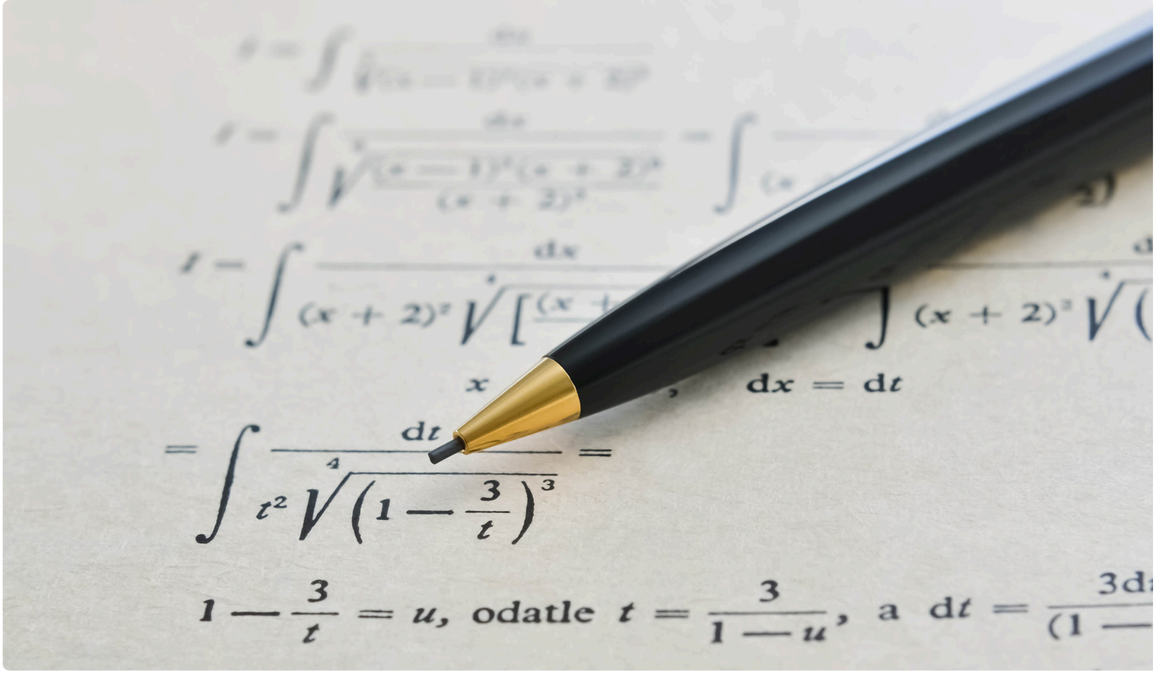


Integrais: aplicações

Prof. Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Descrição

Aplicação do conceito de integração na obtenção de comprimentos de arcos, áreas e volumes.

Propósito

Aplicar os conceitos da integração para determinar comprimentos de curvas, áreas de função e entre funções, como também área de superfície de revolução, além de empregar os conceitos de integração no cálculo de volumes de um sólido qualquer e de sólidos obtidos por revolução.

Preparação

Antes de iniciar o conteúdo deste tema, tenha em mãos papel, caneta e uma calculadora científica ou use a calculadora de seu smartphone/computador.

Objetivos

Módulo 1

Cálculo do comprimento de arcos de curva por integração

Aplicar o conceito da integração no cálculo do comprimento de arcos de curva.

Módulo 2

Cálculo de áreas por integração

Empregar o conceito da integral na obtenção do cálculo de áreas.

Módulo 3

Cálculo de volumes por integração

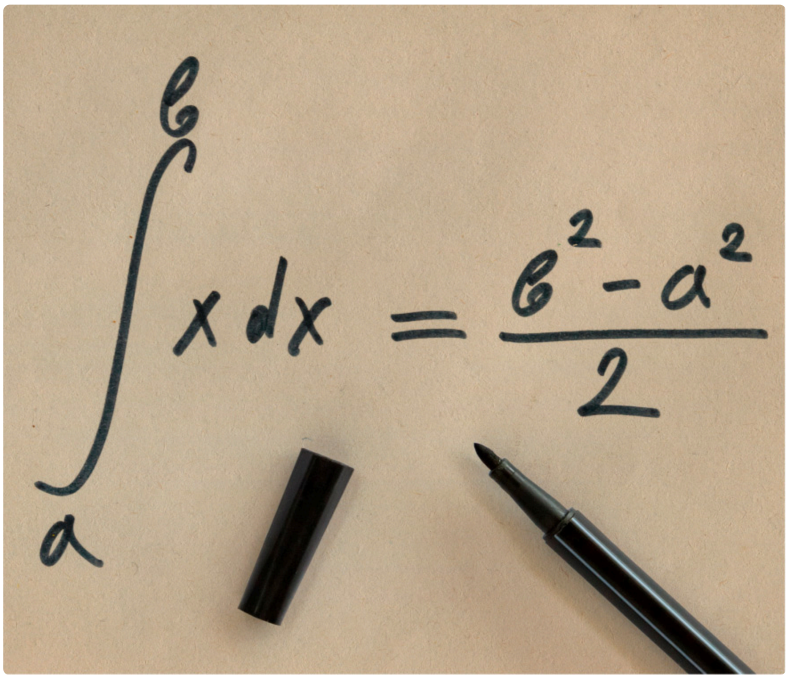
Aplicar o conceito da integral na obtenção do cálculo de volumes.

Introdução

Uma aplicação da operação da integral definida é a obtenção do comprimento do arco da curva traçada por uma função real.

A Geometria Analítica nos ensina a traçar distância, considerando uma reta, entre dois pontos. Acontece que o gráfico de uma função não é formado apenas por retas. Assim, torna-se necessário usar a ferramenta da integral para obter o comprimento desta curva. Esta ferramenta será estudada neste módulo.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



1 - Cálculo do comprimento de arcos de curva por integração

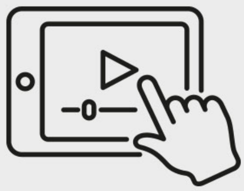
Ao final deste módulo, você deverá ser capaz de aplicar o conceito da integração no cálculo do comprimento de arcos de curva.

