

GELSON IEZZI
OSVALDO DOLCE
CARLOS MURAKAMI

**COMPLEMENTO PARA
O PROFESSOR**

**FUNDAMENTOS DE
MATEMÁTICA 2
ELEMENTAR
LOGARITMOS**



Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 2, Logaritmos, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nosso intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos às sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos aos professores David Mauro Degenszajn e Erileide de Souza a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

Sumário

Capítulo I	— Potências e raízes	1
Capítulo II	— Função exponencial	7
Capítulo III	— Logaritmos	42
Capítulo IV	— Função logarítmica	55
Capítulo V	— Equações exponenciais e logarítmicas	59
Capítulo VI	— Inequações exponenciais e logarítmicas	115
Capítulo VII	— Logaritmos decimais	149

Capítulo I – Potências e raízes

3. $A = (-1)^{2n} - (-1)^{2n} \cdot (-1)^3 + (-1)^{2n} \cdot (-1)^n - (-1)^n =$
 $= 1 - 1 \cdot (-1) + (-1)^n - (-1)^n = 2$

7. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a \cdot b = 0$
 $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$

8. $(2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2)x = M^3 \Rightarrow x = 2^{3-2} \cdot 3^{3-1} \cdot 5^{3-1} \cdot 7^{3-2} =$
 $= 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 3\,150$

9. Examinando os valores de 14^n , com $n \in \mathbb{N}^*$, vemos que:

se n é ímpar, 14^n tem como algarismo das unidades o 4
 se n é par, 14^n tem como algarismo das unidades o 6.

Assim, 14^{14} termina em 6; portanto, 14^{14} é par e daí $14^{14^{14}}$ termina em 6.

12. $\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}} = x + y$

15. f) $(a^{-1} + b^{-1}) \cdot (a + b)^{-1} = \left(\frac{a + b}{a \cdot b}\right) \left(\frac{1}{a + b}\right) = a^{-1} \cdot b^{-1}$

g) $(a^{-2} - b^2)(a^{-1} - b^{-1})^{-1} = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 \cdot b^2}\right) \left(\frac{b - a}{ab}\right)^{-1} =$
 $= \frac{(b + a)(b - a)}{a^2 \cdot b^2} \cdot \frac{ab}{b - a} = \frac{a + b}{ab}$

16. d) $\frac{a^{n+4} - a^3 \cdot a^n}{a^4 \cdot a^n} = \frac{a^{n+4}}{a^{n+4}} - \frac{a^3 \cdot a^n}{a^{n+4}} = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a - 1}{a}$

18. a) $\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = |x^2| = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (V)

b) $\sqrt{x^{10}} = \sqrt{(x^5)^2} = |x^5| \neq x^5, \forall x \in \mathbb{R}$ (F)

c) $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3| = x^3, \forall x \in \mathbb{R}_+$ (V)

d) $\sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1| = x - 1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } x \geq 1$ (V)
e) $\sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3| = 3 - x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } x \leq 3$ (V)

20. a) $\sqrt{(x + 2)^2} = |x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x > -2 \\ 0 & \text{se } x = -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$

b) $\sqrt{(2x - 3)^2} = |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x > \frac{3}{2} \\ 0 & \text{se } x = \frac{3}{2} \\ 3 - 2x & \text{se } x < \frac{3}{2} \end{cases}$

c) $\sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x > 3 \\ 0 & \text{se } x = 3 \\ 3 - x & \text{se } x < 3 \end{cases}$

d) $\sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x > -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } x = -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

30. b) $(\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{125}) : 2\sqrt{5} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{20}{5}} - \sqrt{\frac{45}{5}} + 3\sqrt{\frac{125}{5}} \right) =$
 $= \frac{2 - 3 + 15}{2} = 7$

k) $(1 - \sqrt{2})^4 = [(1 - \sqrt{2})^2]^2 = (3 - 2\sqrt{2})^2 = 17 - 12\sqrt{2}$

32. a) $\sqrt{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = 1$

b) $\sqrt{7 + \sqrt{24}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{24}} = \sqrt{(7 + \sqrt{24})(7 - \sqrt{24})} = 5$

c) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})} = 1$

d) $\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} =$

$= \sqrt{2(2 + \sqrt{2})} \cdot (2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}})(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) =$

$= \sqrt{(4 + 2\sqrt{2})(4 - (2 + \sqrt{2}))} = \sqrt{2(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = 2$

33. a) $\sqrt{a + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{b}} \cdot \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})(a^2 - b)} =$
 $= \sqrt{(a^2 - b)^2} = a^2 - b$

$$b) (2\sqrt{xy} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x}) : \sqrt{xy} = 2 \cdot \sqrt{\frac{xy}{xy}} + \sqrt{\frac{x^2y}{xy}} + \sqrt{\frac{xy^2}{xy}} = 2 + \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$c) \left(a\sqrt{\frac{a}{b}} + 2\sqrt{ab} + b\sqrt{\frac{b}{a}} \right) \cdot \sqrt{ab} = \left(\sqrt{\frac{a^3}{b}} + 2\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{b^3}{a}} \right) \cdot \sqrt{ab} = \\ = \sqrt{\frac{a^4b}{b}} + 2\sqrt{(ab)^2} + \sqrt{\frac{b^3ab}{a}} = a^2 + 2|ab| + b^2 = (a + b)^2$$

$$d) \sqrt{p + \sqrt{p^2 - 1}} \cdot \sqrt{p - \sqrt{p^2 - 1}} = \sqrt{p^2 - (\sqrt{p^2 - 1})^2} = \sqrt{p^2 - p^2 + 1} = 1$$

$$e) \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - y^3}} \cdot \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - y^3}} = \sqrt[3]{x^2 - (x^2 - y^3)} = y$$

$$36. o) \frac{1}{(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} \cdot \frac{(2 + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{5}} = \frac{(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{5}}{7 + 4\sqrt{3} - 5} = \\ = \frac{(2 + \sqrt{3} - \sqrt{5})(2 - 4\sqrt{3})}{(2 + 4\sqrt{3})(2 - 4\sqrt{3})} = \frac{4 + 3\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{15}}{22}$$

