UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO

UM ESTUDO SOBRE A TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

FORTALEZA – CEARÁ
2023

CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO

UM ESTUDO SOBRE A TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro

FORTALEZA – CEARÁ

2023

Aos meus amados pais que foram a base sólida que me sustentou e as asas que me impulsionaram. Com amor e gratidão, dedico este trabalho a vocês, cujo apoio incondicional e compreensão transcendem qualquer barreira acadêmica.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Conseguir medir grandezas é essencial em nosso cotidiano. Medimos tempo, distância, velocidade, etc. Embora seja usada constantemente nos dias atuais, a ação de medir é bem antiga sendo datada, por exemplo, em 3100 a.C. Em relação à essa época, Boyer (2012) expõe que os egípcios possuíam uma precisão grandiosa no que se referia a contar e medir; com essa habilidade, fizeram feitos extraordinários como o calendário solar e a construção das pirâmides. Desde então vem-se trabalhando no avanço da teoria da medida tanto de forma prática como de forma teórica.

As aplicações mais teóricas de medida vieram com os estudos de Newton que trataram sobre taxa de variação de quantidades continuamente variáveis tais como comprimentos, áreas e volumes; tendo desenvolvido, também, um método para calcular a soma das ordenadas sob uma curva (Boyer, 2012). Embasando-se no mesmo autor, vemos que esse método recebeu o nome de integral e foi denotado, por Leibniz, como $\int$; essa definição de integral foi refinada por Riemann e é, nos dias de hoje, comumente chamada de Integral de Riemann.

Pelo fim do século XIX, muitos matemáticos buscavam refutar teoremas já estabelecidos por meio de contraexemplos construídos por funções "patológicas"(Boyer, 2012). Isso gerou um grande movimento matemático, no século XX, que tinha como objetivo trazer rigor à matemática. Foi nesse movimento que o matemático francês Henri Lebesgue (1875-1941) notou aplicações limitadas da integral de Riemann através do seguinte pensamento:

> Lebesgue, refletindo sobre o trabalho de Borel sobre conjuntos, viu que a definição de Riemann de integral tem o defeito de só se aplicar a casos excepcionais, pois assume não mais que uns poucos pontos de descontinuidade para a função. Se uma função $y = f(x)$ tem muitos pontos de descontinuidade, então, à medida que o intervalo $x_{i+1} - x_i$ se torna menor, os valores $f(x_{i+1})$ e $f(x_i)$ não ficam necessariamente próximos (Boyer, 2012, p.416).

Para resolver este problema, Lebesgue decidiu inverter a ordem da construção que Riemann fizera:

> Em vez de subdividir o domínio da variável independente, Lebesgue dividiu, portanto, o campo de variação $\overline{f} - \underline{f}$ da função em subintervalos Δy_i e em cada subintervalo escolheu um valor η_1. Então, achou a "medida" $\mu(E_i)$ do conjunto E_i dos pontos do eixo x para os quais os valores de f são aproximadamente iguais a η_1(Boyer, 2012, p.416).

A integral que foi gerada por meio da construção anterior recebeu o nome de Integral de Lebesgue que é o tema deste trabalho.

Realizando uma pesquisa com a frase "ensino de cálculo diferencial e integral" na

Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), sem aspas, foram retornados 310 resultados na data do dia 29 de Outubro de 2023 às 10 horas da manhã. Ao observar título e resumo dos trabalhos retornados como resultado da busca, nenhum deles tratava da integral de Lebesgue para alunos de graduação em ciências exatas. Grande parte dos trabalhos eram voltados à reflexão do ensino de cálculo diferencial e integral na perspectiva de Riemann ou aplicações dela. Mediante esta ausência, esta pesquisa levanta o seguinte questionamento: de que forma pode ser apresentada a teoria da medida e integração de Lebesgue de maneira elementar para os alunos de graduação em ciências exatas?

Com base nisso, o objetivo geral desta pesquisa é conhecer algumas definições e resultados da teoria da medida e da integração de Lebesgue de forma elementar. Esse estudo estabeleceu três objetivos específicos: definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis, conhecer a teoria da medida de maneira generalizada e descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

Na primeira seção definimos toda a base de nosso estudo tratando dos conceitos de σ-álgebra, espaços mensuráveis e funções mensuráveis. Todos esses conceitos são vastamente explorados por meio de exemplos. Em particular, é apresentado a σ-álgebra de Borel, bem como é revisado a estrutura de conjuntos abertos na reta numérica. Também mostramos propriedades aritméticas e resultados sobre funções mensuráveis. Por fim, a seção é finalizada com os conceitos de parte positiva e parte negativa de uma função real.

Adiante apresentamos, na segunda seção, a teoria da medida. Para isso, iniciamos com uma generalização dos conceitos da seção anterior utilizando a reta real estendida. Estendemos as definições e resultados de funções mensuráveis para valores reais estendidos. Encerramos a seção apresentando o conceito geral de medida sobre um espaço mensurável apontando exemplos interdisciplinares tais como a função de probabilidade e a medida de um conjunto discreto.

Na última seção, mostramos a construção da integral de Lebesgue para funções simples, funções mensuráveis não negativas e funções mensuráveis quaisquer, respectivamente. Desenvolvemos propriedades e condições de integrabilidade ressaltando teoremas relevantes como o Teorema da Convergência Monótona e o Lema de Fatou. Posteriormente abordamos um vasto número de proposições e propriedades sobre integrais com a finalidade de familiarização sendo a seção terminada com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

A pesquisa que foi realizada tem natureza básica, pois segundo Prodanov et al. (2013, p.51) uma pesquisa básica “objetiva gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência sem aplicação prática prevista. Envolve verdades e interesses universais".

Além disso, de acordo com o mesmo autor, a pesquisa também constou com uma abordagem quantitativa uma vez que os fatos podem ser relevados fora de uma complexidade social, econômica e política (Prodanov et al.,2013). Pode-se observar, ainda, que a pesquisa teve objetivo exploratório, pois segundo GIL:

> As pesquisas exploratórias têm como propósito proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Seu planejamento tende a ser bastante flexível, pois interessa considerar os mais variados aspectos relativos ao tato ou fenômeno estudado. A coleta de dados pode ocorrer de diversas maneiras, mas geralmente envolve: 1.levantamento bibliográfico; 2. entrevistas com pessoas que tiveram experiência prática com o assunto; e 3. análise de exemplos que estimulem a compreensão (SELLTIZ et al., 1967, p. 63). Em virtude dessa flexibilidade, torna-se difícil, na maioria dos casos, "rotular"os estudos exploratórios, mas é possível identificar pesquisas bibliográficas, estudos de caso e mesmo levantamentos de campo que podem ser considerados estudos exploratórios. (2002, p.33)

Como fora supracitado, pode-se atribuir vários procedimentos técnicos à pesquisas exploratórias. O nosso procedimento técnico foi realizado por meio de uma pesquisa bibliográfica devido ser elaborada com base em material já publicado (GIL, 2002).

[AQUI FALTA POR UM RESUMO DA CONCLUSÃO QUE NÃO FIZ AINDA!!!!!!!!]

2 ESPAÇOS E FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Nesta seção, apresentaremos os conceitos que fundamentam a teoria da medida. Trataremos, especificadamente, de σ-álgebra, espaços mensuráveis e funções mensuráveis. Embora estejamos assumindo que o leitor já esteja familiarizado com a teoria de conjuntos, faremos algumas observações sobre notação de alguns conjuntos com o objetivo de cessar o maior número de dúvidas. Iniciaremos definindo σ-álgebra para que possamos construir espaços mensuráveis. Em seguida, abordaremos as funções mensuráveis. Todas as definições e resultados aqui explorados, bem como nas demais seções, tiveram como principal fonte (BARTLE, 1995).

2.1 O Conceito de σ-álgebra

Para que possamos estabelecer uma "medida" precisamos de um ambiente que permita ser "medido". Criamos um ambiente como este adicionando uma estrutura algébrica específica em um conjunto. Tal estrutura recebe o nome de σ-álgebra e é definida da seguinte forma:

Definição 2.1.1 Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\mathscr{C}$ de subconjuntos de X é dita uma σ-álgebra se as seguintes condições são atendidas:

(i) $\varnothing$ e X são elementos de $\mathscr{C}$;

(ii) Se um elemento $A \in \mathscr{C}$, então $A^c \in \mathscr{C}$ [1];

(iii) Se (A_n) é uma sequência de elementos de $\mathscr{C}$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}$.

Com isso, um par ordenado $(X, \mathscr{C})$ constituído de um conjunto X e uma σ-álgebra sobre X é chamado de **espaço mensurável**. Além disso, cada elemento deste espaço é chamado de conjunto $\mathscr{C}-$mensurável. Quando não houver confusão ou quando a σ-álgebra estiver fixada, dizemos simplesmente que cada elemento é um conjunto mensurável. Observe que a terceira condição da definição Definição 2.1.1 nos diz que a união enumerável é um elemento da σ-álgebra. Logo, para um número finito $A_1, A_2, ..., A_n$ com $n \in \mathbb{N}$ de elementos $\mathscr{C}$-mensuráveis de uma σ-álgebra $\mathscr{C}$, a união $\bigcup_{j \in I_n} A_j$ também será um elemento $\mathscr{C}$-mensurável.

Observação 2.1.2 Em todo o texto, indicaremos por I_n o conjunto dos n primeiros números naturais, isto é, $I_n = \{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n\}$.

Exemplo 2.1.3 Seja $X = \{-1, 0, 1\}$. Se considerarmos $\mathscr{C} = \{\varnothing, X, \{0\}, \{-1, 1\}\}$, temos que $(X, \mathscr{C})$ é um espaço mensurável.

[1] Em todo o texto, X^c significa o *complementar do conjunto X*.

Exemplo 2.1.4 Seja X um conjunto qualquer. O conjunto $\mathscr{C}_1 = \{\varnothing, X\}$ é uma σ-álgebra de X. De fato, podemos observar que, nesse exemplo, todas as condições impostas na definição Definição 2.1.1 são atendidas de maneira trivial, pois $\varnothing$ e X são todos os elementos de $\mathscr{C}_1$. Assim, $(X, \mathscr{C}_1)$ é um espaço mensurável.

Perceba que a Definição 2.1.1 não nos diz que uma σ-álgebra de um conjunto é única. Realmente, não é. Assim, um conjunto pode gerar espaços mensuráveis diferentes a depender da σ-álgebra adotada. Para evidenciar essa percepção, observe o exemplo a seguir:

Exemplo 2.1.5 Seja X conforme o exemplo anterior. Considere, agora, o conjunto $\mathscr{C}_2 = \{A;\ A \subset X\}$, ou seja, o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto X [2]. Sabemos que $\varnothing \subset X$ e $X \subset X$. Assim, $\varnothing, X \in \mathscr{C}_2$. Se tomarmos um conjunto $A \subset \mathscr{C}_2$, então $A^c = X - A$ por definição. Ou seja, A^c é formado por elementos que estão todos em X caracterizando-o um elemento de $\mathscr{C}_2$. Da mesma forma, se tomarmos uma sequência (A_j) de elementos de $\mathscr{C}_2$, a reunião $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ é composta por elementos de X. Logo, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}_2$. Com isso, $\mathscr{C}_2$ também é uma σ-álgebra de X e o par $(X, \mathscr{C}_2)$ é um espaço mensurável que, por sua vez, é diferente do espaço $(X, \mathscr{C}_1)$.

Os exemplos apresentados acima são todos de conjuntos que são uma σ-álgebra de um conjunto X arbitrário. Por definição, o conjunto $\mathscr{C}$ é composto de subconjuntos do conjunto X. Será que se construirmos Z um conjunto que contenha $\varnothing$ e X e outros subconjuntos do conjunto X tomados aleatoriamente teremos (X, Z) um espaço mensurável? A resposta é negativa e para convencê-lo disso, mostraremos o seguinte contra-exemplo.

Contraexemplo 2.1.6 Seja $X = \{x, y, z\}$. O conjunto $\mathscr{C} = \{\varnothing, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ não é uma σ-álgebra de X. Sem dúvida, $\varnothing, X \in \mathscr{C}$. Entretanto, perceba que $\{x\} \in \mathscr{C}$, mas $\{x\}^c \notin \mathscr{C}$. De fato, $\{x\}^c = \{x, y, z\} - \{x\} = \{y, z\}$. Entretanto, $\{y, z\} \notin \mathscr{C}$. Assim, a segunda condição da definição Definição 2.1.1 não é satisfeita, impossibilitando que $\mathscr{C}$ seja uma σ-álgebra de X.

A proposição adiante nos mostra como podemos induzir uma σ-álgebra com um conjunto fixado não vazio em um conjunto.

Proposição 2.1.7 Seja X e A dois conjuntos quaisquer com $A \neq \varnothing$. Se $A \subset X$, então o conjunto $\mathscr{C} = \{\varnothing, X, A, A^c\}$ é uma σ-álgebra de X.

Demonstração.

Perceba que as condições *(i)* e *(ii)* da definição Definição 2.1.1 são satisfeitas

[2] O conjunto $\mathscr{C}_2$ também é chamado de conjunto das partes de X e, as vezes, é representado por $\mathscr{P}(X)$.

pela forma que o conjunto $\mathscr{C}$ foi construído. Para verificar a última condição, basta perceber $A \cup A^c = X$. Portanto, $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra de X para qualquer que seja $\varnothing \neq A \subset X$.

$\square$

Exemplo 2.1.8 Considere $X = \mathbb{N}$. Sejam $P = \{2k;\ k \in \mathbb{N}\}$ e $I = \{2k-1;\ k \in \mathbb{N}\}$. Como $P^c = I$, então $\mathscr{C} = \{\varnothing, \mathbb{N}, P, I\}$ é uma σ-álgebra de $\mathbb{N}$ pela proposição anterior.

Note que a definição Definição 2.1.1 trata apenas da reunião de enumerável de elementos da σ-álgebra. Nosso interesse, agora, é investigar se conseguirmos propriedades análogas para a operação de interseção. Iniciaremos verificando o comportamento de interseção de elementos de uma σ-álgebra com a seguinte proposição.

Proposição 2.1.9 Seja $(X, \mathscr{C})$ um espaço mensurável. Se (A_j) é uma sequência de conjuntos $\mathscr{C}$-mensuráveis, então $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ é um elemento $\mathscr{C}$-mensurável.

Demonstração.

Se $A_j \in \mathscr{C}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então cada complementar $A_j^c \in \mathscr{C}$, pois $\mathscr{C}$ é σ-álgebra. Assim, (A_j^c) forma uma sequência de conjuntos $\mathscr{C}$-mensuráveis acarretando que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \in \mathscr{C}$. Segue, pelas *Leis de Morgan* [3], que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c$$

Logo, $\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c \in \mathscr{C}$ o que implica $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}$. Portanto, $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ é um conjunto $\mathscr{C}$-mensurável.

$\square$

Considere a σ-álgebra apresentada na proposição Proposição 2.1.7. Qualquer outra σ-álgebra $\mathscr{F}$ que tiver A como elemento, conterá $\mathscr{C}$. Assim, observamos que

$$\mathscr{C} = \bigcap_{\mathscr{F} \supset A} \mathscr{F}.$$

Esta σ-álgebra $\mathscr{C}$ definimos como a *menor* σ-álgebra gerada por A [4]. Sabendo que a menor σ-álgebra é gerada por meio de intersecções é natural questionarmos se a interseção entre σ-álgebras ainda é uma σ-álgebra de X. Responderemos à esta pergunta com a proposição adiante.

