Politechnika Wrocławska
Wydział Podstawowych Problemów Techniki

Obliczenia naukowe

Sprawozdanie z zajęć laboratoryjnych

Lista 4

Autor:
Jakub Pezda
221426

1.1 Opis problemu

Ćwiczenie polega na napisaniu funkcji obliczającej ilorazy różnicowe.

1.2 Rozwiązanie

Ilorazy różnicowe oblicza się rekurencyjnie stosując wzór:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Ilorazy rzędu zerowego i pierwszego można przedstawić więc następująco:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Do wykonania ćwiczenia użyto algorytmu, którego pseudokod prezentuje się następująco:

```
function ilorazyRoznicowe(x, f)
   for i = 1:n
      fx[i] = f[i]
   for j = 2:n
      for i = n:-1:j
         fx[i] = (fx[i] - fx[i - 1])/(x[i] - x[i - j + 1])
      end
   end
```

Listing 1.1: pseudokod algorytmu obliczającego ilorazy różnicowe

Powyższa implementacja przyjmuje jako parametry wektor zawierający węzły $x_0, x_1, \dots, x_n$ oraz wektor zawierający wartości interpolowanej funkcji w węzłach $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$.

2.1 Opis problemu

Celem ćwiczenia jest zaimplementowanie funkcji obliczającej wartość wielomianu w punkcie za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera.

2.2 Rozwiązanie

Uogólniony algorytm Hornera prezentuje się następująco:

$w_n(x) := f[x_0, x_1, \dots, x_n]$
$w_k(x) := f[x_0, x_1, \dots, x_k] + (x - x_k) * w_{k+1}(x)$ (k = n - 1, …, 0)
$N_n(x) := w_0(x)$

Na podstawie powyższych wzorów można napisać algorytm wyznaczający wartość wielomianu w czasie O(n). Poniższy pseudokod przedstawia takie rozwiązanie

```
function warNewton(x, fx, t)
   nt = fx[n]
   for i = n - 1: -1: 1
      nt = fx[i] + (t - x[i]) * nt
   end
```
Listing 2.1: pseudokod algorytmu obliczającego wartość wielomianu w punkcie

3.1 Opis problemu

Celem ćwiczenia jest zaimplementowanie funkcji interpolującej podaną funkcję oraz rysującej wielomian interpolacyjny i interpolowaną funkcję.

3.2 Rozwiązanie

Do rozwiązania zadania użyto funkcji zaimplementowanych w ćwiczeniu pierwszym oraz drugim. Aby narysować funkcję oraz wielomian skorzystano z pakietu PyPlot. Algorytm w pierwszej kolejności oblicza wartości funkcji dla węzłów. Następnie używając funkcji z pierwszego zadania oblicza ilorazy różnicowe. W ostatnim kroku tworzy wykresy. Wartości wielomianu oblicza są przy użyciu algorytmu z drugiego zadania.

4.1 Opis problemu

Celem ćwiczenia jest przetestowanie funkcji z zadania trzeciego na następujących przykładach:

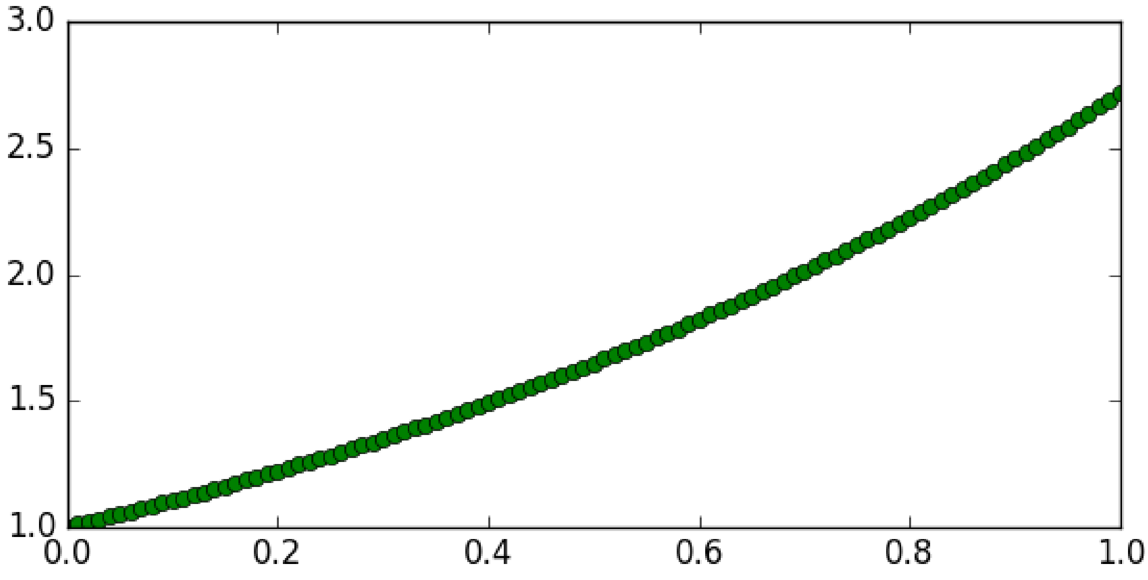
(a) e^x, [0, 1], n = 5, 10, 15
(b) $x^2 \sin x$, [-1, 1], n = 5, 10, 15

