UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO

UM ESTUDO INTRODUTÓRIO DA TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO DE LEBESGUE

FORTALEZA – CEARÁ
2023

CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO

UM ESTUDO INTRODUTÓRIO DA TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO DE LEBESGUE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro

FORTALEZA – CEARÁ

2023

CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO

UM ESTUDO INTRODUTÓRIO DA TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO DE LEBESGUE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em: 11/12/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Flávio Alexandre Falcão Nascimento
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Aos meus amados pais que foram a base sólida que me sustentou e as asas que me impulsionaram. Com amor e gratidão, dedico este trabalho a vocês, cujo apoio incondicional e compreensão transcendem qualquer barreira acadêmica.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as bênçãos que me concedeu nesta vida.

Aos meus professores de ensino médio Ellen Lima e Renato Castro pelo incentivo aos estudos.

Aos professores Leo Ivo da Silva Souza e Jose Eduardo Moura Garcez pelos conselhos e motivações acadêmicas.

Ao Prof. Dr. Nícolas Alcântara de Andrade por me apresentar esta maravilhosa teoria no curso de probabilidade e pelas sugestões neste trabalho.

Ao Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro pela exímia orientação deste trabalho.

A Banca Examinadora pelas dicas e sugestões do aprimoramento deste trabalho.

Ao Programa de Monitoria Acadêmica (PROMAC), que me possibilitou ser monitor da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e III dando a oportunidade de aprofundar meus conhecimentos matemático e docênte.

Aos colegas da Universidade Estadual do Ceará (UECE) pelo companheirismo e ajuda nesta etapa da minha vida.

“Demore o tempo que for para decidir o que você quer da vida, e depois que decidir não recue ante nenhum pretexto, porque o mundo tentará te dissuadir.”

(Friedrich Nietzsche)

RESUMO

A teoria da medida e da integração é um tema importante para o avanço nos estudos de matemática. Esta foi desenvolvida, inicialmente, por Bernhard Riemann (1826-1866), Georg Cantor (1845-1918) e Emile Borel (1871-1956) sendo generalizada posteriormente por Henri Lebesgue (1875-1941). A priori, seu desenvolvimento tinha o intuito de generalizar a integral de Riemann corrigindo o defeito de só valer para casos excepcionais com poucos pontos de descontinuidade. Nos dias atuais, possui aplicações nas mais diversas áreas tais como: Análise Funcional, Probabilidade, Estatística, Equações Diferenciais Parciais, dentre outras. Embora a teoria da integração de Lebesgue seja extremamente importante na atualidade não é comumente apresentada para alunos de graduação em ciências exatas. Dito isso, este trabalho visa abordar a teoria da medida e da integração de Lebesgue de maneira introdutória para alunos de graduação em ciências da natureza buscando expôr alguns dos resultados mais relevantes e elementares. Isso é feito utilizando uma metodologia de natureza básica com abordagem quantitativa através de uma revisão bibliográfica. Por meio dela, também conseguimos alcançar os seguintes objetivos específicos: definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis, conhecer a teoria da medida de maneira generalizada e descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida. Por fim, é sugerido uma proposta de exposição do tema abordado neste trabalho para alunos de graduação em ciências exatas.

Palavras-chave: teoria da medida; teoria da integração de Lebesgue; ensino de cálculo.

ABSTRACT

The theory of measure and integration is a crucial topic for advancing studies in mathematics. Initially developed by Bernhard Riemann (1826-1866), Georg Cantor (1845-1918), and Emile Borel (1871-1956), it was later generalized by Henri Lebesgue (1875-1941). Originally, its development aimed to generalize Riemann's integral, addressing the limitation of only being applicable to exceptional cases with few points of discontinuity. Nowadays, it finds applications in diverse areas such as Functional Analysis, Probability, Statistics, Partial Differential Equations, among others. Despite its contemporary significance, Lebesgue integration theory is not commonly introduced to undergraduate students in exact sciences. This work seeks to provide an introductory overview of the theory of measure and Lebesgue integration for undergraduate students in natural sciences, highlighting some of the most relevant and fundamental results. This is achieved using a basic methodology with a quantitative approach through a literature review. Through this review, we also attain the following specific objectives: define the foundational aspects of measure theory through measurable spaces, comprehend the generalized theory of measure, and elucidate the construction process of Lebesgue's integral through the progression of measure theory. Finally, a proposal is suggested for presenting the topic covered in this work to undergraduate students in exact sciences.

Keywords: measure theory; Lebesgue integration theory; calculus teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 ESPAÇOS E FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Nesta seção, apresentaremos os conceitos que fundamentam a teoria da medida. Trataremos, especificadamente, de σ-álgebra, espaços mensuráveis e funções mensuráveis. Embora estejamos assumindo que o leitor já esteja familiarizado com a teoria de conjuntos, faremos algumas observações sobre notação de alguns conjuntos com o objetivo de cessar o maior número de dúvidas. Iniciaremos definindo σ-álgebra para que possamos construir espaços mensuráveis. Em seguida, abordaremos as funções mensuráveis. Todas as definições e resultados aqui explorados, bem como nas demais seções, tiveram como principal fonte o livro *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*[1] do autor Robert G. Bartle.

1.1 O Conceito de σ-álgebra

Para que possamos estabelecer uma "medida" precisamos de um ambiente que permita ser "medido". Criamos um ambiente como este adicionando uma estrutura algébrica específica em um conjunto. Tal estrutura recebe o nome de σ-álgebra e é definida em (BARTLE, 1995) da seguinte forma:

Definição 1.1.1 Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\mathscr{C}$ de subconjuntos de X é dita uma σ-álgebra se as seguintes condições são atendidas:

(i) $\varnothing$ e X são elementos de $\mathscr{C}$;

(ii) Se um elemento $A \in \mathscr{C}$, então $A^c \in \mathscr{C}$ [2];

(iii) Se (A_j) é uma sequência [3] de elementos de $\mathscr{C}$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}$.

Com isso, um par ordenado $(X, \mathscr{C})$ constituído de um conjunto X e uma σ-álgebra sobre X é chamado, pelo mesmo autor, de espaço mensurável. Além disso, cada elemento deste espaço é chamado de conjunto $\mathscr{C}-$mensurável. Quando não houver confusão ou quando a σ-álgebra estiver fixada, dizemos simplesmente que cada elemento é um conjunto mensurável. Observe que a terceira condição da Definição 1.1.1 nos diz que a união enumerável [4] é um elemento da σ-álgebra. Logo, para um número finito $A_1, A_2, ..., A_n$ com $n \in \mathbb{N}$ de elementos $\mathscr{C}$-mensuráveis de uma σ-álgebra $\mathscr{C}$, a união $\bigcup_{j \in I_n} A_j$ também será um elemento $\mathscr{C}$-mensurável.

[1] Em português: Os Elementos da Integração e Medida de Lebesgue.

[2] Em todo o texto, X^c significa o complementar do conjunto X.

[3] "[...] uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ de elementos de um conjunto X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$, onde o valor $x(n)$ é indicado pelo símbolo x_n e chama-se o n-ésimo termo da sequência" (LIMA, 2019, p.25).

[4] Para esse tipo de conjunto, utilizaremos a definição "Um conjunto X diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$." (LIMA, 2019, p.48)

Observação 1.1.2 Em todo o texto, indicaremos por I_n o conjunto dos n primeiros números naturais, isto é, $I_n = \{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n\}$.

Exemplo 1.1.3 Seja $X = \{-1, 0, 1\}$. Se considerarmos $\mathscr{C} = \{\varnothing, X, \{0\}, \{-1, 1\}\}$, temos que $(X, \mathscr{C})$ é um espaço mensurável.

Exemplo 1.1.4 Seja X um conjunto qualquer. O conjunto $\mathscr{C}_1 = \{\varnothing, X\}$ é uma σ-álgebra de X. De fato, podemos observar que, nesse exemplo, todas as condições impostas na Definição 1.1.1 são atendidas de maneira trivial, pois $\varnothing$ e X são todos os elementos de $\mathscr{C}_1$. Assim, $(X, \mathscr{C}_1)$ é um espaço mensurável.

Perceba que a Definição 1.1.1 não nos diz que uma σ-álgebra de um conjunto é única. Realmente, não é. Assim, um conjunto pode gerar espaços mensuráveis diferentes a depender da σ-álgebra adotada. Para evidenciar essa percepção, observe o exemplo a seguir:

Exemplo 1.1.5 Seja X conforme o exemplo anterior. Considere, agora, o conjunto $\mathscr{C}_2 = \{A;\ A \subset X\}$, ou seja, o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto X [5]. Sabemos que $\varnothing \subset X$ e $X \subset X$. Assim, $\varnothing, X \in \mathscr{C}_2$. Se tomarmos um conjunto $A \subset \mathscr{C}_2$, então $A^c = X - A$ por definição. Ou seja, A^c é formado por elementos que estão todos em X caracterizando-o um elemento de $\mathscr{C}_2$. Da mesma forma, se tomarmos uma sequência (A_j) de elementos de $\mathscr{C}_2$, a reunião $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ é composta por elementos de X. Logo, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}_2$. Com isso, $\mathscr{C}_2$ também é uma σ-álgebra de X e o par $(X, \mathscr{C}_2)$ é um espaço mensurável que, por sua vez, é diferente do espaço $(X, \mathscr{C}_1)$.

Os exemplos apresentados acima são todos de conjuntos que são uma σ-álgebra de um conjunto X arbitrário. Por definição, o conjunto $\mathscr{C}$ é composto de subconjuntos do conjunto X. Será que se construirmos $\mathscr{C}_3$ um conjunto que contenha $\varnothing$ e X e outros subconjuntos do conjunto X tomados aleatoriamente teremos $(X, \mathscr{C}_3)$ um espaço mensurável? A resposta é negativa e para convencê-lo disso, mostraremos o seguinte contra-exemplo.

Contraexemplo 1.1.6 Seja $X = \{x, y, z\}$. O conjunto $\mathscr{C} = \{\varnothing, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ não é uma σ-álgebra de X. Sem dúvida, $\varnothing, X \in \mathscr{C}$. Entretanto, perceba que $\{x\} \in \mathscr{C}$, mas $\{x\}^c \notin \mathscr{C}$. De fato, $\{x\}^c = \{x, y, z\} - \{x\} = \{y, z\}$. Mas $\{y, z\} \notin \mathscr{C}$. Assim, a segunda condição da Definição 1.1.1 não é satisfeita, impossibilitando que $\mathscr{C}$ seja uma σ-álgebra de X.

Perceba que as σ-álgebras $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ apresentadas no Exemplo 1.1.4 e Exemplo 1.1.5, respectivamente, exibem a "menor" e a "maior" [6] σ-álgebra de um conjunto. De fato, sendo $\mathscr{F}$

[5] O conjunto $\mathscr{C}_2$ também é chamado de conjunto das partes de X e, as vezes, é representado por $\mathscr{P}(X)$.

[6] A noção de "menor" e "maior" é trazida por meio da ordem parcial gerada pela relação de inclusão entre conjuntos.

uma σ-álgebra do conjunto X, $\mathscr{F}$ é composta por subconjuntos de X. Assim, $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}_2$. Além disso, pela Definição 1.1.1, $\varnothing, X \in \mathscr{F}$, ou seja $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{F}$. Portanto, $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{C}_2$ para toda σ-álgebra $\mathscr{F}$ de X. Com isso, a proposição adiante nos mostra como podemos exibir a menor σ-álgebra de um conjunto X com um subconjunto não vazio fixado.

Proposição 1.1.7 Seja X e A dois conjuntos quaisquer com $A \neq \varnothing$. Se $A \subset X$, então o conjunto $\mathscr{C} = \{\varnothing, X, A, A^c\}$ é uma σ-álgebra de X.

Demonstração.

Perceba que as condições *(i)* e *(ii)* da Definição 1.1.1 são satisfeitas pela forma que o conjunto $\mathscr{C}$ foi construído. Para verificar a última condição, basta perceber $A \cup A^c = X$. Portanto, $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra de X para qualquer que seja $\varnothing \neq A \subset X$.

□

Perceba que a Proposição 1.1.7 generaliza o Exemplo 1.1.3. Além disso, possibilita uma criação de uma σ-álgebra em um conjunto qualquer não vazio. Por exemplo, considere $X = \mathbb{N}$. Tome $P = \{2k;\ k \in \mathbb{N}\}$ e $I = \{2k-1;\ k \in \mathbb{N}\}$. Como $P^c = I$, então $\mathscr{C} = \{\varnothing, \mathbb{N}, P, I\}$ é uma σ-álgebra de $\mathbb{N}$ pela proposição anterior. Note que a Definição 1.1.1 trata apenas da reunião enumerável de elementos da σ-álgebra. Nosso interesse, agora, é investigar se conseguirmos propriedades análogas para a operação de interseção. Iniciaremos verificando o comportamento de interseção de elementos de uma σ-álgebra com a seguinte proposição:

Proposição 1.1.8 Seja $(X, \mathscr{C})$ um espaço mensurável. Se (A_j) é uma sequência de conjuntos $\mathscr{C}$-mensuráveis, então $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ é um elemento $\mathscr{C}$-mensurável.

Demonstração.

Se $A_j \in \mathscr{C}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então cada complementar $A_j^c \in \mathscr{C}$, pois $\mathscr{C}$ é σ-álgebra. Assim, (A_j^c) forma uma sequência de conjuntos $\mathscr{C}$-mensuráveis acarretando que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \in \mathscr{C}$. Segue, pelas *Leis de De Morgan* [7], que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c$$

Logo, $\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c \in \mathscr{C}$ implica $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}$, pois $(X^c)^c = X$, para qualquer conjunto X. Portanto, $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ é um elemento $\mathscr{C}$-mensurável.

□

[7] O enunciado e as demonstrações dessas leis podem ser encontrados em (LIMA, 2019, p.26)

Proposição 1.1.9 Dada uma coleção de conjuntos $\mathscr{T}$ de subconjuntos de X, a interseção de todas as σ-álgebras que contêm $\mathscr{T}$ é uma σ-álgebra.

Demonstração.

Seja Σ a interseção de todas as σ-álgebras $\mathscr{C}$ que contêm $\mathscr{T}$, isto é, $\Sigma = \bigcap_{\mathscr{T}\in\mathscr{C}} \mathscr{C}$. Pela Definição 1.1.1, $\varnothing, X \in \mathscr{C}$ para qualquer $\mathscr{C}$ σ-álgebra. Logo, $\varnothing, X \in \Sigma$. Tome um elemento $A \in \Sigma$. Assim, $A \in \mathscr{C}$ para toda $\mathscr{C}$ que contêm $\mathscr{T}$. Ou seja, $A^c \in \mathscr{C}$ para toda σ-álgebra $\mathscr{C}$. Logo, $A^c \in \Sigma$. Analogamente, tomando uma sequência de elementos $(A_j) \in \Sigma$, vemos que $A_j \in \mathscr{C}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathscr{C}$, $\forall \mathscr{C}$ acarretando que $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \Sigma$. Portanto, Σ é uma σ-álgebra.

□

Definição 1.1.10 Dada uma coleção de conjuntos $\mathscr{T}$ de subconjuntos de X e $\mathscr{C}$ uma σ-álgebra que contêm $\mathscr{T}$, dizemos que $\Sigma = \bigcap_{\mathscr{T}\in\mathscr{C}} \mathscr{C}$ é a σ-álgebra gerada por $\mathscr{T}$ [8].

Considere a σ-álgebra apresentada na Proposição 1.1.7. Qualquer outra σ-álgebra $\mathscr{F}$ que tiver A como elemento, conterá $\mathscr{C}$. Logo, $\mathscr{C}$ é a álgebra gerada por A. Sabendo que a menor σ-álgebra é gerada por meio de intersecções é natural questionarmos se a interseção entre σ-álgebras ainda é uma σ-álgebra de X. Responderemos à esta pergunta com a proposição adiante.

