

# Zadanie NUM 8- Sprawozdanie

Karol Cichowski

## 1. Wstęp

(Zadanie numeryczne NUM8) Zaproponuj wielomian uogólniony w postaci  $F(x) = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j(x)$ , gdzie ilość parametrów  $m \geq 3$ , a  $\phi_j(x)$  są pewnymi funkcjami. Zdefiniuj siatkę punktów  $x_i$  oraz (dla pewnego ustalonego zestawu parametrów  $a_j$ ) wygeneruj dane w postaci  $\{(x_i, y_i)\}$ , gdzie  $i = 1, \dots, n$ , a  $y_i = F(x_i) + \delta y_i$ . Zaburzenia  $\delta y_i$  należy losować z rozkładu normalnego z odchyleniem standardowym  $\sigma$ .

- (a) Znajdź wartości współczynników  $a_j$ , dla których funkcja  $F(x)$  najlepiej opisuje zaburzone dane w sensie metody najmniejszych kwadratów. Rezultat przedstaw graficznie dla kilku wyborów wielkości siatki,  $n$ , oraz odchylenia standardowego,  $\sigma$ .
- (b) Przeanalizuj różnicę pomiędzy wcześniej ustalonymi współczynnikami, a ich wartościami uzyskanymi w procedurze aproksymacji przeprowadzonej dla zaburzonych danych.

**UWAGA:** Rozwiązując to zadanie nie można korzystać z procedur bibliotecznych służących do aproksymacji. Poza tym, użycie procedur z zakresu algebry liniowej jest dozwolone.

Niech nasza funkcja wejściowa wygląda następująco:

$$F(x) = 2x^2 + 2x + \sin(x \cdot \pi) - e^x$$

Więc nasze funkcje składowe wyglądają następująco:

$$\phi_1 = x^2, \quad \phi_2 = x, \quad \phi_3 = \sin(x \cdot \pi), \quad \phi_4 = e^x$$

Natomiast ich wektor parametrów:

$$p^* = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T = [2, 2, 1, -1]^T$$

Używając metody najmniejszych kwadratów, na podstawie zaburzonych wartości  $y$ , chcemy ustalić nasz wektor  $p$ . aby to zrobić chcemy zminimalizować formę kwadratową

$$Q = \frac{1}{2}(\xi^T G^{-1} \xi) \quad , \text{gdzie } \xi \text{ to wektor błędów, } G = \langle \xi \xi^T \rangle$$

