Zadanie NUM 5- Sprawozdanie

Karol Cichowski

1. Wstęp

(Zadanie numeryczne NUM 7) Rozważmy funkcję $y(x) = \frac{1}{1+10x^2}$, zadaną na przedziale $x \in [-1, 1]$. Wygeneruj zbiór punktów $\{(x_i, y_i)\}$, gdzie $x_i = -1 + 2\frac{i}{n}$ $(i = 0, \ldots, n)$ jest jednorodną siatką punktów, a $y_i \equiv y(x_i)$. Dla tych danych wygeneruj

(a) wielomian interpolacyjny stopnia $\leqslant n$,

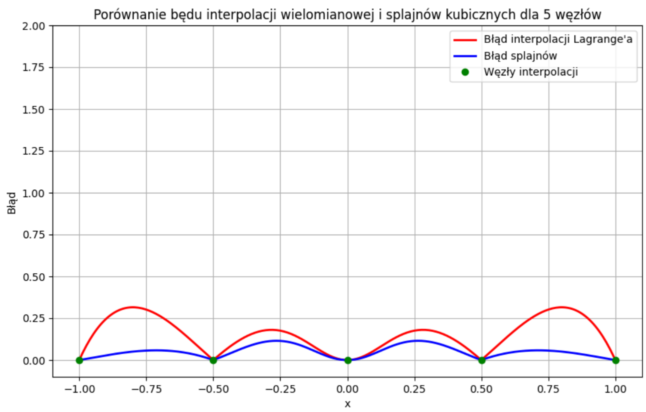
(b) funkcję sklejaną stopnia trzeciego, $s(x)$, spełniającą warunki $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$.

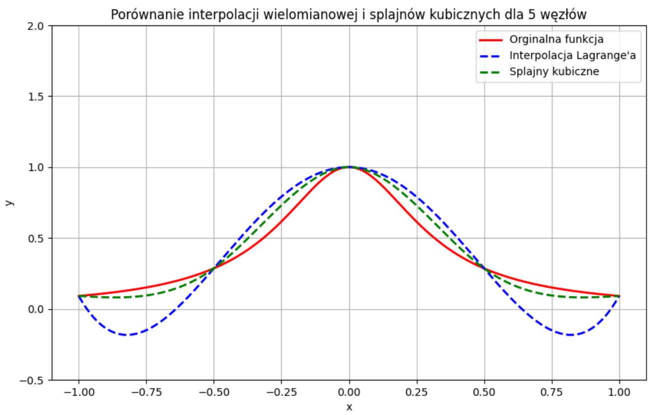
Wyniki porównaj z zaproponowaną funkcją $y(x)$ na wykresie, dla różnej ilości punktów n. W szczególności interesujące są różnice $y(x) - W_n(x)$ oraz $y(x) - s(x)$ pomiędzy węzłami interpolacji. Przeprowadź również podobną analizę dla innych funkcji; czy nasuwają się jakieś wnioski?

UWAGA: Nie można korzystać z procedur bibliotecznych służących do interpolacji (chyba, że do sprawdzenia wyniku). Algorytm należy zaimplementować samodzielnie.

Do interpolacji wielomianowej użyjemy wzoru interpolacyjnego Lagrange'a, natomiast do utworzenia funkcji sklejanej użyjemy natrulanego splajnu kubicznego ($s''(x_0) = s''(x_n) = 0$)

