Introduction to control systems
TI0118

Homework II

Exercise 1

20 Points

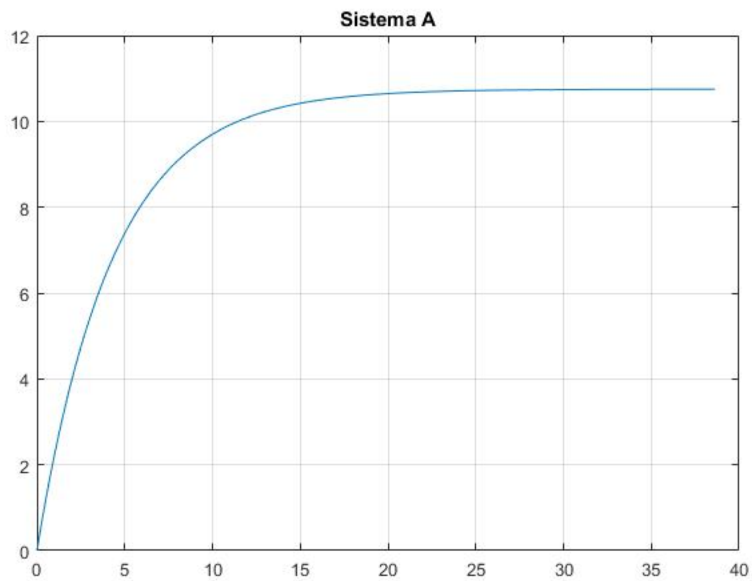
The unit steps responses of two systems A and B are recorded and reported in the files `HW2_ex1_dataA.txt` and `HW2_ex1_dataB.txt`, respectively. In each file, the first column gives the time vector t and the second column gives the output response y.

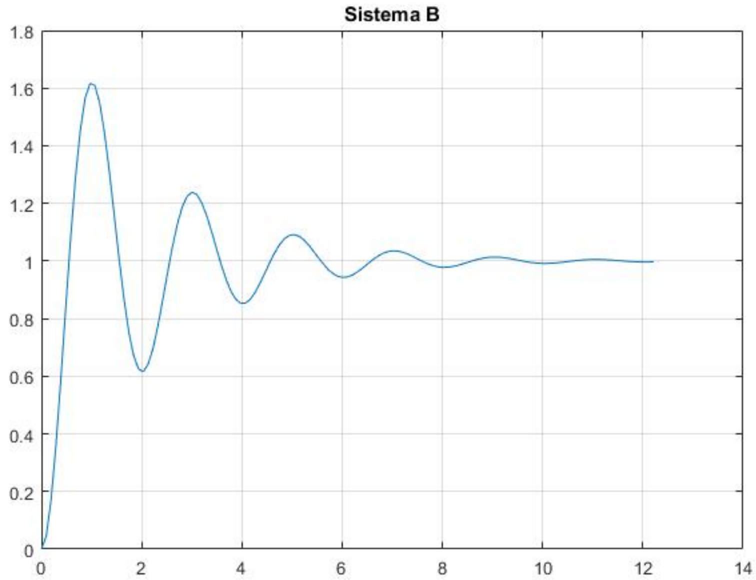
It is required to:

1. Load the data in Matlab/Octave and plot the two responses.
2. Estimate the transfer functions for the system A and B.
3. Compare your estimated systems with the ones provided in the data.

Solution 1

1. Imprimindo os gráficos:





2. - Observando o gráfico do sistema A, concluímos que o mesmo é um sistema de primeira ordem. Portanto, $G_a(s) = \frac{k}{s+a}$.

   Para calcularmos a, fazemos que $T_s = \frac{4}{a}$, onde T_s corresponde ao Tempo de estabilização, que é o tempo quando o sistema atinge 98% do valor final. Como o valor final é 10.7486, então o tempo quando seu valor for 10.5336 será o T_s. Olhando pelos dados fornecidos, temos então que $16.8319 = \frac{4}{a} \longrightarrow a = 0.2376$.