Proposição 1.1.11 Sejam X um conjunto não vazio e $\mathscr{F}$ uma família arbitrária de conjuntos. Se $\mathscr{C}_A$ é uma σ-álgebra para todo $A \in \mathscr{F}$, então $\mathscr{C} = \bigcap_{A\in\mathscr{F}} \mathscr{C}_A$ é uma σ-álgebra de X.

Demonstração.

Como $\mathscr{C}_A$ é uma σ-álgebra para todo $A \in \mathscr{F}$, então $\varnothing, X \in \mathscr{C}$. Tome um $E \in \mathscr{C}$. Assim, $E \in \mathscr{C}_A$ $\forall A \in \mathscr{F}$. Logo, $E^c \in \mathscr{C}_A$ $\forall A \in \mathscr{F}$ pela Definição 1.1.1. Com isso, $E^c \in \mathscr{C}$. Por fim, tome uma sequência de elementos (E_j) com $E_j \in \mathscr{C}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Desta forma, $E_j \in \mathscr{C}_A$ para todo $A \in \mathscr{F}$ e $j \in \mathbb{N}$. Daí, pela definição de σ-álgebra, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j \in \mathscr{C}_A$ $\forall A \in \mathscr{F}$. Disso, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j \in \mathscr{C}$. Portanto, $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra.

□

Note que há uma diferença gritante entre a Proposição 1.1.8 e Proposição 1.1.11. A primeira trata de conjuntos mensuráveis de uma σ-álgebra e a outra refere-se à σ-álgebras de um conjunto X. Além disso, perceba que até aqui trabalhamos o conceito de σ-álgebra de maneira abstrata sendo utilizada em um conjunto qualquer. Trataremos, agora, de uma σ-álgebra extremamente importante e específica para o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

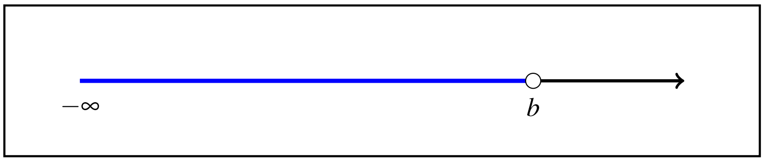
[8] Também pode ser referenciada como a menor σ-álgebra de $\mathscr{T}$.

Definição 1.1.12 Seja $X = \mathbb{R}$. Definimos como a σ-álgebra de Borel, e representaremos por $\mathscr{B}$, a σ-álgebra gerada por todos os intervalos abertos $(-\infty, x)$ com $x \in \mathbb{R}$.

Os elementos da σ-álgebra de Borel recebem o nome de Borelianos. Esta σ-álgebra é extremamente relevante para os estudos de medida e integração e pode ser definida de várias formas diferentes, mas todas são equivalentes. Isso quer dizer que $(-\infty, x)$ não é a única forma dos elementos de $\mathscr{B}$. De fato, se $(-\infty, x) \in \mathscr{B}$, então $(-\infty, x)^c \in \mathscr{B}$ só que $(-\infty, x)^c = [x, +\infty)$. Assim, poderíamos definir $\mathscr{B}$ por meio de intervalos do tipo $[x, +\infty)$. Em particular, poderíamos ter definido a $\mathscr{B}$ por meio da σ-álgebra gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.

Antes de provarmos este fato, observe que podemos decompor intervalos reais como a união de outros intervalos reais. Por exemplo, utilizando a reta real, podemos representar intervalo $(-\infty, b)$ da seguinte maneira

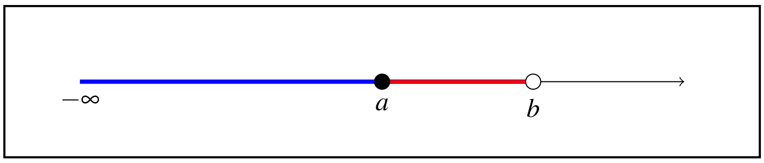
Figura 1 – Intervalo $(-\infty, b)$



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Se tomarmos um $a \in \mathbb{R}$ fixo, com $a < b$, então a decomposição do intervalo $(-\infty, b)$ pode ser expressa por meio da união dos intervalos $(-\infty, a]$ e (a, b), onde estão representados na figura a seguir pelas cores azul e vermelha, respectivamente.

Figura 2 – Representação de uma decomposição do intervalo $(-\infty, b)$ na reta real



Fonte**:** Elaborado pelo autor

A decomposição de intervalos reais pela união de outros é relevante para mostrar a seguinte equivalência sobre a σ-álgebra de Borel.

Teorema 1.1.13 Uma σ-álgebra é de Borel se, e somente se, é gerada por intervalos do tipo (a,b) com $a,b \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

Suponha que $\mathscr{B}$ seja a σ-álgebra de Borel. Sejam a e b números reais, com $a < b$. Como $a + \dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que o intervalo $\left(-\infty, a + \dfrac{1}{n}\right) \in \mathscr{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue, pela Proposição 1.1.8, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a + \dfrac{1}{n}\right) \in \mathscr{B}$. Com isso, afirmamos que a interseção de todos os intervalos $\left(-\infty, a + \dfrac{1}{n}\right)$ é igual ao intervalo $(-\infty, a]$. De fato,

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\infty, a + \frac{1}{n}\right) &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, a + \frac{1}{n}\right), \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow x < a + \frac{1}{n}, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} x \leq \lim_{n \to +\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right) \\
&\Leftrightarrow x \leq a \\
&\Leftrightarrow x \in (-\infty, a].
\end{aligned}
$$

Logo, $(-\infty, a] \in \mathscr{B}$ acarretando que $(a, +\infty) = (-\infty, a]^c \in \mathscr{B}$. Observe que podemos decompor $(-\infty, b) = (-\infty, a] \cup (a, b)$ enquanto que $(a, +\infty) = (a, b) \cup [b, +\infty)$. Desta forma, vemos que $(-\infty, b) \cap (a, +\infty) = (a, b)$. Como $(-\infty, b)$ e $(a, +\infty)$ são elementos de $\mathscr{B}$, segue pela Proposição 1.1.8 que $(a, b) \in \mathscr{B}$. Com isso, $\mathscr{B}$ pode ser gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.

Suponha, reciprocamente, que $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$ gerada por (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$. Como $(a, b) \in \mathscr{C}$, então $(a, b)^c \in \mathscr{C}$, por definição de σ-álgebra. Logo, $(-\infty, a]) \cup [b, +\infty) \in \mathscr{C}$. Além disso, os conjuntos $A_n = (-n, a)$ são todos elementos de $\mathscr{C}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Segue, pela Definição 1.1.1, que $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, a) \in \mathscr{C}$. Só que $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, a) = (-\infty, a)$. Disso, $(-\infty, a) \cap \{(\infty, a]) \cup [b, +\infty)\} \in \mathscr{C}$. Portanto, $(-\infty, a) \in \mathscr{C}$ como queríamos.

$\square$

1.2 Funções Mensuráveis

Agora que já estamos familiarizados com os conceitos de σ-álgebra e espaços mensuráveis, vamos aplicar, sobre este espaço uma função e estudar seu comportamento. Iniciaremos tratando de funções reais e estenderemos o conceito conforme haja necessidade. A partir de agora fixemos que, quando não houver menção contrária, X será um conjunto qualquer diferente de $\varnothing$ e $\mathscr{C}$ será uma σ-álgebra desse conjunto.

Definição 1.2.1 Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita $\mathscr{C}$-mensurável se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$.

Exemplo 1.2.2 Seja $K \in \mathbb{R}$ um número fixado. A função constante $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = K$, para todo $x \in X$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

Para mostrarmos este fato, precisamos analisar os casos de α. Assim

(I) Se $\alpha \geq K$, então o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \varnothing$ uma vez que não existe $x \in X$ tal que $f(x) = K > \alpha$.

(II) Se $\alpha < K$, então para todo $x \in X$, $f(x) > \alpha$. Logo, o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = X$.

Em todo caso, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$. Portanto, a função constante f é $\mathscr{C}$-mensurável.

Exemplo 1.2.3 Seja $(X, \mathscr{C})$ uma espaço mensurável e $A \in \mathscr{C}$. A função característica [9] de A $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

é $\mathscr{C}$-mensurável.

Para verificar se X_A é $\mathscr{C}$-mensurável precisamos, novamente, analisar os casos de $\alpha \in \mathbb{R}$.

(I) Se $\alpha \geq 1$, observamos que $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = \varnothing$, pois não há $x \in X$ tal que $\chi_A(x) > 1$.

(II) Se $0 \leq \alpha < 1$, então o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = A$, pois apenas valores $x \in A$ tem suas imagens $\chi_A(x) = 1$ e consequentemente $\chi_A(x) \geq \alpha$.

(III) se $\alpha < 0$, podemos notar que o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = X$, pois para qualquer que seja $x \in X$, os valores $\chi_A(x) \geq 0$.

Em todo o caso, vemos que o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\}$ é um elemento de $\mathscr{C}$, pois $\varnothing, X$ e A são elementos de $\mathscr{C}$. Portanto, a função característica $\chi_A(x)$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

Proposição 1.2.4 Dado um conjunto X, sejam $A, B \subset X$. Então $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$. Em particular, se $A \cap B = \varnothing$, então $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ [10].

Demonstração.

Perceba que $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ e que $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$. Logo,

$$\chi_{A \cup B} = 1 - \chi_{(A \cup B)^c} = 1 - \chi_{A^c \cap B^c} = 1 - \chi_{A^c}\chi_{B^c} = 1 - (1 - \chi_A)(1 - \chi_B) \tag{1}$$

[9] As vezes também é chamada função indicadora.

[10] Esta proposição é um exercício que pode ser encontrado em (LIMA, 2019, p.57).

Daí, por meio da propriedade distributiva,

$$1-(1-\chi_A)(1-\chi_B) = 1-(1-\chi_A-\chi_B-\chi_A\chi_B) = \chi_A+\chi_B+\chi_A\chi_B = \chi_A+\chi_B+\chi_{A\cap B} \quad (2)$$

Combinando as equações (1) e (2) concluímos que $\chi_{A\cup B} = \chi_A+\chi_B+\chi_{A\cap B}$

$\square$

Exemplo 1.2.5 Considere o espaço mensurável $(\mathbb{R},\mathscr{B})$. Toda função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua [11] é Borel mensurável.

Para mostrar a validade do exemplo acima, precisamos de resultados auxiliares que serão enunciados a seguir sem demonstração para que o texto não descentralize do tema.

Proposição 1.2.6 Suponha que $f:X\to\mathbb{R}$ seja contínua em todos os pontos de X. Se $X\subset\mathbb{R}$ é um aberto [12], então o conjunto $A=\{a\in X;\ f(a)>k\}$ é um aberto (LIMA, 2019, p.226).

Teorema 1.2.7 Todo subconjunto aberto $A\subset R$ se exprime, de modo único, como um reunião enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos (LIMA, 2019, p.167).

Segue disso que $\{x\in\mathbb{R}; f(x)>\alpha\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ onde cada A_j é um intervalo aberto, ou seja, $A_j\in\mathscr{B}$ para todo $j\in\mathbb{N}$. Com isso, pela Definição 1.1.1, o conjunto $\{x\in\mathbb{R}; f(x)>\alpha\}\in\mathscr{B}$. Portanto, qualquer função contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é Borel mensurável. Lembre que ao apresentarmos a σ-álgebra de Borel (Definição 1.1.12), mostramos no Teorema 1.1.13 que há mais de uma maneira de definir os borelianos. Para uma função $f:X\to\mathbb{R}$ $\mathscr{C}$-mensurável, também podemos definir uma função $\mathscr{C}$-mensurável por meio de conjuntos diferentes conforme exposto no seguinte teorema:

Teorema 1.2.8 Sendo $(X,\mathscr{C})$ um espaço mensurável, para uma função $f:X\to\mathbb{R}$ $\mathscr{C}$-mensurável qualquer as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\forall\,\alpha\in\mathbb{R},\ A_\alpha=\{x\in X;\ f(x)>\alpha\}\in\mathscr{C}$;

(b) $\forall\,\alpha\in\mathbb{R},\ B_\alpha=\{x\in X;\ f(x)\leq\alpha\}\in\mathscr{C}$;

(c) $\forall\,\alpha\in\mathbb{R},\ C_\alpha=\{x\in X;\ f(x)\geq\alpha\}\in\mathscr{C}$;

(d) $\forall\,\alpha\in\mathbb{R},\ D_\alpha=\{x\in X;\ f(x)<\alpha\}\in\mathscr{C}$.

Demonstração.

Dividiremos esta demonstração em três partes. A estratégia será mostrar que a afirmação (a) é equivalente à afirmação (b); depois que a afirmação (c) é equivalente à afirmação (d) ; e por fim que a firmação (a) ocorre se, e somente se, a afirmação (c) ocorre.

[11] Lembre que "Uma função $f:X\to\mathbb{R}$ diz-se contínua no ponto $a\in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficientemente próximo de a" (LIMA, 2019, p.222). Quando a função é contínua em todo ponto, dizemos apenas que ela é contínua.

[12] "Um subconjunto $A\subset\mathbb{R}$ chama-se um *conjunto aberto* quando todos os seus pontos são interiores [...] (LIMA, 2019, p.164)."

(I) Suponha a validade da afirmação (a). Disso, $A_\alpha \in \mathscr{C} \Leftrightarrow A_\alpha^c \in \mathscr{C}$, pela definição de σ-álgebra. Perceba que

$$x \in A_\alpha^c \Leftrightarrow x \notin A_\alpha \Leftrightarrow x \in X \text{ e } f(x) \leq \alpha \Leftrightarrow x \in B_\alpha$$

Assim, um elemento está em A_α^c se, e somente se, está em B_α. Segue que $A_\alpha^c = B_\alpha$ e daí, A_α é um elemento de $\mathscr{C} \Leftrightarrow B_\alpha$ é elemento de $\mathscr{C}$.

(II) Para mostrar a equivalência entre as afirmações (c) e (d) utilizamos um argumento totalmente análogo à parte (I), pois se $x \notin C_\alpha$, então $f(x) < \alpha$ acarretando que $x \in D_\alpha$ e vice-versa.

(III) Suponha que $A_\alpha \in \mathscr{C}$. Tome a sequência $\left(A_{\alpha - \frac{1}{n}}\right)$. Claramente, cada $A_{\alpha-\frac{1}{n}}$ é um elemento de $\mathscr{C}$ por definição. Logo, pela Proposição 1.1.8, a interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}} \in \mathscr{C}$. Além disso, note que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x \in A_{\alpha-\frac{1}{n}}, \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(x) > \alpha - \frac{1}{n},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Como cada $f(x) \in \mathbb{R}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow f(x) \geq \alpha \Leftrightarrow x \in C_\alpha \tag{4}$$

Segue das equivalências (1) e (2) que $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}}$. Portanto $C_\alpha \in \mathscr{C}$ como queríamos.

Reciprocamente, suponha que $C_\alpha \in \mathscr{C}$. Tomemos a sequência $\left(C_{\alpha+\frac{1}{n}}\right)$. Cada elemento $C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathscr{C}$ por definição. Assim, pela definição de σ-álgebra , $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathscr{C}$. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} &\Leftrightarrow x \in C_{\alpha+\frac{1}{n_0}}, \text{ para algum } n_0 \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n_0} \\ &\Leftrightarrow f(x) > \alpha \\ &\Leftrightarrow x \in A_\alpha \end{aligned}$$

Assim, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} = A_\alpha$. Logo, $A_\alpha \in \mathscr{C}$. Portanto, concluímos de $(I), (II)$ e (III) que as afirmações $(a), (b), (c)$ e (d) são todas equivalentes.

