Cálculo a várias variáveis para Economia

Prof.ª Giselle Ferraris

Descrição

Introdução ao estudo das funções de várias variáveis. Cálculo de derivadas parciais. Cálculo de máximo e mínimo de funções multivariadas. Multiplicadores de Lagrange. Cálculo de integrais duplas.

Propósito

Compreender o conceito de funções de várias variáveis e como a utilização do cálculo de várias variáveis é fundamental para a solução de diversos problemas de Economia.

Objetivos

Módulo 1

Funções de várias variáveis

Reconhecer funções de várias variáveis e sua representação gráfica.

Módulo 2

Derivadas

Calcular derivadas parciais de primeira e segunda ordem.

Módulo 3

Máximos e mínimos e multiplicadores de Lagrange

Identificar os pontos de máximo e mínimo de uma função multivariada.

Módulo 4

Integrais duplas

Calcular integrais duplas.

Introdução

Em diversos problemas econômicos, nos deparamos com modelos matemáticos que envolvem uma variável como função de duas ou mais variáveis. Por exemplo, considere o lucro de uma empresa, L, que é dada por duas variáveis: sua receita, R, e seus custos de produção, C.

$L = R - C$

Como o lucro da empresa varia em função de sua receita? E de seus custos? Qual o lucro máximo que a empresa pode obter?

Essas são questões que usam funções multivariadas, que serão estudadas nesse curso. Vamos aprender as características das funções de várias variáveis e seus aspectos gráficos, calcular derivadas parciais, máximos e mínimos das funções multivariadas e examinar problemas com integrais duplas.

1 - Funções de várias variáveis

Ao final deste módulo, você será capaz de reconhecer funções de várias variáveis e sua representação gráfica.

Funções de duas variáveis

Uma função de várias variáveis possui uma variável independente e duas ou mais variáveis independentes. Seja uma função real f, dependente de duas variáveis, x e y. Essa função consistirá em:

1. Um conjunto de pares ordenados (x,y) que formam o domínio da função.
2. Uma regra que associa cada par (x,y) a um número real, representado por z=f(x,y). Uma regra que associa cada par (x,y) a um número real, representado por z=f(x,y).

Neste curso serão apresentados os resultados e exemplos com funções de duas variáveis, pois é possível realizar sua interpretação geométrica, o que facilitará sua compreensão. No entanto, todos os resultados podem ser expandidos às funções de mais de duas variáveis.

Exemplo 1:

Seja a função f definida por:

$$f(x,y) = x + xy + y^2$$

Calcule o valor de $f(0,0)$, $f(1,2)$ e $f(2,1)$.

Solução:

A solução consiste em substituir os valores dos pares ordenados na função.

Temos que:

$$f(0,0) = 0 + 0.0 + 0^2 = 0$$

$$f(1,2) = 1 + 1.2 + 2^2 = 7$$

$$f(2,1) = 2 + 2.1 + 1^2 = 5$$

Exemplo 2:

Determine o domínio da função

$$f(x, y) = \frac{3}{x - y}$$

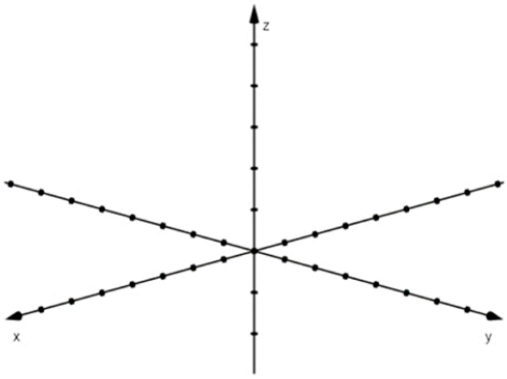
Solução:

O domínio da função f é o maior conjunto possível para o qual a função está definida.

Quando $x = y$ o denominador será zero e $f(x, y)$ não estará definida. Portanto, o domínio de f são todos os pares ordenados em que $x \neq y$.

Representando graficamente funções de duas variáveis

É possível representar graficamente uma função de duas variáveis por meio do sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, como mostra a Figura 1. Assim como nas funções de uma variável que você estudou anteriormente, em que cada ponto é representado por um par ordenado (x, y), nas funções de duas variáveis cada ponto será representado por uma tripla ordenada $(x, y, z) \equiv (x, y, f(x, y))$.



O sistema de coordenadas cartesianas tridimensional.

Seja a função f definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$, seu domínio é um subconjunto do plano xy e para cada ponto (x, y) teremos um ponto $z = f(x, y)$ a ele associado. A totalidade desses pontos $(x, y, z) \equiv (x, y, f(x, y))$ constitui o gráfico da função f.

Ao interpretar o gráfico de $f(x, y)$ podemos pensar que z representa a altura do ponto no gráfico. Se $f(x, y) > 0$, o ponto (x, y, z) estará z unidades acima do plano (x, y) e, se $f(x, y) < 0$, então o ponto (x, y, z) estará z unidades abaixo do plano (x, y). Observe na Figura 2 o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$:

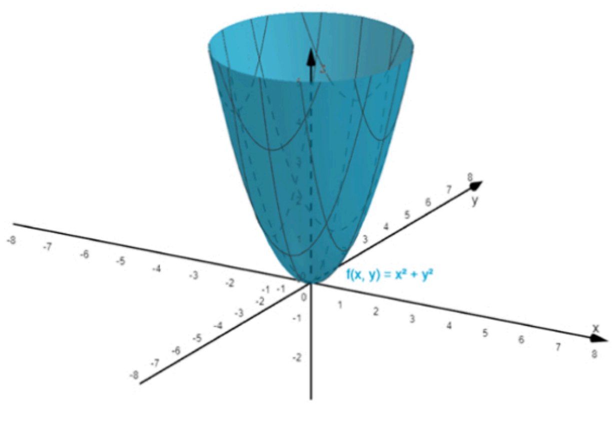


Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$.

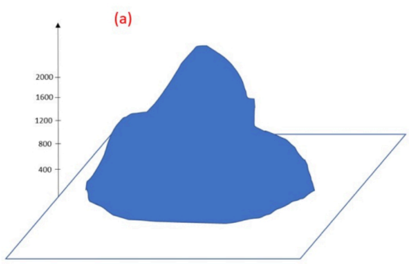
Não é fácil esboçar o gráfico de uma função de duas variáveis. Felizmente, com o avanço tecnológico, é possível gerar tais gráficos com o auxílio de um computador. No site geogebra.org é possível visualizar gráficos no sistema cartesiano tridimensional.

Curvas de nível

Como mencionado ao final da seção anterior, esboçar os gráficos das funções de duas variáveis não é uma tarefa fácil. Por isso, uma estratégia muitas vezes adotada é a elaboração de curvas de nível.

Seja a função $f(x, y)$. Se c é um valor possível da função, temos que $f(x, y) = c$ descreverá uma curva no plano $z = c$. Essa curva é denominada traço do gráfico de f no plano $z = c$. Podemos projetar essa curva no plano xy, resultando naquilo que conhecemos como **curva de nível**.

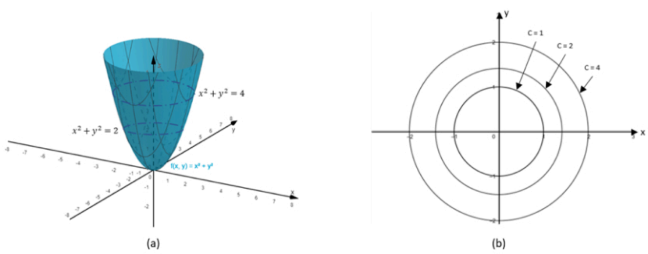
Observe a imagem a seguir. Vemos a representação do pico de uma cordilheira e o seu mapa de contorno.



(a) Gráfico de uma cordilheira e (b) seu mapa de contorno.

Os mapas de contorno nada mais são do que o desenho de diversas curvas de nível, ou seja, para diversos valores de c.

Retomando a função $f(x, y) = x^2 + y^2$, a Figura $4(a)$ mostra seu gráfico no sistema de coordenadas cartesianas tridimensional e a Figura $4(b)$ mostra algumas de suas curvas de nível, construindo um mapa de contorno da função.



(a) Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ e (b) seu mapa de contorno.

Curvas de nível de Cobb-Douglas

Vamos determinar as curvas de nível da função Cobb-Douglas.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Demonstração

No estudo da Economia, as curvas de níveis são utilizadas para compreensão de duas funções fundamentais: de produção e de utilidade.

No caso das funções de produção, as curvas de nível nos fornecerão todas as combinações possíveis de insumos capazes de gerar a mesma quantidade de produto final. Essas curvas de nível são conhecidas como **isoquantas**.

Por exemplo, considere a função de produção:

$$Q = xy$$

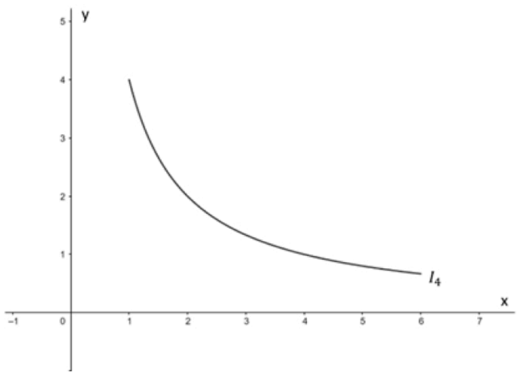
em que x é a quantidade de trabalho empregado, y é a quantidade de capital utilizado e Q é a quantidade de produto produzida.

Para criar as isoquantas, podemos fixar um nível de produção, como, por exemplo, $Q = 4$.

Temos então que:

$$4 = xy \rightarrow y = \frac{4}{x}$$

Esboçamos a curva $y = \frac{4}{x}$:

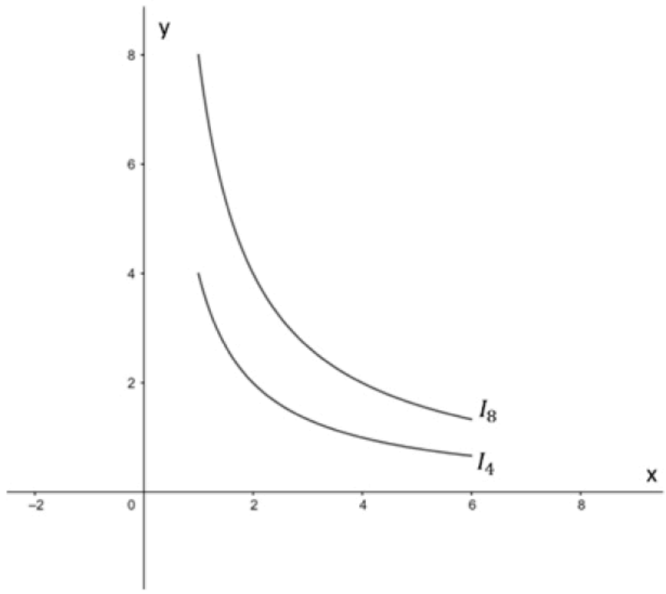


Isoquanta da função de produção $Q = xy$ para $Q = 4$.

Analogamente, para encontrar a isoquanta referente ao nível de produção de $Q = 8$, calculamos:

$$8 = xy \to y = \frac{8}{x}$$

E esboçamos sua curva:



Isoquantas da função de produção $Q = xy$ para $Q = 4$ e $Q = 8$.

Mão na massa

Questão 1

Seja a função

$$f(x, y) = 2x + 3y - 4$$

O valor da função no ponto $(2, -1)$ é:

A 0

B 1

C -3

D -4

E 2

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3ESubstituindo%20os%20valores%20de%20%5C(x%5C)%20e%20%5C(y%5C)%20na%20fun%C3%A
paragraph'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cbeg
1)%3D2(2)%2B3(-1)-4%20%5C%5C%5C%5C%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
1)%3D4-3-4%3D-
3%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cend%7Bgathered%7D%0A

Questão 2

A função

$$f(x,y)=x\ln y-y\ln x$$

no ponto $f(1,e)$ vale:

A 1

B 0

C -1

D e

E $2e$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cbeg
e%20%5Cln%201%20%5C%5C%5C%5C%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
e(0)%3D1%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cend%7Bgatherec

Questão 3

O domínio da função

$$f(x,y)=\frac{xy}{x-y}$$

é:

A $D=\{(x,y);R\}$

B $D=\{(x,y);x>y\}$

C $D=\{(x,y);x<y\}$

D $D=\{(x,y);x\neq y\}$

E $D=\left\{(x,y);x^2+y^2\leq 1\right\}$

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EO%20Dom%C3%ADnio%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24f(x%2C%20y)%3D%5Cfrac%7Bx%20y%7D%7Bx-
y%7D%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3
paragraph'%3Eser%C3%A1%20todo%20o%20plano%2C%20com%20exce%C3%A7%C3%A3o%20da%20reta%20

Questão 4

Uma editora publica duas versões do seu último best-seller, uma com encadernação normal e uma edição de luxo, cuja demanda é x e y, quando seus preços unitários são:

$$p=400-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}y$$

e

$$q=80-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y$$

respectivamente.

Indique a função receita total da editora, $R(x,y)$.

