



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO

UM ESTUDO SOBRE A TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

FORTALEZA – CEARÁ

2023

CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO

UM ESTUDO SOBRE A TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Matemática do Centro
de Ciências e Tecnologia da Universidade
Estadual do Ceará, como requisito parcial à ob-
tenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino
Leandro

FORTALEZA – CEARÁ

2023

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	–	Representação do intervalo $(-\infty, x)$ na reta real	8
Figura 2	–	Representação de uma decomposição do intervalo $(-\infty, x)$ na reta real	.	9
Figura 3	–	Gráfico da Função $f(x) = \frac{ x }{x}$	16
Figura 4	–	representação do truncamento f_2 da função $f(x) = x^2 - 2$	22

SUMÁRIO

1	TEORIA DA MEDIDA	4
1.1	Conjuntos Mensuráveis	4
1.2	Funções Mensuráveis	10
1.3	Os Espaços de Funções Mensuráveis	17
1.4	Espaços de Medida	24
	REFERÊNCIAS	31

1 TEORIA DA MEDIDA

Nesta seção é apresentada a teoria medida em sua forma mais elementar. As definições e conceitos foram todas baseadas em (LIMA, 2019), (BARTLE, 1995) e (MAGALHAES, 2011).

1.1 Conjuntos Mensuráveis

Nesta seção dedicaremos nosso estudo à entender a Teoria da Medida e da Integração de uma forma mais abrangente. Para tal, o conceito de \mathcal{C} -álgebra é extremamente necessário. Assim, segundo (BARTLE, 1995), temos a

Definição 1.1.1 *Seja X um conjunto não vazio. Uma família \mathcal{C} de subconjuntos de X é dita uma σ -álgebra se as seguintes condições são atendidas:*

- (i) \emptyset e X são elementos de \mathcal{C} ;
- (ii) Se um elemento $A \in \mathcal{C}$, então $A^c \in \mathcal{C}$ ¹;
- (iii) Se (A_n) é uma sequência de elementos de \mathcal{C} , então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$.

Um par ordenado (X, \mathcal{C}) constituído de um conjunto X e uma σ -álgebra sobre X é chamado de **espaço mensurável**. Além disso, cada elemento deste espaço é chamado de conjunto \mathcal{C} -mensurável. Quando não houver confusão ou quando a σ -álgebra estiver fixada, dizemos simplesmente que cada elemento é um conjunto mensurável.

Observação 1.1.1 *Em todo o texto, indicaremos por I_n o conjunto dos n primeiros números naturais. Assim, $I_n = \{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n\}$.*

Proposição 1.1.1 *Seja \mathcal{C} uma σ -álgebra de um conjunto X . Se A_1, \dots, A_n são todos elementos quaisquer de \mathcal{C} , então $\bigcup_{j=1}^n A_j$ é um elemento de \mathcal{C} .*

Demonstração.

Seja A_1, \dots, A_n elementos de \mathcal{C} . Construa uma sequência (B_n) tal que $B_j = A_j$ para todo $j \in I_n$ e $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$. Desta forma, pelo item (iii) da definição de σ -álgebra, temos que $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^n A_j$. Como $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{C}$ segue que $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{C}$.

□

¹ Em todo o texto, X^c significa o complementar do conjunto X .

Exemplo 1.1.1 Seja $X = \{-1, 0, 1\}$. Se considerarmos $\mathcal{C} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{-1, 1\}\}$, temos que (X, \mathcal{C}) é um espaço mensurável.

Exemplo 1.1.2 Seja X um conjunto qualquer. O conjunto $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, X\}$ é uma σ -álgebra de X . De fato, podemos observar que, neste exemplo, todas as condições impostas na definição 1.1.1 são atendidas de maneira trivial, pois \emptyset e X são todos os elementos de \mathcal{C}_1 . Assim, (X, \mathcal{C}_1) é um espaço mensurável.

Perceba que a definição 1.1.1 não nos diz que uma σ -álgebra de um conjunto é única. Realmente, não é. Assim, um conjunto pode gerar espaços mensuráveis diferentes a depender da σ -álgebra adotada. Para evidenciar essa percepção, observe o exemplo a seguir:

Exemplo 1.1.3 Seja X dado de maneira arbitrária conforme o exemplo anterior. Considere, agora, o conjunto $\mathcal{C}_2 = \{A; A \subset X\}$, ou seja, o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto X .² Sabemos que $\emptyset \subset X$ e $X \subset X$. Assim, $\emptyset, X \in \mathcal{C}_2$. Se tomarmos um conjunto $A \in \mathcal{C}_2$, então $A^c = X - A$ por definição. Ou seja, A^c é formado por elementos que estão todos em X caracterizando-o um elemento de \mathcal{C}_2 . Da mesma forma, se tomarmos uma sequência (A_j) de elementos de \mathcal{C}_2 , a reunião $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ é composta por elementos de X . Logo, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}_2$. Com isso, \mathcal{C}_2 também é uma σ -álgebra de X e o par (X, \mathcal{C}_2) é um espaço mensurável que, por sua vez, é diferente do espaço (X, \mathcal{C}_1) .

Os exemplos apresentados acima são todos de conjuntos que são uma σ -álgebra de um conjunto X arbitrário. Por definição, o conjunto \mathcal{C} é composto de subconjuntos do conjunto X . Será que se construirmos Z um conjunto que contenha \emptyset e X e outros subconjuntos do conjunto X tomados aleatoriamente teremos (X, Z) um espaço mensurável? A resposta é negativa conforme o exemplo seguinte.

Contraexemplo 1.1.1 Seja $X = \{x, y, z\}$. O conjunto $\mathcal{C} = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ não é uma σ -álgebra de X . Sem dúvida, $\emptyset, X \in \mathcal{C}$. Entretanto, perceba que $\{x\} \in \mathcal{C}$, mas $\{x\}^c \notin \mathcal{C}$. De fato, $\{x\}^c = \{x, y, z\} - \{x\} = \{y, z\}$ e $\{y, z\} \notin \mathcal{C}$. Assim, a segunda condição da definição 1.1.1 não é satisfeita impossibilitando que \mathcal{C} seja uma σ -álgebra de X .

Por vezes, em matemática, é interessante conseguirmos construir algum conjunto que contenha uma propriedade que desejamos. A proposição a seguir nos mostra como podemos fazer isso para criar uma σ -álgebra em um conjunto.

² Também chamado de conjunto das partes de X e, as vezes, representado por $\mathcal{P}(X)$.

Proposição 1.1.2 *Seja X e A dois conjuntos quaisquer com $A \neq \emptyset$. Se $A \subset X$, então o conjunto $\mathcal{C} = \{\emptyset, X, A, A^c\}$ é uma σ -álgebra de X .*

Demonstração.

Perceba que as condições (i) e (ii) da definição 1.1.1 são satisfeitas pela forma que o conjunto \mathcal{C} foi construído. Para verificar a última condição, basta perceber $A \cup A^c = X$. Assim, as sequências construídas terão comportamento análogo as do exemplo 1.1.3. Portanto, \mathcal{C} é uma σ -álgebra de X para qualquer que seja $\emptyset \neq A \subset X$.

