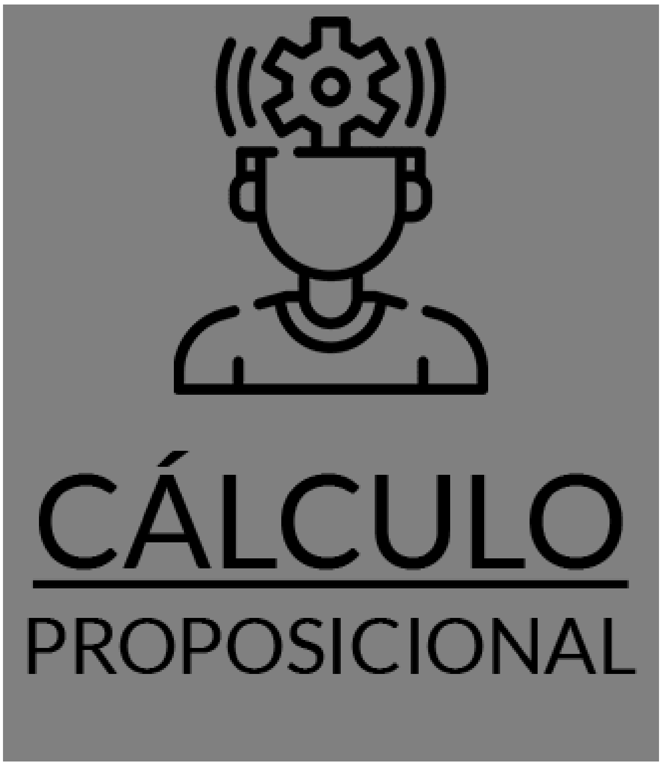


DESCRIÇÃO

Apresentação da lógica matemática e seus métodos: linguagem natural, linguagem simbólica, proposições simples e compostas, conectivos lógicos, tabelas-verdade, argumentos e regras de inferência.

PROPÓSITO

Identificar raciocínios válidos ou não válidos e analisar com clareza os argumentos na organização das ideias e dos processos criativos é importante não só para desenvolver um software ou um algoritmo, mas para resolver problemas de aplicação matemática de forma eficiente e independente da sua natureza.

OBJETIVOS

MÓDULO 1

Identificar proposições simples e compostas

MÓDULO 2

Identificar a tabela-verdade de proposições compostas

MÓDULO 3

Reconhecer o valor lógico das proposições e a estrutura lógica da álgebra booleana

MÓDULO 4

Reconhecer o significado de implicação lógica, equivalência e regras de inferências

PREPARAÇÃO

Antes de iniciar o conteúdo, é recomendável buscar, em seu dispositivo, uma calculadora online do tipo calculadora lógica (tabela-verdade) para acompanhar os exemplos apresentados.

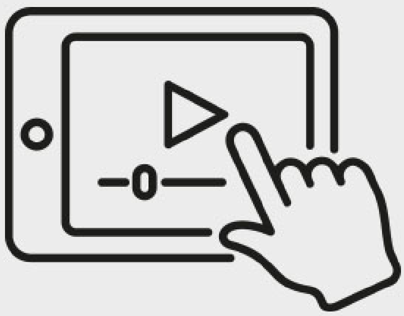
INTRODUÇÃO

A lógica está presente no nosso cotidiano. Muitas vezes, nos deparamos, por exemplo, com as expressões “isso tem lógica” ou “isso não tem lógica”, entre outras. É um assunto muito interessante e importante, pois é através dela que organizamos nossas ideias e tomamos decisões de forma correta. Podemos dizer que a lógica é a ciência do raciocínio.

Além disso, ela tem um papel fundamental na formação do profissional de computação, que precisa conhecer bem esse conteúdo para, por exemplo, desenvolver algoritmos. É importante também para o estudante de matemática, que a utiliza para demonstrar teoremas e para compreender com clareza as demonstrações.

Neste tema, introduziremos o estudo da lógica matemática. Conheceremos os princípios da lógica clássica dedutiva e as proposições simples e compostas, aprenderemos a analisar o valor lógico de proposições compostas através da construção de tabelas-verdade e veremos novos conceitos, tais como: tautologias, contradições e contingências. Conheceremos, ainda, um pouco da álgebra de Boole e trataremos de implicações lógicas, de equivalências e da veracidade dos argumentos.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



MÓDULO 1

Objetivo: Identificar proposições simples e compostas

NOÇÕES DE PROPOSIÇÕES SIMPLES E COMPOSTAS

Antes de iniciarmos o conteúdo deste módulo, assista ao vídeo a seguir. Nele apresentamos um resumo sobre as proposições simples e compostas, e sobre os conceitos de linguagem natural e simbólica. Vamos lá?

Neste módulo, daremos início ao estudo da lógica matemática, mas, antes, conheceremos um pouco da história da lógica. A partir disso, veremos novos conteúdos, e será possível perceber que todos eles estão relacionados entre si.

ARISTÓTELES

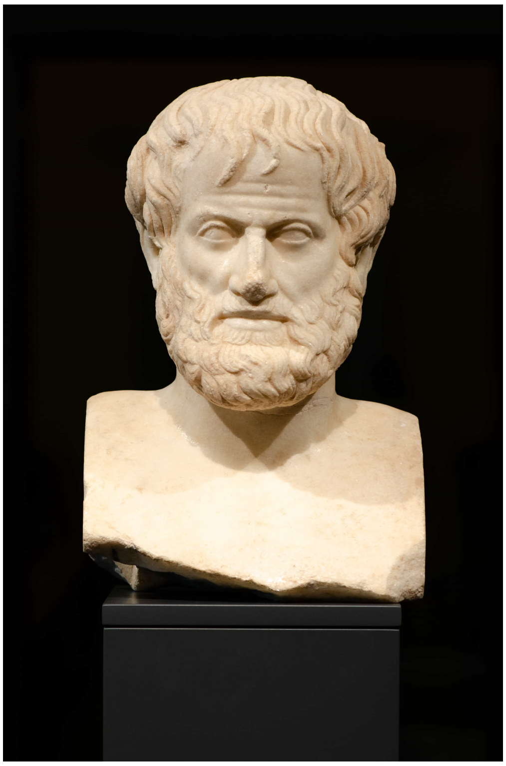


Imagem: Shutterstock.com

Quando falamos de lógica, não podemos deixar de falar sobre Aristóteles (século IV a.C. 384 − 322 a.C.): filósofo grego e grande pensador, conhecido como o pai do pensamento lógico e o criador da lógica.

Para Aristóteles, a lógica era uma ferramenta importante presente em todas as ciências. Além disso, ele defendia a ideia de que, partindo de conhecimentos considerados verdadeiros, era possível obter novos conhecimentos. Ele formulou regras de encadeamento de raciocínios que, a partir de premissas verdadeiras, levavam a conclusões verdadeiras.

Suas obras sobre lógica foram reunidas e publicadas no século II. Uma obra muito importante em que Aristóteles estruturou todo o seu trabalho, chamada de **Organon** ("ferramenta para o correto pensar"), apresenta princípios importantes que são válidos até os dias atuais. A lógica de Aristóteles era baseada em argumentações válidas (Teoria do Silogismo).

Veja um exemplo clássico de silogismo muito conhecido:

Todo homem é mortal.
Sócrates é homem.
Logo, Sócrates é mortal.

Ao longo da história, a lógica de Aristóteles evoluiu graças às inúmeras contribuições dos matemáticos que notaram que a lógica apresentada por ele não era suficiente para se trabalhar com o rigor matemático. Ela poderia ser imprecisa, pois fazia uso basicamente da linguagem natural.

As contribuições dos matemáticos, portanto, foram muito importantes.

George Boole (1815-1864), matemático inglês, é considerado um dos responsáveis pelo surgimento da lógica matemática a partir da introdução de uma notação matemática mais precisa.

Boole e Augustus De Morgan (1806-1871) tornaram a lógica matemática uma forte ferramenta para a programação de computadores.

Giuseppe Peano (1858-1932), por sua vez, elaborou uma notação matemática mais simples, que usamos até os dias atuais.

Outro nome importante é Bertrand Russell (1872-1920), um dos fundadores da "Filosofia Analítica", que, além de usar a lógica para esclarecer questões relacionadas aos fundamentos da matemática, também a utilizava para esclarecer questões filosóficas.

Podemos citar, também, as contribuições de Friedrich Ludwig G. Frege (1848-1925) e de Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716).

LINGUAGEM NATURAL E LINGUAGEM SIMBÓLICA

A linguagem, segundo o dicionário Aurélio, pode ser compreendida como sendo um sistema de símbolos ou sinais que permite a transmissão da informação. Dessa forma, temos a linguagem escrita formada por um conjunto de símbolos, que são as letras do alfabeto, os sinais de pontuação, acentos etc. Ela é dotada de regras para juntar esses símbolos e assim formar palavras e frases, sentenças ou enunciados.

É comum chamar a linguagem escrita de **linguagem natural** já que esta faz parte do nosso cotidiano. Aprenderemos, porém, a transformar essa linguagem natural ou corrente em uma linguagem simbólica. Isso ocorre quando conhecemos os símbolos lógicos.

PROPOSIÇÕES

DEFINIÇÃO

Proposições são sentenças ou enunciados declarativos que exprimem um pensamento de sentido completo. Logo, não consideramos como proposição as sentenças exclamativas (Feliz Natal!), interrogativas (Qual é o seu nome?) ou imperativas (Estude, agora!).

★ EXEMPLO

Carlos é estudioso.

O número 49 é um quadrado perfeito.

Fomos ao teatro ontem.

$2 < 5$.

Note que, nesses exemplos, estamos declarando algo que pode ser considerado verdadeiro ou falso.

CLASSIFICAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES

As proposições podem ser classificadas em simples ou compostas.

PROPOSIÇÕES SIMPLES (OU ATÔMICAS)

As proposições simples são formadas apenas por sujeito e predicado. Em geral, usamos as letras minúsculas do alfabeto latino **p, q, r, s** etc. para designá-las.

Exemplos

p: João é inteligente.

q: Fomos ao teatro ontem.

r: O quadrado é um polígono regular.

PROPOSIÇÕES COMPOSTAS (OU MOLECULARES)

As proposições compostas são formadas por duas ou mais proposições simples. Em geral, são designadas por letras maiúsculas do alfabeto latino **P, Q, r, S** etc.

Exemplos

P: Maria é bonita e Pedro é estudioso.

Q: Maria é professora ou médica.

R: O número 5 é ímpar e o número 25 é um quadrado perfeito.

VALOR LÓGICO DE UMA PROPOSIÇÃO

Uma proposição pode ser verdadeira ou falsa. Usamos (F) quando a proposição é falsa ou (V) quando ela é verdadeira.

★ EXEMPLOS

Sejam p e q duas proposições.

p: O número 5 é ímpar.

q: O número 15 é um quadrado perfeito

Com relação ao valor lógico dessas proposições, podemos usar a seguinte notação:

V(p) = V significa que o valor lógico da proposição p é verdadeiro.

V(q) = F significa que o valor lógico da proposição q é falso.

PRINCÍPIOS IMPORTANTES DA LÓGICA MATEMÁTICA

A lógica matemática é regida por três princípios:

PRINCÍPIO DO 3° EXCLUÍDO

Uma proposição pode ser caracterizada em lógica como "verdadeira" ou "falsa". Ou seja, não é possível uma terceira caracterização lógica.

PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO

Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

PRINCÍPIO DA IDENTIDADE

Esse princípio diz que uma proposição ou enunciado é igual a si mesmo.

