**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO**

# UM ESTUDO SOBRE A TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

**FORTALEZA – CEARÁ**
**2023**

CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO

# UM ESTUDO SOBRE A TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro

FORTALEZA – CEARÁ

2023

Aos meus amados pais que foram a base sólida que sustentou e as asas que me impulsionaram. Com amor e gratidão, dedico este trabalho a vocês, cujo apoio incondicional e compreensão transcendem qualquer barreira acadêmica.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## SUMÁRIO

# 1 ESPAÇOS E FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Nesta seção é apresentado um preambulo para a teoria medida. Iniciaremos definindo $\sigma$-álgebra para que possamos construir espaços mensuráveis. Em seguida, abordaremos as funções mensurável. Todas as definições e resultados aqui explorados tiveram como principais fontes (LIMA, 2019), (BARTLE, 1995) e (MAGALHAES, 2011).

## 1.1 O Conceito de $\sigma$-álgebra

Saber o que é uma $\sigma$-álgebra e conseguir identificá-la em um espaço mensurável é fundamental para esta teoria. Com isso, esta seção é dedicada para explorar definição, exemplos e propriedades sobre essa. Vale ressaltar que é esperado que o leitor esteja familiarizado com a teoria elementar de conjuntos, bem como os conceitos principais de cálculo diferencial e integral. Mesmo assim, em alguns momentos alguns conceitos e propriedades particulares são retomadas.

**Definição 1.1.1** *Seja $X$ um conjunto não vazio. Uma família $\mathscr{C}$ de subconjuntos de $X$ é dita uma $\sigma$-álgebra se as seguintes condições são atendidas:*

*(i) $\varnothing$ e $X$ são elementos de $\mathscr{C}$;*

*(ii) Se um elemento $A \in \mathscr{C}$, então $A^c \in \mathscr{C}$ [1];*

*(iii) Se $(A_n)$ é uma sequência de elementos de $\mathscr{C}$, então $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}$.*

Um par ordenado $(X,\mathscr{C})$ constituído de um conjunto $X$ e uma $\sigma$-álgebra sobre $X$ é chamado de **espaço mensurável** . Além disso, cada elemento deste espaço é chamado de conjunto $\mathscr{C}-$mensurável. Quando não houver confusão ou quando a $\sigma$-álgebra estiver fixada, dizemos simplesmente que cada elemento é um conjunto mensurável.

**Observação 1.1.1** *Em todo o texto, indicaremos por $I_n$ o conjunto dos $n$ primeiros números naturais. Assim, $I_n = \{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n\}$.*

**Proposição 1.1.1** *Seja $\mathscr{C}$ uma $\sigma$-álgebra de um conjunto $X$. Se $A_1, ..., A_n$ são todos elementos quaisquer de $\mathscr{C}$, então $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$ é um elemento de $\mathscr{C}$.*

*Demonstração.*

Seja $A_1, \dots, A_n$ elementos de $\mathscr{C}$. Construa uma sequência $(B_n)$ tal que $B_j = A_j$ para

[1] Em todo o texto, $X^c$ significa o *complementar do conjunto $X$*.

todo $j \in I_n$ e $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$. Desta forma, pelo item *(iii)* da definição de $\sigma$-álgebra , temos que $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Como $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathscr{C}$, segue que $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathscr{C}$.

$\square$

**Exemplo 1.1.1** *Seja $X = \{-1, 0, -1\}$. Se considerarmos $\mathscr{C} = \{\varnothing, X, \{0\}, \{-1, 1\}\}$, temos que $(X, \mathscr{C})$ é um espaço mensurável.*

**Exemplo 1.1.2** *Seja $X$ um conjunto qualquer. O conjunto $\mathscr{C}_1 = \{\varnothing, X\}$ é uma $\sigma$-álgebra de $X$.*

De fato, podemos observar que, nesse exemplo, todas as condições impostas na definição 1.1.1 são atendidas de maneira trivial, pois $\varnothing$ e $X$ são todos os elementos de $\mathscr{C}_1$. Assim, $(X, \mathscr{C}_1)$ é um espaço mensurável. Perceba que a definição 1.1.1 não nos diz que uma $\sigma$-álgebra de um conjunto é única. Realmente, não é. Assim, um conjunto pode gerar espaços mensuráveis diferentes a depender da $\sigma$-álgebra adotada. Para evidenciar essa percepção, observe o exemplo a seguir:

**Exemplo 1.1.3** *Seja $X$ dado de maneira arbitrária conforme o exemplo anterior. Considere, agora, o conjunto $\mathscr{C}_2 = \{A;\ A \subset X\}$, ou seja, o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto $X$.* [2]

Sabemos que $\varnothing \subset X$ e $X \subset X$. Assim, $\varnothing, X \in \mathscr{C}_2$. Se tomarmos um conjunto $A \subset \mathscr{C}_2$, então $A^c = X - A$ por definição. Ou seja, $A^c$ é formado por elementos que estão todos em $X$ caracterizando-o um elemento de $\mathscr{C}_2$. Da mesma forma, se tomarmos uma sequência $(A_j)$ de elementos de $\mathscr{C}_2$, a reunião $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ é composta por elementos de $X$. Logo, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}_2$. Com isso, $\mathscr{C}_2$ também é uma $\sigma$-álgebra de $X$ e o par $(X, \mathscr{C}_2)$ é um espaço mensurável que, por sua vez, é diferente do espaço $(X, \mathscr{C}_1)$.

Os exemplos apresentados acima são todos de conjuntos que são uma $\sigma$-álgebra de um conjunto $X$ arbitrário. Por definição, o conjunto $\mathscr{C}$ é composto de subconjuntos do conjunto $X$. Será que se construirmos $Z$ um conjunto que contenha $\varnothing$ e $X$ e outros subconjuntos do conjunto $X$ tomados aleatoriamente teremos $(X, Z)$ um espaço mensurável? A resposta é negativa e para convencê-lo disso, mostraremos o seguinte contra-exemplo.

**Contraexemplo 1.1.1** *Seja $X = \{x, y, z\}$. O conjunto $\mathscr{C} = \{\varnothing, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ não é uma $\sigma$-álgebra de X.*

[2] O conjunto $\mathscr{C}_2$ também é chamado de conjunto das partes de $X$ e, as vezes, é representado por $\mathscr{P}(X)$.

Sem dúvida, $\varnothing, X \in \mathscr{C}$. Entretanto, perceba que $\{x\} \in \mathscr{C}$, mas $\{x\}^c \notin \mathscr{C}$. De fato,

$$\{x\}^c = \{x,y,z\} - \{x\} = \{y,z\}.$$

Entretanto, $\{y,z\} \notin \mathscr{C}$. Assim, a segunda condição da definição 1.1.1 não é satisfeita impossibilitando que $\mathscr{C}$ seja uma $\sigma$-álgebra de $X$. Com isso, podemos ver que uma $\sigma$-álgebra não é construída de maneira tão trivial. Entretanto, ás vezes, em matemática, é interessante conseguirmos induzir, em algum conjunto, uma propriedade que desejamos. A proposição adiante nos mostra como podemos induzir uma $\sigma$-álgebra com um conjunto fixado não vazio em um conjunto.

**Proposição 1.1.2** *Seja $X$ e $A$ dois conjuntos quaisquer com $A \neq \varnothing$. Se $A \subset X$, então o conjunto $\mathscr{C} = \{\varnothing, X, A, A^c\}$ é uma $\sigma$-álgebra de $X$.*

*Demonstração.*

Perceba que as condições *(i)* e *(ii)* da definição 1.1.1 são satisfeitas pela forma que o conjunto $\mathscr{C}$ foi construído. Para verificar a última condição, basta perceber $A \cup A^c = X$. Assim, as sequências construídas terão comportamento análogo as do exemplo 1.1.3. Portanto, $\mathscr{C}$ é uma $\sigma$-álgebra de $X$ para qualquer que seja $\varnothing \neq A \subset X$.

□

**Exemplo 1.1.4** *Considere $X = \mathbb{N}$. Sejam $P = \{2k;\ k \in \mathbb{N}\}$ e $I = \{2k-1;\ k \in \mathbb{N}\}$. Como $P^c = I$, então $\mathscr{C} = \{\varnothing, \mathbb{N}, P, I\}$ é uma $\sigma$-álgebra de $\mathbb{N}$ pela proposição anterior.*

Observe que o conjunto $A$ que apresentamos na proposição 1.1.2 é um subconjunto não vazio do conjunto $X$ que fora tomado arbitrariamente. [3] Uma pergunta intuitiva é: se tomarmos um conjunto $A$ que não é subconjunto de $X$ o espaço $(X, \mathscr{C})$ continua sendo mensurável? A resposta é não. Se o conjunto $A$ não for subconjunto de $X$ não temos como garantir a validade da condição *(ii)* da definição 1.1.1, pois $A^c$ não é necessariamente um subconjunto de $X$ o que não permitiria os argumentos usados anteriormente na proposição 1.1.2.

Dito isso, note que a definição 1.1.1 e a proposição 1.1.1 tratam apenas da união enumerável ou finita, respectivamente. Nosso interesse, agora, é investigar se conseguirmos propriedades análogas para a operação de interseção. Iniciaremos verificando o comportamento de interseção de elementos de uma $\sigma$-álgebra com a proposição adiante.

[3] Observe que se $A = \varnothing$, a $\sigma$-álgebra é a mesma do exemplo 1.1.2.

**Proposição 1.1.3** *Seja $X$ um conjunto e $\mathscr{C}$ uma $\sigma$-álgebra desse conjunto. Se $(A_j)$ é uma sequência de conjuntos $\mathscr{C}$-mensuráveis, então $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ é um elemento $\mathscr{C}$-mensurável.*

*Demonstração.*

Se $A_j \in \mathscr{C}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então cada complementar $A_j^c \in \mathscr{C}$, pois $\mathscr{C}$ é $\sigma$-álgebra. Assim, $(A_j^c)$ forma uma sequência de conjuntos $\mathscr{C}$-mensuráveis acarretando que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \in \mathscr{C}$. Segue, pelas *Leis de Morgan* [4], que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c$$

Logo, $\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c \in \mathscr{C}$ o que implica $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}$. Portanto, $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ é um conjunto $\mathscr{C}$-mensurável.

□

Considere a $\sigma$-álgebra apresentada na proposição 1.1.2. Qualquer outra $\sigma$-álgebra $\mathscr{F}$ que tiver $A$ como elemento, conterá $\mathscr{C}$. Assim, observamos que

$$\mathscr{C} = \bigcap_{\mathscr{F} \supset A} \mathscr{F}.$$

Esta $\sigma$-álgebra $\mathscr{C}$ definimos como a *menor* $\sigma$-álgebra gerada por $A$. [5] Sabendo que a menor $\sigma$-álgebra é gerada por meio de intersecções é natural questionarmos se a interseção entre $\sigma$-álgebras ainda é uma $\sigma$-álgebra de $X$.Para responderemos à esta pergunta com a proposição adiante.

**Proposição 1.1.4** *Se $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são duas $\sigma$-álgebras de um conjunto $X$, então $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ também é uma $\sigma$-álgebra do conjunto $X$.*

*Demonstração.*

Se $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são $\sigma$-álgebras de $X$, então ambos possuem $\varnothing$ e $X$ como elementos. Assim, $\varnothing$ e $X$ estão na intersecção $\mathscr{C}$. Além disso, se $A \in \mathscr{C}$, então $A \in \mathscr{C}_1$ e $A \in \mathscr{C}_2$. Por serem ambas $\sigma$-álgebras , $A^c \in \mathscr{C}$ e $A^c \in \mathscr{C}_2$. Ou seja, $A^c \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \mathscr{C}$. Por fim, se tomarmos uma sequência $(A_n)$ de elementos de $\mathscr{C}$, observamos que $A_j \in \mathscr{C}_1$ e $A_j \in \mathscr{C}_2$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Assim, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}_1$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}_2$ pela definição de $\sigma$-álgebra . Logo, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}$. Com isso, $\mathscr{C}$ satisfaz todas as condições da definição 1.1.1. Portanto, $\mathscr{C}$ é uma $\sigma$-álgebra de $X$.

---

[4] Vide (LIMA, 2019, p.26)

[5] Lembre que a noção de "menor" aqui é trazida por meio da relação de ordem parcial gerada pela relação de inclusão entre conjuntos.

□

**Proposição 1.1.5** *Seja* $(\mathscr{C}_j)$ *uma sequência finita de* $\mathscr{C}_j$*-álgebras de um conjunto* $X$*, então* $\mathscr{C} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathscr{C}_j$*, com* $n \geq 2$*, também é uma* $\sigma$*-álgebra do conjunto* $X$*.*

*Demonstração.*

Provaremos esse resultado utilizando o método da indução finita sobre $n$. Se $n = 2$, o resultado é verificado imediatamente pela proposição 1.1.4. Suponha que se verifique para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é, $\bigcap_{j=1}^{k} \mathscr{C}_j$ é uma $\sigma$-álgebra de $X$. Vamos checar para o sucessor de $k$. Ora, pela associatividade da interseção, vemos que

$$\bigcap_{j=1}^{k+1} \mathscr{C}_j = \left( \bigcap_{j=1}^{k} \mathscr{C}_j \right) \cap \mathscr{C}_{k+1}\,.$$

Denote $\bigcap_{j=1}^{k} \mathscr{C}_j = H$. Sabemos por hipótese de indução que $H$ e $\mathscr{C}_{k+1}$ são $\sigma$-álgebras de $X$. Segue, pela base de indução, que $H \cap \mathscr{C}_{k+1}$ é uma $\sigma$-álgebra de $X$. Portanto, $\bigcap_{j=1}^{k+1} \mathscr{C}_j$ é uma $\sigma$-álgebra de $X$ como queríamos.