□

Exemplo 1.1.4 *Considere $X = \mathbb{N}$. Sejam $P = \{2k; k \in \mathbb{N}\}$ e $I = \{2k - 1; k \in \mathbb{N}\}$. Como $P^c = I$, então $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathbb{N}, P, I\}$ é uma σ -álgebra de \mathbb{N} pela proposição anterior.*

Observe que o conjunto A que apresentamos na proposição 1.1.2 é um subconjunto não vazio do conjunto X que fora tomado arbitrariamente.³ Uma pergunta intuitiva é: se tomarmos um conjunto A que não é subconjunto de X o espaço (X, \mathcal{C}) continua sendo mensurável? A resposta é não. Se o conjunto A não for subconjunto de X não temos como garantir a validade da condição (ii) da definição 1.1.1, pois A^c não necessariamente é subconjunto de X o que não permitiria os argumentos usados anteriormente na proposição 1.1.2. Dito isso, note que a definição 1.1.1 e a proposição 1.1.1 tratam apenas da união enumerável ou finita, respectivamente. A partir de agora investigaremos propriedades voltadas a interseção entre conjuntos mensuráveis.

Proposição 1.1.3 *Seja X um conjunto e \mathcal{C} uma σ -álgebra desse conjunto. Se (A_j) é uma sequência de conjuntos \mathcal{C} -mensuráveis, então $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ é um elemento \mathcal{C} -mensurável.*

Demonstração.

Se $A_j \in \mathcal{C}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então cada complementar $A_j^c \in \mathcal{C}$, pois \mathcal{C} é σ -álgebra. Assim, (A_j^c) forma uma sequência de conjuntos \mathcal{C} -mensuráveis acarretando que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \in \mathcal{C}$. Segue, pelas *Leis de Morgan*, que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c$$

Logo, $\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c \in \mathcal{C}$ o que implica $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$. Portanto, $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ é um conjunto \mathcal{C} -mensurável.

³ Observe que se $A = \emptyset$, a σ -álgebra é a mesma do exemplo 1.1.2.

□

Considere a σ -álgebra apresentada na proposição 1.1.2. Qualquer outra σ -álgebra \mathcal{F} que tiver A como elemento, conterá \mathcal{C} . Assim, observamos que

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\mathcal{F} \supset A} \mathcal{F}.$$

Esta σ -álgebra \mathcal{C} definimos como a *menor* σ -álgebra gerada por A .⁴ Sabendo que a menor σ -álgebra é gerada por meio de intersecção é natural o seguinte questionamento: a intersecção entre σ -álgebras ainda é uma σ -álgebra? Para responder à esta pergunta temos a proposição adiante.

Proposição 1.1.4 *Se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são duas σ -álgebras de um conjunto X , então $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ também é uma σ -álgebra do conjunto X .*

Demonstração.

Se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são σ -álgebras de X , então ambos possuem \emptyset e X como elementos. Assim, \emptyset e X estão na intersecção \mathcal{C} . Além disso, se $A \in \mathcal{C}$, então $A \in \mathcal{C}_1$ e $A \in \mathcal{C}_2$. Por serem ambas σ -álgebras, $A^c \in \mathcal{C}_1$ e $A^c \in \mathcal{C}_2$. Ou seja, $A^c \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$. Por fim, se tomarmos uma sequência (A_n) de elementos de \mathcal{C} , observamos que $A_j \in \mathcal{C}_1$ e $A_j \in \mathcal{C}_2$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Assim, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}_1$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}_2$ pela definição de σ -álgebra. Logo, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$. Com isso, \mathcal{C} satisfaz todas as condições da definição 1.1.1. Portanto, \mathcal{C} é uma σ -álgebra de X .

□

Proposição 1.1.5 *Seja (\mathcal{C}_j) uma sequência finita de σ -álgebras de um conjunto X , então $\mathcal{C} = \bigcap_{j=1}^n \mathcal{C}_j$, com $n \geq 2$, também é uma σ -álgebra do conjunto X .*

Demonstração.

Provaremos esse resultado utilizando o método da indução finita sobre n . Se $n = 2$, o resultado é verificado imediatamente pela proposição 1.1.4. Suponha que se verifique para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é, $\bigcap_{j=1}^k \mathcal{C}_j$ é uma σ -álgebra de X . Vamos checar para o sucessor de k . Ora, pela associatividade da intersecção, vemos que

$$\bigcap_{j=1}^{k+1} \mathcal{C}_j = \left(\bigcap_{j=1}^k \mathcal{C}_j \right) \cap \mathcal{C}_{k+1}.$$

⁴ Lembre que a noção de “menor” aqui é trazida por meio da relação de ordem parcial gerada pela relação de inclusão entre conjuntos.

Denote $\bigcap_{j=1}^k \mathcal{C}_j = H$. Sabemos por hipótese de indução que H e \mathcal{C}_{k+1} são σ -álgebras de X . Segue, pela base de indução, que $H \cap \mathcal{C}_{k+1}$ é uma σ -álgebra de X . Portanto, $\bigcap_{j=1}^{k+1} \mathcal{C}_j$ é uma σ -álgebra de X como queríamos.

□

Note que há uma diferença gritante entre as proposições 1.1.3 e 1.1.4. A primeira trata de conjuntos mensuráveis de uma σ -álgebra e a outra refere-se à σ -álgebras de um conjunto X . Além disso, perceba que até aqui trabalhamos o conceito de σ -álgebra de maneira abstrata sendo utilizada em um conjunto qualquer. Trataremos, agora, de uma σ -álgebra extremamente importante e específica para o conjunto \mathbb{R} dos números reais.

Definição 1.1.2 *Seja $X = \mathbb{R}$. A Álgebra de Borel é a σ -álgebra \mathcal{B} gerada por todos os intervalos abertos $(-\infty, x)$ com $x \in \mathbb{R}$. Os elementos dessa σ -álgebra são chamados de Borelianos.*

Esta σ -álgebra é extremamente importante para os estudos de medida e integração e pode ser definida de várias formas diferentes, todas equivalentes. Isso quer dizer que $(-\infty, x)$ não é a única forma dos elementos de \mathcal{B} . De fato, se $(-\infty, x) \in \mathcal{B}$, então $(-\infty, x)^c \in \mathcal{B}$ só que $(-\infty, x)^c = [x, +\infty)$. Assim, poderíamos definir \mathcal{B} por meio de intervalos do tipo $[x, +\infty)$. Em particular, poderíamos ter definido a \mathcal{B} por meio da σ -álgebra gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$. Antes de provamos este fato, observe que podemos decompor intervalos reais como a união de outros intervalos. Por exemplo, utilizando a reta real, podemos representar intervalo $(-\infty, x)$ da seguinte maneira

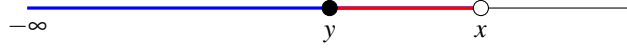
Figura 1 – Representação do intervalo $(-\infty, x)$ na reta real



Fonte: Elaborado pelo autor

Se tomarmos um $y \in \mathbb{R}$, com $y < x$, então podemos decompor o intervalo $(-\infty, x)$ por meio da união dos intervalos $(-\infty, y]$ e (y, x) , onde estão representados na figura a seguir pelas cores azul e vermelha respectivamente.

Figura 2 – Representação de uma decomposição do intervalo $(-\infty, x)$ na reta real



Fonte: Elaborado pelo autor

É por meio dessa observação que conseguimos finalmente mostrar a equivalência adiante

Teorema 1.1.1 *Uma σ -álgebra é uma de Borel se, e somente se, é gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.*

Demonstração.

Suponha que $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ é um espaço mensurável. Sejam a e b números reais, com $a < b$. Como $a - \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $(-\infty, a - \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Segue pela proposição 1.1.3 que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a - \frac{1}{n}) \in \mathcal{C}$. Afirmamos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, a - \frac{1}{n}) = (-\infty, a]$. De fato,

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right) &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x < a - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a - \frac{1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow x \leq a \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, a] \end{aligned}$$

Logo, $(-\infty, a] \in \mathcal{B}$ acarretando que $(a, +\infty) = (-\infty, a]^c \in \mathcal{B}$. Observe que, conforme dito anteriormente, $(-\infty, b) = (-\infty, a] \cup (a, b)$ enquanto que $(a, +\infty) = (a, b) \cup [b, +\infty)$. Logo, $(-\infty, b) \cap (a, +\infty) = (a, b)$. Como $(-\infty, b)$ e $(a, +\infty)$ são elementos de \mathcal{B} , segue pela proposição 1.1.3 que $(a, b) \in \mathcal{B}$. Com isso, \mathcal{B} pode ser gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.

