Definição e características da função

O que é função?

A palavra **função** apareceu pela primeira vez em um artigo de Gottfried Leibniz, em 1692. Ele chamou de função as **quantidades geométricas variáveis relacionadas** a uma **curva**. No entanto, foi Daniel Bernoulli, em 1718, que definiu o conceito de função de maneira formal pela primeira vez, e se tratava de algo bem diferente do que conhecemos hoje em dia.

Para conhecer mais sobre a história e a formalização do conceito de função, leia o livro *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*.

Podemos perceber o conceito de função quando temos duas quantidades ("variáveis") e observamos que há uma relação entre elas. Se acharmos que, para cada valor da primeira variável, existe apenas um valor da segunda variável, dizemos que:

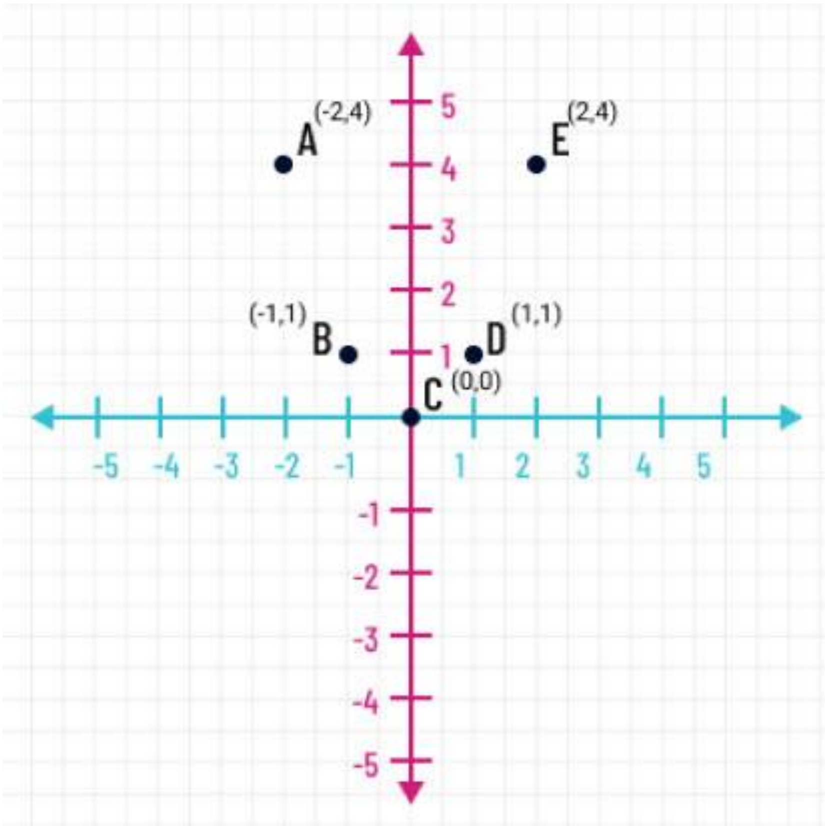
A **segunda variável** é uma função da **primeira variável**.

Exemplos de função

Exemplo 1

Vamos fazer uma tabela com a seguinte relação: a cada número real x, associamos o seu valor ao quadrado $\mathbf{x \cdot x = x^2}$ A seguir, podemos acompanhar o que ocorre com essa tabela de forma associada ao plano cartesiano.

Valor de x	**Valor de $y = x^2$**
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



Plano cartesiano.

Os valores da primeira coluna da tabela dependem explicitamente dos valores da segunda.

