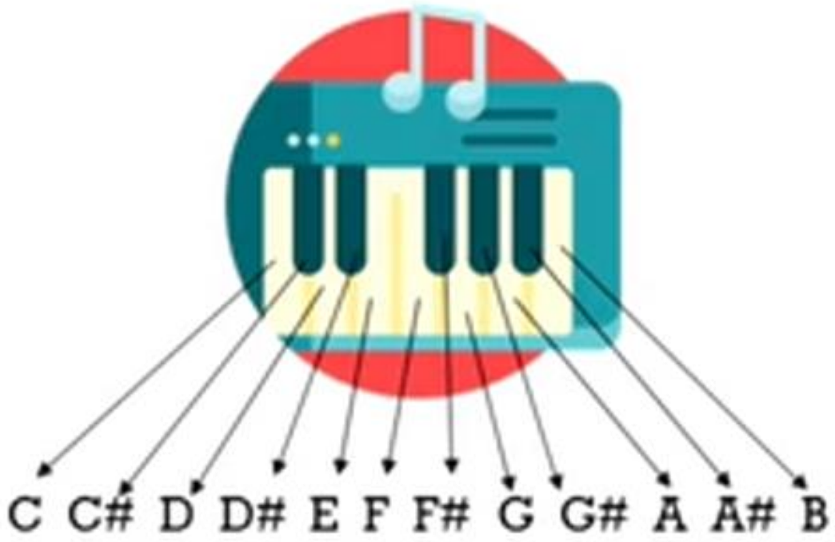
APROFUNDAMENTO DE FUNÇÕES

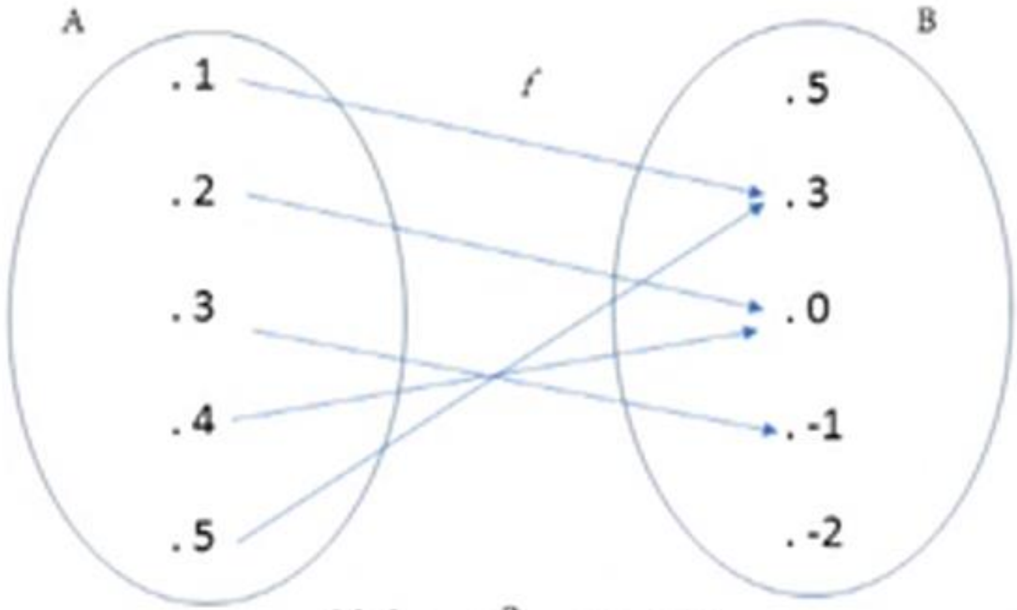
Introdução

Prof. Sandro Davison

00:33 / 10:37

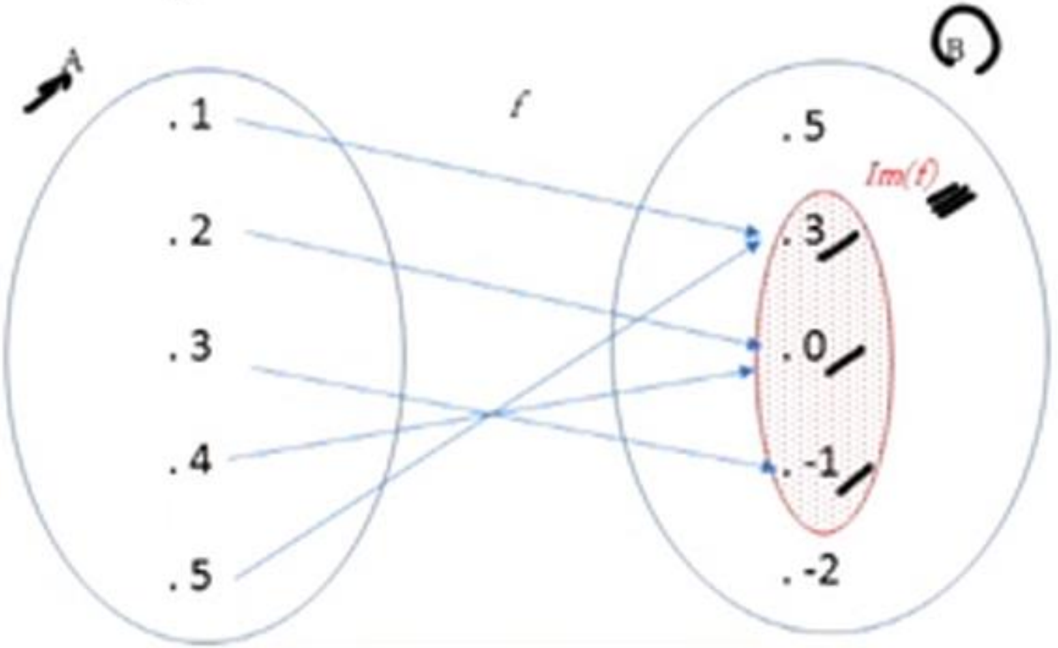
Dados dois conjuntos A e B, uma função f de A em B é uma relação de A em B tal que, para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Em outras palavras, uma função é uma relação entre elementos de dois conjuntos A e B de forma que todo elemento de A está associado a algum elemento de B.





$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

Dados dois conjuntos A e B, uma função f de A em B é uma relação de A em B tal que, para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Em outras palavras, uma função é uma relação entre elementos de dois conjuntos A e B de forma que todo elemento de A está associado a algum elemento de B.