□

Note que há uma diferença gritante entre as proposições 1.1.3 e 1.1.4. A primeira trata de conjuntos mensuráveis de uma $\sigma$-álgebra e a outra refere-se à $\sigma$-álgebras de um conjunto $X$. Além disso, perceba que até aqui trabalhamos o conceito de $\sigma$-álgebra de maneira abstrata sendo utilizada em um conjunto qualquer. Trataremos, agora, de uma $\sigma$-álgebra extremamente importante e específica para o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

**Definição 1.1.2** *Seja* $X = \mathbb{R}$*. A Álgebra de Borel é a* $\sigma$*-álgebra* $\mathscr{B}$ *gerada por todos os intervalos abertos* $(-\infty, x)$ *com* $x \in \mathbb{R}$*. Os elementos dessa* $\sigma$*-álgebra são chamados de Borelianos.*

Esta $\sigma$-álgebra é extremamente relevante para os estudos de medida e integração e pode ser definida de várias formas diferentes, mas todas são equivalentes. Isso quer dizer que $(-\infty, x)$ não é a única forma dos elementos de $\mathscr{B}$. De fato, se $(-\infty, x) \in \mathscr{B}$, então $(-\infty, x)^c \in \mathscr{B}$ só que $(-\infty, x)^c = [x, +\infty)$. Assim, poderíamos definir $\mathscr{B}$ por meio de intervalos do tipo $[x, +\infty)$. Em particular, poderíamos ter definido a $\mathscr{B}$ por meio da $\sigma$-álgebra gerada por intervalos do tipo $(a, b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

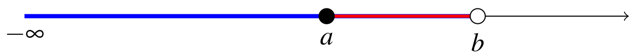
Antes de provamos este fato, observe que podemos decompor intervalos reais como a união de outros intervalos reais. Por exemplo, utilizando a reta real, podemos representar intervalo $(-\infty, b)$ da seguinte maneira

**Figura 1 – Representação do intervalo $(-\infty, b)$ na reta real**


Fonte: Elaborado pelo autor

Se tomarmos um $a \in \mathbb{R}$ fixo, com $a < b$, então a decomposição do intervalo $(-\infty, b)$ pode ser expressa por meio da união dos intervalos $(-\infty, a]$ e $(a, b)$, onde estão representados na figura a seguir pelas cores azul e vermelha respectivamente.

**Figura 2 – Representação de uma decomposição do intervalo $(-\infty, b)$ na reta real**




Fonte: Elaborado pelo autor

Embora a decomposição de intervalos reais pela união de outros é extremamente relevante para mostrar a seguinte equivalência sobre a $\sigma$-álgebra de Borel.

**Teorema 1.1.1** *Uma $\sigma$-álgebra é uma de Borel se, e somente se, é gerada por intervalos do tipo $(a, b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$.*

*Demonstração.*

Suponha que $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ é um espaço mensurável. Sejam $a$ e $b$ números reais, com $a < b$. Como $a - \dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que o intervalo $\left(-\infty, a - \dfrac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue, pela proposição 1.1.3, que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{n} \left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right) \in \mathscr{C}$. Com isso, afirmamos que a interseção de todos os intervalos $\left(-\infty, a-\frac{1}{n}\right)$ é igual ao intervalo $(-\infty, a]$. De fato,

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\infty, a-\frac{1}{n}\right) &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, a-\frac{1}{n}\right),\ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x < a - \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x \le \lim_{n\to\infty}\left(a-\frac{1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow x \le a \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, a]. \end{aligned}$$

Logo, $(-\infty, a] \in \mathscr{B}$ acarretando que $(a, +\infty) = (-\infty, a]^c \in \mathscr{B}$. Observe que podemos decompor $(-\infty, b) = (-\infty, a] \cup (a, b)$ enquanto que $(a, +\infty) = (a, b) \cup [b, +\infty)$. Desta forma, vemos que $(-\infty, b) \cap (a, +\infty) = (a, b)$. Como $(-\infty, b)$ e $(a, +\infty)$ são elementos de $\mathscr{B}$, segue pela proposição 1.1.3 que $(a, b) \in \mathscr{B}$. Com isso, $\mathscr{B}$ pode ser gerada por intervalos do tipo $(a, b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

Suponha, reciprocamente, que $\mathscr{C}$ é uma $\sigma$-álgebra de $\mathbb{R}$. Se $\mathscr{C}$ é gerada por intervalos do tipo $(a, b)$ onde $a, b \in \mathbb{R}$, então os conjuntos $A_n = (-n, b)$ são todos elementos de $\mathscr{C}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Segue, pela definição 1.1.1, que $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, b) \in \mathscr{C}$. Só que $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, b) = (-\infty, b)$. Com isso, os elementos de $\mathscr{C}$ são do tipo $(-\infty, b)$. Portanto, $\mathscr{C} = \mathscr{B}$.

□

## 1.2 Funções Mensuráveis

Agora que já estamos familiarizados com os conceitos de $\sigma$-álgebra e espaços mensuráveis, vamos aplicar, sobre este espaço uma função e estudar seu comportamento. [6] Iniciaremos tratando de funções à valores reais e estenderemos o conceito conforme haja necessidade. Além disso, a partir de agora, fixemos que quando não houver menção contrária, que $X$ será um conjunto qualquer diferente de $\varnothing$ e $\mathscr{C}$ será uma $\sigma$-álgebra desse conjunto.

**Definição 1.2.1** *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita $\mathscr{C}$-mensurável se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$.*

**Exemplo 1.2.1 (Função Constante)** *Seja $K \in \mathbb{R}$ um número fixado. A função $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = K$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é $\mathscr{C}$-mensurável.*

[6] Em todo o texto função, aplicação e mapa são sinônimos.

Para mostrarmos este fato, precisamos analisar os casos de $\alpha$. Assim

(I) Se $\alpha \geq K$, então o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \varnothing$ uma vez que não existe $x \in X$ tal que $f(x) = K > \alpha$.

(II) Se $\alpha < K$, então para todo $x \in X$, $f(x) > \alpha$. Logo, o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = X$.

Em todo caso, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$. Portanto, a função constante $f$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

**Exemplo 1.2.2 (Função Característica)** *Seja $(X, \mathscr{C})$ uma espaço mensurável e $A \in \mathscr{C}$. A função característica* [7] *de $A$ $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ definida por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & se \ \ x \in A \\ 0, & se \ \ x \notin A \end{cases}$$

*É $\mathscr{C}$-mensurável.*

Para verificar se $X_A$ é $\mathscr{C}$-mensurável precisamos, novamente, analisar os casos de $\alpha \in \mathbb{R}$.

(I) Se $\alpha \geq 1$, observamos que $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = \varnothing$, pois não há $x \in X$ tal que $\chi_A(x) > 1$.

(II) Se $0 < \alpha < 1$, então o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = A$, pois apenas valores $x \in A$ tem suas imagens $\chi_A(x) = 1$ e consequentemente $\chi_A(x) \geq \alpha$.

(III) se $\alpha \leq 0$, podemos notar que o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = X$, pois para qualquer que seja $x \in X$, os valores $\chi_A(x) \geq 0$.

Em todo o caso, vemos que o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\}$ é um elemento de $\mathscr{C}$, pois $\varnothing, X$ e $A$ são elementos de $\mathscr{C}$. Portanto, a função característica $\chi_A(x)$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

**Exemplo 1.2.3** *Considere o espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$. Toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua é Borel mensurável.*

Para mostrar a validade do exemplo acima, precisamos de resultados auxiliares que encontraremos em (LIMA, 2019). Um deles é a proposição abaixo.

**Proposição 1.2.1** *Suponha que $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua em todos os pontos de $X$. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um aberto* [8]*, então o conjunto $A = \{a \in X;\ f(a) > k\}$ é um aberto (p.226).*

Note que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} = (\alpha, +\infty)$. Logo, trata-se de um conjunto aberto. [9] Além disso, em (LIMA, 2019, p.167), encontramos o seguinte teorema:

[7] As vezes também é chamada função indicadora.
[8] Em caso de dúvida sobre o que é um subconjunto $X$ de $\mathbb{R}$ aberto, consulte (LIMA, 2019, p.164).
[9] Vide (LIMA, 2019, p.164).

**Teorema 1.2.1 (Estrutura de abertos da reta)** *Todo subconjunto aberto $A \subset R$ se exprime, de modo único, como um reunião enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos.*

Segue disso que o $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_n$ onde cada $A_n$ é um intervalo aberto, ou seja $A_n \in \mathscr{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, pela definição 1.1.1, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{B}$. Portanto, qualquer função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Borel mensurável.

Lembre que ao apresentarmos a Álgebra de Borel (definição 1.1.2), mostramos no teorema 1.1.1 que há mais de uma maneira de definir os borelianos. Para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}$-mensurável, também podemos definir uma função $\mathscr{C}$-mensurável por meio de conjuntos diferentes conforme o seguinte teorema.

**Teorema 1.2.2** *Sendo $(X, \mathscr{C})$ um espaço mensurável, para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}$-mensurável as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(a)* $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$;

*(b)* $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $B_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \le \alpha\} \in \mathscr{C}$;

*(c)* $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $C_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \ge \alpha\} \in \mathscr{C}$;

*(d)* $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{x \in X;\ f(x) < \alpha\} \in \mathscr{C}$.

*Demonstração.*

Dividiremos esta demonstração em três partes. A estratégia será mostrar que a afirmação $(a)$ é equivalente à afirmação $(b)$; depois que a afirmação $(c)$ é equivalente à afirmação $(d)$ ; e por fim que a firmação $(a)$ ocorre se, e somente se, a afirmação $(c)$ ocorre.

(I) Suponha a validade da afirmação $(a)$. Se $A_\alpha \in \mathscr{C}$, então $A_\alpha^c \in \mathscr{C}$, pela definição de $\mathscr{C}$-álgebra. Perceba que

$$x \in A_\alpha^c \Leftrightarrow x \notin A_\alpha \Leftrightarrow x \in X \text{ e } f(x) \le \alpha, \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in B_\alpha$$

Assim, um elemento está em $A_\alpha^c$ se, e somente se, está em $B_\alpha$. Segue que $A_\alpha^c = B_\alpha$. Logo, $B_\alpha$ é elemento de $\mathscr{C}$.

(II) Para mostrar a equivalência entre as afirmações $(c)$ e $(d)$ utilizamos um argumento totalmente análogo à parte $(I)$, pois se $x \notin C_\alpha$, então $f(x) < \alpha$ acarretando que $x \in D_\alpha$ e vice-versa.

(III) Suponha que $A_\alpha \in \mathscr{C}$. Tome a sequência $\left(A_{\alpha - \frac{1}{n}}\right)$. Claramente, cada $A_{\alpha - \frac{1}{n}}$ é um elemento de $\mathscr{C}$ por definição. Logo, pela proposição 1.1.3, a interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in \mathscr{C}$. Além disso, note que

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}} &\Leftrightarrow x \in A_{\alpha-\frac{1}{n}}, \forall\, n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow f(x) > \alpha - \frac{1}{n},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x) \geq \lim_{n\to\infty}\left(\alpha - \frac{1}{n}\right) \\
&\Leftrightarrow f(x) \geq \alpha \\
&\Leftrightarrow x \in C_\alpha
\end{aligned}
$$

Desta forma, $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}}$. Logo $C_\alpha \in \mathscr{C}$ como queríamos.

Reciprocamente, suponha que $C_\alpha \in \mathscr{C}$. Tomemos a sequência $\left(C_{\alpha+\frac{1}{n}}\right)$. Cada elemento $C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathscr{C}$ por definição. Assim, pela definição de $\sigma$-álgebra , $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathscr{C}$. Com isso, temos que

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} &\Leftrightarrow x \in C_{\alpha+\frac{1}{n_0}},\ \text{para algum } n_0 \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n_0} \\
&\Leftrightarrow f(x) > \alpha \\
&\Leftrightarrow x \in A_\alpha
\end{aligned}
$$

Assim, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} = A_\alpha$. Logo, $A_\alpha \in \mathscr{C}$. Portanto, segue de $(I), (II)$ e $(III)$ que as afirmações $(a), (b), (c)$ e $(d)$ são todas equivalentes.

$\square$

Perceba que mesmo na presença do teorema 1.2.2 acima, mostrar que uma função é mensurável é trabalhoso e repetitivo uma vez que, geralmente, é preciso verificar os casos de $\alpha$. Com o intuito de otimizar a identificação de uma função mensurável, veremos o comportamento de operações aritméticas entre funções mensuráveis.

**Proposição 1.2.2** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real $\mathscr{C}$-mensurável e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções $cf$, $f^2$ e $|f|$ são $\mathscr{C}$-mensuráveis.*

*Demonstração.*

(a) Mostraremos que $cf$ é $\mathscr{C}$-mensurável para todos os casos possíveis do número real $c \in \mathbb{R}$.

(i) Se $c = 0$, então $c \cdot f(x) = 0$, $\forall\, x \in X$, ou seja, $cf$ se torna a função constante. Segue pelo exemplo 1.2.1 que $cf$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

(ii) Se $c > 0$, então dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $cf(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \dfrac{\alpha}{c}$. Logo,

$$\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\}$$

Isso ocorre para todo $\alpha$ e $f$ é $\mathscr{C}$-mensurável, isto é, $\left\{x \in X; f(x) > \dfrac{\alpha}{c}\right\} \in \mathscr{C}$ . Logo, $cf$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

(iii) Por fim, se $c < 0$, então existe um $z \in \mathbb{R}$ tal que $c = -z$. Assim,

$$cf(x) > \alpha \Leftrightarrow -zf(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x) < -\frac{\alpha}{z}$$

Assim, o conjunto $\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) < -\dfrac{\alpha}{z}\right\}$. Desta forma, o conjunto $\left\{x \in X; f(x) < -\dfrac{\alpha}{z}\right\} \in \mathscr{C}$ pelo item $(d)$ do teorema 1.2.2. Portanto, $cf$ é $\mathscr{C}$-mensurável em todos os casos de $c \in \mathbb{R}$.

(b) Para mostrar a mensurabilidade de $f^2$ é também necessário analisar os casos de $\alpha$.

(i) Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} = X$, pois $[f(x)]^2 \geq 0$ para todo $x \in X$.

(ii) Se $\alpha \geq 0$, então para todo $x \in X$ $[f(x)]^2 > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \pm\sqrt{\alpha}$. Assim, um elemento $x_0 \in \{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\}$ se, e somente se, $x_0 \in \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\}$ ou $x_0 \in \{x \in X; f(x) > -\sqrt{\alpha}\}$. Com isso,

$$\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) > -\sqrt{\alpha}\}$$

Como $f$ é $\mathscr{C}$-mensurável por hipótese, temos que $\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{C}$ e $\{x \in X; f(x) > -\sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{C}$. Desta forma, usando a definição de $\sigma$-álgebra , obtemos que $\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) > -\sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{C}$. Consequentemente, $\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} \in \mathscr{C}$ acarretando a mensurabilidade de $f^2$.