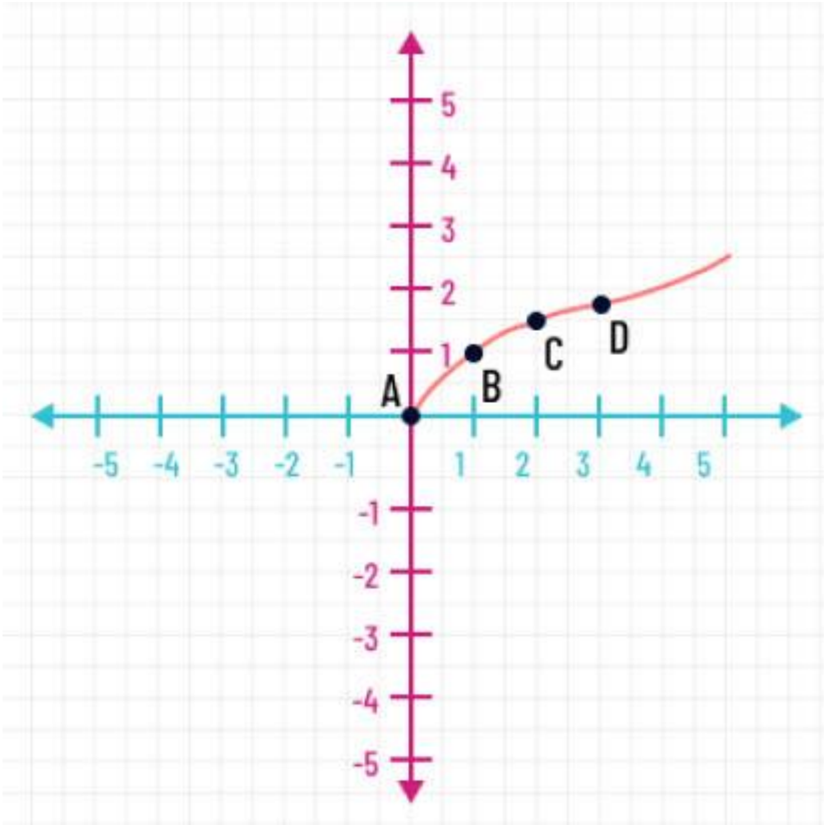
Devido à nossa experiência com o Ensino Médio, é possível ligar os pontos azuis, tendo, assim, melhor compreensão do todo que a tabela poderia nos dar.

Exemplo 2

Desta vez, faremos uma tabela com a seguinte relação: a cada número real x, associamos sua raiz quadrada $\sqrt{x}$.

Valor de x	**Valor de y = √x**
-1	i ∉ R
0	0
1	1
2	√2
3	√3
3	2

Pares ordenados de X e Y.
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Plano cartesiano.

Percebemos que **-1**, em particular, **não gera valores** em nossa tabela, pois estamos trabalhando apenas com **números reais**.

Note que todo valor **maior ou igual a zero** possui um lugar em nossa tabela. O caso é que os valores **menores que zero** não fazem parte dela.

O maior conjunto de valores admissíveis de uma função, em analogia à primeira coluna de nossas tabelas, é conhecido como domínio da função.

Vejamos a seguir o ultimo exemplo desse grupo.

Exemplo 3

Qual é o custo de azulejar qualquer parede quadrada, com azulejos quadrados de **10cm (0,1m) de lado**, sabendo que **cada 1m²** dos azulejos é **vendido a R$32** nas Casas Pitágoras?

Para solucionar essa questão, temos de analisar o problema e entender as suas variáveis. Primeiramente, devemos perceber que o metro quadrado depende do comprimento do lado do quadrado. Assim, podemos fazer uma primeira tabela:

Lado da parede quadrada	Parede em m²	Quantidade de azulejos
1	1	100
2	4	400
3	9	900
x	x^2	$100 \cdot x^2$

