PROPOSIÇÕES QUANTIFICADAS

Vamos começar pensando nas expressões:

“para todo”

“qualquer que seja”

“existe pelo menos um”

Essas expressões, entre outras, são usadas em frases muito comuns no nosso cotidiano. Por exemplo, quando falamos “Todos os homens são elegantes”. Veja que temos um conjunto formado por homens elegantes. Ser elegante é a propriedade desse conjunto. Dessa forma, todos os homens estão atendendo a essa propriedade, que é ser elegante.

Alternativamente, podemos falar que “Existe pelo menos um homem que não é elegante”. Veja que no conjunto formado por homens elegantes existe um homem que não é elegante.

Agora considere a seguinte sentença matemática:

“Para todo x, x < 2”

Veja que essa sentença tem o predicado “x < 2”, que apresenta a propriedade da variável x que é “ser menor do que 2”. Acompanhando esse predicado, temos a expressão “para todo”.

Saiba mais

A palavra “todos” e as expressões “existe pelo menos um” e “para todos” são chamadas de quantificadores.

Utilizamos, então, dois quantificadores que serão objeto do nosso estudo: o quantificador universal e o quantificador existencial. Veremos que também podem ser utilizados quantificadores para transformar sentenças abertas em sentenças fechadas.

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Vamos analisar, inicialmente, duas sentenças abertas:

(I) a sentença aberta p(x) dada por “x + 2 > 2”

Essa sentença é aberta no conjunto dos números naturais (N), ou seja, o conjunto universo ou o domínio é N, em que

N = {1, 2, 3, . . .}.

Comentário

Não podemos esquecer de definir sempre o conjunto universo, pois é nesse conjunto que analisaremos os valores para atribuirmos à variável x.

Agora devemos verificar se o valor atribuído a x torna a sentença aberta p(x) uma proposição verdadeira. No conjunto dos números naturais, vamos considerar x = 1, x = 2 e x = 3.

Para x = 1, temos "1 + 2 > 1" verdadeira.

Para x = 2, temos "2 + 2 > 2" verdadeira.

Para x = 3, temos "3 + 2 > 3" verdadeira.

Atenção
Podemos observar que P(x) = "x + 2 > x" é, na verdade, uma proposição verdadeira para todos os valores de x no conjunto dos números naturais.
Com relação ao conjunto verdade, dizemos que ele é o próprio conjunto dos números naturais.

$$\mathbf{V_p = N}$$

Lembrando que estamos usando V_p como notação para o conjunto verdade.

(II) a sentença aberta P(x) = "x^2 = 2"

Agora vamos considerar a sentença aberta P(x) = "$x^2 = x$" no conjunto dos números reais (R), ou seja, o conjunto universo é R.

Observe que essa sentença não é verdadeira para todos os números reais x. Veja:

Para x = 1, temos

"$(1)^2 = 1$" verdadeira.

Para x = −1, temos "$(-1)^2 = -1$" falsa, pois $(-1)^2 = 1$ e $1 \neq -1$.

Logo, P(−1) é falsa.

Nesse caso, dizemos que encontramos um contraexemplo.

Agora podemos compreender o quantificador universal a partir da análise dos exemplos anteriores.

Dada uma proposição ou sentença aberta p(x) em A, em que A é o conjunto universo ou domínio ($A \neq 0$) e o conjunto verdade $V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$. Veja que, quando todos os elementos do conjunto universo A satisfazem p(x), podemos dizer que p(x) torna-se uma proposição verdadeira para todos os valores de x em A. O conjunto verdade é $V_p = A$.

O quantificador universal é representado pelo símbolo ∀.

Dessa forma, usaremos o quantificador universal quando nos referirmos a todos os elementos do conjunto universo.

Como escrever "Para todo x em A, p(x)" com a simbologia da lógica matemática?

É simples, veja:

Para representarmos as expressões "para todos" e "qualquer que seja", devemos colocar o símbolo ∀ seguido do x antes de p(x). Podemos dizer que ∀ x representa uma operação lógica que tem por finalidade transformar uma sentença aberta p(x) em A, que não tem nenhum valor lógico, numa sentença verdadeira ou falsa. Essa operação é denominada quantificação universal.

$(\forall\ x \in A)(p(x))$ (para todo x, p(x) é verdadeira)

∀ x (Lê-se: para todo x ou qualquer que seja x)

Também podemos escrever:

$\forall\ x \in A,\ p(x)$ ou $\forall\ x \in A:\ p(x)$

Exemplo

Veja como fica a sentença aberta dada em (I):

Com relação à sentença aberta p(x), dada por "x + 2 > x" em N, podemos escrever:

$(\forall\ x \in N)(x + 2 > x)$

É uma sentença ou proposição verdadeira.

