UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO

UM ESTUDO INTRODUTÓRIO DA TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO DE LEBESGUE

FORTALEZA – CEARÁ
2023

CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO

UM ESTUDO INTRODUTÓRIO DA TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO DE LEBESGUE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro

FORTALEZA – CEARÁ

2023

CÍCERO MOREIRA HITZSCHKY FILHO

UM ESTUDO INTRODUTÓRIO DA TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO DE LEBESGUE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em: 11/12/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Flávio Alexandre Falcão Nascimento
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Aos meus amados pais que foram a base sólida que me sustentou e as asas que me impulsionaram. Com amor e gratidão, dedico este trabalho a vocês, cujo apoio incondicional e compreensão transcendem qualquer barreira acadêmica.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as bênçãos que me concedeu nesta vida.

Aos meus professores de ensino médio Ellen Lima e Renato Castro pelo incentivo aos estudos.

Aos professores Leo Ivo da Silva Souza e Jose Eduardo Moura Garcez pelos conselhos e motivações acadêmicas.

Ao Prof. Dr. Nícolas Alcântara de Andrade por me apresentar esta maravilhosa teoria no curso de probabilidade.

Ao Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro pela exímia orientação deste trabalho.

Aos colegas da Universidade Estadual do Ceará (UECE) por qualquer tipo de ajuda nesta etapa da minha vida.

“Demore o tempo que for para decidir o que você quer da vida, e depois que decidir não recue ante nenhum pretexto, porque o mundo tentará te dissuadir.”

(Friedrich Nietzsche)

RESUMO

A teoria da medida e da integração é um tema importante para o avanço nos estudos de matemática. Esta foi desenvolvida, inicialmente, por Bernhard Riemann (1826-1866), Georg Cantor (1845-1918) e Emile Borel (1871-1956) sendo generalizada posteriormente por Henri Lebesgue (1875-1941). A priori, seu desenvolvimento tinha o intuito de generalizar a integral de Riemann corrigindo o defeito de só valer para casos excepcionais com poucos pontos de descontinuidade. Nos dias atuais, possui aplicações nas mais diversas áreas tais como: Análise Funcional, Probabilidade, Estatística, Equações Diferenciais Parciais, dentre outras. Embora a teoria da integração de Lebesgue seja extremamente importante na atualidade não é comumente apresentada para alunos de graduação em ciências exatas. Dito isso, este trabalho visa abordar a teoria da medida e da integração de Lebesgue de maneira introdutória para alunos de graduação em ciências da natureza buscando expôr alguns dos resultados mais relevantes e elementares. Isso é feito utilizando uma metodologia de natureza básica com abordagem quantitativa através de uma revisão bibliográfica. Por meio dela, também conseguimos alcançar os seguintes objetivos específicos: definir a base do estudo da teoria da medida por meio dos espaços mensuráveis, conhecer a teoria da medida de maneira generalizada e descrever o processo da construção da integral de Lebesgue mediante o avanço da teoria da medida. Por fim, é sugerido uma proposta de exposição do tema abordado neste trabalho para alunos de graduação em ciências exatas.

Palavras-chave: teoria da medida; teoria da integração de Lebesgue; ensino de cálculo.

ABSTRACT

The theory of measure and integration is an important subject for advancing studies in mathematics. It was initially developed by Bernhard Riemann (1826-1866), Georg Cantor (1845-1918) and Emile Borel (1871-1956) being later generalized by Henri Lebesgue (1875-1941). Primarily, its development aimed to generalize Riemann's integral, correcting its limitation to exceptional cases. However, in modern times, it finds applications in various areas such as Functional Analysis, Probability, Statistics, Partial Differential Equations, among others. Despite the contemporary significance of Lebesgue's integration theory, it is not commonly presented to undergraduate students in exact sciences. Therefore, this work seeks to introduce Lebesgue's theory of measure and integration to undergraduate students in natural sciences, aiming to expose some of the most relevant and elementary results. This is done using a basic methodology with a quantitative approach through a literature review. Through this approach, we also achieve the following specific objectives: define the foundation of the study of measure theory through measurable spaces, understand the generalized theory of measure, and describe the process of constructing the Lebesgue integral as the measure theory advances. Finally, a proposal is suggested for presenting the topic covered in this work to undergraduate students in exact sciences.

Keywords: measure theory; Lebesgue integration theory; calculus education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 ESPAÇOS E FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Nesta seção, apresentaremos os conceitos que fundamentam a teoria da medida. Trataremos, especificadamente, de σ-álgebra, espaços mensuráveis e funções mensuráveis. Embora estejamos assumindo que o leitor já esteja familiarizado com a teoria de conjuntos, faremos algumas observações sobre notação de alguns conjuntos com o objetivo de cessar o maior número de dúvidas. Iniciaremos definindo σ-álgebra para que possamos construir espaços mensuráveis. Em seguida, abordaremos as funções mensuráveis. Todas as definições e resultados aqui explorados, bem como nas demais seções, tiveram como principal fonte o livro *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*[1] do autor Robert G. Bartle.

1.1 O Conceito de σ-álgebra

Para que possamos estabelecer uma "medida" precisamos de um ambiente que permita ser "medido". Criamos um ambiente como este adicionando uma estrutura algébrica específica em um conjunto. Tal estrutura recebe o nome de σ-álgebra e é definida em (**??**) da seguinte forma:

Definição 1.1.1 Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\mathscr{C}$ de subconjuntos de X é dita uma σ-álgebra se as seguintes condições são atendidas:

(i) $\varnothing$ e X são elementos de $\mathscr{C}$;

(ii) Se um elemento $A \in \mathscr{C}$, então $A^c \in \mathscr{C}$ [2];

(iii) Se (A_n) é uma sequência de elementos de $\mathscr{C}$, então $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}$.