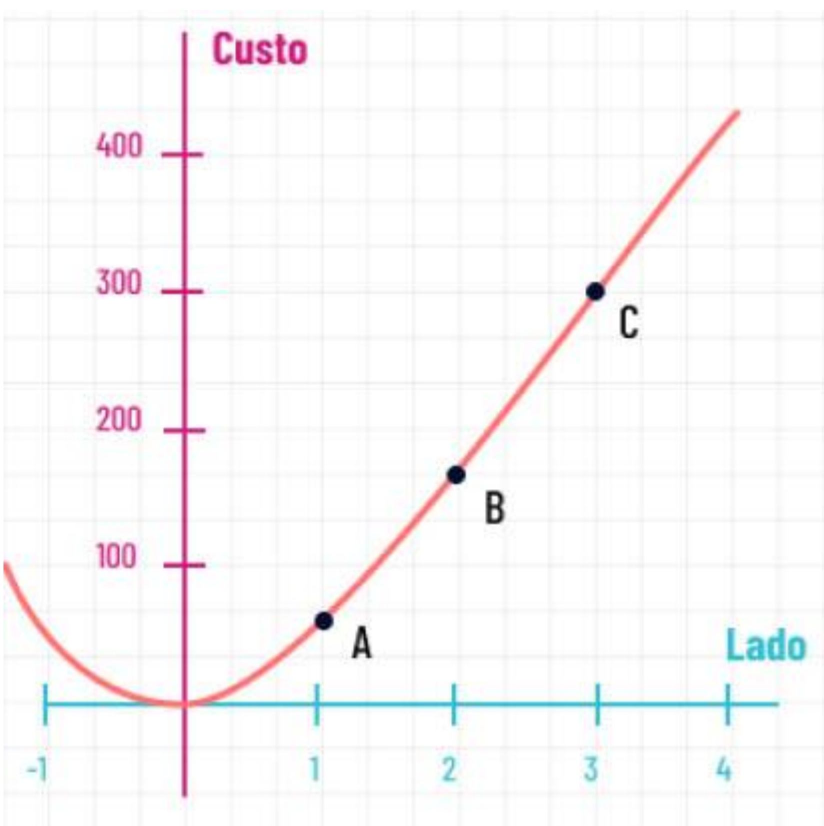
Informações do exemplo.
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Para preencher a última coluna, basta entendermos quantos azulejos de 0,1m de lado são necessários para preenchermos um metro quadrado. A figura exemplo ilustra a ideia de um metro quadrado dividido em azulejos de 10cm de lado e, como podemos ver, são necessários 100 azulejos.

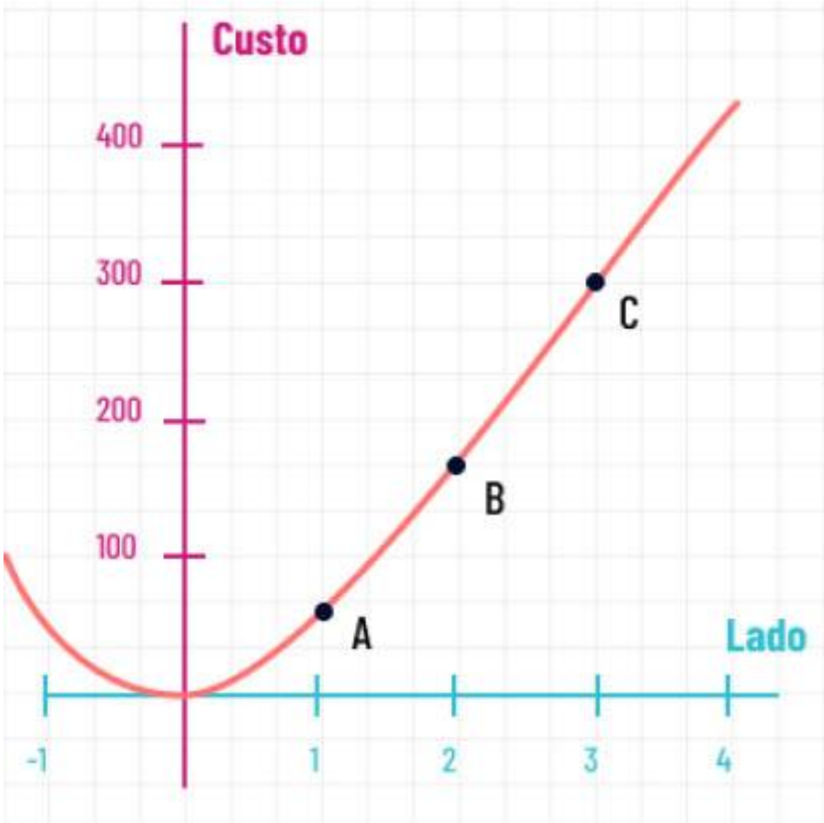
Podemos perceber que a quantidade 100 representa o número necessário de azulejos para preencher um metro quadrado de azulejos, que custa R$32 nas Casas Pitágoras.

Sendo assim, existe uma relação de 100 → R$32. Concluímos, então, que a tabela final relaciona a metragem da parede com o custo em azulejos.

