Sistema de equações algébricas lineares

Sedenir Vitorino
R.A.: 2411806

Introdução

- Os sistemas de equações lineares são conjuntos de duas ou mais equações que envolvem as mesmas variáveis. Esses sistemas são representados por expressões na forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}.$$

Representação Sistema Linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

1. Métodos Diretos

- Buscam uma solução exata em um número finito de passos (considerando a precisão dos cálculos).
- São ideais para sistemas menores ou bem condicionados.
- **Exemplos:** Eliminação de Gauss, Fatoração LU, e Regra de Cramer.

2. Métodos Iterativos

- Buscam aproximar a solução por meio de uma sequência de aproximações sucessivas.
- São mais eficientes para sistemas de grande escala ou sistemas esparsos (com muitos zeros).
- **Exemplos:** Método de Jacobi, Método de Gauss-Seidel e Método de Gradientes Conjugados.

Problema

Seja o seguinte sistema de equações lineares $Ax = b$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,2 \\ 7,8 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule a fatoração LU de A.

(b) Considere a fatoração LU para calcular $\det(A)$.

(c) Por meio da fatoração LU, resolva o sistema linear.

Método direto da Fatoração LU

Introdução à Fatoração LU

- **Matriz L**: Matriz triangular inferior, com elementos diagonais iguais a 1.
- **Matriz U**: Matriz triangular superior.

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Por que a fatoração LU é um método direto ?

- A fatoração LU busca uma solução exata do sistema Ax=b

$$\begin{pmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,2 \\ 7,8 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

Etapas da Fatoração LU

$$A = LU$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \end{pmatrix}$$

Etapas da Fatoração LU

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Definir os elementos de U e L na primeira linha

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = 3$$

$$u_{12} = -0.1$$

$$u_{13} = -0.2$$

Definir os elementos de U e L na primeira linha

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = 3$$

$$u_{12} = -0.1$$

$$u_{13} = -0.2$$

$$l_{21} = \frac{A_{21}}{u_{11}} = \frac{0.1}{3} = 0.0333$$

$$l_{31} = \frac{A_{31}}{u_{11}} = \frac{0.3}{3} = 0.1$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333 & 1 & 0 \\ 0.1 & & 1 \end{bmatrix}$$

Atualizar a segunda linha !

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = 3$$

$$u_{12} = -0.1$$

$$u_{13} = -0.2$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333 & 1 & 0 \\ 0.1 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} - (l_{21} \cdot u_{12})$$

$$7 - (0.0333 \times -0.1) = 7 + 0.00333 \approx 7.0033$$

$$u_{22} \approx 7.0033$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Atualizar a segunda linha !

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = 3$$

$$u_{12} = -0.1$$

$$u_{13} = -0.2$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333 & 1 & 0 \\ 0.1 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_{23} = A_{23} - (l_{21} \cdot u_{13})$$

$$-0.3 - (0.0333 \times -0.2) = -0.3 + 0.00666 \approx -0.2933$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & -0.2933 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Atualizar a terceira linha L!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = 3$$

$$u_{12} = -0.1$$

$$u_{13} = -0.2$$

$$A_{32} - (l_{31} \cdot u_{12})$$

$$-0.2 - (0.1 \times -0.1) = -0.2 + 0.01 = -0.19$$

$$l_{32} = \frac{-0.19}{u_{22}} = \frac{-0.19}{7.0033} \approx -0.0271$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.0271 & 1 \end{bmatrix}$$

Atualizar a terceira linha em *u* !

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = 3$$

$$u_{12} = -0.1$$

$$u_{13} = -0.2$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.0271 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u_{33} = A_{33} - (l_{31} \cdot u_{13}) - (l_{32} \cdot u_{23})$$

$$u_{33} = 10 - (0.1 \times -0.2) - (-0.0271 \times -0.2933)$$

$$u_{33} = 10 + 0.02 - 0.00795 \approx 10.01205$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & -0.2933 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}$$

Resultado da de *L* e *U*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.0271 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & -0.2933 \\ 0 & 0 & 10.01205 \end{bmatrix}$$

b) Considere a fatoração LU para calcular det(A)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.0271 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & -0.2933 \\ 0 & 0 & 10.01205 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = det(L) \bullet det(U)$$

$$det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33}$$

$$det(A) = 3 \times 7.0033 \times 10.01205$$

$$det(A) \approx 210.362$$

c) Por meio da fatoração *LU*, resolva o sistema linear

1. **Resolver o sistema *Ly=b*.**
2. **Resolver o sistema *Ux=y*.**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.2 \\ 7.8 \\ 3.5 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.0271 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & -0.2933 \\ 0 & 0 & 10.01205 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema *Ly=b*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.0271 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 7.8 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

1. $y_1 = -1.2$
2. $0.0333y_1 + y_2 = 7.8$
3. $0.1y_1 - 0.0271y_2 + y_3 = 3.5$

$y_1 = -1.2$
$y_2 \approx 7.83996$
$y_3 \approx 3.8322$

$$y \approx \begin{bmatrix} -1.2 \\ 7.83996 \\ 3.8322 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema *Ux=y*

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.0033 & -0.2933 \\ 0 & 0 & 10.01205 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1.2 \\ 7.83996 \\ 3.8322 \end{bmatrix}}_{y}$$

1. $3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = -1.2$
2. $7.0033x_2 - 0.2933x_3 = 7.83996$
3. $10.01205x_3 = 3.8322$

$x_1 \approx -0.3367$
$x_2 \approx 1.135$
$x_3 \approx 0.382$

$$\boxed{x \approx \begin{bmatrix} -0.3367 \\ 1.135 \\ 0.382 \end{bmatrix}}$$

Considerações Finais

- 1 slide

Referencias

- 1 slide