DESCRIÇÃO

Os métodos de demonstração como fundamento matemático para problemas relacionados à engenharia e à computação.

PROPÓSITO

Projetar, analisar, interpretar, resolver e validar soluções para problemas, por meio do uso de metodologias e técnicas que envolvam métodos de demonstração, são aspectos de formalismo da Lógica Matemática importantes para os profissionais de ciências exatas em geral.

PREPARAÇÃO

Antes de iniciar o conteúdo, é recomendável que você use um navegador de Internet de sua preferência em seu dispositivo e busque uma calculadora online do tipo calculadora lógica (tabela-verdade) para acompanhar os exemplos apresentados.

OBJETIVOS

MÓDULO 1

Descrever as demonstrações por vacuidade, trivial, direta e indireta

MÓDULO 2

Descrever as demonstrações por contradição e por redução ao absurdo

MÓDULO 3

Reconhecer as técnicas envolvendo quantificadores

MÓDULO 4

Reconhecer o princípio da indução e suas aplicações

INTRODUÇÃO

O que significa demonstração ou prova matemática?

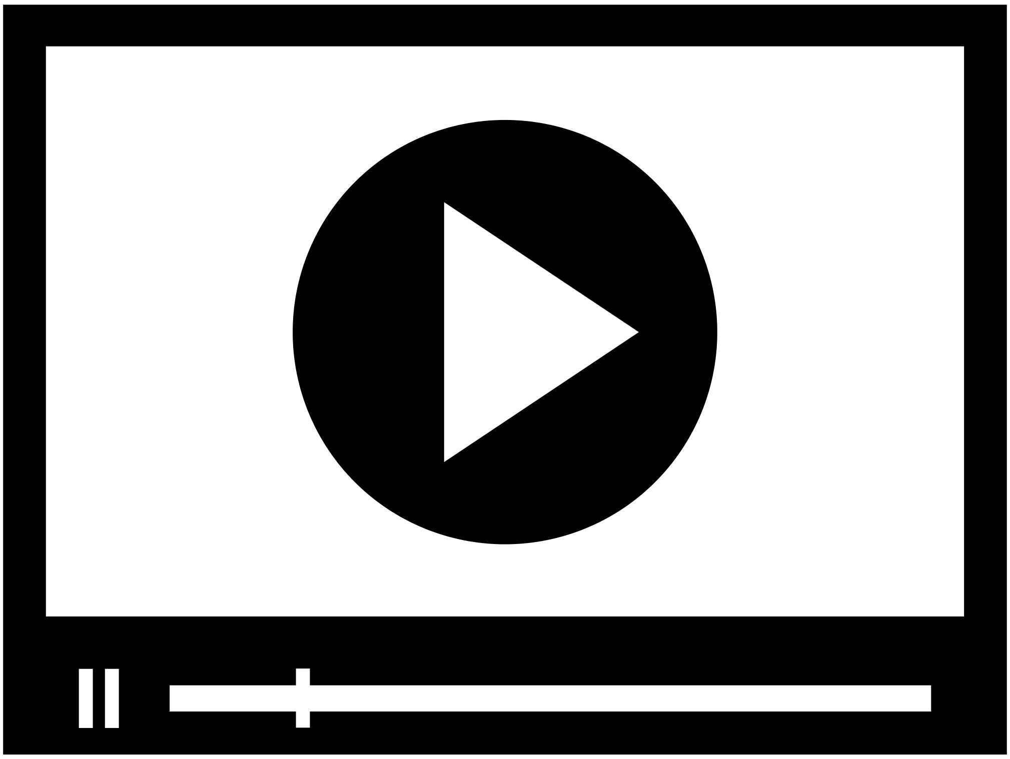
Você pode já ter alguma experiência escrevendo demonstrações, uma parte importante da matemática do ensino médio. Nas demonstrações em geometria, por exemplo, você começou com um conjunto de axiomas simples (também chamados postulados), como “Todos os ângulos retos são iguais”, e descobriu como construir e provar declarações cada vez mais complexas chamadas teoremas.

Programação de computador, na qual você usa instruções simples para criar software complexo, também se assemelha ao método de prova. Essa ideia de complexidade surgindo fora da simplicidade também é comum nas demonstrações.

Em certo sentido, construir uma demonstração é como construir uma ponte de um lado de um rio para o outro. O ponto de partida é o conjunto de premissas que é dado, e o ponto final é a conclusão que você está tentando alcançar. E as peças que você usa para construir a ponte são as regras de inferência, um conjunto de maneiras de transformar declarações antigas em novas.

MÓDULO 1

Descrever as demonstrações por vacuidade, trivial, direta e indireta



NOÇÕES SOBRE DEMONSTRAÇÕES POR VACUIDADE, TRIVIAL, DIRETA E INDIRETA

No vídeo a seguir, apresentamos o conceito geral de Demonstrações por vacuidade, trivial, direta e indireta.

MÉTODO DE DEMONSTRAÇÃO TRIVIAL

Em quase todas as implicações $P \Rightarrow Q$ que encontraremos, P e Q são frases abertas; ou seja, vamos realmente considerar
$P(x) \Rightarrow Q(x)$ ou $P(n) \Rightarrow Q(n)$ ou alguma implicação relacionada, dependendo de que variável será usada.

As variáveis x ou n (ou alguns outros símbolos) são usadas para representar elementos de algum conjunto S, que contextualiza as discussões, o domínio da variável.

Para cada valor de uma variável de seu domínio, teremos resultados de uma declaração.

★ EXEMPLO

Seja $P(n)$: $3n^2 - 4n + 1$ é par, onde $n \in Z$;

$P(1)$ é uma afirmação verdadeira, enquanto $P(2)$ é uma afirmação falsa.

Da mesma forma, raramente é o caso de $Q(x)$ ser verdadeiro para todo $x \in S$ ou que $Q(x)$ ser falso para todo $x \in S$.

Quando a instrução quantificada $\forall\, x \in S$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ for expressa como resultado ou teorema, muitas vezes escrevemos uma declaração como:

Para $x \in S$, se $P(x)$ então $Q(x)$.

ou como:

Seja $x \in S$. Se $P(x)$, então $Q(x)$. (1)

Assim, (1) é verdade se $P(x) \Rightarrow Q(x)$ for uma afirmação verdadeira para cada $x \in S$; enquanto (1) é falso se $P(x) \Rightarrow Q(x)$ for falso para pelo menos um elemento $x \in S$.

Para cada elemento $x \in S$, vamos verificar (ver a tabela da verdade abaixo) as condições sob as quais "$P(x) \Rightarrow Q(x)$" tem um valor-verdade V.

P(x)	Q(x)	P(x) ⇒ Q(x)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

 Atenção! Para visualizaçãocompleta da tabela utilize a rolagem horizontal

Assim, se Q(x) for verdadeiro para todo $x \in S$ ou P(x) for falso para todo $x \in S$, então, determinando a verdade ou falsidade de (1), torna-se consideravelmente mais fácil.

De fato, se pode ser mostrado que Q(x) é verdadeiro para todo $x \in S$, independentemente do valor da verdade de P(x), então, de acordo com a tabela da verdade para a implicação, (1) é verdadeira. Isso constitui uma demonstração de (1) e é chamada de demonstração trivial.

Assim, a declaração abaixo é verdadeira, e uma demonstração (trivial) consiste apenas em observar que 3 é um inteiro ímpar.

Seja $n \in Z$. Se $3n > 0$, então 3 é ímpar.

★ EXEMPLO

RESULTADO 1

Seja $x \in R$. Se $x < 0$, então

$$X^2 + 1 > 0$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

DEMONSTRAÇÃO:

Sendo $x^2 \geq 0$ para cada número real x, segue-se que

$$X^2 + 1 > X^2 \geq 0$$

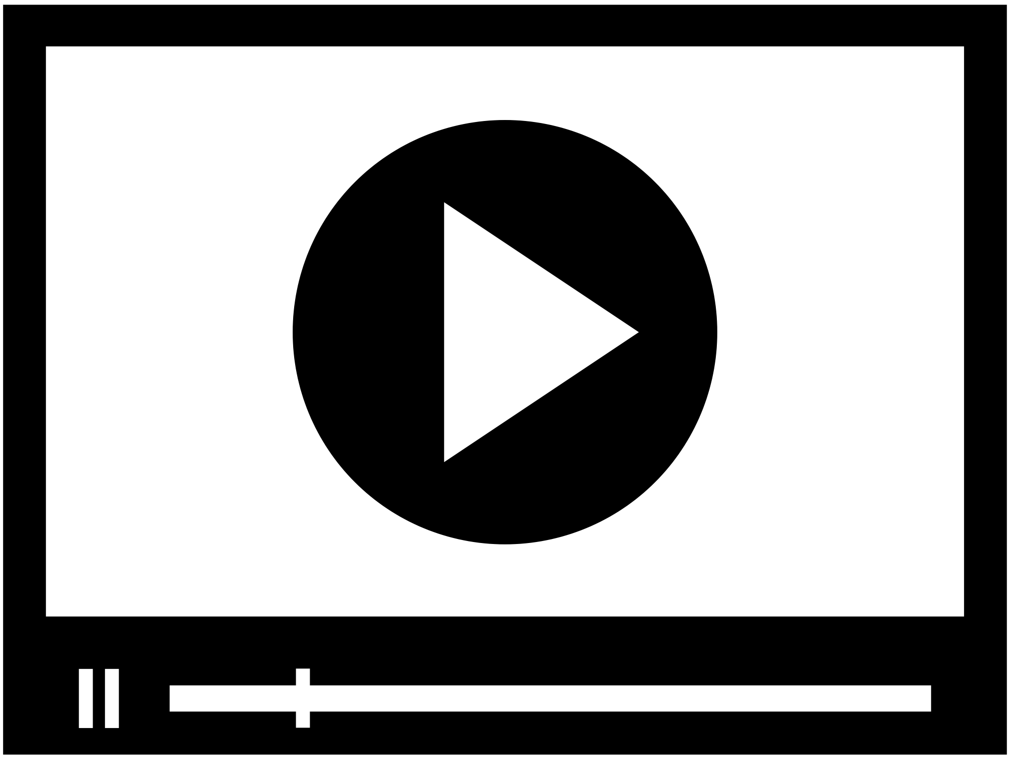
Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Assim,

$$X^2 + 1 > 0$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

C.Q.D (uma abreviatura que significa “como queríamos demonstrar”).