Suponha, reciprocamente, que \mathcal{C} é uma σ -álgebra de \mathbb{R} que é gerada, por intervalos do tipo (a, b) onde $a, b \in \mathbb{R}$. Assim, os conjuntos $A_n = (-n, b)$ são todos elementos de \mathcal{C} para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Segue, pela definição 1.1.1, que $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, b) \in \mathcal{C}$. Só que $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, b) = (-\infty, b)$. Com isso, os elementos de \mathcal{C} são do tipo $(-\infty, x)$. Portanto, $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.



1.2 Funções Mensuráveis

Agora que já estamos familiarizados com o conceito de conjunto mensurável, nada mais natural que estender este conceito às funções. Trabalharemos apenas com funções de uma variável real, por enquanto. Além disso, a partir de agora, fixemos que quando não houver menção contrária, que X será um conjunto qualquer diferente de \emptyset e \mathcal{C} será uma σ -álgebra desse conjunto.

Definição 1.2.1 Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita \mathcal{C} -mensurável se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$.

Exemplo 1.2.1 (Função Constante) Seja $K \in \mathbb{R}$ um número fixado. A função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = K$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é \mathcal{C} -mensurável. Para mostrarmos este fato, precisamos analisar os casos de α .

- (I) Se $\alpha \geq K$, então o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \emptyset$ uma vez que não existe $x \in X$ tal que $K = f(x) > \alpha$.
- (II) Se $\alpha < K$, então o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = X$, pois todo $f(x) > \alpha$, $\forall x \in X$.

Em todo caso, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$. Portanto, a função constante f é \mathcal{C} -mensurável.

Exemplo 1.2.2 (Função Característica) Seja (X, \mathcal{C}) um espaço mensurável e $A \in \mathcal{C}$. Chamamos de função característica⁵ a função $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Para verificar se χ_A é \mathcal{C} -mensurável precisamos, novamente, analisar os casos de $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (I) Se $\alpha \geq 1$, observamos que $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = \emptyset$, pois não há $x \in X$ tal que $\chi_A(x) > 1$.
- (II) Se $0 < \alpha < 1$, então o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = A$, pois apenas valores $x \in A$ tem suas imagens $\chi_A(x) = 1$ e consequentemente $\chi_A(x) \geq \alpha$.
- (III) se $\alpha \leq 0$, podemos notar que o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = X$, pois para qualquer que seja $x \in X$, os valores $\chi_A(x) \geq 0$.

Em todo o caso, vemos que o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\}$ é um elemento de \mathcal{C} , pois \emptyset, X e A são elementos de \mathcal{C} . Portanto, a função característica $\chi_A(x)$ é \mathcal{C} -mensurável.

⁵ As vezes também é chamada função indicadora.

Exemplo 1.2.3 Considere o espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua é Borel mensurável.

Para mostrar a validade do exemplo, (LIMA, 2019, p.226) mostra um resultado que nos auxilia

Proposição 1.2.1 Suponha que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua em todos os pontos de X . Se $X \subset \mathbb{R}$ é um aberto, então o conjunto $A = \{a \in X; f(a) > k\}$ é um aberto.

Assim, como \mathbb{R} é um conjunto aberto, então $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é um conjunto aberto. Mas, segundo (LIMA, 2019, p.167), temos o seguinte teorema

Teorema 1.2.1 (Estrutura de abertos da reta) Todo subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ se exprime, de modo único, como um reunião enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos.

Segue, então que $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_n$ onde cada A_n é um intervalo aberto, ou seja $A_n \in \mathcal{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, pela definição 1.1.1, $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}$. Portanto, qualquer função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é Borel mensurável.

Lembre que ao apresentarmos a Álgebra de Borel (definição 1.1.2), também mostramos no teorema 1.1.1 que há mais de uma maneira de definir os borelianos. Para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{C} -mensurável, também podemos definir uma função \mathcal{C} -mensurável por meio de conjuntos diferentes conforme o seguinte teorema.

Teorema 1.2.2 Sendo (X, \mathcal{C}) um espaço mensurável, para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, A_\alpha = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C};$ (c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, C_\alpha = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{C};$
 (b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, B_\alpha = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{C};$ (d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, D_\alpha = \{x \in X; f(x) < \alpha\} \in \mathcal{C}.$

Demonstração.

Dividiremos esta demonstração em três partes. A estratégia será mostrar que a afirmação (a) é equivalente à afirmação (b); depois que a afirmação (c) é equivalente à afirmação (d); e por fim que a afirmação (a) ocorre se, e somente se, a afirmação (c) ocorre.

(I) Suponha a validade da afirmação (a). Se $A_\alpha \in \mathcal{C}$, então $A_\alpha^c \in \mathcal{C}$, pela definição de \mathcal{C} -álgebra. Perceba que

$$x \in A_\alpha^c \Leftrightarrow x \notin A_\alpha \Leftrightarrow x \in X \text{ e } f(x) \leq \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in B_\alpha$$

Assim, um elemento está em A_α^c se, e somente se, está em B_α . Segue que $A_\alpha^c = B_\alpha$. Logo, B_α é elemento de \mathcal{C} .

- (II) Para mostrar a equivalência entre as afirmações (c) e (d) utilizamos um argumento totalmente análogo à parte (I), pois se $x \notin C_\alpha$, então $f(x) < \alpha$ acarretando que $x \in D_\alpha$ e vice-versa.
- (III) Suponha que $A_\alpha \in \mathcal{C}$. Tome a sequência $(A_{\alpha - \frac{1}{n}})$. Claramente, cada $A_{\alpha - \frac{1}{n}}$ é um elemento de \mathcal{C} por definição. Logo, pela proposição 1.1.3, a interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in \mathcal{C}$. Além disso, note que

$$\begin{aligned}
 x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} &\Leftrightarrow x \in A_{\alpha - \frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N} \\
 &\Leftrightarrow f(x) > \alpha - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \\
 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha - \frac{1}{n} \right) \\
 &\Leftrightarrow f(x) \geq \alpha \\
 &\Leftrightarrow x \in C_\alpha
 \end{aligned}$$

Desta forma, $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}}$. Logo $C_\alpha \in \mathcal{C}$ como queríamos.

Reciprocamente, suponha que $C_\alpha \in \mathcal{C}$. Tomemos a sequência $(C_{\alpha + \frac{1}{n}})$. Cada elemento $C_{\alpha + \frac{1}{n}} \in \mathcal{C}$ por definição. Assim, pela definição de σ -álgebra, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}} \in \mathcal{C}$. Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
 x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}} &\Leftrightarrow x \in C_{\alpha + \frac{1}{n_0}}, \text{ para algum } n_0 \in \mathbb{N} \\
 &\Leftrightarrow f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n_0} \\
 &\Leftrightarrow f(x) > \alpha \\
 &\Leftrightarrow x \in A_\alpha
 \end{aligned}$$

Assim, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}} = A_\alpha$. Logo, $A_\alpha \in \mathcal{C}$. Portanto, segue de (I), (II) e (III) que as afirmações (a), (b), (c) e (d) são todas equivalentes.

□

Perceba que mesmo na presença do teorema 1.2.2 acima mostrar que uma função é mensurável é trabalhoso e repetitivo uma vez que, geralmente, é preciso verificar os casos de α . Com o intuito de otimizar a identificação de uma função mensurável, veremos o comportamento de operações aritméticas entre funções mensuráveis.