$$\begin{array}{l} f: A \to B \\ x \mapsto x^2 - 6x + 8 \end{array}$$

A: Domínio de f

B: Contradomínio de f

$Im(f)$: Imagem de f

$$\boxed{f(x) = x^2 - 6x + 8}$$ → Lei de formação de f

FUNÇÃO INJETORA

FUNÇÃO SOBREJETORA

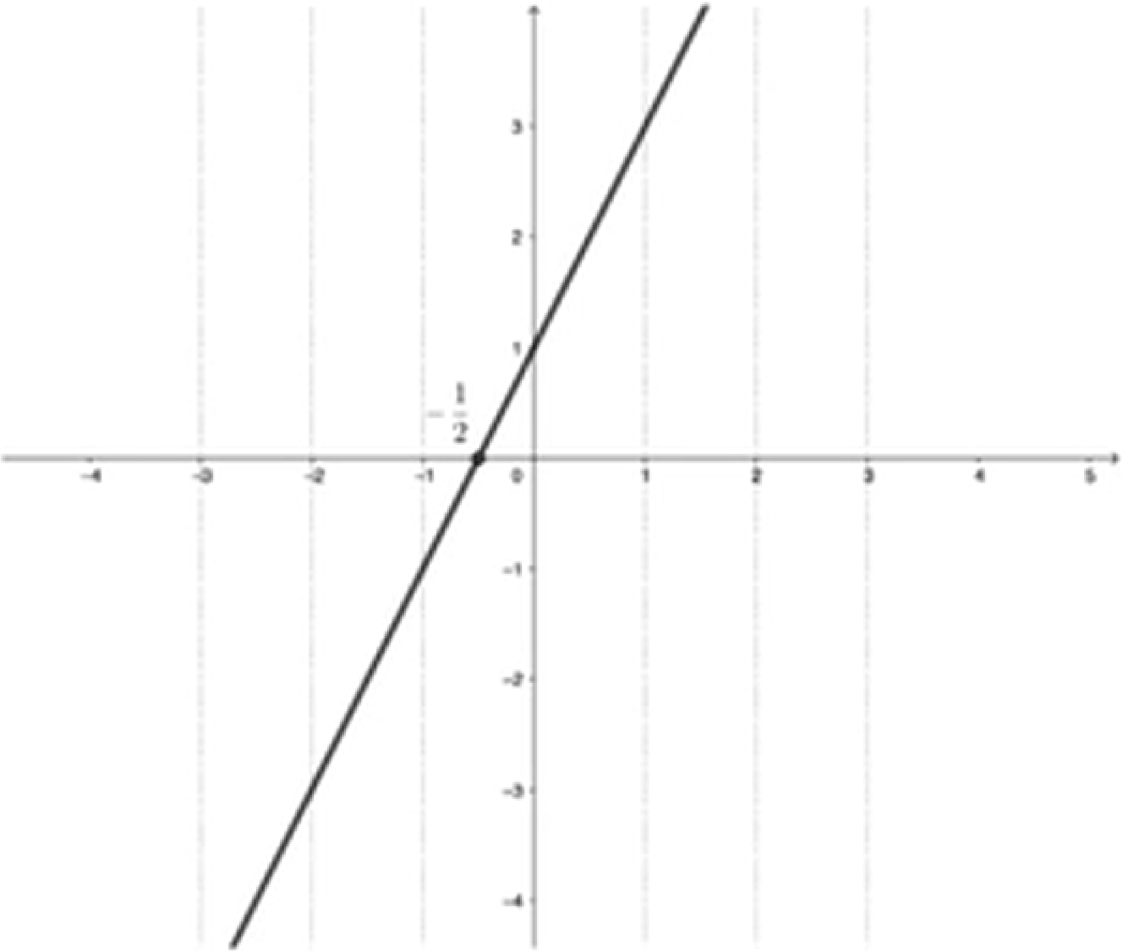
FUNÇÃO BIJETORA

Uma função é dita INJETORA se, para quaisquer valores distintos de x no domínio de f, suas imagens serão distintas. Formalmente, para quaisquer $\{x_1, x_2\} \subset Dom(f)$ tais que $x_1 \neq x_2$, teremos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplo:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = 2x + 1$$

Veja que qualquer reta paralela ao eixo y intercepta o gráfico de f em exatamente 1 ponto!