$$p) \frac{5}{(2 - \sqrt{5}) + \sqrt{2}} = \frac{5}{(2 - \sqrt{5}) + \sqrt{2}} \cdot \frac{(2 - \sqrt{5}) - \sqrt{2}}{(2 - \sqrt{5}) - \sqrt{2}} = \frac{10 - 5\sqrt{5} - 5\sqrt{2}}{9 - 4\sqrt{5} - 2} = \\ = \frac{(10 - 5\sqrt{5} - 5\sqrt{2})(7 + 4\sqrt{5})}{(7 - 4\sqrt{5})(7 + 4\sqrt{5})} = \frac{30 - 5\sqrt{5} + 35\sqrt{2} + 20\sqrt{10}}{31}$$

$$q) \frac{3}{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 1} = \frac{3(\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1)}{[(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 1][(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 1]} = \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 3}{5 - 2\sqrt{6} - 1} = \\ = \frac{(3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 3)(4 + 2\sqrt{6})}{(4 - 2\sqrt{6})(4 + 2\sqrt{6})} = \frac{6 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{4}$$

$$r) \frac{\sqrt[3]{9} - 1}{\sqrt[3]{3} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - 1}{\sqrt[3]{3} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{3} - 1)}{(\sqrt[3]{3} - 1)} = \sqrt[3]{3} + 1$$

$$37. \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2 - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{2} - 1)}{\cancel{(\sqrt[3]{2} - 1)}} = 1 + \sqrt[3]{2}$$

$$38. a) \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})}{\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}} = 4$$

b) Notemos inicialmente que

$$(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 = 6 \Rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

e

$$(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

Vamos agora fazer a simplificação pedida:

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{3}})}{(\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})(\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{3}})} + \frac{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}})}{(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}})} = \\
&= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6} - 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{-\sqrt{3}} + \\
&\quad + \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6} + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \\
&= \frac{-2\sqrt{6} + 2(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}) + \sqrt{3}(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})}{\sqrt{3}} = \\
&= \frac{-2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) \frac{\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{125}}{\sqrt{12} + \sqrt{108} - \sqrt{180}} &= \frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}{8\sqrt{3} - 6\sqrt{5}} = \frac{(7\sqrt{3} - 5\sqrt{5})}{(8\sqrt{3} - 6\sqrt{5})} \cdot \frac{(8\sqrt{3} + 6\sqrt{5})}{(8\sqrt{3} + 6\sqrt{5})} = \\
&= \frac{9 + \sqrt{15}}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d) \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{17 - 12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}} &= \\
&= \sqrt{\frac{(3 - 2\sqrt{2})(17 + 12\sqrt{2})}{(17 - 12\sqrt{2})(17 + 12\sqrt{2})}} - \sqrt{\frac{(3 + 2\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2})}{(17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2})}} = \\
&= \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}
\end{aligned}$$

Notando que $1 - \sqrt{2} < 0$, temos: $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

Dai, o valor da expressão é: $1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 2$.

$$\begin{aligned}
39. \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 - (x - \sqrt{x^2 - 1})^2}{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})} = \\
&= 4x\sqrt{x^2 - 1}
\end{aligned}$$

$$40. x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}}{\sqrt{ab}} \right) = \frac{a - b}{2\sqrt{ab}} \quad (A)$$

$$1 + x^2 = 1 + \left(\frac{a - b}{2\sqrt{ab}} \right)^2 = \frac{(a + b)^2}{4ab} \quad (B)$$

$$\begin{aligned}
\frac{2a\sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}} &= \frac{(2a\sqrt{1 + x^2})(x - \sqrt{1 + x^2})}{(x + \sqrt{1 + x^2})(x - \sqrt{1 + x^2})} = \\
&= 2a(1 + x^2) - 2ax\sqrt{1 + x^2} \stackrel{(A) e (B)}{=} \\
&= 2a \cdot \frac{(a + b)^2}{4ab} - 2a \cdot \frac{(a - b)}{2\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{\frac{(a + b)^2}{4ab}} = \frac{(a + b)^2}{2b} - \frac{a^2 - b^2}{2b} = a + b
\end{aligned}$$

41. Fazendo $X = \sqrt[3]{9(\sqrt[3]{2} - 1)}$ e $Y = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ e lembrando as identidades:
 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

temos:

$$\begin{aligned} X^3 &= 9(\sqrt[3]{2} - 1) = \frac{9(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{9 \cdot [(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3]}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \\ &= \frac{9}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} \text{ e } Y^3 = \left[\frac{(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(1 + \sqrt[3]{2})}{1 + \sqrt[3]{2}} \right]^3 = \left(\frac{1^3 + (\sqrt[3]{2})^3}{1 + \sqrt[3]{2}} \right)^3 = \\ &= \frac{27}{1 + 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} + 2} = \frac{9}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{4}} \end{aligned}$$

então, $X^3 = Y^3$ e daí $X = Y$.

42. $\frac{3}{\sqrt{7} - 2\sqrt{10}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7} + 2\sqrt{10}}{\sqrt{7} - 2\sqrt{10} \sqrt{7} + 2\sqrt{10}} = \sqrt{7} + 2\sqrt{10} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} =$
 $= \sqrt{2} + \sqrt{5}$ (A)

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sqrt{8} + 4\sqrt{3}} &= \frac{4\sqrt{8} - 4\sqrt{3}}{\sqrt{8} + 4\sqrt{3} \sqrt{8} - 4\sqrt{3}} = \sqrt{8} - 4\sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \\ &= \sqrt{6} - \sqrt{2} \text{ (B)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{11} - 2\sqrt{30}} &= \frac{\sqrt{11} + 2\sqrt{30}}{\sqrt{11} - 2\sqrt{30} \sqrt{11} + 2\sqrt{30}} = \sqrt{11} + 2\sqrt{30} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2} = \\ &= \sqrt{6} + \sqrt{5} \text{ (C)} \end{aligned}$$
 $(A) + (B) = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{2} = \sqrt{6} + \sqrt{5} = (C)$

43. $x = \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$ $\Rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$ \Rightarrow
 $\Rightarrow x^2 = 2 + x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 2$ (pois $x > 0$)

44. $\frac{12}{\sqrt{7} + 3} - \frac{5}{8 - 3\sqrt{7}} = \frac{12(8 - 3\sqrt{7}) - 5(\sqrt{7} + 3)}{(\sqrt{7} + 3)(8 - 3\sqrt{7})} =$
 $= \frac{81 - 41\sqrt{7}}{(3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7})} = -22 - 21\sqrt{7}$