CONECTIVOS OU JUNTORES

Podemos realizar operações sobre as proposições utilizando elementos conhecidos na lógica como conectivos ou juntores.

Os **conectivos** são símbolos lógicos com os quais efetuamos as operações lógicas obedecendo regras do cálculo proposicional.

Eles são importantes, pois novas proposições podem ser formadas a partir de outras proposições com sua utilização.

Além disso, com os conectivos, passamos uma proposição da linguagem natural para a linguagem simbólica.

Na linguagem natural ou corrente, os conectivos são palavras.

Vejamos alguns exemplos:

Vamos considerar duas proposições simples p e q.

p: Maria é alta.

q: Maria é elegante.

Usando os conectivos, podemos formar outras proposições a partir das proposições p e q.

P: Maria é alta e elegante.

Q: Maria é alta ou elegante.

R: Se Maria é alta, então é elegante.

T: Maria é alta se, e somente se é elegante.

Veja que, na linguagem natural, as palavras utilizadas são, por exemplo: e, ou, se, então, se e somente se.

Representamos essas palavras através de símbolos lógicos com os quais efetuamos as chamadas operações lógicas. Agora, vamos conhecer os conectivos lógicos e as operações realizadas sobre as proposições

CONJUNÇÃO

Linguagem corrente: “e”, “mas”, “além disso”, “também”.

Notação: $\wedge$

Essa notação é usada entre duas proposições: $p \wedge q$

Como se ler: p **e** q

★ EXEMPLO

Sejam as proposições:

p: Paulo é trabalhador.

q: Paulo é estudioso.

Usando o conectivo “e”, podemos formar outra proposição:

$p \wedge q$: Paulo é trabalhador e Paulo é estudioso.

Podemos dizer simplesmente: Paulo é trabalhador e estudioso.

ATENÇÃO

A conjunção p ∧ q pode ser representada através de diagramas, na Teoria dos Conjuntos. Nesse caso, ela representa a interseção dos conjuntos p e q.

DISJUNÇÃO

Linguagem corrente: “ou”.

Notação: ∨

Essa notação é usada entre duas proposições: p ∨ q.

Como se ler: p ou q

EXEMPLO

Sejam as proposições:

p: Paulo ganhou um carro.

q: Paulo ganhou um apartamento.

Usando o conectivo “ou”, podemos formar outra proposição:

p ∨ q: Paulo ganhou um carro ou Paulo ganhou um apartamento.

Podemos dizer simplesmente: Paulo ganhou um carro ou ganhou um apartamento.

Com relação à disjunção, ela pode ser:

Disjunção **inclusiva**, cujo símbolo é $\vee$

Disjunção **exclusiva**, cujo símbolo é $\veebar$

Veja, a seguir, exemplos desses tipos de disjunção:

DISJUNÇÃO INCLUSIVA

P: Ana é professora **ou** médica.

Nesse caso, Ana pode ser professora e também médica, sem problema algum.

DISJUNÇÃO EXCLUSIVA

P: **Ou** Ana é paulista, **ou** é gaúcha.

Nesse caso, Ana não pode ser paulista e gaúcha ao mesmo tempo. Ou seja, se Ana é paulista, então excluímos a possibilidade de Ana ser gaúcha e vice-versa.

ATENÇÃO

A disjunção $p \vee q$, na Teoria dos Conjuntos, representa a união dos conjuntos p e q.

CONDICIONAL

Linguagem corrente: “Se... então”

Notação: $\rightarrow$

Essa notação é usada da seguinte forma: **Se** p **então** q.

EXEMPLO

p: Paulo é aprovado em cálculo.

q: Paulo ganha um prêmio.

Usando o conectivo “se... então”, podemos formar outra proposição:

p → q: **Se** Paulo é aprovado em cálculo, **então** ganha um prêmio.

Podemos dizer simplesmente: **Se** Paulo é aprovado em cálculo, **então** ganha um prêmio.

Veja a relação entre p e q na proposição condicional a seguir :

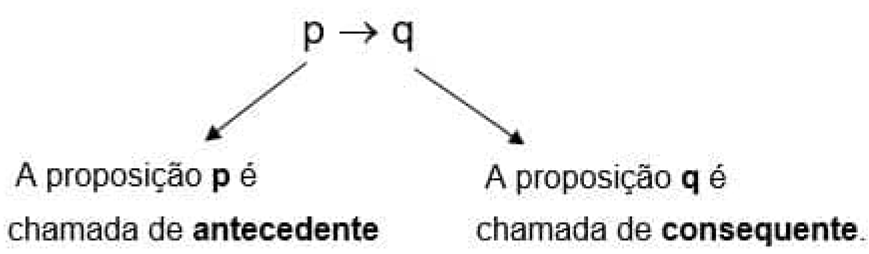


Imagem: Isaac Barbosa

p é condição suficiente para q.

q é condição necessária para p.

ATENÇÃO

A condicional p → q pode ser representada através de diagramas. Nesse caso, ela representa a inclusão do conjunto p no conjunto q, ($p \subset q$).

BICONDICIONAL

Linguagem corrente: “... Se e somente se...”.

Notação: ↔

Essa notação é usada da seguinte forma: p **se e somente se** q.

EXEMPLO

p: Carlos é trabalhador.

q: Carlos é estudioso.

Usando o conectivo “se e somente se”, podemos formar outra proposição:

p ↔ q: Carlos é trabalhador se, e somente se Carlos é estudioso.

Observação sobre a bicondicional

p é condição necessária e suficiente para q.

q é condição necessária e suficiente para p.

ATENÇÃO

A bicondicional p ↔ q pode ser representada através de diagramas. Nesse caso, ela representa a igualdade dos conjuntos p e q, (p = q).

NEGAÇÃO

Linguagem corrente: “não”, “é falso que”, “não é o caso que”, “não é verdade que”.

Notação: ~ (til) ou ¬ (chamada de cantoneira)

A notação mais utilizada: ~

Essa notação é usada na frente da letra que usamos para designar a proposição, para negá-la:

~p

Como se ler: não p.

★ EXEMPLO

p: Maria é uma aluna inteligente.

~p: Maria **não** é uma aluna inteligente.

q: Marcos é engenheiro.

~q: **Não é verdade que** Marcos é engenheiro.

~q: **É falso que** Marcos é engenheiro.

Quando negamos a negação da proposição p, obtemos a própria proposição p, isto é: ~~p ou ~(~p) é o mesmo que escrever p.

Temos mais dois conectivos não muito usuais:

NAND (↑)

Ele é a combinação de dois conectivos: “não” e “e”.

★ EXEMPLO

Sejam as proposições p e q:

p: Maria vai ao clube.

q: Maria vai estudar lógica.

p ↑ q: Não é verdade que (Maria vai ao clube e vai estudar lógica).

NOR (↓)

NOR é a combinação de dois conectivos: "não" e "ou".

★ EXEMPLO

Sejam as proposições p e q:

p: Maria vai ao clube.

q: Maria vai estudar lógica.

p ↓ q: Não é verdade que (Maria vai ao clube ou vai estudar lógica).

CONVERSÃO DE LINGUAGEM

Agora que conhecemos os conectivos e as operações sobre as proposições, podemos escrever uma proposição composta da linguagem natural para a linguagem simbólica.

Vamos considerar a seguinte proposição composta:

“O aluno aprende rápido e o professor possui muito conhecimento.”

Escrever essa proposição composta na linguagem simbólica é muito simples. Veja o procedimento:

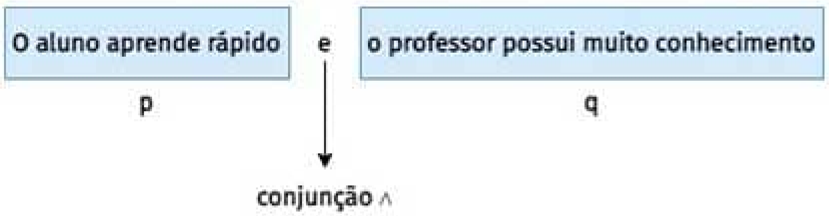


Imagem: Isaac Barbosa

PASSO 1

Identifique na proposição a palavra que representa o conectivo: **e**.

PASSO 2

Identifique antes e depois do **“e”** as proposições simples e atribua uma letra para cada proposição.

p: O aluno aprende rápido.

q: O professor possui muito conhecimento.

Portanto, a linguagem simbólica é **p** ∧ **q**.

Veja exemplos de algumas situações:

Exemplo 1:

O aluno não aprende rápido **ou** o professor possui muito conhecimento.

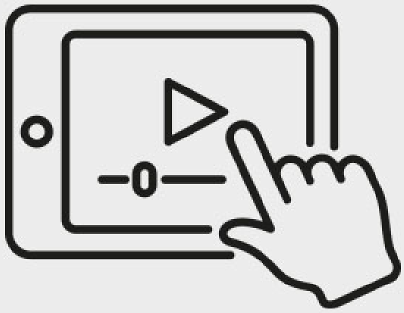
~p: O aluno não aprende rápido.

q: O professor possui muito conhecimento.

Solução:

Portanto, a linguagem simbólica é ~p ∨ q.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo 2:

(MPU - ESAF - Adaptado) Considere as seguintes proposições:

p: Não vejo Paulo.

q: Não vou ao cinema.

r: Fico triste.

Passe para a linguagem simbólica a seguinte proposição:

Quando não vejo Paulo, não vou ao cinema ou fico triste.

Solução:

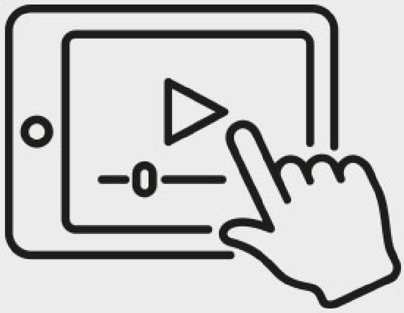
Quando **não vejo paulo, não vou ao cinema** ou **fico triste**.

Atenção: Nessa proposição, temos uma condicional.

Se não vejo Paulo, então não vou ao cinema ou fico triste.

Linguagem simbólica: $\mathbf{p \rightarrow (q \vee r)}$

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo 3:

Dadas as proposições simples:

p: Carla comprou um carro.

q: Carla comprou um apartamento.

Passe para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

Carla comprou um carro, mas não comprou um apartamento.

Não é verdade que Carla comprou um carro ou comprou um apartamento.

Carla nem comprou um carro e nem comprou um apartamento.

É falso que Carla não comprou o carro ou não comprou o apartamento.

Solução:

Carla comprou um carro, mas **não comprou um apartamento**.

p: Carla comprou um carro.

q: Carla comprou um apartamento.

~q: Não comprou um apartamento.

Linguagem simbólica: $\mathbf{p} \wedge \sim\mathbf{q}$

Não é verdade que **Carla comprou um carro** ou **comprou um apartamento**.

p: Carla comprou um carro.

q: Carla comprou um apartamento.

“Não é verdade que” é uma negação (~).

Linguagem simbólica: ~**(p** ∨ **q)**

Carla nem comprou um carro e **nem comprou um apartamento**.

p: Carla comprou um carro.

~p: Carla não comprou um carro.

q: Carla comprou um apartamento.

~q: Nem comprou um apartamento.

Linguagem simbólica: ~**p** ∧ ~**q**

É falso que Carla não comprou o carro ou não comprou o apartamento.

p: Carla comprou um carro.

~p: Carla não comprou um carro.

