Domínio, imagem e contradominio de uma função

Função f

Definição

O domínio da função f é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a expressão (ou fórmula) que define a função assume valores reais, ou seja:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Veja nas imagens três representações gráficas de funções cuja lei de formação é $f(x) = x^2$ e os seus domínios.

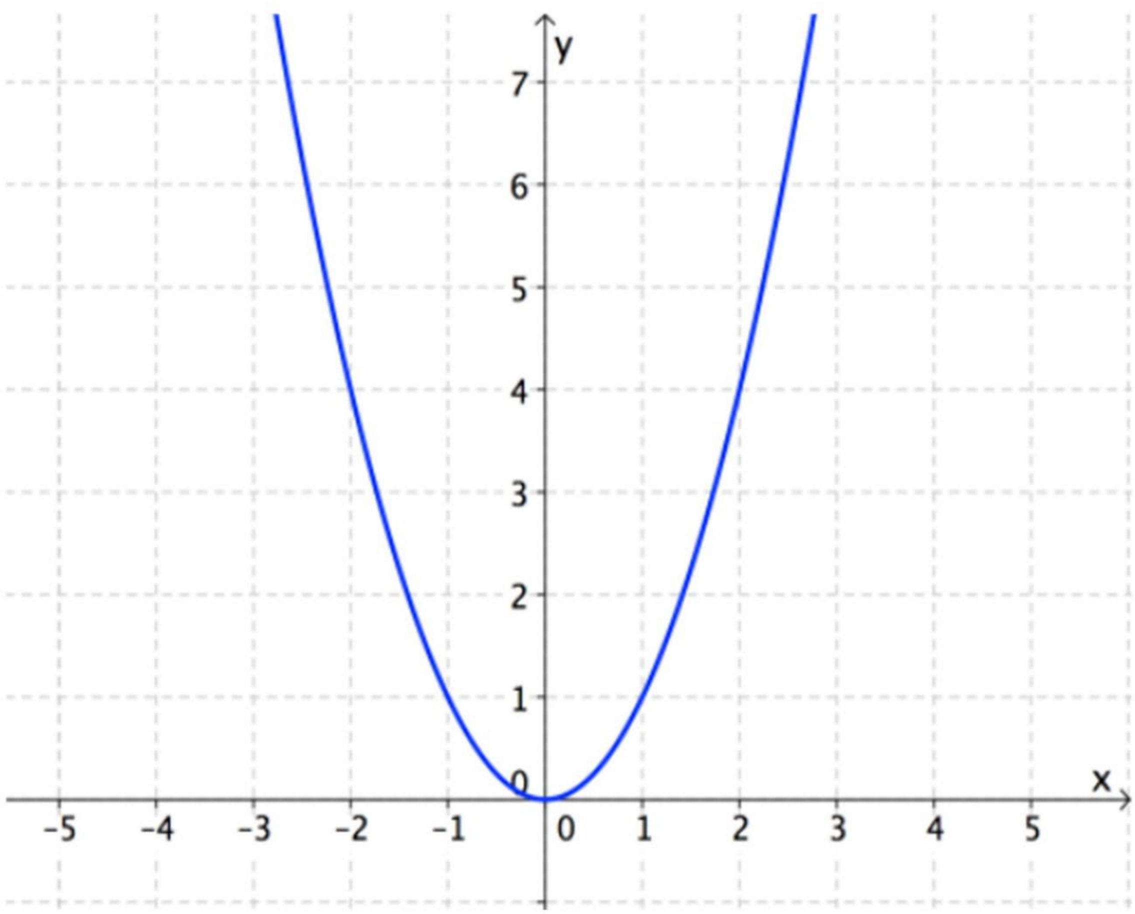

Gráfico: $\boldsymbol{D_1} = \mathbb{R}$

