Principios de contagem

PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

O Princípio da Casa dos Pombos é, sem dúvida, um dos enunciados mais poderosos e interessantes da matemática da contagem. Surpreendente, possibilita a solução de problemas muitas vezes difíceis de abordar de uma forma elegante e simples.

Se n pombos devem ser colocados em m casas, com n > m,

Ilustração desse princípio, para n = 10 e m = 9

Exemplo 1

Um exemplo clássico e divertido da aplicação do Princípio da Casa dos Pombos é o que se segue:

Mostre que, em uma cidade de um milhão de habitantes (por exemplo), pelo menos dois habitantes possuem o mesmo número de fios de cabelo.

RESOLUÇÃO

Uma rápida consulta à web informa que o número de fios de cabelo de uma pessoa é por volta de 150.000, não ultrapassando 200.000. Ora, imagine 200.000 casas, numeradas de 1 a 200.000, onde as pessoas com m fios de cabelo serão colocadas na casa m.

Estamos diante da imediata aplicação do Princípio da Casa dos Pombos: O número de pessoas (os pombos) vale n = 1.000.000; logo, é maior do que m = 200.000 (número de casas). Então haverá mais de um pombo (pessoa) na mesma casa, ou seja, com o mesmo número de fios de cabelo.

Exemplo 2

Dados 12 números inteiros, mostre que, necessariamente, a diferença entre dois deles tem que ser divisível por 11.

Clique no botão para ver a resolução.

RESOLUÇÃO

Imagine os restos da divisão de cada um dos 12 números por 11. Como na divisão por 11 os restos são, necessariamente, números entre 0 e 10, então há apenas 11 restos diferentes (que serão associados a 11 casas, uma para cada resto). Logo, dois desses 12 números (os pombos, como no princípio) devem estar na mesma casa (mesmo resto quando divididos por 11). Mas se esses dois números deixam o mesmo resto quando divididos por 11, sua diferença é divisível por 11.

Exemplo 3

Mostre que, se em quadrado de lado igual a 2cm há 5 pontos em seu interior, dois deles, necessariamente, distam menos do que $\sqrt{2}$.

Clique no botão para ver a resolução.

RESOLUÇÃO

Esse é um problema curioso e clássico. Veja a Figura 13, em que dividimos o quadrado de lado 2cm em 4 quadrados iguais, de 1cm de lado cada um. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, certamente 2 dos 5 pontos devem estar em um desses 4 quadrados menores, como sugerem os pontos P1 e P2.

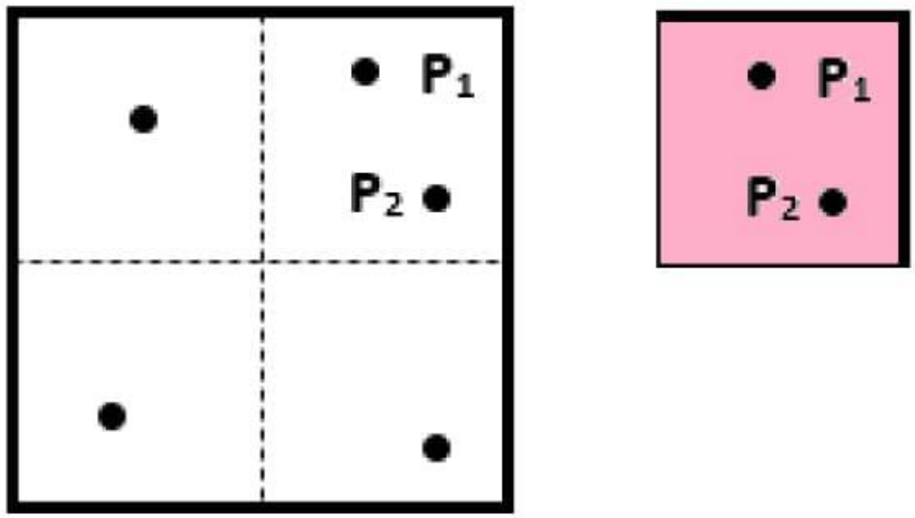


Figura 13

Além disso, como a maior distância entre dois pontos do quadrado menor é √2 (sua diagonal), o enunciado está provado.

