Zadanie NUM 5- Sprawozdanie

Karol Cichowski

1. Wstęp

(zadanie numeryczne NUM5) Rozwiąż układ równań

$$\begin{pmatrix} d & 0.5 & 0.1 & & & & \\ 0.5 & d & 0.5 & 0.1 & & & \\ 0.1 & 0.5 & d & 0.5 & 0.1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 0.1 & 0.5 & d & 0.5 \\ & & & & 0.1 & 0.5 & d \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ N-1 \\ N \end{pmatrix}$$

dla $N = 200$ za pomocą metod Jacobiego i Gaussa-Seidela, gdzie d jest elementem diagonalnym. Dla różnych wartości d i punktów startowych przedstaw graficznie różnicę pomiędzy dokładnym rozwiązaniem a jego przybliżeniami w kolejnych iteracjach. Odpowiednio dobierając zakres parametrów, porównaj dwie metody. Czy procedura iteracyjna zawsze jest zbieżna?

2. Sposób rozwiązania

Widzimy że nasza macierz jest macierzą rzadką, pasmową z tą wiedzą możemy zaprojektować odpowiedni algorytm aby nasze obliczenia były efektywniejsze. W naszym algorytmie możemy ominąć redundantne mnożenie przez zero przez co nasz wzór na i-ty wyraz wektora będzie wyglądał tak:

$$x_i = (b_i - x_{i-2}a_{i,\,i-2} - x_{i-1}a_{i,\,i-1} - x_{i+1}a_{i,\,i+1} - x_{i+2}a_{i,\,i+2})/a_{i,\,i}$$

Możemy też zaoszczędzić na złożoności pamięci, nie tylko przez nie tworzenie macierzy bez wyrazów zerowych, ale przez nie tworzenie macierzy w naszym programie. Jest ona dla nas nie potrzebna jako że współczynniki $a_{i,\,i-2}$, $a_{i,\,i-1}$, $a_{i,\,i}$, $a_{i,\,i+1}$, $a_{i,\,i+2}$ będą takie same, nie zależnie od wartości 'i' (o ile będą istnieć), dlatego nie musimy tworzyć reprezentacji macierzy w programie, a nasz wzór będzie wyglądał następująco:

$$x_i = (b_i - x_{i-2}*0.1 - x_{i-1}*0.5 - x_{i+1}*0.5 - x_{i+2}*0.1)/d$$

Dzięki tym usprawnieniom nasz algorytm będzie miał złożoność $O(5*N^2) = O(N^2)$, zamiast $O(N^3)$ którą otrzymujemy przy nie wyspecjalizowanym algorytmie. Natomiast złożoność pamięci będzie wynosić $O(N)$, z uwagi na wektory, zamiast $O(N^2)$ którą otrzymaliśmy przy jawnym konstruowaniu macierzy.

Jedyną różnicą między metodą Jacobiego a metodą Gaussa-Seidela jest to że w naszym wzorze dla metody Jacobiego wszystkie x po prawej stronie są wartościami obliczonymi w poprzedniej iteracji, natomiast w metodzie Gaussa-Seidela x_{i-1}, oraz x_{i-2} są wartościami obliczonymi w aktualnej iteracji.