Loisi Carla Monteiro Pereira

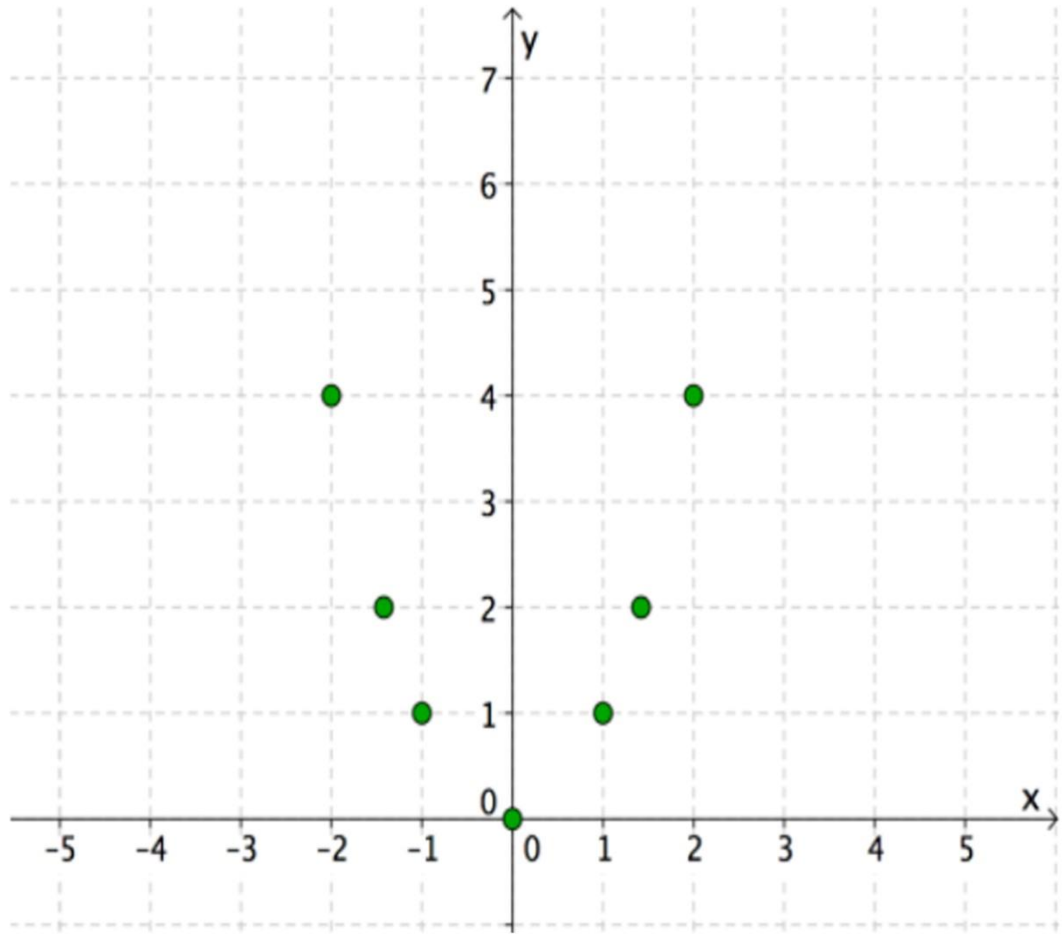

Gráfico: ***D*₂ = {-2;-√2;-1;0;1;√2;2}**
Loisi Carla Monteiro Pereira

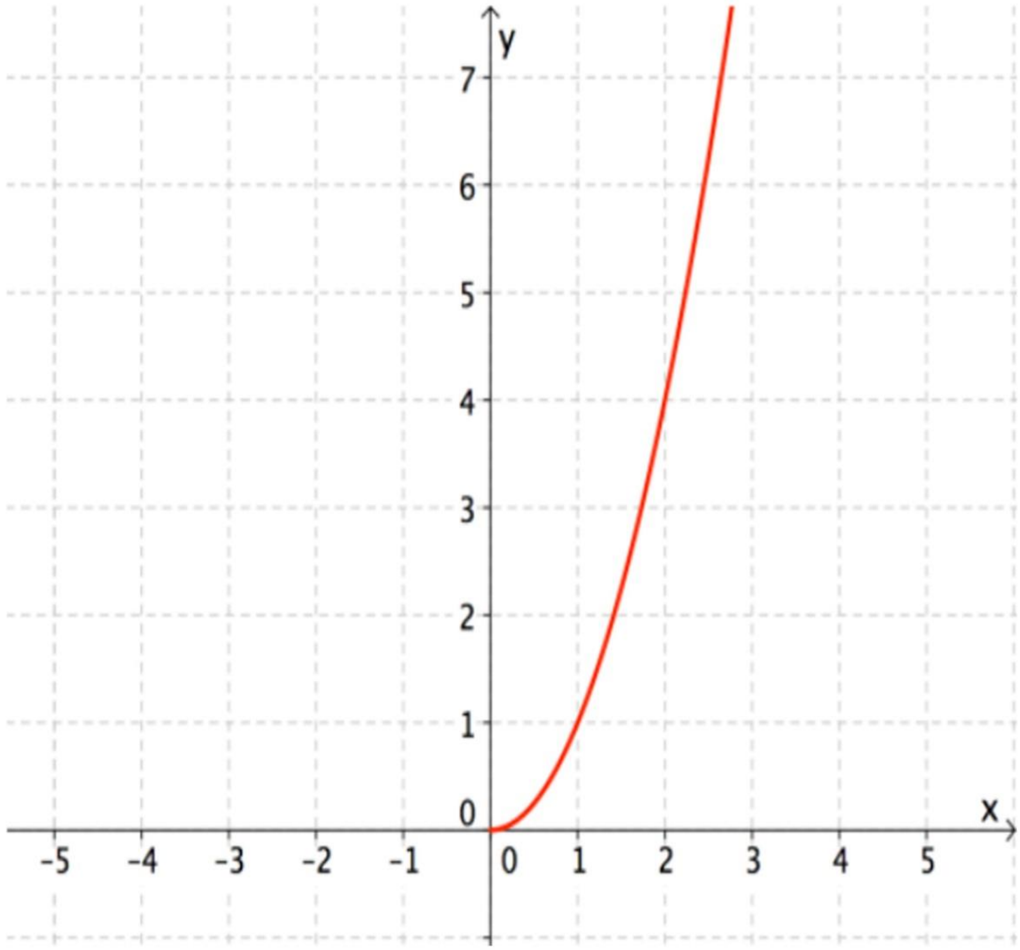

Gráfico: $\boldsymbol{D_3 = [0;+\infty[}$

Loisi Carla Monteiro Pereira

Quando uma função está definida por uma fórmula matemática, a fórmula em si pode impor restrições sobre os valores reais para os quais podemos calculá-la.

Exemplo 1

Qual é o domínio da função **D**(**f**)=1/**x**? Veja o gráfico a seguir:

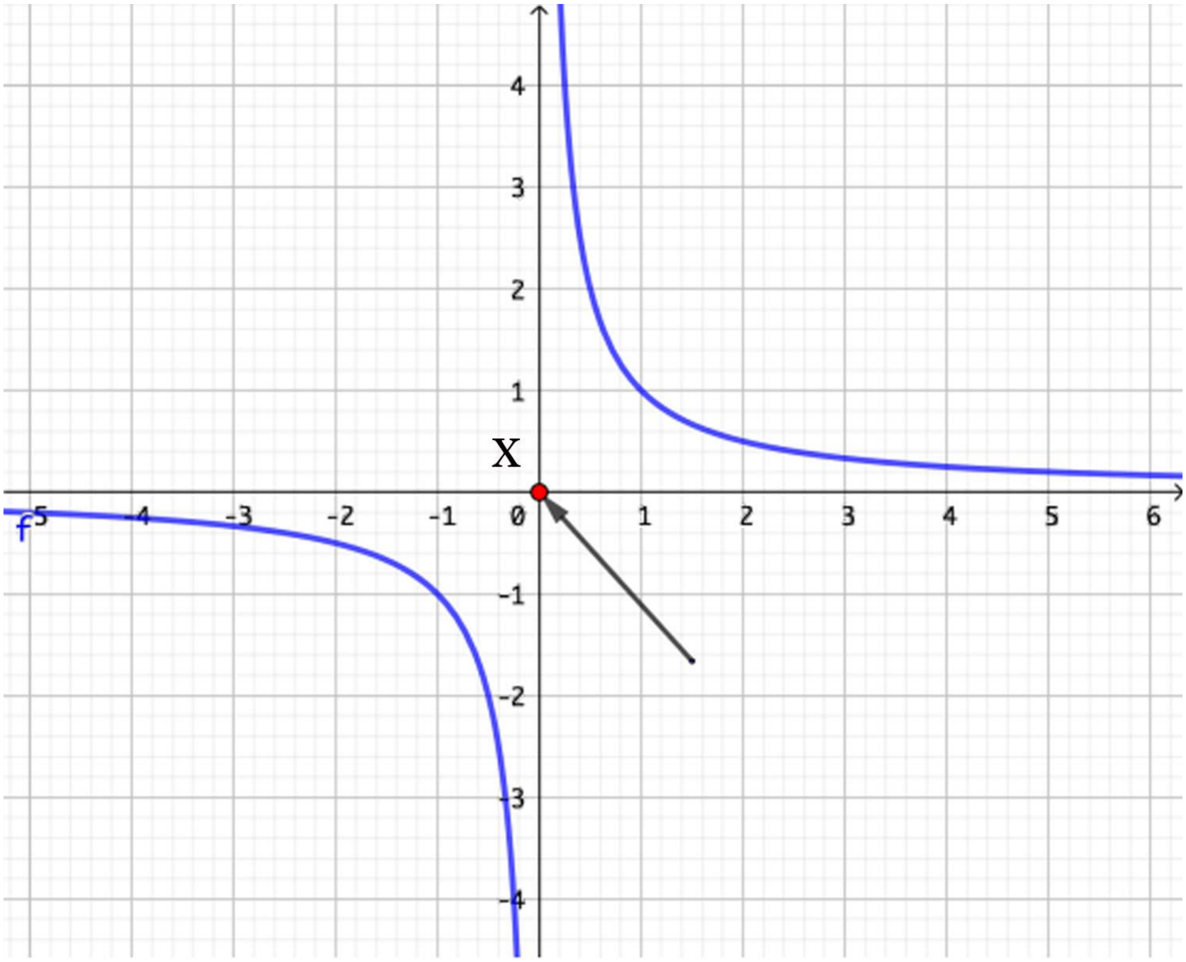

Gráfico: Função �(�)=1�
Loisi Carla Monteiro Pereira

Repare que x = 0 não está no domínio dessa função, pois a divisão por 0 (zero) não está definida. Logo, $D(f) = \mathbb{R}^*$. O asterisco indica que estamos tratando dos reais positivos excluindo o zero.

Exemplo 2

Qual é o maior subconjunto de $X \subset \mathbb{R}$, tal que a fórmula $g(x) = \sqrt{x}$ define uma função $f: X \to \mathbb{R}$? Observe o gráfico a seguir:

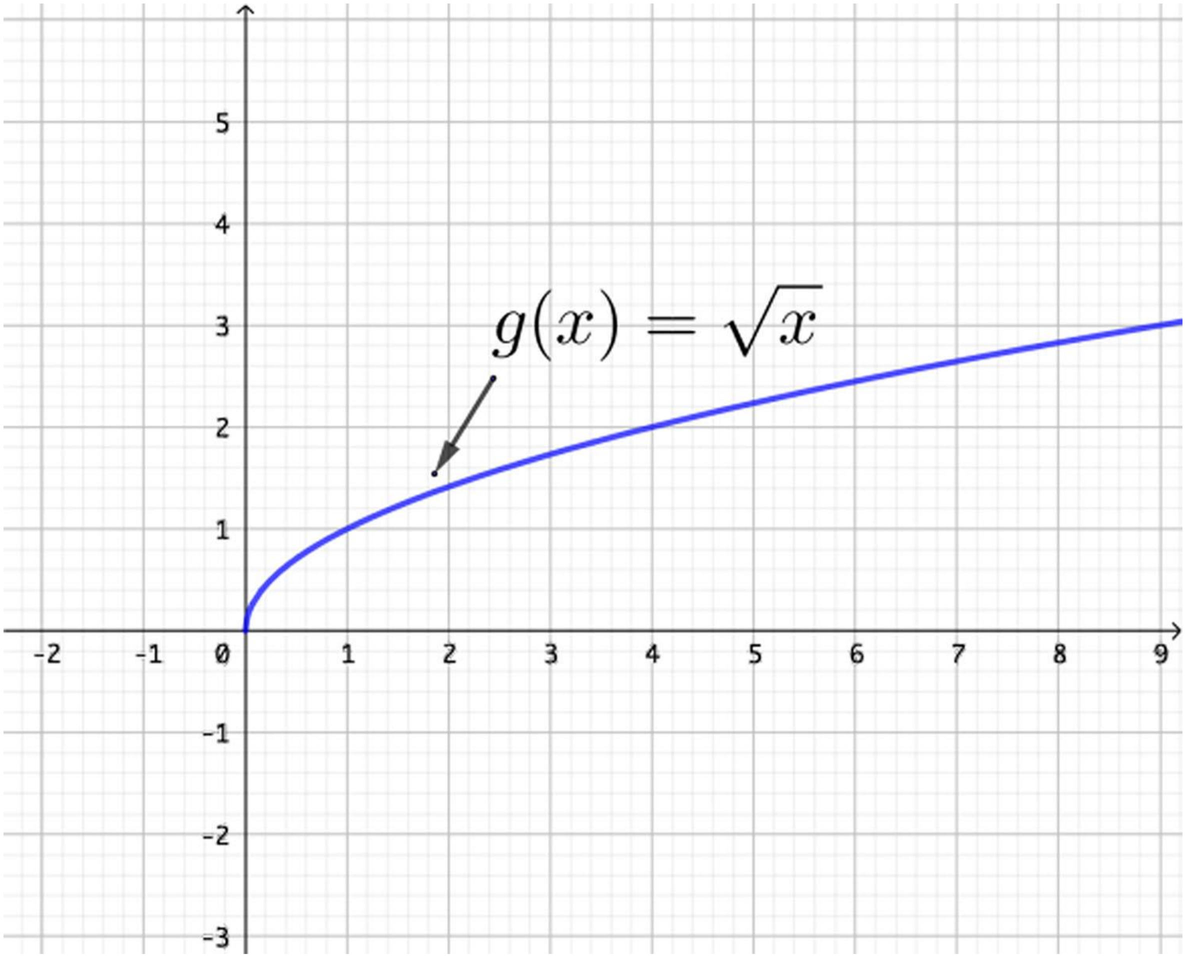

Gráfico: A fórmula g(x) = √x
Loisi Carla Monteiro Pereira

Como só podemos calcular a raiz quadrada de valores não negativos, temos: *D*(g) = [0;+∞[.

Exemplo 3

Vamos ver na prática como determinar o domínio de uma função? Pensando em construir uma piscina retangular em sua casa, João recorreu à Revista Casa e Jardim, da Globo, onde encontrou um modelo de piscina que contracena com a represa no projeto assinado pela arquiteta Eliana Marques Lisboa.

Sabendo que o terreno onde será construída a piscina deve ser cercado com 240m de cerca, faça o que se pede:

- Expresse a área do terreno em metros quadrados em função do comprimento do terreno;

- Determine o domínio da função resultante. Lembre-se de que a expressão que determina a área de uma figura retangular é dada pelo produto entre o comprimento e a largura.

Exemplo 4

Sabendo que o comprimento do terreno de João é de 100m, utilize a expressão obtida $A = x \cdot (120 - x)$ para determinar a área do terreno onde será construída a piscina.

Resolução da questão

Os gráficos das funções podem fornecer **informações visuais** importantes sobre uma função. O gráfico de uma função pode ser definido como:

$$\mathbf{Graf(f) = (x;\ f(x))\ |\ x \in D(f)}$$

Portanto, a ordenada y de um ponto do gráfico da função f é o valor de f na abscissa x correspondente.

O gráfico de f também nos permite visualizar o domínio e a imagem, além de muitas outras informações.

Leitura gráfica e domínio de imagem

Domínio da função f

O domínio da função $\boldsymbol{f}$ é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$, onde a expressão (ou fórmula) que define a função assume valores reais, ou seja:

Como saber se um número real **a** pertence ao domínio de uma função f ?

