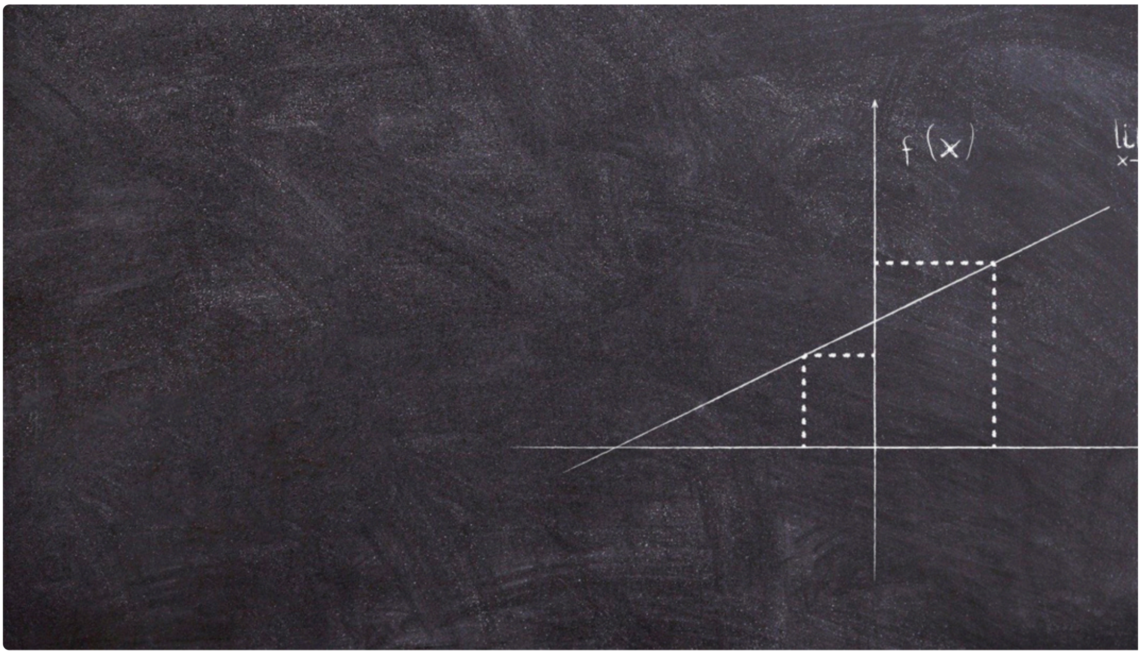


Limites: conceitos, propriedades e exemplos

Prof. Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Descrição

Limite de uma função real, seus conceitos e suas propriedades.

Propósito

Descrever o conceito de limite de uma função real por meio de uma abordagem intuitiva e analítica. Aplicar essa definição na continuidade e na obtenção das retas assíntotas.

Objetivos

Módulo 1

Definição de limite

Aplicar a abordagem intuitiva, simbólica e analítica do limite de uma função real.

Módulo 2

Cálculo de limite

Calcular o limite de uma função real.

Módulo 3

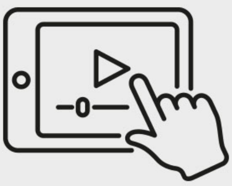
Continuidade de funções

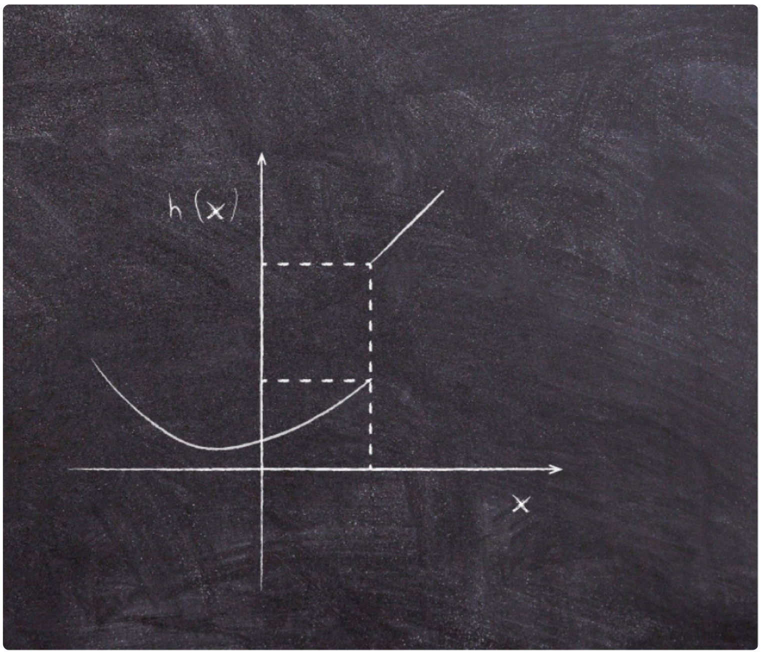
Aplicar o cálculo do limite na verificação da continuidade da função e na obtenção das assíntotas.

Introdução

Olá! Antes de começar sua leitura, assista ao vídeo a seguir e entenda o limite de uma função real, assim como seus conceitos e suas propriedades.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.





1 - Definição de limite

Ao final deste módulo, você será capaz de aplicar a abordagem intuitiva, simbólica e analítica do limite de uma função real.

Vamos começar!

Abordagem intuitiva, simbólica e analítica do limite de uma função

Assista ao vídeo a seguir para conhecer alguns conceitos iniciais importantes para o estudo deste módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Noção intuitiva de uma função real

Em muitas aplicações da matemática, será necessário conhecer o comportamento de uma função quando a variável independente se aproximar de determinado valor. Em outras palavras, será importante saber para que valor essa função tende (ou se aproxima) quando o valor do seu domínio tender (ou se aproximar) de um número dado.

Essa análise do comportamento de uma função real de variável real é obtida por meio da operação matemática denominada de limite de uma função.

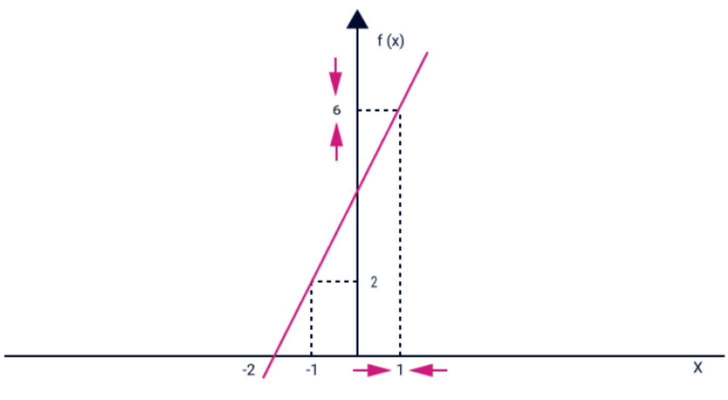
Comentário

A variável de entrada é denominada variável **independente**, sendo representada pela variável x e compondo o **domínio** da função. Já a variável da **saida** (valor da função) é chamada de variável **dependente**, sendo representada por **f(x)** ou por **y** e compondo o **contradomínio** da função.

O limite de uma função pode ser abordado de forma intuitiva ou com uma formalidade matemática maior, utilizando uma simbologia e uma definição formal.

A aplicação dessa abordagem vai permitir que você descubra o valor do limite da função quando a variável de seu domínio tender a um número real. Você pode fazer isso observando o comportamento da função por meio de seu gráfico ou de uma tabela contendo seus valores.

Considere a função f(x) = 2x+4, com domínio no conjunto dos números reais, cuja representação se encontra a seguir.



Foque o comportamento da função quando os valores de x se aproximam do número real 1. Observe que essa aproximação pode ocorrer por meio de dois sentidos opostos.

O primeiro sentido é por intermédio dos valores **superiores** ao número 1 ou valores à **direita** de 1 (vide a tabela). Representamos essa aproximação por $x \to 1^+$, ou seja, x se aproxima de 1 pela direita.

Aproximação por valores superiores ao 1 (à direita de 1)		
1,2	1,1	1,05

O segundo sentido é por meio dos valores **inferiores** ao número 1 ou valores à **esquerda** de 1. Representamos essa aproximação por $x \to 1^-$, ou seja, x se aproxima de 1 pela esquerda.

Aproximação por valores superiores ao 1 (à direita de 1)		
0,8	0,9	0,95

Tal aproximação terá, como consequência, uma variação no valor da função f(x).

As tabelas a seguir apresentam os valores obtidos pela função ao haver as aproximações descritas.

x	f(x) = 2x + 4
1,2	6,4
1,1	6,2
1,05	6,1
1,02	6,04
1,01	6,02
1,005	6,01
1,001	6,002
1,0001	6,0002
1,001	6,002
1,00001	6,00002
1,000001	6,000002

X	f(x) = 2x + 4
0,8	5,6
0,9	5,8
0,95	5,9
0,98	5,96
0,99	5,98
0,995	5,99

X	f(x) = 2x + 4
0,999	5,998
0,9999	5,9998
0,9999	5,99998
0,99999	5,99998
0,999999	5,999998

Conforme o valor de x se aproxima do número 1 tanto pelos valores à direita quanto por aqueles à esquerda, a função **f(x)** fica mais próxima do número **6**.

> **Em outras palavras, quanto mais o valor de x se aproxima de 1(x → 1), mais o valor de f(x) se aproxima de 6 (f(x) → 6). Dizemos, assim, que o limite de f(x) é igual a 6 quando x tende a 1.**

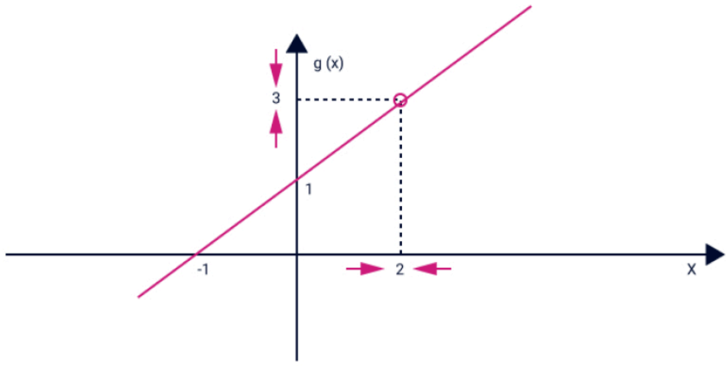
Ao retornar e observar novamente o gráfico, você verá como f(x) se aproxima do número 6 conforme x se aproxima do número 1.

Agora vamos analisar a função $g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (g(x)= x²−x−2÷x-2), e tentar aplicar o conceito intuitivo para descobrir o comportamento de g(x) quando x tende para o número 2 .

Uma dica: para traçar o gráfico de g(x), verifica-se que x² −x −2 ÷ x −2 = (x − 2)×(x + 1). Desse modo:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)} = (x + 1)$$

Assim, o gráfico de g(x) é o mesmo da função (x + 1), com exceção para x = 2, em que g(x) não é definido. Veja:



Quando a variável independente x se aproxima do número 2 tanto pela direita quanto pela esquerda, o valor de g(x) se aproxima do valor de 3. Olhe o gráfico!

O interessante é que o limite de g(x) é igual a 3 quando x tende para 2, mesmo com o número real 2 não pertencendo ao domínio da função g(x).

Atenção!

Podemos obter o limite de uma função quando x tende a um número real p, mesmo que esse número p não pertença ao dominio da função.