$\square$

Perceba que mesmo na presença do Teorema 1.2.8, mostrar que uma função é mensurável é trabalhoso e repetitivo uma vez que, geralmente, é preciso verificar os casos de α.

Com o intuito de otimizar a identificação de uma função mensurável, veremos o comportamento de operações aritméticas entre funções mensuráveis.

Proposição 1.2.9 Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real $\mathscr{C}$-mensurável e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções cf, f^2 e $|f|$ são $\mathscr{C}$-mensuráveis.

Demonstração.

(a) Mostraremos que cf é $\mathscr{C}$-mensurável para todos os casos possíveis do número real $c \in \mathbb{R}$.

(i) Se $c = 0$, então $c \cdot f(x) = 0$, $\forall\, x \in X$, ou seja, cf se torna a função constante. Segue pelo Exemplo 1.2.2 que cf é $\mathscr{C}$-mensurável.

(ii) Se $c > 0$, então dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $cf(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \dfrac{\alpha}{c}$. Logo,

$$\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\}$$

Isso ocorre para todo α e f é $\mathscr{C}$-mensurável, isto é, $\left\{x \in X; f(x) > \dfrac{\alpha}{c}\right\} \in \mathscr{C}$. Logo, cf é $\mathscr{C}$-mensurável.

(iii) Por fim, se $c < 0$, então existe um $0 < z \in \mathbb{R}$ tal que $c = -z$. Assim,

$$cf(x) > \alpha \Leftrightarrow -zf(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x) < -\frac{\alpha}{z}$$

Assim, o conjunto $\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) < -\dfrac{\alpha}{z}\right\}$. Desta forma, o conjunto $\left\{x \in X; f(x) < -\dfrac{\alpha}{z}\right\} \in \mathscr{C}$ pelo item (d) do Teorema 1.2.8. Portanto, cf é $\mathscr{C}$-mensurável em todos os casos de $c \in \mathbb{R}$.

(b) Para mostrar a mensurabilidade de f^2 é também necessário analisar os casos de α.

(i) Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} = X$, pois $[f(x)]^2 \geq 0$ para todo $x \in X$.

(ii) Se $\alpha \geq 0$, então para todo $x \in X$ $[f(x)]^2 > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \sqrt{\alpha}$ ou $f(x) < -\sqrt{\alpha}$. Assim, um elemento $x_0 \in \{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\}$ se, e somente se, $x_0 \in \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\}$ ou $x_0 \in \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$. Com isso,

$$\left\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\right\} = \left\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\right\} \cup \left\{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\right\}.$$

Como f é $\mathscr{C}$-mensurável por hipótese, temos que $\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{C}$ e $\{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{C}$. Desta forma, usando a definição de σ-álgebra , obtemos que $\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{C}$. Consequentemente, $\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} \in \mathscr{C}$ acarretando a mensurabilidade de f^2.

(c) Analogamente ao item anterior, se $\alpha < 0$, $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = X$. Por outro lado, se $\alpha \geq 0$, vemos que $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X; f(x) < -\alpha\}$. Assim, a mensurabilidade de f acarreta na mensurabilidade de $|f|$ como desejávamos.

□

Antes de provarmos a próxima proposição, vamos enunciar um teorema que nos auxiliará na próxima demonstração.

Lema 1.2.10 O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos [13] em $\mathbb{R}$ (LIMA, 2019, p.84).

A prova do Lema 1.2.10 será omitida para que o texto não prolongue-se mais do que o necessário.

Proposição 1.2.11 Sejam $f,g : X \to \mathbb{R}$. Se f e g são ambas $\mathscr{C}$-mensuráveis, então as funções $f+g$ e $f \cdot g$ são também $\mathscr{C}$-mensuráveis.

Demonstração.

Provaremos, primeiramente, que $f+g$ é $\mathscr{C}$-mensurável. Ora, por hipótese, f e g são $\mathscr{C}$-mensuráveis. Assim, dado $r \in \mathbb{Q}$, os conjuntos $\{x \in X; f(x) > r\}$ e $\{x \in X; g(x) > \alpha - r\}$ são ambos elementos de $\mathscr{C}$. Considere o conjunto

$$H_r = \{x \in X; f(x) > r\} \cap \{x \in X;\; g(x) > \alpha - r\}$$

Isto é, o conjunto dos elementos $x \in X$ tal que $f(x) > r$ e $g(x) > \alpha - r$ simultaneamente. Assim, afirmamos que $\{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\} = \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} H_r$. Com efeito, tomemos um elemento $a \in \{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\}$. Assim,

$$(f+g)(a) > \alpha \Rightarrow f(a)+g(a) > \alpha \Rightarrow f(a) > \alpha - g(a).$$

Agora, por densidade, tome um racional $r_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $f(a) > r_0 > \alpha - g(a)$, de forma que $f(a) > r_0$ e $g(a) > \alpha - r_0$. Logo, $a \in H_{r_0}$. Portanto, $a \in \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} H_r$.

Reciprocamente, sendo $a \in \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} H_r$ existe um elemento $r_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $a \in H_{r_0}$. Logo, $f(a) > r_0$ e $g(a) > \alpha - r_0$. Ao somarmos membro à membro temos

$$f(a)+g(a) > r_0 + \alpha - r_0 \Rightarrow (f+g)(a) > \alpha.$$

Com isso, $a \in \{x \in X; (f+g)(x) > \alpha\}$ como queríamos. Concluindo que a afirmação é verdadeira.

Além disso, para cada $r \in \mathbb{Q}$, o conjunto H_r é um elemento de $\mathscr{C}$, pois é a interseção de dois elementos de $\mathscr{C}$ (Proposição 1.1.8). Note também que, pela definição de $\mathscr{C}$, a coleção $\bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} H_r$ é um elemento de $\mathscr{C}$, pois $\mathbb{Q}$ é enumerável. Segue que $f+g$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

[13] "Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se denso em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto (a,b) contém algum ponto de X"(LIMA, 2019, p.83).

Para mostrar que fg é mensurável basta notar que é a combinação de outras funções $\mathscr{C}$-mensuráveis. De fato, dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}
4(fg)(x) &= 2(fg)(x) + 2(fg)(x) \\
&= [f(x)]^2 - [f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2 - [g(x)]^2 + 2f(x)g(x) \\
&= \left([f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2\right) - \left([g(x)]^2 - 2f(x)g(x) + [f(x)]^2\right) \\
&= (f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2 \\
&= [(f+g)(x)]^2 - [(f-g)(x)]^2.
\end{aligned}$$

Logo, $fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$. Sendo g mensurável, podemos usar a Proposição 1.2.9 pondo $c = -1$. Assim, temos $(-1)g = -g$ acarretando que $-g$ é mensurável. Além disso, pela parte *(a)* desta proposição, $f - g = f + (-g)$ é mensurável. Segue que fg é $\mathscr{C}$-mensurável [14].

□

Definição 1.2.12 Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que a **parte positiva** da função f é a função $f^+ : X \to \mathbb{R}$ definida por $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ [15]. Semelhantemente, chamamos de a **parte negativa** da função f, a função $f^- : X \to \mathbb{R}$ definida por $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

É possível que a definição de parte positiva e negativa de funções fique um pouco abstrata em um primeiro contato. Numa tentativa de esclarecer ao máximo, daremos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.2.13 Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, ou seja, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$.
Assim sua parte positiva e negativa são, respectivamente:

$$f^+(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \text{ e } f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0 \\ 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Com isso, a figura 3 apresenta o gráfico da função f do Exemplo 1.2.13 ao passo que as figuras 4 e 5 representam os gráficos das partes positiva e negativa de f, respectivamente.

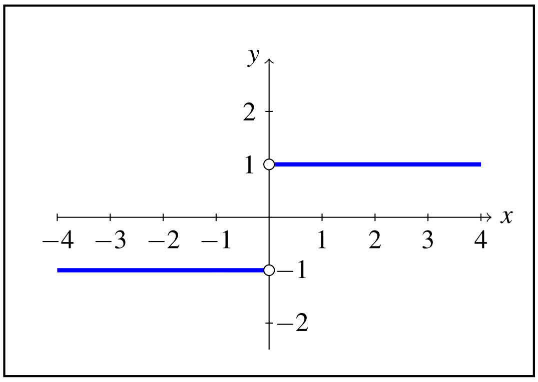
Para finalizarmos esta seção apresentaremos uma relação interessantes sobre uma função mensurável e suas partes positiva e negativa.

Lema 1.2.14 Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real. Então $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.

[14] A Proposição 1.2.9 e Proposição 1.2.11 encontram-se enunciadas na forma de um único lema em (BARTLE, 1995, p.9)

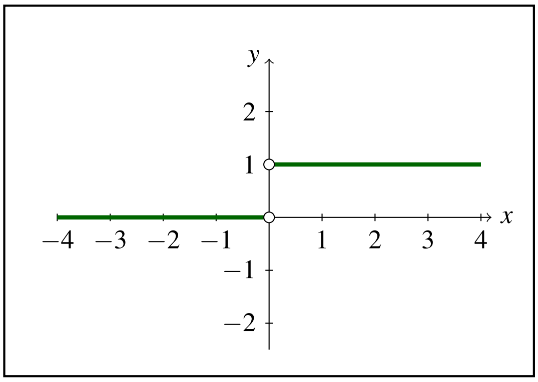
[15] A notação $\sup X$ indica o supremo do conjunto X. Segundo LIMA, "Sejam K um corpo ordenado e $X \subset K$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in K$ chama-se *supremo* do subconjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em K" (LIMA, 2019, p.75).

Figura 3 – Gráfico da Função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$



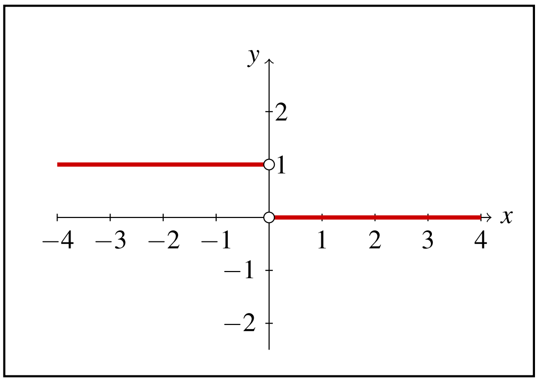
Fonte**:** Elaborado pelo autor

Figura 4 – Gráfico da parte positiva da função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Figura 5 – Gráfico da parte negativa da função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Demonstração.

Para provar que $f = f^+ - f^-$, devemos avaliar os casos de $f(x)$. Logo, se $f(x) \geq 0$, então $f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = f(x)$ e $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = 0$, pois $f(x) \geq 0$ implica $-f(x) \leq 0$. Disso, $f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x)$, ou seja, $(f^+ - f^-)(x) = f(x)$ tal que $f(x) \geq 0$. Caso $f(x) < 0$, então $-f(x) > 0$. Com isso, $\max\{f(x), 0\} = 0$ e $\max\{-f(x), 0\} =$

$-f(x)$. Desta forma vemos que $f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x)$. Em todo caso, $f = f^+ - f^-$. Analogamente, se $f(x) \geq 0$, então $\sup\{f(x), 0\} = f(x)$ e $\sup\{-f(x), 0\} = 0$. Assim, $f^+(x) + f^-(x) = f(x)$. Caso, $f(x) < 0$, então $-f(x) > 0$. Com isso, obtemos $\sup\{f(x), 0\} = 0$ e $\sup\{-f(x), 0\} = -f(x)$. Logo, $f^+(x) + f^-(x) = -f(x)$. Desta forma,

$$(f^+ + f^-)(x) = \max\{f(x), -f(x)\} = |f(x)|.$$

Portanto, $f^+ + f^- = |f|$.

$\square$

Observe que o Lema 1.2.14 nos dá a forma das funções f^+ e f^- de maneira implícita. De fato, somando as duas expressões membro a membro vemos que

$$f + |f| = (f^+ - f^-) + (f^+ + f^-) = 2f^+$$

Assim, podemos expressar $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$. De modo semelhante, conseguimos subtrair membro a membro e obter a expressão $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$. Isso demonstra o lema adiante:

Lema 1.2.15 Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função real, então $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$ e $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$.

Teorema 1.2.16 Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathscr{C}$-mensurável se, e somente se, suas partes negativa e positiva são ambas $\mathscr{C}$-mensuráveis.

Demonstração.

Suponha que f seja $\mathscr{C}$-mensurável. Pela Proposição 1.2.9 vemos que a função $|f|$ é $\mathscr{C}$-mensurável e pelo Lema 1.2.15 as funções $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ e $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ também são $\mathscr{C}$-mensuráveis. Reciprocamente, supondo que f^+ e f^- são mensuráveis, temos pelo Lema 1.2.14 que $f = f^+ - f^-$. Segue, novamente pela Proposição 1.2.11, que f é $\mathscr{C}$-mensurável.

$\square$

Nesta seção, vimos o conceito de σ-álgebra e, por meio dele, definimos a mensurabilidade de uma função bem como mostramos propriedades disso. Todos esses conceitos e definições serviram para as seções expostas adiante. Na seção seguinte, exploraremos o conceito central deste trabalho: a teoria da medida.´

2 A TEORIA DA MEDIDA

Nesta seção, apresentaremos o conceito chave deste trabalho: a teoria da medida. Para isso, precisaremos ampliar o conjunto dos números reais para que ele possa atender novas exigências. Isso é necessário porque, as vezes, teremos conjuntos tão "grandes" que nenhum número real poderá representar sua "medida". Assim, estenderemos o conjunto dos números reais na primeira seção. Na seguinte, estenderemos o conceito de função mensurável para o conjunto dos números reais estendidos e, na seção final, apresentaremos a definição de medida bem como exemplos dela.

2.1 Os Espaços de Funções Mensuráveis

Adiante apresentaremos conjuntos tão "grandes" que nenhum número real poderá expressar seu "tamanho". Assim, antes de prosseguirmos expandiremos o conjunto da reta real que temos trabalhado anteriormente.

Definição 2.1.1 O sistema estendido de números reais, denotado por $\overline{\mathbb{R}}$, consiste do corpo [1] dos números reais $\mathbb{R}$ e dos símbolos $+\infty$ e $-\infty$, isto é, $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Assim, nós preservamos a ordem original de $\mathbb{R}$ e definimos $-\infty < x < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Fica então claro que $+\infty$ é uma cota superior [2] de cada subconjunto do estendido sistema de números reais, e que todo subconjunto não vazio tem um supremo [3]. Se, por exemplo, E é um conjunto não vazio de números reais que não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$, então $\sup E = +\infty$ no sistema de números reais estendido [4].

Com isso, parece que nosso problema de "medir" conjuntos muito grandes se resolveu. Entretanto, alguns cuidados são necessários para operarmos em $\overline{\mathbb{R}}$. Note que $\overline{\mathbb{R}}$ não é um corpo, pois não é fechado para operação de adição uma vez que $(+\infty) + (-\infty)$ não é definido. Dito isso, para $x \in \mathbb{R}$, aplicaremos as seguintes convenções:

(a) Se $x > 0$, então $x \cdot (+\infty) = +\infty, x \cdot (-\infty) = -\infty$;

[1] "Um *corpo* é um conjunto K, munido de duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, que satisfazem a certas condições,chamadas os *axiomas de corpo*[...]" (LIMA, 2019, p.61). Os axiomas que ele se refere são as propriedades comutativa, associativa, elemento neutro e elemento simétrico para ambas operações juntamente com a propriedade distributiva.

[2] " Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se limitado superiormente quando existe $b \in K$ tal que $b \geq x$ para todo $x \in X$. Em outras palavras, tem-se $X \subset (-\infty, b]$. Cada $b \in K$ com esta propriedade chama-se uma cota superior de X " (LIMA, 2019, p.74).

