



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO**

**UM ESTUDO SOBRE A TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO**

**FORTALEZA – CEARÁ**

**2023**

CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO

UM ESTUDO SOBRE A TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro

FORTALEZA – CEARÁ

2023

Aos meus amados pais que foram a base sólida que me sustentou e as asas que me impulsionaram. Com amor e gratidão, dedico este trabalho a vocês, cujo apoio incondicional e compreensão transcendem qualquer barreira acadêmica.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b> – Representação do intervalo $(-\infty, b)$ na reta real . . . . .	12
<b>Figura 2</b> – Representação de uma decomposição do intervalo $(-\infty, b)$ na reta real .	12
<b>Figura 3</b> – Gráfico da Função $f(x) = \frac{ x }{x}$ . . . . .	19
<b>Figura 4</b> – representação do truncamento $f_2$ da função $f(x) = x^2 - 2$ . . . . .	27
<b>Figura 5</b> – Gráfico da Função $f = \sum_{j=1}^2 a_j \chi_{E_j}$ . . . . .	38
<b>Figura 6</b> – Gráfico da Função $g = \sum_{j=1}^4 a_j \chi_{E_j}$ . . . . .	38
<b>Figura 7</b> – Área delimitada pelo gráfico da função $f = \sum_{j=1}^2 a_j \chi_{E_j}$ . . . . .	39
<b>Figura 8</b> – Área delimitada pelo gráfico da função $g = \sum_{j=1}^4 a_j \chi_{E_j}$ . . . . .	39
<b>Figura 9</b> – Partição $\{E_n\}$ do conjunto $X$ . . . . .	40
<b>Figura 10</b> – Partição $\{F_m\}$ do conjunto $X$ . . . . .	40
<b>Figura 11</b> – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x) + 3$ . . . . .	45
<b>Figura 12</b> – Integral da função $\phi_2$ . . . . .	46
<b>Figura 13</b> – Integral da função $\phi_4$ . . . . .	46
<b>Figura 14</b> – Integral da função $\phi_8$ . . . . .	47
<b>Figura 15</b> – Integral da função $f$ . . . . .	47
<b>Figura 16</b> – Gráfico da função $\phi_1$ . . . . .	48

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	5
2	ESPAÇOS E FUNÇÕES MENSURÁVEIS . . . . .	8
2.1	O Conceito de $\sigma$ -álgebra . . . . .	8
2.2	Funções Mensuráveis . . . . .	13
3	A TEORIA DA MEDIDA . . . . .	22
3.1	Os Espaços de Funções Mensuráveis . . . . .	22
3.2	Espaços de Medida . . . . .	29
4	TEORIA DA INTEGRAÇÃO . . . . .	37
4.1	A Integral de Funções Simples . . . . .	37
4.2	A Integral de Funções Não-Negativas . . . . .	45
4.3	Funções Integráveis . . . . .	54
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	58
	REFERÊNCIAS . . . . .	60

## 1 INTRODUÇÃO

Conseguir medir grandezas é essencial em nosso cotidiano. Medimos tempo, distância, velocidade, etc. Embora seja usada constantemente nos dias atuais, a ação de medir é bem antiga. Conforme Boyer (2012), os egípcios possuíam uma precisão grandiosa no que se referia a contar e medir; com essa habilidade, fizeram feitos extraordinários como o calendário solar e a construção das pirâmides. Desde então vem-se trabalhando no avanço da teoria da medida tanto de forma prática como de forma teórica.

As aplicações mais teóricas de medida vieram com os estudos de Newton que trataram sobre taxa de variação de quantidades continuamente variáveis tais como comprimentos, áreas e volumes; tendo desenvolvido, também, um método para calcular a soma das ordenadas sob uma curva (Boyer, 2012). Embasando-se no mesmo autor, vemos que esse método recebeu o nome de integral e foi denotado, por Leibniz, como  $\int$ ; essa definição de integral foi refinada por Riemann e é, nos dias de hoje, comumente chamada de Integral de Riemann.

Pelo fim do século XIX, muitos matemáticos buscavam refutar teoremas já estabelecidos por meio de contraexemplos construídos por funções “patológicas” (Boyer, 2012). Isso gerou um grande movimento matemático, no século XX, que tinha como objetivo trazer rigor à matemática. Foi nesse movimento que o matemático francês Henri Lebesgue (1875-1941) notou aplicações limitadas da integral de Riemann através do seguinte pensamento:

Lebesgue, refletindo sobre o trabalho de Borel sobre conjuntos, viu que a definição de Riemann de integral tem o defeito de só se aplicar a casos excepcionais, pois assume não mais que uns poucos pontos de descontinuidade para a função. Se uma função  $y = f(x)$  tem muitos pontos de descontinuidade, então, à medida que o intervalo  $x_{i+1} - x_i$  se torna menor, os valores  $f(x_{i+1})$  e  $f(x_i)$  não ficam necessariamente próximos (Boyer, 2012, p.416).

Para resolver este problema, Lebesgue decidiu inverter a ordem da construção que Riemann fizera:

Em vez de subdividir o domínio da variável independente, Lebesgue dividiu, portanto, o campo de variação  $\bar{f} - f$  da função em subintervalos  $\Delta y_i$  e em cada subintervalo escolheu um valor  $\eta_i$ . Então, achou a “medida”  $\mu(E_i)$  do conjunto  $E_i$  dos pontos do eixo  $x$  para os quais os valores de  $f$  são aproximadamente iguais a  $\eta_i$  (Boyer, 2012, p.416).

A integral que foi gerada por meio da construção anterior recebeu o nome de Integral de Lebesgue que é o tema deste trabalho.

Realizando uma pesquisa com a frase “ensino de cálculo diferencial e integral” na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), sem aspas, foram retornados 310

resultados na data do dia 29 de Outubro de 2023 às 10 horas da manhã. Ao observar título e resumo dos trabalhos retornados como resultado da busca, nenhum deles tratava da integral de Lebesgue para alunos de graduação em ciências exatas. Grande parte dos trabalhos eram voltados à reflexão do ensino de cálculo diferencial e integral na perspectiva de Riemann ou aplicações dela. Mediante esta ausência, esta pesquisa levanta o seguinte questionamento: de que forma pode ser apresentada a teoria da medida e integração de Lebesgue de maneira elementar para os alunos de graduação de ciências exatas?

Com base nisso, o objetivo geral desta pesquisa é conhecer a algumas definições e resultados da teoria da medida e da integração de Lebesgue de forma elementar. Esse estudo estabeleceu três objetivos específicos: definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis, conhecer a teoria da medida de maneira generalizada e descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

Na primeira seção definimos toda a base de nosso estudo tratando dos conceitos de  $\sigma$ -álgebra, espaços mensuráveis e funções mensuráveis. Todos esses conceitos são fixados por meio de exemplos. Em particular, é apresentado a  $\sigma$ -álgebra de Borel, bem como é revisado a estrutura de conjuntos abertos na reta numérica. Também mostramos propriedades aritméticas e resultados sobre funções mensuráveis. Por fim, a seção é finalizada com os conceitos de parte positiva e parte negativa de uma função real.

Adiante, apresentamos, na segunda seção, a teoria da medida. Para isso, iniciamos com uma generalização dos conceitos da seção anterior utilizando a reta real estendida. Estendemos as definições e resultados de funções mensuráveis para valores reais estendidos. Encerramos a seção apresentando o conceito geral de medida sobre um espaço mensurável apontando exemplos tais como a função de probabilidade e a medida de um conjunto discreto.

Na última seção, mostramos a construção da integral de Lebesgue para funções simples, funções mensuráveis não negativas e funções mensuráveis quaisquer. Desenvolvemos propriedades e condições de integrabilidade ressaltando teoremas relevantes como o Teorema da Convergência Monótona e o Lema de Fatou. Posteriormente abordamos um vasto número de proposições e propriedades sobre integrais sendo a seção terminada com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

A pesquisa que foi realizada tem natureza básica, pois segundo Prodanov et al. (2013, p.51) uma pesquisa básica “objetiva gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência sem aplicação prática prevista. Envolve verdades e interesses universais”.

Além disso, de acordo com o mesmo autor a pesquisa também constou com uma

abordagem quantitativa vez que os fatos podem ser relevados fora de uma complexidade social, econômico e político(2013). Pode-se observar, ainda, que a pesquisa teve objetivo exploratório, pois segundo GIL:

As pesquisas exploratórias têm como propósito proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Seu planejamento tende a ser bastante flexível, pois interessa considerar os mais variados aspectos relativos ao fato ou fenômeno estudado. A coleta de dados pode ocorrer de diversas maneiras, mas geralmente envolve: 1. levantamento bibliográfico; 2. entrevistas com pessoas que tiveram experiência prática com o assunto; e 3. análise de exemplos que estimulem a compreensão (SELLTIZ et al., 1967, p. 63). Em virtude dessa flexibilidade, torna-se difícil, na maioria dos casos, "rotular" os estudos exploratórios, mas é possível identificar pesquisas bibliográficas, estudos de caso e mesmo levantamentos de campo que podem ser considerados estudos exploratórios. (2002, p.33)

Como fora supracitado, pode-se atribuir vários procedimentos técnicos às pesquisas exploratórias. O procedimento técnico foi realizado por meio de uma pesquisa bibliográfica devido ser elaborada com base em material já publicado (GIL, 2002).

[AQUI FALTA POR UM RESUMO DA CONCLUSÃO QUE NÃO FIZ AINDA!!!!!!!!!!]



## 2 ESPAÇOS E FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Nesta seção é apresentado um preâmbulo para a teoria medida. Iniciaremos definindo  $\sigma$ -álgebra para que possamos construir espaços mensuráveis. Em seguida, abordaremos as funções mensuráveis. Todas as definições e resultados aqui explorados tiveram como principais fontes (LIMA, 2019), (BARTLE, 1995) e (MAGALHAES, 2011).

### 2.1 O Conceito de $\sigma$ -álgebra

**Definição 2.1.1** *Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma família  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $X$  é dita uma  $\sigma$ -álgebra se as seguintes condições são atendidas:*

- (i)  $\emptyset$  e  $X$  são elementos de  $\mathcal{C}$ ;
- (ii) Se um elemento  $A \in \mathcal{C}$ , então  $A^c \in \mathcal{C}$ <sup>1</sup>;
- (iii) Se  $(A_n)$  é uma sequência de elementos de  $\mathcal{C}$ , então  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$ .

Um par ordenado  $(X, \mathcal{C})$  constituído de um conjunto  $X$  e uma  $\sigma$ -álgebra sobre  $X$  é chamado de **espaço mensurável**. Além disso, cada elemento deste espaço é chamado de conjunto  $\mathcal{C}$ -mensurável. Quando não houver confusão ou quando a  $\sigma$ -álgebra estiver fixada, dizemos simplesmente que cada elemento é um conjunto mensurável.

**Observação 2.1.1** *Em todo o texto, indicaremos por  $I_n$  o conjunto dos  $n$  primeiros números naturais. Assim,  $I_n = \{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n\}$ .*

**Observação 2.1.2** *Seja  $\mathcal{C}$  uma  $\sigma$ -álgebra de um conjunto  $X$ . Se  $A_1, \dots, A_n$  são todos elementos quaisquer de  $\mathcal{C}$ , então  $\bigcup_{j=1}^n A_j$  é um elemento de  $\mathcal{C}$ .*

**Exemplo 2.1.1** *Seja  $X = \{-1, 0, 1\}$ . Se considerarmos  $\mathcal{C} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{-1, 1\}\}$ , temos que  $(X, \mathcal{C})$  é um espaço mensurável.*

**Exemplo 2.1.2** *Seja  $X$  um conjunto qualquer. O conjunto  $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, X\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .*

De fato, podemos observar que, nesse exemplo, todas as condições impostas na definição 2.1.1 são atendidas de maneira trivial, pois  $\emptyset$  e  $X$  são todos os elementos de  $\mathcal{C}_1$ . Assim,  $(X, \mathcal{C}_1)$  é um espaço mensurável. Perceba que a definição 2.1.1 não nos diz que uma  $\sigma$ -álgebra de um conjunto é única. Realmente, não é. Assim, um conjunto pode gerar espaços mensuráveis

<sup>1</sup> Em todo o texto,  $X^c$  significa o complementar do conjunto  $X$ .

diferentes a depender da  $\sigma$ -álgebra adotada. Para evidenciar essa percepção, observe o exemplo a seguir:

**Exemplo 2.1.3** *Seja  $X$  conforme o exemplo anterior. Considere, agora, o conjunto  $\mathcal{C}_2 = \{A; A \subset X\}$ , ou seja, o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto  $X$  <sup>2</sup>.*

Sabemos que  $\emptyset \subset X$  e  $X \subset X$ . Assim,  $\emptyset, X \in \mathcal{C}_2$ . Se tomarmos um conjunto  $A \subset \mathcal{C}_2$ , então  $A^c = X - A$  por definição. Ou seja,  $A^c$  é formado por elementos que estão todos em  $X$  caracterizando-o um elemento de  $\mathcal{C}_2$ . Da mesma forma, se tomarmos uma sequência  $(A_j)$  de elementos de  $\mathcal{C}_2$ , a reunião  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  é composta por elementos de  $X$ . Logo,  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}_2$ . Com isso,  $\mathcal{C}_2$  também é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$  e o par  $(X, \mathcal{C}_2)$  é um espaço mensurável que, por sua vez, é diferente do espaço  $(X, \mathcal{C}_1)$ .

Os exemplos apresentados acima são todos de conjuntos que são uma  $\sigma$ -álgebra de um conjunto  $X$  arbitrário. Por definição, o conjunto  $\mathcal{C}$  é composto de subconjuntos do conjunto  $X$ . Será que se construirmos  $Z$  um conjunto que contenha  $\emptyset$  e  $X$  e outros subconjuntos do conjunto  $X$  tomados aleatoriamente teremos  $(X, Z)$  um espaço mensurável? A resposta é negativa e para convencê-lo disso, mostraremos o seguinte contra-exemplo.

**Contraexemplo 2.1.1** *Seja  $X = \{x, y, z\}$ . O conjunto  $\mathcal{C} = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$  não é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .*

Sem dúvida,  $\emptyset, X \in \mathcal{C}$ . Entretanto, perceba que  $\{x\} \in \mathcal{C}$ , mas  $\{x\}^c \notin \mathcal{C}$ . De fato,  $\{x\}^c = \{x, y, z\} - \{x\} = \{y, z\}$ . Entretanto,  $\{y, z\} \notin \mathcal{C}$ . Assim, a segunda condição da definição 2.1.1 não é satisfeita, impossibilitando que  $\mathcal{C}$  seja uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ . A proposição adiante nos mostra como podemos induzir uma  $\sigma$ -álgebra com um conjunto fixado não vazio em um conjunto.

**Proposição 2.1.1** *Seja  $X$  e  $A$  dois conjuntos quaisquer com  $A \neq \emptyset$ . Se  $A \subset X$ , então o conjunto  $\mathcal{C} = \{\emptyset, X, A, A^c\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .*

*Demonstração.*

Perceba que as condições (i) e (ii) da definição 2.1.1 são satisfeitas pela forma que o conjunto  $\mathcal{C}$  foi construído. Para verificar a última condição, basta perceber  $A \cup A^c = X$ . Portanto,  $\mathcal{C}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$  para qualquer que seja  $\emptyset \neq A \subset X$ .

□

<sup>2</sup> O conjunto  $\mathcal{C}_2$  também é chamado de conjunto das partes de  $X$  e, as vezes, é representado por  $\mathcal{P}(X)$ .