DEMONSTRAÇÃO TRIVIAL

Considere:

P(X): X < 0 E Q(X): X^2 + 1 >

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

onde $x \in R$.

Então o Resultado 1 afirma a verdade de: para todo $x \in R$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Desde que verificamos que $Q(x)$ é verdadeiro para cada $x \in R$, segue que $P(x) \Rightarrow Q(x)$ é verdadeiro para todo $x \in R$ e, assim, o resultado 1 é verdadeiro.

Nesse caso, quando considerado sobre o domínio R, $Q(x)$ é, na verdade, uma afirmação verdadeira. Foi esse fato que nos permitiu dar uma demonstração trivial do Resultado 1.

A demonstração do Resultado 1 não depende de $x < 0$.

De fato, desde que $x \in R$, nós poderíamos ter substituído "$x < 0$" por qualquer hipótese (incluindo o mais satisfatório "$x \in R$"), e o resultado ainda seria verdadeiro. Na verdade, esse novo resultado tem a mesma demonstração. Para ter certeza, é raro, de fato, quando uma demonstração trivial é usada para verificar uma implicação; no entanto, isso é um lembrete importante da tabela-verdade mostrada.

MÉTODO DE DEMONSTRAÇÃO POR VACUIDADE

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ frases abertas sobre um domínio S. Assim, $\forall x \in S$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ é uma afirmação verdadeira, se puder ser mostrado que $P(x)$ é falso para todo $x \in S$

(independentemente do valor da verdade de Q(x)), de acordo com a tabela-verdade para implicação. Tal demonstração é chamada **demonstração por vacuidade**.

Por exemplo, a frase aberta $n \in Z$. Se n for par, então $n^3 > 0$ é uma afirmação verdadeira.

Vamos a um exemplo mais interessante de uma demonstração por vacuidade.

★ EXEMPLO

RESULTADO 2:

Seja $x \in R$. Se $x^2 - 2x + 2 \leq 0$, então

$$X^3 \geq 8$$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

DEMONSTRAÇÃO:

Primeiro observe que

$$X^2 - 2X + 1 = (X -)^2 \geq 0$$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Portanto,

$$X^2 - 2X + 2 = (X -)^2 + 1 \geq 1 > 0$$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Assim,

$$X^2 - X^2 - 2X + 2 \leq 0$$

□ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

é falso para todo $x \in R$ e a implicação é verdadeira. C.Q.D

Para

$$P(X): X^2 - 2X + 2 \geq 0 \text{ E } Q(X): X^3 \geq 8$$

□ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

O resultado 2 afirma a verdade de:

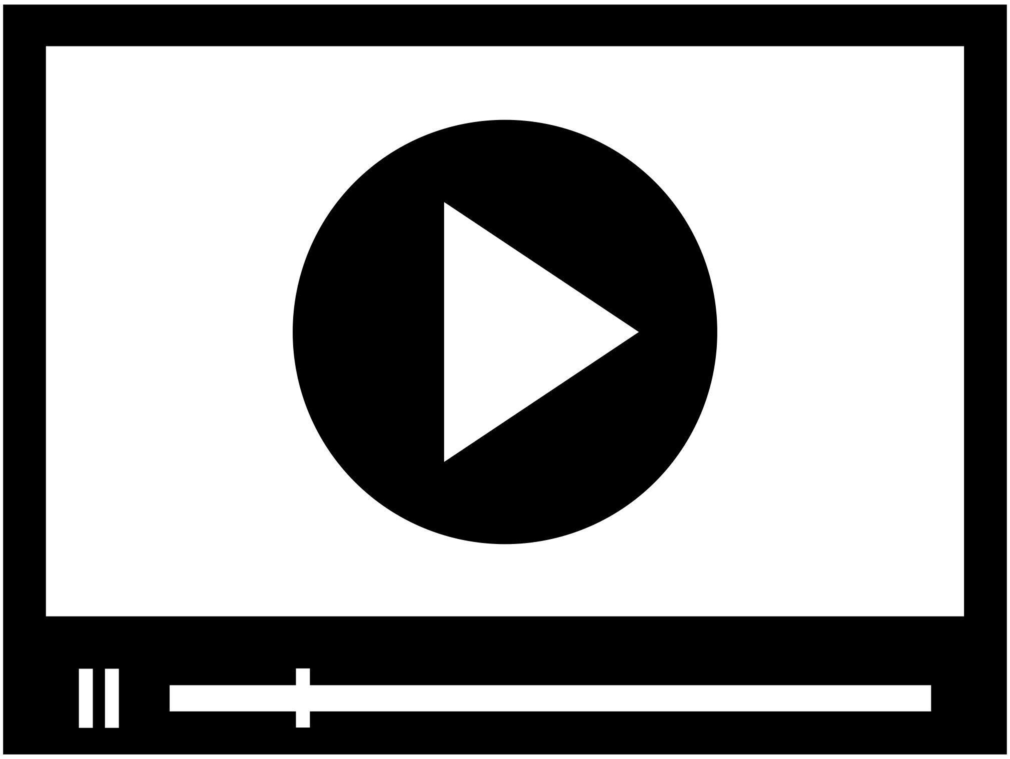
$$\forall X \in R, P(X) \Rightarrow Q(X)$$

□ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Desde que verificamos que $P(x)$ é falso para cada $x \in R$, segue-se que $P(x) \Rightarrow Q(x)$ é verdadeiro para cada $x \in R$.

Nesse caso, $P(x)$ é uma declaração falsa para cada $x \in R$. Isso é o que nos permitiu dar uma demonstração de vacuidade do resultado 2.

Na demonstração do resultado 2, a verdade ou a falsidade de $x^3 \geq 8$ não desempenham nenhum.



DEMONSTRAÇÃO POR VACUIDADE

Como mencionamos, uma demonstração trivial raramente é encontrada em matemática; no entanto, isso não pode ser dito de demonstrações por vacuidade.

MÉTODO DE DEMONSTRAÇÃO DIRETA

Demonstração Direta de $P \Rightarrow Q$:

A estratégia é supor que $P(x)$ é verdadeiro para um x arbitrário $\in S$>, e mostrar que $Q(x)$ é verdadeiro para esse x.

Para ilustrar esse tipo de demonstração, vamos assumir que conhecemos as seguintes propriedades básicas sobre números inteiros:

O negativo de um inteiro é um inteiro.

A soma ou a diferença ou o produto entre dois inteiros é um inteiro.

Um inteiro n é par se existe um inteiro k, tal que n = 2k.

Um inteiro n é ímpar se existe um inteiro k, tal que n = 2k + 1.

★ EXEMPLO 1

Se n é um inteiro ímpar, então 5n + 3 é um inteiro par.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponha que n é um inteiro ímpar. Então, há k inteiro tal que

$$N = 2K + 1$$

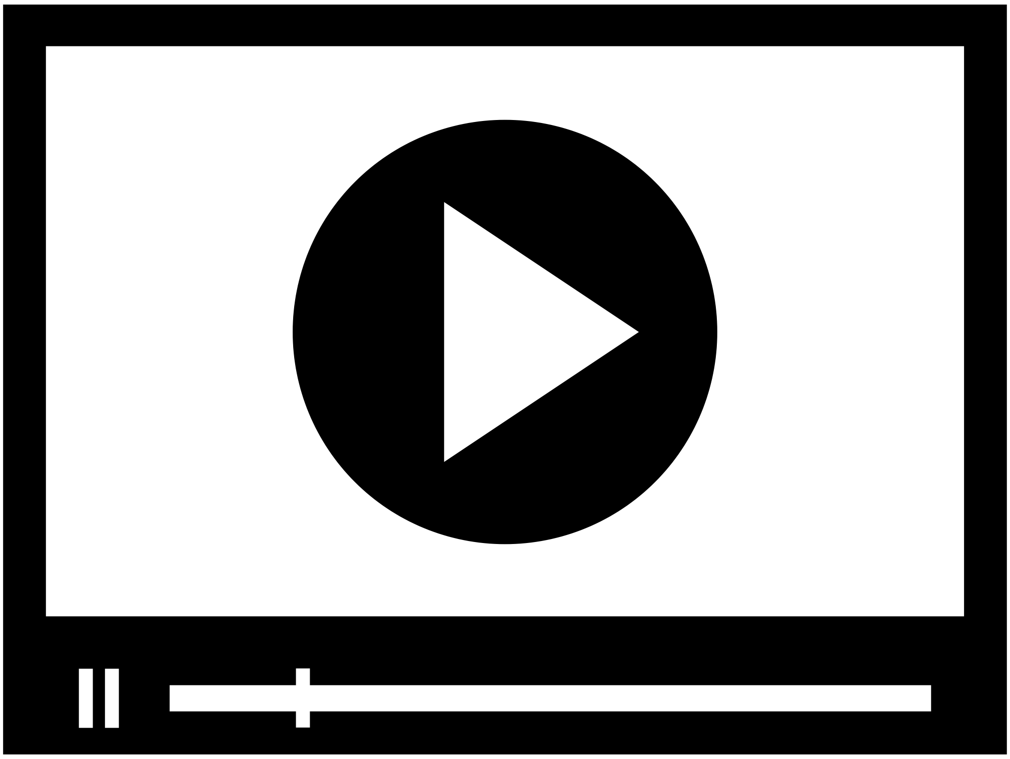
Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Assim,

$$5N + 3 = 5\times(2K + 1) + 3 = 10K + 8 = 2\times(5K + 4)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Como 5k + 4 é um inteiro, segue-se que 5n + 3 é par. C.Q.D.



