Um Estudo Introdutório da Teoria da Medida e Integração de Lebesgue

Cícero Moreira Hitzschky Filho

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro

Universidade Estadual do Ceará
Campus Itaperí
Licenciatura Plena em Matemática

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
LUMEN AD VIAM
UECE

Roteiro

1. Contextualização do Tema
2. Percurso do Trabalho
   - O conceito de σ-álgebra
   - Funções Mensuráveis
   - A teoria da Medida
   - Teoria da Integração
3. Sumário
   - Organização do Sumário
4. Conclusão
5. Agradecimentos

1 Contextualização do Tema

2 Percurso do Trabalho
- O conceito de σ-álgebra
- Funções Mensuráveis
- A teoria da Medida
- Teoria da Integração

3 Sumário
- Organização do Sumário

4 Conclusão

5 Agradecimentos

Contextualização do Tema

Contexto Histórico

“Pelo fim do século dezenove, a ênfase no rigor levou numerosos matemáticos à produção de exemplos de funções ’patológicas’ que, devido a alguma propriedade incomum, violavam um teorema que antes se supunha válido em geral” (BOYER, 2012, p.415).

Contextualização do Tema

Percepção de Lebesgue

Lebesgue, refletindo sobre o trabalho de Borel sobre conjuntos, viu que a definição de Riemann de integral tem o defeito de só se aplicar a casos excepcionais, pois assume não mais que uns poucos pontos de descontinuidade para a função. Se uma função $y = f(x)$ tem muitos pontos de descontinuidade, então, à medida que o intervalo $x_{i+1} - x_i$ se torna menor, os valores $f(x_{i+1})$ e $f(x_i)$ não ficam necessariamente próximos (BOYER, 2012, p.416).

Contextualização do Tema

Solução do Problema

Em vez de subdividir o domínio da variável independente, Lebesgue dividiu, portanto, o campo de variação $\bar{f} - f$ da função em subintervalos Δy_i e em cada subintervalo escolheu um valor η_1. Então, achou a 'medida' $\mu(E_i)$ do conjunto E_i dos pontos do eixo x para os quais os valores de f são aproximadamente iguais a η_1 (BOYER, 2012, p.416).

Contextualização do Tema

Pesquisa Prévia

- Pesquisa com a frase “ensino de cálculo diferencial e integral” na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), sem aspas;
- Retorno de 310 trabalhos em 29/10/2023;
- Observação de Título e Resumo;
- Não constava o ensino da integral de Lebesgue para alunos de graduação em Ciências Exatas.

Contextualização do Tema

Pesquisa Prévia

- Pesquisa com a frase “ensino de cálculo diferencial e integral” na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), sem aspas;
- Retorno de 310 trabalhos em 29/10/2023;
- Observação de Título e Resumo;
- Não constava o ensino da integral de Lebesgue para alunos de graduação em Ciências Exatas.

Contextualização do Tema

Pesquisa Prévia

- Pesquisa com a frase “ensino de cálculo diferencial e integral” na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), sem aspas;
- Retorno de 310 trabalhos em 29/10/2023;
- Observação de Título e Resumo;
- Não constava o ensino da integral de Lebesgue para alunos de graduação em Ciências Exatas.

UECE

Contextualização do Tema

Pesquisa Prévia

- Pesquisa com a frase “ensino de cálculo diferencial e integral” na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), sem aspas;
- Retorno de 310 trabalhos em 29/10/2023;
- Observação de Título e Resumo;
- Não constava o ensino da integral de Lebesgue para alunos de graduação em Ciências Exatas.

UECE

Contextualização do Tema

Pesquisa Prévia

- Pesquisa com a frase “ensino de cálculo diferencial e integral” na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), sem aspas;
- Retorno de 310 trabalhos em 29/10/2023;
- Observação de Título e Resumo;
- Não constava o ensino da integral de Lebesgue para alunos de graduação em Ciências Exatas.

Pergunta Diretriz

Mediante esta ausência, esta pesquisa levanta o seguinte questionamento: de que forma pode ser apresentada a teoria da medida e integração de Lebesgue de maneira elementar para os alunos de graduação em ciências exatas?

Objetivos

Objetivo Geral

Conhecer algumas definições e resultados da teoria da medida e da integração de Lebesgue de forma elementar.

Objetivos Específicos

- Definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis;
- Conhecer a teoria da medida de maneira generalizada;
- Descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

Objetivos

Objetivo Geral

Conhecer algumas definições e resultados da teoria da medida e da integração de Lebesgue de forma elementar.

Objetivos Específicos

- Definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis;
- Conhecer a teoria da medida de maneira generalizada;
- Descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

Objetivos

Objetivo Geral

Conhecer algumas definições e resultados da teoria da medida e da integração de Lebesgue de forma elementar.

Objetivos Específicos

- Definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis;
- Conhecer a teoria da medida de maneira generalizada;
- Descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

UECE

Objetivos

Objetivo Geral

Conhecer algumas definições e resultados da teoria da medida e da integração de Lebesgue de forma elementar.

Objetivos Específicos

- Definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis;
- Conhecer a teoria da medida de maneira generalizada;
- Descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

Objetivos

Objetivo Geral

Conhecer algumas definições e resultados da teoria da medida e da integração de Lebesgue de forma elementar.

Objetivos Específicos

- Definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis;
- Conhecer a teoria da medida de maneira generalizada;
- Descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

Metodologia

Elementos da pesquisa

- Natureza Básica;
- Carácter Exploratório;
- Procedimento Técnico de Revisão Bibliográfica.

