DEMONSTRAÇÃO POR *CONTRADIÇÃO* E POR *REDUÇÃO AO ABSURDO*

PARADOXO DO BARBEIRO

Considere o paradoxo de Russel, conhecido como “paradoxo do barbeiro”:

Suponha que exista uma cidade com apenas um barbeiro do sexo masculino. Nessa cidade, todos os homens se mantêm barbeados e eles fazem isso apenas de duas maneiras:

1
Barbeando-se
2
Frequentando o barbeiro

Outra maneira de narrar o contexto do paradoxo:

O barbeiro é um homem da cidade que faz a barba de todos aqueles que não barbeiam a si mesmos, e somente dos homens da cidade.

Tudo isso parece perfeitamente lógico, até que se coloca a questão:

- Quem barbeia o barbeiro?

Essa indagação leva a um paradoxo porque, de acordo com a primeira afirmação, o barbeiro pode ser barbeado por:

1
Ele mesmo
2
O barbeiro (que passa a ser ele mesmo)

No entanto, nenhuma dessas possibilidades é válida, porque:

Se o barbeiro barbear a si mesmo, então o barbeiro (ele mesmo) não deve barbear a si mesmo.

Se o barbeiro não se barbeia a si mesmo, então ele (o barbeiro) deve barbear a si mesmo.

Uma contradição sempre resulta em um valor-verdade falso.

Essa é uma das leis mais interessantes e úteis de toda a matemática, e tem sido usada para provar muitos fatos importantes, bem como para construir frases satíricas.

Simbolicamente, se *X* é qualquer instrução lógica, podemos escrever a regra assim:

$$(X \,\&\, \neg X) \Rightarrow F$$

Ainda temos uma das táticas mais elegantes e interessantes no arsenal do matemático, conhecida como "redução ao absurdo”.

Para usar essa técnica, começamos assumindo que o que queremos provar é falso.
Então, a partir disso, derivamos uma contradição.
Isso prova que nossa suposição é falsa, então a proposta original deve ser verdadeira.

DEMONSTRAÇÃO POR CONTRADIÇÃO

Às vezes, mesmo usando a contrapositiva de uma declaração, não há informações suficientes para começar a construir a demonstração da declaração "se *A*, então *B*".

Assim, é útil saber sobre outra afirmação que seja equivalente, mas que, ao contrário da contrapositiva, usa conectivos lógicos diferentes de "se..., então...".

Quando pensamos sobre a tabela-verdade de uma declaração "se *A*, então *B*", podemos observar que essa afirmação é verdadeira três vezes em quatro. Essa também é uma característica do conectivo lógico "ou".

Então, é concebível suspeitar de uma relação lógica entre os dois. Podemos comparar "se *A*, depois *B*" com "*A* ou *B*", "(não *A*) ou (não *B*)", "(não *A*) ou *B*", "*A* ou (não *B*)."

Por exemplo, podemos realmente demonstrar que "Se *A*, então *B*" é logicamente equivalente a "(não *A*) ou *B*".

Considere a tabela-verdade seguinte:

A	*B*	*A*⇒*B*	~A	¬*A* ou *B*
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

A terceira e quinta colunas da tabela são idênticas, então podemos concluir que as duas declarações correspondentes são logicamente equivalentes.

Portanto, a declaração "**se um número for divisível por *10*, então seu algarismo de unidade é *0***" é equivalente à afirmação "**um número não é divisível por *10* ou seu algarismo de unidade é *0***".

Outro exemplo: a declaração "se $a \times b$ é um número par, então ou a ou b é um número par" é equivalente à afirmação "o número $a \times b$ é um número ímpar ou a ou b é um número par".

Como essa discussão vai nos dar outra ferramenta para realizar uma demonstração? Precisamos juntar algumas ideias:

Para demonstrar que uma declaração é verdadeira, podemos demonstrar que seu negativo é falso.

Dada a afirmação "se A, então B", podemos usar sua forma equivalente lógica "(não A) ou B".

Combinando essas duas ideias, temos uma nova estratégia:

Para demonstrar que "se A, então B" é verdade, podemos demonstrar que seu negativo, ou seja, "não{(não A) ou B}", é falso.

Observe também que "não{(não A) ou B}" também pode ser reescrito como "(não(não A)) e (não B)", ou melhor ainda como "A e (não B)."

Esse método é conhecido como o "**método de demonstração por contradição**."

O método consiste em demonstrar que a declaração "se A, então B" é verdadeira equivale logicamente a demonstrar que seu negativo, escrito na forma "A e (não B)" é falso. Para fazê-lo, assumir que "A e (não B)" é verdade, e ver como essa suposição gera uma contradição a algum fato que seja verdade no sistema contexto dado.

Vamos usar essa técnica para trabalhar em uma declaração.

Exemplo
Sejam a e b dois inteiros. Se $a \times b$ é um número par, então ou a ou b é um número par.
Discussão:
Nesse caso, podemos definir:

A: O número $a \times b$ é par. (Hipótese implícita: Podemos usar as propriedades dos números inteiros e suas operações.)

B: A ou b é um número par.