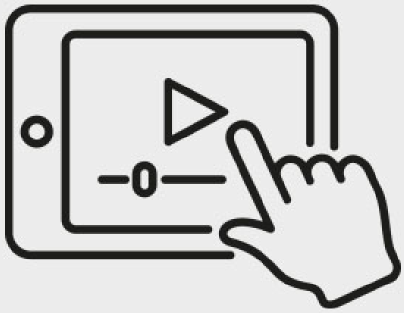
q: Carla comprou um apartamento.

~q: não comprou um apartamento.

“**É falso que**” é uma negação (~).

Linguagem simbólica: ~**(**~**p** ∨ ~**q)**

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo 4:

Dadas as proposições p: “O estudante aprende rápido” e q: “O professor possui muito conhecimento”, passe para a linguagem corrente as proposições:

~p ∧ q

p ∨ ~q

~p → q

~~p

~p ↔ ~q

Solução:

~**p** ∧ **q**

p: O estudante aprende rápido.

~p: O estudante não aprende rápido.

q: O professor possui muito conhecimento.

Conectivo: ∧ (e)

~**p** ∧ **q**: O estudante não aprende rápido e o professor possui muito conhecimento.

p ∨ ~**q**

p: O estudante aprende rápido.

q: O professor possui muito conhecimento.

~q: O professor não possui muito conhecimento.

Conectivo: ∨ (ou).

p ∨ ~**q**: O estudante aprende rápido ou o professor não possui muito conhecimento.

~**p** → **q**

p: O estudante aprende rápido.

~p: O estudante não aprende rápido.

q: O professor possui muito conhecimento.

Conectivo: → (se ... então).

~**p** → **q**: Se o estudante não aprende rápido então o professor possui muito conhecimento.

~~**p**

p: O estudante aprende rápido.

~p: O estudante não aprende rápido.

~~p: Não é verdade que o estudante não aprende rápido.

Quando negamos a negação da proposição p, obtemos a própria proposição p, isto é: ~~p é o próprio p.

~p ↔ ~q

p: O estudante aprende rápido.

~p: O estudante não aprende rápido.

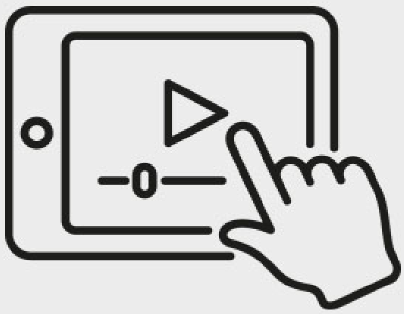
q: O professor possui muito conhecimento.

~q: O professor não possui muito conhecimento.

Conectivo: ↔ (se e somente se).

~p ↔ ~**q**: O estudante não aprende rápido se, e somente se o professor não possui muito conhecimento.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. CONSIDERE A PROPOSIÇÃO “NEM CARLOS É ENGENHEIRO NEM PAULO É PROFESSOR”. MARQUE A ALTERNATIVA QUE CORRESPONDE À REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA CORRETA DESSA PROPOSIÇÃO.

A) ¬(p ∧ q)

B) (¬p) ∨ (¬q)

C) $(\neg p) \wedge (\neg q)$

D) $(\neg p) \rightarrow q$

E) $\neg(p \vee (\neg q))$

2. (FUNDAÇÃO CARLOS CHAGAS − ADAPTADA) SABE-SE QUE SENTENÇAS SÃO ORAÇÕES COM SUJEITO (O TERMO A RESPEITO DO QUAL SE DECLARA ALGO) E PREDICADO (O QUE SE DECLARA SOBRE O SUJEITO). NA RELAÇÃO A SEGUIR, HÁ EXPRESSÕES E SENTENÇAS:

TRÊS MAIS SETE É IGUAL A DEZ.

PELÉ É JOGADOR DE FUTEBOL.

A IDADE DE PAULO.

A TERÇA PARTE DE UM NÚMERO.

O JOGADOR DE BASQUETE.

O TRIPLO DE 10 É MAIOR DO QUE 15.

É CORRETO AFIRMAR QUE, NA RELAÇÃO DADA, SÃO SENTENÇAS APENAS OS ITENS DE NÚMEROS:

A) 1, 2 e 6.

B) 2, 3 e 4.

C) 3, 4 e 5.

D) 1, 2, 5 e 6.

E) 2, 3, 4 e 5.

GABARITO

1. Considere a proposição “Nem Carlos é engenheiro nem Paulo é professor”. Marque a alternativa que corresponde à representação simbólica correta dessa proposição.

A alternativa **"C "** está correta.

Solução:

“Nem Carlos é engenheiro nem Paulo é professor.”

Vamos considerar:

$\neg p$: Nem Carlos é engenheiro.

$\neg q$: Nem Paulo é professor.

Analisando as alternativas:

$\neg(p \wedge q)$

INCORRETA, pois dizer que “não é verdade que Carlos é engenheiro e Paulo é médico” é o mesmo que dizer que “Carlos não é engenheiro ou Paulo não é médico”. A operação correta é a conjunção e não a disjunção.

$(\neg p) \vee (\neg q)$

INCORRETA, pois a operação que aparece na simbologia é a disjunção inclusiva, e o correto é a conjunção.

$(\neg p) \wedge (\neg q)$

CORRETA, pois, na proposição dada, temos uma operação de conjunção e a operação de negação. “Nem Carlos é engenheiro e nem Paulo é professor”. Logo, essa proposição na linguagem simbólica fica: $(\neg p) \wedge (\neg q)$.

$(\neg p) \rightarrow q$

INCORRETA, pois, na proposição dada, não temos a presença da condicional “se... então”.

$\neg(p \vee (\neg q))$

INCORRETA, pois, na proposição dada, temos a conjunção como operação principal e as duas proposições simples apresentam a operação de negação. Veja que nessa alternativa a operação é a disjunção.

2. (Fundação Carlos Chagas − Adaptada) Sabe-se que sentenças são orações com sujeito (o termo a respeito do qual se declara algo) e predicado (o que se declara sobre o sujeito). Na relação a seguir, há expressões e sentenças:

Três mais sete é igual a dez.

Pelé é jogador de futebol.

A idade de Paulo.

A terça parte de um número.

O jogador de basquete.

O triplo de 10 é maior do que 15.

É correto afirmar que, na relação dada, são sentenças apenas os itens de números:

A alternativa **"A "** está correta.

Vimos no nosso estudo que proposições são sentenças ou enunciados declarativos que exprimem um pensamento de sentido completo, nos quais podemos atribuir um valor lógico verdadeiro ou falso.

Vamos avaliar a relação dada:

Três mais sete é igual a dez. É uma sentença, pois possui sujeito e predicado. Veja que é possível atribuir o valor lógico verdadeiro.

Pelé é jogador de futebol. É uma sentença, pois possui sujeito e predicado. Veja que é possível atribuir o valor lógico verdadeiro.

A idade de Paulo. É apenas uma expressão. A idade de Paulo é indefinida. Não temos como atribuir o valor lógico verdadeiro ou falso.

A terça parte de um número. É apenas uma expressão. Não temos como atribuir o valor lógico verdadeiro ou falso.

O jogador de basquete. É apenas uma expressão. Veja que não tem sujeito. Não temos como atribuir o valor lógico verdadeiro ou falso.

O triplo de 10 é maior do que 15. É uma sentença, pois possui sujeito e predicado. Veja que é possível atribuir o valor lógico verdadeiro.

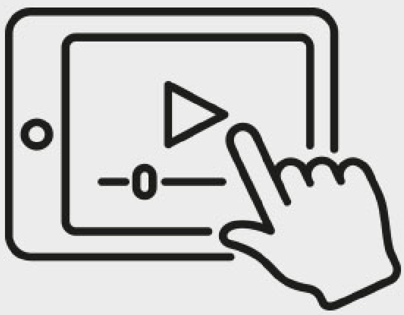
MÓDULO 2

Objetivo: Identificar a tabela-verdade de proposições compostas

CONSTRUÇÃO DE TABELA-VERDADE DE PROPOSIÇÕES

Antes de iniciarmos o conteúdo do módulo 2, que tal assistir ao vídeo a seguir? Nele você confere os conceitos de tabela-verdade na representação de proposições simples e compostas.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Como vimos, toda proposição composta tem um valor lógico verdadeiro ou falso. Esse valor lógico pode ser determinado facilmente através da chamada **tabela-verdade**. Nela, representamos todos os possíveis valores lógicos das proposições simples que formam as proposições compostas e suas combinações.

Neste módulo, conheceremos a tabela-verdade dos conectivos. Com essa informação, poderemos construir a tabela-verdade de qualquer proposição composta.

CONSTRUÇÃO DA TABELA-VERDADE

A tabela-verdade possui colunas e linhas, como toda tabela.

NAS PRIMEIRAS COLUNAS, COLOCAMOS AS PROPOSIÇÕES SIMPLES.

O NÚMERO DE LINHAS DEPENDE DA QUANTIDADE DE PROPOSIÇÕES SIMPLES.

O cálculo para determinarmos o número de linhas é simples:

Número de linhas = 2^n linhas, onde n é o número de proposições simples.

EXEMPLO

Se a proposição composta possui duas proposições simples p e q, então a tabela-verdade terá $2^2 = 4$ linhas. Em cada linha, colocamos todas as combinações possíveis de

V e F.

Se a proposição composta possui três proposições simples p, q e r, então a tabela-verdade terá $2^3 = 8$ linhas. Em cada linha, colocamos todas as combinações possíveis de V e F.

Agora, entenderemos melhor a construção da tabela-verdade de uma proposição composta considerando 1, 2 e 3 proposições simples.

Proposição simples

Seja p uma proposição simples. Para construir a tabela-verdade dessa proposição, temos apenas duas possibilidades: a proposição **p** pode ser verdadeira ou falsa.

P
V
F

Proposição composta com duas proposições simples

Sejam duas proposições simples p e q. A tabela-verdade possui $2^2 = 4$ linhas. Agora, vamos considerar todas as possibilidades de combinar V e F.

Note que podemos ter:

As duas proposições p e q verdadeiras.

A primeira proposição p verdadeira e a segunda proposição q falsa.

A primeira proposição p falsa e a segunda proposição q verdadeira.

As duas proposições p e q falsas.

p	q

V	V
V	F
F	V
F	F

DICA

Podemos construir a tabela-verdade colocando V e F em qualquer ordem, desde que as linhas referentes às proposições simples tenham todas as combinações possíveis. Uma maneira mais prática é colocar na coluna da primeira proposição simples dois (V) seguidos de dois (F) . Em seguida, na coluna da próxima proposição simples, alterna-se V e F, começando com V.

Proposições compostas com três proposições simples

Sejam três proposições simples p, q e r. A tabela-verdade possui 8 linhas. Agora vamos considerar todas as possibilidades de combinar V e F.

Note que podemos ter:

- Todas as 3 proposições simples verdadeiras.
- Duas proposições simples verdadeiras e uma proposição simples falsa.
- Uma proposição simples verdadeira e duas proposições simples falsas.
- Todas as proposições simples falsas.

p	q	r
V	V	V

V	V	F
V	F	V
F	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V
F	F	F

DICA

Uma maneira prática de construir a tabela-verdade com 8 linhas é colocar na coluna da primeira proposição simples quatro (V) seguidos de quatro (F) .

Na coluna da segunda proposição simples, alterna-se dois (V) e dois (F) , começando com dois (V) .

Por último, na coluna da terceira proposição simples, alterna-se V e F, começando por V.Assim, todas as combinações são verificadas.

TABELAS-VERDADE DOS CONECTIVOS LÓGICOS

Agora vamos verificar o valor lógico dos seguintes conectivos: negação, conjunção, disjunção inclusiva, disjunção exclusiva, condicional, bicondicional, NAND e NOR, e suas tabelas-verdade.