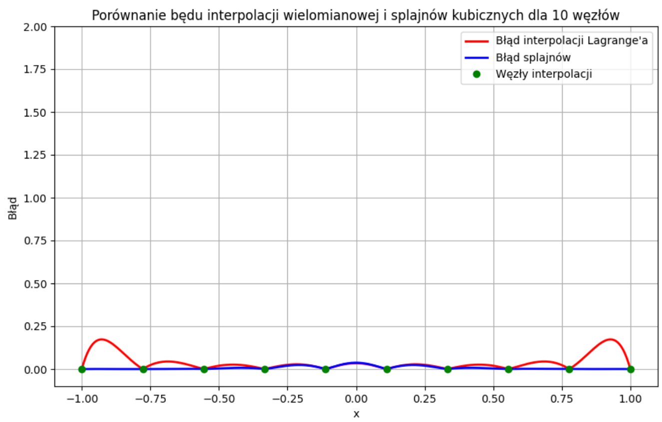
2. Wyniki dla proponowanej funkcji

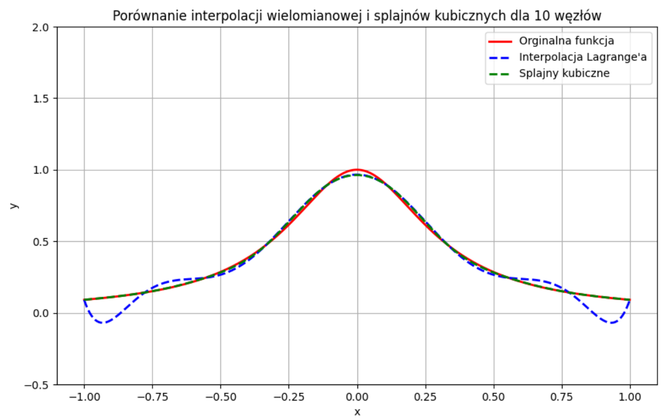




Największy błąd interpolacji Lagrange'a = 0.31539303812179775

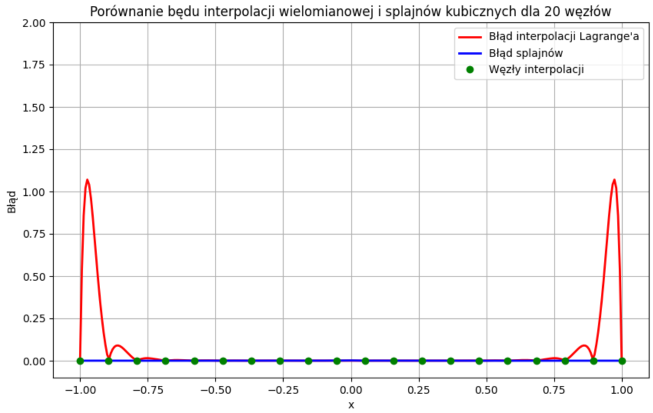
Największy błąd splajnów = 0.11514865120445184

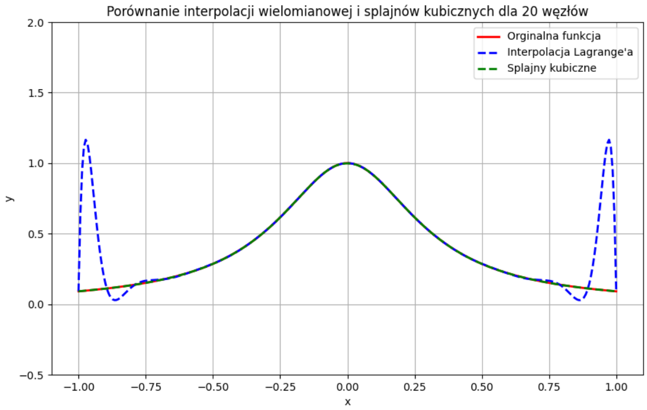




Największy błąd interpolacji Lagrange'a = 0.17318948404017886

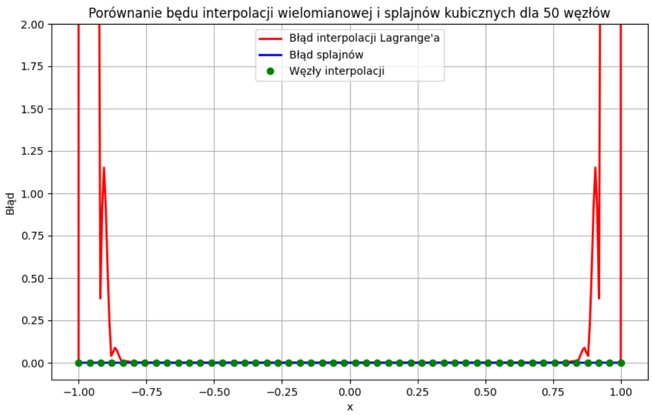
Największy błąd splajnów = 0.03716739967806071