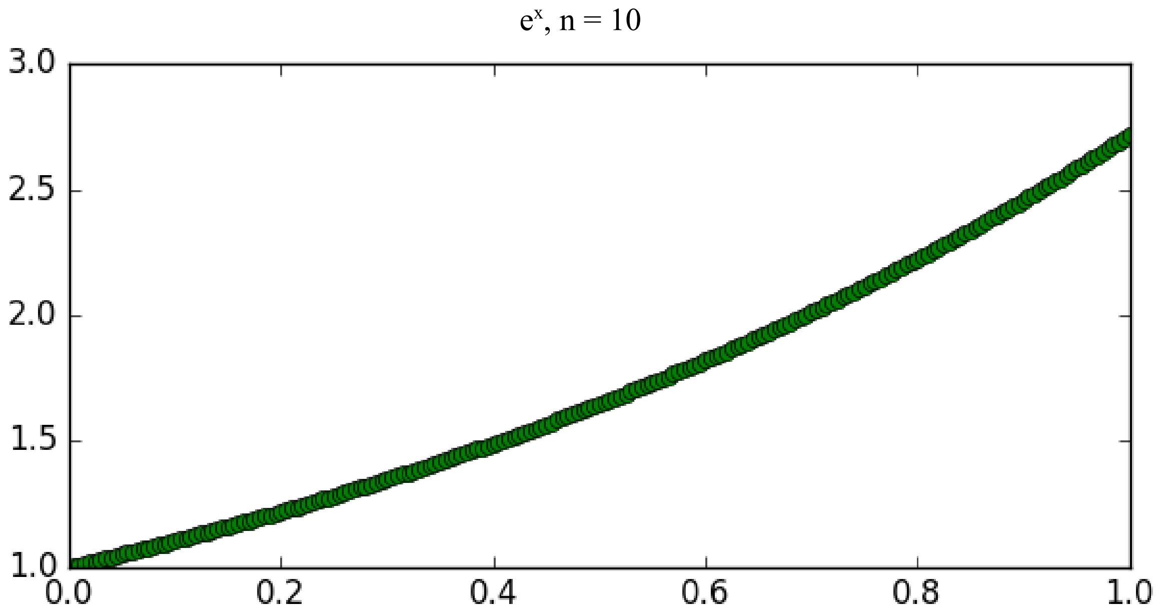
4.2 Rozwiązanie

Aby wykonać ćwiczenie podstawiono dane podane w treści zadania do funkcji z zadania trzeciego.