FUNÇÃO SOBREJETORA

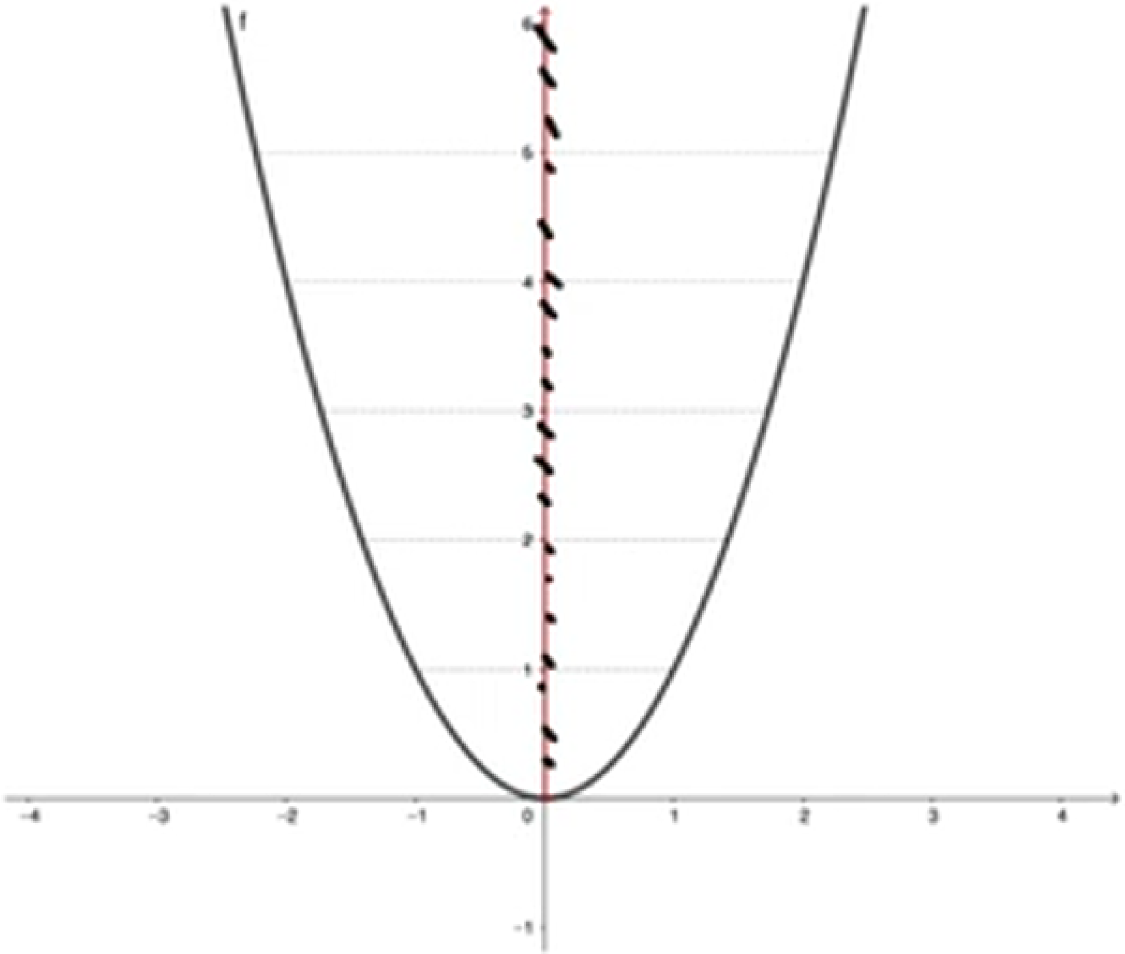
Uma função é dita SOBREJETORA se todos os valores de y do contradomínio são imagens de algum x no domínio. Formalmente, f é sobrejetora se $CD(f) = Im(f)$.

Exemplo:

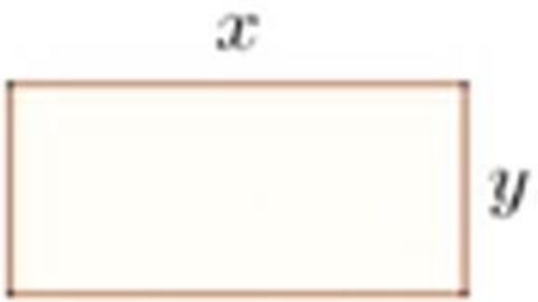
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$f(x) = x^2 \geq 0$

Veja que a sombra do gráfico de f no eixo y é todo o o contradomínio dos reais não negativos!



a) Expresse a área A do terreno, em m^2, em função do comprimento x do terreno, em m;



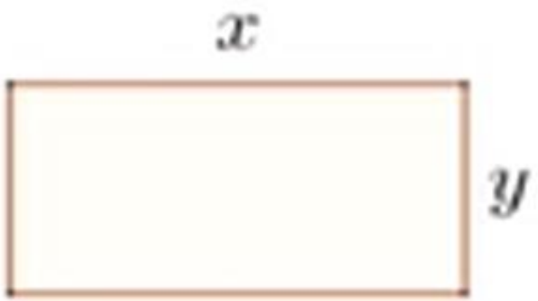
Como o comprimento da cerca é 240 metros, afirmamos que:

$$2x + 2y = 240 \Leftrightarrow x + y = 120 \Leftrightarrow \boxed{y = 120 - x}$$

A área do terreno será dada por:

$$A(x) = x \cdot y = x(120 - x) \Leftrightarrow \boxed{A(x) = -x^2 + 120x}$$

b) Determine o domínio da função resultante $A(x)$



$d \geqslant 0$

Como x e y são distâncias, são números reais não negativos.