Metodologia

Elementos da pesquisa

- Natureza Básica;
- Carácter Exploratório;
- Procedimento Técnico de Revisão Bibliográfica.

Metodologia

Elementos da pesquisa

- Natureza Básica;
- Carácter Exploratório;
- Procedimento Técnico de Revisão Bibliográfica.

Metodologia

Elementos da pesquisa

- Natureza Básica;
- Carácter Exploratório;
- Procedimento Técnico de Revisão Bibliográfica.

1. Contextualização do Tema

2. Percurso do Trabalho
   - O conceito de σ-álgebra
   - Funções Mensuráveis
   - A teoria da Medida
   - Teoria da Integração

3. Sumário
   - Organização do Sumário

4. Conclusão

5. Agradecimentos

Percurso do Trabalho

O conceito de σ-álgebra

Definição

Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X é dita uma σ-álgebra se as seguintes condições são atendidas:

1. $\varnothing$ e X são elementos de $\mathcal{C}$;
2. Se um elemento $A \in \mathcal{C}$, então $A^c \in \mathcal{C}$;
3. Se (A_n) é uma sequência de elementos de $\mathcal{C}$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$.

Percurso do Trabalho

O conceito de σ-álgebra

Definição

Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X é dita uma σ-álgebra se as seguintes condições são atendidas:

1. $\varnothing$ e X são elementos de $\mathcal{C}$;
2. Se um elemento $A \in \mathcal{C}$, então $A^c \in \mathcal{C}$;
3. Se (A_n) é uma sequência de elementos de $\mathcal{C}$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$.

Percurso do Trabalho

O conceito de σ-álgebra

Definição

Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X é dita uma σ-álgebra se as seguintes condições são atendidas:

1. $\varnothing$ e X são elementos de $\mathcal{C}$;
2. Se um elemento $A \in \mathcal{C}$, então $A^c \in \mathcal{C}$;
3. Se (A_n) é uma sequência de elementos de $\mathcal{C}$, então $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$.

UECE

Percurso do Trabalho

Um par ordenado $(X, \mathcal{C})$ constituído de um conjunto X e uma σ-álgebra sobre X é chamado de **espaço mensurável**.

Exemplos

- Se $X = \{-1, 0, 1\}$ e $\mathcal{C} = \{\varnothing, X, \{0\}, \{-1, 1\}\}$, então $(X, \mathcal{C})$ é um espaço mensurável;
- Seja X um conjunto qualquer. Os conjuntos $\mathcal{C}_1 = \{\varnothing, X\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{A;\ A \subset X\}$ são ambos σ-álgebras de X.

Contraexemplo

Seja $X = \{x, y, z\}$. O conjunto $\mathcal{C} = \{\varnothing, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ não é uma σ-álgebra de X.

Percurso do Trabalho

Um par ordenado $(X, \mathcal{C})$ constituído de um conjunto X e uma σ-álgebra sobre X é chamado de **espaço mensurável**.

Exemplos

- Se $X = \{-1, 0, 1\}$ e $\mathcal{C} = \{\varnothing, X, \{0\}, \{-1, 1\}\}$, então $(X, \mathcal{C})$ é um espaço mensurável;
- Seja X um conjunto qualquer. Os conjuntos $\mathcal{C}_1 = \{\varnothing, X\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{A;\ A \subset X\}$ são ambos σ-álgebras de X.

Contraexemplo

Seja $X = \{x, y, z\}$. O conjunto $\mathcal{C} = \{\varnothing, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ não é uma σ-álgebra de X.

Percurso do Trabalho

Um par ordenado $(X, \mathcal{C})$ constituído de um conjunto X e uma σ-álgebra sobre X é chamado de **espaço mensurável**.

Exemplos

- Se $X = \{-1, 0, 1\}$ e $\mathcal{C} = \{\varnothing, X, \{0\}, \{-1, 1\}\}$, então $(X, \mathcal{C})$ é um espaço mensurável;
- Seja X um conjunto qualquer. Os conjuntos $\mathcal{C}_1 = \{\varnothing, X\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{A;\ A \subset X\}$ são ambos σ-álgebras de X.

Contraexemplo

Seja $X = \{x, y, z\}$. O conjunto $\mathcal{C} = \{\varnothing, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ não é uma σ-álgebra de X.

Percurso do Trabalho

Um par ordenado $(X, \mathcal{C})$ constituído de um conjunto X e uma σ-álgebra sobre X é chamado de **espaço mensurável**.

Exemplos

- Se $X = \{-1, 0, 1\}$ e $\mathcal{C} = \{\varnothing, X, \{0\}, \{-1, 1\}\}$, então $(X, \mathcal{C})$ é um espaço mensurável;
- Seja X um conjunto qualquer. Os conjuntos $\mathcal{C}_1 = \{\varnothing, X\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{A;\ A \subset X\}$ são ambos σ-álgebras de X.

Contraexemplo

Seja $X = \{x, y, z\}$. O conjunto $\mathcal{C} = \{\varnothing, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ não é uma σ-álgebra de X.

Percurso do Trabalho

Um par ordenado $(X, \mathcal{C})$ constituído de um conjunto X e uma σ-álgebra sobre X é chamado de **espaço mensurável**.

Exemplos

- Se $X = \{-1, 0, 1\}$ e $\mathcal{C} = \{\varnothing, X, \{0\}, \{-1, 1\}\}$, então $(X, \mathcal{C})$ é um espaço mensurável;
- Seja X um conjunto qualquer. Os conjuntos $\mathcal{C}_1 = \{\varnothing, X\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{A;\ A \subset X\}$ são ambos σ-álgebras de X.