Lado da parede quadrada	Custo em azulejos $
1	32
2	$32 \cdot 4$
3	$32 \cdot 9$
x	$32 \cdot x^2$



Custo x lado



Custo x lado

Daí, a relação que expressa o custo e a metragem da parede é **$Cx = 32 \cdot x^2$** reais

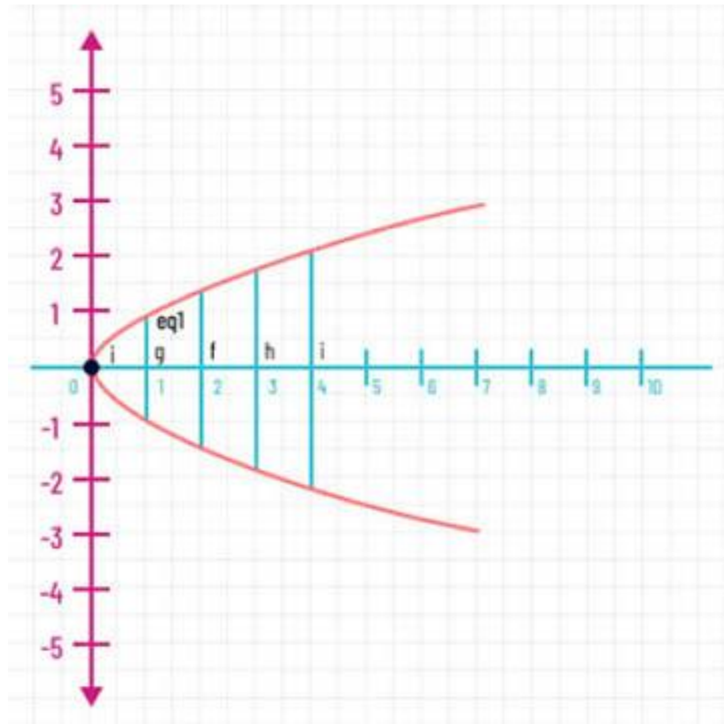
Ambiguidade

Um conceito importante sobre a construção da relação entre uma tabela e a sua representação gráfica é que ela **não pode ser ambígua**, isto é, os valores do que estamos caracterizando por variável dependente **não devem gerar duas possibilidades**.

Vamos entender melhor a questão da ambiguidade e por que ela não é uma função:

Veja como exemplo uma tabela com as soluções da equação $y^2 = x$, onde $x \in [0,\infty)$.

Valores de x	**Solução de $y^2 = x$**
0	0
1	1 ou -1
2	$\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$
4	2 ou -2



Valores de X.
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Neste exemplo, fica clara a ambiguidade pela **não unicidade das soluções do problema**, deixando-nos o dilema em cada ponto, se estamos considerando a parte positiva ou negativa.

Quando esse tipo de fenômeno ocorrer, diremos que a relação estabelecida **não é uma função**.

Portanto, uma função f é uma tabela de pares ordenados com a seguinte propriedade:Se (x,y) e (x,b) estiverem na **mesma tabela**, então **b = y**.

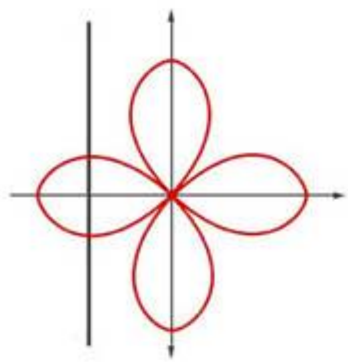
Resumindo

Uma tabela **não pode** conter **pares ordenados distintos** que possuam o mesmo primeiro elemento.

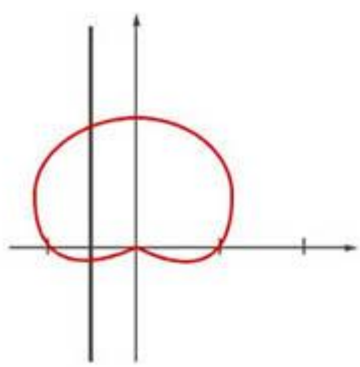
Sendo *f* uma função, o domínio de *f* é: o conjunto de todos os *x*, para o qual exista um *y*, tal que o par (*x,y*) esteja na tabela *f*.

Dessa forma, ao observarmos um gráfico no plano cartesiano, o que devemos perceber, a fim de entender se ele representa uma função, é se as **retas verticais** o **tocam** em um **único ponto**.