DEMONSTRAÇÃO DIRETA

EXEMPLO 2

RESULTADO:

Se n é um inteiro ímpar, então $4n^3 + 2n - 1$ é ímpar.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponha que n é ímpar. Assim,

$$N = 2K + 1$$

□ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

para algum inteiro k. Logo,

$$4N^3 + 2N - 1 = 4\times(2K + 1)^3 + 2\times(2K + 1) - 1$$

$$= 4\times(4K^3 + 12K^2 + 6K + 1) + 4K + 2 - 1$$

$$= 16K^3 + 48K^2 + 28K + 5 = 2\times(8K^3 + 24K^2 + 14K + 2) + 1 = 2K' + 1$$

□ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Uma vez que $k' = 8k^3 + 24k^2 + 14k + 2$ é um inteiro (como $k \in Z$), segue que $4n^3 + 2n - 1$ é ímpar. C.Q.D.

DICA

Escreva uma demonstração para que outra pessoa possa lê-la.

Escreva frases completas, começando com "Demonstração" e terminando com " ".

Ao introduzir uma nova variável/símbolo, explique o que é o símbolo e a que conjunto a variável pertence.

CONTRAPOSITIVA

A contrapositiva de uma implicação $P \Rightarrow Q$ é a implicação $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

★ EXEMPLO 1

Seja

$P(X): X = 2$ E $Q(X): X^2 = 4$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Logo:

$P \Rightarrow Q$: Se $x = 2$, então $x^2 = 4$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$: Se $x^2 \neq 4$, então $x \neq 2$

As implicações $P \Rightarrow Q$ e $\neg Q \Rightarrow \neg P$ são logicamente equivalentes, como mostra a tabela-verdade abaixo.

P	Q	P ⇒ Q	¬Q	¬P	¬Q ⇒ ¬P
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

 Atenção! Para visualizaçãocompleta da tabela utilize a rolagem horizontal

Uma demonstração por contraposição ou contrapositiva de $P \Rightarrow Q$ é uma demonstração direta de $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

★ EXEMPLO 2

RESULTADO:

Seja $x \in Z$. Se $3x - 15$ é par, então x é ímpar.

DEMONSTRAÇÃO:

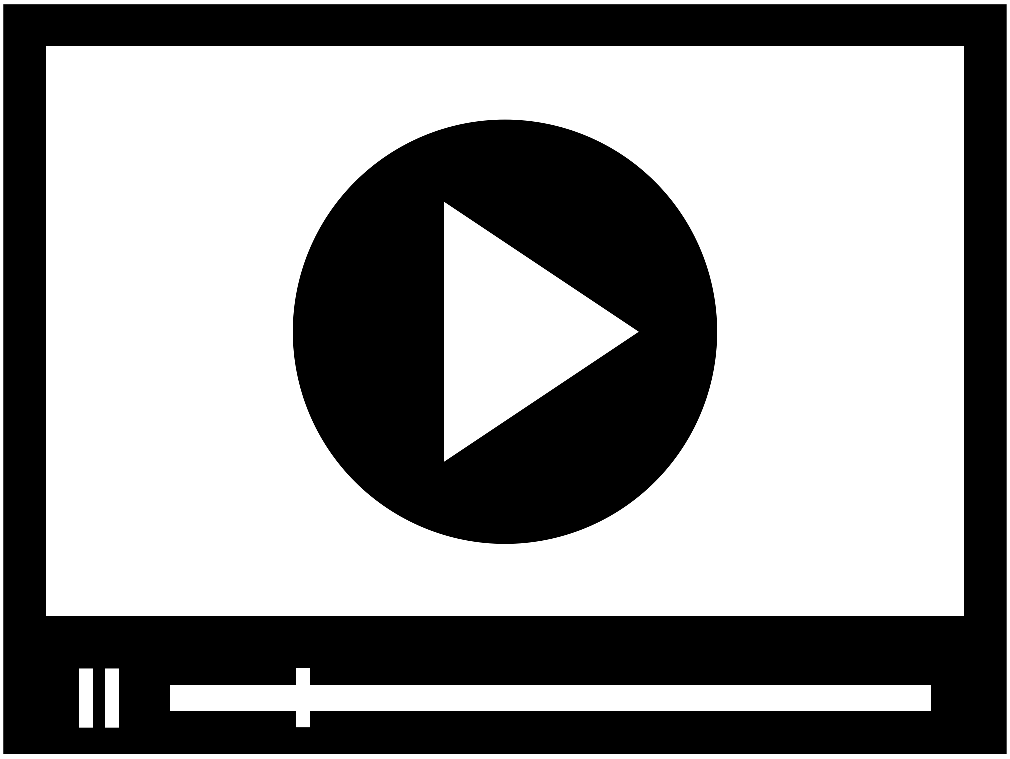
Suponha que x é par. Em seguida, $x = 2a$, para algum inteiro a. Então:

$$3X - 15 = 3 \times (2A) - 15 = 6A - 15$$

$$= 2 \times (?) + 1 = 2 \times (3A - 8) + 1$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Uma vez que $3a - 8 \in Z$, $3x - 15$ é par. C.Q.D.

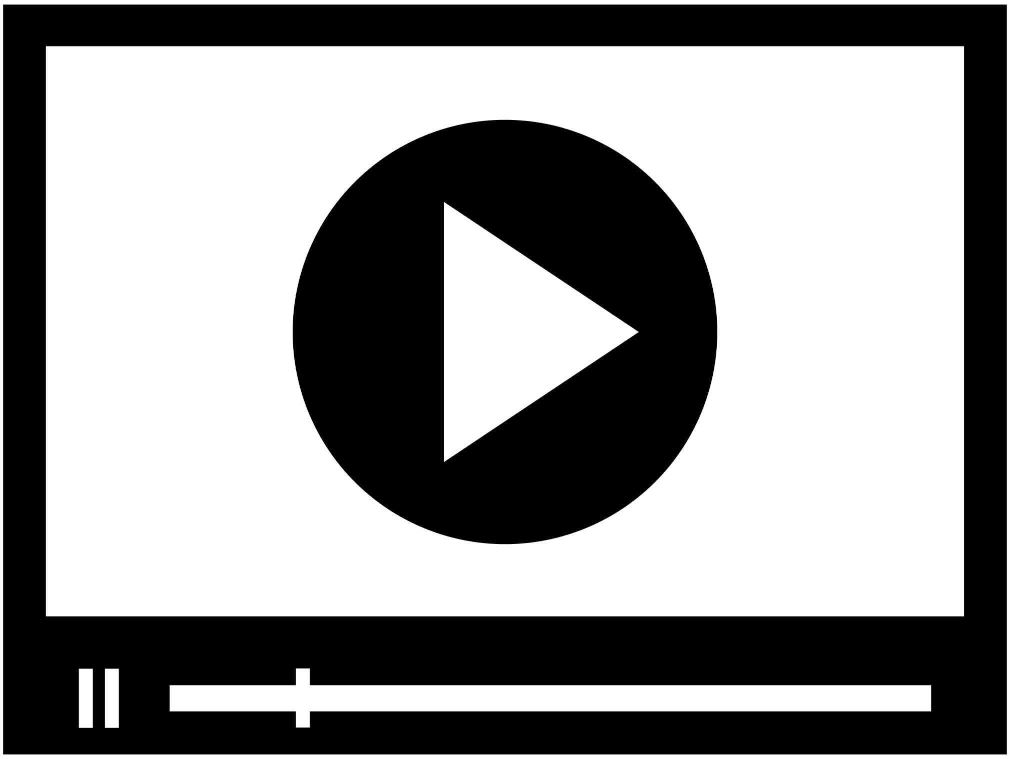


DEMONSTRAÇÃO POR CONTRAPOSITIVA

VERIFICANDO O APRENDIZADO

MÓDULO 2

Descrever as demonstrações por contradição e por redução ao absurdo



DEMONSTRAÇÃO POR *CONTRADIÇÃO* E POR *REDUÇÃO AO ABSURDO*

No vídeo a seguir, abordamos a utilização da construção p implica q nas técnicas de demonstração por Contradição e por Redução ao absurdo.

PARADOXO DO BARBEIRO

Considere o paradoxo de Russel, conhecido como “paradoxo do barbeiro”:

Suponha que exista uma cidade com apenas um barbeiro do sexo masculino. Nessa cidade, todos os homens se mantêm barbeados e eles fazem isso apenas de duas maneiras:

1

Barbeando-se

2

Frequentando o barbeiro

Outra maneira de narrar o contexto do paradoxo:

O barbeiro é um homem da cidade que faz a barba de todos aqueles que não barbeiam a si mesmos, e somente dos homens da cidade.

Tudo isso parece perfeitamente lógico, até que se coloca a questão:

Quem barbeia o barbeiro?

Essa indagação leva a um paradoxo porque, de acordo com a primeira afirmação, o barbeiro pode ser barbeado por:

1

Ele mesmo

2

O barbeiro (que passa a ser ele mesmo)

No entanto, nenhuma dessas possibilidades é válida, porque:

Se o barbeiro barbear a si mesmo, então o barbeiro (ele mesmo) não deve barbear a si mesmo.

Se o barbeiro não se barbeia a si mesmo, então ele (o barbeiro) deve barbear a si mesmo.

Uma contradição sempre resulta em um valor-verdade falso.

Essa é uma das leis mais interessantes e úteis de toda a matemática, e tem sido usada para provar muitos fatos importantes, bem como para construir frases satíricas.

Simbolicamente, se X é qualquer instrução lógica, podemos escrever a regra assim:

$$(X \,\&\, \neg X) \Rightarrow F$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Ainda temos uma das táticas mais elegantes e interessantes no arsenal do matemático, conhecida como "redução ao absurdo”.

Para usar essa técnica, começamos assumindo que o que queremos provar é falso.

Então, a partir disso, derivamos uma contradição.

Isso prova que nossa suposição é falsa, então a proposta original deve ser verdadeira.

DEMONSTRAÇÃO POR CONTRADIÇÃO

Às vezes, mesmo usando a contrapositiva de uma declaração, não há informações suficientes para começar a construir a demonstração da declaração "se A, então B".

Assim, é útil saber sobre outra afirmação que seja equivalente, mas que, ao contrário da contrapositiva, usa conectivos lógicos diferentes de "se..., então...".

Quando pensamos sobre a tabela-verdade de uma declaração "se A, então B", podemos observar que essa afirmação é verdadeira três vezes em quatro. Essa também é uma característica do conectivo lógico "ou".

Então, é concebível suspeitar de uma relação lógica entre os dois. Podemos comparar "se A, depois B" com "A ou B", "(não A) ou (não B)", "(não A) ou B", "A ou (não B)."