NEGAÇÃO (NÃO)

A negação da proposição p é a proposição representada por ~**p**. Ou seja:

O valor lógico da proposição ~p é oposto ao da proposição p.

Quando o valor lógico da proposição p for verdadeiro, o valor lógico da proposição ~p será falso, e vice-versa.

★ EXEMPLO

p: Os juros bancários são altos.

~p: Os juros bancários não são altos.

Tabela-verdade da negação

p	~p
V	F
F	V

CONJUNÇÃO (E)

O valor lógico da conjunção ficará mais fácil de ser compreendido através da seguinte declaração:

“Carlos levará Paula ao cinema e comprará um presente para ela”

Note que Carlos prometeu a Paula que a levará ao cinema e comprará um presente para ela. Ou seja, os dois eventos devem ocorrer simultaneamente. Dessa forma, o valor lógico da conjunção só será verdadeiro quando as duas proposições forem verdadeiras. Nos demais casos, a conjunção é falsa.

Temos uma proposição composta, onde:

p: Carlos levará Paula ao cinema.

q: Comprará um presente para ela.

p ∧ q: Carlos levará Paula ao cinema **e** comprará um presente para ela.

Agora vamos analisar declaração através da tabela-verdade:

p	q	p ∧ q
V Carlos levou Paula ao cinema.	V Comprou um presente para ela.	V
V Carlos levou Paula ao cinema.	F Não comprou um presente para ela.	F
F Carlos não levou Paula ao cinema.	V Comprou um presente para ela.	F
F Carlos não levou Paula ao cinema.	F Não comprou um presente para ela.	F

Tabela-verdade da conjunção

p	q	p ∧ q

V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

DISJUNÇÃO INCLUSIVA (OU INCLUSIVO)

Considere a seguinte declaração:

“Carlos levará Paula ao cinema ou comprará um presente para ela”

Nessa declaração, Carlos prometeu a Paula que a levará ao cinema ou comprará um presente para ela. Nesse caso, basta ele realizar os dois eventos ou apenas um dos eventos para a declaração ser verdadeira.

Temos uma proposição composta, onde:

p: Carlos levará Paula ao cinema.

q: Comprará um presente para ela.

p ∨ q: Carlos levará Paula ao cinema **ou** comprará um presente para ela.

Agora, vamos analisar declaração através da tabela-verdade:

p	**q**	**p ∨ q**
V Carlos levou Paula ao cinema.	V Comprou um presente para ela.	V

V Carlos levou Paula ao cinema.	F Não comprou um presente para ela.	V
F Carlos não levou Paula ao cinema.	V Comprou um presente para ela.	V
F Carlos não levou Paula ao cinema.	F Não comprou um presente para ela.	F

Tabela-verdade da disjunção (inclusiva)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Dessa forma, a disjunção inclusiva será falsa somente quando as duas proposições forem falsas. Nos demais casos, a disjunção é verdadeira.

DISJUNÇÃO EXCLUSIVA (OU EXCLUSIVO)

Considere a seguinte declaração:

“Paulo é carioca ou paulista”

Nessa declaração, Paulo não pode ser simultaneamente carioca e paulista.

Temos uma proposição composta, onde:

p: Paulo é carioca.

q: Paulo é paulista.

p ⊻ q: Paulo é carioca ou paulista.

Agora vamos analisar declaração através da tabela-verdade.

p	q	p ⊻ q
V Paulo é carioca.	V Paulo é paulista.	F
V Paulo é carioca.	F Paulo não é paulista.	V
F Paulo não é carioca.	V Paulo é paulista.	V
F Paulo não é carioca.	F Paulo não é paulista.	F

Tabela-verdade da disjunção (exclusiva)

p	q	p ⊻ q
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**

F	F	F

Veja que a disjunção exclusiva será falsa somente quando as duas proposições forem falsas ou quando as duas proposições forem verdadeiras. Nos demais casos, a disjunção é verdadeira.

CONDICIONAL (SE... ENTÃO)

Considere a seguinte declaração:

“Se Paula passar em cálculo, então Carlos comprará um presente para ela”

Temos uma proposição composta, onde:

p: Paula passar em cálculo.

q: Carlos comprará um presente para ela.

p → q: Se Paula passar em cálculo, então Carlos comprará um presente pra ela.

ATENÇÃO

Não se esqueça que, na condicional:

Se ocorre um determinado evento, **então** um fato acontecerá.

Na declaração dada, temos:

Evento: Paula passar em cálculo.

Fato: Carlos comprará um presente para a Paula.

Agora, vamos analisar declaração através da tabela-verdade.

p	q	p → q

V Paula passou em cálculo.	V Carlos comprou um presente pra ela.	V
V Paula passou em cálculo.	F Carlos não comprou um presente pra ela.	V
F Paula não passou em cálculo.	V Carlos comprou um presente pra ela.	V
F Paula não passou em cálculo.	F Carlos não comprou um presente pra ela.	V

Tabela-verdade da condicional

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conclusão: A condicional será falsa somente quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Nos demais casos, a condicional é verdadeira.

BICONDICIONAL (SE E SOMENTE SE)

Considere a seguinte declaração:

“Carlos comprará um presente para Paula se e somente se Paula passar em cálculo”

Temos uma proposição composta, onde:

p: Carlos comprará um presente para Paula.

q: Paula passar em cálculo.

p ↔ q: Carlos comprará um presente para Paula se e somente se Paula passar em cálculo.

Na bicondicional p ↔ q, temos duas condicionais que ocorrem simultaneamente, na ida e na volta: p → q e q → p.

p → q: Se Carlos comprar um presente para Paula, então Paula passará em cálculo.

q → p: Se Paula passar em cálculo, então Carlos comprará um presente para ela.

Dessa forma a bicondicional também pode ser escrita da seguinte forma:

(p → q) ∧ (q → p)

Agora, vamos analisar declaração através da tabela-verdade.

p	q	p ↔ q
V Carlos comprou um presente para Paula.	V Paula passou em cálculo.	V
V Carlos comprou um presente para Paula.	F Paula não passou em cálculo.	F

F Carlos não comprou um presente para Paula.	V Paula passou em cálculo.	F
F Carlos não comprou um presente para Paula.	F Paula não passou em cálculo.	V

Tabela-verdade da bicondicional

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Veja que a bicondicional será verdadeira somente quando as proposições p e q forem ambas verdadeiras ou falsas. Nos demais casos, a bicondicional é falsa.

NAND (↑)

Como vimos, o conectivo NAND surge a partir da combinação do conectivo **“não”** com o conectivo **“e”**.

Vamos considerar duas proposições simples:

p: Carlos vai ao cinema.

q: Carlos vai assistir à televisão.

p ↑ q: Não é verdade que Carlos vai ao cinema e vai assistir à televisão.

Veja que podemos escrever:

Não é verdade que (Carlos vai ao cinema e vai assistir à televisão).

Linguagem simbólica: $\sim(p \land q)$

Tabela-verdade do conectivo NAND

p	q	p ∧ q	~ (p ∧ q)	p ↑ q
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

NOR (↓)

Como vimos, o conectivo NOR surge a partir da combinação do conectivo **"não"** com o conectivo **"ou"**.

Vamos considerar duas proposições simples:

p: Carlos vai ao cinema.

q: Carlos vai assistir à televisão.

p ↓ q: Não é verdade que Carlos vai ao cinema ou vai assistir à televisão.

Veja que podemos escrever:

Não é verdade que (Carlos vai ao cinema ou vai assistir à televisão)

Linguagem simbólica: $\sim(p \vee q)$

Tabela-verdade do conectivo NOR

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$p \downarrow q$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

ORDEM DE PRECEDÊNCIA DOS CONECTIVOS

Agora, que conhecemos a tabela-verdade de cada conectivo, podemos construir a tabela-verdade de qualquer proposição composta. Devemos ficar atentos, porém, à ordem das proposições nas colunas da tabela.

ATENÇÃO

É importante obedecer a ordem de procedência dos conectivos da mesma forma que fazemos na matemática quando resolvemos uma expressão.

Por exemplo, se, na proposição composta, temos a presença de parênteses, então, devemos começar por eles e, depois, verificar o que está fora deles.

Ordem de precedência para os conectivos

1º: Negação (~).

2º: Conjunção ou disjunção (∧) e (∨), na ordem em que aparecem.

3º: Condicional (→).

4º: Bicondicional (↔).

★ EXEMPLO

Construa a tabela-verdade da seguinte proposição: **(p** ∨ ~**q) → (~p** ∧ **q)**.

Solução:

Passo 1:

Verificar a quantidade de proposições simples existentes.

Neste exemplo, temos duas proposições: p e q.

Vamos, então, construir uma tabela-verdade com 4 linhas. Inicialmente, colocaremos nas duas primeiras colunas as proposições p e q. Em seguida, colocaremos nas linhas, conforme estudamos anteriormente, todas as combinações possíveis de V e F.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Passo 2:

Na proposição dada, temos dois parênteses. Comece pelo primeiro parêntese da esquerda para a direita.

(p ∨ **~q) → (~p** ∧ **q)**

Abriremos uma coluna para colocarmos a negação ~q. Veja que ~q é a negação de q. Complete a coluna ~q com V e F.

p	q	~q
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Passo 3:

Abriremos uma coluna para colocarmos a proposição **p** ∨ **~q**. Em seguida, completaremos a coluna com V e F de acordo com a análise da coluna p com a coluna ~**q e o conectivo "ou"** (∨).

p	q	~q	p ∨ ~q
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

Lembre-se de que, de acordo com a tabela-verdade da disjunção (V), ela é falsa quando as duas proposições são falsas. Nos demais casos, a disjunção é verdadeira.

Passo 4:

Verificar o outro parêntese.

(p ∨ ~q) → (~p ∧ q)

Abriremos uma coluna para colocarmos a negação ~p. Veja que ~p é a negação de p. Complete a coluna ~p com V e F.

p	q	~q	p ∨ ~q	~p
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V

Passo 5:

Abriremos uma coluna para colocarmos a proposição ~**p ∧ q**. Em seguida, completaremos a coluna com V e F de acordo com a análise da coluna ~**p** com a coluna **q e o conectivo "e"** (∧).

p	q	~q	p ∨ ~q	~p	~p ∧ q
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V

F	F	V	V	V	F

Lembre-se de que, de acordo com a tabela-verdade da conjunção (∧), ela é verdadeira quando as duas proposições são verdadeiras. Nos demais casos, a conjunção é falsa.

Passo 6:

Agora que já analisamos os dois parênteses, vamos verificar a condicional que une os parênteses.

(p ∨ ~q) → (~p ∧ q)

Abra uma coluna e coloque a proposição (p ∨ ~q) → (~p ∧ q). Em seguida, complete a coluna com V e F de acordo com a análise da coluna (p ∨ ~q) com a coluna (~p ∧ q) e o conectivo **“se... então”** (→).

p	q	~q	p ∨ ~q	~p	~p ∧ q	(p ∨ ~q) → (~p ∧ q)
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F

Lembre-se de que, de acordo com a tabela-verdade da condicional (→), ela é falsa quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Nos demais casos, a condicional é verdadeira.

$$\underbrace{(p \vee {\sim}q)}_{antecedente} \rightarrow \underbrace{({\sim}p \wedge q)}_{consequente}$$

Agora, você pode construir a tabela-verdade de qualquer proposição composta.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

ANÁLISE DO VALOR LÓGICO DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA SEM A CONSTRUÇÃO DA TABELA-VERDADE

Considere a proposição **(q ∧ p) → (~q → p)** e a informação **V(p ∧ q) = V**.