A $R(x,y)=480-\frac{1}{2}x-\frac{7}{12}y$

B $R(x,y)=320+\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}y$

C $R(x,y)=32.000+\frac{1}{18}x^2+\frac{1}{9}y^2-\frac{440}{3}x-\frac{380}{3}y+$

D $R(x,y)=400x+80y-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{4}y^2-\frac{2}{3}xy$

E $R(x,y)=400y+80x-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}y^2-\frac{5}{12}xy$

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EA%20fun%C3%A7%C3%A3o%20receita%20%5C(R(x%2C%20y)%5C)%20%C3%A9%20dada%20pe
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0AR(x%2C%20y)%3Dp%20x%2Bq%20y%20%5C%5C%(
%5Cfrac%7B1%7D%7B6%7D%20x-
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%20y%5Cright)%20x%2B%5Cleft(80-
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%20x-
%5Cfrac%7B1%7D%7B4%7D%20y%5Cright)%20y%20%5C%5C%5C%5C%0AR(x%2C%20y)%3D400%20x-
%5Cfrac%7B1%7D%7B6%7D%20x%5E2-
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%20x%20y%2B80%20y-
%5Cfrac%7B1%7D%7B3%7D%20x%20y-
%5Cfrac%7B1%7D%7B4%7D%20y%5E2%20%5C%5C%5C%5C%0AR(x%2C%20y)%3D400%20x%2B80%20y-
%5Cfrac%7B1%7D%7B6%7D%20x%5E2-
%5Cfrac%7B1%7D%7B4%7D%20y%5E2-
%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%20x%20y%0A%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%

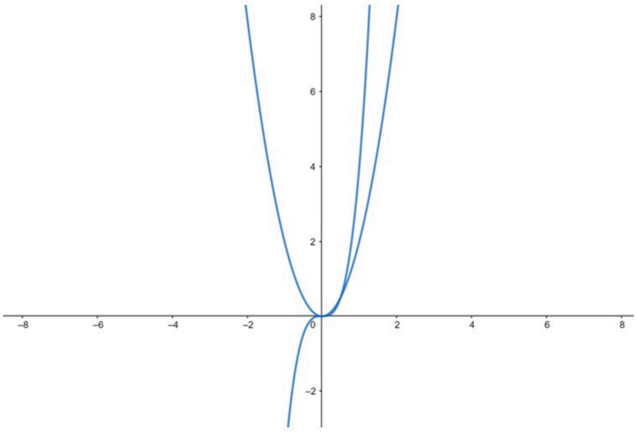
Questão 5

A função receita $R(x, y)$ é dada pela multiplicação da demanda de cada modelo de livro pelo seu preço unitário. Portanto,

As curvas de nível da função

$$f(x, y) = xy$$

para $z = -4$ e $z = -2$ estão representadas na figura:



Marque a alternativa correta:

A I

B II

C III

D IV

E V

Parabéns! A alternativa B está correta.

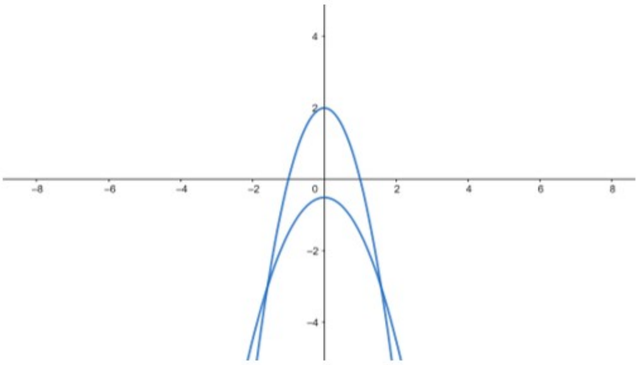
%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPara%20desenhar%20as%20curvas%20de%20n%C3%ADvel%2C%20escrevemos%20%5C(y%5C)
paragraph'%3E%24%24z%3D-
4%3Dx%20y%20%5Crightarrow%20y%3D-
%5Cfrac%7B4%7D%7Bx%7D%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3Ee%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24z%3D-
2%3Dx%20y%20%5Crightarrow%20y%3D-
%5Cfrac%7B2%7D%7Bx%7D%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3EObserve%20que%20%5C(x%5C)%20se%20aproxima%2C%20por%C3%A9m%20n%C3%A3o%20a

Questão 6

As curvas de nível da função

$$f(x, y) = 2x^2 + y$$

Nos pontos $z = -1$ e $z = 2$ estão representadas na figura:



Marque a alternativa correta:

A I

B II

C III

D IV

E V

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPara%20desenhar%20as%20curvas%20de%20n%C3%ADvel%2C%20escrevemos%20%5C(y%5C)
paragraph'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cbeg
1%3D2%20x%5E2%2By%20%5Crightarrow%20y%3D-1-
2%20x%5E2%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cend%7Bgathe
paragraph'%3Ee%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%

paragraph'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cbeg
2%20x%5E2%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cend%7Bgathe

Teoria na prática

Você está pensando em investir o dinheiro que vem guardando desde o início do ano. Pesquisando as opções existentes, decidiu colocar os R$ 10.000,00 que possui numa aplicação que rende juros compostos a uma taxa de 10\%/ano, durante três 3 anos.

Podemos calcular o valor que será obtido nessa aplicação após os três anos:

$$A = f(P, r, t) = Pe^{rt}$$

em que P é o valor inicial da aplicação e r a taxa de juros anual.

Substituindo os valores na função, obtemos:

$$A = f(10000, 0.1, 3) = 10000e^{0,1(3)}$$

$$f(10000, 0.1, 3) = 10000e^{0,3} = R\$13.498, 59$$

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

O valor da função

$$f(x, y, t) = xe^{yt} + te^{yx}$$

no ponto $f(1, 2, 3)$ será:

A $e^2\left(e^4 + 3\right)$

B 0

C $1\left(e^4 + 3\right)$

D $e^2\left(e^4-3\right)$

E $e^4\left(e^2+3\right)$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3ESubstituindo%20o%20valor%20das%20coordenadas%20na%20fun%C3%A7%C3%A3o%2C%20te
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0Af(1%2C2%2C3)%3D1%20e%5E%7B2(3)%7D%2B3%2

Questão 2

As curvas de nível da função

$$f(x, y)=3x+2y$$

Para $f(x, y)=-2, f(x, y)=0$ e $f(x, y)=2$ estão corretamente identificadas na figura:

Marque a alternativa correta:

A I

B II

C III

D IV

E V

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EEscrevemos%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o%20para%20%5C(z%3D-
2%5C)%20%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0Az%3D-
2%3D3%20x%2B2%20y%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3EIsso%20implica%20em%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2(
paragraph'%3E%24%24%0A-2-
3%20x%3D2%20y%20%5Crightarrow%20y%3D-1-
%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%20x%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2(
paragraph'%3ERepetimos%20para%20os%20demais%20valores%20de%20%5C(z%5C)%20%3A%0A%3C%2Fp%
paragraph'%3E%24%24%0Az%3D0%3D3%20x%2B2%20y%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0Ay%3D-
%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%20x%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2(
paragraph'%3Ee%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0Az%3D2%3D3%20x%2B2%20y%20%5C%5C%5C%5C
%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%20x%0A%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%2
paragraph'%3EComo%20observamos%2C%20as%20curvas%20de%20n%C3%ADvel%20ser%C3%A3o%20retas.

2 - Derivadas

Ao final deste módulo, você será capaz de calcular derivadas parciais de primeira e segunda ordem.

Derivadas parciais

Quando trabalhamos com funções de uma única variável, como a função $f(x) = x^2$, calcular sua taxa de variação é simples. Calculamos a derivada de f em função de x, ou seja, a variação de f em função da variação de x.

$$f'(x) = \frac{d(f)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Agora, para calcular a taxa de variação da função $f(x, y) = x^2 + y$, a primeira pergunta é: em função de que variável?

Para descobrir a taxa de variação de função, basta analisarmos como a função varia em relação a apenas uma das variáveis, mantendo as demais constantes.

O que observaremos, portanto, não será a variação total de função f, mas sim sua variação parcial. Por isso, essa derivada, variando uma das variáveis com as demais constantes, é denominada **derivada parcial.**

Novamente estamos utilizando a abordagem simplificada de uma função de duas variáveis, mas os resultados aqui obtidos podem ser estendidos a funções de mais de duas variáveis.

A notação utilizada é:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

derivada parcial de f com relação a x

(neste caso, a variável y é tratada como uma constante)

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

derivada parcial de f com relação a y

(neste caso, a variável x é tratada como uma constante)

Em alguns textos matemáticos, você também poderá encontrar a notação

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y)$$

Inicialmente, estudaremos as derivadas parciais de primeira ordem. Mais adiante, veremos que as derivadas parciais podem ser de ordens superiores.

Exemplo 1:

Determine as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x} e \frac{\partial f}{\partial y}$ da função

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Solução:

Para calcularmos a derivada parcial de f com relação a x, mantemos y constante e derivamos a função com relação a x.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial x}$$

A derivada $\frac{\partial x^2}{\partial x}$ é calculada como já aprendemos:

$$\frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x$$

A derivada $\frac{\partial y^2}{\partial x}$ é calculada considerando y uma constante. Portanto:

$$\frac{\partial y^2}{\partial x} = 0$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \left(x^2 + y^2\right)}{\partial x} = 2x$$

De maneira análoga, para calcularmos a derivada parcial de f com relação a y, mantemos x constante e derivamos a função com relação a y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \left(x^2 + y^2\right)}{\partial y} = \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial y^2}{\partial y}$$

A derivada $\frac{\partial x^2}{\partial y}$ é calculada considerando x uma constante. Portanto:

$$\frac{\partial x^2}{\partial y} = 0$$

A derivada $\frac{\partial y^2}{\partial y}$ é calculada como já aprendemos:

$$\frac{\partial y^2}{\partial y} = 2y$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \left(x^2 + y^2\right)}{\partial y} = 2y$$

Exemplo 2:

Calcule as derivadas parciais da função

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^3}$$

Solução:

Calculamos a derivada parcial f_x considerando a variável y constante.

Como a variável x está presente tanto no numerador quanto o numerador da função, utilizaremos a regra do quociente, que aprendemos quando estudamos cálculo de funções de uma variável.

Regra do Quociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Agora calculamos a derivada parcial f_y considerando a variável x constante.

$$f_y = \frac{\partial\left(\frac{xy}{x^2+y^3}\right)}{\partial y} = \frac{x\left(x^2+y^3\right)-xy\left(3y^2\right)}{\left(x^2+y^3\right)^2} = \frac{x^3+xy^3-3xy^3}{\left(x^2+y^3\right)^2} = \frac{x^3-2xy^3}{\left(x^2+y^3\right)^2}$$

Derivadas parciais no ponto

Caso desejemos obter a derivada parcial de uma função em um ponto específico, seguiremos os passos já vistos, ou seja, realizamos a derivada da função com relação a uma variável por vez, mantendo as demais variáveis constantes. Depois, substituímos os valores das variáveis no ponto de interesse na derivada resultante.

Por exemplo, seja a função $f(x, y)$, caso desejemos obter suas derivadas parciais no ponto (a, b), devemos calcular:

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial y}$$

Exemplo 3:

Retomamos a função

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Vamos calcular sua derivada parcial nos pontos $(1, 2)$, $(3, -1)$ e $(-2, 6)$.

Solução:

Conforme calculamos anteriormente, a derivada parcial em relação a x é $2x$.

Basta substituirmos os valores de x e y nos pontos na derivada parcial obtida.

$$\frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} = 2x = 2(1) = 2$$

$$\frac{\partial f(3, -1)}{\partial x} = 2x = 2(3) = 6$$

$$\frac{\partial f(-2, 6)}{\partial x} = 2x = 2(-2) = -4$$

Já a derivada parcial da função em relação a y é $2y$.

Novamente, basta substituirmos os valores de x e y nos pontos na derivada parcial obtida.

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = 2y = 2(2) = 4$$

$$\frac{\partial f(3,-1)}{\partial y} = 2y = 2(-1) = -2$$

$$\frac{\partial f(-2,6)}{\partial y} = 2y = 2(6) = 12$$

Exemplo 4:

Calcular as derivadas parciais da função:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^3}$$

nos pontos $(1,1)$ e $(2,-1)$.

A derivada parcial de f em relação a x nos pontos será:

$$f_x(1,1) = \frac{\partial\left(\frac{xy}{x^2+y^3}\right)}{\partial x} = \frac{y^4-yx^2}{\left(x^2+y^3\right)^2} = \frac{1^4-1(1)^2}{\left(1^2+1^3\right)^2} = \frac{1-1}{(1+1)^2}$$

$$= \frac{0}{(2)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$f_x(2,-1) = \frac{\partial\left(\frac{xy}{x^2+y^3}\right)}{\partial x} = \frac{y^4-yx^2}{\left(x^2+y^3\right)^2} = \frac{(-1)^4-(-1)(2)^2}{\left(2^2+(-1)^3\right)^2} = \frac{1+4}{(4-1)^2}$$

$$= \frac{5}{(3)^2} = \frac{5}{9}$$

A derivada parcial de f em relação a y nos pontos será:

$$f_y(1,1) = \frac{\partial\left(\frac{xy}{x^2+y^3}\right)}{\partial y} = \frac{x^3-2xy^3}{\left(x^2+y^3\right)^2} = \frac{1^3-2(1)(1)^3}{\left(1^2+1^3\right)^2} = \frac{1-2}{(1+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(2)^2} = \frac{-1}{4}$$

$$f_y(2,-1) = \frac{\partial\left(\frac{xy}{x^2+y^3}\right)}{\partial y} = \frac{x^3-2xy^3}{\left(x^2+y^3\right)^2} = \frac{2^3-2(2)(-1)^3}{\left(2^2+(-1)^3\right)^2} = \frac{8+4}{(4-1)^2}$$

$$= \frac{12}{(3)^2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Aplicações na Economia

A seguir, veremos duas aplicações das derivadas parciais na economia, com o estudo do conceito de **produtividade marginal** e dos conceitos de **bens substituíveis** e **bens complementares**.

A função de produção de Cobb-Douglas

A primeira aplicação das derivadas parciais na economia que veremos será com a função de duas variáveis a seguir:

$$f(x, y)=a x^b y^{1-b}$$

em que a e b são números positivos e $0<b<1$.

Essa função é muito famosa na economia e recebe o nome de função de produção de Cobb-Douglas. Considere que x e y representam insumos de produção, mão de obra e capital, respectivamente, e a função f mensura a quantidade produzida, dada a combinação dos insumos.

A derivada parcial de f com relação a x fornece a produtividade marginal da mão de obra. Isso representa a taxa de variação do produto relativa à quantidade de mão de obra empregada, considerando que o uso do insumo capital (y) será mantido constante.