Comprimento de arco de uma curva

Como aplicar o conceito de integração no cálculo do comprimento de arcos de curva

Neste vídeo, explicaremos o comprimento do arco de uma curva e a função comprimento do arco.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



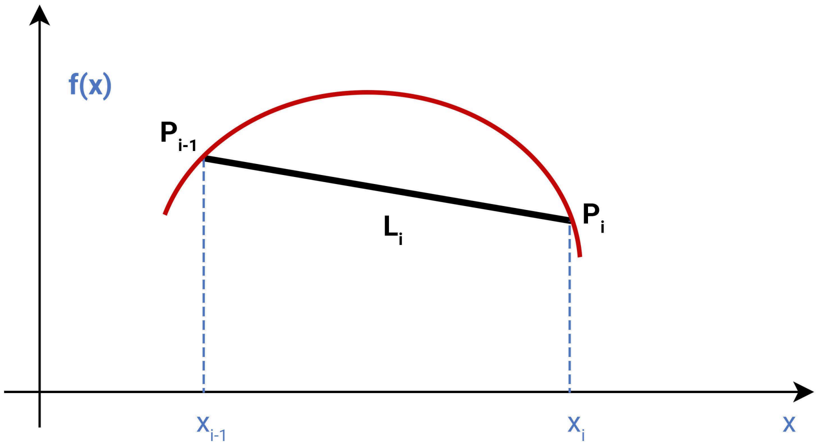
Em algumas aplicações, precisamos calcular **o comprimento de uma curva**, isto é, o comprimento do gráfico de uma função entre dois pontos do gráfico.

Se o gráfico for uma reta, é fácil obter as distâncias entre os dois pontos, mas o caso geral é quando o gráfico da função é definido pela função $f(x)$. Nesta situação, adotamos a seguinte estratégia:

- Dividimos o gráfico em pontos com uma distância bem pequena entre eles, de forma a transformar essa distância numa reta;
- Dizemos que vamos aproximar o comprimento do arco do gráfico por uma poligonal, isto é, um gráfico montado apenas por retas.

Vamos utilizar a fórmula que nos permitirá obter esse comprimento, considerando, inicialmente, o comprimento da distância entre dois pontos do gráfico através de uma aproximação por uma reta.

Seja a função $f(x)$ e deseja-se obter a distância do gráfico entre os pontos P_{i-1} e P_i



Seja L_i a distância entre $\mathrm{P}_{\text{i-1}}$ P_{i}.

Como as coordenadas de $\mathrm{P_i}$ são $(\mathrm{x_{i-1}}, \mathrm{y_{i-1}}) = (\mathrm{x_{i-1}}, \mathrm{f}(\mathrm{x_{i-1}})$ e $\mathrm{P_i}\ (\mathrm{x_1}, \mathrm{y_1}) = (\mathrm{x_1}, \mathrm{f}(\mathrm{x_1}))$

$$L_i = \overline{P_{i-1}P_1} = \sqrt{\left(y_i - y_{i-1}\right)^2 + \left(x_i - x_{i-1}\right)^2}$$

$$\text{Mas, } \left(y_i - y_{i-1}\right)^2 = \left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right)^2$$

$$\text{Com } x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

Existe um teorema conhecido como **teorema do valor médio** que nos diz que, em um intervalo $\mathrm{x_1}$ e $\mathrm{x_2}$, sempre existirá um ponto $\mathrm{c_i}$ que:

$$f'\left(c_i\right) = \frac{f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)}{x_i - x_{i-1}} \rightarrow \Delta f\left(x_i\right) = f'\left(c_i\right)\Delta x_i$$

$$\text{Assim, } \left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right)^2 = \left(\Delta f\left(x_i\right)\right)^2 = \left(f'\left(c_i\right)\Delta x_i\right)^2, \text{com } x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

$$L_i = \sqrt{\left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right)^2 + \Delta x_i^2} = \sqrt{\left(f'\left(c_i\right)\right)^2 \Delta x_i^2 + \Delta x_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2}$$

Estamos interessados em calcular o comprimento do gráfico de $\mathrm{f(x)}$ entre os pontos do domínio [a,b]. Dividiremos os pontos $[\mathrm{a,b}]$ em uma partição P:

$$\mathrm{a < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b}$$

Assim, o comprimento da poligonal que liga os pontos deste gráfico será dado por:

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right)^2 + \left(x_i - x_{i-1}\right)^2}$$

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2}$$

A poligonal aproximará melhor a curva do gráfico quando a distância entre os pontos, $(\mathrm{delta})\Delta\mathrm{x}$, tender a zero. Assim:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Delta c_i \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2}$$

Fazer $\Delta \mathrm{x} \rightarrow 0$ é semelhante a ter uma partição com um número infinito de intervalos, isto é, $\mathrm{i} \rightarrow \infty$.

Usando a mesma analogia da definição da integral definida:

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Vamos ver um exemplo:

Determine o comprimento do arco do gráfico da função $\mathrm{y} = 3\mathrm{x}^2 + 2$ entre os pontos $(0{,}2)$ e $(1{,}5)$.

Solução:

A resolução é dada com aplicação direta da fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

$$\text{Como } f(x) = 3x^2 + 2 \rightarrow f\prime(x) = 6x, \text{ Assim:}$$

$$L = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1 + (6x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 36x^2} dx$$

Agora, necessitamos usar as técnicas de integração para calcular esta integral. Para resolver integrais do tipo $\sqrt{(1 + \mathrm{a}^2\,\mathrm{x}^2)}$ usamos uma substituição de variável do tipo:

$$\operatorname{tg} \alpha = ax \rightarrow sec^2 \alpha d\alpha = adx$$

Assim:

$$\sqrt{1 + a^2x^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{\sec^2 \alpha} = |\sec \alpha|$$

Portanto, no exemplo

$$\operatorname{tg} \alpha = 6x \rightarrow \sec^2 \alpha d\alpha = 6dx$$

Para

$$x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

Para

$$x = 1 \to \operatorname{tg}\alpha = 6 \to \alpha = \operatorname{arctg} 6$$

$$L = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1 + (6x)^2} dx = \int_0^{\operatorname{arctg} 6} \sec\alpha \frac{1}{6} \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$L = \frac{1}{6} \int_0^{\operatorname{arctg} 6} \sec^3 \alpha d\alpha$$

Ainda não temos uma integral imediata.