Proposição 1.2.2 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real \mathcal{C} -mensurável e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções cf , f^2 e $|f|$ são \mathcal{C} -mensuráveis.*

Demonstração.

(a) Mostraremos que cf é \mathcal{C} -mensurável para todos os casos possíveis do número real $c \in \mathbb{R}$.

(i) Se $c = 0$, então $c \cdot f(x) = 0$, $\forall x \in X$, ou seja, cf se torna a função constante. Segue pelo exemplo 1.2.1 que cf é \mathcal{C} -mensurável.

(ii) Se $c > 0$, então dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $cf(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \frac{\alpha}{c}$. Logo,

$$\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\}$$

Isso ocorre para todo α e f é \mathcal{C} -mensurável, isto é, $\left\{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\} \in \mathcal{C}$. Logo, cf é \mathcal{C} -mensurável.

(iii) Por fim, se $c < 0$, então existe um $z \in \mathbb{R}$ tal que $c = -z$. Assim,

$$cf(x) > \alpha \Leftrightarrow -zf(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x) < -\frac{\alpha}{z}$$

Assim, o conjunto $\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) < -\frac{\alpha}{z}\right\}$. Desta forma, o conjunto $\left\{x \in X; f(x) < -\frac{\alpha}{z}\right\} \in \mathcal{C}$ pelo item (d) do teorema 1.2.2. Portanto, cf é \mathcal{C} -mensurável.

(b) Para mostrar a mensurabilidade de f^2 é também necessário analisar os casos de α .

(i) Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} = X$ pois $[f(x)]^2 \geq 0$ para todo $x \in X$.

(ii) Se $\alpha \geq 0$, então para todo $x \in X$ $[f(x)]^2 > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \pm\sqrt{\alpha}$. Assim, um elemento $x_0 \in \{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\}$ se, e somente se, $x_0 \in \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\}$ ou $x_0 \in \{x \in X; f(x) > -\sqrt{\alpha}\}$. Com isso,

$$\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) > -\sqrt{\alpha}\}$$

Como f é \mathcal{C} -mensurável por hipótese, temos que $\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \in \mathcal{C}$ e $\{x \in X; f(x) > -\sqrt{\alpha}\} \in \mathcal{C}$. Desta forma, usando a definição de σ -álgebra, obtemos que $\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) > -\sqrt{\alpha}\} \in \mathcal{C}$. Consequentemente, $\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} \in \mathcal{C}$ acarretando a mensurabilidade de f^2 .

(c) Analogamente ao item anterior, se $\alpha < 0$, $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = X$. Por outro lado, se $\alpha \geq 0$, vemos que $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X; f(x) > -\alpha\}$. Assim, a mensurabilidade de f acarreta na mensurabilidade de $|f|$ como desejávamos.

□

Exemplo 1.2.4 (Função Afim) *Seja a um número real diferente de zero. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ é \mathcal{B} -mensurável. De fato, pelo exemplo 1.2.3 a função x é \mathcal{B} -mensurável, pois é contínua em \mathbb{R} . Segue pela proposição 1.2.2 que a função ax também é \mathcal{B} -mensurável.*

Da maneira análoga, as funções $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(x) = x^2$ e $h(x) = |x|$ são \mathcal{B} -mensuráveis. A seguir veremos a mensurabilidade de combinações de funções mensuráveis.

Proposição 1.2.3 *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se f e g são ambas \mathcal{C} -mensuráveis, então as funções $f + g$ e $f \cdot g$ são também \mathcal{C} -mensuráveis.*

Demonstração.

Provaremos, primeiramente, que $f + g$ é \mathcal{C} -mensurável. Ora, por hipótese, f e g são \mathcal{C} -mensuráveis. Assim, dado $r \in \mathbb{Q}$, os conjuntos $\{x \in X; f(x) > r\}$ e $\{x \in X; g(x) > \alpha - r\}$ são ambos elementos de \mathcal{C} . Considere o conjunto

$$H_r = \{x \in X; f(x) > r\} \cap \{x \in X; g(x) > \alpha - r\}$$

Isto é, o conjunto dos elementos $x \in X$ tal que $f(x) > r$ e $g(x) > \alpha - r$ simultaneamente. Assim, afirmamos que $\{x \in X; (f + g)(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} H_r$. Com efeito, as seguintes equivalências ocorrem para um elemento $a \in X$ tomado arbitrariamente

$$\begin{aligned} a \in \{x \in X; (f + g)(x) > \alpha\} &\Leftrightarrow (f + g)(a) > \alpha \\ &\Leftrightarrow f(a) + g(a) > \alpha \\ &\Leftrightarrow f(a) + g(a) > \alpha - r + r \text{ para } r \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow f(a) > r \text{ e } g(a) > \alpha - r \text{ para } r \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) > r\} \text{ e } a \in \{x \in X; f(x) > \alpha - r\} \text{ para } r \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) > r\} \cap \{x \in X; f(x) > \alpha - r\} \text{ para } r \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow a \in H_r, \text{ para } r \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} H_r \end{aligned}$$

Concluindo que a afirmação é verdadeira. Além disso, para cada $r \in \mathbb{Q}$, o conjunto H_r é um elemento de \mathcal{C} , pois é a interseção de dois elementos de \mathcal{C} (proposição 1.1.3). Note também

que, pela definição de \mathcal{C} , a coleção $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} H_r$ é um elemento de \mathcal{C} , pois \mathbb{Q} é enumerável. Segue que $f + g$ é \mathcal{C} -mensurável.

Para mostrar que fg é mensurável basta notar que é a combinação de outras funções \mathcal{C} -mensuráveis. De fato, dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} 4(fg)(x) &= 2(fg)(x) + 2(fg)(x) \\ &= [f(x)]^2 - [f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2 - [g(x)]^2 + 2f(x)g(x) \\ &= ([f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2) - ([g(x)]^2 - 2f(x)g(x) + [f(x)]^2) \\ &= (f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2 \\ &= [(f + g)(x)]^2 - [(f - g)(x)]^2 \end{aligned}$$

Desta maneira, $fg = \frac{1}{4} [(f + g)^2 - (f - g)^2]$. Segue pela proposição 1.2.2 e a primeira parte desta demonstração que fg é \mathcal{C} -mensurável.

□

Exemplo 1.2.5 (Função Polinomial) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ com cada $a_j \in \mathbb{R}$ é \mathcal{B} -mensurável.

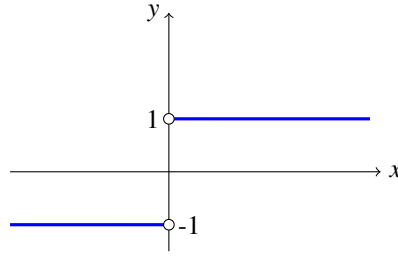
Com efeito, note que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Pelo exemplo 1.2.4 cada função $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_j(x) = a_j x^j$ é \mathcal{B} -mensurável. Além disso, pela proposição 1.2.3 a soma de funções mensuráveis é mensurável. Segue que $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ é uma função \mathcal{B} -mensurável.

Definição 1.2.2 Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que a **parte positiva** da função f é a função $f^+ : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}$. Semelhantemente, chamamos de a **parte negativa** da função f , a função $f^- : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$.

Exemplo 1.2.6 Seja $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Se tomarmos, $x < 0$, vemos que $f(x) < 0$ sendo $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$. Se $x > 0$, então $f(x) = \frac{x}{x} = 1$. Assim, $f^+ = \sup\{f(x), 0\} = 1$ enquanto que $f^- = \sup\{-f(x), 0\} = -1$.