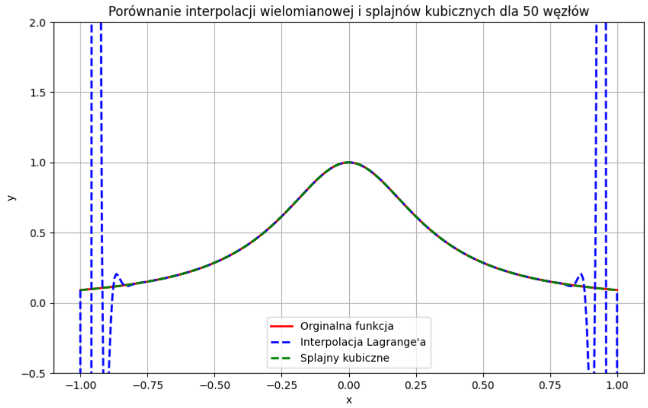




Największy błąd interpolacji Lagrange'a = 1.0700534968400741

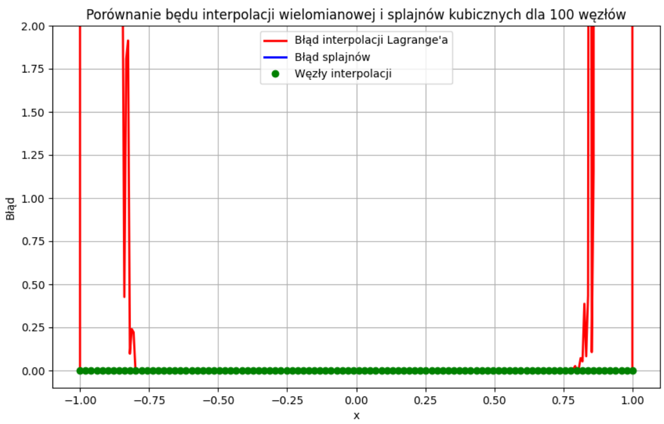
Największy błąd splajnów = 0.0015206799890842282

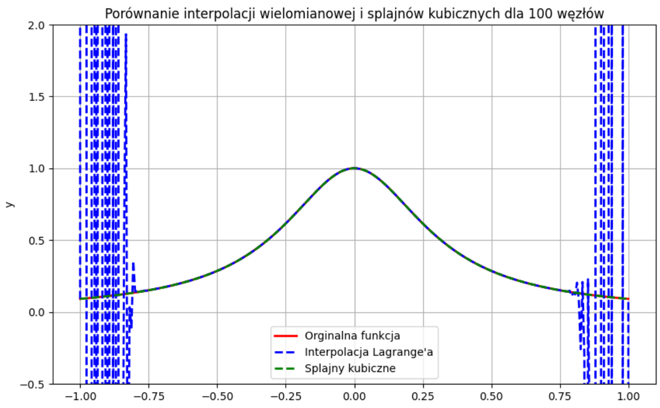




Największy błąd interpolacji Lagrange'a = 810.0105584643098

Największy błąd splajnów = 3.499152961054797e-05



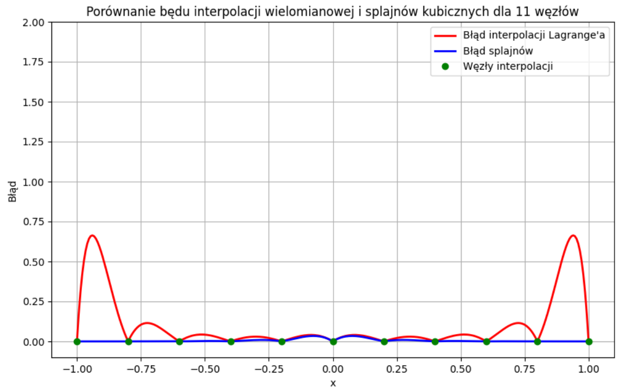


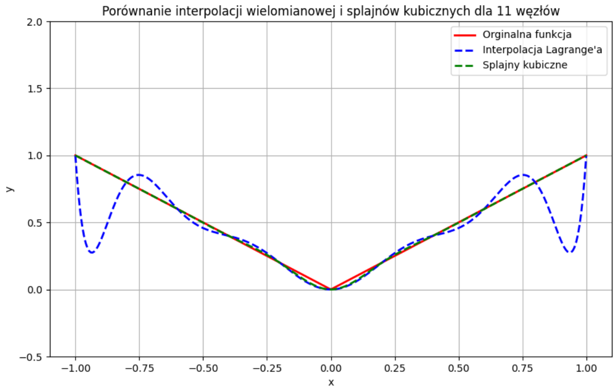
Największy błąd interpolacji Lagrange'a = 77358582580.00183