Verifique, a seguir, o cálculo da integral $\int \sec^3 \alpha \, d\alpha$

Obtenção das integrais com integrando $\sec^n \alpha$

$$I = \int \sec\alpha d\alpha$$

Para calcular esta integral, multiplica-se e divide-se o integrando por $(\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha)$

$$\int \sec\alpha d\alpha = \int \sec\alpha \frac{\sec\alpha + \operatorname{tg} a}{\sec\alpha + \operatorname{tg} a} d\alpha = \int \frac{\sec^2\alpha + \sec\alpha \operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{tg} a} d\alpha$$

Fazendo

$$u = \sec\alpha + \operatorname{tg} a \to du = \left(\sec\alpha \operatorname{tg}\alpha + \sec^2\alpha\right) d\alpha$$

Assim:

$$\int \frac{\sec^2\alpha + \sec\alpha \operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha} d\alpha = \int \frac{du}{u} = ln|u\mid + k, k \,\text{real}$$

Dessa forma,

$$\int \sec\alpha da = \ln|\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha| + k, k \text{ real}$$

$$I = \int \sec^2 \alpha d\alpha$$

Esta é uma integral Imediata, pois a derivada de $\operatorname{tg} \alpha(\text{alpha})$ vale $\sec{}^2 \alpha(\text{alpha})$. Portanto $\alpha(\text{alpha})$.

$$\int \sec^2 \alpha d\alpha = \operatorname{tg}\alpha + k, k \; real$$

$$I = \int \sec^3 \alpha d\alpha$$

Para calcular esta integral, utilizaremos a integral por partes:

$$\int \sec^3 \alpha d\alpha = \int \sec\alpha \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$u = \sec\alpha \rightarrow du = \sec\alpha \operatorname{tg}\alpha d\alpha \text{ e } dv = \sec^2 \alpha d\alpha \rightarrow v = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\int \sec^3 \alpha d\alpha = \sec\alpha \operatorname{tg}\alpha - \int \operatorname{tg}\alpha \sec\alpha \operatorname{tg}\alpha d\alpha$$

Mas

$$\int \operatorname{tg} a \sec a \operatorname{tg} a d\alpha = \int \sec a \operatorname{tg}^2 \alpha da = \int \sec a \left(\sec^2 a - 1\right) d\alpha = \int \left(\sec^3 \alpha - \sec a\right) d\alpha$$

$$\int \sec^3 \alpha d\alpha = \sec\alpha \operatorname{tg}\alpha - \int \sec^3 \alpha d\alpha + \int \sec \alpha d\alpha$$

Desta forma,

$$2 \int \sec^3 \alpha da = \sec a t g \alpha + \int \sec a d\alpha$$

Substituindo o valor de $\int \sec \alpha \, d\alpha$

$$\int \sec^3 \alpha da = \frac{1}{2} \sec\alpha \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2} \ln|\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha| + k, k \; real!$$

Atenção!

Para integrais $\int \sec^n \alpha \, d\alpha$, com inteiro maior do que 3, usa-se a integral por partes como feito no último item.

Assim,

$$L = \frac{1}{6} \int_0^{\operatorname{arctg} 6} \sec^3 \alpha d\alpha = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} \sec\alpha \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2} \ln|\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha| \right]_0^{\operatorname{arctg} 6}$$

Lembrando que

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 6) = 6 \rightarrow \sec(\operatorname{arctg} 6) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 6)} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$$

e que

Função comprimento de arco

Baseado na fórmula obtida no item anterior, pode-se definir uma função, chamada de função comprimento de arco, a que tem o objetivo de medir o comprimento de um arco de gráfico de uma função a partir de um ponto particular até outro ponto qualquer.

Assim, se a curva C tem seu gráfico definido pela função $f(x)$, define-se $s(x)$ como a função comprimento de arco dada por:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

Vamos ver mais um exemplo:

Obtenha a função comprimento de arco, definida pela função $g(x) = 16 - ⅛ \ln x + x^2$, para medir o arco a partir do ponto inicial $(1, 17)$. Determine o comprimento do arco do gráfico entre o ponto inicial e o ponto com $x = 3$.

Solução:

Mão na massa

Questão 1

Marque a alternativa que apresenta a integral que deve ser calculada para determinar o comprimento do arco gerado pela função $g(x) = 3 \ln x$, para $1 \leq x \leq 3$

A $L = \int_1^3 \sqrt{1 + 9 \ln^2 x} dx$ $L = \int_1^3 \sqrt{1 + 9 \ln^2 x} dx$

B $L = \int_1^3 \frac{\sqrt{9+x^2}}{x} dx$ $L = \int_1^3 \frac{\sqrt{9+x^2}}{x} dx$

C $L = \int_1^3 (1 + 3 \ln x) dx$ $L = \int_1^3 (1 + 3 \ln x) dx$

D

E

Parabéns! A alternativa B está correta.

Usando a fórmula para calcular o comprimento do arco:

Assim,

Questão 2

Marque a alternativa que apresenta a integral que representa a função comprimento de arco que mede o comprimento do arco da função $f(x) = 4e^{x}$, a partir do ponto $x = 4$.

A

B

C

D

E

Parabéns! A alternativa C está correta.

Usando a fórmula para calcular a função comprimento do arco:

Assim,

Questão 3

Determine o valor de $s((pi)\pi \div 4)$, onde $(s(x)$ é a função comprimento de arco que determina o comprimento do arco da função $g(x) = \ln(\cos x)$, a partir do ponto com $x = 0$.

A $\ln 2$

B $\ln(\sqrt{3} + 1)$

C $\ln 5$

D $\ln(\sqrt{2} + 1)$

E $\ln 2\sqrt{3}$

Parabéns! A alternativa D está correta.

Usando a fórmula para calcular a função de comprimento do arco:

Como

Assim,

Logo,

Questão 4

Determine o comprimento de arco que existe entre os pontos A e B que pertencem à curva de gráfico $h(x) = ⅔ (x^2 + 1)^{3 \div 2}$. Sabe-se que o ponto A tem abscissa 0 e o ponto B abscissa 1.

A $5 \div 3$

B $1 \div 5$

C $3 \div 5$

D $1 \div 3$

E $4 \div 3$

Parabéns! A alternativa A está correta.

Usando a fórmula para calcular o comprimento do arco:

Como

Assim,

Logo,

Questão 5

Determine o comprimento de arco formado pela função $\mathrm{g}(\mathrm{x})$ entre $\mathrm{x} = 1$ e $\mathrm{x} = 2$, com $\mathrm{g}(\mathrm{x}) =$

A $33 \div 16$

B $16 \div 33$

C $33 \div 4$

D $4 \div 33$

E $33 \div 5$

Parabéns! A alternativa A está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre Função comprimento do arco

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Questão 6

Determine a função comprimento de arco que calcula o comprimento do arco traçado pela função $\mathrm{g(x) = x^2 + 8}$, a partir do ponto $\mathrm{x = 0}$, para $\mathrm{x < (pi)}\pi \div 2$.