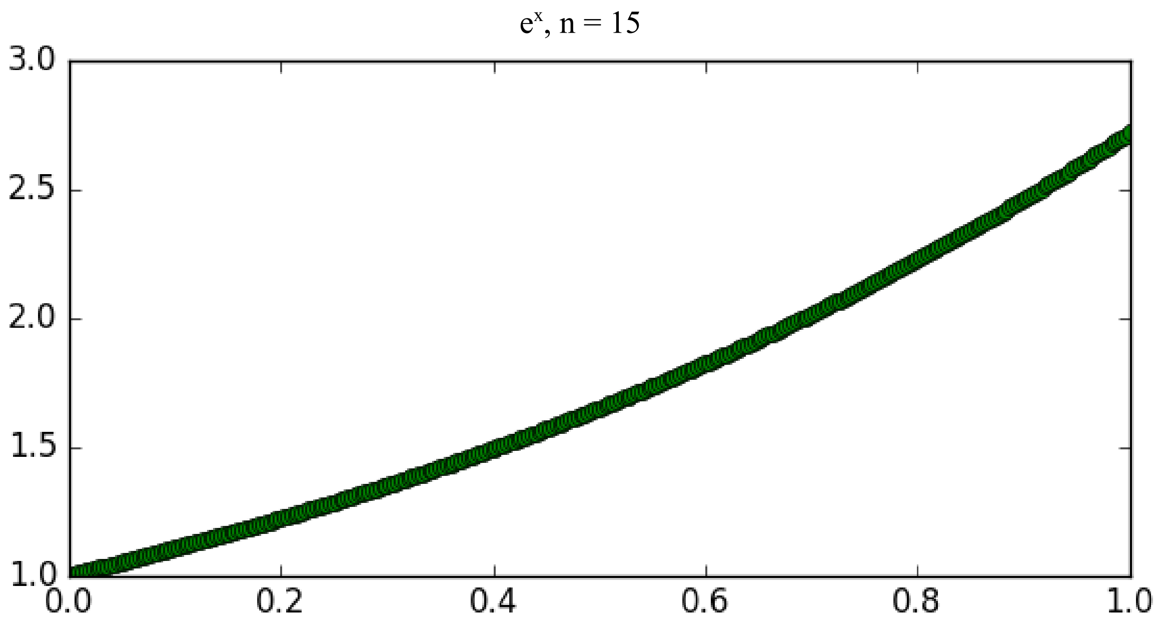
4.3 Wyniki

e^x, n = 5

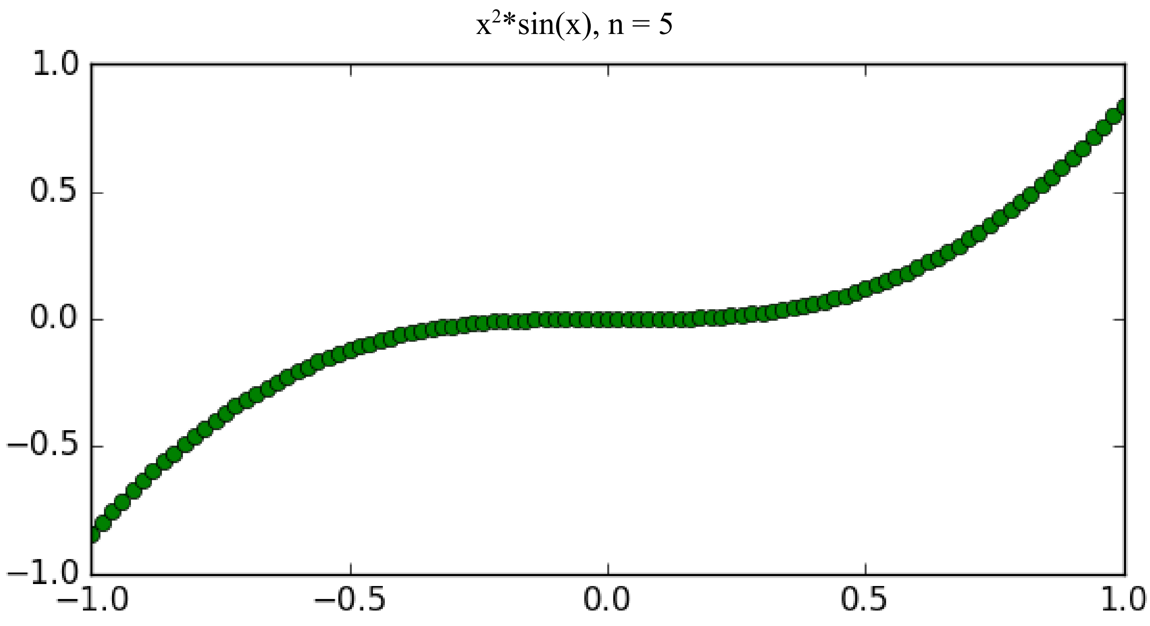