Com isso, um par ordenado $(X, \mathscr{C})$ constituído de um conjunto X e uma σ-álgebra sobre X é chamado, pelo mesmo autor, de **espaço mensurável**. Além disso, cada elemento deste espaço é chamado de conjunto $\mathscr{C}-$mensurável. Quando não houver confusão ou quando a σ-álgebra estiver fixada, dizemos simplesmente que cada elemento é um conjunto mensurável. Observe que a terceira condição da Definição 1.1.1 nos diz que a união enumerável [3] é um elemento da σ-álgebra. Logo, para um número finito $A_1, A_2, ..., A_n$ com $n \in \mathbb{N}$ de elementos $\mathscr{C}$-mensuráveis de uma σ-álgebra $\mathscr{C}$, a união $\displaystyle\bigcup_{j \in I_n} A_j$ também será um elemento $\mathscr{C}$-mensurável.

Observação 1.1.2 Em todo o texto, indicaremos por I_n o conjunto dos n primeiros números naturais, isto é, $I_n = \{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n\}$.

---

[1] Em português: Os Elementos da Integração e Medida de Lebesgue.

[2] Em todo o texto, X^c significa o complementar do conjunto X.

[3] "Um conjunto X diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$." (**??**, p.48)

Exemplo 1.1.3 Seja $X = \{-1,0,1\}$. Se considerarmos $\mathscr{C} = \{\varnothing, X, \{0\}, \{-1,1\}\}$, temos que $(X,\mathscr{C})$ é um espaço mensurável.

Exemplo 1.1.4 Seja X um conjunto qualquer. O conjunto $\mathscr{C}_1 = \{\varnothing, X\}$ é uma σ-álgebra de X. De fato, podemos observar que, nesse exemplo, todas as condições impostas na Definição 1.1.1 são atendidas de maneira trivial, pois $\varnothing$ e X são todos os elementos de $\mathscr{C}_1$. Assim, $(X,\mathscr{C}_1)$ é um espaço mensurável.

Perceba que a Definição 1.1.1 não nos diz que uma σ-álgebra de um conjunto é única. Realmente, não é. Assim, um conjunto pode gerar espaços mensuráveis diferentes a depender da σ-álgebra adotada. Para evidenciar essa percepção, observe o exemplo a seguir:

Exemplo 1.1.5 Seja X conforme o exemplo anterior. Considere, agora, o conjunto $\mathscr{C}_2 = \{A;\ A \subset X\}$, ou seja, o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto X [4]. Sabemos que $\varnothing \subset X$ e $X \subset X$. Assim, $\varnothing, X \in \mathscr{C}_2$. Se tomarmos um conjunto $A \subset \mathscr{C}_2$, então $A^c = X - A$ por definição. Ou seja, A^c é formado por elementos que estão todos em X caracterizando-o um elemento de $\mathscr{C}_2$. Da mesma forma, se tomarmos uma sequência (A_j) de elementos de $\mathscr{C}_2$, a reunião $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ é composta por elementos de X. Logo, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}_2$. Com isso, $\mathscr{C}_2$ também é uma σ-álgebra de X e o par $(X,\mathscr{C}_2)$ é um espaço mensurável que, por sua vez, é diferente do espaço $(X,\mathscr{C}_1)$.

Os exemplos apresentados acima são todos de conjuntos que são uma σ-álgebra de um conjunto X arbitrário. Por definição, o conjunto $\mathscr{C}$ é composto de subconjuntos do conjunto X. Será que se construirmos Z um conjunto que contenha $\varnothing$ e X e outros subconjuntos do conjunto X tomados aleatoriamente teremos (X,Z) um espaço mensurável? A resposta é negativa e para convencê-lo disso, mostraremos o seguinte contra-exemplo.

Contraexemplo 1.1.6 Seja $X = \{x,y,z\}$. O conjunto $\mathscr{C} = \{\varnothing, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ não é uma σ-álgebra de X. Sem dúvida, $\varnothing, X \in \mathscr{C}$. Entretanto, perceba que $\{x\} \in \mathscr{C}$, mas $\{x\}^c \notin \mathscr{C}$. De fato, $\{x\}^c = \{x,y,z\} - \{x\} = \{y,z\}$. Entretanto, $\{y,z\} \notin \mathscr{C}$. Assim, a segunda condição da Definição 1.1.1 não é satisfeita, impossibilitando que $\mathscr{C}$ seja uma σ-álgebra de X.

A proposição adiante nos mostra como podemos induzir uma σ-álgebra com um conjunto fixado, não vazio, em um conjunto.

Proposição 1.1.7 Seja X e A dois conjuntos quaisquer com $A \neq \varnothing$. Se $A \subset X$, então o conjunto $\mathscr{C} = \{\varnothing, X, A, A^c\}$ é uma σ-álgebra de X.

---

[4] O conjunto $\mathscr{C}_2$ também é chamado de conjunto das partes de X e, as vezes, é representado por $\mathscr{P}(X)$.

Demonstração.

Perceba que as condições *(i)* e *(ii)* da Definição 1.1.1 são satisfeitas pela forma que o conjunto $\mathscr{C}$ foi construído. Para verificar a última condição, basta perceber $A \cup A^c = X$. Portanto, $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra de X para qualquer que seja $\varnothing \neq A \subset X$.