A

B

C

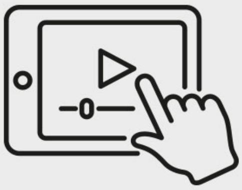
D

E

Parabéns! A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre comprimento do arco.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Teoria na prática

Um arquiteto pretende construir um arco parabólico, virado para baixo, em um monumento. Ele deseja saber quantos metros de metal serão necessários para a obra. Sabe-se que o arco terá uma distância entre as duas pontas que tocam ao chão de $4\mathrm{m}$ e a altura do ponto médio será de $8\mathrm{m}$.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Determine o comprimento do arco da curva $\mathrm{h}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{3 \div 2}$;, para $0 \leq \mathrm{x} \leq 1$.

A

B

C

D

E

Parabéns! A alternativa A está correta.

Usando a fórmula para calcular o comprimento do arco:

Como

Assim,

Fazendo uma substituição de variável

$u = 4 + 9u \rightarrow du = 9\ d\varepsilon$

Para $z = 0 \rightarrow u = 4$ e para $z = 1 \rightarrow u = 13$

Questão 2

Marque a alternativa que apresenta a função comprimento de arco que determina o comprimento do arco da função $f(x) = \ln\,(\sec x)$ desde o ponto $x = 0$, para um x ≤ (pi)$\pi/2$.

A

B

C

D

E

Parabéns! A alternativa B está correta.

Usando a fórmula para calcular o comprimento do arco:

Assim,

2 - Cálculo de áreas por integração

Ao final deste módulo, você deverá ser capaz de empregar o conceito da integral na obtenção do cálculo de áreas.

Cálculo de área de uma função

Como aplicar o conceito de integração no cálculo de áreas

Neste vídeo, falaremos sobre os cálculos de área de uma função, de área entre funções e o de área de uma superfície de revolução.

A definição da integração definida se baseia no cálculo do limite de um somatório, denominado de soma de Riemann.

Assim, a integral definida de $f(x)$ de a para b será dada por:

Soma de Riemann

Na matemática, a soma de Riemann é uma aproximação obtida pela expressão. É nomeada em homenagem ao matemático alemão Bernhard Riemann. Uma aplicação muito comum é a aproximação da área de funções ou linhas em um gráfico, mas também o comprimento das curvas e outras aproximações.

Fonte: Wikipédia.

As parcelas do somatório são as áreas dos retângulos, formados abaixo da curva $f(x)$, quando a função está em cima do eixo, ou serão as áreas dos retângulos multiplicados por (-1) quando a função estiver abaixo dos eixos.

Como área é sempre uma medida positiva, torna-se necessário trabalhar apenas com termos positivos. Assim, pode-se calcular a área A, entre a função $f(x)$ e o eixo x, para $a \leq x \leq b$, pela integral:

Para resolver esta integral, teremos que dividir em intervalos de integração em que o sinal de $f(x)$ é sempre positivo ou sempre negativo.

Vamos ver um exemplo:

Determine a área entre o gráfico da função $g(x) = 2 \cos x$ e o eixo x, para x entre $^{\pi(pi)}/_{4}$ e $^{3\,\pi(pi)}/_{4}$

Solução:

A área A será obtida pela integral.

A função $\cos x$ é positiva para

A função $\cos x$ é negativa para

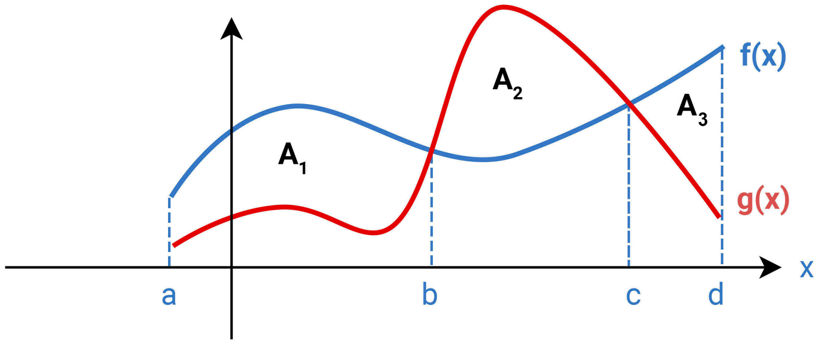
Assim:

Repare que, se fosse feita a integral sem o módulo, o valor seria diferente, pois as parcelas abaixo do eixo diminuiriam das parcelas acima do eixo, ao invés de se somarem.

Cálculo de área entre funções

Deseja-se agora obter a área que se encontra entre dois gráficos $f(x)$ e $g(x)$.

Neste caso, também precisamos ter a noção em que intervalos $f(x)$ é maior que $g(x)$, estando acima no desenho dos gráficos, e onde $f(x)$ é menor que $g(x)$, estando abaixo no desenho dos gráficos.



Se observarmos, no gráfico, a área entre as funções $f(x)$ e $g(x)$ para $a \leq x \leq d$ é dada por $A = A_1 + A_2 + A_3$.

Repare que, em A_1 e A_3, a função $f(x)$ está acima de $g(x)$, assim, estas áreas podem ser obtidas como se fossem área entre $f(x)$ e o eixo x menos a área entre $g(x)$ e o eixo x. Portanto:

Para o caso de A_2, a função $f(x)$ está abaixo de $g(x)$. Logo, esta área pode ser obtida como a diferença entre a área de $g(x)$ e o eixo x e a área entre $f(x)$e o eixo x.

Assim:

Podemos, então, juntar todas essas integrais utilizando o módulo, pois, assim, o integrando será calculado sempre pelo maior valor, menos o menor valor.

Desta forma, a área entre $f(x)$ e $g(x)$ para $a \leq x \leq d$ é dada por:

Esta integral deve ser separada em intervalos nos quais a posição relativa entre as funções no gráfico não se altera. Assim, no exemplo do gráfico:

Vamos a um exemplo:

Calcule a área da região compreendida entre os gráficos da função $f(x) = 27\,x$ e $g(x) = 3x^3$ com $0 \leq x \leq 5$.

Solução:

Precisamos, inicialmente, verificar a posição relativa entre $f(x)$ e $g(x)$.