Neste caso, tanto a parte positiva quanto a parte negativa da função f acima apresentada são funções constantes conforme está representado na imagem a seguir.

Figura 3 – Gráfico da Função $f(x) = \frac{|x|}{x}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Por serem constantes, já vimos que são mensuráveis. Mas e a função $f(x) = \frac{|x|}{x}$? Será que é mensurável? A resposta é sim e para mostrarmos isso precisaremos de alguns resultados auxiliares.

Lema 1.2.1 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Então $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.*

Demonstração.

Para provar que $f = f^+ - f^-$, devemos avaliar os casos de $f(x)$. Logo, se $f(x) \geq 0$, então $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} = f(x)$ e $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\} = 0$, pois $f(x) \geq 0 \Rightarrow -f(x) \leq 0$. Disso, $f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x)$, ou seja, $(f^+ - f^-)(x) = f(x)$, $\forall x \in X$. Caso $f(x) < 0$, então $-f(x) > 0$. Com isso, $\sup\{f(x), 0\} = 0$ e $\sup\{-f(x), 0\} = -f(x)$. Desta forma vemos que $f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x)$. Em todo caso, $f = f^+ - f^-$.

Analogamente, se $f(x) \geq 0$, então $\sup\{f(x), 0\} = f(x)$ e $\sup\{-f(x), 0\} = 0$. Assim, $f^+(x) + f^-(x) = f(x)$. Caso, $f(x) < 0$, então $-f(x) > 0$. Com isso, obtemos $\sup\{f(x), 0\} = 0$ e $\sup\{-f(x), 0\} = -f(x)$. Logo, $f^+(x) + f^-(x) = -f(x)$. Desta forma,

$$(f^+ + f^-)(x) = \max\{f(x), -f(x)\} = |f(x)|.$$

Portanto, $f^+ + f^- = |f|$.

□

Observe que o lema 1.2.1 nos dá a forma das funções f^+ e f^- de maneira implícita. De fato, somando as duas expressões membro a membro vemos que

$$f + |f| = (f^+ + f^+) - (f^- + f^-) = 2f^+$$

Assim, podemos expressar $f^+ = \frac{|f| + f}{2}$. De modo semelhante, pode-se subtrair membro a membro e obter a expressão $f^- = \frac{|f| - f}{2}$. Isso demonstra o lema adiante

Lema 1.2.2 *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real, então $f^+ = \frac{|f| + f}{2}$ e $f^- = \frac{|f| - f}{2}$.*

Teorema 1.2.3 *Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{C} -mensurável se, e somente se, suas partes negativa e positiva são ambas \mathcal{C} -mensuráveis.*

Demonstração.

Suponha que f seja \mathcal{C} -mensurável. Pela proposição 1.2.2 vemos que a função $|f|$ é \mathcal{C} -mensurável e pelo lema 1.2.2 as funções $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ e $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ também são \mathcal{C} -mensuráveis. Desta forma, as funções f^+ e f^- são combinações aritméticas de funções \mathcal{C} -mensuráveis. Segue pela proposição 1.2.3 que f^+ e f^- são \mathcal{C} -mensuráveis. Reciprocamente, supondo que f^+ e f^- são mensuráveis, temos pelo lema 1.2.1 que $f = f^+ - f^-$. Segue, novamente pela proposição 1.2.3, que f é \mathcal{C} -mensurável.

□

1.3 Os Espaços de Funções Mensuráveis

Vimos até aqui é como identificar espaços e funções mensuráveis. As vezes, teremos conjuntos "muito grandes" que podem ser medidos, mas sua medida não poderá ser expressa por um número real. Para solucionar este problema, apresentaremos um novo sistema numérico.

Definição 1.3.1 *A coleção $\overline{\mathbb{R}}$ que consiste de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ é chamada de **Sistema Estendido de Números Reais**.*

Este sistema é necessário por vários motivos que serão apresentados ao longo do texto. Um deles, por exemplo, é a conveniência em dizer que o comprimento da Reta Real \mathbb{R} é $+\infty$. Embora estejamos "adicionando" os símbolos $\pm\infty$ à reta real, vale a ressalva de que eles não são números. Com isso, $\overline{\mathbb{R}}$ não é fechado para operações de \mathbb{R} tais como $(+\infty) + (-\infty)$ que nem definido é. Dito isso, para $x \in \mathbb{R}$, as operações dos símbolos $+\infty$ e $-\infty$ são:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty;$
- $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty;$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty;$
- $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty;$
- $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty;$
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty;$
- $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty;$
- $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$

Na multiplicação, dependendo do número real, a operação diferencia-se. Assim, podemos ter

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = \begin{cases} +\infty, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -\infty, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \begin{cases} -\infty, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ +\infty, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Neste novo contexto de números reais a σ -álgebra de Borel não é mais válida uma vez que a definição 1.1.2 não inclui $+\infty$ nem $-\infty$. Com isso, considere $\overline{\mathbb{R}}$. Tomando um conjunto arbitrário $E \in \mathcal{B}$, com $\emptyset \neq E$, defina $E_1 = E \cup \{-\infty\}$, $E_2 = E \cup \{+\infty\}$ e $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$. Desta forma, o conjunto $\overline{\mathcal{B}} = \bigcup_{E \in \mathcal{B}} \{E, E_1, E_2, E_3\}$ é uma σ -álgebra de $\overline{\mathbb{R}}$. Com efeito, se $E \in \mathcal{B}$, então é um intervalo aberto conforme o teorema 1.1.1. Assim, E_1, E_2, E_3 e E_4 serão intervalos do tipo $[-\infty, x)$ ou $(x, +\infty]$ que são elementos de \mathcal{B} acrescidos de $+\infty$ ou $-\infty$. Deste modo, é fácil verificar que se um elemento $A \in \overline{\mathcal{B}}$, então $A^c \in \overline{\mathcal{B}}$. Além disso, a união enumerável é, no máximo, o intervalo $[-\infty, +\infty]$ que é exatamente $\overline{\mathbb{R}}$. Desta forma, $\overline{\mathcal{B}}$ é uma σ -álgebra de $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 1.3.2 A σ -álgebra $\overline{\mathcal{B}} = \bigcup_{E \in \mathcal{B}} \{E, E_1, E_2, E_3\}$ do conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ é chamada de *Álgebra de Borel Estendida*.

Uma vez que estamos familiarizados com os conceitos de funções de valores reais mensuráveis, estamos prontos para estender este conceito para o conjunto $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 1.3.3 Sendo (X, \mathcal{C}) um espaço mensurável, uma função de valores reais estendidos $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é dita \mathcal{C} -mensurável caso o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$ para qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Denotaremos a família de todas as funções de valores reais estendidos de X que são \mathcal{C} -mensuráveis por $M(X, \mathcal{C})$.

Proposição 1.3.1 Se $f \in M(X, \mathcal{C})$, então $\{x \in X; f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\}$.

Demonstração.

Tome, de modo arbitrário, um elemento $a \in X$. Assim,

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\} \Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) > n\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(a) > n$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n$$

$$\Leftrightarrow f(a) \geq +\infty.$$

Como estamos trabalhando com $\overline{\mathbb{R}}$, não existe elemento $x > +\infty$. Logo, o único elemento possível para $f(a)$ é $+\infty$. Assim, tudo isso ocorre se, e somente se, o elemento $a \in \{x \in X; f(x) = +\infty\}$ como queríamos. Além disso, note que cada $\{x \in X; f(x) > n\} \in \mathcal{C}$. Segue, pela proposição 1.1.3, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\} \in \mathcal{C}$ acarretando que $\{x \in X; f(x) = +\infty\} \in \mathcal{C}$. □

Proposição 1.3.2 *Se $f \in M(X, \mathcal{C})$, então $\{x \in X; f(x) = -\infty\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \right)^c$.*

Demonstração.