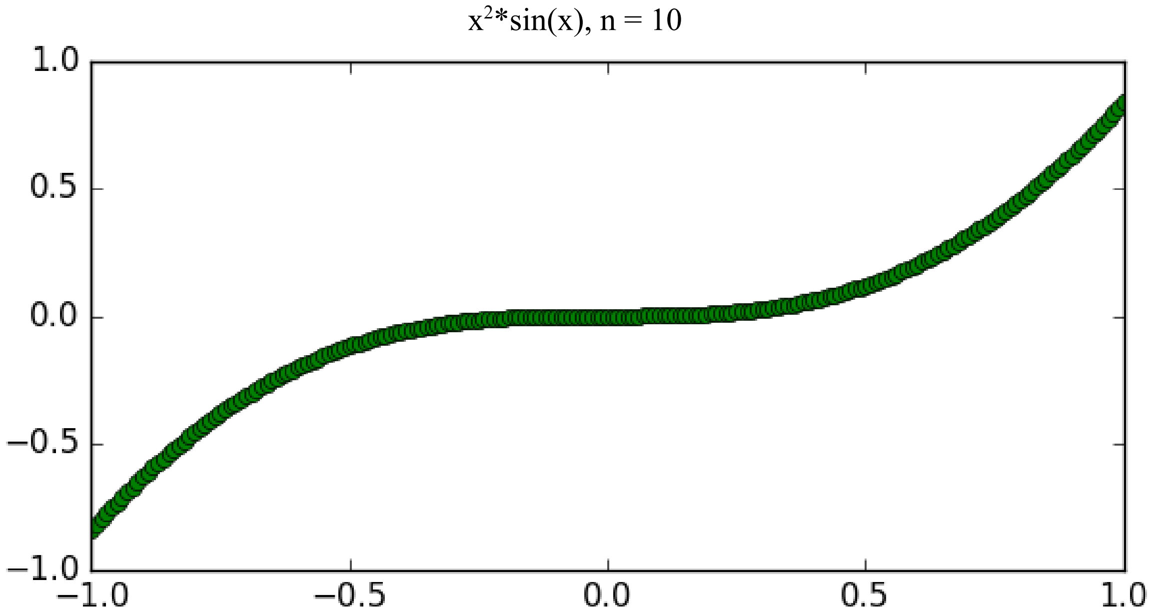
e^x, n = 10
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