[3] " Sejam K um corpo ordenado e $X \subset K$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in K$ chama-se supremo do subconjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em K " (LIMA, 2019, p.75).

[4] Exatamente as mesmas observações se aplicam aos limites inferiores. Essas definições podem ser encontradas em (RUDIN, 1976, p.12).

(b) Se $x < 0$, então $x \cdot (+\infty) = -\infty, x \cdot (-\infty) = +\infty$;

(c) Se $x = 0$, então $x \cdot (+\infty) = x \cdot (-\infty) = 0$;

(d) $(+\infty) + (+\infty) = x + \infty = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$;

(e) $(-\infty) + (-\infty) = x - \infty = (-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$.

Neste novo contexto de números reais a σ-álgebra de Borel não é mais válida uma vez que a Definição 1.1.12 não inclui $+\infty$ nem $-\infty$. Logo, precisaremos de uma σ-álgebra em $\overline{\mathbb{R}}$ para dar continuidade aos nossos estudos. Com isso, considere $\overline{\mathbb{R}}$. Tomando um conjunto arbitrário $E \in \mathscr{B}$, com $\varnothing \neq E$, defina $E_1 = E \cup \{-\infty\}, E_2 = E \cup \{+\infty\}$ e $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$. Com isso podemos fazer o seguinte enunciado:

Definição 2.1.2 A σ-álgebra $\overline{\mathscr{B}} = \bigcup_{E \in \mathscr{B}} \{E, E_1, E_2, E_3\}$ do conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ é chamada de σ-álgebra de Borel Estendida.

Uma vez que estamos familiarizados com os conceitos de funções de valores reais mensuráveis, estamos prontos para estender este conceito para o conjunto $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 2.1.3 Sendo $(X, \mathscr{C})$ um espaço mensurável, uma função de valores reais estendidos $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita $\mathscr{C}$-mensurável caso o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$ para qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Denotaremos a família de todas as funções de valores reais estendidos de X que são $\mathscr{C}$-mensuráveis por $M(X, \mathscr{C})$. Além disso, caso estivermos tratando apenas das funções não negativas usaremos $M^+(X, \mathscr{C})$.

Proposição 2.1.4 Se $f \in M(X, \mathscr{C})$, então $\{x \in X; f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\}$. Em particular, $\{x \in X; f(x) = +\infty\} \in \mathscr{C}$.

Demonstração.

Tome, de modo arbitrário, um elemento $a \in X$. Assim,

$$
\begin{aligned}
a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\} &\Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) > n\}, \ \forall \, n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \forall \, n \in \mathbb{N}, \ f(a) > n \\
&\Leftrightarrow f(a) = +\infty.
\end{aligned}
$$

Além disso, note que cada $\{x \in X; f(x) > n\} \in \mathscr{C}$. Segue, pela Proposição 1.1.8, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\} \in \mathscr{C}$ acarretando que $\{x \in X; f(x) = +\infty\} \in \mathscr{C}$.

$\square$

Proposição 2.1.5 Se $f \in M(X, \mathscr{C})$, então $\{x \in X; f(x) = -\infty\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\} \right)^c$. Particularmente, $\{x \in X; f(x) = -\infty\} \in \mathscr{C}$.

Demonstração.

Por hipótese, $f \in M(X,\mathscr{C})$. Assim, pela Proposição 1.2.9, $-f \in M(X,\mathscr{C})$. Logo, pela Proposição 2.1.4, temos que $\{x \in X; -f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; -f(x) > n\}$. Note que

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; -f(x) > n\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) < -n\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) \geq -n\}^c \\ &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) \geq -n\} \right)^c \end{aligned}$$

e que $\{x \in X; -f(x) = +\infty\} = \{x \in X; f(x) = -\infty\}$. Portanto,

$$\{x \in X; f(x) = -\infty\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) \geq -n\} \right)^c.$$

□

Teorema 2.1.6 Uma função de valores reais estendidos $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathscr{C}$-mensurável se, e somente se, os conjuntos $A = \{x \in X; f(x) = +\infty\}$ e $B = \{x \in X; f(x) = -\infty\}$ são elementos de $\mathscr{C}$ e a função $h : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \notin A \cup B \\ 0, & \text{se } x \in A \cup B \end{cases}$$

é $\mathscr{C}$-mensurável.

Demonstração.

Suponha que $f \in M(X,\mathscr{C})$. Logo, pela Proposição 2.1.4 e Proposição 2.1.5, os conjuntos A e B são elementos de $\mathscr{C}$. Assim, tome $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \geq 0$, então os elementos de $\{x \in X; h(x) > \alpha\}$ são os elementos de $\{x \in X; f(x) > \alpha\}$ que não estão em A, pois h tem contradomínio $\mathbb{R}$. Como $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra, $A \in \mathscr{C} \Rightarrow A^c \in \mathscr{C}$. Com isso,

$$\{x \in X; h(x) > \alpha\} = A^c \cap \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}.$$

Segue, pela Proposição 1.1.8 que $\{x \in X; h(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$, ou seja, h é $\mathscr{C}$-mensurável. Caso, $\alpha < 0$, então $\{x \in X; h(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B$, pois $h(x) = 0$ para $x \in A \cup B$. Desta forma h é $\mathscr{C}$-mensurável.

Por outro lado, se supormos que A e B são elementos de $\mathscr{C}$ e h é $\mathscr{C}$-mensurável, então $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; h(x) > \alpha\} \cup A$ quando $\alpha \geq 0$, e $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; h(x) >$

$\alpha\} \cap B^c$ quando $\alpha < 0$, por motivos análogos à primeira parte da demonstração. Portanto, f é uma função $\mathscr{C}$-mensurável como desejávamos.

$\square$

Como consequência do Proposição 1.2.9 e o Teorema 2.1.6 obtemos, imediatamente, que se $f \in M(X, \mathscr{C})$, então as funções $cf, f^2, |f|, f^+$ e f^- também são elementos de $M(X, \mathscr{C})$. Entretanto, um resultado análogo à Proposição 1.2.11 não é possível em $\overline{\mathbb{R}}$. Isso acontece porque em $\overline{\mathbb{R}}$ a operação de adição não é bem definida. Então caso $f(x) = +\infty$ e $g(x) = -\infty$ para algum $x \in \mathbb{R}$ a adição $f(x) + g(x)$ não é realizada. Por outro lado, a função fg é $\mathscr{C}$-mensurável se f e g forem ambas $\mathscr{C}$-mensuráveis. Antes disso, lembraremos de dois conceitos importantes nos estudos de análise: limite superior e inferior.

Seja (x_n) uma sequência limitada de números reais. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \leq x_n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotando $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ podemos perceber que $X_n \subset [\alpha, \beta]$ para cada n e que $X_1 \supset X_2 \ldots X_n \supset \ldots$ Definimos o limite superior e inferior pondo, respectivamente,

$$\lim_{n\to\infty} \sup X_n = \sup_{n\to\infty} \{\inf X_n\} \text{ e } \lim_{n\to\infty} \inf X_n = \inf_{n\to\infty} \{\sup X_n\}$$

Podemos relacionar esses conceitos com as funções mensuráveis conforme o teorema a seguir:

Teorema 2.1.7 Seja (f_n) uma sequência de elementos de $M(X, \mathscr{C})$ e defina as funções $f(x) = \inf_{n\to\infty} f_n(x)$, $F(x) = \sup_{n\to\infty} f_n(x)$, $f^*(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$ e $F^*(x) = \lim_{n\to\infty} \sup f_n(x)$. Então as funções f, f^*, F e F^* são elementos de $M(X, \mathscr{C})$.

Demonstração.

Como (f_n) é uma sequência de funções $\mathscr{C}$-mensuráveis e $f = \inf_{n\to\infty} f_n$, afirmamos que $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$. De fato, tomemos um elemento $y \in X$. Assim,

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} &\Leftrightarrow y \in \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f_n(y) \geq \alpha \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \inf_{n\to\infty} f_n(y) \geq \inf_{n\to\infty} \alpha \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f(y) \geq \alpha \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow y \in \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

Como cada $\{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$ é $\mathscr{C}$-mensurável, segue pela Proposição 1.1.8 que o conjunto $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Desta forma, f é $\mathscr{C}$-mensurável.

Além disso, por hipótese (f_n) é uma sequência de funções mensuráveis. Logo, pela Proposição 1.2.9, a sequência $(-f_n)$ também é composta de funções mensuráveis. Logo, da primeira parte dessa demonstração, a função $g = -\inf(-f_n)$ é mensurável. lembre que, por propriedades de supremo e ínfimo [5], $F = \sup f_n = -\inf(-f_n)$. Disso, F também é uma função $\mathscr{C}$-mensurável.

Note que a mensurabilidade de f^* e F^* vem da mensurabilidade de f e F uma vez que

$$f^*(x) = \sup_{n\geq 1}\left\{\inf_{m\geq n} f_m(x)\right\} \text{ e } F^*(x) = \inf_{n\geq 1}\left\{\sup_{m\geq n} f_m(x)\right\}$$

□

Corolário 2.1.8 Se (f_n) é uma sequência em $M(X,\mathscr{C})$ que converge [6] para f em X, então f também está em $M(X,\mathscr{C})$.

Demonstração.

Ora, por hipótese $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Só que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$. Segue que $f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$ que, por sua vez, é $\mathscr{C}$-mensurável pelo teorema anterior.

□

Para mostrar que o produto de duas funções mensuráveis em $\overline{\mathbb{R}}$ é mensurável, precisamos ainda de um tipo particular de função que é definida adiante:

Definição 2.1.9 Seja f uma função em $M(X,\mathscr{C})$ e $A > 0$. Definimos o truncamento f_A da função f por

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq A \\ A, & \text{se } f(x) > A \\ -A, & \text{se } f(x) < -A. \end{cases}$$

Proposição 2.1.10 Seja A um número real maior que zero. Se f é uma função em $M(X,\mathscr{C})$, então f_A é uma função $\mathscr{C}$-mensurável.

Demonstração.

Basta provar que para qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $\{x \in X; f_A(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$. Para isso, vamos analisar os casos de α.

---

5 Especificamente o exercício 35 encontrado em (LIMA, 2019, p.92).

6 A convergência que nos referimos é a convergência pontual.

(I) $\alpha = A$. Assim, $\{x \in X; f_A(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_A(x) > A\} = \varnothing$, pois a função f_A não assume valor maior que A.

(II) $-A \leq \alpha < A$. Esse caso gera dois novos casos à analisar:

a) $\alpha < f(x) < A$. Disso, $-A \leq \alpha < f(x) < A \Rightarrow |f(x)| < A$. Logo, $f_A = f$, ou seja, f_A é mensurável.

b) $f(x) > A$. Logo, por definição, $f_A(x) = A$, isto é, f_A é constante. Segue do Exemplo 1.2.2 que f_A é mensurável.

$\{x \in X; f_A(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$, pois f é mensurável.

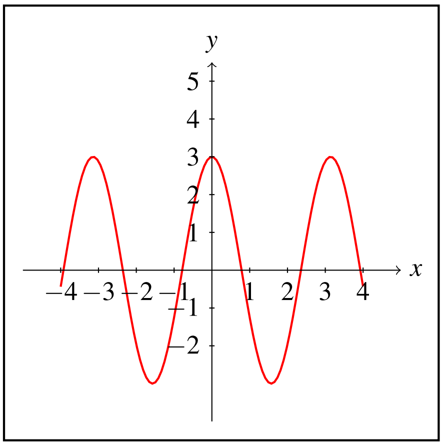
(III) $\alpha < -A$. Ocorre que $\{x \in X; f_A(x) > \alpha\} = X \in \mathscr{C}$. Pois todos os valores que f_A assume são maiores ou igual à $-A$.

Em todo caso, o conjunto $\{x \in X; f_A(x) > \alpha\}$ é um elemento de $\mathscr{C}$. Portanto, f_A é $\mathscr{C}$-mensurável.

$\square$

Para que possamos entender melhor o truncamento de uma função, vamos observar o gráfico da função $g(x) = 3\cos(2x)$ apresentada na figura 6. Um truncamento faz, didaticamente

Figura 6 – Gráfico da função $g(x) = 3\cos(2x)$

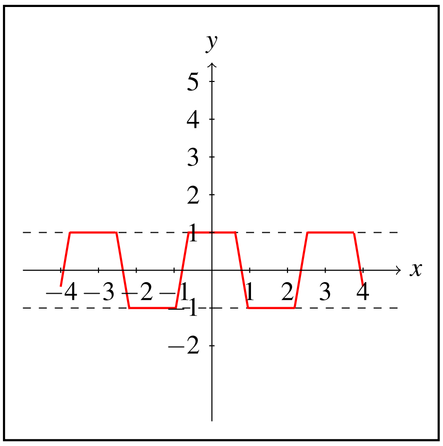


Fonte: Elaborado pelo autor

falando, uma espécie de limitação no gráfico da função original. Ao tomarmos como constante o número real 1, vemos que o truncamento g_1 da função g, apresentada anteriormente, "amassa" o gráfico de g nas ordenadas 1 e -1 como exposto na figura 7.

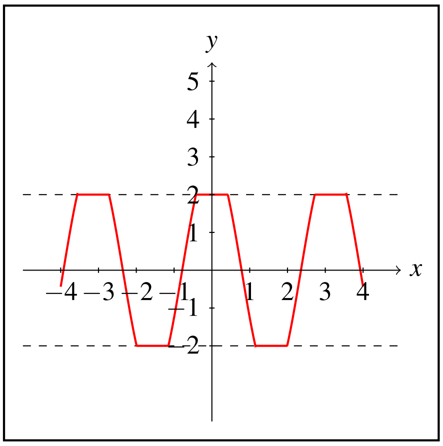
Note que o mesmo ocorre com o truncamento g_2 apresentado na figura 8 onde, desta vez, g é limitada pelas ordenadas 2 e -2. Assim, quanto maior o número n do truncamento g_n de uma função mensurável g, mais próximo o truncamento g_n está de g uma vez que a "limitação" vai desaparecendo.

Figura 7 – Gráfico do truncamento g_1



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 8 – Gráfico do truncamento g_2



Fonte: Elaborado pelo autor

Com esses resultados e observações podemos voltar a analisar o produto de duas funções com valores reais estendidos. Considere $f, g \in M(X, \mathscr{C})$. Tomemos duas sequências (f_k) e (g_p) tais que para cada $k, p \in \mathbb{N}$, f_k e g_p são truncamentos de f e g, respectivamente. Ou seja,

$$g_p(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } |g(x)| \leq k \\ p, & \text{se } g(x) > p \\ -p, & \text{se } g(x) < p \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq k \\ k, & \text{se } f(x) > k \\ -k, & \text{se } f(x) < k \end{cases}$$

Pela Proposição 2.1.10, f_k e g_p são $\mathscr{C}$-mensuráveis para cada k e p números naturais. Assim, pela Proposição 1.2.11, $f_k g_p$ também é $\mathscr{C}$-mensurável para quaisquer $k, p \in \mathbb{N}$. Como mencionado anteriormente, o truncamento de uma função f causa uma "limitação" em sua imagem. Logo, se tomarmos k grande o suficiente, o truncamento f_k da função f tende a se aproximar da própria função f. Desta forma, fixemos um $p_0 \in \mathbb{N}$. Assim, para $x \in X$

$$\lim_{k \to +\infty} (f_k(x) g_{p_0}(x)) = f(x) g_{p_0}(x)$$

Segue pelo Corolário 2.1.8 que $fg_{p_0} \in M(X,\mathscr{C})$. Analogamente, para $x \in X$

$$\lim_{p\to+\infty}(f(x)g_p(x)) = f(x)\cdot \lim_{p\to+\infty} g_p(x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$$

Concluímos, pelo mesmo corolário, que $fg \in M(X,\mathscr{C})$. Com toda essa discussão, provamos as proposições:

Proposição 2.1.11 Seja $f \in M(X,\mathscr{C})$ e f_n um truncamento de f para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $x \in X$, $f_n(x)$ converge para $f(x)$ quando n tende para $+\infty$.