PRINCÍPIO DA ADIÇÃO

O chamado Princípio da Adição, na sua forma mais simples, relaciona os quantitativos de elementos de **dois** conjuntos finitos com o quantitativo de elementos da sua união e de sua interseção.

Se indicarmos por **n(X)** o número de elementos do conjunto **X**, a figura sugere que:

$\mathbf{n(A\cup B) + n(A\cap B)= n(A)+n(B)}$, ou
$\mathbf{n(A\cup B)= n(A) + n(B) - n(A\cap B)}$

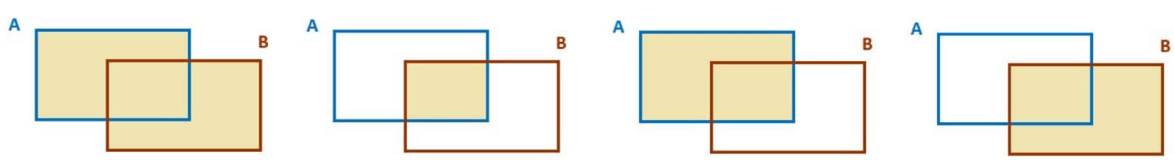
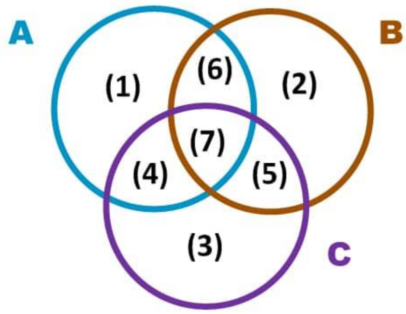


Figura 14

Se $\mathbf{A\cap B = \emptyset}$, então obtemos a versão mais comum do Princípio da Adição, que diz que, se dois conjuntos não possuem elementos em comum, vale a igualdade.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

No caso de três conjuntos, a análise do Diagrama de Venn a seguir auxilia as situações de contagem, bastando observar que os três conjuntos definem uma partição de no máximo 7 regiões disjuntas cuja união reproduz a união dos três conjuntos. Veja:



Subconjunto		Elementos que estão...
(1)	$A - (B \cup C)$	exclusivamente em A...
(2)	$B - (A \cup C)$	exclusivamente em B...
(3)	$C - (A \cup C)$	exclusivamente em C...
(4)	$(A \cap C) - B$	em A e em C, mas não em B
(5)	$(B \cap C) - A$	em B e em C, mas não em A
(6)	$(A \cap B) - C$	em A e em B, mas não em C
(7)	$A \cap B \cap C$	em A, B e C simultaneamente.

Figura 15

Exemplo

Em uma escola de idiomas, 200 são os alunos matriculados em algum dos idiomas inglês, alemão e mandarim. Desses, 50 estudam inglês e alemão; 60 estudam inglês e mandarim; 70 estudam alemão e mandarim e 20 estudam os três idiomas. Quantos alunos estudam apenas um dentre os três idiomas?

Clique no botão para ver a resolução.

RESOLUÇÃO

Chamando as quantidades de alunos de cada parte do diagrama de m, n, o, p, q, r e s, note que o enunciado informa diretamente a quantidade de elementos na interseção dos três conjuntos, ou seja, s = 20; analisando as diversas regiões do diagrama, podemos concluir, sucessivamente, que:

$s = 20$
$q + s = 50 \Rightarrow q = 30$
$p + s = 60 \Rightarrow p = 40$
$r + s = 70 \Rightarrow r = 50$

Mas a soma de todas as partes do diagrama (união dos três conjuntos) vale 200. Como desejamos calcular m + n + o, o resultado é imediato:
$m + n + o = 200 – (p + q + r + s) = 200 – (40 + 30 + 50 + 20) = 60.$