Quanto a tal afirmação, o ponto não precisa pertencer ao dominio de f(x), mas deve ser um ponto de acumulação desse domínio. De uma forma simples, o ponto de acumulação de um conjunto é um ponto que pode ser acessado por meio de um caminho de aproximação que passa pelos pontos do conjunto.

Em outras palavras, o caminho traçado para aproximar a variável independente x do ponto p deve obrigatoriamente pertencer ao domínio. Dessa forma, o ponto p tem de estar "colado" ao conjunto que define o domínio da função para permitir que se chegue a ele seguindo um caminho totalmente dentro do domínio da função.

Mas g(x) não estava definido para o x = 2. Se agora definíssemos g(x) para x = 2, por exemplo, fazendo g(2) = 4, mesmo assim o valor do limite de g(x), quando x tende para 2, se manteria igual a 3, sendo um valor diferente do valor de g(2).

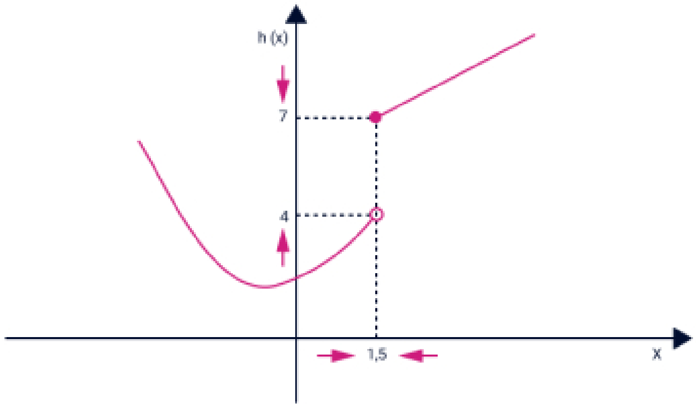
> **O valor do limite de uma função quando x tende a um número real p não é necessariamente o da função no ponto p.**

Esse aspecto vai estar associado à continuidade de uma função em um ponto. Tal conceito será analisado em um próximo módulo. Veremos que, quando a função for contínua, o valor da função no ponto será igual ao do limite no ponto.

Vamos analisar agora outra função h(x) representada adiante. A diferença das anteriores é que essa função tem uma descontinuidade no ponto x = 1,5.

Qual será o limite de h(x) quando x tender a 1,5?

Quando x se aproxima do número 1,5 pela direita ($x \to 1{,}5^+$), o valor de h(x) fica mais próximo do número 7, porém, quando a variável independente x se aproxima do número 1,5 pela esquerda ($x \to 1{,}5^-$), a função h(x) se aproxima do número 4. Há dois valores diferentes. E agora?



Qual é, portanto, o limite de h(x) quando x tende a 1,5?

Nesse caso, o limite de f(x) quando x tende a 1,5 não existe. Não conseguiremos achar nenhum valor real, único, que represente o comportamento de f(x) quando o domínio se aproxima do número 1,5.

Atenção!

Apesar de não existir o limite da função quando x tende ao número 1,5, pode-se dizer que o limite à direita de h(x), quando x tende a 1,5, é igual a 7 e que o limite à esquerda de h(x), quando x tende a 1,5, é igual a 4. Os limites à direita e à esquerda são chamados de limites laterais e serão posteriormente definidos.

Exemplo 1

Aplicando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista, o valor do limite de $f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2-9)}{x-3}, x \neq 3 \\ 12, x = 3 \end{cases}$, ou seja, f(x) = x² −9 ÷ x−3 quando x ≠ 3 e f(x) = 12 quando x = 3 , para x tendendo à 2 e para x tendendo à 3.

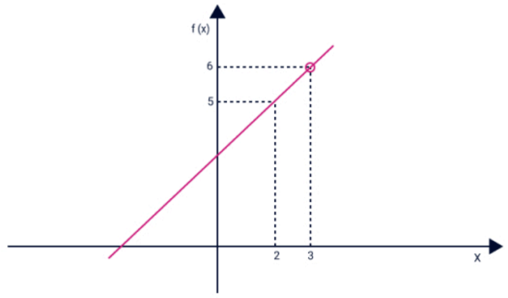
Solução

Verifica-se que $(x^2 - 9) = (x - 3) \times (x + 3)$.

Assim:

$$f(x) = \frac{(x^2 - 9)}{(x - 3)} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3 \text{ para } x \neq 3$$

Esboçando o gráfico de f(x), se tem:

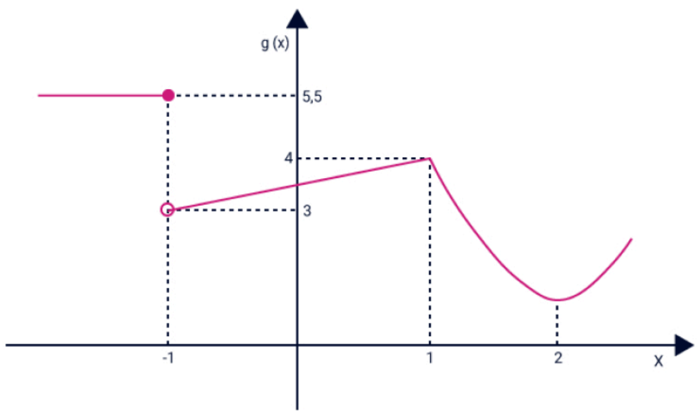


Assim, quando x tende para o número 2, a função f(x) tende para o número 5 , que, nesse caso, é o valor de f(2). Logo, o limite de f(x) é igual a 5 quando x tende a 2.

Quando x tende para o número 3, a função f(x) tende para o número 6, que é diferente de f(3). Desse modo, o limite de f(x) é igual a 6 quando x tende a 3.

Exemplo 2

Seja g(x), cujo gráfico é dado a seguir. Utilizando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista:



)

a) O valor do limite de g(x) quando x tende a −1, por valores inferiores.

b) O valor do limite de g(x) quando x tende a −1, por valores superiores.

c) O valor do limite de g(x) quando x tende a −1.

Solução

Pelo gráfico, verifica-se que:

a) Quando x tende à esquerda para −1, isto é, $x \rightarrow -1^-$, a função f(x) se aproxima de 5,5; assim, o limite de f(x) quando x tende a -1 por valores inferiores é igual a 5,5.

b) Quando x tende à direita para −1, isto é, $x \rightarrow -1^+$, a função f(x) se aproxima de 3; assim, o limite de f(x) quando x tende a 1 por valores superiores é igual a 3,

c) Não existe limite de f(x) quando x tende a −1, pois, para cada sentido de aproximação da variável independente do número −1, o valor de f(x) tende a valores diferentes, 5,5 ou 3.

Abordagem simbólica do limite: notação

Você já aprendeu que, se a função f(x) se aproximar de um número real L quando a variável independente x se aproximar de um número real p, em ambos os sentidos, o limite de f(x) será igual a L quando x tender ao número real p.

Mas agora vamos representar simbolicamente esse limite. Para representá-lo, você deve utilizar a seguinte simbologia:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

Em que L e p são número reais.

Caso deseje calcular apenas o limite de f(x) para os casos em que a variável x se aproxima do número p por apenas um dos sentidos, isto é, determinar o limite quando x tende a p por valores à esquerda $x \to p-$ ou por valores à direita $(x \to p+)$, você deve utilizar as seguintes simbologias para esses limites laterais:

$$\lim_{x \to p_-} f(x) = \boxed{L_I} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to p_+} f(x) = \boxed{L_S}$$

São números reais.

Exemplo 3

Represente simbolicamente a seguinte afirmativa: "O limite de f(x) quando x tende ao número -2 é igual a zero".

Solução

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 0$$

Exemplo 4

Represente simbolicamente a seguinte afirmativa: "O limite de g(y) quando y tende ao número 3 por valores superiores é igual a dez".

Solução

$$\lim_{y \to 3+} g(y) = 10$$

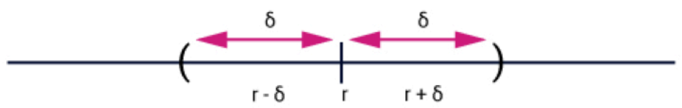
Abordagem analítica do limite: definição formal

Até aqui foi utilizada uma definição apenas intuitiva de limite apesar de já termos visto a representação simbólica. Afirmativas do tipo “se aproxima de” ou “tende a” são bastante vagas e necessitam de uma definição matemática mais rigorosa.

É necessário, portanto, determinar formalmente o limite de uma função real quando a variável independente tende a um número real. No entanto, antes de determiná-lo, é preciso definir a vizinhança de um número real.

Sejam r e (delta)δ números reais.

Define a vizinhança completa de r – ou, simplesmente, vizinhança - com a notação V(r) todo intervalo aberto centrado em r, isto é, ($r - \delta$, $r + \delta$), com δ>0 (ou seja de r – detla á r + delta, com delta positivo) delta Onde delta está relacionado ao tamanho (raio) da vizinhança.

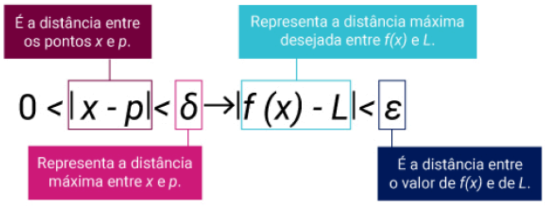


Se for considerado apenas um lado da vizinhança, esta será denominada de vizinhança à esquerda, V(r -), para o intervalo de (r $minus δ, r), ou seja de r – delta á r, e vizinhança à direita, V(r+), para o intervalo de (r, $r + \delta$), ou seja de r á r + delta.

Definição de limite de f(x) quando x tende a um número real

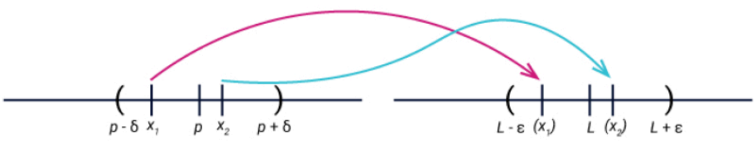
Seja uma função f real definida sobre um intervalo aberto que contém o número real p, exceto possivelmente no próprio ponto p.

Diz-se então que o limite de f(x), quando x tende a p, é um número real L se, para todo número (epsilon)ε>0, existe um número correspondente (delta)δ>0, dependente de (epsilon)ε, tal que, para todo x do domínio de f(x), se tem a representação da imagem a seguir:



(epsilon)ε e (delta)δ são números reais positivos infinitesimais, isto é, tão pequenos como você quiser.

Assim, se existir o limite de f(x), representado pelo número L, ao se escolher um valor de (epsilon)ε>0 tão pequeno como você queira, representando a distância máxima entre f(x) e L, vai existir um valor de (delta)δ que representa a distância entre a variável independente x e p. Também será suficientemente pequeno, de forma que, sempre que x estiver na vizinhança de p de raio (delta, f(x)) estará na vizinhança de L de raio (epsilon)ε. Veja o esquema a seguir.



Em outras palavras, podemos dizer que:

> Ao existir o limite de f(x), representado pelo número L, quando x tende a p, significa que, para toda vizinhança de L, vai existir uma vizinhança em p tal que, toda vez que x estiver nessa vizinhança de (p, f(x estará na vizinhança de L.