Proposição 2.1.12 Se f e g são duas funções mensuráveis de valores reais estendidos, então o produto $f\cdot g$ também é uma função mensurável de valor real estendido.

Dito isso, encerraremos esta subseção apresentando a definição generalizada de mensurabilidade de uma função.

Definição 2.1.13 Sejam $(X,\mathscr{C})$ e $(Y,\mathscr{F})$ espaços mensuráveis. Dizemos que uma função $\varphi : X \to Y$ é mensurável se o conjunto $f^{-1}(E) = \{x \in X; f(x) \in E\} \in \mathscr{C}$ para todo conjunto $E \in \mathscr{F}$.

Embora essa definição pareça ser totalmente distinta da Definição 1.2.1, as duas são equivalentes no caso particular de $Y = \mathbb{R}$ e $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ conforme demonstrado a seguir.

Proposição 2.1.14 Seja $(X,\mathscr{C})$ um espaço mensurável e f uma função. Então f é $\mathscr{C}$-mensurável se, e somente se, $f^{-1}(E) \in \mathscr{C}$ para todo boreliano E.

Demonstração.

Suponha f uma função $\mathscr{C}$-mensurável. Sabemos pela Definição 1.1.12 que os elementos da álgebra de Borel são gerados por intervalos do tipo $(-\infty,x)$ com $x \in \mathbb{R}$. Assim, dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$f^{-1}(-\infty,\alpha) = \{x \in X; f(x) \in (-\infty,\alpha)\} = \{x \in X; f(x) < \alpha\}^{7}.$$

Como f é $\mathscr{C}$-mensurável segue pelo Teorema 1.2.8 que $f^{-1}(-\infty,\alpha) \in \mathscr{C}$. Note que um $E \subset \mathscr{B}$ qualquer, é gerado por uniões ou intersecções de intervalos do tipo $(-\infty,x)$ com $x \in \mathbb{R}$ e cada pré imagem desses serão elementos de $\mathscr{C}$ por um raciocínio análogo ao que fora feito anteriormente. Disso, concluímos pela Proposição 1.1.8 e pela Definição 1.1.1 que $f^{-1}(E) \in \mathscr{C}$ para todo $E \in \mathscr{B}$. Reciprocamente se $f^{-1}(-\infty,\alpha) \in \mathscr{C}$ para qualquer α concluímos, imediatamente, que $\{x \in X; f(x) < \alpha\} \in \mathscr{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Portanto, f é $\mathscr{C}$-mensurável.

$\square$

[7] Por abuso de notação, $f^{-1}(-\infty,\alpha)$ indica a pré imagem de $(-\infty,\alpha)$.

2.2 Espaços de Medida

Antes de definir uma medida, lembraremos de alguns conceitos e resultados da teoria de conjuntos que nos serão úteis adiante.

Definição 2.2.1 Uma sequência de subconjuntos (A_n) de um conjunto X é dita **não-decrescente** se $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso tenhamos $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a sequência de subconjuntos é **não-crescente**.

Proposição 2.2.2 Seja (E_n) uma sequência não-decrescente de conjuntos. Se (A_n) é tal que $A_1 = E_1$ e $A_n = E_n - E_{n-1}$ para todo $n > 1$, então:

(i) A_n é uma sequência disjunta [8];

(ii) $E_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$;

(iii) $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

Demonstração.

Para provar (a) precisamos mostrar que para todo $n,m \in \mathbb{N}$ se $m \neq n$, então $A_n \cap A_m = \varnothing$. Suponha, sem perder generalidade, que $n > m > 1$. Assim, pela comutatividade e associatividade da relação de interseção e união de conjuntos segue que

$$
\begin{aligned}
A_m \cap A_n =& (E_m - E_{m-1}) \cap (E_n - E_{n-1}) \\
=& (E_m \cap E_{m-1}^c) \cap (E_n \cap E_{n-1}^c) \\
=& (E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1}^c \cap E_{n-1}^c) \\
=& (E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c
\end{aligned}
$$

Como (E_n) é não-decrescente, segue que $E_m \subseteq E_n$ e $E_{m-1} \subseteq E_{n-1}$. Deste modo,

$$(E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c = E_m \cap E_{n-1}^c = \varnothing,$$

pois se $E_m \subseteq E_{n-1}$, então $E_{n-1}^c \subseteq E_m^c$. Disso, $E_m \cap E_{n-1}^c \subset E_m \subseteq E_m^c = \varnothing$.

Provaremos o item (b) por indução sobre n, isto é, mostraremos que o resultado vale para $n = 2$ (*Base de indução*), depois que se o resultado vale para um $k \in \mathbb{N}$ (*Hipótese de indução*), então também valerá para $k+1$. Dito isso, tome $n = 2$. Logo,

$$\bigcup_{j=1}^{2} A_j = A_1 \cup A_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1) = E_1 \cup (E_2 \cap E_1^c) = (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_1^c)$$

[8] Lembre que uma sequência disjunta significa que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$

Como (E_n) é uma sequência de subconjuntos não-decrescente, $E_1 \cup E_2 = E_2$. Além disso, $E_1 \cup E_1^c = X$. Com isso, $(E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_1^c) = E_2 \cap X = E_2$. Ou seja, $E_2 = \bigcup_{j=1}^{2} A_j$. Supondo que $E_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ para algum $k \in \mathbb{N}$, mostraremos que $E_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j$. Com efeito,

$$\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j \right) \cup A_{k+1} \stackrel{*}{=} E_k \cup A_{k+1} = E_k \cup (E_{k+1} - E_k) \stackrel{\#}{=} E_{k+1}$$

Onde em * foi usada a hipótese de indução e em # a base. Segue, pelo método da indução finita, que $E_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Por fim, (c) é um resultado imediato, pois utilizando o item anterior, vemos que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{j} A_k \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

$\square$

Proposição 2.2.3 Seja (F_n) uma sequência não-crescente de subconjuntos de X. Se (E_n) é tal que $E_n = F_1 - F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então (E_n) é não-decrescente e $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = F_1 - \bigcap_{j=1}^{\infty} F_n$.

Demonstração.

Queremos mostrar que (E_n) é não-decrescente, isto é, $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado um $n \in \mathbb{N}$, tome $x \in E_n$. Logo, $x \in F_1$ e $x \notin F_n$, por construção. Como (F_n) é não-crescente, ocorre $F_n \supseteq F_{n+1}$. Assim, $x \notin F_n \Rightarrow x \notin F_{n+1}$. Com isso, $x \in F_1$ e $x \notin F_{n+1}$, ou seja, $x \in E_{n+1}$. Desta maneira, $E_n \subseteq E_{n+1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, como queríamos. Além disso, perceba que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} (F_1 - F_n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (F_1 \cap F_n^c) = F_1 \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_n^c \right) = F_1 \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_n \right)^c = F_1 - \bigcap_{j=1}^{\infty} F_n$$

$\square$

Definição 2.2.4 Sejam X um conjunto e $I \subset \mathbb{N}$. Uma partição do conjunto X é uma sequência $(A_j)_{j \in I}$ disjunta de subconjuntos não vazios de X tais que $\bigcup_{j \in I} A_j = X$.

Proposição 2.2.5 Se $\bigcup_{j=1}^{n} E_j$ e $\bigcup_{k=1}^{m} F_k$ são duas partições distintas de um conjunto X, então para cada $j \in I_n$ tem-se $E_j = \bigcup_{k=1}^{m} (E_j \cap F_k)$.

Demonstração.

Ora, para qualquer $j \in I_n$, tem-se $E_j = E_j \cap X = E_j \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m} F_k \right) = \bigcup_{k=1}^{m} \left(E_j \cap F_k \right)$.

$\square$

A seguir definiremos, finalmente, uma medida. Esta é a definição mais importante, pois por meio dela vamos construir uma teoria da integração distinta da integração de Riemann conforme discutido na seção **??**. Dito isso,

Definição 2.2.6 Uma medida é uma função $\mu : (X, \mathscr{C}) \to \overline{\mathbb{R}}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) $\mu(A) \geq 0$, $\forall\, A \in \mathscr{C}$;

(iii) Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de $\mathscr{C}$, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ [9].

Na definição acima, o valor de μ pode ser igual à $+\infty$ para algum conjunto $A \in \mathscr{C}$. Quando ocorrer $\mu(E) < +\infty$ para qualquer que seja o conjunto $E \in \mathscr{C}$, dizemos que μ é uma medida finita. Além disso, uma tripla ordenada $(X, \mathscr{C}, \mu)$ constituída por um conjunto X, uma σ-álgebra $\mathscr{C}$ desse conjunto e uma medida μ sobre o espaço mensurável $(X, \mathscr{C})$ é chamada de espaço de medida.

Exemplo 2.2.7 Sejam X um conjunto e $\mathscr{C}$ a σ-álgebra formada por todos os subconjuntos de X. Defina $\mu_1, \mu_2 : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ pondo $\mu_1(A) = 0$ para qualquer $A \in \mathscr{C}$ e μ_2 pondo

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } A = \varnothing \\ +\infty, & \text{se } A \neq \varnothing \end{cases}$$

Sendo definidas dessa forma, as funções μ_1 e μ_2 são medidas.

De fato, ambas as condições *(i)* e *(ii)* são trivialmente satisfeitas. Para a condição *(iii)*, temos que qualquer sequência disjunta (A_n) acarretará que

$$\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)$$

Para μ_2 temos dois casos possíveis. Se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, então $\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$. Entretanto isso ocorre somente se $A_j = \varnothing$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(\varnothing) = 0$$

Caso $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$, dentre os termos da sequência (A_n), deve existir pelo menos um $p \in \mathbb{N}$ tal que $(A_p) \neq \varnothing$. Assim, $\mu(A_j) = +\infty$ para algum $p \in \mathbb{N}$ acarretando que $\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty$.

[9] Uma função que satisfaz a propriedade (iii) é dita contavelmente aditiva.

Ademais, na soma $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n)$ só teremos soma dos termos $0+(+\infty)$ ou $(+\infty)+(+\infty)$. Desta forma, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = +\infty$. Portanto μ_1 e μ_2 são medidas.

Observação 2.2.8 Note que se μ é uma medida, então vale $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$.

Exemplo 2.2.9 Seja $(\Omega, \mathscr{C})$ um espaço mensurável. A função $\rho : \mathscr{C} \to [0,1]$ é dita uma medida de probabilidades se satisfaz as propriedades:

(K1) $\rho(\Omega) = 1$;

(K2) $\rho(A) \geq 0$, $\forall\, A \in \mathscr{C}$;

(K3) Se (A_n) é uma sequência disjunta de elementos de $\mathscr{C}$, então $\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n)$ [10].

Afirmamos que ρ é uma medida. Observe que as condições da *(ii)* e *(iii)* da Definição 2.2.6 são satisfeitas, por definição, na função de probabilidade. Vejamos que $\rho(\varnothing) = 0$. Com o auxilio das propriedades *(K1)* e *(K3)*, segue que

$$\rho(\Omega) = \rho(\Omega \cup \varnothing) = \rho(\Omega) + \rho(\varnothing) \Rightarrow \rho(\Omega) = \rho(\Omega) + \rho(\varnothing) \Rightarrow \rho(\varnothing) = 0.$$

Portanto a função probabilidade é uma medida. Neste caso, o espaço de medida $(\Omega, \mathscr{C}, \rho)$ é chamado de espaço de probabilidades. Além disso, uma função $\mathscr{C}$-mensurável pela Definição 2.1.13 em um espaço de probabilidades é chamada de variável aleatória.

Exemplo 2.2.10 (Unidade de Medida Concentrada em p**)** Sejam $(X, \mathscr{C})$ um espaço mensurável e p um elemento de X. Defina $\mu : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ pondo

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \notin A \\ 1, & \text{se } p \in A \end{cases}$$

Então μ é uma medida. Verdadeiramente, observe que $p \notin \varnothing$, ou seja, $\mu(\varnothing) = 0$. Trivialmente, tem-se $\mu(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathscr{C}$, pela construção de μ. Seja (A_j) uma sequência disjunta de subconjuntos de X. Se $p \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, então existe um n_0 tal que $p \in A_{n_0}$. Como (A_j) é disjunta, $p \notin A_j$, $\forall j \neq n_0$. Assim, $\mu(A_{n_0}) = 1$ enquanto que $\mu(A_j) = 0\ \forall j \neq n_0$. Logo,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Caso $p \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, então $p \notin A_j\ \forall j \in \mathbb{N}$. Disso, $\mu(A_j) = 0\ \forall j \in \mathbb{N}$ acarretando que

[10] As propriedades *K1, K2* e *K3* são chamadas de *Axiomas de Kolmogorov* (**??**).

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = 0 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Portanto, μ é uma medida.

Proposição 2.2.11 Se $\bigcup_{j\in I_n} E_j$ e $\bigcup_{k\in I_m} F_k$ são duas partições distintas de um conjunto X, então $\mu(E_j) = \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k)$.

Demonstração.

Dado $j \in I_n$, pela Proposição 2.2.5, temos que $E_j = \bigcup_{k=1}^{m} (E_j \cap F_k)$. Como $\{F_k\}$ é uma partição, para $k,l \in I_m$, temos $(E_j \cap F_p) \cap (E_j \cap F_l) = \varnothing$ para todo l e p com $l \neq p$. Ou seja, a sequência formada por $(E_j \cap F_k)$ com $k \in I_m$ é disjunta. Como μ é uma medida, segue que

$$\mu(E_j) = \mu\left(\bigcup_{k=1} (E_j \cap F_k)\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k)$$

□

Teorema 2.2.12 Seja μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathscr{C}$. Se A e B são elementos de $\mathscr{C}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Se $\mu(A) < +\infty$, então $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Demonstração.

Suponha que $A \subset B$, então $B = A \cup (B - A)$ e $A \cap (B - A) = \varnothing$. Segue pela propriedade (iii) da Definição 2.2.6 que

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$$

Lembre que $B - A = B \cap A^c$ e $A \in \mathscr{C} \Rightarrow A^c \in \mathscr{C}$. Além disso, como $B \in \mathscr{C}$ temos que $B \cap A^c = B - A \in \mathscr{C}$. Com isso, $\mu(B - A) \geq 0$. Segue que $\mu(B) \geq \mu(A)$. Observe que se $\mu(A) < +\infty$, temos que

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \Leftrightarrow \mu(B) - \mu(A) = \mu(B - A)$$

Como desejávamos.

□

Proposição 2.2.13 Seja μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathscr{C}$. Se (E_n) é uma sequência não-decrescente de elementos de $\mathscr{C}$, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$.

Demonstração.

Ora, se $\mu(E_n) = +\infty$, para algum $n \in \mathbb{N}$, ambos os lados da equação acima são $+\infty$. Desta forma, vamos supor que $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, vamos construir uma sequência (A_n) pondo $A_1 = E_1$ e $A_n = E_n - E_{n-1}$ para qualquer $n > 1$. Então pela Proposição 2.2.2, (A_n) é uma sequência disjunta, logo $E_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Como μ é contavelmente aditiva,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$$

Pelo Teorema 2.2.12 vemos que $\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1})$, para $n > 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) &= \lim_{m\to+\infty} (\mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_m)) \\
&= \lim_{m\to+\infty} (\mu(E_1) + \mu(E_2 - E_1) + \cdots + \mu(E_m - E_{m-1})) \\
&= \lim_{m\to+\infty} (\mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_m) - \mu(E_{m-1})) \\
&= \lim_{m\to+\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots - \mu(E_{m-1}) + \mu(E_m)) \\
&= \lim_{m\to+\infty} \mu(E_m)
\end{aligned}$$

Segue que $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

□

Proposição 2.2.14 Seja μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathscr{C}$. Se (B_n) é uma sequência não-crescente de elementos de $\mathscr{C}$ e $\mu(B_1) < +\infty$, então $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$.

