Teoria dos conjuntos

REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTOS

O conceito intuitivo de **conjunto** é estabelecido desde que somos ainda muito crianças:

O conjunto dos meus brinquedos, o conjunto das pessoas de minha família, o conjunto de meus amigos de turma, e assim por diante.

Naturalmente, na medida em que amadurecemos, travamos contato com conjuntos mais abstratos, aí incluídos os conjuntos numéricos e, além disso, conjuntos *finitos* e *infinitos*.

Assim, temos:

- O conjunto dos números pares positivos.
- O conjunto de todos os pontos de uma circunferência.
- O conjunto dos pontos do gráfico de uma reta cuja equação é $\mathbf{y = x + 1}$.

O importante, de fato, é estabelecermos uma escrita mais formal e adequada para descrever conjuntos, sejam tais conjuntos finitos ou infinitos.

Representação explícita de conjuntos

Uma das formas usuais de descrever um conjunto é, simplesmente, enumerando seus objetos entre um par de chaves, separando-os por vírgulas ou, preferencialmente, por ponto e vírgula – para evitar que nosso separador decimal — a vírgula — cause ambiguidades.

A = { 1, 2, 3, 4 }
Observe que, usando o separador vírgula, não podemos distinguir se os objetos do conjunto são os inteiros de 1 a 4 ou os dois números decimais 1,2 e 3,4, por exemplo. Por essa razão, em português, sempre que houver possibilidade de dúvida, preferimos utilizar o separador ponto e vírgula.

B = { 1; 3; 9; 7; 5 }

Conjunto cujos elementos (objetos) que o compõem são os números ímpares entre 0 e 10.

Note que em um conjunto não existe o conceito de ordem. Fazendo uma analogia: Tudo se passa como se tivéssemos os objetos de um conjunto em uma caixa e os listássemos em qualquer ordem, entre o par de chaves. Mas sempre que fizer sentido listá-los em ordem crescente ou decrescente (quando seus objetos são números, por exemplo), facilitará a percepção de seus elementos, caso haja alguma lei de formação que os descreva.

C = { 1,7; 1,3; 1,5; 1,1; 1,9 }
Os valores dos 5 primeiros termos de uma progressão aritmética de razão 0,2 e menor termo igual a 1,1.

D= { 1; 4; 9; 16; 25; 36; ... }

Observe que a descrição desse conjunto sugere que desejamos descrever uma infinidade de elementos: Os tais três pontinhos, ao final, sugerem que estamos interessados nos quadrados de todos os números inteiros.

Convém ressaltar que essa forma de representar conjuntos infinitos só é indicada quando a lei de formação de seus elementos é natural, simples e não uma charada, como o exemplo a seguir:

E = { 4; 13; 34; 73; 136; .... }

Nesse caso, há infinitas lei de formação possíveis, uma das quais é n3 + 2n + 1 percorrendo os inteiros 1, 2, 3, ... não sendo essa notação adequada. Adiante, analisaremos a chamada notação implícita para conjuntos, certamente mais adequada para situações dessa natureza.

Símbolo de Pertinência

Quando um objeto X é um dos elementos de um conjunto P , dizemos que X pertence a P e usamos o símbolo de pertinência, representado pela letra grega épsilon, estilizada: "∈". Assim: X ∈ P.

Caso X não seja um dos objetos do conjunto P, dizemos que X não pertence a P e escrevemos: X ∉ P.

X ∈ P = X pertence a P

X ∉ P = X não pertence a P

Exemplo

Perceba, em cada item, que cada pertinência indicada é, como assinalado, uma assertiva verdadeira (V) ou falsa (F).

12 ∈ { 4; 5; 10; 12; 18 } (V)

5 ∉ { 4; 5; 10; 12; 18 } (F)

7 ∉ { 4; 5; 10; 12; 18} (V)

√16 ∉ { 4; 5; 10; 12; 18} (F)

Representação Implícita de Conjuntos

A chamada notação implícita de conjuntos utiliza outra estratégia para se referir a seus elementos: exige que seja explicitada uma propriedade (chamada, na lógica, de sentença aberta) que descreva os objetos nos quais temos interesse. A forma usual é a que se segue, embora sejam utilizadas algumas variantes semelhantes:

A={x | p (x)}

que lemos, assim:

O conjunto dos objetos x tais que p(x)p(x) uma proposição verdadeira.