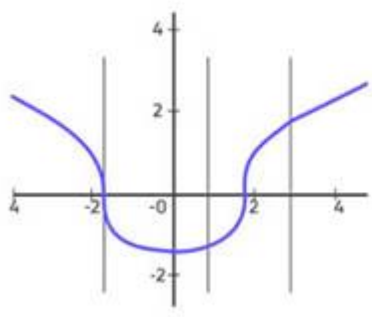
Veja os exemplos:



Não é função



Não é função



É função

Você já deve ter notado que **sempre associamos** as **tabelas** a uma **figura no plano cartesiano**, que representa todos os pontos possíveis das tabelas em questão.

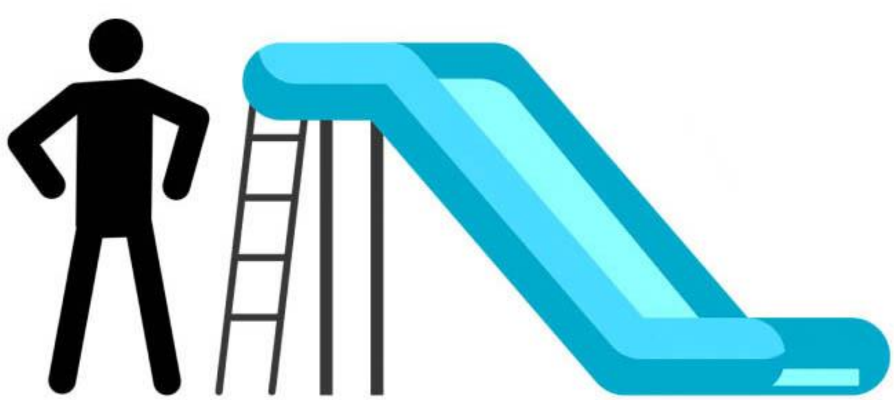
Essas figuras são chamadas de gráficos. Quando as tabelas representarem, de fato, uma função, a imagem será chamada de gráfico de função.

Reconhecimento e contexto

Agora, apresentaremos uma série de exemplos a fim de que você possa entender que nem sempre podemos, de forma explícita, construir a tabela, embora a relação com o gráfico ainda se faça presente.

Primeiro exemplo

A ilustração a seguir mostra um homem andando por um brinquedo em um parque:



A partir da imagem acima, pense na seguinte questão:

Quais diferentes medidas podemos ver em função do tempo associadas à ilustração?

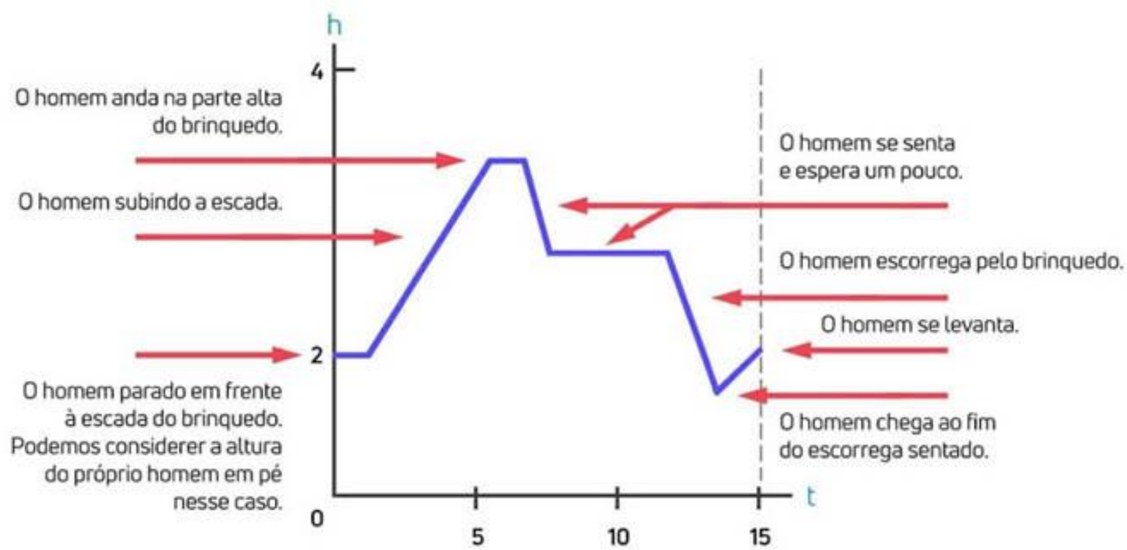
expand_more

A altura do homem em relação ao solo e sua velocidade variam em função do tempo.