Demonstração.

Defina uma sequência (T_n) de elementos de $\mathscr{C}$ pondo $T_n = B_1 - B_n$ para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 2.2.3, (T_n) é não-decrescente. Assim, aplicando o a Proposição 2.2.13 temos que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(T_n)$$

Usando o Teorema 2.2.12, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(T_n) = \lim_{n\to+\infty} [\mu(B_1) - \mu(B_n)] = \mu(B_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)$$

Segue pela Proposição 2.2.3 e pelo Teorema 2.2.12 que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(T_n) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

Combinando as duas equações obtemos que

$$\mu(B_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

Como $\mu(B_1) < +\infty$, podemos subtrair $\mu(B_1)$ e multiplicar ambos os lados da igualdade por (-1). Portanto, $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$.

□

Vimos quando tratamos de σ-álgebras a σ-álgebra de Borel que é muito relevante para o estudo da reta real. Da mesma forma, existe uma medida que é indispensável para o mesmo contexto. Essa, por sua vez, não será demonstrada a titulo de simplificação do trabalho, mas será enunciada adiante pela importância.

Teorema 2.2.15 Sendo $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ um espaço mensurável, existe uma única medida λ definida sobre $\mathscr{B}$ que coincide com o comprimento dos intervalos abertos (BARTLE, 1995, p.20, tradução nossa, adaptação nossa) [11].

Em termos práticos, se $E = (a,b)$ é um intervalo real não vazio, então $\lambda(E) = b - a$ [12]. Com essa medida, é muito mais fácil exibir um conjunto que tenha medida igual a $+\infty$ justificando a necessidade da reta estendida na Definição 2.2.6. Por exemplo, o intervalo $J = (0,+\infty)$ tem medida $+\infty$. Com efeito, tome a sequência (J_n) de intervalos de $\mathbb{R}$ definida por $J_n = (0,n)$ com $n \in \mathbb{N}$. Claramente, (J_n) é uma sequência não-decrescente e vale $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = J$. Logo, pela Proposição 2.2.13, vemos que

$$\lambda(J) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(J_n) = \lim_{n\to+\infty} (n-0) = +\infty.$$

De maneira análoga, é possível mostrar que o intervalo $(-\infty,0)$ tem medida igual à $+\infty$ com respeito à medida de Lebesgue. Perceba também que dado um $a \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda(\{a\}) = a - a = 0$, onde $\{a\} = [a,a]$ é o intervalo degenerado.

Exemplo 2.2.16 Seja $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda)$ um espaço de medida. Então $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$. De fato, pondo $A = (-\infty,0)$ e $B = (0,+\infty)$, observamos que os conjuntos $A, \{0\}$ e B formam uma partição de $\mathbb{R}$. Logo, $\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(A \cup \{0\} \cup B) = \lambda(A) + \lambda(\{0\}) + \lambda(B) = (+\infty) + 0 + (+\infty) = +\infty$.

Embora tenha tido a necessidade de utilizar o sistema da reta estendida para definirmos uma medida, existem conjuntos tão pequenos que sua medida é desprezível. À esses damos o nome de conjunto de medida nula.

[11] Esta medida recebe o nome de Medida de Lebesgue.

[12] Em todo o texto, quando não houver menção contrária, λ representa a medida de Lebesgue.

Definição 2.2.17 Seja $(X, \mathscr{C}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que um conjunto $E \in \mathscr{C}$ tem medida nula, em relação à medida μ, se $\mu(E) = 0$.

Existem situações em que uma regra á válida em quase todo ponto de um conjunto, mas não se aplica em todo o conjunto. Com isso, a Definição 2.2.17 nos permite utilizar o conceito de "quase todo ponto" ou "quase todo lugar" para qualquer proposição que queiramos desde que ela não seja válida apenas em um subconjunto de medida nula.

Definição 2.2.18 Diremos que alguma propriedade ocorre em quase todo ponto de um conjunto X com respeito à medida μ, se ela não é valida somente em um subconjunto E de X que tem medida nula. Denotaremos esse acontecimento por μ-q.t.p.

Proposição 2.2.19 Seja $(X, \mathscr{C}, \mu)$ um espaço de medida. Se $\mu(X) = 0$ e $Y \subset X$ é $\mathscr{C}$-mensurável, então $\mu(Y) = 0$ [13].

Demonstração.

Como Y é $\mathscr{C}$-mensurável, $\mu(Y) \geq 0$. Segue, pelo Teorema 2.2.12 que $0 \leq \mu(Y) \leq \mu(X) = 0$. Portanto, $\mu(Y) \leq 0$.

$\square$

Proposição 2.2.20 Seja $(X, \mathscr{C}, \mu)$ um espaço de medida e $\{E_n\}$ uma sequência disjunta de elementos de $\mathscr{C}$. Se $Y = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$ e $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\mu(Y) = 0$ [14].

Demonstração.

Imediatamente, temos $\mu(Y) = \mu\left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$.

$\square$

Como exemplo, temos por definição, que $\varnothing$ tem medida nula, pois para qualquer medida μ, $\mu(\varnothing) = 0$. Finalizaremos esta seção exibindo mais um exemplo de conjunto de medida nula.

Exemplo 2.2.21 Seja $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda)$ um espaço mensurável. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto enumerável, então $\lambda(X) = 0$. De fato, se X é enumerável, então $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Como vimos anteriormente, $\lambda(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue, pela Proposição 2.2.20, que X tem medida nula. Particularmente, $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

---

[13] Esta proposição é a generalização de um resultado que pode ser encontrado em (LIMA, 2019, p.343).

[14] Outro resultado generalizado de (LIMA, 2019, p.343).

3 TEORIA DA INTEGRAÇÃO

Uma vez que já foram bem explorados os espaços mensuráveis e os espaços de medida, vamos abordar, nesta seção, a teoria da integração de Lebesgue. Iniciaremos por funções não negativas e iremos estendendo os conceitos aos poucos. Quando não houver menção contrária, $(X,\mathscr{C},\mu)$ será um espaço de medida. O conjunto de todas as funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis será simplesmente denotado por $M = M(X,\mathscr{C})$ e o conjunto das funções não negativas, que também são $\mathscr{C}$-mensuráveis será denotado por $M^+ = M^+(X,\mathscr{C})$.

3.1 A Integral de Funções Simples

Iniciaremos tratando de casos particulares de integral e depois vamos expandindo. Com isso, iniciaremos entendo a integral para funções simples.

Definição 3.1.1 Uma função real é dita **simples** quando possui apenas uma quantidade finita de valores (BARTLE, 1995, p.27, tradução nossa) [1].

Representaremos esse tipo de função de forma padronizada em todo o texto. Faremos isso por meio da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica do conjunto $E_j \in \mathscr{C}$. Nessa representação estamos supondo que cada $a_j \neq a_i$ quando $j \neq i$ e que $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = X$, onde a sequência finita de conjuntos (E_n) formam uma partição do conjunto X.

Exemplo 3.1.2 Seja $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ pondo

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1) \\ 3, & \text{se } x \in [1,2) \\ 4, & \text{se } x \in [2,3) \\ 2, & \text{se } x \in [3,4] \end{cases}$$

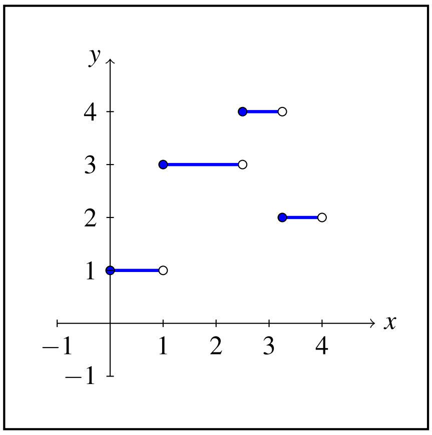
Claramente, g também é uma função simples. Basta denotar $E_1 = [0,1),\ E_2 = [1,2),\ E_3 = [2,3),\ E_4 = [3,4]$ e $a_i = i$ para $1 \leq i \leq 4$. Com isso, vemos que para $x \in [0,4]$

$$g(x) = 1 \cdot \chi_{[0,1)}(x) + 3 \cdot \chi_{[1,2)}(x) + 4 \cdot \chi_{[2,3)}(x) + 2 \cdot \chi_{[3,4]}(x)$$

[1] A real-valued function is **simple** if it has only a finite number of values.

Concluindo que $g = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$.

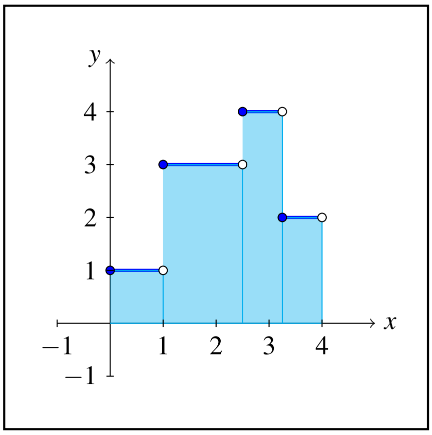
Figura 9 – Gráfico da Função $g = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Agora pensemos na ideia de integral apresentada na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Se quiséssemos calcular a integral das funções acima somaríamos as áreas dos retângulos conforme ilustram as figuras a seguir.

Figura 10 – Área delimitada pelo gráfico da função $g = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que em ambos os casos estamos, basicamente, aplicando o valor a_j na medida do conjunto E_j correspondente onde j é o número de partições do domínio. Com isso, temos a definição a seguir:

Definição 3.1.3 Se φ é uma função simples de $M^+(X,\mathscr{C})$ com a representação $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j}$, então a integral da função φ com respeito à medida μ é o valor real estendido $\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j\mu(E_j)$ (BARTLE, 1995, p.28, tradução nossa) [2].

Para a Definição 3.1.3 empregamos a convenção que $0\cdot(+\infty) = 0$. Isso é feito para garantir que a função identicamente nula tenha integral nula independentemente da medida ser finita ou não. A seguir, veremos propriedades elementares sobre a integral de funções simples.

Teorema 3.1.4 Se φ e ψ são funções simples do espaço $M^+(X,\mathscr{C})$ e $c \geq 0$ é uma constante real, então $\int c\varphi d\mu = c\int \varphi d\mu$ e $\int(\varphi+\psi)d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$ (BARTLE, 1995).

Demonstração.

Representaremos as funções simples não negativas por $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j}$ e $\psi = \sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{F_k}$. Primeiro, mostraremos que vale a multiplicação por escalar. Assim, caso $c = 0$, o resultado é verdadeiro trivialmente. Supondo $c > 0$, temos que

$$\int c\varphi\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} ca_j\mu(E_j) = c\sum_{j=1}^{n} a_j\mu(E_j) = c\int \varphi\, d\mu.$$

Com isso, concluímos que $\int c\varphi\, d\mu = c\int \varphi\, d\mu$.

Agora provaremos que a integral da soma é igual a soma das integrais. Assim, dadas as representações padrão de φ e ψ, vemos que

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{F_k} \tag{5}$$

Como $\{E_n\}$ e $\{F_k\}$ são ambas partições de X, pela **??** temos que $\chi_{E_j} = \sum_{k=1}^{m} \chi_{(E_j\cap F_k)}$ e $\chi_{F_k} = \sum_{j=1}^{n} \chi_{(E_j\cap F_k)}$. Substituindo na equação 5, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{F_k} &= \sum_{j=1}^{n} a_j\left(\sum_{k=1}^{m}\chi_{(E_j\cap F_k)}\right) + \sum_{k=1}^{m} b_k\left(\sum_{j=1}^{n}\chi_{(E_j\cap F_k)}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j\chi_{(E_j\cap F_k)} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_k\chi_{(E_j\cap F_k)}\end{aligned}$$

[2] No original: If ϕ is a simple function in $M^+(X,\mathbf{X})$ [...], we define the integral of ϕ with respect to μ to be the extended real number $\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j\mu(E_j)$.

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(a_j \chi_{(E_j \cap F_k)} + b_k \chi_{(E_j \cap F_k)} \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \chi_{(E_j \cap F_k)}.$$

Com isso, concluímos que

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \chi_{E_j \cap F_k}.$$

Entretanto, essa representação não é, necessariamente, a representação padrão apresentada na Definição 3.1.3, pois nada garante, previamente, que $a_j + b_k$ sejam distintos para $j \in I_n$ e $k \in I_m$. Com isso, sejam c_h, com $h \in I_p$, números distintos do conjunto $\{a_j + b_k;\ (j,k) \in I_n \times I_m\}$ e G_h a união de todos os conjuntos $E_j \cap F_k \neq \varnothing$ tal que $a_j + b_k = c_h$. Assim,

$$G_h = \bigcup_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} E_j \cap F_k$$

A notação utilizada acima indica que a soma é realizada sobre todos os índices j e k tais que $a_j + b_k = c_h$. Como $(E_j \cap F_k) \cap (E_l \cap F_p) = \varnothing$ para todo $j \neq l$ e $k \neq p$, temos que

$$\mu(G_h) = \mu \left(\bigcup_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} E_j \cap F_k \right) = \sum_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} \mu(E_j \cap F_k)$$

Desta forma, conseguimos encontrar uma representação padrão que é dada por $\varphi + \psi = \sum\limits_{h=1}^{p} c_h \chi_{G_h}$. Logo, temos que

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \sum_{h=1}^{p} c_h \mu(G_h) = \sum_{h=1}^{p} \sum_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} c_h \mu(E_j \cap F_k)$$
$$= \sum_{h=1}^{p} \sum_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k)$$

Pela Proposição 2.2.11, temos $\mu(E_j) = \sum\limits_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k)$ e $\mu(F_k) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k)$. Empregando estes resultados ao que foi desenvolvido anteriormente obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k) = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$$

Segue que $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$ como queríamos.

□

Lema 3.1.5 Se μ é uma medida sobre X e fixemos um elemento A de $\mathscr{C}$, então a função λ definida por $\lambda(E) = \mu(A \cap E)$, $\forall\, E \in \mathscr{C}$ também é uma medida sobre X (BARTLE, 1995).

Demonstração.

Basta mostrar que λ satisfaz as condições impostas na Definição 2.2.6. Com isso, se $E = \varnothing$, então

$$\lambda(\varnothing) = \mu(A \cap \varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$$

Como A e E são elementos de $\mathscr{C}$, então $A \cap E$ também está em $\mathscr{C}$. Assim, por μ ser uma medida, temos que $\mu(A \cap E) \geq 0$ acarretando que $\lambda(E) \geq 0$. Por fim, tomemos uma sequência de elementos disjuntos (E_n) em $\mathscr{C}$. Se $A \cap E_j \neq \varnothing$ para algum $j \in \mathbb{N}$ não há o que fazer, pois $(A \cap E_j) \subset E_j \in \mathscr{C}$. Caso $A \cap E_j = \varnothing$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cap A = \varnothing$. Com isso,

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cap A &= (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \cdots) \cap A \\ &= (E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A) \cup \cdots \cup (E_n \cap A) \cup \cdots \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap A)\end{aligned}$$

Segue então que

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cap A\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap A)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j)$$

Desta forma, concluímos que a função λ acima definida é uma medida.