Relação de Inclusão entre Conjuntos

A representação pictórica (geométrica) de um conjunto, através de alguma figura simples, é extremamente útil.
Veja: Se X = { 1; 2; 3; 4; 5 }, a Figura 1 sugere que seu contorno delimita a representação de seus elementos, exibidos, por sua vez, como pontos:

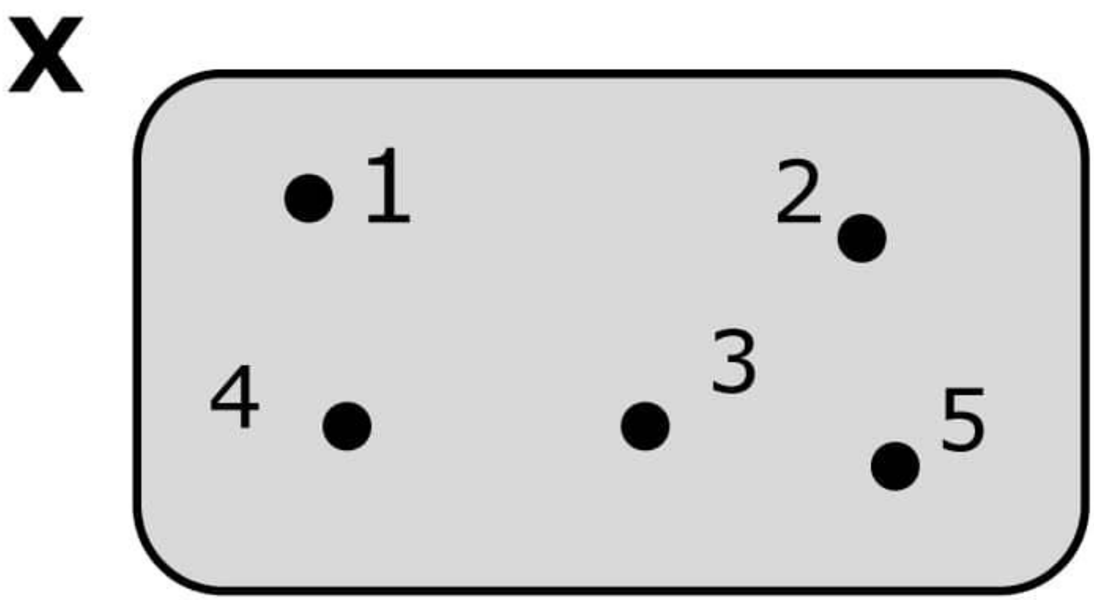


Figura 1

A figura a seguir, com o diagrama de Y contido no diagrama de X, sugere que todo elemento de Y é, também, um elemento de X.