(c) Analogamente ao item anterior, se $\alpha < 0$, $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = X$. Por outro lado, se $\alpha \geq 0$, vemos que $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X; f(x) > -\alpha\}$. Assim, a mensurabilidade de $f$ acarreta na mensurabilidade de $|f|$ como desejávamos.

$\square$

**Exemplo 1.2.4 (Função Afim)** *Seja a um número real diferente de zero. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ é $\mathscr{B}$-mensurável.*

De fato, pelo exemplo 1.2.3 a função $x$ é $\mathscr{B}$-mensurável, pois é contínua em $\mathbb{R}$. Segue pela proposição 1.2.2 que a função $ax$ também é $\mathscr{B}$-mensurável. Da maneira análoga, as funções $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que $g(x)=x^2$ e $h(x)=|x|$ são $\mathscr{B}$-mensuráveis. A seguir veremos a mensurabilidade de combinações de funções mensuráveis.

**Proposição 1.2.3** *Sejam $f,g:X\to\mathbb{R}$. Se $f$ e $g$ são ambas $\mathscr{C}$-mensuráveis, então as funções $f+g$ e $f\cdot g$ são também $\mathscr{C}$-mensuráveis.*

*Demonstração.*

Provaremos, primeiramente, que $f+g$ é $\mathscr{C}$-mensurável. Ora, por hipótese, $f$ e $g$ são $\mathscr{C}$-mensuráveis. Assim, dado $r\in\mathbb{Q}$, os conjuntos $\{x\in X; f(x)>r\}$ e $\{x\in X; g(x)>\alpha-r\}$ são ambos elementos de $\mathscr{C}$. Considere o conjunto

$$H_r=\{x\in X; f(x)>r\}\cap\{x\in X;\ g(x)>\alpha-r\}$$

Isto é, o conjunto dos elementos $x\in X$ tal que $f(x)>r$ e $g(x)>\alpha-r$ simultaneamente. Assim, afirmamos que $\{x\in X;(f+g)(x)>\alpha\}=\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} H_r$. Com efeito, as seguintes equivalências ocorrem para um elemento $a\in X$ tomado arbitrariamente

$$\begin{aligned}
a\in\{x\in X;(f+g)(x)>\alpha\} &\Leftrightarrow (f+g)(a)>\alpha\\
&\Leftrightarrow f(a)+g(a)>\alpha\\
&\Leftrightarrow f(a)+g(a)>\alpha-r+r \text{ para } r\in\mathbb{Q}\\
&\Leftrightarrow f(a)>r \text{ e } g(a)>\alpha-r \text{ para } r\in\mathbb{Q}\\
&\Leftrightarrow a\in\{x\in X; f(x)>r\} \text{ e } a\in\{x\in X; f(x)>\alpha-r\} \text{ para } r\in\mathbb{Q}\\
&\Leftrightarrow a\in\{x\in X; f(x)>r\}\cap\{x\in X; f(x)>\alpha-r\} \text{ para } r\in\mathbb{Q}\\
&\Leftrightarrow a\in H_r, \text{ para } r\in\mathbb{Q}\\
&\Leftrightarrow a\in\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} H_r.
\end{aligned}$$

Concluindo que a afirmação é verdadeira. Além disso, para cada $r\in\mathbb{Q}$, o conjunto $H_r$ é um elemento de $\mathscr{C}$, pois é a interseção de dois elementos de $\mathscr{C}$ (proposição 1.1.3). Note também que, pela definição de $\mathscr{C}$, a coleção $\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} H_r$ é um elemento de $\mathscr{C}$, pois $\mathbb{Q}$ é enumerável [10]. Segue que $f+g$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

[10] Em caso de dúvida, vide (LIMA, 2019, p.51).

Para mostrar que $fg$ é mensurável basta notar que é a combinação de outras funções $\mathscr{C}$-mensuráveis. De fato, dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}
4(fg)(x) &= 2(fg)(x) + 2(fg)(x) \\
&= [f(x)]^2 - [f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2 - [g(x)]^2 + 2f(x)g(x) \\
&= \left([f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2\right) - \left([g(x)]^2 - 2f(x)g(x) + [f(x)]^2\right) \\
&= (f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2 \\
&= [(f+g)(x)]^2 - [(f-g)(x)]^2.
\end{aligned}$$

Desta maneira, $fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$. Segue pela proposição 1.2.2 e a primeira parte desta demonstração que $fg$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

□

**Exemplo 1.2.5 (Função Polinomial)** *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ com cada $a_j \in \mathbb{R}$ é $\mathscr{B}$-mensurável.*

Com efeito, note que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Pelo exemplo 1.2.4 cada função $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_j(x) = a_j x^j$ é $\mathscr{B}$-mensurável. Além disso, pela proposição 1.2.3 a soma de funções mensuráveis é mensurável. Segue que $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ é uma função $\mathscr{B}$-mensurável.

**Definição 1.2.2** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que a* ***parte positiva*** *da função $f$ é a função $f^+ : X \to \mathbb{R}$ definida por $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}$. Semelhantemente, chamamos de a* ***parte negativa*** *da função $f$, a função $f^- : X \to \mathbb{R}$ definida por $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$.* [11]

É possível que a definição de parte positiva e negativa de funções fique um pouco abstrata em um primeiro contato. Numa tentativa de esclarecer ao máximo, daremos o seguinte exemplo:

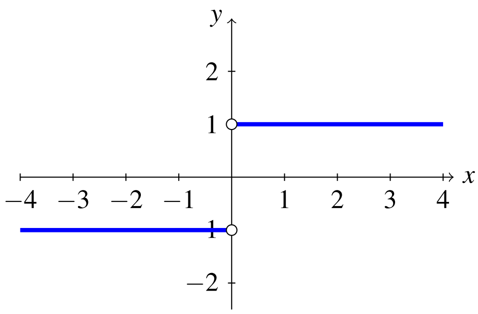
**Exemplo 1.2.6** *Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Então $f^+(x) = 1$ e $f^-(x) = -1$.*

De fato, ao tomarmos um elemento real $x < 0$, vemos que sua imagem $f(x) < 0$ sendo $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$. Se $x > 0$, então $f(x) = \frac{x}{x} = 1$. Assim, $f^+ = \sup\{f(x), 0\} = 1$ enquanto que $f^- = \sup\{-f(x), 0\} = -1$. Neste caso, podemos perceber, ao olhar para a imagem 3 a seguir que tanto a parte positiva quanto a parte negativa da função $f$ acima apresentada são

[11] Em caso de dúvidas sobre o supremo de um conjunto real, vide (LIMA, 2019, p.75).

ambas funções constantes.

**Figura 3 – Gráfico da Função** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$




Fonte: Elaborado pelo autor

Por serem constantes, já vimos que são mensuráveis. Mas e a função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$? Será que é mensurável? A resposta é sim e para mostrarmos isso precisaremos de alguns resultados auxiliares.

**Lema 1.2.1** *Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função real. Então* $f = f^+ - f^-$ *e* $|f| = f^+ + f^-$.

*Demonstração.*

Para provar que $f = f^+ - f^-$, devemos avaliar os casos de $f(x)$. Logo, se $f(x) \geq 0$, então $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} = f(x)$ e $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\} = 0$, pois $f(x) \geq 0 \Rightarrow -f(x) \leq 0$. Disso, $f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x)$, ou seja, $(f^+ - f^-)(x) = f(x)$, $\forall x \in X$. Caso $f(x) < 0$, então $-f(x) > 0$. Com isso, $\sup\{f(x), 0\} = 0$ e $\sup\{-f(x), 0\} = -f(x)$. Desta forma vemos que $f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x)$. Em todo caso, $f = f^+ - f^-$.

Analogamente, se $f(x) \geq 0$, então $\sup\{f(x), 0\} = f(x)$ e $\sup\{-f(x), 0\} = 0$. Assim, $f^+(x) + f^-(x) = f(x)$. Caso, $f(x) < 0$, então $-f(x) > 0$. Com isso, obtemos $\sup\{f(x), 0\} = 0$ e $\sup\{-f(x), 0\} = -f(x)$. Logo, $f^+(x) + f^-(x) = -f(x)$. Desta forma,

$$(f^+ + f^-)(x) = \max\{f(x), -f(x)\} = |f(x)|.$$

Portanto, $f^+ + f^- = |f|$.

$\square$

Observe que o lema 1.2.1 nos dá a forma das funções $f^+$ e $f^-$ de maneira implicita. De fato, somando as duas expressões membro a membro vemos que

$$f + |f| = (f^+ + f^+) - (f^- + f^-) = 2f^+$$

Assim, podemos expressar $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$. De modo semelhante, conseguimos subtrair membro a membro e obter a expressão $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$. Isso demonstra o lema adiante:

**Lema 1.2.2** *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função real, então $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$ e $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$.*

**Teorema 1.2.3** *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathscr{C}$-mensurável se, e somente se, suas partes negativa e positiva são ambas $\mathscr{C}$-mensuráveis.*

*Demonstração.*

Suponha que $f$ seja $\mathscr{C}$-mensurável. Pela proposição 1.2.2 vemos que a função $|f|$ é $\mathscr{C}$-mensurável e pelo lema 1.2.2 as funções $f^+ = \dfrac{1}{2}(|f|+f)$ e $f^+ = \dfrac{1}{2}(|f|-f)$ também são $\mathscr{C}$-mensuráveis. Desta forma, as funções $f^+$ e $f^-$ são combinações aritméticas de funções $\mathscr{C}$-mensuráveis. Segue pela proposição 1.2.3 que $f^+$ e $f^-$ são $\mathscr{C}$-mensuráveis. Reciprocamente, supondo que $f^+$ e $f^-$ são mensuráveis, temos pelo lema 1.2.1 que $f = f^+ - f^-$. Segue, novamente pela proposição 1.2.3, que $f$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

$\square$

Uma vez que foram apresentadas as definições de $\sigma$-álgebra , espaços mensuráveis e funções mensuráveis; nosso alicerce está totalmente consolidado para que possamos entender o que é uma medida medida sem muita dificuldade. Isso faremos na seção seguinte.

# 2 A TEORIA DA MEDIDA

## 2.1 Os Espaços de Funções Mensuráveis

As vezes, teremos conjuntos “grandes” de tal forma que sua medida não poderá ser expressa por um número real. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{R}$. Por ser infinito [1], consideramos que seu tamanho é “infinito” e representamos pelo simbolo $+\infty$. Entretanto, $+\infty$ não é um número real e sim uma conceito de “tão grande quanto se queira”. Para solucionar esta problemática, vamos considerar um novo sistema numérico.

**Definição 2.1.1** *A coleção $\overline{\mathbb{R}}$ que consiste de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ é chamada de* ***Sistema Estendido de Números Reais****.*

Ou seja, $\overline{\mathbb{R}}$ nada mais é que o conjunto dos números reais com a possibilidade de se ter $-\infty$ ou $+\infty$. Com isso, parece que nosso problema de medir conjuntos muito grandes se resolveu. Entretanto, alguns cuidados são necessários para operarmos em $\overline{\mathbb{R}}$. Um deles, por exemplo, é que $\overline{\mathbb{R}}$ não é fechado para operações de $\mathbb{R}$ tais como $(+\infty) + (-\infty)$ que nem definido é. Dito isso, para $x \in \mathbb{R}$, as operações dos símbolos $+\infty$ e $-\infty$ são dadas da seguinte forma:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
- $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$;
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;
- $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$;
- $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$;
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$;
- $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$;
- $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$.

Na multiplicação, dependendo do número real, a operação diferencia-se. Assim, podemos ter

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = \begin{cases} +\infty, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -\infty, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \begin{cases} -\infty, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ +\infty, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Neste novo contexto de números reais a $\sigma$-álgebra de Borel não é mais válida uma vez que a definição 1.1.2 não inclui $+\infty$ nem $-\infty$. Com isso, considere $\overline{\mathbb{R}}$. Tomando um conjunto arbitrário $E \in \mathscr{B}$, com $\varnothing \neq E$, defina $E_1 = E \cup \{-\infty\}, E_2 = E \cup \{+\infty\}$ e $E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$.

[1] Vide (LIMA, 2019, p.86)

Desta forma, o conjunto $\overline{\mathscr{B}} = \bigcup\limits_{E\in\mathscr{B}} \{E, E_1, E_2, E_3\}$ é uma $\sigma$-álgebra de $\overline{\mathbb{R}}$. Com efeito, se $E \in \mathscr{B}$, então é um intervalo aberto conforme o teorema 1.1.1. Assim, $E_1, E_2, E_3$ e $E_4$ serão intervalos do tipo $[-\infty, x)$ ou $(x, +\infty]$ que são elementos de $\mathscr{B}$ acrescidos de $+\infty$ ou $-\infty$. Deste modo, é fácil verificar que se um elemento $A \in \overline{\mathscr{B}}$, então $A^c \in \overline{\mathscr{B}}$. Além disso, a união enumerável é, no máximo, o intervalo $[-\infty, +\infty]$ que é exatamente $\overline{\mathbb{R}}$. Desta forma, $\overline{\mathscr{B}}$ é uma $\sigma$-álgebra de $\overline{\mathbb{R}}$.

**Definição 2.1.2** *A $\sigma$-álgebra $\overline{\mathscr{B}} = \bigcup\limits_{E\in\mathscr{B}} \{E, E_1, E_2, E_3\}$ do conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ é chamada de Álgebra de Borel Estendida.*

Uma vez que estamos familiarizados com os conceitos de funções de valores reais mensuráveis, estamos prontos para estender este conceito para o conjunto $\overline{\mathbb{R}}$.

**Definição 2.1.3** *Sendo $(X, \mathscr{C})$ um espaço mensurável, uma função de valores reais estendidos $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita $\mathscr{C}$-mensurável caso o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$ para qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Denotaremos a família de todas as funções de valores reais estendidos de $X$ que são $\mathscr{C}$-mensuráveis por $M(X, \mathscr{C})$.