Proposição 2.1.10 Se $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são duas σ-álgebras de um conjunto X, então $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ também é uma σ-álgebra do conjunto X.

3 Vide (LIMA, 2019, p.26)

4 Lembre que a noção de "menor" aqui é trazida por meio da ordem parcial gerada pela relação de inclusão entre conjuntos.

Demonstração.

Se $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são σ-álgebras de X, então ambos possuem $\varnothing$ e X como elementos. Assim, $\varnothing$ e X estão na intersecção $\mathscr{C}$. Além disso, se $A \in \mathscr{C}$, então $A \in \mathscr{C}_1$ e $A \in \mathscr{C}_2$. Por serem ambas σ-álgebras , $A^c \in \mathscr{C}$ e $A^c \in \mathscr{C}_2$. Ou seja, $A^c \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \mathscr{C}$. Por fim, se tomarmos uma sequência (A_n) de elementos de $\mathscr{C}$, observamos que $A_j \in \mathscr{C}_1$ e $A_j \in \mathscr{C}_2$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Assim, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}_1$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}_2$ pela definição de σ-álgebra . Logo, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}$. Com isso, $\mathscr{C}$ satisfaz todas as condições da definição Definição 2.1.1. Portanto, $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra de X.

□

Proposição 2.1.11 Seja $(\mathscr{C}_j)$ uma sequência finita de $\mathscr{C}_j$-álgebras de um conjunto X, então $\mathscr{C} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathscr{C}_j$, com $n \geq 2$, também é uma σ-álgebra do conjunto X.

Demonstração.

Provaremos esse resultado utilizando o método da indução finita sobre n. Se $n = 2$, o resultado é verificado imediatamente pela proposição Proposição 2.1.10. Suponha que se verifique para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é, $\bigcap_{j=1}^{k} \mathscr{C}_j$ é uma σ-álgebra de X. Vamos checar para o sucessor de k. Ora, pela associatividade da interseção, vemos que

$$\bigcap_{j=1}^{k+1} \mathscr{C}_j = \left(\bigcap_{j=1}^{k} \mathscr{C}_j \right) \cap \mathscr{C}_{k+1}\,.$$

Denote $\bigcap_{j=1}^{k} \mathscr{C}_j = H$. Sabemos por hipótese de indução que H e $\mathscr{C}_{k+1}$ são σ-álgebras de X. Segue, pela base de indução, que $H \cap \mathscr{C}_{k+1}$ é uma σ-álgebra de X. Portanto, $\bigcap_{j=1}^{k+1} \mathscr{C}_j$ é uma σ-álgebra de X como queríamos.

□

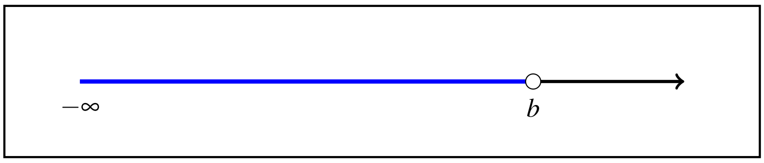
Note que há uma diferença gritante entre as proposições Proposição 2.1.9 e Proposição 2.1.10. A primeira trata de conjuntos mensuráveis de uma σ-álgebra e a outra refere-se à σ-álgebras de um conjunto X. Além disso, perceba que até aqui trabalhamos o conceito de σ-álgebra de maneira abstrata sendo utilizada em um conjunto qualquer. Trataremos, agora, de uma σ-álgebra extremamente importante e específica para o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Definição 2.1.12 Seja $X = \mathbb{R}$. A Álgebra de Borel é a σ-álgebra $\mathscr{B}$ gerada por todos os intervalos abertos $(-\infty, x)$ com $x \in \mathbb{R}$. Os elementos dessa σ-álgebra são chamados de Borelianos.

Esta σ-álgebra é extremamente relevante para os estudos de medida e integração e pode ser definida de várias formas diferentes, mas todas são equivalentes. Isso quer dizer que $(-\infty, x)$ não é a única forma dos elementos de $\mathscr{B}$. De fato, se $(-\infty, x) \in \mathscr{B}$, então $(-\infty, x)^c \in \mathscr{B}$ só que $(-\infty, x)^c = [x, +\infty)$. Assim, poderíamos definir $\mathscr{B}$ por meio de intervalos do tipo $[x, +\infty)$. Em particular, poderíamos ter definido a $\mathscr{B}$ por meio da σ-álgebra gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.

Antes de provamos este fato, observe que podemos decompor intervalos reais como a união de outros intervalos reais. Por exemplo, utilizando a reta real, podemos representar intervalo $(-\infty, b)$ da seguinte maneira

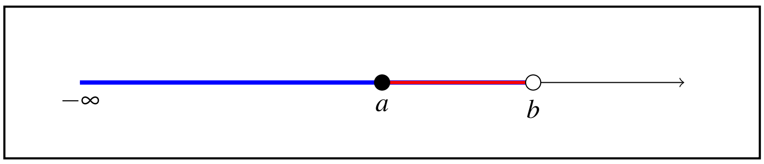
Figura 1 – Intervalo $(-\infty, b)$



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Se tomarmos um $a \in \mathbb{R}$ fixo, com $a < b$, então a decomposição do intervalo $(-\infty, b)$ pode ser expressa por meio da união dos intervalos $(-\infty, a]$ e (a, b), onde estão representados na figura a seguir pelas cores azul e vermelha respectivamente.

Figura 2 – Representação de uma decomposição do intervalo $(-\infty, b)$ na reta real



Fonte**:** Elaborado pelo autor

A decomposição de intervalos reais pela união de outros é relevante para mostrar a seguinte equivalência sobre a σ-álgebra de Borel.

Teorema 2.1.13 Uma σ-álgebra é de Borel se, e somente se, é gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.
Demonstração.

Suponha que $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ é um espaço mensurável. Sejam a e b números reais, com $a < b$.

Como $a-\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que o intervalo $\left(-\infty, a-\frac{1}{n}\right) \in \mathscr{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue, pela proposição Proposição 2.1.9, que $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\infty, a-\frac{1}{n}\right) \in \mathscr{B}$. Com isso, afirmamos que a interseção de todos os intervalos $\left(-\infty, a-\frac{1}{n}\right)$ é igual ao intervalo $(-\infty, a]$. De fato,

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}}\left(-\infty, a-\frac{1}{n}\right) &\Leftrightarrow x \in\left(-\infty, a-\frac{1}{n}\right), \forall\, n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow x<a-\frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow+\infty} x \leq \lim_{n \rightarrow+\infty}\left(a-\frac{1}{n}\right) \\
&\Leftrightarrow x \leq a \\
&\Leftrightarrow x \in(-\infty, a].
\end{aligned}
$$

Logo, $(-\infty, a] \in \mathscr{B}$ acarretando que $(a,+\infty)=(-\infty, a]^c \in \mathscr{B}$. Observe que podemos decompor $(-\infty, b)=(-\infty, a] \cup(a, b)$ enquanto que $(a,+\infty)=(a, b) \cup[b,+\infty)$. Desta forma, vemos que $(-\infty, b) \cap(a,+\infty)=(a, b)$. Como $(-\infty, b)$ e $(a,+\infty)$ são elementos de $\mathscr{B}$, segue pela proposição Proposição 2.1.9 que $(a, b) \in \mathscr{B}$. Com isso, $\mathscr{B}$ pode ser gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.

Suponha, reciprocamente, que $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$. Se $\mathscr{C}$ é gerada por intervalos do tipo (a, b) onde $a, b \in \mathbb{R}$, então os conjuntos $A_n=(-n, b)$ são todos elementos de $\mathscr{C}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Segue, pela definição Definição 2.1.1, que $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, b) \in \mathscr{C}$. Só que $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, b)=(-\infty, b)$. Com isso, os elementos de $\mathscr{C}$ são do tipo $(-\infty, b)$. Portanto, $\mathscr{C}=\mathscr{B}$.

□

2.2 Funções Mensuráveis

Agora que já estamos familiarizados com os conceitos de σ-álgebra e espaços mensuráveis, vamos aplicar, sobre este espaço uma função e estudar seu comportamento [5]. Iniciaremos tratando de funções reais e estenderemos o conceito conforme haja necessidade. A partir de agora fixemos que, quando não houver menção contrária, X será um conjunto qualquer diferente de $\varnothing$ e $\mathscr{C}$ será uma σ-álgebra desse conjunto.

Definição 2.2.1 Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita $\mathscr{C}$-mensurável se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X;\ f(x)>\alpha\} \in \mathscr{C}$.

[5] Em todo o texto função e aplicação são sinônimos.

Exemplo 2.2.2 Seja $K \in \mathbb{R}$ um número fixado. A função $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = K$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

Para mostrarmos este fato, precisamos analisar os casos de α. Assim

(I) Se $\alpha \geq K$, então o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \varnothing$ uma vez que não existe $x \in X$ tal que $f(x) = K > \alpha$.

(II) Se $\alpha < K$, então para todo $x \in X$, $f(x) > \alpha$. Logo, o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = X$.

Em todo caso, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$. Portanto, a função constante f é $\mathscr{C}$-mensurável.

Exemplo 2.2.3 Seja $(X, \mathscr{C})$ uma espaço mensurável e $A \in \mathscr{C}$. A função característica [6] de A $\chi_A : X \to \{0,1\}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

é $\mathscr{C}$-mensurável.

Para verificar se X_A é $\mathscr{C}$-mensurável precisamos, novamente, analisar os casos de $\alpha \in \mathbb{R}$.

(I) Se $\alpha \geq 1$, observamos que $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = \varnothing$, pois não há $x \in X$ tal que $\chi_A(x) > 1$.

(II) Se $0 \leq \alpha < 1$, então o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = A$, pois apenas valores $x \in A$ tem suas imagens $\chi_A(x) = 1$ e consequentemente $\chi_A(x) \geq \alpha$.

(III) se $\alpha < 0$, podemos notar que o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = X$, pois para qualquer que seja $x \in X$, os valores $\chi_A(x) \geq 0$.

Em todo o caso, vemos que o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\}$ é um elemento de $\mathscr{C}$, pois $\varnothing, X$ e A são elementos de $\mathscr{C}$. Portanto, a função característica $\chi_A(x)$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

Proposição 2.2.4 Dado um conjunto X. Sejam $A, B \subset X$, então $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$. Em particular, se $A \cap B = \varnothing$, então $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$.

Demonstração.

Vamos dividir a demonstração em casos:

(I) Se $\chi_{A\cup B}(x) = 0$, então $x \notin A \cup B$. Logo, $x \notin A$ e $x \notin B$ acarretando que $x \notin A \cap B$. Dessa forma, $\chi_A = \chi_B = \chi_{A\cap B} = 0$.

(II) Caso $\chi_{A\cup B}(x) = 1$ e $\chi_{A\cap B}(x) = 0$, então $x \in (A \cup Y)$ e $x \notin A \cap Y$. Logo, $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$. Como $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$, concluímos que $x(A - B) \cup (B - A)$, ou seja, $x \in A - B$ ou $x \in B - A$. Se $x \in A - B$, então $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 0$. Logo, $\chi_{A\cup B}(x) =$

[6] As vezes também é chamada função indicadora.

$1 = 1+0+0 = \chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$. Se $x \in B-A$, então $\chi_B(x) = 1$ e $\chi_A(x) = 0$ acarretando que $\chi_{A\cup B}(x) = 1 = 1+0+0 = \chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$.

(III) Caso $\chi_{A\cup B}(x) = 1$ e $\chi_{A\cap B}(x) = 1$, então $x \in A\cup B$ e $x \in A\cap B$, isto é, $x \in A$ e $x \in B$. Com isso, $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$. Logo, $\chi_{A\cup B} = 1 = 1+1-1 = \chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$.

Segue que em todo caso, temos $\chi_{A\cup B} = \chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$ como desejávamos.

Caso, tenhamos $A\cap B = \varnothing$, então $\chi_{A\cap B}(x) = 0$. Segue pela primeira parte dessa demonstração que $\chi_{A\cup B} = \chi_A+\chi_B$.

□

Exemplo 2.2.5 Considere o espaço mensurável $(\mathbb{R},\mathscr{B})$. Toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua é Borel mensurável.

Para mostrar a validade do exemplo acima, precisamos de resultados auxiliares que encontraremos em (LIMA, 2019). Um deles é a proposição abaixo.

Proposição 2.2.6 Suponha que $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua em todos os pontos de X. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um aberto [7], então o conjunto $A = \{a \in X;\ f(a) > k\}$ é um aberto (p.226).

Além disso, em (LIMA, 2019, p.167), encontramos o seguinte teorema:

Teorema 2.2.7 Todo subconjunto aberto $A \subset R$ se exprime, de modo único, como um reunião enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos.

Segue disso que o $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n$ onde cada A_n é um intervalo aberto, ou seja, $A_n \in \mathscr{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, pela Definição 2.1.1, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{B}$. Portanto, qualquer função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Borel mensurável. Lembre que ao apresentarmos a Álgebra de Borel (Definição 2.1.12), mostramos no Teorema 2.1.13 que há mais de uma maneira de definir os borelianos. Para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}$-mensurável, também podemos definir uma função $\mathscr{C}$-mensurável por meio de conjuntos diferentes conforme o seguinte teorema.

Teorema 2.2.8 Sendo $(X,\mathscr{C})$ um espaço mensurável, para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}$-mensurável as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$; (c) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $C_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{C}$;

(b) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $B_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \leq \alpha\} \in \mathscr{C}$; (d) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{x \in X;\ f(x) < \alpha\} \in \mathscr{C}$.

Demonstração.

Dividiremos esta demonstração em três partes. A estratégia será mostrar que a afirmação (a) é equivalente à afirmação (b); depois que a afirmação (c) é equivalente à afirmação (d) ; e por fim que a firmação (a) ocorre se, e somente se, a afirmação (c) ocorre.

[7] Em caso de dúvida sobre o que é um subconjunto X de $\mathbb{R}$ aberto, consulte (LIMA, 2019, p.164).

(I) Suponha a validade da afirmação (a). Se $A_\alpha \in \mathscr{C}$, então $A_\alpha^c \in \mathscr{C}$, pela definição de $\mathscr{C}$-álgebra. Perceba que

$$x \in A_\alpha^c \Leftrightarrow x \notin A_\alpha \Leftrightarrow x \in X \text{ e } f(x) \leq \alpha, \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in B_\alpha$$

Assim, um elemento está em A_α^c se, e somente se, está em B_α. Segue que $A_\alpha^c = B_\alpha$. Logo, B_α é elemento de $\mathscr{C}$.

(II) Para mostrar a equivalência entre as afirmações (c) e (d) utilizamos um argumento totalmente análogo à parte (I), pois se $x \notin C_\alpha$, então $f(x) < \alpha$ acarretando que $x \in D_\alpha$ e vice-versa.

(III) Suponha que $A_\alpha \in \mathscr{C}$. Tome a sequência $\left(A_{\alpha-\frac{1}{n}}\right)$. Claramente, cada $A_{\alpha-\frac{1}{n}}$ é um elemento de $\mathscr{C}$ por definição. Logo, pela Proposição 2.1.9, a interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}} \in \mathscr{C}$. Além disso, note que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x \in A_{\alpha-\frac{1}{n}}, \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(x) > \alpha - \frac{1}{n},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Como cada $f(x) \in \mathbb{R}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow f(x) \geq \alpha \Leftrightarrow x \in C_\alpha \tag{2}$$

Segue das equivalências (1) e (2) que $C_\alpha \Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}}$ acarretando que $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}}$. Portanto $C_\alpha \in \mathscr{C}$ como queríamos.