49. f) $\left(27^{\frac{2}{3}} - 27^{-\frac{2}{3}}\right)\left(16^{\frac{3}{4}} - 16^{-\frac{3}{4}}\right) = (3^2 - 3^{-2})(2^3 - 2^{-3}) = \left(9 - \frac{1}{9}\right)\left(8 - \frac{1}{8}\right) = 70$
g) $\left(125^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 343^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(5^2 + 2^2 + 7\right)^{\frac{1}{2}} = 6$

$$50. \left(0,064^{\frac{1}{3}}\right)\left(0,0625^{\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{64}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{625}{10000}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$53. \text{a)} (\sqrt[n+3]{\sqrt[n-1]{a^2} \cdot \sqrt[n+1]{a^{-1}}})^{n^2-1} = \left(a^{\frac{2}{n-1}} \cdot a^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+3} \cdot n^2-1} = a^{\frac{n+3}{n^2-1} \cdot \frac{n^2-1}{n+3}} = a$$

$$\text{b)} a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-1}} \cdot \sqrt{a^{-1} \cdot b^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(a^{-1} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{c)} (a^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{2a^2} + \sqrt[3]{4}) = (a^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}) = \\ = a^2 - 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} + 2 = a^2 + 2$$

$$\text{d)} \frac{b-a}{a+b} \left[a^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} - \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \right] = \frac{b-a}{a+b} \left[\frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right] = \\ = \frac{b-a}{a+b} \left[\frac{a + (ab)^{\frac{1}{2}} - (ab)^{\frac{1}{2}} + b}{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2} \right] = -1$$

$$\text{e)} \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}} + 1 = \sqrt{\left[\frac{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}}{2b^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2}} + 1 =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{b-a}{2(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2}} + 1 = \sqrt{\left[\frac{2(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}}{b-a}\right]^2} + 1 = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{(b-a)^2}} = \frac{a+b}{|a-b|}$$

$$\text{f)} [(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{-1} + 3\sqrt{ab}]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} \right) \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right) + 3a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \left[\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + 3ab^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{1}{2}}b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Lembrando que $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$, temos que a expressão pedida se reduz a:

$$\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

54.
$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[8]{a} + 1} + \frac{1}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[8]{a} + 1} - \frac{2(\sqrt[4]{a} - 1)}{\sqrt{a} - \sqrt[4]{a} + 1} = \\ &= \frac{(\sqrt[4]{a} + 1 - \sqrt[8]{a} + \sqrt[4]{a} + 1 + \sqrt[8]{a})}{(\sqrt[4]{a} + 1 + \sqrt[8]{a})(\sqrt[4]{a} + 1 - \sqrt[8]{a})} - \frac{2(\sqrt[4]{a} - 1)}{\sqrt{a} - \sqrt[4]{a} + 1} = \\ &= \frac{2(\sqrt[4]{a} + 1)}{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a} + 1} - \frac{2(\sqrt[4]{a} - 1)}{\sqrt{a} - \sqrt[4]{a} + 1} = \\ &= \frac{(2\sqrt[4]{a} + 2)(\sqrt{a} + 1 - \sqrt[4]{a}) - (2\sqrt[4]{a} - 1)(\sqrt{a} + 1 + \sqrt[4]{a})}{(\sqrt{a} + 1 + \sqrt[4]{a})(\sqrt{a} + 1 - \sqrt[4]{a})} = \frac{4}{a + \sqrt{a} + 1} \end{aligned}$$

55.
$$\frac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}} = \frac{2^n \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^n \cdot 2^3} = \frac{2^n(2^4 - 2)}{2 \cdot 2^n \cdot 2^3} = \frac{7}{8}$$

56.
$$(2^n + 2^{n-1})(3^n - 3^{n-1}) = \left(2^n + \frac{2^n}{2}\right)\left(3^n - \frac{3^n}{3}\right) = \frac{2^n(2+1)}{2} \cdot \frac{3^n(3-1)}{3} = 6^n$$

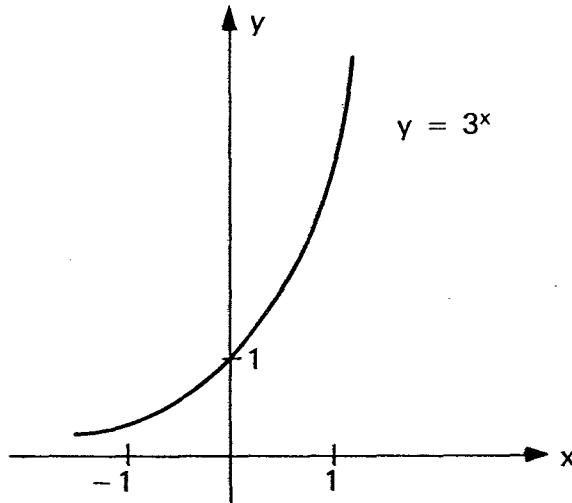
58.
$$\begin{aligned} (\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = \\ &= \frac{e^{2x} + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})}{4} = \frac{2 \cdot e^0 + 2 \cdot e^0}{4} = 1 \end{aligned}$$

Capítulo II – Função exponencial

59. A expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^y$ é decrescente com y . Seu menor valor é o que se obtém para o máximo valor de $y = 4x - x^2$. O valor de x que acarreta o máximo de y é $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$ e $y_{\max} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$. Portanto, o menor valor de $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-x^2}$ é: $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

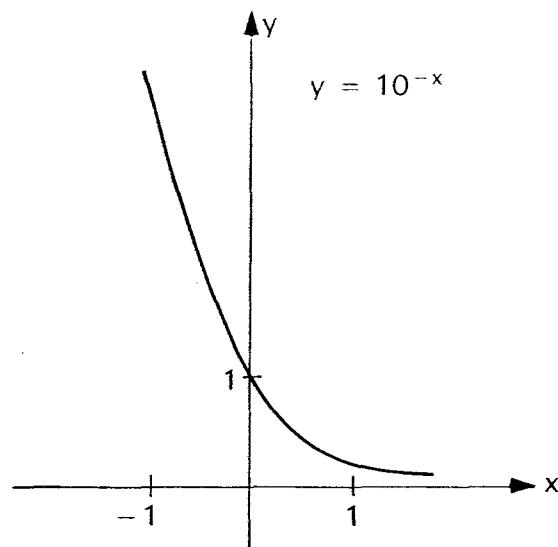
60. a)

x	$y = 3^x$
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27



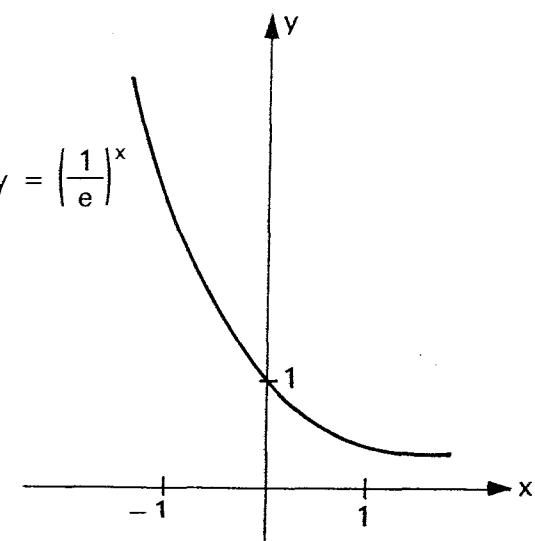
e)

x	$y = 10^{-x}$
-2	100
-1	10
0	1
1	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{100}$