**Exemplo 2.1.4** Considere  $X = \mathbb{N}$ . Sejam  $P = \{2k; k \in \mathbb{N}\}$  e  $I = \{2k - 1; k \in \mathbb{N}\}$ . Como  $P^c = I$ , então  $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathbb{N}, P, I\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $\mathbb{N}$  pela proposição anterior.

Note que a definição 2.1.1 trata apenas da reunião de enumerável de elementos da  $\sigma$ -álgebra. Nosso interesse, agora, é investigar se conseguirmos propriedades análogas para a operação de interseção. Iniciaremos verificando o comportamento de interseção de elementos de uma  $\sigma$ -álgebra com a seguinte proposição.

**Proposição 2.1.2** Seja  $(X, \mathcal{C})$  um espaço mensurável. Se  $(A_j)$  é uma sequência de conjuntos  $\mathcal{C}$ -mensuráveis, então  $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$  é um elemento  $\mathcal{C}$ -mensurável.

*Demonstração.*

Se  $A_j \in \mathcal{C}$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ , então cada complementar  $A_j^c \in \mathcal{C}$ , pois  $\mathcal{C}$  é  $\sigma$ -álgebra. Assim,  $(A_j^c)$  forma uma sequência de conjuntos  $\mathcal{C}$ -mensuráveis acarretando que  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \in \mathcal{C}$ . Segue, pelas *Leis de Morgan*<sup>3</sup>, que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c = \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c$$

Logo,  $\left( \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c \in \mathcal{C}$  o que implica  $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$ . Portanto,  $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$  é um conjunto  $\mathcal{C}$ -mensurável. □

Considere a  $\sigma$ -álgebra apresentada na proposição 2.1.1. Qualquer outra  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  que tiver  $A$  como elemento, conterá  $\mathcal{C}$ . Assim, observamos que

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\mathcal{F} \supset A} \mathcal{F}.$$

Esta  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{C}$  definimos como a *menor*  $\sigma$ -álgebra gerada por  $A$ <sup>4</sup>. Sabendo que a menor  $\sigma$ -álgebra é gerada por meio de intersecções é natural questionarmos se a interseção entre  $\sigma$ -álgebras ainda é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ . Responderemos à esta pergunta com a proposição adiante.

**Proposição 2.1.3** Se  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  são duas  $\sigma$ -álgebras de um conjunto  $X$ , então  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$  também é uma  $\sigma$ -álgebra do conjunto  $X$ .

<sup>3</sup> Vide (LIMA, 2019, p.26)

<sup>4</sup> Lembre que a noção de “menor” aqui é trazida por meio da ordem parcial gerada pela relação de inclusão entre conjuntos.

*Demonstração.*

Se  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  são  $\sigma$ -álgebras de  $X$ , então ambos possuem  $\emptyset$  e  $X$  como elementos. Assim,  $\emptyset$  e  $X$  estão na intersecção  $\mathcal{C}$ . Além disso, se  $A \in \mathcal{C}$ , então  $A \in \mathcal{C}_1$  e  $A \in \mathcal{C}_2$ . Por serem ambas  $\sigma$ -álgebras,  $A^c \in \mathcal{C}$  e  $A^c \in \mathcal{C}_2$ . Ou seja,  $A^c \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$ . Por fim, se tomarmos uma sequência  $(A_n)$  de elementos de  $\mathcal{C}$ , observamos que  $A_j \in \mathcal{C}_1$  e  $A_j \in \mathcal{C}_2$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Assim,  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}_1$  e  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}_2$  pela definição de  $\sigma$ -álgebra. Logo,  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$ . Com isso,  $\mathcal{C}$  satisfaz todas as condições da definição 2.1.1. Portanto,  $\mathcal{C}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .

□

**Proposição 2.1.4** *Seja  $(\mathcal{C}_j)$  uma sequência finita de  $\mathcal{C}_j$ -álgebras de um conjunto  $X$ , então  $\mathcal{C} = \bigcap_{j=1}^n \mathcal{C}_j$ , com  $n \geq 2$ , também é uma  $\sigma$ -álgebra do conjunto  $X$ .*

*Demonstração.*

Provaremos esse resultado utilizando o método da indução finita sobre  $n$ . Se  $n = 2$ , o resultado é verificado imediatamente pela proposição 2.1.3. Suponha que se verifique para algum  $k \in \mathbb{N}$ , isto é,  $\bigcap_{j=1}^k \mathcal{C}_j$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ . Vamos checar para o sucessor de  $k$ . Ora, pela associatividade da intersecção, vemos que

$$\bigcap_{j=1}^{k+1} \mathcal{C}_j = \left( \bigcap_{j=1}^k \mathcal{C}_j \right) \cap \mathcal{C}_{k+1}.$$

Denote  $\bigcap_{j=1}^k \mathcal{C}_j = H$ . Sabemos por hipótese de indução que  $H$  e  $\mathcal{C}_{k+1}$  são  $\sigma$ -álgebras de  $X$ . Segue,

pela base de indução, que  $H \cap \mathcal{C}_{k+1}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ . Portanto,  $\bigcap_{j=1}^{k+1} \mathcal{C}_j$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$  como queríamos.

□

Note que há uma diferença gritante entre as proposições 2.1.2 e 2.1.3. A primeira trata de conjuntos mensuráveis de uma  $\sigma$ -álgebra e a outra refere-se à  $\sigma$ -álgebras de um conjunto  $X$ . Além disso, perceba que até aqui trabalhamos o conceito de  $\sigma$ -álgebra de maneira abstrata sendo utilizada em um conjunto qualquer. Trataremos, agora, de uma  $\sigma$ -álgebra extremamente importante e específica para o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais.

**Definição 2.1.2** *Seja  $X = \mathbb{R}$ . A Álgebra de Borel é a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  gerada por todos os intervalos abertos  $(-\infty, x)$  com  $x \in \mathbb{R}$ . Os elementos dessa  $\sigma$ -álgebra são chamados de Borelianos.*

Esta  $\sigma$ -álgebra é extremamente relevante para os estudos de medida e integração e pode ser definida de várias formas diferentes, mas todas são equivalentes. Isso quer dizer que  $(-\infty, x)$  não é a única forma dos elementos de  $\mathcal{B}$ . De fato, se  $(-\infty, x) \in \mathcal{B}$ , então  $(-\infty, x)^c \in \mathcal{B}$  só que  $(-\infty, x)^c = [x, +\infty)$ . Assim, poderíamos definir  $\mathcal{B}$  por meio de intervalos do tipo  $[x, +\infty)$ . Em particular, poderíamos ter definido a  $\mathcal{B}$  por meio da  $\sigma$ -álgebra gerada por intervalos do tipo  $(a, b)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Antes de provamos este fato, observe que podemos decompor intervalos reais como a união de outros intervalos reais. Por exemplo, utilizando a reta real, podemos representar intervalo  $(-\infty, b)$  da seguinte maneira

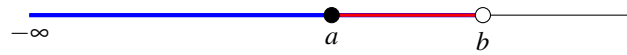
**Figura 1 – Representação do intervalo  $(-\infty, b)$  na reta real**



Fonte: Elaborado pelo autor

Se tomarmos um  $a \in \mathbb{R}$  fixo, com  $a < b$ , então a decomposição do intervalo  $(-\infty, b)$  pode ser expressa por meio da união dos intervalos  $(-\infty, a]$  e  $(a, b)$ , onde estão representados na figura a seguir pelas cores azul e vermelha respectivamente.

**Figura 2 – Representação de uma decomposição do intervalo  $(-\infty, b)$  na reta real**



Fonte: Elaborado pelo autor

A decomposição de intervalos reais pela união de outros é relevante para mostrar a seguinte equivalência sobre a  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Teorema 2.1.1** *Uma  $\sigma$ -álgebra é de Borel se, e somente se, é gerada por intervalos do tipo  $(a, b)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.*

Suponha que  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  é um espaço mensurável. Sejam  $a$  e  $b$  números reais, com  $a < b$ . Como  $a - \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que o intervalo  $\left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}$  para todo

$n \in \mathbb{N}$ . Segue, pela proposição 2.1.2, que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}$ . Com isso, afirmamos que a interseção de todos os intervalos  $\left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right)$  é igual ao intervalo  $(-\infty, a]$ . De fato,

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right) &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x < a - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a - \frac{1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow x \leq a \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, a]. \end{aligned}$$

Logo,  $(-\infty, a] \in \mathcal{B}$  acarretando que  $(a, +\infty) = (-\infty, a]^c \in \mathcal{B}$ . Observe que podemos decompor  $(-\infty, b) = (-\infty, a] \cup (a, b)$  enquanto que  $(a, +\infty) = (a, b) \cup [b, +\infty)$ . Desta forma, vemos que  $(-\infty, b) \cap (a, +\infty) = (a, b)$ . Como  $(-\infty, b)$  e  $(a, +\infty)$  são elementos de  $\mathcal{B}$ , segue pela proposição 2.1.2 que  $(a, b) \in \mathcal{B}$ . Com isso,  $\mathcal{B}$  pode ser gerada por intervalos do tipo  $(a, b)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Suponha, reciprocamente, que  $\mathcal{C}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $\mathbb{R}$ . Se  $\mathcal{C}$  é gerada por intervalos do tipo  $(a, b)$  onde  $a, b \in \mathbb{R}$ , então os conjuntos  $A_n = (-n, b)$  são todos elementos de  $\mathcal{C}$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ . Segue, pela definição 2.1.1, que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, b) \in \mathcal{C}$ . Só que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, b) = (-\infty, b)$ . Com isso, os elementos de  $\mathcal{C}$  são do tipo  $(-\infty, b)$ . Portanto,  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ .

□

## 2.2 Funções Mensuráveis

Agora que já estamos familiarizados com os conceitos de  $\sigma$ -álgebra e espaços mensuráveis, vamos aplicar, sobre este espaço uma função e estudar seu comportamento <sup>5</sup>. Iniciaremos tratando de funções reais e estenderemos o conceito conforme haja necessidade. A partir de agora fixemos que, quando não houver menção contrária,  $X$  será um conjunto qualquer diferente de  $\emptyset$  e  $\mathcal{C}$  será uma  $\sigma$ -álgebra desse conjunto.

**Definição 2.2.1** Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita  $\mathcal{C}$ -mensurável se, para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , o conjunto  $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$ .

**Exemplo 2.2.1 (Função Constante)** Seja  $K \in \mathbb{R}$  um número fixado. A função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = K$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável.

<sup>5</sup> Em todo o texto função e aplicação são sinônimos.

Para mostrarmos este fato, precisamos analisar os casos de  $\alpha$ . Assim

(I) Se  $\alpha \geq K$ , então o conjunto  $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \emptyset$  uma vez que não existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = K > \alpha$ .

(II) Se  $\alpha < K$ , então para todo  $x \in X$ ,  $f(x) > \alpha$ . Logo, o conjunto  $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = X$ .

Em todo caso, para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , o conjunto  $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$ . Portanto, a função constante  $f$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável.

**Exemplo 2.2.2 (Função Característica)** *Seja  $(X, \mathcal{C})$  uma espaço mensurável e  $A \in \mathcal{C}$ . A função característica <sup>6</sup> de  $A$   $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  definida por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

*é  $\mathcal{C}$ -mensurável.*

Para verificar se  $\chi_A$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável precisamos, novamente, analisar os casos de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(I) Se  $\alpha \geq 1$ , observamos que  $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = \emptyset$ , pois não há  $x \in X$  tal que  $\chi_A(x) > 1$ .

(II) Se  $0 \leq \alpha < 1$ , então o conjunto  $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = A$ , pois apenas valores  $x \in A$  tem suas imagens  $\chi_A(x) = 1$  e consequentemente  $\chi_A(x) \geq \alpha$ .

(III) se  $\alpha < 0$ , podemos notar que o conjunto  $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = X$ , pois para qualquer que seja  $x \in X$ , os valores  $\chi_A(x) \geq 0$ .

Em todo o caso, vemos que o conjunto  $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\}$  é um elemento de  $\mathcal{C}$ , pois  $\emptyset, X$  e  $A$  são elementos de  $\mathcal{C}$ . Portanto, a função característica  $\chi_A(x)$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável.

**Exemplo 2.2.3** *Considere o espaço mensurável  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Toda função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua é Borel mensurável.*

Para mostrar a validade do exemplo acima, precisamos de resultados auxiliares que encontraremos em (LIMA, 2019). Um deles é a proposição abaixo.

**Proposição 2.2.1** *Suponha que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua em todos os pontos de  $X$ . Se  $X \subset \mathbb{R}$  é um aberto <sup>7</sup>, então o conjunto  $A = \{a \in X; f(a) > k\}$  é um aberto (p.226).*

Além disso, em (LIMA, 2019, p.167), encontramos o seguinte teorema:

<sup>6</sup> As vezes também é chamada função indicadora.

<sup>7</sup> Em caso de dúvida sobre o que é um subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}$  aberto, consulte (LIMA, 2019, p.164).

**Teorema 2.2.1 (Estrutura de abertos da reta)** *Todo subconjunto aberto  $A \subset \mathbb{R}$  se exprime, de modo único, como um reunião enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos.*

Segue disso que o  $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_n$  onde cada  $A_n$  é um intervalo aberto, ou seja,  $A_n \in \mathcal{B}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Com isso, pela definição 2.1.1, o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}$ . Portanto, qualquer função contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é Borel mensurável.

Lembre que ao apresentarmos a Álgebra de Borel (definição 2.1.2), mostramos no teorema 2.1.1 que há mais de uma maneira de definir os borelianos. Para uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{C}$ -mensurável, também podemos definir uma função  $\mathcal{C}$ -mensurável por meio de conjuntos diferentes conforme o seguinte teorema.

**Teorema 2.2.2** *Seendo  $(X, \mathcal{C})$  um espaço mensurável, para uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{C}$ -mensurável as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, A_\alpha = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C};$     (c)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, C_\alpha = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{C};$   
 (b)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, B_\alpha = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{C};$     (d)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, D_\alpha = \{x \in X; f(x) < \alpha\} \in \mathcal{C}.$

*Demonstração.*

Dividiremos esta demonstração em três partes. A estratégia será mostrar que a afirmação (a) é equivalente à afirmação (b); depois que a afirmação (c) é equivalente à afirmação (d); e por fim que a afirmação (a) ocorre se, e somente se, a afirmação (c) ocorre.

(I) Suponha a validade da afirmação (a). Se  $A_\alpha \in \mathcal{C}$ , então  $A_\alpha^c \in \mathcal{C}$ , pela definição de  $\mathcal{C}$ -álgebra. Perceba que

$$x \in A_\alpha^c \Leftrightarrow x \notin A_\alpha \Leftrightarrow x \in X \text{ e } f(x) \leq \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in B_\alpha$$

Assim, um elemento está em  $A_\alpha^c$  se, e somente se, está em  $B_\alpha$ . Segue que  $A_\alpha^c = B_\alpha$ . Logo,  $B_\alpha$  é elemento de  $\mathcal{C}$ .

(II) Para mostrar a equivalência entre as afirmações (c) e (d) utilizamos um argumento totalmente análogo à parte (I), pois se  $x \notin C_\alpha$ , então  $f(x) < \alpha$  acarretando que  $x \in D_\alpha$  e vice-versa.

(III) Suponha que  $A_\alpha \in \mathcal{C}$ . Tome a sequência  $(A_{\alpha - \frac{1}{n}})$ . Claramente, cada  $A_{\alpha - \frac{1}{n}}$  é um elemento de  $\mathcal{C}$  por definição. Logo, pela proposição 2.1.2, a interseção  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in \mathcal{C}$ . Além disso,



note que

$$\begin{aligned}
 x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} &\Leftrightarrow x \in A_{\alpha - \frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N} \\
 &\Leftrightarrow f(x) > \alpha - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \\
 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \alpha - \frac{1}{n} \right) \\
 &\Leftrightarrow f(x) \geq \alpha \\
 &\Leftrightarrow x \in C_{\alpha}
 \end{aligned}$$

Desta forma,  $C_{\alpha} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}}$ . Logo  $C_{\alpha} \in \mathcal{C}$  como queríamos.