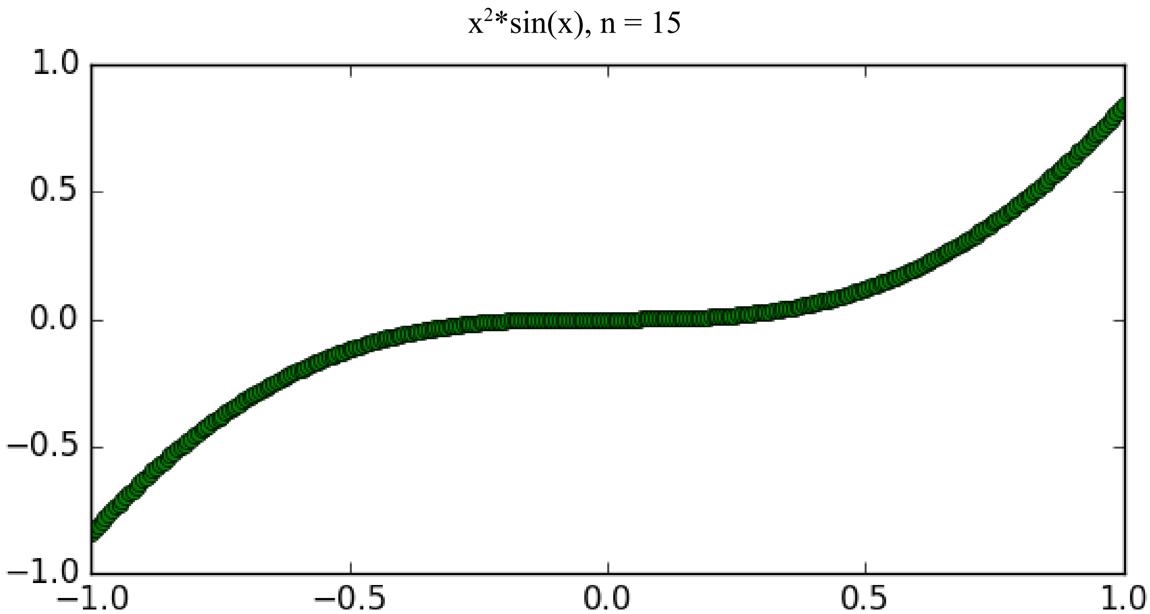


e^x, n = 15
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



x^2*sin(x), n = 5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0





4.4 Wnioski

Wykresy funkcji interpolowanej oraz wielomianu interpolacyjnego są identyczne. Nie widać rozbieżności pomiędzy nimi. Przybliżenie wykresów rośnie wraz ze wzrostem stopnia wielomianu.

5.1 Opis problemu

Celem ćwiczenia jest przetestowanie funkcji z zadania trzeciego na następujących przykładach:

(a) $|x|$, [-1, 1], n = 5, 10, 15

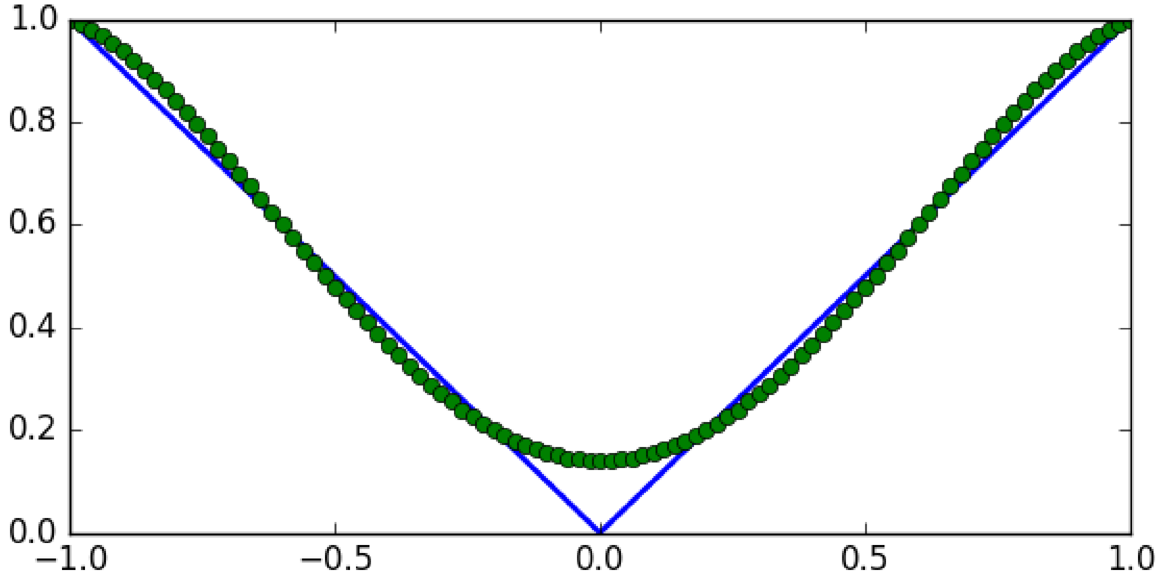
(b) $\frac{1}{1+x^2}$, [-5, 5], n = 5, 10, 15

