CONCEITOS DE IMPLICAÇÃO LÓGICA, EQUIVALÊNCIA E REGRAS DE INFERÊNCIA

IMPLICAÇÕES LÓGICAS

Vamos considerar duas proposições compostas p e Q.

Podemos dizer que a proposição p implica logicamente a proposição Q, se a proposição q tem o valor lógico verdadeiro sempre que a proposição p for verdadeira.

Para indicar essa implicação, usamos a seguinte notação:

P → q (lê-se: p implica Q.)

Exemplo 1:

Vamos verificar se a proposição composta (p ∧ q) implica logicamente a proposição composta (p ∨ q), através da tabela-verdade.

Simbolicamente: (p ∧ q) → (p ∨ q)

p	q	p ∧ q	p ∨ q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Veja que, na primeira linha da tabela-verdade, a proposição p ∧ q tem o valor lógico verdadeiro, e o mesmo ocorre com a proposição p ∨ q. Portanto, podemos dizer que p ∧ q implica logicamente p ∨ q, ou, ainda, p ∧ q → p ∨ q.

Exemplo 2:

Considere as proposições compostas: (p → p ∧ q) e (p ∧ q).

Podemos afirmar que: (p → p ∧ q) → (p ∧ q)?

Solução

Vamos construir a tabela-verdade.

p	**q**	**p → p ∧ q**	**p ∧ q**
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Veja que, nas duas últimas linhas, temos que a proposição (p → p ∧ q) é verdadeira e a proposição (p ∧ q) é falsa. Logo, é falso que:

(p → p ∧ q) → (p ∧ q)

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Sejam p e q duas proposições compostas. Dizemos que uma proposição p é equivalente a uma proposição q se as tabelas-verdade dessas proposições forem iguais. Usamos a seguinte notação:

P ↔ q (Lê-se: p equivalente Q.)

Podemos relacionar as equivalências e as tautologias. Dessa forma, dizemos que as proposições p e q são equivalentes se e somente se p ↔ q é uma tautologia. Além disso, elas também são equivalentes se forem uma tautologia ou uma contradição.

Tabela de equivalências

Comutativas	p ∧ q ↔ q ∧ p p ∨ q ↔ q ∨ p
Associativas	(p ∧ q) ∧ r ↔ p ∧ (q ∧ r) (p ∨ q) ∨ r ↔ p ∨ (q ∨ r)
Idempotentes	p ∧ p ↔ p p ∨ p ↔ p
Absorções	p ∧ (p ∨ q) ↔ p p ∨ (p ∧ q) ↔ p
Distributivas	p ∧ (q ∨ r) ↔ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r) p ∨ (q ∧ r) ↔ (p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
Leis de Morgan	~ (p ∧ q) ↔ ~p ∨ ~q

	$\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
Definições de implicação	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$ $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
Definições de bicondicional	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
Negação da bicondicional	$\sim (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
Negação	$\sim (\sim p) \leftrightarrow p$
Contrapositiva	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

As equivalências que aparecem com frequências são:

Leis de Morgan	**Negação do "e":** $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ **Negação do "ou":** $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
Definições de implicação	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$ $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$
Negação da condicional	$\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$
Negação	$\sim (\sim p) \leftrightarrow p$
Contrapositiva	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

Vejamos alguns exemplos:

1) (CESGRANRIO/2009) Se Marcos levanta cedo, então Júlia não perde a hora. É possível sempre garantir que:

a. Se Marcos não levanta cedo, então Júlia perde a hora.
b. Se Marcos não levanta cedo, então Júlia não perde a hora.
c. Se Júlia perde a hora, então Marcos levantou cedo.
d. Se Júlia perde a hora, então Marcos não levantou cedo.
e. Se Júlia não perde a hora, então Marcos levantou cedo.

Solução:

Nessa questão, devemos buscar uma proposição equivalente a:

Se **Marcos levanta cedo**, então **Júlia não perde a hora**.

Considerando:

- p: Marcos levanta cedo.
- q: Júlia não perde a hora.
- Na linguagem simbólica podemos escrever: $p \rightarrow q$.

Veja que temos uma condicional. Então, vamos verificar na tabela a equivalência onde aparece a condicional.

Contrapositiva: p → q ↔ ~q → ~p.