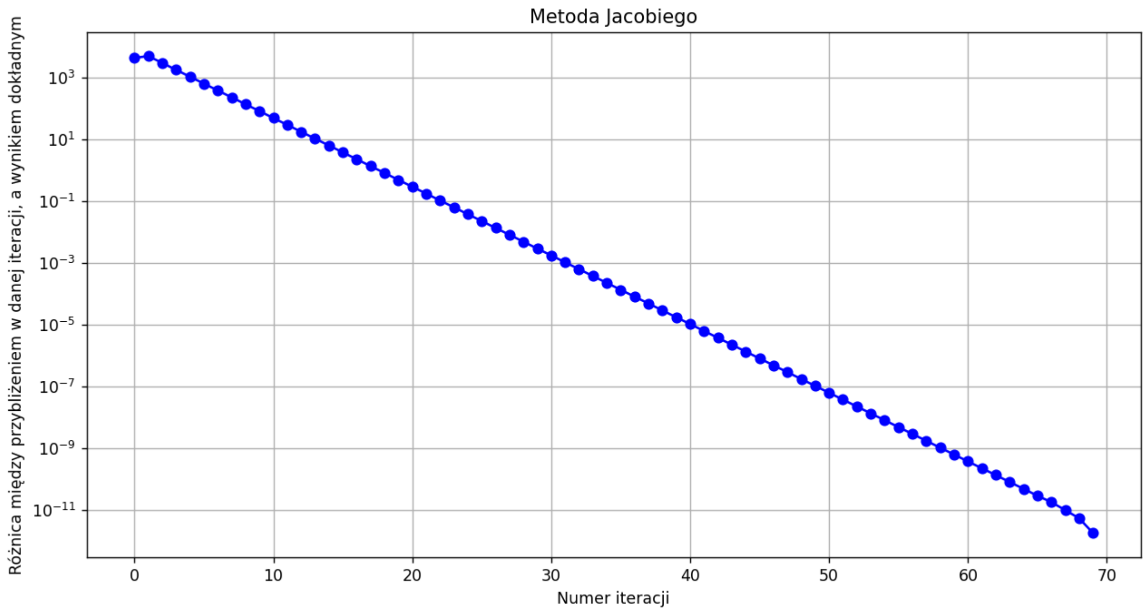
Odpowiadając na pytanie czy procedury iteracyjne są zawsze zbieżne, nie dla obydwu procedur macierz musi być symetryczna oraz silnie diagonalnie dominująca- dla metody Jacobiego, dodatnio określona- dla metody Gaussa-Seidela. Przez to aby móc użyć metody

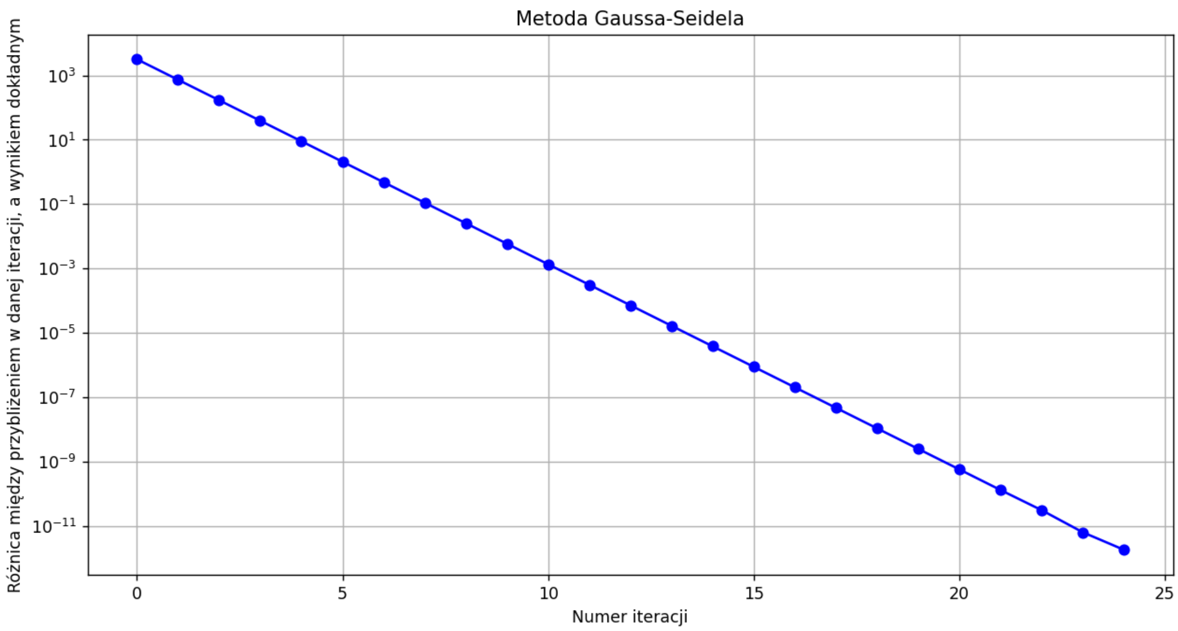
Jacobiego nasz parametr d musi być większy niż 1.2, a dla metody Gaussa-Seidela większy niż 0.80303. Z tego powodu nie będziemy używać d<1.2.

