PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

Seja A um conjunto de números reais. Um número $m \in A$ é chamado de elemento mínimo (ou menor) de A se $x \geq m$ para cada $x \in A$. Alguns conjuntos não vazios de números reais têm um elemento menor; outros não.

O conjunto N tem um menor elemento, ou seja, 1, enquanto Z não tem menor elemento. O intervalo fechado $[2, 5]$ tem o mínimo elemento 2, mas o intervalo aberto $(2, 5)$ não tem elemento mínimo. O conjunto $A = \{1/n : n \in N\}$ também não tem menor elemento.

Se um conjunto não vazio A de números reais tem um elemento menor, então esse elemento é necessariamente único. Vamos verificar esse fato. Lembre-se de que, ao tentar demonstrar que um elemento que possui uma determinada propriedade é único, é costume assumir que há dois elementos com essa propriedade. Em seguida, vamos demonstrar que esses elementos são iguais, implicando que há exatamente um desses elementos.

Teorema 4.1

Se um conjunto A de números reais tem um elemento menor, então A tem um elemento menor que é único.

Demonstração:
Sejam m e n os menores elementos de A. Uma vez que m é um elemento menor, $n \geq m$. Além disso, desde que n é um elemento menor, $m \geq n$. Portanto, $m = n$. C.Q.D.

A demonstração que demos do Teorema 4.1 é uma demonstração direta.

Há uma propriedade de grande interesse para conjuntos numéricos, em geral. Vejamos.

Um conjunto não vazio S de números reais é dito ser **bem ordenado** se cada subconjunto de S tem um elemento menor. Seja $S = \{-7, -1, 2\}$. Os subconjuntos não vazios de S são $\{-7, -1, 2\}$, $\{-7, -1\}$, $\{-7, 2\}$, $\{-1, 2\}$, $\{-7\}$, $\{-1\}$ e $\{2\}$.

Embora possa parecer evidente que o conjunto N de inteiros positivos é bem ordenado, essa afirmação não pode ser demonstrada a partir das propriedades de inteiros positivos que usamos intuitivamente. Consequentemente, essa afirmação é aceita como um axioma adicional, como indicado a seguir.

Axioma: Princípio da Boa Ordenação
O conjunto N de inteiros positivos é bem ordenado.

Uma consequência do Princípio da Boa Ordenação é outro princípio, que serve como base para outra e importante técnica de demonstração.

Teorema 4.2 (Princípio da Indução Matemática)

Para cada inteiro positivo *n*, seja *P(n)* ser uma declaração. Se *(1) P(1)* é verdadeiro e *(2)* a implicação

Se *P(k)*, então *P(k + 1)* é verdade para cada inteiro positivo *k*, então *P(n)* é verdadeiro para cada inteiro positivo *n*.

Demonstração:
Suponha, pelo contrário, que o teorema é falso. Em seguida, as condições *(1)* e *(2)* são satisfeitas, mas existem alguns inteiros positivos *n* para os quais *P(n)* é uma afirmação falsa.

Faça

$$S = \{n \in N: P(n) \text{ é falso } \}$$

Uma vez que *S* é um subconjunto não vazio de *N*, ele segue pelo Princípio de Boa ordenação, e que *N* contém um elemento mínimo *S*.

Uma vez que *P(1)* é verdadeiro, $1 \notin S$. Assim, $s \geq 2$ e $s - 1 \in N$.

Portanto $s - 1 \notin S$ e assim *P(s − 1)* é uma declaração verdadeira.

Por condição *(2)*, *P(2)* também é verdadeiro e assim $s \notin S$. Isso, no entanto, contradiz nossa suposição de que $s \in S$. C.Q.D.

O Princípio da Indução Matemática é declarado mais simbolicamente abaixo.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Para cada inteiro positivo *n*, seja *P(n)* uma declaração. Se *(1) P(1)* é verdadeiro e *(2)* $\forall k \in N, P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, é verdade, então $\forall n \in N$, *P(n)* é verdade.

Como consequência do Princípio da Indução Matemática, a declaração quantificada $\forall n \in N$, *P(n)* pode ser demonstrada ser verdade se *(1)* podemos mostrar que a declaração *P(1)* é verdadeira e *(2)* podemos estabelecer a verdade da implicação

Se *P(k)*, então *P(k + 1)* para cada inteiro positivo *k*.