A partir dessa informação é possível verificar se a proposição dada é verdadeira ou falsa.

Solução:

Devemos determinar se o valor lógico do enunciado é falso ou verdadeiro. De acordo com a informação dada V(p ∧ q) = V, podemos determinar o valor lógico de p e q.

V(p ∧ q) = V, onde o conectivo é a conjunção.

De acordo com a tabela-verdade da conjunção, ela **só** é verdadeira quando as duas proposições são verdadeiras. Logo, podemos concluir que V(p) = V e V(q) = V.

Temos:

$$\underbrace{(q \land p)}_{V} \rightarrow \left(\underbrace{\sim q}_{F} \rightarrow \underbrace{p}_{V} \right)$$

Nesse enunciado, temos dois parênteses. Não esqueça que começamos sempre com os parênteses.

O valor lógico de V(q ∧ p) = V no primeiro parêntese.

No segundo parêntese, temos uma condicional

$$\underbrace{\sim q}_{F} \to \underbrace{p}_{V}$$

De acordo com a tabela-verdade da condicional, quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso, o valor lógico da proposição é falso. Nos demais casos, a condicional é verdadeira. Logo,

$$V\left(\underbrace{\sim q}_{F} \to \underbrace{p}_{V}\right) = V.$$

Temos, então:

$$\underbrace{(q \wedge p)}_{V} \to \underbrace{\left(\underbrace{\sim q}_{F} \to \underbrace{p}_{V}\right)}_{V}$$

Por último, vamos analisar outra condicional que une (q ∧ p) e (~q → p).

Considerando o mesmo raciocínio, podemos concluir que o valor lógico da proposição é **verdadeiro**.

$$\underbrace{\underbrace{(q \wedge p)}_{V} \to \underbrace{\left(\underbrace{\sim q}_{F} \to \underbrace{p}_{V}\right)}_{V}}_{V}$$

Conclusão: O valor lógico do enunciado é verdadeiro.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

EXEMPLO

Determine o valor lógico das seguintes proposições:

2 + 6 = 5 e 4 + 4 = 8

Se 1 + 3 = 5 então 6 + 6 = 12

2 + 4 = 7 se e somente se $4^2 = 16$

2 + 6 = 8 ou 4 + 4 = 7

Solução:

Nesse exemplo, vamos trabalhar com a tabela-verdade dos conectivos lógicos.

a) 2 + 6 = 5 e 4 + 4 = 8

Conectivo: Conjunção.

A conjunção é verdadeira sempre que as duas proposições envolvidas são verdadeiras. Nos demais casos, ela é falsa.

$$\underbrace{\underbrace{2+6=5}_{F}\ e\ \underbrace{4+4=8}_{V}}_{F}$$

Logo, o valor lógico da proposição é falso.

b) Se 1 + 3 = 5 então 6 + 6 = 12

Conectivo: Condicional.

A condicional é falsa sempre que o antecedente for verdadeiro e o consequente for falso. Nos demais casos, ela é verdadeira.

$$\underbrace{Se\ \underbrace{1+3=5}_{F}\ então\ \underbrace{6+6=12}_{V}}_{V}$$

Logo, o valor lógico da proposição é verdadeiro.

c) 2 + 4 = 7 se e somente se 4^2 = 16

Conectivo: Bicondicional.

A bicondicional é verdadeira sempre que as duas proposições envolvidas são **ambas** verdadeiras ou **ambas** falsas. Nos demais casos, ela é falsa.

$$\underbrace{\underbrace{2+4=7}_{F}\ Se\ e\ somente\ se\ \underbrace{4^2=16}_{V}}_{F}$$

Logo, o valor lógico da proposição é falso.

d) 2 + 6 = 8 ou 4 + 4 = 7

Conectivo: Disjunção.

A disjunção é falsa apenas se as duas proposições envolvidas são falsas. Nos demais casos, ela é verdadeira.

$$\underbrace{\underbrace{2+6=8}_{V}\ ou\ \underbrace{4+4=7}_{F}}_{V}$$

Logo, o valor lógico da proposição é verdadeiro.

OBSERVAÇÃO SOBRE A ORDEM DE PRECEDÊNCIA DOS CONECTIVOS:

Quando nos deparamos com uma proposição composta sem parênteses, fica muito complicado saber que termos da expressão devemos considerar primeiro.

Para colocarmos os parênteses, devemos seguir a ordem de precedência dada neste módulo, seguindo o critério do conectivo mais forte para o mais fraco. Veja como é simples:

Seja a proposição composta:

s ∧ q ↔ r → q

Veja que o conectivo mais forte nessa proposição é a **bicondicional**. Com os parênteses ela fica do seguinte modo:

(s ∧ q) ↔ (r → q)

Agora, considere a proposição **r → p ∧ q**.

Nessa proposição, o conectivo mais forte é a **condicional**. Colocando o parêntese, temos:

r → (p ∧ q)

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. (CBMERJ/2014 − ADAPTADA) CONSIDERANDO AS PROPOSIÇÕES P: ROBERTO É RICO E Q: ROBERTO É FELIZ VERDADEIRAS, ANALISE AS AFIRMAÇÕES E MARQUE A ALTERNATIVA CORRESPONDENTE:

ROBERTO É POBRE, MAS FELIZ.

ROBERTO É POBRE OU INFELIZ.

ROBERTO É RICO E INFELIZ.

ROBERTO É POBRE OU RICO, MAS É FELIZ.

A) I − V, II − F, III − V, IV − F

B) I − F, II − V, III − F, IV − F

C) I − F, II − F, III − V, IV −F

D) I − V, II − V, III − F, IV − V

E) I − F, II − F, III − F, IV − V

2. (TRT/SP − 2008) DADAS AS PROPOSIÇÕES SIMPLES P E Q, TAIS QUE P É VERDADEIRA E Q É FALSA, CONSIDERE AS SEGUINTES PROPOSIÇÕES COMPOSTAS:

(1) $P \wedge Q$

(2) $\sim P \rightarrow Q$

(3) $\sim(P \vee \sim Q)$

(4) ~(P ↔ Q)

QUANTAS DESSAS PROPOSIÇÕES COMPOSTAS SÃO VERDADEIRAS?

A) Nenhuma

B) Apenas uma

C) Apenas duas

D) Apenas três

E) Quatro

GABARITO

1. (CBMERJ/2014 − Adaptada) Considerando as proposições p: Roberto é rico e q: Roberto é feliz verdadeiras, analise as afirmações e marque a alternativa correspondente:

> **Roberto é pobre, mas feliz.**
>
> **Roberto é pobre ou infeliz.**
>
> **Roberto é rico e infeliz.**
>
> **Roberto é pobre ou rico, mas é feliz.**

A alternativa **"E "** está correta.

Note que temos somente a conjunção e a disjunção para analisar.

> A conjunção é verdadeira apenas se as duas proposições envolvidas são verdadeiras. Nos demais casos, ela é falsa.
>
> A disjunção é falsa apenas se as duas proposições envolvidas são falsas. Nos demais casos, ela é verdadeira.

O enunciado apresentou duas proposições que são sempre verdadeiras.

p: Roberto é rico (V).

q: Roberto é feliz (V).

De acordo com essas proposições, vamos analisar o valor lógico das afirmações I, II, III e IV.

Roberto é pobre, **mas** feliz => (Falso) e (Verdadeiro) = Falso.

Roberto é pobre **ou** infeliz => (Falso) ou (Falso) = Falso.

Roberto é rico **e** infeliz => (Verdadeiro) e (Falso) = Falso.

Roberto é pobre ou rico, mas é feliz $(p \vee q) \wedge q$ => (Falso ou Verdadeiro) e (Verdadeiro).

Resolvemos sempre o que está dentro do parêntese. Veja que, falso ou verdadeiro, o valor lógico é verdadeiro. Agora, temos:

(Verdadeiro) e (Verdadeiro) = Verdadeiro.

Logo, a sequência correta é: I – F, II – F, III – F, IV – V.

2. (TRT/SP − 2008) Dadas as proposições simples p e q, tais que p é verdadeira e q é falsa, considere as seguintes proposições compostas:

(1) $p \wedge q$

(2) $\sim p \rightarrow q$

(3) $\sim(p \vee \sim q)$

(4) $\sim(p \leftrightarrow q)$

Quantas dessas proposições compostas são verdadeiras?

A alternativa **"C "** está correta.

Vamos analisar o valor lógico de cada proposição considerando que V(p) = V e V(q) = F.

(1) $\underbrace{\underbrace{p}_{V} \wedge \underbrace{q}_{F}}_{F}$, logo, V(p ∧ q) = F

(2) $\underbrace{\underbrace{\sim p}_{F} \rightarrow \underbrace{q}_{F}}_{V}$, logo, V(~p → q) = V

(3) $\underbrace{\sim \underbrace{\left(\underbrace{p}_{V} \vee \underbrace{\sim q}_{V} \right)}_{V}}_{F}$, logo, V(~(p ∨ ~q)) = F

(4) $\underbrace{\sim \left(\underbrace{\underbrace{p}_{V} \leftrightarrow \underbrace{q}_{F}}_{F} \right)}_{V}$, logo, V(~(p ↔ q)) = V

Portanto, temos apenas duas proposições verdadeiras, (2) e (4).

MÓDULO 3

⊙ **Objetivo**: Reconhecer o valor lógico das proposições e a estrutura lógica da álgebra booleana

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA BOOLEANA E NOÇÕES DE VALOR LÓGICO DAS PROPOSIÇÕES

Agora que você chegou ao módulo 3, que tal assistir a um vídeo sobre a análise do valor lógico de proposições compostas através de tabela-verdade e uma introdução à álgebra booleana? Vamos lá!

ANÁLISE DO VALOR LÓGICO DAS PROPOSIÇÕES COMPOSTAS POR MEIO DA TABELA-VERDADE

Nas proposições compostas, não é simples verificar o seu valor lógico apenas olhando para elas. No entanto, através da construção da tabela-verdade isso é mais intuitivo, apesar do trabalho, que pode ser maior ou menor, dependendo do tamanho da proposição.

Determinar o valor lógico da proposição composta através da tabela-verdade nos fará conhecer conceitos novos. Ou seja, vamos identificar através do resultado da última coluna da tabela se a proposição composta é uma **tautologia**, uma **contradição** ou uma **contingência**.

TAUTOLOGIA

Para compreender esse conceito, vamos considerar a seguinte proposição:

$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

Vamos construir sua tabela-verdade. Veja que não é simples analisar o valor lógico dessa proposição (5ª coluna da tabela):

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
p	q	p → q	(p → q) ∧ p	(p → q) ∧ p → q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

ATENÇÃO

Muita atenção com o preenchimento da 5ª coluna. Esse preenchimento é o resultado da seguinte análise: 4ª coluna → 2ª coluna.

4ª	2ª	4ª coluna → 2ª coluna
(p → q) ∧ p	q	(p → q) ∧ p → q
V	V	V
F	F	V
F	V	V
F	F	V

Na condicional, temos valor lógico falso somente quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Nos demais casos, o valor lógico é verdadeiro.

É na última coluna da tabela que identificamos o valor lógico da proposição.

Note que a última coluna da tabela-verdade tem, em todas as linhas, o valor lógico **V** (verdadeiro). Ou seja, não há nenhum valor lógico **F** (falso). Quando isso ocorre, estamos diante de uma **tautologia**.

Dizemos que uma proposição (simples ou composta) é uma tautologia se seu valor lógico é V, independentemente dos valores lógicos das proposições que a compõem.