3. Wyniki

Wektor początkowy= [1, 2, 3, 4, 5, …, N-1, N]

Wartość d= 2



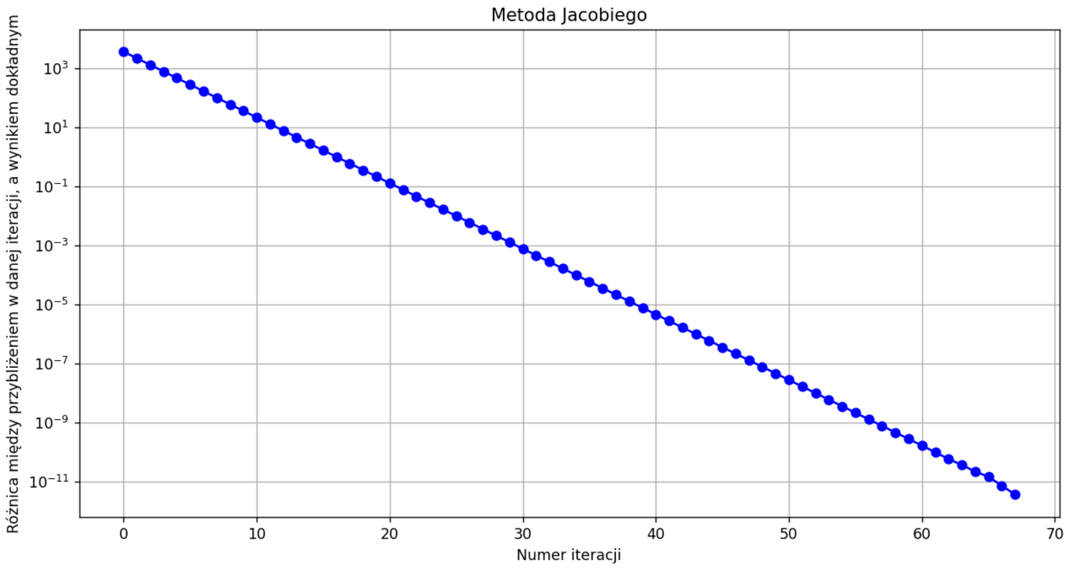


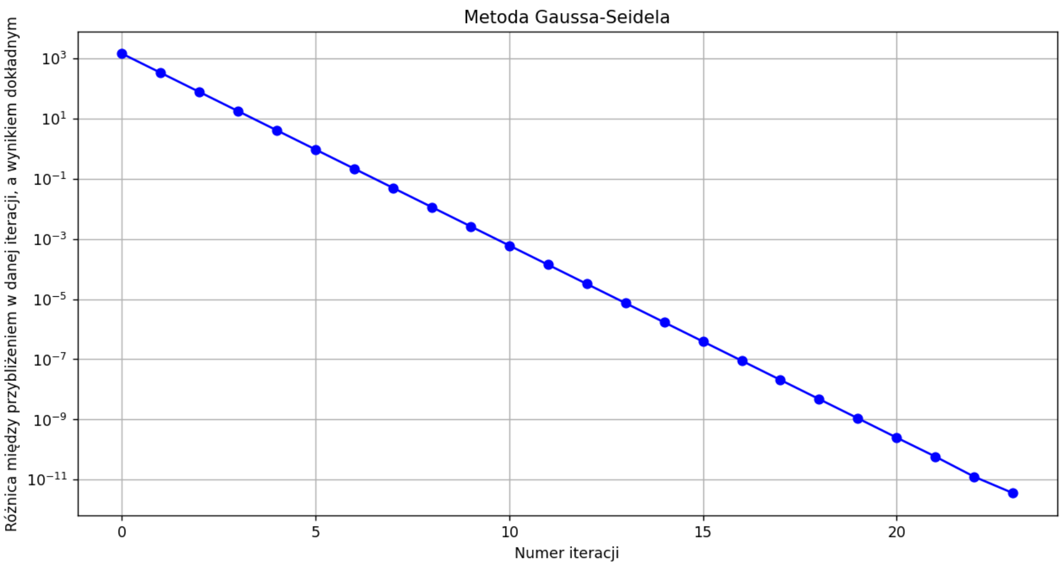
Wynik, metoda Jacobiego: $x^{dokładny}$= [0.29582854111376006, 0.6292217746085279, 0.9373203046821622, 1.2498202788498365, 1.5625550979511833, 1.874995635228026, 2.1874981659048687, 2.500000697309403, 2.8124999212643194, 3.1249999827379966, 3.4375000085717646, 3.749999998750246, 4.062499999859189, 4.3750000001023315, 4.6874999999816, 4.9999999999992015, 5.312500000001186, 5.624999999999744, 5.9375000000000036, 6.250000000000013, 6.5624999999999964, 6.875000000000002, 7.1875, 7.5, 7.8125, 8.125, 8.4375, 8.75, 9.0625, 9.375, 9.6875, 10.0, 10.3125, 10.625, 10.9375, 11.25, 11.5625, 11.875, 12.1875, 12.5, 12.8125, 13.125, 13.4375, 13.75, 14.0625, 14.375, 14.6875, 15.0, 15.3125, 15.625, 15.9375, 16.25, 16.5625, 16.875, 17.1875, 17.5, 17.8125, 18.125, 18.4375, 18.75, 19.0625, 19.375, 19.6875, 20.0, 20.3125, 20.625, 20.9375, 21.25, 21.5625, 21.875, 22.1875, 22.5, 22.8125, 23.125, 23.4375, 23.75, 24.0625, 24.375, 24.6875, 25.0, 25.3125, 25.625, 25.9375, 26.25, 26.5625, 26.875, 27.1875, 27.5, 27.8125, 28.125, 