Analogamente à proposição 1.3.1 tomemos $a \in X$. Segue que

$$\begin{aligned}
 a \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \right)^c &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\{x \in X; f(x) > -n\})^c \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a \in (\{x \in X; f(x) > -n\})^c \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a \notin \{x \in X; f(x) > -n\} \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a \in \{x \in X; f(x) \leq -n\} \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(a) \leq -n \\
 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) \\
 &\Leftrightarrow f(a) \leq -\infty \\
 &\Leftrightarrow f(a) = -\infty \\
 &\Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) = -\infty\}
 \end{aligned}$$

Ora, cada $\{x \in X; f(x) > -n\} \in \mathcal{C}$. Assim, por definição de σ -álgebra, temos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \in \mathcal{C}$ e também $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \right)^c \in \mathcal{C}$. Concluimos disso que $\{x \in X; f(x) = -\infty\} \in \mathcal{C}$ como queríamos provar. □

Teorema 1.3.1 *Um função de valores reais estendidos $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é \mathcal{C} -mensurável se, e somente se, os conjuntos $A = \{x \in X; f(x) = +\infty\}$ e $B = \{x \in X; f(x) = -\infty\}$ são elementos de \mathcal{C} e a função $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \notin A \cup B \\ 0, & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}$$

é \mathcal{C} -mensurável.

Demonstração.

Suponha que $f \in M(X, \mathcal{C})$. Logo, pelas proposições 1.3.1 e 1.3.2, os conjuntos A e B são elementos de \mathcal{C} . Assim, tome $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \geq 0$, então os elementos de $\{x \in X; h(x) > \alpha\}$ são os elementos de $\{x \in X; f(x) > \alpha\}$ que não estão em A , pois h tem contradomínio \mathbb{R} . $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$. Com isso,

$$\{x \in X; h(x) > \alpha\} = A^c \cap \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$$

Segue, pela proposição 1.1.3 que $\{x \in X; h(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$, ou seja, h é \mathcal{C} -mensurável. Caso, $\alpha < 0$, então os elementos de $\{x \in X; h(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B$, pois $h(x) = 0$ para $x \in A \cup B$. Desta forma h é \mathcal{C} -mensurável.

Por outro lado, se supormos que A e B são elementos de \mathcal{C} e h é \mathcal{C} -mensurável, então

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; h(x) > \alpha\} \cup A$$

quando $\alpha \geq 0$, e

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; h(x) > \alpha\} - B$$

quando $\alpha < 0$ por motivos análogos à primeira parte da demonstração. Portanto, f é uma função \mathcal{C} -mensurável como desejávamos.

□

Como consequência do teorema 1.2.2 e o teorema 1.3.1 obtemos, imediatamente, que se $f \in M(X, \mathcal{C})$, então as funções $cf, f^2, |f|, f^+$ e f^- também são elementos de $M(X, \mathcal{C})$. Entretanto, um resultado análogo à proposição 1.2.3 não possível em $\overline{\mathbb{R}}$. Isso acontece por que em $\overline{\mathbb{R}}$ a operação de adição não é bem definida. Então caso $f(x) = +\infty$ e $g(x) = -\infty$ para algum $x \in \mathbb{R}$ a adição $f(x) + g(x)$ não é realizada. Por outro lado, a função fg é \mathcal{C} -mensurável se f e g forem ambas \mathcal{C} -mensuráveis. Para mostrar isso, precisamos do seguinte teorema

Teorema 1.3.2 *Seja (f_n) uma sequência de elementos de $M(X, \mathcal{C})$ e defina as funções*

$$f(x) = \inf f_n(x), F(x) = \sup f_n(x), f^*(x) = \liminf f_n(x), F^*(x) = \limsup f_n(x).$$

Então as funções f, f^, F e F^* são elementos de $M(X, \mathcal{C})$.*

Demonstração.

Como (f_n) é uma sequência de funções \mathcal{C} -mensuráveis e $f = \inf f_n$, afirmamos que

$\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$. De fato, tomemos um elemento $h \in X$. Assim,

$$\begin{aligned} h \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} &\Leftrightarrow h \in \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f_n(h) \geq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(h) \geq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f(h) \geq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow h \in \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

Como cada $\{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$ é \mathcal{C} -mensurável, segue pela proposição 1.1.3 que o conjunto $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Desta forma, f é \mathcal{C} -mensurável.

Observe, também, que $\{x \in X; F(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) > \alpha\}$. Com efeito, para $h \in X$

$$\begin{aligned} h \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) > \alpha\} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } h \in \{x \in X; f_k(x) > \alpha\} \\ &\Leftrightarrow f_k(h) > \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow F(h) \geq f_k(h) > \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow F(h) > \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow h \in \{x \in X; F(x) > \alpha\} \end{aligned}$$

Assim, concluímos que f e F são \mathcal{C} -mensuráveis. Note que a mensurabilidade de f^* e F^* vem de f e F uma vez que

$$f^*(x) = \sup_{n \geq 1} \left\{ \inf_{m \geq n} f_m(x) \right\} \text{ e } F^*(x) = \inf_{n \geq 1} \left\{ \sup_{m \geq n} f_m(x) \right\}$$

□

Corolário 1.3.1 Se (f_n) é uma sequência em $M(X, \mathcal{C})$ que converge para f em X , então f também está em $M(X, \mathcal{C})$.

Demonstração.

Ora, por hipótese $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Só que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$. Segue que $f(x) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ que, por sua vez, é \mathcal{C} -mensurável pelo teorema anterior.

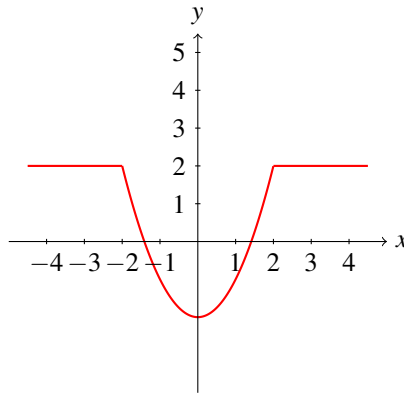
□

Definição 1.3.4 (Truncamento de uma função mensurável) *Seja f uma função em $M(X, \mathcal{C})$ e $A > 0$. Definimos o truncamento f_A da função f por*

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq A \\ A, & \text{se } f(x) > A \\ -A, & \text{se } f(x) < -A \end{cases}$$

Exemplo 1.3.1 *Seja $f \in M(X, \mathcal{C})$ tal que $f(x) = x^2 - 2$. Então o truncamento f_2 é representado, graficamente, como*

Figura 4 – representação do truncamento f_2 da função $f(x) = x^2 - 2$



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que a figura 4 mostra que o truncamento f_2 efetua uma espécie de “limitação” da função f pela constante 2.

Proposição 1.3.3 *Seja A um número real maior que zero. Se f é uma função em $M(X, \mathcal{C})$, então f_A é uma função \mathcal{C} -mensurável.*

Demonstração.

De fato, se os elementos $x \in X$ são tais que $-A \leq f(x) \leq A$, então $f_A(x) = f(x)$. Logo f_A é \mathcal{C} -mensurável, pois f o é. Caso esses elementos sejam tais que $f(x) > A$ ou $f(x) < -A$ a função f_A é constante. Segue pela proposição 1.2.1 que f_A é um elemento de $M(X, \mathcal{C})$.