Contraexemplo

Seja $X = \{x, y, z\}$. O conjunto $\mathcal{C} = \{\varnothing, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ não é uma σ-álgebra de X.

Percurso do Trabalho

σ-álgebra de Borel

Seja $X = \mathbb{R}$. A Álgebra de Borel é a σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por todos os intervalos abertos $(-\infty, x)$ com $x \in \mathbb{R}$. Os elementos dessa σ-álgebra são chamados de Borelianos

Teorema

Uma σ-álgebra é de Borel se, e somente se, é gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.

Percurso do Trabalho

σ-álgebra de Borel

Seja $X = \mathbb{R}$. A Álgebra de Borel é a σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por todos os intervalos abertos $(-\infty, x)$ com $x \in \mathbb{R}$. Os elementos dessa σ-álgebra são chamados de Borelianos

Teorema

Uma σ-álgebra é de Borel se, e somente se, é gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.

Percurso do Trabalho

Funções Mensuráveis

Definição

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita $\mathcal{C}$-mensurável se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$.

Percurso do Trabalho

Teorema

Sendo $(X, \mathcal{C})$ um espaço mensurável, para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}$-mensurável as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C};$
2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ B_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{C};$
3. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ C_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{C};$
4. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ D_\alpha = \{x \in X;\ f(x) < \alpha\} \in \mathcal{C}.$

Percurso do Trabalho

Teorema

Sendo $(X, \mathcal{C})$ um espaço mensurável, para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}$-mensurável as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$;
2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ B_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{C}$;
3. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ C_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{C}$;
4. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ D_\alpha = \{x \in X;\ f(x) < \alpha\} \in \mathcal{C}$.

Percurso do Trabalho

Teorema

Sendo $(X, \mathcal{C})$ um espaço mensurável, para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}$-mensurável as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$;
2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ B_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{C}$;
3. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ C_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{C}$;
4. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ D_\alpha = \{x \in X;\ f(x) < \alpha\} \in \mathcal{C}$.

Percurso do Trabalho

Teorema

Sendo $(X, \mathcal{C})$ um espaço mensurável, para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}$-mensurável as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{C}$;
2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ B_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{C}$;
3. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ C_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{C}$;
4. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ D_\alpha = \{x \in X;\ f(x) < \alpha\} \in \mathcal{C}$.

Percurso do Trabalho

Proposição

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real $\mathcal{C}$-mensurável e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções cf, f^2 e $|f|$ são $\mathcal{C}$-mensuráveis.

Proposição

Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$. Se f e g são ambas $\mathcal{C}$-mensuráveis, então as funções $f + g$ e $f \cdot g$ são também $\mathcal{C}$-mensuráveis.

UECE

Percurso do Trabalho

Proposição

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real $\mathcal{C}$-mensurável e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções cf, f^2 e $|f|$ são $\mathcal{C}$-mensuráveis.

Proposição

Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$. Se f e g são ambas $\mathcal{C}$-mensuráveis, então as funções $f + g$ e $f \cdot g$ são também $\mathcal{C}$-mensuráveis.

Percurso do Trabalho

Definição

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que a **parte positiva** da função f é a função $f^{+} : X \to \mathbb{R}$ definida por $f^{+}(x) = \sup\{f(x), 0\}$. Semelhantemente, chamamos de a **parte negativa** da função f, a função $f^{-} : X \to \mathbb{R}$ definida por $f^{-}(x) = \sup\{-f(x), 0\}$.

Percurso do Trabalho

Teorema

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{C}$-mensurável se, e somente se, suas partes negativa e positiva são ambas $\mathcal{C}$-mensuráveis.

Percurso do Trabalho

Os espaços de Funções Mensuráveis

Definição

O conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ que consiste de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ é chamada de **Sistema Estendido de Números Reais**.

Percurso do Trabalho

Teorema

Seja (f_n) uma sequência de elementos de $M(X, \mathcal{C})$ e defina as funções

- $f(x) = \inf f_n(x)$;
- $F(x) = \sup f_n(x)$;
- $f^*(x) = \liminf f_n(x)$;
- $F^*(x) = \limsup f_n(x)$.

Então as funções f, f^*, F e F^* são elementos de $M(X, \mathcal{C})$.

Corolário

Se (f_n) é uma sequência em $M(X, \mathcal{C})$ que converge para f em X, então f também está em $M(X, \mathcal{C})$.

Percurso do Trabalho

Teorema

Seja (f_n) uma sequência de elementos de $M(X,\mathcal{C})$ e defina as funções

- $f(x) = \inf f_n(x)$;
- $F(x) = \sup f_n(x)$;
- $f^*(x) = \liminf f_n(x)$;
- $F^*(x) = \limsup f_n(x)$.

Então as funções f, f^*, F e F^* são elementos de $M(X,\mathcal{C})$.

Corolário

Se (f_n) é uma sequência em $M(X,\mathcal{C})$ que converge para f em X, então f também está em $M(X,\mathcal{C})$.