Curiosidade

A demonstração do teorema da unicidade pode ser realizada por meio da definição formal do limite.
O teorema da unicidade nos diz que, se existir o limite de f(x) quando x

tende a um número p, esse limite será único. Isto é, só pode existir um valor que represente o limite de f(x) desde que ele exista.

A demonstração formal do limite tem uma aplicação prática. Você pode usá-la para se verificar se determinado número é ou não o valor do limite de uma função.

Mão na massa

Questão 1

Qual é a representação simbólica correta para representar o limite da função **h(z)** quando **z** tende a um valor **k**, por valores inferiores?

A $\lim_{z \to k^-} h(z)$

B $\lim_{z \to k^+} h(z)$

C $\lim_{z \to k} h(z)$

D $\lim_{h(z)} k$

E $\lim_{z \to k-1} h(z)$

Parabéns! A alternativa A está correta.

Como se deseja apenas **z** tendendo a **k** por valores inferiores (à esquerda), a representação correta será $\lim_{z \to k^-} h(z)$.

Complementando: se fosse pedido o limite de **h(z)** quando a variável **z** se aproxima do número **k** por valores superiores (à direita), a simbologia seria $\lim_{z \to k^+} h(z)$.

Por fim, para o limite de **h(z)** quando **z** tende a **k**, adotam-se os dois sentidos; assim, a simbologia é $\lim_{z \to k} h(z)$.

Questão 2

Aplicando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista, o valor do limite de:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2-16)}{x-4}, x \neq 4 \\ 10, x = 4 \end{cases}$$

,respectivamente, para quando a variável independente x tende para 3 e para quando x tende para 4.

A 5 e 6

B 7 e 8

C 4 e 5

D 2 e 3

E 1 e 2

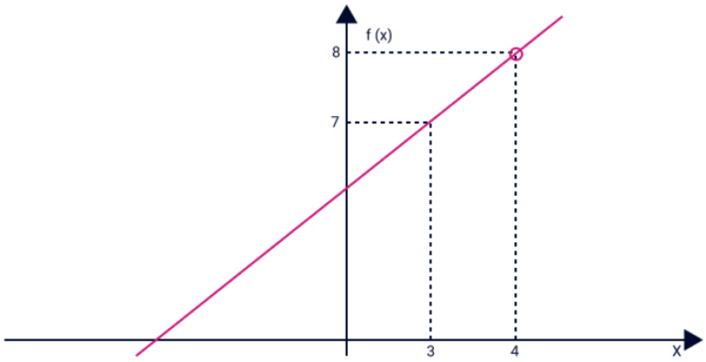
Parabéns! A alternativa B está correta.

Verifica-se que $(x^2 - 16) = (x - 4) \times (x + 4)$.

Assim:

$$f(x) = \frac{(x^2-16)}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} = x + 4, \text{ para } x \neq 4$$

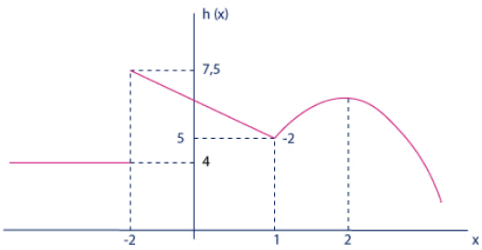
Esboçando o gráfico de f(x), se tem:



Dessa forma, quando **x**tende para o número **3**, a função **f(x)** tende para o número **7**, que, nesse caso, é o valor de **f(3)**. Assim, o limite de **f(x)** é igual a **7** quando **x** tende a **3**. Quando **x** tende para o número **4**, a função **f(x)** tende para o número **8**, que é diferente de **f(4)**. Logo, o limite de **f(x)** é igual a **8** quando **x** tende a **4**.

Questão 3

Seja **h(x)**, cujo gráfico é dado a seguir. Utilizando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista, o valor do limite de **h(x)** quando **x** tende a **– 2**.



A 7,5

B 4

C 2,5

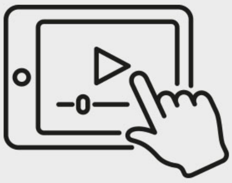
D Não existe.

E $+\infty$

Parabéns! A alternativa D está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Questão 4

Utilizando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista, o limite de...

$$m(x)=\begin{cases}3x-1, \text{ para } x<0\\ 12, \text{ para } x=0\\ 2+e^{x}, \text{ para } x>0\end{cases}$$

... respectivamente quando x tende a 0 por valores superiores e por inferiores.

A −1 e 3

B 12 e 12

C 3 e −1

D 12 e −1

E 6 e −1

Parabéns! A alternativa C está correta.

Quando x tem valores maiores (superiores) do que 0 , a função **m(x)** tem equação **2 + e ^{x}**. Se lembrarmos do gráfico da função e **e^{x}**;, veremos que essa função tenderá a **e^{x} = 1** quando **x** tender a zero. Assim, **m(x)** tenderá a **2 + e^{0}; = 2 + 1 = 3**.

Quando **x** tem valores menores (inferiores) do que 0 , a função **m(x)** tem equação **3x − 1**, que é a equação de uma reta. Fazendo o gráfico dessa reta, verifica-se que, quando se aproximar do valor 0 por valores inferiores, a função **m(x)** tenderá a **3.0 − 1 = −1.**

Não foi perguntado, mas essa função, apesar de ter limites à esquerda, valendo −1 , e à direita, valendo 3, não tem limite, pois os limites laterais são diferentes.

Outro cuidado: o valor de m para x igual a zero vale 12 , não tendo nada a ver com os valores.

Questão 5

Utilizando o conceito intuitivo de limite, determine o valor de k real para que exista o limite de...

$$p(z) = \begin{cases} 2z + k, \text{ para } z < 1 \\ 9, \text{ para } z = 1 \\ 1 + 2\ln z, \text{ para } z > 1 \end{cases}$$

... quando **z** tende ao valor **1**.

A − 2

B − 1

C 1

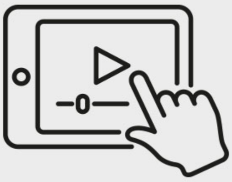
D 2

E 0

Parabéns! A alternativa B está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Questão 6

Ao se desejar provar que **lim** $_{x \to 4}$**8 − x = 4**, chegou-se, por meio da definição formal, à conclusão de que **|f(x) − 4| <** $varepsilon$ **(epsilon)** sempre que **|x − 4| <** $delta$. **Nessa demonstração, qual é o valor de** δ**(delta) em função de** ε**(epsilon)?**

A (epsilon)ε ÷ 2

B (epsilon)ε ÷ 4

C (epsilon)ε

D 2 × (epsilon)ε

E (epsilon)ε ÷ 3

Parabéns! A alternativa A está correta.

Parabéns! Você entendeu o conceito da definição formal do limite.
Dado um valor (epsilon)ε > 0.
Desse modo, queremos obter **|f(x) − 4| <** ε**(epsilon)** sempre que **|x-4| <**δ**(delta)**.
Mas:

$$|f(x) - 4| = |8 - x - 4| = |4 - x| = |x - 4| < \varepsilon$$

Então, fazendo $\delta = \varepsilon$**(delta = epsilon)**, vamos conseguir provar o enunciado.
Pois, dado ε**(epsilon) > 0**, obtém-se $\delta = \varepsilon$**(delta = epsilon)**.
Se:

$$|x-4|<\delta \to |4-x|<\delta \to |8-x-4|<\delta$$

Então...

$$|8-x-4| = |(8-x)-4| < \varepsilon$$

... provando que o limite vale 4. Repare que, com qualquer valor de **(epsilon)**ε escolhido, sempre é possivel definir o **(delta)**δ.

Teoria na prática

Um cientista precisa verificar se o seu modelo matemático, representado por f(x) = 2x + 6, tende, para um valor de x real, a um valor igual a 8 quando a sua variável de entrada x tende a 1. Você pode ajudá-lo a fazer essa verificação por meio da definição formal de limite. Desse modo, prove que o $\lim_{x \to 1}(2x + 6) = 8$.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Seja $f(x) = \begin{cases} x+2, x<2 \\ x^2, x \geq 2 \end{cases}$ (f(x) = x + 2 para x < 2 e x² para x ≥ 2).

Aplicando o conceito intuitivo de limite, marque a alternativa que apresenta o do $\lim_{x \to 2}f(x)$.

A 1

B 3

C 4

D O limite não existe.

E O limite tende a ∞.

Parabéns! A alternativa C está correta.

Quando x se aproxima de 2 por valores inferiores, f(x) é definida por x + 2. Assim, f(x) vai tender para 4 . Quando x se aproxima de 2 por valores superiores, f(x) é definida por x^2. Logo, f(x) vai tender para 4 também. Portanto, o limite de f(x) tende para 4 quando x tende para 2. Pode ser feita uma análise gráfica para solucionar também essa questão.

Questão 2

Qual das alternativas abaixo representa simbolicamente o limite de g(x) quando x tende para m apenas por valores superiores?

A $\lim_{x \to m-} g(x)$

B $\lim_{x \to m+} g(x)$

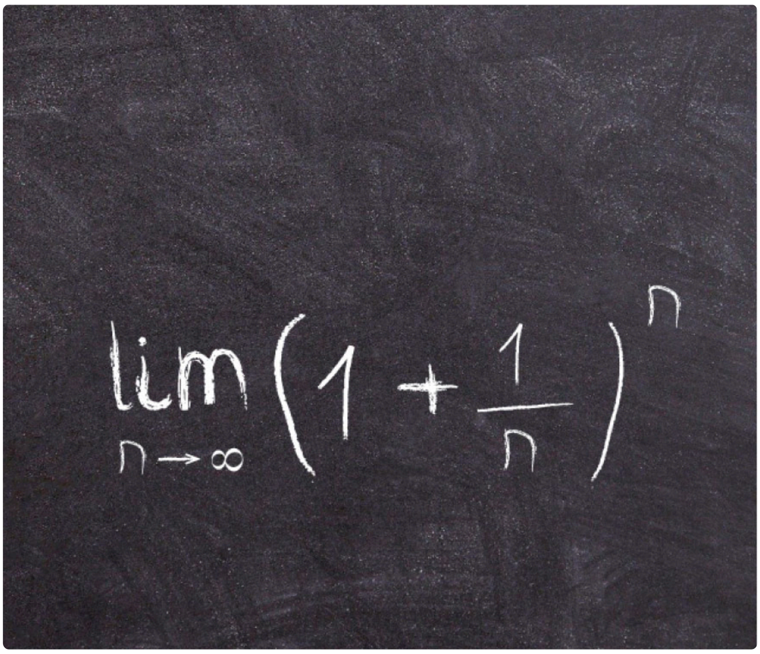
C $\lim_{x \to m} g(x)$

D $\lim_{x \to g(x)} p$

E $\lim_{x \to 0} g(x)$

Parabéns! A alternativa B está correta.

Como se deseja apenas x tendendo a m por valores à direita (superiores), representamos por $\lim_{x \to m+} g(x)$. Caso se deseje o limite de f(x) quando a variável x se aproximar do número m por valores à esquerda (inferiores), a simbologia será $\lim_{x \to m-} g(x)$. Para o limite de g(x) quando x tende a m, adotam-se os dois sentidos; assim, a simbologia é $\lim_{x \to m} g(x)$.