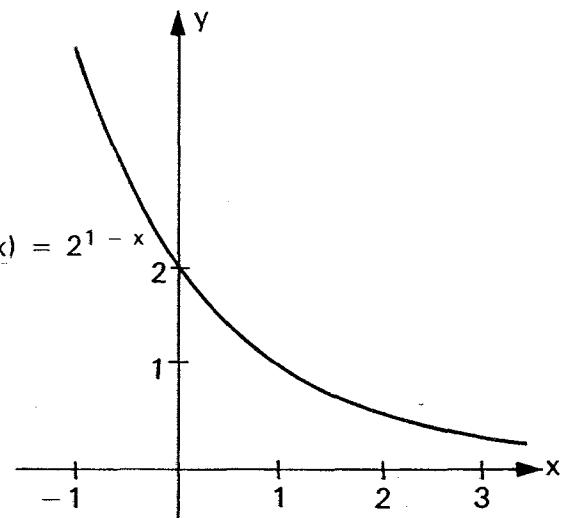
f)

x	$y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$
-2	7,39
-1	2,72
0	1
1	0,36
2	0,14



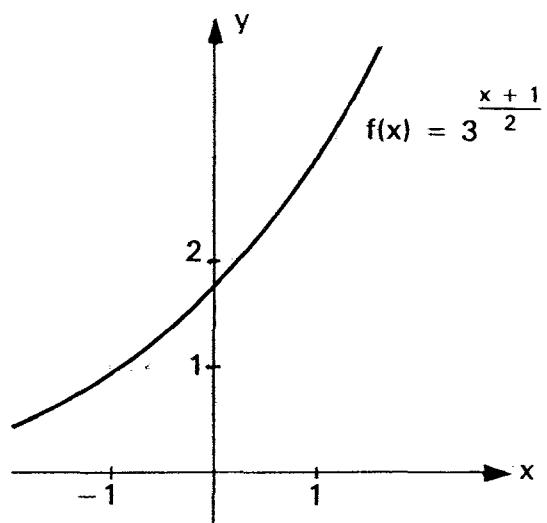
62. a)

x	$1 - x$	$f(x) = 2^{1-x}$
3	-2	$\frac{1}{4}$
2	-1	$\frac{1}{2}$
1	0	1
0	1	2
-1	2	4



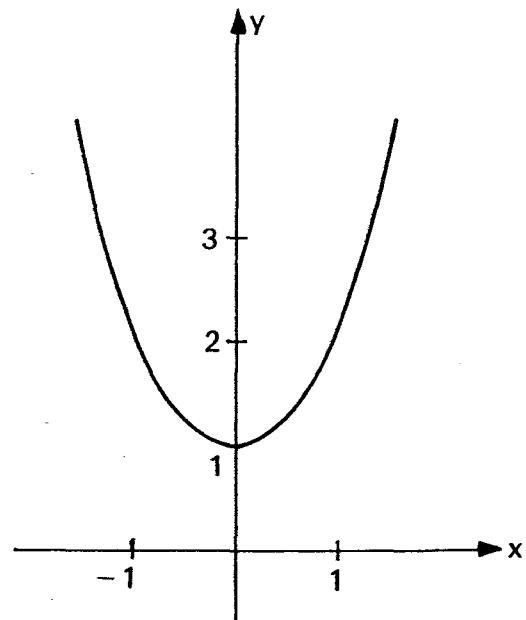
b)

x	$\frac{x+1}{2}$	$f(x) = 3^{\frac{x+1}{2}}$
-5	-2	$\frac{1}{9}$
-3	-1	$\frac{1}{3}$
-1	0	1
1	1	3
3	2	9



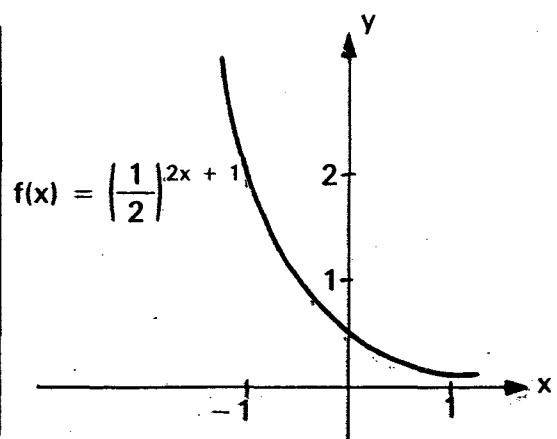
c)

x	$ x $	$f(x) = 2^{ x }$
-1	1	2
1	1	2
0	0	1
-2	2	4
2	2	4



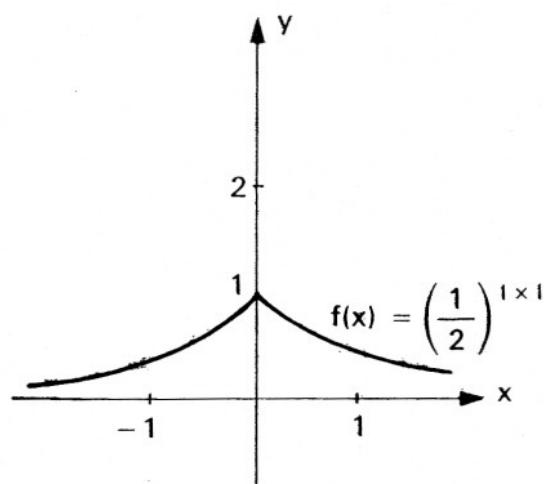
d)

x	$2x + 1$	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$
$-\frac{3}{2}$	-2	4
-1	-1	2
$-\frac{1}{2}$	0	1
0	1	$\frac{1}{2}$