Reciprocamente, suponha que $C_\alpha \in \mathscr{C}$. Tomemos a sequência $\left(C_{\alpha+\frac{1}{n}}\right)$. Cada elemento $C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathscr{C}$ por definição. Assim, pela definição de σ-álgebra , $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathscr{C}$. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} &\Leftrightarrow x \in C_{\alpha+\frac{1}{n_0}}, \text{ para algum } n_0 \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n_0} \\ &\Leftrightarrow f(x) > \alpha \\ &\Leftrightarrow x \in A_\alpha \end{aligned}$$

Assim, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} = A_\alpha$. Logo, $A_\alpha \in \mathscr{C}$. Portanto, concluímos de $(I),(II)$ e (III) que as afirmações $(a),(b),(c)$ e (d) são todas equivalentes.

□

Perceba que mesmo na presença do Teorema 2.2.8, mostrar que uma função é mensurável é trabalhoso e repetitivo uma vez que, geralmente, é preciso verificar os casos de α. Com o intuito de otimizar a identificação de uma função mensurável, veremos o comportamento de operações aritméticas entre funções mensuráveis.

Proposição 2.2.9 Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real $\mathscr{C}$-mensurável e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções cf, f^2 e $|f|$ são $\mathscr{C}$-mensuráveis.

Demonstração.

(a) Mostraremos que cf é $\mathscr{C}$-mensurável para todos os casos possíveis do número real $c \in \mathbb{R}$.

(i) Se $c = 0$, então $c \cdot f(x) = 0$, $\forall\, x \in X$, ou seja, cf se torna a função constante. Segue pelo exemplo Exemplo 2.2.2 que cf é $\mathscr{C}$-mensurável.

(ii) Se $c > 0$, então dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $cf(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \dfrac{\alpha}{c}$. Logo,

$$\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\}$$

Isso ocorre para todo α e f é $\mathscr{C}$-mensurável, isto é, $\left\{x \in X; f(x) > \dfrac{\alpha}{c}\right\} \in \mathscr{C}$. Logo, cf é $\mathscr{C}$-mensurável.

(iii) Por fim, se $c < 0$, então existe um $0 < z \in \mathbb{R}$ tal que $c = -z$. Assim,

$$cf(x) > \alpha \Leftrightarrow -zf(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x) < -\frac{\alpha}{z}$$

Assim, o conjunto $\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) < -\dfrac{\alpha}{z}\right\}$. Desta forma, o conjunto $\left\{x \in X; f(x) < -\dfrac{\alpha}{z}\right\} \in \mathscr{C}$ pelo item (d) do teorema Teorema 2.2.8. Portanto, cf é $\mathscr{C}$-mensurável em todos os casos de $c \in \mathbb{R}$.

(b) Para mostrar a mensurabilidade de f^2 é também necessário analisar os casos de α.

(i) Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} = X$, pois $[f(x)]^2 \geq 0$ para todo $x \in X$.

(ii) Se $\alpha \geq 0$, então para todo $x \in X$ $[f(x)]^2 > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \sqrt{\alpha}$ ou $f(x) < -\sqrt{\alpha}$. Assim, um elemento $x_0 \in \{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\}$ se, e somente se, $x_0 \in \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\}$ ou $x_0 \in \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$. Com isso,

$$\left\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\right\} = \left\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\right\} \cup \left\{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\right\}.$$

Como f é $\mathscr{C}$-mensurável por hipótese, temos que $\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{C}$ e $\{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{C}$. Desta forma, usando a definição de σ-álgebra , obtemos que $\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{C}$. Consequentemente, $\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} \in \mathscr{C}$ acarretando a mensurabilidade de f^2.

(c) Analogamente ao item anterior, se $\alpha < 0$, $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = X$. Por outro lado, se $\alpha \geq 0$, vemos que $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X; f(x) < -\alpha\}$. Assim, a mensurabilidade de f acarreta na mensurabilidade de $|f|$ como desejávamos.

□

Antes de provarmos a próxima proposição, vamos enunciar um teorema que nos auxiliará na próxima demonstração.

Lema 2.2.10 O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos em $\mathbb{R}$ (Elon, 2019, p.84).

A prova desse teorema será omitida para que o texto não prolongue-se mais do que o necessário.

Proposição 2.2.11 Sejam $f,g : X \to \mathbb{R}$. Se f e g são ambas $\mathscr{C}$-mensuráveis, então as funções $f+g$ e $f \cdot g$ são também $\mathscr{C}$-mensuráveis.

Demonstração.

Provaremos, primeiramente, que $f+g$ é $\mathscr{C}$-mensurável. Ora, por hipótese, f e g são $\mathscr{C}$-mensuráveis. Assim, dado $r \in \mathbb{Q}$, os conjuntos $\{x \in X; f(x) > r\}$ e $\{x \in X; g(x) > \alpha - r\}$ são ambos elementos de $\mathscr{C}$. Considere o conjunto

$$H_r = \{x \in X; f(x) > r\} \cap \{x \in X;\ g(x) > \alpha - r\}$$

Isto é, o conjunto dos elementos $x \in X$ tal que $f(x) > r$ e $g(x) > \alpha - r$ simultaneamente. Assim, afirmamos que $\{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\} = \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} H_r$. Com efeito, tomemos um elemento $a \in \{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\}$. Assim,

$$(f+g)(a) > \alpha \Rightarrow f(a)+g(a) > \alpha \Rightarrow f(a)+g(a)-\alpha > 0.$$

Para que os cálculos fiquem simplificados, denotaremos $f(a)+g(a)-\alpha = b$. Com isso, para qualquer que seja $r \in \mathbb{Q}$, temos

$$b = f(a)+g(a)-\alpha = f(a)+g(a)-\alpha-r+r = (f(a)-r)+(g(a)-\alpha+r).$$

Pelo Lema 2.2.10, podemos escolher um $r_0 \in \mathbb{Q}$ de modo que obtemos $f(a)-r_0 \approx \dfrac{b}{2}$ acarretando que $g(a)-\alpha+r_0 \approx \dfrac{b}{2}$. Se $b > 0$, então $\dfrac{b}{2} > 0$. Segue que $f(a)-r_0 > 0$ e $g(a)-\alpha+r_0 > 0$. Consequentemente, $f(a) > r_0$ e $g(a) > \alpha - r_0$. Logo, $a \in H_{r_0}$. Como existe um $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a \in H_r$ concluímos que $a \in \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} H_r$.

Reciprocamente, sendo $a \in \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} H_r$ existe um elemento $r_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $a \in H_{r_0}$. Logo, $f(a) > r_0$ e $g(a) > \alpha - r_0$. Ao somarmos membro à membro temos

$$f(a)+g(a) > r_0 + \alpha - r_0 \Rightarrow (f+g)(a) > \alpha.$$

Com isso, $a \in \{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\}$ como queríamos. Concluindo que a afirmação é verdadeira.

Além disso, para cada $r \in \mathbb{Q}$, o conjunto H_r é um elemento de $\mathscr{C}$, pois é a interseção de dois elementos de $\mathscr{C}$ (proposição Proposição 2.1.9). Note também que, pela definição de $\mathscr{C}$, a coleção $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} H_r$ é um elemento de $\mathscr{C}$, pois $\mathbb{Q}$ é enumerável [8]. Segue que $f+g$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

Para mostrar que fg é mensurável basta notar que é a combinação de outras funções $\mathscr{C}$-mensuráveis. De fato, dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}
4(fg)(x) &= 2(fg)(x) + 2(fg)(x) \\
&= [f(x)]^2 - [f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2 - [g(x)]^2 + 2f(x)g(x) \\
&= \left([f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2\right) - \left([g(x)]^2 - 2f(x)g(x) + [f(x)]^2\right) \\
&= (f(x)+g(x))^2 - (f(x)-g(x))^2 \\
&= [(f+g)(x)]^2 - [(f-g)(x)]^2.
\end{aligned}$$

Logo, $fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$. Perceba que $f-g$ é mensurável, pois sendo g mensurável, podemos usar a Proposição 2.2.9 pondo $c = -1$. Assim, temos $(-1)g = -g$ acarretando que $-g$ é mensurável. Além disso, pela parte *(a)* desta proposição, $f-g = f+(-g)$. Segue que fg é $\mathscr{C}$-mensurável.

□

Definição 2.2.12 Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que a **parte positiva** da função f é a função $f^+ : X \to \mathbb{R}$ definida por $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}$. Semelhantemente, chamamos de a **parte negativa** da função f, a função $f^- : X \to \mathbb{R}$ definida por $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$ [9].

É possível que a definição de parte positiva e negativa de funções fique um pouco abstrata em um primeiro contato. Numa tentativa de esclarecer ao máximo, daremos o seguinte exemplo:

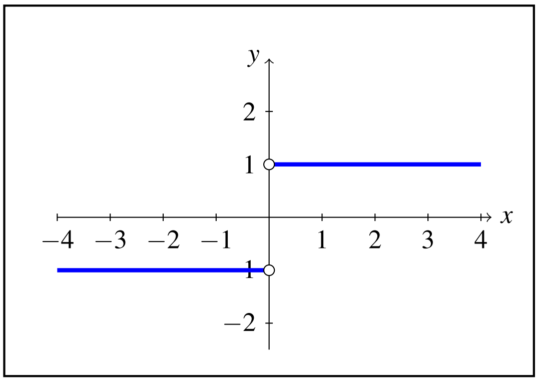
Exemplo 2.2.13 Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Então $f^+(x) = 1$ e $f^-(x) = -1$. De fato, ao tomarmos um elemento real $x < 0$, vemos que sua imagem $f(x) < 0$ sendo $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$. Se $x > 0$, então $f(x) = \frac{x}{x} = 1$. Assim, $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} = 1$ enquanto que $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\} = -1$.

Neste caso, podemos perceber, ao olhar para a Figura 3 que tanto a parte positiva quanto a parte negativa da função f, apresentada no Exemplo 2.2.13, são ambas funções constantes.

Com isso, finalizaremos esta seção apresentando alguns resultados importantes sobre parte positiva e negativa de uma função.

[8] Em caso de dúvida, vide (LIMA, 2019, p.51).
[9] Em caso de dúvidas sobre o supremo de um conjunto real, vide (LIMA, 2019, p.75).

Figura 3 – Gráfico da Função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Lema 2.2.14 Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real. Então $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.

Demonstração.

Para provar que $f = f^+ - f^-$, devemos avaliar os casos de $f(x)$. Logo, se $f(x) \geq 0$, então $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} = f(x)$ e $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\} = 0$, pois $f(x) \geq 0 \Rightarrow -f(x) \leq 0$. Disso, $f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x)$, ou seja, $(f^+ - f^-)(x) = f(x), \forall\ f(x) \geq 0$. Caso $f(x) < 0$, então $-f(x) > 0$. Com isso, $\sup\{f(x), 0\} = 0$ e $\sup\{-f(x), 0\} = -f(x)$. Desta forma vemos que $f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x)$. Em todo caso, $f = f^+ - f^-$.

Analogamente, se $f(x) \geq 0$, então $\sup\{f(x), 0\} = f(x)$ e $\sup\{-f(x), 0\} = 0$. Assim, $f^+(x) + f^-(x) = f(x)$. Caso, $f(x) < 0$, então $-f(x) > 0$. Com isso, obtemos $\sup\{f(x), 0\} = 0$ e $\sup\{-f(x), 0\} = -f(x)$. Logo, $f^+(x) + f^-(x) = -f(x)$. Desta forma,

$$(f^+ + f^-)(x) = \max\{f(x), -f(x)\} = |f(x)|.$$

Portanto, $f^+ + f^- = |f|$.

$\square$

Observe que o Lema 2.2.14 nos dá a forma das funções f^+ e f^- de maneira implícita. De fato, somando as duas expressões membro a membro vemos que

$$f + |f| = (f^+ + f^+) - (f^- + f^-) = 2f^+$$

Assim, podemos expressar $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$. De modo semelhante, conseguimos subtrair membro a membro e obter a expressão $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$. Isso demonstra o lema adiante:

Lema 2.2.15 Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função real, então $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$ e $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$.

Teorema 2.2.16 Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathscr{C}$-mensurável se, e somente se, suas partes negativa e positiva são ambas $\mathscr{C}$-mensuráveis.

Demonstração.

Suponha que f seja $\mathscr{C}$-mensurável. Pela proposição Proposição 2.2.9 vemos que a função $|f|$ é $\mathscr{C}$-mensurável e pelo lema Lema 2.2.15 as funções $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ e $f^+ = \frac{1}{2}(|f| - f)$ também são $\mathscr{C}$-mensuráveis. Reciprocamente, supondo que f^+ e f^- são mensuráveis, temos pelo Lema 2.2.14 que $f = f^+ - f^-$. Segue, novamente pela proposição Proposição 2.2.11, que f é $\mathscr{C}$-mensurável.

$\square$

Assim, se retornarmos à figura 3, vemos que a função do exemplos Exemplo 2.2.13 é $\mathscr{C}$-mensurável, pois suas partes positiva e negativa são ambas funções constantes que são mensuráveis conforme a Proposição 2.2.9.

3 A TEORIA DA MEDIDA

Nesta seção, apresentaremos o conceito chave desse trabalho: a teoria da medida. Conhecemos este conceito de forma intuitiva pelo o que vemos, geralmente, na geometria euclidiana plana. Aqui, trataremos de medida de modo generalizado. Para isso, precisaremos ampliar o conjunto dos números reais para que ele possa atender novas exigências. Isso é necessário porquê, as vezes, teremos conjuntos tão "grandes" que nenhum número real poderá representar sua medida. Assim, estenderemos o conjunto dos números reais na primeira seção. Na seguinte, estenderemos o conceito de função mensurável para o conjunto dos números reais estendidos e, na seção final, apresentaremos a definição de medida bem como exemplos dela.

3.1 Os Espaços de Funções Mensuráveis

Definição 3.1.1 A coleção $\overline{\mathbb{R}}$ que consiste de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ é chamada de **Sistema Estendido de Números Reais**.

Ou seja, $\overline{\mathbb{R}}$ nada mais é que o conjunto dos números reais com a possibilidade de se ter $-\infty$ ou $+\infty$. Com isso, parece que nosso problema de medir conjuntos muito grandes se resolveu. Entretanto, alguns cuidados são necessários para operarmos em $\overline{\mathbb{R}}$. Um deles, por exemplo, é que $\overline{\mathbb{R}}$ não é fechado para operações de $\mathbb{R}$ tais como $(+\infty)+(-\infty)$ que nem definido é. Dito isso, para $x \in \mathbb{R}$, as operações dos símbolos $+\infty$ e $-\infty$ são dadas da seguinte forma:

- $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$;
- $x+(+\infty) = (+\infty)+x = +\infty$;
- $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$;
- $x+(-\infty) = (-\infty)+x = -\infty$;
- $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$;
- $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$;
- $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$;
- $(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$.

