Tipos de funções: injetora, sobrejetora e bijetora

Funções injetoras

Definição

Uma função ƒ é dita injetora (ou injetiva) se, para quaisquer dois números a_1, $a_2 \in$ Dom (ƒ), tais que $a_1 \neq a_2$, os números $f(a_1)$ e $f(a_2)$ na imagem de ƒ são também distintos.

Exemplo 1

A função $f(x) = x^2 - 1$, definida para todos os números reais, é injetiva? Observe que: $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3 = 2^2 - 1 = f(2)$. Em outros termos, –2 e 2 têm a mesma imagem. Logo a representação gráfica fica da seguinte forma:

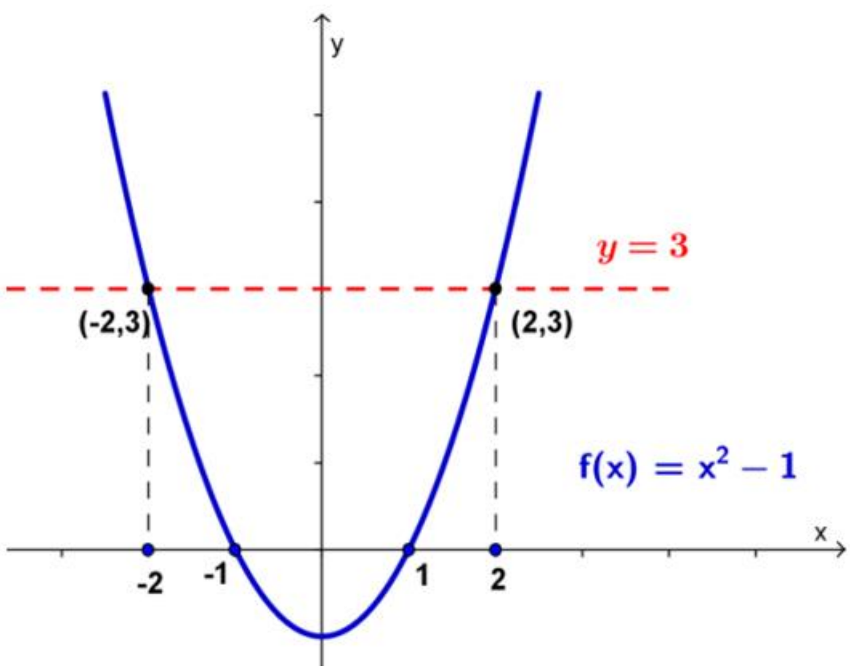


Gráfico: A função **ƒ** e reta horizontal **y = 3**.
Loisi Carla Monteiro Pereira

A partir da representação gráfica da função $f(x) = x^2 - 1$, é possível observar que há retas horizontais que intersectam seu gráfico mais de uma vez.

report_problem

Atenção!

Teste da reta horizontal

Uma função é injetiva se, e somente se, toda reta horizontal intersecta seu gráfico em, no máximo, um ponto.

Observe que, pelo teste da reta horizontal, a função do exemplo citado não é injetiva.

Exemplo 2

A função $g(x) = x^3$ é injetiva, conforme consta no gráfico a seguir:

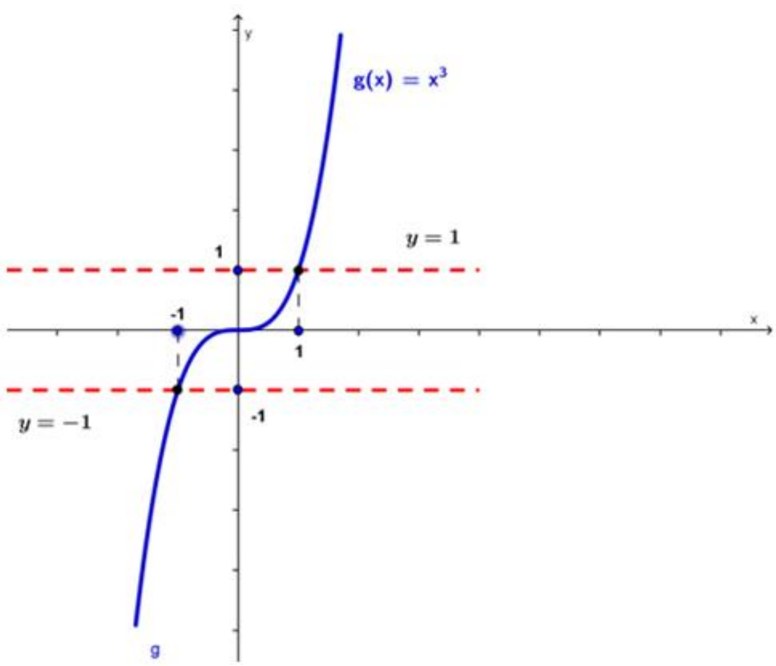


Gráfico: a função $g(x) = x^3$
Loisi Carla Monteiro Pereira

Qualquer reta horizontal intersecta o gráfico em apenas um ponto. Logo, pelo teste da reta horizontal, a função **g** é injetiva.

Sobrejetoras

Se $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subset \mathbb{R}$, uma função f: $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ é chamada sobrejetora ou sobrejetiva, quando $f(A) = B$.

Repare que, quando restringimos o contradomínio de uma função para sua imagem, ou seja,
f: $Dom(f) \rightarrow f(\mathrm{Dom}(f))$, estamos garantindo que não há qualquer elemento do contradomínio que não seja imagem de algum elemento do domínio. Assim, essa é uma forma de garantir que a função seja sobrejetiva.

Bijetoras

Uma função f, que é simultaneamente injetora e sobrejetora, é chamada de bijetora ou bijetiva.

Assim, a função f: $Dom \rightarrow f(\mathrm{Dom}(f))$ (que já é sobrejetora) será bijetora se, e somente se, for injetora.

Relação geométrica entre os gráficos de uma função e sua inversa

O objetivo é mostrar graficamente a relação existente entre o gráfico de uma função bijetora e sua inversa.

Atenção!

Lembre-se de que uma função ter inversa é equivalente a ela ser bijetiva.

Sintetizamos algumas informações sobre uma função f e sua inversa f^{-1}, a seguir:

$$f : A \to B \text{ e } f^{-1} : B \to A$$

$$\text{se } f \text{ 'leva' } \boldsymbol{a} \text{ em } \boldsymbol{b} \text{ então } \boldsymbol{f}^{-1} \text{ 'traz' } \boldsymbol{b} \text{ 'de volta' em } \boldsymbol{a}$$

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Im}\left(f^{-1}\right) \text{ e } \mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Im}(f)$$

É preciso notar que:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

Mas, o que essa equivalência significa geometricamente? Que o ponto (a , b) estar no gráfico da função f é equivalente ao ponto (a , b) estar no gráfico da função f^{-1}:

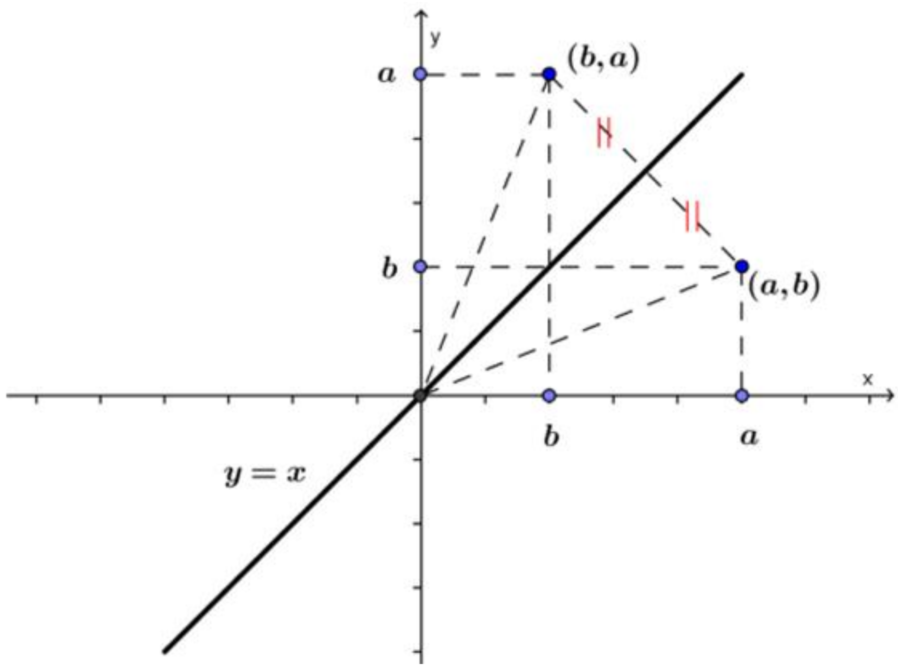


Gráfico: Simetria dos pontos (�,�) e (�,�) em relação à reta �=�
Loisi Carla Monteiro Pereira

No gráfico, percebemos que os pontos $(a\ ,\ b)$ e $(b\ ,\ a)$ são simétricos em relação à reta y = x. Mas, isso é verdade para todos os pontos das funções ƒ e $ƒ^{-1}$.

O gráfico de $ƒ^{-1}$ é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta y = x, conforme a seguir:

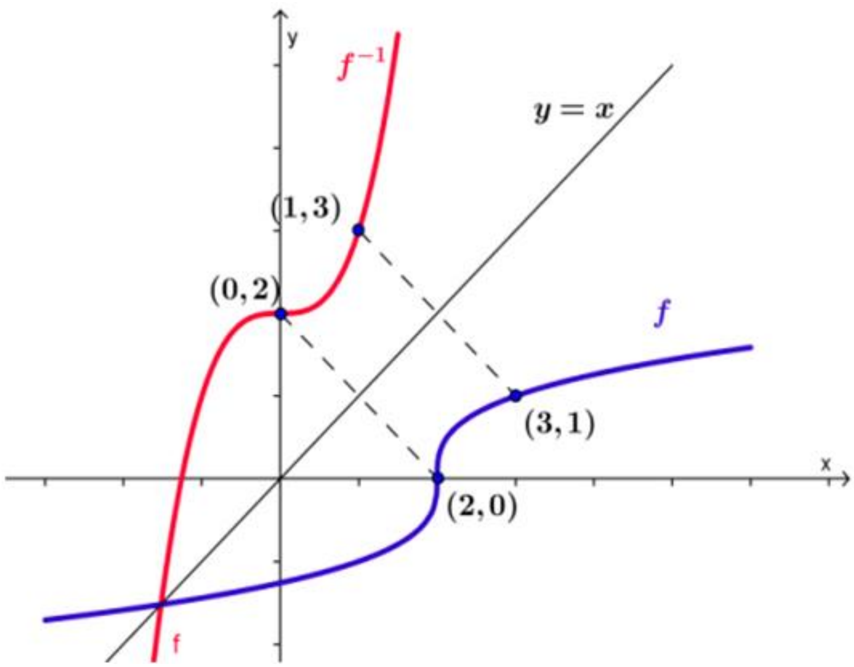


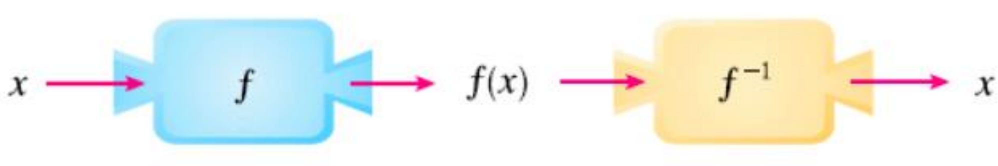
Gráfico: Simetria entre os gráficos de � e �−1
Loisi Carla Monteiro Pereira

Se f e g forem funções inversas entre si, temos:

$$x = f^{-1}(f(x))$$

$$y = f\left(f^{-1}(y)\right)$$

A lei da esquerda nos diz que, se começarmos em x, aplicando f, e, em seguida, f^{-1}, obteremos de volta x. Veja a seguinte imagem:



Resultado �

Da mesma forma, a lei da direita nos diz que, se começarmos em y, aplicando f^{-1}, e, em seguida, f, obteremos de volta y.