Por exemplo, podemos realmente demonstrar que "Se A, então B" é logicamente equivalente a "(não A) ou B".

Considere a tabela-verdade seguinte:

A	B	A⇒B	~A	¬A ou B
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V

F	F	V	V	V

 Atenção! Para visualizaçãocompleta da tabela utilize a rolagem horizontal

A terceira e quinta colunas da tabela são idênticas, então podemos concluir que as duas declarações correspondentes são logicamente equivalentes.

Portanto, a declaração "**se um número for divisível por 10, então seu algarismo de unidade é 0**" é equivalente à afirmação "**um número não é divisível por 10 ou seu algarismo de unidade é 0**".

Outro exemplo: a declaração "se a×b é um número par, então ou a ou b é um número par” é equivalente à afirmação "o número a×b é um número ímpar ou a ou b é um número par”.

Como essa discussão vai nos dar outra ferramenta para realizar uma demonstração? Precisamos juntar algumas ideias:

Para demonstrar que uma declaração é verdadeira, podemos demonstrar que seu negativo é falso.

Dada a afirmação "se A, então B", podemos usar sua forma equivalente lógica "(não A) ou B".

Combinando essas duas ideias, temos uma nova estratégia:

Para demonstrar que "se A, então B" é verdade, podemos demonstrar que seu negativo, ou seja, "não{(não A) ou B}", é falso.

Observe também que "não{(não A) ou B}" também pode ser reescrito como "(não(não A)) e (não B)", ou melhor ainda como "A e (não B)."

Esse método é conhecido como o "**método de demonstração por contradição**."

O método consiste em demonstrar que a declaração "se A, então B" é verdadeira equivale logicamente a demonstrar que seu negativo, escrito na forma "A e (não B)" é falso. Para fazê-lo, assumir que "A e (não B)" é verdade, e ver como essa suposição gera uma contradição a algum fato que seja verdade no sistema contexto dado.

Vamos usar essa técnica para trabalhar em uma declaração.

★ EXEMPLO

Sejam a e b dois inteiros. Se a×b é um número par, então ou a ou b é um número par.

DISCUSSÃO:

Nesse caso, podemos definir:

A: O número a×b é par. (Hipótese implícita: Podemos usar as propriedades dos números inteiros e suas operações.)

B: A ou b é um número par.

Para demonstrar que essa afirmação é verdadeira, usando o método "demonstração por contradição", precisamos demonstrar que a afirmação "o número a×b é um número ímpar, e que a afirmação "ou a ou b é um número par" é falsa.

DEMONSTRAÇÃO:

Vamos começar assumindo que "o número a×b é um número ímpar, e a ou b é um número par".

Uma vez que a declaração "ou a ou b é um número par" é verdade, podemos assumir que pelo menos um dos números é mesmo.

Por exemplo, sem perda de generalidade, podemos assumir que a é par. Todas as suposições feitas podem ser escritas usando igualdades.

Portanto a×b = 2k com k um número inteiro e a = 2t com t um número inteiro:

Substituindo 2t por 1 no produto a×b leva a:

$$2T \times B = 2K + 1 \text{ OU } 2T \times B - 2K = 1$$

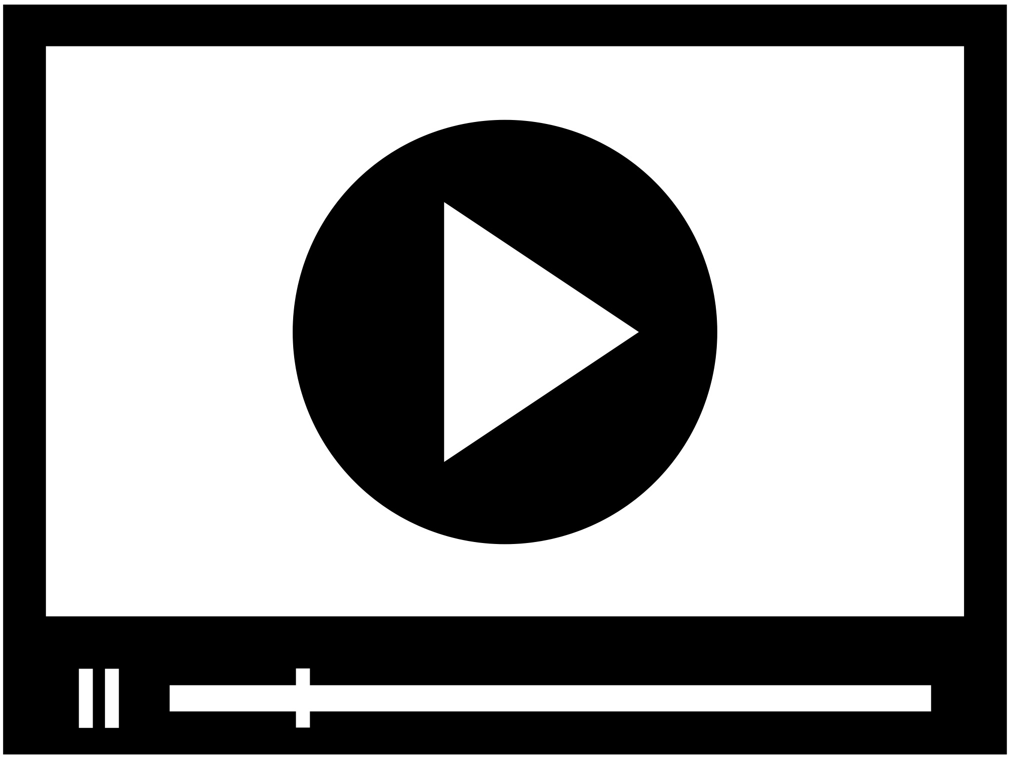
 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Essa igualdade equivale a:

$$2\times(T \times B - K) = 1 \text{ OU } T \times B - K = \tfrac{1}{2}$$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Uma vez que o número t × b − k é uma combinação de inteiros e, portanto, um inteiro, essa declaração é falsa. Chegamos a uma contradição. Portanto, a declaração "o número a×b é um número ímpar, e ou a ou b é um número par" é falsa. Isso demonstra que sua negação, logicamente equivalente à declaração original, é verdadeira.



DEMONSTRAÇÃO POR CONTRADIÇÃO

É preciso ter cautela ao identificar uma hipótese e uma conclusão para construir e usar a contrapositiva de uma declaração ou para trabalhar com o negativo de uma declaração.

ATENÇÃO

"Demonstração por contrapositiva" e "demonstração por contradição" são semelhantes, já que ambos usam a declaração "não B".

Porém, ao usar a contrapositiva da declaração original, usa-se "não B" como a única hipótese e tenta-se demonstrar que "não A" também é verdade. Então, tem-se um alvo claro.

Ao usar "demonstração por contradição", usa-se tanto A quanto "não B" como ponto de partida e tenta-se demonstrar que isso causa alguma contradição.

Então, um lado positivo da "demonstração por contradição" é a quantidade de informações no ponto de partida. Uma desvantagem é que não se sabe exatamente que tipo de contradição podemos esperar.

★ EXEMPLO

Para comparar os dois métodos diferentes, considere o seguinte:

DECLARAÇÃO:

Sejam x, y e z números inteiros. Se x×y não é um múltiplo de z, então x não é um múltiplo de z e y é não um múltiplo de z.

Quando construímos a contrapositiva, obtemos:

Sejam x, y e z números inteiros. Se x é um múltiplo de z ou y é um múltiplo de z, então x×y é um múltiplo de z.

Assim, a demonstração começa com a hipótese "ou x é um múltiplo de z ou y é um múltiplo de z".

Quando usamos "demonstração por contradição", o ponto de partida é "o número x×y não é um múltiplo de z e (x é um múltiplo de z ou y é um múltiplo de z)."

DEMONSTRAÇÃO POR REDUÇÃO AO ABSURDO

A demonstração por redução ao absurdo baseia-se no seguinte resultado (denominado **redução ao absurdo**).

$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow (P \times \neg Q) \Rightarrow F$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Uma demonstração é dita demonstração por redução ao absurdo ou simplesmente demonstração por absurdo quando a demonstração $P \Rightarrow Q$ consiste em supor a hipótese P, supor a negação $\neg Q$ e concluir uma contradição (em geral Q e $\neg Q$)

Observe que a técnica de demonstração, conhecida como demonstração por contraexemplo, é uma demonstração por absurdo. De fato, em uma demonstração por absurdo, a construção da contradição Q e $\neg Q$ é, em geral, a apresentação de um contraexemplo.

★ EXEMPLO

Considere a declaração:

0 (zero) é o único elemento neutro da adição em N, onde N é o conjunto de números naturais (inteiros positivos).

Ou seja, escrevendo na forma $P \Rightarrow Q$:

Se 0 é o elemento neutro da adição em N,

então 0 é o único elemento neutro da adição em N.