Co sprowadza się do rozwiązania równania

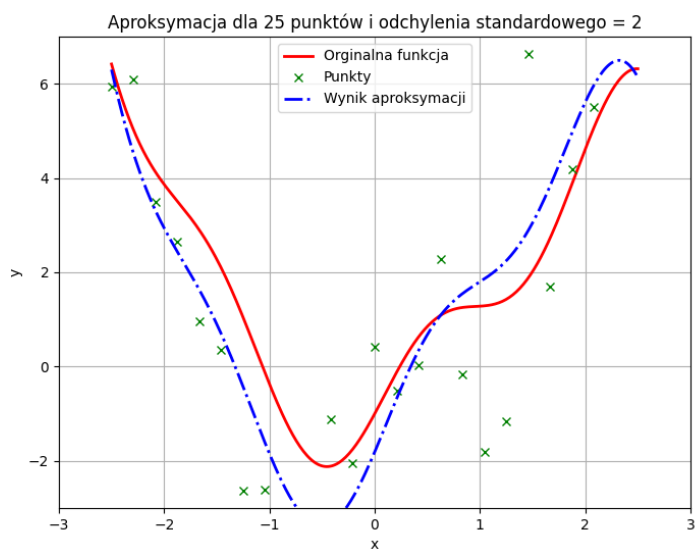
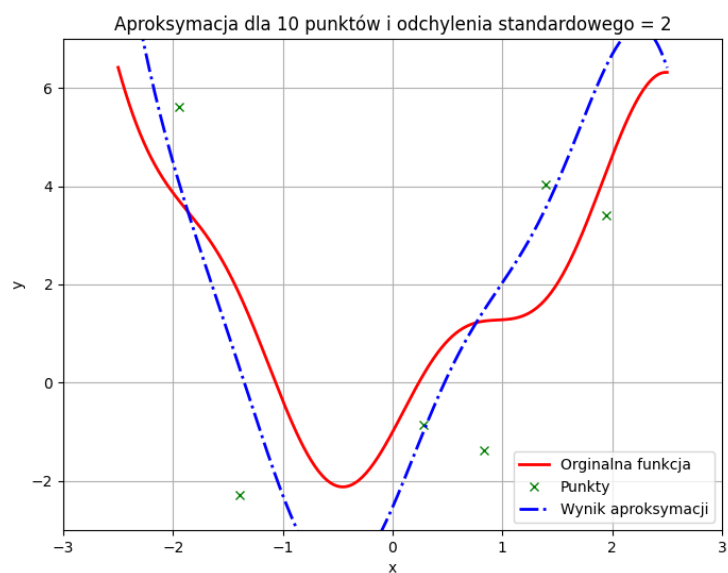
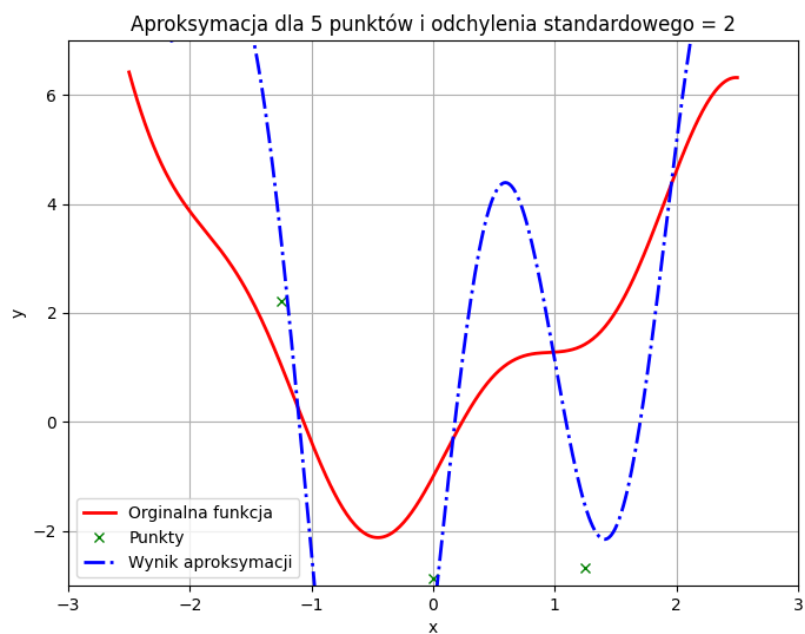
$$A^T G^{-1} A p = A^T G^{-1} y \quad , \text{gdzie } y - \text{wektor wartości zaburzonych,}$$
$$A - \text{macierz wartości } \phi_j(x_i)$$