2 - Cálculo de limite

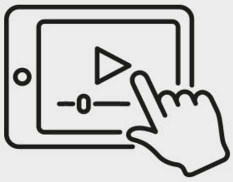
Ao final deste módulo, você será capaz de calcular o limite de uma função real.

Vamos começar!

Limite de uma função real

Assista ao vídeo a seguir para conhecer alguns conceitos iniciais importantes para o estudo deste módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Limites laterais

Comentado anteriormente, o conceito de limite lateral é uma alternativa por meio da qual podemos verificar a existência ou não do limite e até mesmo estimar o seu valor. Além dessa alternativa e da determinação do limite pela aplicação da abordagem intuitiva, podemos usar algumas propriedades e teoremas para calcular, de forma analítica, o limite de f(x) quando x tende a um número real p.

Por fim, o conceito de limite pode ser extrapolado para se analisar o comportamento da função no infinito ou quando ela tende ao infinito. Observe estas definições:

Limite no Infinito

Quando seu domínio tende a **mais ou menos infinito**.

Limite Infinito

Quando o valor da função tende a **mais ou a menos infinito**.

Os limites laterais de f(x) quando x tende a um número real p são representados por:

$$\lim_{x \to p_-} f(x) = \boxed{L_I} \qquad ou \qquad \lim_{x \to p_+} f(x) = \boxed{L_S}$$

São números reais.

Conheça alguns conceitos importantes:

Limite inferior

O limite inferior ou limite à **esquerda**, L_I, existirá se, quando x tender ao número p, pelos valores inferiores (menores) ao p, a função real f(x) tender ao valor de L_I.

Limite superior

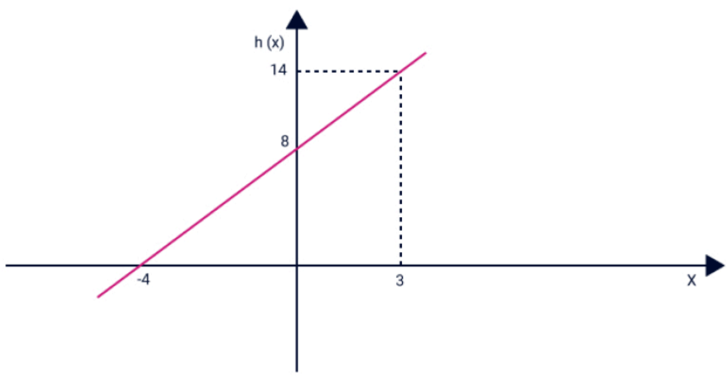
O limite superior ou limite à **direita**, L_S, existirá se, quando x tender ao número p pelos valores superiores (maiores) ao p, a função real f(x) tender ao valor de L_S.

Limites laterais

Os limites laterais podem ser **iguais**, como se verifica na função h(x) representada a seguir. Você pode perceber que, quando x tender a 3 por valores inferiores e superiores a 3, a função h(x) tenderá ao número 14.

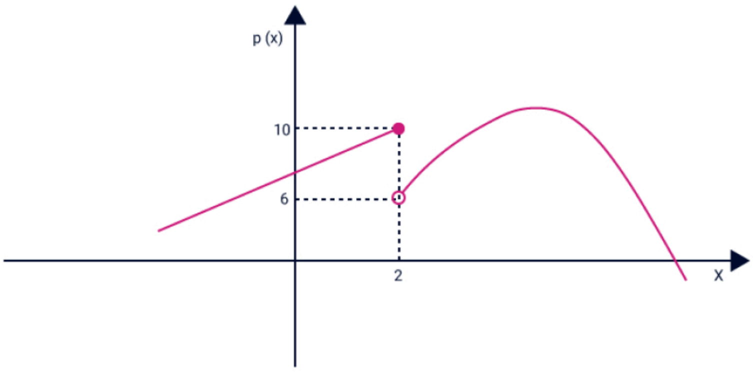
Observe:

$$\lim_{x \to 3-} h(x) = \lim_{x \to 3+} h(x) = 14$$



Os limites laterais também podem ser diferentes entre si, como na função p(x) representada a seguir. Verifique que, quando x tende a 2 por valores inferiores, a função p(x) tende a 10. Já quando x tende a 2 por valores superiores, a função p(x) tende a 6

$$\lim_{x \to 2^-} p(x) = 10 \text{ e } \lim_{x \to 2+} p(x) = 6$$



Da mesma forma que o limite, existe a necessidade de uma definição formal para os limites laterais.

Definição de limites laterais à esquerda de f(x) quando x tende a um número real:

$$\lim_{x \to p_-} f(x) = L_I$$

Se, para todo número (epsilon)$\varepsilon > 0$, existe um número correspondente (delta)$\delta > 0$, dependente de (epsilon)ε, tal que, para todo x do domínio de f(x),

$$p - \delta < x < p \rightarrow |f(x) - L_I| < \varepsilon$$

Definição de limites laterais à direita de f(x) quando x tende a um número real:

$$\lim_{x \to p_+} f(x) = L_S$$

Se, para todo número $\varepsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$, dependente de ε, tal que, para todo x do domínio de f(x),

$$p < x < p + \delta \rightarrow |f(x) - L_s| < \varepsilon$$

A importância dos limites laterais recai na possibilidade de se verificar a existência ou não do limite da função no ponto e, além disso, de se obter o valor do limite.

Atenção!

O limite de f(x) quando x tende ao número real p vai existir e será igual a L se e somente se:

- Existirem os dois limites laterais de f(x) quando x tender a p;
- Os limites laterais forem iguais a L.

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \to p^-} f(x) \\ \exists \lim_{x \to p^+} f(x) \\ \lim_{x \to p^-} f(x) = \lim_{x \to p^+} f(x) = L \end{cases}$$

Retomando os gráficos anteriores, você pode perceber que o limite de h(x) existe, pois, quando x tender a 3, os limites laterais vão existir e serão iguais a $\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^+} h(x) = 14$..

Além disso, você pode calcular o $\lim_{x \to 3} h(x) = 14$.

Para o caso de p(x), o limite não existirá, pois, apesar de os limites laterais existirem, eles são diferentes. Portanto, $\nexists \lim_{x \to 2} p(x)$.

Exemplo 5

Calcule os dois limites laterais da função $f(x) = 2|x|/x$, (f(x) = 2 × módulo de x ÷ x) quando x tende para zero.

Solução

Para valores de x positivos, e f(x), então vai assumir o valor de 2x ÷ x = 2.

Para valores de x negativos, e f(x), então vai assumir o valor de −2x ÷ x = −2.

Quando, portanto, x se aproxima de zero por valores superiores (à direita), x > 0. Dessa forma:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2|x|}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to 0+} 2 = 2$$

Quando x tende a zero por valores inferiores (à esquerda), x < 0 e o módulo de x = −x; logo:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{2|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-2x}{x} = \lim_{x\to 0-} -2 = -2$$

Exemplo 6

Determine o limite da função $f(x) = 2|x|/x$, (f(x) = 2 × módulo de x ÷ x) quando x tende para zero.

Solução

Como calculado no exemplo anterior:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{2|x|}{x} = -2 \text{ e } \lim_{x\to 0+} \frac{2|x|}{x} = 2$$

Assim, como $\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$; logo, não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Teoremas para cálculo dos limites de f(x)

Agora podemos conhecer alguns teoremas que nos permitirão calcular o limite de uma função real quando x tende a um número real p de uma forma analítica - e não apenas intuitiva.

As demonstrações desses teoremas podem ser feitas por meio da definição formal de limite.

Teorema da substituição direta

Sejam m(x) e n(x) funções polinomiais e m(x) ÷ n(x), uma função racional, então:

$$\lim_{x \to p} m(x) = m(p)$$

$$\lim_{x \to p} \frac{m(x)}{n(x)} = \frac{m(p)}{n(p)}, \text{se n}(p) \neq 0$$

Na verdade, o teorema acima vale para qualquer função que seja contínua no ponto p do seu domínio. A definição de função contínua será feita no próximo módulo, mas já podemos adiantar que, além das funções polinomiais e racionais, as trigonométricas, exponenciais, trigonométricas inversas e logaritmicas também são contínuas em seus domínios.

Em outras palavras, podemos estender o teorema anteriormente apresentado para o cálculo do limite de qualquer uma da lista dessas funções quando x tende a um ponto p do seu domínio.

Exemplo 7

Determine, caso exista, $\lim_{x \to 2}(7x^4 + x^2 - 8x + 2)$.

Solução

A função $(7x^4 + x^2 - 8x + 2)$ é uma função polinomial, contínua em todo seu domínio; portanto, podemos usar o teorema da substituição para executar o cálculo.

$$\lim_{x \to 2}(7x^4 + x^2 - 8x + 2) = 7(2)^4 + (2)^2 - 8.2 + 2 = 7.16 + 4 - 16 + 2 = 102$$

Exemplo 8

Determine, caso exista, $\lim_{x \to pi}$sen x.

Solução

A função f(x) = sen x é uma função trigonométrica, contínua no ponto x = π(pi); portanto, podemos usar o teorema da substituição direta.

Assim, $\lim_{x \to pi}$sen x = sen π(pi) = 0

Teorema da substituição de funções

Sejam f(x) e g(x) duas funções tais que f(x) = g(x) para todos os pontos do domínio, à exceção de x = p. Nesse caso, se o limite de g(x) quando x tende a p existe, o limite de f(x) também existe e $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x)$.

Anteriormente, usamos intuitivamente esse teorema ao verificar o limite da função g(x) = $\frac{x^2-x-2}{x-2}$ (x² − x − 2 ÷ x − 2) pois tal função g(x) era igual à função x + 1 para todos os pontos do domínio, à exceção de x = 2. Portanto,
$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} x + 1 = 3$.

Atenção!

O teorema da substituição direta inicialmente não pode ser usado nas funções racionais no caso em que n(p), que está no denominador, tem um valor igual a zero. Porém, em alguns casos, nos quais tanto m(p) quanto n(p) se anulam mutuamente, pode-se tentar retirar essa restrição por meio de um cancelamento de fatores comuns entre o numerador e o denominador.

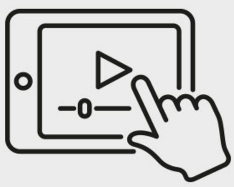
Desse modo, se definirá uma nova função que apresenta os mesmos valores da função original, à exceção do ponto p, podendo usar o teorema da substituição de funções.

Exemplo 9

Cálculo do limite pelo teorema de substituição de funções

Assista ao vídeo a seguir para conhecer o exemplo 9.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Propriedades algébricas do limite

O limite de f(x) apresenta propriedades algébricas que podem ser utilizadas para calcular o limite da função quando x tende ao número p. Todas essas propriedades podem ser demonstradas graças à definição formal do limite.