Uma demonstração da redução ao absurdo é como segue:

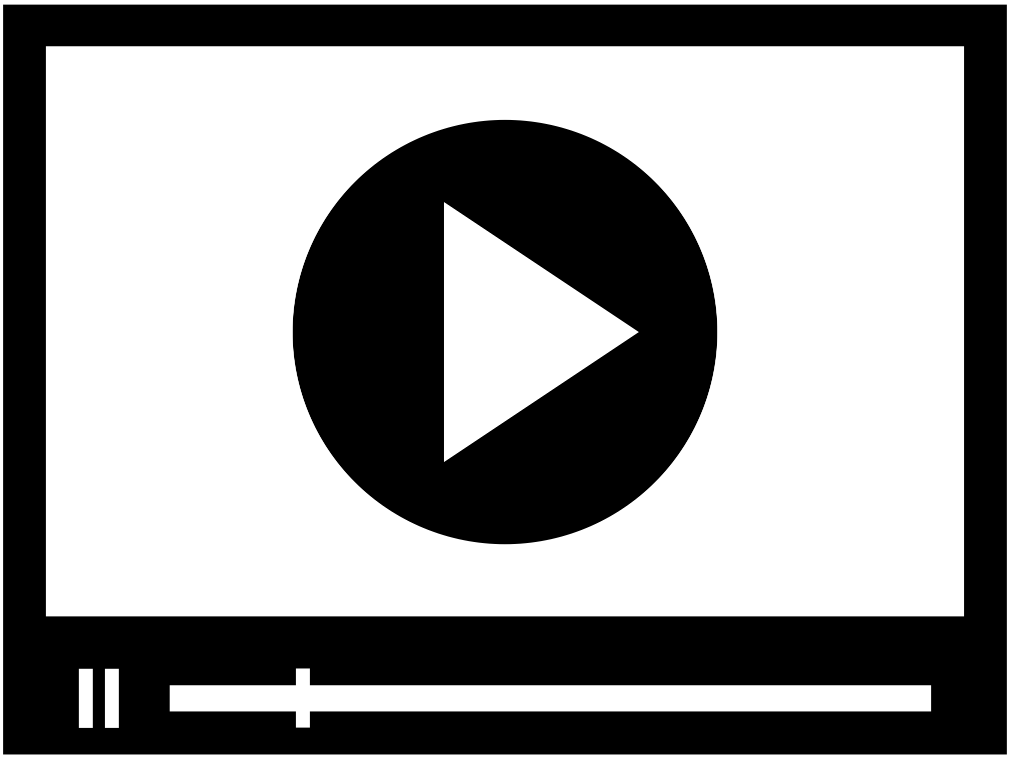
a) Suponha que (hipótese) 0 não é único elemento neutro da adição em N. Ou seja, admita que há outro elemento neutro da adição. Seja x tal elemento neutro da adição em N, com $x \neq 0$ (se 0 não é único, então existe um outro, diferente de 0);

b) Então:

> Como 0 é um elemento neutro, para qualquer $n \in N$, vale $n = 0 + n = n + 0$. Em particular, para $n = x$, vale $x = 0 + x = x + 0$.
>
> Como x é um elemento neutro, para qualquer $n \in IN$, vale $0 = 0 + x = x + 0$. Em particular, para $n = 0$, vale $0 = 0 + x = x + 0$.

Portanto, como x = 0 + x = x + 0 e 0 = 0 + x = x + 0, pela transitividade da igualdade, temos que x = 0, o que é uma contradição, pois foi suposto que x ≠ 0.

Logo, é um absurdo supor que o elemento neutro da adição em N não é único. Portanto, 0 é o único elemento neutro da adição em N.

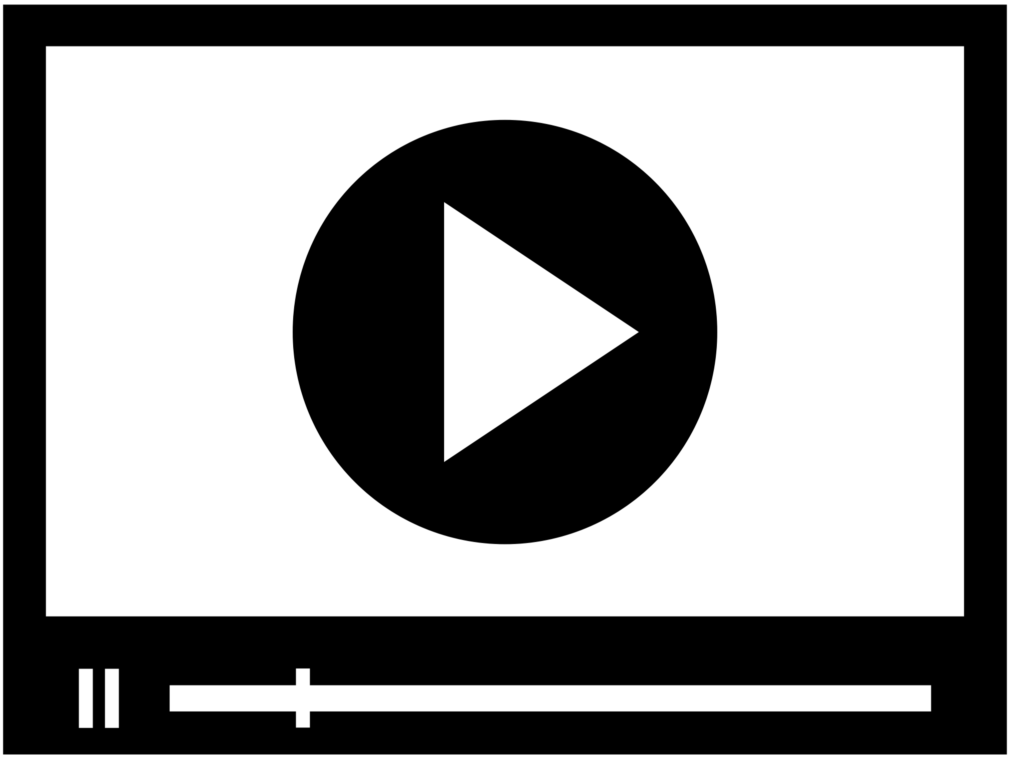


DEMONSTRAÇÃO POR REDUÇÃO AO ABSURDO

VERIFICANDO O APRENDIZADO

MÓDULO 3

⦿ **Reconhecer as técnicas envolvendo quantificadores**



DEMONSTRAÇÕES EM PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADORES

As declarações construídas por quantificação e exemplos de demonstrações de proposições quantificadas são apresentadas no vídeo a seguir.

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Há um símbolo na lógica de predicados que é usado para representar a expressão "para todos", "para cada", ou "para qualquer um". Esse símbolo é ∀. Parece um A maiúsculo de cabeça para baixo é chamado de quantificador universal, porque indica que algo é universalmente verdadeiro sobre uma variável. A variável à qual o quantificador se aplica é escrita logo após o símbolo.

Nós mencionamos que se P(x) for uma sentença aberta sobre um domínio S, então P(x) é uma declaração para cada x ∈ S. Vamos ilustrar isso de novo.

★ EXEMPLO

Seja S = {1, 2, ..., 7}. Então

$P(N): [2N^2 + 5 + (-1)^N] \div 2$

É PRIMO

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

é uma declaração para cada n ∈ S.

Portanto:

P(1): 3 é primo

P(2): 7 é primo

P(3): 11 é primo

P(4): 19 é primo

são declarações **verdadeiras**.

Enquanto:

P(5): 27 é primo

P(6): 39 é primo

P(7): 51 é primo

são declarações **falsas**.

Há outra maneira de uma sentença aberta ser convertida em uma declaração, por exemplo, pela **quantificação**.

Seja P(x) uma frase aberta sobre um domínio S.

Adicionar a frase "para cada $x \in S$" à frase P(x) produz a chamada declaração quantificada.

A frase "para cada" é referida como o quantificador universal e é denotada pelo símbolo ∀. Outras formas de expressar o quantificador universal são "para cada um" e "para todos". Essa afirmação quantificada é expressa em símbolos por:

$$\forall X \in S, P(X) \quad (3.1)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

e é expressa em palavras por

para cada $x \in S$, P(x). (3.2)

A instrução quantificada (3.1) (ou (3.2)) é verdadeira se P(x) for verdadeira para cada $x \in S$; enquanto ela é falsa se P(x) for falsa para pelo menos um elemento $x \in S$.

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Outra maneira de converter uma frase aberta P(x) sobre um domínio S em uma declaração por meio da quantificação é pela introdução de um quantificador chamado quantificador existencial.

Cada uma das frases "existe", "para alguns" e "para pelo menos uma" é referida como um quantificador existencial e é denotada pelo símbolo ∃.

A declaração quantificada

$\exists$ X $\in$ S, P(X) (3.3)

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

pode ser expressa em palavras por

existe $x \in S$ tal que $P(x)$. (3.4)

A instrução quantificada (3.3) (ou (3.4)) é verdadeira se $P(x)$ for verdadeira para pelo menos um elemento $x \in S$; enquanto ela é falsa se $P(x)$ for falsa para todo $x \in S$.

Agora consideramos duas declarações quantificadas construídas a partir da sentença aberta vista no exemplo anterior.

★ EXEMPLO 1

Para a sentença em aberto:

P(N): [2N² + 5 + (−1)^{N}] ÷ 2 É PRIMO SOBRE O DOMÍNIO S = {1, 2, ..., 7}.

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A instrução quantificada:

$\forall$ N $\in$ S, P(N)

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

ou seja, para cada $n \in S$, $P(n)$: $[2n^2 + 5 + (-1)^n] \div 2$ é primo é falsa, uma vez que, por exemplo, $P(5)$ é falso.

No entanto, a declaração quantificada:

$\exists \in$ S, P(N)

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

ou seja, existe $n \in S$ tal que P(n): $[2n^2 + 5 + (-1)^n] \div 2$ é primo é verdadeira já que P(1) é verdadeiro, por exemplo.

A declaração quantificada $\forall x \in S, P(x)$ também pode ser expressa como "se $x \in S$, então P(x)".

★ EXEMPLO 2

Considere a frase em aberto P(x): $x^2 \geq 0$ sobre o conjunto R de números reais.

Então:

$\forall$ X $\in$ R, P(X)

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

ou, equivalentemente:

$\forall$ X $\in$ R, $X^2 \geq 0$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

pode ser expresso como para cada número real x, $x^2 \geq 0$, ou seja, se x é um número real, então $x^2 \geq 0$ (ou ainda "o quadrado de cada número real é não negativo".

Em geral, o quantificador universal é usado para alegar que a declaração resultante de uma determinada sentença aberta é verdadeira para cada valor do domínio da variável atribuído à variável. Consequentemente, a declaração $\forall x \in R, x^2 \geq 0$ é verdadeira já que $x^2 \geq 0$ é verdadeira para cada número real x.

Suponha agora que devemos considerar a frase aberta Q(x): $x^2 \leq 0$. A declaração $\forall x \in R$, Q(x) (ou seja, para cada número real x, temos $x^2 \leq 0$) é falsa já que, para exemplo, Q(1) é falso. Claro, isso significa que sua negação é verdadeira. Se não fosse o caso de que para cada número real x, temos $x^2 \leq 0$, então deveria existir algum número real x tal que $x^2 > 0$.