Reciprocamente, suponha que  $C_{\alpha} \in \mathcal{C}$ . Tomemos a sequência  $(C_{\alpha + \frac{1}{n}})$ . Cada elemento  $C_{\alpha + \frac{1}{n}} \in \mathcal{C}$  por definição. Assim, pela definição de  $\sigma$ -álgebra,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}} \in \mathcal{C}$ . Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
 x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}} &\Leftrightarrow x \in C_{\alpha + \frac{1}{n_0}}, \text{ para algum } n_0 \in \mathbb{N} \\
 &\Leftrightarrow f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n_0} \\
 &\Leftrightarrow f(x) > \alpha \\
 &\Leftrightarrow x \in A_{\alpha}
 \end{aligned}$$

Assim,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}} = A_{\alpha}$ . Logo,  $A_{\alpha} \in \mathcal{C}$ . Portanto, segue de (I), (II) e (III) que as afirmações (a), (b), (c) e (d) são todas equivalentes.

□

Perceba que mesmo na presença do teorema 2.2.2 acima, mostrar que uma função é mensurável é trabalhoso e repetitivo uma vez que, geralmente, é preciso verificar os casos de  $\alpha$ . Com o intuito de otimizar a identificação de uma função mensurável, veremos o comportamento de operações aritméticas entre funções mensuráveis.

**Proposição 2.2.2** *Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real  $\mathcal{C}$ -mensurável e  $c \in \mathbb{R}$ . Então as funções  $cf$ ,  $f^2$  e  $|f|$  são  $\mathcal{C}$ -mensuráveis.*

*Demonstração.*

(a) Mostraremos que  $cf$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável para todos os casos possíveis do número real  $c \in \mathbb{R}$ .

(i) Se  $c = 0$ , então  $c \cdot f(x) = 0$ ,  $\forall x \in X$ , ou seja,  $cf$  se torna a função constante. Segue pelo exemplo 2.2.1 que  $cf$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável.

(ii) Se  $c > 0$ , então dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos  $cf(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \frac{\alpha}{c}$ . Logo,

$$\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\}$$

Isso ocorre para todo  $\alpha$  e  $f$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável, isto é,  $\left\{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\} \in \mathcal{C}$ . Logo,  $cf$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável.

(iii) Por fim, se  $c < 0$ , então existe um  $0 < z \in \mathbb{R}$  tal que  $c = -z$ . Assim,

$$cf(x) > \alpha \Leftrightarrow -zf(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x) < -\frac{\alpha}{z}$$

Assim, o conjunto  $\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) < -\frac{\alpha}{z}\right\}$ . Desta forma, o conjunto  $\left\{x \in X; f(x) < -\frac{\alpha}{z}\right\} \in \mathcal{C}$  pelo item (d) do teorema 2.2.2. Portanto,  $cf$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável em todos os casos de  $c \in \mathbb{R}$ .

(b) Para mostrar a mensurabilidade de  $f^2$  é também necessário analisar os casos de  $\alpha$ .

(i) Se  $\alpha < 0$ , então  $\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} = X$ , pois  $[f(x)]^2 \geq 0$  para todo  $x \in X$ .

(ii) Se  $\alpha \geq 0$ , então para todo  $x \in X$   $[f(x)]^2 > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \sqrt{\alpha}$  ou  $f(x) < -\sqrt{\alpha}$ . Assim, um elemento  $x_0 \in \{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\}$  se, e somente se,  $x_0 \in \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\}$  ou  $x_0 \in \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$ . Com isso,

$$\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$$

Como  $f$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável por hipótese, temos que  $\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \in \mathcal{C}$  e  $\{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathcal{C}$ . Desta forma, usando a definição de  $\sigma$ -álgebra, obtemos que  $\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathcal{C}$ . Consequentemente,  $\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} \in \mathcal{C}$  acarretando a mensurabilidade de  $f^2$ .

(c) Analogamente ao item anterior, se  $\alpha < 0$ ,  $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = X$ . Por outro lado, se  $\alpha \geq 0$ , vemos que  $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X; f(x) < -\alpha\}$ . Assim, a mensurabilidade de  $f$  acarreta na mensurabilidade de  $|f|$  como desejávamos.

□

**Proposição 2.2.3** *Sejam  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  e  $g$  são ambas  $\mathcal{C}$ -mensuráveis, então as funções  $f + g$  e  $f \cdot g$  são também  $\mathcal{C}$ -mensuráveis.*

*Demonstração.*

Provaremos, primeiramente, que  $f + g$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável. Ora, por hipótese,  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -mensuráveis. Assim, dado  $r \in \mathbb{Q}$ , os conjuntos  $\{x \in X; f(x) > r\}$  e  $\{x \in X; g(x) > \alpha - r\}$  são ambos elementos de  $\mathcal{C}$ . Considere o conjunto

$$H_r = \{x \in X; f(x) > r\} \cap \{x \in X; g(x) > \alpha - r\}$$

Isto é, o conjunto dos elementos  $x \in X$  tal que  $f(x) > r$  e  $g(x) > \alpha - r$  simultaneamente. Assim, afirmamos que  $\{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} H_r$ . Com efeito, as seguintes equivalências ocorrem para um elemento  $a \in X$  tomado arbitrariamente

$$\begin{aligned} a \in \{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\} &\Leftrightarrow (f+g)(a) > \alpha \\ &\Leftrightarrow f(a) + g(a) > \alpha \\ &\Leftrightarrow f(a) + g(a) > \alpha - r + r \text{ para } r \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow f(a) > r \text{ e } g(a) > \alpha - r \text{ para } r \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) > r\} \text{ e } a \in \{x \in X; g(x) > \alpha - r\} \text{ para } r \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) > r\} \cap \{x \in X; g(x) > \alpha - r\} \text{ para } r \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow a \in H_r, \text{ para } r \in \mathbb{Q} \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} H_r. \end{aligned}$$

Concluindo que a afirmação é verdadeira. Além disso, para cada  $r \in \mathbb{Q}$ , o conjunto  $H_r$  é um elemento de  $\mathcal{C}$ , pois é a interseção de dois elementos de  $\mathcal{C}$  (proposição 2.1.2). Note também que, pela definição de  $\mathcal{C}$ , a coleção  $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} H_r$  é um elemento de  $\mathcal{C}$ , pois  $\mathbb{Q}$  é enumerável<sup>8</sup>. Segue que  $f + g$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável.

Para mostrar que  $fg$  é mensurável basta notar que é a combinação de outras funções  $\mathcal{C}$ -mensuráveis. De fato, dado  $x \in X$ , temos

$$\begin{aligned} 4(fg)(x) &= 2(fg)(x) + 2(fg)(x) \\ &= [f(x)]^2 - [f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2 - [g(x)]^2 + 2f(x)g(x) \\ &= ([f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2) - ([g(x)]^2 - 2f(x)g(x) + [f(x)]^2) \\ &= (f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2 \\ &= [(f+g)(x)]^2 - [(f-g)(x)]^2. \end{aligned}$$

<sup>8</sup> Em caso de dúvida, vide (LIMA, 2019, p.51).

Logo,  $fg = \frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2]$ . Note que  $f-g$  é mensurável, pois sendo  $g$  mensurável, podemos usar a proposição 2.2.2 pondo  $c = -1$ . Assim, temos  $(-1)g = -g$ . Logo,  $-g$  é mensurável. Além disso, pela parte (a), desta proposição,  $f-g = f+(-g)$ . Segue que  $fg$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável.

□

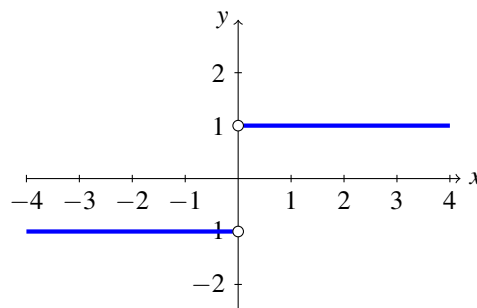
**Definição 2.2.2** *Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real. Dizemos que a **parte positiva** da função  $f$  é a função  $f^+ : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}$ . Semelhantemente, chamamos de a **parte negativa** da função  $f$ , a função  $f^- : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$ .<sup>9</sup>*

É possível que a definição de parte positiva e negativa de funções fique um pouco abstrata em um primeiro contato. Numa tentativa de esclarecer ao máximo, daremos o seguinte exemplo:

**Exemplo 2.2.4** *Seja  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ . Então  $f^+(x) = 1$  e  $f^-(x) = -1$ .*

De fato, ao tomarmos um elemento real  $x < 0$ , vemos que sua imagem  $f(x) < 0$  sendo  $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$ . Se  $x > 0$ , então  $f(x) = \frac{x}{x} = 1$ . Assim,  $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} = 1$  enquanto que  $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\} = -1$ . Neste caso, podemos perceber, ao olhar para a imagem 3 a seguir que tanto a parte positiva quanto a parte negativa da função  $f$  acima apresentada são ambas funções constantes.

**Figura 3 – Gráfico da Função  $f(x) = \frac{|x|}{x}$**



Fonte: Elaborado pelo autor

Por serem constantes, já vimos que são mensuráveis. Mas e a função  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ? Será que é mensurável? A resposta é sim e para mostrarmos isso precisaremos de alguns resultados auxiliares.

<sup>9</sup> Em caso de dúvidas sobre o supremo de um conjunto real, vide (LIMA, 2019, p.75).

**Lema 2.2.1** *Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real. Então  $f = f^+ - f^-$  e  $|f| = f^+ + f^-$ .*

*Demonstração.*

Para provar que  $f = f^+ - f^-$ , devemos avaliar os casos de  $f(x)$ . Logo, se  $f(x) \geq 0$ , então  $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} = f(x)$  e  $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\} = 0$ , pois  $f(x) \geq 0 \Rightarrow -f(x) \leq 0$ . Disso,  $f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x)$ , ou seja,  $(f^+ - f^-)(x) = f(x), \forall f(x) \geq 0$ . Caso  $f(x) < 0$ , então  $-f(x) > 0$ . Com isso,  $\sup\{f(x), 0\} = 0$  e  $\sup\{-f(x), 0\} = -f(x)$ . Desta forma vemos que  $f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x)$ . Em todo caso,  $f = f^+ - f^-$ .

Analogamente, se  $f(x) \geq 0$ , então  $\sup\{f(x), 0\} = f(x)$  e  $\sup\{-f(x), 0\} = 0$ . Assim,  $f^+(x) + f^-(x) = f(x)$ . Caso,  $f(x) < 0$ , então  $-f(x) > 0$ . Com isso, obtemos  $\sup\{f(x), 0\} = 0$  e  $\sup\{-f(x), 0\} = -f(x)$ . Logo,  $f^+(x) + f^-(x) = -f(x)$ . Desta forma,

$$(f^+ + f^-)(x) = \max\{f(x), -f(x)\} = |f(x)|.$$

Portanto,  $f^+ + f^- = |f|$ .

□

Observe que o lema ?? nos dá a forma das funções  $f^+$  e  $f^-$  de maneira implícita. De fato, somando as duas expressões membro a membro vemos que

$$f + |f| = (f^+ + f^+) - (f^- + f^-) = 2f^+$$

Assim, podemos expressar  $f^+ = \frac{|f| + f}{2}$ . De modo semelhante, conseguimos subtrair membro a membro e obter a expressão  $f^- = \frac{|f| - f}{2}$ . Isso demonstra o lema adiante:

**Lema 2.2.2** *Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real, então  $f^+ = \frac{|f| + f}{2}$  e  $f^- = \frac{|f| - f}{2}$ .*

**Teorema 2.2.3** *Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável se, e somente se, suas partes negativa e positiva são ambas  $\mathcal{C}$ -mensuráveis.*

*Demonstração.*

Suponha que  $f$  seja  $\mathcal{C}$ -mensurável. Pela proposição 2.2.2 vemos que a função  $|f|$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável e pelo lema 2.2.2 as funções  $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$  e  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$  também são  $\mathcal{C}$ -mensuráveis. Reciprocamente, supondo que  $f^+$  e  $f^-$  são mensuráveis, temos pelo lema ?? que  $f = f^+ - f^-$ . Segue, novamente pela proposição 2.2.3, que  $f$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável.

□

Uma vez que foram apresentadas as definições de  $\sigma$ -álgebra, espaços mensuráveis e funções mensuráveis, nosso alicerce está totalmente consolidado para que possamos entender o que é uma medida sem muita dificuldade. Isso faremos na seção seguinte.

### 3 A TEORIA DA MEDIDA

#### 3.1 Os Espaços de Funções Mensuráveis

As vezes, teremos conjuntos “grandes” de tal forma que sua medida não poderá ser expressa por um número real. Por exemplo, o conjunto  $\mathbb{R}$ . Por ser infinito <sup>1</sup>, consideramos que seu tamanho é “infinito” e representamos pelo símbolo  $+\infty$ . Entretanto,  $+\infty$  não é um número real e sim uma conceito de “tão grande quanto se queira”. Para solucionar esta problemática, vamos considerar um novo sistema numérico.

**Definição 3.1.1** *A coleção  $\overline{\mathbb{R}}$  que consiste de  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  é chamada de **Sistema Estendido de Números Reais**.*

Ou seja,  $\overline{\mathbb{R}}$  nada mais é que o conjunto dos números reais com a possibilidade de se ter  $-\infty$  ou  $+\infty$ . Com isso, parece que nosso problema de medir conjuntos muito grandes se resolveu. Entretanto, alguns cuidados são necessários para operarmos em  $\overline{\mathbb{R}}$ . Um deles, por exemplo, é que  $\overline{\mathbb{R}}$  não é fechado para operações de  $\mathbb{R}$  tais como  $(+\infty) + (-\infty)$  que nem definido é. Dito isso, para  $x \in \mathbb{R}$ , as operações dos símbolos  $+\infty$  e  $-\infty$  são dadas da seguinte forma:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ ;
- $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$ ;
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ ;
- $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$ ;
- $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ ;
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$ ;
- $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$ ;
- $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$ .

Na multiplicação, dependendo do número real, a operação diferencia-se. Assim, podemos ter

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = \begin{cases} +\infty, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -\infty, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \begin{cases} -\infty, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ +\infty, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Neste novo contexto de números reais a  $\sigma$ -álgebra de Borel não é mais válida uma vez que a definição 2.1.2 não inclui  $+\infty$  nem  $-\infty$ . Com isso, considere  $\overline{\mathbb{R}}$ . Tomando um conjunto arbitrário  $E \in \mathcal{B}$ , com  $\emptyset \neq E$ , defina  $E_1 = E \cup \{-\infty\}$ ,  $E_2 = E \cup \{+\infty\}$  e  $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

<sup>1</sup> Vide (LIMA, 2019, p.86)

Desta forma, o conjunto  $\overline{\mathcal{B}} = \bigcup_{E \in \mathcal{B}} \{E, E_1, E_2, E_3\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Com efeito, se  $E \in \mathcal{B}$ , então é um intervalo aberto conforme o teorema 2.1.1. Assim,  $E_1, E_2, E_3$  e  $E_4$  serão intervalos do tipo  $[-\infty, x)$  ou  $(x, +\infty]$  que são elementos de  $\mathcal{B}$  acrescidos de  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Deste modo, é fácil verificar que se um elemento  $A \in \overline{\mathcal{B}}$ , então  $A^c \in \overline{\mathcal{B}}$ . Além disso, a união enumerável é, no máximo, o intervalo  $[-\infty, +\infty]$  que é exatamente  $\overline{\mathbb{R}}$ . Desta forma,  $\overline{\mathcal{B}}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Definição 3.1.2** A  $\sigma$ -álgebra  $\overline{\mathcal{B}} = \bigcup_{E \in \mathcal{B}} \{E, E_1, E_2, E_3\}$  do conjunto  $\overline{\mathbb{R}}$  é chamada de *Álgebra de Borel Estendida*.