5.2 Rozwiązanie

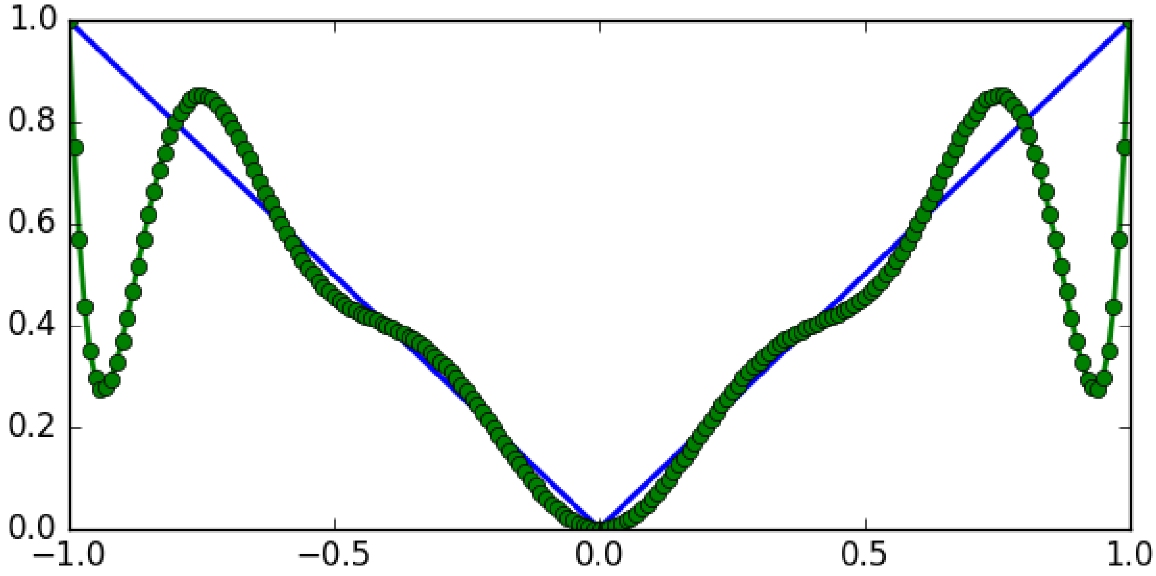
Aby wykonać ćwiczenie podstawiono dane podane w treści zadania do funkcji z zadania trzeciego.