**Proposição 2.1.1** *Se $f \in \mathrm{M(X,}\mathscr{C})$, então $\{x \in X; f(x) = +\infty\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\}$.*

*Demonstração.*

Tome, de modo arbitrário, um elemento $a \in X$. Assim,

$$
\begin{aligned}
a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\} &\Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) > n\},\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ f(a) > n \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a) \geq \lim_{n\to\infty} n \\
&\Leftrightarrow f(a) \geq +\infty.
\end{aligned}
$$

Como estamos trabalhando com $\overline{\mathbb{R}}$, não existe elemento $x > +\infty$. Logo, o único elemento possível para $f(a)$ é $+\infty$. Assim, tudo isso ocorre se, e somente se, o elemento $a \in \{x \in X; f(x) = +\infty\}$ como queríamos. Além disso, note que cada $\{x \in X; f(x) > n\} \in \mathscr{C}$. Segue, pela proposição 1.1.3, que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\} \in \mathscr{C}$ acarretando que $\{x \in X; f(x) = +\infty\} \in \mathscr{C}$.

$\square$

**Proposição 2.1.2** *Se* $f \in \mathrm{M}(\mathrm{X},\mathscr{C})$, *então* $\{x \in X; f(x) = -\infty\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f(x) > -n\}\right)^c$.

*Demonstração.*

Analogamente à proposição 2.1.1 tomemos $a \in X$. Segue que

$$\begin{aligned}
a \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f(x) > -n\}\right)^c &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\{x \in X; f(x) > -n\}\right)^c \\
&\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, a \in \left(\{x \in X; f(x) > -n\}\right)^c \\
&\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, a \notin \{x \in X; f(x) > -n\} \\
&\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, a \in \{x \in X; f(x) \leq -n\} \\
&\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, f(a) \leq -n \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a) \leq \lim_{n\to\infty}(-n) \\
&\Leftrightarrow f(a) \leq -\infty \\
&\Leftrightarrow f(a) = -\infty \\
&\Leftrightarrow a \in \{x \in X; f(x) = -\infty\}
\end{aligned}$$

Ora, cada $\{x \in X; f(x) > -n\} \in \mathscr{C}$. Assim, por definição de $\sigma$-álgebra , temos que $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f(x) > -n\} \in \mathscr{C}$ e também $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X; f(x) > -n\}\right)^c \in \mathscr{C}$. Concluímos disso que $\{x \in X; f(x) = -\infty\} \in \mathscr{C}$ como queríamos provar.

□

**Teorema 2.1.1** *Uma função de valores reais estendidos* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *é* $\mathscr{C}$*-mensurável se, e somente se, os conjuntos* $A = \{x \in X; f(x) = +\infty\}$ *e* $B = \{x \in X; f(x) = -\infty\}$ *são elementos de* $\mathscr{C}$ *e a função* $h : X \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & se\ x \notin A \cup B \\ 0, & se\ x \in A \cup B \end{cases}$$

*é* $\mathscr{C}$*-mensurável.*

*Demonstração.*

Suponha que $f \in \mathrm{M}(\mathrm{X},\mathscr{C})$. Logo, pelas proposições 2.1.1 e 2.1.2, os conjuntos $A$ e $B$ são elementos de $\mathscr{C}$. Assim, tome $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \geq 0$, então os elementos de $\{x \in X; h(x) > \alpha\}$

são os elementos de $\{x \in X; f(x) > \alpha\}$ que não estão em $A$, pois $h$ tem contradomínio $\mathbb{R}$. Como $\mathscr{C}$ é uma $\sigma$-álgebra , $A \in \mathscr{C} \Rightarrow A^c \in \mathscr{C}$. Com isso,

$$\{x \in X; h(x) > \alpha\} = A^c \cap \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$$

Segue, pela proposição 1.1.3 que $\{x \in X; h(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$, ou seja, $h$ é $\mathscr{C}$-mensurável. Caso, $\alpha < 0$, então $\{x \in X; h(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B$, pois $h(x) = 0$ para $x \in A \cup B$. Desta forma $h$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

Por outro lado, se supormos que $A$ e $B$ são elementos de $\mathscr{C}$ e $h$ é $\mathscr{C}$-mensurável, então

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; h(x) > \alpha\} \cup A$$

quando $\alpha \geq 0$, e

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; h(x) > \alpha\} - B$$

quando $\alpha < 0$ por motivos análogos à primeira parte da demonstração. Portanto, $f$ é uma função $\mathscr{C}$-mensurável como desejávamos.

□

Como consequência do teorema 1.2.2 e o teorema 2.1.1 obtemos, imediatamente, que se $f \in M(X, \mathscr{C})$, então as funções $cf, f^2, |f|, f^+$ e $f^-$ também são elementos de $M(X, \mathscr{C})$. Entretanto, um resultado análogo à proposição 1.2.3 não possível em $\overline{\mathbb{R}}$. Isso acontece porquê em $\overline{\mathbb{R}}$ a operação de adição não é bem definida. Então caso $f(x) = +\infty$ e $g(x) = -\infty$ para algum $x \in \mathbb{R}$ a adição $f(x) + g(x)$ não é realizada. Por outro lado, a função $fg$ é $\mathscr{C}$-mensurável se $f$ e $g$ forem ambas $\mathscr{C}$-mensuráveis. Para mostrar isso, precisamos do seguinte teorema

**Teorema 2.1.2** *Seja $(f_n)$ uma sequência de elementos de* $\mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$ *e defina as funções*

$$f(x) = \inf f_n(x),\ F(x) = \sup f_n(x),\ f^*(x) = \liminf f_n(x),\ F^*(x) = \limsup f_n(x).$$

*Então as funções $f, f^*, F$ e $F^*$ são elementos de* $\mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$.

*Demonstração.*

Como $(f_n)$ é uma sequência de funções $\mathscr{C}$-mensuráveis e $f = \inf f_n$, afirmamos que

$\{x \in ; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$. De fato, tomemos um elemento $h \in X$. Assim,

$$
\begin{aligned}
h \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} &\Leftrightarrow h \in \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow f_n(h) \geq \alpha\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(h) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} \alpha\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow f(h) \geq \alpha\ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow h \in \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}
\end{aligned}
$$

Como cada $\{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$ é $\mathscr{C}$-mensurável, segue pela proposição 1.1.3 que o conjunto $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Desta forma, $f$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

Observe, também, que $\{x \in X; F(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_(x) > \alpha\}$. Com efeito, para $h \in X$

$$
\begin{aligned}
h \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) > \alpha\} &\Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{N} \text{ tal que } h \in \{x \in X; f_k(x) > \alpha\} \\
&\Leftrightarrow f_k(h) > \alpha,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow F(x) \geq f_k(h) > \alpha,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow F(x) > \alpha,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow h \in \{x \in X; F(x) > \alpha\}
\end{aligned}
$$

Assim, concluímos que $f$ e $F$ são $\mathscr{C}$-mensuráveis. Note que a mensurabilidade de $f^*$ e $F^*$ vem de $f$ e $F$ uma vez que

$$f^*(x) = \sup_{n \geq 1} \left\{ \inf_{m \geq n} f_m(x) \right\} \text{ e } F^*(x) = \inf_{n \geq 1} \left\{ \sup_{m \geq n} f_m(x) \right\}$$

□

**Corolário 2.1.1** *Se $(f_n)$ é uma sequência em* M(X,$\mathscr{C}$) *que converge para $f$ em X, então $f$ também está em* M(X,$\mathscr{C}$).

*Demonstração.*

Ora, por hipótese $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$. Só que $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$. Segue que $f(x) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ que, por sua vez, é $\mathscr{C}$-mensurável pelo teorema anterior.

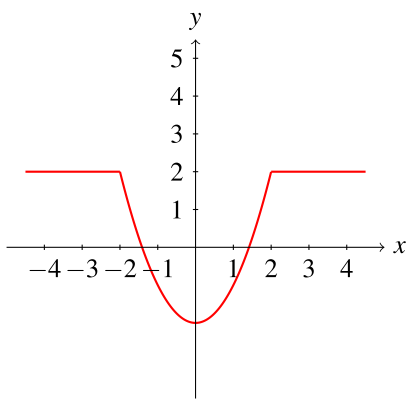
□

**Definição 2.1.4 (Truncamento de uma função mensurável)** *Seja $f$ uma função em* $\mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$ *e $A > 0$. Definimos o truncamento $f_A$ da função $f$ por*

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & se\ |f(x)| \leq A \\ A, & se\ f(x) > A \\ -A, & se\ f(x) < A \end{cases}$$

**Exemplo 2.1.1** *Seja $f \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$ tal que $f(x) = x^2 - 2$. Então o truncamento $f_2$ é representado, graficamente, como*

**Figura 4 – representação do truncamento $f_2$ da função $f(x) = x^2 - 2$**




Fonte**:** Elaborado pelo autor

Observe que a figura 4 mostra que o truncamento $f_2$ efetua uma espécie de "limitação" da função $f$ pela constante 2.

**Proposição 2.1.3** *Seja A um número real maior que zero. Se $f$ é uma função em* $\mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$*, então $f_A$ é uma função $\mathscr{C}$-mensurável.*

*Demonstração.*

De fato, se os elementos $x \in X$ são tais que $-A \leq f(x) \leq A$, então $f_A(x) = f(x)$. Logo $f_A$ é $\mathscr{C}$-mensurável, pois $f$ o é. Caso esses elementos sejam tais que $f(x) > A$ ou $f(x) < A$ a função $f_A$ é constante. Segue pela proposição 1.2.1 que $f_A$ é um elemento de $\mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$.

$\square$

Retornemos para a mensurabilidade do produto de duas funções com valores reais estendidos. Sejam $f, g \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$. Tomemos duas sequências $(f_n)$ e $(g_m)$ tais que para cada

$k \in \mathbb{N}$, $f_k$ e $g_k$ são truncamentos de $f$ e $g$, respectivamente. Ou seja,

$$g_m(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } |g(x)| \leq m \\ n, & \text{se } g(x) > m \\ -n, & \text{se } g(x) < m \end{cases}$$

e $f_n$ é definida de modo similar. Pela proposição 2.1.3, $f_n$ e $g_m$ são $\mathscr{C}$-mensuráveis para cada $n$ e $m$ números naturais. Assim, pela proposição 1.2.3 $f_n g_m$ também é $\mathscr{C}$-mensurável para quaisquer $n,m \in \mathbb{N}$. Como o truncamento de uma função $f$ causa uma "limitação" na função $f$ se tomarmos $n$ grande suficiente o truncamento $f_n$ tende a se aproximar da função $f$. Assim, para $x \in X$

$$\lim_{n \to +\infty} (f_n(x) g_m(x)) = f(x) g_m(x)$$

Segue pelo corolário 2.1.1 que $f g_m \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$. Com isso, temos que para $x \in X$

$$\lim_{m \to +\infty} (f(x) g_m(x)) = f(x) g(x) = (fg)(x)$$

Segue, pelo mesmo corolário, que $fg \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$.

Nos definimos a mensurabilidade de funções de maneira bem peculiar aos números reais uma vez que será o enfoque de nosso trabalho. Entretanto, em alguns casos, é necessário trabalhar com mensurabilidade de uma forma mais abstrata. Dito isso, encerraremos esta seção apresentando a definição generalizada de mensurabilidade de uma função.

**Definição 2.1.5** *Sejam $(X, \mathscr{C})$ e $(Y, \mathscr{F})$ dois espaços mensuráveis. Dizemos que uma função $\phi : (X, \mathscr{C}) \to (Y, \mathscr{F})$ é dita mensurável se o conjunto $f^{-1}(E) = \{x \in X; f(x) \in E\} \in \mathscr{C}$ para todo conjunto $E \in \mathscr{F}$.*

Embora essa definição pareça ser totalmente distinta da definição 1.2.1, as duas são equivalentes no caso particular de $Y = \mathbb{R}$ e $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ conforme demonstrado a seguir.

**Proposição 2.1.4** *Seja $(X, \mathscr{C})$ um espaço mensurável e $f$ uma função. Então $f$ é $\mathscr{C}$-mensurável se, e somente se. $f^{-1}(E) \in \mathscr{C}$ para todo boreliano $E$.*

*Demonstração.*

Suponha $f$ uma função $\mathscr{C}$-mensurável. Sabemos pela definição 1.1.2 que os elementos da álgebra de Borel são do tipo $(-\infty, x)$ com $x \in \mathbb{R}$. Assim, dado arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$f^{-1}(-\infty, \alpha) = \{x \in X; f(x) \in (-\infty, \alpha)\} = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\}$$

Como $f$ é $\mathscr{C}$-mensurável segue pelo teorema 1.2.2 que $f^{-1}(-\infty,\alpha) \in \mathscr{C}$. Reciprocamente se $f^{-1}(-\infty,\alpha) \in \mathscr{C}$ para qualquer $\alpha$ concluímos, imediatamente, que $\{x \in X; f(x) < \alpha\} \in \mathscr{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Portanto, $f$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

□

## 2.2 Espaços de Medida

Nas subseções anteriores, nós trabalhos com conjuntos e com funções mensuráveis, isto é, que podem ser medidas de alguma forma. Nesta subseção, nos preocuparemos em definir e trabalhar com funções de um espaço mensurável $(X,\mathscr{C})$ que daremos o nome de "medida". Tais funções são induzidas pela nossa concepção de comprimento, área, volume, etc. Dito isso, para trabalhamos com medidas primeiro retomaremos alguns resutlados sobre sequência de conjuntos.

