Fernanda Costa - 411 684

Resolução Avaliação de Pré-Cálculo.

1- Encontre os conjuntos domínio e imagem das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$

$D_1: x \geq 0$

$D_2: x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

$Im_1: y = \sqrt{4} + \sqrt{4-4} \Rightarrow$

$y = 2 + 0$

$Im_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$

b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 16}$

$x^2 - 16 \geq 0$

$x^2 \geq 16$

$x \geq \pm 4$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \text{ ou } x \leq -4\}$

$Im = y = \sqrt{(-4)^2 - 16}$

$\Rightarrow y = \sqrt{16-16} \Rightarrow y = 0$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$

$x^4 + x^2 + 1 \neq 0$

O pior caso:

$0^4 + 0^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow 1 \neq 0$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$

Para o pior x

$y = \dfrac{1}{1}$

$Im_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

d) $s(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + 9}}$

Pior caso:

$x = 0 \Rightarrow \sqrt{0^2 + 9} \Rightarrow \dfrac{2}{3}$

$D = \{x \in \mathbb{R}\}$

Para o pior $x = 0$

$\dfrac{2}{\sqrt{0^2 + 9}} = \dfrac{2}{3}$

$Im_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \text{ e } y \leq \frac{2}{3}\}$

2- Mostre o que se pede para as funções f e g:

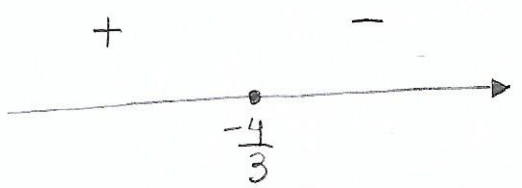
a) Considerando $f(x) = -3x - 4$. Diga se a função f é crescente ou decrescente. Em seguida calcule o zero de f. Por fim apresente o sinal da função afim f(x).

$f(x) = -3x - 4$ é decrescente, pois o coeficiente angular $-3x < 0$

$-3x - 4 = 0$

$-3x = 4$

$x = \dfrac{-4}{3}$



b) Considerando $g(x) = x^2 - 4x + 3$. Indique a concavidade, calcule os zeros da função, calcule o vértice. Por fim, indique o valor máximo ou mínimo da função.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$

$\Delta = 16 - 12$

$\Delta = 4$

$x' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \dfrac{-(-4)+\sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = \boxed{3}$

$x'' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \dfrac{-(-4)-\sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4-2}{2} = \dfrac{2}{2} = \boxed{1}$

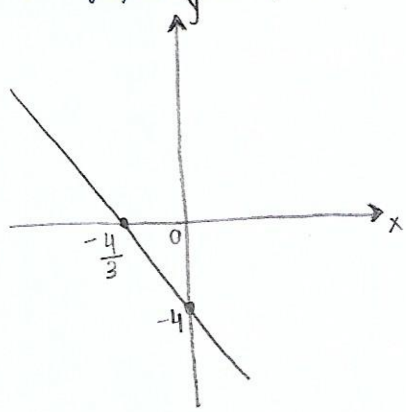
$V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$

$\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} \Rightarrow \boxed{2}$

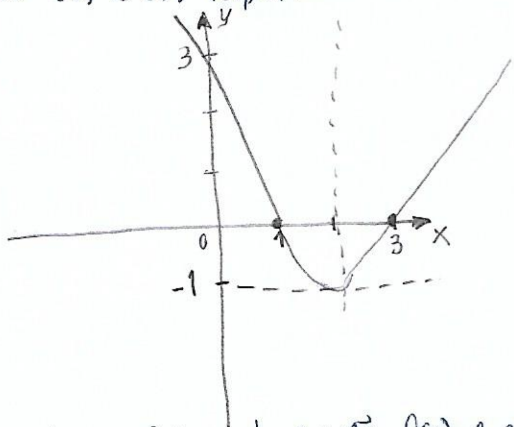
$\dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-4}{4} \Rightarrow \boxed{-1}$ Valor mínimo

c) Esboce os gráficos das funções f(x) e g(x) definidas nos itens (a) e (b) respectivamente.

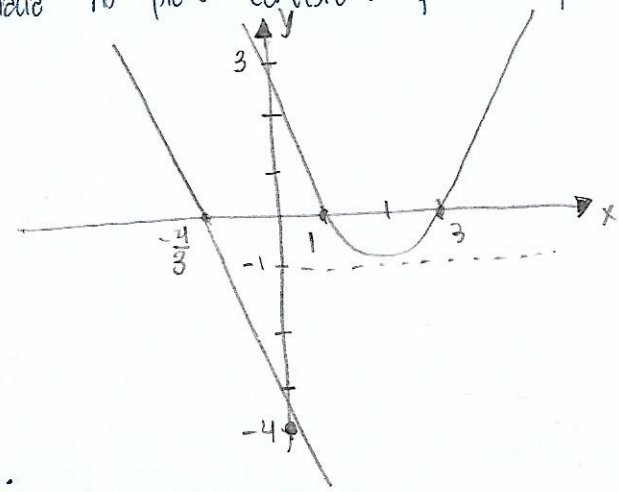
f(x)



g(x)



d) Esboce a região fechada no plano cartesiano formada pelos gráficos da função f(x) e g(x).



3. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Sabendo que $f(1) = 4$, $f(2) = 0$ e $f(3) = -2$,
Determine o produto abc.