Os pontos onde estes gráficos se interceptam, com $0 \leq x \leq 5$, serão:

Analisando os gráficos, para $0 \leq x \leq 3$, $f(x)$ está acima de $g(x)$ e para $3 \leq x \leq 5$, $g(x)$ está acima de $f(x)$

Desta forma,

Cálculo de área de uma superfície de revolução

Inicialmente, precisamos definir o que é uma superfície de revolução.

> **Uma superfície de revolução é uma área formada ao girar uma curva em torno de uma reta. Assim, tal**

> superfície é a fronteira lateral de um sólido, denominado de sólido de revolução.

Por exemplo, imagine um retângulo de lados a e b. Vamos rotacionar este retângulo ao redor de um eixo de rotação colocado em um dos lados. Será formado um cilindro de revolução, com $\text{altura } b$ e $\text{raio da base } a$.

A área da superfície de revolução será a área lateral do cilindro, que valerá $A = 2\,\pi^{(\text{pi})}\,r\,h = 2\,\pi^{(\text{pi})}\,a\,b$.

Poderíamos imaginar de forma contrária, isto é, desenrolando a superfície de um cilindro, assim se geraria um retângulo. Outros exemplos podem ser encontrados na literatura de referência.

Vamos agora realizar um caso geral. Imagine a curva definida pela função $f(x)$ para $a \leq x \leq b$.

A função $f(x)$ deve ser positiva e ter derivada contínua. Considere a superfície gerada ao rotacionar esta função ao redor do eixo x.

Considere uma faixa de valores de x_{i-1} até x_i.

Os valores foram escolhidos bem afastados na figura para facilitar o entendimento da fórmula.

Ao girar em torno do eixo x, esta faixa vai gerar, aproximadamente, a lateral de um tronco de cone circular.

Da geometria aprendemos que a área da lateral do tronco de cone circular vale $A = \pi^{(\text{pi})}\,(r + R)\,L$. Quando aproximamos os dois pontos r e R tendem a ter o mesmo valor, assim $A = 2\,\pi^{(\text{pi})}\,r\,L$. Comparando com o gráfico da função $f(x)$. O valor de $r = f(x_{i-1})$ e o valor de $L = P_i\,P_{i-1}$

Mas já aprendemos no módulo de comprimento de arco que:

Em que c_i está entre x_{i-1} e x_i

Se fizemos $(\text{delta})\Delta x_i$ tender a zero, melhor será a aproximação da superfície de revolução com o tronco de cone gerado. Além disso, x_{i-1} é praticamente igual a x_i que será praticamente igual a c_i.

Portanto, a área gerada por uma faixa tendendo a zero em torno do ponto x_i será:

A área total será a soma das áreas desde $x = a$ até $x = b$. Usando o mesmo princípio utilizado na definição da integração definida, obtém-se a fórmula da área da superfície de revolução gerada ao girar o gráfico de $f(x)$ ao redor do $\text{eixo } x$:

De forma análoga, demonstra-se que a área da superfície de revolução gerada ao girar o gráfico da função $f(x)$ ao redor do $\text{eixo } y$ será:

Observe neste caso que o raio do tronco não será mais $f(x)$, e sim o valor da abscissa x.

Vamos a mais um exemplo?

Determine a área da superfície de revolução gerada ao girar a função $y = 2x^2$, para $0 \leq x \leq 1$, ao redor do $\text{eixo } y$.

Solução:

Assim,

Para resolver a integral, faz-se

Para $x = 0 \to u = 1$ e para $x = 1 \to u = 17$. Portanto:

Mão na massa

Questão 1

Determine a área da região formada entre a função $f(x) = 4 - 2x$ e o $\text{eixo } x$ para $1 \leq x \leq 3$

A 1

B 2

C 3

D 4

E 5

Parabéns! A alternativa B está correta.

A área será a área entre $f(x)$ e o eixo $1 \leq x \leq 3$.

Assim:

$$A = \int_1^3 |f(x)| dx = \int_1^3 |4 - 2x| dx$$

Temos que analisar os intervalos em que $f(x)$ são positivos ou negativos:

1. $f(x) \geq 0 \rightarrow 4 - 2x \geq 0 \rightarrow 2x \leq 4 \rightarrow x \leq 2$
2. $f(x) \geq 0 \rightarrow 4 - 2x \leq 0 \rightarrow 2x \geq 4 \rightarrow x \geq 2$

Assim,

Questão 2

Determine a área da superfície de revolução gerada ao girar a função $h(x) = 3x^3$, para $0 \leq x \leq 2$, ao redor do eixo y.

A

B

C

D

E

Parabéns! A alternativa C está correta.

Assim,

Questão 3

Determine a área limitada superiormente por $f(x) = 16$ e inferiormente por $g(x) = 2x^2$, para os valores de x no intervalo $[0, 2]$.

A

B

C

D

E

Parabéns! A alternativa A está correta.

Questão 4

Determine a área da região formada entre a função $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$, o eixo x e as retas $x = -2$ e $x = 6$

A

B

C

D

E

Parabéns! A alternativa C está correta.

A área será a área entre $f(x)$ e o eixo x, para $-2 \leq x \leq 6$. Assim:

Temos que analisar os intervalos em que $f(x)$ são positivos ou negativos.

Determinando a raiz de $f(x) = x^2 - 3x - 4$

Por ser uma equação do segundo grau de concavidade para cima:

1. $f(x) \geq 0 \rightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 4$

2. $f(x) \leq 0 \rightarrow -1 \leq x \leq 4$

Assim,

Questão 5

Determine a área da região limitada pela função $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ e pelas retas $x = -2$ e $x = 3$.

A

B

C

D

E

Parabéns! A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre área entre funções.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Questão 6

Determine a área da superfície de revolução gerada ao girar a função $h(x) = e^x$, para $1 \leq x \leq 2$, ao redor do eixo x

A

B

C

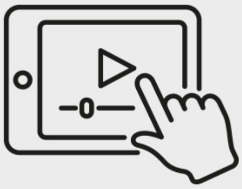
D

E

Parabéns! A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre Área de superfície de revolução.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Teoria na prática

Determine a fórmula da área de uma elipse de $\text{eixo maior } 2a$ e $\text{eixo menor } 2b$. Com a e b reais positivos.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Determine a área da região formada entre a função $f(x) = 3 \ln x$ e o eixo x, para x entre $0{,}5$ e 2.