**Definição 2.2.1** *Uma sequência de conjuntos $(A_n)$ é dita **crescente** se $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso tenhamos $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a sequência de conjuntos é **decrescente**.*

**Proposição 2.2.1** *Seja $(E_n)$ uma sequência crescente de conjuntos. Se $(A_n)$ é tal que $A_1 = E_1$ e $A_n = E_n - E_{n-1}$ para todo $n > 1$, então:*

*(i)* $A_n$ *é uma sequência disjunta;* [2]

*(ii)* $E_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_n$;

*(iii)* $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_n$;

*Demonstração.*

Para provar $(a)$ precisamos mostrar que para todo $n,m \in \mathbb{N}$ se $m \neq n$, então $A_n \cap A_m = \varnothing$. Lembre que $A - B = A \cap B^c$ para quaisquer conjuntos $A$ e $B$. Desta forma, como a interseção

[2] Lembre que uma sequência disjunta significa que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$

entre conjuntos é associativa e comutativa temos que

$$\begin{aligned}
A_m \cap A_n =& (E_m - E_{m-1}) \cap (E_n - E_{n-1}) \\
=& (E_m \cap E_{m-1}^c) \cap (E_n \cap E_{n-1}^c) \\
=& (E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1}^c \cap E_{n-1}^c) \\
=& (E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c
\end{aligned}$$

Com isso, se $m > n$, então $E_n \subseteq E_m$ e $E_{n-1} \subseteq E_{m-1}$, pois $(E_n)$ é uma sequência crescente. Além disso, $E_m^c \subseteq E_{m-1}^c$ e $E_m \cap E_m^c = \varnothing$. Segue que

$$(E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c = (E_m) \cap E_{m-1}^c = \varnothing$$

Caso tenhamos $m < n$ então $E_m \subseteq E_n$ e $E_{m-1} \subseteq E_{n-1}$. Segue analogamente que

$$(E_m \cap E_n) \cap (E_{m-1} \cup E_{n-1})^c = (E_n) \cap E_{n-1}^c = \varnothing$$

Em todo caso, $A_m \cap A_n = \varnothing$ para todo $m \neq n$.

Provaremos o item $(b)$ por indução sobre $n$. Como $(E_n)$ é crescente, temos que $E_1 \subseteq E_2$. Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{j=1}^{2} A_j = A_1 \cup A_2 =& E_1 \cup (E_2 - E_1) \\
=& E_1 \cup (E_2 \cap E_1^c) \\
=& (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_1^c) \\
=& (E_1 \cup E_2) \cap \mathscr{C} \\
=& (E_1 \cap E_2) = E_2
\end{aligned}$$

Suponha que exista um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{j=1}^{k} A_j = E_k$. Mostraremos que $\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j = E_{k+1}$ também é verdadeira. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j =& \left( \bigcup_{j=1}^{k} A_j \right) \cup A_{k+1} \\
=& E_k \cup A_{k+1} \\
=& E_k \cup (E_k - E_{k+1}) \\
=& E_k \cap E_{k+1} \\
=& E_{k+1}
\end{aligned}$$

Segue, pelo método da indução finita, que $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = E_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Por fim, $(c)$ é um resultado imediato, pois $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ se, e somente se, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0}$. Pelo item $(b)$, isso só ocorre se $x \in \bigcup_{j=1}^{n_0} A_j$. Mas isso é equivalente à dizer que existe um $k$ com $1 \leq k \leq n_0$ tal que $x \in A_k$. Como $k \in \mathbb{N}$ isso acontece se, e somente se, $x \in A_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Portanto $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

$\square$

**Proposição 2.2.2** *Seja $(F_n)$ uma sequência decrescente de conjuntos. Se $(E_n)$ é tal que $E_n = F_1 - F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(E_n)$ é crescente e $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = F_1 - \bigcup_{j=1}^{\infty} F_n$.*

*Demonstração.*

Queremos mostrar que $(E_n)$ é crescente, isto é, $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tome $x \in E_n$. Logo, $x \in F_1$ e $x \notin F_n$, por construção. Como $(F_n)$ é decrescente, $F_n \supseteq F_{n+1}$. Assim, $x \notin F_n \Rightarrow x \notin F_{n+1}$. Com isso, $x \in F_1$ e $x \notin F_{n+1}$. Segue que $x \in E_{n+1}$ e que $E_n \subseteq E_{n+1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ como queríamos. Além disso, um elemento $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ se, e somente se, $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F_1 - F_n)$. Isso é equivalente a dizer que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a \in F_1 - F_{n_0}$. Correspondentemente, $a \in F_1$ e existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin F_{n_0}$. Isso só ocorre se $x \in F_1$, mas $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Portanto, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_n = F_1 - \bigcup_{j=1}^{\infty} F_n$.

$\square$

**Definição 2.2.2** *Uma medida é uma função $\mu : (X, \mathscr{C}) \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que satisfaz as seguintes condições:*

*(i)* $\mu(\varnothing) = 0$*;*

*(ii)* $\mu(E) \geq 0, \ \forall A \in \mathscr{C}$*;*

*(iii) Se $(A_n)$ é uma sequência disjunta de elementos de $\mathscr{C}$, então* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Ou seja, uma medida é uma função não negativa que é contavelmente aditiva. Além disso, o valor de $\mu$ pode ser igual à $+\infty$ para algum conjunto $A \in \mathscr{C}$. Quando temos que $\mu(E) < +\infty$ para qualquer que seja o conjunto $E \in \mathscr{C}$, dizemos que temos uma medida finita.

**Definição 2.2.3** *Dizemos que uma tripla ordenada $(X, \mathscr{C}, \mu)$ constituída por um conjunto X, uma $\sigma$-álgebra $\mathscr{C}$ desse conjunto e uma medida $\mu$ sobre o espaço mensurável $(X, \mathscr{C})$ é um espaço de medida.*

**Exemplo 2.2.1** *Seja $X$ um conjunto e $\mathscr{C}$ a $\sigma$-álgebra formada por todos os subconjunto de $X$. Defina $\mu_1, \mu_2 : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ pondo $\mu_1(A) = 0$ para qualquer $A \in \mathscr{C}$ e $\mu_2$ é pondo*

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0, & se \ \ A = \varnothing \\ +\infty, & se \ \ A \neq \varnothing \end{cases}$$

*Sendo definidas dessa forma, as funções $\mu_1$ e $\mu_2$ são medidas.*

De fato, em ambas as condições *(i)* e *(ii)* são trivialmente satisfeitas. Para a condição *(iii)*, temos que qualquer sequência disjunta $(A_n)$ acarretará que

$$\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)$$

Para $\mu_2$ temos dois casos possíveis. Se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, então $\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$. Entretanto isso ocorre somente se $A_j = \varnothing$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(\varnothing) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Caso $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$, conseguimos observar que os termos da sequência $(A_n)$ só podem ser de dois tipos ou $A_j = 0$ ou $A_j = +\infty$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Com isso, $\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty$.

Ademais, na soma $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n)$ só teremos soma dos termos $0 + (+\infty)$ ou $(+\infty) + (+\infty)$. Desta forma, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) = +\infty$. Portanto $\mu_1$ e $\mu_2$ são medidas.

**Exemplo 2.2.2 (Probabilidade)** *Seja $(\Omega, \mathscr{C})$ um espaço mensurável. A função $\mathscr{P} : \mathscr{C} \to [0, 1]$ é dita uma probabilidade se satisfaz as propriedades:*

*(K1)* $\mathscr{P}(\Omega) = 1$;

*(K2)* $\mathscr{P}(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathscr{C}$;

*(K3) Se $(A_n)$ é uma sequência disjunta de elementos de $\mathscr{C}$, então* $\mathscr{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}(A_n)$. [3]

Observe que as condições da *(ii)* e *(iii)* da definição 2.2.2 são satisfeitas por definição da função de probabilidade. Resta provar que $\mathscr{P}(\varnothing) = 0$. Assim, com o auxilio das propriedades *(K1)* e *(K3)*, segue que

$$\mathscr{P}(\Omega) = \mathscr{P}(\Omega \cup \varnothing) = \mathscr{P}(\Omega) + \mathscr{P}(\varnothing) \Rightarrow \mathscr{P}(\Omega) = \mathscr{P}(\Omega) + \mathscr{P}(\varnothing)$$

Logo, $\mathscr{P}(\varnothing) = 0$. Portanto a função probabilidade é uma medida. Neste caso, o espaço de medida $(\Omega, \mathscr{C}, \mathscr{P})$ é chamado de espaço de probabilidades. Além disso, uma função $\mathscr{C}$-mensurável pela definição 2.1.5 em um espaço de probabilidades é chamada de variável aleatória.

**Exemplo 2.2.3 (Unidade de Medida Concentrada em $p$)** *Seja $(X, \mathscr{C})$ um espaço mensurável onde $\mathscr{C} = \mathscr{P}(X)$ e $p$ um elemento de $X$. Defina $\mu : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ como sendo*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & se \;\; p \notin A \\ 1, & se \;\; p \in A \end{cases}$$

*Então $\mu$ é uma medida. Verdadeiramente, observe que $p \notin \varnothing$, ou seja, $\mu(\varnothing) = 0$. Trivialmente, tem-se $\mu(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathscr{C}$, pela construção de $\mu$.*

**Exemplo 2.2.4** *Seja $X = \mathbb{N}$ e $\mathscr{C}$ sendo o conjunto das partes de $\mathbb{N}$. para $A \in \mathscr{C}$, definimos $\mu(A)$ por meio da sua cardinalidade, isto é, se $A$ é finito, então $\mu(A)$ é quantidade de elementos de $A$. Caso contrário, $\mu(A) = +\infty$.*

**Teorema 2.2.1** *Seja $\mu$ uma medida definida sobre uma $\sigma$-álgebra $\mathscr{C}$. Se $A$ e $B$ são elementos de $\mathscr{C}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Se $\mu(A) < +\infty$, então $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$.*

*Demonstração.*

Suponha que $A \subset B$, então $A = B \cup (B - A)$ e $A \cap (B - A) = \varnothing$. Segue pela propriedade $(ii)$ da definição 2.2.2 que

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$$

Lembre que $B - A = B \cap A^c$ e $A \in \mathscr{C} \Rightarrow A^c \in \mathscr{C}$. Além disso, como $B \in \mathscr{C}$ temos que $B \cap A^c$ consequentemente $B - A \in \mathscr{C}$. Assim, como $\mu$ é uma medida e $B - A \in \mathscr{C}$, temos que $\mu(B - A) \geq 0$. Segue que $\mu(B) \geq \mu(A)$. Observe que se $\mu(A) < \infty$, temos que

[3] As propriedades *K1, K2* e *K3* são chamadas de *Axiomas de Kolmogorov*

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B-A) \Leftrightarrow \mu(B) - \mu(A) = \mu(B-A)$$

Como desejávamos.

□

**Proposição 2.2.3** *Seja $\mu$ uma medida definida sobre uma $\sigma$-álgebra $\mathscr{C}$. Se $(E_n)$ é uma sequência crescente de $\mathscr{C}$, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.*

*Demonstração.*

Ora, se $\mu(E_n) = +\infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$ ambos os lados da equação acima são $+\infty$. Desta forma, vamos supor que $\mu(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, vamos construir uma sequência $(A_n)$ pondo $A_1 = E_1$ e $A_n = E_n - E_{n-1}$ para qualquer $n > 1$. Então pela proposição 2.2.1, $(A_n)$ é uma sequência disjunta, temos $E_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Como $\mu$ contavelmente aditiva,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$$

Pelo teorema **??** vemos que $\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1})$ para $n > 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) &= \lim_{m\to+\infty} (\mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_m)) \\
&= \lim_{m\to+\infty} (\mu(E_1) + \mu(E_2 - E_1) + \cdots + \mu(E_m - E_{m-1})) \\
&= \lim_{m\to+\infty} (\mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_m) - \mu(E_{m-1})) \\
&= \lim_{m\to+\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots - \mu(E_{m-1}) + \mu(E_m)) \\
&= \lim_{m\to+\infty} \mu(E_m)
\end{aligned}$$

Segue que $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

□

**Proposição 2.2.4** *Seja $\mu$ uma medida definida sobre uma $\sigma$-álgebra $\mathscr{C}$. Se $(B_n)$ é uma sequência decrescente de $\mathscr{C}$ e $\mu(B_1) < +\infty$, então $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$.*

*Demonstração.*

Defina uma sequência $(T_n)$ de elementos de $\mathscr{C}$ pondo $T_n = B_1 - B_n$ para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Pela proposição 2.2.2, $(T_n)$ é crescente. Assim, aplicando o a proposição 2.2.3 temos que

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(T_n)$$

Usando o teorema **??**, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(T_n) = \lim_{n\to+\infty} [\mu(B_1) - \mu(B_n)] = \mu(B_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)$$

Segue pela proposição 2.2.2 que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(T_n) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

Combinando as duas equações obtemos que

$$\mu(B_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

Portanto, $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$

□

Vimos quando tratamos de $\sigma$-álgebras a $\sigma$-álgebra de Borel que é muito relevante para o estudo da reta real. Da mesma forma, existe uma medida que é indispensável para o mesmo contexto. Essa, por sua vez, não será demonstrada, mas adotada como axioma à titulo de simplificação do trabalho. Assim,

**Axioma 1** *Sendo $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ um espaço mensurável, existe uma única medida $\lambda$ definida sobre $\mathscr{B}$ que coincide com o comprimento dos intervalos abertos.*

Em termos práticos, se $E$ é um intervalo real não vazio $(a,b)$, então $\lambda(E) = b - a$. Esta medida recebe o nome de Medida de Lebesgue. Embora tenha tido a necessidade de utilizar o sistema da reta estendida para definirmos uma medida, existem conjuntos tão pequenos que sua medida é desprezível. À esses damos o nome de conjunto de medida nula. Formalmente,

**Definição 2.2.4** *Seja $(X, \mathscr{C}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que um conjunto $E \subset \mathscr{C}$ tem medida nula em relação à medida $\mu$ se $\mu(E) = 0$.*

**Proposição 2.2.5** *Seja $(X,\mathscr{C},\mu)$ um espaço de medida. Se $\mu(X)=0$ e $Y\subset X$, então $\mu(Y)=0$.*

*Demonstração.*

Note que $(Y\cap X)\subset X$, pois $Y\cap X=Y$. Assim, pelo teorema 2.2.1, temos que

$$\mu(Y)=\mu(X\cap Y)\leq\mu(X)=0$$

Logo, $\mu(Y)\leq 0$. Segue que $\mu(Y)=0$, pois a medida é uma função não negativa.