Nesse caso, temos:

$V_p = \{x \mid x \in N \wedge (x + 2 > x)\} = N$ Verdadeira

Veja como fica a sentença aberta dada em (II):

Com relação à sentença aberta p(x) representada por "$x^2 = x$" no conjunto dos números reais (R), podemos escrever:

$(\forall\ x \in R)(x^2 = x)$

É uma sentença ou proposição falsa.

Nesse caso, temos:

$V_p = \{x \mid x \in R \wedge (x^2 = x)\} \neq R$ Falsa

Quando o conjunto universo é finito, dizemos que a proposição $(\forall\ x \in A)(p(x))$ é equivalente à conjunção.

Por exemplo:

Vamos considerar a sentença aberta p(x) = “x é par” em A = {1, 2, 3, 4}.

Então temos que:

$((\forall\ x \in A)(x \text{ é par})) \Leftrightarrow (2 \text{ é par} \wedge 4 \text{ é par})$

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

(I) A sentença aberta p(x) dada por “x > 4”

Vamos analisar, inicialmente, duas sentenças:

Essa sentença é aberta no conjunto dos números reais (R).

Veja que para todos os números reais essa sentença não é verificada; ela é falsa. Observe:

Para x = 1, temos “1 > 4” falsa.
Para x = 5, temos “5 > 4” verdadeira.

Note que no conjunto dos números reais existe pelo menos um elemento x que satisfaz a propriedade p(x).

Portanto, P(x) = "x > 4" é verdadeira e o conjunto verdade, pois, é $V_p \neq \emptyset$.

(II) a sentença aberta p(x) dada por “x = x + 2”

Agora vamos considerar a sentença aberta p(x) dada por “x = x + 2” no conjunto dos números reais (R), ou seja, o conjunto universo é R.

Observe que essa sentença é falsa para todos os números reais x. Veja:

Para x = 1, temos “1 = 1 + 2” falsa.
Para x = −1, temos “−1 = −1 + 2” falsa.
Para x = 2, temos “2 = 2 + 2” falsa.
Logo, p(x) é falsa e o conjunto verdade é $V_p = \emptyset$.

Agora podemos definir o quantificador existencial.

Dada uma proposição ou sentença aberta p(x) em A, em que A é o conjunto universo ou domínio ($A \neq \emptyset$) e o conjunto verdade $V_p = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$. Quando existe pelo menos um elemento do conjunto universo A que satisfaz p(x), podemos dizer que p(x) torna-se verdadeira. Ou seja, o conjunto verdade é não vazio: $V_p \neq \emptyset$.

Comentário
Com relação ao quantificador existencial temos, por exemplo, as expressões: existe pelo menos um, existe algum, algum e existe.
O quantificador existencial é representado pelo símbolo ∃.

Como escrever “Existe x em A, p(x)”, “Para algum x ∈ A, p(x)” ou “Existe pelo menos um x em A, tal que p(x)” com a simbologia da lógica matemática?

Para representarmos as expressões “Para algum”, “Existe” e “Existe pelo menos um” usaremos o símbolo ∃ seguido do x antes de p(x).

$$(\exists x)(p(x))$$

∃ x (Lê-se: Existe x ou existe pelo menos um x ou existe algum x)

O quantificador existencial também é um operador lógico que tem por finalidade transformar uma sentença aberta p(x) em A, que não tem nenhum valor lógico, numa sentença verdadeira ou falsa. A operação é denominada quantificação existencial.

Comentário
Podemos usar também as seguintes notações: $(\exists\ x \in A)(p(x))$ ou $\exists\ x \in A: p(x)$ ou $\exists\ x \in A, p(x)$.

Exemplo

Veja como fica a sentença aberta dada em (I):

Com relação à sentença aberta p(x) dada por “x > 4” no conjunto dos números reais (R), podemos escrever:

$$(\exists\ x \in R)(x > 4)$$

É uma sentença ou proposição verdadeira.

Nesse caso, temos:

$$V_p = \{x \mid x \in R \wedge \text{"}x > 4\text{"}\} \neq \emptyset \text{ Verdadeira}$$

Veja como fica a sentença aberta dada em (II):

Com relação à sentença aberta p(x) dada por “x = x + 2” no conjunto dos números reais (R), podemos escrever:

$$(\exists\ x \in R)(x = x + 2)$$

É uma sentença ou proposição falsa.

Nesse caso, temos:

$$V_p = \{x \mid x \in R \wedge \text{"}x = x + 2\text{"}\} = \emptyset \text{ Falsa}$$

Quando o conjunto universo é finito, dizemos que a proposição $(\exists\ x \in A)\ (p(x))$ é equivalente à disjunção.