Percurso do Trabalho

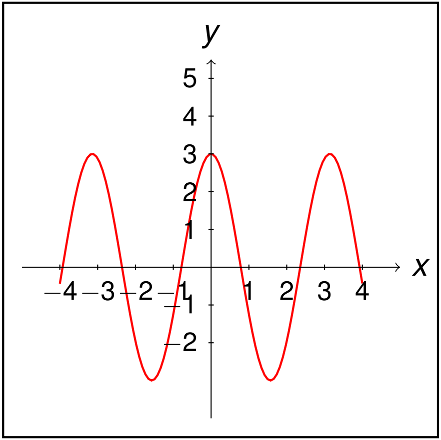
Definição

Seja f uma função em $M(X, \mathcal{C})$ e $A > 0$. Definimos o truncamento f_A da função f por

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq A \\ A, & \text{se } f(x) > A \\ -A, & \text{se } f(x) < -A. \end{cases}$$

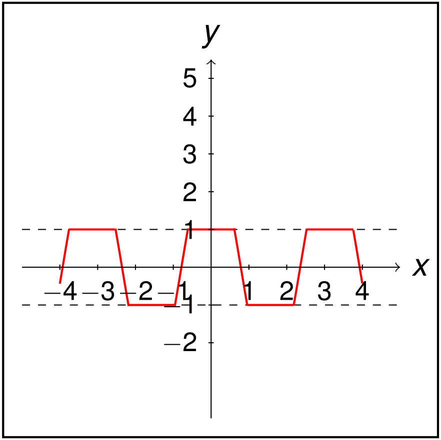
Percurso do Trabalho

Figura 1: Gráfico da função $g(x) = 3\cos(2x)$



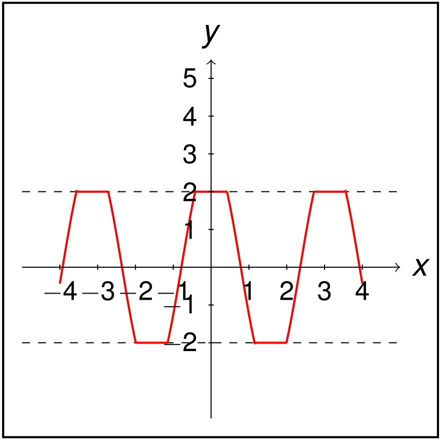
Percurso do Trabalho

Figura 2: Gráfico do truncamento g_1



Percurso do Trabalho

Figura 3: Gráfico do truncamento g_2



Percurso do Trabalho

Espaços de Medida

Definição

Uma medida é uma função $\mu : (X, \mathcal{C}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que satisfaz as seguintes condições:

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- $\mu(A) \geq 0, \ \forall \ A \in \mathcal{C}$;
- Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de $\mathcal{C}$, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Percurso do Trabalho

Espaços de Medida

Definição

Uma medida é uma função $\mu : (X, \mathcal{C}) \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que satisfaz as seguintes condições:

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- $\mu(A) \geq 0, \ \forall \ A \in \mathcal{C}$;
- Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de $\mathcal{C}$, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Percurso do Trabalho

Espaços de Medida

Definição

Uma medida é uma função $\mu : (X, \mathcal{C}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que satisfaz as seguintes condições:

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- $\mu(A) \geq 0, \ \forall \ A \in \mathcal{C}$;
- Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de $\mathcal{C}$, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Percurso do Trabalho

Espaços de Medida

Definição

Uma medida é uma função $\mu : (X, \mathcal{C}) \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que satisfaz as seguintes condições:

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- $\mu(A) \geq 0, \ \forall \ A \in \mathcal{C}$;
- Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de $\mathcal{C}$, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Percurso do Trabalho

Teorema

Seja μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathcal{C}$. Se A e B são elementos de $\mathcal{C}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Se $\mu(A) < +\infty$, então $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Percurso do Trabalho

Exemplos

Sejam X um conjunto e $\mathcal{C}$ a σ-álgebra formada por todos os subconjunto de X. Defina $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ pondo $\mu_1(A) = 0$ para qualquer $A \in \mathcal{C}$ e μ_2 é pondo

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } A = \varnothing \\ +\infty, & \text{se } A \neq \varnothing \end{cases}$$

Sendo definidas dessa forma, as funções μ_1 e μ_2 são medidas.

Percurso do Trabalho

Exemplo

Seja $(\Omega, \mathcal{C})$ um espaço mensurável. A função $\mathcal{P} : \mathcal{C} \to [0, 1]$ é dita uma probabilidade se satisfaz as propriedades:

1. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$;
2. $\mathcal{P}(A) \geq 0, \ \forall \ A \in \mathcal{C}$;
3. Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de $\mathcal{C}$, então $\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n)$.

UECE

Percurso do Trabalho

Exemplo

Seja $(\Omega, \mathcal{C})$ um espaço mensurável. A função $\mathcal{P} : \mathcal{C} \rightarrow [0,1]$ é dita uma probabilidade se satisfaz as propriedades:

1. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$;
2. $\mathcal{P}(A) \geq 0,\ \forall\, A \in \mathcal{C}$;
3. Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de $\mathcal{C}$, então $\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n)$.

Percurso do Trabalho

Exemplo

Seja $(\Omega, \mathcal{C})$ um espaço mensurável. A função $\mathcal{P} : \mathcal{C} \to [0,1]$ é dita uma probabilidade se satisfaz as propriedades:

1. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$;
2. $\mathcal{P}(A) \geq 0, \ \forall \ A \in \mathcal{C}$;
3. Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de $\mathcal{C}$, então $\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n)$.

UECE

Percurso do Trabalho

Teorema

Seja μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathcal{C}$. Se A e B são elementos de $\mathcal{C}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Se $\mu(A) < +\infty$, então $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$

Percurso do Trabalho

Proposição

Seja μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathcal{C}$. Se (B_n) é uma sequência não-crescente de $\mathcal{C}$ e $\mu(B_1) < +\infty$, então $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$.