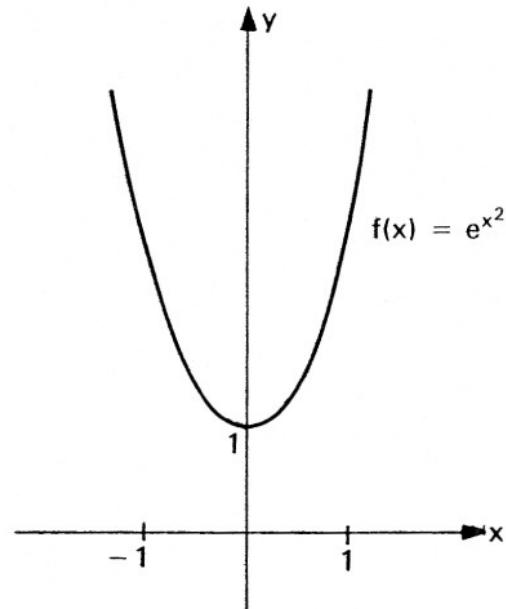
e)

x	$ x $	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{ x }$
-1	1	$\frac{1}{2}$
1	1	$\frac{1}{2}$
0	0	1
-2	2	$\frac{1}{4}$
2	2	$\frac{1}{4}$



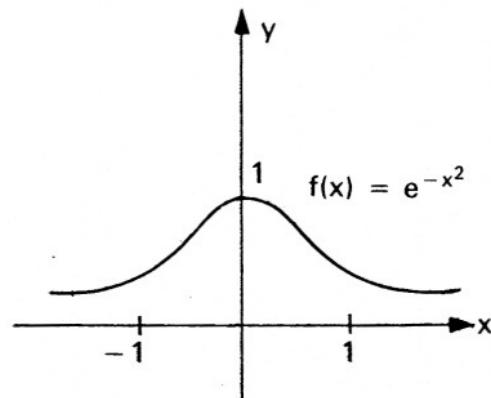
63.

x	x^2	$f(x) = e^{x^2}$
1	1	2,72
$\sqrt{2}$	2	7,39
$-\sqrt{2}$	2	7,39
0	0	1



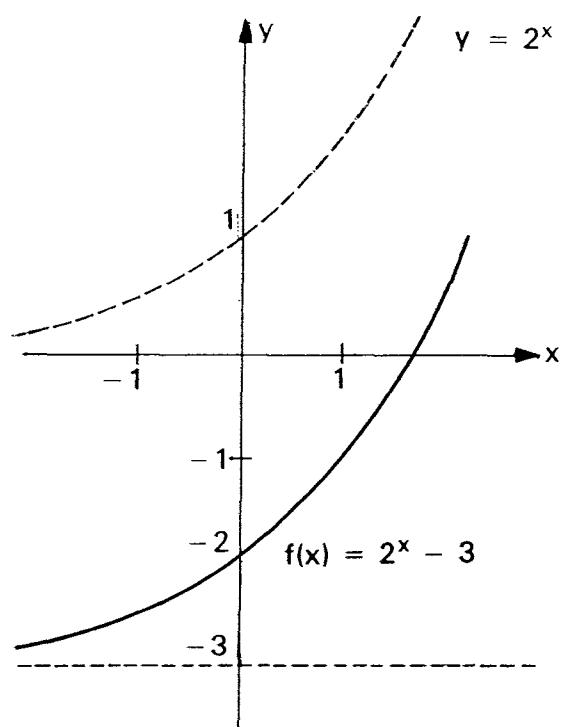
64.

x	x^2	$f(x) = e^{-x^2}$
-1	1	0,36
1	1	0,36
0	0	1
-2	4	0,018
2	4	0,018



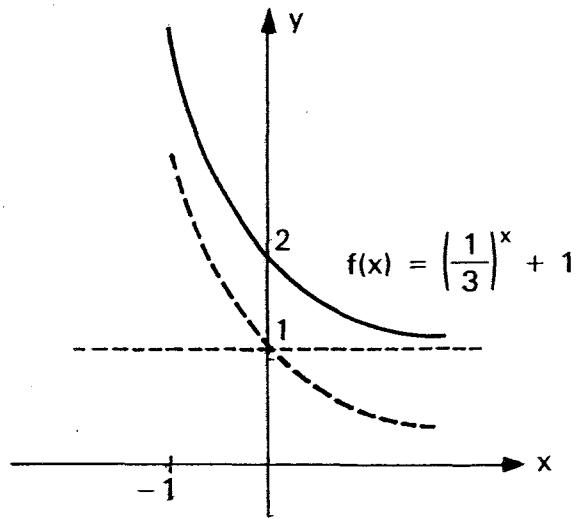
66. a)

x	2^x	$f(x) = 2^x - 3$
-2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$
0	1	-2
1	2	-1
2	4	1



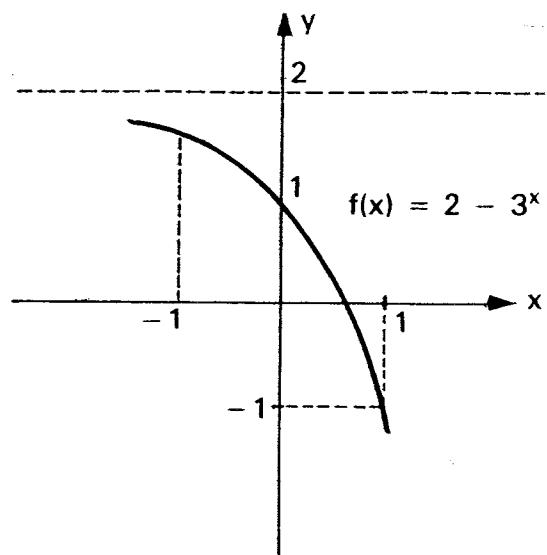
b)

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$
-2	9	10
-1	3	4
0	1	2
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{10}{9}$