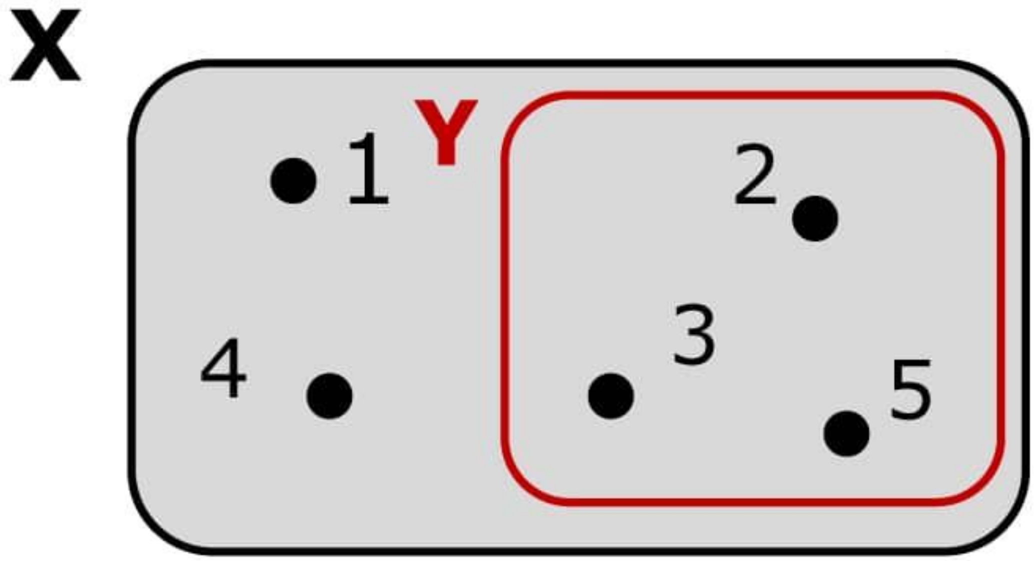


Figura 2

Essa situação é matematicamente representada pela relação de inclusão entre dois conjuntos, em que dizemos que “Y está contido em X” ou que “X contém Y”.

Representamos situações de inclusão com os sinais usuais: “⊂“ e “⊃“, assim:

X ⊂ Y ou Y ⊃ X,

que se lê: “X está contido em Y” ou “X é parte de Y”, no primeiro caso e, “Y contém X”, no segundo caso.

Note que a afirmação “todo elemento de Y é, também, um elemento de X” é válida quando os dois conjuntos X e Y são iguais, ou seja, possuem os mesmos elementos. Assim, para qualquer conjunto X, são válidas as relações X ⊂ X e X ⊃ X . Naturalmente, como usual na matemática, uma barra “/ ” em um sinal que relaciona objetos nega o referido relacionamento. Veja alguns sinais e suas negações:

1. **Igualdade e de desigualdade:**
   a = b e a ≠ b.
2. **Paralelismo e não paralelismo:**
   r||s e r ∦ s.
3. **Pertinência e não pertinência:**
   x ∈ X e x ∉ X.
4. **Inclusão e não inclusão:**
   X ⊂ Y X ⊄ Y.
5. **Continência (do verbo conter) e não continência:**

$Y \supset X$ e $Y \not\supset X$.

Exemplo

Analisando as relações apresentadas, verdadeiras, verifique cuidadosamente a justificativa apontada:

{ 1 ; 5 } ⊂ { 1 ; 2; 5; 6 }.
Porque todo elemento do conjunto { 1; 5 } – os números 1 e 5 são, também, elementos do conjunto { 1 ; 2; 5; 6 }.

{ 1 } ⊂ { 0; 1; 6 }.
Porque o único elemento do conjunto { 1 }, que é o número 1 é, ele também, um elemento do conjunto { 0; 1; 6 }.

{ 1; 3 } ⊄ { 1 ; 2; {3, 4}; 5; 6 }.
Embora o número 1, elemento do conjunto { 1; 3 }, seja também objeto do conjunto { 1 ; 2; {3, 4}; 5; 6 }, o número 3, o outro elemento do conjunto { 1; 3 } não é elemento do conjunto
{ 1 ; 2; {3, 4}; 5; 6 }

O conjunto Vazio

É extremamente útil para a Teoria dos Conjuntos, como veremos adiante, imaginar um conjunto sem elementos, o conjunto vazio.

Designamos tal conjunto pela letra “O ” cortada, assim: ∅. Ou, alternativamente, { }.

Veja que na analogia entre um conjunto e uma sacola de compras do supermercado, a sacola, sem nenhuma compra, representaria o conjunto vazio. É também útil considerar que o conjunto vazio ∅ é subconjunto de qualquer conjunto X, ou seja, ∅ ⊂ X.

Embora a justificativa formal para essa relação seja pouco natural, podemos argumentar, intuitivamente, que, como não há elementos no conjunto ∅, é razoável supor que a afirmativa: todo elemento de ∅ é também um elemento de X, não é contrariada... Portanto, é lícito admitir que, para qualquer conjunto X, ∅ ⊂ X.