Percurso do Trabalho

Teorema

Sendo $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ um espaço mensurável, existe uma única medida λ definida sobre $\mathcal{B}$ que coincide com o comprimento dos intervalos abertos.

Definição

Seja $(X, \mathcal{C}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que um conjunto $E \in \mathcal{C}$ tem medida nula em relação à medida μ se $\mu(E) = 0$.

Percurso do Trabalho

Teorema

Sendo $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ um espaço mensurável, existe uma única medida λ definida sobre $\mathcal{B}$ que coincide com o comprimento dos intervalos abertos.

Definição

Seja $(X, \mathcal{C}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que um conjunto $E \in \mathcal{C}$ tem medida nula em relação à medida μ se $\mu(E) = 0$.

Percurso do Trabalho

A integração de Funções Simples

Definição

Uma função real é dita **simples** quando possui apenas uma quantidade finita de valores.

Definição

Forma Padrão

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica do conjunto $E_j \in \mathcal{C}$. Nessa representação estamos supondo que cada $a_j \neq a_i$ quando $j \neq i$ e que $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = X$, onde a sequência finita de conjuntos (E_n) formam uma partição do conjunto X.

Percurso do Trabalho

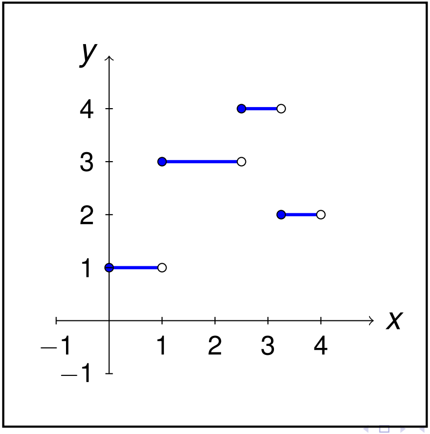
Exemplo

$g : [0,4] \to \mathbb{R}$ pondo

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1) \\ 3, & \text{se } x \in [1,2) \\ 4, & \text{se } x \in [2,3) \\ 2, & \text{se } x \in [3,4] \end{cases}$$

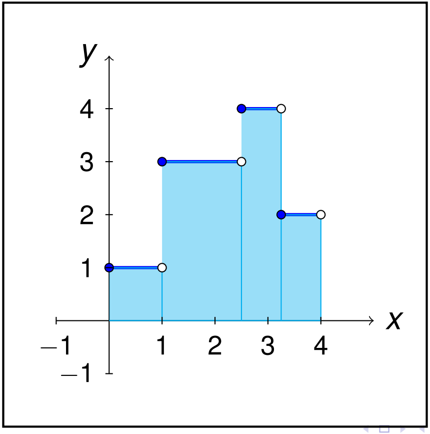
Percurso do Trabalho

Figura 4: Gráfico da função $g = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$



Percurso do Trabalho

Figura 5: Área delimitada pelo gráfico da função $g = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$



Percurso do Trabalho

Definição

Se φ é uma função simples de $M^+(X, \mathcal{C})$ com a representação $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, então a integral da função φ com respeito à medida μ é o valor real estendido

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$$

Percurso do Trabalho

Teorema

Se φ e ψ são funções simples do espaço $M^{+}(X, \mathcal{C})$ e $c \geq 0$ é uma constante real, então

- $\displaystyle\int c\varphi d\mu = c\int \varphi d\mu$;
- $\displaystyle\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$.

UECE

Percurso do Trabalho

Teorema

Se ϕ é uma função simples com a representação padrão dada por $\phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, então a função $\lambda : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por

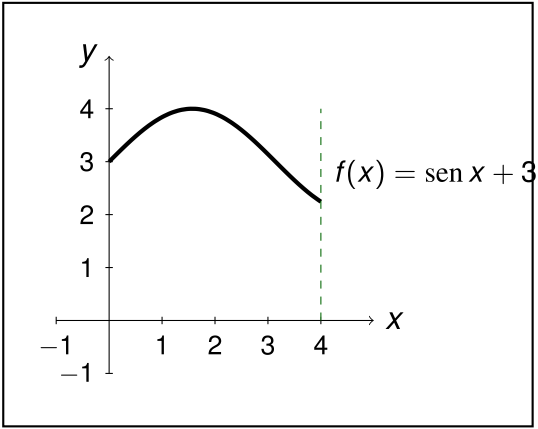
$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E \, d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{C}$ é uma medida sobre $\mathcal{C}$

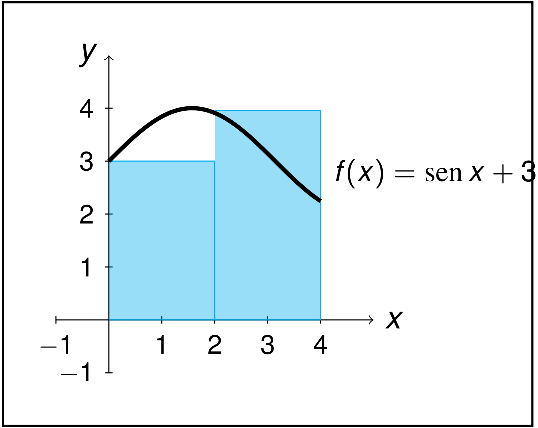
Percurso do Trabalho

Integral de Funções Não Negativas

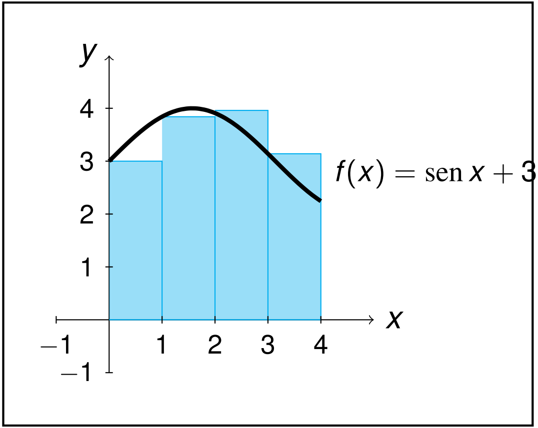
Figura 6: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x) + 3$