Uma vez que estamos familiarizados com os conceitos de funções de valores reais mensuráveis, estamos prontos para estender este conceito para o conjunto  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Definição 3.1.3** Sendo  $(X, \mathcal{C})$  um espaço mensurável, uma função de valores reais estendidos  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é dita  $\mathcal{C}$ -mensurável caso o conjunto  $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$  para qualquer que seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Denotaremos a família de todas as funções de valores reais estendidos de  $X$  que são  $\mathcal{C}$ -mensuráveis por  $M(X, \mathcal{C})$ .

**Proposição 3.1.1** Se  $f \in M(X, \mathcal{C})$ , então  $\{x \in X; f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\}$ .

*Demonstração.*

Tome, de modo arbitrário, um elemento  $a \in X$ . Assim,

$$\begin{aligned} a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\} &\Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) > n\}, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(a) > n \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n \\ &\Leftrightarrow f(a) \geq +\infty. \end{aligned}$$

Como estamos trabalhando com  $\overline{\mathbb{R}}$ , não existe elemento  $x > +\infty$ . Logo, o único elemento possível para  $f(a)$  é  $+\infty$ . Assim, tudo isso ocorre se, e somente se, o elemento  $a \in \{x \in X; f(x) = +\infty\}$  como queríamos. Além disso, note que cada  $\{x \in X; f(x) > n\} \in \mathcal{C}$ . Segue, pela proposição 2.1.2, que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\} \in \mathcal{C}$  acarretando que  $\{x \in X; f(x) = +\infty\} \in \mathcal{C}$ .

□



**Proposição 3.1.2** Se  $f \in M(X, \mathcal{C})$ , então  $\{x \in X; f(x) = -\infty\} = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \right)^c$ .

*Demonstração.*

Analogamente à proposição 3.1.1 tomemos  $a \in X$ . Segue que

$$\begin{aligned}
 a \in \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \right)^c &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\{x \in X; f(x) > -n\})^c \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a \in (\{x \in X; f(x) > -n\})^c \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a \notin \{x \in X; f(x) > -n\} \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a \in \{x \in X; f(x) \leq -n\} \\
 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(a) \leq -n \\
 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) \\
 &\Leftrightarrow f(a) \leq -\infty \\
 &\Leftrightarrow f(a) = -\infty \\
 &\Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) = -\infty\}
 \end{aligned}$$

Ora, cada  $\{x \in X; f(x) > -n\} \in \mathcal{C}$ . Assim, por definição de  $\sigma$ -álgebra, temos que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \in \mathcal{C}$  e também  $\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \right)^c \in \mathcal{C}$ . Concluimos disso que  $\{x \in X; f(x) = -\infty\} \in \mathcal{C}$  como queríamos provar.

□

**Teorema 3.1.1** Uma função de valores reais estendidos  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável se, e somente se, os conjuntos  $A = \{x \in X; f(x) = +\infty\}$  e  $B = \{x \in X; f(x) = -\infty\}$  são elementos de  $\mathcal{C}$  e a função  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \notin A \cup B \\ 0, & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}$$

é  $\mathcal{C}$ -mensurável.

*Demonstração.*

Suponha que  $f \in M(X, \mathcal{C})$ . Logo, pelas proposições 3.1.1 e 3.1.2, os conjuntos  $A$  e  $B$  são elementos de  $\mathcal{C}$ . Assim, tome  $\alpha \in \mathbb{R}$  com  $\alpha \geq 0$ , então os elementos de  $\{x \in X; h(x) > \alpha\}$

são os elementos de  $\{x \in X; f(x) > \alpha\}$  que não estão em  $A$ , pois  $h$  tem contradomínio  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathcal{C}$  é uma  $\sigma$ -álgebra,  $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$ . Com isso,

$$\{x \in X; h(x) > \alpha\} = A^c \cap \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$$

Segue, pela proposição 2.1.2 que  $\{x \in X; h(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$ , ou seja,  $h$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável. Caso,  $\alpha < 0$ , então  $\{x \in X; h(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B$ , pois  $h(x) = 0$  para  $x \in A \cup B$ . Desta forma  $h$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável.

Por outro lado, se supormos que  $A$  e  $B$  são elementos de  $\mathcal{C}$  e  $h$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável, então

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; h(x) > \alpha\} \cup A$$

quando  $\alpha \geq 0$ , e

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; h(x) > \alpha\} - B$$

quando  $\alpha < 0$  por motivos análogos à primeira parte da demonstração. Portanto,  $f$  é uma função  $\mathcal{C}$ -mensurável como desejávamos.

□

Como consequência do teorema 2.2.2 e o teorema 3.1.1 obtemos, imediatamente, que se  $f \in M(X, \mathcal{C})$ , então as funções  $cf, f^2, |f|, f^+$  e  $f^-$  também são elementos de  $M(X, \mathcal{C})$ . Entretanto, um resultado análogo à proposição 2.2.3 não possível em  $\overline{\mathbb{R}}$ . Isso acontece porquê em  $\overline{\mathbb{R}}$  a operação de adição não é bem definida. Então caso  $f(x) = +\infty$  e  $g(x) = -\infty$  para algum  $x \in \mathbb{R}$  a adição  $f(x) + g(x)$  não é realizada. Por outro lado, a função  $fg$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável se  $f$  e  $g$  forem ambas  $\mathcal{C}$ -mensuráveis. Para mostrar isso, precisamos do seguinte teorema

**Teorema 3.1.2** *Seja  $(f_n)$  uma sequência de elementos de  $M(X, \mathcal{C})$  e defina as funções*

$$f(x) = \inf f_n(x), F(x) = \sup f_n(x), f^*(x) = \liminf f_n(x), F^*(x) = \limsup f_n(x).$$

*Então as funções  $f, f^*, F$  e  $F^*$  são elementos de  $M(X, \mathcal{C})$ .*

*Demonstração.*

Como  $(f_n)$  é uma sequência de funções  $\mathcal{C}$ -mensuráveis e  $f = \inf f_n$ , afirmamos que

$\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$ . De fato, tomemos um elemento  $h \in X$ . Assim,

$$\begin{aligned} h \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} &\Leftrightarrow h \in \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f_n(h) \geq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(h) \geq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f(h) \geq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow h \in \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

Como cada  $\{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável, segue pela proposição 2.1.2 que o conjunto  $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{C}$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Desta forma,  $f$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável.

Observe, também, que  $\{x \in X; F(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) > \alpha\}$ . Com efeito, para  $h \in X$

$$\begin{aligned} h \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) > \alpha\} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } h \in \{x \in X; f_k(x) > \alpha\} \\ &\Leftrightarrow f_k(h) > \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow F(h) \geq f_k(h) > \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow F(h) > \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow h \in \{x \in X; F(x) > \alpha\} \end{aligned}$$

Assim, concluímos que  $f$  e  $F$  são  $\mathcal{C}$ -mensuráveis. Note que a mensurabilidade de  $f^*$  e  $F^*$  vem de  $f$  e  $F$  uma vez que

$$f^*(x) = \sup_{n \geq 1} \left\{ \inf_{m \geq n} f_m(x) \right\} \text{ e } F^*(x) = \inf_{n \geq 1} \left\{ \sup_{m \geq n} f_m(x) \right\}$$

□

**Corolário 3.1.1** Se  $(f_n)$  é uma sequência em  $M(X, \mathcal{C})$  que converge para  $f$  em  $X$ , então  $f$  também está em  $M(X, \mathcal{C})$ .

*Demonstração.*

Ora, por hipótese  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ . Só que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ . Segue que  $f(x) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$  que, por sua vez, é  $\mathcal{C}$ -mensurável pelo teorema anterior.

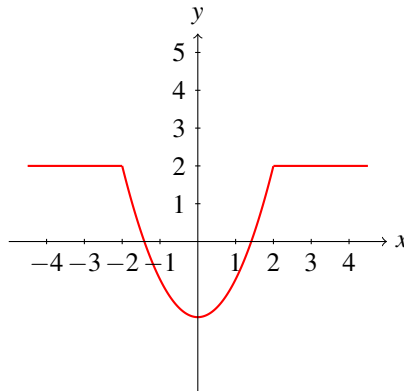
□

**Definição 3.1.4 (Truncamento de uma função mensurável)** *Seja  $f$  uma função em  $M(X, \mathcal{C})$  e  $A > 0$ . Definimos o truncamento  $f_A$  da função  $f$  por*

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq A \\ A, & \text{se } f(x) > A \\ -A, & \text{se } f(x) < -A \end{cases}$$

**Exemplo 3.1.1** *Seja  $f \in M(X, \mathcal{C})$  tal que  $f(x) = x^2 - 2$ . Então o truncamento  $f_2$  é representado, graficamente, como*

**Figura 4 – representação do truncamento  $f_2$  da função  $f(x) = x^2 - 2$**



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que a figura 4 mostra que o truncamento  $f_2$  efetua uma espécie de “limitação” da função  $f$  pela constante 2.

**Proposição 3.1.3** *Seja  $A$  um número real maior que zero. Se  $f$  é uma função em  $M(X, \mathcal{C})$ , então  $f_A$  é uma função  $\mathcal{C}$ -mensurável.*

*Demonstração.*

De fato, se os elementos  $x \in X$  são tais que  $-A \leq f(x) \leq A$ , então  $f_A(x) = f(x)$ . Logo  $f_A$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável, pois  $f$  o é. Caso esses elementos sejam tais que  $f(x) > A$  ou  $f(x) < -A$  a função  $f_A$  é constante. Segue pela proposição 2.2.1 que  $f_A$  é um elemento de  $M(X, \mathcal{C})$ .

□

Retornemos para a mensurabilidade do produto de duas funções com valores reais estendidos. Sejam  $f, g \in M(X, \mathcal{C})$ . Tomemos duas sequências  $(f_n)$  e  $(g_m)$  tais que para cada

$k \in \mathbb{N}$ ,  $f_k$  e  $g_k$  são truncamentos de  $f$  e  $g$ , respectivamente. Ou seja,

$$g_m(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } |g(x)| \leq m \\ n, & \text{se } g(x) > m \\ -n, & \text{se } g(x) < -m \end{cases}$$

e  $f_n$  é definida de modo similar. Pela proposição 3.1.3,  $f_n$  e  $g_m$  são  $\mathcal{C}$ -mensuráveis para cada  $n$  e  $m$  números naturais. Assim, pela proposição 2.2.3  $f_n g_m$  também é  $\mathcal{C}$ -mensurável para quaisquer  $n, m \in \mathbb{N}$ . Como o truncamento de uma função  $f$  causa uma “limitação” na função  $f$  se tomarmos  $n$  grande suficiente o truncamento  $f_n$  tende a se aproximar da função  $f$ . Assim, para  $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x) g_m(x)) = f(x) g_m(x)$$

Segue pelo corolário 3.1.1 que  $f g_m \in M(X, \mathcal{C})$ . Com isso, temos que para  $x \in X$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (f(x) g_m(x)) = f(x) g(x) = (fg)(x)$$

Segue, pelo mesmo corolário, que  $fg \in M(X, \mathcal{C})$ .

Nos definimos a mensurabilidade de funções de maneira bem peculiar aos números reais uma vez que será o enfoque de nosso trabalho. Entretanto, em alguns casos, é necessário trabalhar com mensurabilidade de uma forma mais abstrata. Dito isso, encerraremos esta seção apresentando a definição generalizada de mensurabilidade de uma função.

**Definição 3.1.5** *Sejam  $(X, \mathcal{C})$  e  $(Y, \mathcal{F})$  dois espaços mensuráveis. Dizemos que uma função  $\phi : (X, \mathcal{C}) \rightarrow (Y, \mathcal{F})$  é dita mensurável se o conjunto  $f^{-1}(E) = \{x \in X; f(x) \in E\} \in \mathcal{C}$  para todo conjunto  $E \in \mathcal{F}$ .*

Embora essa definição pareça ser totalmente distinta da definição 2.2.1, as duas são equivalentes no caso particular de  $Y = \mathbb{R}$  e  $\mathcal{F} = \mathcal{B}$  conforme demonstrado a seguir.

**Proposição 3.1.4** *Seja  $(X, \mathcal{C})$  um espaço mensurável e  $f$  uma função. Então  $f$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável se, e somente se,  $f^{-1}(E) \in \mathcal{C}$  para todo boreliano  $E$ .*

*Demonstração.*

Suponha  $f$  uma função  $\mathcal{C}$ -mensurável. Sabemos pela definição 2.1.2 que os elementos da álgebra de Borel são do tipo  $(-\infty, x)$  com  $x \in \mathbb{R}$ . Assim, dado arbitrariamente  $\alpha \in \mathbb{R}$  temos que

$$f^{-1}(-\infty, \alpha) = \{x \in X; f(x) \in (-\infty, \alpha)\} = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\}$$

Como  $f$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável segue pelo teorema 2.2.2 que  $f^{-1}(-\infty, \alpha) \in \mathcal{C}$ . Reciprocamente se  $f^{-1}(-\infty, \alpha) \in \mathcal{C}$  para qualquer  $\alpha$  concluímos, imediatamente, que  $\{x \in X; f(x) < \alpha\} \in \mathcal{C}$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $f$  é  $\mathcal{C}$ -mensurável.

□

### 3.2 Espaços de Medida

Nas subseções anteriores, nós trabalhamos com conjuntos e com funções mensuráveis, isto é, que podem ser medidas de alguma forma. Nesta subseção, nos preocuparemos em definir e trabalhar com funções de um espaço mensurável  $(X, \mathcal{C})$  que daremos o nome de "medida". Tais funções são induzidas pela nossa concepção de comprimento, área, volume, etc. Dito isso, para trabalharmos com medidas primeiro retomaremos alguns resultados sobre sequência de conjuntos.

**Definição 3.2.1** *Uma sequência de conjuntos  $(A_n)$  é dita **crescente** se  $A_n \subseteq A_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Caso tenhamos  $A_n \supseteq A_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , dizemos que a sequência de conjuntos é **decrescente**.*

**Proposição 3.2.1** *Seja  $(E_n)$  uma sequência crescente de conjuntos. Se  $(A_n)$  é tal que  $A_1 = E_1$  e  $A_n = E_n - E_{n-1}$  para todo  $n > 1$ , então:*

- (i)  $A_n$  é uma sequência disjunta;<sup>2</sup>
- (ii)  $E_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$ ;
- (iii)  $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_n$ ;

*Demonstração.*

Para provar (a) precisamos mostrar que para todo  $n, m \in \mathbb{N}$  se  $m \neq n$ , então  $A_n \cap A_m = \emptyset$ . Lembre que  $A - B = A \cap B^c$  para quaisquer conjuntos  $A$  e  $B$ . Desta forma, como a interseção

---

<sup>2</sup> Lembre que uma sequência disjunta significa que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$

entre conjuntos é associativa e comutativa temos que

$$\begin{aligned}
 A_m \cap A_n &= (E_m - E_{m-1}) \cap (E_n - E_{n-1}) \\
 &= (E_m \cap E_{m-1}^c) \cap (E_n \cap E_{n-1}^c) \\
 &= (E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1}^c \cap E_{n-1}^c) \\
 &= (E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c
 \end{aligned}$$

Com isso, se  $m > n$ , então  $E_n \subseteq E_m$  e  $E_{n-1} \subseteq E_{m-1}$ , pois  $(E_n)$  é uma sequência crescente. Além disso,  $E_m^c \subseteq E_{m-1}^c$  e  $E_m \cap E_m^c = \emptyset$ . Segue que

$$(E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c = (E_m) \cap E_{m-1}^c = \emptyset$$

Caso tenhamos  $m < n$  então  $E_m \subseteq E_n$  e  $E_{m-1} \subseteq E_{n-1}$ . Segue analogamente que

$$(E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c = (E_n) \cap E_{n-1}^c = \emptyset$$

Em todo caso,  $A_m \cap A_n = \emptyset$  para todo  $m \neq n$ .