★ EXEMPLO

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Do ponto de vista lógico, verifique o valor lógico da seguinte afirmação:

“Na eleição para a prefeitura, o candidato A será eleito ou não será eleito.”

Solução:

Vamos verificar o valor lógico através da construção da tabela-verdade, mas antes devemos escrever essa proposição na linguagem simbólica.

Proposições simples:

p: O candidato A será eleito.

~p: O candidato A não será eleito.

p ∨ ~p: O candidato A será eleito **ou** não será eleito.

Tabela-verdade:

p	~p	p ∨ ~p
V	F	V

F	V	V

Como na última coluna temos em todas as linhas o valor lógico V (verdadeiro), então, temos uma tautologia e concluímos que a proposição é verdadeira.

CONTRADIÇÃO

Para compreender esse conceito, vamos considerar a seguinte proposição:

$(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Vamos construir sua tabela-verdade e analisar o resultado da última coluna da tabela.

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª
p	**q**	**$p \wedge q$**	**$\sim p$**	**$\sim q$**	**$\sim p \vee \sim q$**	**$(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$**
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F

ATENÇÃO

O preenchimento da 7ª coluna é o resultado da seguinte análise: 3ª coluna ↔ 6ª coluna.

Lembre-se de que a bicondicional tem o valor lógico V (verdadeiro) sempre que as duas proposições são verdadeiras ou falsas. Nos demais casos, o valor lógico é F (falso).

Veja que a última coluna da tabela-verdade tem em todas as linhas o valor lógico **F** (falso). Ou seja, não há nenhum valor lógico **V** (verdadeiro). Quando isso ocorre, dizemos que estamos diante de uma **contradição**.

Dizemos que uma proposição é uma **contradição** se seu valor lógico é **F** (falso), independentemente dos valores lógicos das proposições que a compõem.

CONTINGÊNCIA

Para compreender esse conceito, vamos considerar a seguinte proposição:

$(p \lor \sim q) \leftrightarrow (\sim p \land q)$

Vamos construir sua tabela-verdade e analisar o resultado da última coluna da tabela.

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \lor \sim q$	$\sim p \land q$	$(p \lor \sim q) \rightarrow (\sim p \land q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F

ATENÇÃO

O preenchimento da 7ª coluna é o resultado da seguinte análise: 5ª coluna → 6ª coluna.

Veja que a última coluna da tabela-verdade não apresenta em todas as linhas somente resultados V (verdadeiro) e nem apresenta somente resultados F (falso). Ou seja, quando, na última coluna da tabela encontramos os valores lógicos V e F, cada um pelo menos uma vez, isso significa que temos uma contingência ou indeterminação. Em outras palavras, a contingência é toda proposição composta que não é tautologia nem contradição.

ÁLGEBRA BOOLEANA

A álgebra booleana, também conhecida como álgebra de Boole, surgiu a partir da publicação de um trabalho de George Boole, matemático inglês, em 1854.

Essa álgebra considera apenas dois valores: 1 (um) e 0 (zero).

Esses valores também são chamados de **constantes booleanas** e podem ser representados pelos valores lógicos verdadeiro e falso. Normalmente, consideramos:

> 1 (um) - verdadeiro
>
> 0 (zero) - falso

COMENTÁRIO

A álgebra booleana tem um papel importante no surgimento da computação. Vale sinalizar que ela está presente nos computadores, sob a forma de Bit (do inglês *Binary Digit*), que até os dias atuais utilizam essa aritmética binária.

Considera-se, na álgebra booleana:

> Variáveis booleanas (A, B, C, ...) que assumem os valores 1 ou 0, ou seja, verdadeiro ou falso, respectivamente.
>
> A partir das variáveis booleanas podemos construir uma expressão matemática que é chamada de expressão booleana. Essa expressão também assume apenas dois valores: 1 ou 0 (verdadeiro ou falso).

★ EXEMPLO

São tipos de expressões booleanas:

S = (AB)×(B + C)

S = A + BA

OPERAÇÕES NA ÁLGEBRA BOOLEANA

Operação de adição

Operador: **OR** (ou).

Essa operação equivale à operação p ∨ q.

Notação: A + B ou **A OR B**.

Operação de multiplicação

Operador: **AND** (e).

Essa operação equivale a operação p ∧ q.

Notação: A · B ou **A AND B**.

Operação de complementação

Ela também pode ser chamada de inversão ou negação, pois trocará o valor lógico da variável booleana.

OPERADOR: NOT (NÃO).

NOTAÇÃO: Ā OU A'.

ESSA OPERAÇÃO EQUIVALE A OPERAÇÃO DE NEGAÇÃO ∼P.

NOT TAMBÉM É CHAMADO DE OPERADOR UNÁRIO.

★ EXEMPLO

Se A = 0 então Ā = 1

Se A = 1 então Ā = 0

Agora, conheceremos a tabela-verdade dos operadores **AND**, **OR** e **NOT** e a construção de algumas tabelas a partir das expressões booleanas.

TABELA-VERDADE: NOT

Seja a expressão S = Ā onde A é uma variável booleana.

A	Ā
1	0
0	1

Veja que:

Se a entrada for 1, a saída é 0

Se a entrada for 0, a saída é 1

TABELA-VERDADE: AND

Seja a expressão S = A · B, onde A e B são variáveis boolenas.

A	B	A · B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Observe que o resultado será 1 (verdadeiro) somente se as duas variáveis booleanas forem iguais a 1. Isso só ocorre na primeira linha da tabela-verdade. Nos demais casos, o resultado é 0 (falso).

TABELA-VERDADE: OR

Seja a expressão S = A + B, onde A e B são variáveis booleanas.

A	B	A + B
1	1	1
1	0	1
0	1	1

0	0	0

Usando **OR**, o resultado será 0 (falso) somente se as duas variáveis booleanas forem iguais a 0 (zero). Isso só ocorre na quarta linha da tabela-verdade. Nos demais casos, o resultado é 1 (verdadeiro).

Agora, podemos construir tabelas-verdade de outras expressões booleanas. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1:

Construa a tabela-verdade da expressão booleana $S = (A \cdot B) \cdot (B + C)$.

Solução:

Vamos identificar inicialmente as variáveis booleanas.

$\mathbf{S = (A \cdot B) \cdot (B + C)}$

Variáveis booleanas: A, B e C.

Lembre-se de que essa tabela possui $2^3 = 8$ linhas, pois possui 3 variáveis. Nas primeiras colunas, devemos colocar as variáveis A, B e C, com seus respectivos valores 1 ou 0. Em seguida, devemos seguir o mesmo procedimento realizado no módulo 2, para V ou F.

A	B	C
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1

0	1	0
0	0	1
0	0	0

Agora, vamos abrir uma coluna para a operação que está dentro do primeiro parêntese (A · B).

A	B	C	(A · B)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

A operação utilizada é **AND**. Nessa operação, o resultado será 1 (verdadeiro) somente se as duas variáveis booleanas forem iguais a 1, ou seja, A = 1 e B = 1. Nos demais casos, o resultado é 0 (falso).

Agora, vamos abrir a próxima coluna para a operação (B + C).

A	B	C	(A · B)	(B + C)
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

A operação utilizada é **OR**. Nessa operação, o resultado será 0 (falso) somente se as duas variáveis booleanas forem iguais a 0 (zero), ou seja, A = 0 e B = 0. Nos demais casos, o resultado é 1 (verdadeiro).

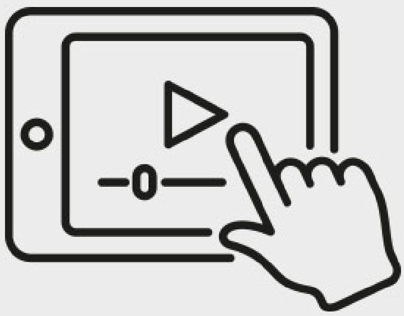
Por último, abrimos a última coluna para a expressão completa S = (A · B) · (B + C).

A	B	C	(A · B)	(B + C)	S = (A · B) · (B + C)
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0

1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0

A operação utilizada é **AND**. Nessa operação, o resultado será 1 (verdadeiro) somente se as duas variáveis booleanas forem iguais a 1, ou seja, A = 1 e B = 1. Nos demais casos, o resultado é 0 (falso).

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo 2:

Construa a tabela-verdade da expressão booleana $S = \bar{A} + B$.

Solução:

Vamos identificar, inicialmente, as variáveis booleanas.

$S = \bar{A} + B$

Variáveis booleanas: A e B.

Lembre-se de que essa tabela possui $2^2 = 4$ linhas, pois possui 2 variáveis. Nas primeiras colunas, devemos colocar as variáveis A e B, com seus respectivos valores 1 ou 0.

A	B	$\bar{A}$	$S = \bar{A} + B$

1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

ATENÇÃO

Ā representa a negação de A. Logo, se A = 1 então Ā = 0. Se A = 0 então Ā = 1.

Em S = Ā + B a operação utilizada é **OR**. Nessa operação, o resultado será 0 (falso) somente se as duas variáveis booleanas forem iguais a 0 (zero), ou seja, A = 0 e B = 0. Nos demais casos, o resultado é 1 (verdadeiro).

Na álgebra booleana, também devemos ficar atentos aos parênteses e à ordem de precedência dos operadores.

1º - Parênteses

2º - Negação ou complementação

3º - Multiplicação lógica (A · B)

4º - Soma lógica (A + B)

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. (ENADE/2011) COM RELAÇÃO AO VALOR LÓGICO, AVALIE AS AFIRMAÇÕES A SEGUIR.

$\neg(P \wedge \neg Q)$

$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

$(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg P$

$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

É TAUTOLOGIA APENAS O QUE SE AFIRMA EM:

A) I

B) II

C) I e III

D) II e IV

E) III e IV

2. (ENADE/2017) A ÁLGEBRA BOOLEANA POSSUI UM OPERADOR UNÁRIO $\sim$, CONHECIDO COMO NÃO, E OS OPERADORES BINÁRIOS * E +, CONHECIDOS COMO E E OU, RESPECTIVAMENTE. A TABELA-VERDADE É UTILIZADA PARA VALIDAR UMA FÓRMULA COMPOSTA DE OPERADORES DA ÁLGEBRA BOOLEANA.

A SEGUIR, É APRESENTADA A TABELA-VERDADE PARA AS PROPOSIÇÕES P, Q E R DIANTE DA FÓRMULA G, EM QUE V REPRESENTA UMA PROPOSIÇÃO VERDADEIRA E F, UMA PROPOSIÇÃO FALSA.

P	Q	R	G
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

A) p + ~q * ~r

B) p + q * ~r

C) ~p + q * r

D) ~p + ~q * r

E) ~p + q * ~r

GABARITO

1. (ENADE/2011) Com relação ao valor lógico, avalie as afirmações a seguir.

¬(p ∧ ¬q)

p → (q → p)

(p ∨ ¬q) → ¬p

(p ∧ q) ∨ (¬p ∧ ¬q)

É tautologia apenas o que se afirma em:

A alternativa **"B "** está correta.

Lembre-se de que a notação (¬) representa a negação (~).

Nessa questão, é necessário construir a tabela-verdade de cada afirmação. Teremos uma tautologia se na última coluna da tabela-verdade encontrarmos somente o valor lógico V (verdadeiros) em todas as linhas.

I. ¬(p ∧ ¬q)

p	q	¬q	p ∧ ¬q	¬(p ∧ ¬q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V

F	F	V	F	V

Na última coluna da tabela, não temos uma tautologia. A afirmação I não é uma tautologia.

II. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

p	**q**	**$q \rightarrow p$**	**$p \rightarrow (q \rightarrow p)$**
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Na última coluna da tabela, temos uma tautologia. A afirmação II é uma tautologia.