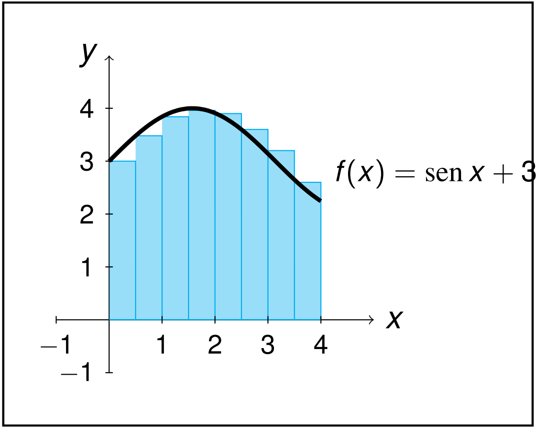
Percurso do Trabalho



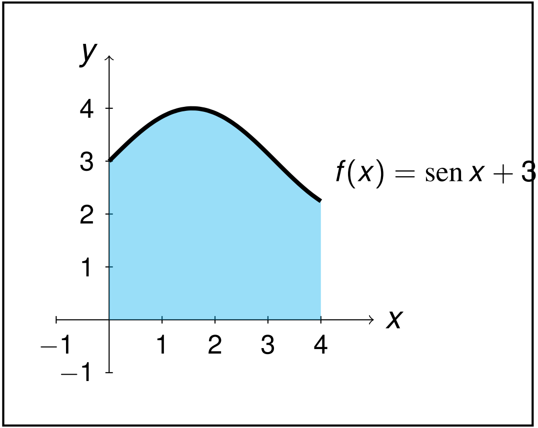
Percurso do Trabalho



Percurso do Trabalho



Percurso do Trabalho



Percurso do Trabalho

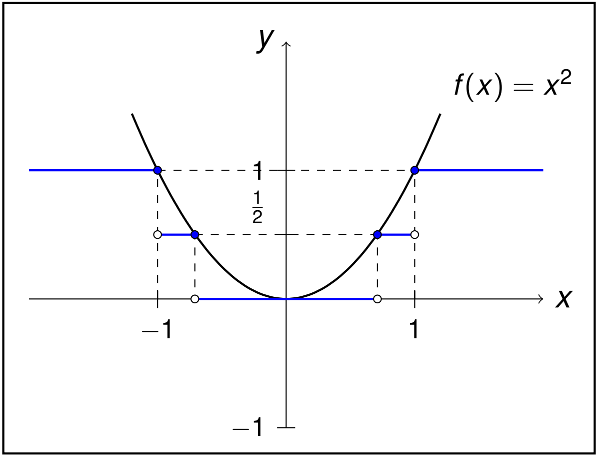
Partição pela imagem

Dada a função $f(x) = x^2$, construiremos a função simples ϕ_1 pondo:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-1} \\ 2^{-1}, & \text{se } 2^{-1} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-1} \\ 1, & \text{se } f(x) \geq 1 \end{cases}$$

Percurso do Trabalho

Figura 7: Gráfico da função ϕ_1



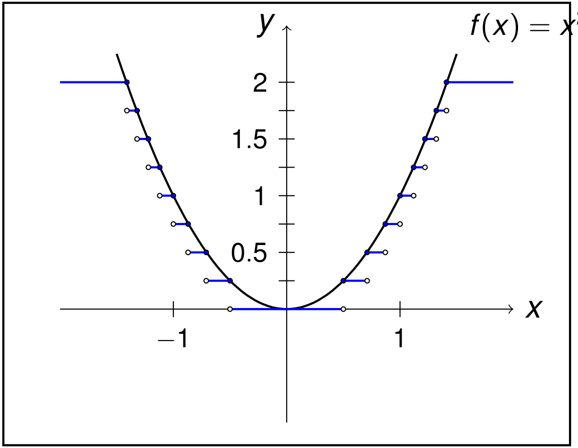
Percurso do Trabalho

A proximação a função f agora pela função simples ϕ_2

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-2} \\ 2^{-2}, & \text{se } 2^{-2} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-2} \\ 2 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 2 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 3 \cdot 2^{-2} \\ 3 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 3 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 4 \cdot 2^{-2} \\ 4 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 4 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 5 \cdot 2^{-2} \\ 5 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 5 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 6 \cdot 2^{-2} \\ 6 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 6 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 7 \cdot 2^{-2} \\ 7 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 7 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 8 \cdot 2^{-2} \\ 2, & \text{se } f(x) \geq 2 \end{cases}$$

Percurso do Trabalho

Figura 8: Gráfico da função ϕ_2



Percurso do Trabalho

Partição da Imagem em n partes

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-n} \\ 2^{-n}, & \text{se } 2^{-n} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-n} \\ 2 \cdot 2^{-n}, & \text{se } 2 \cdot 2^{-n} \leq f(x) < 3 \cdot 2^{-n} \\ \vdots & \vdots \\ k \cdot 2^{-n}, & \text{se } k \cdot 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) \cdot 2^{-n} \\ \vdots & \vdots \\ n, & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