28.4375, 28.75, 29.0625, 29.375, 29.6875, 30.0, 30.3125, 30.625, 30.9375, 31.25, 31.5625, 31.875, 32.1875, 32.5, 32.8125, 33.125, 33.4375, 33.75, 34.0625, 34.375, 34.6875, 35.0, 35.3125, 35.625, 35.9375, 36.25, 36.5625, 36.875, 37.1875, 37.5, 37.8125, 38.125, 38.4375, 38.75, 39.0625, 39.375, 39.6875, 40.0, 40.3125, 40.625, 40.9375, 41.25, 41.5625, 41.875, 42.1875, 42.5, 42.8125, 43.125, 43.4375, 43.75, 44.0625, 44.375, 44.6875, 45.0, 45.3125, 45.625, 45.9375, 46.25, 46.5625, 46.875, 47.1875, 47.5, 47.8125, 48.125, 48.4375, 48.75, 49.0625, 49.375, 49.6875, 50.0, 50.3125, 50.625, 50.9375, 51.25, 51.5625, 51.875, 52.1875, 52.5, 52.8125, 53.125, 53.4375, 53.75, 54.0625, 54.375, 54.6875, 55.000000000000014, 55.312500000000036, 55.624999999999815, 55.93750000000051, 56.25000000000134, 56.562499999984325, 56.87500000004943, 57.18750000005937, 57.499999998791715, 57.812500004622834, 58.12500000070547, 58.437499909998245, 58.750000413993774, 59.06249972191647, 59.37499355984594, 59.687535782474285, 59.999950867134075, 60.31206249369815, 60.62799771661071, 60.93147142483904, 61.22242520796605, 61.806394386637606, 61.23416906668533, 60.657669469152395, 81.77387417937764]