□

**Proposição 2.2.6** *Seja $(X,\mathscr{C},\mu)$ um espaço de medida e $\{E_n\}$ uma sequência disjunta de elementos de $\mathscr{C}$. Se $Y=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ e $\mu(E_n)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, então $\mu(Y)=0$.*

*Demonstração.*

Analogamente à proposição anterior segue, imediatamente, que

$$\mu(Y)=\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)=0.$$

Assim, $\mu(Y)\leq 0$. Portanto, $\mu(Y)=0$.

□

Como exemplo, temos por definição, que $\varnothing$ tem medida nula, pois para qualquer medida $\mu$, $\mu(\varnothing)=0$. Mostraremos a seguir um exemplo menos trivial:

**Exemplo 2.2.5 (Medida de Conjuntos Discretos)** *Se $X\subset\mathbb{R}$ é um conjunto discreto, então tem medida nula com respeito à medida $\lambda$ de Lebesgue.*

De fato, se $X$ é discreto, então é formado por pontos. Assim, se $a\in X$, então pode ser representado degeneradamente, por $\{a\}=[a,a]$. Logo, $\lambda(\{a\})=a-a=0$. Assim, o conjunto $X$ é dado pela reunião enumerável de seus pontos e todos têm medida nula. Segue pela proposição 2.2.6 que $X$ tem medida nula.

# 3 TEORIA DA INTEGRAÇÃO

Uma vez que já foram bem explorados os espaços mensuráveis e os espaços de medida, vamos medir funções mensuráveis de fato. Iniciaremos por funções não negativas e iremos estendendo os conceitos aos poucos. Quando não houver menção contrária, $(X, \mathscr{C}, \mu)$ será um espaço de medida. O conjunto de todas as funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis será simplesmente denotado por $M = M(X, \mathscr{C})$ e o conjunto das funções não negativas, que também são $\mathscr{C}$-mensuráveis será denotado por $M^+ = M^+(X, \mathscr{C})$.

## 3.1 A Integral de Funções Simples

Iniciaremos tratando de casos particulares de integral e depois vamos expandindo. Com isso, iniciaremos entendo a integral para funções simples.

**Definição 3.1.1 (Função Simples)** *Uma função real é dita simples quando possui apenas uma quantidade finita de valores.*

**Observação 3.1.1** *Representaremos esse tipo de função, de forma padronizada em todo o texto, por meio da seguinte forma*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$$

*onde $a_j \in \mathbb{R}$ e $\chi_{E_j}$ é a função característica do conjunto $E_j \in \mathscr{C}$. Nessa representação estamos supondo que cada $a_j \in \mathbb{R}$ é diferente para todo $j \in \mathbb{N}$ e que $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = X$.*

**Exemplo 3.1.1** *Seja $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = 1$ se $x \in [0,2)$ e $f(x) = 2$ caso $x \in [2,4]$. Denotando $E_1 = [0,2), E_2 = [2,4], a_1 = 1$ e $a_2 = 2$ temos que*

$$f(x) = 1 \cdot \chi_{[0,2)}(x) + 2 \cdot \chi_{[2,4]}(x) = \sum_{j=1}^{2} a_j \chi_{E_j}(x)$$

*Além disso, $E_1 \cup E_2 = [0,2) \cup [2,4] = [0,4]$ e $a_1 = 1 \neq 2 = a_2$. Logo, $f$ é uma função simples.*

**Exemplo 3.1.2** *Seja $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ pondo*

$$g(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in [0,1] \\ 2, & se\ x \in [1,2) \\ 3, & se\ x \in [2,3) \\ 4, & se\ x \in [3,4] \end{cases}$$

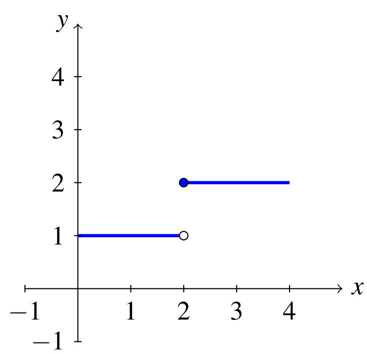
*Claramente, $g$ também é uma função simples. Basta denotar $E_1 = [0,1), E_2 = [1,2), E_3 = [2,3), E_4 = [3,4]$ e $a_i = i$ para $1 \leq i \leq 4$. Com isso, vemos que para $x \in [0,4]$*

$$g(x) = 1 \cdot \chi_{[0,1]}(x) + 2 \cdot \chi_{(1,2]}(x) + 3 \cdot \chi_{(2,3]}(x) + 4 \cdot \chi_{(3,4]}(x)$$

*Concluindo que* $g = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$.

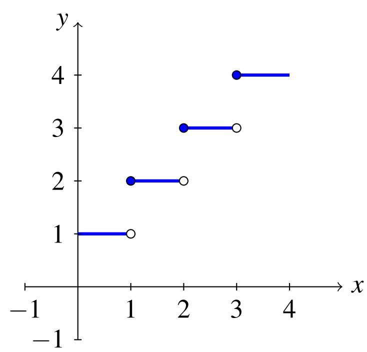
Note que os gráficos das funções $f$ e $g$ são, respectivamente.

**Figura 5 – Gráfico da Função** $f = \sum_{j=1}^{2} a_j \chi_{E_j}$




Fonte**:** Elaborado pelo autor

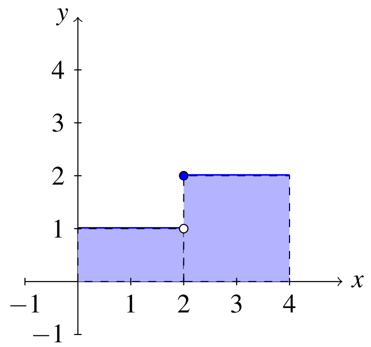
**Figura 6 – Gráfico da Função** $g = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$




Fonte**:** Elaborado pelo autor

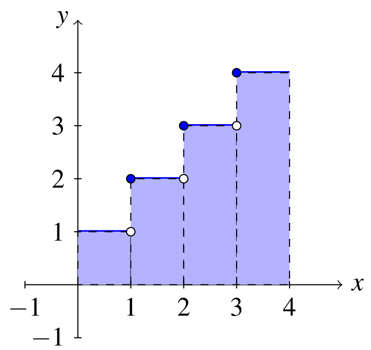
Agora pensemos na ideia de integral apresentada na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Se quiséssemos calcular a integral das funções acima somaríamos as áreas dos retângulos conforme ilustram as figuras a seguir.

**Figura 7 – Área delimitada pelo gráfico da função** $f = \sum_{j=1}^{2} a_j \chi_{E_j}$




Fonte**:** Elaborado pelo autor

**Figura 8 – Área delimitada pelo gráfico da função** $g = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$




Fonte**:** Elaborado pelo autor

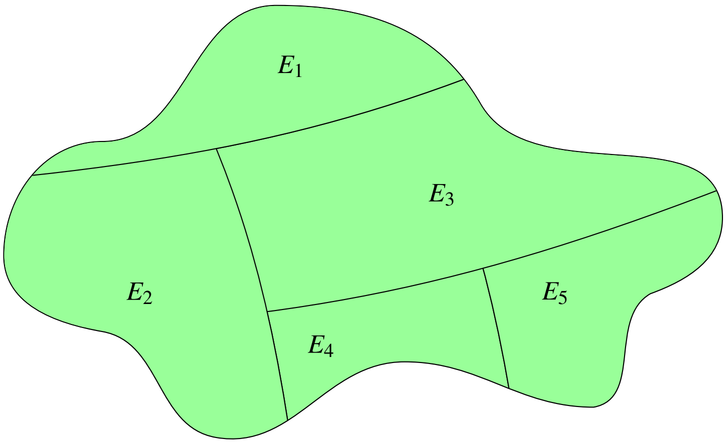
Note que em ambos os casos estamos, basicamente, aplicando o valor $a_j$ na medida do conjunto $E_j$ correspondente para $j$ igual ao número de partições do domínio. Com isso, temos a definição a seguir:

**Definição 3.1.2** *Se $\varphi$ é uma função simples de $M^+(X,\mathscr{C})$ com a representação apresentada anteriormente, então a integral da função $\varphi$ com respeito à medida $\mu$ é o valor real estendido*

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Para a definição 3.1.2 empregamos a convenção que $0 \cdot (+\infty) = 0$. Isto é feito para garantir que a função identicamente nula tenha integral nula independentemente da medida ser finita ou não. A seguir veremos propriedades elementares sobre a integral de funções simples. Antes disso, considere um espaço de medida $(X,\mathscr{C},\mu)$. Seja $\{E_n\}$ uma partição de $X$ com $n \in I_5$ conforme a representação a seguir.

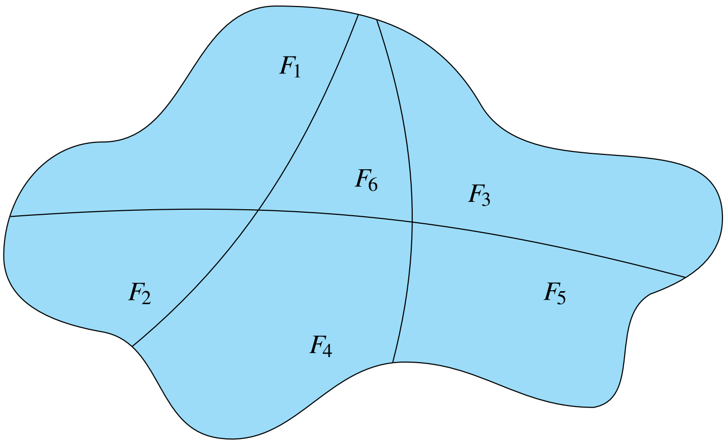
**Figura 9 – Partição $\{E_n\}$ do conjunto $X$**




Fonte: Elaborado pelo autor

Tome também uma outra partição $\{F_m\}$ onde $m \in I_6$.

**Figura 10 – Partição $\{F_m\}$ do conjunto $X$**




Fonte: Elaborado pelo autor

Claramente, ao observar as figuras acima, podemos ver que $E_3$ possui interseção com $F_j$ para todo $j \in I_6$. Assim, $E_5 = \bigcup_{j=1}^{6}(F_j \cap E_5)$ com $(F_j \cap E_5) = \varnothing$, $\forall j \in I_6$. Logo,

$$\mu(E_5) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{6}(F_j \cap E_5)\right) = \sum_{j=1}^{6}\mu(F_j \cap E_5)$$

A igualdade acima é valida mesmo se o conjunto em questão não tiver interseção com todos os outros da partição. Neste caso, a interseção com os demais será vazia e soma associada à eles é 0. Basta observar, por exemplo, o conjunto $E_1$ que tem interseção com $F_1, F_6$ e $F_3$, mas não se intersecta com $F_2, F_4$ e $F_5$. Deste modo,

$$\sum_{j=1}^{6} \mu(F_j \cap E_3) = \mu(F_1 \cap E_3) + \mu(F_6 \cap E_3) + \mu(F_3 \cap E_3) = \mu(E_3)$$

Pois, $\mu(F_2 \cap E_3) = \mu(F_4 \cap E_3) = \mu(F_5 \cap E_3) = 0$.

**Teorema 3.1.1** *Se $\varphi$ e $\psi$ são funções simples do espaço $M^+(X, \mathscr{C})$ e $c \geq 0$ é uma constante real, então*

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu,$$

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

*Demonstração.*

Vamos representar as funções simples não negativas por $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ e $\psi = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{F_k}$. Caso $c = 0$, o resultado é verdadeiro trivialmente. Supondo $c > 0$, temos que

$$\int c\varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c \int \varphi \, d\mu.$$

Dadas as representações padrão de $\varphi$ e $\psi$, vemos que $\varphi + \psi$ tem a representação

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \chi_{E_j \cap F_k}.$$

Entretanto, essa representação não é, necessariamente, a representação padrão apresentada na definição 3.1.2, pois nada garante, previamente, que $a_j + b_k$ sejam distintos para $j \in I_n$ e $k \in I_m$. Com isso, sejam $c_h$, com $h \in I_p$, números distintos do conjunto $\{a_j + b_k;\ (j,k) \in I_n \times I_m\}$ e $G_h$ a união de todos os conjuntos $E_j \cap F_k \neq \varnothing$ tal que $a_j + b_k = c_h$. Assim,

$$G_h = \bigcup_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} E_j \cap F_k$$

A notação utilizada acima indica que a soma é realizada sobre todos os índices $j$ e $k$ tais que $a_j + b_k = c_h$. Como $E_j \cap F_k = \varnothing$, temos que

$$\mu(G_h) = \mu\left( \bigcup_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} E_j \cap F_k \right) = \sum_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} \mu(E_j \cap F_k)$$

Desta forma, conseguimos encontrar uma representação padrão que é dada por $\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{p} c_h \chi_{G_h}$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \psi) d\mu = \sum_{h=1}^{p} c_h \mu(G_h) &= \sum_{h=1}^{p} \sum_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} c_h \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{h=1}^{p} \sum_{\substack{j,k \\ a_j + b_k = c_h}} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k)
\end{aligned}$$

Ora, uma vez que $X$ é a união de ambas as famílias disjuntas $\{E_j\}$ e $\{F_k\}$, ou seja,

$$\bigcup_{j=1}^{n} E_j = X = \bigcup_{k=1}^{m} F_k$$

Se um elemento $x$ pertence à um conjunto $E_{j_0}$ para algum $j_0 \in I_n$, então deve existir um $k_0 \in I_m$ tal que $x \in F_{k_0}$. Assim, se fixamos um $j \in I_n$, então $\bigcup_{k \in I_m} F_k$ forma uma cobertura de $E_j$, isto é, $E_j \subset \bigcup_{k \in I_m} F_k$. Assim, $E_j \cap \left( \bigcup_{k \in I_m} F_k \right) = E_j$. Como $F_k$ é uma família disjunta segue que, para este $j$ fixado, temos

$$\mu(E_j) = \mu\left( E_j \cap \bigcup_{k \in I_m} F_k \right) = \mu\left( \bigcup_{k \in I_m} (E_j \cap F_k) \right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k).$$

Analogamente, ao fixarmos um $k \in I_m$, vemos que $\mu(F_k) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j \cap F_k)$. Empregando estes resultados ao que foi desenvolvido anteriormente obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k) = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$$

Segue que $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$ como queríamos.

