NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES QUANTIFICADAS

VARIÁVEIS LIVRES E VARIÁVEIS LIGADAS

As variáveis no cálculo de predicados, presentes nas sentenças abertas, podem ser variáveis livres ou ligadas, mas, para verificarmos essas variáveis, precisamos analisar o alcance ou abrangência (chamado de escopo) dos quantificadores presentes nas proposições.

Consideremos a expressão do tipo: $(\exists x)(x + y < 4)$, onde A é o conjunto-universo definido por $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Note que não conhecemos o valor lógico dessa expressão, pois temos duas variáveis: x e y. A variável x está definida no conjunto A e podemos dizer que é uma variável ligada ao quantificador existencial, pois os seus valores estão definidos em A.

Atenção
Não conhecemos a variável y, então dizemos que y é uma variável livre. Ela não possui nenhum valor fixo ou particular.

Na verdade, a expressão dada é uma sentença aberta, e não uma proposição!

NEGAÇÃO DE SENTENÇAS ABERTAS COM O QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Vamos considerar a expressão abaixo e o conjunto universo H de todos os homens.

$$(\forall x \in H)(x \text{ é bom motorista})$$

Nessa expressão, temos que “para todos as pessoas de *H*, tais pessoas, os homens, são bons motoristas”. Para negar essa expressão com a presença do quantificador universal, basta colocar a negação antes do quantificador.

$$\neg(\forall x \in H)(x \text{ é bom motorista})$$

Quando colocamos a negação na frente do quantificador universal, dizemos que “não é verdade que todos os homens são bons motoristas”.

Portanto, a negação de proposição com quantificador universal é equivalente a:

$$\sim(\forall x, p(x)) \Leftrightarrow \exists(\sim p(x))$$

Alternativamente, podemos escrever:

$$(\exists x)(x \text{ não é bom motorista})$$

Na linguagem corrente, temos: existe pelo menos um homem que não é bom motorista.

Saiba mais
Na linguagem corrente, temos algumas expressões que podemos usar para negar o quantificador universal: “Pelo menos um”, “ao menos um”, “existe um”, “algum” ou “existe pelo menos um”. Todos seguidos do “não”.
Na linguagem corrente, temos algumas expressões que podemos usar para negar o quantificador existencial.

Veja algumas dessas expressões:

Negação do “Algum”

Podemos usar: nenhum, todo, seguido de não.
Exemplo: alguns homens são bons motoristas.
Negação: **nenhum** homem é bom motorista.
Todo homem **não** é bom motorista.

Negação do “Nenhum”

Podemos usar: algum, pelo menos um.
Exemplo: nenhum homem é elegante.
Negação: **algum** homem é elegante.
Pelo menos um homem é elegante.

Exemplo

1. Dê a negação da sentença: $(\forall x)(x - 3 \geq 4)$.

SOLUÇÃO

A negação é equivalente a $\sim(\forall x, p(x)) \Leftrightarrow \exists (\sim p(x))$

$\sim(\forall x)(x - 3 \geq 4) \Leftrightarrow \exists x\ (x - 3 < 4)$

2. Dê a negação da sentença: $(\exists x)(x + 3 = x)$.

SOLUÇÃO

A negação é equivalente a $\sim(\exists x, p(x)) \Leftrightarrow \forall x\ (\sim p(x))$

$\sim(\exists x)(x + 3 = x) \Leftrightarrow (\forall x \in R)(x + 3 \neq x)$

3. Dê a negação da sentença: $(\forall x \in A)(p(x)) \wedge (\exists x \in A)(q(x))$.

SOLUÇÃO

Nessa sentença, vamos aplicar a regra de negação da conjunção.

$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

Temos, então:

$\sim[(\forall x \in A)(p(x)) \vee (\exists x \in A)(q(x))]$

$\sim(\forall x \in A)(p(x)) \vee \sim(\exists x \in A)(q(x))$

$\exists x \in A)(\sim p(x)) \vee (\forall x \in A)(\sim q(x))$