   Já o K, podemos calcular a partir do valor final, onde $V_{\mathrm{f}} = \frac{K}{a}$. Como o Valor Final é 10.7486, teremos que

   $K = 0.2376 * 10.7486 \longrightarrow K = 2.5543$

   Sendo assim, $G_a(s) = \frac{K}{s+a} \longrightarrow \boxed{G_a(s) = \frac{2.5543}{s+0.2376}}$

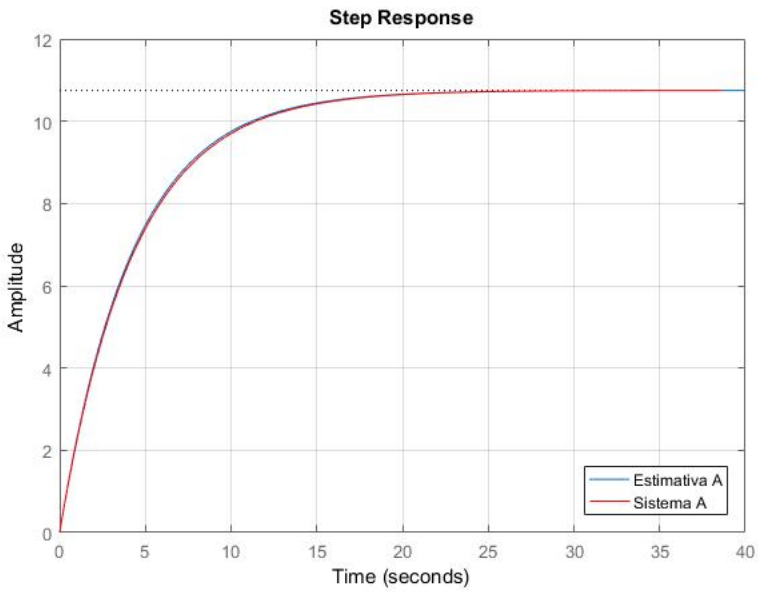
   - Já no sistema B, podemos identificá-lo como um sistema de segunda ordem. Portanto, $G_b(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, onde ω_n é a

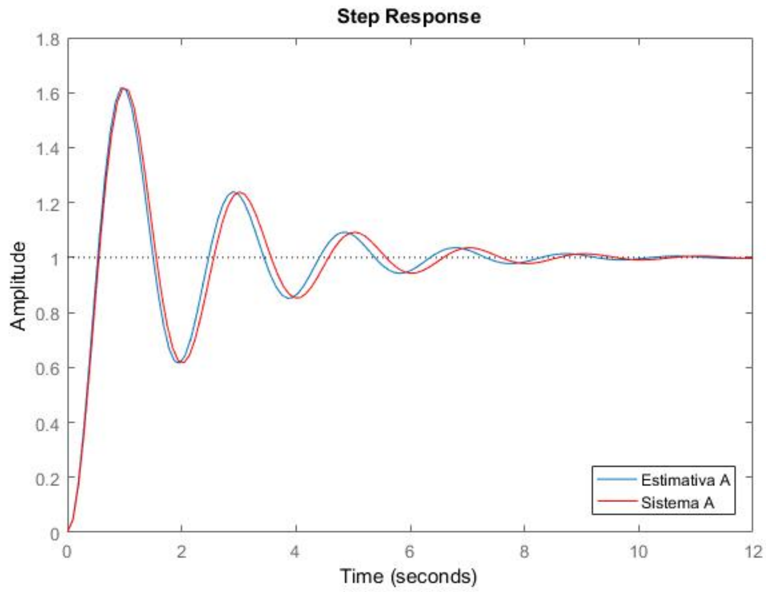
   frequência natural do sistema e ζ é taxa de amortecimento. Para calcular o ζ, utilizamos a seguinte relação: $\zeta = \dfrac{-\ln\left(\dfrac{\%OS}{100}\right)}{\sqrt{\ln^2\left(\dfrac{\%OS}{100}\right)+\pi^2}}$, onde $\%OS$ é a porcentagem de *overshoot*, que é quanto foi ultrapassado o valor final do sistema. Essa porcentagem é calculada através da razão $\%OS = \dfrac{C_{\text{max}} - C_{\text{final}}}{C_{\text{final}}} * 100$. Com isso, temos que $\zeta = 0.1498$. Para calcularmos o ω_n, utilizamos o Tempo de pico, que nada mais é do que o tempo no qual o valor máximo foi alcançado. Conseguimos identificar que o valor máximo foi 1.6165 e, verificando na tabela de dados, seu tempo de pico será 0.9695. Então, através da relação $\omega_n = \dfrac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta}}$ achamos que $\omega_n = 3.2774$.