Sejam k,p, L e T números reais e seja n um número natural diferente de zero. Se $\lim^{x \to p} f(x) = L$ e $\lim^{x \to p} g(x) = T$, então:

Limite de uma constante

$$\lim_{x \to p} k = k, k \text{ real}$$

Propriedade da soma e da diferença

$$\lim_{x \to p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) \pm \lim_{x \to p} g(x) = L \pm T$$

Propriedade do produto por uma constante

$$\lim_{x \to p} [kf(x)] = k \lim_{x \to p} f(x) = kL$$

Propriedade de produto

$$\lim_{x \to p} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \to p} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x \to p} g(x)\right] = LT$$

Propriedade do quociente

$$\lim_{x \to p} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)} = \frac{L}{T}, \text{ se } \lim_{x \to p} g(x) = T \neq 0$$

Propriedade da potenciação

$$\lim_{x \to p} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to p} f(x)\right]^n = L^n$$

Propriedade da raiz

$$\lim_{x \to p} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to p} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \text{ para o caso de } n \text{ par} : L \geq 0$$

Propriedade logarítmica

$$\lim_{x\to p} \ln[f(x)] = \ln\left(\lim_{x\to p} f(x)\right) = \ln L, \text{ se } \lim_{x\to p} f(x) = L > 0$$

Propriedade exponencial

$$\lim_{x\to p} \exp[f(x)] = \exp\left(\lim_{x\to p} f(x)\right) = e^L$$

Exemplo 10

Determine, caso exista, $\lim_{x\to 0} 10 \ln(x + 2) \times \cos x^2$.

Solução

Usando a propriedade do produto:

$$\lim_{x\to 0} 10 \ln(x+2) \cos x^2 = 10 \lim_{x\to 0} \ln(x+2) \lim_{x\to 0} \cos x^2.$$

Mas ln(x + 2) e cos x^2 são funções que fazem parte de nossa lista de funções contínuas no domínio e x = 0 pertence ao domínio de ambas. Dessa forma, podemos usar o teorema da substituição direta:

$$10 \lim_{x\to 0} \ln(x+2) \lim_{x\to 0} \cos x^2 = 10 \ln(2) \cos 0 = 10 \ln(2)$$

Exemplo 11

Determine, caso exista, $\lim_{x\to 1} \ln\left(\sqrt{\frac{2x+14}{3+x^2}}\right)$ ($\lim_{x\to 1}$ln (√((2x + 14) ÷ (3 + x^2)))).

Solução

Usando a propriedade algébrica:

$$\lim_{x\to 1} \ln\left(\sqrt{\frac{2x+14}{3+x^2}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{2x+14}{3+x^2}}\right)$$

Essa propriedade pode ser usada, pois, caso o limite da direita exista, ele será positivo.

Como √((2x + 14) ÷ (3 + x^2)) está na lista de funções contínuas em seu domínio e x = 1 pertence ao seu domínio, pelo teorema da substituição direta:

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{2x+14}{3+x^2}} = \sqrt{\lim_{x \to 1} \frac{2x+14}{3+x^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 + 14}{3+1^2}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2$$

Portanto:

$$\lim_{x \to 1} \ln\left(\sqrt{\frac{2x+14}{3+x^2}}\right) = \ln\left(\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{2x+14}{3+x^2}}\right) = \ln(2)$$

Limites no infinito e limites infinitos

Limites no infinito

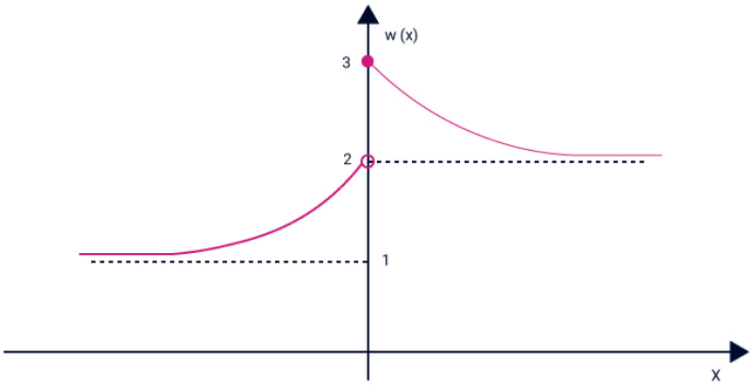
Até este ponto, definimos e calculamos os limites de uma função quando a variável independente de seu domínio tende a um número real p. Contudo, poderemos estender esse cálculo do limite para quando x tender ao infinito ou ao menos infinito.

Atenção!

Um número real x tenderá para infinito, $x \to \infty$, sempre que $\forall M$ real, $x > M$. Um número real x tenderá para menos infinito, $x \to -\infty$, sempre que $\forall M$ real, $x < -M$.

Esse tipo de limite será utilizado para se obter o comportamento da função quando x assumir valores cada vez maiores, ou seja, crescer sem limitação, representado por $x \to \infty$, ou quando x assumir valores cada vez menores ou decrescer sem limitação, representado por $x \to -\infty$.

Veja o gráfico da função w(x), a seguir:



Quando x tende para infinito, o gráfico da função w(x) tende para a reta y = 2. Isso quer dizer que o valor de w(x) fica cada vez mais próximo de 2; portanto, o limite de w(x) quando x tende ao infinito vale 2 . De forma análoga, quando x tende para menos infinito, o gráfico da função tende para a reta y = 1.

Assim, o valor de w(x) fica cada vez mais próximo de 1; consequentemente, o limite de w(x), quando x tende a menos infinito, vale 1.

As retas y = 1 e y = 2 no gráfico são chamadas de assíntotas horizontais e serão definidas no próximo módulo.

> **Utiliza-se, portanto, a simbologia $\lim_{x \to \infty} f(x) = L1$ para indicar o comportamento de f(x) se aproximando cada vez mais de L1, sem nunca alcançar, quando x tende ao infinito. No gráfico anterior, L1 vale 2.**
>
> **De forma análoga, há a notação $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L2$ para o caso em que x tende ao menos infinito. No caso anterior, L2 vale 1.**

Todos os teoremas e propriedades algébricas vistas neste módulo quando x tende a um número real p podem ser usadas também quando x tende apenas para os limites laterais ou quando x tende a mais ou menos infinito.

Para o cálculo de limites envolvendo infinito, devemos conhecer algumas operações:

Ao se dividir um número real por um número que tende ao infinito, o quociente tende a zero.

$$N \div \infty \to 0_{+}$$

Quando N ≥ 0

$$N \div -\infty \to 0_{-}$$

Quando N ≥ 0

$$N \div \infty \longrightarrow 0_-$$

Quando N ≤ 0

$$N \div -\infty \longrightarrow 0_+$$

Quando N ≤ 0

0_+ significa que tende a zero pela direita (valores positivos);

0_- significa que tende a zero pela esquerda (valores negativos).

Ao se dividir um número que tende a mais ou menos infinito por um número real, o quociente tende a mais ou menos infinito. Assim, existem as seguintes possibilidades:

$$\infty \div N \longrightarrow \infty$$

Quando N ≥ 0

$$-\infty \div N \longrightarrow -\infty$$

Quando N ≥ 0

$$\infty \div N \longrightarrow -\infty$$

Quando N ≤ 0

$$-\infty \div N \longrightarrow \infty$$

Quando N ≤ 0

Exemplo 12

Calcule o valor de $\lim_{u \to \infty} \frac{5}{2e^u}$ (5 ÷ 2e á u-nésima potnéncia).

Solução

No cálculo do limite, deve-se conhecer as funções envolvidas. Nesse caso, por exemplo, é preciso conhecer a função e^u usando as propriedades algébricas e a substituição direta, pois as funções envolvidas são contínuas.

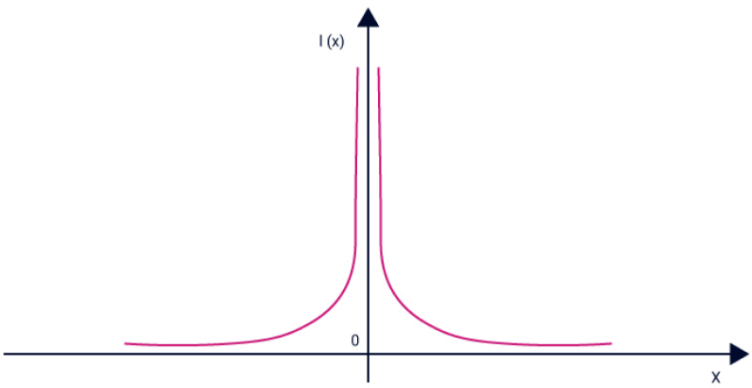
$$\lim_{u \to \infty} \frac{5}{2e^u} = \frac{\lim_{u \to \infty} 5}{2 \lim_{u \to \infty} e^{\infty}} = \frac{5}{2 \cdot e^{\infty}} = \frac{5}{\infty} = 0$$

Portanto, a função tende a 0 quando u tende ao infinito.

Limites infinitos

Até este ponto obtivemos os valores de limites da função iguais a um número real L tanto quanto x tende a um número real p ou ao infinito.

Outra extensão que pode ser feita é quando determinada função tem um comportamento de tender não a um número, e sim ao infinito, quando x se aproxima de um número real ou até mesmo do infinito. Veja o gráfico da função I(x):



Observe que, quando x tende a zero tanto por valores superiores quanto por inferiores, a função assume valores que tendem para o infinito. O infinito não é um número. Porém, ao usarmos a notação $\lim_{x \to 0} I(x) = \infty$, estamos representando o comportamento da função ao assumirmos valores tão grandes quanto quisermos, ou seja, crescendo sem limitações.

O conceito de limites laterais também pode ser aplicado nesse caso. Podemos afirmar que:

$$\lim_{x\to 0^+} I(x) = \lim_{x\to 0^-} I(x) = \infty \leftrightarrow \lim_{x\to 0} I(x) = \infty$$

Veja o caso da função k(x). Observe o comportamento da função quando $x \to 1_+$. Veja que, nesse caso, a função k(x) assume valores que tendem ao infinito.

Agora foque o comportamento da função quando $x \to 1_-$. Nesse caso, a função k(x) assume valores que tendem ao menos infinito.

Portanto, nesse caso, existem os limites laterais, mas não existe o limite no ponto, pois:

$$\lim_{x\to 1+} k(x) = \infty$$

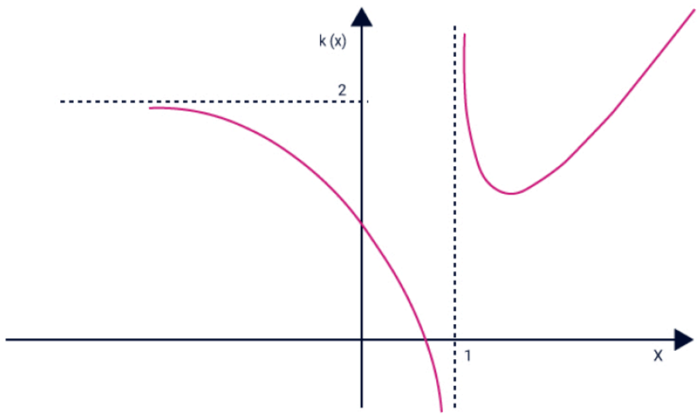
$$\lim_{x\to 1^-} k(x) = -\infty \to \nexists \lim_{x\to 1} k(x)$$

Quando a função tender para menos ou mais infinito, quando se tende a um ponto, tal função vai tender a uma reta vertical. Essa reta é denominada assíntota vertical e será estudada no próximo módulo.

Para finalizar as possíveis formas do limite, analise agora o comportamento de k(x) quando x tende para o infinito: você observará que a função também tende para o infinito.

Dessa forma, podemos representar que:

$$\lim_{x\to\infty} k(x) = \infty$$



Da mesma forma que o limite de f(x), quando x tende a um número real, tem uma definição formal, os limites no infinito de f(x), bem como os limites infinitos, também apresentam definições formais.