□

Retornemos para a mensurabilidade do produto de duas funções com valores reais estendidos. Sejam $f, g \in M(X, \mathcal{C})$. Tomemos duas sequências (f_n) e (g_m) tais que para cada

$k \in \mathbb{N}$, f_k e g_k são truncamentos de f e g , respectivamente. Ou seja,

$$g_m(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } |g(x)| \leq m \\ n, & \text{se } g(x) > m \\ -n, & \text{se } g(x) < -m \end{cases}$$

e f_n é definida de modo similar. Pela proposição 1.3.3, f_n e g_m são \mathcal{C} -mensuráveis para cada n e m números naturais. Assim, pela proposição 1.2.3 $f_n g_m$ também é \mathcal{C} -mensurável para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$. Como o truncamento de uma função f causa uma “limitação” na função f se tomarmos n grande suficiente o truncamento f_n tende a se aproximar da função f . Assim, para $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x) g_m(x)) = f(x) g_m(x)$$

Segue pelo corolário 1.3.1 que $f g_m \in M(X, \mathcal{C})$. Com isso, temos que para $x \in X$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (f(x) g_m(x)) = f(x) g(x) = (fg)(x)$$

Segue, pelo mesmo corolário, que $fg \in M(X, \mathcal{C})$.

Nos tratamos da mensurabilidade de funções reais apenas. Em alguns casos, é necessário trabalhar com mensurabilidade de uma forma mais abstrata, como na teoria de probabilidades, por exemplo. Para encerrar esta subseção apresentaremos a definição abstrata de mensurabilidade de uma função.

Definição 1.3.5 *Sejam (X, \mathcal{C}) e (Y, \mathcal{F}) dois espaços mensuráveis. Dizemos que uma função $\phi : (X, \mathcal{C}) \rightarrow (Y, \mathcal{F})$ é dita mensurável se o conjunto $f^{-1}(E) = \{x \in X; f(x) \in E\} \in \mathcal{C}$ para todo conjunto $E \in \mathcal{F}$.*

Embora essa definição pareça ser totalmente distinta da definição 1.2.1, as duas são equivalentes no caso particular de $Y = \mathbb{R}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ conforme demonstrado a seguir.

Proposição 1.3.4 *Seja (X, \mathcal{C}) um espaço mensurável e f uma função. Então f é \mathcal{C} -mensurável se, e somente se, $f^{-1}(E) \in \mathcal{C}$ para todo boreliano E .*

Demonstração.

Suponha f uma função \mathcal{C} -mensurável. Sabemos pela definição 1.1.2 que os elementos da álgebra de Borel são do tipo $(-\infty, x)$ com $x \in \mathbb{R}$. Assim, dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$f^{-1}(-\infty, \alpha) = \{x \in X; f(x) \in (-\infty, \alpha)\} = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\}^6$$

⁶ $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ indica a pré imagem de $(-\infty, \alpha)$.

Como f é \mathcal{C} -mensurável segue pelo teorema 1.2.2 que $f^{-1}(-\infty, \alpha) \in \mathcal{C}$. Reciprocamente se $f^{-1}(-\infty, \alpha) \in \mathcal{C}$ para qualquer α concluímos, imediatamente, que $\{x \in X; f(x) < \alpha\} \in \mathcal{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Portanto, f é \mathcal{C} -mensurável.

□

1.4 Espaços de Medida

Nas subseções anteriores, nós trabalhamos com conjuntos e com funções mensuráveis, isto é, que podem ser medidas de alguma forma. Nesta subseção, nos preocuparemos em definir e trabalhar com funções de um espaço mensurável (X, \mathcal{C}) que daremos o nome de "medida". Tais funções são induzidas pela nossa concepção de comprimento, área, volume, etc. Dito isso, para trabalharmos com medidas primeiro retomaremos alguns resultados sobre sequência de conjuntos.

Definição 1.4.1 *Uma sequência de conjuntos (A_n) é dita **crescente** se $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso tenhamos $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a sequência de conjuntos é **decrecente**.*

Proposição 1.4.1 *Seja (E_n) uma sequência crescente de conjuntos. Se (A_n) é tal que $A_1 = E_1$ e $A_n = E_n - E_{n-1}$ para todo $n > 1$, então:*

- (i) A_n é uma sequência disjunta;⁷
- (ii) $E_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$;
- (iii) $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_n$;

Demonstração.

Para provar (a) precisamos mostrar que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se $m \neq n$, então $A_n \cap A_m = \emptyset$. Lembre que $A - B = A \cap B^c$ para quaisquer conjuntos A e B . Desta forma, como a interseção

⁷ Lembre que uma sequência disjunta significa que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$

entre conjuntos é associativa e comutativa temos que

$$\begin{aligned}
 A_m \cap A_n &= (E_m - E_{m-1}) \cap (E_n - E_{n-1}) \\
 &= (E_m \cap E_{m-1}^c) \cap (E_n \cap E_{n-1}^c) \\
 &= (E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1}^c \cap E_{n-1}^c) \\
 &= (E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c
 \end{aligned}$$

Com isso, se $m > n$, então $E_n \subseteq E_m$ e $E_{n-1} \subseteq E_{m-1}$, pois (E_n) é uma sequência crescente. Além disso, $E_m^c \subseteq E_{m-1}^c$ e $E_m \cap E_m^c = \emptyset$. Segue que

$$(E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c = (E_m) \cap E_{m-1}^c = \emptyset$$

Caso tenhamos $m < n$ temos $E_m \subseteq E_n$ e $E_{m-1} \subseteq E_{n-1}$. Segue analogamente que

$$(E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c = (E_n) \cap E_{n-1}^c = \emptyset$$

Em todo caso, $A_m \cap A_n = \emptyset$ para todo $m \neq n$.

Provaremos o item (b) por indução sobre n . Como (E_n) é crescente, temos que $E_1 \subseteq E_2$. Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{j=1}^2 A_j &= A_1 \cup A_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1) \\
 &= E_1 \cup (E_2 \cap E_1^c) \\
 &= (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_1^c) \\
 &= (E_1 \cup E_2) \cap \mathcal{C} \\
 &= (E_1 \cap E_2) = E_2
 \end{aligned}$$

Suponha que exista um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{j=1}^k A_j = E_k$. Mostraremos que $\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j = E_{k+1}$ também é verdadeira. Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j &= \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \cup A_{k+1} \\
 &= E_k \cup A_{k+1} \\
 &= E_k \cup (E_{k+1} - E_k) \\
 &= E_k \cap E_{k+1} \\
 &= E_{k+1}
 \end{aligned}$$

Segue, pelo método da indução finita, que $\bigcup_{j=1}^n A_j = E_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Por fim, (c) é um resultado imediato, pois $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ se, e somente se, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}$. Pelo item (b), isso só ocorre se $x \in \bigcup_{j=1}^{n_0} A_j$. Mas isso é equivalente à dizer que existe um k com $1 \leq k \leq n_0$ tal que $x \in A_k$. Como $k \in \mathbb{N}$ isso acontece se, e somente se, $x \in A_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Portanto $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

□

Proposição 1.4.2 *Seja (F_n) uma sequência decrescente de conjuntos. Se (E_n) é tal que $E_n = F_1 - F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então (E_n) é crescente e $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = F_1 - \bigcup_{j=1}^{\infty} F_n$.*

Demonstração.

Queremos mostrar que (E_n) é crescente, isto é, $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tome $x \in E_n$. Logo, $x \in F_1$ e $x \notin F_n$, por construção. Como (F_n) é decrescente, $F_n \supseteq F_{n+1}$. Assim, $x \notin F_n \Rightarrow x \notin F_{n+1}$. Com isso, $x \in F_1$ e $x \notin F_{n+1}$. Segue que $x \in E_{n+1}$ e que $E_n \subseteq E_{n+1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ como queríamos. Além disso, um elemento $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ se, e somente se, $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F_1 - F_n)$. Isso é equivalente a dizer que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a \in F_1 - F_{n_0}$. Correspondentemente, $a \in F_1$ e existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a \notin F_{n_0}$. Isso só ocorre se $a \in F_1$, mas $a \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Portanto, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = F_1 - \bigcup_{j=1}^{\infty} F_n$.