III. $(p \lor \neg q) \rightarrow \neg p$

p	**q**	**$\neg q$**	**$p \lor \neg q$**	**$\neg p$**	**$(p \lor \neg p) \rightarrow \neg p$**
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Na última coluna da tabela, não temos uma tautologia. A afirmação III não é uma tautologia.

IV. $(p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$

p	q	p ∧ q	¬p	¬q	¬p ∧ ¬q	(p ∧ q) ∨ (¬p ∧ ¬q)
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Na última coluna da tabela, não temos uma tautologia. A afirmação IV não é uma tautologia.

Podemos concluir que somente a afirmação II é uma tautologia.

2. (ENADE/2017) A álgebra booleana possui um operador unário ∼, conhecido como NÃO, e os operadores binários * e +, conhecidos como E e OU, respectivamente. A tabela-verdade é utilizada para validar uma fórmula composta de operadores da álgebra booleana.

A seguir, é apresentada a tabela-verdade para as proposições p, q e r diante da fórmula G, em que V representa uma proposição verdadeira e F, uma proposição falsa.

p	q	r	G
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**F**	**F**

F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**

A alternativa **"C "** está correta.

Nessa questão, devemos ficar atentos à ordem de precedência dos conectivos na álgebra booleana. De acordo com a teoria estudada, a multiplicação lógica é a operação principal.

Dessa forma, a colocação do parêntese em cada alternativa fica da seguinte forma:

A) (p + ~q) * ~r

B) (p + q) * ~r

C) (~p + q) * r

D) (~p + ~q) * r

E) (~p + q) * ~r

Analisando as alternativas:

Na análise, vamos considerar a primeira linha da tabela, onde os valores lógicos de cada proposição simples são: V(p) = V; V(q) = V e V(r) = V, e o resultado na coluna G é verdadeiro. Vamos verificar esses valores lógicos em cada alternativa. A alternativa correta é aquela cujo resultado é verdadeiro.

A) p + ~q) * ~r. INCORRETA, pois (V + F) * F = V * F = F

B) (p + q) * ~r. INCORRETA, pois (V + V) * F = V * F = F

C) (~p + q) * r. CORRETA, pois (F + V) * V = V * V = V

D) (~p + ~q) * r. INCORRETA, pois (F + F) * V = F * V = F

E) (~p + q) * ~r. INCORRETA, pois (F + V) * F = F * F = F

MÓDULO 4

⦿ **Objetivo**: Reconhecer o significado de implicação lógica, equivalência e regras de inferências

CONCEITOS DE IMPLICAÇÃO LÓGICA, EQUIVALÊNCIA E REGRAS DE INFERÊNCIA

Muito bem! Até aqui você já adquiriu muitos conhecimentos novos. Para dar continuidade ao aprendizado, assista ao vídeo a seguir e conheça os conceitos de implicação lógica, equivalência e regras de inferência e suas aplicações.

IMPLICAÇÕES LÓGICAS

Vamos considerar duas proposições compostas p e Q.

Podemos dizer que a proposição p implica logicamente a proposição Q, se a proposição q tem o valor lógico verdadeiro sempre que a proposição p for verdadeira.

Para indicar essa implicação, usamos a seguinte notação:

$P \rightarrow q$ (lê-se: p implica Q.)

Exemplo 1:

Vamos verificar se a proposição composta $(p \wedge q)$ implica logicamente a proposição composta $(p \vee q)$, através da tabela-verdade.

Simbolicamente: $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Veja que, na primeira linha da tabela-verdade, a proposição $p \wedge q$ tem o valor lógico verdadeiro, e o mesmo ocorre com a proposição $p \vee q$. Portanto, podemos dizer que $p \wedge q$ implica logicamente $p \vee q$, ou, ainda, $p \wedge q \rightarrow p \vee q$.

ATENÇÃO

Na tabela, só nos interessa analisar as linhas onde há V (verdadeiro).

Exemplo 2:

Considere as proposições compostas: $(p \rightarrow p \wedge q)$ e $(p \wedge q)$.

Podemos afirmar que: $(p \rightarrow p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$?

Solução

Vamos construir a tabela-verdade.

p	q	p → p ∧ q	p ∧ q
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Veja que, nas duas últimas linhas, temos que a proposição (p → p ∧ q) é verdadeira e a proposição (p ∧ q) é falsa. Logo, é falso que:

(p → p ∧ q) → (p ∧ q)

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Sejam p e q duas proposições compostas. Dizemos que uma proposição p é equivalente a uma proposição q se as tabelas-verdade dessas proposições forem iguais. Usamos a seguinte notação:

P ↔ q (Lê-se: p equivalente Q.)

Podemos relacionar as equivalências e as tautologias. Dessa forma, dizemos que as proposições p e q são equivalentes se e somente se p ↔ q é uma tautologia. Além disso, elas também são equivalentes se forem uma tautologia ou uma contradição.

TABELA DE EQUIVALÊNCIAS

Comutativas	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
Associativas	$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Idempotentes	$p \wedge p \leftrightarrow p$ $p \vee p \leftrightarrow p$
Absorções	$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$ $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
Distributivas	$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Leis de Morgan	$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
Definições de implicação	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$ $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$
Definições de bicondicional	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
Negação da bicondicional	$\sim (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
Negação	$\sim (\sim p) \leftrightarrow p$
Contrapositiva	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

As equivalências que aparecem com frequências são:

Leis de Morgan	**Negação do "e":** $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ **Negação do "ou":** $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
Definições de implicação	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$ $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$
Negação da condicional	$\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$
Negação	$\sim (\sim p) \leftrightarrow p$
Contrapositiva	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

Vejamos alguns exemplos:

1) (CESGRANRIO/2009) Se Marcos levanta cedo, então Júlia não perde a hora. É possível sempre garantir que:

Se Marcos não levanta cedo, então Júlia perde a hora.

Se Marcos não levanta cedo, então Júlia não perde a hora.

Se Júlia perde a hora, então Marcos levantou cedo.

Se Júlia perde a hora, então Marcos não levantou cedo.

Se Júlia não perde a hora, então Marcos levantou cedo.

Solução:

Nessa questão, devemos buscar uma proposição equivalente a:

Se **Marcos levanta cedo**, então **Júlia não perde a hora**.

Considerando:

p: Marcos levanta cedo.

q: Júlia não perde a hora.

Na linguagem simbólica podemos escrever: p → q.

Veja que temos uma condicional. Então, vamos verificar na tabela a equivalência onde aparece a condicional.

Contrapositiva: p → q ↔ ~q → ~p.

Vamos negar as proposições p e q.

p: Marcos levanta cedo.

~p: Marcos não levanta cedo.

q: Júlia não perde a hora.

~q: Júlia perde a hora.

~q → ~p: Se Júlia perde a hora, então Marcos não levanta cedo.

Alternativa correta: D

2) (CBMERJ/2014 - Adaptado) Dizer que “não é verdade que 'Marcela não é bonita ou Maria não é organizada' ” é logicamente equivalente a dizer que é verdade que:

Se Marcela não é bonita, então Maria é organizada.

Marcela é bonita e Maria é organizada.

Marcela é bonita ou Maria não é organizada.

Marcela é bonita ou Maria é organizada.

Marcela não é bonita e Maria não é organizada.

Solução:

“**Não é verdade** que Marcela não é bonita **ou** Maria não é organizada.”

Na linguagem simbólica, temos:

$\sim p$: Marcela não é bonita.

$\sim q$: Maria não é organizada.

Não é verdade é uma negação ($\sim$).

Temos, então: $\sim(\sim p \vee \sim q)$

Aplicando as Leis de De Morgan:

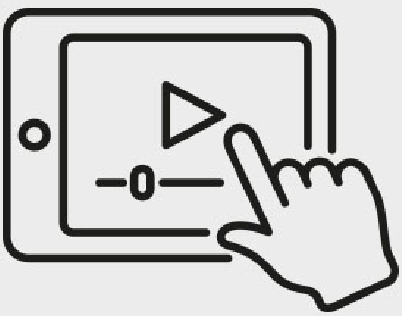
Negação do "ou": $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Assim, $\sim(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim(\sim p) \wedge \sim(\sim q) = p \wedge q$

Logo, Marcela é bonita e Maria é organizada.

Alternativa correta: B

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



OUTRAS PROPOSIÇÕES ASSOCIADAS A UMA CONDICIONAL

Com relação à condicional p → q, temos as seguintes proposições associadas:

Proposição recíproca	q → p
Proposição contrário	~p → ~q

ATENÇÃO

A proposição contrapositiva também é uma proposição associada à condicional e é a única equivalente à condicional.

REGRAS DE INFERÊNCIA

Agora,vamos conhecer as regras de inferência. Através delas, podemos verificar a validade de argumentos. Considere a seguinte situação:

> Se Carlos estuda, então é aprovado em lógica.
>
> Se Carlos não estuda bem, então o professor é culpado.
>
> Se Carlos é aprovado em lógica, então seus pais ficam felizes.
>
> Os pais de Carlos não estão felizes.
>
> Logo, o professor é culpado.

Esse argumento é válido?

Não sabemos. Podemos verificar a validade de um argumento através da construção da tabela-verdade, mas nem sempre esse trabalho é tão simples, pois o número de linhas da tabela-verdade aumenta de acordo com a quantidade de proposições presentes na formulação dos argumentos.

Diante de situações como essa, podemos usar as regras de inferência. Elas são argumentos válidos/regras lógicas que podemos usar na validação de outros argumentos. Com elas, podemos realizar as demonstrações de forma mais simples.

As regras de inferência são importantes para os estudantes de computação no desenvolvimento de algoritmos, e para os estudantes de matemática que precisam conhecer as regras lógicas de demonstrações. Neste módulo, apenas conheceremos essas regras, pois elas são detalhadas em temas que tratam de métodos de demonstração.

REGRA DA ADIÇÃO (AD):

P (PREMISSA)
P ∨ Q (CONCLUSÃO)

As premissas são colocadas sobre o traço horizontal. Abaixo dele temos a conclusão.

★ EXEMPLO

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

p: A temperatura está baixa.

q: Há nevoeiro.

Conclusão:

p ∨q: A temperatura está baixa ou há nevoeiro.

REGRA DA SIMPLIFICAÇÃO (SIMP)

P ∧ Q
P

★ EXEMPLO

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

p: A temperatura está baixa.

q: Há nevoeiro.

p ∧ q: A temperatura está baixa e há nevoeiro.

Conclusão:

p: A temperatura está baixa.

Também podemos considerar:

q: Há nevoeiro.

MODUS PONENS (MP)

P → Q
P
Q

★ EXEMPLO

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

p: A temperatura está baixa.

q: Há nevoeiro.

p → q: Se a temperatura está baixa então há nevoeiro.

p: A temperatura está baixa.

Conclusão:

q: Há nervoeiro.

MODUS TOLLENS (MT)

$P \rightarrow Q$
$\sim Q$
$\sim P$

★ EXEMPLO

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

p: A temperatura está baixa.

q: Há nevoeiro.

$p \rightarrow q$: Se a temperatura está baixa então há nevoeiro.

$\sim q$: Não há nevoeiro.

Conclusão:

$\sim p$: A temperatura não está baixa.

SILOGISMO HIPOTÉTICO (SH)

$P \rightarrow Q$
$Q \rightarrow R$
$P \rightarrow R$

★ EXEMPLO

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

p: A temperatura está baixa.

q: Há nevoeiro.

r: Os aviões não decolam.

$p \rightarrow q$: Se a temperatura está baixa então há nevoeiro.