De maneira análoga, a derivada parcial de f com relação y fornece a produtividade marginal do capital. Isso representa a taxa de variação do produto relativa à quantidade de capital empregada, considerando que o uso do insumo mão de obra (x) será mantido constante.

Exemplo 5:

Seja a função de produção

$$f(x, y)=2 x^{2/3} y^{1/3}$$

Calcular a produtividade marginal da mão de obra e a produtividade marginal de capital quando as quantidades utilizadas de mão de obra e de capital são de 25 unidades e 15 unidades, respectivamente.

Solução:

A produtividade marginal da mão de obra é dada por:

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=2\left(\frac{2}{3}\right) x^{\left(\frac{2}{3}-1\right)} y^{1/3}=\frac{4}{3} x^{-\frac{1}{3}} y^{1/3}=\frac{4}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$$

Substituindo os valores dados para mão de obra e capital, temos que:

$$f_x(25,15)=\frac{4}{3}\left(\frac{15}{25}\right)^{1/3}=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{1/3}$$

A produtividade marginal do capital é dada por:

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=2x^{2/3}\left(\frac{1}{3}\right)y^{\left(\frac{1}{3}-1\right)}=2x^{2/3}\left(\frac{1}{3}\right)y^{-2/3}=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{2/3}$$

Substituindo os valores dados para mão de obra e capital, temos que:

$$f_y(25,15)=\frac{2}{3}\left(\frac{25}{15}\right)^{2/3}=\frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^{2/3}$$

Observamos que a produtividade marginal do capital é superior à produtividade marginal da mão de obra. Isso significa que o aumento em uma unidade na utilização de capital resulta em um maior aumento da produção do que o crescimento obtido pela utilização de unidade adicional de mão de obra.

Bens substitutos e bens complementares

A segunda aplicação de derivadas parciais em economia que estudaremos é a relação entre as demandas de dois bens, por meio do qual podemos classificar os bens como substitutos ou complementares.

Bens substitutos são aqueles cuja queda na demanda de um resulta no aumento da demanda pelo outro. Por exemplo, margarina e manteiga. Já a demanda dos **bens complementares** apresenta o mesmo comportamento, ou seja, o aumento da demanda de um é acompanhado pelo aumento da demanda do outro. Um exemplo de bens complementares no Brasil é o arroz e feijão, combinação típica da alimentação do país.

Considere dois bens, A e B, cujas funções de demanda, f e g, são funções de duas variáveis, a e b, que representam os preços dos bens A e B, respectivamente.

Portanto, a quantidade demandada do bem A será dada por:

$$q_A=f(a,b)$$

E a quantidade demandada do bem B será dada pela função de duas variáveis:

$$q_B = g(a, b)$$

Qual será o comportamento esperado para as derivadas parciais das funções f e g, para que os bens A e B sejam bens substitutos?

Bens substitutos são aqueles cuja demanda apresenta comportamento oposto, ou seja, quando a demanda de um bem aumenta, a demanda do outro diminui.

Vamos analisar o comportamento da quantidade demandada do bem A em função das variações do preço dos dois bens. Quando o preço do bem A aumenta, os consumidores buscarão substituir esse bem por outro de menor preço. Portanto, a derivada parcial de A com relação ao seu preço, a, deverá ser negativa.

> **Por outro lado, caso o item B sofra um aumento, e o preço de A se mantenha igual, mais consumidores passarão a optar pelo bem A. Portanto, aumentos em b farão a função demanda do item A crescer. Isso significa que a derivada parcial de função demanda de A, q_A, com relação ao preço do bem B, b, será positiva.**
>
> **O raciocínio para a demanda do bem B é análoga.**

E se os bens A e B forem bens complementares?

Nesse caso, a demanda de ambos os bens irá diminuir quando o preço de um deles aumentar. Seja a função demanda do bem A: caso haja um aumento no preço do bem B, será verificada uma redução na demanda do bem A. Isso porque o aumento no preço do bem B, b, levará à redução da sua demanda.

No entanto, como A e B são itens complementares, a redução no consumo de B também levará à redução do consumo de A. Isso significa que a derivada parcial da função demanda de A, q_A, com relação ao preço do bem B, b, será negativa. E, novamente, o raciocínio para a demanda do bem B é análoga.

Em termos matemáticos, podemos resumir da seguinte maneira:

Os bens A e B são bens substituíveis se:

$\frac{\partial f}{\partial b} > 0$ e $\frac{\partial g}{\partial a} > 0$

Os bens A e B são bens complementares se:

$\frac{\partial f}{\partial b} < 0$ e $\frac{\partial g}{\partial a} < 0$

Derivadas parciais de segunda ordem

Vimos que funções de mais de uma variável podem ser derivadas parcialmente em relação a uma de suas variáveis. As funções resultantes, f_x e f_y, são também funções de x e y, e podem, por sua vez, serem derivadas parcialmente.

A diferenciação da função f_x com relação a x ou y é denominada derivada parcial de segunda ordem da função f.

Seja a função de duas variáveis, $f(x, y)$, que possui duas derivadas parciais, f_x e f_y. Cada uma das derivadas parciais resultantes poderá ser derivada novamente, com relação a uma das duas variáveis. Portanto, teremos quatro possíveis derivadas parciais de segunda ordem para a função f :

$$f_{xx}=\frac{\partial f_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy}=\frac{\partial f_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yy}=\frac{\partial f_y}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{yx}=\frac{\partial f_y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Observe que, quando f_{xy} e f_{yx} forem contínuas, $f_{xy}=f_{yx}$.

Exemplo 6:

Continuando a análise da função

$$f(x, y)=x^2+y^2$$

Calcular suas derivadas parciais de segunda ordem.

Solução:

As derivadas parciais de primeira ordem são dadas por:

$$f_x=2x \text{ e } f_y=2y$$

Derivando parcialmente f_x, temos que:

$$f_{xx}=\frac{\partial(2x)}{\partial x}=2$$

$$f_{xy}=\frac{\partial(2x)}{\partial y}=0$$

Derivando parcialmente f_y, temos que:

$$f_{yx} = \frac{\partial(2y)}{\partial x} = 0$$

$$f_{yy} = \frac{\partial(2y)}{\partial y} = 2$$

Elasticidade

Frequentemente, os economistas desejam mensurar a sensibilidade da demanda a variações no preço. Uma das maneiras de mensurar essa sensibilidade é em termos percentuais, por meio do cálculo da **elasticidade-preço da demanda**.

Seja $Q_1\left(p_1, p_2\right)$ uma função de duas variáveis, que nos fornece a demanda pelo bem 1 em termos do preço desse bem $\left(p_1\right)$ e do preço do bem $2\left(p_2\right)$.

A sensibilidade da demanda pelo bem 1 relativa a variações no seu preço será dada por:

$$\varepsilon_1 = \frac{\text{mudança \% da demanda}}{\text{mudança \% no preço do bem 1}} = \frac{p_1^* \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}}{Q_1}$$

Caso o módulo da elasticidade calculada fique entre 0 e 1, o bem 1 será denominado um **bem inelástico**. Isso significa que mudanças no seu preço não são capazes de provocar grandes variações na sua demanda.

Bens cujo módulo da elasticidade é igual a 1 possuem uma **demanda de elasticidade unitária**. Isso significa que variações percentuais no preço do bem ocasionarão o mesmo percentual de variação na sua demanda.

Se o módulo da elasticidade for maior do que 1, o bem será considerado um bem elástico, ou seja, uma variação percentual no seu preço é capaz de levar a variações percentuais maiores na sua demanda.

Demonstração

Em uma padaria são vendidos brioches e pães franceses. A função de demanda por brioches é dada por:

$$Q_1\left(p_1, p_2\right) = p_1^2 p_2^5$$

em que p_1 é o preço do brioche e p_2 é o preço do pão francês. A elasticidade-preço da demanda do brioche será dada por:

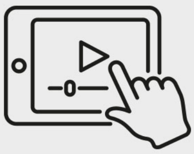
$$\varepsilon_1 = \frac{p_1^* \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}}{Q_1} = \frac{p_1 \left(2 p_1 p_2^5\right)}{p_1^2 p_2^5} = \frac{\left(2 p_1^2 p_2^5\right)}{p_1^2 p_2^5} = 2$$

Como o módulo da elasticidade é maior do que 1, o brioche trata-se de um bem elástico, ou seja, um aumento pequeno do seu preço leva a uma grande queda na sua demanda.

Elasticidades

Vamos ver como calcular elasticidades.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Mão na massa

Questão 1

As derivadas parciais de primeira ordem da função

$$f(x, y) = 2x + 3y + 5$$

são:

A $f_x = 2 + 3y$ e $f_y = 2x + 3$

B $f_x = 2 + 3y + 5$ e $f_y = 2x + 3 + 5$

C $f_x = 7$ e $f_y = 8$

D $f_x = 2$ e $f_y = 3$

E $f_x = 3y$ e $f_y = 2x$

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPara%20realizar%20a%20derivada%20parcial%2C%20derivamos%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o
paragraph'%3EA%20derivada%20parcial%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%20com%20rela%C3%A7%C3%A3o%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(x%2C%20y)%7D%7B%
paragraph'%3EJ%C3%A1%20a%20derivada%20parcial%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%20com%20rela%C3%A
paragraph'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cbeg

Questão 2

As derivadas parciais de primeira ordem da função

$$f(x, y)=\frac{2x+y}{x-y}$$

são:

A f_x=$-\frac{3y}{(x-y)^2}$ e $f_y=\frac{3x}{(x-y)^2}$

B f_x=$\frac{3y}{(x-y)^2}$ e $f_y=\frac{3x}{(x-y)^2}$

C f_x=$-\frac{3y}{(x-y)^2}$ e $f_y=-\frac{3x}{(x-y)^2}$

D f_x=$-\frac{3y}{(x-y)}$ e $f_y=\frac{3x}{(x-y)}$

E f_x=$-\frac{3x}{(x-y)^2}$ e $f_y=\frac{3y}{(x-y)^2}$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPara%20realizar%20a%20derivada%20parcial%2C%20derivamos%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o
paragraph'%3EA%20derivada%20parcial%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%20com%20rela%C3%A7%C3%A3o%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(x%2C%20y)%7D%7B%5Cpartial%20x%7D%3D%5Cfrac
y%7D%5Cright)%7D%7B%5Cpartial%20x%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3ESer%C3%A1%20necess%C3%A1rio%20utilizar%20a%20regra%20do%20Quociente%20para%20e
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cleft(%5Cfrac%7Bf%7D%7Bg%7D%5Cright)%5E%7B%5Cprime%7D(x)%3D%5Cfra
f(x)%20g%5E%7B%5Cprime%7D(x)%7D%7Bg(x)%5E2%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%
paragraph'%3ELogo%2C%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%5Cleft(%5Cfrac%7B2%20x%2By%7D%7Bx-
y%7D%5Cright)%7D%7B%5Cpartial%20x%7D%3D%5Cfrac%7B%5Cfrac%7B%5Cpartial(2%20x%2By)%7D%7B%5
y)-(2%20x%2By)%20%5Cfrac%7B%5Cpartial(x-
y)%7D%7B%5Cpartial%20x%7D%7D%7B(x-
y)%5E2%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%5Cfrac%7B2(x-
y)-(2%20x%2By)%201%7D%7B(x-
y)%5E2%7D%3D%5Cfrac%7B2%20x-2%20y-2%20x-y%7D%7B(x-
y)%5E2%7D%20%5C%5C%5C%5C%0A%3D%5Cfrac%7B-
3%20y%7D%7B(x-
y)%5E2%7D%0A%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%2
paragraph'%3EDe%20maneira%20an%C3%A1loga%2C%20a%20derivada%20parcial%20da%20fun%C3%A7%C3
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%5Cleft(%5Cfrac%7B2%20x
y%7D%5Cright)%7D%7B%5Cpartial%20y%7D%3D%5Cfrac%7B%5Cfrac%7B%5Cpartial(2%20x%2By)%7D%7B%5
y)-(2%20x%2By)%20%5Cfrac%7B%5Cpartial(x-
y)%7D%7B%5Cpartial%20y%7D%7D%7B(x-
y)%5E2%7D%20%5C%5C%0A%5Cfrac%7B1(x-y)-(2%20x%2By)
(-1)%7D%7B(x-y)%5E2%7D%3D%5Cfrac%7Bx-
y%2B2%20x%2By%7D%7B(x-

y)%5E2%7D%20%5C%5C%5C%5C%0A%3D%5Cfrac%7B3%20x%7D%7B(x-
y)%5E2%7D%0A%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%2(

Questão 3

A derivada parcial f_x no ponto $(0, e)$ da função

$$f(x, y) = e^x \ln y$$

É igual a:

A $-e \mid$

B $1 + e$

C $\ln \theta$

D 1

E e

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EIniciamos%20calculando%20a%20derivada%20parcial%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%20com
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(x%2C%20y)%7D%7B%5Cpartial%20x%7D%3D%5Cfrac
paragraph'%3EUma%20vez%20encontrado%20%5C(f_x%5C)%2C%20substitu%C3%ADmos%20os%20valores%2
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(0%2C%20e)%7D%7B%5Cpartial%20x%7D%3De%5E0%

Questão 4

As derivadas parciais de primeira ordem da função

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 + z$$

no ponto $(1, 1, 2)$ são iguais a:

A $f_x = 1; f_y = 2; f_z = 1$

B $f_x = 2; f_y = 2; f_z = 1$

C $f_x = 2; f_y = 2; f_z = 0$

D $f_x = 1; f_y = 1; f_z = 2$

E $f_x = -2; f_y = 2; f_z = 1$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EIniciamos%20calculando%20a%20derivada%20parcial%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%20com
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(x%2C%20y%2C%20z)%7D%7B%5Cpartial%20x%7D%3
paragraph'%3EUma%20vez%20encontrado%20%5C(f_x%5C)%2C%20substitu%C3%ADmos%20os%20valores%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(1%2C1%2C2)%7D%7B%5Cpartial%20x%7D%3D2(1)%2
paragraph'%3ERepetimos%20o%20mesmo%20procedimento%20para%20a%20derivada%20parcial%20de%20p
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(x%2C%20y%2C%20z)%7D%7B%5Cpartial%20y%7D%3
paragraph'%3EUma%20vez%20encontrado%20%5C(f_y%5C)%2C%20substituimos%20os%20valores%20de%20
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(1%2C1%2C2)%7D%7B%5Cpartial%20y%7D%3D2(1)%2
paragraph'%3EPor%20fim%2C%20calculamos%20a%20derivada%20parcial%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%2
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(x%2C%20y%2C%20z)%7D%7B%5Cpartial%20z%7D%3
paragraph'%3EPortanto%2C%20os%20valores%20das%20derivadas%20parciais%20da%20fun%C3%A7%C3%A
paragraph'%3E%24%24%0Af_x%3D2%20%3B%20f_y%3D2%20%3B%20f_z%3D1%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A

Questão 5

Determine as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x, y) = 20x^2y^{3/2}$$

A $f_{xx} = 40y^{3/2}; f_{xy} = 60xy^{1/2}; f_{yy} = 15x^2y^{-1/2}; f_{yx}$

B $f_{xx} = 40y^{3/2}; f_{xy} = 30x^2y^{1/2}; f_{yy} = 15x^2y^{-1/2}; f_{yx}$

C $f_{xx} = 40y^{1/2}; f_{xy} = 60xy^{1/2}; f_{yy} = 30x^2y^{1/2}; f_{yx} =$

D $f_{xx} = 15x^2y^{-1/2}; f_{xy} = 60xy^{1/2}; f_{yy} = 40y^{3/2}; f_{yx}$

E $f_{xx} = 40y^{3/2}; f_{xy} = 60y^{1/2}; f_{yy} = 15x^2y^{1/2}; f_{yx} =$

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EIniciamos%20calculando%20a%20derivada%20parcial%20de%20primeira%20ordem%20da%20f
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(x%2C%20y)%7D%7B%5Cpartial%20x%7D%3D%5Cfrac
paragraph'%3EO%20resultado%20obtido%20pode%20ser%20derivado%20novamente%2C%20com%20rela%C3
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0Af_%7Bx%20x%7D%3D%5Cfrac%7B%5Cpartial%5E2
paragraph'%3ERetomamos%20%C3%A0%20fun%C3%A7%C3%A3o%20%5C(f(x%2C%20y)%5C)%20para%20real
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(x%2C%20y)%7D%7B%5Cpartial%20y%7D%3D%5Cfrac
paragraph'%3EO%20resultado%20obtido%20pode%20ser%20derivado%20novamente%2C%20com%20rela%C3
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0Af_%7By%20x%7D%3D%5Cfrac%7B%5Cpartial%5E2

1%20%2F%202%7D%3D15%20x%5E2%20y%5E%7B-
1%20%2F%202%7D%0A%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20

Questão 6

A derivada parcial de segunda ordem f_{yy} no ponto $(-1, 2)$ da função

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy^2$$

é igual a:

A 6

B 2

C 0

D -2

E -6

Parabéns! A alternativa E está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3ECalculamos%20a%20derivada%20parcial%20de%20primeira%20ordem%20da%20fun%C3%A7%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(x%2C%20y)%7D%7B%5Cpartial%20y%7D%3D%5Cfrac
y%5E2%2B2%20x%20y%5E2%5Cright)%7D%7B%5Cpartial%20y%7D%3D-
2%20y%2B4%20x%20y%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3EE%20derivamos%20novamente%20com%20rela%C3%A7%C3%A3o%20a%20%5C(y%5C)%20%3A
paragraph'%3E%24%24%0Af_%7By%20y%7D%3D%5Cfrac%7B%5Cpartial%5E2%20f(x%2C%20y)%7D%7B%5Cpa
2%2B4%20x%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3EPor%20fim%2C%20substitu%C3%ADmos%20os%20valores%20de%20%5C(x%5C)%20e%20%5C
paragraph'%3E%24%24%0Af_%7By%20y%7D(-1%2C2)%3D-
2%2B4(-1)%3D-2-4%3D-
6%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Teoria na prática

Você acaba de ser contratado como assessor do Ministério da Economia de um país cuja produtividade é dada pela função

$$f(x, y) = 20x^{3/4}y^{1/4}$$

em que x indica a quantidade de mão de obra empregada e y a quantidade de capital utilizada. O governo precisa decidir se deve encorajar que os empresários invistam em mão de obra ou em capital, a fim de aumentar sua produtividade. Para verificar qual deverá ser a política adotada pelo governo, você deve calcular a produtividade marginal do capital e da mão de obra. Seja $x = 256$ e $y = 16$ as quantidades atualmente utilizadas de mão de obra e capital.

A produtividade marginal da mão de obra será dada por:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 20\frac{3}{4}x^{-1/4}y^{1/4} = 15\left(\frac{y}{x}\right)^{1/4}$$

Substituindo as quantidades de x e y

$$f_x(256, 16) = 15\left(\frac{16}{256}\right)^{1/4} = 15\left(\frac{2^4}{4^4}\right)^{1/4} = 15\left(\frac{1}{2}\right) = 7,5$$

A produtividade marginal do capital será dada por:

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 20\frac{1}{4}x^{3/4}y^{-3/4} = 5\left(\frac{x}{y}\right)^{3/4}$$

Substituindo as quantidades de x e y :

$$f_x(256, 16) = 5\left(\frac{256}{16}\right)^{3/4} = 5\left(\frac{4^4}{2^4}\right)^{3/4} = 5(2)^3 = 40$$

Como a produtividade marginal do capital é maior do que a produtividade marginal da mão de obra, o governo deverá realizar políticas que estimulem os empresários a investirem em capital.

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

As derivadas parciais da função

$$g(u, v) = u\sqrt{v} + v^2$$

são:

A $f_x = u; f_y = \frac{1}{2}uv^{-1/2} + 2v$

B $f_x = \sqrt{v}; f_y = \frac{1}{2}uv^{-1/2} + 2v$

C $f_x = \sqrt{v}; f_y = uv^{-1/2} + 2v <$

D $f_x = -u; f_y = \frac{1}{2}v^{-1/2} + 2v$

E $f_x = \sqrt{v}; f_y = \frac{1}{2}uv^{1/2} + v^2$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3ECalculamos%20a%20derivada%20parcial%20de%20primeira%20ordem%20da%20fun%C3%A7%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(u%2C%20v)%7D%7B%5Cpartial%20u%7D%3D%5Cfrac
paragraph'%3EE%20calculamos%20a%20derivada%20parcial%20de%20primeira%20ordem%20da%20fun%C3%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(u%2C%20v)%7D%7B%5Cpartial%20v%7D%3D%5Cfrac
1%20%2F%202%7D%2B2%20v%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2

Questão 2

A derivada parcial de segunda ordem, f_{xx}, da função

$$f(x,y) = e^{xy}$$

é igual a:

A 0

B x^2e^{xy}

C y^2

D x^2

E y^2e^{xy}

Parabéns! A alternativa E está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3ECalculamos%20a%20derivada%20parcial%20de%20primeira%20ordem%20da%20fun%C3%A7%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f(x%2C%20y)%7D%7B%5Cpartial%20x%7D%3D%5Cfrac
paragraph'%3EE%20derivamos%20o%20resultado%20obtido%20novamente%20com%20rela%C3%A7%C3%A3
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%5E2%20f(x%2C%20y)%7D%7B%5Cpartial%20x%5E2%7D%

3 - Máximos e mínimos e multiplicadores de Lagrange

Ao final deste módulo, você será capaz de identificar os pontos de máximo e mínimo de uma função multivariada.

Máximos e mínimos

Assim como nas funções de uma variável, o estudo dos máximos e mínimos é parte crucial para a compreensão do comportamento de uma função e para encontrar sua solução. Vamos começar nosso estudo com um exemplo prático.

A empresa de João fabrica dois tipos de cadeira, de madeira e de plástico, vendidas a diferentes preços. O lucro da sua empresa, L, é função da quantidade de cadeiras de madeira vendidas (x), e da quantidade de cadeiras de plástico vendidas (y). Dessa forma, o lucro da empresa de João é dado por uma função de duas variáveis, $L(x, y)$.

> **João deseja descobrir qual combinação da quantidade de cadeiras de madeira e de plástico lhe trará o maior lucro. Matematicamente, isso significa que a solução do problema de João é obtida encontrando-se o ponto (x, y) no qual sua função lucro, $L(x, y)$ será um máximo.**

Vamos descobrir como identificar os pontos de máximo e mínimo de uma função de várias variáveis.

Seja uma função $f(x, y)$ definida numa região R, que contém o ponto (a, b). O ponto $f(a, b)$ será um **máximo relativo** em (a, b) se $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todos os pontos (x, y) contidos na região R.

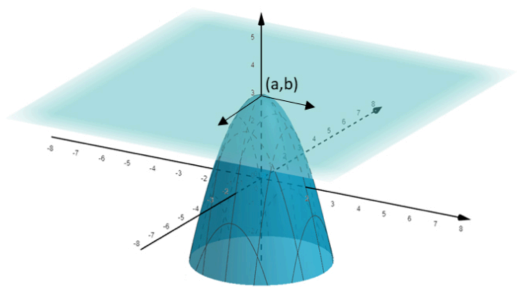


Gráfico de uma função $f(x, y)$, com máximo relativo no ponto (a, b).

Como é possível observar na Figura 7, na região R não existe outro ponto (x, y) para o qual a função $f(x, y)$ seja maior ou igual a $f(a, b)$.

Analogamente, o ponto $f(a, b)$ será um **mínimo relativo** em (a, b) se $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todos os pontos (x, y) contidos na região R.

Caso $f(a, b) \geq f(x, y)$ seja verdadeiro para todo os pontos do domínio de f, passamos a ter um **máximo absoluto**. De maneira análoga, caso $f(a, b) \leq f(x, y)$ seja válido para todo o domínio de f, teremos um **mínimo absoluto**.

Como podemos analisar uma função de várias variáveis para identificar se ela possui máximos e mínimos?

Para isso devemos procurar os **pontos críticos** da função, assim como aprendemos a fazer durante a análise de funções de uma variável.

Seja uma função $f(x, y)$, um ponto (a, b) em seu domínio será um ponto crítico se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \ e \ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

ou se pelo menos uma de suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ não existir.

Assim, para identificarmos os pontos críticos de uma função, é necessário resolver o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Em seguida, utilizamos o **teste da segunda derivada** para verificar se os pontos críticos encontrados são **mínimos, máximos ou pontos de sela**.

Teste da segunda derivada

Seja uma função de duas variáveis $f(x, y)$, que satisfaz a condição

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases}$$

Calculamos:

$$D(a,b) = \frac{\partial f^2}{\partial^2 x}(a,b)\frac{\partial f^2}{\partial^2 y}(a,b) - \left(\frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(a,b)\right)^2$$

Se:

$D(a,b) > 0$ e
$\frac{\partial f^2}{\partial^2 x}(a,b) < 0 : f(x,y)$

Possui um máximo relativo no ponto (a,b);

$D(a,b) > 0$ e
$\frac{\partial f^2}{\partial^2 x}(a,b) > 0 : f(x,y)$

Possui um mínimo relativo no ponto (a,b);

$D(a,b) < 0 : f(x,y)$

Não possui nem um máximo relativo nem um mínimo relativo no ponto (a,b). Este ponto crítico é denominado ponto de sela;

$D(a,b) = 0$

O teste é inconclusivo para determinar os extremos relativos.

Exemplo 1:

Determinar os extremos relativos da função

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Solução:

Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Encontramos, portanto, um ponto crítico: $(0,0)$.

Agora, realizamos o teste da segunda derivada:

$$\frac{\partial f^2}{\partial^2 x} = \frac{\partial f}{\partial x}(2x) = 2$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial^2 y} = \frac{\partial f}{\partial y}(2y) = 2$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}(2x) = 0$$

Portanto,

$$D(0,0) = \frac{\partial f^2}{\partial^2 x}(0,0) \frac{\partial f^2}{\partial^2 y}(0,0) - \left(\frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(0,0)\right)^2$$

$$D(0,0) = 2 * 2 - 0 = 4$$

Como $D(0,0) > 0 e \frac{\partial f^2}{\partial^2 x}(0,0) > 0$, o ponto $(0,0)$ é um mínimo da função $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Exemplo 2:

Determinar os extremos relativos da função

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

Solução:

Resolvemos o sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Encontramos, portanto, um ponto crítico: $(0,0)$.

Agora, realizamos o teste da segunda derivada:

$$\frac{\partial f^2}{\partial^2 x} = \frac{\partial f}{\partial x}(2x) = 2$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial^2 y} = \frac{\partial f}{\partial y}(-2y) = -2$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}(2x) = 0$$

Portanto,

$$D(0,0) = \frac{\partial f^2}{\partial^2 x}(0,0)\frac{\partial f^2}{\partial^2 y}(0,0) - \left(\frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(0,0)\right)^2$$

$$D(0,0) = 2 * (-2) - 0 = -4$$

Como $D(0,0) < 0$, o ponto $0,0$ é um ponto de sela da função $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Multiplicadores de Lagrange

Na seção anterior vimos como identificar os pontos críticos de uma função de duas variáveis e verificar se são máximos ou mínimos relativos, ou pontos de sela.

No entanto, frequentemente iremos nos deparar com problemas nos quais a solução encontra-se restrita a uma ou mais condições na forma $g(x,y) = 0$. Nesses casos, analisaremos máximos e mínimos relativos restritos da função.

Para a solução de um problema restrito, na forma

$$f(x,y)$$

restrito à condição

$$g(x,y) = 0$$

podemos adotar o método dos multiplicadores de Lagrange, que consiste em:

1 – Construir a função lagrangiana, na forma:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

Observe que a condição $g(x,y)$ está sendo multiplicada pela variável λ, que recebe o nome de multiplicador de Lagrange.