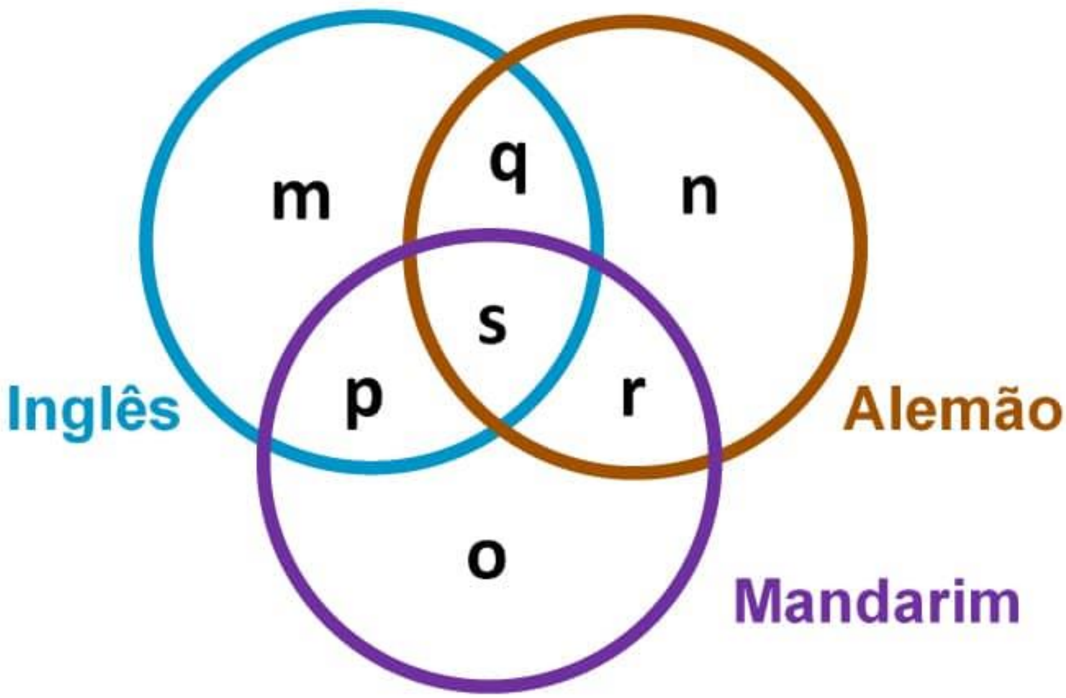


Figura 16

PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

Você sabia

O Princípio da Multiplicação é uma estratégia para contar o número total de casos possíveis, em situações em que ocorrem escolhas múltiplas, porém independentes.

Essa estratégia de contagem é bastante utilizada e, provavelmente, você já se deparou com um problema mais ou menos assim:

Uma criança possui 4 calças e 3 camisas. Considerando exclusivamente as possíveis escolhas de uma calça e de uma camisa, de quantas formas diferentes ela pode se vestir?

É importante perceber, nesse exemplo, que a escolha de uma calça e a escolha de uma camisa são ações independentes, no sentido de que a escolha de cada uma delas não interfere na escolha da outra – são chamadas de ações independentes.

Assim, supondo que as 4 calças sejam chamadas de A, B C e D e as camisas, de X, Y e Z, o desenho a seguir sugere que cada uma das 4 calças pode ser associada a cada uma das 3 camisas, possibilitando 4 x 3 = 12 escolhas diferentes. Veja a figura, a seguir:

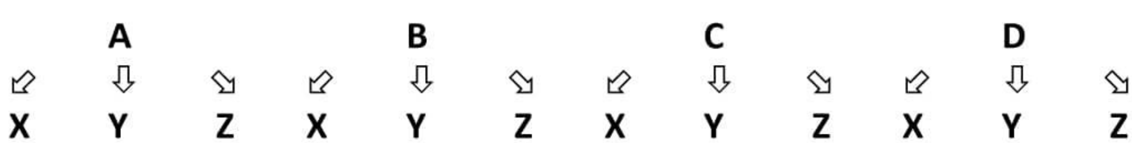


Figura 17

Esse diagrama é usualmente chamado de Árvore de Decisão, pois explicita as possíveis escolhas e, de cabeça para baixo, parece uma árvore cujos galhos explicitam os desdobramentos das situações que podem ocorrer.

O uso do Fatorial

É muito comum em problemas de contagem, de combinatória, ocorrerem produtos de inteiros consecutivos como o produto dos inteiros de 1 a 5, ou de 9 a 15, ou de 100 a 1000. Um conceito simples e muito útil para representar resultados como os produtos sugeridos é o uso do fatorial.