Essa negação:

Existe um número real x tal que $x^2 > 0$ pode ser escrito em símbolos como:

$$\exists X \in R, X^2 > 0$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

ou

$$\exists X \in R, \neg Q(X)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Geralmente, se estamos considerando uma frase aberta P(x) sobre um domínio S, então: $\neg(\forall x \in S, P(x)) \equiv \exists x \in S, \neg P(x)$.

★ EXEMPLO 3

A seguinte declaração contém o quantificador existencial.

Existe um número real x tal que $x^2 = 3$. (3.5)

Se deixarmos P(x): $x^2 = 3$, então (3.5) pode ser reescrito como $\exists x \in R, P(x)$.

A declaração (3.5) é verdadeira, uma vez que P(x) é verdadeiro quando $x = \sqrt{3}$ (ou quando $x = -\sqrt{3}$).

Daí, a negação de (3.5) é:

Para cada número real x, $x^2 \neq 3$(3.6)

A declaração (3.6) é, portanto, falsa. C.Q.D.

EXEMPLO 4

Seja P(x, y) uma frase aberta, onde o domínio da variável x é S e o domínio da variável y é t. Em seguida, a declaração quantificada:

Para todo $x \in S$ e $y \in T$, P(x, y) pode ser expressa simbolicamente como:

$$\forall X \in S, \forall Y \in T, P(X, Y)$$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A negação da declaração (3.7) é

$$\neg(\forall X \in S, \forall Y \in T, P(X, Y) \equiv \exists X \in S, \neg(\forall Y \in T, P(X, Y)$$

$$\equiv \exists; X \in S, \exists Y \in T, \neg P(X, Y)$$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

EXEMPLO 5

Considere a sentença aberta:

$$Q(X, Y): X + Y \text{ É PRIMO}$$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

onde o domínio de x é S= {3, 5, 7} e o domínio de y é T = {2, 6, 8, 12}.

A declaração quantificada:

$$\exists \ \mathbf{X} \in \mathbf{S}, \forall \ \mathbf{Y} \in \mathbf{T}, \mathbf{Q(X, Y)} \ \mathbf{(3.8)}$$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

expressa em palavras, é:

Existe algum x ∈ S tal que para cada y ∈ T, x + y é primo.

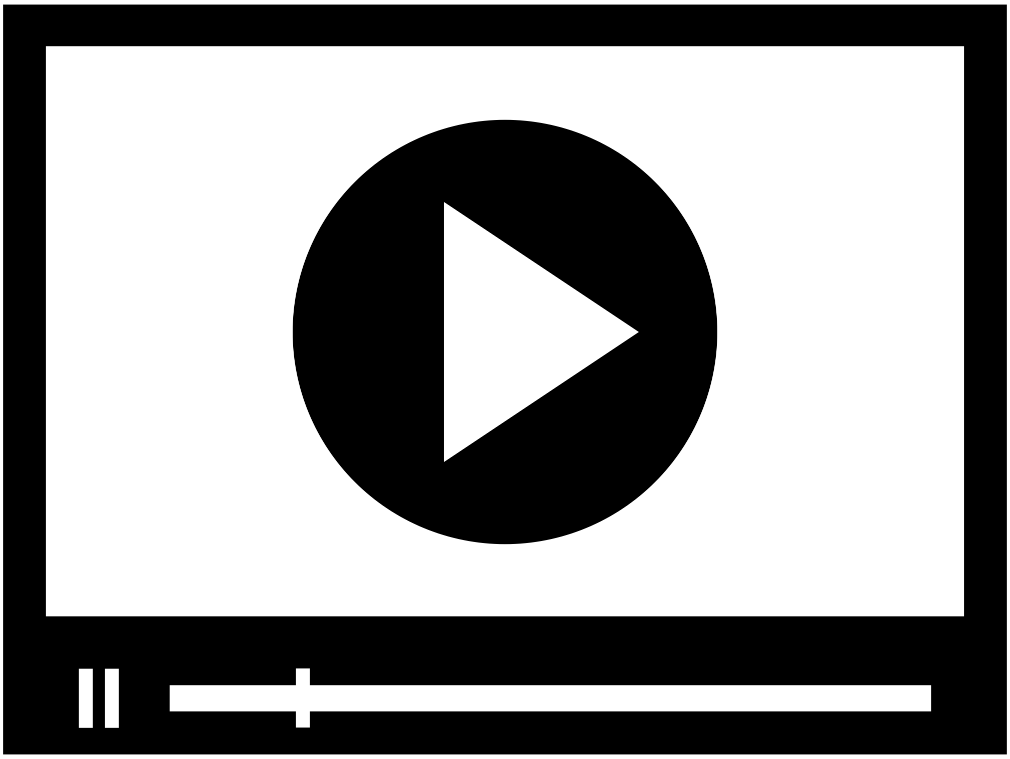
Para x = 5, todos os números 5 + 2,5 + 6,5 + 8 e 5 + 12 são primos.

Consequentemente, a declaração quantificada (3.8) é verdadeira.

VERIFICANDO O APRENDIZADO

MÓDULO 4

⦿ **Reconhecer o princípio da indução e suas aplicações**



PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

No vídeo a seguir, exploramos a demonstração por Indução Finita, através de exemplos chave numérico e geométrico.

Neste módulo, vamos examinar o quinto axioma de Peano, também conhecido como **Axioma de Indução**, e vamos explorar as consequências desse axioma. Entre as consequências estão o Princípio da Indução Matemática, o Princípio da Boa ordenação para o conjunto dos números naturais, e o Teorema Fundamental da Aritmética.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

Seja A um conjunto de números reais. Um número $m \in A$ é chamado de elemento mínimo (ou menor) de A se $x \geq m$ para cada $x \in A$. Alguns conjuntos não vazios de números reais têm um elemento menor; outros não.

O conjunto N tem um menor elemento, ou seja, 1, enquanto Z não tem menor elemento. O intervalo fechado [2, 5] tem o mínimo elemento 2, mas o intervalo aberto (2, 5) não tem elemento mínimo. O conjunto $A = \{1/n : n \in N\}$ também não tem menor elemento.

Se um conjunto não vazio A de números reais tem um elemento menor, então esse elemento é necessariamente único. Vamos verificar esse fato. Lembre-se de que, ao tentar demonstrar que um elemento que possui uma determinada propriedade é único, é costume assumir que há dois elementos com essa propriedade. Em seguida, vamos demonstrar que esses elementos são iguais, implicando que há exatamente um desses elementos.

TEOREMA 4.1

Se um conjunto A de números reais tem um elemento menor, então A tem um elemento menor que é único.

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam m e n os menores elementos de A. Uma vez que m é um elemento menor, $n \geq m$. Além disso, desde que n é um elemento menor, $m \geq n$. Portanto, $m = n$. C.Q.D.

A demonstração que demos do Teorema 4.1 é uma demonstração direta.

Há uma propriedade de grande interesse para conjuntos numéricos, em geral. Vejamos.

Um conjunto não vazio S de números reais é dito ser **bem ordenado** se cada subconjunto de S tem um elemento menor. Seja $S = \{-7, -1, 2\}$. Os subconjuntos não vazios de S são $\{-7, -1, 2\}$, $\{-7, -1\}$, $\{-7, 2\}$, $\{-1, 2\}$, $\{-7\}$, $\{-1\}$ e $\{2\}$.

Embora possa parecer evidente que o conjunto N de inteiros positivos é bem ordenado, essa afirmação não pode ser demonstrada a partir das propriedades de inteiros positivos que usamos intuitivamente. Consequentemente, essa afirmação é aceita como um axioma adicional, como indicado a seguir.

AXIOMA: PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO

O conjunto N de inteiros positivos é bem ordenado.

Uma consequência do Princípio da Boa Ordenação é outro princípio, que serve como base para outra e importante técnica de demonstração.

TEOREMA 4.2 (PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA)

Para cada inteiro positivo n, seja P(n) ser uma declaração. Se (1) P(1) é verdadeiro e (2) a implicação

Se P(k), então P(k + 1) é verdade para cada inteiro positivo k, então P(n) é verdadeiro para cada inteiro positivo n.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponha, pelo contrário, que o teorema é falso. Em seguida, as condições (1) e (2) são satisfeitas, mas existem alguns inteiros positivos n para os quais P(n) é uma afirmação falsa.

Faça

S = {N ∈ N: P(N) É FALSO }

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Uma vez que S é um subconjunto não vazio de N, ele segue pelo Princípio de Boa ordenação, e que N contém um elemento mínimo S.

Uma vez que P(1) é verdadeiro, $1 \notin S$. Assim, $s \geq 2$ e $s - 1 \in N$.

Portanto $s - 1 \notin S$ e assim $P(s - 1)$ é uma declaração verdadeira.

Por condição (2), P(2) também é verdadeiro e assim $s \notin S$. Isso, no entanto, contradiz nossa suposição de que $s \in S$. C.Q.D.

O Princípio da Indução Matemática é declarado mais simbolicamente abaixo.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Para cada inteiro positivo n, seja P(n) uma declaração. Se (1) P(1) é verdadeiro e (2) $\forall k \in N, P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, é verdade, então $\forall n \in N$, P(n) é verdade.

Como consequência do Princípio da Indução Matemática, a declaração quantificada $\forall n \in N$, P(n) pode ser demonstrada ser verdade se (1) podemos mostrar que a declaração P(1) é verdadeira e (2) podemos estabelecer a verdade da implicação

Se P(k), então P(k + 1) para cada inteiro positivo k.

Uma demonstração usando o Princípio da Indução Matemática é chamada de demonstração de indução ou de demonstração por indução.

A verificação da validade de P(1) em uma demonstração de indução é chamada a etapa-base ou a âncora da indução. Na implicação

Se P(k), então P(k + 1).

para um inteiro positivo arbitrário k, a instrução P(k) é chamada de hipótese indutiva (ou indução). Muitas vezes usamos uma demonstração direta para verificar

$\forall K \in N, P(K) \Rightarrow P(K + 1)$ (4.1)

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

embora qualquer técnica de demonstração seja aceitável. Ou seja, normalmente assumimos que a hipótese indutiva P(k) é verdadeira para um inteiro positivo arbitrário k e para tentar mostrar que P(k + 1) é verdade. Estabelecer a validade de (4.1) é chamado de passo indutivo na demonstração por indução.