5.3 Wyniki

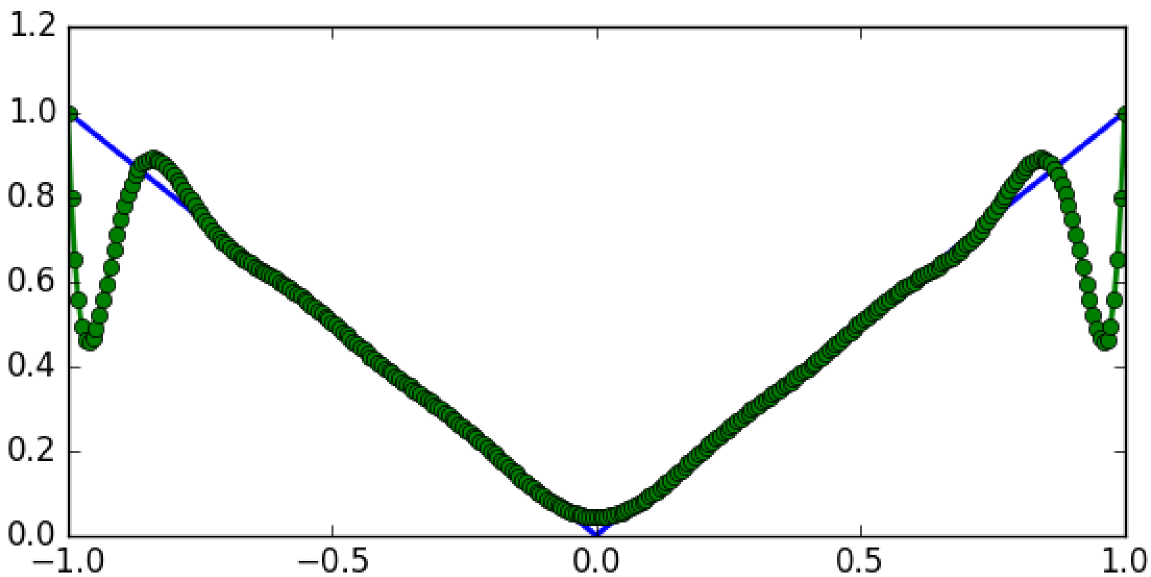
$|x|$,   n = 5

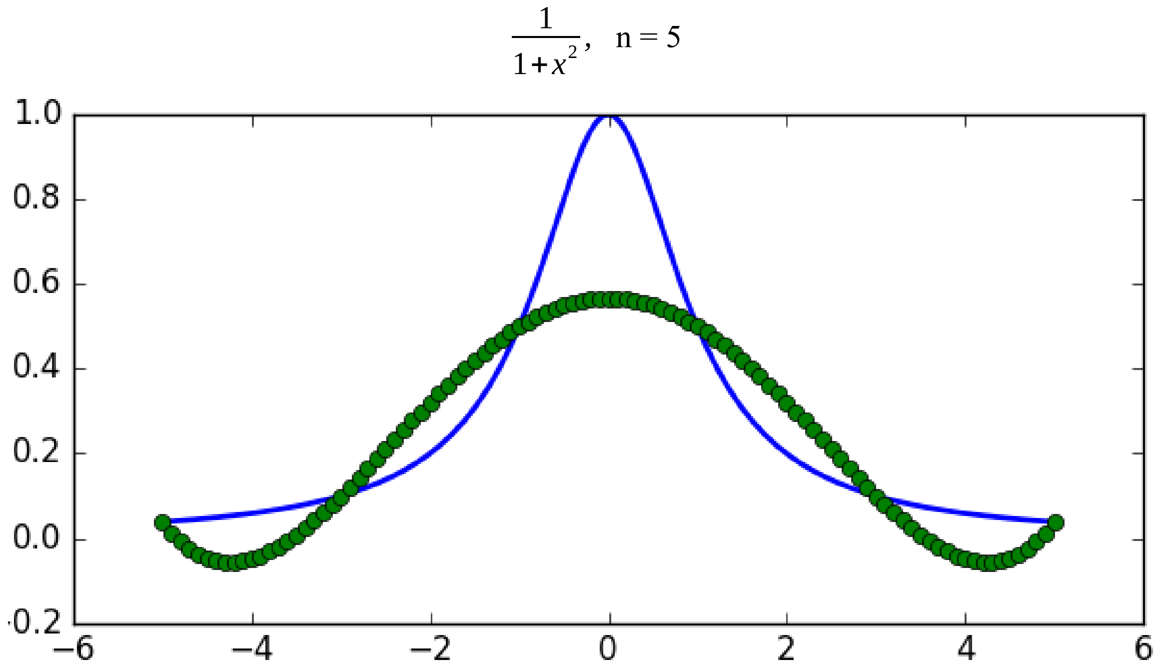


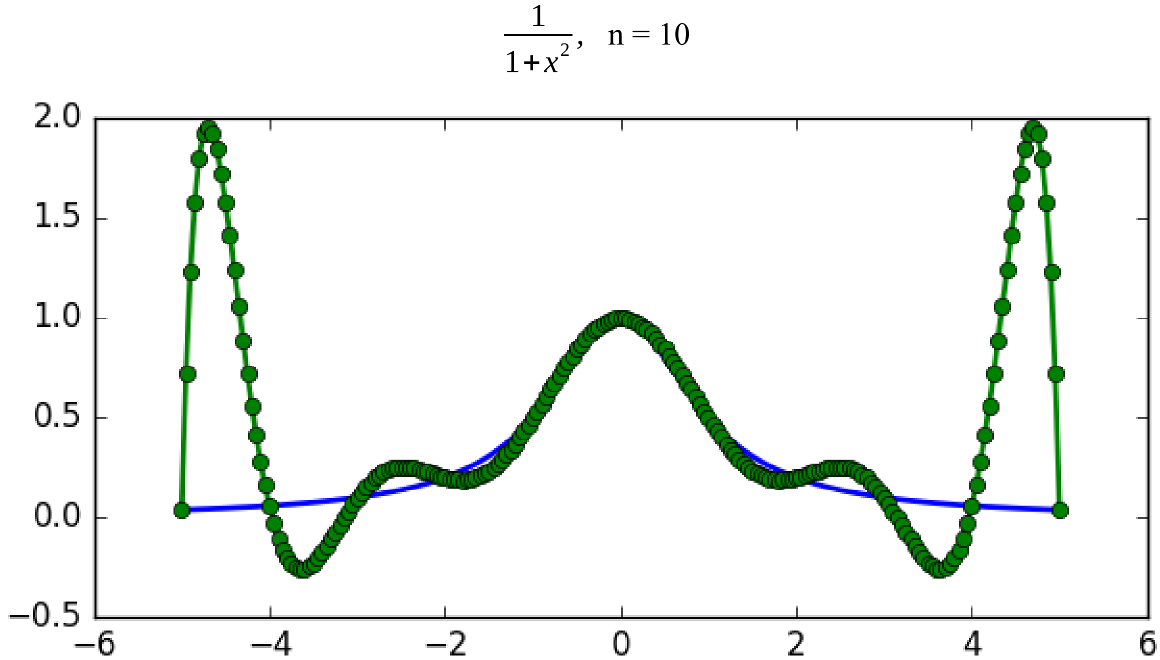
$|x|$,   n = 10

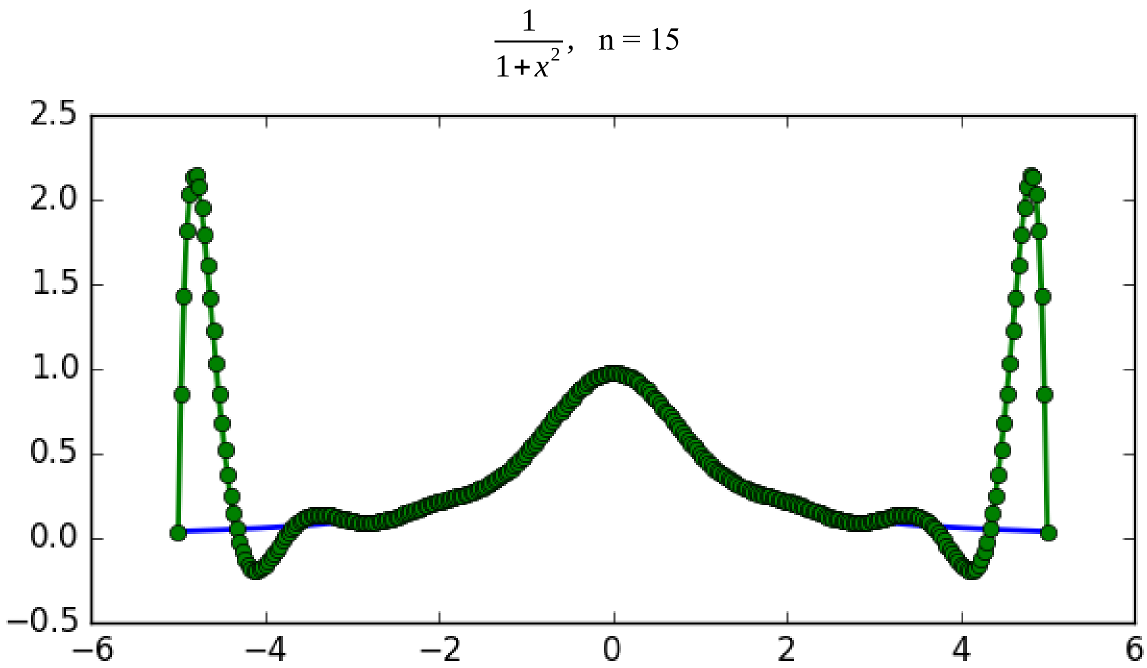


$|x|$,   n = 15




$\frac{1}{1+x^2}$, n = 5
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
−6
−4
−2
0
2
4
6


$\frac{1}{1+x^2}$, n = 10
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−6
−4
−2
0
2
4
6


$\frac{1}{1+x^2}$, n = 15
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−6
−4
−2
0
2
4
6

5.4 Wnioski

Interpolacja wielomianami wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów prowadzi do poważnych odchyleń od interpolowanej funkcji zwłaszcza na końcach przedziału. Interpolacja na środkowych częściach jest natomiast dobra i użyteczna. Różnica na końcach przedziału rośnie wraz ze wzrostem stopnia wielomianu. Błąd interpolacji w pierwszej funkcji jest spowodowany tym, że funkcja jest nie różniczkowalna.