$\square$

Exemplo 1.1.8 Considere $X = \mathbb{N}$. Sejam $P = \{2k;\ k \in \mathbb{N}\}$ e $I = \{2k-1;\ k \in \mathbb{N}\}$. Como $P^c = I$, então $\mathscr{C} = \{\varnothing, \mathbb{N}, P, I\}$ é uma σ-álgebra de $\mathbb{N}$ pela proposição anterior.

Note que a Definição 1.1.1 trata apenas da reunião enumerável de elementos da σ-álgebra. Nosso interesse, agora, é investigar se conseguirmos propriedades análogas para a operação de interseção. Iniciaremos verificando o comportamento de interseção de elementos de uma σ-álgebra com a seguinte proposição.

Proposição 1.1.9 Seja $(X, \mathscr{C})$ um espaço mensurável. Se (A_j) é uma sequência de conjuntos $\mathscr{C}$-mensuráveis, então $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ é um elemento $\mathscr{C}$-mensurável (**??**).

Demonstração.

Se $A_j \in \mathscr{C}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então cada complementar $A_j^c \in \mathscr{C}$, pois $\mathscr{C}$ é σ-álgebra. Assim, (A_j^c) forma uma sequência de conjuntos $\mathscr{C}$-mensuráveis acarretando que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \in \mathscr{C}$. Segue, pelas *Leis de Morgan* [5], que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c$$

Logo, $\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right)^c \in \mathscr{C}$ o que implica $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}$. Portanto, $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ é um conjunto $\mathscr{C}$-mensurável.

$\square$

Considere a σ-álgebra apresentada na Proposição 1.1.7. Qualquer outra σ-álgebra $\mathscr{F}$ que tiver A como elemento, conterá $\mathscr{C}$. Assim, observamos que

$$\mathscr{C} = \bigcap_{\mathscr{F} \supset A} \mathscr{F}.$$

Esta σ-álgebra $\mathscr{C}$ definimos como a *menor* σ-álgebra gerada por A [6]. Sabendo que a menor σ-álgebra é gerada por meio de intersecções é natural questionarmos se a interseção entre σ-álgebras ainda é uma σ-álgebra de X. Responderemos à esta pergunta com a proposição adiante.

---

5 Para as demonstrações das Leis de Morgan veja (**??**, p.26)

6 Lembre que a noção de "menor" aqui é trazida por meio da ordem parcial gerada pela relação de inclusão entre conjuntos.

Proposição 1.1.10 Se $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são duas σ-álgebras de um conjunto X, então $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ também é uma σ-álgebra do conjunto X.

Demonstração.

Se $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ são σ-álgebras de X, então ambos possuem $\varnothing$ e X como elementos. Assim, $\varnothing$ e X estão na intersecção $\mathscr{C}$. Além disso, se $A \in \mathscr{C}$, então $A \in \mathscr{C}_1$ e $A \in \mathscr{C}_2$. Por serem ambas σ-álgebras, $A^c \in \mathscr{C}$ e $A^c \in \mathscr{C}_2$. Ou seja, $A^c \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \mathscr{C}$. Por fim, se tomarmos uma sequência (A_n) de elementos de $\mathscr{C}$, observamos que $A_j \in \mathscr{C}_1$ e $A_j \in \mathscr{C}_2$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Assim, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}_1$ e $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}_2$ pela definição de σ-álgebra. Logo, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}$. Com isso, $\mathscr{C}$ satisfaz todas as condições da Definição 1.1.1. Portanto, $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra de X.

$\square$

Proposição 1.1.11 Seja $(\mathscr{C}_j)$ uma sequência finita de $\mathscr{C}_j$-álgebras de um conjunto X, então $\mathscr{C} = \bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathscr{C}_j$, com $n \geq 2$, também é uma σ-álgebra do conjunto X (**??**).

Demonstração.

Provaremos esse resultado utilizando o método da indução finita sobre n. Se $n = 2$, o resultado é verificado imediatamente pela Proposição 1.1.10. Suponha que se verifique para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é, $\bigcap\limits_{j=1}^{k} \mathscr{C}_j$ é uma σ-álgebra de X. Vamos checar para o sucessor de k. Ora, pela associatividade da interseção, vemos que

$$\bigcap_{j=1}^{k+1} \mathscr{C}_j = \left(\bigcap_{j=1}^{k} \mathscr{C}_j \right) \cap \mathscr{C}_{k+1}\,.$$

Denote $\bigcap\limits_{j=1}^{k} \mathscr{C}_j = H$. Sabemos por hipótese de indução que H e $\mathscr{C}_{k+1}$ são σ-álgebras de X. Segue, pela base de indução, que $H \cap \mathscr{C}_{k+1}$ é uma σ-álgebra de X. Portanto, $\bigcap\limits_{j=1}^{k+1} \mathscr{C}_j$ é uma σ-álgebra de X como queríamos.