Para demonstrar que essa afirmação é verdadeira, usando o método "demonstração por contradição", precisamos demonstrar que a afirmação "o número $a \times b$ é um número ímpar, e que a afirmação "ou a ou b é um número par" é falsa.

Demonstração:
Vamos começar assumindo que "o número $a \times b$ é um número ímpar, e a ou b é um número par".

Uma vez que a declaração "ou *a* ou *b* é um número par" é verdade, podemos assumir que pelo menos um dos números é mesmo.

Por exemplo, sem perda de generalidade, podemos assumir que *a* é par. Todas as suposições feitas podem ser escritas usando igualdades.

Portanto $a \times b = 2k$ com *k* um número inteiro e $a = 2t$ com *t* um número inteiro:

Substituindo $2t$ por 1 no produto $a \times b$ leva a:

$$2t \times b = 2k + 1 \text{ ou } 2t \times b - 2k = 1$$

Essa igualdade equivale a:

$$2 \times (t \times b - k) = 1 \text{ ou } t \times b - k = \tfrac{1}{2}$$

Uma vez que o número $t \times b - k$ é uma combinação de inteiros e, portanto, um inteiro, essa declaração é falsa. Chegamos a uma contradição. Portanto, a declaração "o número $a \times b$ é um número ímpar, e ou *a* ou *b* é um número par" é falsa. Isso demonstra que sua negação, logicamente equivalente à declaração original, é verdadeira.

É preciso ter cautela ao identificar uma hipótese e uma conclusão para construir e usar a contrapositiva de uma declaração ou para trabalhar com o negativo de uma declaração.

Atenção
"Demonstração por contrapositiva" e "demonstração por contradição" são semelhantes, já que ambos usam a declaração "não *B*".
Porém, ao usar a contrapositiva da declaração original, usa-se "não *B*" como a única hipótese e tenta-se demonstrar que "não *A*" também é verdade. Então, tem-se um alvo claro.

Ao usar "demonstração por contradição", usa-se tanto *A* quanto "não *B*" como ponto de partida e tenta-se demonstrar que isso causa alguma contradição.

Então, um lado positivo da "demonstração por contradição" é a quantidade de informações no ponto de partida. Uma desvantagem é que não se sabe exatamente que tipo de contradição podemos esperar.

Exemplo
Para comparar os dois métodos diferentes, considere o seguinte:

Declaração:
Sejam *x*, *y* e *z* números inteiros. Se $x \times y$ não é um múltiplo de *z*, então *x* não é um múltiplo de *z* e *y* é não um múltiplo de *z*.

Quando construímos a contrapositiva, obtemos:

Sejam x, y e z números inteiros. Se x é um múltiplo de z ou y é um múltiplo de z, então $x \times y$ é um múltiplo de z.

Assim, a demonstração começa com a hipótese "ou x é um múltiplo de z ou y é um múltiplo de z".

Quando usamos "demonstração por contradição", o ponto de partida é "o número $x \times y$ não é um múltiplo de z e (x é um múltiplo de z ou y é um múltiplo de z)."

DEMONSTRAÇÃO POR REDUÇÃO AO ABSURDO

A demonstração por redução ao absurdo baseia-se no seguinte resultado (denominado **redução ao absurdo**).

$$\boldsymbol{P \Rightarrow Q \Leftrightarrow (P \times \neg Q) \Rightarrow F}$$

Uma demonstração é dita demonstração por redução ao absurdo ou simplesmente demonstração por absurdo quando a demonstração $P \Rightarrow Q$ consiste em supor a hipótese P, supor a negação $\neg Q$ e concluir uma contradição (em geral Q e $\neg Q$)

Observe que a técnica de demonstração, conhecida como demonstração por contraexemplo, é uma demonstração por absurdo. De fato, em uma demonstração por absurdo, a construção da contradição Q e $\neg Q$ é, em geral, a apresentação de um contraexemplo.

Exemplo
Considere a declaração:

0 (zero) é o único elemento neutro da adição em N, onde N é o conjunto de números naturais (inteiros positivos).

Ou seja, escrevendo na forma $P \Rightarrow Q$:

Se 0 é o elemento neutro da adição em N,

então 0 é o único elemento neutro da adição em N.

Uma demonstração da redução ao absurdo é como segue:

a) Suponha que (hipótese) *0* não é único elemento neutro da adição em *N*. Ou seja, admita que há outro elemento neutro da adição. Seja *x* tal elemento neutro da adição em *N*, com $x \neq 0$ (se *0* não é único, então existe um outro, diferente de *0*);

b) Então:

1. Como 0 é um elemento neutro, para qualquer $n \in N$, vale $n = 0 + n = n + 0$. Em particular, para $n = x$, vale $x = 0 + x = x + 0$.
2. Como x é um elemento neutro, para qualquer $n \in IN$, vale $0 = 0 + x = x + 0$. Em particular, para $n = 0$, vale $0 = 0 + x = x + 0$.
3. Portanto, como $x = 0 + x = x + 0$ e $0 = 0 + x = x + 0$, pela transitividade da igualdade, temos que $x = 0$, o que é uma contradição, pois foi suposto que $x \neq 0$.

Logo, é um absurdo supor que o elemento neutro da adição em N não é único.
Portanto, 0 é o único elemento neutro da adição em N.