O número real **a** pertence ao domínio de uma função $\boldsymbol{f}$ se a reta vertical **x = a** corta o gráfico de $\boldsymbol{f}$ em um ponto. Como $\boldsymbol{f}$ é uma função, este ponto é necessariamente único, conforme visto no seguinte gráfico:

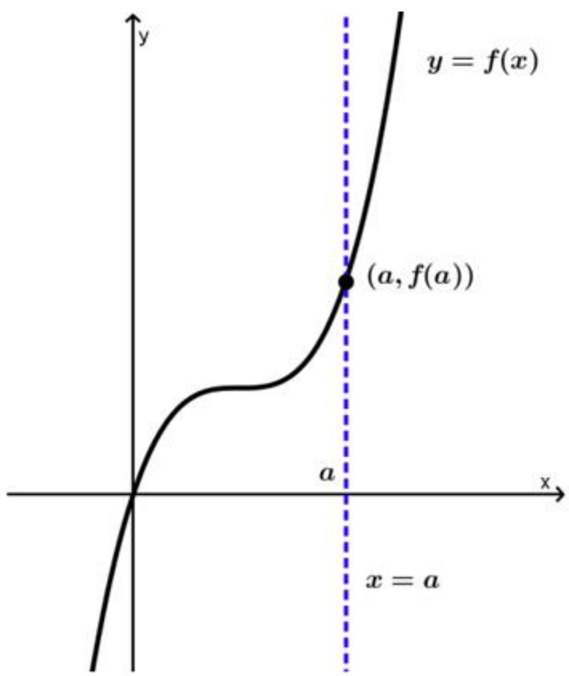

Gráfico: Número real **a** e a função $\boldsymbol{f}$
Loisi Carla Monteiro Pereira

Exemplo 1

Considere os seguintes dados de taxa de crescimento 2010-2060 do Brasil e de Tocantins:

Gráfico: Dados de taxa de crescimento 2010-2060 do Brasil e de Tocantins

Verifique que, no ano de 2030, temos uma única taxa de crescimento, tanto no Brasil quanto em Tocantins.

Como saber se um número real **b** pertence à imagem de uma função ***f*** ?

O número real **b** pertence à imagem de uma função ***f*** se a reta horizontal **y = b** cortar o gráfico de ***f*** em pelo menos um ponto.

Exemplo 2

Verifique que o valor 0,82 pertence tanto à imagem da função que representa a taxa de crescimento no Tocantins quanto à função que representa a taxa de crescimento no Brasil, em 2029 e 2018, respectivamente. Veja o gráfico da taxa de crescimento 2010-2060 do Brasil e de Tocantins, a seguir:

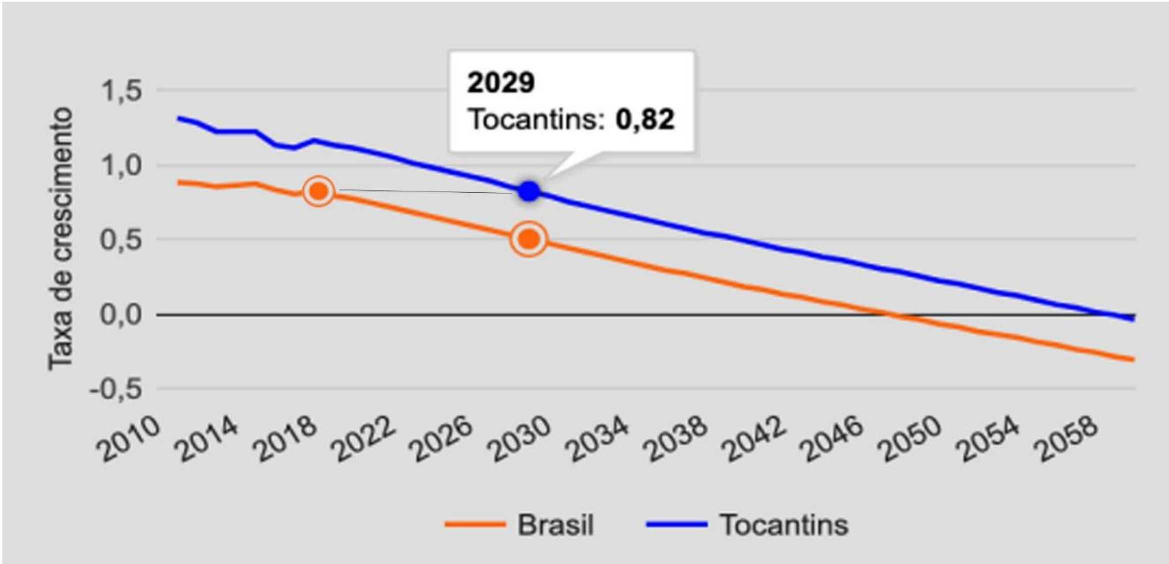

Gráfico: Taxa de crescimento 2010-2060 do Brasil e de Tocantins
Adaptado de IBGE, 2008

Domínio

Exemplo 1

Dado o gráfico de uma função, uma forma de encontrar o domínio da função é projetar o gráfico no eixo O_x.

Observe o gráfico da função f :

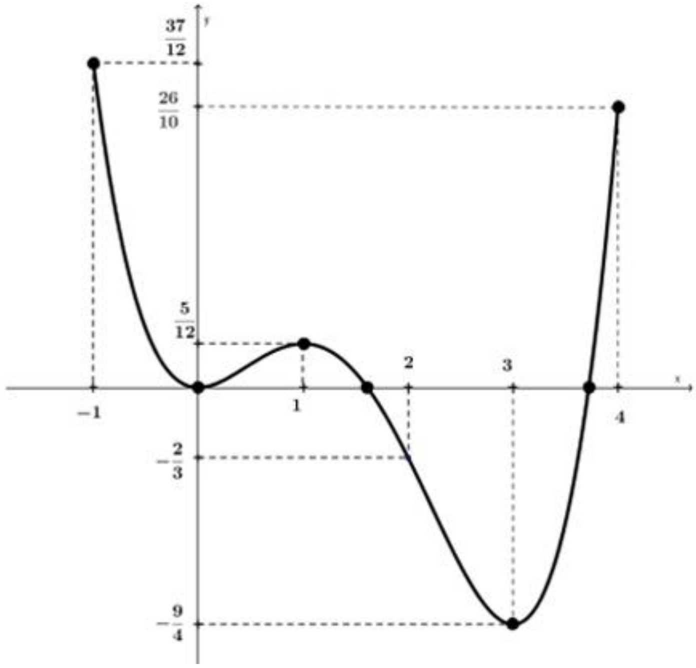

Gráfico: Função ***f***
Loisi Carla Monteiro Pereira

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no Eixo O_x? Confira no gráfico a seguir:

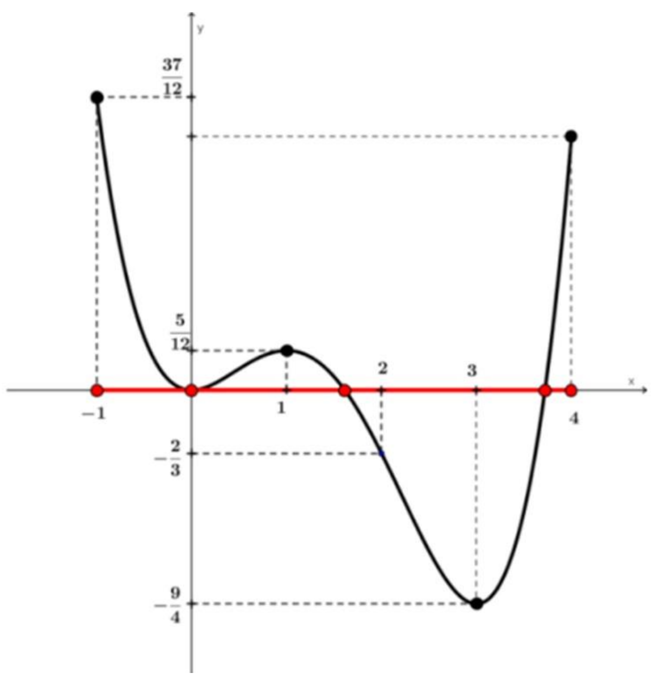

Gráfico: A função no eixo O_x
Loisi Carla Monteiro Pereira

Vemos que o domínio da função f é o intervalo no eixo das abscissas indicado em vermelho. Seu domínio é o intervalo fechado: D(f) = [-1,4].

Exemplo 2

Observe o gráfico da função g:

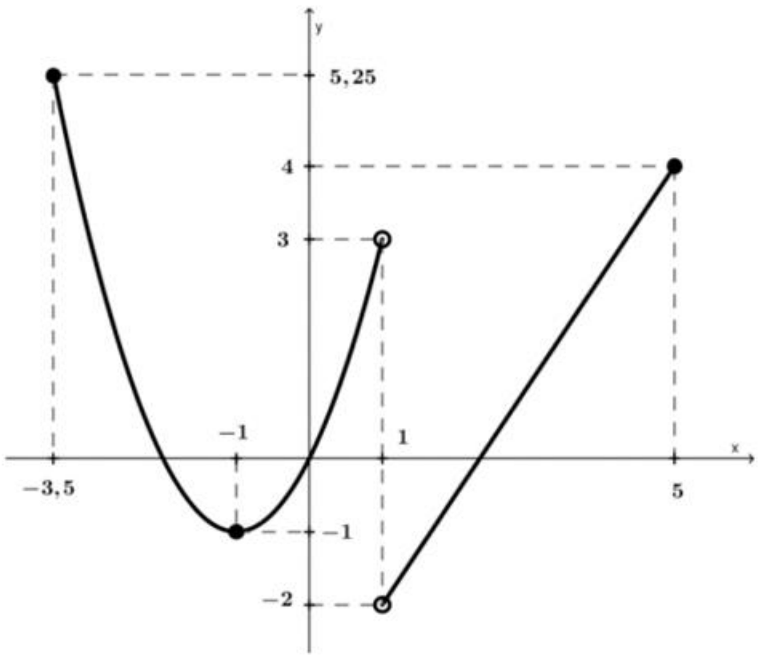

Gráfico: Função g
Loisi Carla Monteiro Pereira

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no eixo O_y? Confira a seguir:

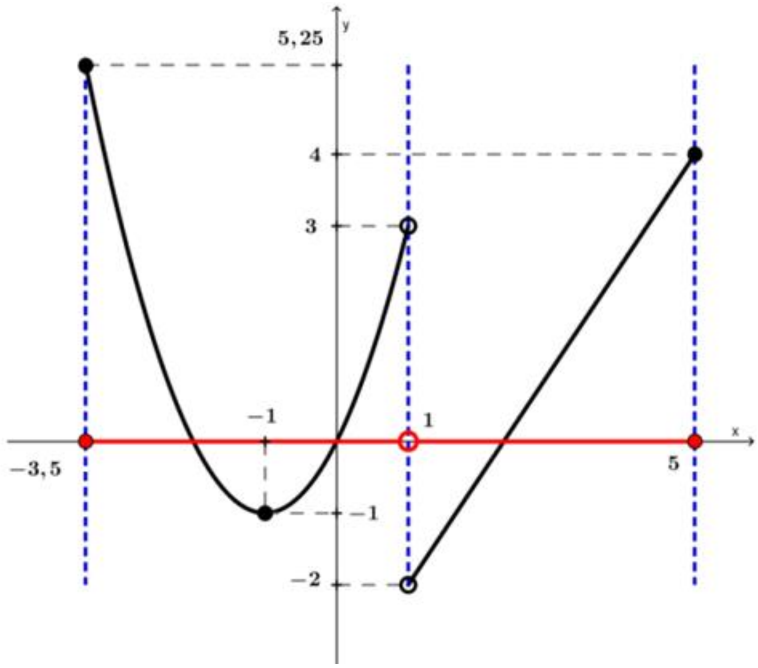

Gráfico: A função g projetada no eixo O_y
Loisi Carla Monteiro Pereira

Vemos que o domínio da função g é o conjunto no eixo das abscissas indicado em vermelho. Seu domínio é a união de intervalos disjuntos (intervalos cuja interseção é vazia):

$$D(g) = \left[-\frac{7}{2}, 1\right) \cup (1, 5)$$

Imagem

Exemplo 1

Dado o gráfico de uma função, uma forma de encontrar a imagem da função é projetar o seu gráfico no Eixo O_y.