$q \rightarrow r$: Se há nevoeiro então os aviões não decolam.

Conclusão:

$p \rightarrow r$: Se a temperatura está baixa então os aviões não decolam.

SILOGISMO DISJUNTIVO (SD)

$P \vee Q$
$\sim P$
Q

$P \vee Q$
$\sim Q$
P

★ EXEMPLO

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

p: A temperatura está baixa.

q: Há nevoeiro.

p ∨ q: A temperatura está baixa ou há nevoeiro.

~p: A temperatura não está baixa.

Conclusão:

q: Há nevoeiro.

Também podemos considerar:

p ∨ q: A temperatura está baixa ou há nevoeiro.

~q: Não há nevoeiro.

Conclusão

q: Há nevoeiro.

p: A temperatura está baixa.

REGRA DA CONJUNÇÃO (CONJ)

P
Q

$$P \wedge Q$$

★ EXEMPLO

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

p: A temperatura está baixa.

q: Há nevoeiro.

Conclusão:

$p \wedge q$: A temperatura está baixa e há nevoeiro.

ANÁLISE DOS ARGUMENTOS

Conhecendo as regras de inferência, sabemos que elas são importantes na validação de argumentos e para, a partir de proposições conhecidas, deduzirmos outras proposições.

No estudo de argumentos, consideraremos exemplos mais simples, nos quais poderemos fazer uso do valor lógico dos conectivos para analisarmos sua validade.

Um argumento é formado por um conjunto de proposições simples ou compostas, onde uma dessas proposições é a conclusão, que vamos chamar de **Q**.

O restante das proposições são as premissas ou hipóteses do argumento. Um argumento apresenta uma sequência de premissas:

Premissa 1

Premissa 2

Premissa 3

⋮

Premissa n, $n \geq 1$.

Logo, podemos indicar um argumento por:

$\mathbf{P_1, P_2, P_3, \cdots , P_n \mapsto Q.}$

Dessa forma, podemos dizer que a conclusão q se deduz das premissas, ou que a conclusão q decorre das premissas.

Se as premissas e a conclusão têm valor lógico V (verdadeiro), dizemos que o argumento é válido. Na análise da validade de um argumento, consideramos que todas as premissas são verdadeiras. Se o argumento for inválido, chamamos de **sofisma** ou **falácia**.

Veja um exemplo de argumento:

★ EXEMPLO

(CEBRASPE/ABIN/2018 - Adaptado) As seguintes proposições lógicas formam um conjunto de premissas de um argumento:

Se Pedro não é músico, então André é servidor da ABIN.

Se André é servidor da ABIN, então Carlos não é espião.

Carlos é um espião.

A partir dessas premissas, julgue o item a seguir, acerca de lógica de argumentação. Analise que, se a proposição lógica "Pedro é músico" for a conclusão desse argumento, então, as premissas, juntamente com essa conclusão, constituem um argumento válido.

Solução:

Premissas:

Se Pedro não é músico, então André é servidor da ABIN.

Se André é servidor da ABIN, então Carlos não é espião.

Carlos é um espião.

Conclusão: Pedro é músico.

Consideramos todas as premissas e a conclusão verdadeiras.

Se Pedro não é músico, então André é servidor da ABIN. (V)

Se André é servidor da ABIN, então Carlos não é espião. (V)

Carlos é um espião. (V)

Conclusão: Pedro é músico (V)

Agora, começaremos a analisar a partir da proposição simples “Carlos é um espião”.

Se Pedro não é músico (F) , **então** André é servidor da ABIN (F) . (V)

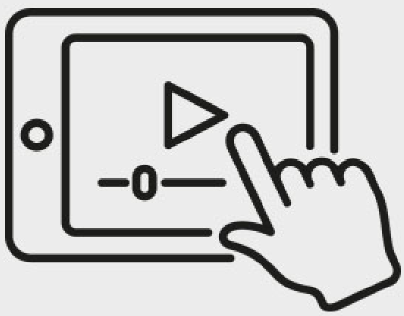
Se André é servidor da ABIN (F) , **então** Carlos não é espião (F) . (V)

Carlos é um espião. (V)

Logo, concluímos que Pedro é músico.

O argumento é válido.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. (ESAF) SOU AMIGA DE ABEL OU SOU AMIGA DE OSCAR. SOU AMIGA DE NARA OU NÃO SOU AMIGA DE ABEL. SOU AMIGA DE CLARA OU NÃO SOU AMIGA DE OSCAR. ORA, NÃO SOU AMIGA DE CLARA. ASSIM:

A) Não sou amiga de Nara e sou amiga de Abel.

B) Não sou amiga de Clara e não sou amiga de Nara.

C) Sou amiga de Nara e sou amiga de Abel

D) Sou amiga de Oscar e sou amiga de Nara.

E) Sou amiga de Oscar e não sou amiga de Clara.

2. (FUNDAÇÃO CARLOS CHAGAS) SE NÃO LEIO, NÃO COMPREENDO. SE JOGO, NÃO LEIO. SE NÃO DESISTO, COMPREENDO. SE É FERIADO, NÃO DESISTO. ENTÃO:

A) Se jogo, não é feriado.

B) Se não jogo, é feriado.

C) Se é feriado, não leio.

D) Se não é feriado leio.

E) Se é feriado, jogo.

GABARITO

1. (ESAF) Sou amiga de Abel ou sou amiga de Oscar. Sou amiga de Nara ou não sou amiga de Abel. Sou amiga de Clara ou não sou amiga de Oscar. Ora, não sou amiga de Clara. Assim:

A alternativa **"C "** está correta.

Vamos escrever na linguagem simbólica cada premissa que o texto informa.

$$Sou\ \underbrace{amiga\ de\ Abel}_{p}\ ou\ \underbrace{amiga\ de\ Oscar}_{q}\ \cdot\ p \vee q$$

$$Sou\ \underbrace{amiga\ de\ Nara}_{r}\ ou\ \underbrace{não\ sou\ amiga\ de\ Abel}_{\sim p}\ \cdot\ p \vee \sim p$$

$$Sou\ \underbrace{amiga\ de\ Clara}_{r}\ ou\ \underbrace{não\ sou\ amiga\ de\ Oscar}_{\sim p}\ \cdot\ s \vee \sim q$$

$$Ora,\ \underbrace{não\ sou\ amiga\ da\ Clara}_{\sim s}\ \cdot \sim s$$

O próximo passo é assumir que todas as premissas são verdadeiras. Começaremos com a proposição simples e, usando o valor lógico da disjunção, encontraremos os valores lógicos.

$$\underbrace{p}_{V} \vee \underbrace{q}_{F}$$

$$\underbrace{r}_{V} \vee \underbrace{\sim p}_{F}$$

$$\underbrace{s}_{F} \vee \underbrace{\sim q}_{V}$$

$\sim s$(v)

Análise:

Eu sou amiga de Abel.

Eu não sou amiga de Oscar.

Eu sou amiga de Nara.

Eu não sou amiga de Clara.

Analisando as alternativas:

A) Incorreta. Não sou amiga de Nara (falso) **e** sou amiga de Abel (verdade), na tabela da conjunção **F V = F**.

B) Incorreta. Não sou amiga de Clara (verdade) **e** não sou amiga de Nara (falso), na tabela da conjunção **V F = F**.

C) Correta. Sou amiga de Nara (verdade) **e** sou amiga de Abel (verdade), na tabela da conjunção **V V = V**.

D) Incorreta. Sou amiga de Oscar (falso) **e** sou amiga de Nara (verdade), na tabela da conjunção **F V = F**.

E) Incorreta. Sou amiga de Oscar (falso) e não sou amiga de Clara (verdade), na tabela da conjunção F V = F.

2. (Fundação Carlos Chagas) Se não leio, não compreendo. Se jogo, não leio. Se não desisto, compreendo. Se é feriado, não desisto. Então:

A alternativa **"A "** está correta.

Vamos escrever cada declaração na linguagem simbólica. Veja que, em todas as declarações, temos a condicional.

Se **não leio, não compreendo**. $\sim p \rightarrow q$

Se **jogo, não leio**. $r \rightarrow \sim p$

Se **não desisto, compreendo**. $\sim s \rightarrow \sim q$

Se **é feriado, não desisto**. $t \rightarrow \sim s$

Temos, então:

$r \rightarrow \sim p$; $\sim p \rightarrow q$; $\sim s \rightarrow \sim q$; $t \rightarrow \sim s$

Agora vamos fazer as implicações:

$r \rightarrow \sim p \Rightarrow \sim p \rightarrow q \Rightarrow q \rightarrow s \Rightarrow s \rightarrow \sim t$

Podemos concluir que $r \rightarrow \sim t$, ou seja: Se jogo, não é feriado.

Observação:

Usando a contrapositiva ($p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$), podemos escrever:

$\sim s \rightarrow \sim q \Leftrightarrow \sim(\sim q) \rightarrow \sim(\sim s) \Leftrightarrow q \rightarrow s$

$t \rightarrow \sim s \Leftrightarrow \sim(\sim s) \rightarrow \sim t \Leftrightarrow s \rightarrow \sim t$

CONCLUSÃO

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A lógica está presente no nosso cotidiano, pois é através dela que organizamos o nosso pensamento e tomamos decisões corretas. Dessa forma, fica clara a necessidade de conhecer os fundamentos da lógica.

Neste conteúdo, vimos de forma breve um pouco da história da lógica e os matemáticos que, cada um em seu tempo, contribuíram para a evolução dela até os dias atuais. Conhecemos, ainda, um pouco da álgebra booleana.

O assunto é extenso, mas agradável e, com certeza, desperta o desejo de conhecer mais sobre cada tópico estudado. Apresentado de forma simples, este conteúdo trouxe alguns exemplos do nosso cotidiano, além de análises feitas do ponto de vista lógico, para que os conceitos apresentados fossem compreendidos com clareza.

Além da aplicação em situações do cotidiano, é importante ressaltar que o conhecimento da Lógica em geral e do Cálculo Proposicional, em especial, é relevante e necessário para o desenvolvimento de diversas disciplinas, em especial nas áreas das Engenharias e das Ciências Exatas, onde se inclui a Computação.

Para ouvir um *podcast* sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

AVALIAÇÃO DO TEMA:

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. **Iniciação à lógica matemática**. 18. ed. São Paulo: Nobel, 2002.

BARBOSA, M. A.**Introdução à lógica matemática para acadêmicos**. Curitiba: InterSaberes, 2017.

BARROS, D.M. **Raciocínio lógico, matemático e quantitativo**. São Paulo: Novas Conquistas São Paulo, 2001.

DAGHLIAN, J. **Lógica e álgebra de Boole**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

FERNANDES, D. C. R. **Lógica matemática**. Rio de Janeiro: SESES, 2016.

HEGENBERG, L. **Lógica**: o cálculo de predicados. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

LEITE, A. E.; CASTANHEIRA, N. P. **Raciocínio lógico e lógica quantitativa**. Curitiba: InterSaberes, 2017.

MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. **Lógica e linguagem cotidiana**: verdade, coerência, comunicação, argumentação. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

EXPLORE+

Para saber mais sobre os assuntos abordados neste conteúdo:

Leia os artigos:

A lógica no cotidiano e a lógica na matemática, de Flávia Soares.

A álgebra boolena presente nos circuitos lógicos, de Vilton Ricardo dos Santos e Cassius Gomes de Oliveira.

Assista aos vídeos:

Grandes Pensadores: Aristóteles, com Liliana de Castro, no Youtube.

A lógica de Alice, no site da Unicamp.

CONTEUDISTA

Ana Lucia de Sousa

CURRÍCULO LATTES