A

B

C

D

E

Parabéns! A alternativa C está correta.

A área será aquela entre $f(x)$ e o eixo x, para $0{,}5 \leq x \leq 2$. Assim:

Temos que analisar os intervalos em que $f(x)$ são positivos ou negativos.

$$\ln x \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$\ln x \leq 0 \rightarrow x \leq 1$$

Deve ser resolvido $\int \ln (x)\, dx$.

Utilizaremos a integral por partes.

$u = \ln (x) \rightarrow du = {}^{1}/_{x}\, dx$ e $dv = dx \rightarrow v = x$

$\int \ln (x)\, dx = x \ln x - \int x\, {}^{1}/_{x}\, dx = x \ln x - x + k$, com k real

Questão 2

Determine a área da superfície de revolução gerada ao girar a função $g(x) = \sqrt{(9 - x^2)}$, para $0 \leq x \leq 3$, ao redor do eixo x

A $8\,\pi(pi)$

B $18\,\pi(pi)$

C $32\,\pi(pi)$

D $45\,\pi(pi)$

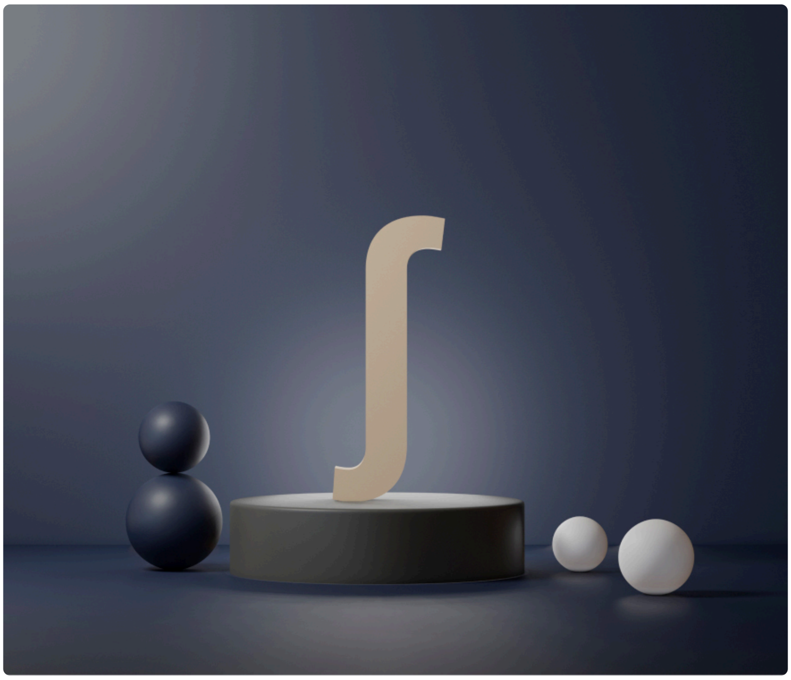
E $9\,\pi(\text{pi})$

Parabéns! A alternativa B está correta.

Aplicação direta da fórmula:

Assim,

Portanto,



3 - Cálculo de volumes por integração

Ao final deste módulo, você deverá ser capaz de aplicar o conceito da integral na obtenção do cálculo de volumes.

Cálculo de volume de sólido de rotação

Como aplicar o conceito de integração no cálculo de volumes

Neste vídeo, mostraremos o cálculo de volume de sólido de rotação.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Outra aplicação importante para integral é o cálculo de volumes.

Uma função contínua e positiva gera uma área entre seu gráfico e o eixo x. Da mesma forma, esta função também gera uma área entre seu gráfico e o eixo y.

> **Cada uma destas duas áreas descritas podem ser rotacionadas em torno do eixo x ou do eixo y, gerando quatro sólidos de revolução diferentes. A integral definida pode ser usada para se calcular o volume destes sólidos.**

Seja uma função $f(x)$ contínua e com $f(x) \geq 0$ para $[a,b]$.

Seja C o conjunto de pontos obtidos pela rotação, em torno do eixo x, da área A da região limitada por $f(x)$ e o eixo x com $a \leq x \leq b$.

Estamos interessados em obter o volume da região gerada pelo conjunto C.

Vamos analisar uma faixa de valores entre x_{i-1} e x_i:

- Ao rotacionar esta faixa de valores, a região do espaço formada por ela pode ser aproximada por um cilindro de altura $(\text{delta})\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e raio dado por $f(x_{i-1})$ ou $f(x_i)$.
- Quanto menor o valor do $(\text{delta})\Delta x_i$ melhor é a aproximação. Assim, podemos considerar que o volume da região C será

composto pela soma de cilindros, com alturas $(\mathrm{delta})\Delta \mathrm{x_i}$ tendendo para zero;

- Observe que quando $(\mathrm{delta})\Delta \mathrm{x_i} \to 0$, o valor de $\mathrm{f(x_i)}$ fica praticamente igual ao valor de $\mathrm{f(x_{i-1})}$.

O volume do cilindro infinitesimal é dado por
$(\mathrm{delta})\Delta \mathrm{V} = (\mathrm{pi})\pi \mathrm{r^2 h} = (\mathrm{pi})\pi(\mathrm{f(x_i)})^2\ (\mathrm{delta})\Delta \mathrm{x_i}$

Com o mesmo raciocínio da **Soma de Riemann** utilizado na definição da integral definida, define-se o volume formado pela rotação de $\mathrm{f(x)}$ em torno do $\mathrm{eixo\ x}$, para $\mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}$ como:

Vamos a mais um exemplo:

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $\mathrm{f(x)} = \sqrt{}(1 - \mathrm{x^2})$ e o eixo x, para $-1 \leq \mathrm{x} \leq 1$.

Solução:

A função $\mathrm{f(x)}$ é contínua e positiva neste intervalo. Usando a fórmula do volume:

Observe que este resultado já era conhecido.

- A área formada por $\mathrm{f(x)}$ entre $-1 \leq \mathrm{x} \leq 1$ é de uma semicircunferência de raio 1;
- Ao rodar em torno do eixo x, gera uma esfera de raio 1;
- O volume da esfera de raio r é conhecido da Geometria como $\mathrm{V} = {}^4/_3\ \pi\ \mathrm{r^3}$, confirmando a resposta obtida.

Além do sólido de rotação apresentado inicialmente, pode-se gerar mais três sólidos de rotação, ao rotacionar as áreas relacionadas à função $\mathrm{f(x)}$ contínua e positiva em torno dos eixos x ou y.

