Zadanie NUM 3- Sprawozdanie

Karol Cichowski 1.

Wstęp

Treść:

7. **(zadanie numeryczne NUM3)** Wyznacz $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ dla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.01 & \frac{0.2}{1} & \frac{0.15}{1^3} & & & & & & \\ 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{2} & \frac{0.15}{2^3} & & & & & \\ & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{3} & \frac{0.15}{3^3} & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{N-2} & \frac{0.15}{(N-2)^3} \\ & & & & & & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{N-1} \\ & & & & & & & 0.3 & 1.01 \end{pmatrix}$$

oraz $\mathbf{x} = (1, 2, \ldots, N)^T$. Ustalamy $N = 300$. Oblicz również wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$. Zadanie rozwiąż właściwą metodą (uzasadnij wybór) i wykorzystaj strukturę macierzy. Algorytm proszę zaprogramować samodzielnie; wyjątkowo nie należy stosować procedur bibliotecznych z zakresu algebry liniowej ani pakietów algebry komputerowej (chyba, że do sprawdzenia swojego rozwiązania, co zawsze jest mile widziane). Ponadto, potraktuj N jako zmienną i zmierz czas działania swojego programu w funkcji N. Wynik przedstaw na wykresie. Jakiej zależności się spodziewamy?

Obliczanie tego równania rozpoczniemy od faktoryzacji LU macierzy A. Wiedząc jednak że macierz A jest macierzą pasmową wiemy że jej rozkład LU też będzie miał identyczną konstrukcje. Biorąc ten fakt pod uwagę możemy zoptymalizować nasz algorytm pod względem złożoności pamięciowej- reprezentując macierze w tablicy 4xN a nie NxN- oraz złożoności obliczeniowej- wiemy że wyrazy zerowe w macierzy A będą też zerowe w macierzach LU, przez co nie musimy ich obliczać. Zmniejszymy dzięki temu złożoność pamięciową jak i obliczeniową algorytmu do O(n).

Następnym krokiem będzie o obliczenie wektora niewiadomych y. Wykorzystamy back substitution i forward substitution oraz pomocniczy wektor z

$$LUy = x \implies \begin{cases} Lz = x \\ Uy = z \end{cases}$$

Ostatnim krokiem będzie obliczenie wyznacznika macierzy A. Jest to bardzo proste zadanie po dokonaniu faktoryzacji LU