INTERVALOS NA RETA NUMÉRICA E VALOR ABSOLUTO

No estudo de conjuntos, dedicamos importância especial aos conjuntos numéricos, entre os quais os conjuntos básicos que se seguem:

Conjunto dos números naturais:

$\mathbb{N}$= { 1; 2; 3; ... };

Conjunto dos números inteiros:

$\mathbb{Z}$ = { 0; -1; 1; -2; 2; -3; 3; ... }

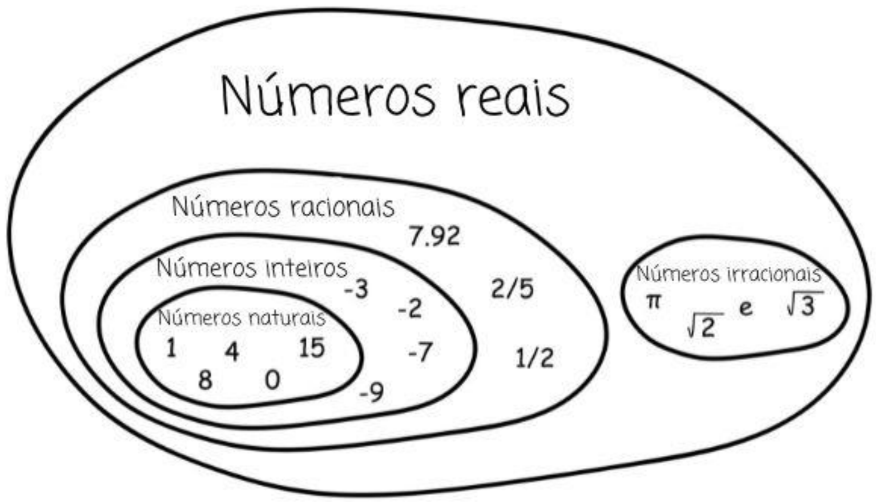
Conjunto dos números racionais:

$\mathbb{Q}$ = {-1/2;-2,5...;-0,3...}

Incluem, naturalmente, os números próprios inteiros, os números decimais exatos, tipo 0,37 e -3,78, por exemplo; e, também, os números cuja parte decimal formam dízimas periódicas.

Conjunto dos números reais:

A totalidade dos números reais é designada, como usual, pela letra $\mathbb{R}$



A reta real e os intervalos

Representamos os números reais, usualmente, em uma reta-eixo. Está implícito nessa representação o seguinte fato:

"Cada ponto da reta-eixo está associado a um único número real e vice-versa, a cada número real está associado um único ponto da reta-eixo".

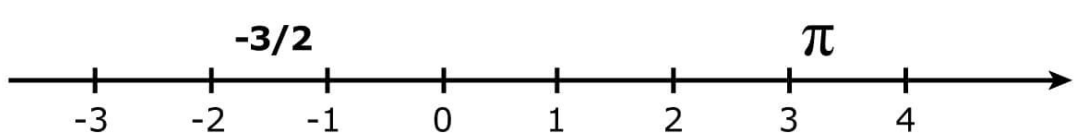


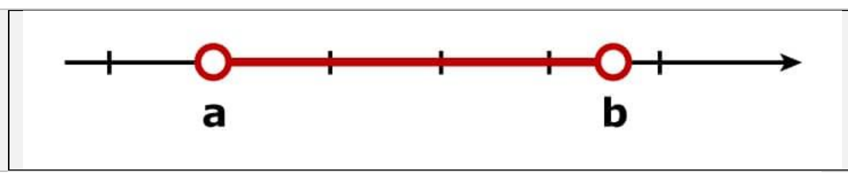
Figura 3

Como decorrência da "continuidade" dos números na reta-eixo, parece interessante imaginar um conjunto de números cuja representação geométrica seja um segmento de reta ou uma semirreta, com os valores das extremidades sendo ou não incluídos no conjunto desejado.