Agora, ainda em relação à imagem apresentada no primeiro exemplo, tente responder a atividade proposta

Agora, com uma caneta e um papel, tente desenhar o gráfico da altura do homem **em função do** tempo.

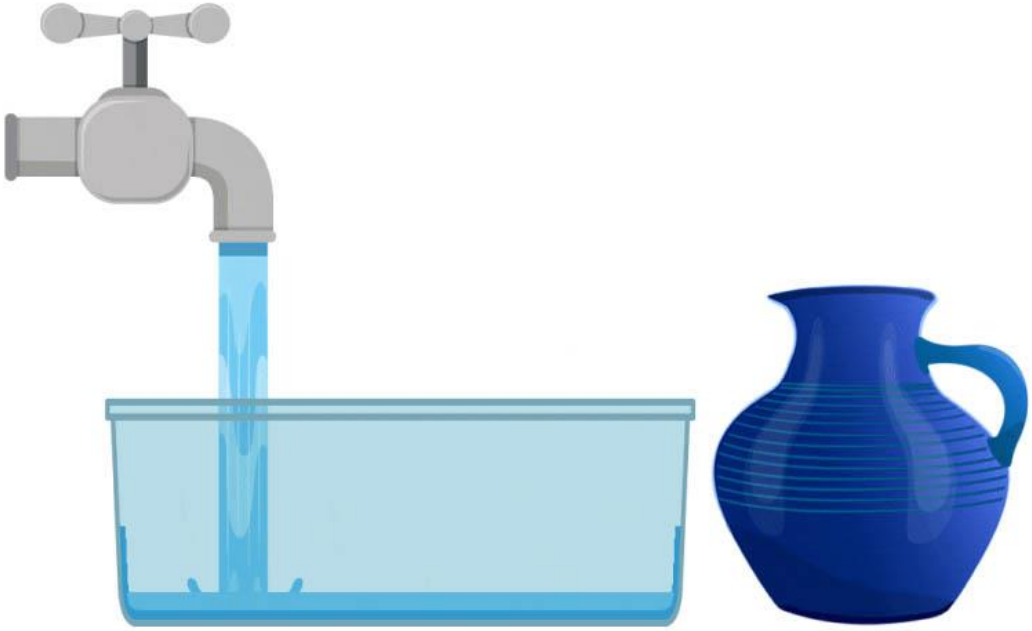
Observe o gráfico da **altura do homem** em função do **tempo**.



Altura em função do tempo.

Segundo exemplo

A ilustração a seguir apresenta um recipiente sendo cheio por água.



A partir da imagem acima, pensa na seguinte questão:

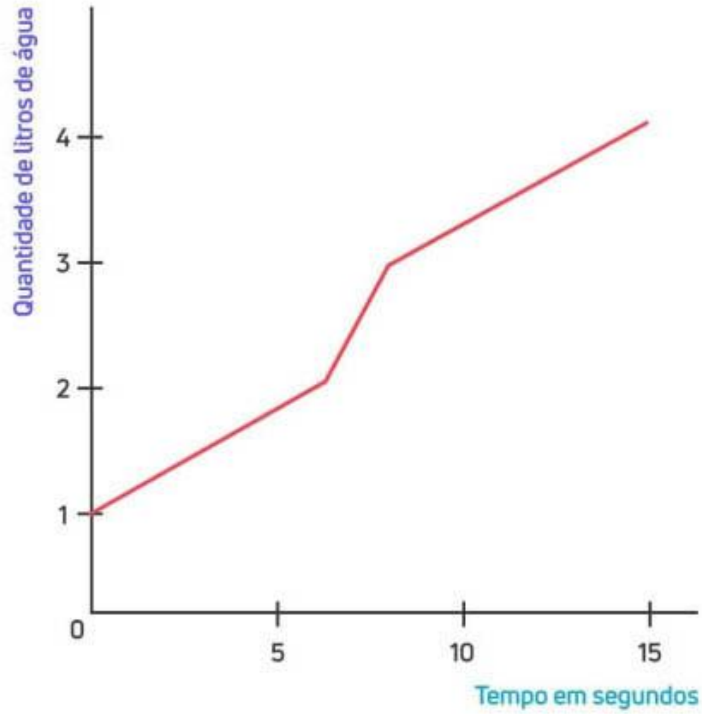
Quais diferentes variáveis podemos ver em função do tempo associadas à ilustração?

expand_more

Agora, ainda em relação à imagem apresentada no segundo exemplo, tente responder a atividade proposta.