$\square$

Lema 3.1.6 Se $\mu_1, ..., \mu_n$ são medidas sobre X e $a_1, ..., a_n$ são números reais não negativos, então a função λ definida por $\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E), \forall\, E \in \mathscr{C}$ também é uma medida sobre X (BARTLE, 1995).

Demonstração.

Como μ_j é uma medida para todo $j \in I_n$ e cada a_j é maior ou igual à zero, temos que cada $a_j \mu_j(E) \geq 0$. Desta maneira, $\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E) \geq 0$. Além disso, podemos observar que $\lambda(\varnothing) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(\varnothing) = 0$. Tomemos uma sequência disjunta (E_p) de elementos de $\mathscr{C}$. Logo,

$$\lambda\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_p\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_p\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{p=1}^{\infty} \mu_j(E_p)\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E_p)\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda(E_p)$$

Como λ satisfaz todas as condições impostas na Definição 2.2.6 concluímos que λ é uma medida.

$\square$

Teorema 3.1.7 Se ϕ é uma função simples com a representação padrão dada por $\phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, então a função $\lambda : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\lambda(E) = \int \varphi \chi_E \, d\mu$ para todo $E \in \mathscr{C}$ é uma medida sobre $\mathscr{C}$ (BARTLE, 1995).

Demonstração.

De maneira análoga ao Teorema 3.1.4 podemos verificar que $\varphi \chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E}$. Assim, temos que

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu = \int \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E} \right) d\mu = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \int \chi_{E_j \cap E} d\mu \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j \cap E)$$

Pelo Lema 3.1.5 a aplicação que leva $E \to \mu(E_j \cap E)$ é uma medida para cada $j \in I_n$. Disso, concluímos que λ pode ser expressada por uma combinação linear de medidas sobre $\mathscr{C}$. Segue, pelo Lema 3.1.6, que λ também é uma medida sobre $\mathscr{C}$.

$\square$

3.2 A Integral de Funções Não-Negativas

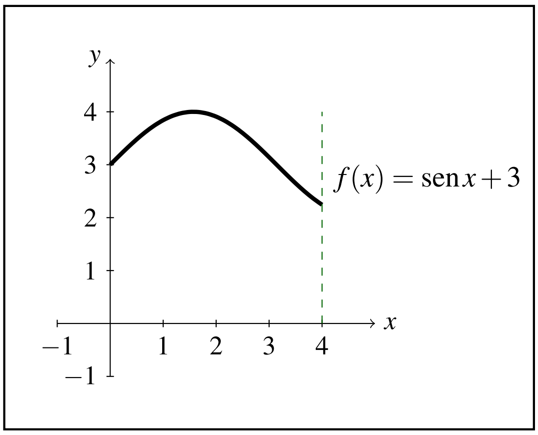
Até aqui trabalhos apenas com integrais de funções simples. Nesta seção, desejamos expandir o conceito de integral para uma função qualquer não negativa. Vale ressaltar que a perspectiva que traremos aqui é a de Lebesgue. Com o intuito de enfatizar a diferença da construção, vamos lembrar da construção feita por Riemann. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen}(x) + 3$. Claramente não é uma função simples, pois não possui uma quantidade finita de valores. Nosso objetivo, agora, é tentar calcular a integral dessa função com o que construímos até aqui. Para facilitar, observe o gráfico dessa função no intervalo $[0,4]$ apresentado na figura 11.

Tomemos a função simples

$$\phi_2(x) = \sum_{j=1}^{2} a_j \chi_{E_j}$$

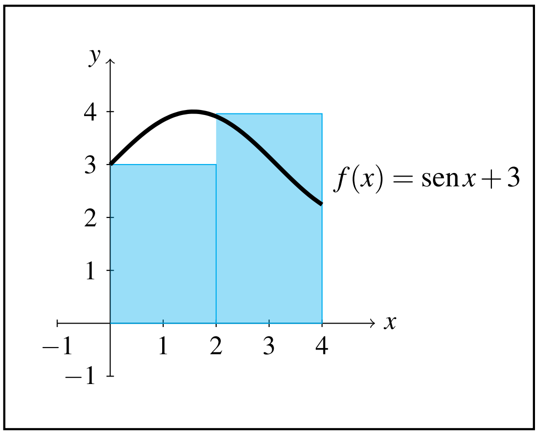
onde $a_1 = f(0), a_2 = f(2); E_1 = [0,2)$ e $E_2 = [2,4]$. Assim, ao calcularmos sua integral, vemos não há preenchimento total da área delimitada pelo gráfico da função f, mas se aproxima com um erro conforme a figura 12.

Figura 11 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x) + 3$



Fonte: Elaborado pelo autor

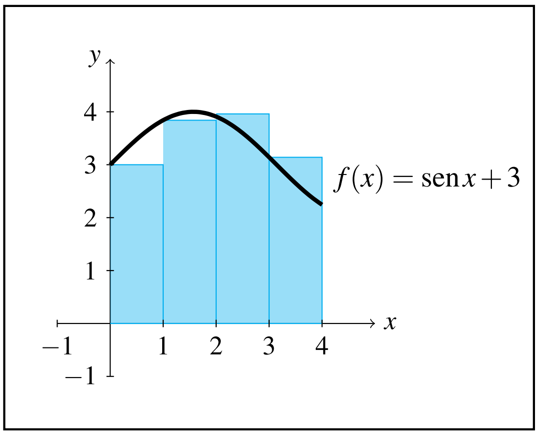
Figura 12 – Integral da função ϕ_2



Fonte: Elaborado pelo autor

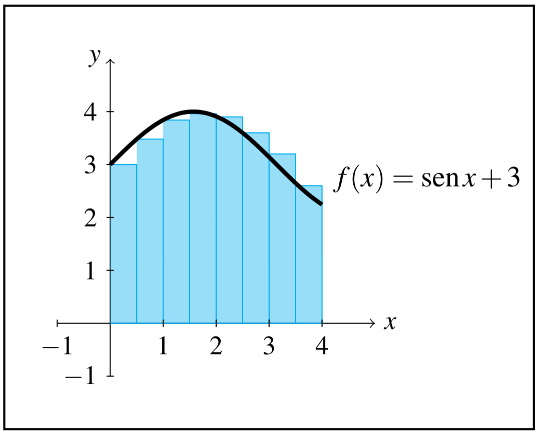
Vamos escolher outra função simples ϕ_4 tal que $\phi_4 = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$ onde $E_1 = [0,1)$, $E_2 = [1,2)$, $E_3 = [2,3)$, $E_1 = [3,4]$, $a_1 = f(0)$, $a_2 = f(1)$, $a_3 = f(3)$ e $a_4 = f(4)$. Desta forma, com o dobro de valores da função ϕ_2 escolhida anteriormente podemos observar que a integral de ϕ_4, exibida na figura 13, mais se aproxima da integral da função f. Para finalizarmos esta ideia, dobremos a quantidade de valores e escolhamos outra função $\phi_8 = \displaystyle\sum_{j=1}^{8} a_j \chi_{E_j}$ onde $E_1 = [0,0.5)$, $E_2 = [0.5,1)$, $E_3 = [1,1.5)$, $E_4 = [1.5,2)$, $E_5 = [2,2.5)$, $E_6 = [2.5,3)$, $E_7 = [3,2.5)$, $E_8 = [3.5,4]$ e $a_1 = f(0)$, $a_2 = f(0.5)$, $a_3 = f(1)$, $a_4 = f(1.5)$, $a_5 = f(2.5)$, $a_6 = f(3)$, $a_7 = f(3.5)$ e $a_8 = f(4)$. A integral da função ϕ_8 está representada na figura figura 14. Com isso, observamos que quanto mais valores a função simples possui, mais ela se aproxima da função f. Assim, a área da função simples será próxima o suficiente da área delimitada pelo gráfico da função f. Ou seja, se tomarmos o supremo dessas funções obteremos a integral exposta na figura 15.

Figura 13 – Integral da função ϕ_4



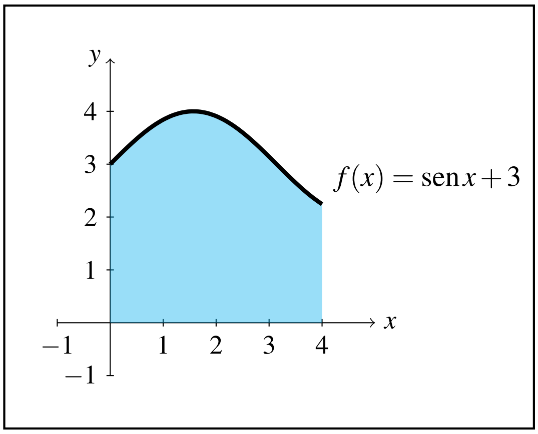
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 14 – Integral da função ϕ_8



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 15 – Integral da função f



Fonte: Elaborado pelo autor

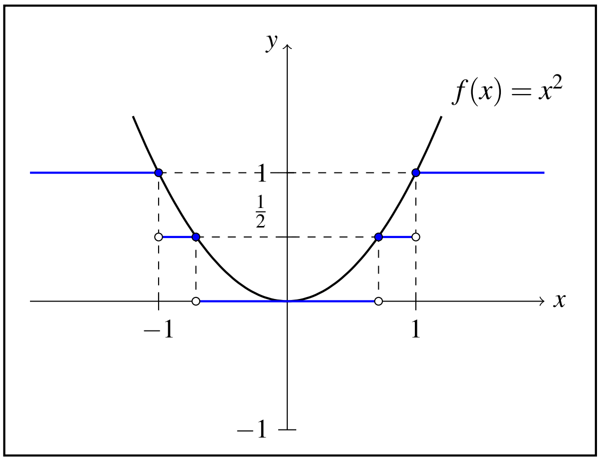
Agora, tomemos como exemplo a função $f(x) = x^2$, mas não invés de particionarmos o domínio da função, a função simples é construída conforme uma partição feita na imagem.

Assim, tomemos uma função ϕ_1 pondo

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-1} \\ 2^{-1}, & \text{se } 2^{-1} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-1} \\ 1, & \text{se } f(x) \geq 1 \end{cases}$$

Note que a função ϕ_1 é simples, mas seus valores são escolhidos por meio da partição da imagem conforme explicitado na imagem da figura 16. Vamos aproximar a função f agora pela função

Figura 16 – Gráfico da função ϕ_1



Fonte**:** Elaborado pelo autor

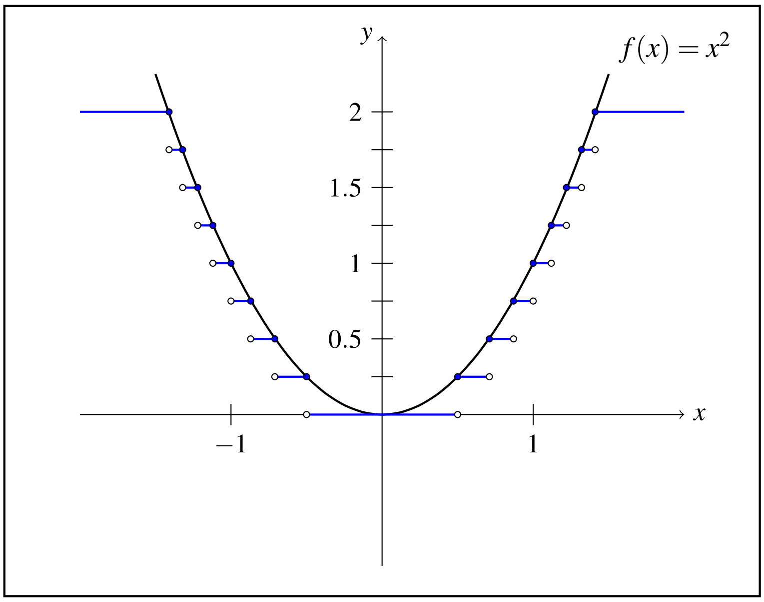
simples ϕ_2 construída da seguinte forma:

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-2} \\ 2^{-2}, & \text{se } 2^{-2} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-2} \\ 2 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 2 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 3 \cdot 2^{-2} \\ 3 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 3 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 4 \cdot 2^{-2} \\ 4 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 4 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 5 \cdot 2^{-2} \\ 5 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 5 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 6 \cdot 2^{-2} \\ 6 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 6 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 7 \cdot 2^{-2} \\ 7 \cdot 2^{-2}, & \text{se } 7 \cdot 2^{-2} \leq f(x) < 8 \cdot 2^{-2} \\ 2, & \text{se } f(x) \geq 2 \end{cases}$$

Assim, na figura 17 está a comparação com o gráfico da função $f(x) = x^2$.

Dito isto, adiante formalizaremos que dada uma função $f \in M(X, \mathscr{C})$, então ela pode ser aproximada por uma sequência de funções simples conforme o teorema adiante.

Figura 17 – Gráfico da função ϕ_2



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Teorema 3.2.1 (Aproximação Via Funções Simples) Se f é uma função não negativa em $M(X,\mathscr{C})$, então existe uma sequência de funções (φ_n) tal que $\phi \in M(X,\mathscr{C}), \forall\, n \in \mathbb{N}$ de forma que

(i) Cada φ_n é uma função simples, isto é, possui apenas uma quantidade finita de valores reais;

(ii) $0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração.

Vamos mostrar a existência das sequência por construção. Essa construção será realizada por meio de partições da imagem da seguinte maneira:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-n} \\ 2^{-n}, & \text{se } 2^{-n} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-n} \\ 2 \cdot 2^{-n}, & \text{se } 2 \cdot 2^{-n} \leq f(x) < 3 \cdot 2^{-n} \\ \vdots & \vdots \\ k \cdot 2^{-n}, & \text{se } k \cdot 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) \cdot 2^{-n} \\ \vdots & \vdots \\ n, & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

Simplificadamente podemos escrever

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} k \cdot 2^{-n}, & \text{se } k \cdot 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) \cdot 2^{-n}, \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n2^n - 1 \\ n, & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

Com isso, podemos ver que φ_n é uma função simples e que $0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x)$. Além disso, φ_n é uma mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$, pois trata-se de uma sequência de um funções simples. Observe que dado $n \in \mathbb{N}$ temos que $\phi_n(x) = k2^{-n}$ desde que $k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}$. Como $k2^{-n} + 2^{-n}$, percebemos que

$$\begin{aligned} k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n} &\Rightarrow k2^{-n} \leq f(x) < k2^{-n} + 2^{-n} \\ &\Rightarrow \phi_n(x) \leq f(x) < \phi_n(x) + 2^{-n} \\ &\Rightarrow \phi_n(x) - 2^{-n} \leq f(x) < \phi_n(x) + 2^{-n} \\ &\Rightarrow |f(x) - \phi_n(x)| < 2^{-n}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{-n} = 0$. Segue que $\lim\limits_{n \to +\infty} \phi_n(x) = f(x)$.

□

Esse teorema nos mostra que dada qualquer função não negativa mensurável, podemos aproximar seus valores por funções simples de maneira que o limite dessa sequência de funções simples convergem para a função que tomamos inicialmente. Diante disso, nada mais natural que definir a integral de Lebesgue para funções não negativas quaisquer da maneira que segue

Definição 3.2.2 Se $f \in M^+(X, \mathscr{C})$, nós definimos a integral de f com respeito à medida μ, sendo o valor real estendido

$$\int f d\mu = sup \int \varphi d\mu$$

Onde o supremo é sobre todas as funções simples $\varphi \in M(X, \mathscr{C})$ tal que $0 \leq \varphi \leq f(x)$ para todo $x \in X$ (BARTLE, 1995).

