NOÇÕES SOBRE DEMONSTRAÇÕES POR VACUIDADE, TRIVIAL, DIRETA E INDIRETA

MÉTODO DE DEMONSTRAÇÃO TRIVIAL

Em quase todas as implicações $P \Rightarrow Q$ que encontraremos, P e Q são frases abertas; ou seja, vamos realmente considerar
$P(x) \Rightarrow Q(x)$ ou $P(n) \Rightarrow Q(n)$ ou alguma implicação relacionada, dependendo de que variável será usada.

As variáveis x ou n (ou alguns outros símbolos) são usadas para representar elementos de algum conjunto S, que contextualiza as discussões, o domínio da variável.

Para cada valor de uma variável de seu domínio, teremos resultados de uma declaração.

Exemplo
Seja $P(n)$: $3n^2 - 4n + 1$ é par, onde $n \in Z$;

$P(1)$ é uma afirmação verdadeira, enquanto $P(2)$ é uma afirmação falsa.

Da mesma forma, raramente é o caso de $Q(x)$ ser verdadeiro para todo $x \in S$ ou que $Q(x)$ ser falso para todo $x \in S$.

Quando a instrução quantificada $\forall x \in S$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ for expressa como resultado ou teorema, muitas vezes escrevemos uma declaração como:

Para $x \in S$, se $P(x)$ então $Q(x)$.

ou como:

Seja $x \in S$. Se $P(x)$, então $Q(x)$. (1)

Assim, (1) é verdade se $P(x) \Rightarrow Q(x)$ for uma afirmação verdadeira para cada $x \in S$; enquanto (1) é falso se $P(x) \Rightarrow Q(x)$ for falso para pelo menos um elemento $x \in S$.

Para cada elemento $x \in S$, vamos verificar (ver a tabela da verdade abaixo) as condições sob as quais "$P(x) \Rightarrow Q(x)$" tem um valor-verdade V.

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \Rightarrow Q(x)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V

F	F	V

Assim, se *Q(x)* for verdadeiro para todo $x \in S$ ou *P(x)* for falso para todo $x \in S$, então, determinando a verdade ou falsidade de (1), torna-se consideravelmente mais fácil.
De fato, se pode ser mostrado que *Q(x)* é verdadeiro para todo $x \in S$, independentemente do valor da verdade de *P(x)*, então, de acordo com a tabela da verdade para a implicação, (1) é verdadeira. Isso constitui uma demonstração de (1) e é chamada de demonstração trivial.

Assim, a declaração abaixo é verdadeira, e uma demonstração (trivial) consiste apenas em observar que 3 é um inteiro ímpar.

Seja $n \in Z$. Se $3n > 0$, então 3 é ímpar.

Exemplo
Resultado 1
Seja $x \in R$. Se $x < 0$, então

$$x^2 + 1 > 0$$

Demonstração:
Sendo $x^2 \geq 0$ para cada número real x, segue-se que

$$x^2 + 1 > x^2 \geq 0$$

Assim,

$$x^2 + 1 > 0$$

C.Q.D (uma abreviatura que significa “como queríamos demonstrar”).

DEMONSTRAÇÃO TRIVIAL

Considere:

$P(x): x < 0$ e $Q(x): x^2 + 1 >$

onde $x \in R$.

Então o Resultado 1 afirma a verdade de: para todo $x \in R$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Desde que verificamos que *Q(x)* é verdadeiro para cada $x \in R$, segue que $P(x) \Rightarrow Q(x)$ é verdadeiro para todo $x \in R$ e, assim, o resultado 1 é verdadeiro.

Nesse caso, quando considerado sobre o domínio *R*, *Q(x)* é, na verdade, uma afirmação verdadeira. Foi esse fato que nos permitiu dar uma demonstração trivial do Resultado 1.

A demonstração do Resultado 1 não depende de $x < 0$.

De fato, desde que $x \in R$, nós poderíamos ter substituído "$x < 0$" por qualquer hipótese (incluindo o mais satisfatório "$x \in R$"), e o resultado ainda seria verdadeiro. Na verdade, esse novo resultado tem a mesma demonstração. Para ter certeza, é raro, de fato, quando uma demonstração trivial é usada para verificar uma implicação; no entanto, isso é um lembrete importante da tabela-verdade mostrada.

MÉTODO DE DEMONSTRAÇÃO POR VACUIDADE

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ frases abertas sobre um domínio S. Assim, $\forall x \in S$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ é uma afirmação verdadeira, se puder ser mostrado que $P(x)$ é falso para todo $x \in S$ (independentemente do valor da verdade de $Q(x)$), de acordo com a tabela-verdade para implicação. Tal demonstração é chamada **demonstração por vacuidade**.

Por exemplo, a frase aberta $n \in Z$. Se n for par, então $n^3 > 0$ é uma afirmação verdadeira.

Vamos a um exemplo mais interessante de uma demonstração por vacuidade.

