Politechnika Wrocławska
Wydział Podstawowych Problemów Techniki

Obliczenia naukowe

Sprawozdanie z zajęć laboratoryjnych

Lista 3

Autor:
Jakub Pezda
221426

1.1 Opis problemu

Ćwiczenie polega na napisaniu funkcji rozwiązującej równanie `f(x) = 0` metodą bisekcji.

1.2 Rozwiązanie

W tym sposobie wyznaczania miejsc zerowych użytkownik podaje przedział, w którym spodziewa się wystąpienie miejsca zerowego oraz dokładność obliczeń. Metoda sprawdza czy znaki wartości funkcji na końcach przedziału są różne. Jeżeli tak to funkcja dzieli przedział na pół i sprawdza czy punkt środkowy jest miejscem zerowym. Jeżeli nie to poprzez sprawdzenie znaku szuka, w której połowie przedziału występuje miejsce zerowe i kontynuuje obliczenia aż znajdzie miejsce zerowe. Pseudokod algorytmu stosującego metodę bisekcji zaprezentowano poniżej.

```
function mbisekcji(f, a, b, delta, epsilon, maxit)
   u = f(a)
   v = f(b)
   e = b - a
   if (sign(u) == sign(v)) then stop
   for i = 1:maxit
      e = e / 2
      c = a + e
      w = f(c)
      if (abs(e) < delta || abs(w) < epsilon) then stop
      if (sign(w) != sign(u))
         b = c
         v = w
      else
         a = c
         u = w
```

Listing 1.1: pseudokod metody bisekcji

Powyższa implementacja przyjmuje jako ostatni parametr maksymalną liczbę kroków jakie algorytm może wykonać aby uniknąć niekończących się obliczeń. Środek przedziału obliczany jest za pomocą instrukcji `c=a+(b−a)/2`, gdyż zmniejsza to ryzyko błędu. Znaki wartości funkcji są porównywane przy użyciu funkcji `sign()` zamiast ich mnożenia aby uniknąć dodatkowych obliczeń oraz błędów, które mogą z nich wyniknąć.

2.1 Opis problemu

Celem ćwiczenia jest zaimplementowanie funkcji rozwiązującej równanie f(x) = 0 metodą Newtona.

2.2 Rozwiązanie

Metoda Newtona do obliczenia kolejnego przybliżenia miejsca zerowego stosuje następujący wzór rekurencyjny $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Obliczenia są kontynuowane do momentu, w którym algorytm osiągnie podaną dokładność lub, gdy maksymalna liczba kroków zostanie przekroczona. Poniższy pseudokod prezentuje algorytm stosujący metodę Newtona.

```
function mstycznych(f, pf, x0, delta, epsilon, maxit)
   v = f(x0)
   if (abs(v) < epsilon) then stop
   for k = 1:maxit
      if (abs(pf(x0)) < epsilon) then stop
      x1 = x0 - v / pf(x0)
      v = f(x1)
      if (abs(x1 - x0) < delta || abs(v) < epsilon) then stop
      x0 = x1
```

Listing 2.1: pseudokod algorytmu stosującego metodę Newtona

3.1 Opis problemu

Celem ćwiczenia jest zaimplementowanie funkcji rozwiązującej równanie f(x) = 0 metodą siecznych.

3.2 Rozwiązanie

Metoda siecznych opisana jest równaniem rekurencyjnym $x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$. W przeciwieństwie do metody Newtona algorytm nie potrzebuje pochodnej funkcji. Wymagane są jednak dwa punkty początkowe. W każdym kolejnym kroku obliczana jest tylko jedna nowa wartość funkcji f. Algorytm stosujący metodę siecznych prezentuje poniższy pseudokod.

```
function msiecznych(f, x0, x1 delta, epsilon, maxit)
   fa = f(x0)
   fb = f(x1)
   for k = 2:maxit
      if (abs(fa) > abs(fb))
         swap(x0, x1)
         swap(fa, fb)
      s = (x1 - x0) / (fb - fa)
      x1 = x0
      fb = fa
      x0 = x0 - fa * s
      fa = f(x0)
      if (abs(fa) < epsilon || (abs(x1 - x0) < delta)) then stop
```

Listing 3.1: pseudokod algorytmu stosującego metodę siecznych

4.1 Opis problemu

Celem ćwiczenia jest wyszukanie pierwiastka równania $\sin(x)-(\frac{1}{2}x)^2=0$ stosując wcześniej zaimplementowane metody.

4.2 Rozwiązanie

Aby wykonać ćwiczenie użyto metod z zadań 1, 2 oraz 3.

4.3 Wyniki

Poniższa tabela prezentuje wyniki wykonania programu.

	Miejsce zerowe	Wartość w miejscu zerowym	Liczba kroków
Metoda bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16
Metoda Newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4
Metoda siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4

4.4 Wnioski

Najbardziej dokładne wyniki prezentuje metoda Newtona. Należy jednak pamiętać, że koszt algorytmu korzystającego z metody Newtona jest wysoki, ponieważ w każdym kroku należy obliczać dwie wartości. Metoda siecznych jest zbieżna wolniej od metody Newtona oraz wyniki są mniej precyzyjne ale wymagane jest obliczenie tylko jednej wartości w każdym kroku stąd koszt obliczeń jest mniejszy. Metoda bisekcji wymaga dużo większej ilości iteracji od pozostałych dwóch metod.