Provaremos o item (b) por indução sobre  $n$ . Como  $(E_n)$  é crescente, temos que  $E_1 \subseteq E_2$ . Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{j=1}^2 A_j &= A_1 \cup A_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1) \\
 &= E_1 \cup (E_2 \cap E_1^c) \\
 &= (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_1^c) \\
 &= (E_1 \cup E_2) \cap \mathcal{C} \\
 &= (E_1 \cap E_2) = E_2
 \end{aligned}$$

Suponha que exista um  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\bigcup_{j=1}^k A_j = E_k$ . Mostraremos que  $\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j = E_{k+1}$  também é verdadeira. Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j &= \left( \bigcup_{j=1}^k A_j \right) \cup A_{k+1} \\
 &= E_k \cup A_{k+1} \\
 &= E_k \cup (E_{k+1} - E_k) \\
 &= E_k \cap E_{k+1} \\
 &= E_{k+1}
 \end{aligned}$$

Segue, pelo método da indução finita, que  $\bigcup_{j=1}^n A_j = E_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

Por fim, (c) é um resultado imediato, pois  $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$  se, e somente se, existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in E_{n_0}$ . Pelo item (b), isso só ocorre se  $x \in \bigcup_{j=1}^{n_0} A_j$ . Mas isso é equivalente à dizer que existe um  $k$  com  $1 \leq k \leq n_0$  tal que  $x \in A_k$ . Como  $k \in \mathbb{N}$  isso acontece se, e somente se,  $x \in A_k$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Portanto  $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ .

□

**Proposição 3.2.2** *Seja  $(F_n)$  uma sequência decrescente de conjuntos. Se  $(E_n)$  é tal que  $E_n = F_1 - F_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $(E_n)$  é crescente e  $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = F_1 - \bigcup_{j=1}^{\infty} F_n$ .*

*Demonstração.*

Queremos mostrar que  $(E_n)$  é crescente, isto é,  $E_n \subseteq E_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Tome  $x \in E_n$ . Logo,  $x \in F_1$  e  $x \notin F_n$ , por construção. Como  $(F_n)$  é decrescente,  $F_n \supseteq F_{n+1}$ . Assim,  $x \notin F_n \Rightarrow x \notin F_{n+1}$ . Com isso,  $x \in F_1$  e  $x \notin F_{n+1}$ . Segue que  $x \in E_{n+1}$  e que  $E_n \subseteq E_{n+1}$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  como queríamos. Além disso, um elemento  $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  se, e somente se,  $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F_1 - F_n)$ . Isso é equivalente a dizer que existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a \in F_1 - F_{n_0}$ . Correspondentemente,  $a \in F_1$  e existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a \notin F_{n_0}$ . Isso só ocorre se  $a \in F_1$ , mas  $a \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Portanto,  $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = F_1 - \bigcup_{j=1}^{\infty} F_n$ .

□

**Definição 3.2.2** *Uma medida é uma função  $\mu : (X, \mathcal{C}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tal que satisfaz as seguintes condições:*

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (ii)  $\mu(E) \geq 0, \forall A \in \mathcal{C}$ ;
- (iii) Se  $(A_n)$  é uma sequência disjunta de elementos de  $\mathcal{C}$ , então  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ .

Ou seja, uma medida é uma função não negativa que é contavelmente aditiva. Além disso, o valor de  $\mu$  pode ser igual à  $+\infty$  para algum conjunto  $A \in \mathcal{C}$ . Quando temos que  $\mu(E) < +\infty$  para qualquer que seja o conjunto  $E \in \mathcal{C}$ , dizemos que temos uma medida finita.



**Definição 3.2.3** Dizemos que uma tripla ordenada  $(X, \mathcal{C}, \mu)$  constituída por um conjunto  $X$ , uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{C}$  desse conjunto e uma medida  $\mu$  sobre o espaço mensurável  $(X, \mathcal{C})$  é um espaço de medida.

**Exemplo 3.2.1** Seja  $X$  um conjunto e  $\mathcal{C}$  a  $\sigma$ -álgebra formada por todos os subconjunto de  $X$ . Defina  $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  pondo  $\mu_1(A) = 0$  para qualquer  $A \in \mathcal{C}$  e  $\mu_2$  é pondo

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } A = \emptyset \\ +\infty, & \text{se } A \neq \emptyset \end{cases}$$

Sendo definidas dessa forma, as funções  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são medidas.

De fato, em ambas as condições (i) e (ii) são trivialmente satisfeitas. Para a condição (iii), temos que qualquer sequência disjunta  $(A_n)$  acarretará que

$$\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)$$

Para  $\mu_2$  temos dois casos possíveis. Se  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ , então  $\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ . Entretanto isso ocorre somente se  $A_j = \emptyset$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Caso  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ , conseguimos observar que os termos da sequência  $(A_n)$  só podem ser de dois

tipos ou  $A_j = \emptyset$  ou  $A_j = +\infty$  para algum  $j \in \mathbb{N}$ . Com isso,  $\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty$ .

Ademais, na soma  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n)$  só teremos soma dos termos  $0 + (+\infty)$  ou  $(+\infty) + (+\infty)$ . Desta forma,  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = +\infty$ . Portanto  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são medidas.

**Exemplo 3.2.2 (Probabilidade)** Seja  $(\Omega, \mathcal{C})$  um espaço mensurável. A função  $\mathcal{P} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$  é dita uma probabilidade se satisfaz as propriedades:

$$(K1) \quad \mathcal{P}(\Omega) = 1;$$

$$(K2) \quad \mathcal{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{C};$$

(K3) Se  $(A_n)$  é uma sequência disjunta de elementos de  $\mathcal{C}$ , então  $\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n)$ .<sup>3</sup>

Observe que as condições da (ii) e (iii) da definição 3.2.2 são satisfeitas por definição da função de probabilidade. Resta provar que  $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$ . Assim, com o auxílio das propriedades (K1) e (K3), segue que

$$\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathcal{P}(\Omega) + \mathcal{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathcal{P}(\emptyset) = 0$$

Logo,  $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$ . Portanto a função probabilidade é uma medida. Neste caso, o espaço de medida  $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P})$  é chamado de espaço de probabilidades. Além disso, uma função  $\mathcal{C}$ -mensurável pela definição 3.1.5 em um espaço de probabilidades é chamada de variável aleatória.

**Exemplo 3.2.3 (Unidade de Medida Concentrada em  $p$ )** Seja  $(X, \mathcal{C})$  um espaço mensurável onde  $\mathcal{C} = \mathcal{P}(X)$  e  $p$  um elemento de  $X$ . Defina  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \notin A \\ 1, & \text{se } p \in A \end{cases}$$

Então  $\mu$  é uma medida. Verdadeiramente, observe que  $p \notin \emptyset$ , ou seja,  $\mu(\emptyset) = 0$ .

Trivialmente, tem-se  $\mu(A) \geq 0$ ,  $\forall A \in \mathcal{C}$ , pela construção de  $\mu$ .

**Exemplo 3.2.4** Seja  $X = \mathbb{N}$  e  $\mathcal{C}$  sendo o conjunto das partes de  $\mathbb{N}$ . para  $A \in \mathcal{C}$ , definimos  $\mu(A)$  por meio da sua cardinalidade, isto é, se  $A$  é finito, então  $\mu(A)$  é quantidade de elementos de  $A$ . Caso contrário,  $\mu(A) = +\infty$ .

**Teorema 3.2.1** Seja  $\mu$  uma medida definida sobre uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{C}$ . Se  $A$  e  $B$  são elementos de  $\mathcal{C}$  e  $A \subset B$ , então  $\mu(A) \leq \mu(B)$ . Se  $\mu(A) < +\infty$ , então  $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$ .

*Demonstração.*

Suponha que  $A \subset B$ , então  $A = B \cap A$  e  $A \cap (B - A) = \emptyset$ . Segue pela propriedade (ii) da definição 3.2.2 que

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$$

Lembre que  $B - A = B \cap A^c$  e  $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$ . Além disso, como  $B \in \mathcal{C}$  temos que  $B \cap A^c$  consequentemente  $B - A \in \mathcal{C}$ . Assim, como  $\mu$  é uma medida e  $B - A \in \mathcal{C}$ , temos que  $\mu(B - A) \geq 0$ . Segue que  $\mu(B) \geq \mu(A)$ . Observe que se  $\mu(A) < \infty$ , temos que

<sup>3</sup> As propriedades K1, K2 e K3 são chamadas de Axiomas de Kolmogorov

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \Leftrightarrow \mu(B) - \mu(A) = \mu(B - A)$$

Como desejávamos.

□

**Proposição 3.2.3** *Seja  $\mu$  uma medida definida sobre uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{C}$ . Se  $(E_n)$  é uma sequência crescente de  $\mathcal{C}$ , então  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$ .*

*Demonstração.*

Ora, se  $\mu(E_n) = +\infty$  para algum  $n \in \mathbb{N}$  ambos os lados da equação acima são  $+\infty$ . Desta forma, vamos supor que  $\mu(E_n) < +\infty$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Com isso, vamos construir uma sequência  $(A_n)$  pondo  $A_1 = E_1$  e  $A_n = E_n - E_{n-1}$  para qualquer  $n > 1$ . Então pela proposição 3.2.1,  $(A_n)$  é uma sequência disjunta, temos  $E_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$  e  $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ . Como  $\mu$  contavelmente aditiva,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \mu(A_n)$$

Pelo teorema ?? vemos que  $\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1})$  para  $n > 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \mu(A_n) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (\mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_m)) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (\mu(E_1) + \mu(E_2 - E_1) + \cdots + \mu(E_m - E_{m-1})) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (\mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_m) - \mu(E_{m-1})) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots - \mu(E_{m-1}) + \mu(E_m)) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \mu(E_m) \end{aligned}$$

Segue que  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$ .

□

**Proposição 3.2.4** *Seja  $\mu$  uma medida definida sobre uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{C}$ . Se  $(B_n)$  é uma sequência decrescente de  $\mathcal{C}$  e  $\mu(B_1) < +\infty$ , então  $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$ .*

*Demonstração.*

Defina uma sequência  $(T_n)$  de elementos de  $\mathcal{C}$  pondo  $T_n = B_1 - B_n$  para qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ . Pela proposição 3.2.2,  $(T_n)$  é crescente. Assim, aplicando o a proposição 3.2.3 temos que

$$\mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T_n)$$

Usando o teorema ??, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\mu(B_1) - \mu(B_n)] = \mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n)$$

Segue pela proposição 3.2.2 que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T_n) = \mu(B_1) - \mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)$$

Combinando as duas equações obtemos que

$$\mu(B_1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = \mu(B_1) - \mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)$$

Portanto,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = \mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)$

□

Vimos quando tratamos de  $\sigma$ -álgebras a  $\sigma$ -álgebra de Borel que é muito relevante para o estudo da reta real. Da mesma forma, existe uma medida que é indispensável para o mesmo contexto. Essa, por sua vez, não será demonstrada, mas adotada como axioma à título de simplificação do trabalho. Assim,

**Axioma 1** *Sendo  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  um espaço mensurável, existe uma única medida  $\lambda$  definida sobre  $\mathcal{B}$  que coincide com o comprimento dos intervalos abertos.*

Em termos práticos, se  $E$  é um intervalo real não vazio  $(a, b)$ , então  $\lambda(E) = b - a$ . Esta medida recebe o nome de Medida de Lebesgue. Embora tenha tido a necessidade de utilizar o sistema da reta estendida para definirmos uma medida, existem conjuntos tão pequenos que sua medida é desprezível. À esses damos o nome de conjunto de medida nula. Formalmente,

**Definição 3.2.4** *Seja  $(X, \mathcal{C}, \mu)$  um espaço de medida. Dizemos que um conjunto  $E \subset \mathcal{C}$  tem medida nula em relação à medida  $\mu$  se  $\mu(E) = 0$ .*

**Proposição 3.2.5** *Seja  $(X, \mathcal{C}, \mu)$  um espaço de medida. Se  $\mu(X) = 0$  e  $Y \subset X$ , então  $\mu(Y) = 0$ .*

*Demonstração.*

Note que  $(Y \cap X) \subset X$ , pois  $Y \cap X = Y$ . Assim, pelo teorema 3.2.1, temos que

$$\mu(Y) = \mu(X \cap Y) \leq \mu(X) = 0$$

Logo,  $\mu(Y) \leq 0$ . Segue que  $\mu(Y) = 0$ , pois a medida é uma função não negativa.

□

**Proposição 3.2.6** *Seja  $(X, \mathcal{C}, \mu)$  um espaço de medida e  $\{E_n\}$  uma sequência disjunta de elementos de  $\mathcal{C}$ . Se  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  e  $\mu(E_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\mu(Y) = 0$ .*

*Demonstração.*

Analogamente à proposição anterior segue, imediatamente, que

$$\mu(Y) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Assim,  $\mu(Y) \leq 0$ . Portanto,  $\mu(Y) = 0$ .

□

Como exemplo, temos por definição, que  $\emptyset$  tem medida nula, pois para qualquer medida  $\mu$ ,  $\mu(\emptyset) = 0$ . Mostraremos a seguir um exemplo menos trivial:

**Exemplo 3.2.5 (Medida de Conjuntos Discretos)** *Se  $X \subset \mathbb{R}$  é um conjunto discreto, então tem medida nula com respeito à medida  $\lambda$  de Lebesgue.*

De fato, se  $X$  é discreto, então é formado por pontos. Assim, se  $a \in X$ , então pode ser representado degeneradamente, por  $\{a\} = [a, a]$ . Logo,  $\lambda(\{a\}) = a - a = 0$ . Assim, o conjunto  $X$  é dado pela reunião enumerável de seus pontos e todos têm medida nula. Segue pela proposição 3.2.6 que  $X$  tem medida nula.

## 4 TEORIA DA INTEGRAÇÃO

Uma vez que já foram bem explorados os espaços mensuráveis e os espaços de medida, vamos medir funções mensuráveis de fato. Iniciaremos por funções não negativas e iremos estendendo os conceitos aos poucos. Quando não houver menção contrária,  $(X, \mathcal{C}, \mu)$  será um espaço de medida. O conjunto de todas as funções  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mensuráveis será simplesmente denotado por  $M = M(X, \mathcal{C})$  e o conjunto das funções não negativas, que também são  $\mathcal{C}$ -mensuráveis será denotado por  $M^+ = M^+(X, \mathcal{C})$ .

### 4.1 A Integral de Funções Simples

Iniciaremos tratando de casos particulares de integral e depois vamos expandindo. Com isso, iniciaremos entendendo a integral para funções simples.

**Definição 4.1.1 (Função Simples)** *Uma função real é dita simples quando possui apenas uma quantidade finita de valores.*

**Observação 4.1.1** *Representaremos esse tipo de função, de forma padronizada em todo o texto, por meio da seguinte forma*

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$$

onde  $a_j \in \mathbb{R}$  e  $\chi_{E_j}$  é a função característica do conjunto  $E_j \in \mathcal{C}$ . Nessa representação estamos supondo que cada  $a_j \in \mathbb{R}$  é diferente para todo  $j \in \mathbb{N}$  e que  $\bigcup_{j=1}^n E_j = X$ .