$\square$

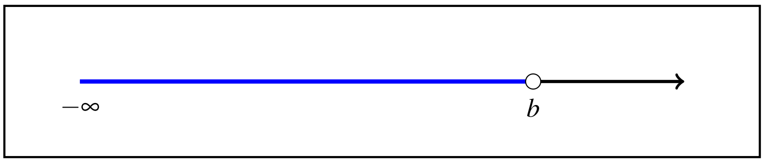
Note que há uma diferença gritante entre a Proposição 1.1.9 e Proposição 1.1.10. A primeira trata de conjuntos mensuráveis de uma σ-álgebra e a outra refere-se à σ-álgebras de um conjunto X. Além disso, perceba que até aqui trabalhamos o conceito de σ-álgebra de maneira abstrata sendo utilizada em um conjunto qualquer. Trataremos, agora, de uma σ-álgebra extremamente importante e específica para o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Definição 1.1.12 Seja $X = \mathbb{R}$. A Álgebra de Borel é a σ-álgebra $\mathscr{B}$ gerada por todos os intervalos abertos $(-\infty, x)$ com $x \in \mathbb{R}$. Os elementos dessa σ-álgebra são chamados de Borelianos (**??**).

Esta σ-álgebra é extremamente relevante para os estudos de medida e integração e pode ser definida de várias formas diferentes, mas todas são equivalentes. Isso quer dizer que $(-\infty, x)$ não é a única forma dos elementos de $\mathscr{B}$. De fato, se $(-\infty, x) \in \mathscr{B}$, então $(-\infty, x)^c \in \mathscr{B}$ só que $(-\infty, x)^c = [x, +\infty)$. Assim, poderíamos definir $\mathscr{B}$ por meio de intervalos do tipo $[x, +\infty)$. Em particular, poderíamos ter definido a $\mathscr{B}$ por meio da σ-álgebra gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.

Antes de provamos este fato, observe que podemos decompor intervalos reais como a união de outros intervalos reais. Por exemplo, utilizando a reta real, podemos representar intervalo $(-\infty, b)$ da seguinte maneira

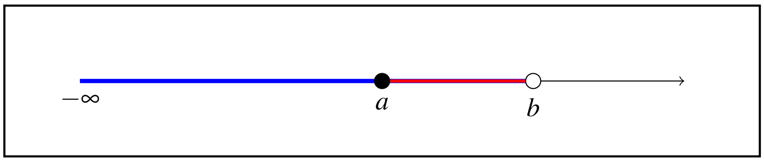
Figura 1 – Intervalo $(-\infty, b)$



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Se tomarmos um $a \in \mathbb{R}$ fixo, com $a < b$, então a decomposição do intervalo $(-\infty, b)$ pode ser expressa por meio da união dos intervalos $(-\infty, a]$ e (a, b), onde estão representados na figura a seguir pelas cores azul e vermelha, respectivamente.

Figura 2 – Representação de uma decomposição do intervalo $(-\infty, b)$ **na reta real**



Fonte**:** Elaborado pelo autor

A decomposição de intervalos reais pela união de outros é relevante para mostrar a seguinte equivalência sobre a σ-álgebra de Borel.

Teorema 1.1.13 Uma σ-álgebra é de Borel se, e somente se, é gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.
Demonstração.

Suponha que $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ é um espaço mensurável. Sejam a e b números reais, com

$a < b$. Como $a - \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que o intervalo $\left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right) \in \mathscr{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue, pela Proposição 1.1.9, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right) \in \mathscr{B}$. Com isso, afirmamos que a interseção de todos os intervalos $\left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right)$ é igual ao intervalo $(-\infty, a]$. De fato,

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right) &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right), \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow x < a - \frac{1}{n}, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} x \leq \lim_{n \to +\infty} \left(a - \frac{1}{n}\right) \\
&\Leftrightarrow x \leq a \\
&\Leftrightarrow x \in (-\infty, a].
\end{aligned}
$$

Logo, $(-\infty, a] \in \mathscr{B}$ acarretando que $(a, +\infty) = (-\infty, a]^c \in \mathscr{B}$. Observe que podemos decompor $(-\infty, b) = (-\infty, a] \cup (a, b)$ enquanto que $(a, +\infty) = (a, b) \cup [b, +\infty)$. Desta forma, vemos que $(-\infty, b) \cap (a, +\infty) = (a, b)$. Como $(-\infty, b)$ e $(a, +\infty)$ são elementos de $\mathscr{B}$, segue pela Proposição 1.1.9 que $(a, b) \in \mathscr{B}$. Com isso, $\mathscr{B}$ pode ser gerada por intervalos do tipo (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.

Suponha, reciprocamente, que $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$. Se $\mathscr{C}$ é gerada por intervalos do tipo (a, b) onde $a, b \in \mathbb{R}$, então os conjuntos $A_n = (-n, b)$ são todos elementos de $\mathscr{C}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Segue, pela Definição 1.1.1, que $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, b) \in \mathscr{C}$. Só que $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, b) = (-\infty, b)$. Com isso, os elementos de $\mathscr{C}$ são do tipo $(-\infty, b)$. Portanto, $\mathscr{C} = \mathscr{B}$.

□

1.2 Funções Mensuráveis

Agora que já estamos familiarizados com os conceitos de σ-álgebra e espaços mensuráveis, vamos aplicar, sobre este espaço uma função e estudar seu comportamento Iniciaremos tratando de funções reais e estenderemos o conceito conforme haja necessidade. A partir de agora fixemos que, quando não houver menção contrária, X será um conjunto qualquer diferente de $\varnothing$ e $\mathscr{C}$ será uma σ-álgebra desse conjunto.

Definição 1.2.1 Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita $\mathscr{C}$-mensurável se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$ (**??**).