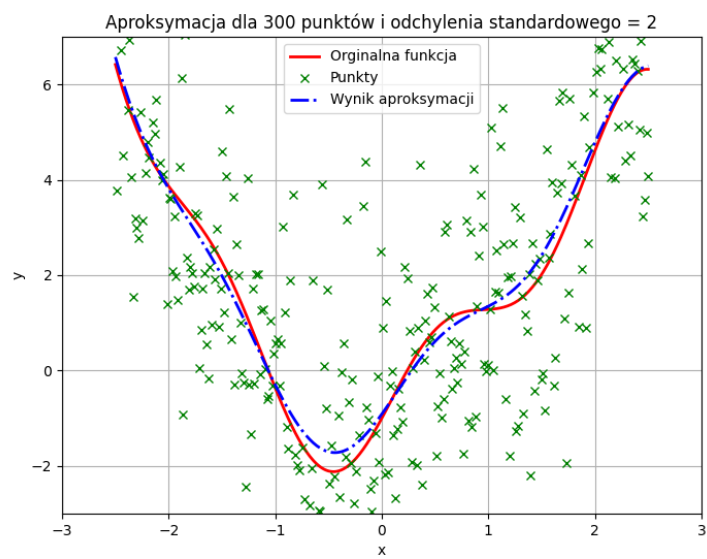
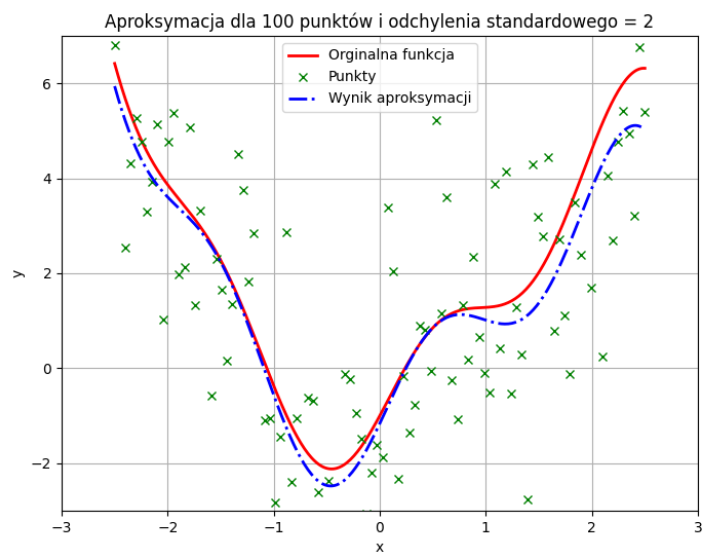
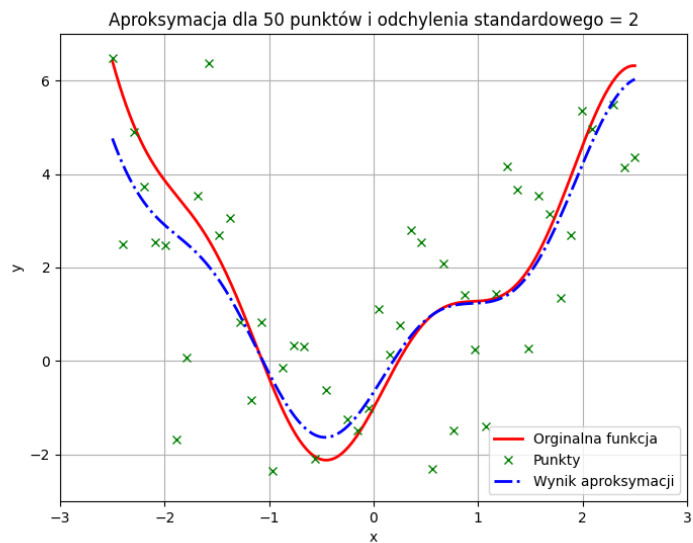
Do losowania zaburzeń będziemy wykorzystywać funkcje `numpy.random.normal` która gwarantuje nam niezależność błędów oraz stałe i wiadome odchylenie standardowe dzięki czemu wiemy że