Wynik, metoda Gaussa-Seidela: x $^{\text{dokładny}}$= [0.2958285411137598, 0.6292217746085276, 0.9373203046821617, 1.249820278849836, 1.5625550979511829, 1.8749956352280253, 2.1874981659048682, 2.5000006973094018, 2.8124999212643185, 3.124999982737996, 3.437500008571764, 3.749999998750245, 4.062499999859188, 4.375000000102331, 4.687499999981599, 4.999999999999199, 5.312500000001185, 5.624999999999742, 5.937500000000002, 6.250000000000013, 6.5624999999999964, 6.875, 7.1875, 7.5, 7.8125, 8.125, 8.4375, 8.75, 9.0625, 9.375, 9.6875, 10.0, 10.3125, 10.625, 10.9375, 11.25, 11.5625, 11.875, 12.1875, 12.5, 12.8125, 13.125, 13.4375, 13.75, 14.0625, 14.375, 14.6875, 15.0, 15.3125, 15.625, 15.9375, 16.25, 16.5625, 16.875, 17.1875, 17.5, 17.8125, 18.125, 18.4375, 18.75, 19.0625, 19.375, 19.6875, 20.0, 20.3125, 20.625, 20.9375, 21.25, 21.5625, 21.875, 22.1875, 22.5, 22.8125, 23.125, 23.4375, 23.75, 24.0625, 24.375, 24.6875, 25.0, 25.3125, 25.625, 25.9375, 26.25, 26.5625, 26.875, 27.1875, 27.5, 27.8125, 28.125, 28.4375, 28.75, 29.0625, 29.375, 29.6875, 30.0, 30.3125, 30.625, 30.9375, 31.25, 31.5625, 31.875, 32.1875, 32.5, 32.8125, 33.125, 33.4375, 33.75, 34.0625, 34.375, 34.6875, 35.0, 35.3125, 35.625, 35.9375, 36.25, 36.5625, 36.875, 37.1875, 37.5, 37.8125, 38.125, 38.4375, 38.75, 39.0625, 39.375, 39.6875, 40.0, 40.3125, 40.625, 40.9375, 41.25, 41.5625, 41.875, 42.1875, 42.5, 42.8125, 43.125, 43.4375, 43.75, 44.0625, 44.375, 44.6875, 45.0, 45.3125, 45.625, 45.9375, 46.25, 46.5625, 46.875, 47.1875, 47.5, 47.8125, 48.125, 48.4375, 48.75, 49.0625, 49.375, 49.6875, 50.0, 50.3125, 50.625, 50.9375, 51.25, 51.5625, 51.875, 52.1875, 52.5, 52.8125, 53.125, 53.4375, 53.75, 54.0625, 54.375, 54.6875, 55.0, 55.312500000000014, 55.624999999999815, 55.9375000000005, 56.250000000001336, 56.562499999984304, 56.875000000049425, 57.18750000005936, 57.499999998791715, 57.81250000462281, 58.12500000070547, 58.43749990999823, 58.75000041399376, 59.06249972191647, 59.37499355984592, 59.687535782474264, 59.999950867134075, 60.312062493698136, 60.62799771661071, 60.931471424839025, 61.22242520796605, 61.80639438663759, 61.23416906668532, 60.657669469152395, 81.77387417937764]

Wektor początkowy= [1, 1, 1, 1, 1, …, 1, 1]