$$\det(A) = \prod_i^N u_{ii}$$

2. Wyniki

Rozwiązaniem naszego równania jest wektor

y=[0.3364592845976512, 1.6004397394666032, 2.2672544977536777, 3.085522515198812, 3.844282647169189, 4.616611241608175, 5.382394169643807, 6.148702096551805, 6.913948002496647, 7.678905372616016, 8.443522897782172, 9.207930935860091, 9.972167498618152, 10.736274677426318, 11.500278193680634, 12.26419852465657, 13.028050730412332, 13.791846546349975, 14.555595122913433, 15.31930374015055, 16.082978250656517, 16.846623417036987, 17.610243153448522, 18.37384070696185, 19.13741879387095, 19.9009797039976, 20.664525381277695, 21.42805748674111, 22.191577448203137, 22.955086499833012, 23.718585713926288, 24.482076026617175, 25.24555825883836, 26.00903313352286, 26.772501289811515, 27.535963294857396, 28.29941965368842, 29.06287081749102, 29.826317190602285, 30.58975913643969, 31.353196982551886, 32.116631024939345, 32.88006153176473, 33.643488746551604, 34.40691289095176, 35.17033416714766, 35.93375275994493, 36.6971688386006, 37.46058255842512, 38.223994062190336, 38.987403481370215, 39.75081093723696, 40.51421654183206, 41.27762039882831, 42.04102260429712, 42.80442324739282, 43.56782241096431, 44.33122017210298, 45.094616602634446, 45.85801176956067, 46.621405735458346, 47.38479855883836, 48.148190294470794, 48.91158099367925, 49.67497070460781, 50.43835947246352, 51.201747339737054, 51.965134346403765, 52.72852053010712, 53.49190592632631, 54.255290568529645, 55.018674488314986, 55.78205771553876, 56.545440278434185, 57.30882220372015, 58.072203516701514, 58.83558424136131, 59.598964400446064, 60.36234401554435, 61.125723107159736, 61.88910169477795, 62.652479796929356, 63.415857431246806, 64.17923461451929, 64.94261136274186, 65.705987691162, 66.46936361432284, 67.2327391461033, 67.9961142997557, 68.7594890879406, 69.52286352275948, 70.28623761578547, 71.04961137809153, 71.81298482027753, 72.57635795249503, 73.3397307844708, 74.10310332552882, 74.86647558461092, 75.62984757029615, 76.393219290819, 77.15659075408654, 77.91996196769448, 78.68333293894243, 79.44670367484814, 80.21007418216097, 80.97344446737463, 81.73681453673919, 82.50018439627226, 83.26355405176996, 84.02692350881674, 84.79029277279508, 85.55366184889469, 86.31703074212075, 87.08039945730229, 87.84376799909975, 88.6071363720123, 89.37050458038487, 90.13387262841444, 90.89724052015661, 91.66060825953117, 92.42397585032812, 93.18734329621253, 93.95071060073012, 94.71407776731178, 95.47744479927826, 96.24081169984447, 97.00417847212401, 97.76754511913252, 98.53091164379218, 99.29427804893471, 100.05764433730535, 100.82101051156566, 101.58437657429715, 102.34774252800383, 103.11110837511546, 103.87447411799006, 104.63783975891663, 105.40120530011757, 106.16457074375123, 106.92793609191408, 107.69130134664294, 108.45466650991713, 109.2180315836604, 109.981396569743, 110.74476146998335, 111.50812628615, 112.27149101996315, 113.03485567309654, 113.79822024717873, 114.56158474379478, 115.3249491644876, 116.08831351075952, 116.85167778407336, 117.61504198585394, 118.37840611748919, 119.14177018033135, 119.90513417569805, 120.6684981048737, 121.43186196911012, 122.19522576962777, 122.95858950761685, 123.72195318423793, 124.48531680062317, 125.24868035787699, 126.01204385707697, 126.7754072992747, 127.53877068549647, 128.3021340167442, 129.06549729399578, 129.82886051820634, 130.59222369030846, 131.35558681121302, 132.11894988180973, 132.88231290296793, 133.64567587553688, 134.40903880034665, 135.17240167820842, 135.93576450991515, 136.69912729624204, 137.46249003794696, 138.22585273577104, 138.9892153904391, 139.7525780026602, 140.51594057312755, 141.27930310251992, 142.042665591501, 142.80602804072032, 143.56939045081387, 144.33275282240373, 145.09611515609916, 145.85947745249658, 146.62283971217974, 147.38620193572063, 148.14956412367903, 148.91292627660366, 149.67628839503158, 150.43965047948927, 151.2030125304923, 151.96637454854596, 152.7297365341455, 153.49309848777617, 154.25646040991356, 155.0198223010241, 155.78318416156483, 156.5465459919839, 157.30990779272082, 158.07326956420653, 158.8366313068636, 159.59999302110677, 160.36335470734247, 161.12671636596977, 161.89007799737996, 162.65343960195707, 163.41680118007798, 164.18016273211242, 164.94352425842328, 165.70688575936688, 166.47024723529293, 167.23360868654467, 167.99697011345916, 168.76033151636727, 169.523692895594, 170.28705425145856, 171.05041558427416, 171.81377689434882, 172.57713818198476, 173.3404994474791, 174.10386069112366, 174.86722191320504, 175.63058311400513, 176.39394429380056, 177.1573054528635, 177.92066659146136, 178.68402770985685, 179.4473888083082, 180.2107498870695, 180.97411094639028, 181.73747198651606, 182.50083300768807, 183.26419401014357, 184.02755499411603, 184.79091595983482, 185.55427690752572, 186.31763783741067, 187.08099874970807, 187.84435964463265, 188.60772052239585, 189.37108138320542, 190.1344422272661, 190.89780305477905, 191.6611638659423, 192.42452466095096, 193.18788543999682, 193.95124620326857, 194.71460695095206, 195.47796768323042, 196.24132840028355, 197.0046891022888, 197.76804978942073, 198.5314104618512, 199.29477111974944, 200.05813176328203, 200.82149239261312, 201.58485300790426, 202.3482136093147, 203.11157419700118, 203.87493477111803, 204.63829533181746, 205.40165587924932, 206.16501641356115, 206.9283769348984, 207.69173744340443, 208.45509793922042, 209.21845842248536, 209.9818188933366, 210.7451793519091, 211.50853979833596, 212.27190023274855, 213.03526065527615, 213.7986210660464, 214.56198146518477, 215.32534185281526, 216.08870222906012, 216.8520625940397, 217.61542294787267, 218.37878329067615, 219.14214362256567, 219.90550394365494, 220.66886425405633, 221.43222455388036, 222.19558484323642, 222.95894512223205, 223.7223053909736, 224.48566564956562, 225.24902589811165, 226.01238613671364, 226.7757463654289, 227.53910664984298, 228.30236717610723, 229.2175605752084]