Teorema de Leibniz

Um teorema que também pode ser usado para calcular limites de funções polinomiais quando x tende a zero ou a ±∞ é o teorema de Leibniz.

Todo polinômio é equivalente ao seu termo de maior grau, em que a sua variável independente tende para mais ou menos infinito.	×	Todo polinômio é equivalente ao seu termo de menor grau, em que a sua variável independente tende para zero.

Exemplo 13

Calcule o valor de $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 3x^2 + 8}}{x^3 - x + 1}$ (ou seja, √(4x^6 − 3x^2 + 8) ÷ (x^3 − x + 1)).

Solução|

Por meio do teorema de Leibniz, como x está tendendo ao infinito, há √(4x^6 − 3x^2 + 8 → 4x^6 e x^3 − x + 1 → x^3, que são seus termos, respectivamente, de maior grau.

Assim:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 3x^2 + 8}}{x^3 - x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^6}}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\,|x^3|}{x^3}$$

Como x está tendendo para infinito, x > 0, então o módulo de x^3 = x^3.

Assim, $\lim_{x \to \infty} \frac{2\,x^3}{x^3}$ $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$ (ou seja, limite de 2 vezes módulo de x ao cubo sobre x ao cubo será igual à 2).

Exemplo 14

Calcule o valor de $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 3x^2 + 8}}{x^3 - x + 1}$ (ou seja, √(4x^6 − 3x^2 + 8) ÷ (x^3 − x + 1)).

Solução

Solução análoga à anterior pelo teorema de Leibniz.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 3x^2 + 8}}{x^3 - x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^6}}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\,|x^3|}{x^3}$$

A diferença é que x está tendendo para menos infinito, $x < 0$, então o módulo de $x^3 = -x^3$

Logo, $\lim_{x\to-\infty} \frac{2\ x^3}{x^3} \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^3}{x^3} = -2$ (ou seja, limite de 2 vezes módulo de x ao cubo sobre x ao cubo será igual à −2).

Exemplo 15

Calcule o valor de $\lim_{x\to0}(x^3 + 8) \div (x^4 + x + 1)$.

Solução

Graças ao teorema de Leibniz, como x está tendendo a zero, sabe-se que $x^3 \to 8$ e $x^4 \to 1$.

Assim, $\lim_{x\to0}(x^3 + 8) \div (x^4 + x + 1) = \lim_{x\to0} 8 \div 1 = 8$.

Você pode perceber que esse limite também poderia ter sido resolvido pelo teorema da substituição direta, mostrando que não existe apenas um caminho para resolver o mesmo limite.

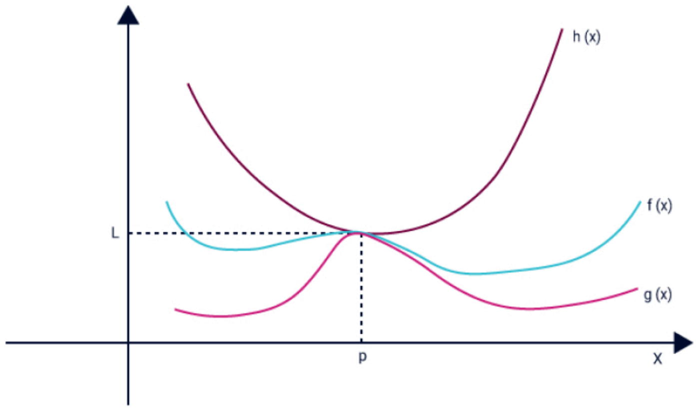
Teorema do confronto

Além dos teoremas apresentados neste módulo, existem outros que podem ser usados para cálculo dos limites de uma função real, como a equivalência, os limites fundamentais e o teorema do confronto, entre outros.

O teorema do confronto será visto agora. Suponha que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para todo x em um intervalo aberto I, contendo o ponto p, exceto, possivelmente, no próprio ponto. Imagine também que $\lim_{x \to p} g(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L$; então, $\lim_{x \to p} f(x) = L$.

Esse teorema é chamado de confronto, pois a função f(x) se encontra sempre entre as duas funções, como se estivesse limitada por elas. Assim, se o limite superior e o inferior tendem ao mesmo número, f(x) obrigatoriamente terá de tender a esse número.

Observe na imagem a seguir:



Exemplo 16

Aplicando o teorema do confronto, calcule o limite de f(x) quando x tende a 2, sabendo que, na vizinhança do ponto x = 2, vale a desigualdade:

$$-x^2 + 10x + 5 \leq f(x) \leq x^2 - 5x + 27$$

Solução 1

Usando o teorema do confronto na vizinhança de x = 3:

$$\begin{gathered}
-x^2 + 10x + 5 \leq f(x) \leq x^2 - 5x + 27 \\
\lim_{x \to 2} -x^2 + 10x + 5 \leq \lim_{x \to 2} f(x) \leq \lim_{x \to 2} x^2 - 5x + 27 \\
-(2)^2 + 10.2 + 5 \leq \lim_{x \to 2} f(x) \leq 2^2 - 5.2 + 27 \\
21 \leq \lim_{x \to 2} f(x) \leq 21
\end{gathered}$$

Então, $\lim_{x \to 2} f(x) = 21$.

Existe um teorema que é consequência direta do teorema do confronto e pode ser muito útil.

Teorema

Sejam f(x) e g(x) duas funções com o mesmo domínio S, tais que $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$ para todo x pertencente a S, em que M é um número real > 0. Desse modo, $\lim_{x \to p} f(x)\, g(x) = 0$.

Em outras palavras, se uma função tiver limite tendendo a zero quando x tender a um número p e a outra for limitada, então o limite do produto de f(x)g(x) tenderá a zero.

Exemplo 17

Calcule $\lim_{x \to 0} x \times \text{sen}\,(1 \div x)$.

Solução

Como $\lim_{x \to 0} x = 0$ e $g(x) = \text{sen}\,(1 \div x)$ é uma função limitada, a função seno tem imagem no conjunto $[-1, 1]$.

Dessa forma, pelo teorema do confronto, $\lim_{x \to 0} x \times \text{sen}\,(1 \div x) = 0$.

Não importa a técnica utilizada para se resolver um limite de f(x): caso o limite se transforme em uma indeterminação, nada podemos afirmar. Com isso, teremos que introduzir uma nova técnica para tentar resolvê-lo.

Segue a lista das principais indeterminações:

$\infty - \infty$

$0 \div 0$

$\infty \div \infty$

$0 \times \infty$

Mão na massa

Questão 1

Determine, caso exista, $\lim_{x \to 1}(x^4 + 2) \times (\ln(x) + 1)$.

A 1

B 2

C 3

D 4

E 5

Parabéns! A alternativa C está correta.

Usando a propriedade algébrica:

$$\lim_{x \to 1}(x^4 + 2)(\ln(x) + 1) = \lim_{x \to 1}(x^4 + 2) \lim_{x \to 1}(\ln(x) + 1)$$

A função **f(x) = $(x^4 + 2)$** é uma função polinomial, contínua em todo seu domínio; portanto podemos usar o teorema da substituição para executar o cálculo.

$$\lim_{x \to 1}(x^4 + 2) = 1 + 2 = 3$$

A função **g(x) = ln(x) + 1** é uma função logarítmica, contínua em todo seu domínio; portanto, podemos usar o teorema da substituição para executar o cálculo.

$$\lim_{x\to 1}(\ln(x)+1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

Assim:

$$\lim_{x\to 1}\left(x^4+2\right)(\ln(x)+1) = \lim_{x\to 1}\left(x^4+2\right)\lim_{x\to 1}(\ln(x)+1) = 3.1 = 3$$

Questão 2

Calcule o valor de $\mathbf{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{(x^4 - 8)} \div (x^2 - 1)}$.

A 0

B 1

C 2

D 3

E ∞

Parabéns! A alternativa B está correta.

Pelo teorema de Leibniz:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4-8}}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2|}{x^2}$$

Quando x está tendendo para menos infinito, **x < 0**, então o módulo de **x²** será igual à**x²**

Assim, $\mathbf{\lim_{x\to-\infty}|x^2| \div x^2 = \lim_{x\to-\infty}1 = 1}$

Questão 3

Calcule o valor de $\lim_{x\to 0}(x^7 + 8x) \div (x^5 + x + 7)$.

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

Parabéns! A alternativa A está correta.

Por meio teorema de Leibniz, como x está tendendo a zero, tem-se
$x^7 + 8x \to 8x$ e
$x^5 + x + 7 \to 7$, que são seus termos, respectivamente, de menor grau.

Assim:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^7+8x}{x^5+x+7} = \lim_{x\to 0}\frac{8x}{7} = \frac{0}{7} = 0$$

Você pode perceber que esse limite também poderia ter sido resolvido pelo teorema da substituição direta.

Questão 4

Calcule o valor de **lim**$_{u\to -\infty}$**10 & divide; e**^{u}**.**

A 0

B 1

C 2

D ∞

E $-\infty$

Parabéns! A alternativa D está correta.

No cálculo do limite, é preciso conhecer as funções envolvidas. Nesse caso, por exemplo, conhecer a função e usando as propriedades algébricas e a substituição direta, pois as funções envolvidas são contínuas.

$$\lim_{u \to -\infty} \frac{10}{e^u} = \frac{\lim_{u \to -\infty} 10}{\lim_{u \to -\infty} e^u} = \frac{10}{e^{-\infty}}$$

Quando x tender a menos infinito, a função $\mathbf{e^{-\infty}}$ tenderá a zero.

Assim, $\mathbf{\lim_{u \to -\infty} 10 \div e^u = 10 \div e^{-\infty} = 10 \div 0_+} \to \infty$

Questão 5

Calcule:

$$\lim_{z \to \pi} \frac{(z-\pi)^2}{4} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{z-\pi}}\right) + 2.$$

A 0

B 1

C 2

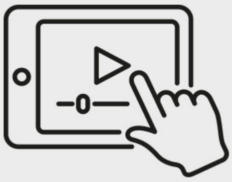
D 3

E 4

Parabéns! A alternativa C está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Questão 6

Determine, caso exista, $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4) \div (x^2 - x - 2)$.

A $1 \div 3$

B $2 \div 3$

C $4 \div 3$

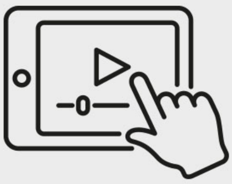
D $4 \div 3$

E 0

Parabéns! A alternativa C está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Teoria na prática

O valor da pressão de um forno é modelado pela função $f(x) = (2 + e^{-x})\,\frac{x^3+4x+2}{3x^3-2x+1}$, ou seja, $(2 + e^{-x}) \times (x^3+4x+2) \div (3x^3-2x+1)$, na qual x é uma variável de controle. Para que valor a pressão do forno vai tender caso essa variável de controle cresça indefinidamente, isto é, $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Calcule o limite de $f(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2-x-1}$ (ou seja **f(x) = (x³ + x² + 5x − 3) ÷ (x² − x − 1)**) quando x tende para 1.

A −1

B 3

C −4

D 2

E −3

Parabéns! A alternativa C está correta.

Você entendeu o cálculo do limite por meio dos teoremas.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 - x - 1} = \frac{m(1)}{n(1)}$$

Pode-se usar a substituição direta, pois f(x) é uma função racional e, para **x = 1**, seu denominador não se anula.

Assim:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 - x - 1} = \frac{m(1)}{n(1)} = \frac{4}{-1} = -4$$

Questão 2

Calcule $\lim_{x \to -\infty} 8 \div (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 8})$.