Vamos negar as proposições p e q.

- p: Marcos levanta cedo.
- **~p: Marcos não levanta cedo.**
- q: Júlia não perde a hora.
- **~q: Júlia perde a hora.**
- **~q → ~p: Se Júlia perde a hora, então Marcos não levanta cedo.**

Alternativa correta: D
2) (CBMERJ/2014 - Adaptado) Dizer que "não é verdade que 'Marcela não é bonita ou Maria não é organizada' " é logicamente equivalente a dizer que é verdade que:

a. Se Marcela não é bonita, então Maria é organizada.
b. Marcela é bonita e Maria é organizada.
c. Marcela é bonita ou Maria não é organizada.
d. Marcela é bonita ou Maria é organizada.
e. Marcela não é bonita e Maria não é organizada.

Solução:

> "**Não é verdade** que Marcela não é bonita **ou** Maria não é organizada."

Na linguagem simbólica, temos:

- ~p: Marcela não é bonita.
- ~q: Maria não é organizada.
- Não é verdade é uma negação (~).

Temos, então: ~(~p ∨ ~q)

Aplicando as Leis de De Morgan:

- **Negação do "ou"**: ~(p ∨ q) ↔ ~p ∧ ~q
- Assim, ~(~p ∨ ~q) ↔ ~(~p) ∧ ~(~q) = p ∧ q

Logo, Marcela é bonita e Maria é organizada.

Alternativa correta: B

Outras proposições associadas a uma condicional

Com relação à condicional p → q, temos as seguintes proposições associadas:

Proposição recíproca	q → p
Proposição contrário	~p → ~q

REGRAS DE INFERÊNCIA

Agora,vamos conhecer as regras de inferência. Através delas, podemos verificar a validade de argumentos. Considere a seguinte situação:

- Se Carlos estuda, então é aprovado em lógica.
- Se Carlos não estuda bem, então o professor é culpado.
- Se Carlos é aprovado em lógica, então seus pais ficam felizes.
- Os pais de Carlos não estão felizes.
- Logo, o professor é culpado.

Esse argumento é válido?

Não sabemos. Podemos verificar a validade de um argumento através da construção da tabela-verdade, mas nem sempre esse trabalho é tão simples, pois o número de linhas da tabela-verdade aumenta de acordo com a quantidade de proposições presentes na formulação dos argumentos.

Diante de situações como essa, podemos usar as regras de inferência. Elas são argumentos válidos/regras lógicas que podemos usar na validação de outros argumentos. Com elas, podemos realizar as demonstrações de forma mais simples.

As regras de inferência são importantes para os estudantes de computação no desenvolvimento de algoritmos, e para os estudantes de matemática que precisam conhecer as regras lógicas de demonstrações. Neste módulo, apenas conheceremos essas regras, pois elas são detalhadas em temas que tratam de métodos de demonstração.

Regra da adição (AD):

p (premissa)

p ∨ q (conclusão)

As premissas são colocadas sobre o traço horizontal. Abaixo dele temos a conclusão.

Exemplo

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

- p: A temperatura está baixa.
- q: Há nevoeiro.

Conclusão:

p ∨q: A temperatura está baixa ou há nevoeiro.

Regra da simplificação (SIMP)

p ∧ q

p

Exemplo

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

- p: A temperatura está baixa.
- q: Há nevoeiro.
- p ∧ q: A temperatura está baixa e há nevoeiro.

Conclusão:

- p: A temperatura está baixa.

Também podemos considerar:

- q: Há nevoeiro.

Modus Ponens (MP)

$p \rightarrow q$

$\underline{p}$

q

Exemplo

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

- p: A temperatura está baixa.
- q: Há nevoeiro.
- p → q: Se a temperatura está baixa então há nevoeiro.
- p: A temperatura está baixa.

Conclusão:

- q: Há nervoeiro.

Modus Tollens (MT)

$p \rightarrow q$

$\underline{\sim q}$

$\sim p$

Exemplo

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

- p: A temperatura está baixa.
- q: Há nevoeiro.
- p → q: Se a temperatura está baixa então há nevoeiro.
- ~q: Não há nevoeiro.

Conclusão:

- ~p: A temperatura não está baixa.