**Exemplo 4.1.1** *Seja  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  pondo  $f(x) = 1$  se  $x \in [0, 2)$  e  $f(x) = 2$  caso  $x \in [2, 4]$ . Denotando  $E_1 = [0, 2)$ ,  $E_2 = [2, 4]$ ,  $a_1 = 1$  e  $a_2 = 2$  temos que*

$$f(x) = 1 \cdot \chi_{[0, 2)}(x) + 2 \cdot \chi_{[2, 4]}(x) = \sum_{j=1}^2 a_j \chi_{E_j}(x)$$

Além disso,  $E_1 \cup E_2 = [0, 2) \cup [2, 4] = [0, 4]$  e  $a_1 = 1 \neq 2 = a_2$ . Logo,  $f$  é uma função simples.

**Exemplo 4.1.2** *Seja  $g : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  pondo*

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 2, & \text{se } x \in [1, 2) \\ 3, & \text{se } x \in [2, 3) \\ 4, & \text{se } x \in [3, 4] \end{cases}$$

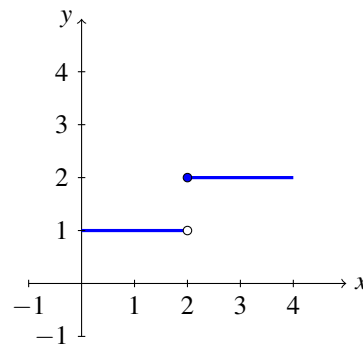
Claramente,  $g$  também é uma função simples. Basta denotar  $E_1 = [0, 1)$ ,  $E_2 = [1, 2)$ ,  $E_3 = [2, 3)$ ,  $E_4 = [3, 4]$  e  $a_i = i$  para  $1 \leq i \leq 4$ . Com isso, vemos que para  $x \in [0, 4]$

$$g(x) = 1 \cdot \chi_{[0,1]}(x) + 2 \cdot \chi_{[1,2]}(x) + 3 \cdot \chi_{[2,3]}(x) + 4 \cdot \chi_{[3,4]}(x)$$

Concluindo que  $g = \sum_{j=1}^4 a_j \chi_{E_j}$ .

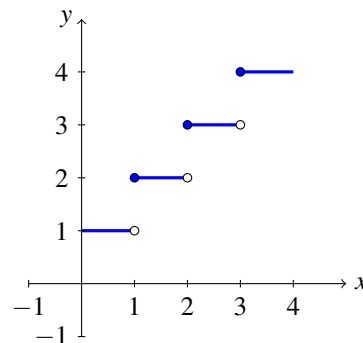
Note que os gráficos das funções  $f$  e  $g$  são, respectivamente.

**Figura 5 – Gráfico da Função  $f = \sum_{j=1}^2 a_j \chi_{E_j}$**



Fonte: Elaborado pelo autor

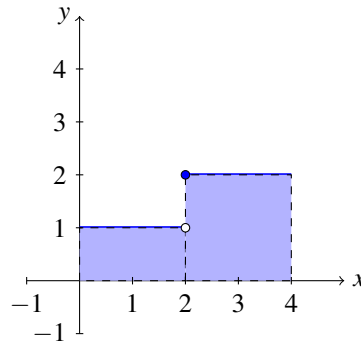
**Figura 6 – Gráfico da Função  $g = \sum_{j=1}^4 a_j \chi_{E_j}$**



Fonte: Elaborado pelo autor

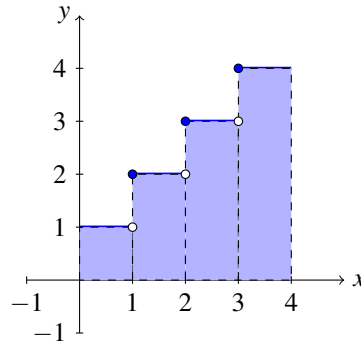
Agora pensemos na ideia de integral apresentada na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Se quiséssemos calcular a integral das funções acima somaríamos as áreas dos retângulos conforme ilustram as figuras a seguir.

**Figura 7 – Área delimitada pelo gráfico da função  $f = \sum_{j=1}^2 a_j \chi_{E_j}$**



Fonte: Elaborado pelo autor

**Figura 8 – Área delimitada pelo gráfico da função  $g = \sum_{j=1}^4 a_j \chi_{E_j}$**



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que em ambos os casos estamos, basicamente, aplicando o valor  $a_j$  na medida do conjunto  $E_j$  correspondente para  $j$  igual ao número de partições do domínio. Com isso, temos a definição a seguir:

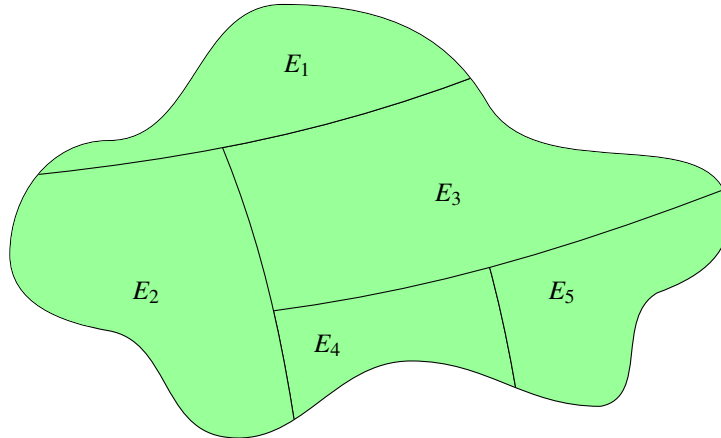
**Definição 4.1.2** Se  $\varphi$  é uma função simples de  $M^+(X, \mathcal{C})$  com a representação apresentada anteriormente, então a integral da função  $\varphi$  com respeito à medida  $\mu$  é o valor real estendido

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j).$$

Para a definição 4.1.2 empregamos a convenção que  $0 \cdot (+\infty) = 0$ . Isto é feito para garantir que a função identicamente nula tenha integral nula independentemente da medida ser finita ou não. A seguir veremos propriedades elementares sobre a integral de funções simples. Antes disso, considere um espaço de medida  $(X, \mathcal{C}, \mu)$ . Seja  $\{E_n\}$  uma partição de  $X$  com  $n \in I_5$  conforme a representação a seguir.



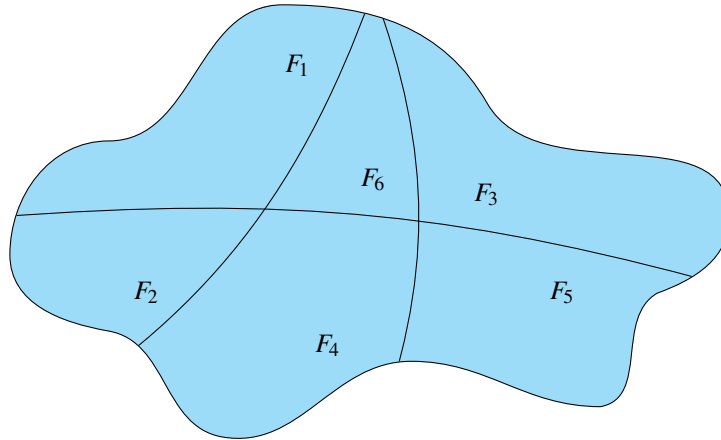
**Figura 9 – Partição  $\{E_n\}$  do conjunto  $X$**



Fonte: Elaborado pelo autor

Tome também uma outra partição  $\{F_m\}$  onde  $m \in I_6$ .

**Figura 10 – Partição  $\{F_m\}$  do conjunto  $X$**



Fonte: Elaborado pelo autor

Claramente, ao observar as figuras acima, podemos ver que  $E_3$  possui interseção com  $F_j$  para todo  $j \in I_6$ . Assim,  $E_3 = \bigcup_{j=1}^6 (F_j \cap E_3)$  com  $(F_j \cap E_3) = \emptyset, \forall j \in I_6$ . Logo,

$$\mu(E_3) = \mu \left( \bigcup_{j=1}^6 (F_j \cap E_3) \right) = \sum_{j=1}^6 \mu(F_j \cap E_3)$$

A igualdade acima é válida mesmo se o conjunto em questão não tiver interseção com todos os outros da partição. Neste caso, a interseção com os demais será vazia e soma associada a eles é 0. Basta observar, por exemplo, o conjunto  $E_1$  que tem interseção com  $F_1, F_6$  e  $F_3$ , mas não se

intersecta com  $F_2, F_4$  e  $F_5$ . Deste modo,

$$\sum_{j=1}^6 \mu(F_j \cap E_3) = \mu(F_1 \cap E_3) + \mu(F_6 \cap E_3) + \mu(F_3 \cap E_3) = \mu(E_3)$$

Pois,  $\mu(F_2 \cap E_3) = \mu(F_4 \cap E_3) = \mu(F_5 \cap E_3) = 0$ .

**Teorema 4.1.1** *Se  $\varphi$  e  $\psi$  são funções simples do espaço  $M^+(X, \mathcal{C})$  e  $c \geq 0$  é uma constante real, então*

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu,$$

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

*Demonstração.*

Vamos representar as funções simples não negativas por  $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$  e  $\psi = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{F_k}$ . Caso  $c = 0$ , o resultado é verdadeiro trivialmente. Supondo  $c > 0$ , temos que

$$\int c\varphi d\mu = \sum_{j=1}^n c a_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) = c \int \varphi d\mu.$$

Dadas as representações padrão de  $\varphi$  e  $\psi$ , vemos que  $\varphi + \psi$  tem a representação

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \chi_{E_j \cap F_k}.$$

Entretanto, essa representação não é, necessariamente, a representação padrão apresentada na definição 4.1.2, pois nada garante, previamente, que  $a_j + b_k$  sejam distintos para  $j \in I_n$  e  $k \in I_m$ . Com isso, sejam  $c_h$ , com  $h \in I_p$ , números distintos do conjunto  $\{a_j + b_k; (j, k) \in I_n \times I_m\}$  e  $G_h$  a união de todos os conjuntos  $E_j \cap F_k \neq \emptyset$  tal que  $a_j + b_k = c_h$ . Assim,

$$G_h = \bigcup_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} E_j \cap F_k$$

A notação utilizada acima indica que a soma é realizada sobre todos os índices  $j$  e  $k$  tais que  $a_j + b_k = c_h$ . Como  $E_j \cap F_k = \emptyset$ , temos que

$$\mu(G_h) = \mu \left( \bigcup_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} E_j \cap F_k \right) = \sum_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} \mu(E_j \cap F_k)$$

Desta forma, conseguimos encontrar uma representação padrão que é dada por  $\varphi + \psi = \sum_{h=1}^p c_h \chi_{G_h}$ . Logo, temos que

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{h=1}^p c_h \mu(G_h) = \sum_{h=1}^p \sum_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} c_h \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{h=1}^p \sum_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_k \mu(E_j \cap F_k) \end{aligned}$$

Ora, uma vez que  $X$  é a união de ambas as famílias disjuntas  $\{E_j\}$  e  $\{F_k\}$ , ou seja,

$$\bigcup_{j=1}^n E_j = X = \bigcup_{k=1}^m F_k$$

Se um elemento  $x$  pertence à um conjunto  $E_{j_0}$  para algum  $j_0 \in I_n$ , então deve existir um  $k_0 \in I_m$  tal que  $x \in F_{k_0}$ . Assim, se fixamos um  $j \in I_n$ , então  $\bigcup_{k \in I_m} F_k$  forma uma cobertura de  $E_j$ , isto é,  $E_j \subset \bigcup_{k \in I_m} F_k$ . Assim,  $E_j \cap \left( \bigcup_{k \in I_m} F_k \right) = E_j$ . Como  $F_k$  é uma família disjunta segue que, para este  $j$  fixado, temos

$$\mu(E_j) = \mu \left( E_j \cap \bigcup_{k \in I_m} F_k \right) = \mu \left( \bigcup_{k \in I_m} (E_j \cap F_k) \right) = \sum_{k=1}^m \mu(E_j \cap F_k).$$

Analogamente, ao fixarmos um  $k \in I_m$ , vemos que  $\mu(F_k) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j \cap F_k)$ . Empregando estes resultados ao que foi desenvolvido anteriormente obtemos

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_k \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^m b_k \mu(F_k) = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$$

Segue que  $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$  como queríamos.

□

**Lema 4.1.1** Se  $\mu$  é uma medida sobre  $X$  e fixemos um elemento  $A$  de  $\mathcal{C}$ , então a função  $\lambda$  definida por  $\lambda(E) = \mu(A \cap E)$ ,  $\forall E \in \mathcal{C}$  também é uma medida sobre  $X$ .

*Demonstração.*

Basta mostrar que  $\lambda$  satisfaz as condições impostas na definição 3.2.2. Com isso, se  $E = \emptyset$ , então

$$\lambda(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$$

Como  $A$  e  $E$  são elementos de  $\mathcal{C}$ , então  $A \cap H$  também está em  $\mathcal{C}$ . Assim, por  $\mu$  ser uma medida, temos que  $\mu(A \cap E) \geq 0$  acarretando que  $\lambda(E) \geq 0$ . Por fim, tomemos uma sequência de elementos disjuntos  $(E_n)$  em  $\mathcal{C}$ . Se  $A = E_j$  para algum  $j \in \mathbb{N}$ , não há o que fazer. Caso  $A \cap E_j = \emptyset$  para qualquer que seja  $j \in \mathbb{N}$ , então  $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cap A = \emptyset$ . Com isso,

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cap A &= (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \cup \dots) \cap A \\ &= (E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A) \cup \dots \cup (E_n \cap A) \cup \dots \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap A) \end{aligned}$$

Segue então que

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cap A\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap A)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j)$$

Desta forma, concluímos que a função  $\lambda$  acima definida é uma medida.

□

**Lema 4.1.2** Se  $\mu_1, \dots, \mu_n$  são medidas sobre  $X$  e  $a_1, \dots, a_n$  são números reais não negativos, então a função  $\lambda$  definida por  $\lambda(E) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(E)$ ,  $\forall E \in \mathcal{C}$  também é uma medida sobre  $X$ .

*Demonstração.*

Como  $\mu_j$  é uma medida para todo  $j \in I_n$  e cada  $a_j$  é maior ou igual à zero, temos que cada  $a_j \mu_j(E) \geq 0$ . Desta maneira,  $\lambda(E) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(E) \geq 0$ . Além disso, podemos observar que  $\lambda(\emptyset) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(\emptyset) = 0$ . Tomemos uma sequência disjunta  $(E_p)$  de elementos de  $\mathcal{C}$ . Logo,

$$\lambda\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_p\right) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_p\right) = \sum_{j=1}^n a_j \left(\sum_{p=1}^{\infty} \mu_j(E_p)\right)$$

Afirmamos que  $\sum_{j=1}^n a_j \left(\sum_{p=1}^{\infty} \mu_j(E_p)\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n a_j \mu_j(E_p)\right)$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_j \left( \sum_{p=1}^{\infty} \mu_j(E_p) \right) &= \sum_{j=1}^n a_j \left( \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^m \mu_j(E_p) \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{j=1}^n a_j \left( \sum_{p=1}^m \mu_j(E_p) \right) \right] \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[ a_1 \left( \sum_{p=1}^m \mu_1(E_p) \right) + \cdots + a_n \left( \sum_{p=1}^m \mu_n(E_p) \right) \right] \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \sum_{p=1}^m a_1 \mu_1(E_p) + \cdots + \sum_{p=1}^m a_n \mu_n(E_p) \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^m (a_1 \mu_1(E_p) + \cdots + a_n \mu_n(E_p)) \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(E_p) \right) \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(E_p) \right)
\end{aligned}$$

Disso tudo, obtemos que

$$\lambda \left( \bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_p \right) = \sum_{j=1}^n a_j \left( \sum_{p=1}^{\infty} \mu_j(E_p) \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(E_p) \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda(E_p)$$

Como  $\lambda$  satisfaz todas as condições impostas na definição 3.2.2 concluímos que  $\lambda$  é uma medida.