A 0

B ∞

C −1

D 2

E −∞

Parabéns! A alternativa A está correta.

Pelo teorema de Leibniz, como x está tendendo a menos infinito, tem-se $x^3 + x^2 + 8 \to x^3$, que é seu termo de maior grau

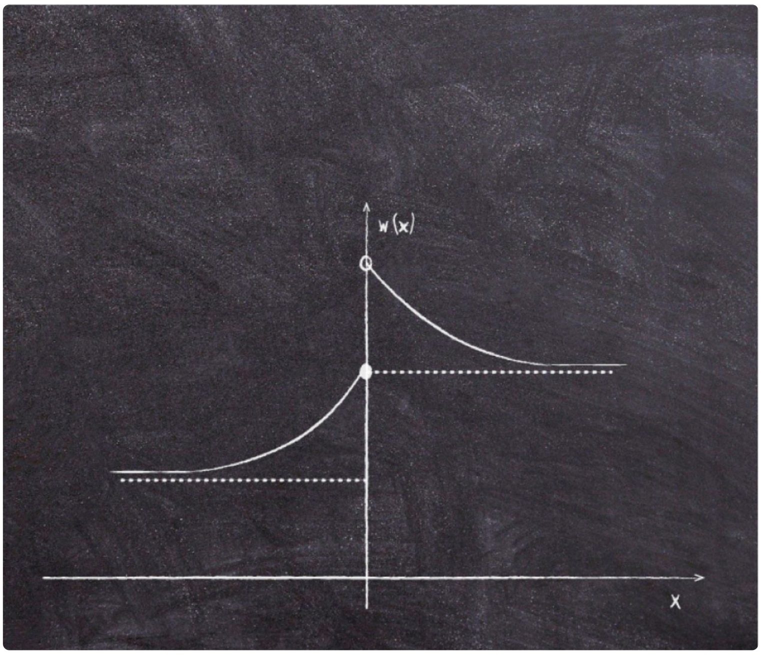
Assim:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{8}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 8}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{x}$$

Pode-se usar a substituição direta por serem funções contínuas. Desse modo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{8}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 8}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{x} = \frac{8}{-\infty} = 0$$

Sendo mais rigorosos, poderíamos dizer que está tendendo a zero por valores negativos (0-).



3 - Continuidade de funções

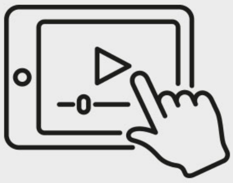
Ao final deste módulo, você será capaz de aplicar o cálculo do limite na verificação da continuidade da função e na obtenção das assíntotas.

Vamos começar!

Limite e continuidade de uma função

Assista ao vídeo a seguir para conhecer alguns conceitos iniciais importantes para o estudo deste módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Continuidade de uma função

O conceito de continuidade de uma função em um ponto p é definido por meio do seu limite quando x tende a p. Dizer que uma função f(x) é contínua em um ponto p significa afirmar que seu gráfico não sofre nenhuma interrupção nesse ponto.

Relembrando

Nas funções apresentadas no módulo 1, no item sobre noções intuitivas de limite, a função f(x) é contínua. No entanto, a função g(x) não é contínua em x = 2, e h(x) não é contínua em x = 1,5.

Definição de continuidade em um ponto

Seja f(x) uma função com domínio no intervalo aberto (a, b) e p, um ponto pertencente a tal intervalo. Diz-se, portanto, que p é um ponto interior do domínio de f(x).

A função f(x) será contínua em p se as seguintes condições forem satisfeitas:

$\exists f(p)$

$\exists \lim\limits_{x \to p} f(x)$

$\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$

Dessa forma, para uma função ser contínua em p, ela deverá ser definida em p e precisará existir o limite de f(x) quando x tender a p; assim, haverá os dois limites laterais. Por fim, o valor do limite tem de ser igual ao da função em p.

Atenção!

Para que a função f(x) seja contínua em todo intervalo (a, b), ela deve ser contínua em todos os pontos desse intervalo.

Como já mencionamos, as funções polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais, trigonométricas inversas e logarítmicas são contínuas em seus domínios, pois elas atendem à definição da continuidade em cada ponto no qual são definidas.

A definição anterior foi feita para um ponto interior ao domínio de uma função, ou seja, não vale para o caso de pontos extremos do domínio. A função f(x) será contínua em um intervalo fechado [a, b] se for contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) e se, para os extremos do domínio:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

Define a continuidade de f(x) pela **direita** no ponto a.

$$\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$$

Define a continuidade de f(x) pela **esquerda** no ponto b.

Para o caso de intervalos de domínio [a, ∞), a continuidade da função é garantida pelos pontos nos interiores e pela continuidade pela direita no ponto **a**. Já nos intervalos de domínio (∞, b], a continuidade dela é garantida pelos pontos nos interiores e pela continuidade pela esquerda no ponto **b**.

Exemplo 18

Obtenha o valor das constantes **a** e **b** reais para que a função

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - a, x < 2 \\ b, x = 2 \\ 3x - x^2 + 1, x > 2 \end{cases}$$

(ou seja, **g(x) = x^2 − a** para **x < 2**, **g(x) = b** para **x = 2**, **g(x) = 2x − x^2 + 1**, para **x > 2**) seja contínua em todo seu domínio.

Solução

A função g(x) é definida por meio de duas funções polinomiais para **x < 2** e para **x > 2** . Assim, por ser função polinomial g(x), ela será contínua em todos os pontos menores ou maiores do que 2.

O único ponto com o qual devemos nos preocupar é com x = 2.

Assim, inicialmente, devem ser calculados os limites laterais.

$$\lim_{x \to 2+} g(x) = \lim_{x \to 2+} 3x - x^2 + 1 = 3.2 - (2)^2 + 1 = 3$$
$$\lim_{x \to 2-} g(x) = \lim_{x \to 2+} x^2 - a = (2)^2 - a = 4 - a$$

A primeira condição para ser contínua em x = 2 é que exista limite em x = 2; dessa forma, os limites laterais devem ser iguais.

Assim, **3 = 4 − a** → **a = 1.**

A segunda condição é que g(x) seja definido em **x = 2 : g(2) = b**.

A terceira condição é que o limite de g(x) quando x tende a 2 precisa ser igual a g(2).

Portanto:

$$\lim_{x \to 2-} g(x) = \lim_{x \to 2+} g(x) = \lim_{x \to 2} g(x) = 3 = g(2) = b$$

Dessa forma,**b = 3**.

Existem alguns teoremas que podem ser usados para verificar a continuidade de uma função baseada no conhecimento da continuidade de outra. O primeiro deles se baseia na operação matemática de funções contínuas.

Propriedades das funções contínuas

Se as funções f(x) e g(x) forem contínuas em **x = p**, então a função h(x), definida abaixo, também será contínua em **x = p**.

- Soma ou diferença: **h(x) = f(x) ± g(x)**.
- Multiplicação por uma constante real: **h(x) = k × f(x),**para k real.
- Quociente: **h(x) = f(x) ÷ g(x)** , desde que **g(p)** ≠ **0**.
- Produto: **h(x) = f(x) × g(x)**.
- Potenciação: **h(x) = $(f(x)^n)$**, sendo **n** um inteiro positivo.

- Raiz: **$h(x) = \sqrt[n]{f(x)}$**, desde que a raiz seja definida em um intervalo que contenha **p**>.

Exemplo 19

Verifique se a função **$h(x) = \cos x + (x^2 + 1) \times \ln x$** é contínua para **$x > 0$**.

Solução

As funções **$f(x)= \cos x$**, **$g(x) = x^2 + 1$** e **$s(x) = \ln x$** são contínuas para **$x > 0$**.

Usando a propriedade das funções contínuas, como **h(x)** é composta pela soma e pelo produto de funções contínuas, **h(x)** é contínua.

O próximo teorema garante a continuidade de uma função caso ela seja uma composição de funções contínuas.

Continuidade de função composta

Toda composição de funções contínuas também é uma função contínua. Se f(x) é contínua em **$x = p$** e g(x) é em **$x = f(p)$**, então **$g(f(x))$** é contínua em **$x = p$**.

Exemplo 20

Verifique se a função **$h(x) = tg(\sqrt{x^2 + 1})$** é contínua para todo valor de x.

Solução

Seja **$f(x) = tg(x)$** e **$g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$**. Tanto **f(x)** quanto **g(x)** são contínuas para todo valor de x. Como **$h(x) = f(g(x))$**, **h(x)** também será contínua.

Assíntotas

Assíntota é uma reta imaginária tal que a distância entre a curva que descreve o gráfico da função e essa reta tende para zero, mas sem nunca ser zero. Podemos defini-la também como uma reta tangente à curva de f(x) no infinito.

Existem três tipos de assíntotas:

Assíntota vertical

A assíntota vertical é uma reta vertical do tipo **x = p** que pode ocorrer nos pontos interiores do domínio da função em que existe a descontinuidade. Para verificar se existe essa assíntota, devem ser calculados os dois limites laterais de f(x) quando x tende para p, em que p é um ponto de descontinuidade.

Se pelo menos um dos limites tiver um resultado mais ou menos infinito, existirá a assíntota vertical e sua equação será dada por **x = p**. Basta que um tenha resultado **±**∞.Assim a assíntota vertica **x = p** implica em:

$\begin{cases} \lim_{x \to p+} f(x) = \pm\infty \\ ou/e \\ \lim_{x \to p-} f(x) = \pm\infty \end{cases}$, ou seja, pelo menos um limite lateral de f(x), com x tendendo a p, resulta em **±**∞

Assíntota horizontal

A assíntota horizontal é uma reta horizontal do tipo **y = L** que pode ocorrer quando x tende a mais infinito e a menos infinito. Para existir essa assíntota, a função vai tender a um número L quando x tender a mais ou menos infinito.

Para verificar se existe a assíntota horizontal para x tendendo ao infinito, deve ser calculado o limite de f(x) quando x tende para ∞. Se o resultado for um número real L, existirá a assíntota horizontal de equação **y = L**.

Para verificar se existe a assíntota horizontal para x tendendo ao menos infinito, deve ser calculado o limite de f(x) quando x tende para **−**∞. Se o resultado for um número real L, existirá a assíntota horizontal de equação **y = L**.

Assíntota horizontal **y = L** ↔ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$

Lembre-se de que uma função pode ter assíntotas horizontais nos dois lados com a mesma equação, nos dois lados com equações diferentes, em um lado só ou até mesmo não ter assíntota horizontal.

Assíntota inclinada

A assíntota inclinada é uma reta inclinada do tipo **y = mx + q**. Ela pode ocorrer quando x tende ao infinito ou ao menos infinito.

Na verdade, a assíntota horizontal é um caso particular da assíntota inclinada. Quando **m = 0**, a reta inclinada vira uma reta horizontal.

Para existir a assíntota inclinada na região em que x tende para o infinito, deve haver valores de **m** e de **q** reais que satisfaçam à seguinte propriedade:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{mx+q}{x} = m$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} mx + q - mx = q$$

Se alguns dos limites acima não existirem ou não derem, ambos, números reais, não haverá a assíntota inclinada. Para existir a assíntota inclinada na região em que x tende para o menos infinito, deve haver valores de **m** e de **q** reais que satisfaçam à seguinte propriedade:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{mx+q}{x} = m$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to -\infty} mx + q - mx = q$$

Se alguns dos limites acima não existirem ou não derem, ambos números reais, não existirá a assíntota inclinada.