Por exemplo:

Vamos considerar a sentença aberta p(x) = “x é ímpar” em A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Então temos que:

$$(\exists\ x \in A)\ (x \text{ é ímpar}) \Leftrightarrow 1 \text{ é ímpar} \wedge 3 \text{ é ímpar} \wedge 5 \text{ é ímpar} \wedge 7 \text{ é ímpar}$$

Comentário
Considerando a expressão do tipo: $(\exists\ x)$(x é elegante) “Existe pelo menos um x ou existe algum x, tal que x é elegante”, ela é verdadeira se considerarmos o conjunto universo A das pessoas que não são elegantes.

QUANTIFICADOR DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Vamos considerar uma sentença aberta p(x): $x^2 = 25$ em N (conjunto dos números naturais).

Ao resolvermos essa equação, encontramos duas raízes: 5 e −5.

Atenção
Como o conjunto universo que estamos considerando é N, não consideramos o valor negativo −5. Dessa forma, temos apenas um único valor (x = 5), no conjunto dos números naturais, que confirma a existência da sentença aberta e faz com que seu valor lógico seja verdadeiro.
Quando temos situações como essa em que existe “um e um só $x \in A$ tal que p(x)” ou “existe um único $x \in A$" que satisfaz a sentença aberta p(x) em A, então estamos falando do quantificador de existência e unicidade.

Notação: $(\exists!\ x \in A)(p(x))$

Chamamos o símbolo ∃! de quantificador existencial de unicidade.

Lê-se: “Existe um e apenas um”.

Exemplo
Considere o conjunto universo A = {1, 3, 4, 5} e a sentença aberta em A dada por p(x): "x é par ".

Veja que existe apenas um elemento de A que satisfaz a propriedade de ser par, que é 4.

Portanto, x = 4 é o único valor que torna essa sentença aberta em fechada.

(∃! x ∈ A) x é par

QUANTIFICAÇÃO SOBRE SENTENÇAS ABERTAS COM MAIS DE UMA VARIÁVEL

Vamos analisar sentenças abertas em A com mais de uma variável. É muito comum nos depararmos com sentenças abertas que apresentam mais de uma variável. Usamos os quantificadores (universal e existencial) sobre elas e elas se transformam em outra sentença aberta com menos variáveis livres.

Por exemplo:

Vamos considerar uma expressão do tipo: $(\exists\ x \in A)(x + y < 8)$ em que A é o conjunto universo definido por $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Note que não conhecemos o valor lógico dessa expressão (que é uma sentença aberta na variável y), pois temos duas variáveis x e y.

Comentário
A variável x está definida no conjunto A, mas desconhecemos os valores de y. Isso faz com que y assuma qualquer valor, e por esse motivo chamamos y de variável livre. Também podemos ter expressões do tipo: $(\forall\ y \in A)(x + y < 8)$ em que A é o conjunto universo definido por $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Veja que nessa expressão a variável y está definida no conjunto A, mas nada sabemos sobre a variável x. Para determinarmos o valor lógico da expressão dada, dependemos da variável x. Como x pode assumir qualquer valor do conjunto universo escolhido, dizemos que é uma variável livre.

Exemplos

Vejamos alguns exemplos:

1. Determine o conjunto verdade das sentenças abertas em que o conjunto universo das variáveis x e y é $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) $(\forall\ x \in A)(2x + y < 11)$

Veja que o conjunto verdade é vazio, pois considerando x = 6, a propriedade não é verificada.

$2 \times (6) + y < 11$ é falso para qualquer valor y de A.

b) $(\exists;\ x \in A)(2x + y < 11)$

O conjunto verdade é {1, 2, 3}. A propriedade é verificada, pois, para qualquer y em A, a sentença aberta 2x + y torna-se uma proposição verdadeira.

Sentenças abertas podem conter quantificadores diferentes para cada variável.

Por exemplo:

Considerando os conjuntos A, B e C, temos:

$(\forall\ x \in A)(\forall\ y \in B)(p(x, y))$
Lê-se: “Para todo x em A e todo y em B, tem-se que p(x, y)”.
$(\forall\ x \in A)(\exists\ y \in B)(p(x, y))$
Lê-se: “Para todo x em A existe um y em B tal que p(x, y)”.
$(\exists\ x \in A)(\forall;\ y \in B)(\forall\ z \in C)(p(x, y, z))$
Lê-se: “Existe x em A tal que para todo y em B e z em C tem-se que p(x, y, z)”.
Verifique o valor lógico das sentenças abertas indicadas.

2. Considere o conjunto universo Z (conjunto dos números inteiros) e a proposição $(\forall\ x)(\exists\ y)(x < y)$.

Observe que, para cada inteiro x, existe um inteiro y ainda maior. Logo, o valor lógico dessa proposição é verdadeiro.

Trocando a ordem dos quantificadores $(\exists\ y)(\forall\ x)(x < y)$, obtemos uma sentença diferente. Nesse caso, o valor lógico da proposição é falso.