Com isso, chegamos que $G_b(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \longrightarrow$

$$\boxed{G_b(s) = \frac{10.7415}{s^2 + 0.9822s + 10.7415}}$$

3. Gráficos comparativos:






```
%% Exercise 1
Clear all; clc;

[Xa,Ya] = textread('HW2_ex1_dataA.txt','%f %f');
[Xb,Yb] = textread('HW2_ex1_dataB.txt','%f %f');

%% 1.1
figure(1);
plot(Xa,Ya)
grid on
title('Sistema A')

figure(2);
plot(Xb,Yb)
grid on
title('Sistema B')

%% 1.3
a = 4/Xa(86)
k = a*Ya(196)
numa = [ k ]
dena = [ 1 a]
Ga = tf(numa,dena)
figure(3)
step(Ga); hold on;
plot(Xa,Ya,'color','r')
grid on;
legend('Estimativa A','Sistema A','Location','southeast')

OS = (max(Yb)-Yb(127))/Yb(127)*100
```

```
damp = -log(OS/100)/sqrt((log(OS/100)^2)+pi^2)
wn = pi/(Xb(11)*sqrt(1-damp^2))
numb = [ wn^2 ]
denb = [ 1 2*damp*wn wn^2]
Gb = tf(numb, denb)
figure(4)
step(Gb); hold on;
plot(Xb,Yb,'color','r')
legend('Estimativa A','Sistema A','Location','southeast')
```

Exercise 2

25 Points

Find the transfer function, $T(s) = C(s)/R(s)$, for the system in Figure (1), using the following methods:

1. Block diagram reduction.
2. Matlab/Octave. Use the following transfer functions:

$$
\begin{aligned}
G1(s) &= \frac{1}{(s+7)}, & G2(s) &= \frac{1}{(s^2+2s+3)}, \\
G3(s) &= \frac{1}{(s+4)}, & G4(s) &= \frac{1}{s}, \\
G5(s) &= \frac{5}{(s+7)}, & G6(s) &= \frac{1}{(s^2+5s+10)}, \\
G7(s) &= \frac{3}{(s+2)}, & G8(s) &= \frac{1}{(s+6)}.
\end{aligned}
$$

   Hint: Use the `append` and `connect` commands in Matlab/Octave Control System Toolbox/Package.