Exemplo 1.2.2 Seja $K \in \mathbb{R}$ um número fixado. A função $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = K$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

Para mostrarmos este fato, precisamos analisar os casos de α. Assim

(I) Se $\alpha \geq K$, então o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \varnothing$ uma vez que não existe $x \in X$ tal que $f(x) = K > \alpha$.

(II) Se $\alpha < K$, então para todo $x \in X$, $f(x) > \alpha$. Logo, o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = X$.

Em todo caso, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$. Portanto, a função constante f é $\mathscr{C}$-mensurável.

Exemplo 1.2.3 Seja $(X, \mathscr{C})$ uma espaço mensurável e $A \in \mathscr{C}$. A função característica [7] de A $\chi_A : X \to \{0,1\}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ x \in A \\ 0, & \text{se } \ x \notin A \end{cases}$$

é $\mathscr{C}$-mensurável.

Para verificar se X_A é $\mathscr{C}$-mensurável precisamos, novamente, analisar os casos de $\alpha \in \mathbb{R}$.

(I) Se $\alpha \geq 1$, observamos que $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = \varnothing$, pois não há $x \in X$ tal que $\chi_A(x) > 1$.

(II) Se $0 \leq \alpha < 1$, então o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = A$, pois apenas valores $x \in A$ tem suas imagens $\chi_A(x) = 1$ e consequentemente $\chi_A(x) \geq \alpha$.

(III) se $\alpha < 0$, podemos notar que o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\} = X$, pois para qualquer que seja $x \in X$, os valores $\chi_A(x) \geq 0$.

Em todo o caso, vemos que o conjunto $\{x \in X; \chi_A(x) > \alpha\}$ é um elemento de $\mathscr{C}$, pois $\varnothing, X$ e A são elementos de $\mathscr{C}$. Portanto, a função característica $\chi_A(x)$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

Proposição 1.2.4 Dado um conjunto X. Sejam $A, B \subset X$, então $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$. Em particular, se $A \cap B = \varnothing$, então $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ [8].

Demonstração.

Vamos dividir a demonstração em casos:

(I) Se $\chi_{A \cup B}(x) = 0$, então $x \notin A \cup B$. Logo, $x \notin A$ e $x \notin B$ acarretando que $x \notin A \cap B$. Dessa forma, $\chi_A(x) = \chi_B(x) = \chi_{A \cap B}(x) = 0$.

(II) Caso $\chi_{A \cup B}(x) = 1$ e $\chi_{A \cap B}(x) = 0$, então $x \in (A \cup B)$ e $x \notin A \cap B$. Logo, $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$. Como $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$, concluímos que $x \in (A - B) \cup (B - A)$. Se $x \in A - B$, então $\chi_A(x) = 1$ e $\chi_B(x) = 0$. Logo, $\chi_{A \cup B}(x) = 1 = 1 + 0 + 0 = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$. Se $x \in B - A$, então $\chi_B(x) = 1$ e $\chi_A(x) = 0$ acarretando que $\chi_{A \cup B}(x) = 1 = 1 + 0 + 0 = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$.

7 As vezes também é chamada função indicadora.

8 Esta proposição é um exercício que pode ser encontrado em (**??**, p.57).

(III) Caso $\chi_{A\cup B}(x) = 1$ e $\chi_{A\cap B}(x) = 1$, então $x \in A \cup B$ e $x \in A \cap B$, isto é, $x \in A$ e $x \in B$. Com isso, $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$. Logo, $\chi_{A\cup B} = 1 = 1 + 1 - 1 = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$.

Segue que em todo caso, temos $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$ como desejávamos.

Caso, tenhamos $A \cap B = \varnothing$, então $\chi_{A\cap B}(x) = 0$. Segue pela primeira parte dessa demonstração que $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$.

□

Exemplo 1.2.5 Considere o espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$. Toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua é Borel mensurável.

Para mostrar a validade do exemplo acima, precisamos de resultados auxiliares que serão enunciados a seguir sem demonstração para que o texto não descentralize do tema.

Proposição 1.2.6 Suponha que $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua em todos os pontos de X. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um aberto, [9] então o conjunto $A = \{a \in X;\ f(a) > k\}$ é um aberto (**??**, p.226).

Teorema 1.2.7 Todo subconjunto aberto $A \subset R$ se exprime, de modo único, como um reunião enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos (**??**, p.167).

Segue disso que o $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n$ onde cada A_n é um intervalo aberto, ou seja, $A_n \in \mathscr{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, pela Definição 1.1.1, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{B}$. Portanto, qualquer função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Borel mensurável. Lembre que ao apresentarmos a Álgebra de Borel (Definição 1.1.12), mostramos no Teorema 1.1.13 que há mais de uma maneira de definir os borelianos. Para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}$-mensurável, também podemos definir uma função $\mathscr{C}$-mensurável por meio de conjuntos diferentes conforme expõe (**??**) no seguinte teorema:

Teorema 1.2.8 Sendo $(X, \mathscr{C})$ um espaço mensurável, para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{C}$-mensurável as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $A_\alpha = \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in \mathscr{C}$;

(b) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $B_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \leq \alpha\} \in \mathscr{C}$;

(c) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $C_\alpha = \{x \in X;\ f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{C}$;

(d) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $D_\alpha = \{x \in X;\ f(x) < \alpha\} \in \mathscr{C}$.

Demonstração.

Dividiremos esta demonstração em três partes. A estratégia será mostrar que a afirmação (a) é equivalente à afirmação (b); depois que a afirmação (c) é equivalente à afirmação (d) ; e por fim que a firmação (a) ocorre se, e somente se, a afirmação (c) ocorre.