Wartość d= 2





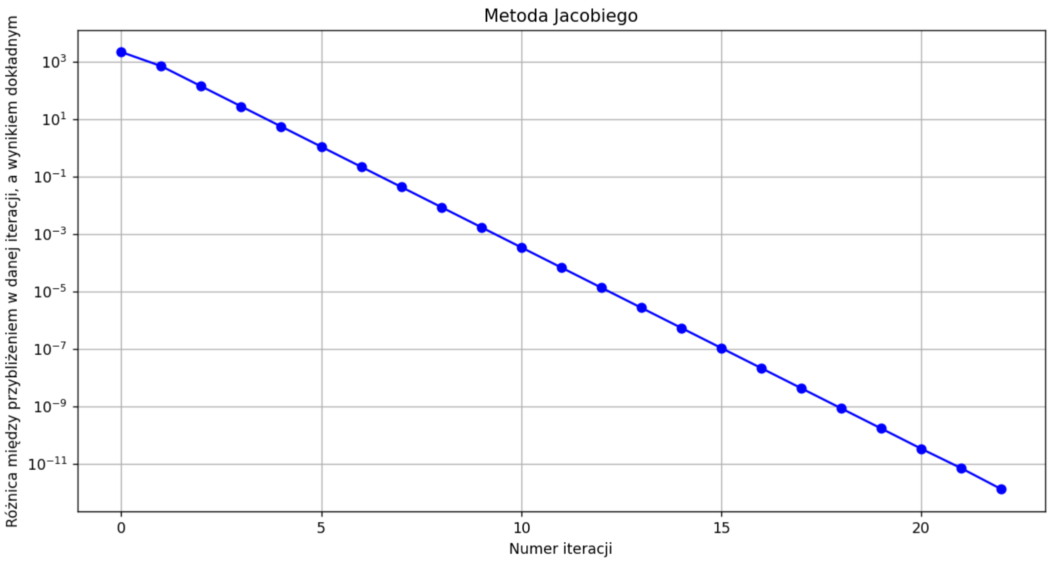
Wynik, metoda Jacobiego: $x^{dokładny}$= [0.29582854111375995, 0.6292217746085276, 0.9373203046821617, 1.249820278849836, 1.5625550979511824, 1.8749956352280253, 2.1874981659048682, 2.5000006973094013, 2.812499921264318, 3.124999982737996, 3.437500008571763, 3.749999998750244, 4.062499999859186, 4.375000000102331, 4.687499999981598, 4.999999999999199, 5.312500000001183, 5.62499999999974, 5.937500000000002, 6.250000000000011, 6.562499999999996, 6.874999999999999, 7.1875, 7.5, 7.8125, 8.125, 8.4375, 8.75, 9.0625, 9.375, 9.6875, 10.0, 10.3125, 10.625, 10.9375, 11.25, 11.5625, 11.875, 12.1875, 12.5, 12.8125, 13.125, 13.4375, 13.75, 14.0625, 14.375, 14.6875, 15.0, 15.3125, 15.625, 15.9375, 16.25, 16.5625, 16.875, 17.1875, 17.5, 17.8125, 18.125, 18.4375, 18.75, 19.0625, 19.375, 19.6875, 20.0, 20.3125, 20.625, 20.9375, 21.25, 21.5625, 21.875, 22.1875, 22.5, 22.8125, 23.125, 23.4375, 23.75, 24.0625, 24.375, 24.6875, 25.0, 25.3125, 25.625, 25.9375, 26.25, 26.5625, 26.875, 27.1875, 27.5, 27.8125, 28.125, 28.4375, 28.75, 29.0625, 29.375, 29.6875, 30.0, 30.3125, 30.625, 30.9375, 31.25, 31.5625, 31.875, 32.1875, 32.5, 32.8125, 33.125, 33.4375, 33.75, 34.0625, 34.375, 34.6875, 35.0, 35.3125, 35.625, 35.9375, 36.25, 36.5625, 36.875, 37.1875, 37.5, 37.8125, 38.125, 38.4375, 38.75, 39.0625, 39.375, 39.6875, 40.0, 40.3125, 40.625, 40.9375, 41.25, 41.5625, 41.875, 42.1875, 42.5, 42.8125, 43.125, 43.4375, 43.75, 44.0625, 44.375, 44.6875, 45.0, 45.3125, 45.625, 45.9375, 46.25, 46.5625, 46.875, 47.1875, 47.5, 47.8125, 48.125, 48.4375, 48.75, 49.0625, 49.375, 49.6875, 50.0, 50.3125, 50.625, 50.9375, 51.25, 51.5625, 51.875, 52.1875, 52.5, 52.8125, 53.125, 53.4375, 53.75, 54.0625, 54.375, 54.68749999999999, 55.0, 55.312500000000014, 55.62499999999979, 55.93750000000048, 56.25000000000133, 56.5624999999843, 56.87500000004942, 57.187500000059345, 57.499999998791694, 57.81250000462281, 58.12500000070545, 58.43749990999822, 58.75000041399375, 59.06249972191644, 59.37499355984591, 59.68753578247425, 59.999950867134054, 60.312062493698136, 60.62799771661071, 60.931471424839025, 61.22242520796603, 61.80639438663758, 61.23416906668532, 60.6576694691 5237, 81.77387417937764]