Na multiplicação, dependendo do número real, a operação diferencia-se. Assim, podemos ter

$$x\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot x = \begin{cases} +\infty, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -\infty, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad x\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot x = \begin{cases} -\infty, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ +\infty, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Neste novo contexto de números reais a σ-álgebra de Borel não é mais válida uma vez que a definição Definição 2.1.12 não inclui $+\infty$ nem $-\infty$. Logo, precisaremos de uma σ-álgebra em $\overline{\mathbb{R}}$ para dar continuidade aos nossos estudos. Com isso, considere $\overline{\mathbb{R}}$. Tomando um conjunto arbitrário $E \in \mathscr{B}$, com $\varnothing \neq E$, defina $E_1 = E \cup \{-\infty\}, E_2 = E \cup \{+\infty\}$ e $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$. Desta forma, o conjunto $\overline{\mathscr{B}} = \bigcup_{E \in \mathscr{B}} \{E, E_1, E_2, E_3\}$ é uma σ-álgebra de $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 3.1.2 A σ-álgebra $\overline{\mathscr{B}} = \bigcup_{E \in \mathscr{B}} \{E, E_1, E_2, E_3\}$ do conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ é chamada de Álgebra de Borel Estendida.

Uma vez que estamos familiarizados com os conceitos de funções de valores reais mensuráveis, estamos prontos para estender este conceito para o conjunto $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 3.1.3 Sendo $(X, \mathscr{C})$ um espaço mensurável, uma função de valores reais estendidos $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita $\mathscr{C}$-mensurável caso o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$ para qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Denotaremos a família de todas as funções de valores reais estendidos de X que são $\mathscr{C}$-mensuráveis por $M(X, \mathscr{C})$. Além disso, caso estivermos tratando apenas das funções não negativas usaremos $M^+(X, \mathscr{C})$.

Proposição 3.1.4 Se $f \in$ M(X,$\mathscr{C}$), então $\{x \in X; f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\}$.

Demonstração.

Tome, de modo arbitrário, um elemento $a \in X$. Assim,

$$\begin{aligned} a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\} &\Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) > n\},\ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(a) > n \\ &\Leftrightarrow f(a) = +\infty. \end{aligned}$$

Além disso, note que cada $\{x \in X; f(x) > n\} \in \mathscr{C}$. Segue, pela Proposição 2.1.9, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\} \in \mathscr{C}$ acarretando que $\{x \in X; f(x) = +\infty\} \in \mathscr{C}$.

$\square$

Proposição 3.1.5 Se $f \in$ M(X,$\mathscr{C}$), então $\{x \in X; f(x) = -\infty\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \right)^c$.

Demonstração.

Analogamente à proposição Proposição 3.1.4 tomemos $a \in X$. Segue que

$$\begin{aligned} a \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \right)^c &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\{x \in X; f(x) > -n\})^c \\ &\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, a \in (\{x \in X; f(x) > -n\})^c \\ &\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, a \notin \{x \in X; f(x) > -n\} \\ &\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, a \in \{x \in X; f(x) \leq -n\} \\ &\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, f(a) \leq -n \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a) \leq \lim_{n\to\infty} (-n) \\ &\Leftrightarrow f(a) = -\infty. \end{aligned}$$

Com isso, podemos perceber que $a \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \right)^c \Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) = -\infty\}$. Ora, cada $\{x \in X; f(x) > -n\} \in \mathscr{C}$. Assim, por definição de σ-álgebra , temos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \in \mathscr{C}$ e também $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \right)^c \in \mathscr{C}$. Concluímos disso que $\{x \in X; f(x) = -\infty\} \in \mathscr{C}$ como queríamos provar.

$\square$

Teorema 3.1.6 Uma função de valores reais estendidos $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathscr{C}$-mensurável se, e somente se, os conjuntos $A = \{x \in X; f(x) = +\infty\}$ e $B = \{x \in X; f(x) = -\infty\}$ são elementos de $\mathscr{C}$ e a função $h : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \notin A \cup B \\ 0, & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}$$

é $\mathscr{C}$-mensurável.

Demonstração.

Suponha que $f \in \mathrm{M(X,}\mathscr{C})$. Logo, pela Proposição 3.1.4 e Proposição 3.1.5, os conjuntos A e B são elementos de $\mathscr{C}$. Assim, tome $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \geq 0$, então os elementos de $\{x \in X; h(x) > \alpha\}$ são os elementos de $\{x \in X; f(x) > \alpha\}$ que não estão em A, pois h tem contradomínio $\mathbb{R}$. Como $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra, $A \in \mathscr{C} \Rightarrow A^c \in \mathscr{C}$. Com isso,

$$\{x \in X; h(x) > \alpha\} = A^c \cap \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$$

Segue, pela Proposição 2.1.9 que $\{x \in X; h(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$, ou seja, h é $\mathscr{C}$-mensurável. Caso, $\alpha < 0$, então $\{x \in X; h(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B$, pois $h(x) = 0$ para $x \in A \cup B$. Desta forma h é $\mathscr{C}$-mensurável.

Por outro lado, se supormos que A e B são elementos de $\mathscr{C}$ e h é $\mathscr{C}$-mensurável, então

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; h(x) > \alpha\} \cup A$$

quando $\alpha \geq 0$, e

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; h(x) > \alpha\} \cap B^c$$

quando $\alpha < 0$, por motivos análogos à primeira parte da demonstração. Portanto, f é uma função $\mathscr{C}$-mensurável como desejávamos.

$\square$

Como consequência do Proposição 2.2.9 e o Teorema 3.1.6 obtemos, imediatamente, que se $f \in M(X, \mathscr{C})$, então as funções $cf, f^2, |f|, f^+$ e f^- também são elementos de $M(X, \mathscr{C})$.

Entretanto, um resultado análogo à Proposição 2.2.11 não é possível em $\overline{\mathbb{R}}$. Isso acontece porquê em $\overline{\mathbb{R}}$ a operação de adição não é bem definida. Então caso $f(x) = +\infty$ e $g(x) = -\infty$ para algum $x \in \mathbb{R}$ a adição $f(x)+g(x)$ não é realizada. Por outro lado, a função fg é $\mathscr{C}$-mensurável se f e g forem ambas $\mathscr{C}$-mensuráveis. Para mostrar isso, precisamos de alguns resultados que serão expostos adiante

Teorema 3.1.7 Seja (f_n) uma sequência de elementos de M(X,$\mathscr{C}$) e defina as funções

$$f(x) = \inf f_n(x),\ F(x) = \sup f_n(x),\ f^*(x) = \liminf f_n(x),\ F^*(x) = \limsup f_n(x).$$

Então as funções f, f^*, F e F^* são elementos de M(X,$\mathscr{C}$).

Demonstração.

Como (f_n) é uma sequência de funções $\mathscr{C}$-mensuráveis e $f = \inf f_n$, afirmamos que $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$. De fato, tomemos um elemento $y \in X$. Assim,

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} &\Leftrightarrow y \in \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f_n(y) \geq \alpha\ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(y) \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha\ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f(y) \geq \alpha\ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow y \in \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

Como cada $\{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$ é $\mathscr{C}$-mensurável, segue pela proposição Proposição 2.1.9 que o conjunto $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Desta forma, f é $\mathscr{C}$-mensurável.

Observe, também, que $\{x \in X; F(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_(x) > \alpha\}$. Com efeito, para $y \in X$

$$\begin{aligned} y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) > \alpha\} &\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } y \in \{x \in X; f_k(x) > \alpha\} \\ &\Leftrightarrow f_k(y) > \alpha \\ &\Leftrightarrow F(x) \geq f_k(y) > \alpha \\ &\Leftrightarrow F(x) > \alpha,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow y \in \{x \in X; F(x) > \alpha\} \end{aligned}$$

Assim, concluímos que f e F são $\mathscr{C}$-mensuráveis. Note que a mensurabilidade de f^* e F^* vem de f e F uma vez que

$$f^*(x) = \sup_{n\geq 1} \left\{ \inf_{m\geq n} f_m(x) \right\} \text{ e } F^*(x) = \inf_{n\geq 1} \left\{ \sup_{m\geq n} f_m(x) \right\}$$

$\square$

Corolário 3.1.8 Se (f_n) é uma sequência em M(X,$\mathscr{C}$) que converge para f em X, então f também está em M(X,$\mathscr{C}$).

Demonstração.

Ora, por hipótese $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Só que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$. Segue que $f(x) = \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ que, por sua vez, é $\mathscr{C}$-mensurável pelo teorema anterior.

$\square$

Definição 3.1.9 Seja f uma função em M(X,$\mathscr{C}$) e $A > 0$. Definimos o truncamento f_A da função f por

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq A \\ A, & \text{se } f(x) > A \\ -A, & \text{se } f(x) < -A \end{cases}$$

Proposição 3.1.10 Seja A um número real maior que zero. Se f é uma função em M(X,$\mathscr{C}$), então f_A é uma função $\mathscr{C}$-mensurável.

Demonstração.

Basta provar que para qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $\{x \in X; f_A(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$. Para isso, vamos analisar os casos de α. Se $-A \leq \alpha \leq A$, então $f_A(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Logo,

$$\{x \in X; f_A(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\}$$

Como f é mensurável, $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$. Caso $\alpha > A$, então

$$\{x \in X; f_A(x) > \alpha\} = \varnothing \in \mathscr{C}.$$

Pois, por definição de f_A, não existe valor maior que A. Caso tenhamos $\alpha < -A$, ocorre que

$$\{x \in X; f_A(x) > \alpha\} = X \in \mathscr{C}.$$

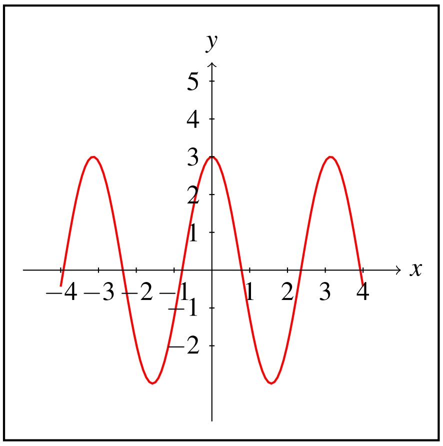
Pois todos os valores que f_A assume são maiores ou igual à $-A$. Em todo caso, o conjunto $\{x \in X; f_A(x) > \alpha\}$ é um elemento de $\mathscr{C}$. Portanto, f_A é $\mathscr{C}$-mensurável.

$\square$

Para que possamos entender melhor o truncamento de uma função, apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1.11 Seja $g \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$ tal que $g(x) = 3\cos(2x)$.

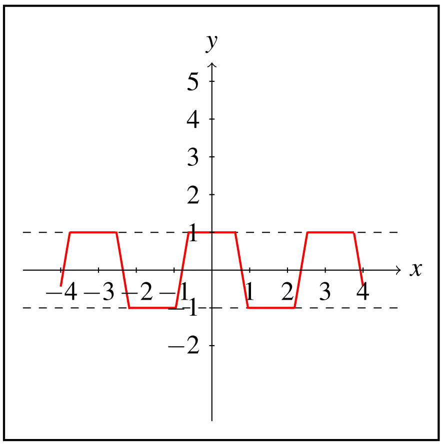
Figura 4 – Gráfico da função $g(x) = 3\cos(2x)$



Fonte: Elaborado pelo autor

Uma truncamento faz, didaticamente falando, uma espécie de limitação no gráfico da função original. Ao tomarmos como constante o número real 1, vemos que o truncamento g_1 da função g, apresentada anteriormente, "amassa" o gráfico de g nas ordenadas 1 e -1 como exposto na figura 5.

Figura 5 – Gráfico do truncamento g_1

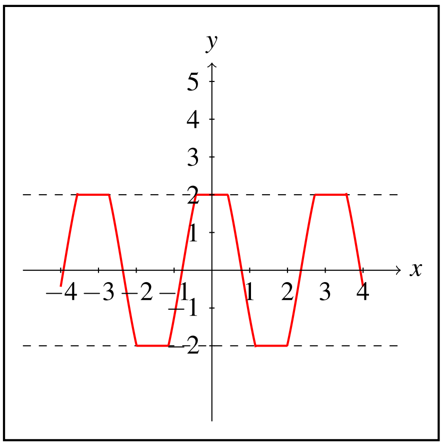


Fonte: Elaborado pelo autor

Note que o mesmo ocorre com o truncamento g_2 apresentado na figura 6 onde, desta vez, g é limitada pelas ordenadas 2 e -2. Assim, quanto maior o número n do truncamento g_n de uma função mensurável g, mais próximo g_n está de g uma vez que a "limitação" vai desaparecendo.

Com essas observações podemos voltar a analisar o produto de duas funções com valores reais estendidos. Considere $f, g \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$. Tomemos duas sequências (f_n) e (g_m)

Figura 6 – Gráfico do truncamento g_2



Fonte: Elaborado pelo autor

tais que para cada $k \in \mathbb{N}$, f_k e g_k são truncamentos de f e g, respectivamente. Ou seja,

$$g_k(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } |g(x)| \leq k \\ k, & \text{se } g(x) > k \\ -k, & \text{se } g(x) < k \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq k \\ k, & \text{se } f(x) > k \\ -k, & \text{se } f(x) < k \end{cases}$$

Para qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 3.1.10, f_k e g_p são $\mathscr{C}$-mensuráveis para cada k e p números naturais. Assim, pela Proposição 2.2.11, $f_k g_p$ também é $\mathscr{C}$-mensurável para quaisquer $k, p \in \mathbb{N}$. Como mencionado anteriormente, o truncamento de uma função f causa uma "limitação" em sua imagem. Logo, se tomarmos n grande o suficiente, o truncamento f_n da função f tende a se aproximar da própria função f. Desta forma, fixemos um $m \in \mathbb{N}$. Assim, para $x \in X$

$$\lim_{k \to +\infty} (f_k(x) g_m(x)) = f(x) g_m(x)$$

Segue pelo Corolário 3.1.8 que $f g_m \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$. Analogamente, para $x \in X$

$$\lim_{m \to +\infty} (f(x) g_m(x)) = f(x) g(x) = (fg)(x)$$

Concluímos, pelo mesmo corolário, que $fg \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$. Dito isso, encerraremos esta seção apresentando a definição generalizada de mensurabilidade de uma função.

Definição 3.1.12 Sejam $(X, \mathscr{C})$ e $(Y, \mathscr{F})$ dois espaços mensuráveis. Dizemos que uma função $\phi : X \to Y$ é dita mensurável se o conjunto $f^{-1}(E) = \{x \in X; f(x) \in E\} \in \mathscr{C}$ para todo conjunto $E \in \mathscr{F}$.

Embora essa definição pareça ser totalmente distinta da Definição 2.2.1, as duas são equivalentes no caso particular de $Y = \mathbb{R}$ e $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ conforme demonstrado a seguir.

Proposição 3.1.13 Seja $(X,\mathscr{C})$ um espaço mensurável e f uma função. Então f é $\mathscr{C}$-mensurável se, e somente se, $f^{-1}(E) \in \mathscr{C}$ para todo boreliano E.

Demonstração.

Suponha f uma função $\mathscr{C}$-mensurável. Sabemos pela definição Definição 2.1.12 que os elementos da álgebra de Borel são do tipo $(-\infty, x)$ com $x \in \mathbb{R}$. Assim, dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$f^{-1}(-\infty,\alpha) = \{x \in X; f(x) \in (-\infty,\alpha)\} = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\}$$

Como f é $\mathscr{C}$-mensurável segue pelo teorema Teorema 2.2.8 que $f^{-1}(-\infty,\alpha) \in \mathscr{C}$. Reciprocamente se $f^{-1}(-\infty,\alpha) \in \mathscr{C}$ para qualquer α concluímos, imediatamente, que $\{x \in X; f(x) < \alpha\} \in \mathscr{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Portanto, f é $\mathscr{C}$-mensurável.

