N V_p \cup V_q$
$V_p = \{1, 2, 3, 4\}$
$V_{\neg p} = C_n V_p = N - V_p = N - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7, . . .\}$
$V_q = \{1, 5, 10\}$

$V_{p\to q} = V_{\neg p} \cup V_q = \{5, 6, 7, \ldots\} \cup \{1, 5, 10\} = N - \{2, 3, 4\}$

OPERAÇÃO BICONDICIONAL

Operação bicondicional é a sentença aberta p(x) ↔ q(x) em A. A bicondicional tem o valor lógico verdadeiro quando os valores do elemento $a \in A$ satisfazem p(x) e q(x) ou quando satisfazem ¬p(x) e ¬q(x).

Exemplo: considerando o conjunto universo N (conjunto dos números naturais).

Sejam as sentenças p(x): $x + 1 < 6$ e q(x): x é divisor de 10.

Temos: p(x) → q(x).

A sentença aberta p(x) tem conjunto verdade $V_p = \{1, 2, 3, 4\}$.

A sentença aberta q(x) tem conjunto verdade $V_p = \{1, 5, 10\}$.

Conjunto verdade da bicondicional: $V_{p\leftrightarrow q} = V_{p\to q} \cap V_{q\to p}$.

Vamos determinar:

$V_{p\to q} = V_{\neg p \vee q} = V_{\neg p} \cup V_q = C_N V_p \cup V_q$

$V_p = \{1, 2, 3, 4\}$

$V_{\neg p} = C_n V_p = N - V_p = N - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7, \ldots\}$

$V_q = \{1, 5, 10\}$

$V_{p\to q} = V_{\neg p} \cup V_q = \{5, 6, 7, \ldots\} \cup \{1, 5, 10\} = N - \{2, 3, 4\}$

$V_{q\to p} = V_{\neg p \vee q} = V_{\neg q} \cup V_p = C_N V_q \cup V_p$

$V_q = \{1, 5, 10\}$

$V_{\neg q} = C_n V_q = N - V_q = N - \{1, 5, 10\} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, \ldots\}$

$V_p = \{1, 2, 3, 4\}$

$V_{q\to p} = V_{\neg q} \cup V_p = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, \ldots\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = N - \{5, 10\}$

Con junto verdade da Bicondicional:

$V_{p\leftrightarrow q} = V_{p\to q} \cap V_{q\to p} = [N - \{2, 3, 4\}] \cap [N - \{5, 10\}] = N - \{2, 3, 4, 5, 10\}$

Os exemplos anteriores sugerem que podemos gerar novas sentenças abertas compostas, que obtemos por meio dos conectivos lógicos.