Największy błąd splajnów = 8.608133561543996e-06

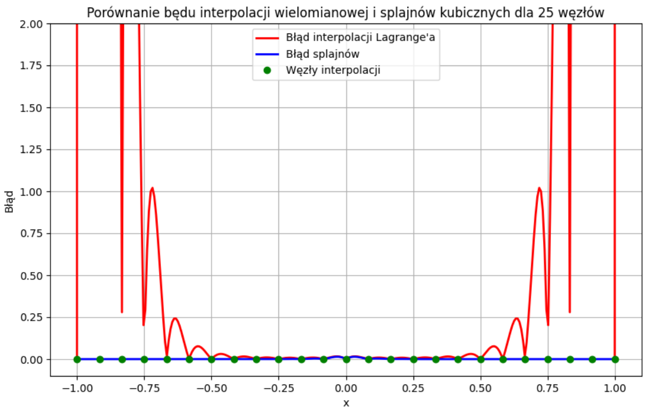
3. Wyniki dla innych funkcji

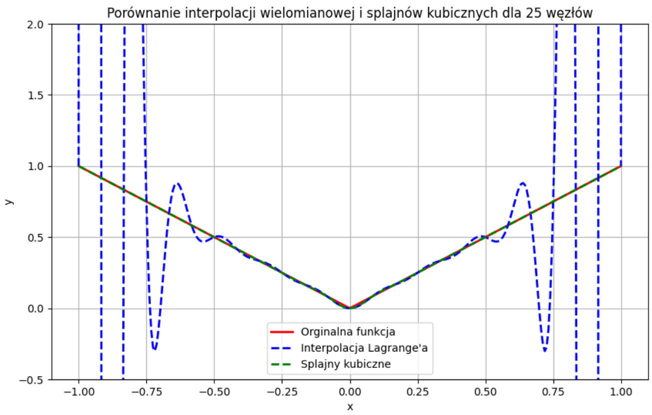
3.1. f(x) = |x|



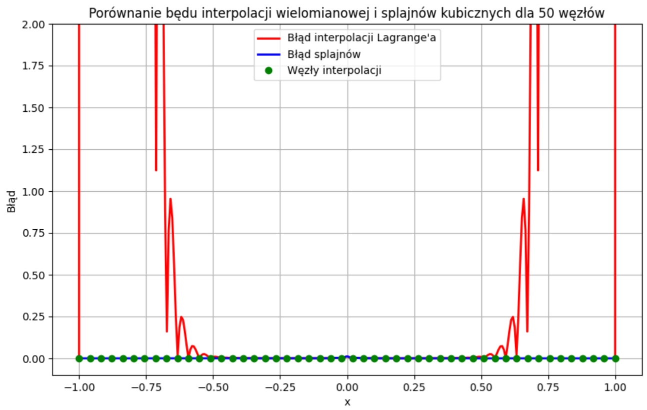


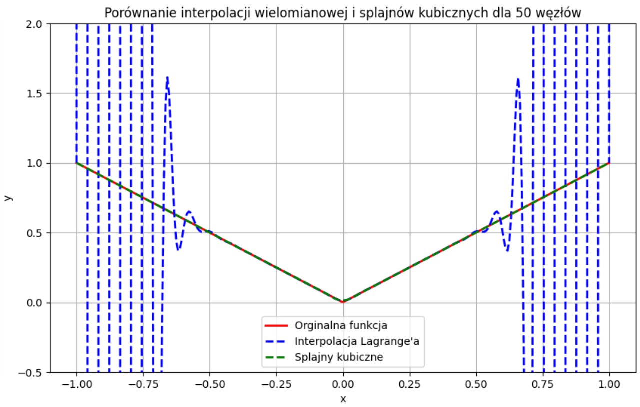
Największy błąd interpolacji Lagrange'a = 0.6635371352829875 Największy błąd splajnów = 0.034009208941374075





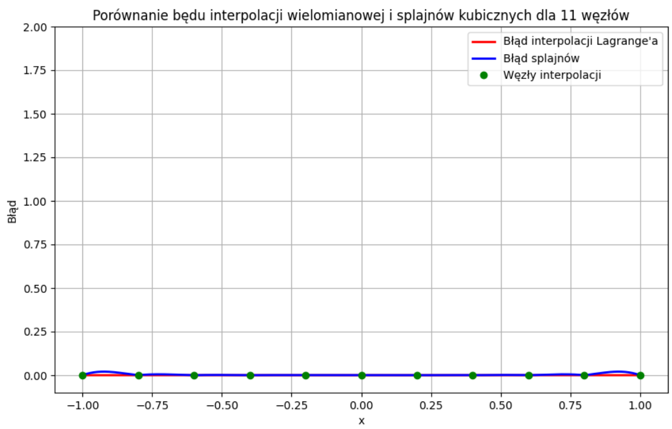
Największy błąd interpolacji Lagrange'a = 915.8421227218404 Największy błąd splajnów = 0.014143718229350784