Exemplo
Resultado 2:
Seja $x \in R$. Se $x^2 - 2x + 2 \leq 0$, então

$$x^3 \geq 8$$

Demonstração:
Primeiro observe que

$$x^2 - 2x + 1 = (x -)^2 \geq 0$$

Portanto,

$$x^2 - 2x + 2 = (x -)^2 + 1 \geq 1 > 0$$

Assim,

$$x^2 - x^2 - 2x + 2 \leq 0$$

é falso para todo $x \in R$ e a implicação é verdadeira. C.Q.D

Para

$$P(x): x^2 - 2x + 2 \geq 0 \text{ e } Q(x): x^3 \geq 8$$

O resultado 2 afirma a verdade de:

$$\forall x \in R, P(x) \Rightarrow Q(x)$$

Desde que verificamos que $P(x)$ é falso para cada $x \in R$, segue-se que $P(x) \Rightarrow Q(x)$ é verdadeiro para cada $x \in R$.

Nesse caso, *P(x)* é uma declaração falsa para cada $x \in R$. Isso é o que nos permitiu dar uma demonstração de vacuidade do resultado 2.

Na demonstração do resultado 2, a verdade ou a falsidade de $x^3 \geq 8$ não desempenham nenhum.
Como mencionamos, uma demonstração trivial raramente é encontrada em matemática; no entanto, isso não pode ser dito de demonstrações por vacuidade.

MÉTODO DE DEMONSTRAÇÃO DIRETA

Demonstração Direta de $P \Rightarrow Q$:

A estratégia é supor que *P(x)* é verdadeiro para um *x* arbitrário $\in S$>, e mostrar que *Q(x)* é verdadeiro para esse *x*.

Para ilustrar esse tipo de demonstração, vamos assumir que conhecemos as seguintes propriedades básicas sobre números inteiros:

O negativo de um inteiro é um inteiro.
A soma ou a diferença ou o produto entre dois inteiros é um inteiro.
Um inteiro n é par se existe um inteiro *k*, tal que $n = 2k$.
Um inteiro *n* é ímpar se existe um inteiro *k*, tal que $n = 2k + 1$.

Exemplo 1
Se *n* é um inteiro ímpar, então $5n + 3$ é um inteiro par.

Demonstração:
Suponha que *n* é um inteiro ímpar. Então, há *k* inteiro tal que

$$n = 2k + 1$$

Assim,

$$5n + 3 = 5\times(2k + 1) + 3 = 10k + 8 = 2\times(5k + 4)$$

Como $5k + 4$ é um inteiro, segue-se que $5n + 3$ é par. C.Q.D.

Exemplo 2
Resultado:
Se *n* é um inteiro ímpar, então $4n^3 + 2n - 1$ é ímpar.

Demonstração:
Suponha que *n* é ímpar. Assim,

$$n = 2k + 1$$

para algum inteiro *k*. Logo,

$$4n^3 + 2n - 1 = 4\times(2k + 1)^3 + 2\times(2k + 1) - 1$$

$$= 4\times(4k^3 + 12k^2 + 6k + 1) + 4k + 2 - 1$$

$$= 16k^3 + 48k^2 + 28k + 5 = 2\times(8k^3 + 24k^2 + 14k + 2) + 1 = 2k' + 1$$

Uma vez que $k' = 8k^3 + 24k^2 + 14k + 2$ é um inteiro (como $k \in Z$), segue que $4n^3 + 2n - 1$ é ímpar. C.Q.D.

Dica

1. Escreva uma demonstração para que outra pessoa possa lê-la.
2. Escreva frases completas, começando com "Demonstração" e terminando com " ".
3. Ao introduzir uma nova variável/símbolo, explique o que é o símbolo e a que conjunto a variável pertence.

Contrapositiva

A contrapositiva de uma implicação $P \Rightarrow Q$ é a implicação $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Exemplo 1
Seja

$$P(x): x = 2 \text{ e } Q(x): x^2 = 4$$

Logo:

$P \Rightarrow Q$: Se $x = 2$, então $x^2 = 4$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$: Se $x^2 \neq 4$, então $x \neq 2$

As implicações $P \Rightarrow Q$ e $\neg Q \Rightarrow \neg P$ são logicamente equivalentes, como mostra a tabela-verdade abaixo.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Uma demonstração por contraposição ou contrapositiva de $P \Rightarrow Q$ é uma demonstração direta de $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Exemplo 2
Resultado:
Seja $x \in Z$. Se $3x - 15$ é par, então x é ímpar.

Demonstração:
Suponha que x é par. Em seguida, $x = 2a$, para algum inteiro a. Então:

$$3x - 15 = 3\times(2a) - 15 = 6a - 15$$

$$= 2\times(?) + 1 = 2\times(3a - 8) + 1$$

Uma vez que $3a - 8 \in Z$, $3x - 15$ é par. C.Q.D.