Uma demonstração usando o Princípio da Indução Matemática é chamada de demonstração de indução ou de demonstração por indução.

A verificação da validade de *P(1)* em uma demonstração de indução é chamada a etapa-base ou a âncora da indução. Na implicação

Se $P(k)$, então $P(k + 1)$.

para um inteiro positivo arbitrário k, a instrução $P(k)$ é chamada de hipótese indutiva (ou indução). Muitas vezes usamos uma demonstração direta para verificar

$$\forall k \in N, P(k) \Rightarrow P(k + 1) \quad (4.1)$$

embora qualquer técnica de demonstração seja aceitável. Ou seja, normalmente assumimos que a hipótese indutiva $P(k)$ é verdadeira para um inteiro positivo arbitrário k e para tentar mostrar que $P(k + 1)$ é verdade. Estabelecer a validade de (4.1) é chamado de passo indutivo na demonstração por indução.

Ilustramos essa técnica de demonstração mostrando que a soma dos n primeiros inteiros positivos é dada pela expressão $n\times (n+1)/2$

para qualquer inteiro positivo n, ou seja, $1 + 2 + 3 + . . . + n = n\times(n+1)/2$

Resultado 4.3

Faça

$$P(n): 1 + 2 + 3 + . . . + n = n\times(n+1)/2$$

onde $n \in N$. Então $P(n)$ é verdadeiro para cada inteiro positivo n.

Demonstração:

Nós empregamos indução. Faça $1 = (1x2)/2$

, logo a declaração $P(1)$ é verdadeira.

Assuma que $P(k)$ é verdadeira para um inteiro positivo arbitrário k, ou seja, que:

$$1 + 2 + 3 + . . . + k = k\times(k+1)/2$$

Mostramos que $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, mostramos que:

$$1 + 2 + 3 + . . . + k = (k+1)x(k+2)/2$$

Assim:

$$1 + 2 + 3 + . . . + (k + 1) = (1 + 2 + 3 + . . . + k) + (k + 1)$$

$$(k+1)x(k+2)/2$$

$$= k\times(k+1)/2 + (k + 1) = [kx(k+1)+2x(k+1)]/2$$

$$= (k+1)x(k+2)/2$$

como desejado.

Pelo Princípio da Indução Matemática, $P(n)$ é verdadeiro para cada inteiro positivo n.
C.Q.D.

Análise da Demonstração:
Na demonstração do Resultado 4.3, começamos afirmando que a indução foi usada. Isso alerta o leitor sobre o que esperar na demonstração. Além disso, na demonstração do passo indutivo, presume-se que $1 + 2 + 3 + . . . + k = k \times(k+1)/2$

para um inteiro positivo k, isto é, para um inteiro positivo arbitrário k.

Nós não assumimos que $1 + 2 + 3 + . . . + k = k \times (k+1)/2$

para cada inteiro positivo k, assumindo o que estamos tentando demonstrar no resultado 4.3.

Resultado 4.4

Para cada inteiro positivo n, $1^2 + 2^2 + . . . + k^2 =$

.nx(n+1)x(2n+1)/6

Demonstração:
Vamos proceder por indução.

Fazendo $n = 1$ obtemos $1^2 = (1x2x3)/6 = 1$, afirmação claramente verdadeira.

Vamos assumir que para algum k inteiro positivo temos:

$$1^2 + 2^2 + . . . + k^2 = kx(k+1)x(2k+1)/6 \text{ (*)}$$

Devemos mostrar que $P(k + 1)$ é também verdadeiro.

Temos:

$$1^2 + 2^2 + . . . + (k + 1)^2 = kx(k+1)x(2k+1)/6$$

$$= [1^2 + 2^2 + . . . + k^2] + (k + 1)^2$$

$$= kx(k+1)x(2k+1)/6 + (k + 1)^2$$

$$= kx(k+1)x(2k+1)/6 + 6(k+1)^2/6$$

$$= (k+1)\times [kx(2k+1)+6(k+1)]/6$$

$$= (k+1) \text{ x } (2K^2 + 7k + 6)/6$$

[de (*) e da linha anterior]

$$=(k+1)x(k+2)x(2k+3)/6$$

como desejado.

Pelo Princípio da Indução Matemática, $1^2 + 2^2 + . . . + n^2 = nx(n+1)x(2n+1)/6$

para qualquer inteiro positivo *n*. C.Q.D.

