DEMONSTRAÇÕES EM PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADORES

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Há um símbolo na lógica de predicados que é usado para representar a expressão "para todos", "para cada", ou "para qualquer um". Esse símbolo é $\forall$. Parece um A maiúsculo de cabeça para baixo é chamado de quantificador universal, porque indica que algo é universalmente verdadeiro sobre uma variável. A variável à qual o quantificador se aplica é escrita logo após o símbolo.

Nós mencionamos que se $P(x)$ for uma sentença aberta sobre um domínio S, então $P(x)$ é uma declaração para cada $x \in S$. Vamos ilustrar isso de novo.

Exemplo
Seja $S = \{1, 2, ..., 7\}$. Então

$$P(n): [2n^2 + 5 + (-1)^n] \div 2$$

é primo

é uma declaração para cada $n \in S$.

Portanto:

$P(1)$: 3 é primo

$P(2)$: 7 é primo

$P(3)$: 11 é primo

$P(4)$: 19 é primo

são declarações **verdadeiras**.

Enquanto:

$P(5)$: 27 é primo

$P(6)$: 39 é primo

$P(7)$: 51 é primo

são declarações **falsas**.
Há outra maneira de uma sentença aberta ser convertida em uma declaração, por exemplo, pela **quantificação**.

Seja $P(x)$ uma frase aberta sobre um domínio S.

Adicionar a frase "para cada $x \in S$" à frase $P(x)$ produz a chamada declaração quantificada.

A frase "para cada" é referida como o quantificador universal e é denotada pelo símbolo $\forall$. Outras formas de expressar o quantificador universal são "para cada um" e "para todos". Essa afirmação quantificada é expressa em símbolos por:

$$\forall x \in S, P(x) \quad \textbf{(3.1)}$$

e é expressa em palavras por

para cada $x \in S$, $P(x)$. (3.2)

A instrução quantificada (3.1) (ou (3.2)) é verdadeira se $P(x)$ for verdadeira para cada $x \in S$; enquanto ela é falsa se $P(x)$ for falsa para pelo menos um elemento $x \in S$.

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Outra maneira de converter uma frase aberta $P(x)$ sobre um domínio S em uma declaração por meio da quantificação é pela introdução de um quantificador chamado quantificador existencial.

Cada uma das frases "existe", "para alguns" e "para pelo menos uma" é referida como um quantificador existencial e é denotada pelo símbolo $\exists$.

A declaração quantificada

$$\exists x \in S, P(x) \quad \textbf{(3.3)}$$

pode ser expressa em palavras por

existe $x \in S$ tal que $P(x)$. (3.4)

A instrução quantificada (3.3) (ou (3.4)) é verdadeira se $P(x)$ for verdadeira para pelo menos um elemento $x \in S$; enquanto ela é falsa se $P(x)$ for falsa para todo $x \in S$.

Agora consideramos duas declarações quantificadas construídas a partir da sentença aberta vista no exemplo anterior.

Exemplo 1
Para a sentença em aberto:

$P(n)$: $[2n^2 + 5 + (-1)^n] \div 2$ é primo sobre o domínio
$S = \{1, 2, ..., 7\}$.

A instrução quantificada:

$$\forall n \in S, P(n)$$

ou seja, para cada $n \in S$, $P(n)$: $[2n^2 + 5 + (-1)^n] \div 2$ é primo é falsa, uma vez que, por exemplo, $P(5)$ é falso.

No entanto, a declaração quantificada:

$$\exists \in S, P(n)$$

ou seja, existe $n \in S$ tal que $P(n)$: $[2n^2 + 5 + (-1)^n] \div 2$ é primo é verdadeira já que P(1) é verdadeiro, por exemplo.

A declaração quantificada $\forall x \in S$, $P(x)$ também pode ser expressa como "se $x \in S$, então $P(x)$".

Exemplo 2
Considere a frase em aberto $P(x)$: $x^2 \geq 0$ sobre o conjunto R de números reais.

Então:

$$\forall x \in R, P(x)$$

ou, equivalentemente:

$$\forall x \in R, x^2 \geq 0$$

pode ser expresso como para cada número real x, $x^2 \geq 0$, ou seja, se x é um número real, então $x^2 \geq 0$ (ou ainda "o quadrado de cada número real é não negativo".

Em geral, o quantificador universal é usado para alegar que a declaração resultante de uma determinada sentença aberta é verdadeira para cada valor do domínio da variável atribuído à variável. Consequentemente, a declaração $\forall x \in R$, $x^2 \geq 0$ é verdadeira já que $x^2 \geq 0$ é verdadeira para cada número real x.

Suponha agora que devemos considerar a frase aberta $Q(x)$: $x^2 \leq 0$. A declaração $\forall x \in R$, $Q(x)$ (ou seja, para cada número real x, temos $x^2 \leq 0$) é falsa já que, para exemplo, $Q(1)$ é falso. Claro, isso significa que sua negação é verdadeira. Se não fosse o caso de que para cada número real x, temos $x^2 \leq 0$, então deveria existir algum número real x tal que $x^2 > 0$.

Essa negação:

Existe um número real x tal que $x^2 > 0$ pode ser escrito em símbolos como:

$$\exists x \in R, x^2 > 0$$

ou

$$\exists x \in R, \neg Q(x)$$

Geralmente, se estamos considerando uma frase aberta $P(x)$ sobre um domínio S, então: $\neg (\forall x \in S, P(x)) \equiv \exists x \in S, \neg P(x)$.

Exemplo 3
A seguinte declaração contém o quantificador existencial.

Existe um número real x tal que $x^2 = 3$. (3.5)

Se deixarmos $P(x)$: $x^2 = 3$, então (3.5) pode ser reescrito como $\exists x \in R, P(x)$.

A declaração (3.5) é verdadeira, uma vez que $P(x)$ é verdadeiro quando $x = \sqrt{3}$ (ou quando $x = -\sqrt{3}$).

Daí, a negação de (3.5) é:

Para cada número real x, $x^2 \neq 3$(3.6)
A declaração (3.6) é, portanto, falsa. C.Q.D.

Exemplo 4
Seja $P(x, y)$ uma frase aberta, onde o domínio da variável x é S e o domínio da variável y é t. Em seguida, a declaração quantificada:

Para todo $x \in S$ e $y \in T$, $P(x, y)$ pode ser expressa simbolicamente como:

$$\forall x \in S, \forall y \in T, P(x, y)$$

A negação da declaração (3.7) é

$$\neg(\forall x \in S, \forall y \in T, P(x, y) \equiv \exists x \in S, \neg(\forall y \in T, P(x, y)$$
$$\equiv \exists; x \in S, \exists y \in T, \neg P(x, y)$$

Exemplo 5
Considere a sentença aberta:

$$Q(x, y): x + y \text{ é primo}$$

onde o domínio de x é $S= \{3, 5, 7\}$ e o domínio de y é $T = \{2, 6, 8, 12\}$.

A declaração quantificada:

$$\exists x \in S, \forall y \in T, Q(x, y) \quad (3.8)$$

expressa em palavras, é:

Existe algum $x \in S$ tal que para cada $y \in T$, $x + y$ é primo.
Para x = 5, todos os números $5 + 2, 5 + 6, 5 + 8$ e $5 + 12$ são primos.

Consequentemente, a declaração quantificada (3.8) é verdadeira.