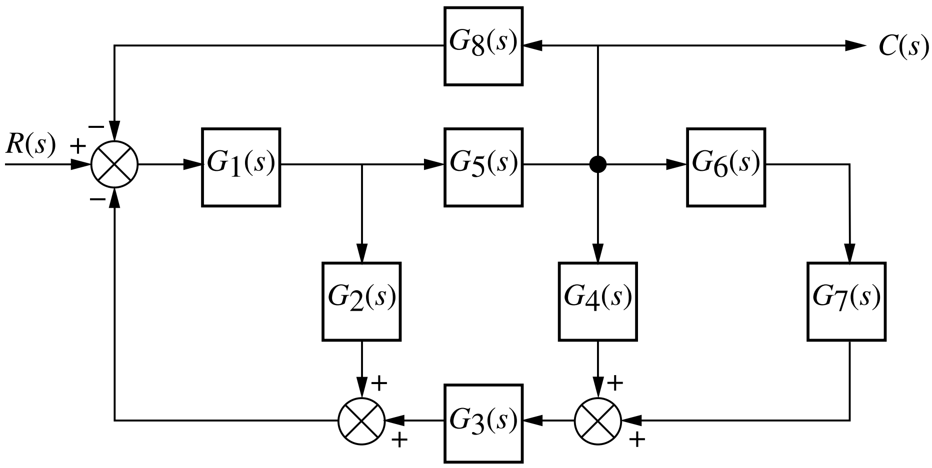


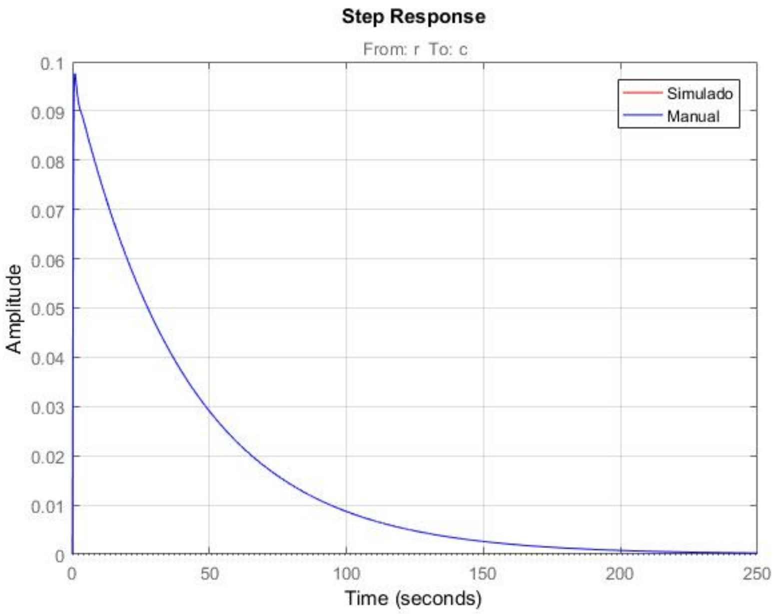
Figura 1: Block diagram for Exercise 2.

Solution 2

1. Após utilizar as propriedades de soma e concatenação de blocos chegamos no bloco com a função de transferência
$$G(s) = \frac{G_1(s)G_5(s)}{1 + G_1(s)[[G_2(s) + G_5(s)G_3(s)[G_4(s) + G_6(s)G_7(s)]] + G_8(s)G_5(s)]}$$

2.
```
s = tf('s');
G1= 1/(s+7); G2= 1/(s^2+2*s+3);
G3= 1/(s+4); G4= 1/s;
G5= 5/(s+7); G6= 1/(s^2+5*s+10);
G7= 3/(s+2); G8= 1/(s+6);

Gm = (G1*G5)/(1+G1*(G2+G3*G5*(G4+G6*G7)+G5*G8))

Sum1 = sumblk('b␣=␣r␣-␣a␣-␣d');
Sum2 = sumblk('d␣=␣f␣+␣g');
Sum3 = sumblk('h␣=␣i␣+␣j');

G1.u = 'b'; G1.y = 'e';
G2.u = 'e'; G2.y = 'f';
G3.u = 'h'; G3.y = 'g';
G4.u = 'c'; G4.y = 'i';
G5.u = 'e'; G5.y = 'c';
G6.u = 'c'; G6.y = 'k';
G7.u = 'k'; G7.y = 'j';
G8.u = 'c'; G8.y = 'a';

Ss = connect(G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7,G8,Sum1,Sum2,
    Sum3,'r','c');

[num, den] = ss2tf(Ss.A,Ss.B,Ss.C,Ss.D);
```

```
Gs = tf(num,den)
figure(1)
step(Gs,'r',Gm,'b'); grid on;
legend('Simulado','Manual');
```



P.S 1: Simulado refere-se ao calculado no MATLAB, enquanto manual refere-se ao feito por diagrama de blocos.
P.S 2: O gráfico do simulado não aparece visível pois a linha do manual está sobrepondo totalmente ela. Contudo, através do MATLAB, pode ser verificado a semelhança entra as funções de transferência.
P.S 3: Os valores concretos das funções de transferência foram omitidos devido ao seu tamanho exageradamente grande. Contudo, as variáveis Gs e Gm indicam as funções de transferência feita no MATLAB e através do diagrama de blocos, respectivamente.