□

**Lema 3.1.1** *Se $\mu$ é uma medida sobre $X$ e fixemos um elemento $A$ de $\mathscr{C}$, então a função $\lambda$ definida por $\lambda(E) = \mu(A \cap E)$, $\forall E \in \mathscr{C}$ também é uma medida sobre $X$.*

*Demonstração.*

Basta mostrar que $\lambda$ satisfaz as condições impostas na definição 2.2.2. Com isso, se $E = \varnothing$, então

$$\lambda(\varnothing) = \mu(A \cap \varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$$

Como $A$ e $E$ são elementos de $\mathscr{C}$, então $A \cap H$ também está em $\mathscr{C}$. Assim, por $\mu$ ser uma medida, temos que $\mu(A \cap E) \geq 0$ acarretando que $\lambda(E) \geq 0$. Por fim, tomemos uma sequência de elementos disjuntos $(E_n)$ em $\mathscr{C}$. Se $A = E_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$, não há o que fazer. Caso $A \cap E_j = \varnothing$ para qualquer que seja $j \in \mathbb{N}$, então $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cap A = \varnothing$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cap A =& (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \cdots) \cap A \\
=& (E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A) \cup \cdots \cup (E_n \cap A) \cup \cdots \\
=& \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap A)
\end{aligned}$$

Segue então que

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \cap A\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap A)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j)$$

Desta forma, concluímos que a função $\lambda$ acima definida é uma medida.

$\square$

**Lema 3.1.2** *Se $\mu_1, ..., \mu_n$ são medidas sobre $X$ e $a_1, ..., a_n$ são números reais não negativos, então a função $\lambda$ definida por $\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E), \forall E \in \mathscr{C}$ também é uma medida sobre $X$.*

*Demonstração.*

Como $\mu_j$ é uma medida para todo $j \in I_n$ e cada $a_j$ é maior ou igual à zero, temos que cada $a_j \mu_j(E) \geq 0$. Desta maneira, $\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E) \geq 0$. Além disso, podemos observar que $\lambda(\varnothing) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(\varnothing) = 0$. Tomemos uma sequência disjunta $(E_p)$ de elementos de $\mathscr{C}$. Logo,

$$\lambda\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_p\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_p\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{p=1}^{\infty} \mu_j(E_p)\right)$$

Afirmamos que $\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{p=1}^{\infty} \mu_j(E_p)\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E_p)\right)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_j \left( \sum_{p=1}^{\infty} \mu_j(E_p) \right) &= \sum_{j=1}^{n} a_j \left( \lim_{m\to+\infty} \sum_{p=1}^{m} \mu_j(E_p) \right) \\
&= \lim_{m\to+\infty} \left[ \sum_{j=1}^{n} a_j \left( \sum_{p=1}^{m} \mu_j(E_p) \right) \right] \\
&= \lim_{m\to+\infty} \left[ a_1 \left( \sum_{p=1}^{m} \mu_1(E_p) \right) + \cdots + a_n \left( \sum_{p=1}^{m} \mu_n(E_p) \right) \right] \\
&= \lim_{m\to+\infty} \left( \sum_{p=1}^{m} a_1\mu_1(E_p) + \cdots + \sum_{p=1}^{m} a_n\mu_n(E_p) \right) \\
&= \lim_{m\to+\infty} \sum_{p=1}^{m} \left( a_1\mu_1(E_p) + \cdots + a_n\mu_n(E_p) \right) \\
&= \lim_{m\to+\infty} \sum_{p=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} a_j\mu_j(E_p) \right) \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{n} a_j\mu_j(E_p) \right)
\end{aligned}$$

Disso tudo, obtemos que

$$\lambda \left( \bigcup_{p\in\mathbb{N}} E_p \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left( \sum_{p=1}^{\infty} \mu_j(E_p) \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{n} a_j\mu_j(E_p) \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda(E_p)$$

Como $\lambda$ satisfaz todas as condições impostas na definição 2.2.2 concluímos que $\lambda$ é uma medida.

$\square$

**Teorema 3.1.2** *A função $\lambda : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\lambda(E) = \int \varphi\chi_E \, d\mu$ para todo $E \in \mathscr{C}$ é uma medida sobre $\mathscr{C}$.*

*Demonstração.*

De maneira análoga ao teorema 3.1.1 podemos verificar que

$$\varphi\chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j\cap E}$$

Assim, temos que

$$\lambda(E) = \int \varphi\chi_E d\mu = \int \left( \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j\cap E} \right) d\mu = \sum_{j=1}^{n} \left( a_j \int \chi_{E_j\cap E} d\mu \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j \cap E)$$

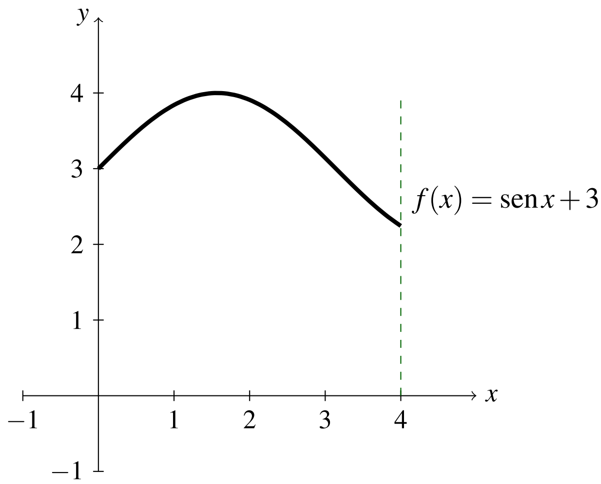
Pelo lema 3.1.1 a aplicação que leva $E \to \mu(E_j \cap E)$ é uma medida para cada $j \in I_n$. Disso, concluímos que $\lambda$ pode ser expressada por uma combinação linear de medidas sobre $\mathscr{C}$. Segue, pelo lema 3.1.2, que $\lambda$ também é uma medida sobre $\mathscr{C}$.

$\square$

## 3.2 A Integral de Funções Não-Negativas

Até aqui trabalhos apenas com integrais de funções simples apenas. Nesta seção, desejamos expandir o conceito de integral para uma função qualquer não negativa. Vale ressaltar que a perspectiva que traremos aqui é a de Lebesgue. Com o intuito de enfatizar a diferença da construção, vamos lembrar da construção feita por Riemann. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{seno}(x) + 3$. Claramente não é uma função simples, pois não possui uma quantidade finita de valores. Nosso objetivo, agora, é tentar calcular a integral dessa função com o que construímos até aqui. Para facilitar, analisaremos o gráfico dessa função no intervalo $[0,4]$.

**Figura 11 – Gráfico da função $f(x) = \mathbf{sen}(x) + 3$**



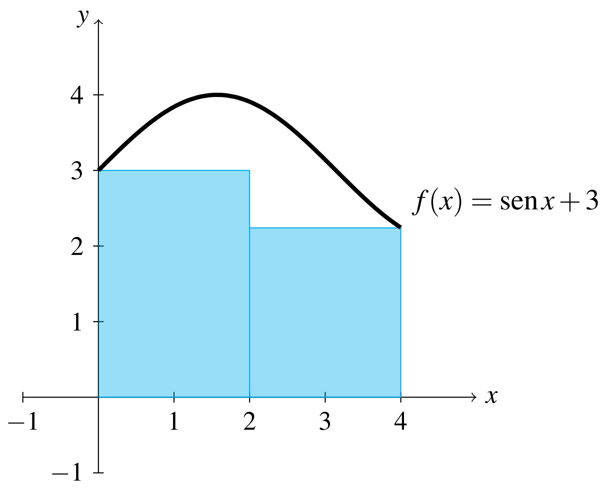

Fonte**:** Elaborado pelo autor

Tomemos a função simples

$$\phi_2(x) = \sum_{j=1}^{2} a_j \chi_{E_j}$$

onde $a_1 = f(0), a_2 = f(4); E_1 = [0,2)$ e $E_2 = [2,4]$. Assim, ao calcularmos sua integral, vemos não há preenchimento total da área delimitada pelo gráfico da função $f$, mas se aproxima com um erro conforme a seguinte figura.

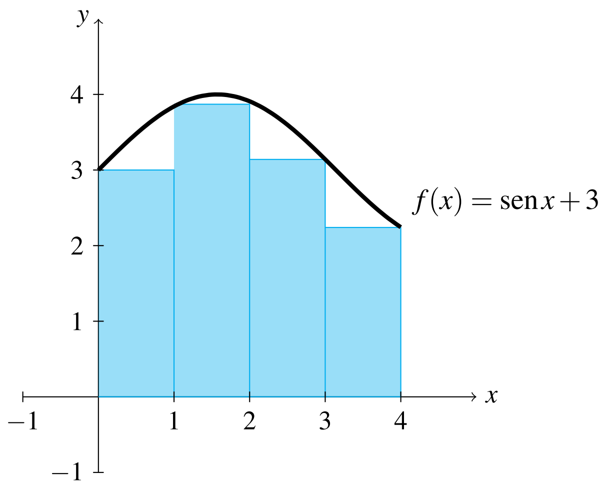
**Figura 12 – Integral da função $\phi_2$**




Fonte: Elaborado pelo autor

Vamos escolher outra função simples $\phi_4$ tal que $\phi_4 = \sum_{j=1}^{4} a_j \chi_{E_j}$ onde $E_1 = [0,1), E_2 = [1,2), E_3 = [2,3), E_1 = [3,4], a_1 = f(0), a_2 = f(1), a_3 = f(3)$ e $a_4 = f(4)$. Desta forma, com o dobro de valores da função $\phi_2$ escolhida anteriormente podemos observar que a integral de $\phi_4$ mais se aproxima da integral da função $f$.

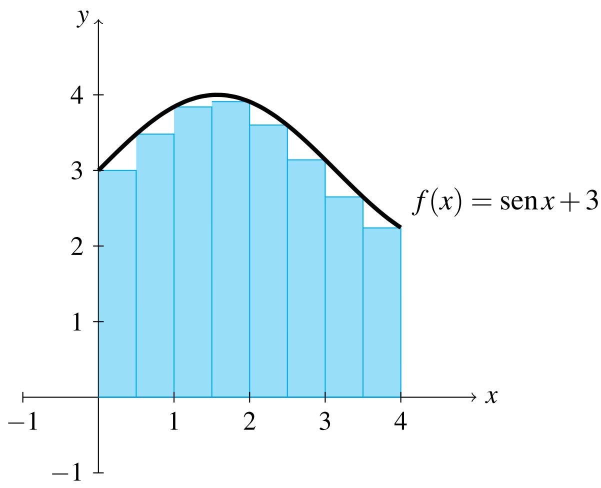
**Figura 13 – Integral da função $\phi_4$**




Fonte: Elaborado pelo autor

Para finalizarmos esta ideia, dobremos a quantidade de valores e escolhamos outra função $\phi_8 = \sum_{j=1}^{8} a_j \chi_{E_j}$ onde $E_1 = [0,0.5), E_2 = [0.5,1), E_3 = [1,1.5), E_4 = [1.5,2), E_5 = [2,2.5), E_6 = [2.5,3), E_7 = [3,2.5), E_8 = [3.5,4]$ e $a_1 = f(0), a_2 = f(0.5), a_3 = f(1), a_4 = f(1.5), a_5 = f(2.5), a_6 = f(3), a_7 = f(3.5)$ e $a_8 = f(4)$.

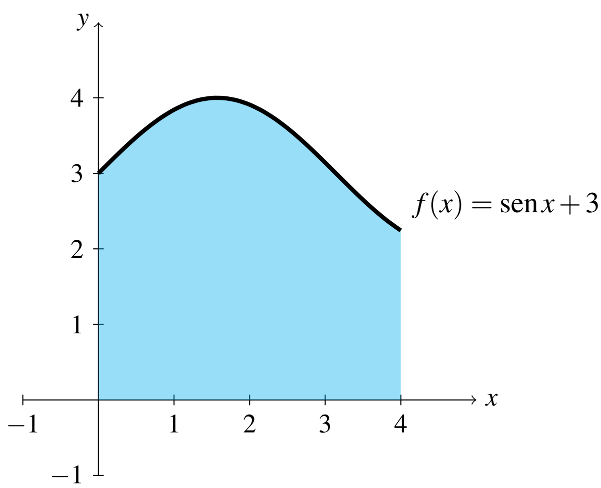
**Figura 14 – Integral da função $\phi_8$**




Fonte: Elaborado pelo autor

Com isso, observamos que quanto mais valores a função simples possui, mais ela se aproxima da função $f$ desde que nenhum valor ultrapasse o gráfico da função. Assim, a área da função simples será próxima o suficiente da área delimitada pelo gráfico da função $f$. Assim, se tomarmos o supremo dessas funções obteremos

**Figura 15 – Integral da função $f$**




Fonte: Elaborado pelo autor

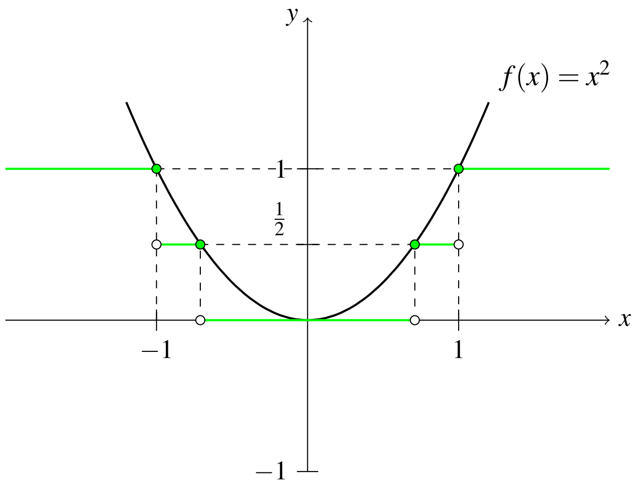
Agora, tomemos como exemplo a função $f(x) = x^2$, mas não invés de particionarmos o domínio da função, a função simples é construída conforme uma partição feita na imagem.