Se **n** é um número inteiro positivo, representamos por **n!** (ponto de exclamação) o produto de 1 a n, ou seja: n! = 1.2.3...n. Por exemplo, 3! = 1 x 2 x 3 = 6 e 6! = 1 x 2 x ... x 6 = 720.

Note que produtos de inteiros consecutivos, como 10 x 11 x 12 x 13 x 14, podem ser facilmente expressos com o uso de fatoriais. Veja:

$$\mathbf{10\times11\times12\times13\times14=1.2.3.4.5.6.7.8.91.2.3.4.5.6.7.8.9\times10.11.12.13.14=14!9!}$$

Convencionamos definir zero fatorial como igual a 1, ou seja: 0! = 1

Exemplo

Determine quantas senhas de 6 algarismos podemos formar utilizando os algarismos de 0 a 9, nas seguintes hipóteses:

Podendo repetir algarismos.

Com os algarismos todos diferentes.

Clique no botão para ver a resolução.

RESOLUÇÃO

Nossa senha possui 6 algarismos: 1º 2º 3º 4º 5º 6º. A escolha de qualquer um desses algarismos pode ser, sem restrição, qualquer um dos 10 algarismos (de 0 a 9). Portanto, pelo Princípio da Multiplicação, a quantidade de senhas é simplesmente o produto das escolhas de cada um dos dígitos da senha: 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 = um milhão.

Uma outra forma de pensar a solução desse problema, é que as possíveis senhas são, na verdade, todos os números que podemos escrever de 000000 até 999999. Ou seja, um milhão de senhas.

Exemplo

Determine quantos são os números de 4 algarismos diferentes que podemos formar utilizando apenas os algarismos 0, 4, 5, 6, 7 e 8.

Clique no botão para ver a resolução.

RESOLUÇÃO

Nosso número possui 4 algarismos: M C D U. Então, devemos realizar 4 ações: Escolher um algarismo para milhar (M), um para a centena (C), um para a dezena (D) e um para unidade (U). Façamos as escolhas na ordem M, C, D e U.

- *Escolha de M:* Como **M** é o algarismo de milhar, ele não pode ser 0. Portanto, há **5** possibilidades de escolha: 4, 5, 6, 7, e 8.
- *Escolha de C:* Como já escolhemos um algarismo para M, e os algarismos devem ser diferentes, sobram **5** algarismos para utilizar como algarismo das centenas, **C** (aí incluso o 0, que não foi usado para **M**).
- *Escolha de D:* Como já usamos dois algarismos, podemos escolher para **D** apenas **4** dos algarismos restantes ainda não usados.
- *Escolha de U:* Restam apenas **3** dos seis algarismos. Portanto, há **3** possibilidades de escolha de **U**, algarismo das unidades.

Como as escolhas dos algarismos de cada ordem (M, C, D e U) são independentes, o número total desejado é, pelo Princípio da Multiplicação, igual ao produto das quantidades das escolhas anteriores: 5 x 5 x 4 x 3 = 300 números diferentes.

Agrupamento Arranjo

De quantas maneiras podemos fazer filas com 5 alunos, se dispomos de 12 alunos?

Nesse caso, temos 5 lugares a preencher: 1º lugar ao 5º lugar da fila. Ora, para escolher o 1º da fila dispomos dos 12 alunos; logo, há 12 escolhas possíveis; para o 2º lugar da fila só há, agora, 12 – 1 = 11 alunos; continuando o raciocínio, é fácil perceber que o número total de filas será, pelo Princípio da Multiplicação, o produto das quantidades de escolhas para cada um dos 5 lugares na fila, ou seja:

12 x 11 x 10 x 9 x 8 (total de 5 parcelas multiplicadas, do 12 ao 8).

Veja, agora, como expressar esse resultado na forma de fatorial:

12×11×10×9×8=12×11×10×9×8×7×6×5×4×3×2×17×6×5×4×3×2×1=12!7!=12!12-5!

Esse tipo de situação, em que dispomos de n objetos e queremos criar filas (ordenações) usando apenas p dos n objetos disponíveis, é um dos agrupamentos usuais da análise combinatória: São os chamados arranjos de n objetos tomados p a p que, usualmente, representamos por Apn ou An,p.