UECE

Percurso do Trabalho‘

Teorema

Se f é uma função não negativa em $M(X, \mathcal{C})$, então existe uma sequência de funções (φ_n) tal que $\phi \in M(X, \mathcal{C}), \forall\ n \in \mathbb{N}$ de forma que

1. Cada φ_n é uma função simples, isto é, possui apenas uma quantidade finita de valores reais;
2. $0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$;
3. $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Percurso do Trabalho

Definição

Se $f \in M^+(X, \mathcal{C})$, nós definimos a integral de f com respeito à medida μ, sendo o valor real estendido

$$\int f d\mu = sup \int \varphi d\mu$$

Onde o supremo é sobre todas as funções simples $\varphi \in M(X, \mathcal{C})$ tal que $0 \leq \varphi \leq f(x)$ para todo $x \in X$

Percurso do Trabalho

Teorema da Convergência Monótona

Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis, não negativas, que converge para uma função f, então

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Percurso do Trabalho

Corolário

Se $f \in M^{+}(X, \mathcal{C})$ e $c \geq 0$, então $cf \in M^{+}(X, \mathcal{C})$ e vale $\displaystyle\int cfd\mu = c\int fd\mu$.

Corolário

Se f e g são funções não negativas e $\mathcal{C}$-mensuráveis, então a soma $f + g$ também é uma função $\mathcal{C}$-mensurável e vale $\displaystyle\int (f+g)d\mu = \int fd\mu + \int gd\mu$

Percurso do Trabalho

Lema de Fatou

Se (f_n) é uma sequência tal que $f_n \in M^+(X, \mathcal{C})$ para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, então

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Percurso do Trabalho

Definição

Diremos que alguma propriedade ocorre em quase todo ponto de um conjunto X com respeito à medida μ, se ela não é valida somente em um subconjunto E de X que tem medida nula. Denotaremos esse acontecimento por μ-q.t.p.

Percurso do Trabalho

Corolário

Se (g_n) é uma sequência de funções em $M^+(X, \mathcal{C})$, então

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int g_n d\mu \right).$$

Percurso do Trabalho

Contra-exemplo

Seja $C = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e defina a sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \chi_C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, como C é enumerável, segue que $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \chi_C(x)dx = 0$. Com isso, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$. Por outro lado, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ não é integrável segundo Rienmann.

Percurso do Trabalho

Funções Integráveis

Definição

Seja $L = (X, \mathcal{C}, \mu)$ a coleção de funções integráveis que consiste de todas as funções reais $\mathcal{C}$-mensuráveis $f : X \to \mathbb{R}$ tais que as funções f^+ e f^- são ambas integrais finitas com respeito à medida μ. Neste caso, nós definimos a integral de f com respeito à medida μ como

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Percurso do Trabalho

Teorema

Uma função mensurável f é um elemento de L se, e somente se, $|f|$ é um elemento de L

Corolário

Se $|f| \in L$, então $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$.

Corolário

Se f é mensurável, g é integrável e temos que $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo x, então f é integrável e $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$.

Percurso do Trabalho

Teorema

Se $f, g \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

1. A multiplicação por escalar $\alpha f \in L$ com
$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu;$$
2. A soma $(f+g) \in L$ com
$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

UECE

Percurso do Trabalho

Teorema

Se $f, g \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

1. A multiplicação por escalar $\alpha f \in L$ com
$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu;$$
2. A soma $(f + g) \in L$ com
$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Percurso do Trabalho

Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo ponto para uma uma função real mensurável f. Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu$$

UECE

1 Contextualização do Tema

2 Percurso do Trabalho
- O conceito de σ-álgebra
- Funções Mensuráveis
- A teoria da Medida
- Teoria da Integração

3 Sumário
- Organização do Sumário

4 Conclusão

5 Agradecimentos

UECE

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
  - O conceito de σ-álgebra;
  - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
  - Os espaços de Funções Mensuráveis;
  - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
  - A integral de Funções Simples;
  - A integral de Funções Não-Negativas;
  - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
  - O conceito de σ-álgebra;
  - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
  - Os espaços de Funções Mensuráveis;
  - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
  - A integral de Funções Simples;
  - A integral de Funções Não-Negativas;
  - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

UECE

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
    - O conceito de σ-álgebra;
    - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
    - Os espaços de Funções Mensuráveis;
    - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
    - A integral de Funções Simples;
    - A integral de Funções Não-Negativas;
    - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
  - O conceito de σ-álgebra;
  - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
  - Os espaços de Funções Mensuráveis;
  - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
  - A integral de Funções Simples;
  - A integral de Funções Não-Negativas;
  - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
  - O conceito de σ-álgebra;
  - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
  - Os espaços de Funções Mensuráveis;
  - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
  - A integral de Funções Simples;
  - A integral de Funções Não-Negativas;
  - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
  - O conceito de σ-álgebra;
  - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
  - Os espaços de Funções Mensuráveis;
  - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
  - A integral de Funções Simples;
  - A integral de Funções Não-Negativas;
  - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
  - O conceito de σ-álgebra;
  - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
  - Os espaços de Funções Mensuráveis;
  - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
  - A integral de Funções Simples;
  - A integral de Funções Não-Negativas;
  - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
  - O conceito de σ-álgebra;
  - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
  - Os espaços de Funções Mensuráveis;
  - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
  - A integral de Funções Simples;
  - A integral de Funções Não-Negativas;
  - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
    - O conceito de σ-álgebra;
    - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
    - Os espaços de Funções Mensuráveis;
    - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
    - A integral de Funções Simples;
    - A integral de Funções Não-Negativas;
    - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
  - O conceito de σ-álgebra;
  - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
  - Os espaços de Funções Mensuráveis;
  - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
  - A integral de Funções Simples;
  - A integral de Funções Não-Negativas;
  - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
  - O conceito de σ-álgebra;
  - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
  - Os espaços de Funções Mensuráveis;
  - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
  - A integral de Funções Simples;
  - A integral de Funções Não-Negativas;
  - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