Tais conjuntos são exatamente os chamados intervalos, cujas convenções utilizadas nas representações gráficas e textuais relativas à inclusão ou não das extremidades estão descritas a seguir:

Sim	Intervalo fechado nessa extremidade	Círculo cheio	Colchetes
Não	Intervalo aberto nessa extremidade	Círculo vazado ou seta	Parênteses ou colchetes invertidos

A tabela a seguir ilustra diversas situações:

{x ∈ R| a < x < b}	**(a;b) ou]a;b[**	
{x ∈ R|a ≤ x < b}	**[a;b) ou [a;b[**	
{x ∈ R|x ≥ a}	**[a;+∞) ou [a;+∞[**	
{x ∈ R|x < b}	**(-∞;b) ou]-∞;b[**	

Valor absoluto

A criação do conceito de reta-eixo, genial, permite que associemos representações algébricas a representações geométricas, de maneira imediata.

Analisando a figura adiante, percebemos que a distância entre pontos associados a dois números na reta real pode ser calculada subtraindo-se o menor do maior.

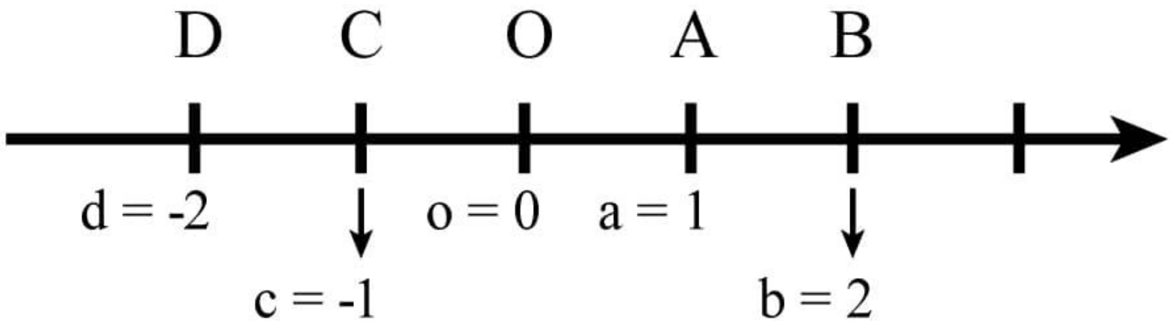


Figura 4

Ou seja, a distância entre os pontos A e B vale b-a. De forma análoga, podemos calcular as distâncias entre:

A e O

$a-o = 1-0=1$

C e D

$c-d=(-1-(-2=1))$

C e A

$a-c=1-(-1)=2$

Entretanto, como calcular, algebricamente, a distância de um número real (na verdade, o ponto associado) e a origem?

Essa distância é chamada de módulo do número x, e é representada por $|x|$. Claro que $|x|$ tem que ser um valor positivo, por ser uma distância. Então, para evitar a situação de número negativo nas diferenças x-0 ou 0-x, podemos usar duas possíveis expressões algébricas que tornam as diferenças (seja x ou -x) sempre positivas:

$$|x|= \sqrt{x2}$$

ou

$$|x|=x$$

se

$$x\geq 0$$

$|x|=-x$

se

$x<0$

Experimente atribuir valores positivos e negativos a x e calcule o resultado obtido pelas expressões indicadas.

Exemplo

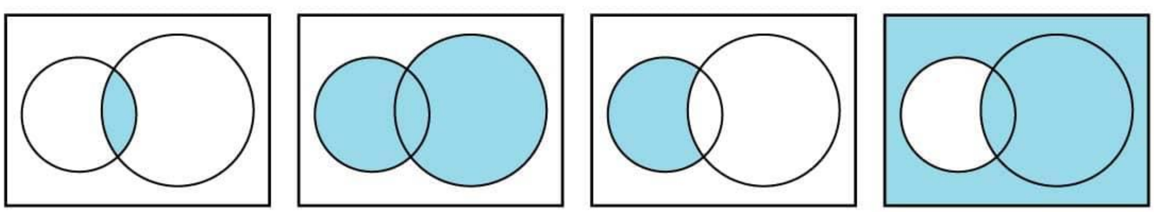
Determine o conjunto-solução das expressões indicadas:

$|x-1|=3$
Ora, note que a expressão modular $|x-1|$ corresponde a distância, na reta real, entre x e 1. Então, a nova pergunta é: Quais dos pontos do eixo distam 3 unidades de 1? Ora, à direita de 1, é o valor 1 + 3 = 4; e à esquerda de 1 é o valor 1 – 3 = -2. Então, o conjunto-solução dessa desigualdade é S = { 4; -2 }. Desenhe a reta real (Figura 3) para visualizar essa discussão.

$|2x-4|<3$
Inicialmente, convém dividir toda expressão por 2; obtemos $|x-2|<3/2$

Agora, a pergunta geométrica é: Quais xises distam de 2 menos do que 3/2? Naturalmente, os xises de interesse estão 3/2 à direita e à esquerda de 2, no máximo. Ou seja, entre 2 – 3/2 e 2 + 3/2, isto é, valores de x tais que $0,5 < x < 3,5$. Analise a discussão na reta real. Nesse caso, a resposta pode ser fornecida sob a forma de intervalo: S =] 0,5; 3,5 [.

OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS



Operação entre objetos matemáticos não são novidade: por exemplo, operações de adição e multiplicação de números reais; adição de vetores, composta de funções, e assim por diante. Para estudar as operações entre conjuntos é útil representá-los graficamente, utilizando os chamados Diagramas de Venn.

Diagramas de Venn

Uma particular discussão envolvendo conjuntos está, em geral, restrita a certa categoria de objetos, em um certo universo de discussão. Tal conjunto de objetos é chamado, apropriadamente de conjunto Universo (U) e, nesses casos, todos os conjuntos em discussão são, naturalmente, subconjuntos de U.

Quando resolvemos uma equação, estamos sempre com algum conjunto universo em mente: o conjunto dos números naturais; dos números racionais etc. Ou seja, nada fora do universo de discussão tem interesse naquele momento. Assim, se você encontrar, algebricamente, uma raiz igual a -4, para uma equação, mas o universo da discussão for o conjunto dos números naturais, tal raiz deve ser descartada. Ela é chamada de raiz estranha ao universo.

Então, quando desenhamos diagramas para conjuntos, no contexto de um conjunto universo U, todos os conjuntos em discussão são, naturalmente, subconjuntos do universo escolhido.

Na Figura 5, os conjuntos X e Y são restritos ao conjunto universo U escolhido e, então, seus diagramas estão contidos no diagrama de U.

X = { a; b; c; d; e; f; g } e
Y = { e; f; g; h; i; j; k},

O universo U de discussão é constituído pelas letras do alfabeto de a até p.