①

- $f(1) \Rightarrow a + b + c = 4$
- $f(2) \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$

  $c = -4a - 2b$
- $f(3) \Rightarrow 9a + 3b + c = -2$

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \Rightarrow a + b - 4a - 2b = 4 \\ \qquad \Rightarrow -3a - b = 4 \\ 9a + 3b + c = -2 \Rightarrow 9a + 3b - 4a - 2b = -2 \\ \qquad \Rightarrow 5a + b = -2 \end{cases}$$

②

$$\begin{cases} 5a + b = -2 \\ -3a - b = 4 \end{cases}$$

$2a = 2 \Rightarrow a = 1$

$5a + b = -2$

$5 \cdot 1 + b = -2$

$b = -7$

$c = -4a - 2b$

$c = -4 \cdot 1 - 2(-7)$

$c = 10$

$a \cdot b \cdot c \Rightarrow 1 \cdot (-7) \cdot 10 = -70$

4. Para a função quadrática $f(x) = mx^2 + x - 2$, encontre os valores de m tais que:

a) A função f tenha raiz real.

$b^2 - 4ac > 0$

$1 - 4m(-2) > 0$

$1 + 8m > 0$

$m > -\frac{1}{8}$

b) A função f tenha valor máximo igual a 2.

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{1-4m(-2)}{4m} = \frac{1-8m}{4m} = 2 \Rightarrow 1-8m = 8m \Rightarrow m = -\frac{1}{16}$$

c) O gráfico de f intercepta o eixo x no ponto $(-2,0)$.

$m(-2)^2 + (-2) - 2 = 0$

$4m - 4 = 0$

$m = 1$

d) A função f tenha valor máximo positivo.

$$-\frac{1-4m(-2)}{4m} > 0 \Rightarrow \frac{-1-8m}{4m} > 0 \Rightarrow -1-8m > 0 \Rightarrow -8m > 1 \Rightarrow 8m < -1 \Rightarrow m < -\frac{1}{8}$$

5. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\boxed{\frac{3x-2}{1-x} \leq -3}$ $x \neq 1$

$$\frac{3x-2}{1-x} + 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{3x-2+3(1-x)}{1-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{\cancel{3x}-2+3-\cancel{3x}}{1-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2+3}{1-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{1-x} \leq 0$$

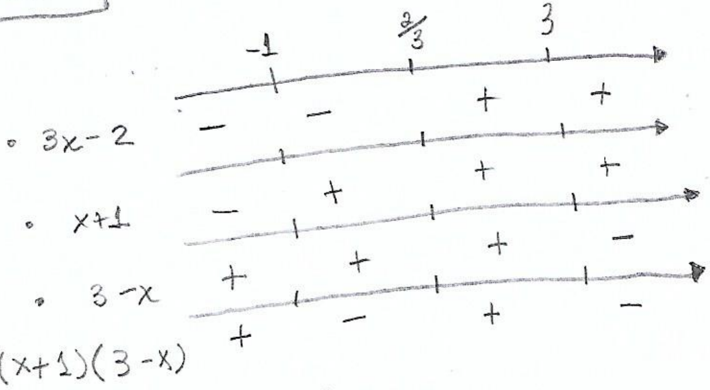
$\Rightarrow 1-x < 0 \Rightarrow x > 1$ | $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

b) $\boxed{(3x-2)(x+1)(3-x) < 0 \text{ em } \mathbb{R}.}$

$3x - 2 < 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$

$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

$3 - x < 0 \Rightarrow x > 3$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > 3\}$

6. Mostre o que se pede para as funções f e g:

a) Se f e g são pares então $f+g$, $f \cdot g$ e f/g são pares.

$f(-x) = f(x)$ } $g(-x) = g(x)$

- $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x)$
$= f(x) + g(x)$
$= (f+g)(x)$

- $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x)$
$= f(x) \cdot g(x)$
$= (f \cdot g)(x)$

- $\left(\frac{f}{g}\right)(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)}$
$= \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

b) Se f é ímpar e g é ímpar então $f \circ g$ é ímpar.

$f(-x) = -f(x)$ } $g(-x) = -g(x)$

- $f \circ g(-x) = f(g(-x))$
$= f(-g(x))$
$= -f(g(x))$
$= -f \circ g(x)$

7. Encontre para as funções $f(x) = x^3+4$, $g(x) = \frac{1}{x+2}$, $h(x) = \sqrt[3]{x^2+3}$, $r(x) = x^2+4x-5$ e $s(x) = 2x-3$.

a) $g \circ f(x)$ e $g \circ f(2)$.

- $g(f(x)) = \frac{1}{x^3+4+2} = \frac{1}{x^3+6}$

- $g \circ f(2) = \frac{1}{2^3+6} = \frac{1}{8+6} = \frac{1}{14}$

b) $f \circ h(x)$ e $f \circ h(1)$.

- $f(h(x)) = (\sqrt[3]{x^2+3})^3+4$
$= x^2+3+4 \Rightarrow x^2+7$

- $f \circ h(1) = 1^2+7$
$= 1+7$
$= 8$

c) $r \circ s$, img $= 16$.

- $r(s(x)) = (2x-3)^2 + 4(2x-3) - 5$
$= 4x^2 - 12x + 9 + 8x - 12 - 5$
$= 4x^2 - 4x - 8$

$4x^2 - 4x - 8$

- $\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-8)$
$\Delta = 16 + 128$
$\Delta = 144$

$x' = \frac{4+12}{8} = \frac{16}{8} = 2$

$x'' = \frac{4-12}{8} = \frac{-8}{8} = -1$

$S = \{-1, 2\}$