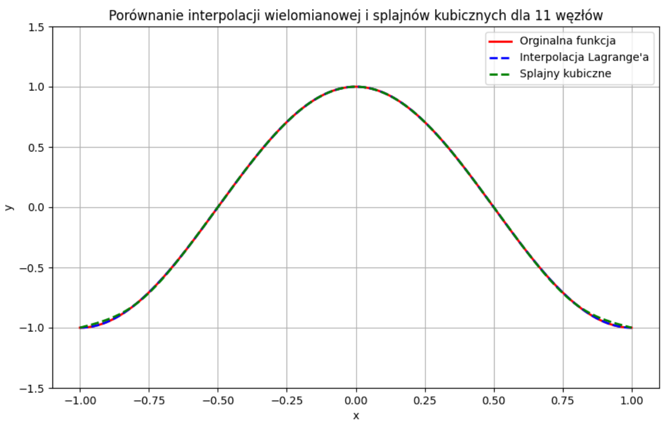




Największy błąd interpolacji Lagrange'a = 88777801.59475838 Największy błąd splajnów = 0.010768291425453 88

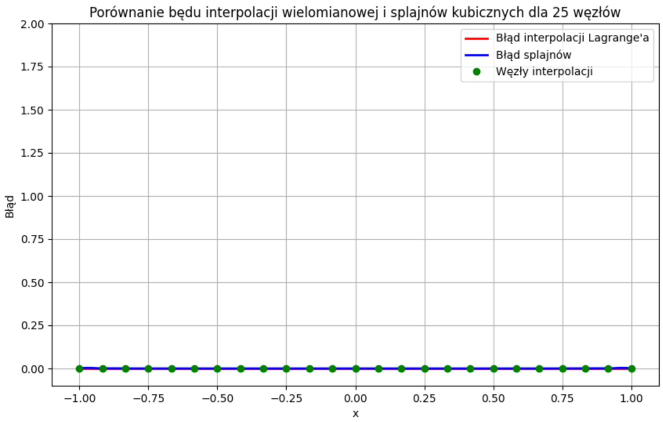
3.2. f(x)=cos(x*π)

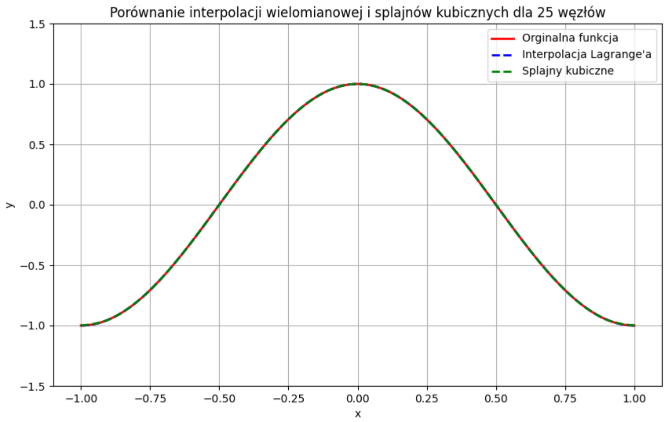




Największy błąd interpolacji Lagrange'a = 1.313186579521286e-05

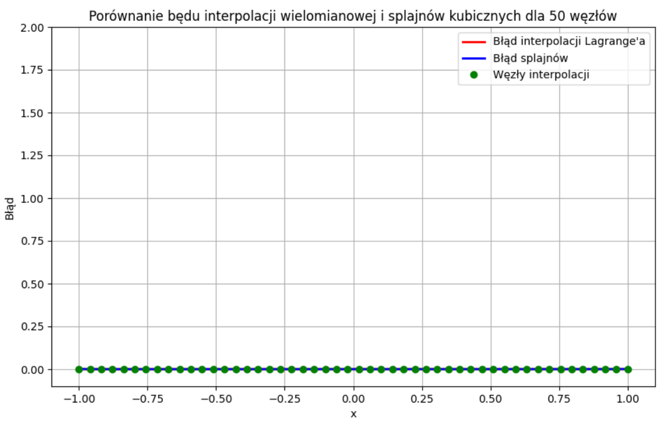
Największy błąd splajnów = 0.02037183664605613