□

**Teorema 4.1.2** A função  $\lambda : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definida por  $\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$  para todo  $E \in \mathcal{C}$  é uma medida sobre  $\mathcal{C}$ .

*Demonstração.*

De maneira análoga ao teorema 4.1.1 podemos verificar que

$$\varphi \chi_E = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j \cap E}$$

Assim, temos que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu = \int \left( \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j \cap E} \right) d\mu = \sum_{j=1}^n \left( a_j \int \chi_{E_j \cap E} d\mu \right) = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j \cap E)$$

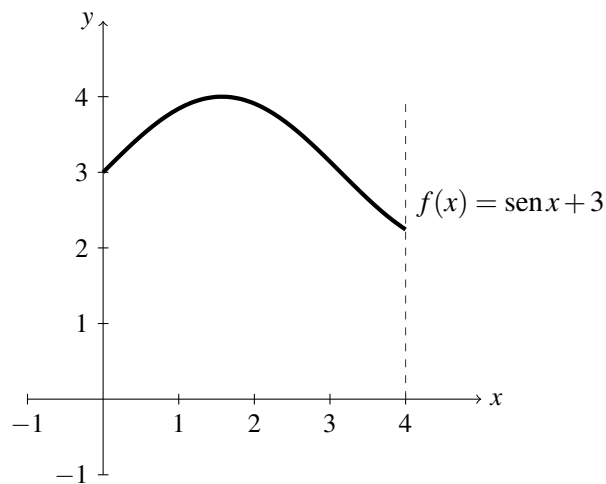
Pelo lema 4.1.1 a aplicação que leva  $E \rightarrow \mu(E_j \cap E)$  é uma medida para cada  $j \in I_n$ . Disso, concluímos que  $\lambda$  pode ser expressada por uma combinação linear de medidas sobre  $\mathcal{C}$ . Segue, pelo lema 4.1.2, que  $\lambda$  também é uma medida sobre  $\mathcal{C}$ .

□

## 4.2 A Integral de Funções Não-Negativas

Até aqui trabalhamos apenas com integrais de funções simples apenas. Nesta seção, desejamos expandir o conceito de integral para uma função qualquer não negativa. Vale ressaltar que a perspectiva que traremos aqui é a de Lebesgue. Com o intuito de enfatizar a diferença da construção, vamos lembrar da construção feita por Riemann. Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \text{seno}(x) + 3$ . Claramente não é uma função simples, pois não possui uma quantidade finita de valores. Nosso objetivo, agora, é tentar calcular a integral dessa função com o que construímos até aqui. Para facilitar, analisaremos o gráfico dessa função no intervalo  $[0, 4]$ .

**Figura 11 – Gráfico da função  $f(x) = \text{sen}(x) + 3$**

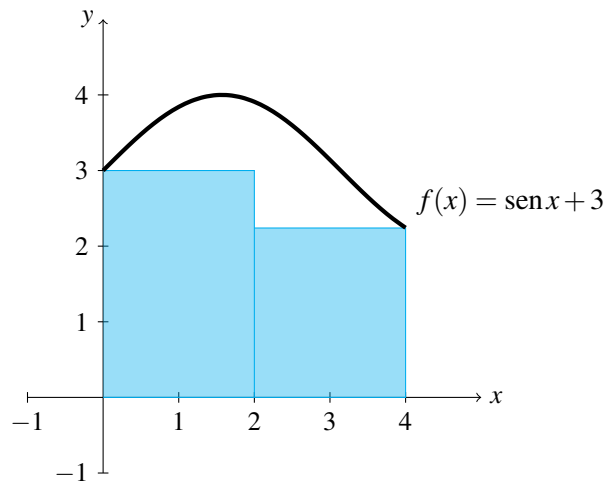


Fonte: Elaborado pelo autor

Tomemos a função simples

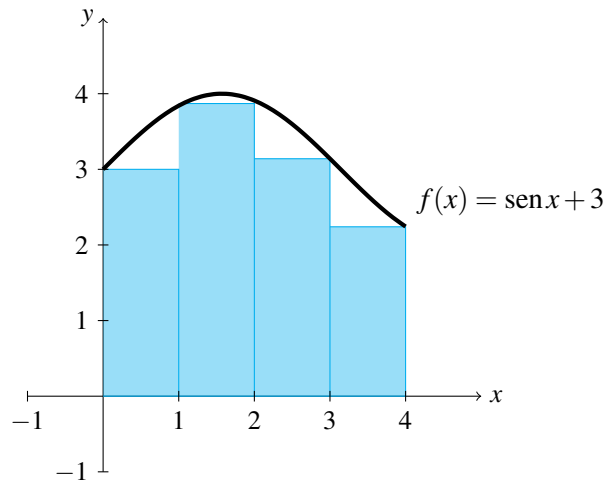
$$\phi_2(x) = \sum_{j=1}^2 a_j \chi_{E_j}$$

onde  $a_1 = f(0)$ ,  $a_2 = f(4)$ ;  $E_1 = [0, 2)$  e  $E_2 = [2, 4]$ . Assim, ao calcularmos sua integral, vemos não há preenchimento total da área delimitada pelo gráfico da função  $f$ , mas se aproxima com um erro conforme a seguinte figura.

**Figura 12 – Integral da função  $\phi_2$** 

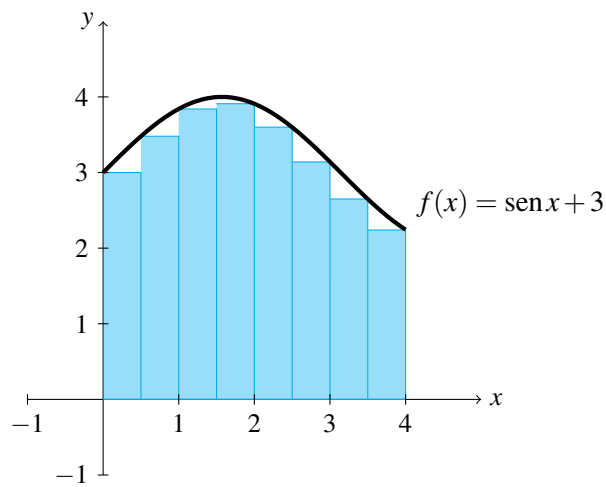
Fonte: Elaborado pelo autor

Vamos escolher outra função simples  $\phi_4$  tal que  $\phi_4 = \sum_{j=1}^4 a_j \chi_{E_j}$  onde  $E_1 = [0, 1), E_2 = [1, 2), E_3 = [2, 3), E_4 = [3, 4], a_1 = f(0), a_2 = f(1), a_3 = f(3)$  e  $a_4 = f(4)$ . Desta forma, com o dobro de valores da função  $\phi_2$  escolhida anteriormente podemos observar que a integral de  $\phi_4$  mais se aproxima da integral da função  $f$ .

**Figura 13 – Integral da função  $\phi_4$** 

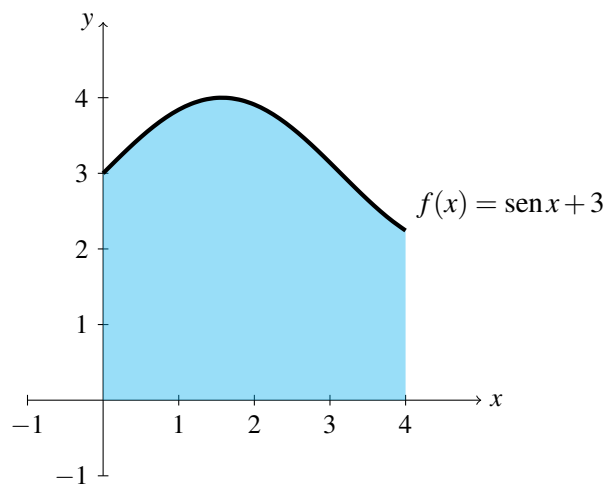
Fonte: Elaborado pelo autor

Para finalizarmos esta ideia, dobremos a quantidade de valores e escolhamos outra função  $\phi_8 = \sum_{j=1}^8 a_j \chi_{E_j}$  onde  $E_1 = [0, 0.5), E_2 = [0.5, 1), E_3 = [1, 1.5), E_4 = [1.5, 2), E_5 = [2, 2.5), E_6 = [2.5, 3), E_7 = [3, 3.5), E_8 = [3.5, 4]$  e  $a_1 = f(0), a_2 = f(0.5), a_3 = f(1), a_4 = f(1.5), a_5 = f(2.5), a_6 = f(3), a_7 = f(3.5)$  e  $a_8 = f(4)$ .

**Figura 14 – Integral da função  $\phi_8$** 

Fonte: Elaborado pelo autor

Com isso, observamos que quanto mais valores a função simples possui, mais ela se aproxima da função  $f$  desde que nenhum valor ultrapasse o gráfico da função. Assim, a área da função simples será próxima o suficiente da área delimitada pelo gráfico da função  $f$ . Assim, se tomarmos o supremo dessas funções obteremos

**Figura 15 – Integral da função  $f$** 

Fonte: Elaborado pelo autor

Agora, tomemos como exemplo a função  $f(x) = x^2$ , mas não invés de particionarmos o domínio da função, a função simples é construída conforme uma partição feita na imagem.

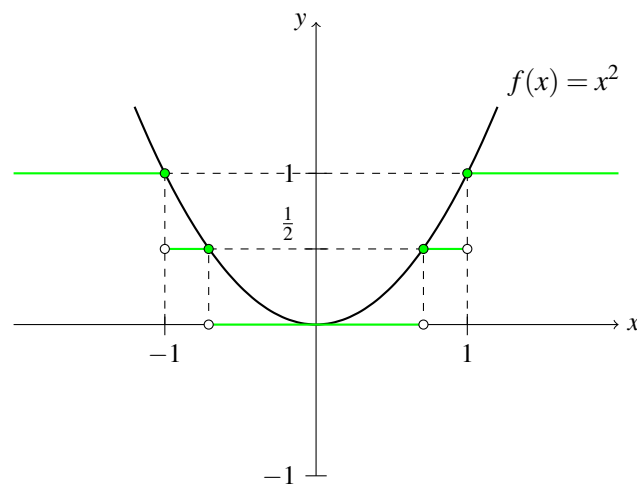


Assim, tomemos uma função  $\phi_1$  pondo

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-1} \\ 2^{-1}, & \text{se } 2^{-1} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-1} \\ 1, & \text{se } f(x) \geq 1 \end{cases}$$

Note que a função  $\phi_1$  é simples, mas seus valores são escolhidos por meio da partição da imagem conforme explicitado na imagem a seguir:

**Figura 16 – Gráfico da função  $\phi_1$**



Fonte: Elaborado pelo autor

Na figura acima, o gráfico da função  $\phi_1$  está representado pela cor verde.

Dito isto, adiante formalizaremos que dada uma função  $f \in M(X, \mathcal{C})$ , então ela pode ser aproximada por uma sequência de funções simples conforme o teorema

**Teorema 4.2.1 (Aproximação Via Funções Simples)** *Se  $f$  é uma função não negativa em  $M(X, \mathcal{C})$ , então existe uma sequência de funções  $(\phi_n) \subset M(X, \mathcal{C})$  tal que*

- (i) *Cada  $\phi_n$  é uma função simples, isto é, possui apenas uma quantidade finita de valores reais;*
- (ii)  *$0 \leq \phi_n(x) \leq f(x)$  para todo  $x \in X$  e  $n \in \mathbb{N}$ ;*
- (iii)  *$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .*

*Demonstração.*

Vamos mostrar a existência das sequência por construção. Essa construção será realizada por meio de partições da imagem da seguinte maneira:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-n} \\ 2^{-n}, & \text{se } 2^{-n} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-n} \\ 2 \cdot 2^{-n}, & \text{se } 2 \cdot 2^{-n} \leq f(x) < 3 \cdot 2^{-n} \\ \vdots & \vdots \\ k \cdot 2^{-n}, & \text{se } k \cdot 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) \cdot 2^{-n} \\ \vdots & \vdots \\ n, & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

Simplificadamente podemos escrever

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} k \cdot 2^{-n}, & \text{se } k \cdot 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) \cdot 2^{-n}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, n2^n - 1 \\ n, & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

Com isso, podemos ver que  $\varphi_n$  é uma função simples e que  $0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x)$ . Além disso,  $\varphi_n$  é uma mensurável para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pois trata-se de uma sequência de um funções simples.

Observe que dado  $n \in \mathbb{N}$  pelo que já provamos temos que

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x) \Leftrightarrow 0 \leq \varphi_n(x) - f(x) \leq 0$$

Pois,  $\varphi_n$  e  $f$  são funções não negativas. Assim,  $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) - f(x) \leq 0$ . Segue pelo teorema do confronto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = f(x)$ .

□

Esse teorema nos mostra que dada qualquer função não negativa mensurável, podemos aproximar seus valores por funções simples de maneira que o limite dessa sequência de funções simples convergem para a função que tomamos inicialmente. Diante disso, nada mais natural que definir a integral de Lebesgue para funções não negativas quaisquer da maneira que segue

**Definição 4.2.1** Se  $f \in M^+(X, \mathcal{C})$ , nós definimos a integral de  $f$  com respeito à medida  $\mu$  sendo o valor real estendido

$$\int f d\mu = \sup \int \varphi d\mu$$

Onde o supremo é sobre todas as funções simples  $\varphi \in M(X, \mathcal{C})$  tal que a condição  $0 \leq \varphi \leq f(x)$  para todo  $x \in X$ .

**Definição 4.2.2** Se  $f \in M(X, \mathcal{C})$  e  $E \in \mathcal{C}$ , então  $f\chi_E \in M(X, \mathcal{C})$  e nós definimos a integral de  $f$  sobre o conjunto  $E$  com respeito à medida  $\mu$  como sendo o número real estendido

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu$$

Agora desejamos realizar operações aritméticas com essa expansão da definição conforme fizemos para a integral de funções simples. Para tal, precisamos mostrar a monotonicidade da integral de funções não negativas tanto à respeito de uma outra função integral quanto à um conjunto. Isso faremos por meio dos lemas a seguir

**Lema 4.2.1** Se  $f$  e  $g$  são elementos de  $M^+(X, \mathcal{C})$  com  $f \leq g$ , então

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

*Demonstração.*

Se  $\varphi$  é uma função simples em  $M^+(X, \mathcal{C})$  tal que  $0 \leq \varphi \leq f$ , então  $0 \leq \varphi \leq g$ , uma vez que  $f \leq g$ . Assim,  $\sup_{\varphi \leq f} \int \varphi d\mu \leq \int f d\mu$  e  $\sup_{\varphi \leq g} \int \varphi d\mu \leq \int g d\mu$ . Subtraindo membro à membro temos

$$0 \leq \int f d\mu - \int g d\mu \Leftrightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

□

**Lema 4.2.2** Se  $f$  é um elemento de  $M^+(X, \mathcal{C})$  e  $E, F \in \mathcal{C}$  com  $E \subseteq F$ , então

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

*Demonstração.*

Como  $E \subseteq F$ , então  $\chi_E \leq \chi_F$ . Assim,  $f\chi_E \leq f\chi_F$ . Segue, pelo lema anterior que,

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu \leq \int f\chi_F d\mu = \int_F f d\mu.$$

Portanto,  $\int_E f d\mu = \int_F f d\mu$ .