Ilustramos essa técnica de demonstração mostrando que a soma dos n primeiros inteiros positivos é dada pela expressão n×

(n + 1)
2

para qualquer inteiro positivo n, ou seja, 1 + 2 + 3 + . . . + n = n×

(n + 1)
2

.

RESULTADO 4.3

Faça

P(N): 1 + 2 + 3 + . . . + N = N×

(N + 1)
2

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

onde n ∈ N. Então P(n) é verdadeiro para cada inteiro positivo n.

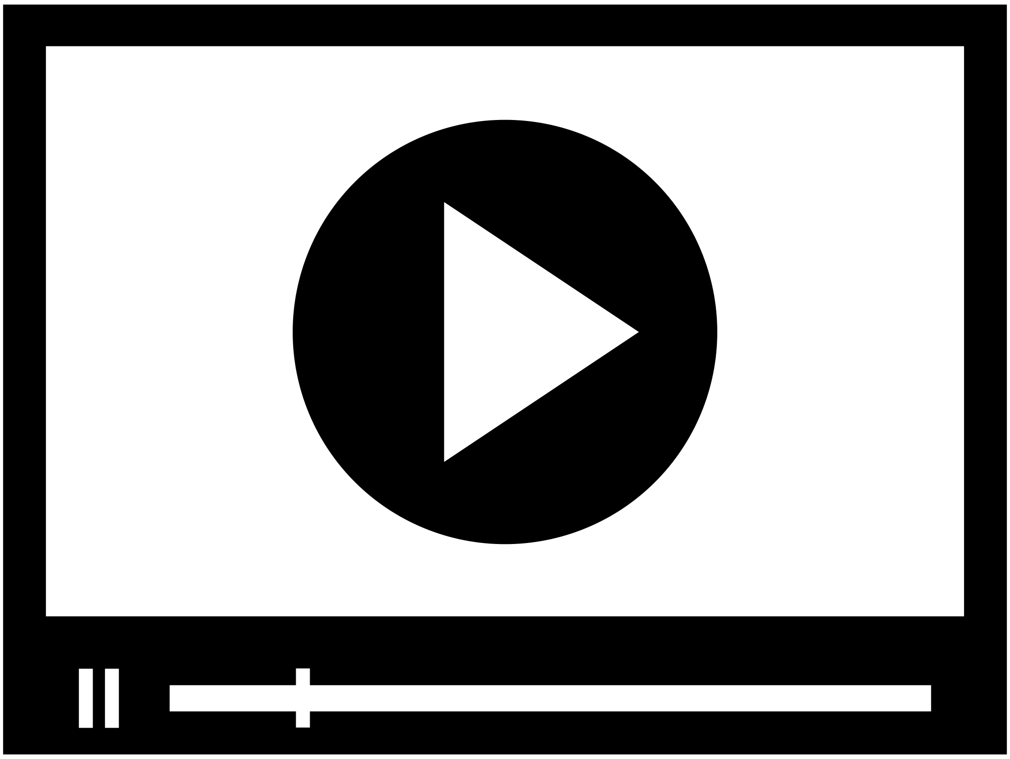
DEMONSTRAÇÃO:

Nós empregamos indução. Faça 1 =

(1 × 2)
2

, logo a declaração P(1) é verdadeira.

Assuma que P(k) é verdadeira para um inteiro positivo arbitrário k, ou seja, que:



DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO 1

1 + 2 + 3 + . . . + K = K×

(K + 1)

2

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Mostramos que P(k + 1) é verdadeira, ou seja, mostramos que:

$$1 + 2 + 3 + . . . + K =$$

$$(K + 1)\times(K + 2)$$

$$2$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Assim:

$$1 + 2 + 3 + . . . + (K + 1) = (1 + 2 + 3 + . . . + K) + (K + 1)$$

$$(K + 1)\times(K + 2)$$

$$2$$

$$= K\times$$

$$(K + 1)$$

2

+ (K + 1) =

[K×(K + 1) + 2×(K + 1)]

2

=

(K + 1)×(K + 2)

2

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

como desejado.

Pelo Princípio da Indução Matemática, P(n) é verdadeiro para cada inteiro positivo n. C.Q.D.

ANÁLISE DA DEMONSTRAÇÃO:

Na demonstração do Resultado 4.3, começamos afirmando que a indução foi usada. Isso alerta o leitor sobre o que esperar na demonstração. Além disso, na demonstração do passo indutivo, presume-se que 1 + 2 + 3 + . . . + k = k ×

(k + 1)

2

para um inteiro positivo k, isto é, para um inteiro positivo arbitrário k.

Nós não assumimos que 1 + 2 + 3 + . . . + k = k ×

$(k + 1)$
2

para cada inteiro positivo k, assumindo o que estamos tentando demonstrar no resultado 4.3.

RESULTADO 4.4

Para cada inteiro positivo n, $1^2 + 2^2 + . . . + k^2 =$

$n\times(n + 1)\times(2n + 1)$
6

.

DEMONSTRAÇÃO:

Vamos proceder por indução.

Fazendo n = 1 obtemos $1^2 =$

$(1\times2\times3)$
6

= 1, afirmação claramente verdadeira.

Vamos assumir que para algum k inteiro positivo temos:

$1^2 + 2^2 + . . . + K^2 =$

K×(K + 1)×(2K + 1)
6

(*)

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Devemos mostrar que P(k + 1) é também verdadeiro.

Temos:

$1^2 + 2^2 + . . . + (K + 1)^2 =$

K×(K + 1)×(2K + 1)
6

$= [1^2 + 2^2 + . . . + K^2] + (K + 1)^2$

=

K×(K + 1)×(2K + 1)
6

$+ (K + 1)^2$

=

$K \times (K + 1) \times (2K + 1)$
6

+

$6(K + 1)^2$
6

= $(K + 1) \times$

$[K \times (2K + 1) + 6(K + 1)]$
6

=

$(K + 1) \times (2K^2 + 7K + 6)$
6

[DE (*) E DA LINHA ANTERIOR]

=

$(K + 1) \times (K + 2) \times (2K + 3)$

6

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

como desejado.

Pelo Princípio da Indução Matemática, $1^2 + 2^2 + . . . + n^2 =$

$$\frac{n\times(n + 1)\times(2n + 1)}{6}$$

para qualquer inteiro positivo n. C.Q.D.

Estritamente falando, a última frase na demonstração do Resultado 4.4 é típica da última sentença de cada demonstração, usando indução matemática, em que a ideia é mostrar que a hipótese do Princípio da Indução Matemática está satisfeita e assim a conclusão segue.

Alguns, portanto, omitem essa frase final, uma vez que se entende que uma vez que as propriedades (1) e (2) do Teorema 4.2 estão satisfeitas, tem-se uma demonstração.

Para enfatizar, vamos continuar a incluir essa sentença final, no entanto.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FORTE

Há uma outra forma de indução matemática. Esse princípio atende por muitos nomes: Princípio da Indução Forte; Forte Princípio da Indução Matemática; Forma Forte de Indução; Forma Suplente de Indução Matemática; e Segundo Princípio da Indução Matemática são nomes comuns.

TEOREMA 4.5 (O PRINCÍPIO FORTE DA INDUÇÃO MATEMÁTICA)

Em cada inteiro positivo n, temos:

P(n) seja uma declaração. Se

a) P(1) é verdadeira e

b) A implicação:

Se P(i) para cada inteiro i com $1 \leq i \leq k$, então P(k + 1) é verdadeira para cada inteiro positivo k, então P(n) é verdadeiro para cada inteiro positivo n.

Como o Princípio da Indução Matemática (Teorema 4.2), o Princípio Forte da Indução Matemática também é uma consequência do Princípio de Boa Ordenação.

O Princípio Forte da Indução Matemática é agora declarado mais simbolicamente a seguir:

PRINCÍPIO FORTE DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Para cada inteiro positivo n, seja P(n) uma declaração.

Se (1) P(1) é verdadeiro e (2) $\forall\, k \in N$, $P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ é verdade, então $\forall\, n \in N$, P(n) é verdade.

A diferença nas declarações do Princípio da Indução Matemática e do Princípio Forte da Indução Matemática está na etapa indutiva (condição 2).

Para demonstrar que $\forall\, n \in N$, P(n) é verdade pelo Princípio da Indução Matemática, é necessário mostrar que P(1) é verdadeiro e verificar a implicação:

P(K), ENTÃO P(K + 1) (4.2)

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

é verdade para cada inteiro positivo k. Por outro lado, para demonstrar que $\forall\, n \in N$, P(n) é verdade pelo Princípio Forte da Indução Matemática, somos obrigados a mostrar que P(1) é verdadeiro e para verificar a implicação:

SE P(I) PARA CADA I COM 1 ≤ I ≤ K, ENTÃO P(K + 1) . (4.3)

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

é verdadeiro para cada inteiro positivo k.

Se fôssemos dar demonstrações diretas das implicações (4.2) e (4.3), então nos é permitido assumir mais na etapa indutiva (4.3) do Princípio Forte da Indução Matemática do que na etapa de indução (4.2) do Princípio de Indução Matemática e ainda obter a mesma conclusão.

Se a suposição de que P(k) é verdadeiro é insuficiente para verificar a verdade de P(k + 1) para um inteiro positivo arbitrário k, mas a suposição de que todas as declarações P(1), P(2), para verificar a verdade de P(k + 1) é suficiente, então isso sugere que devemos usar o Princípio Forte de Indução Matemática.

De fato, qualquer resultado que possa ser demonstrado pelo Princípio da Indução Matemática também pode ser demonstrado pelo Forte Princípio Forte da Indução Matemática.

Assim como há uma versão mais geral do Princípio da Indução Matemática (ou seja, Teorema 4.2), há uma versão mais geral do Princípio Forte da Indução Matemática. Também nos referiremos a isso como o Forte Princípio da Indução Matemática.

TEOREMA 4.6 (O FORTE PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA)

Para um inteiro fixo m, seja $S = \{i \in Z: i \geq m\}$. Para cada $n \in S$, que P(n) seja uma declaração. Se (1) P(m) é verdadeiro e (2) a implicação

Se P(i) para cada inteiro i com $m \leq e \leq k$, então P(k + 1) é verdadeiro para cada inteiro $k \in S$, então P(n) é verdadeiro para cada inteiro $n \in S$.