□

Definição 1.4.2 *Uma medida é uma função $\mu : (X, \mathcal{C}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que satisfaz as seguintes condições:*

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) $\mu(E) \geq 0, \forall A \in \mathcal{C}$;
- (iii) Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de \mathcal{C} , então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Ou seja uma medida é uma função não negativa que é contavelmente aditiva. Além disso, o valor de μ pode ser igual à $+\infty$ para algum conjunto $A \in \mathcal{C}$. Quando temos que $\mu(E) < +\infty$ para qualquer que seja o conjunto $E \in \mathcal{C}$, dizemos que temos uma medida finita.

Definição 1.4.3 Dizemos que uma tripla ordenada (X, \mathcal{C}, μ) constituída por um conjunto X , uma σ -álgebra \mathcal{C} desse conjunto e uma medida μ sobre o espaço mensurável (X, \mathcal{C}) é um espaço de medida.

Exemplo 1.4.1 Seja X um conjunto e \mathcal{C} a sigma álgebra formada por todos os subconjunto de X . Defina $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pondo $\mu_1(A) = 0$ para qualquer $A \in \mathcal{C}$ e μ_2 é pondo

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } A = \emptyset \\ +\infty, & \text{se } A \neq \emptyset \end{cases}$$

Sendo definidas dessa forma, as funções μ_1 e μ_2 são medidas.

De fato, em ambas as condições (i) e (ii) são trivialmente satisfeitas. Para a condição (iii), temos que qualquer sequência disjunta (A_n) acarretará que

$$\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)$$

Para μ_2 temos dois casos possíveis. Se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, então $\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$. Entretanto isso ocorre somente se $A_j = \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Caso $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, conseguimos observar que os termos da sequência (A_n) só podem ser de dois

tipos ou $A_j = \emptyset$ ou $A_j = +\infty$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Com isso, $\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty$.

Ademais, na soma $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n)$ só teremos soma dos termos $0 + (+\infty)$ ou $(+\infty) + (+\infty)$. Desta forma, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = +\infty$. Portanto μ_1 e μ_2 são medidas.

Exemplo 1.4.2 (Probabilidade) Seja (Ω, \mathcal{C}) um espaço mensurável. A função $\mathcal{P} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ é dita uma probabilidade se satisfaz as propriedades:

$$(K1) \quad \mathcal{P}(\Omega) = 1;$$

$$(K2) \quad \mathcal{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{C};$$

(K3) Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de \mathcal{C} , então $\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n)$.⁸

Observe que as condições da (ii) e (iii) da definição 1.4.2 são satisfeitas por definição da função de probabilidade. Resta provar que $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$. Defina a sequência (A_n) pondo $A_{2n} = \emptyset$ e $A_{2n-1} = \Omega$. Claramente, a sequência (A_n) é disjunta. Assim, com o auxílio da propriedade (K1) e (K3), segue que

$$\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathcal{P}(\Omega) + \mathcal{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega) + \mathcal{P}(\emptyset)$$

Logo, $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$. Portanto a função probabilidade é uma medida. Neste caso, o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P})$ é chamado de espaço de probabilidades. Além disso, uma função \mathcal{C} -mensurável pela definição 1.3.5 em um espaço de probabilidades é chamada de variável aleatória.

Exemplo 1.4.3 (Unidade de Medida Concentrada em p) Seja (X, \mathcal{C}) um espaço mensurável tal como no exemplo a e p um elemento de X . Defina $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como sendo

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \notin A \\ 1, & \text{se } p \in A \end{cases}$$

Então μ é uma medida. Verdadeiramente, observe que $p \notin \emptyset$, ou seja, $\mu(\emptyset) = 0$. Trivialmente, tem-se $\mu(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{C}$, pela construção de μ .

Exemplo 1.4.4 Seja $X = \mathbb{N}$ e \mathcal{C} sendo o conjunto das partes de \mathbb{N} . para $A \in \mathcal{C}$, definimos $\mu(A)$ por meio da sua cardinalidade, isto é, se A é finito, então $\mu(A)$ é quantidade de elementos de A . Caso contrário, $\mu(A) = +\infty$.

Teorema 1.4.1 Seja μ uma medida definida sobre uma σ -álgebra \mathcal{C} . Se A e B são elementos de \mathcal{C} e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$ Se $\mu(A) < +\infty$, então $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Demonstração.

Suponha que $A \subset B$, então $A = B \cap A$ e $A \cap (B - A) = \emptyset$. Segue pela propriedade (ii) que

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$$

⁸ As propriedades K1, K2 e K3 são chamadas de Axiomas de Kolmogorov

Lembre que $B - A = B \cap A^c$. Como $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$. Além disso, como $B \in \mathcal{C}$ temos que $B \cap A^c$ consequentemente $B - A \in \mathcal{C}$. Assim, como μ é uma medida e $B - A \in \mathcal{C}$, temos que $\mu(B - A) \geq 0$. Segue pela definição da relação de \geq que $\mu(B) \geq \mu(A)$. Observe que se $\mu(A) < \infty$, temos que

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \Leftrightarrow \mu(B) - \mu(A) = \mu(B - A)$$

Como desejávamos. □

Proposição 1.4.3 *Seja μ uma medida definida sobre uma σ -álgebra \mathcal{C} . Se (E_n) é uma sequência crescente de \mathcal{C} , então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$.*

Demonstração.

Ora, se $\mu(E_n) = +\infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$ ambos os lados da equação acima são $+\infty$. Desta forma, vamos supor que $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, vamos construir uma sequência (A_n) pondo $A_1 = E_1$ e $A_n = E_n - E_{n-1}$ para qualquer $n > 1$. Então pela proposição 1.4.1, (A_n) é uma sequência disjunta, temos $E_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Como μ contavelmente aditiva,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \mu(A_n)$$

Pelo teorema 1.4.1 vemos que $\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1})$ para $n > 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \mu(A_n) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (\mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_m)) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (\mu(E_1) + \mu(E_2 - E_1) + \cdots + \mu(E_m - E_{m-1})) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (\mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_m) - \mu(E_{m-1})) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots - \mu(E_{m-1}) + \mu(E_m)) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \mu(E_m) \end{aligned}$$

Segue que $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$. □

Proposição 1.4.4 *Seja μ uma medida definida sobre uma σ -álgebra \mathcal{C} . Se (B_n) é uma sequência decrescente de \mathcal{C} e $\mu(B_1) < +\infty$, então $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$.*

Demonstração.

Defina uma sequência (T_n) de elementos de \mathcal{C} pondo $T_n = B_1 - B_n$ para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Pela proposição 1.4.2, (T_n) é crescente. Assim, aplicando o a proposição 1.4.3 temos que

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T_n)$$

Usando o teorema 1.4.1, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\mu(B_1) - \mu(B_n)] = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n)$$

Segue pela proposição 1.4.2 que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T_n) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)$$

Combinando as duas equações obtemos que

$$\mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)$

□

Uma vez que já foram bem explorados os espaços mensuráveis e os espaços de medida, nosso objetivo neste capítulo é medir

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. 1. ed. New York: Wiley-Interscience, 1995.

LIMA, E. L. **Um Curso de Análise**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. v. 1.

MAGALHAES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. 3. ed. São Paulo: EdUsp, 2011.