Estritamente falando, a última frase na demonstração do Resultado 4.4 é típica da última sentença de cada demonstração, usando indução matemática, em que a ideia é mostrar que a hipótese do Princípio da Indução Matemática está satisfeita e assim a conclusão segue.

Alguns, portanto, omitem essa frase final, uma vez que se entende que uma vez que as propriedades *(1)* e *(2)* do Teorema 4.2 estão satisfeitas, tem-se uma demonstração.

Para enfatizar, vamos continuar a incluir essa sentença final, no entanto.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FORTE

Há uma outra forma de indução matemática. Esse princípio atende por muitos nomes: Princípio da Indução Forte; Forte Princípio da Indução Matemática; Forma Forte de Indução; Forma Suplente de Indução Matemática; e Segundo Princípio da Indução Matemática são nomes comuns.

Teorema 4.5 (O Princípio Forte da Indução Matemática)

Em cada inteiro positivo *n*, temos:

P(n) seja uma declaração. Se

a) *P(1)* é verdadeira e

b) A implicação:

Se *P(i)* para cada inteiro *i* com $1 \le i \le k$, então *P(k + 1)* é verdadeira para cada inteiro positivo *k*, então *P(n)* é verdadeiro para cada inteiro positivo *n*.

Como o Princípio da Indução Matemática (Teorema 4.2), o Princípio Forte da Indução Matemática também é uma consequência do Princípio de Boa Ordenação.

O Princípio Forte da Indução Matemática é agora declarado mais simbolicamente a seguir:

Princípio Forte de Indução Matemática
Para cada inteiro positivo *n*, seja *P(n)* uma declaração.

Se *(1) P(1)* é verdadeiro e *(2)* $\forall k \in N$, $P(1) \wedge P(2) \wedge . . . \wedge P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ é verdade, então $\forall n \in N$, *P(n)* é verdade.

A diferença nas declarações do Princípio da Indução Matemática e do Princípio Forte da Indução Matemática está na etapa indutiva (condição 2).

Para demonstrar que $\forall n \in N$, *P(n)* é verdade pelo Princípio da Indução Matemática, é necessário mostrar que *P(1)* é verdadeiro e verificar a implicação:

_P(k)_, então _P(k + 1)_ (4.2)

é verdade para cada inteiro positivo *k*. Por outro lado, para demonstrar que $\forall n \in N$, *P(n)* é verdade pelo Princípio Forte da Indução Matemática, somos obrigados a mostrar que *P(1)* é verdadeiro e para verificar a implicação:

Se _P(i)_ para cada _i_ com $1 \leq i \leq k$, então _P(k + 1)_ . (4.3)

é verdadeiro para cada inteiro positivo *k*.

Se fôssemos dar demonstrações diretas das implicações (4.2) e (4.3), então nos é permitido assumir mais na etapa indutiva (4.3) do Princípio Forte da Indução Matemática do que na etapa de indução (4.2) do Princípio de Indução Matemática e ainda obter a mesma conclusão.

Se a suposição de que *P(k)* é verdadeiro é insuficiente para verificar a verdade de *P(k + 1)* para um inteiro positivo arbitrário *k*, mas a suposição de que todas as declarações *P(1)*, *P(2)*, para verificar a verdade de *P(k + 1)* é suficiente, então isso sugere que devemos usar o Princípio Forte de Indução Matemática.

De fato, qualquer resultado que possa ser demonstrado pelo Princípio da Indução Matemática também pode ser demonstrado pelo Forte Princípio Forte da Indução Matemática.

Assim como há uma versão mais geral do Princípio da Indução Matemática (ou seja, Teorema 4.2), há uma versão mais geral do Princípio Forte da Indução Matemática. Também nos referiremos a isso como o Forte Princípio da Indução Matemática.

Teorema 4.6 (O Forte Princípio da Indução Matemática)

Para um inteiro fixo m, seja $S = \{i \in Z: i \geq m\}$. Para cada $n \in S$, que $P(n)$ seja uma declaração. Se *(1)* $P(m)$ é verdadeiro e *(2)* a implicação

Se $P(i)$ para cada inteiro i com $m \leq e \leq k$, então $P(k + 1)$ é verdadeiro para cada inteiro $k \in S$, então $P(n)$ é verdadeiro para cada inteiro $n \in S$.

Agora consideramos uma classe de declarações matemáticas onde o Princípio Forte de Indução Matemática é comumente a técnica de demonstração apropriada.