$\square$

3.2 Espaços de Medida

Antes de definimos uma medida, lembraremos de alguns conceitos e resultados da teoria de conjuntos que nos serão úteis adiante.

Definição 3.2.1 Uma sequência de conjuntos (A_n) é dita **não-decrescente** se $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso tenhamos $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a sequência de conjuntos é **não-crescente**.

Proposição 3.2.2 Seja (E_n) uma sequência crescente de conjuntos. Se (A_n) é tal que $A_1 = E_1$ e $A_n = E_n - E_{n-1}$ para todo $n > 1$, então:

(i) A_n é uma sequência disjunta; [1]

(ii) $E_n = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} A_j$;

(iii) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_n$;

Demonstração.

Para provar (a) precisamos mostrar que para todo $n,m \in \mathbb{N}$ se $m \neq n$, então $A_n \cap A_m = \varnothing$. Suponha, sem perder generalidade, que $n > m > 1$. Assim, pela comutatividade e

[1] Lembre que uma sequência disjunta significa que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$

associatividade da relação de interseção e união de conjuntos segue que

$$\begin{aligned} A_m \cap A_n =& (E_m - E_{m-1}) \cap (E_n - E_{n-1}) \\ =& (E_m \cap E_{m-1}^c) \cap (E_n \cap E_{n-1}^c) \\ =& (E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1}^c \cap E_{n-1}^c) \\ =& (E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c \end{aligned}$$

Como (E_n) é não-decrescente, segue que $E_m \subseteq E_n$ e $E_{m-1} \subseteq E_{n-1}$. Deste modo,

$$(E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c = E_m \cap E_{m-1}^c = \varnothing.$$

Pois, se x não é elemento de E_{m-1} e $E_{m-1} \subseteq E_m$, então x não pode ser elemento de E_m.

Provaremos agora o item (b). Se $m = 1$, então não há o que fazer. Suponha $m > 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^{m} A_j =& \bigcup_{j=1}^{m} (E_j \cap E_{j-1}^c) \\ =& E_1 \cup (E_2 \cap E_1^c) \cup (E_3 \cap E_2^c) \cup \cdots \cup (E_m \cap E_{m-1}^c) \\ =& [(E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_1^c)] \cup [(E_2 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_2^c)] \cup \cdots \cup \left[(E_{m-1} \cup E_m) \cap (E_{m-1} \cup E_{m-1}^c)\right] \\ =& [(E_1 \cup E_2) \cap X] \cup [(E_2 \cup E_3) \cap X] \cup \cdots \cup [(E_{m-1} \cup E_m) \cap X] \\ =& (E_1 \cup E_2) \cup (E_2 \cup E_3) \cup \cdots \cup (E_{m-1} \cup E_m) \\ =& E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots \cup E_{m-1} \cup E_m \\ =& E_m. \end{aligned}$$

A última igualdade ocorre pelo fato de (E_n) ser não-decrescente. Assim, $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_m$.

Por fim, (c) é um resultado imediato, pois $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ se, e somente se, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}$. Pelo item (b), isso só ocorre se $x \in \bigcup_{j=1}^{n_0} A_j$. Mas isso é equivalente à dizer que existe um k com $1 \leq k \leq n_0$ tal que $x \in A_k$. Como $k \in \mathbb{N}$ isso acontece se, e somente se, $x \in A_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Portanto $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

□

Proposição 3.2.3 Seja (F_n) uma sequência não-crescente de conjuntos. Se (E_n) é tal que $E_n = F_1 - F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então (E_n) é não-decrescente e $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = F_1 - \bigcup_{j=1}^{\infty} F_n$.

Demonstração.

Queremos mostrar que (E_n) é não-decrescente, isto é, $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado um $n \in \mathbb{N}$, tome $x \in E_n$. Logo, $x \in F_1$ e $x \notin F_n$, por construção. Como (F_n) é não-crescente, ocorre $F_n \supseteq F_{n+1}$. Assim, $x \notin F_n \Rightarrow x \notin F_{n+1}$. Com isso, $x \in F_1$ e $x \notin F_{n+1}$, ou seja, $x \in E_{n+1}$. Desta maneira, $E_n \subseteq E_{n+1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ como queríamos. Além disso, um elemento $y \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ se, e somente se, $y \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (F_1 - F_n)$. Isso é equivalente a dizer que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y \in F_1 - F_{n_0}$. Correspondentemente, $y \in F_1$ e $y \notin F_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Isso ocorre se, e somente se, $y \in F_1$ e $y \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Portanto, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_n = F_1 - \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_n$.

□

Proposição 3.2.4 Se $\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j$ e $\bigcup\limits_{k=1}^{m} F_k$ são duas partições distintas de um conjunto X, então para cada $j \in I_n$ tem-se $E_j = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (E_j \cap F_k)$.

Demonstração.

Fixemos um $j_0 \in I_n$. Assim, temos que $x \in \bigcup_{k=1}(E_{j_0} \cap F_k)$ implica que existe um $k_0 \in I_m$ tal que $x \in E_{j_0} \cap F_{k_0}$. Logo, $x \in E_{j_0}$ e $x \in F_{k_0}$, isto é, $x \in E_{j_0}$. Reciprocamente, se $y \in X$, então para algum $j_1 \in I_n$, $y \in E_{j_1}$, pois $\{E_j\}$ formam uma partição de X. Como $\{F_k\}$ também é uma partição de X, deve existir um $k_1 \in I_m$ tal que $x \in F_{k_1}$. Assim, $x \in E_{j_1} \cap F_{k_1}$. Desta forma, existe um $k_1 \in I_m$ tal que $x \in \bigcup\limits_{k=1} (E_{j_1} \cap F_{k_1})$ como queríamos.

□

Definição 3.2.5 Uma medida é uma função $\mu : (X, \mathscr{C}) \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) $\mu(A) \geq 0$, $\forall\, A \in \mathscr{C}$;

(iii) Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de $\mathscr{C}$, então $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Ou seja, uma medida é uma função não negativa que é contavelmente aditiva. Além disso, o valor de μ pode ser igual à $+\infty$ para algum conjunto $A \in \mathscr{C}$. Quando temos que $\mu(E) < +\infty$ para qualquer que seja o conjunto $E \in \mathscr{C}$, dizemos que temos uma medida finita.

Definição 3.2.6 Dizemos que uma tripla ordenada $(X, \mathscr{C}, \mu)$ constituída por um conjunto X, uma σ-álgebra $\mathscr{C}$ desse conjunto e uma medida μ sobre o espaço mensurável $(X, \mathscr{C})$ é um espaço de medida.

Exemplo 3.2.7 Seja X um conjunto e $\mathscr{C}$ a σ-álgebra formada por todos os subconjunto de X. Defina $\mu_1, \mu_2 : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ pondo $\mu_1(A) = 0$ para qualquer $A \in \mathscr{C}$ e μ_2 é pondo

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } A = \varnothing \\ +\infty, & \text{se } A \neq \varnothing \end{cases}$$

Sendo definidas dessa forma, as funções μ_1 e μ_2 são medidas.

De fato, em ambas as condições *(i)* e *(ii)* são trivialmente satisfeitas. Para a condição *(iii)*, temos que qualquer sequência disjunta (A_n) acarretará que

$$\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)$$

Para μ_2 temos dois casos possíveis. Se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, então $\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$. Entretanto isso ocorre somente se $A_j = \varnothing$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(\varnothing) = 0$$

Caso $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$, dentre os termos da sequência (A_n), deve existir pelo menos um $p \in \mathbb{N}$ tal que $(A_p) \neq \varnothing$. Assim, $\mu(A_j) = +\infty$ para algum $p \in \mathbb{N}$ acarretando que $\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty$.

Ademais, na soma $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n)$ só teremos soma dos termos $0 + (+\infty)$ ou $(+\infty) + (+\infty)$. Desta forma, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = +\infty$. Portanto μ_1 e μ_2 são medidas.

Exemplo 3.2.8 Seja $(\Omega, \mathscr{C})$ um espaço mensurável. A função $\mathscr{P} : \mathscr{C} \to [0,1]$ é dita uma probabilidade se satisfaz as propriedades:

(K1) $\mathscr{P}(\Omega) = 1$;

(K2) $\mathscr{P}(A) \geq 0,\ \forall\, A \in \mathscr{C}$;

(K3) Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de $\mathscr{C}$, então $\mathscr{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}(A_n)$ [2].

Observe que as condições da *(ii)* e *(iii)* da definição Definição 3.2.5 são satisfeitas, por definição, na função de probabilidade. Resta provar que $\mathscr{P}(\varnothing) = 0$. Assim, com o auxilio das propriedades *(K1)* e *(K3)*, segue que

$$\mathscr{P}(\Omega) = \mathscr{P}(\Omega \cup \varnothing) = \mathscr{P}(\Omega) + \mathscr{P}(\varnothing) \Rightarrow \mathscr{P}(\Omega) = \mathscr{P}(\Omega) + \mathscr{P}(\varnothing) \Rightarrow \mathscr{P}(\varnothing) = 0.$$

[2] As propriedades *K1, K2* e *K3* são chamadas de *Axiomas de Kolmogorov*

Portanto a função probabilidade é uma medida. Neste caso, o espaço de medida $(\Omega, \mathscr{C}, \mathscr{P})$ é chamado de espaço de probabilidades. Além disso, uma função $\mathscr{C}$-mensurável pela Definição 3.1.12 em um espaço de probabilidades é chamada de variável aleatória.

Exemplo 3.2.9 [Unidade de Medida Concentrada em p] Seja $(X, \mathscr{C})$ um espaço mensurável onde $\mathscr{C} = \mathscr{P}(X)$ e p um elemento de X. Defina $\mu : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ como sendo

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } \; p \notin A \\ 1, & \text{se } \; p \in A \end{cases}$$

Então μ é uma medida. Verdadeiramente, observe que $p \notin \varnothing$, ou seja, $\mu(\varnothing) = 0$. Trivialmente, tem-se $\mu(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathscr{C}$, pela construção de μ.

Exemplo 3.2.10 Seja $\mathscr{C}$ uma σ-álgebra e $E \subset \mathscr{C}$. A função característica $\chi_E : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ é uma medida sobre $\mathscr{C}$. De fato, $\chi_\varnothing = 0$, pois não há elementos em $\varnothing$. Pela definição de função característica, temos que $\chi_E(x) \neq 0$ para qualquer que seja $E \in \mathscr{C}$. Por fim, Se (E_n) é uma sequência disjunta de elementos de $\mathscr{C}$, sempre temos $\chi_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n} = 0$. Caso $\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}(x) = 0$, então $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Logo, $x \notin E_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $\chi_{E_n}(x) = 0$ para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, Com isso, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}(x) = 0 = \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}(x)$.

Caso ocorra que $\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}(x) = 1$, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}$. Como a sequência de conjuntos é disjunta, o n_0 é único. Logo, $x \notin E_p$ para qualquer $p \neq n_0$, ou seja, $\chi_{E_p}(x) = 0$, $\forall p \neq n_0$. Com isso, $\sum_{p\neq n_0} \chi_{E_p}(x) + \chi_{E_{n_0}}(x) = 0 + 1 = \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}(x)$. Em todo caso, $\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}(x)$. Portanto, χ_E é uma medida.

Proposição 3.2.11 Se $\displaystyle\bigcup_{j\in I_n} E_j$ e $\displaystyle\bigcup_{k\in I_m} F_k$ são duas partições de um conjunto X, então $\mu(E_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k)$.

Demonstração.

Dado $j \in I_n$, pela Proposição 3.2.4, temos que $E_j = \displaystyle\bigcup_{k=1} (E_j \cap F_k)$. Como $\{F_k\}$ é uma partição, para $k, l \in I_m$, temos $(E_j \cap F_p) \cap (E_j \cap F_l) = \varnothing$. Como χ_E é uma medida para todo $E \in \mathscr{C}$, segue que para todo x,

$$\mu(E_j) = \mu\left(\bigcup_{k=1} (E_j \cap F_k)\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k)$$

$\square$

Proposição 3.2.12 Se $\bigcup_{j \in I_n} E_j$ e $\bigcup_{k \in I_m} F_k$ são duas partições de um conjunto X, então $\chi_{E_j} = \sum_{k=1}^{m} \chi_{(E_j \cap F_k)}$.

Demonstração.

Pela Proposição 3.2.12, χ é uma medida. Segue pela Proposição 3.2.11 que $\chi_{E_j} = \sum_{k=1}^{m} \chi_{(E_j \cap F_k)}$.

□

Teorema 3.2.13 Seja μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathscr{C}$. Se A e B são elementos de $\mathscr{C}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Se $\mu(A) < +\infty$, então $\mu(B-A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Demonstração.

Suponha que $A \subset B$, então $B = A \cup (B-A)$ e $A \cap (B-A) = \varnothing$. Segue pela propriedade (ii) da Definição 3.2.5 que

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B-A)$$

Lembre que $B - A = B \cap A^c$ e $A \in \mathscr{C} \Rightarrow A^c \in \mathscr{C}$. Além disso, como $B \in \mathscr{C}$ temos que $B \cap A^c$ consequentemente $B - A \in \mathscr{C}$. Assim, como μ é uma medida e $B - A \in \mathscr{C}$, temos que $\mu(B-A) \geq 0$. Segue que $\mu(B) \geq \mu(A)$. Observe que se $\mu(A) < \infty$, temos que

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B-A) \Leftrightarrow \mu(B) - \mu(A) = \mu(B-A)$$

Como desejávamos.

□

Proposição 3.2.14 Seja μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathscr{C}$. Se (E_n) é uma sequência crescente de $\mathscr{C}$, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

Demonstração.

Ora, se $\mu(E_n) = +\infty$, para algum $n \in \mathbb{N}$, ambos os lados da equação acima são $+\infty$. Desta forma, vamos supor que $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, vamos construir uma sequência (A_n) pondo $A_1 = E_1$ e $A_n = E_n - E_{n-1}$ para qualquer $n > 1$. Então pela Proposição 3.2.2, (A_n) é uma sequência disjunta, temos $E_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Como μ contavelmente aditiva,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$$

Pelo Teorema 3.2.13 vemos que $\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1})$, para $n > 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) &= \lim_{m\to+\infty} (\mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_m)) \\
&= \lim_{m\to+\infty} (\mu(E_1) + \mu(E_2 - E_1) + \cdots + \mu(E_m - E_{m-1})) \\
&= \lim_{m\to+\infty} (\mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_m) - \mu(E_{m-1})) \\
&= \lim_{m\to+\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots - \mu(E_{m-1}) + \mu(E_m)) \\
&= \lim_{m\to+\infty} \mu(E_m)
\end{aligned}$$

Segue que $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

□

Proposição 3.2.15 Seja μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathscr{C}$. Se (B_n) é uma sequência decrescente de $\mathscr{C}$ e $\mu(B_1) < +\infty$, então $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$.

Demonstração.