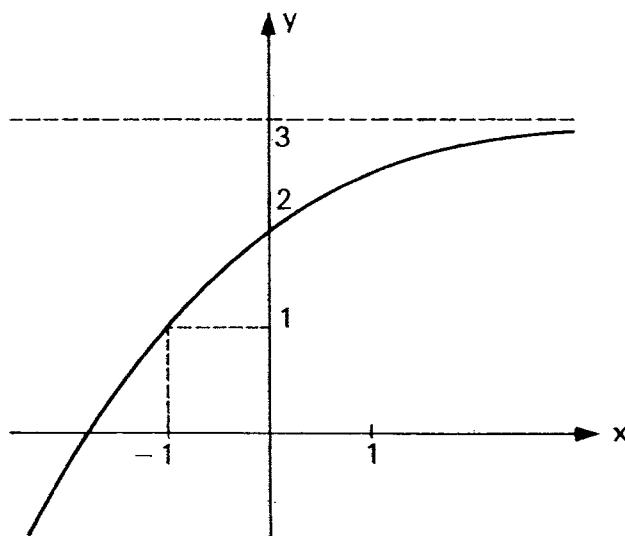
c)

x	3^x	$f(x) = 2 - 3^x$
0	1	1
1	3	-1
-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
-2	$\frac{1}{9}$	$\frac{17}{9}$
2	9	-7



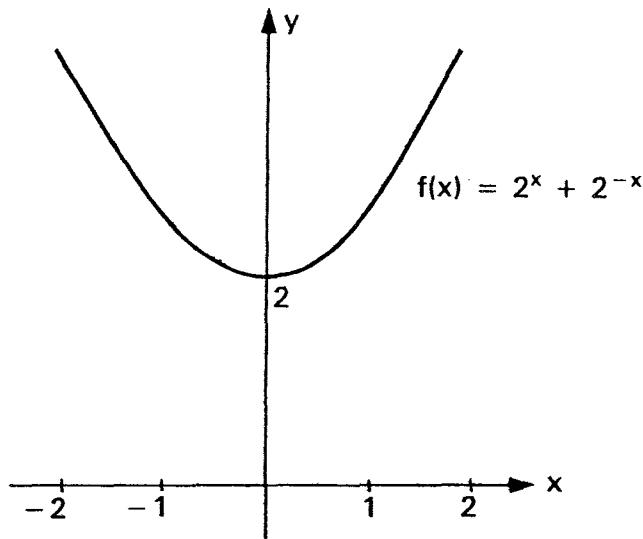
d)

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$f(x) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	1	2
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
-1	2	1
-2	4	-1



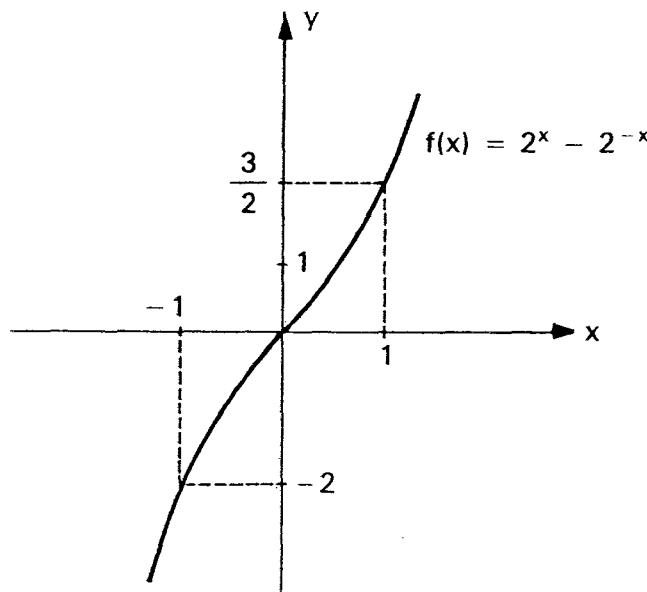
67. a)

x	2^x	2^{-x}	$f(x) = 2^x + 2^{-x}$
-2	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{17}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
0	1	1	2
1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{17}{4}$



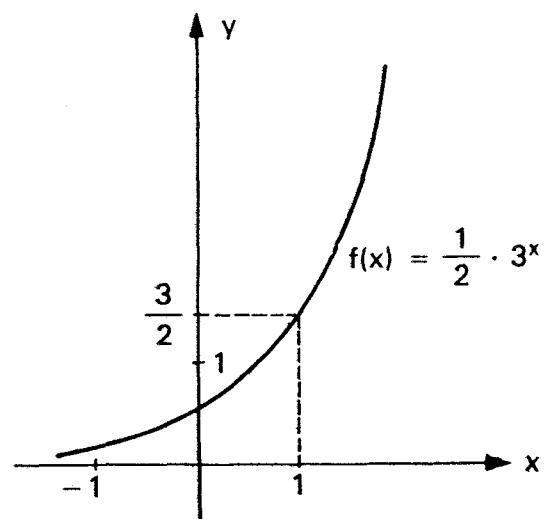
b)

x	2^x	2^{-x}	$2^x - 2^{-x}$
-2	$\frac{1}{4}$	4	$-\frac{15}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{3}{2}$
0	1	1	0
1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$



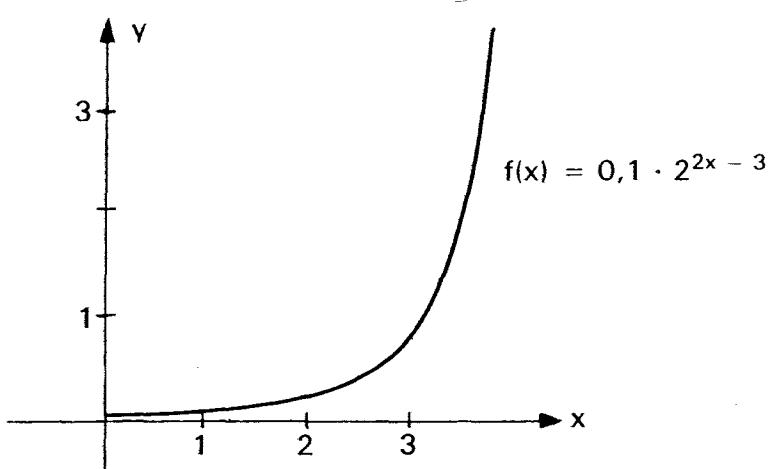
69. a)

x	3^x	$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$
0	1	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
-2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
1	3	$\frac{3}{2}$
2	9	$\frac{9}{2}$