[9] "Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se um *conjunto aberto* quando todos os seus pontos são interiores [...] (**??**, p.164)."

(I) Suponha a validade da afirmação (a). Se $A_\alpha \in \mathscr{C}$, então $A_\alpha^c \in \mathscr{C}$, pela definição de $\mathscr{C}$-álgebra. Perceba que

$$x \in A_\alpha^c \Leftrightarrow x \notin A_\alpha \Leftrightarrow x \in X \text{ e } f(x) \leq \alpha, \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in B_\alpha$$

Assim, um elemento está em A_α^c se, e somente se, está em B_α. Segue que $A_\alpha^c = B_\alpha$. Logo, B_α é elemento de $\mathscr{C}$.

(II) Para mostrar a equivalência entre as afirmações (c) e (d) utilizamos um argumento totalmente análogo à parte (I), pois se $x \notin C_\alpha$, então $f(x) < \alpha$ acarretando que $x \in D_\alpha$ e vice-versa.

(III) Suponha que $A_\alpha \in \mathscr{C}$. Tome a sequência $\left(A_{\alpha-\frac{1}{n}}\right)$. Claramente, cada $A_{\alpha-\frac{1}{n}}$ é um elemento de $\mathscr{C}$ por definição. Logo, pela Proposição 1.1.9, a interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}} \in \mathscr{C}$. Além disso, note que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}} \Leftrightarrow x \in A_{\alpha-\frac{1}{n}}, \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(x) > \alpha - \frac{1}{n},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Como cada $f(x) \in \mathbb{R}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow f(x) \geq \alpha \Leftrightarrow x \in C_\alpha \tag{2}$$

Segue das equivalências (1) e (2) que $C_\alpha \Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}}$ acarretando que $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}}$. Portanto $C_\alpha \in \mathscr{C}$ como queríamos.

Reciprocamente, suponha que $C_\alpha \in \mathscr{C}$. Tomemos a sequência $\left(C_{\alpha+\frac{1}{n}}\right)$. Cada elemento $C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathscr{C}$ por definição. Assim, pela definição de σ-álgebra , $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathscr{C}$. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} &\Leftrightarrow x \in C_{\alpha+\frac{1}{n_0}},\ \text{para algum } n_0 \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n_0} \\ &\Leftrightarrow f(x) > \alpha \\ &\Leftrightarrow x \in A_\alpha \end{aligned}$$

Assim, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}} = A_\alpha$. Logo, $A_\alpha \in \mathscr{C}$. Portanto, concluímos de $(I), (II)$ e (III) que as afirmações $(a), (b), (c)$ e (d) são todas equivalentes.

$\square$

Perceba que mesmo na presença do Teorema 1.2.8, mostrar que uma função é mensurável é trabalhoso e repetitivo uma vez que, geralmente, é preciso verificar os casos de α. Com o intuito de otimizar a identificação de uma função mensurável, veremos o comportamento de operações aritméticas entre funções mensuráveis.

Proposição 1.2.9 Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real $\mathscr{C}$-mensurável e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções cf, f^2 e $|f|$ são $\mathscr{C}$-mensuráveis.

Demonstração.

(a) Mostraremos que cf é $\mathscr{C}$-mensurável para todos os casos possíveis do número real $c \in \mathbb{R}$.

(i) Se $c = 0$, então $c \cdot f(x) = 0$, $\forall\, x \in X$, ou seja, cf se torna a função constante. Segue pelo Exemplo 1.2.2 que cf é $\mathscr{C}$-mensurável.

(ii) Se $c > 0$, então dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $cf(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \dfrac{\alpha}{c}$. Logo,

$$\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\}$$

Isso ocorre para todo α e f é $\mathscr{C}$-mensurável, isto é, $\left\{x \in X; f(x) > \dfrac{\alpha}{c}\right\} \in \mathscr{C}$. Logo, cf é $\mathscr{C}$-mensurável.

(iii) Por fim, se $c < 0$, então existe um $0 < z \in \mathbb{R}$ tal que $c = -z$. Assim,

$$cf(x) > \alpha \Leftrightarrow -zf(x) > \alpha \Leftrightarrow f(x) < -\frac{\alpha}{z}$$

Assim, o conjunto $\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in X; f(x) < -\dfrac{\alpha}{z}\right\}$. Desta forma, o conjunto $\left\{x \in X; f(x) < -\dfrac{\alpha}{z}\right\} \in \mathscr{C}$ pelo item (d) do Teorema 1.2.8. Portanto, cf é $\mathscr{C}$-mensurável em todos os casos de $c \in \mathbb{R}$.

(b) Para mostrar a mensurabilidade de f^2 é também necessário analisar os casos de α.

(i) Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} = X$, pois $[f(x)]^2 \geq 0$ para todo $x \in X$.

(ii) Se $\alpha \geq 0$, então para todo $x \in X$ $[f(x)]^2 > \alpha \Leftrightarrow f(x) > \sqrt{\alpha}$ ou $f(x) < -\sqrt{\alpha}$. Assim, um elemento $x_0 \in \{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\}$ se, e somente se, $x_0 \in \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\}$ ou $x_0 \in \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$. Com isso,

$$\left\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\right\} = \left\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\right\} \cup \left\{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\right\}.$$

Como f é $\mathscr{C}$-mensurável por hipótese, temos que $\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{C}$ e $\{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{C}$. Desta forma, usando a definição de σ-álgebra , obtemos que $\{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathscr{C}$. Consequentemente, $\{x \in X; [f(x)]^2 > \alpha\} \in \mathscr{C}$ acarretando a mensurabilidade de f^2.