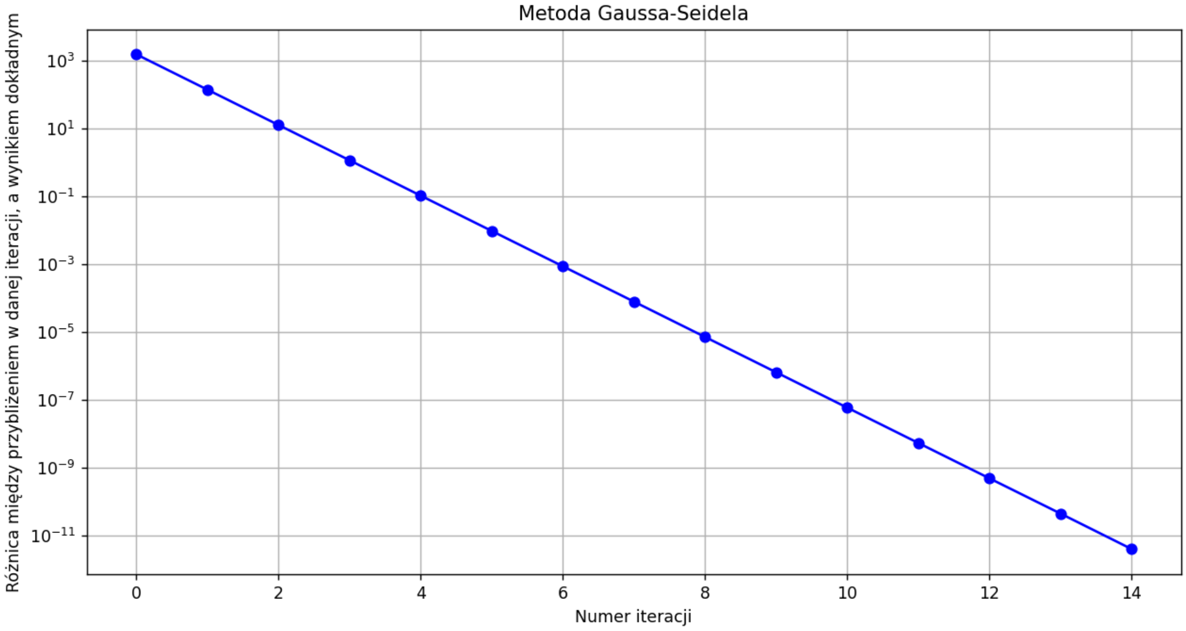
Wynik, metoda Gaussa-Seidela: $x^{dokładny}$= [0.29582854111375956, 0.6292217746085275, 0.9373203046821617, 1.2498202788498358, 1.5625550979511826, 1.874995635228025, 2.187498165904868, 2.5000006973094018, 2.8124999212643185, 3.124999982737996, 3.4375000085717637, 3.749999998750245, 4.062499999859188, 4.375000000102331, 4.687499999981598, 4.999999999999201, 5.312500000001184, 5.6249999999997415, 5.937500000000003, 6.250000000000012, 6.562499999999996, 6.875000000000001, 7.187499999999999, 7.499999999999999, 7.8125, 8.125, 8.4375, 8.75, 9.0625, 9.375, 9.6875, 10.0, 10.3125, 10.625, 10.9375, 11.25, 11.5625, 11.875, 12.1875, 12.5, 12.8125, 13.125, 13.4375, 13.75, 14.0625, 14.375, 14.6875, 15.0, 15.3125, 15.625, 15.9375, 16.25, 16.5625, 16.875, 17.1875, 17.5, 17.8125, 18.125, 18.4375, 18.75, 19.0625, 19.375, 19.6875, 20.0, 20.3125, 20.625, 20.9375, 21.25, 21.5625, 21.875, 22.1875, 22.5, 22.8125, 23.125, 23.4375, 23.75, 24.0625, 24.375, 24.6875, 25.0, 25.3125, 25.625, 25.9375, 26.25, 26.5625, 26.875, 27.1875, 27.5, 27.8125, 28.125, 28.4375, 28.75, 29.0625, 29.375, 29.6875, 30.0, 30.3125, 30.625, 30.9375, 31.25, 31.5625, 31.875, 32.1875, 32.5, 32.8125, 33.125, 33.4375, 33.75, 34.0625, 34.375, 34.6875, 35.0, 35.3125, 35.625, 35.9375, 36.25, 36.5625, 36.875, 37.1875, 37.5, 37.8125, 38.125, 38.4375, 38.75, 39.0625, 39.375, 39.6875, 40.0, 40.3125, 40.625, 40.9375, 41.25, 41.5625, 41.875, 42.1875, 42.5, 42.8125, 43.125, 43.4375, 43.75, 44.0625, 44.375, 44.6875, 45.0, 45.3125, 45.625, 45.9375, 46.25, 46.5625, 46.875, 47.1875, 47.5, 47.8125, 48.125, 48.4375, 48.75, 49.0625, 49.375, 49.6875, 50.0, 50.3125, 50.625, 50.9375, 51.25, 51.5625, 51.875, 52.1875, 52.5, 52.8125, 53.125, 53.43749999999999, 53.75, 54.06250000000001, 54.375, 54.687499999999986, 55.000000000000014, 55.31250000000003, 55.6249999999998, 55.937500000000504, 56.25000000000135, 56.5624999999843, 56.875000000049425, 57.18750000005937, 57.49999999879171, 57.812500004622834, 58.12500000070545, 58.43749990999824, 58.75000041399376, 59.06249972191647, 59.37499355984592, 59.687535782474264, 59.999950867134075, 60.312062493698136, 60.62799771661071, 60.93147142483904, 61.22242520796603, 61.806394386637606, 61.23416906668532, 60.65766946915238, 81.77387417937764]