□

**Teorema 4.2.2 (Teorema da Convergência Monótona)** Se  $(f_n)$  é uma sequência monótona crescente de funções não negativas mensuráveis que converge para  $f$ , então

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

*Demonstração.*

Pelo corolário 3.1.1, se temos uma sequência de funções mensuráveis que converge para uma função  $f$ , então  $f$  também é mensurável. Além disso, como  $(f_n)$  é crescente, então  $f_n \leq f \forall n \in \mathbb{N}$ . Seque, pelo lema 4.2.1 que

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Desta maneira,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Por outro lado, sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < \alpha < 1$  e  $\varphi$  uma função simples mensurável tal que  $0 \leq \varphi \leq f$ . Tomando  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)$ , construa os conjuntos

$$A_n = \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}.$$

Com isso, podemos observar que cada  $A_n \in \mathcal{X}$ ,  $A_n \subseteq A_{n+1}$  e que  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Desta maneira, usando o lema 4.2.2 e 4.2.1 temos que

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu. \quad (1)$$

Como  $(A_n)$  é uma sequência monótona crescente que a união é igual ao conjunto  $X$ , observamos que, pela proposição 3.2.3 que para uma medida  $\mu$  vale

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$$

Só que pelo teorema 4.1.2  $\int \varphi \chi_E d\mu$  é uma medida. Desta forma,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi \chi_{A_n} d\mu = \int \varphi \chi_X d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Substituindo isso na equação 1 obtemos

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu.$$

Como  $\alpha \in (0, 1)$  segue que

$$\int \varphi d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu.$$

Finalmente, por  $\varphi$  ser uma função não negativa simples arbitrária que satisfaz  $0 \leq \varphi \leq f$ , obtemos

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu.$$

Disso tudo,

$$\int f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Portanto,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$  como desejávamos.

□

O teorema anterior nos permite mostrar as operações aritméticas para integral de Lebesgue para funções não negativas quaisquer como apresentaremos adiante.

**Corolário 4.2.1** *Se  $f \in M^+$  e  $c \geq 0$ , então  $cf \in M^+$  e vale*

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu.$$

*Demonstração.*

Se o número real for zero, então o resultado sai de forma imediata. Suponha que  $c > 0$ . Assim, pelo teorema 4.2.1, existe uma sequência de funções simples  $(\varphi_n) \subset M^+$  que converge para a função  $f$ . Logo, a sequência  $(c\varphi_n)$  converge para  $cf$ . Desta forma, ao aplicarmos os teoremas 4.1.1 e 4.2.2, obtemos

$$\int cf d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int c\varphi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( c \cdot \int \varphi_n d\mu \right) = c \cdot \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi_n d\mu \right) = c \int f d\mu.$$

Como queríamos demonstrar.

□

**Corolário 4.2.2** *Se  $f, g \in M^+$ , então  $f + g \in M^+$  e vale*

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

*Demonstração.*

Analogamente ao corolário anterior, tomemos duas sequências de funções simples  $(\varphi_n)$  e  $(\psi_n)$  ambas monótonas e crescentes tal que convergem, respectivamente, para  $f$  e  $g$ . Segue, pelos teoremas 4.1.1 e 4.2.2 que

$$\int (f + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi_n d\mu + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \psi_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

□

Note que os resultados tratam apenas de funções monótonas e nem sempre teremos essa condição “perfeita” para nossas sequências. Assim, o próximo resultado nos apresenta uma maneira de trabalhar com sequências que não são monótonas.

**Teorema 4.2.3 (Lema de Fatou)** Se  $(f_n) \subset M^+(X, \mathcal{C})$ , então  $\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$ .

*Demonstração.*

Tome a sequência  $g_m = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{f_m, f_{m+1}, \dots\}$ . Assim, enquanto  $m \leq n$  nós temos  $g_m \leq f_n$ . Neste caso,

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu.$$

Como  $(g_m)$  é crescente e converge para  $\liminf f_n$  nós temos que

$$\int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Uniforme,

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \lim \int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

□

**Corolário 4.2.3** Se  $f \in M^+$  e  $\lambda$  é definida sobre  $\mathcal{C}$  pondo  $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ , então  $\lambda$  é uma medida.

*Demonstração.*

Uma vez que  $f \geq 0$ , obtemos que  $\lambda(E) \geq 0$ , por definição. Caso  $E = \emptyset$ , então  $f\chi_E \equiv 0$  acarretando que  $\lambda(\emptyset) = 0$ . Por fim, tome  $(E_n)$  uma sequência disjunta do conjunto  $\mathcal{C}$  e defina  $f_n$  pondo

$$f_n = \sum_{k=1}^n f\chi_{E_k}$$

Segue do corolário 4.2.2 que

$$\int f_n d\mu = \int \left( \sum_{k=1}^n f\chi_{E_k} \right) d\mu = \sum_{k=1}^n \left( \int f\chi_{E_k} \right) d\mu = \sum_{k=1}^n \left( \int_{E_k} f \right) d\mu = \sum_{k=1}^n \lambda(E_k) d\mu$$

□

**Definição 4.2.3** Diremos que alguma propriedade ocorre em quase todo ponto de um conjunto  $X$  com respeito à medida  $\mu$ , se ela não é válida somente em um subconjunto  $E$  de  $X$  que tem medida nula. Denotaremos esse acontecimento por  $\mu$ -q.t.p.

**Corolário 4.2.4** Suponha que  $f \in M^+$ . Então  $f(x) = 0$  em quase todo ponto de  $X$  se, e somente se  $\int f d\mu = 0$ .

*Demonstração.*

Suponha  $f(x) = 0$   $\mu$ -q.t.p. Assim, se  $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$ , então  $\mu(E) = 0$ . Tome a sequência  $f_n = n\chi_E$ . Dessa forma  $f \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Segue, pelo Lema de Fatou que

$$0 \leq \int f d\mu \leq \int (\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu = 0.$$

Ou seja,  $\int f d\mu = 0$ . Reciprocamente, suponha que  $\int f d\mu = 0$ . Tome uma sequência de conjuntos  $E_n = \left\{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$  tal que  $f \geq \left(\frac{1}{n}\right) \chi_{E_n}$ . Assim,  $\int f d\mu \geq \int \left(\frac{1}{n}\right) \chi_{E_n} d\mu$ . Só que  $\int \left(\frac{1}{n}\right) \chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(E_n) \geq 0$ . Segue que

$$0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n) \geq 0$$

Ou seja  $\mu(E_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, todo  $E_n$  tem medida nula. Segue, pela proposição 3.2.6 que o conjunto  $\{x \in X : f(x) > 0\}$  tem medida nula, pois  $\{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ .

□

Finalizaremos esta subseção apresentando um corolário do Teorema da Convergência Monótona que enfatiza claramente a diferença entre a Integral de Riemann e a Integral de Lebesgue.

**Corolário 4.2.5** *Se  $(g_n)$  é uma sequência de funções em  $M^+$ , então*

$$\int \left( \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int g_n d\mu \right).$$

*Demonstração.*

O resultado sai imediatamente da aplicação do Teorema da Convergência Monótona considerando a sequência de funções  $(f_n) \subset M^+$  tais que  $f_n = g_1 + \dots + g_n$ .

□

### 4.3 Funções Integráveis

Definimos anteriormente apenas integrais de funções não negativas com respeito a uma medida  $\mu$ . Nesta estenderemos, finalmente, este conceito para uma função qualquer de valores reais estendidos. Com isso,

**Definição 4.3.1** *Seja  $L = (X, \mathcal{C}, \mu)$  a coleção de funções integráveis que consiste de todas as funções reais  $\mathcal{C}$ -mensuráveis  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tais que as funções  $f^+$  e  $f^-$  são ambas integrais finitas*

com respeito à medida  $\mu$ . Neste caso, nós definimos a integral de  $f$  com respeito à medida  $\mu$  como

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Se, por ventura,  $E$  for um elemento da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{C}$ , então definimos

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

**Teorema 4.3.1** *Uma função mensurável  $f$  é um elemento de  $L$  se, e somente se,  $|f|$  é um elemento de  $L$ .*

*Demonstração.*

Suponha que  $f \in L$ . Por definição, isso ocorre se, e somente se, as partes positiva e negativa de  $f$  são ambas elementos de  $M^+$  e suas, respectivas integrais, são finitas. Devemos mostrar que

$$\int |f| d\mu = \int |f|^+ d\mu - \int |f|^- d\mu$$

Pela definição 2.2.2,  $|f|^- = 0$ , logo  $\int |f|^- d\mu = 0$ . Pelo lema ?? temos que  $|f|^+ = |f| = f^+ + f^-$ . Assim,  $\int |f|^+ d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu$ . Como  $f^+ + f^- \in M^+$ , segue pelo corolário 4.2.2 que  $\int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$ , ou seja  $\int |f|^+ d\mu$  é finita. Desta forma,

$$\int |f| d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu - 0 = \int |f|^+ d\mu - \int |f|^- d\mu$$

Logo,  $|f| \in L$ . A recíproca é totalmente análoga.

□

**Corolário 4.3.1** *Se  $|f| \in L$ , então  $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$ .*

*Demonstração.*

Se  $|f| \in L$ , então  $f \in L$  pelo teorema anterior. Logo  $\int f^+ d\mu$  e  $\int f^- d\mu$  são finitas e



não negativas. Desta forma

$$\begin{aligned}
 \left| \int f d\mu \right| &= \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| = \left| \int f^+ d\mu + \left( - \int f^- d\mu \right) \right| \\
 &\leq \left| \int f^+ d\mu \right| + \left| \left( - \int f^- d\mu \right) \right| \\
 &= \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \\
 &= \int (f^+ + f^-) d\mu \\
 &= \int |f| d\mu.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$ .

□

**Corolário 4.3.2** Se  $f$  é mensurável,  $g$  é integrável e  $|f| \leq |g|$ , então  $f$  é integrável e  $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$ .

*Demonstração.*

Se  $f$  é mensurável, então para uma medida  $\mu$  definida sobre  $(X, \mathcal{C})$ , tem-se que  $f \in L$ . Assim, pelo teorema 4.3.1 tem-se que  $|f|$  é integrável. Como  $|f|$  e  $|g|$  são função não negativas, segue pelo lema 4.2.1 que  $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$ .

□

**Teorema 4.3.2** Se  $f, g \in L$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então

- (a) A multiplicação por escalar  $\alpha f \in L$  com  $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ ;
- (b) A soma  $(f + g) \in L$  com  $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ .

*Demonstração.*

- (a) Se  $\alpha = 0$ , então  $\alpha f = 0$  em todo ponto de seu domínio. Assim,  $\int \alpha f d\mu = 0 = \alpha \int f d\mu$ .

Se  $\alpha > 0$ , então

$$\begin{aligned}
 \alpha \int f d\mu &= \alpha \left( \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) \\
 &= \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu \\
 &= \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu.
 \end{aligned}$$

Perceba que  $\alpha f^+ = (\alpha f)^+$  e  $\alpha f^- = (\alpha f)^-$ . Disso,

$$\int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu = \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = \int \alpha f d\mu.$$

Neste caso,  $\alpha f \in L$  e temos  $\alpha \int f d\mu = \int \alpha f d\mu$ . O caso  $\alpha < 0$  é totalmente análogo.

- (b) Se  $f, g \in L$ , então  $|f|, |g| \in L$  pelo teorema 4.3.1. Como  $|f + g| \leq |f| + |g|$ , segue que  $f + g \in L$  pelo corolário 4.3.2. Além disso, pelo lema 2.2.1, temos  $f = f^+ - f^-$  e  $g = g^+ - g^-$ . Somando membro a membro, temos

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$$

Como  $(f^+ + g^+), (f^- + g^-)$  são funções integráveis não negativas, temos que

$$\int (f + g) d\mu = \int [f^+ + g^+ - (f^- + g^-)] d\mu$$

Pelo corolário 4.2.2

$$\begin{aligned} \int [f^+ + g^+ - (f^- + g^-)] d\mu &= \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu \\ &= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

Portanto,  $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ .

□

**Teorema 4.3.3 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)** *Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo ponto para uma função real mensurável  $f$ . Se existir uma função integrável  $g$  tal que  $|f_n| \leq g$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $f$  é integrável e  $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu$ .*

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho abordamos a teoria da medida e integração, em sua forma elementar, tendo como pergunta diretriz de que forma pode ser apresentada a teoria da medida e integração de Lebesgue de maneira elementar para os alunos de graduação de ciências exatas? Com o intuito de auxiliar na obtenção da resposta, nosso objetivo geral que nos guiou em todo processo de construção do objeto de pesquisa foi: conhecer a algumas definições e resultados da teoria da medida e da integração de Lebesgue de forma elementar.

Desta forma, nosso primeiro objetivo específico era: definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis. Para atingir esse objetivo, primeiro definimos uma  $\sigma$ -álgebra de um conjunto. Em seguida, mostramos que um conjunto não vazio e uma  $\sigma$ -álgebra desse conjunto formam um espaço mensurável. Fixamos este conceito apresentando exemplos com grau crescente de abstração. Provamos algumas proposições sobre espaços mensuráveis e apresentamos uma  $\sigma$ -álgebra especial no conjunto dos números reais, a  $\sigma$ -álgebra de Borel. Fizemos um processo semelhante para expor as funções mensuráveis sendo os resultados focados em uma maneira mais fácil de averiguar se uma função é mensurável sem utilizar a definição diretamente.

Nosso segundo objetivo específico era: conhecer a teoria da medida de maneira generalizada. Para obter com sucesso esse objetivo, precisou-se estender a reta real adicionando as noções de  $-\infty$  e  $+\infty$  exibindo uma álgebra específica a ser adotada. Com isso, na primeira parte da seção, generalizamos os resultados apresentados na seção anterior dando ênfase às mudanças que ocorreram ao mudar de  $\mathbb{R}$  para  $\overline{\mathbb{R}}$ . Depois disso, definimos o que é uma medida, enunciamos e provamos propriedades sobre. Além disso, trouxemos vários exemplos, dentre eles, o espaço de probabilidades e a medida de um conjunto discreto. Todas as demonstrações tiveram o intuito de serem as mais didáticas possíveis sendo os teoremas divididos em várias proposições para que pudesse haver o melhor entendimento.

Nosso último objetivo era: descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida. Para tal, desmembramos os tipos de funções para que pudesse ser um processo intuitivo da construção. Exibimos, inicialmente, as integrais de Lebesgue para funções simples. Fixamos a medida de Lebesgue para que os exemplos ficassem mais claros, pois nesta parte, a diferença entre a integral de Lebesgue e a integral de Riemann era indistinguível. Ao dar continuidade, lembramos a construção da integral de Riemann para funções não negativas para que depois pudéssemos mostrar a construção de Lebesgue e eviden-

ciar a diferença entre as duas. Neste momento, várias ferramentas para integrais de Lebesgue para funções não negativas foram enunciadas e provadas para que esta pudesse ser generalizada para funções quaisquer. Vale ressaltar que em todas as construções tiveram auxílio geométrico para simplificar ao máximo a teoria.

FALTA CONCLUIR O FECHAMENTO.

## REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. 1. ed. New York: Wiley-Interscience, 1995.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas S. A, 2002. Disponível em: <[https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/150/o/Anexo\\_C1\\_como\\_elaborar\\_projeto\\_de\\_pesquisa\\_-\\_antonio\\_carlos\\_gil.pdf](https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/150/o/Anexo_C1_como_elaborar_projeto_de_pesquisa_-_antonio_carlos_gil.pdf)>. Acesso em: 30 de dez. 2021.

LIMA, E. L. **Um Curso de Análise**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. v. 1.

MAGALHAES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. 3. ed. São Paulo: EdUsp, 2011.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 2. ed. Rio Grande do Sul: Feevale, 2013.