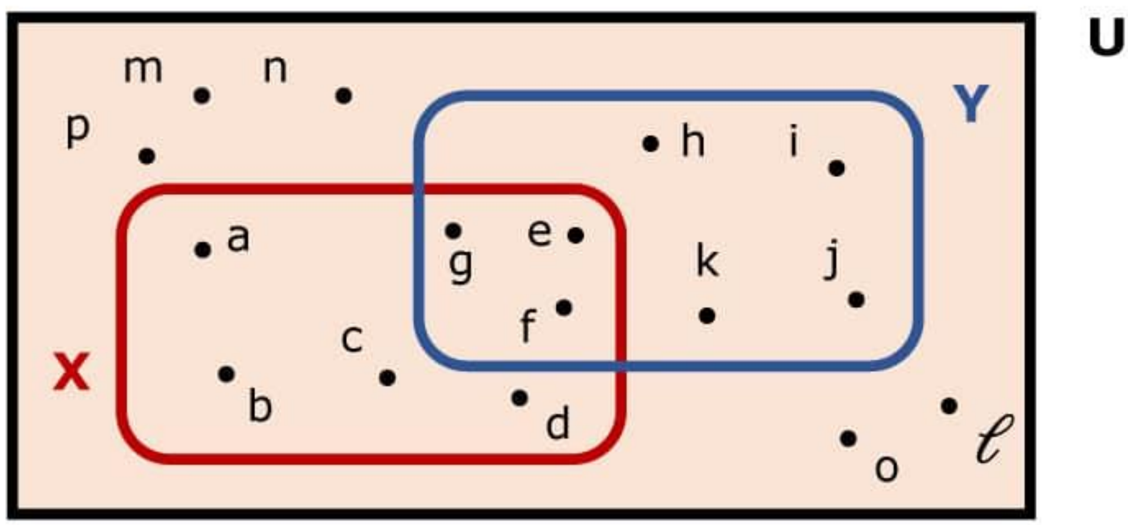
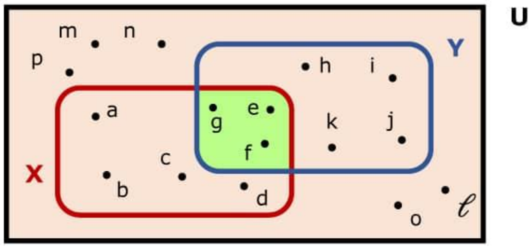
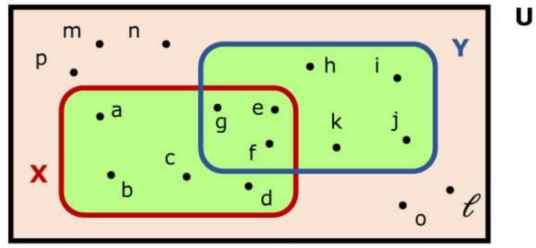


Figura 5

Note que as Figuras 6 e 7 indicam duas situações interessantes:





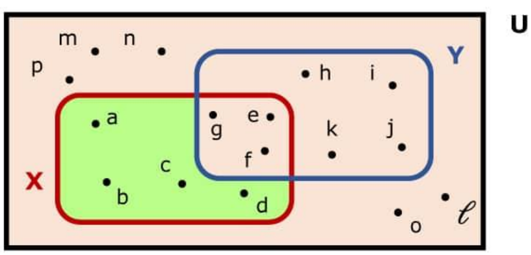
Figuras 6 e 7

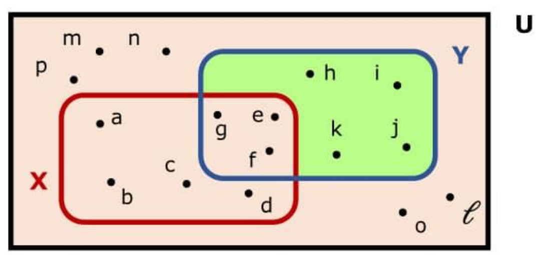
A Figura 6 sugere, em verde, os objetos que pertencem simultaneamente a X e Y. Esse novo conjunto, associado a esses objetos, é chamado de conjunto interseção de X e Y, e o representamos por X∩Y.

A Figura 7, entretanto, destaca em verde a totalidade dos objetos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos X ou Y, podendo, eventualmente, pertencer a ambos. O conjunto constituído por tais objetos é designado por união de X e Y e é representado por X∪Y.

As Figuras 8 e 9 sugerem, em verde, respectivamente, o conjunto dos objetos que pertencem a X, mas que, entretanto, não pertencem a Y, e o conjunto dos objetos que pertencem a Y, mas que não pertencem a X.

Como essa situação lembra o ato de retirar (no sentido de subtrair) de um dos conjuntos os objetos do outro, chamamos essa operação de diferença entre os conjuntos e, no exemplo, as representamos, respectivamente por X-Y(e Y - X).