Exemplo 21

Obtenha, caso existam, as assíntotas inclinadas para **f(x) = 2 arctg(e^{-x}) − x** quando x tende ao infinito.

Solução

Vamos calcular os limites necessários:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)-x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{2\operatorname{arctg}\left(e^{-\infty}\right)}{\infty}-1=\frac{2\operatorname{arctg}(0)}{\infty}-1=\frac{0}{\infty}-1=-1$$

Portanto **m = −1**

$$\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}f(x)-(-1)x=\lim_{x\to\infty}\left(2\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)-x\right)+x=\lim_{x\to\infty}2\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}2\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)=2\operatorname{arctg}\left(e^{-\infty}\right)=2\operatorname{arctg}(0)=0$$

Assim, **q = 0**

Portanto, como os dois limites tiveram como resultados números reais, existe uma assíntota inclinada de equação **y = −x**.

Exemplo 22

Obter, caso existam, as assíntotas verticais e horizontais da função

$$h(x)=\begin{cases}3e^{x}, x\leq 0\\ 4+\frac{1}{x}, x>0\end{cases}$$

Solução

A função h(x) tem uma descontinuidade para **x = 0**, sendo, portanto, o único ponto possível para se ter uma assíntota vertical.

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}3e^{x}=3\cdot e^{0}=3$$
$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}4+\frac{1}{x}=4+\infty=\infty$$

Assim, como em pelo menos um dos limites o resultado foi ∞, existe uma assíntota vertical em **x = 0**.

Analisaremos agora **x**→∞ e **x**→**−**∞ para a verificação das assíntotas horizontais.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 3 \cdot e^{x} = 3 \cdot e^{-\infty} = 3.0 = 0$$

Desse modo, existe uma assíntota horizontal para x tendendo a menos infinito com a equação $y = 0$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} 4 + \frac{1}{x} = 4 + 0 = 4$$

Dessa forma, existe uma assíntota horizontal para x tendendo a mais infinito com a equação **y = 4**.

Mão na massa

Questão 1

Sabe-se que a função **f(x)** é contínua em todo seu domínio. Seja um ponto **p** do domínio de **f(x)**. Marque a alternativa correta. Os limites laterais de **f(x)** quando **x** tende a **p**.

A Podem ser diferentes entre si, desde que o limite de **f(x)** quando x tende a **p** seja igual a **f(p)**.

B Devem ser obrigatoriamente iguais, mas podem ter valores diferentes do que **f(p)**.

C Devem ser iguais ao limite de **f(x)** tendendo a **p**, mas podem ser diferentes de **f(p)**.

D Devem ser iguais entre si e obrigatoriamente iguais a **f(p)**.

E Devem ser iguais entre si e tendem a infinito.

Parabéns! A alternativa D está correta.

Para uma função ser contínua, o limite deve existir em **p**; para isso, os limites laterais devem existir e ser iguais entre si. Mas o limite de **f(x)** tendendo a **p** deve ser igual a **f(p)** para a função ser contínua; portanto, os limites laterais também serão obrigatoriamente iguais a **f(p)**.

Questão 2

Seja a função $h(x) \begin{cases} 4-x^2, x<3 \\ p, x=3 \\ x+k, x>3 \end{cases}$, ou seja, **h(x) = 4 − x²** para **x < 3**, **h(x) = p** para **x = 3** e **h(x) = x + k** para **x > 3**, com **p** e **k** reais. Determine o valor de **(k + p)** para que a função **h(x)** seja contínua em **x = 3**.

A -2

B -8

C -5

D -13

E -12

Parabéns! A alternativa D está correta.

Para ser contínua em **x = 3**, os limites laterais devem ser iguais, além de terem o mesmo valor que **h(3)**.

$$\lim_{x\to 3-} h(x) = \lim_{x\to 3-} 4 - x^2 = 4 - 3^2 = -5$$

$$\lim_{x\to 3+} h(x) = \lim_{x\to 3+} x + k = 3 + k$$

3 + k = −5 → **k = −8**

$$h(3) = p = \lim_{x\to 3} h(x) = -5$$

Dessa forma, **k + p = −13**.

Questão 3

Obtenha a equação da assíntota horizontal, se existir, do gráfico da função **g(x) = (3x² + 8)** ÷ **(x² −1)** para quando x tende ao infinito.

A y= −8

B y = 3

C y = 0

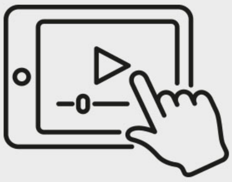
D y = 2

E y = −2

Parabéns! A alternativa B está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Questão 4

Obtenha, caso exista, a equação da assíntota vertical para a função **g(x) = x²**para **x** ≤ **4** e **g(x) = x + 4** para **x > 4**

A x = 1

B x = 2

C x = 4

D Não existe assíntota vertical.

E x = 0

Parabéns! A alternativa D está correta.

A função h(x) tem uma descontinuidade para **x = 4**, sendo, portanto, o único ponto possível para se ter uma assíntota vertical.

$$\lim_{x \to 4-} g(x) = \lim_{x \to 4-} x^2 = 16 \text{ e } \lim_{x \to 4+} g(x) = \lim_{x \to 4+} x + 4 = 8$$

Logo, como nenhum dos dois limites tiveram o resultado $\pm\infty$, não existe uma assíntota vertical em **x = 4**.

Questão 5

Seja a função **h(x) = 5e^x^** para **x** ≤ **0** e **g(x) = 4 + (1 ÷ x)** para **x > 0**. Marque a alternativa correta.

A Há uma assíntota vertical e uma horizontal para x tendendo a mais infinito.

B Há uma assíntota vertical e duas assíntotas horizontais diferentes.

C Não tem assíntota vertical, mas existem duas assíntotas horizontais com a mesma equação.

D Há uma assíntota vertical e uma horizontal para x tendendo a menos infinito.

E Não existem assíntotas.

Parabéns! A alternativa B está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Questão 6

Obtenha, caso existam, as assíntotas inclinadas para **f(x) = arctg (e^{-x}) + x** quando x tende ao infinito.

A $y = x$

B $y = x + 1$

C $y = x - 1$

D Não existe assíntota inclinada.

E Não existem assíntotas horizontais e verticais.

Parabéns! A alternativa A está correta.

Vamos calcular os limites necessários:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)+x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)}{x}+1=\frac{\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)}{\infty}+1$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\operatorname{arctg}\left(e^{-\infty}\right)}{\infty}+1=\frac{\operatorname{arctg}(0)}{\infty}+1=\frac{0}{\infty}+1=0+1=1$$

Portanto, **m = 1**

$$\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}f(x)-x=\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)+x\right)-x=\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)=\operatorname{arctg}\left(e^{-\infty}\right)=\operatorname{arctg}(0)=0$$

Assim, **q = 0**

Portanto, como os dois limites tiveram como resultados números reais, existe uma assíntota inclinada de equação **y = x**.

Teoria na prática

A tensão elétrica em um dispositivo eletrônico aumenta com o aumento de uma variável de controle x. A equação que modula a relação vale **V = (50x²) ÷ (2x²+1)**, sendo medida em **V**. Para **x = 0**, a tensão é nula, mas, conforme a variável x, tanto para valores positivos quanto para valores negativos, a tensão de **V** aumenta. Se essa tensão superar os **60V**, o dispositivo queima.

Estude o comportamento da tensão quando x tende a mais ou menos infinito para verificar se ocorrerá ou não a queima.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Determine a soma **a + b + c** de forma a garantir que a função...

$$f(x)=\begin{cases} a, x=2 \\ x^2-2x+10, 2<x<3 \\ x+b, 3\leq x<5 \\ c, x=5 \end{cases}$$

... seja contínua no seu domínio **[2, 5]**.

A 20

B 25

C 30

D 35

E 40

Parabéns! A alternativa D está correta.

Parabéns! Você entendeu a definição da continuidade da função.

Uma função, para ser continua em [2, 5], deve ser contínua em **(2, 5)** e contínua lateralmente nos extremos 2 e 5.

Para **x = 2**:

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = f(2) \to \lim_{x\to 2+} x^2 - 2x + 10 = 2^2 - 2\cdot 2 + 10 = 10 = f(2) = a$$

Então, **a = 10**.

Para **2 < x < 5**, as funções são polinomiais, sendo contínuas. O único ponto com o qual temos de nos preocupar é para x = 3.

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3+} f(x) = f(3)$$
$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3-} x^2 - 2x + 10 = 3^2 - 2.3 + 10 = 13$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3+} x + b = f(3)$$

Assim, **13 = 3 + b** → **b = 10**.

Para **x = 5**.

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = f(5) \to \lim_{x\to 5^-} x + 10 = 15 = f(5) = c$$

Então, **c = 5**.

Portanto, **a + b + c = 10 + 10 + 15 = 35**.

Questão 2

Obtenha a equação da assíntota vertical, se existir, do gráfico da função **h(x) = 1 ÷ (x − 5)**.

A **x = 3**

B **x = 5**

C **x = 7**

D Não existe.

E **x = 0**

Parabéns! A alternativa B está correta.

Você entendeu a obtenção das assíntotas verticais. O ponto de descontinuidade para **h(x)** é para **x − 5 = 0** → **x = 5**.

$$\lim_{x \to 5^-} h(x) = \lim_{x \to 3-} \frac{1}{x-5} = \frac{1}{0-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 5+} h(x) = \lim_{x \to 3+} \frac{1}{x-5} = \frac{1}{0+} = \infty$$

Então, como os resultados dos dois limites foram **±**∞, existe uma assíntota vertical, que vale **x = 5**.

Considerações finais

Ao longo dos três módulos, descrevemos a abordagem do limite tanto de forma intuitiva quanto daquela com a formalidade matemática necessária. Além disso, vimos o conceito de limites laterais e técnicas para o cálculo de limites da função em pontos reais, bem como no infinito. Por fim, analisamos uma aplicação do limite na verificação da continuidade e na obtenção das assíntotas.

Você certamente já entende os principais conceitos relacionados ao limite de uma função real, sendo capaz de calcular o limite de uma função real, assim como aplicar esse cálculo em problemas matemáticos relacionados à tendência do comportamento de uma função.

Explore +

Para se aprofundar mais no assunto, pesquise por:

- Conceito de vizinhança;
- Conceito de ponto de acumulação;
- Teorema da unicidade;
- Definição de limites de uma função no infinito e no menos infinito.

Você encontrará esses e outros conceitos importantes nesta obra:

MUNEM; FOULIS. **Cálculo**. v. 1. Rio de Janeiro: Ltc, 2008.

Referências

GUIDORIZZI, H. L. **Cálculo**. v. 1. 5. ed. São Paulo: LTC, 2013. cap. 3. p. 54-98.

HALLET, H. *et al*. **Cálculo**, a uma e a várias variáveis. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011. cap. 1. p. 47-53.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. **Cálculo**, com aplicações. 6. ed. São Paulo: LTC, 2003. cap. 1. p. 77-91.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 1. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008. cap. 2. p. 92-148.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. v. 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. cap. 2. p. 61-110.

Material para download

Clique no botão abaixo para fazer o download do conteúdo completo em formato PDF.

Download material

O que você achou do conteúdo?

Relatar problema