A quantidade de situações a ser calculada pode ser expressa de duas maneiras. Veja:

Produto de p números consecutivos, a partir de **n**, inclusive, e de forma decrescente; ou o

Quociente dos fatoriais de **n** e de **n - p**, ou seja, $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Agrupamento Permutação

Calcule o número de anagramas das palavras TRAPO e da palavra PUBLICAR. Antes de resolver o exercício proposto, observe o que se segue:

Atenção

Se dispusermos de **n** objetos e colocarmos todos na fila, o número total de possíveis filas é o produto **n** x (**n – 1**) x ... x 2 x 1, porque podemos escolher um dos **n** objetos como **1º** da fila, um dos **n – 1** restantes como **2º** da fila e assim sucessivamente, até atingirmos o **último lugar** da fila em que só teremos **um** aluno para escolher.

Essa situação, em que n = p, ou seja, dispomos de n objetos para ordenar todos os n objetos, é um caso particular de arranjo (em que **p = n**) e preferimos chamá-lo de **permutação** de **n** objetos (porque pressupõe-se que desejamos ordenar todos eles).

O anagrama de uma palavra possui as mesmas letras da palavra original, na mesma quantidade que cada letra ocorre (possua ou não significado). Por exemplo:

PORTA PRATO OAPTR

Todas são anagramas da palavra TRAPO. Então, desejamos, simplesmente, calcular de quantas maneiras podemos embaralhar as letras da palavra TRAPO (que são todas diferentes). Claro que isso é equivalente a ordenar de todas as maneiras possíveis as 5 letras (diferentes) da palavra indicada. Naturalmente, a resposta é imediata: $\mathbf{A^5_5 = P_5 = 5! = 1\times2\times3\times4\times5 = 120}$ anagramas.

Exemplo

No segundo caso, a palavra PUBLICAR também possui letras diferentes e um total de 8 letras. Então, o número de anagramas é $\mathbf{A^8_8 = P_8 = 8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$. Essa discussão enfatiza que o agrupamento permutação nada mais é do que um caso particular do agrupamento arranjo, quando desejamos ordenar (criar nossas filas) com TODOS os n objetos, ou seja, o tamanho **p** das filas, igual ao próprio **n**.

As situações em que há letras repetidas na palavra original serão tratadas no Módulo 3.

Agrupamento Combinação

Vamos analisar o seguinte exemplo: Determine quantos subconjuntos de 3 elementos podemos construir a partir de um conjunto com 7 elementos.

Os últimos exemplos abordados tratam, basicamente, de ordenar objetos. Mas há situações em que a ordem dos objetos não é relevante. Esse exemplo é uma dessas situações, pois as notações { a, b, c } e { a, c, b }, { b, c, a }, { b, a, c }, { c, a, b } e { c, b, a } representam o mesmo conjunto, cujos elementos são a, b e c.

Como seria possível realizar o cálculo solicitado, ajustando o raciocínio utilizado na ordenação de objetos para esse caso?

É simples: Se desejamos saber quantas filas de 3 objetos podemos fazer com os 7 elementos de um conjunto, basta perceber que "arranjo de 7 objetos tomados três a três" responde parcialmente ao problema, pois estamos contando mais de uma vez um mesmo conjunto.

Se **a**, **b** e **c** são 3 dos 7 objetos do conjunto, então estamos contando as 6 filas diferentes como subconjuntos diferentes, que são, na verdade, iguais... Ora, então, ordenando *7 objetos 3 a 3* obtemos

$$A_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = 7.6.5 = 210.$$

Mas de cada três objetos escolhidos estamos contando 3! = 6 vezes o mesmo conjunto! Então, para ajustar nosso resultado devemos dividir o resultado anterior por 3! = 6. Logo, podemos formar 210/3! = 35 subconjuntos de 3 elementos a partir de um conjunto com 7 elementos.

Esse tipo de situação nos remete ao terceiro agrupamento básico, utilizado em contagem, e que chamamos de **combinação** de **n** objetos tomados **p** a **p**, ou **n** escolhe **p**, em que não importa a ordem dos objetos, mas apenas o subconjunto formado por eles. Então, no caso geral, devemos dividir o número de **filas** por **p!** para contarmos uma única vez cada uma das **p!** filas que compõem o mesmo conjunto.

Representando o número de **combinações** de **n**, **p a p** por **Cnp** ou **(np)**, temos:

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$