UECE

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
  - O conceito de σ-álgebra;
  - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
  - Os espaços de Funções Mensuráveis;
  - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
  - A integral de Funções Simples;
  - A integral de Funções Não-Negativas;
  - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

Sumário

Sumário

- Introdução;
- Espaços e Funções Mensuráveis;
  - O conceito de σ-álgebra;
  - Funções Mensuráveis.
- A teoria da Medida;
  - Os espaços de Funções Mensuráveis;
  - Espaços de Medida.
- Teoria da Integração;
  - A integral de Funções Simples;
  - A integral de Funções Não-Negativas;
  - Funções Integráveis.
- Considerações Finais;
- Referências.

1 Contextualização do Tema

2 Percurso do Trabalho
- O conceito de σ-álgebra
- Funções Mensuráveis
- A teoria da Medida
- Teoria da Integração

3 Sumário
- Organização do Sumário

4 Conclusão

5 Agradecimentos

Conclusão

Objetivos Específicos

- Definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis;
- Conhecer a teoria da medida de maneira generalizada;
- Descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

Conclusão

Objetivos Específicos

- Definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis;
- Conhecer a teoria da medida de maneira generalizada;
- Descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

Conclusão

Objetivos Específicos

- Definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis;
- Conhecer a teoria da medida de maneira generalizada;
- Descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

Conclusão

Primeiro Objetivo Específico

Definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis.

Formas de Alcançá-lo

- Definimos uma σ-álgebra de um conjunto;
- Apresentamos exemplos com grau crescente de abstração;
- Enunciamos e Provamos resultados sobre o tema.

Conclusão

Primeiro Objetivo Específico

Definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis.

Formas de Alcançá-lo

- Definimos uma σ-álgebra de um conjunto;
- Apresentamos exemplos com grau crescente de abstração;
- Enunciamos e Provamos resultados sobre o tema.

Conclusão

Primeiro Objetivo Específico

Definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis.

Formas de Alcançá-lo

- Definimos uma σ-álgebra de um conjunto;
- Apresentamos exemplos com grau crescente de abstração;
- Enunciamos e Provamos resultados sobre o tema.

UECE

Conclusão

Primeiro Objetivo Específico

Definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis.

Formas de Alcançá-lo

- Definimos uma σ-álgebra de um conjunto;
- Apresentamos exemplos com grau crescente de abstração;
- Enunciamos e Provamos resultados sobre o tema.

UECE

Conclusão

Segundo Objetivo Específico

Conhecer a teoria da medida de maneira generalizada.

Formas de Alcançá-lo

- Extensão da Reta Real;
- Generalizamos resultados apresentados anteriormente;
- Definição de Medida e exemplos;
- Divisão do Teorema em vários Resultados.

Conclusão

Segundo Objetivo Específico

Conhecer a teoria da medida de maneira generalizada.

Formas de Alcançá-lo

- Extensão da Reta Real;
- Generalizamos resultados apresentados anteriormente;
- Definição de Medida e exemplos;
- Divisão do Teorema em vários Resultados.

Conclusão

Segundo Objetivo Específico

Conhecer a teoria da medida de maneira generalizada.

Formas de Alcançá-lo

- Extensão da Reta Real;
- Generalizamos resultados apresentados anteriormente;
- Definição de Medida e exemplos;
- Divisão do Teorema em vários Resultados.

Conclusão

Segundo Objetivo Específico

Conhecer a teoria da medida de maneira generalizada.

Formas de Alcançá-lo

- Extensão da Reta Real;
- Generalizamos resultados apresentados anteriormente;
- Definição de Medida e exemplos;
- Divisão do Teorema em vários Resultados.

Conclusão

Último Objetivo Específico

Descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

Formas de Alcançá-lo

- Retomada da construção de Riemann;
- Explicitação de casos particulares até o caso geral;
- Exibição de Gráficos.

Conclusão

Último Objetivo Específico

Descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

Formas de Alcançá-lo

- Retomada da construção de Riemann;
- Explicitação de casos particulares até o caso geral;
- Exibição de Gráficos.

Conclusão

Último Objetivo Específico

Descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida.

Formas de Alcançá-lo

- Retomada da construção de Riemann;
- Explicitação de casos particulares até o caso geral;
- Exibição de Gráficos.

Referências

BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure.**. 1. ed. New York: Wiley-Interscience, 1995.

BOYER, C. B. **História da Matemática.**: 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

FERNANDEZ, P. J. **Medida e Integração**, 2a Edição. [S.I.]: IMPA, 2002.

LIMA, E. L. **Um Curso de Análise.**: 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. v. 1.

MAGALHAES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias.**: 3. ed. São Paulo: EdUsp, 2011.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas S. A, 2002.

1 Contextualização do Tema

2 Percurso do Trabalho
- O conceito de σ-álgebra
- Funções Mensuráveis
- A teoria da Medida
- Teoria da Integração

3 Sumário
- Organização do Sumário

4 Conclusão

5 Agradecimentos

OBRIGADO!