2 - Resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

3 - Avaliar na função $f(x, y)$ os pontos x, y obtidos na etapa 2.

Demonstração

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, encontramos o máximo relativo de

$$f(x, y) = -2x^2 - y^2$$

restrito à condição $3x + 4y = 12$

Solução:

Escrevemos a função lagrangiana, $F(x, y, \lambda)$

$$F(x, y, \lambda) = -2x^2 - y^2 + \lambda(3x + 4y - 12)$$

Em seguida, resolvemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = -4x + 3\lambda = 0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -2y + 4\lambda = 0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 3x + 4y - 12 = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos

$$3\lambda = 4x \rightarrow x = \frac{3}{4}\lambda$$

Da segunda equação, temos

$$4\lambda = 2y \rightarrow y = 2\lambda$$

Substituindo x e y na terceira equação, vemos que:

$$3\left(\frac{3}{4}\lambda\right)+4(2\lambda)-12=0$$

$$\frac{9}{4}\lambda+8\lambda-12=0$$

$$9\lambda+32\lambda=48\rightarrow\lambda=\frac{48}{41}$$

Uma vez identificado o valor do multiplicador de Lagrange, encontramos os valores de x e y no ponto crítico.

$$x=\frac{3}{4}\lambda=\frac{3}{4}\left(\frac{48}{41}\right)\rightarrow x=\frac{36}{41}$$

$$y=2\lambda=2\left(\frac{48}{41}\right)\rightarrow y=\frac{96}{41}$$

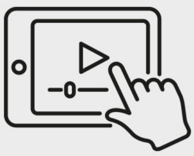
O ponto máximo relativo restrito da função é $\left(\frac{36}{41},\frac{96}{41}\right)$ e f será igual a

$$f\left(\frac{36}{41},\frac{96}{41}\right)=-2\left(\frac{36}{41}\right)^2-\left(\frac{96}{41}\right)^2=-\frac{11808}{1681}=-\frac{288}{41}$$

Multiplicadores de Lagrange

Vamos ver como os multiplicadores de Lagrange funcionam em um exemplo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Mão na massa

Questão 1

Determinar os pontos críticos da função

$$f(x,y)=1-2x^2-3y^2$$

A A função possui dois pontos críticos, (0,0) e (0,3)

B A função não possui pontos críticos

C A função possui um ponto crítico, (0,0)

D A função possui um ponto crítico, (-1,1)

E A função possui dois pontos críticos, (-1,1) e (0,3)

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPara%20encontrarmos%20os%20pontos%20cr%C3%ADticos%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cleft%5C%7B%5Cbegin%7Barray%7D%7Bl%7D%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f%
4%20x%3D0%20%5Crightarrow%20x%3D0%20%5C%5C%5C%5C%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f%7D%7B%5C
6%20y%3D0%20%5Crightarrow%20y%3D0%0A%5Cend%7Barray%7D%5Cright.%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%
paragraph'%3EPortanto%2C%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o%20possui%20um%20ponto%20cr%C3%ADtico%20

Questão 2

A função

$$f(u, v) = 4v^3 + u^2 - 12v^2 - 36v + 2$$

possui:

A Um máximo relativo e um mínimo relativo.

B Um máximo relativo e um ponto de sela.

C Dois pontos de sela.

D Um mínimo relativo e um ponto de sela.

E Não é possível verificar.

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPara%20encontrarmos%20os%20pontos%20cr%C3%ADticos%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cleft%5C%7B%5Cbegin%7Barray%7D%7Bl%7D%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f%
24%20v-36%3D0%20%5Crightarrow%20v%5E2-2%20v-
3%3D0%0A%5Cend%7Barray%7D%5Cright.%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%2

paragraph'%3ETemos%20que%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3E%24%24%0Av%5E2-2%20v-
3%3D0%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3EResolvendo%20a%20equa%C3%A7%C3%A3o%20de%20segundo%20grau%2C%20encontramos
1%5C)%20e%20%5C(v%3D3%5C).%20Portanto%2C%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o%20possui%20dois%20pon
1)%20e(0%2C3)%5C).%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
paragraph'%3EAgora%20devemos%20realizar%20o%20teste%20da%20segunda%20derivada%20em%20cada%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f%5E2%7D%7B%5Cpart
24%20v-36%5Cright)%3D24%20v-
24%20%5C%5C%5C%5C%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f%5E2%7D%7B%5Cpartial%20v%20%5Cpartial%20u%7
paragraph'%3EE%20verificamos%20para%20cada%20ponto%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%2
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Baligned%7D%0A%26D(0%2C-
1)%3D%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f%5E2%7D%7B%5Cpartial%5E2%20u%7D(0%2C-
1)%20%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f%5E2%7D%7B%5Cpartial%5E2%20v%7D(0%2C-
1)-
%5Cleft(%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f%5E2%7D%7B%5Cpartial%20v%20%5Cpartial%20u%7D(0%2C-
1)%5Cright)%5E2%20%5C%5C%5C%5C%0A%26D(0%2C-
1)%3D2%20*(24(-1)-24)-(0)%5E2%3D2(-48)%3D-
96%0A%5Cend%7Baligned%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3EComo%20%5C(D(0%2C-1)%3D-
96%3C0%5C)%2C%20o%20ponto%20%5C((0%2C-
1)%5C)%20%C3%A9%20um%20ponto%20de%20sela.%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0AD(0%2C3)%3D%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f%5E2%7
%5Cleft(%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f%5E2%7D%7B%5Cpartial%20v%20%5Cpartial%20u%7D(0%2C3)%5Cright)
(24(3)-24)-
(0)%5E2%3D2(48)%3D96%0A%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%2
paragraph'%3EComo%20%5C(D(0%2C3)%3D96%3E0%5C)%2C%20e%20%5C(f_%7Bu%20u%7D%3D2%3E0%5C)

Questão 3

Determinar o ponto crítico da função

$$f(x, y) = x^2 - e^y$$

A (0,0)

B (-1,0)

C (0,-1)

D (1,1)

E A função não possui pontos críticos.

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPara%20encontrarmos%20os%20pontos%20cr%C3%ADticos%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cleft%5C%7B%5Cbegin%7Barray%7D%7Bc%7D%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f
e%5Ey%3D0%20%5Crightarrow-%5Cln%20e%5Ey%3D-
y%3D0%20%5Crightarrow%20y%3D0%0A%5Cend%7Barray%7D%5Cright.%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%2
paragraph'%3EPortanto%2C%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o%20possui%20um%20ponto%20cr%C3%ADtico%20

Questão 4

Determinar os pontos críticos da função

$$f(x,y) = xy + lnx + 2y^2$$

A $(0,0)$ e $(-1,1)$

B $(-1,0)$ e $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$

C $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ e $\left(2,\frac{1}{2}\right)$

D $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ e $\left(2,-\frac{1}{2}\right)$

E A função não possui pontos críticos.

Parabéns! A alternativa D está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPara%20encontrarmos%20os%20pontos%20cr%C3%ADticos%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cleft%5C%7B%5Cbegin%7Barray%7D%7Bc%7D%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f
%5Cfrac%7B1%7D%7Bx%7D(1)%20%5C%5C%5C%5C%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f%7D%7B%5Cpartial%20y
paragraph'%3ESubstituindo%20(1)%20em%20(2)%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0Ax-
%5Cfrac%7B4%7D%7Bx%7D%3D0%20%5Crightarrow%20%5Cfrac%7Bx%5E2-
4%7D%7Bx%7D%3D0%20%5C%5C%5C%5C%0Ax%5E2-
4%3D0%20%5Crightarrow%20x%5E2%3D4%20%5Crightarrow%20x%3D%5Cpm%202%0A%5Cend%7Bgathered%
paragraph'%3ESe%20%5C(x%3D-2%20%5Crightarrow%20y%3D-
%5Cfrac%7B1%7D%7B(-2)%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%5C)%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%2
paragraph'%3ESe%20%5C(x%3D2%20%5Crightarrow%20y%3D-
%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%3D-
%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%5C)%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3EPortanto%2C%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o%20possui%20dois%20pontos%20cr%C3%ADticos
%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%5Cright)%5C).%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%

Questão 5

O ponto que maximiza a função

$$f(x,y,z) = xyz$$

sujeita à restrição

$$g(x,y,z) = 2x + 2y + z = 84$$

é:

A (14,14,28)

B (-14,-14,28)

C (-14,14,-28)

D (48,48,96)

E (0,0,48)

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EIniciamos%20a%20solu%C3%A7%C3%A3o%20escrevendo%20o%20lagrangiano%3A%3C%2Fp%
paragraph'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20F(x%2C
84)%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%24%24%3C%2Fp%3E%0A
paragraph'%3EEm%20seguida%2C%20resolvemos%20o%20sistema%20de%20equa%C3%A7%C3%B5es%3A%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cleft%5C%7B%5Cbegin%7Barray%7D%7Bl%7D%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20F
%5Cfrac%7B2%20%5Clambda%7D%7By%7D(1)%20%5C%5C%5C%5C%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20F%7D%7
%5Cfrac%7B2%20%5Clambda%7D%7Bx%7D(2)%20%5C%5C%5C%5C%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20F%7D%7
x%20y(3)%20%5C%5C%5C%5C%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20F%7D%7B%5Cpartial%20%5Clambda%7D%3D2
84%3D0%20%5Ctext%20%7B%20(4)%20%7D%0A%5Cend%7Barray%7D%5Cright.%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3
paragraph'%3EDe%20(1)%20e%20(2)%20temos%20que%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%2
paragraph'%3E%24%24%0Az%3D-
%5Cfrac%7B2%20%5Clambda%7D%7By%7D%3D-
%5Cfrac%7B2%20%5Clambda%7D%7Bx%7D%20%5Crightarrow%20x%3Dy%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A
paragraph'%3ESubstituindo%20em%20(3)%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%2
paragraph'%3E%24%24%0A%5Clambda%3D-x%20y%3D-
x%5E2%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3EPortanto%2C%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3E%24%24%0Az%3D-
%5Cfrac%7B2%20%5Clambda%7D%7Bx%7D%3D%5Cfrac%7B2%20x%5E2%7D%7Bx%7D%3D2%20x%0A%24%2
paragraph'%3ESubstituindo%20em%20(4)%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
paragraph'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%202%20x
84%3D0%20%5Crightarrow%202%20x%2B2%20x%2B2%20x%3D84%20%5Crightarrow%206%20x%3D84%20%5
paragraph'%3EE%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20z%3D2
paragraph'%3EAssim%2C%20o%20ponto%20que%20maximiza%20a%20fun%C3%A7%C3%A3o%20ser%C3%A1

Questão 6

No seu ponto de mínimo, a função

$$f(x, y)=2x+3y-x^2-y^2$$

sujeita à condição

$$g(x, y)=x+2y-9=0$$

vale:

A 0

B $-\frac{7}{4}$

C $\frac{7}{2}$

D $\frac{7}{4}$

E $-\frac{7}{2}$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EIniciamos%20a%20solu%C3%A7%C3%A3o%20escrevendo%20o%20lagrangiano%3A%0A%3C%2
paragraph'%3E%24%24%0AF(x%2C%20y%2C%20lambda)%3D2%20x%2B3%20y-
x%5E2-y%5E2%2Blambda(x%2B2%20y-
9)%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3EEm%20seguida%2C%20resolvemos%20o%20sistema%20de%20equa%C3%A7%C3%B5es%3A%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cleft%5C%7B%5Cbegin%7Barray%7D%7Bc%7D%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20
2%20x%2B%5Clambda%3D0%20%5Crightarrow%202%20x%3D2%2B%5Clambda(1)%20%5C%5C%5C%5C%0A%
2%20y%2B2%20%5Clambda%3D0%20%5Crightarrow%202%20y%3D2%20%5Clambda%2B3(2)%20%5C%5C%5
9%3D0(3)%0A%5Cend%7Barray%7D%5Cright.%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3ESubstituindo%20(1)%20e%20(2)%20em%20(3)%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B2%2B%5Clambda%7D%7B2%7D%2B2%20%5Clambda%2B3-
9%3D0%20%5Crightarrow%202%2B%5Clambda%2B4%20%5Clambda-
12%3D0%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3E%24%24%0A5%20%5Clambda%3D10%20%5Crightarrow%20%5Clambda%3D2%0A%24%24%0A%
paragraph'%3EDessa%20forma%2C%20temos%20que%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3E%24%24%0A2%20x%3D2%2B2%3D4%20%5Crightarrow%20x%3D2%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3
paragraph'%3EE%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3E%24%24%0A2%20y%3D2(2)%2B3%20%5Crightarrow%20y%3D2%2B%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D
paragraph'%3ESubstituindo%20os%20valores%20encontrados%20para%20%5C(x%5C)%20e%20%5C(y%5C)%2
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0Af%5Cleft(2%20%3B%20%5Cfrac%7B7%7D%7B2%7D
(2)%5E2-
%5Cleft(%5Cfrac%7B7%7D%7B2%7D%5Cright)%5E2%20%5C%5C%5C%5C%0Af%5Cleft(2%2C%20%5Cfrac%7B
4-%5Cfrac%7B49%7D%7B4%7D%3D%5Cfrac%7B42-
49%7D%7B4%7D%3D-
%5Cfrac%7B7%7D%7B4%7D%0A%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20

Teoria na prática

Vamos estudar um caso prático do uso de multiplicadores de Lagrange na solução de um problema de maximização de lucros.

Uma empresa produz e vende tablets e celulares, obtendo um lucro mensal dado pela função

$$L(x, y)=-\frac{1}{4} x^2-\frac{3}{8} y^2-\frac{1}{4} x y+120 x+100 y-5.000$$

em que x é o número de tablets e y é a quantidade de celulares produzidos e vendidos. A empresa decide restringir sua produção de celulares e tablets a 230 unidades. Dada essa restrição, quantos celulares e tablets deverão ser produzidos a fim de maximizar o lucro da empresa?