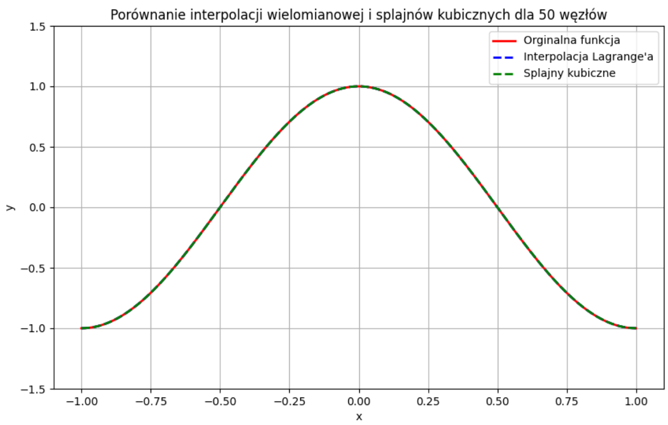




Największy błąd interpolacji Lagrange'a = 2.2469470728481156e-11

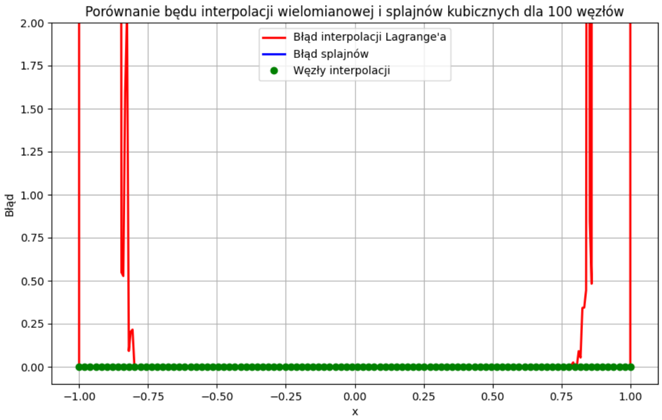
Największy błąd splajnów = 0.003387703768185979

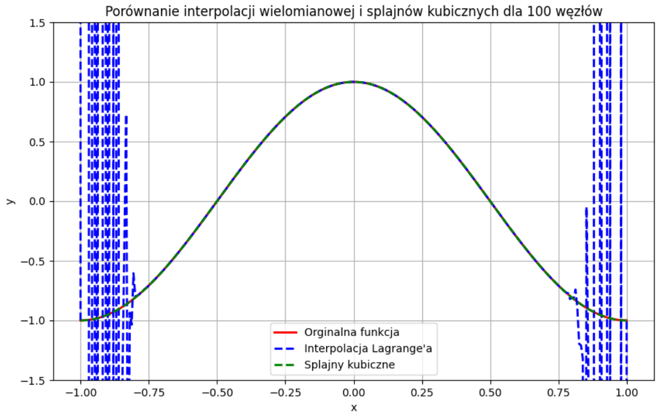




Największy błąd interpolacji Lagrange'a = 0.0005418763406840332

Największy błąd splajnów = 0.0007965265867874161





Największy błąd interpolacji Lagrange'a = 82780214488.32703 Największy błąd splajnów = 0.0001952045075515052

4. Dyskusja

Patrząc na powyższe przykłady możemy zauważyć kilka zależności:

- Interpolacja Lagrange'a generuje bardzo duże błędy na granicach przedziały przy zbyt dużej ilości więzów są to tak zwane oscylacje Rungego, przez które błąd między węzłami jest bardzo duży(w ekstremalnych przypadkach wartości w węzłach też są błędne ale możemy to przypisać błędowi maszynowemu)
- Oscylacje Rungego zaczynają występować przy dużo wyższej ilości węzłów dla funkcji gładkich które zmieniają się powoli co widzimy na przykładzie f(x) = cos(x*π), w którym mamy minimalny błąd interpolacji lagrange'a (podobnie jest dla wielomianów stopnia niższego niż ilość węzłów lub funkcji logarytmicznej)
- Przy dużej ilości węzłów Cubic splines daje nam dużo dokładniejszy wynik, ponieważ w tej metodzie nie występują oscylacje Rungego