Agora, com uma caneta e um papel, tente desenhar o gráfico da quantidade de litros de água **no recipiente em função do** tempo.

Ao analisarmos a ilustração com cuidado, percebemos que já havia água no balde; depois, ele recebe mais um litro de água, além do que já estava entrando, fazendo com que o fluxo de água fosse maior nesse intervalo de tempo, retornando, mais tarde, à vazão natural. Obtemos assim:



Quantidade de litros de água em função do tempo em segundos.

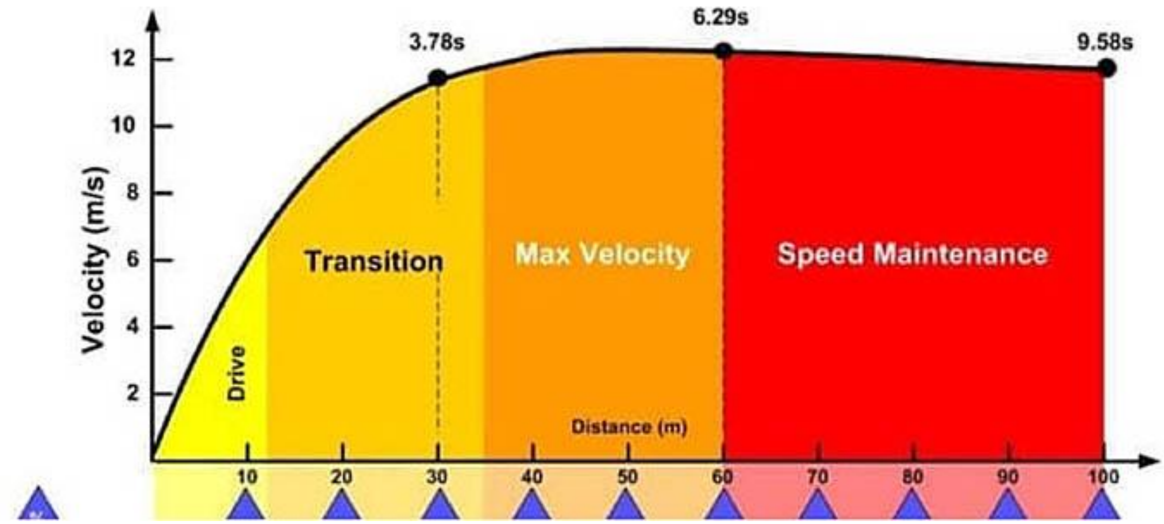
Os gráficos dos exemplos que acabamos de ver representam uma tabela em que a quantidade de água no recipiente ou a altura da cabeça do homem **variam sem ambiguidade** em **função do tempo**, apresentando, assim, o **conceito de função**.

Geralmente, na escola, estudamos funções como fórmulas preestabelecidas. No entanto, como vimos nos exemplos anteriores, essa ideia não é completa. Devemos ser capazes de enxergar o conceito de função na diversidade à nossa volta, conforme os exemplos a seguir:

Exemplo A
A imagem mostra um gráfico do desempenho do corredor Usain Bolt ao conquistar o recorde mundial dos 100 metros rasos, no campeonato mundial de atletismo.

A reta vertical apresenta a velocidade do corredor em metros por segundo (m/s), e a reta horizontal mostra a distância percorrida em metros.

O gráfico é uma função que mede a velocidade do corredor em cada momento da trajetória.



Exemplo B

Já esta imagem mostra o crescimento do PIB argentino, do início dos anos 1960 até a década de 2010.

O gráfico apresenta o histórico do desenvolvimento econômico argentino. A partir dele, podemos apresentar uma tendência, auxiliando um futuro investidor.