Definição 3.2.3 Se $f \in M(X, \mathscr{C})$ e $E \in \mathscr{C}$, então $f\chi_E \in M(X, \mathscr{C})$, definimos a integral de f sobre o conjunto E com respeito à medida μ como sendo o número real estendido

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu.$$

Agora desejamos realizar operações aritméticas com essa expansão da definição, conforme fizemos para a integral de funções simples. Para tal, precisamos mostrar a monoticidade da integral de funções não negativas tanto à respeito de uma outra função integral quanto à um conjunto. Isso faremos por meio dos lemas a seguir

Lema 3.2.4 Se f e g são elementos de $M^+(X,\mathscr{C})$ com $f \leq g$, então $\displaystyle\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Demonstração.

Suponha que $\int f d\mu = \sup \varphi d\mu$ e $\int g d\mu = \sup \psi d\mu$ onde ψ, φ são funções simples não negativas tais que $\varphi \leq f$ e $\psi \leq g$. Sejam A e B os conjuntos das integrais de todas as funções simples que satisfazem $0 \leq \varphi \leq f$ e $0 \leq \psi \leq g$, respectivamente. Isto é,

$$A = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j);\ \phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \text{ e } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \right\}$$

e

$$B = \left\{ \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k);\ \phi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k} \text{ e } 0 \leq \psi(x) \leq g(x) \right\}$$

Por hipótese, $f \leq g$. Logo, $0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$ acarretando que $A \subset B$. Desta forma, $\displaystyle\sup_A \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) \leq \sup_B \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k)$. Portanto, $\displaystyle\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

□

Lema 3.2.5 Se f é um elemento de $M^+(X,\mathscr{C})$ e $E, F \in \mathscr{C}$ com $E \subseteq F$, então

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

Demonstração.

Como $E \subseteq F$, então $\chi_E \leq \chi_F$. Assim, $f\chi_E \leq f\chi_F$. Segue, pelo lema anterior que,

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu \leq \int f\chi_F d\mu = \int_F f d\mu.$$

Portanto, $\displaystyle\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$.

□

Teorema 3.2.6 (Teorema da Convergência Monótona) Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis, não negativas, que converge para uma função f, então $\displaystyle\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$

Demonstração.

Pelo Corolário 2.1.8, se temos uma sequência de funções mensuráveis que converge para uma função f, então f também é mensurável. Além disso, como (f_n) é crescente, então $f_n \leq f \ \forall n \in \mathbb{N}$. Seque, pelo Lema 3.2.4 que $\displaystyle\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ Para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta maneira,

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Por outro lado, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$ e φ uma função simples mensurável tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ tais que $f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)$, construa os conjuntos

$$A_n = \{x \in X;\ f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}.$$

Com isso, podemos observar que cada $A_n \subset X$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ e que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Desta maneira, usando o Lema 3.2.5 e Lema 3.2.4 temos que

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu. \tag{6}$$

Como (A_n) é uma sequência monótona crescente que a união é igual ao conjunto X, observamos que, pela Proposição 2.2.13 que para uma medida μ vale

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

Só que pelo Teorema 3.1.7 $\int \varphi\chi_E d\mu$ é uma medida. Desta forma,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int \varphi\chi_{A_n} d\mu = \int \varphi\chi_X d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Substituindo isso na equação 6 obtemos

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Como $\alpha \in (0,1)$ segue que

$$\int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Finalmente, por φ ser uma função não negativa simples arbitrária que satisfaz $0 \leq \varphi \leq f$, obtemos

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Disso tudo,

$$\int f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Portanto, $\lim_{n\to+\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu$ como desejávamos.

$\square$

O teorema anterior nos permite mostrar as operações aritméticas para integral de Lebesgue para funções não negativas quaisquer como apresentaremos adiante.

Corolário 3.2.7 Se $f \in M^+(X,\mathscr{C})$ e $c \geq 0$, então $cf \in M^+(X,\mathscr{C})$ e vale $\int cf d\mu = c\int f d\mu$.

Demonstração.

Se o número real for zero, então o resultado sai de forma imediata. Suponha que $c > 0$. Assim, pelo Teorema 3.2.1, existe uma sequência de funções simples $\varphi_n \in M^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$ que converge para a função f. Logo, a sequência $(c\varphi_n)$ converge para cf. Desta forma, ao aplicarmos o Teorema 3.1.4 e o Teorema 3.2.6, obtemos

$$\int cf d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int c\varphi_n d\mu = \lim_{n\to+\infty}\left(c\cdot\int \varphi_n d\mu\right) = c\cdot\left(\lim_{n\to+\infty}\int \varphi_n d\mu\right) = c\int f d\mu.$$

Como queríamos demonstrar.

$\square$

Corolário 3.2.8 Se f e g são funções não negativas e $\mathscr{C}$-mensuráveis, então a soma $f+g$ também é uma função $\mathscr{C}$-mensurável e vale $\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ (BARTLE, 1995).

Demonstração.

Analogamente ao corolário anterior, tomemos duas sequências de funções simples (φ_n) e (ψ_n) ambas monótonas e crescentes tal que convergem, respectivamente, para f e g. Segue, pelo Teorema 3.1.4 e o Teorema 3.2.6 que

$$\int (f+g)d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int (\varphi_n+\psi_n)d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int \varphi_n d\mu + \lim_{n\to+\infty}\int \psi_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

$\square$

Note que os resultados tratam apenas de funções monótonas e nem sempre teremos essa condição "perfeita" para nossas sequências. Assim, o próximo resultado nos apresenta uma maneira de trabalhar com sequências que não são monótonas.

Teorema 3.2.9 **(Lema de Fatou)** Se (f_n) é uma sequência tal que $f_n \in M^+(X,\mathscr{C})$ para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, então $\int (\liminf f_n)d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$ (BARTLE, 1995).

Demonstração.

Tome a sequência $g_m = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_m, f_{m+1}, \ldots\}$. Assim, enquanto $m \leq n$ nós temos $g_m \leq f_n$. Neste caso,

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu.$$

Como (g_m) é crescente e converge para $\liminf f_n$, nós temos que

$$\int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Uniforme,

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \lim \int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

$\square$

Corolário 3.2.10 Se $f \in M^+(X, \mathscr{C})$ e λ é definida sobre $\mathscr{C}$ pondo $\lambda(E) = \int_E f d\mu$, então λ é uma medida.

Demonstração.

Uma vez que $f \geq 0$, obtemos que $\lambda(E) \geq 0$, por definição. Caso $E = \varnothing$, então $f\chi_E \equiv 0$ acarretando que $\lambda(\varnothing) = 0$. Por fim, tome (E_n) uma sequência disjunta do conjunto $\mathscr{C}$ e defina f_n pondo

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}$$

Segue do Corolário 3.2.8 que

$$\int f_n d\mu = \int \left(\sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \left(\int f\chi_{E_k} \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{E_k} f \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k)$$

$\square$

Corolário 3.2.11 Suponha que $f \in M^+(X, \mathscr{C})$. Então $f(x) = 0$ em quase todo ponto de X se, e somente se $\int f d\mu = 0$.

Demonstração.

Suponha $f(x) = 0$ μ-q.t.p. Assim, se $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Tome a sequência $f_n = n\chi_E$. Dessa forma $f \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Segue, pelo Lema de Fatou que

$$0 \leq \int f d\mu \leq \int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu = 0.$$

Ou seja, $\int f d\mu = 0$. Reciprocamente, suponha que $\int f d\mu = 0$. Tome uma sequência de conjuntos $E_n = \left\{ x \in X . f(x) > \frac{1}{n} \right\}$ tal que $f \geq \left(\frac{1}{n} \right) \chi_{E_n}$. Assim, $\int f d\mu \geq \int \left(\frac{1}{n} \right) \chi_{E_n} d\mu$. Só que $\int \left(\frac{1}{n} \right) \chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(E_n) \geq 0$. Segue que

$$0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n) \geq 0$$

Ou seja $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, todo E_n tem medida nula. Segue, pela Proposição 2.2.20 que o conjunto $\{x \in X; f(x) > 0\}$ tem medida nula, pois $\{x \in X; f(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

$\square$

Finalizaremos esta subseção apresentando um corolário do Teorema da Convergência Monótona que enfatiza claramente a diferença entre a Integral de Riemann e a Integral de Lebesgue.

Corolário 3.2.12 Se (g_n) é uma sequência de funções em $M^+(X,\mathscr{C})$, então

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int g_n d\mu \right).$$

Demonstração.

O resultado sai imediatamente da aplicação do Teorema da Convergência Monótona considerando a sequência de funções $f_n \in M^+(X,\mathscr{C})\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ tais que $f_n = g_1 + \cdots + g_n$.

$\square$

Pode ser que, até agora, tudo que definimos e discorremos não apresente diferença relevante da teoria da Integral de Riemann, a menos de sua construção. Para que não haja dúvidas que a teoria da integração de Lebesgue generaliza a teoria da integração Riemann, vamos mostrar um contraexemplo do Corolário 3.2.12 para a integral de Riemann. Seja $C = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e defina a sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \chi_C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, como C é enumerável, segue que $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \chi_C(x)dx = 0$ [3]. Com isso, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$. Por outro lado, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ não é integrável segundo Rienmann.

3.3 Funções Integráveis

Definimos anteriormente apenas integrais de funções não negativas com respeito à uma medida μ. Nesta estenderemos, finalmente, este conceito para uma função qualquer de valores reais estendidos. Com isso,

Definição 3.3.1 Seja $L = (X,\mathscr{C},\mu)$ a coleção de funções integráveis que consiste de todas as funções reais $\mathscr{C}$-mensuráveis $f : X \to \mathbb{R}$ tais que as funções f^+ e f^- são ambas integrais finitas com respeito à medida μ. Neste caso, nós definimos a integral de f com respeito à medida μ como $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ Se, por ventura, E for um elemento da σ-álgebra $\mathscr{C}$, então definimos $\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$ (BARTLE, 1995).

[3] Isso é válido pelo seguinte teorema: "Para que uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ seja integrável, é necessário e suficiente que o conjunto **D** dos seus pontos de descontinuidade tenha medida nula" (LIMA, 2019, p.344).

Teorema 3.3.2 Uma função mensurável f é um elemento de L se, e somente se, $|f|$ é um elemento de L (BARTLE, 1995).

Demonstração.

Suponha que $f \in L$. Por definição, isso ocorre se, e somente se, as partes positiva e negativa de f são ambas elementos de M^+ e suas, respectivas integrais, são finitas. Devemos mostrar que

$$\int |f| d\mu = \int |f|^+ d\mu - \int |f|^- d\mu$$

Pela Definição 1.2.12, $|f|^- = 0$, logo $\int |f|^- d\mu = 0$. Pelo Lema 1.2.14 temos que $|f|^+ = |f| = f^+ + f^-$. Assim, $\displaystyle\int |f|^+ d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu$. Como $f^+ + f^- \in M^+(X, \mathscr{C})$, segue pelo corolário Corolário 3.2.8 que $\displaystyle\int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$, ou seja $\displaystyle\int |f|^+ d\mu$ é finita. Desta forma,

$$\int |f| d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu - 0 = \int |f|^+ d\mu - \int |f|^- d\mu$$

Logo, $|f| \in L$. A recíproca é totalmente análoga.

$\square$

Corolário 3.3.3 Se $|f| \in L$, então $\displaystyle\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$ (BARTLE, 1995).

Demonstração.

Se $|f| \in L$, então $f \in L$ pelo teorema anterior. Logo $\int f^+ d\mu$ e $\int f^- d\mu$ são finitas e não negativas. Desta forma

$$\begin{aligned}
\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| &= \left|\int f^+ d\mu + \left(-\int f^- d\mu\right)\right| \\
&\leq \left|\int f^+ d\mu\right| + \left|\left(-\int f^- d\mu\right)\right| \\
&= \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \\
&= \int (f^+ + f^-) d\mu \\
&= \int |f| d\mu.
\end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$.

$\square$

Corolário 3.3.4 Se f é mensurável, g é integrável e temos que $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo x, então f é integrável e $\displaystyle\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$ (BARTLE, 1995).

Demonstração.

Se f é mensurável, então para uma medida μ definida sobre $(X, \mathscr{C})$, tem-se que $f \in L$. Assim, pelo teorema Teorema 3.3.2 tem-se que $|f|$ é integrável. Como $|f|$ e $|g|$ são função não negativas, segue pelo lema Lema 3.2.4 que $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$.

$\square$

Teorema 3.3.5 Se $f, g \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

(a) A multiplicação por escalar $\alpha f \in L$ com $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$;

(b) A soma $(f+g) \in L$ com $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

Demonstração.

(a) Se $\alpha = 0$, então $\alpha f = 0$ em todo ponto de seu domínio. Assim, $\int \alpha f d\mu = 0 = \alpha \int f d\mu$.

Se $\alpha > 0$, então

$$\begin{aligned}\alpha \int f d\mu =& \alpha \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) \\ =& \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu \\ =& \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu.\end{aligned}$$

Perceba que $\alpha f^+ = (\alpha f)^+$ e $\alpha f^- = (\alpha f)^-$. Disso,

$$\int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu = \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = \int \alpha f d\mu.$$

Neste caso, $\alpha f \in L$ e temos $\alpha \int f d\mu = \int \alpha f d\mu$. O caso $\alpha < 0$ é totalmente análogo.

(b) Se $f, g \in L$, então $|f|, |g| \in L$ pelo teorema Teorema 3.3.2. Como $|f+g| \leq |f| + |g|$, segue que $f+g \in L$ pelo corolário Corolário 3.3.4. Além disso, pelo lema Lema 1.2.14, temos $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$. Somando membro a membro, temos

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$$

Como $(f^+ + g^+), (f^- + g^-)$ são funções integráveis não negativas, temos que

$$\int (f+g) d\mu = \int [f^+ + g^+ - (f^- + g^-)] d\mu$$

Pelo corolário Corolário 3.2.8

$$\begin{aligned}\int [f^+ + g^+ - (f^- + g^-)] d\mu &= \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu \\ &= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

Portanto, $\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

$\square$

Teorema 3.3.6 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo ponto para uma uma função real mensurável f. Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e $\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$ (BARTLE, 1995).

Demonstração.

Se (f_n) converge em quase todo ponto para a função f e $|f_n| \leq g$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então $f \leq g$ em quase todo ponto. Como g é integrável, segue pelo Corolário 3.3.4 que f é integrável. Além disso, note que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|f_n| \leq g \Leftrightarrow f_n \leq g \text{ ou } f_n \geq -g \Leftrightarrow g - f_n \geq 0 \text{ ou } g + f_n \geq 0$$

Caso tenhamos $g + f_n \geq 0$ podemos utilizar o Lema de Fatou e o Teorema 3.3.5 de forma que

$$\begin{aligned}
\int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g+f) d\mu \\
&\leq \liminf \int (g+f_n) d\mu \\
&= \liminf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\
&= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu
\end{aligned}$$

isso acarreta que

$$\int g d\mu + \int f d\mu \leq \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu.$$

Logo, $\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.

Caso ocorra $g - f_n \geq 0$, aplicamos novamente o Lema de Fatou e o teorema Teorema 3.3.5. Assim,

$$\int g d\mu - \int f d\mu = \int (g-f) d\mu \leq \liminf \int (g-f_n) d\mu \leq \int g d\mu + \liminf \int (-f_n) d\mu.$$

Lembre que $\liminf \int (-f_n) d\mu = -\limsup \int f_n d\mu$. Com isso,

$$\int g d\mu - \int f d\mu \leq \int g d\mu + \liminf \int (-f_n) d\mu = \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu.$$

Desta forma, $\int f d\mu \geq \limsup \int f_n d\mu$. Disso tudo, observamos que

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Portanto, $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

$\square$

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. 1. ed. New York: Wiley-Interscience, 1995.

LIMA, E. L. **Um Curso de Análise**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. v. 1.

RUDIN, W. **Principles of mathematical analysis**. 3d ed. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1976. (International series in pure and applied mathematics). ISBN 007054235X; 9780070542358.

ÍNDICE