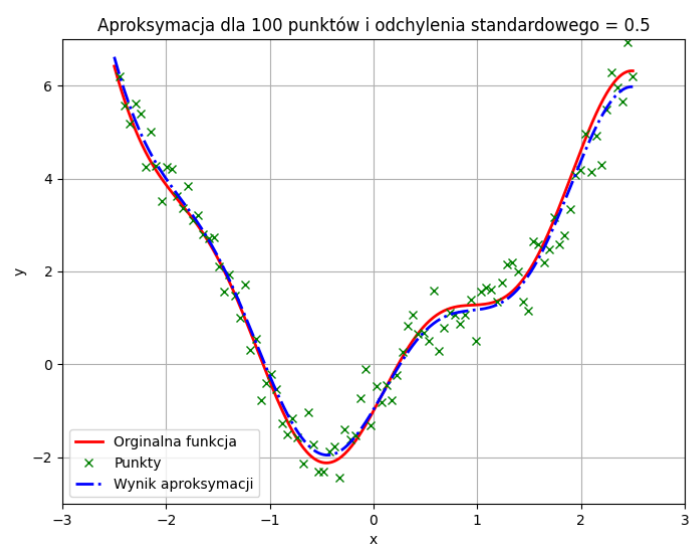
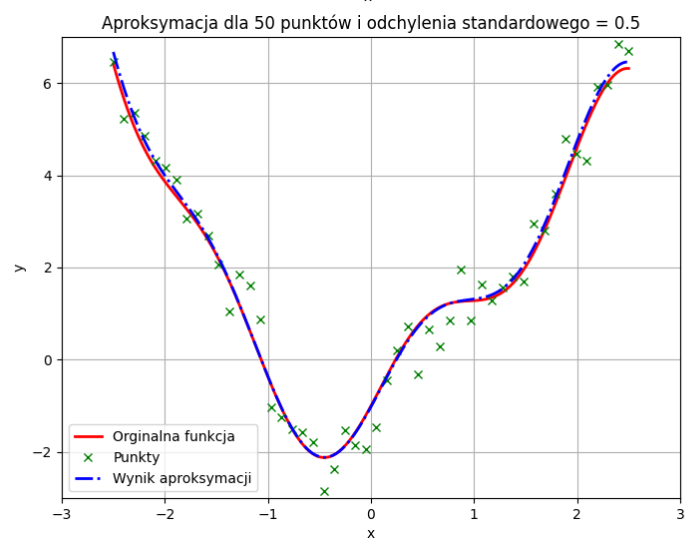
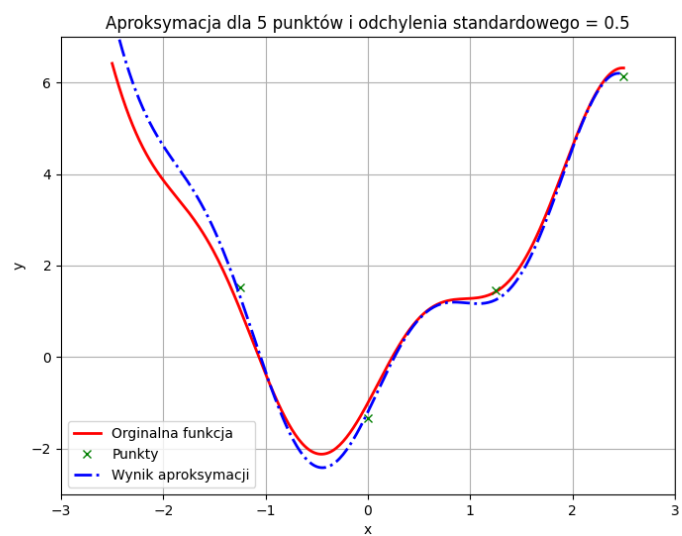
$$G = \sigma^2 I$$

W punkty  $(x_i, y_i)$  wartości  $x_i$  będą równo odległe i generowane poprzez funkcje `numpy.linspace`, a naszą funkcję będziemy rozpatrywać w przedziale  $[-2.5, 2.5]$

## 2. Wyniki:







### 3. Wnioski:

Jak widzimy dokładność aproksymacji zależy od wielu czynników:

- Zależy ona od ilości punktów czy pomiarów, gdzie przy większej ilości punktów możemy na ogół oczekiwać lepszego przybliżenia „prawdziwej” teoretycznej funkcji. Bardzo dobrze widać to na dwóch skrajnych przykładach: 5 punktów dla  $\sigma = 2*$ , oraz 300 punktów dla  $\sigma=2*$ , gdzie z takim samym odchyleniem standardowym wyniki różnią się diametralnie. W pierwszym przypadku wektor parametrów  $p = [ 5.02493192 \ 6.10326674 \ 5.91299209 \ -3.67909749 ]$ , a jego różnica z wektorem faktycznym  $p^*$  wynosi 14.720288239883061. Natomiast w przypadku w którym generujemy 300 punktów  $p = [ 1.93197747 \ 1.89630046 \ 0.68456914 \ -0.91192011 ]$ , a różnica to zaledwie 0.5752328202080141.
- Dokładność aproksymacji zależy jednak w największym stopniu od dokładności próbek, gdzie im mniejszy błąd pomiarowy tym dokładniej możemy wyznaczyć parametry funkcji. Widzimy to w momencie gdy nasze odchylenie standardowe będzie wynosić zaledwie 0.5, znacznie mniej niż we wcześniejszych przypadkach, możemy uzyskać bardzo dokładny wynik nawet przy zaledwie 5 pomiarach\*, gdzie błąd wynosi tylko 0.5752328202080141.

Możemy więc stwierdzić że najważniejsza dla dobrej aproksymacji jest dokładność pomiarów, a ich ilość pozwala zmniejszyć wagę poszczególnych błędów i „uśrednić” je do wartości bliższej dokładnej