Silogismo Hipotético (SH)

$$\begin{array}{l} \mathbf{p \rightarrow q} \\ \underline{q \rightarrow r} \\ p \rightarrow r \end{array}$$

Exemplo

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

- p: A temperatura está baixa.
- q: Há nevoeiro.
- r: Os aviões não decolam.
- p → q: Se a temperatura está baixa então há nevoeiro.
- q → r: Se há nevoeiro então os aviões não decolam.

Conclusão:

- p → r: Se a temperatura está baixa então os aviões não decolam.

Silogismo Disjuntivo (SD)

$$\begin{array}{l} \mathbf{p \vee q} \\ \underline{\sim p} \\ q \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{p \vee q} \\ \underline{\sim q} \\ p \end{array}$$

Exemplo

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

- p: A temperatura está baixa.
- q: Há nevoeiro.
- p ∨ q: A temperatura está baixa ou há nevoeiro.
- ~p: A temperatura não está baixa.

Conclusão:

- q: Há nevoeiro.

Também podemos considerar:

- $p \vee q$: A temperatura está baixa ou há nevoeiro.
- $\sim q$: Não há nevoeiro.

Conclusão

- q: Há nevoeiro.
- p: A temperatura está baixa.

Regra da conjunção (CONJ)

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{p}\\ q\end{array}}{p \wedge q}$$

Exemplo

(Fundação Carlos Chagas - Adaptado) Consideraremos as seguintes proposições:

- p: A temperatura está baixa.
- q: Há nevoeiro.

Conclusão:

- $p \wedge q$: A temperatura está baixa e há nevoeiro.

ANÁLISE DOS ARGUMENTOS

Conhecendo as regras de inferência, sabemos que elas são importantes na validação de argumentos e para, a partir de proposições conhecidas, deduzirmos outras proposições.

No estudo de argumentos, consideraremos exemplos mais simples, nos quais poderemos fazer uso do valor lógico dos conectivos para analisarmos sua validade.

Um argumento é formado por um conjunto de proposições simples ou compostas, onde uma dessas proposições é a conclusão, que vamos chamar de **Q**.

O restante das proposições são as premissas ou hipóteses do argumento. Um argumento apresenta uma sequência de premissas:

- **Premissa 1**
- **Premissa 2**
- **Premissa 3**
- $\vdots$
- **Premissa n, $n \geq 1$.**

Logo, podemos indicar um argumento por:

$$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n \mapsto Q.$$

Dessa forma, podemos dizer que a conclusão q se deduz das premissas, ou que a conclusão q decorre das premissas.

Se as premissas e a conclusão têm valor lógico V (verdadeiro), dizemos que o argumento é válido. Na análise da validade de um argumento, consideramos que todas as premissas são verdadeiras. Se o argumento for inválido, chamamos de **sofisma** ou **falácia**.

Veja um exemplo de argumento:

Exemplo

(CEBRASPE/ABIN/2018 - Adaptado) As seguintes proposições lógicas formam um conjunto de premissas de um argumento:

- Se Pedro não é músico, então André é servidor da ABIN.
- Se André é servidor da ABIN, então Carlos não é espião.
- Carlos é um espião.

A partir dessas premissas, julgue o item a seguir, acerca de lógica de argumentação. Analise que, se a proposição lógica "Pedro é músico" for a conclusão desse argumento, então, as premissas, juntamente com essa conclusão, constituem um argumento válido.

Solução:

Premissas:

- Se Pedro não é músico, então André é servidor da ABIN.
- Se André é servidor da ABIN, então Carlos não é espião.
- Carlos é um espião.

Conclusão: Pedro é músico.

Consideramos todas as premissas e a conclusão verdadeiras.

1. Se Pedro não é músico, então André é servidor da ABIN. (V)

2. Se André é servidor da ABIN, então Carlos não é espião. (V)
3. Carlos é um espião. (V)

Conclusão: Pedro é músico (V)

Agora, começaremos a analisar a partir da proposição simples “Carlos é um espião”.

- **Se** Pedro não é músico (F) , **então** André é servidor da ABIN (F) . (V)
- **Se** André é servidor da ABIN (F) , **então** Carlos não é espião (F) . (V)
- Carlos é um espião. (V)

Logo, concluímos que Pedro é músico.

O argumento é válido.