Observe o gráfico da função ***f***

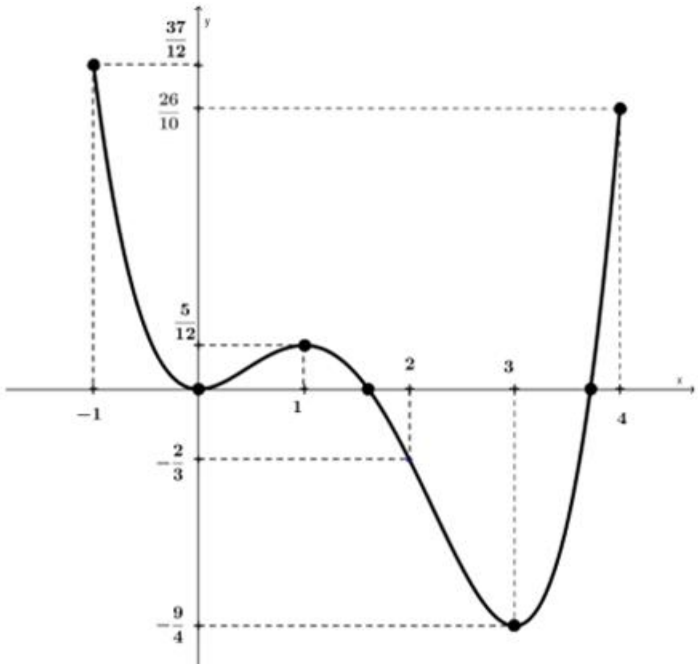

Gráfico: Função ***f***
Loisi Carla Monteiro Pereira

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no eixo O_y? Veja a seguir:

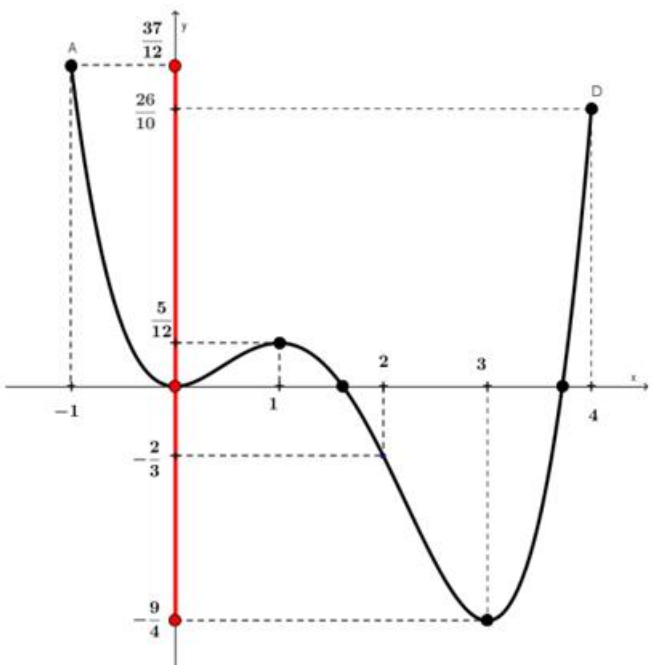

Gráfico: A função no eixo O_y
Loisi Carla Monteiro Pereira

Vemos que a imagem da função f é o intervalo fechado indicado em vermelho no Eixo O_y.

Sua imagem é o intervalo fechado.

$$\left[-\frac{9}{4};\frac{37}{12}\right], \mathrm{Im}(f) = \left[-\frac{9}{4};\frac{37}{12}\right].$$

Exemplo 2

Observe o gráfico da função g :

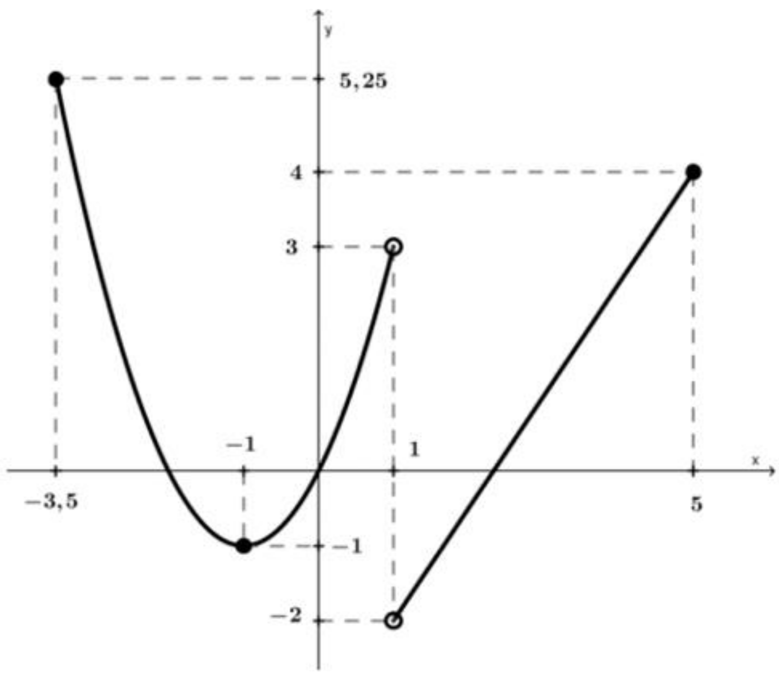

Gráfico: A função g
Loisi Carla Monteiro Pereira

O que acontece se projetarmos o gráfico da função no Eixo O_y? Confira a seguir:

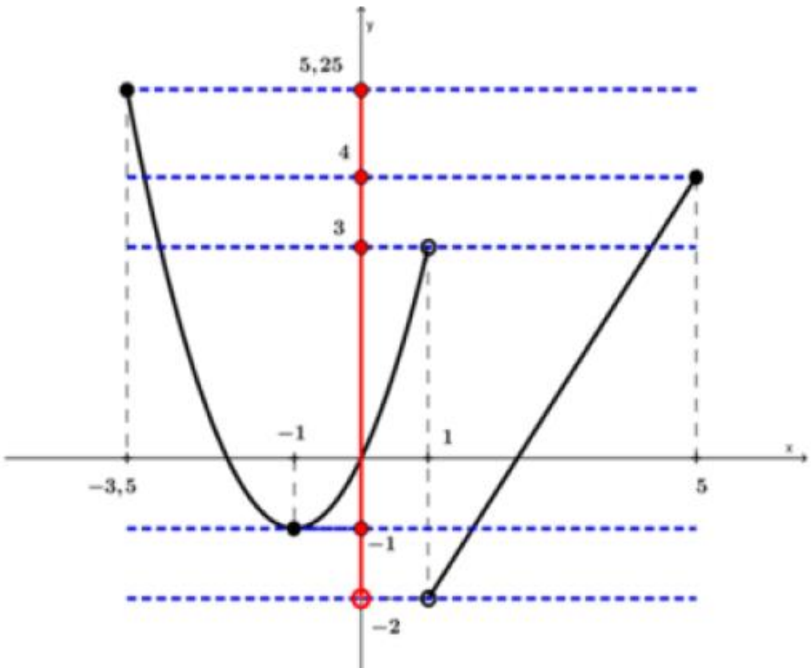

Gráfico: A função g projetada no Eixo O_y
Loisi Carla Monteiro Pereira

Vemos que a imagem da função g é o intervalo indicado em vermelho no Eixo O_y. Sua imagem é o intervalo (-2 ; 5,25].

Im(g) = (-2 ; 5,25].