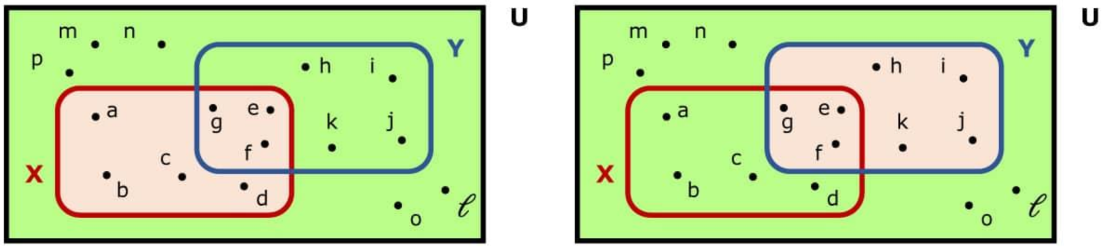




Figuras 8 e 9

Finalmente, é útil referenciar os objetos que não estão em dado conjunto, ou seja, objetos que estão fora do conjunto X (ou de Y) – mas, é claro, pertencem ao conjunto universo. Ora, essas situações, descritas nas Figuras 10 e 11, nada mais representam que as diferenças X - Y e U - Y.

Dada a importância dessas situações – determinar o que falta para um conjunto completar o conjunto universo, utilizamos uma nomenclatura adicional: Dizemos que, se Z é um conjunto, U-Z é o complementar de Z (claro, com relação ao conjunto universo), e escrevemos simplesmente Z’ (Z linha).



Figuras 10 e 11

Operações usuais entre conjuntos

A análise do Diagrama de Venn permite explicitar operações entre conjuntos mais formalmente. Assim, se A e B são conjuntos restritos ao universo U, temos:

$A \cap B = \{x \in U | x \in A \text{ e } x \in B\}$

$A \cup B = \{x \in U | x \in A \text{ ou } x \in B\}$

$A - B = \{x \in U | x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$A' = \{x \in U | x \notin A\}$

Exemplo

Determine, para cada um dos pares de conjuntos A e B indicados, os conjuntos união, interseção e as diferenças entre ambos:

A = { 1; 2; 3; -1; -5} e B = { -3; -2; 1; 3 }.

A =] − 1; 3] e B =] -∞; 1 [.

Clique na barra para ver o conteúdo.

SOLUÇÃO (IMEDIATA)

a)A∩B = { 1; 3 }
A∪B = { 1; 2; 3; -1; - 5; -3, -2 }
A-B = { 2; -1; -5 }
B-A = { -3; -2 }

b) A Figura 12 ilustra a solução:

A∩B =[-1;1[
A∪B=]-∞;3[
A-B=[1;3[e
B-A=]-1;1[

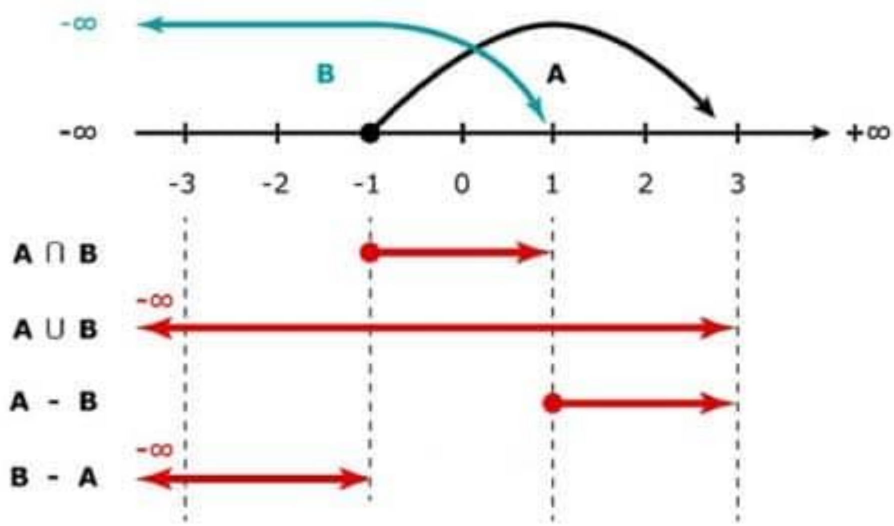


Figura 12