A demonstração destas fórmulas segue o raciocínio análogo ao anterior, ou ao **teorema de Pappus**, e pode ser encontrada em qualquer uma de nossas referências.

Seja $\mathrm{f(x)}$ uma função contínua e positiva em $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

A

Seja a área a formada pelo conjunto de pontos entre $\mathrm{f(x)}$ e o $\mathrm{eixo\ x}$ para $\mathrm{a \le x \le b}$.

B

Seja a área b formada pelo conjunto de pontos entre $\mathrm{f(x)}$ e o $\mathrm{eixo\ y}$ para $\mathrm{a \le x \le b}$.

Serão gerados quatro sólidos de rotação:

- Rotação da área A em torno do $\mathrm{eixo\ x}$;
- Rotação da área A em torno do $\mathrm{eixo\ y}$;
- Rotação da área B em torno do $\mathrm{eixo\ x}$;
- Rotação da área B em torno do $\mathrm{eixo\ y}$.

As fórmulas para calcular o volume de cada um destes sólidos são apresentadas a seguir.

Para rotação da área B, necessita-se definir a função $\mathrm{g(y)}$, que é a inversa de $\mathrm{f(x)}$. Lembre-se de que só existe função inversa de funções em um intervalo em que $\mathrm{f(x)}$ será estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Desta forma, tem-se:

1. Volume gerado pela rotação da área A em torno do $\mathrm{eixo\ x}$, para $\mathrm{a \le x \le b : V = {}_a\!\int^b \pi(f(x))^2\ dx}$
2. Volume gerado pela rotação da área B em torno do $\mathrm{eixo\ y}$, para $\mathrm{c \le y \le d : V = {}_c\!\int^d \pi(g(y))^2\ dy}$
3. Volume gerado pela rotação da área A em torno do $\mathrm{eixo\ y}$, para $\mathrm{a \le x \le b : V = {}_a\!\int^b 2\pi x\ f(x)\ dx}$
4. Volume gerado pela rotação da área B em torno do $\mathrm{eixo\ x}$, para $\mathrm{c \le y \le d : V = {}_c\!\int^d 2\pi y\ g(y)\ dy}$

Um ponto importante. Nas integrais do item 2 e item 4, o limite inferior deve ser sempre o menor número, assim, se $\mathrm{d \ge c}$, os limites serão $\mathrm{{}_c\!\int^d I(y)\ dy}$ mas se $\mathrm{d < c}$, os limites serão $\mathrm{{}_d\!\int^c I(y)\ dy}$.

Veja a seguir uma sequência de exemplos.

Exemplo 1

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $f(x) = x^2$ e o eixo x, para $0 \leq x \leq 2$.

Solução:

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo A em torno do eixo x.

Assim:

Exemplo 2

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de pontos formados pela função $f(x) = x^2$ e o eixo x, para $0 \leq x \leq 2$.

Solução:

Observe que desejamos o volume do sólido gerado por uma área do tipo A em torno do eixo y.

Assim:

Exemplo 3

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de pontos formados pela função $f(x) = x^2$ e o eixo y, para $0 \leq x \leq 2$

Solução:

Nesta questão, desejamos o volume do sólido gerado por uma área do tipo B em torno do eixo y.

Necessitamos da função $g(y) = f^{-1}(x)$. Se $f(x) = x^2 \rightarrow g(y) = \sqrt{y}$.

Para $x = 0 \rightarrow f(0) = c = 0$ e $x = 2 \rightarrow f(2) = d = 4$

Assim:

Exemplo 4

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do $\mathrm{eixo\ x}$, do conjunto de pontos formados pela função $\mathrm{f(x) = x^2}$ e o $\mathrm{eixo\ y}$, para $0 \leq \mathrm{x} \leq 2$.

Solução:

Nesta questão, queremos o volume do sólido gerado por uma área do tipo B em torno do eixo x.

Necessitamos da função $\mathrm{g(y) = f^{-1}(x)}$. Se $\mathrm{f(x) = x^2 \rightarrow g(y) = \sqrt{y}}$.

Para $\mathrm{x = 0 \rightarrow f(0) = c = 0}$ e $\mathrm{x = 1 \rightarrow f(2) = d = 4}$

Assim:

Repare que existe uma relação entre os volumes obtidos.

Se você desenhar o gráfico de $\mathrm{f(x)}$ e observar, os volumes $\mathrm{V_1}$ e $\mathrm{V_4}$ se completam formando um cilindro que foi obtido por uma rotação de um retângulo de lados 2 e 4 em torno do $\mathrm{eixo\ x}$. Isto é, o cilindro terá raio da base 4 e altura 2, portanto, volume $32\pi\mathrm{(pi)}$.

Veja que $\mathrm{V_1 + V_4} = 32\ \pi\mathrm{(pi)}$.

Igualmente, os volumes $\mathrm{V_2}$ e $\mathrm{V_3}$ se completam formando um cilindro que foi obtido por uma rotação de um retângulo de lados 4 e 2 em torno do $\mathrm{eixo\ y}$. Isto é, o cilindro terá raio da base 2 e altura 4, portanto, volume $16\pi\mathrm{(pi)}$. Veja que $\mathrm{V_2 + V_3} = 16\pi\mathrm{(pi)}$.

Foi visto o volume gerado por uma área definida por uma função, mas caso se deseje volume gerado por áreas entre funções, pode-se usar o conceito de um volume menos o outro, aplicando-se as fórmulas aqui apresentadas para calcular o volume individual para cada função.

Vamos a mais um exemplo:

Determine o volume gerado pela rotação, em torno do $\mathrm{eixo\ x}$, da área entre as funções $\mathrm{f(x) = x}$ e $\mathrm{g(x) = x^2}$ para $0 \leq \mathrm{x} \leq 1$

Solução:

Para este intervalo, a função $\mathrm{f(x)}$ sempre estará acima da função $\mathrm{g(x)}$. Portanto, podemos enxergar este volume gerado como a diferença entre o volume gerado pela rotação da área de $\mathrm{f(x)}$, com o $\mathrm{eixo\ x}$, e o volume gerado pela rotação da área gerada por $\mathrm{g(x)}$ com o $\mathrm{eixo\ x}$.