Exercise 3 20 Points

The system in state space given in (1) represents the forward path of a unity feedback system.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned} \tag{1}$$

Constructing the Routh table in Matlab/Octave, use the Routh-Hurwitz criterion to determine if the closed loop is stable.

Solution 3

```
A = [0 1 0; 0 0 1; -3 -4 -5];
B = [0; 0; 1];
C = [0 1 1];
D = 0;

[num, den] = ss2tf(A,B,C,D);
T = tf(num,den);
G = feedback(T,1);

den = G.den;
s3 = [1 5 0];
s2 = [6 3 0];
s1 = [-det([s3(1) s3(2);s2(1) s2(2)])/s2(1) ...
-det([s3(1) s3(3);s2(1) s3(3)])/s2(2) 0];
s0 = [-det([s2(1) s2(2);s1(1) s1(2)])/s1(1) ...
-det([s2(1) s2(3);s1(1) s1(3)])/s1(2) 0];
s0(isnan(s0))=0;
R = [s3(1) s2(1) s1(1) s0(1)]


R =

1.0000    6.0000    4.5000    3.0000
```

Como não há troca de sinal entre as variáveis $S_n(0)$, concluímos que o sistema é estável.

Exercise 4

35 Points

For a system with the state and output equations given in (2):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x^2(t) - u(t)x(t) - 2u(t) \\ y(t) &= x^3(t) + u^3(t) \end{aligned} \tag{2}$$

1. Calculate the state and output equilibrium points when $u(t) = u_{eq} = 1$.
2. Define the linearised system around the equilibrium points and analise the stability of the system.
3. Compare the linearised and nonlinear system responses $\delta y(t)$ for an input $\delta u(t) = Acos(2t)$, with $A = 0.1$ applied at $t = 0$.
4. **Extra (5 points)**: Investigate how the responses differ when the input amplitude assumes the values $[0.05, 0.15, 0.2]$.

5. **Extra (5 points)**: Calculate the error between linearised and nonlinear system in point (3) and point (4). Comment your findings.

Hint: Use the command `ode45` to simulate the nonlinear system.

Solution 4

1. No ponto de equilíbrio, temos que $\dot{x}(t) = 0$. Logo, como $u(t) = u_{eq} = 1$, chegamos nas seguintes equações:

   - $x^2(t) - x(t) - 2 = 0$
   - $y(t) = x^3(t) + 1$

   Resolvendo a primeira equação, chegamos no seguinte resultado:

   $$x_1(t) = 2 \qquad\qquad x_2(t) = -1$$

   Consequentemente, temos que a segunda equação fica:

   $$\begin{aligned} y_1(t) &= 2^3 + 1 = 9 \\ y_2(t) &= -1^3 + 1 = 0 \end{aligned}$$

   Sendo assim, os pontos de equilíbrio são:

   (a)

   $$x_1(t) = 2 \qquad\qquad y_1(t) = 9$$

   (b)

   $$x_2(t) = -1 \qquad\qquad y_2(t) = 0$$

2. Como temos 2 pares de pontos de equilibrio, resolvemos uma de cada vez:

   (a)

   $$\dot{x}(t) = x^2(t) - u(t)x(t) - 2u(t) \qquad\qquad y(t) = x^3(t) + u^3(t)$$
   $$\text{Ponto de equilibrio} = (x_0, u_0) = (2, 1)$$