Primeiramente, devemos montar a função lagrangiana:

$$F(x, y, \lambda)=L(x, y)+\lambda g(x, y)$$

A função $g(x, y)$ é a restrição do problema, ou seja:

$$g(x, y)=x+y=230 \rightarrow x+y-230=0$$

Portanto, o lagrangiano será:

$$F(x,y,\lambda) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5.000 + \lambda(x + y - 230)$$

Os pontos críticos são obtidos pela solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 120 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x + 100 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 230 = 0 \end{cases}$$

Da primeira e segunda equação temos que:

$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 120 = -\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x + 100$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 120 - 100 = -\frac{3}{4}y + \frac{1}{4}y$$

$$-\frac{1}{4}x + 20 = -\frac{1}{2}y \rightarrow x - 80 = 2y$$

$$y = \frac{x}{2} - 40$$

Substituímos a expressão na terceira equação do sistema:

$$x + y - 230 = 0 \rightarrow x + \frac{x}{2} - 40 - 230 = 0$$

$$\frac{3x}{2} - 270 = 0 \rightarrow x = \frac{270 * 2}{3} = 180$$

Dessa forma,

$$y = \frac{x}{2} - 40 = 90 - 40 = 50$$

O resultado é que a empresa alcançará seu lucro máximo quando produzir 180 tablets e 50 celulares.

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

A função

$$f(x,y) = 2x^3 + y^2 - 9x^2 - 4y + 12x - 2$$

possui quantos pontos críticos?

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EPara%20verificarmos%20os%20pontos%20cr%C3%ADticos%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%2(
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cleft%5C%7B%5Cbegin%7Barray%7D%7Bc%7D%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20f
18%20x%2B12%3D0%20%5Crightarrow%20x%5E2-
3%20x%2B2%3D0%20%5Crightarrow%20x%3D1%20%5Ctext%20%7B%20ou%20%7D%20x%3D2%20%5C%5C%5
4%3D0%20%5Crightarrow%20y%3D2%0A%5Cend%7Barray%7D%5Cright.%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%2
paragraph'%3ETemos%2C%20portanto%2C%20dois%20pontos%20cr%C3%ADticos%3A%20%5C((1%2C2)%5C)

Questão 2

A função

$$f(u, v)=u^2+3 v^2$$

sujeita à restrição

$$u+v=1$$

tem um mínimo relativo no ponto:

A (3,1)

B $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$

C $\left(3, \frac{1}{4}\right)$

D $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$

E $\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EIniciamos%20a%20solu%C3%A7%C3%A3o%20escrevendo%20o%20lagrangiano%3A%0A%3C%2
paragraph'%3E%24%24%0AF(u%2C%20v%2C%20%5Clambda)%3Du%5E2%2B3%20v%5E2%2B%5Clambda(u%2
1)%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%

paragraph'%3EEm%20seguida%2C%20resolvemos%20o%20sistema%20de%20equa%C3%A7%C3%B5es%3A%(
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cleft%5C%7B%5Cbegin%7Barray%7D%7Bc%7D%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20F
%5Cfrac%7B%5Clambda%7D%7B2%7D(1)%20%5C%5C%5C%5C%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20F%7D%7B%5C
%5Cfrac%7B%5Clambda%7D%7B6%7D(2)%20%5C%5C%5C%5C%0A%5Cfrac%7B%5Cpartial%20F%7D%7B%5C
1%3D0(3)%0A%5Cend%7Barray%7D%5Cright.%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3ESubstituindo%20(1)%20e%20(2)%20em%20(3)%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0A-%5Cfrac%7B%5Clambda%7D%7B2%7D-
%5Cfrac%7B%5Clambda%7D%7B6%7D-1%3D0%20%5Crightarrow-
%5Cfrac%7B(3%2B1)%7D%7B6%7D%20%5Clambda%3D1%20%5Crightarrow%20%5Clambda%3D-
%5Cfrac%7B6%7D%7B4%7D%3D-
%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3EDessa%20forma%2C%20obtemos%20os%20valores%20de%20%5C(u%5C)%20e%20de%20%5C(
paragraph'%3E%24%24%0Au%3D-
%5Cfrac%7B%5Clambda%7D%7B2%7D%3D-
%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%5Cleft(-
%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%5Cright)%3D%5Cfrac%7B3%7D%7B4%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20
paragraph'%3E%24%24%0Av%3D-
%5Cfrac%7B%5Clambda%7D%7B6%7D%3D-
%5Cfrac%7B1%7D%7B6%7D%5Cleft(-
%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%5Cright)%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B4%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20
paragraph'%3EO%20m%C3%ADnimo%20relativo%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%20ocorre%20no%20ponto%

4 - Integrais duplas

Ao final deste módulo, você será capaz de calcular integrais duplas.

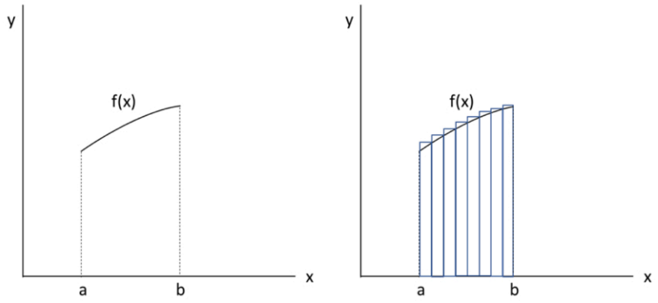
Interpretação geométrica da integral dupla

Vamos iniciar o estudo das integrais duplas relembrando a definição de integral vista em cálculo univariado.

Dada uma função contínua $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$, se dividirmos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos de mesmo comprimento, de forma que $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, podemos definir a soma de Riemann como sendo:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\left(x_i - x_{i-1}\right), \text{ onde } x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$$

Ou seja, calculamos o somatório do valor da função em um ponto dentro de cada subintervalo, multiplicado pelo comprimento do retângulo.



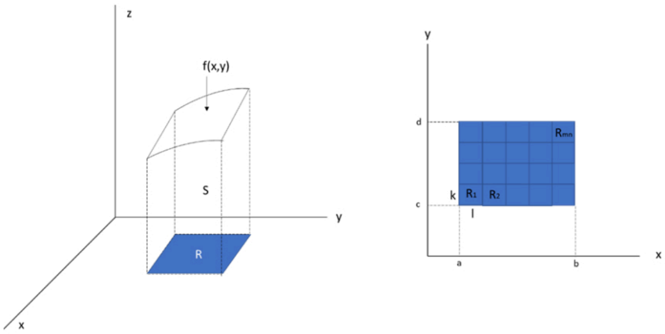
Soma de Riemann de um função contínua no intervalo [a,b].

A integral definida de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ é definida como sendo o limite da soma de Riemann quando n tende ao infinito.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Agora que relembramos o conceito de integral definida para funções de uma variável, vamos estudar a integral de uma função de duas variáveis.

Seja $f(x, y)$ uma função contínua definida numa região R do plano. Assim como fizemos com a função de uma variável, quando dividimos o intervalo $[a, b]$ em n partes iguais, podemos dividir a região R em diversos retângulos de comprimento k e largura l. Teremos assim, mn retângulos, em que m é o número de segmentos de um lado e n o número de segmentos do outro lado do retângulo.



Função de duas variáveis definida na região R.

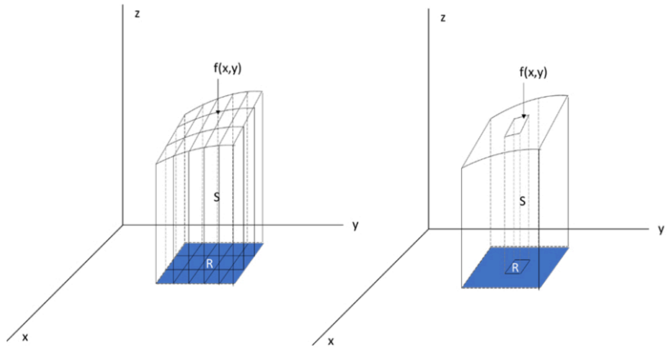
Portanto, a soma de Riemann da função $f(x, y)$ na região R será definida por:

$$S(m, n) = f(x_1, y_1) lk + f(x_2, y_2) lk + \cdots + f(x_{mn}, y_{mn}) lk$$

Se o limite de $S(m, n)$ existe quando m e n tendem ao infinito, então podemos calcular a integral dupla da função $f(x, y)$ na região R:

$$\iint_R f(x, y) dA$$

Perceba que a soma de Riemann agora passa a ser o cálculo de sólidos limitados superiormente pela função $f(x, y)$ e inferiormente pelo retângulo R. Estamos, portanto, calculando o volume do sólido S pela soma dos volumes dos mn paralelepípedos.



Cálculo do volume de um sólido S, limitado superiormente pela função f(x,y) e inferiormente pelo retângulo R.

Cálculo da integral dupla

Anteriormente estudamos a interpretação geométrica da integral dupla. Veremos agora como podemos calcular a integral dupla de uma função em duas situações: quando temos uma região R retangular; e quando a região R é definida por duas funções contínuas.

Integral Dupla em uma região retangular

Seja a região R definida pelos intervalos $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$. Neste caso, temos que a integral dupla da função $f(x, y)$ será:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx\right] dy$$

A técnica utilizada para a resolução das integrais duplas é denominada **técnica das integrais** iteradas. Devemos inicialmente calcular a integral dentro dos colchetes

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

considerando a variável y uma constante. O resultado dessa integração será uma função $g(y)$, que, por sua vez, será utilizada no cálculo de integral mais externa:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx\right] dy = \int_c^d g(y) dy$$

Exemplo 1:

Calcule a integral dupla da função $f(x, y) = x + 2y$ na região do retângulo definido por $1 \leq x \leq 4$ e $1 \leq y \leq 2$

Solução:

Escrevemos a integral dupla como a seguir:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_1^2 \left[\int_1^4 (x+2y)dx\right]dy$$

Primeiramente, calculamos a integral dentro dos colchetes:

$$\int_1^4 (x+2y)dx = \frac{1}{2}x^2 + 2yx|_{x=1}^{x=4} = (8+8y) - \left(\frac{1}{2}+2y\right) = 6y + \frac{15}{2}$$

Temos então que

$$g(y) = 6y + \frac{15}{2}$$

Calculamos agora a integral externa:

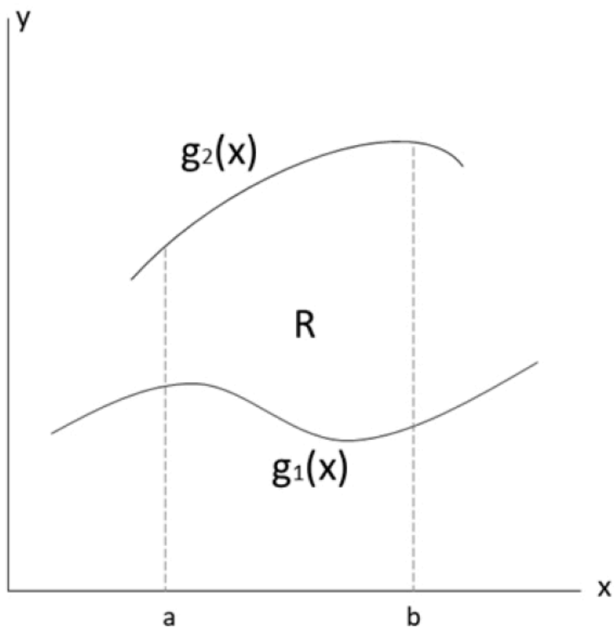
$$\int_1^2 \left[6y + \frac{15}{2}\right]dy = 3y^2 + \frac{15}{2}y\Big|_{y=1}^{y=2} = (12+15) - \left(3 + \frac{15}{2}\right)$$

$$= 27 - \frac{21}{2} = \frac{33}{2}$$

Cálculo da integral dupla em uma região limitada por funções

Até o momento, calculamos as integrais duplas limitadas inferiormente por uma região R retangular. No entanto, é possível calcular a integral dupla em uma região não retangular, como veremos a seguir.

Suponha que temos duas funções $g_1(x)$ e $g_2(x)$:

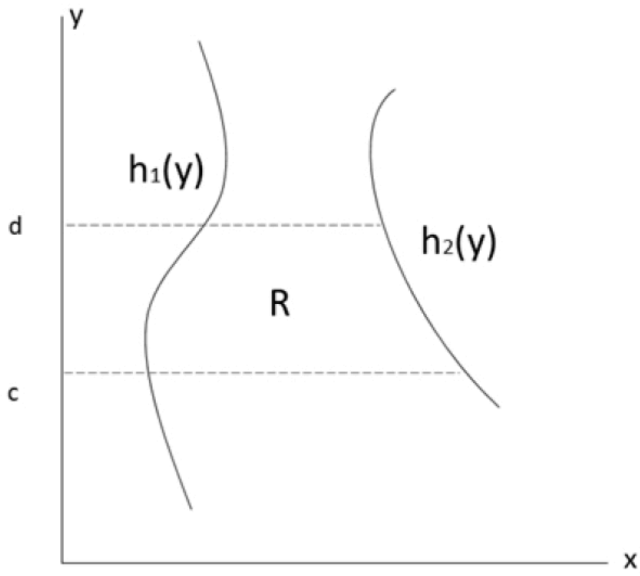


Região R limitada inferiormente pela função $g_1(x)$ e superiormente pela função $g_2(x)$.

O cálculo da integral dupla será, portanto:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

De maneira análoga, caso a região R seja limitada à esquerda pela função $h_1(y)$ e à direita pela função $h_2(y)$:



Região R limitada à esquerda pela função $h_1(y)$ e à direita pela função $h_2(y)$.