Defina uma sequência (T_n) de elementos de $\mathscr{C}$ pondo $T_n = B_1 - B_n$ para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 3.2.3, (T_n) é crescente. Assim, aplicando o a Proposição 3.2.14 temos que

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(T_n)$$

Usando o teorema Teorema 3.2.13, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(T_n) = \lim_{n\to+\infty} [\mu(B_1) - \mu(B_n)] = \mu(B_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)$$

Segue pela proposição Proposição 3.2.3 que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(T_n) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

Combinando as duas equações obtemos que

$$\mu(B_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

Portanto, $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$

□

Vimos quando tratamos de σ-álgebras a σ-álgebra de Borel que é muito relevante para o estudo da reta real. Da mesma forma, existe uma medida que é indispensável para o mesmo contexto. Essa, por sua vez, não será demonstrada, mas adotada como axioma à titulo de simplificação do trabalho. Assim,

Teorema 3.2.16 Sendo $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ um espaço mensurável, existe uma única medida λ definida sobre $\mathscr{B}$ que coincide com o comprimento dos intervalos abertos(Bartle, 1995, p.104).

Em termos práticos, se E é um intervalo real não vazio (a,b), então $\lambda(E) = b - a$. Esta medida recebe o nome de Medida de Lebesgue. Embora tenha tido a necessidade de utilizar o sistema da reta estendida para definirmos uma medida, existem conjuntos tão pequenos que sua medida é desprezível. À esses damos o nome de conjunto de medida nula. Formalmente,

Definição 3.2.17 Seja $(X, \mathscr{C}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que um conjunto $E \subset \mathscr{C}$ tem medida nula em relação à medida μ se $\mu(E) = 0$.

Proposição 3.2.18 Seja $(X, \mathscr{C}, \mu)$ um espaço de medida. Se $\mu(X) = 0$ e $Y \subset X$, então $\mu(Y) = 0$.
Demonstração.

Note que $(Y \cap X) \subset X$, pois $Y \cap X = Y$. Assim, pelo Teorema 3.2.13, temos que $\mu(Y) = \mu(X \cap Y) \leq \mu(X) = 0$. Logo, $\mu(Y) \leq 0$. Segue que $\mu(Y) = 0$, pois a medida é uma função não negativa.

□

Proposição 3.2.19 Seja $(X, \mathscr{C}, \mu)$ um espaço de medida e $\{E_n\}$ uma sequência disjunta de elementos de $\mathscr{C}$. Se $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ e $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\mu(Y) = 0$.
Demonstração.

Analogamente à proposição anterior segue, imediatamente, que

$$\mu(Y) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Assim, $\mu(Y) \leq 0$. Portanto, $\mu(Y) = 0$.

□

Como exemplo, temos por definição, que $\varnothing$ tem medida nula, pois para qualquer medida μ, $\mu(\varnothing) = 0$. Mostraremos a seguir um exemplo menos trivial:

Exemplo 3.2.20 Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto discreto, então tem medida nula com respeito à medida λ de Lebesgue. De fato, se X é discreto, então é formado por pontos isolados. Assim, se $a \in X$, então pode ser representado degeneradamente, por $\{a\} = [a,a]$. Logo, $\lambda(\{a\}) = a - a = 0$. Assim, o conjunto X é dado pela reunião enumerável de seus pontos e todos têm medida nula. Segue pela Proposição 3.2.19 que X tem medida nula.

4 TEORIA DA INTEGRAÇÃO

Uma vez que já foram bem explorados os espaços mensuráveis e os espaços de medida, vamos abordar, nesta seção, a teoria da integração de Lebesgue. Iniciaremos por funções não negativas e iremos estendendo os conceitos aos poucos. Quando não houver menção contrária, $(X, \mathscr{C}, \mu)$ será um espaço de medida. O conjunto de todas as funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis será simplesmente denotado por $M = M(X, \mathscr{C})$ e o conjunto das funções não negativas, que também são $\mathscr{C}$-mensuráveis será denotado por $M^+ = M^+(X, \mathscr{C})$.

4.1 A Integral de Funções Simples

Iniciaremos tratando de casos particulares de integral e depois vamos expandindo. Com isso, iniciaremos entendo a integral para funções simples.

Definição 4.1.1 Uma função real é dita simples quando possui apenas uma quantidade finita de valores.

Representaremos esse tipo de função de forma padronizada em todo o texto. Faremos isso por meio da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica do conjunto $E_j \in \mathscr{C}$. Nessa representação estamos supondo que cada $a_j \neq a_i$ quando $j \neq i$ e que $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = X$ onde a sequência finita de conjuntos (E_n) formam uma partição do conjunto X.

Exemplo 4.1.2 Seja $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ pondo

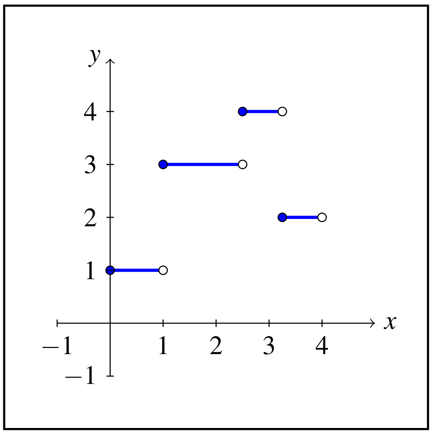
$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \\ 2, & \text{se } x \in [1,2) \\ 3, & \text{se } x \in [2,3) \\ 4, & \text{se } x \in [3,4] \end{cases}$$

Claramente, g também é uma função simples. Basta denotar $E_1 = [0,1),\ E_2 = [1,2),\ E_3 = [2,3),\ E_4 = [3,4]$ e $a_i = i$ para $1 \leq i \leq 4$. Com isso, vemos que para $x \in [0,4]$

$$g(x) = 1 \cdot \chi_{[0,1]}(x) + 2 \cdot \chi_{(1,2]}(x) + 3 \cdot \chi_{(2,3]}(x) + 4 \cdot \chi_{(3,4]}(x)$$

Concluindo que $g = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$.

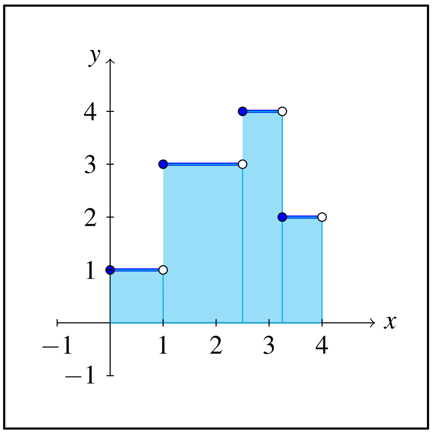
Figura 7 – Gráfico da Função $g = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Agora pensemos na ideia de integral apresentada na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Se quiséssemos calcular a integral das funções acima somaríamos as áreas dos retângulos conforme ilustram as figuras a seguir.

Figura 8 – Área delimitada pelo gráfico da função $g = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que em ambos os casos estamos, basicamente, aplicando o valor a_j na medida do conjunto E_j correspondente onde j é o número de partições do domínio. Com isso, temos a definição a seguir:

Definição 4.1.3 Se φ é uma função simples de $M^+(X, \mathscr{C})$ com a representação

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j},$$

então a integral da função φ com respeito à medida μ é o valor real estendido

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Para a Definição 4.1.3 empregamos a convenção que $0 \cdot (+\infty) = 0$. Isso é feito para garantir que a função identicamente nula tenha integral nula independentemente da medida ser finita ou não. A seguir veremos propriedades elementares sobre a integral de funções simples.

Teorema 4.1.4 Se φ e ψ são funções simples do espaço $M^+(X,\mathscr{C})$ e $c \geq 0$ é uma constante real, então $\int c\varphi d\mu = c\int \varphi d\mu$ e $\int (\varphi+\psi)d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$.

Demonstração.

Representaremos as funções simples não negativas por $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ e $\psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}$. Primeiro, mostraremos que vale a multiplicação por escalar. Assim, caso $c = 0$, o resultado é verdadeiro trivialmente. Supondo $c > 0$, temos que

$$\int c\varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c \int \varphi \, d\mu.$$

Com isso, concluímos que $\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu$.

Dadas as representações padrão de φ e ψ, vemos que

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k} \tag{3}$$

Como $\{E_n\}$ e $\{F_k\}$ são ambas partições de X, pela Proposição 3.2.12 temos que $\chi_{E_j} = \sum_{k=1}^{m} \chi_{(E_j \cap F_k)}$ e $\chi_{F_k} = \sum_{j=1}^{n} \chi_{(E_j \cap F_k)}$. Substituindo na equação 3, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k} &= \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{k=1}^{m} \chi_{(E_j \cap F_k)} \right) + \sum_{k=1}^{m} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} \chi_{(E_j \cap F_k)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \chi_{(E_j \cap F_k)} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_k \chi_{(E_j \cap F_k)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \chi_{(E_j \cap F_k)} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{(E_j \cap F_k)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(a_j \chi_{(E_j \cap F_k)} + b_k \chi_{(E_j \cap F_k)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \chi_{(E_j \cap F_k)}.
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que

$$\varphi+\psi=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)\chi_{E_j\cap F_k}.$$

Entretanto, essa representação não é, necessariamente, a representação padrão apresentada na Definição 4.1.3, pois nada garante, previamente, que a_j+b_k sejam distintos para $j\in I_n$ e $k\in I_m$. Com isso, sejam c_h, com $h\in I_p$, números distintos do conjunto $\{a_j+b_k;\ (j,k)\in I_n\times I_m\}$ e G_h a união de todos os conjuntos $E_j\cap F_k\neq\varnothing$ tal que $a_j+b_k=c_h$. Assim,

$$G_h=\bigcup_{\substack{j,k\\ a_j+b_k=c_h}} E_j\cap F_k$$

A notação utilizada acima indica que a soma é realizada sobre todos os índices j e k tais que $a_j+b_k=c_h$. Como $E_j\cap F_k=\varnothing$, temos que

$$\mu(G_h)=\mu\left(\bigcup_{\substack{j,k\\ a_j+b_k=c_h}} E_j\cap F_k\right)=\sum_{\substack{j,k\\ a_j+b_k=c_h}}\mu(E_j\cap F_k)$$

Desta forma, conseguimos encontrar uma representação padrão que é dada por $\varphi+\psi=\sum_{h=1}^{p}c_h\chi_{G_h}$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}\int(\varphi+\psi)d\mu=\sum_{h=1}^{p}c_h\mu(G_h)&=\sum_{h=1}^{p}\sum_{\substack{j,k\\ a_j+b_k=c_h}}c_h\mu(E_j\cap F_k)\\&=\sum_{h=1}^{p}\sum_{\substack{j,k\\ a_j+b_k=c_h}}(a_j+b_k)\mu(E_j\cap F_k)\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)\mu(E_j\cap F_k)\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_j\mu(E_j\cap F_k)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}b_k\mu(E_j\cap F_k)\end{aligned}$$

Pela Proposição 3.2.11, temos $\mu(E_j)=\sum_{k=1}^{m}\mu(E_j\cap F_k)$ e $\mu(F_k)=\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j\cap F_k)$. Empregando estes resultados ao que foi desenvolvido anteriormente obtemos

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_j\mu(E_j\cap F_k)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}b_k\mu(E_j\cap F_k)=\sum_{j=1}^{n}a_j\mu(E_j)+\sum_{k=1}^{m}b_k\mu(F_k)=\int\varphi d\mu+\int\psi d\mu$$

Segue que $\int(\varphi+\psi)d\mu=\int\varphi d\mu+\int\psi d\mu$ como queríamos.

□

Lema 4.1.5 Se μ é uma medida sobre X e fixemos um elemento A de $\mathscr{C}$, então a função λ definida por $\lambda(E)=\mu(A\cap E)$, $\forall\ E\in\mathscr{C}$ também é uma medida sobre X.

Demonstração.

Basta mostrar que λ satisfaz as condições impostas na definição Definição 3.2.5. Com isso, se $E = \varnothing$, então

$$\lambda(\varnothing) = \mu(A \cap \varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$$

Como A e E são elementos de $\mathscr{C}$, então $A \cap H$ também está em $\mathscr{C}$. Assim, por μ ser uma medida, temos que $\mu(A \cap E) \geq 0$ acarretando que $\lambda(E) \geq 0$. Por fim, tomemos uma sequência de elementos disjuntos (E_n) em $\mathscr{C}$. Se $A = E_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, não há o que fazer. Caso $A \cap E_j = \varnothing$ para qualquer que seja $j \in \mathbb{N}$, então $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cap A = \varnothing$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cap A =& (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \cdots) \cap A \\
=& (E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A) \cup \cdots \cup (E_n \cap A) \cup \cdots \\
=& \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap A)
\end{aligned}$$

Segue então que

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cap A\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap A)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j)$$

Desta forma, concluímos que a função λ acima definida é uma medida.

$\square$

Lema 4.1.6 Se $\mu_1, ..., \mu_n$ são medidas sobre X e $a_1, ..., a_n$ são números reais não negativos, então a função λ definida por $\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E), \forall\, E \in \mathscr{C}$ também é uma medida sobre X.

Demonstração.

Como μ_j é uma medida para todo $j \in I_n$ e cada a_j é maior ou igual à zero, temos que cada $a_j \mu_j(E) \geq 0$. Desta maneira, $\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E) \geq 0$. Além disso, podemos observar que $\lambda(\varnothing) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(\varnothing) = 0$. Tomemos uma sequência disjunta (E_p) de elementos de $\mathscr{C}$. Logo,

$$\lambda\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_p\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_p\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{p=1}^{\infty} \mu_j(E_p)\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E_p)\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda(E_p)$$

Como λ satisfaz todas as condições impostas na definição Definição 3.2.5 concluímos que λ é uma medida.

$\square$

Teorema 4.1.7 A função $\lambda : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\lambda(E) = \displaystyle\int \varphi\chi_E \, d\mu$ para todo $E \in \mathscr{C}$ é uma medida sobre $\mathscr{C}$.

Demonstração.

De maneira análoga ao teorema Teorema 4.1.4 podemos verificar que

$$\varphi\chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E}$$

Assim, temos que

$$\lambda(E) = \int \varphi\chi_E d\mu = \int \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E} \right) d\mu = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \int \chi_{E_j \cap E} d\mu \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j \cap E)$$

Pelo lema Lema 4.1.5 a aplicação que leva $E \to \mu(E_j \cap E)$ é uma medida para cada $j \in I_n$. Disso, concluímos que λ pode ser expressada por uma combinação linear de medidas sobre $\mathscr{C}$. Segue, pelo lema Lema 4.1.6, que λ também é uma medida sobre $\mathscr{C}$.

$\square$

4.2 A Integral de Funções Não-Negativas

Até aqui trabalhos apenas com integrais de funções simples apenas. Nesta seção, desejamos expandir o conceito de integral para uma função qualquer não negativa. Vale ressaltar que a perspectiva que traremos aqui é a de Lebesgue. Com o intuito de enfatizar a diferença da construção, vamos lembrar da construção feita por Riemann. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen}(x) + 3$. Claramente não é uma função simples, pois não possui uma quantidade finita de valores. Nosso objetivo, agora, é tentar calcular a integral dessa função com o que construímos até aqui. Para facilitar, observe o gráfico dessa função no intervalo $[0,4]$ apresentado na figura 9.