Exemplo 3

Considere o gráfico da função h:

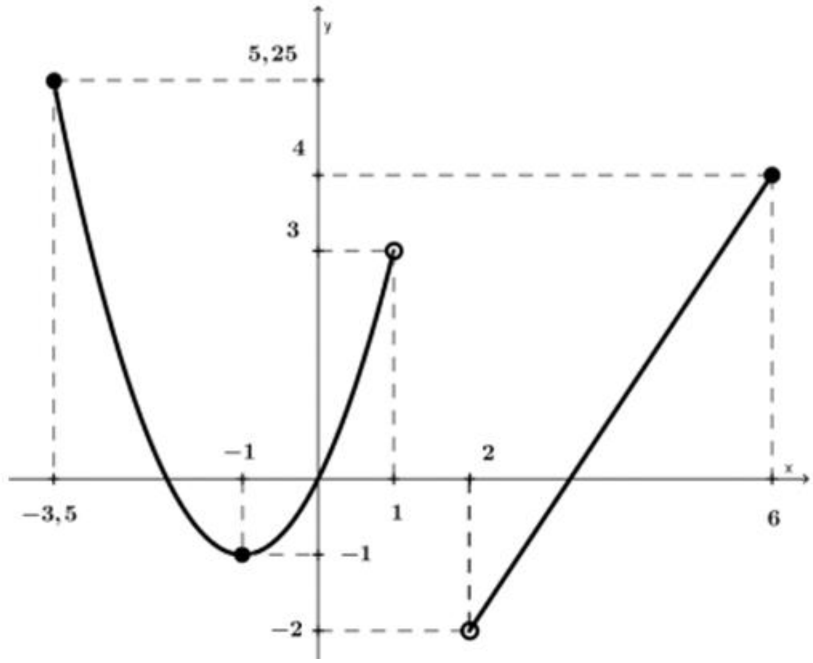

Gráfico: Função h
Loisi Carla Monteiro Pereira

Se projetarmos o gráfico da função no eixo O_y, vemos que a imagem da função h é o intervalo indicado em vermelho no eixo O_y, conforme mostrado a seguir:

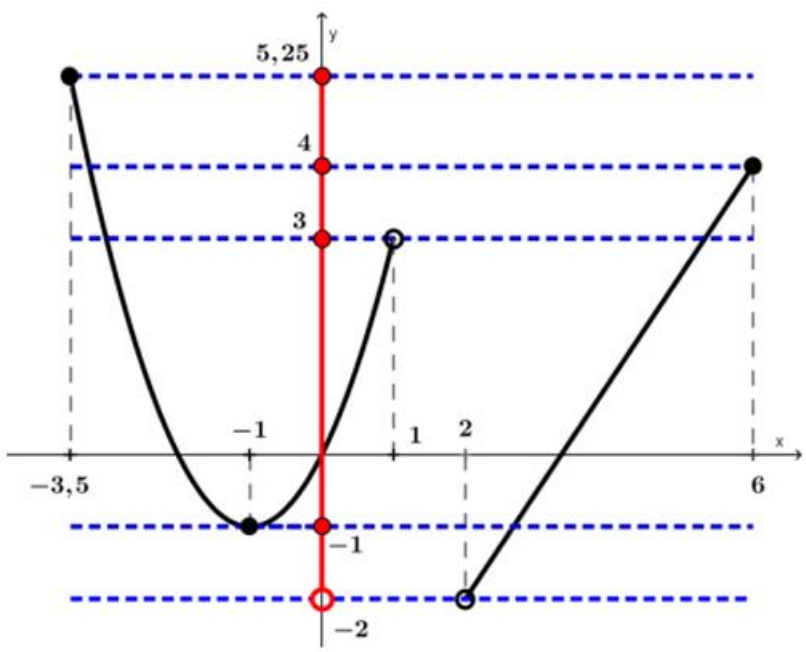

Gráfico: A função no eixo O_y
Loisi Carla Monteiro Pereira

Sua imagem é o intervalo (-2; 5, 25).

Im(h) = (-2 ; 5,25].

Em resumo, é possível determinar a imagem de um conjunto de pontos:

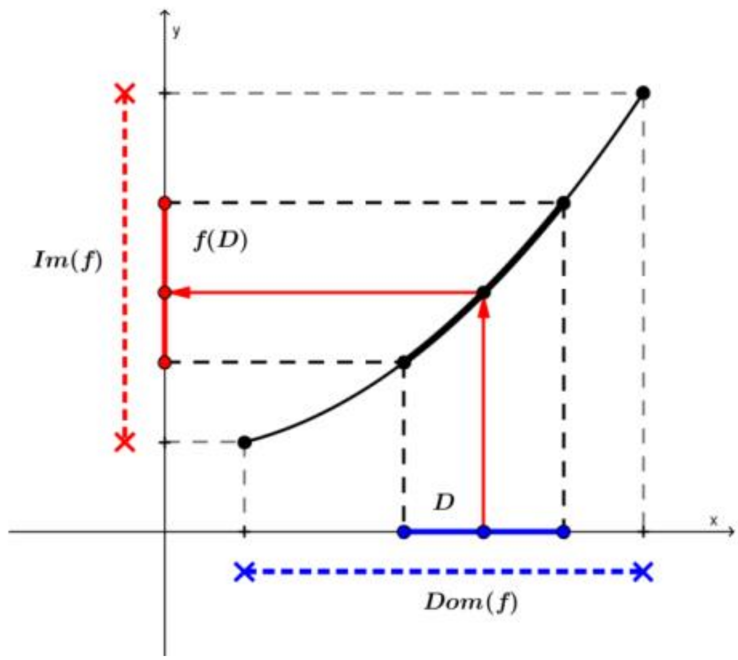

Gráfico: Imagem de um conjunto de pontos
Loisi Carla Monteiro Pereira

Se **D** é um subconjunto do domínio da função f (pintado de azul no gráfico), então, a imagem deste subconjunto é dada por $\boldsymbol{f}$(**D**) = {f(x) | x ∈ D}.

Exemplo 5

Observe o gráfico da função f e o intervalo [−23;512] destacado em verde no eixo O_y, que é um subconjunto da imagem de f.