5.1 Opis problemu

Celem ćwiczenia jest znalezienie miejsc przecięcia wykresów funkcji $y=3x$ oraz $y=e^x$ przy użyciu metody bisekcji.

5.2 Rozwiązanie

Aby znaleźć miejsce przecięcia dwóch funkcji f(x) oraz g(x) należy rozwiązać równanie f(x) = g(x), które można zapisać jako f(x) – g(x) = 0. Następnie równanie trzeba podstawić do funkcji znajdującej miejsca zerowe metodą bisekcji zaimplementowanej w zadaniu 1. Do wyszukania miejsc zerowych użyto przedziałów [0, 1] oraz [1, 2].

5.3 Wyniki

Poniższa tabel prezentuje wyniki wykonania programu.

Przedział	Miejsce przecięcia	Wartość w miejscu przecięcia	Liczba iteracji
[0, 1]	0.619140625	9.066320343276146e-5	9
[1, 2]	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13

5.4 Wnioski

Metoda bisekcji może być użyta do wyszukania miejsc przecięcia się wykresów. Źle dobrane początkowe przedziały powodują błędne wyniki. Przeanalizowanie wykresów funkcji pomaga w doborze początkowych przedziałów.

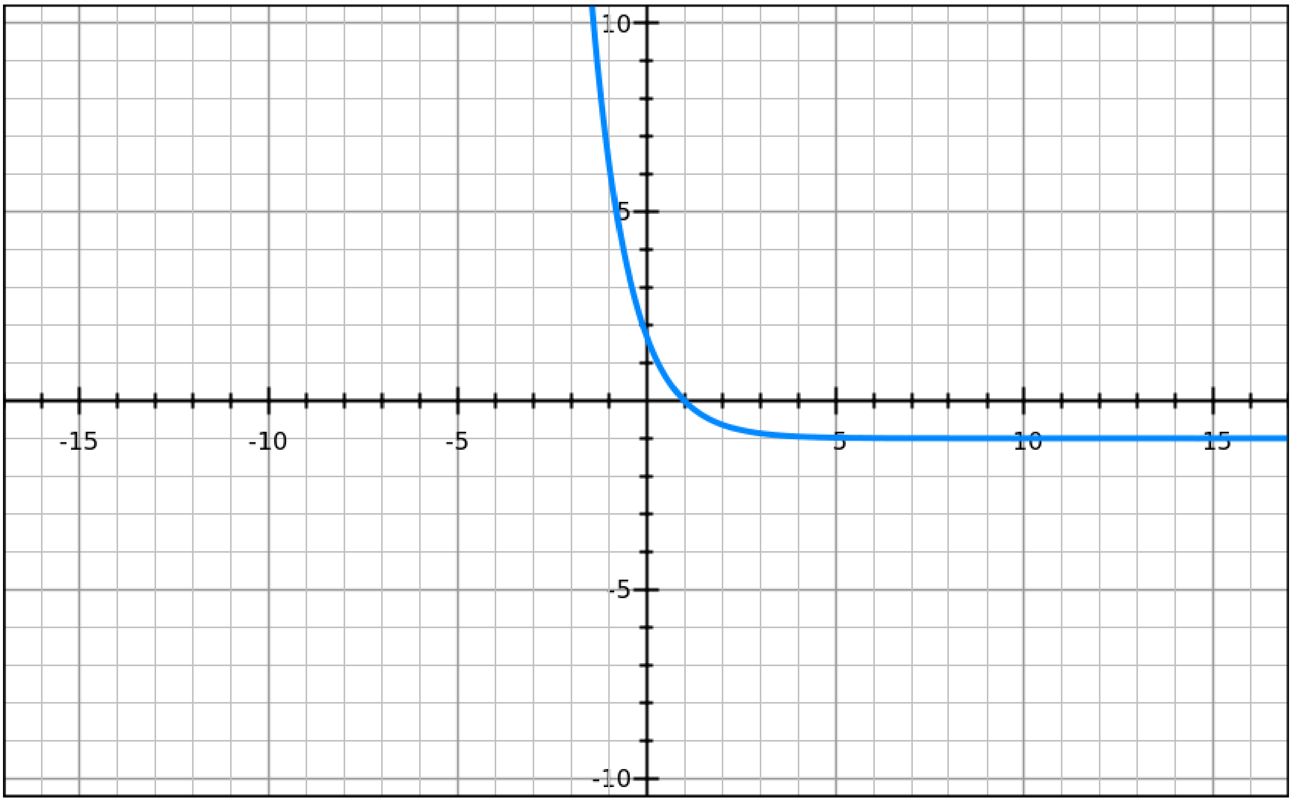
6.1 Opis problemu

Celem ćwiczenia jest znalezienie miejsc zerowych funkcji $f(x)=e^{1-x}-1$ oraz $f(x)=x e^{-x}$ za pomocą metod bisekcji, Newtona i siecznych. Należy dobrać przedziały oraz przybliżenia.