O cálculo da integral dupla será, portanto:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right]dy$$

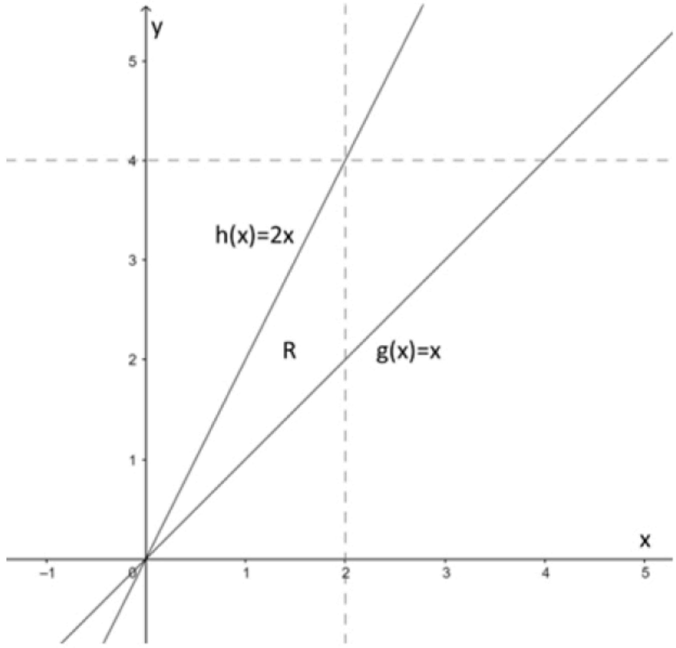
Vejamos agora um exemplo de como calcular a integral dupla de uma função $f(x,y)$ em uma região R limitada por curvas.

Exemplo 2:

Calcular a integral dupla da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ na região R limitada pelas funções $g(x) = x$ e $h(x) = 2x$, para $0 \leq x \leq 2$

Solução:

A região R será:



A região R.

O cálculo da integral dupla será dado por:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_0^2 \left[\int_x^{2x} (x^2+y^2)dy\right]dx$$

Primeiramente, calculamos a integral dentro dos colchetes:

$$\int_x^{2x} (x^2+y^2)dy = yx^2 + \frac{1}{3}y^3\Big|_x^{2x} = \left(2x^3 + \frac{8}{3}x^3\right) - \left(x^3 + \frac{1}{3}x^3\right) = \frac{14}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^3 = \frac{10}{3}x^3$$

Agora, calculamos a integral externa:

$$\int_0^2 \left(\frac{10}{3}x^3\right)dx = \frac{5}{6}x^4\Big|_0^2 = \left(\frac{5}{6}16\right) - (0) = \frac{40}{3}$$

Valor médio de uma função

Dada uma função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, seu valor médio é dado por:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Observando a expressão anterior, vemos que o valor médio de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ é sua integral no intervalo dividida pelo tamanho dele.

Analogamente, se desejamos encontrar o valor médio de uma função de duas variáveis, $f(x,y)$, em uma região R, calculamos sua integral dupla dividida pela área da região R:

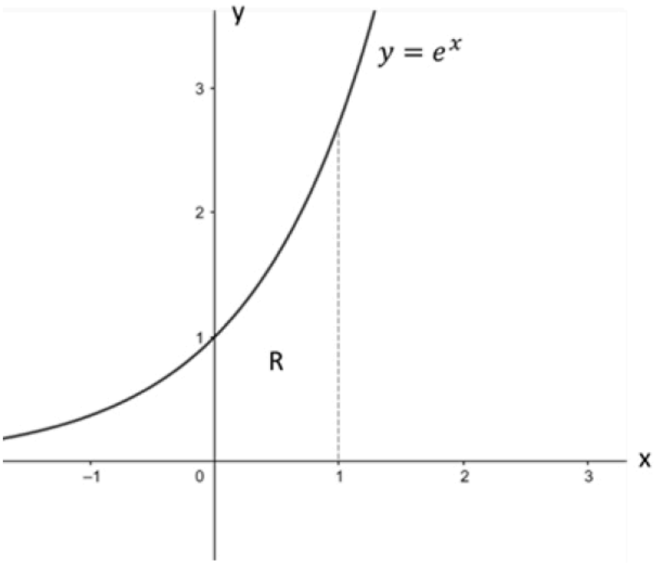
$$\frac{\iint_R f(x,y)dA}{\iint_R dA}$$

Exemplo 3:

Encontrar o valor médio da função $f(x,y) = xy$ na região definida pela função $y = e^x$, com $0 \leq x \leq 1$.

Solução:

A região R é dada por:



Calculamos a área da região R:

Calculamos a área da região R:

$$\iint_R dA = \int_0^1 \left[\int_0^{e^x} 1dy\right] dx$$

Calculando a integral dentro dos colchetes:

$$\int_0^{e^x} 1dy = y|_0^{e^x} = e^x - 0 = e^x$$

Calculando a integral externa, encontramos a área da região R:

$$\int_0^1 e^x dx = e^x|_0^1 = e - 1$$

A integral dupla $\iint_R f(x,y)dA$ será:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_0^1 \left[\int_0^{e^x} (xy)dy\right] dx$$

Calculando a integral dentro dos colchetes, temos que:

$$\int_0^{e^x} (xy)dy = \frac{1}{2}xy^2\Big|_0^{e^x} = \frac{1}{2}xe^{2x} - 0 = \frac{1}{2}xe^{2x}$$

Calculando a integral externa, encontramos:

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right] dx = \frac{1}{4}xe^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x}\Big|_0^1$$
$$\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{8}e^2\right) - \left(0 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{8}$$

Portanto, o valor médio da função $f(x,y) = xy$ na região R delimitada por $y = e^x$, com $0 \leq x \leq 1$, será:

$$\frac{\iint_R f(x,y)dA}{\iint_R dA} = \frac{\frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{8}}{e-1} = \frac{\frac{1}{8}\left(e^2+1\right)}{e-1} = \frac{\left(e^2+1\right)}{8(e-1)}$$

Demonstração

Nem sempre será possível calcular a integral dupla de uma vez só. Frequentemente você irá se deparar com problemas nos quais a escolha da ordem das integrações poderá facilitar ou complicar os cálculos.

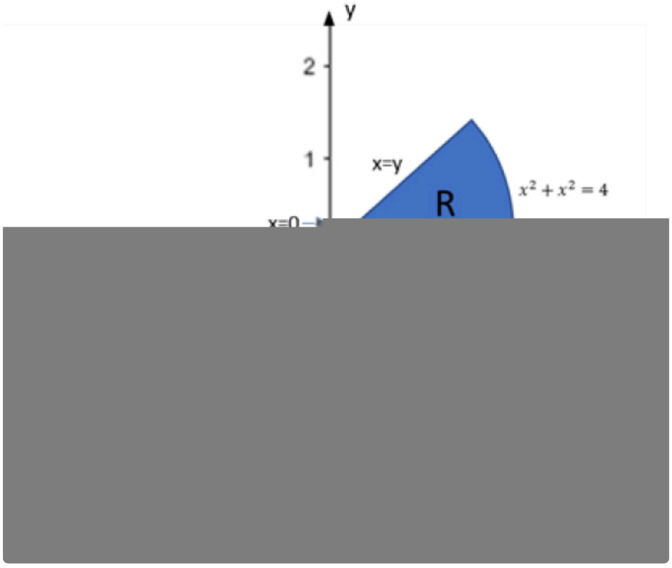
Por exemplo, calcularemos a integral dupla da função

$$f(x,y) = y$$

com a região R delimitada por: $x = 0, x = \sqrt{4-y^2}, y = 0$ e $y = x$.

Esboçamos a região R, observando que:

$$x = \sqrt{4-y^2} \rightarrow x^2 = 4 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$



Podemos realizar o cálculo da integral dupla de duas maneiras:

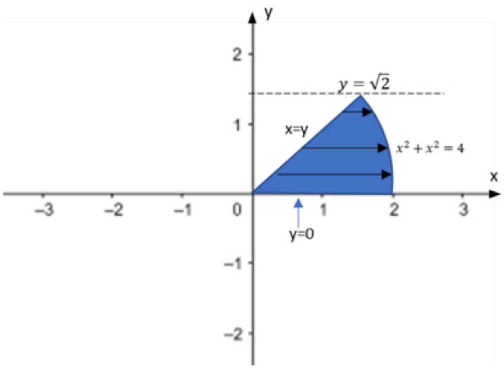
$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dxdy \text{ ou } \iint_R f(x,y)dydx$$

Vejamos a diferença no cálculo visualmente:

Caso optemos por realizar a integração na forma

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

Analisaremos a região R como na figura a seguir:



Observe que todas as 3 setas na região R partem da função $y = x$ e chegam à função $x = \sqrt{4 - y^2}$. Logo, a integral dupla será escrita como:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_y^{\sqrt{4-y^2}} ydx \right] dy$$

Por outro lado, podemos realizar a integração inicialmente por dy. Neste caso, teremos que separar a integral dupla em duas partes, conforme mostra a figura a seguir:

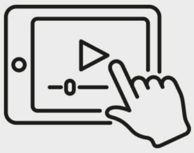
A seta à esquerda parte de $y = 0$ e chega à $y = x$. Já a seta à direita parte de $y = 0$ e chega em $y = \sqrt{4 - x^2}$. Portanto, o cálculo da integral dupla será em duas partes:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_{y=0}^{y=x} y dy \right] dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \left[\int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} y dy \right] dx$$

É importante ressaltar que, independentemente do cálculo realizado, o resultado deverá ser o mesmo.

Valor médio

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Mão na massa

Questão 1

Calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$ para a função

$$f(x, y) = x + 2y$$

e região R limitada por $-1 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 2$.

A 0

B 9

C 15

D 21

E 24

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EA%20regi%C3%A3o%20R%20%C3%A9%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%
image%20src%3D%22img%2F18.jpg%22%20alt%3D%22%22%20title%3D%22Giselle%20Ferraris.%22%20loadin
image%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20dupla%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%3D%5Cint_%7B-
1%7D%5E2%5Cleft%5B%5Cint_0%5E2(x%2B2%20y)%20d%20y%5Cright%5D%20d%20x%0A%24%24%3C%2Fp%
paragraph'%3ECome%C3%A7amos%20realizando%20a%20integral%20dentro%20do%20colchete%3A%3C%2F
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5E2(x%2B2%20y)%20d%20y%3D%5Cleft.%5Cleft(x%20y%2By%5E2%5Cri
(0)%3D2%20x%2B4%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3EEm%20seguida%2C%20com%20o%20resultado%20obtido%2C%20calculamos%20a%20integral
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_%7B-
1%7D%5E2%5B2%20x%2B4%5D%20d%20x%3D%5Cleft.%5Cleft(x%5E2%2B4%20x%5Cright)%5Cright%7C_%7B-
1%7D%20%5E2%3D(4%2B8)-(1-
4)%3D12%2B3%3D15%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2

Questão 2

Calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$ para a função

$$f(x, y)=12 x^2+8 y^3$$

e região R limitada por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$.

A 0

B 12

C 32

D 36

E 40

Parabéns! A alternativa E está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EA%20regi%C3%A3o%20R%20%C3%A9%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%
image%20src%3D%22img%2F19.jpg%22%20alt%3D%22%22%20title%3D%22Giselle%20Ferraris.%22%20loadin
image%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20dupla%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%3D%5Cint_0%5E1%5Cleft%5B%5Cint_0%5E
paragraph'%3ECome%C3%A7amos%20realizando%20a%20integral%20dentro%20do%20colchete%3A%0A%3C
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5E2%5Cleft(12%20x%5E2%2B8%20y%5E3%5Cright)%20d%20y%3D%5Cl
(0)%3D24%20x%5E2%2B32%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3EEm%20seguida%2C%20com%20o%20resultado%20obtido%2C%20calculamos%20a%20integral
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5E1%5Cleft%5B24%20x%5E2%2B32%5Cright%5D%20d%20x%3D%5Cleft
(0)%3D40%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Questão 3

Calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$ para a função

$$f(x, y)=\frac{x}{y}$$

e região R limitada por $1 \leq x \leq 2$ e $1 \leq y \leq e^3$.

A $\frac{3}{2}$

B $\frac{9}{2}$

C $e^3-\frac{3}{2}$

D $e^3+\frac{3}{2}$

E e^3

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EA%20regi%C3%A3o%20%5C(R%5C)%20%C3%A9%20uma%20regi%C3%A3o%20retangular%2C%
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20dupla%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%3D%5Cint_1%5E%7Be%5E3%7D%5Cleft%5E
paragraph'%3ECome%C3%A7amos%20realizando%20a%20integral%20dentro%20do%20colchete%3A%3C%2F
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_1%5E2%5Cleft(%5Cfrac%7Bx%7D%7By%7D%5Cright)%20d%20x%3D%5Clef
%5Cleft(%5Cfrac%7B1%7D%7B2%20y%7D%5Cright)%3D%5Cfrac%7B3%7D%7B2%20y%7D%0A%24%24%0A%3
paragraph'%3EEm%20seguida%2C%20com%20o%20resultado%20obtido%2C%20calculamos%20a%20integral
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_1%5E%7B%5Cvarepsilon%5E3%7D%5Cleft%5B%5Cfrac%7B3%7D%7B2%20y
%5Cleft(%5Cfrac%7B3%7D%7B2%7D%20%5Cln%201%5Cright)%3D%5Cfrac%7B9%7D%7B2%7D-
0%3D%5Cfrac%7B9%7D%7B2%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2

Questão 4

Calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$ para a função

$$f(x, y)=x+y$$

e região R limitada por $x=0, x=\sqrt{y}, y=0$ e $y=4$.