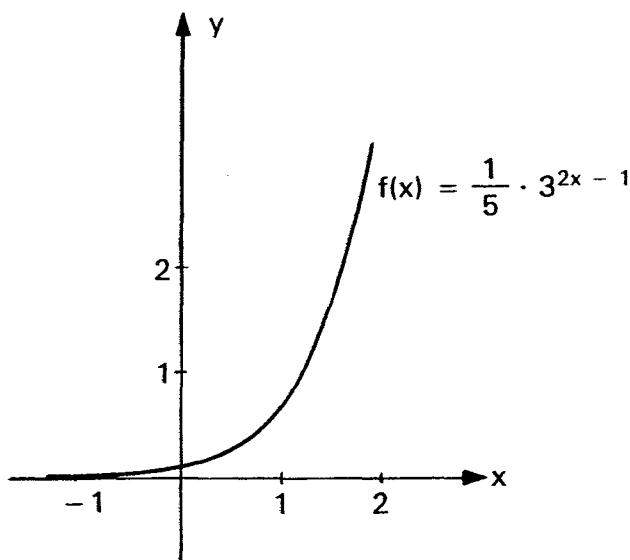
b)

x	$2x - 3$	2^{2x-3}	$f(x) = 0,1 \cdot 2^{2x-3}$
$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{4}$	0,025
1	-1	$\frac{1}{2}$	0,05
$\frac{3}{2}$	0	1	0,1
2	1	2	0,2
$\frac{5}{2}$	2	4	0,4



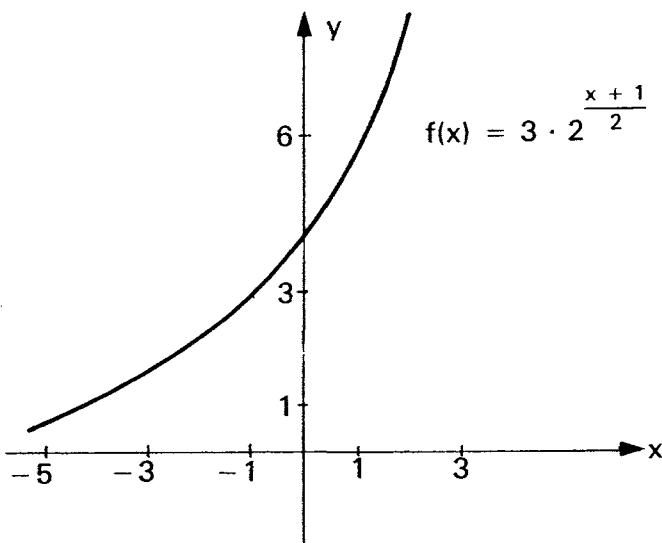
c)

x	$2x - 1$	3^{2x-1}	$f(x) = \frac{1}{5} \cdot 3^{2x-1}$
$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{9}$	0,02
0	-1	$\frac{1}{3}$	0,07
$\frac{1}{2}$	0	1	0,2
1	1	3	0,6
$\frac{3}{2}$	2	9	1,8



d)

x	$\frac{x+1}{2}$	$2^{\frac{x+1}{2}}$	$3 \cdot 2^{\frac{x+1}{2}}$
-5	-2	$\frac{1}{4}$	0,75
-3	-1	$\frac{1}{2}$	1,5
-1	0	1	3
1	1	2	6
3	2	4	12



71. e) $(\sqrt[3]{2})^x = 8 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{3}} = 2^3 \Leftrightarrow x = 9, S = \{9\}$

f) $(\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{4}} = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}, S = \left\{ \frac{8}{3} \right\}$

j) $(\sqrt[5]{4})^x = \frac{1}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x}{5}} = 2^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{15}{4}, S = \left\{ -\frac{15}{4} \right\}$

k) $100^x = 0,001 \Leftrightarrow 10^{2x} = 10^{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}, S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$

l) $8^x = 0,25 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-2} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}, S = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$

m) $125^x = 0,04 \Leftrightarrow 5^{3x} = 5^{-2} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}, S = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$

n) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,25 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{225}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x = -2, S = \{-2\}$

72. i) $5^{3x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+3} \Leftrightarrow 5^{3x-1} = 5^{-4x-6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{7}$, $S = \left\{-\frac{5}{7}\right\}$

j) $(\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{8x}{3}-\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{7}$, $S = \left\{\frac{5}{7}\right\}$

k) $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x-1}} \Leftrightarrow 2^{6x+3} = 2^{\frac{2x-2}{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{16}$, $S = \left\{-\frac{11}{16}\right\}$

l) $4^{x^2-1} = 8^x \Leftrightarrow 2^{2x^2-2} = 2^{3x} \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2})$, $S = \left\{2, -\frac{1}{2}\right\}$

m) $27^{x^2+1} = 9^{5x} \Leftrightarrow 3^{3x^2+3} = 3^{10x} \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{3})$, $S = \left\{3, \frac{1}{3}\right\}$

n) $8^{x^2-x} = 4^{x+1} \Leftrightarrow 2^{3x^2-3x} = 2^{2x+2} \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{3})$,

$$S = \left\{2, -\frac{1}{3}\right\}$$

73. $4^{x^2+4x} = 4^{12} \Leftrightarrow 2^{2x^2+8x} = 2^{24} \Leftrightarrow (x = -6 \text{ ou } x = 2)$, $S = \{-6, 2\}$

74. $100 \cdot 10^x = \sqrt[5]{1000^5} \Leftrightarrow 10^{2+x} = 10^{\frac{15}{x}} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x = -5 \text{ ou } x = 3)$, $S = \{-5, 3\}$

76. a) $(2^x)^{x+4} = 32 \Leftrightarrow 2^{x^2+4x} = 2^5 \Leftrightarrow (x = -5 \text{ ou } x = 1)$, $S = \{-5, 1\}$

b) $(9^{x+1})^{x-1} = 3^{x^2+x+4} \Leftrightarrow (3^{2x+2})^{x-1} = 3^{x^2+x+4} \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x = 3 \text{ ou } x = -2)$, $S = \{-2, 3\}$

c) $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x} \Leftrightarrow 2^{3x-1} \cdot 2^{4x+6} = 2^{9-3x} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$, $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

d) $(3^{2x-7})^3 : 9^{x+1} = (3^{3x-1})^4 \Leftrightarrow 3^{4x-23} = 3^{12x-4} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{19}{8}$, $S = \left\{-\frac{19}{8}\right\}$

e) $2^{3x+2} : 8^{2x-7} = 4^{x-1} \Leftrightarrow 2^{-3x+23} = 2^{2x-2} \Leftrightarrow x = 5$, $S = \{5\}$

f) $\frac{3^{x+2} \cdot 9^x}{243^{5x+1}} = \frac{81^{2x}}{27^{3-4x}} \Leftrightarrow \frac{3^{3x+2}}{3^{25x+5}} = \frac{3^{38x}}{3^{9-12x}} \Leftrightarrow 3^{-22x-3} = 3^{20x-9} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$, $S = \left\{\frac{1}{7}\right\}$