Desta forma:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = 120 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{0 \leq x \leq 120}$$

Portanto, o domínio da função $A(x)$ é:

$$\boxed{Dom(f) = [0,120]}$$

É muito comum modelarmos problemas utilizando funções reais de variável real. Em alguns casos, determinamos o domínio de uma função a partir de sua lei de formação. Neste caso, o domínio é dado pelo conjunto mais amplo de valores reais em que a lei de formação é uma expressão matemática bem definida.

Exemplo: Determinar o domínio da função real $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

Restrições:

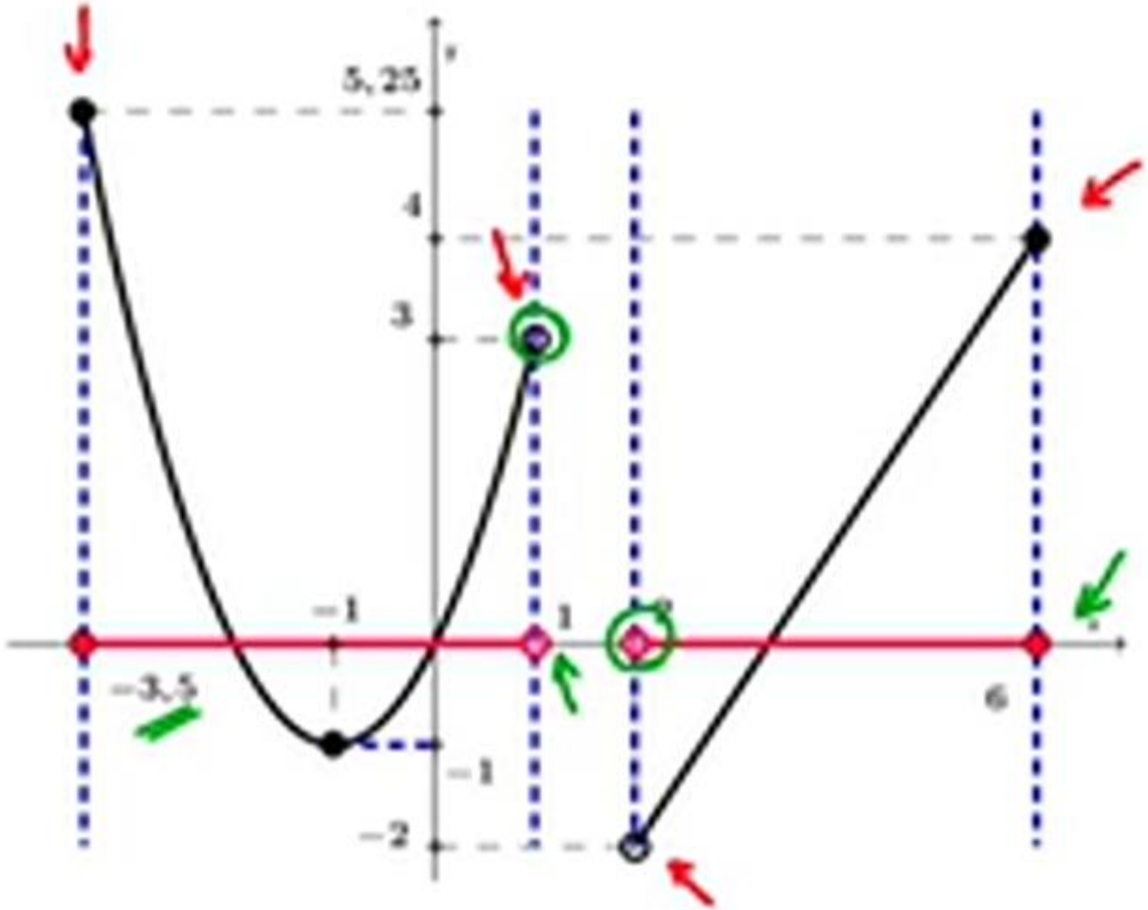
$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Portanto, o domínio de f é o intervalo $[-2,2]$, exceto 0.

$$\boxed{Dom(f) = [-2,0) \cup (0,2]}$$

3:04 / 5:49

Olhando-se para a sombra do gráfico de *f*, temos:



$\boxed{Dom(f) = [-3.5\,,1) \cup (2{,}6]}$

IMAGEM DE FUNÇÃO

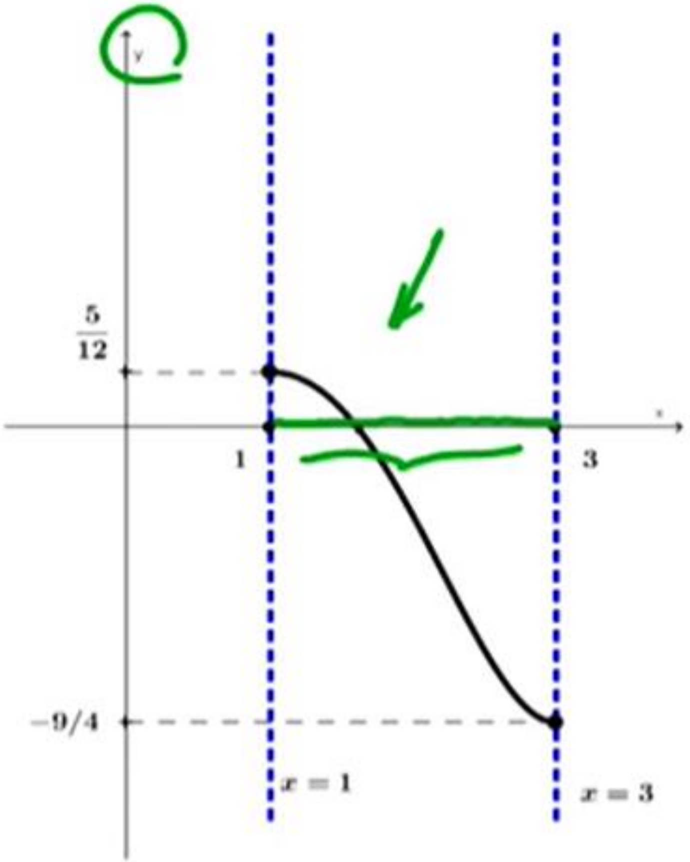
Dada a lei de formação de uma função f, nem sempre é tão simples determinar-se a imagem de f. Isto acontece porque encontrar o intervalo de variação de uma expressão matemática depende muito do tipo de expressão envolvida (polinomial, exponencial, logarítmica etc.). Em alguns casos, entretanto, o trabalho é um pouco mais simples.

Exemplo: Determinar a imagem da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

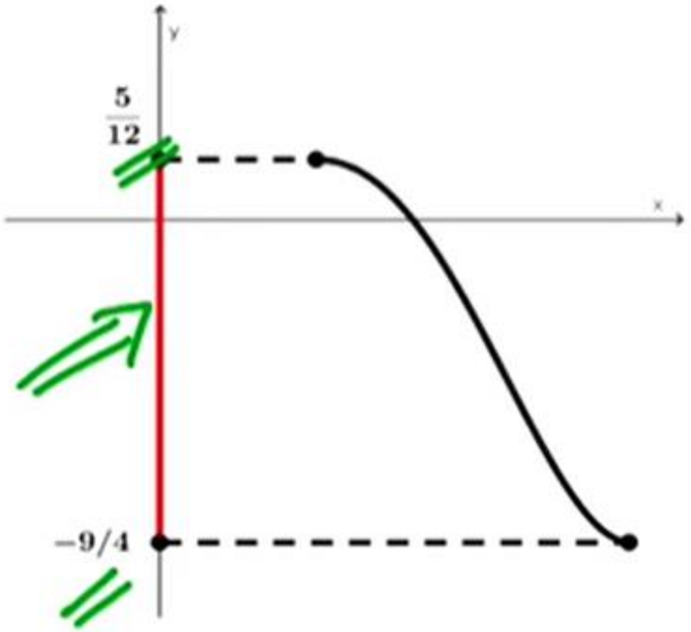
Solução: Veja que podemos escrever $x^2 - 6x + 8$ como sendo

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9} - 1 = (x-3)^2 - 1$$

Primeiro, destacamos o intervalo de interesse no domínio:



Agora, observamos a sombra desta porção do gráfico no eixo y:



$$\boxed{f([1,3]) = \left[-\frac{9}{4}, \frac{5}{12}\right]}$$