A $\frac{44}{5}$

B $\frac{84}{5}$

C 4+$\frac{2}{5} \sqrt{2}$

D $\frac{114}{5}$

E $4+\frac{84}{5}\sqrt{2}$

Parabéns! A alternativa B está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EA%20regi%C3%A3o%20R%20%C3%A9%20dada%20por%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%
image%20src%3D%22img%2F20.jpg%22%20alt%3D%22%22%20title%3D%22Giselle%20Ferraris.%22%20loadin
image%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20dupla%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%3D%5Cint_0%5E4%5Cleft%5B%5Cint_0%5E
paragraph'%3ECome%C3%A7amos%20realizando%20a%20integral%20dentro%20do%20colchete%3A%0A%3C
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5E%7B%5Csqrt%7By%7D%7D(x%2By)%20d%20x%3D%5Cleft.%5Cleft(%5
(0)%3D%5Cfrac%7By%7D%7B2%7D%2By%5E%7B3%20%2F%202%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%
paragraph'%3EEm%20seguida%2C%20com%20o%20resultado%20obtido%2C%20calculamos%20a%20integral
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%5Cint_0%5E4%5Cleft%5B%5Cfrac%7By%7D%7B2%
(0)%20%5C%5C%5C%5C%0A%3D4%2B%5Cfrac%7B2%7D%7B5%7D%20%5Csqrt%7B4%5E2%20*%204%5E2%2

Questão 5

Encontre o valor médio da função

$$f(x,y)=6x^2y^3$$

na região $R0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 3$

A 6

B 12

C 27

D 54

E 81

Parabéns! A alternativa A está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EA%20regi%C3%A3o%20R%20%C3%A9%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%
image%20src%3D%22img%2F21.jpg%22%20alt%3D%22%22%20title%3D%22Giselle%20Ferraris.%22%20loadin
image%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'
paragraph'%3ECalculamos%20a%20%C3%A1rea%20da%20regi%C3%A3o%20%5C(R%5C)%20%3A%0A%3C%2F
paragraph'%3E%24%24%0A%5Ciint_R%20d%20A%3D%5Cint_0%5E2%5Cleft%5B%5Cint_0%5E3%201%20d%20y
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20dentro%20dos%20colchetes%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%2
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5E3%201%20d%20y%3D%5Cleft.y%5Cright%7C_0%20%5E3%3D3-
0%3D3%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20externa%2C%20encontramos%20a%20%C3%A1rea%20da%20re
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5E2%203%20d%20x%3D%5Cleft.3%20x%5Cright%7C_0%20%5E2%3D3(2
paragraph'%3EA%20integral%20dupla%20%5C(%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%5C)%20ser%C3%A1%3A
paragraph'%3E%24%24%0A%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%3D%5Cint_0%5E2%5Cleft%5B%5Cint_0%5E
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20dentro%20dos%20colchetes%2C%20temos%20que%3A%0A%3
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5E3%5Cleft(6%20x%5E2%20y%5E3%5Cright)%20d%20y%3D%5Cleft.%5C
0%5E4%5Cright)%3D%5Cfrac%7B81%7D%7B4%7D%20x%5E2%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%2
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20externa%2C%20encontramos%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%2
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5E2%5Cleft%5B%5Cfrac%7B81%7D%7B4%7D%20x%5E2%5Cright%5D%2
0%3D54%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2

paragraph'%3EPortanto%2C%20o%20valor%20m%C3%A9dio%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%20%5C(f(x%2C
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%7D%7B%5Ciint_R%20d%20A%

Questão 6

Encontre o valor médio da função

$$f(x, y) = x + 2y$$

na região R, um triângulo com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

A 0

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{4}{3}$

D $\frac{1}{3}$

E $\frac{2}{3}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EA%20regi%C3%A3o%20R%20%C3%A9%20dada%20por%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%
image%20src%3D%22img%2F22.jpg%22%20alt%3D%22%22%20title%3D%22Giselle%20Ferraris.%22%20loadin
image%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'
paragraph'%3EObserve%20que%20a%20regi%C3%A3o%20%5C(R%5C)%20pode%20ser%20descrita%20como%
paragraph'%3ECalculamos%20a%20%C3%A1rea%20da%20regi%C3%A3o%20%5C(R%5C)%20%3A%0A%3C%2F
paragraph'%3E%24%24%0A%5Ciint_R%20d%20A%3D%5Cint_0%5E1%5Cleft%5B%5Cint_0%5Ex%201%20d%20y
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20dentro%20dos%20colchetes%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5Ex%201%20d%20y%3D%5Cleft.y%5Cright%7C_0%20%5Ex%3Dx-
0%3Dx%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20externa%2C%20encontramos%20a%20%C3%A1rea%20da%20re
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5E1%20x%20d%20x%3D%5Cleft.%5Cfrac%7Bx%5E2%7D%7B2%7D%5Cri
(0)%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3EA%20integral%20dupla%20%5C(%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%5C)%20ser%C3%A1%3
paragraph'%3E%24%24%0A%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%3D%5Cint_0%5E1%5Cleft%5B%5Cint_0%5E
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20dentro%20dos%20colchetes%2C%20temos%20que%3A%0A%3
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5Ex(x%2B2%20y)%20d%20y%3D%5Cleft.%5Cleft(x%20y%2By%5E2%5Cri
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20externa%2C%20encontramos%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%2
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5E1%5Cleft%5B2%20x%5E2%5Cright%5D%20d%20x%3D%5Cleft.%5Cfra
0%3D%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2
paragraph'%3EPortanto%2C%20o%20valor%20m%C3%A9dio%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%20%5C(f(x%2C
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%7D%7B%5Ciint_R%20d%20A%

Teoria na prática

A prefeitura deseja calcular a densidade populacional da região portuária da cidade. A densidade populacional da cidade é dada pela função

$$f(x, y)=\frac{200 x e^y}{1+5 x^2}$$

A região portuária da cidade é representada pelo retângulo limitado por:

$$0 \leq x \leq 4 \text{ e } 2 \leq y \leq 4$$

Deseja-se saber quantas pessoas vivem na região. Para isso é preciso calcular

$$\iint_R f(x, y) d A=\int_0^4\left[\int_2^4\left(\frac{200 x e^y}{1+5 x^2}\right) d y\right] d x$$

Calculando a integral dentro dos colchetes, temos que:

$$\int_2^4\left(\frac{200 x e^y}{1+5 x^2}\right) d y=\left.\frac{200 x e^y}{1+5 x^2}\right|_2^4=\frac{200 x}{1+5 x^2}\left(e^4-e^2\right)$$

Calculando a integral externa:

$$\int_0^4\left[\frac{200 x}{1+5 x^2}\left(e^4-e^2\right)\right] d x=200\left(e^4-e^2\right) \int_0^4\left[\frac{x}{1+5 x^2}\right] d x$$

$$200\left(e^4-e^2\right) \int_0^4\left[\frac{x}{1+5 x^2}\right] d x=\left.200\left(e^4-e^2\right) \frac{1}{10} \ln \left(1+5 x^2\right)\right|_0^4$$

$$200\left(e^4-e^2\right) \frac{1}{10}(\ln (80)) \approx 4.137 \text{ pessoas}$$

A prefeitura não está somente interessada em saber quantas pessoas habitam a região, mas também em entender sua distribuição pelo porto. Para isso, será calculada a densidade populacional média da região:

$$\frac{\iint_R f(x, y) d A}{\iint_R d A}$$

Já calculamos o numerador dessa expressão. Falta agora calcularmos a área da região portuária, ou seja:

$$\iint_R d A=\int_2^4\left[\int_0^4 d x\right] d y=\int_2^4\left[\left.x\right|_0^4\right] d y$$

$$\int_2^4[4-0] d y=\int_2^4 4 d y=\left.4 y\right|_2^4$$

$$4(4-2)=4 * 2=8$$

Portanto,

$$\iint_R d A=8$$

E a densidade populacional média na região portuária da cidade é:

$$\frac{\iint_R f(x, y) d A}{\iint_R d A}=\frac{4.137}{8}=517,1 \text{ pessoas } / k m^2$$

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$ para a função

$$f(x, y) = 2 - y$$

e região R limitada por $x = -1, x = 1 - y, y = 0$ e $y = 2$.

A $\frac{1}{3}$

B 4

C $\frac{4}{3}$

D $\frac{20}{3}$

E $\frac{8}{3}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EA%20regi%C3%A3o%20R%20%C3%A9%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%
image%20src%3D%22img%2F23.jpg%22%20alt%3D%22%22%20title%3D%22Giselle%20Ferraris.%22%20loadin
image%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20dupla%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%3D%5Cint_0%5E2%5Cleft%5B%5Cint_%7B1
y%7D%5E1(2-
y)%20d%20x%5Cright%5D%20d%20y%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3ECome%C3%A7amos%20realizando%20a%20integral%20dentro%20do%20colchete%3A%0A%3C
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Bgathered%7D%0A%5Cint_%7B1-
y%7D%5E1(2-y)%20d%20x%3D%5Cleft.(2%20x-
x%20y)%5Cright%7C_%7B1-y%7D%20%5E1%3D(2-y)-%5Cleft(2-
2%20y-y%2By%5E2%5Cright)%20%5C%5C%0A2-y-2%2B3%20y-
y%5E2%3D2%20y-
y%5E2%0A%5Cend%7Bgathered%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20
paragraph'%3EEm%20seguida%2C%20com%20o%20resultado%20obtido%2C%20calculamos%20a%20integral
paragraph'%3E%24%24%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%5Cint_0%5E2%
y%5E2%5Cright%5D%20d%20y%3D%5Cleft.%5Cleft(y%5E2-
%5Cfrac%7By%5E3%7D%7B3%7D%5Cright)%5Cright%7C_0%20%5E2%3D%5Cleft(4-
%5Cfrac%7B8%7D%7B3%7D%5Cright)-
(0)%3D%5Cfrac%7B4%7D%7B3%7D%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%2

Questão 2

Encontre o valor médio da função

$$f(x, y) = e^{-x^2}$$

na região R, um triângulo com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

A $e-1$

B $1-e$

C $2+\frac{1}{\theta}$

D $2-\frac{1}{e}$

E $1-e^{-1}$

Parabéns! A alternativa E está correta.

%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EA%20regi%C3%A3o%20R%20%C3%A9%20dada%20por%3A%3C%2Fp%3E%20%20%20%20%20%
image%20src%3D%22img%2F24.jpg%22%20alt%3D%22%22%20title%3D%22Giselle%20Ferraris.%22%20loadin
image%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%3Cp%20class%3D'c-
paragraph'%3EObserve%20que%20a%20regi%C3%A3o%20%5C(R%5C)%20pode%20ser%20descrita%20como%
paragraph'%3ECalculamos%20a%20%C3%A1rea%20da%20regi%C3%A3o%20%5C(R%5C)%20%3A%0A%3C%2F
paragraph'%3E%24%24%0A%5Ciint_R%20d%20A%3D%5Cint_0%5E1%5Cleft%5B%5Cint_0%5Ex%201%20d%20y
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20dentro%20dos%20colchetes%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%2
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5Ex%201%20d%20y%3D%5Cleft.y%5Cright%7C_0%20%5Ex%3Dx-
0%3Dx%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20externa%2C%20encontramos%20a%20%C3%A1rea%20da%20re
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5E1%20x%20d%20x%3D%5Cleft.%5Cfrac%7Bx%5E2%7D%7B2%7D%5Cri
(0)%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3EA%20integral%20dupla%20%5C(%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%5C)%20ser%C3%A1%3A
paragraph'%3E%24%24%0A%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%3D%5Cint_0%5E1%5Cleft%5B%5Cint_0%5E
x%5E2%7D%5Cright)%20d%20y%5Cright%5D%20d%20x%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%2
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20dentro%20dos%20colchetes%2C%20temos%20que%3A%0A%3
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cint_0%5Ex%5Cleft(e%5E%7B-
x%5E2%7D%5Cright)%20d%20y%3D%5Cleft.%5Cleft(e%5E%7B-
x%5E2%7D%20y%5Cright)%5Cright%7C_0%20%5Ex%3D%5Cleft(e%5E%7B-
x%5E2%7D%20x%5Cright)-0%3Dx%20e%5E%7B-
x%5E2%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3ECalculando%20a%20integral%20externa%2C%20encontramos%3A%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%2
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cbegin%7Baligned%7D%0A%5Cint_0%5E1%5Cleft%5Bx%20e%5E%7B-
x%5E2%7D%5Cright%5D%20d%20x%20%26%3D-
%5Cleft.%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%20e%5E%7B-
x%5E2%7D%5Cright%7C_0%20%5E1%3D-
%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%20e%5E%7B-1%5E2%7D-%5Cleft(-
%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%20e%5E%7B-
0%5E2%7D%5Cright)%20%5C%5C%0A%26%3D-
%5Cfrac%7B1%7D%7B2%20e%7D%2B%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%5Cleft(1-
e%5E%7B-
1%7D%5Cright)%0A%5Cend%7Baligned%7D%0A%24%24%0A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%
paragraph'%3EPortanto%2C%20o%20valor%20m%C3%A9dio%20da%20fun%C3%A7%C3%A3o%20%5C(f(x%2C
x%5E2%7D%5C)%20na%20regi%C3%A3o%20%5C(R%5C)%20ser%C3%A1%3A%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%
paragraph'%3E%24%24%0A%5Cfrac%7B%5Ciint_R%20f(x%2C%20y)%20d%20A%7D%7B%5Ciint_R%20d%20A%
e%5E%7B-
1%7D%5Cright)%7D%7B%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%7D%3D%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%5Cleft(1-
e%5E%7B-
1%7D%5Cright)%20*%20%5Cfrac%7B2%7D%7B1%7D%3D1-
e%5E%7B-
1%7D%0A%24%24%3C%2Fp%3E%0A%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20

Considerações finais

Você verificou neste material que as funções de duas ou mais variáveis são frequentes no estudo da Economia.

Saber esboçar suas curvas de nível, realizar suas derivações parciais e identificar seus pontos críticos nos permitem compreender o comportamento da função e a relação entre suas variáveis.

É importante que você realize todos os exercícios e reveja os exemplos dados ao longo do material.

Explore +

Utilize a ferramenta on-line **Geogebra** para visualizar os gráficos das funções estudadas neste conteúdo.

Referências

SIMON, C. P.; BLUME, L. **Matemática para economistas.** Porto Alegre: Bookman, 2004.

STEWART, J. **Cálculo.** 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

TAN, S. T. **Matemática aplicada a administração e economia.** 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

VARIAN, H. **Microeconomia**: uma abordagem moderna. 9. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

Material para download

Clique no botão abaixo para fazer o download do conteúdo completo em formato PDF.

Download material

O que você achou do conteúdo?

Relatar problema