Jak widzimy, różnica wyników w zależności od metody i wektora początkowego jest na tyle mała że możemy ją przypisać błędowi zaokrąglenia. Wnioskujemy więc że dwie metody są równoważne, a wyniki nie zależne od początkowego wektora, z tego powodu i dlatego że same wyniki nie są ważne w tym ćwiczeniu, będziemy je omijać w dalszej części tego podpunktu

Wektor początkowy= [1, 2, 3, 4, 5, …, N-1, N]

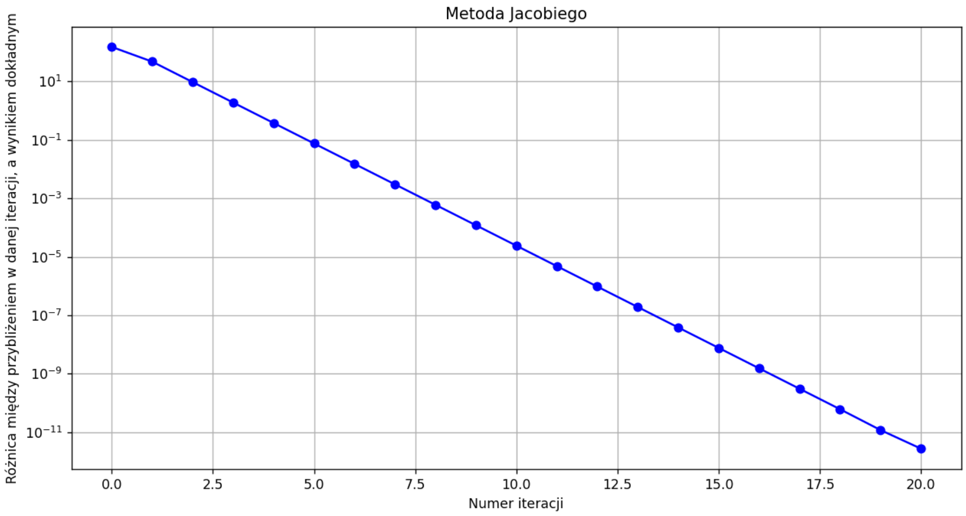
Wartość d= 6

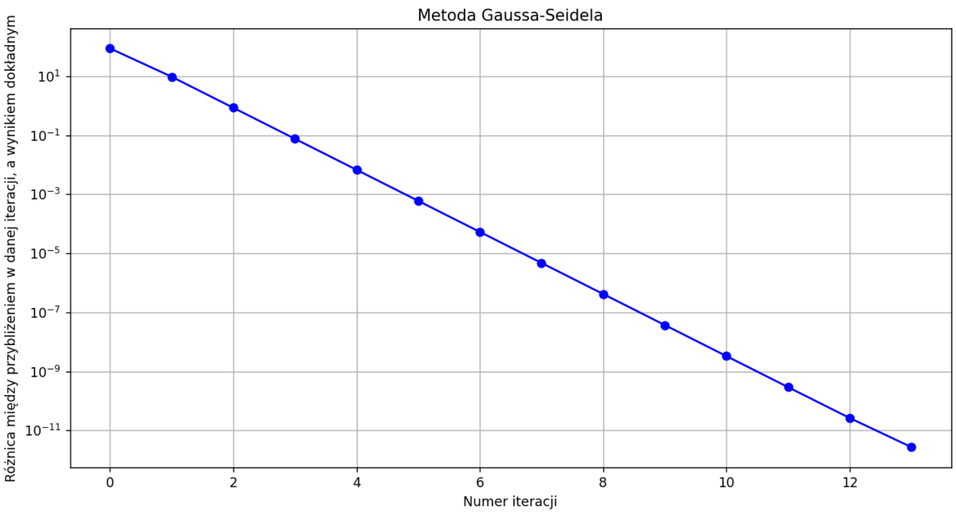




Wektor początkowy= [20, 20, 20, 20, 20, …, 20, 20]

Wartość d= 6





4. Wnioski

Jak możemy zauważyć metoda Jacobiego zbiega zauważalnie wolniej niż metoda Gaussa-Seidela. Widzimy też że im niższa wartość d tym wolniej zbiegają obie metody, jest to spowodowane zbliżaniem się do wartości „granicznej" poniżej której metody nie będą zbieżne. Widzimy także że wybór wektora początkowego nie ma zauważalnego wpływu na ilość iteracji, nie ma on też wpływu na ostateczny wynik, więc możemy wybierać dowolny wektor jako początkowy wektor x.