Assim:

Portanto,

Mão na massa

Questão 1

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do $\mathrm{eixo\ x}$, do conjunto de pontos formados pela função $\mathrm{f(x)} = 2\sqrt{\mathrm{x}}$ e o $\mathrm{eixo\ x}$, para $0 \leq \mathrm{x} \leq 1$.

A 1

B $2\,\pi(\mathrm{pi})$

C $3\,\pi(\mathrm{pi})$

D $4\,\pi(\mathrm{pi})$

E 0

Parabéns! A alternativa B está correta.

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo A em torno do $\mathrm{eixo\ x}$.

Assim,

Questão 2

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de pontos formados pela função $f(x) = 25\ ^{3}$ e o eixo x, para $0 \leq x \leq 3$.

A $200\ \pi(\text{pi})$

B $243\ \pi(\text{pi})$

C $2000\ \pi(\text{pi})$

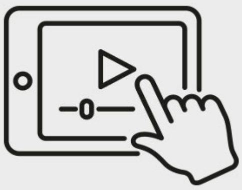
D $2430\ \pi(\text{pi})$

E $234\ \pi(\text{pi})$

Parabéns! A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre Cálculo de volume de sólido de revolução.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Questão 3

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $f(x) = {}^{5}\sqrt{x}$ e o eixo y, para $0 \leq x \leq 1$.

A $\pi(\text{pi}) \div 6$

B $\pi(\text{pi}) \div 7$

C $2\pi(\mathrm{pi}) \div 7$

D $\pi(\mathrm{pi}) \div 2$

E $2\pi \div 6$

Parabéns! A alternativa C está correta.

Nessa questão, queremos o volume do sólido gerado por uma área do tipo B em torno do $\mathrm{eixo}\ \mathrm{x}$.

Assim:

Questão 4

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da área existente entre as funções $g(x) = 8\sqrt{x}$ e $h(x) = x^2$, para $0 \leq x \leq 2$.

A $16\pi(\mathrm{pi}) \div 5$

B $62\pi(\mathrm{pi}) \div 5$

C $128\pi(\mathrm{pi}) \div 5$

D $608\pi(\mathrm{pi}) \div 5$

E $32\pi(\mathrm{pi}) \div 5$

Parabéns! A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre cálculo de volume de sólido de revolução.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Questão 5

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do $\mathrm{eixo\ y}$, do conjunto de pontos formados pela função $\mathrm{f(x) = 2\ arccos\ x}$ e o $\mathrm{eixo\ y}$, para $0 \leq \mathrm{x} \leq 1$.

A $(\mathrm{pi})\pi^2 \div 2$

B $(\mathrm{pi})\pi^2 \div 4$

C $2(\mathrm{pi})\pi^2$

D $(\mathrm{pi})\pi^2$

E $3(\mathrm{pi})\pi^2$

Parabéns! A alternativa A está correta.

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo B em torno do $\mathrm{eixo\ y}$.

Necessitamos da função $\mathrm{g(y) = f^{-1}(x)}$.

Se $\mathrm{f(x) = 2\ arccos\ x \rightarrow g(y) = \cos\left({}^{y}/_{2}\right)}$

Para

$x = 0 \rightarrow f(0) = c = \pi(\text{pi})$ e $x = 1 \rightarrow f(1) = d = 0$

Observe que a função $f(x) = 2 \operatorname{arccos}(x)$ é decrescente, assim gerou um $d < c$.

Assim:

Usando a relação

$\cos^2(½) = ½ \cos y + ½$

Assim:

Questão 6

O volume do sólido gerado pela rotação, em torno do $\text{eixo } x$, do conjunto de pontos formados pela função $f(x) = k \ln x$ e o $\text{eixo } y$, para $1 \leq x \leq e$, vale $8\pi(\text{pi})$. Determine o valor de k real positivo.

A 1

B 2

C $½$

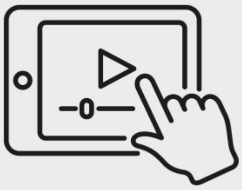
D $¼$

E $⅛$

Parabéns! A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre cálculo de volume de sólido de revolução.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Teoria na prática

Determine a fórmula do volume de um elipsoide gerado pela rotação de uma semielipse de $\text{eixo maior } 2a$ e $\text{eixo menor } 2b$. Com a e b reais positivos.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $f(x) = 2e^x$ e o eixo x, para $0 \leq x \leq 2$.

A

B

C

D

E

Parabéns! A alternativa B está correta.

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo A em torno do eixo x.

Assim,

Questão 2

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $\mathrm{f(x) = x^2 + 1}$ e o eixo y, para $0 \leq \mathrm{x} \leq 1$.

A

B

C

D

E

Parabéns! A alternativa C está correta.

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo B em torno do eixo x.

Necessitamos da função $\mathrm{g(y) = f^{-1}(x)}$.

Se $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow g(y) = \sqrt{(y-1)}$.

Para $x = 0 \rightarrow f(0) = c = 1$ e $x = 1 \rightarrow f(1) = d = 2$

Assim:

Resolver a integral por substituição $u = y - 1 \rightarrow du = dy$

Para $y = 1 \rightarrow u = 0$ e $y = 2 \rightarrow u = 1$

Considerações finais

Ao longo deste tema, foi utilizado a integração definida de uma função real na aplicação de cálculos de comprimentos, áreas e volumes.

No primeiro módulo, empregamos a integral na determinação do comprimento do arco de um gráfico de uma função. No segundo, a integral foi usada para calcular áreas entre uma função e o eixo x, entre funções e até mesmo de superfícies de revolução. Por fim, no último módulo, a integração foi aplicada no cálculo de quatro superfícies diferentes de revolução.

Explore +

Para saber mais sobre os assuntos tratados neste tema, pesquise na internet sobre aplicação de integração.

Referências

GUIDORIZZI, H. L. **Cálculo**, Volume 1. 5. ed. São Paulo: LTC, 2013. cap. 13, p. 400-416.

HALLET, H. *et al*. **Cálculo, a uma e a várias variáveis**. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011. cap. 8, p.353-374.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. **Cálculo, com aplicações**. 6. ed. São Paulo: LTC, 2003. cap. 5, p.359-378.

STEWART, J. **Cálculo**, Volume 1. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008. cap. 6, p. 434-457, cap. 8, p. 542-556.

THOMAS, G. B. **Cálculo**, Volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. cap. 6, p. 351-380.

Material para download

Clique no botão abaixo para fazer o download do conteúdo completo em formato PDF.

Download material

O que você achou do conteúdo?

Relatar problema