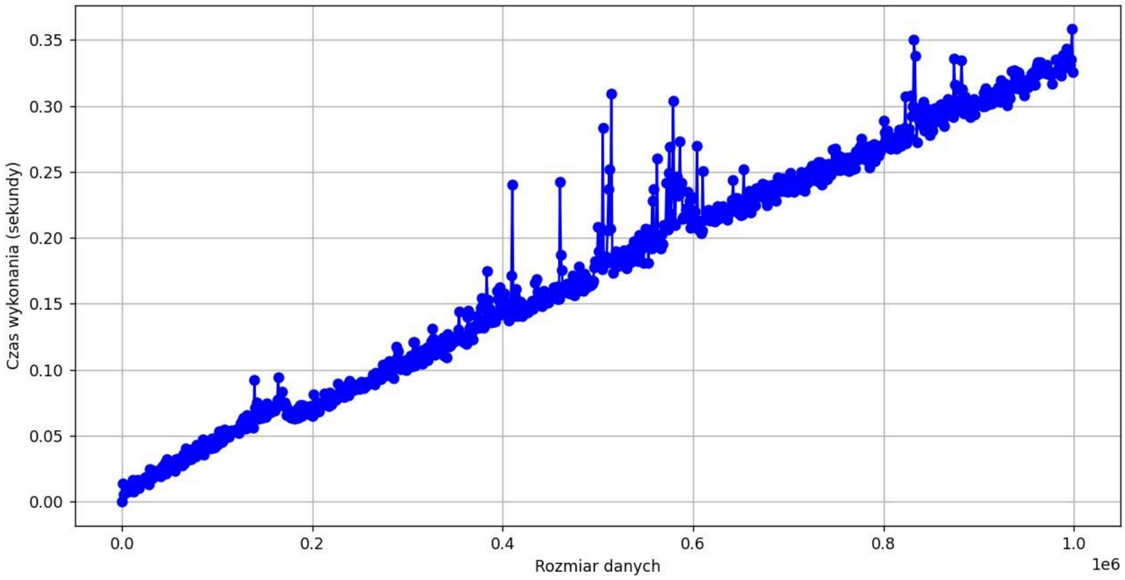
Natomiast nasz wyznacznik wynosi:

$$\det(A)= 13.81164794183921$$

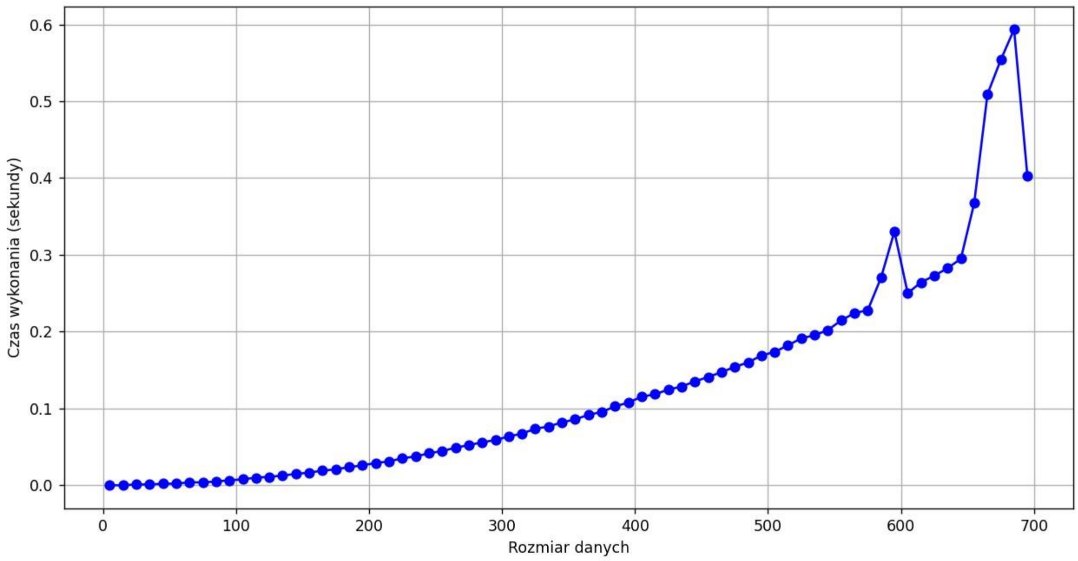
Sprawdzając wyniki za pomocą funkcji zawartych w bibliotece Numpy otrzymujemy te same wyniki

3. Złożoność czasowa

Przypuszczamy że złożoność czasowa naszego algorytmu będzie wynosić O(n), czyli będzie to złożoność liniowa. Możemy to zaobserwować na poniższym wykresie gdzie widzimy zależność liniową.(Wykres z dużym rozmiarem danym aby lepiej zobrazować liniowość)



Natomiast liniowość „zwykłego" algorytmu faktoryzacji LU będzie wynosić $O(n^3)$



Jak widzimy nasz wyspecjalizowany algorytm jest dużo bardziej wydajny, obliczenia dla n równego 1000000 dla naszego algorytmu zajmują podobny czas jak obliczenia typowego algorytmu dla n równego zaledwie 700. Pokazuje to jak ważne jest zaprojektowanie optymalnego algorytmu faktoryzacji dla macierzy rzadkich