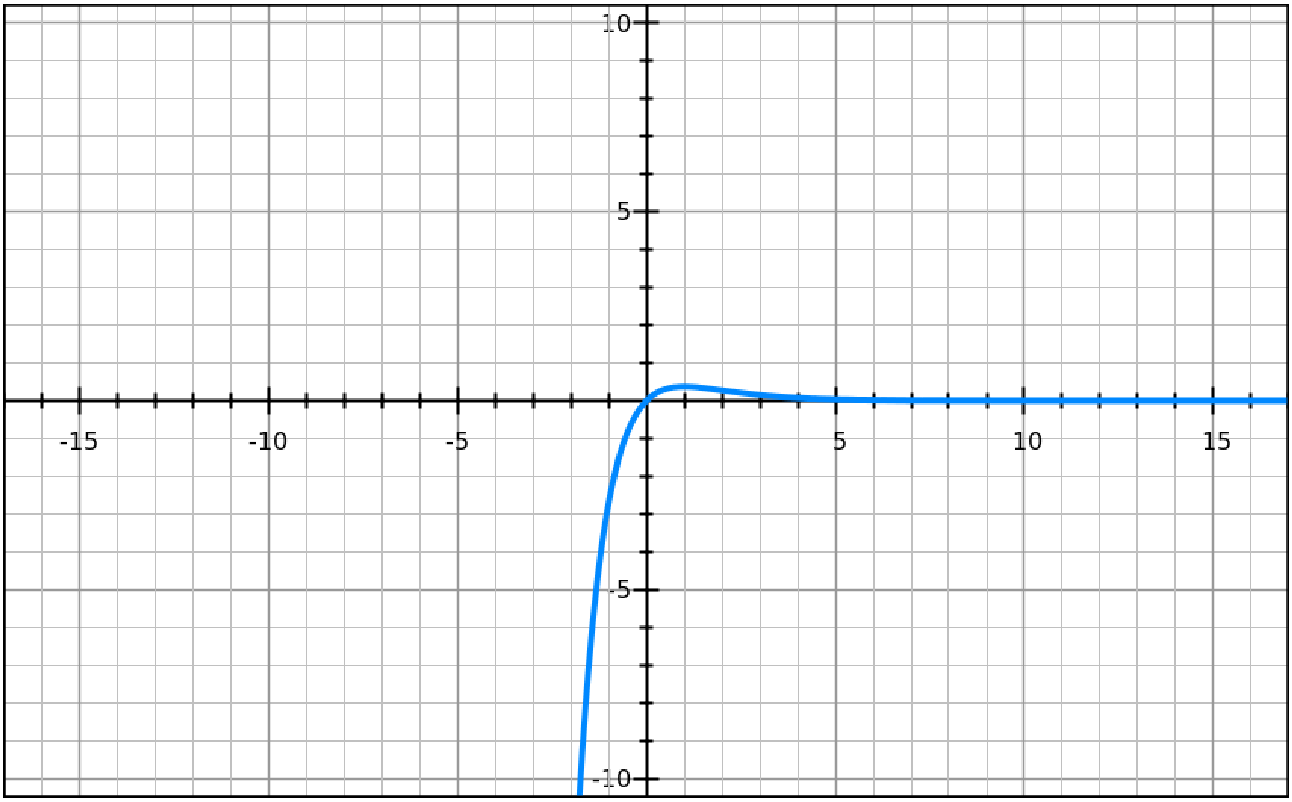
6.2 Rozwiązanie

Aby rozwiązać ćwiczenie należy przeanalizować wykresy funkcji oraz dobrać odpowiednie przedziały oraz początkowe przybliżenia.

$$f(x)=e^{1-x}-1$$



$$f(x)=x\,e^{-x}$$



6.3 Wyniki

Poprawne:

	$f(x)=e^{1-x}-1$	$f(x)=x\,e^{-x}$
Metoda bisekcji	1.0	0.0
Metoda Newtona	0.9999984358892101	-3.0642493416461764e-7
Metoda siecznych	1.0000017597132702	1.744165849924562e-8

Niepoprawne:

	$f(x)=e^{1-x}-1$	$f(x)=x\,e^{-x}$
Metoda Newtona	NaN	14.787436802837927
Metoda siecznych	20.0	14.836777722716038

6.4 Wnioski

Metoda Newtona oraz metoda siecznych przy źle dobranym przybliżeniu początkowym mogą zwrócić pierwiastki, które nie są miejscami zerowymi. Dzieje się tak, gdy wartości funkcji są poniżej zadanej dokładności. Nieodpowiednie dobranie przybliżenia początkowego w metodzie Newtona może prowadzić do osiągnięcia wartości bliskiej zeru pochodnej funkcji co prowadzi do przerwania obliczeń. Dla dobrze dobranych przedziałów początkowych metoda bisekcji zwraca najdokładniejsze wyniki. Metoda Newtona zawodzi dla niektórych punktów początkowych (np. dla 10 w pierwszej funkcji), ponieważ ciąg jest rozbieżny.