Agora consideramos uma classe de declarações matemáticas onde o Princípio Forte de Indução Matemática é comumente a técnica de demonstração apropriada.

Suponha que estamos considerando uma sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de números, também expressa como $\{ a_n \}$. Uma maneira de definir uma sequência $\{ a_n \}$ é especificar explicitamente o primeiro termo a_n (em função de n).

Por exemplo, podemos ter um

$A_N = {}^{1}/_{N}$, UM $A_N = {}^{(-1)^N}/_{N^2}$ OU $A_N = N^3 + N$

PARA CADA $N \in N$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Uma sequência também pode ser definida recursivamente. Em uma sequência recursivamente definida $\{ a_n \}$, apenas o primeiro termo ou talvez os primeiros termos são definidos especificamente, dizer $a_1, a_2, . . . , a_k$ para alguns k fixo ∈ N. Estes são chamados de valores iniciais. Em seguida, $a_k + 1$ é expresso em termos de $a_1, a_2, . . . , a_k$ e, mais geralmente, para n > k, 1 é expresso em termos de $a_1, a_2, . . . , a_{n-1}$. Isso é chamado de relação de recorrência.

Um exemplo específico disso é a sequência {an} definida por

$A_1 = 1$, $A_2 = 3$ E $A_N = 2A_{N-1} - A_{N-2}$ PARA $N \geq 3$

 Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Nesse caso, existem dois valores iniciais, ou seja, $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$.

A relação de recorrência aqui é $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Fazendo n = 3, descobrimos que $a_3 = 2a_2 - a_1 = 5$;

ao fazer n = 4, temos $a_4 = 2a_3 - a_2 = 7$.

Da mesma forma, $a_5 = 9$ e $a_6 = 11$.

A partir dessas informações, pode-se muito conjectura boa (palpite) que $a_n = 2n - 1$ para cada $n \in N$.

Usando o Forte Princípio da Indução Matemática, podemos, de fato, demonstrar que essa conjectura é verdadeira.

RESULTADO 4.7

Uma sequência { a_n } é definida recursivamente por:

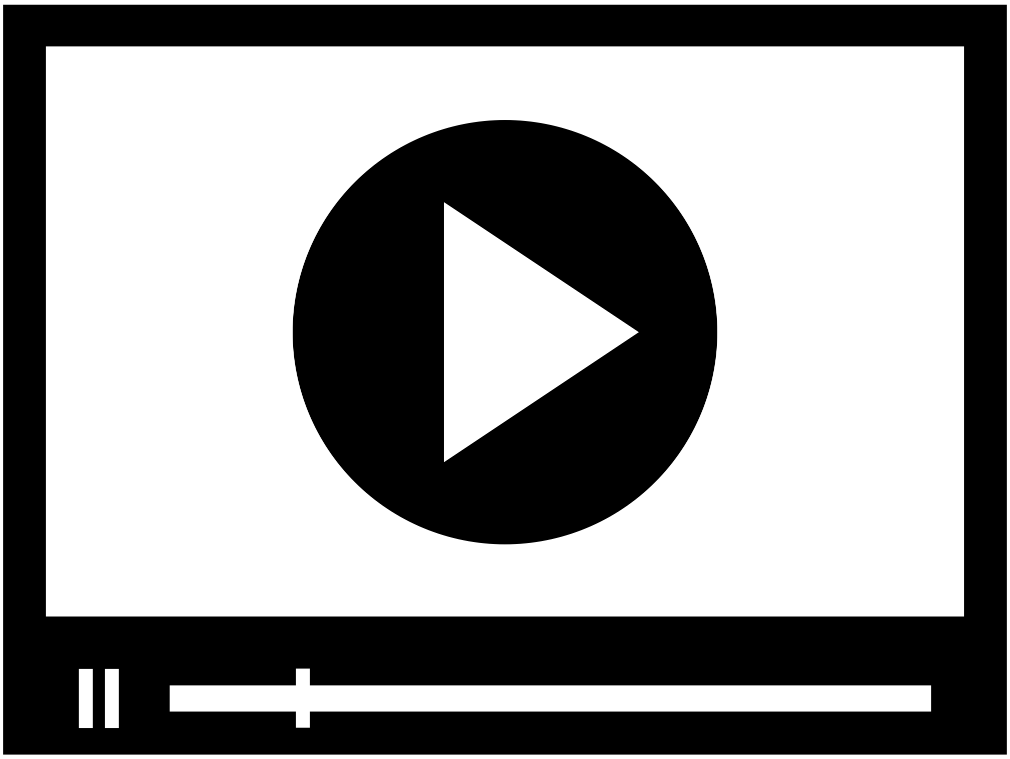
$A_1 = 1$, $A_2 = 3$ E $A_N = 2A_{N-1} - A_{N-2}$ PARA $N \geq 3$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Em seguida,

$A_N = 2N - 1$ PARA TODOS OS $N \in N$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal



DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO 2

DEMONSTRAÇÃO:

Nós procedemos por indução.

Desde $a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$, a fórmula mantém para $n = 1$.

Assuma por um inteiro positivo arbitrário k que $a_i = 2i - 1$ para todos os inteiros i com $1 \leq i \leq k$.

Mostramos que $a_{k+1} = 2\times(k + 1) - 1 = 2k + 1$. Se $k = 1$, então $a_{k+1} = a_2 = 2 \times 1 + 1 = 3$.

Desde $a_2 = 3$, segue-se que $a_{k+1} = 2k + 1$ quando $k = 1$.

Portanto, podemos assumir que $k \geq 2$.

Desde $k + 1 \geq 3$, segue-se que

$$A_{K+1} = 2A_K - A_{K-1} = 2\times(2K - 1) - (2K - 3) = 2K = 1$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

que é o resultado desejado.

Pelo Princípio Forte da Indução Matemática,

$$A_N = 2N - 1 \text{ PARA TODOS OS } N \in \mathbb{N}. \text{ C.Q.D.}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

ANÁLISE DA INDUÇÃO

Alguns comentários sobre a demonstração do Resultado 4.7 estão em ordem. Em um ponto, nós assumimos para um inteiro positivo arbitrário k que $a_i = 2i - 1$ para todos os inteiros i com $1 \leq i \leq k$. Nosso objetivo era mostrar que $a_{k+1} = 2k + 1$.

Uma vez que k é um inteiro positivo, pode ocorrer que $k = 1$ ou $k \geq 2$. Se $k = 1$, então precisamos mostrar que $a_{k+1} = a_2 = 2 \times 1 + 1 = 3$. Que $a_2 = 3$ é conhecido porque esse é um dos valores iniciais.

Se $k \geq 2$, então $k + 1 \geq 3$ e a_{k+1} pode ser expresso como $2a_k - a_{k-1}$ pela relação de recorrência. Para mostrar que $a_{k+1} = 2k + 1$ quando $k \geq 2$, era necessário saber que $a_k = 2k - 1$ e que $a_{k-1} = 2\times(k - 1) - 1 = 2k - 3$.

Porque estávamos usando o Princípio Forte da Indução Matemática, sabíamos ambas as informações. Se tivéssemos usado o Princípio da Indução Matemática, então teríamos assumido (e, portanto, sabíamos) que $a_k = 2k - 1$, mas não teríamos sabido que $a_{k-1} = 2k - 3$, e assim teríamos sido incapazes de estabelecer a desejada expressão para a_{k+1}.

VERIFICANDO O APRENDIZADO

CONCLUSÃO

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Abordamos, neste conteúdo, diferentes métodos de demonstração matemática, desde o método trivial ao princípio da indução, passando por contradição e redução ao absurdo.

Existe uma preocupação no ensino da matemática quanto aos conceitos que os alunos estão aprendendo, e se há treinamento em lógica e métodos de demonstração necessários e suficientes para suas demandas profissionais.

Essas habilidades são essenciais se lhes for pedido para desenvolver qualquer coisa nova em matemática para a engenharia e em ciência de computação. O raciocínio lógico é obrigatório quando esperamos encontrar um bom cientista teórico, experimentalista ou engenheiro — ou até mesmo um bom advogado ou cientista social.

Esperamos que este conteúdo tenha construído uma ponte para esse conhecimento, que, às vezes, pode parecer um abismo intelectual difícil de ser atravessado.

PODCAST

PODCAST

No podcast a seguir, o especialista aborda a importância do estudo de técnicas de Demonstração nas áreas de Ciências Exatas.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. **Iniciação à Lógica Matemática**. 16ª Edição, São Paulo: Editora Nobel, 1999.

SOARES, F. S. C. S. *et al*. **Lógica para Computação**. 2ªEdição, São Paulo: Cengage Learning, 2017.

SOUZA, J. N. **Lógica para Ciência da Computação**. 3º Edição, São Paulo: GEN LTC, 2014.

GERSTING, J. L. **Fundamentos matemáticos para a Ciência da Computação**. 4.ed. São Paulo: LTC, 2001.

CHANG, C. *et al.* **Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving**. Cambridge: Ed Academic Press, 1973.

ENDERTON, H. A **Mathematical Introduction to Logic**. 2 Ed. Cambridge: Ed Academic Press, 2001.

EXPLORE+

O logicismo, o formalismo e o intuicionismo e os diferentes modos de pensar a lógica matemática tiveram, como pano de fundo, o método de demonstração matemática como objeto central.

Que tal explorar essas discussões e buscar seu posicionamento diante delas?

Pesquise o trabalho da filósofa portuguesa Olga Pombo sobre a lógica e do logicismo em seminários na Universidade de Lisboa.

Busque, também, como Pedro Antonio Dourado de Rezende aborda o logicismo, o formalismo e o intuicionismo em sua palestra: **A crise nos fundamentos da matemática e a Teoria da Computação**.

Se você se interessa em conhecer mais sobre o uso da indução matemática no projeto e análise de algoritmos, há vários materiais instrucionais disponíveis sobre o assunto **Projeto de Algoritmos e Indução Matemática**, faça uma busca!

CONTEUDISTA

Manuel Ramos de Freitas

CURRÍCULO LATTES