(c) Analogamente ao item anterior, se $\alpha < 0$, $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = X$. Por outro lado, se $\alpha \geq 0$, vemos que $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X; f(x) < -\alpha\}$. Assim, a mensurabilidade de f acarreta na mensurabilidade de $|f|$ como desejávamos.

□

Antes de provarmos a próxima proposição, vamos enunciar um teorema que nos auxiliará na próxima demonstração.

Lema 1.2.10 O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos [10] em $\mathbb{R}$ (**??**, p.84).

A prova desse teorema será omitida para que o texto não prolongue-se mais do que o necessário.

Proposição 1.2.11 Sejam $f,g : X \to \mathbb{R}$. Se f e g são ambas $\mathscr{C}$-mensuráveis, então as funções $f+g$ e $f\cdot g$ são também $\mathscr{C}$-mensuráveis.

Demonstração.

Provaremos, primeiramente, que $f+g$ é $\mathscr{C}$-mensurável. Ora, por hipótese, f e g são $\mathscr{C}$-mensuráveis. Assim, dado $r\in\mathbb{Q}$, os conjuntos $\{x\in X; f(x)>r\}$ e $\{x\in X; g(x)>\alpha-r\}$ são ambos elementos de $\mathscr{C}$. Considere o conjunto

$$H_r = \{x\in X; f(x)>r\}\cap\{x\in X;\ g(x)>\alpha-r\}$$

Isto é, o conjunto dos elementos $x\in X$ tal que $f(x)>r$ e $g(x)>\alpha-r$ simultaneamente. Assim, afirmamos que $\{x\in X;(f+g)(x)>\alpha\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} H_r$. Com efeito, tomemos um elemento $a\in\{x\in X;(f+g)(x)>\alpha\}$. Assim,

$$(f+g)(a)>\alpha \Rightarrow f(a)+g(a)>\alpha \Rightarrow f(a)+g(a)-\alpha>0.$$

Para que os cálculos fiquem simplificados, denotaremos $f(a)+g(a)-\alpha=b$. Com isso, para qualquer que seja $r\in\mathbb{Q}$, temos

$$b = f(a)+g(a)-\alpha = f(a)+g(a)-\alpha-r+r = (f(a)-r)+(g(a)-\alpha+r).$$

Pelo Lema 1.2.10, podemos escolher um $r_0\in\mathbb{Q}$ de modo que obtemos $f(a)-r_0\approx\frac{b}{2}$ acarretando que $g(a)-\alpha+r_0\approx\frac{b}{2}$. Se $b>0$, então $\frac{b}{2}>0$. Segue que $f(a)-r_0>0$ e $g(a)-\alpha+r_0>0$. Consequentemente, $f(a)>r_0$ e $g(a)>\alpha-r_0$. Logo, $a\in H_{r_0}$. Portanto, $a\in\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} H_r$.

Reciprocamente, sendo $a\in\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} H_r$ existe um elemento $r_0\in\mathbb{Q}$ tal que $a\in H_{r_0}$. Logo, $f(a)>r_0$ e $g(a)>\alpha-r_0$. Ao somarmos membro à membro temos

$$f(a)+g(a)>r_0+\alpha-r_0 \Rightarrow (f+g)(a)>\alpha.$$

Com isso, $a\in\{x\in X;(f+g)(x)>\alpha\}$ como queríamos. Concluindo que a afirmação é verdadeira.

[10] "Um conjunto $X\subset\mathbb{R}$ chama-se denso em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto (a,b) contém algum ponto de X"(**??**, p.83).

Além disso, para cada $r \in \mathbb{Q}$, o conjunto H_r é um elemento de $\mathscr{C}$, pois é a interseção de dois elementos de $\mathscr{C}$ (Proposição 1.1.9). Note também que, pela definição de $\mathscr{C}$, a coleção $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} H_r$ é um elemento de $\mathscr{C}$, pois $\mathbb{Q}$ é enumerável. Segue que $f+g$ é $\mathscr{C}$-mensurável.

Para mostrar que fg é mensurável basta notar que é a combinação de outras funções $\mathscr{C}$-mensuráveis. De fato, dado $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}
4(fg)(x) &= 2(fg)(x) + 2(fg)(x) \\
&= [f(x)]^2 - [f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2 - [g(x)]^2 + 2f(x)g(x) \\
&= \left([f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2\right) - \left([g(x)]^2 - 2f(x)g(x) + [f(x)]^2\right) \\
&= (f(x)+g(x))^2 - (f(x)-g(x))^2 \\
&= [(f+g)(x)]^2 - [(f-g)(x)]^2.
\end{aligned}$$

Logo, $fg = \dfrac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$. Perceba que $f-g$ é mensurável, pois sendo g mensurável, podemos usar a Proposição 1.2.9 pondo $c=-1$. Assim, temos $(-1)g = -g$ acarretando que $-g$ é mensurável. Além disso, pela parte *(a)* desta proposição, $f-g = f+(-g)$. Segue que fg é $\mathscr{C}$-mensurável [11].

□

Definição 1.2.12 Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que a **parte positiva** da função f é a função $f^+: X \to \mathbb{R}$ definida por $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}$ [12]. Semelhantemente, chamamos de a **parte negativa** da função f, a função $f^-: X \to \mathbb{R}$ definida por $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$ (**??**).