Suponha que estamos considerando uma sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de números, também expressa como $\{ a_n \}$. Uma maneira de definir uma sequência $\{ a_n \}$ é especificar explicitamente o primeiro termo a_n (em função de n).

Por exemplo, podemos ter um

$$a_n = {}^1/_n, \text{ um } a_n = {}^{(-1)n}/_{n^2} \text{ ou } a_n = n^3 + n$$

$$\text{para cada } n \in N$$

Uma sequência também pode ser definida recursivamente. Em uma sequência recursivamente definida $\{ a_n \}$, apenas o primeiro termo ou talvez os primeiros termos são definidos especificamente, dizer $a_1, a_2, \ldots, a_k$ para alguns k fixo $\in N$. Estes são chamados de valores iniciais. Em seguida, $a_k + 1$ é expresso em termos de $a_1, a_2, \ldots, a_k$ e, mais geralmente, para $n > k$, 1 é expresso em termos de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Isso é chamado de relação de recorrência.

Um exemplo específico disso é a sequência $\{an\}$ definida por

$$\boldsymbol{a_1 = 1,\ a_2 = 3 \text{ e } a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \text{ para } n \geq 3}$$

Nesse caso, existem dois valores iniciais, ou seja, $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$.

A relação de recorrência aqui é $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Fazendo $n = 3$, descobrimos que $a_3 = 2a_2 - a_1 = 5$;

ao fazer $n = 4$, temos $a_4 = 2a_3 - a_2 = 7$.

Da mesma forma, $a_5 = 9$ e $a_6 = 11$.

A partir dessas informações, pode-se muito conjectura boa (palpite) que $a_n = 2n - 1$ para cada $n \in N$.

Usando o Forte Princípio da Indução Matemática, podemos, de fato, demonstrar que essa conjectura é verdadeira.

Resultado 4.7

Uma sequência $\{ a_n \}$ é definida recursivamente por:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3 \text{ e } a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

Em seguida,

$$a_n = 2n - 1 \text{ para todos os } n:$$

Nós procedemos por indução.

Desde $a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$, a fórmula mantém para $n = 1$.

Assuma por um inteiro positivo arbitrário k que $a_i = 2i - 1$ para todos os inteiros i com $1 \leq i \leq k$.

Mostramos que $a_{k+1} = 2\times(k + 1) - 1 = 2k + 1$. Se $k = 1$, então $a_{k+1} = a_2 = 2 \times 1 + 1 = 3$.

Desde $a_2 = 3$, segue-se que $a_{k+1} = 2k + 1$ quando $k = 1$.

Portanto, podemos assumir que $k \geq 2$.

Desde $k + 1 \geq 3$, segue-se que

$$a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} = 2\times(2k - 1) - (2k - 3) = 2k = 1$$

que é o resultado desejado.

Pelo Princípio Forte da Indução Matemática,

$$a_n = 2n - 1 \text{ para todos os } n \in N. \text{ C.Q.D.}$$

Análise da Indução

Alguns comentários sobre a demonstração do Resultado 4.7 estão em ordem. Em um ponto, nós assumimos para um inteiro positivo arbitrário k que $a_i = 2i - 1$ para todos os inteiros i com $1 \leq i \leq k$. Nosso objetivo era mostrar que $a_{k+1} = 2k + 1$.

Uma vez que k é um inteiro positivo, pode ocorrer que $k = 1$ ou $k \geq 2$. Se $k = 1$, então precisamos mostrar que $a_{k+1 = a2} = 2 \times 1 + 1 = 3$. Que $a_2 = 3$ é conhecido porque esse é um dos valores iniciais.

Se $k \geq 2$, então $k + 1 \geq 3$ e a_{k+1} pode ser expresso como $2a_k - a_{k-1}$ pela relação de recorrência. Para mostrar que $a_{k+1} = 2k + 1$ quando $k \geq 2$, era necessário saber que $a_k = 2k - 1$ e que $a_{k-1} = 2\times(k - 1) - 1 = 2k - 3$.

Porque estávamos usando o Princípio Forte da Indução Matemática, sabíamos ambas as informações. Se tivéssemos usado o Princípio da Indução Matemática, então teríamos assumido (e, portanto, sabíamos) que $a_k = 2k - 1$, mas não teríamos sabido que $a_{k-1} = 2k - 3$, e assim teríamos sido incapazes de estabelecer a desejada expressão para a_{k+1}.