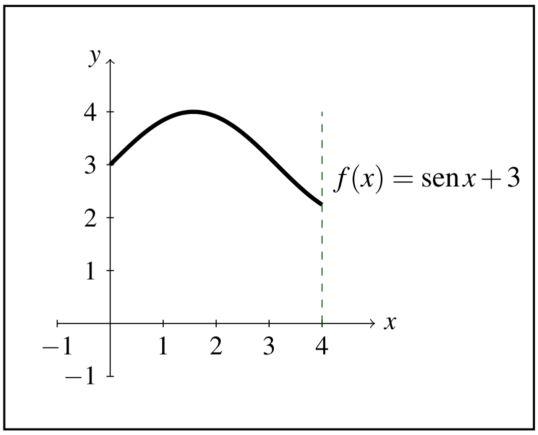
Tomemos a função simples

$$\phi_2(x) = \sum_{j=1}^{2} a_j \chi_{E_j}$$

onde $a_1 = f(0), a_2 = f(4); E_1 = [0,2)$ e $E_2 = [2,4]$. Assim, ao calcularmos sua integral, vemos não há preenchimento total da área delimitada pelo gráfico da função f, mas se aproxima com um erro conforme a figura 10.

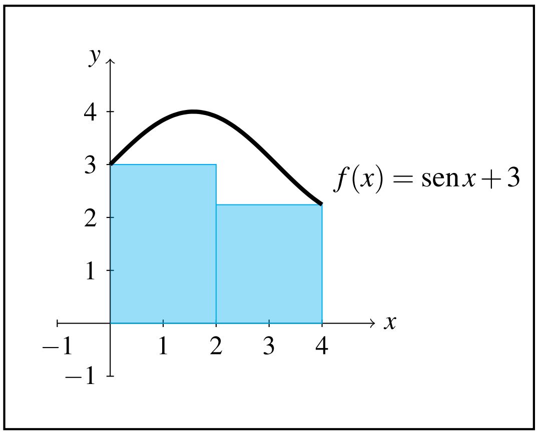
Vamos escolher outra função simples ϕ_4 tal que $\phi_4 = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$ onde $E_1 = [0,1),\ E_2 = [1,2),\ E_3 = [2,3),\ E_1 = [3,4],\ a_1 = f(0),\ a_2 = f(1),\ a_3 = f(3)$ e $a_4 = f(4)$. Desta forma, com o dobro de valores da função ϕ_2 escolhida anteriormente podemos observar que a integral

Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x) + 3$



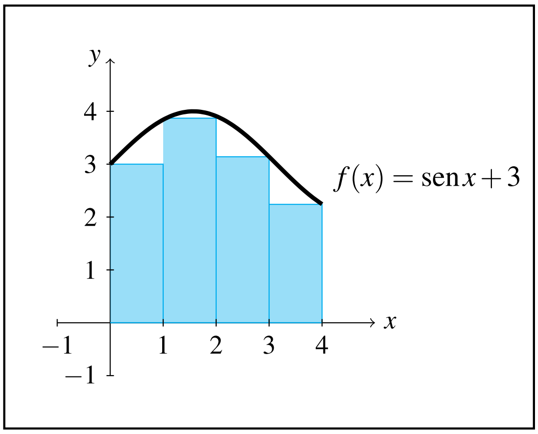
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 10 – Integral da função ϕ_2



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 11 – Integral da função ϕ_4

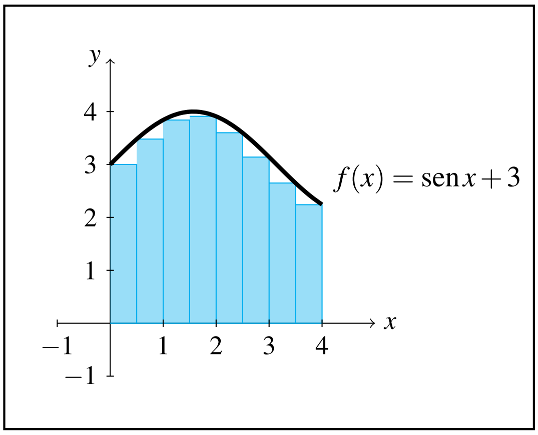


Fonte: Elaborado pelo autor

de ϕ_4, exibida na figura 11, mais se aproxima da integral da função f. Para finalizarmos esta ideia, dobremos a quantidade de valores e escolhamos outra função $\phi_8 = \sum_{j=1}^{8} a_j \chi_{E_j}$ onde

$E_1 = [0, 0.5),\ E_2 = [0.5, 1),\ E_3 = [1, 1.5),\ E_4 = [1.5, 2),\ E_5 = [2, 2.5),\ E_6 = [2.5, 3),\ E_7 = [3, 2.5),\ E_8 = [3.5, 4]$ e $a_1 = f(0),\ a_2 = f(0.5),\ a_3 = f(1),\ a_4 = f(1.5),\ a_5 = f(2.5),\ a_6 = f(3),\ a_7 = f(3.5)$ e $a_8 = f(4)$. A integral da função ϕ_8 está representada na figura figura 12.

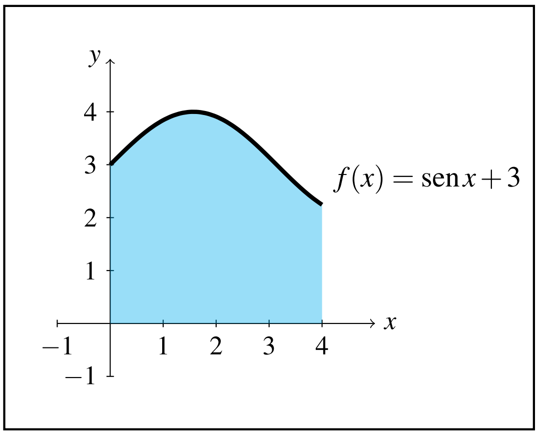
Figura 12 – Integral da função ϕ_8



Fonte: Elaborado pelo autor

Com isso, observamos que quanto mais valores a função simples possui, mais ela se aproxima da função f desde que nenhum valor ultrapasse o gráfico da função. Assim, a área da função simples será próxima o suficiente da área delimitada pelo gráfico da função f. Ou seja, se tomarmos o supremo dessas funções obteremos a integral exposta na figura 13.

Figura 13 – Integral da função f



Fonte: Elaborado pelo autor

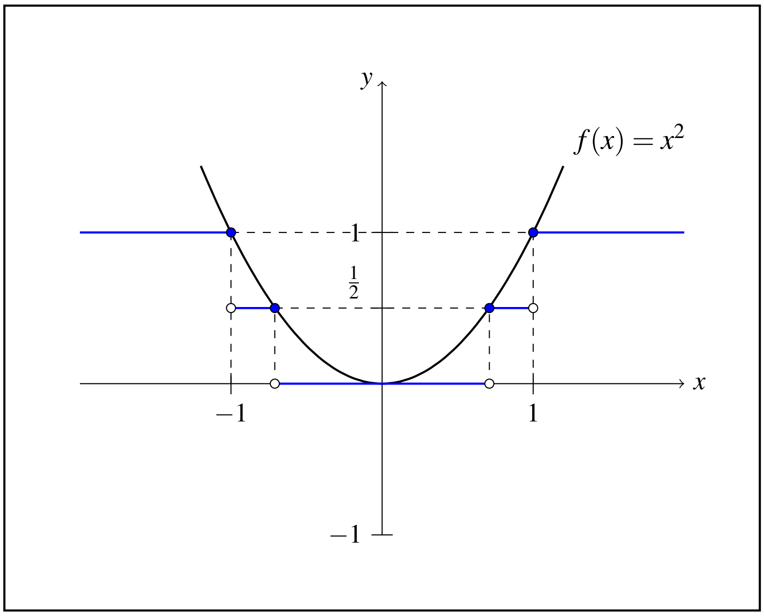
Agora, tomemos como exemplo a função $f(x) = x^2$, mas não invés de particionarmos o domínio da função, a função simples é construída conforme uma partição feita na imagem.

Assim, tomemos uma função ϕ_1 pondo

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-1} \\ 2^{-1}, & \text{se } 2^{-1} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-1} \\ 1, & \text{se } f(x) \geq 1 \end{cases}$$

Note que a função ϕ_1 é simples, mas seus valores são escolhidos por meio da partição da imagem conforme explicitado na imagem da figura 14.

Figura 14 – Gráfico da função ϕ_1



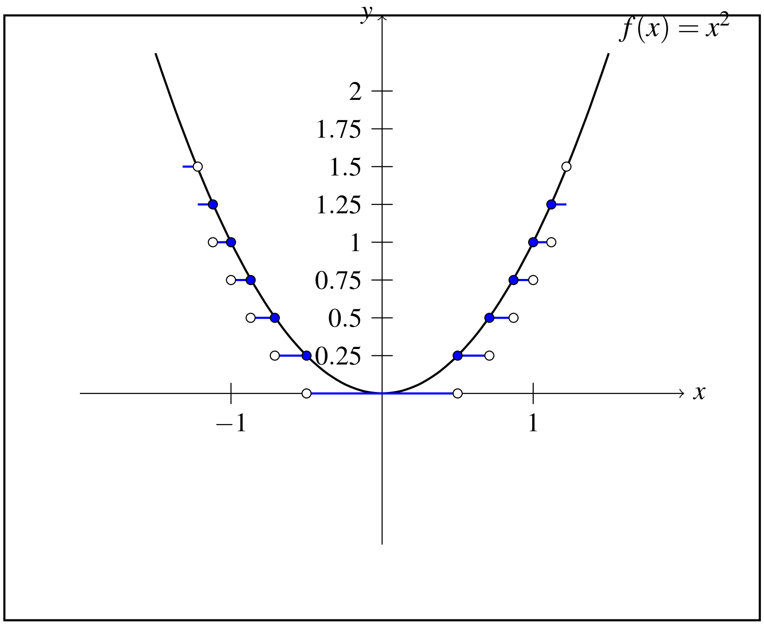
Fonte**:** Elaborado pelo autor

Vamos aproximar a função f agora pela função simples ϕ_2 construída da seguinte forma:

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-2} \\ 2^{-2}, & \text{se } 2^{-2} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-2} \\ 2 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 2 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 3 \cdot 2^{-2} \\ 3 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 3 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 4 \cdot 2^{-2} \\ 4 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 4 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 5 \cdot 2^{-2} \\ 5 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 5 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 6 \cdot 2^{-2} \\ 6 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 6 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 7 \cdot 2^{-2} \\ 7 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 7 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 8 \cdot 2^{-2} \\ 2, & \text{se } f(x) \geq 2 \end{cases}$$

Assim, na figura 15 está a comparação com o gráfico da função $f(x) = x^2$.

Figura 15 – Gráfico da função ϕ_1



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Dito isto, adiante formalizaremos que dada uma função $f \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$, então ela pode ser aproximada por uma sequência de funções simples conforme o teorema adiante.

Teorema 4.2.1 [Aproximação Via Funções Simples] Se f é uma função não negativa em $\mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$, então existe uma sequência de funções (φ_n) tal que $\phi \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C}), \forall\, n \in \mathbb{N}$ de forma que

(i) Cada φ_n é uma função simples, isto é, possui apenas uma quantidade finita de valores reais;

(ii) $0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração.

Vamos mostrar a existência das sequência por construção. Essa construção será realizada por meio de partições da imagem da seguinte maneira:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-n} \\ 2^{-n}, & \text{se } 2^{-n} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-n} \\ 2 \cdot 2^{-n}, & \text{se } 2 \cdot 2^{-n} \leq f(x) < 3 \cdot 2^{-n} \\ \vdots & \vdots \\ k \cdot 2^{-n}, & \text{se } k \cdot 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) \cdot 2^{-n} \\ \vdots & \vdots \\ n, & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

Simplificadamente podemos escrever

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} k \cdot 2^{-n}, & \text{se } k \cdot 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) \cdot 2^{-n}, \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n2^n - 1 \\ n, & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

Com isso, podemos ver que φ_n é uma função simples e que $0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x)$. Além disso, φ_n é uma mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$, pois trata-se de uma sequência de um funções simples. Observe que dado $n \in \mathbb{N}$ temos que $\phi_n(x) = k2^{-n}$ desde que $k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}$. Como $k2^{-n} + 2^{-n}$, percebemos que

$$k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n} \Rightarrow k2^{-n} \leq f(x) < k2^{-n} + 2^{-n} \Rightarrow \phi_n(x) \leq f(x) < \phi_n(x) + 2^{-n}.$$

Logo,

$$\lim_{n \to +\infty} \phi_n(x) \leq \lim_{n \to +\infty} f(x) \leq \lim_{n \to +\infty} \phi_n(x) + \lim_{n \to +\infty} 2^{-n}.$$

Como $\lim_{n \to +\infty} f(x) = f(x)$ e $\lim_{n \to +\infty} 2^{-n} = 0$. Segue, pelo teorema do confronto que $\lim_{n \to +\infty} \phi_n(x) = f(x)$.

□

Esse teorema nos mostra que dada qualquer função não negativa mensurável, podemos aproximar seus valores por funções simples de maneira que o limite dessa sequência de funções simples convergem para a função que tomamos inicialmente. Diante disso, nada mais natural que definir a integral de Lebesgue para funções não negativas quaisquer da maneira que segue

Definição 4.2.2 Se $f \in M^+(X, \mathscr{C})$, nós definimos a integral de f com respeito à medida μ sendo o valor real estendido

$$\int f d\mu = sup \int \varphi d\mu$$

Onde o supremo é sobre todas as funções simples $\varphi \in \mathrm{M}(\mathrm{X},\mathscr{C})$ tal que a condição $0 \leq \varphi \leq f(x)$ para todo $x \in X$.

Definição 4.2.3 Se $f \in \mathrm{M}(\mathrm{X},\mathscr{C})$ e $E \in \mathscr{C}$, então $f\chi_E \in \mathrm{M}(\mathrm{X},\mathscr{C})$ e nós definimos a integral de f sobre o conjunto E com respeito à medida μ como sendo o número real estendido

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu$$

Agora desejamos realizar operações aritméticas com essa expansão da definição conforme fizemos para a integral de funções simples. Para tal, precisamos mostrar a monoticidade da integral de funções não negativas tanto à respeito de uma outra função integral quanto à um conjunto. Isso faremos por meio dos lemas a seguir

Lema 4.2.4 Se f e g são elementos de $M^+(X,\mathscr{C})$ com $f \leq g$, então

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Demonstração.

Se φ é uma função simples em $M^+(X,\mathscr{C})$ tal que $0 \leq \varphi \leq f$, então $0 \leq \varphi \leq g$, uma vez que $f \leq g$. Assim, $\sup_{\varphi leqf} \int \varphi d\mu \leq \int f d\mu$ e $\sup_{\varphi leqf} \int \varphi d\mu \leq \int g d\mu$. Subtraindo membro à membro temos

$$0 \leq \int f d\mu - \int g d\mu \Leftrightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

□

Lema 4.2.5 Se f é um elemento de $M^+(X,\mathscr{C})$ e $E, F \in \mathscr{C}$ com $E \subseteq F$, então

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

Demonstração.

Como $E \subseteq F$, então $chi_E \leq \chi_F$. Assim, $f chi_E \leq f\chi_F$. Segue, pelo lema anterior que,

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu \leq \int f\chi_F d\mu = \int_F f d\mu.$$

Portanto, $\int_E f d\mu = \int_F f d\mu$.

□

Teorema 4.2.6 [Teorema da Convergência Monótona] Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções não negativas mensuráveis que converge para a f, então

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Demonstração.