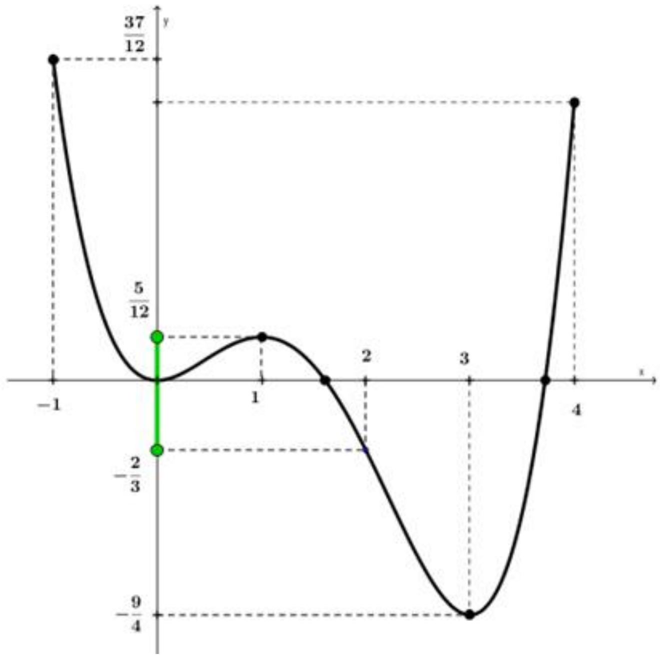

Gráfico: Função f
Loisi Carla Monteiro Pereira

Ao traçar as retas **y**=5/12 e **y**=−2/3 de forma horizontal, partindo no eixo O_y temos:

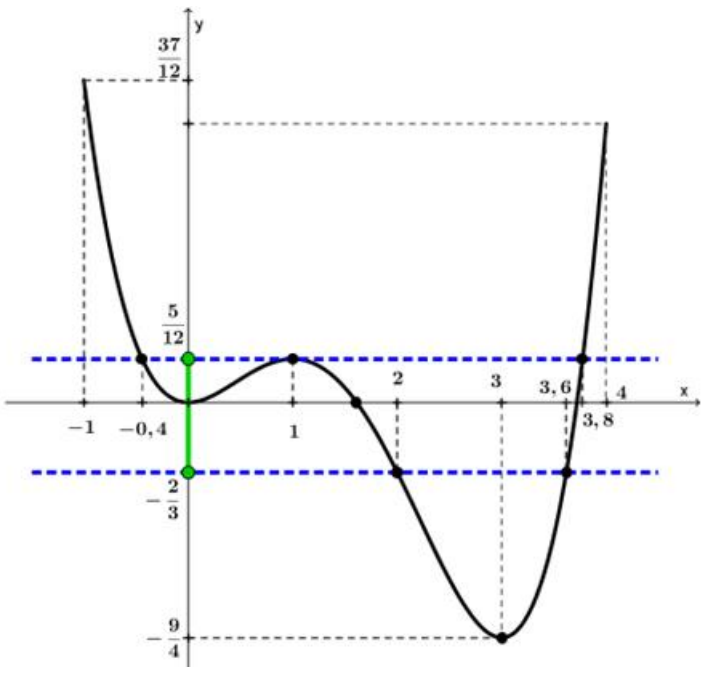

Gráfico: as retas y=5/12 e y=−2/3
Loisi Carla Monteiro Pereira

Se pegarmos a parte do gráfico restrita à região entre as retas y=−2/3 e y=5/12 temos:

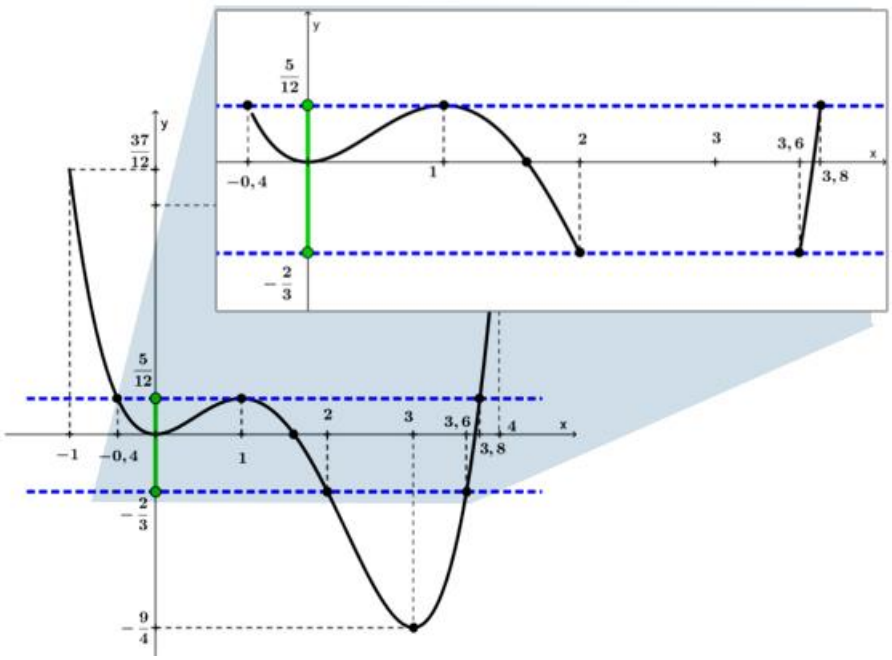

Gráfico: A região entre as retas y=−2/3 e y=5/12
Loisi Carla Monteiro Pereira

Agora, para descobrirmos a parte do domínio correspondente ao intervalo [−2/5;5/12] da imagem, basta projetarmos no eixo **Ox.** A parte do eixo **Ox** que nos interessa está destacada em vermelho: [−0,4;2]∪[3,6; 3,8]:

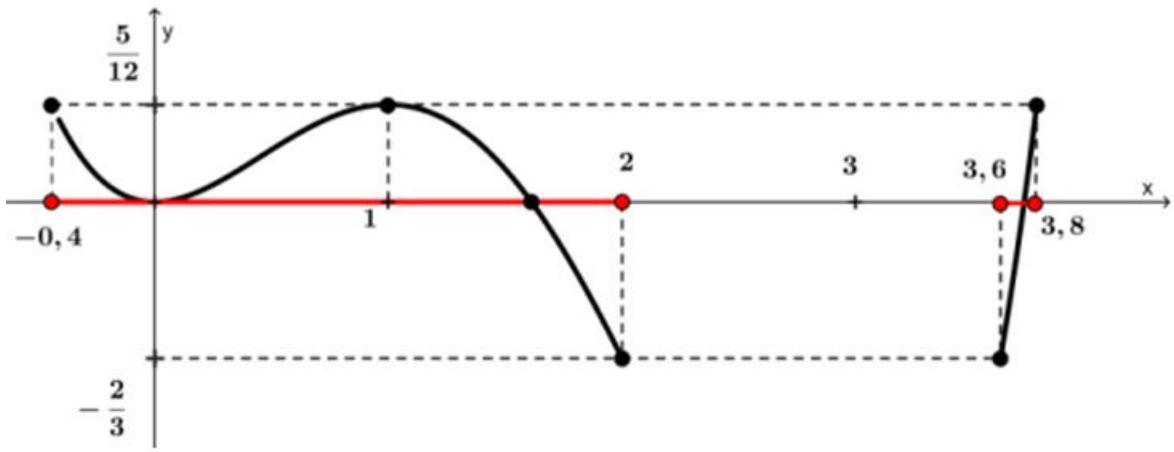

Gráfico: Parte do domínio correspondente ao intervalo [−25;512]
Loisi Carla Monteiro Pereira