Assim, tomemos uma função $\phi_1$ pondo

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-1} \\ 2^{-1}, & \text{se } 2^{-1} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-1} \\ 1, & \text{se } f(x) \geq 1 \end{cases}$$

Note que a função $\phi_1$ é simples, mas seus valores são escolhidos por meio da partição da imagem conforme explicitado na imagem a seguir:

**Figura 16 – Gráfico da função $\phi_1$**




Fonte: Elaborado pelo autor

Na figura acima, o gráfico da função $\phi_1$ está representado pela cor verde.

Dito isto, adiante formalizaremos que dada uma função $f \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$, então ela pode ser aproximada por uma sequência de funções simples conforme o teorema

**Teorema 3.2.1 (Aproximação Via Funções Simples)** *Se $f$ é uma função não negativa em $\mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$, então existe uma sequência de funções $(\varphi_n) \subset \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$ tal que*

*(i) Cada $\varphi_n$ é uma função simples, isto é, possui apenas uma quantidade finita de valores reais;*

*(ii) $0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$;*

*(iii) $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.*

*Demonstração.*

Vamos mostrar a existência das sequência por construção. Essa construção será realizada por meio de partições da imagem da seguinte maneira:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(x) < 2^{-n} \\ 2^{-n}, & \text{se } 2^{-n} \leq f(x) < 2 \cdot 2^{-n} \\ 2 \cdot 2^{-n}, & \text{se } 2 \cdot 2^{-n} \leq f(x) < 3 \cdot 2^{-n} \\ \vdots & \vdots \\ k \cdot 2^{-n}, & \text{se } k \cdot 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) \cdot 2^{-n} \\ \vdots & \vdots \\ n, & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

Simplificadamente podemos escrever

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} k \cdot 2^{-n}, & \text{se } k \cdot 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) \cdot 2^{-n}, \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n2^n - 1 \\ n, & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

Com isso, podemos ver que $\varphi_n$ é uma função simples e que $0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x)$. Além disso, $\varphi_n$ é uma mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$, pois trata-se de uma sequência de um funções simples.

Observe que dado $n \in \mathbb{N}$ pelo que já provamos temos que

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x) \Leftrightarrow 0 \leq \varphi_n(x) - f(x) \leq 0$$

Pois, $\varphi_n$ e $f$ são funções não negativas. Assim, $0 \leq \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) - f(x) \leq 0$. Segue pelo teorema do confronto que $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = f(x)$.

$\square$

Esse teorema nos mostra que dada qualquer função não negativa mensurável, podemos aproximar seus valores por funções simples de maneira que o limite dessa sequência de funções simples convergem para a função que tomamos inicialmente. Diante disso, nada mais natural que definir a integral de Lebesgue para funções não negativas quaisquer da maneira que segue

**Definição 3.2.1** *Se $f \in M^+(X, \mathscr{C})$, nós definimos a integral de $f$ com respeito à medida $\mu$ sendo o valor real estendido*

$$\int f d\mu = sup \int \varphi d\mu$$

*Onde o supremo é sobre todas as funções simples $\varphi \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathscr{C})$ tal que a condição $0 \leq \varphi \leq f(x)$ para todo $x \in X$.*

**Definição 3.2.2** *Se $f \in \mathrm{M}(\mathrm{X},\mathscr{C})$ e $E \in \mathscr{C}$, então $f\chi_E \in \mathrm{M}(\mathrm{X},\mathscr{C})$ e nós definimos a integral de $f$ sobre o conjunto $E$ com respeito à medida $\mu$ como sendo o número real estendido*

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu$$

Agora desejamos realizar operações aritméticas com essa expansão da definição conforme fizemos para a integral de funções simples. Para tal, precisamos mostrar a monoticidade da integral de funções não negativas tanto à respeito de uma outra função integral quanto à um conjunto. Isso faremos por meio dos lemas a seguir

**Lema 3.2.1** *Se $f$ e $g$ são elementos de $M^+(X,\mathscr{C})$ com $f \leq g$, então*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

*Demonstração.*

Se $\varphi$ é uma função simples em $M^+(X,\mathscr{C})$ tal que $0 \leq \varphi \leq f$, então $0 \leq \varphi \leq g$, uma vez que $f \leq g$. Assim, $\sup_{\varphi leqf} \int \varphi d\mu \leq \int f d\mu$ e $\sup_{\varphi leqf} \int \varphi d\mu \leq \int g d\mu$. Subtraindo membro à membro temos

$$0 \leq \int f d\mu - \int g d\mu \Leftrightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

□

**Lema 3.2.2** *Se $f$ é um elemento de $M^+(X,\mathscr{C})$ e $E,F \in \mathscr{C}$ com $E \subseteq F$, então*

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

*Demonstração.*

Como $E \subseteq F$, então $chi_E \leq \chi_F$. Assim, $f chi_E \leq f\chi_F$. Segue, pelo lema anterior que,

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu \leq \int f\chi_F d\mu = \int_F f d\mu.$$

Portanto, $\displaystyle\int_E f d\mu = \int_F f d\mu$.

□

**Teorema 3.2.2 (Teorema da Convergência Monótona)** *Se $(f_n)$ é uma sequência monótona crescente de funções não negativas mensuráveis que converge para a $f$, então*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

*Demonstração.*

Pelo corolário 2.1.1, se temos uma sequência de funções mensuráveis que converge para uma função $f$, então $f$ também é mensurável. Além disso, como $(f_n)$ é crescente, então $f_n \leq f$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Seque, pelo lema 3.2.1 que

$$\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta maneira,

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Por outro lado, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$ e $\varphi$ uma função simples mensurável tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ tais que $f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)$, construa os conjuntos

$$A_n = \{x \in ;\ f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}.$$

Com isso, podemos observar que cada $A_n \in X$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ e que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Desta maneira, usando o lema 3.2.2 e 3.2.1 temos que

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu. \tag{1}$$

Como $(A_n)$ é uma sequência monótona crescente que a união é igual ao conjunto $X$, observamos que, pela proposição 2.2.3 que para uma medida $\mu$ vale

$$\mu(X) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

Só que pelo teorema 3.1.2 $\int \varphi\chi_E d\mu$ é uma medida. Desta forma,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int \varphi\chi_{A_n} d\mu = \int \varphi\chi_X d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Substituindo isso na equação 1 obtemos

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Como $\alpha \in (0,1)$ segue que

$$\int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Finalmente, por $\varphi$ ser uma função não negativa simples arbitrária que satisfaz $0 \leq \varphi \leq f$, obtemos

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Disso tudo,

$$\int f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Portanto, $\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$ como desejávamos.

$\square$

O teorema anterior nos permite mostrar as operações aritméticas para integral de Lebesgue para funções não negativas quaisquer como apresentaremos adiante.

**Corolário 3.2.1** *Se $f \in M^+$ e $c \geq 0$, então $cf \in M^+$ e vale*

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu.$$

*Demonstração.*

Se o número real for zero, então o resultado sai de forma imediata. Suponha que $c > 0$. Assim, pelo teorema 3.2.1, existe uma sequência de funções simples $(\varphi_n) \subset M^+$ que converge para a função $f$. Logo, a sequência $(c\varphi_n)$ converge para $cf$. Desta forma, ao aplicarmos os teoremas 3.1.1 e 3.2.2, obtemos

$$\int cf d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int c\varphi_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \left( c \cdot \int \varphi_n d\mu \right) = c \cdot \left( \lim_{n\to+\infty} \int \varphi_n d\mu \right) = c \int f d\mu.$$

Como queríamos demonstrar.

$\square$

**Corolário 3.2.2** *Se $f, g \in M^+$, então $f + g \in M^+$ e vale*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

*Demonstração.*

Analogamente ao corolário anterior, tomemos duas sequências de funções simples $(\varphi_n)$ e $(\psi_n)$ ambas monótonas e crescentes tal que convergem, respectivamente, para $f$ e $g$. Segue, pelos teoremas 3.1.1 e 3.2.2 que

$$\int (f+g) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int \varphi_n d\mu + \lim_{n\to+\infty} \int \psi_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

$\square$

Note que os resultados tratam apenas de funções monótonas e nem sempre teremos essa condição "perfeita" para nossas sequências. Assim, o próximo resultado nos apresenta uma maneira de trabalhar com sequências que não são monótonas.

**Teorema 3.2.3 (Lema de Fatou)** *Se* $(f_n) \subset M^+(X, \mathscr{C})$, *então* $\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.

*Demonstração.*

Tome a sequência $g_m = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{f_m, f_{m+1}, ...\}$. Assim, enquanto $m \leq n$ nós temos $g_m \leq f_n$. Neste caso,

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu.$$

Como $(g_m)$ é crescente e converge para $\liminf f_n$ nós temos que

$$\int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Uniforme,

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \lim \int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

□

**Corolário 3.2.3** *Se* $f \in M^+$ *e* $\lambda$ *é definida sobre* $\mathscr{C}$ *pondo* $\lambda(E) = \int_E f d\mu$, *então* $\lambda$ *é uma medida.*

*Demonstração.*

Uma vez que $f \geq 0$, obtemos que $\lambda(E) \geq 0$, por definição. Caso $E = \varnothing$, então $f\chi_E \equiv 0$ acarretando que $\lambda(\varnothing) = 0$. Por fim, tome $(E_n)$ uma sequência disjunta do conjunto $\mathscr{C}$ e defina $f_n$ pondo

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}$$

Segue do corolário 3.2.2 que

$$\int f_n d\mu = \int \left( \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \left( \int f\chi_{E_k} \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \left( \int_{E_k} f \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k) d\mu$$

□

**Definição 3.2.3** *Diremos que alguma propriedade ocorre em quase todo ponto de um conjunto* $X$ *com respeito à medida* $\mu$, *se ela não é valida somente em um subconjunto* $E$ *de* $X$ *que tem medida nula. Denotaremos esse acontecimento por* $\mu$*-q.t.p.*

**Corolário 3.2.4** *Suponha que* $f \in M^+$. *Então* $f(x) = 0$ *em quase todo ponto de* $X$ *se, e somente se* $\int f d\mu = 0$.

*Demonstração.*

Suponha $f(x) = 0$ $\mu$-q.t.p. Assim, se $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$. Tome a sequência $f_n = n\chi_E$. Dessa forma $f \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Segue, pelo Lema de Fatou que

$$0 \leq \int f d\mu \leq \int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu = 0.$$

Ou seja, $\displaystyle\int f d\mu = 0$. Reciprocamente, suponha que $\displaystyle\int f d\mu = 0$. Tome uma sequência de conjuntos $E_n = \left\{x \in X . f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ tal que $f \geq \left(\frac{1}{n}\right)\chi_{E_n}$. Assim, $\int f d\mu \geq \int \left(\frac{1}{n}\right)\chi_{E_n} d\mu$. Só que $\int \left(\frac{1}{n}\right)\chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0$. Segue que

$$0 = \inf f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0$$

Ou seja $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, todo $E_n$ tem medida nula. Segue, pela proposição 2.2.6 que o conjunto $\{x \in X; f(x) > 0\}$ tem medida nula, pois $\{x \in X; f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

$\square$

Finalizaremos esta subseção apresentando um corolário do Teorema da Convergência Monótona que enfatiza claramente a diferença entre a Integral de Riemann e a Integral de Lebesgue.

**Corolário 3.2.5** *Se $(g_n)$ é uma sequência de funções em $M^+$, então*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int g_n d\mu\right).$$

*Demonstração.*

O resultado sai imediatamente da aplicação do Teorema da Convergência Monótona considerando a sequência de funções $(f_n) \subset M^+$ tais que $f_n = g_1 + \cdots + g_n$.

$\square$

## 3.3 Funções Integráveis

Definimos anteriormente apenas integrais de funções não negativas com respeito à uma medida $\mu$. Nesta estenderemos, finalmente, este conceito para uma função qualquer de valores reais estendidos. Com isso,

**Definição 3.3.1** *Seja $L = (X, \mathscr{C}, \mu)$ a coleção de funções integráveis que consiste de todas as funções reais $\mathscr{C}$-mensuráveis $f : X \to \mathbb{R}$ tais que as funções $f^+$ e $f^-$ são ambas integrais finitas* *com respeito à medida $\mu$. Neste caso, nós definimos a integral de $f$ com respeito à medida $\mu$ como*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

*Se, por ventura, $E$ for um elemento da $\sigma$-álgebra $\mathscr{C}$, então definimos*

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

**Teorema 3.3.1** *Uma função mensurável $f$ é um elemento de $L$ se, e somente se, $|f|$ é um elemento de $L$.*

*Demonstração.*

Suponha que $f \in L$. Por definição, isso ocorre se, e somente se, as artes positiva e negativa de $f$ são ambas elementos de $M^+$ e suas, respectivas integrais, são finitas. Devemos mostrar que

$$\int |f| d\mu = \int |f|^+ d\mu - \int |f|^- d\mu$$

Pela definição 1.2.2, $|f|^- = 0$, logo $\int |f|^- d\mu = 0$. Pelo lema 1.2.1 temos que $|f|^+ = |f| = f^+ + f^-$. Assim, $\int |f|^+ d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu$. Como $f^+ + f^- \in M^+$, segue pelo corolário 3.2.2 que $\int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$, ou seja $\int |f|^+ d\mu$ é finita. Desta forma,

$$\int |f| d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu - 0 = \int |f|^+ d\mu - \int |f|^- d\mu$$

Logo, $|f| \in L$. A recíproca é totalmente análoga.

$\square$

**Corolário 3.3.1** *Se $|f| \in L$, então* $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$.

*Demonstração.*

Se $|f| \in L$, pelo teorema anterior, $f \in L$. Logo $\int f^+ d\mu$ e $\int f^- d\mu$ são finitas e não negativas. Desta forma

$$
\begin{aligned}
\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^{+} d\mu - \int f^{-} d\mu\right| &= \left|\int f^{+} d\mu + \left(-\int f^{-} d\mu\right)\right| \\
&\leq \left|\int f^{+} d\mu\right| + \left|\left(-\int f^{-} d\mu\right)\right| \\
&= \int f^{+} d\mu + \int f^{-} d\mu \\
&= \int (f^{+} f^{-}) d\mu \\
&= \int |f| d\mu.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$.

$\square$

# REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. 1. ed. New York: Wiley-Interscience, 1995.

LIMA, E. L. **Um Curso de Análise**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. v. 1.

MAGALHAES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. 3. ed. São Paulo: EdUsp, 2011.