Pelo corolário Corolário 3.1.8, se temos uma sequência de funções mensuráveis que converge para uma função f, então f também é mensurável. Além disso, como (f_n) é crescente, então $f_n \leq f \ \forall n \in \mathbb{N}$. Seque, pelo lema Lema 4.2.4 que

$$\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta maneira,

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Por outro lado, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$ e φ uma função simples mensurável tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ tais que $f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)$, construa os conjuntos

$$A_n = \{x \in ;\ f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}.$$

Com isso, podemos observar que cada $A_n \in X$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ e que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Desta maneira, usando o lema Lema 4.2.5 e Lema 4.2.4 temos que

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu. \tag{4}$$

Como (A_n) é uma sequência monótona crescente que a união é igual ao conjunto X, observamos que, pela proposição Proposição 3.2.14 que para uma medida μ vale

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

Só que pelo teorema Teorema 4.1.7 $\int \varphi\chi_E d\mu$ é uma medida. Desta forma,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int \varphi\chi_{A_n} d\mu = \int \varphi\chi_X d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Substituindo isso na equação 4 obtemos

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Como $\alpha \in (0,1)$ segue que

$$\int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Finalmente, por φ ser uma função não negativa simples arbitrária que satisfaz $0 \leq \varphi \leq f$, obtemos

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Disso tudo,

$$\int f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Portanto, $\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$ como desejávamos.

□

O teorema anterior nos permite mostrar as operações aritméticas para integral de Lebesgue para funções não negativas quaisquer como apresentaremos adiante.

Corolário 4.2.7 Se $f \in M^+$ e $c \geq 0$, então $cf \in M^+$ e vale

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu.$$

Demonstração.

Se o número real for zero, então o resultado sai de forma imediata. Suponha que $c > 0$. Assim, pelo teorema Teorema 4.2.1, existe uma sequência de funções simples $(\varphi_n) \subset M^+$ que converge para a função f. Logo, a sequência $(c\varphi_n)$ converge para cf. Desta forma, ao aplicarmos os teoremas Teorema 4.1.4 e Teorema 4.2.6, obtemos

$$\int cf d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int c\varphi_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \left(c \cdot \int \varphi_n d\mu \right) = c \cdot \left(\lim_{n\to+\infty} \int \varphi_n d\mu \right) = c \int f d\mu.$$

Como queríamos demonstrar.

□

Corolário 4.2.8 Se $f, g \in M^+$, então $f + g \in M^+$ e vale

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Demonstração.

Analogamente ao corolário anterior, tomemos duas sequências de funções simples (φ_n) e (ψ_n) ambas monótonas e crescentes tal que convergem, respectivamente, para f e g. Segue, pelos teoremas Teorema 4.1.4 e Teorema 4.2.6 que

$$\int (f+g)d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int (\varphi_n+\psi_n)d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int \varphi_n d\mu + \lim_{n\to+\infty}\int \psi_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

$\square$

Note que os resultados tratam apenas de funções monótonas e nem sempre teremos essa condição "perfeita" para nossas sequências. Assim, o próximo resultado nos apresenta uma maneira de trabalhar com sequências que não são monótonas.

Teorema 4.2.9 [Lema de Fatou] Se $(f_n) \subset M^+(X,\mathscr{C})$, então $\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.

Demonstração.

Tome a sequência $g_m = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_m, f_{m+1}, ...\}$. Assim, enquanto $m \leq n$ nós temos $g_m \leq f_n$. Neste caso,

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu.$$

Como (g_m) é crescente e converge para $\liminf f_n$ nós temos que

$$\int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Uniforme,

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \lim \int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

$\square$

Corolário 4.2.10 Se $f \in M^+$ e λ é definida sobre $\mathscr{C}$ pondo $\lambda(E) = \int_E f d\mu$, então λ é uma medida.

Demonstração.

Uma vez que $f \geq 0$, obtemos que $\lambda(E) \geq 0$, por definição. Caso $E = \varnothing$, então $f\chi_E \equiv 0$ acarretando que $\lambda(\varnothing) = 0$. Por fim, tome (E_n) uma sequência disjunta do conjunto $\mathscr{C}$ e defina f_n pondo

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}$$

Segue do corolário Corolário 4.2.8 que

$$\int f_n d\mu = \int \left(\sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \left(\int f\chi_{E_k} \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{E_k} f \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k) d\mu$$

□

Definição 4.2.11 Diremos que alguma propriedade ocorre em quase todo ponto de um conjunto X com respeito à medida μ, se ela não é valida somente em um subconjunto E de X que tem medida nula. Denotaremos esse acontecimento por μ-q.t.p.

Corolário 4.2.12 Suponha que $f \in M^+$. Então $f(x) = 0$ em quase todo ponto de X se, e somente se $\int f d\mu = 0$.

Demonstração.

Suponha $f(x) = 0$ μ-q.t.p. Assim, se $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Tome a sequência $f_n = n\chi_E$. Dessa forma $f \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Segue, pelo Lema de Fatou que

$$0 \leq \int f d\mu \leq \int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu = 0.$$

Ou seja, $\int f d\mu = 0$. Reciprocamente, suponha que $\int f d\mu = 0$. Tome uma sequência de conjuntos $E_n = \left\{ x \in X . f(x) > \frac{1}{n} \right\}$ tal que $f \geq \left(\frac{1}{n}\right) \chi_{E_n}$. Assim, $\int f d\mu \geq \int \left(\frac{1}{n}\right) \chi_{E_n} d\mu$. Só que $\int \left(\frac{1}{n}\right) \chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0$. Segue que

$$0 = \inf f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0$$

Ou seja $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, todo E_n tem medida nula. Segue, pela proposição Proposição 3.2.19 que o conjunto $\{x \in X; f(x) > 0\}$ tem medida nula, pois $\{x \in X; f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

□

Finalizaremos esta subseção apresentando um corolário do Teorema da Convergência Monótona que enfatiza claramente a diferença entre a Integral de Riemann e a Integral de Lebesgue.

Corolário 4.2.13 Se (g_n) é uma sequência de funções em M^+, então

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int g_n d\mu \right).$$

Demonstração.

O resultado sai imediatamente da aplicação do Teorema da Convergência Monótona considerando a sequência de funções $(f_n) \subset M^+$ tais que $f_n = g_1 + \cdots + g_n$.

$\square$

4.3 Funções Integráveis

Definimos anteriormente apenas integrais de funções não negativas com respeito à uma medida μ. Nesta estenderemos, finalmente, este conceito para uma função qualquer de valores reais estendidos. Com isso,

Definição 4.3.1 Seja $L = (X, \mathscr{C}, \mu)$ a coleção de funções integráveis que consiste de todas as funções reais $\mathscr{C}$-mensuráveis $f : X \to \mathbb{R}$ tais que as funções f^+ e f^- são ambas integrais finitas com respeito à medida μ. Neste caso, nós definimos a integral de f com respeito à medida μ como

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Se, por ventura, E for um elemento da σ-álgebra $\mathscr{C}$, então definimos

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

Teorema 4.3.2 Uma função mensurável f é um elemento de L se, e somente se, $|f|$ é um elemento de L.

Demonstração.

Suponha que $f \in L$. Por definição, isso ocorre se, e somente se, as artes positiva e negativa de f são ambas elementos de M^+ e suas, respectivas integrais, são finitas. Devemos mostrar que

$$\int |f| d\mu = \int |f|^+ d\mu - \int |f|^- d\mu$$

Pela definição Definição 2.2.12, $|f|^- = 0$, logo $\int |f|^- d\mu = 0$. Pelo lema **??** temos que $|f|^+ = |f| = f^+ + f^-$. Assim, $\displaystyle\int |f|^+ d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu$. Como $f^+ + f^- \in M^+$, segue pelo corolário Corolário 4.2.8 que $\displaystyle\int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$, ou seja $\displaystyle\int |f|^+ d\mu$ é finita. Desta forma,

$$\int |f| d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu - 0 = \int |f|^+ d\mu - \int |f|^- d\mu$$

Logo, $|f| \in L$. A recíproca é totalmente análoga.

$\square$

Corolário 4.3.3 Se $|f| \in L$, então $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$.

Demonstração.

Se $|f| \in L$, então $f \in L$ pelo teorema anterior. Logo $\int f^+ d\mu$ e $\int f^- d\mu$ são finitas e não negativas. Desta forma

$$\begin{aligned}
\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| &= \left|\int f^+ d\mu + \left(-\int f^- d\mu\right)\right| \\
&\leq \left|\int f^+ d\mu\right| + \left|\left(-\int f^- d\mu\right)\right| \\
&= \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \\
&= \int (f^+ + f^-) d\mu \\
&= \int |f| d\mu.
\end{aligned}$$

Portanto, $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$.

$\square$

Corolário 4.3.4 Se f é mensurável, g é integrável e $|f| \leq |g|$, então f é integrável e $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$.

Demonstração.

Se f é mensurável, então para uma medida μ definida sobre $(X, \mathscr{C})$, tem-se que $f \in L$. Assim, pelo teorema Teorema 4.3.2 tem-se que $|f|$ é integrável. Como $|f|$ e $|g|$ são função não negativas, segue pelo lema Lema 4.2.4 que $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$.

$\square$

Teorema 4.3.5 Se $f, g \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

(a) A multiplicação por escalar $\alpha f \in L$ com $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$;

(b) A soma $(f+g) \in L$ com $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

Demonstração.

(a) Se $\alpha = 0$, então $\alpha f = 0$ em todo ponto de seu domínio. Assim, $\int \alpha f d\mu = 0 = \alpha \int f d\mu$. Se $\alpha > 0$, então

$$\begin{aligned}\alpha \int f d\mu =& \alpha\left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right)\\ =& \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu\\ =& \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu.\end{aligned}$$

Perceba que $\alpha f^+ = (\alpha f)^+$ e $\alpha f^- = (\alpha f)^-$. Disso,

$$\int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu = \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = \int \alpha f d\mu.$$

Neste caso, $\alpha f \in L$ e temos $\alpha \int f d\mu = \int \alpha f d\mu$. O caso $\alpha < 0$ é totalmente análogo.

(b) Se $f, g \in L$, então $|f|, |g| \in L$ pelo teorema Teorema 4.3.2. Como $|f+g| \leq |f| + |g|$, segue que $f + g \in L$ pelo corolário Corolário 4.3.4. Além disso, pelo lema Lema 2.2.14, temos $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$. Somando membro a membro, temos

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$$

Como $(f^+ + g^+), (f^- + g^-)$ são funções integráveis não negativas, temos que

$$\int (f+g) d\mu = \int [f^+ + g^+ - (f^- + g^-)] d\mu$$

Pelo corolário Corolário 4.2.8

$$\begin{aligned}\int [f^+ + g^+ - (f^- + g^-)] d\mu &= \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu\\ &= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu\\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu\\ &= \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

Portanto, $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

□

Teorema 4.3.6 [Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue] Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo ponto para uma uma função real mensurável f. Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e $\int f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu$.

Demonstração.

Se (f_n) converge em quase todo ponto para a função f e $|f_n| \leq g$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então $f \leq g$ em quase todo ponto. Como g é integrável, segue pelo corolário Corolário 4.3.4 que f é integrável. Além disso, note que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|f_n| \leq g \Leftrightarrow f_n \leq g \text{ ou } f_n \leq -g \Leftrightarrow g - f_n \geq 0 \text{ ou } g + f_n \geq 0$$

Caso tenhamos $g + f_n \geq 0$ podemos utilizar o Lema de Fatou e o teorema Teorema 4.3.5 de forma que

$$\begin{aligned}
\int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g+f) d\mu \\
&\leq \liminf \int (g + f_n) d\mu \\
&= \liminf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\
&= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu
\end{aligned}$$

isso acarreta que

$$\int g d\mu + \int f d\mu = \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu.$$

Logo, $\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.

Caso ocorra $g - f_n \geq 0$, aplicamos novamente o Lema de Fatou e o teorema Teorema 4.3.5. Assim,

$$\int g d\mu - \int f d\mu = \int (g - f) d\mu \leq \liminf \int (g - f_n) d\mu \leq \int g d\mu + \liminf \int (-f_n) d\mu.$$

Lembre que $\liminf \int (-f_n) d\mu = -\limsup \int f_n d\mu$. Com isso,

$$\int g d\mu - \int f d\mu \leq \int g d\mu + \liminf \int (-f_n) d\mu = \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu.$$

Desta forma, $\int f d\mu \geq \limsup \int f_n d\mu$. Disso tudo, observamos que

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Portanto, $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

□

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho abordamos a teoria da medida e integração, em sua forma elementar, tendo como pergunta diretriz de que forma pode ser apresentada a teoria da medida e integração de Lebesgue de maneira elementar para os alunos de graduação de ciências exatas? Com o intuito de auxiliar na obtenção da resposta, nosso objetivo geral que nos guiou em todo processo de construção do objeto de pesquisa foi: conhecer a algumas definições e resultados da teoria da medida e da integração de Lebesgue de forma elementar.

Desta forma, nosso primeiro objetivo específico era: definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis. Para atingir esse objetivo, primeiro definimos uma σ-álgebra de um conjunto. Em seguida, mostramos que um conjunto não vazio e uma σ-álgebra desse conjunto formam um espaço mensurável. Fixamos este conceito apresentando exemplos com grau crescente de abstração. Provamos algumas proposições sobre espaços mensuráveis e apresentamos uma σ-álgebra especial no conjunto dos números reais, a σ-álgebra de Borel. Fizemos um processo semelhante para expor as funções mensuráveis sendo os resultados focados em uma maneira mais fácil de averiguar se uma função é mensurável sem utilizar a definição diretamente.

Nosso segundo objetivo específico era: conhecer a teoria da medida de maneira generalizada. Para obter com sucesso esse objetivo, precisou-se estender a reta real adicionando as noções de $-\infty$ e $+\infty$ exibindo uma álgebra específica a ser adotada. Com isso, na primeira parte da seção, generalizamos os resultados apresentados na seção anterior dando ênfase às mudanças que ocorreram ao mudar de $\mathbb{R}$ para $\overline{\mathbb{R}}$. Depois disso, definimos o que é uma medida, enunciamos e provamos propriedades sobre. Além disso, trouxemos vários exemplos, dentre eles, o espaço de probabilidades e a medida de um conjunto discreto. Todas as demonstrações tiveram o intuito de serem as mais didáticas possíveis sendo os teoremas divididos em várias proposições para que pudesse haver o melhor entendimento.

Nosso último objetivo era: descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida. Para tal, desmembramos os tipos de funções para que pudesse ser um processo intuitivo da construção. Exibimos, inicialmente, as integrais de Lebesgue para funções simples. Fixamos a medida de Lebesgue para que os exemplos ficassem mais claros, pois nesta parte, a diferença entre a integral de Lebesgue e a integral de Riemann era indistinguível. Ao dar continuidade, lembramos a construção da integral de Riemann para funções não negativas para que depois pudéssemos mostrar a construção de Lebesgue e evidenciar a diferença entre as duas. Neste momento, várias ferramentas para integrais de Lebesgue para funções não negativas foram enunciadas e provadas para que esta pudesse ser generalizada para funções quaisquer. Vale ressaltar que em todas as construções tiveram auxílio geométrico para simplificar ao máximo a teoria.

FALTA CONCLUIR O FECHAMENTO.

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. 1. ed. New York: Wiley-Interscience, 1995.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas S. A, 2002. Disponível em: <https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/150/o/Anexo_C1_como_elaborar_projeto_de_pesquisa_-_antonio_carlos_gil.pdf>. Acesso em: 30 de dez. 2021.

LIMA, E. L. **Um Curso de Análise**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. v. 1.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 2. ed. Rio Grande do Sul: Feevale, 2013.