É possível que a definição de parte positiva e negativa de funções fique um pouco abstrata em um primeiro contato. Numa tentativa de esclarecer ao máximo, daremos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.2.13 Seja $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Então $f^+(x) = 1$ e $f^-(x) = -1$. De fato, ao tomarmos um elemento real $x<0$, vemos que sua imagem $f(x)<0$ sendo $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$. Assim, $f^+(x) = \sup\{f(x),0\} = 0$ enquanto que $f^-(x) = \sup\{-f(x),0\} = 1$. Se $x>0$, então $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$. Logo, $f^+(x) = \sup\{f(x),0\} = 1$ enquanto que $f^-(x) = \sup\{-f(x),0\} = -1$.

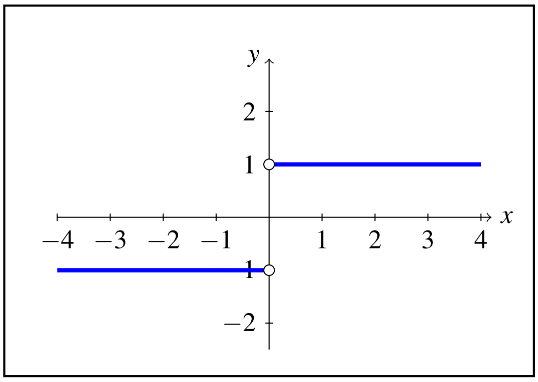
Neste caso, podemos perceber, ao olhar para a Figura 3 que tanto a parte positiva quanto a parte negativa da função f, apresentada no Exemplo 1.2.13, são ambas funções constantes.

Com isso, finalizaremos esta seção apresentando alguns resultados importantes sobre parte positiva e negativa de uma função.

[11] A Proposição 1.2.9 e Proposição 1.2.11 encontram-se enunciadas na forma de um único lema em (**??**, p.9)

[12] A notação $\sup X$ indica o supremo do conjunto X. Segundo **??**, "Sejam K um corpo ordenado e $X \subset K$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in K$ chama-se *supremo* do subconjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em K" (**??**, p.75).

Figura 3 – Gráfico da Função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$



Fonte**:** Elaborado pelo autor

Lema 1.2.14 Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real. Então $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$ (**??**).

Demonstração.

Para provar que $f = f^+ - f^-$, devemos avaliar os casos de $f(x)$. Logo, se $f(x) \geq 0$, então $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} = f(x)$ e $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\} = 0$, pois $f(x) \geq 0 \Rightarrow -f(x) \leq 0$. Disso, $f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x)$, ou seja, $(f^+ - f^-)(x) = f(x)$ tal que $f(x) \geq 0$. Caso $f(x) < 0$, então $-f(x) > 0$. Com isso, $\sup\{f(x), 0\} = 0$ e $\sup\{-f(x), 0\} = -f(x)$. Desta forma vemos que $f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x)$. Em todo caso, $f = f^+ - f^-$.

Analogamente, se $f(x) \geq 0$, então $\sup\{f(x), 0\} = f(x)$ e $\sup\{-f(x), 0\} = 0$. Assim, $f^+(x) + f^-(x) = f(x)$. Caso, $f(x) < 0$, então $-f(x) > 0$. Com isso, obtemos $\sup\{f(x), 0\} = 0$ e $\sup\{-f(x), 0\} = -f(x)$. Logo, $f^+(x) + f^-(x) = -f(x)$. Desta forma,

$$(f^+ + f^-)(x) = \max\{f(x), -f(x)\} = |f(x)|.$$

Portanto, $f^+ + f^- = |f|$.

$\square$

Observe que o Lema 1.2.14 nos dá a forma das funções f^+ e f^- de maneira implícita. De fato, somando as duas expressões membro a membro vemos que

$$f + |f| = (f^+ + f^+) - (f^- + f^-) = 2f^+$$

Assim, podemos expressar $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$. De modo semelhante, conseguimos subtrair membro a membro e obter a expressão $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$. Isso demonstra o lema adiante:

Lema 1.2.15 Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função real, então $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$ e $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$ (**??**).

Teorema 1.2.16 Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathscr{C}$-mensurável se, e somente se, suas partes negativa e positiva são ambas $\mathscr{C}$-mensuráveis (**??**).

Demonstração.

Suponha que f seja $\mathscr{C}$-mensurável. Pela Proposição 1.2.9 vemos que a função $|f|$ é $\mathscr{C}$-mensurável e pelo Lema 1.2.15 as funções $f^+ = \dfrac{1}{2}(|f| + f)$ e $f^+ = \dfrac{1}{2}(|f| - f)$ também são $\mathscr{C}$-mensuráveis. Reciprocamente, supondo que f^+ e f^- são mensuráveis, temos pelo Lema 1.2.14 que $f = f^+ - f^-$. Segue, novamente pela Proposição 1.2.11, que f é $\mathscr{C}$-mensurável.

$\square$

Assim, se retornarmos à figura 3, vemos que a função do Exemplo 1.2.13 é $\mathscr{C}$-mensurável, pois suas partes positiva e negativa são ambas funções constantes que são mensuráveis conforme a Proposição 1.2.9.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas S. A, 2002. Disponível em: <https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/150/o/Anexo_C1_como_elaborar_projeto_de_pesquisa_-_antonio_carlos_gil.pdf>. Acesso em: 30 de dez. 2021.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 2. ed. Rio Grande do Sul: Feevale, 2013.

ÍNDICE