   Usando série de Taylor para linearizarmos o sistema:

   $$\cancel{\dot{x}_0(t)} + \Delta\dot{x} = \cancel{f(x_0, u_0)} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)} .\Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} .\Delta u$$

   $$\Delta\dot{x} = (2\cancelto{2}{x(t)} - \cancelto{1}{u(t)})\Big|_{(x_0,u_0)} .\Delta x + (0 - \cancelto{2}{x(t)} - 2)\Big|_{(x_0,u_0)} .\Delta u$$

   $$\Delta\dot{x} = 3\Delta x - 4\Delta u \xrightarrow{\Delta x \triangleq x(t), \Delta u \triangleq u(t)} \boxed{\dot{x}(t) = 3x(t) - 4u(t)}$$

$$\Delta y = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)} .\Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} .\Delta u$$

$$\Delta y = (3x^2(t))\Big|_{(x_0,u_0)} .\Delta x + (3u^2(t))\Big|_{(x_0,u_0)} .\Delta u$$

$$\Delta y = 12\Delta x + 3\Delta u \xrightarrow{\Delta x \triangleq x(t), \Delta u \triangleq u(t)} \boxed{y(t) = 12x(t) + 3u(t)}$$

Com as equações de estado e resposta conseguimos achar a função de transferência fazendo a transformada de Laplace:

$$sX(s) = 3X(s) - 4U(s) \qquad Y(s) = 12X(s) + 3U(s)$$

Da primeira equação, temos:

$$X(s) = \frac{-4U(s)}{s-3} \xrightarrow[\text{segunda eq.}]{\text{Aplicando na}} Y(s) = \frac{-48U(s)}{s-3} + 3U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s-57}{s-3}$$

Colocando em closed-loop para calcular a estabilidade:

$$G(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{3s-57}{4s-60}}$$

Sendo assim, o único polo será 15, que é do lado direito do plano real, caracterizando um sistema **instável**.

(b)

$$\dot{x}(t) = x^2(t) - u(t)x(t) - 2u(t) \qquad y(t) = x^3(t) + u^3(t)$$

$$\text{Ponto de equilibrio} = (x_0, u_0) = (-1, 1)$$

Usando série de Taylor para linearizarmos o sistema:

$$\cancel{\dot{x}_0(t)} + \Delta\dot{x} = \cancel{f(x_0,u_0)} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)} .\Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} .\Delta u$$

$$\Delta\dot{x} = (2\cancelto{-1}{x(t)} - \cancelto{1}{u(t)})\Big|_{(x_0,u_0)} .\Delta x + (0 - \cancelto{-1}{x(t)} - 2)\Big|_{(x_0,u_0)} .\Delta u$$

$$\Delta\dot{x} = -3\Delta x - \Delta u \xrightarrow{\Delta x \triangleq x(t), \Delta u \triangleq u(t)} \boxed{\dot{x}(t) = -3x(t) - u(t)}$$

$$\Delta y = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)} .\Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} .\Delta u$$

$$\Delta y = (3x^2(t))\Big|_{(x_0,u_0)} .\Delta x + (3u^2(t))\Big|_{(x_0,u_0)} .\Delta u$$

$$\Delta y = 3\Delta x + 3\Delta u \xrightarrow{\Delta x \triangleq x(t), \Delta u \triangleq u(t)} \boxed{y(t) = 3x(t) + 3u(t)}$$

Com as equações de estado e resposta conseguimos achar a função de transferência fazendo a transformada de Laplace:

$$sX(s) = -\,3X(s) - U(s) \qquad Y(s) = 3X(s) + 3U(s)$$

Da primeira equação, temos:

$$X(s) = \frac{-\,U(s)}{s+3} \xrightarrow[\text{segunda eq.}]{\text{Aplicando na}} Y(s) = \frac{-\,3U(s)}{s+3} + 3U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s+6}{s+3}$$

Colocando em closed-loop para calcular a estabilidade:

$$G(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{3s+6}{4s+9}}$$

Sendo assim, o único polo será -2.25, que é do lado esquerdo do plano real, caracterizando um sistema **estável**.

3.

```
%% Exercise 4

% Item 2
num1=[3 -57];
den1=[1 -3];
temp= tf(num1,den1);
tf1 = feedback(temp,1)
pole1 = pole(tf1)

num2=[3 6];
den2=[1 3];
temp=tf(num2,den2);
tf2 = feedback(temp,1)
pole2 = pole(tf2)
```