g) $\sqrt[x+4]{2^{3x-8}} = 2^{x-5} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x-8}{x+4}} = 2^{x-5} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x = 6 \text{ ou } x = -2)$, $S = \{-2, 6\}$

$$\text{h)} 8^{3x} = \sqrt[3]{32^x} : 4^x - 1 \Leftrightarrow 2^{9x} = 2^{\frac{5x}{3}} : 2^{2x} - 2 \Leftrightarrow 2^{9x} = 2^{\frac{-x+6}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{14}, S = \left\{ \frac{3}{14} \right\}$$

$$\text{i)} \sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x}-1}} - \sqrt[x-7]{8^x-3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3x-3]{2^{3x}-1} = \sqrt[3x-7]{2^{3x}-9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{2^{3x-3}} = \frac{3x-9}{2^{3x-7}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ não serve, pois } x \in \mathbb{N} \text{ e } x > 2. S = \emptyset.$$

$$\text{j)} \sqrt{8^x-1} \cdot \sqrt[x+1]{4^{2x}-3} = \sqrt[6]{2^{5x+3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x-3}{2}} \cdot 2^{\frac{4x-6}{x+1}} = 2^{\frac{5x+3}{6}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-3}{2} + \frac{4x-6}{x+1} = \frac{5x+3}{6} \Leftrightarrow 4x^2 + 16x - 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -6 \text{ ou } x = 2)$$

$$x = -6 \text{ não serve, pois } x \in \mathbb{N}. S = \{2\}.$$

$$\text{77. } (4^{3-x})^2 - x = 1 \Leftrightarrow (2^{6-2x})^2 - x = 2^0 \Leftrightarrow (6-2x)(2-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 3 \text{ ou } x = 2), S = \{2, 3\}$$

$$\text{79. a)} 3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 306 \Leftrightarrow 3^{x-1}(1-3+9+27) = 306 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^2 \Leftrightarrow x = 3, S = \{3\}$$

$$\text{b)} 5^{x-2} - 5^x + 5^{x+1} = 505 \Leftrightarrow 5^{x-2}(1-25+125) = 505 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{x-2} = 5^1 \Leftrightarrow x = 3, S = \{3\}$$

$$\text{c)} 2^{3x} + 2^{3x+1} + 2^{3x+2} + 2^{3x+3} = 240 \Leftrightarrow 2^{3x}(1+2+4+8) = 240 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x} = 2^4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}, S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

$$\text{d)} 5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} = 480 \Leftrightarrow 5^{4x-1}(1-5-25+125) = 480 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{4x-1} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{e)} 3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+5} = 2 \Leftrightarrow 2^x(3-10+40-32) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1, S = \{1\}$$

$$\text{f)} 2 \cdot 4^{x+2} - 5 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x+1} - 4^x = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x+5} - 5 \cdot 2^{2x+2} - 3 \cdot 2^{2x+1} - 2^{2x} = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}(32-20-6-1) = 20 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^2 \Leftrightarrow x = 1, S = \{1\}$$

$$\text{81. a)} 4^x - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - 2 = 0$$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -1).$$

$y = -1$ não convém, pois $2^x > 0$.

De $y = 2$ vem: $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

$$S = \{1\}.$$

b) $9^x + 3^x = 90 \Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x - 90 = 0$

Fazendo $3^x = y$, temos:

$$y^2 + y - 90 = 0 \Leftrightarrow (y = -10 \text{ ou } y = 9).$$

$y = -10$ não convém, pois $2^x > 0$.

De $y = 9$ vem: $3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$.

$$S = \{2\}.$$

c) $4^x - 20 \cdot 2^x + 64 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$y^2 - 20y + 64 = 0 \Leftrightarrow (y = 16 \text{ ou } y = 4).$$

De $y = 16$ vem: $2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$; de $y = 4$ vem: $2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$.

$$S = \{2, 4\}.$$

d) $4^x + 4 = 5 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{2x} + 4 = 5 \cdot 2^x = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$y^2 + 4 = 5y \Leftrightarrow (y = 4 \text{ ou } y = 1).$$

De $y = 4$ vem: $2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$; de $y = 1$ vem: $2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$S = \{0, 2\}.$$

e) $9^x + 3^{x+1} = 4 \Leftrightarrow 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 4 = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$y^2 + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow (y = -4 \text{ ou } y = 1).$$

$y = -4$ não convém, pois $2^x > 0$.

De $y = 1$ vem: $2^x = 2^0$.

$$S = \{0\}.$$

f) $5^{2x} + 5^x + 6 = 0$

Fazendo $5^x = y$, temos $y^2 + y + 6 = 0 \Leftrightarrow y \in \text{IR}$.

$$S = \emptyset.$$

g) $2^{2x} + 2^{x+1} - 80 = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$y^2 + 2y - 80 = 0 \Leftrightarrow (y = -10 \text{ ou } y = 8).$$

$y = -10$ não convém.

De $y = 8$ vem: $2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$.

$$S = \{3\}.$$

h) $10^{2x-1} - 11 \cdot 10^{x-1} + 1 = 0$

Fazendo $10^x = y$, temos:

$$\frac{y^2}{10} - \frac{11y}{10} + 1 = 0 \Leftrightarrow (y = 10 \text{ ou } y = 1).$$

De $y = 10$ vem: $10^x = 10 \Leftrightarrow x = 1$; de $y = 1$ vem: $10^x = 10^0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$S = \{0, 1\}.$$

i) $4^{x+1} + 4^{3-x} = 257$

Fazendo $4^x = y$, temos:

$$4y + \frac{64}{y} - 257 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 64 - 257y = 0 \Leftrightarrow \left(y = 64 \text{ ou } y = \frac{1}{4}\right).$$

De $y = 64$ vem: $4^x = 4^3 \Leftrightarrow x = 3$; de $y = \frac{1}{4}$ vem: $4^x = 4^{-1} \Leftrightarrow x = -1$.

$$S = \{-1, 3\}.$$

$$\text{j) } 5 \cdot 2^{2x} - 4^{2x-\frac{1}{2}} - 8 = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{2x} - 2^{4x-1} - 8 = 0$$

Fazendo $y = 2^{2x}$, temos:

$$5y - \frac{y^2}{2} - 8 = 0 \Leftrightarrow -y^2 + 10y - 16 = 0 \Leftrightarrow (y = 8 \text{ ou } y = 2).$$

$$\text{De } y = 8 \text{ vem: } 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}; \text{ de } y = 2 \text{ vem: } 2^{2x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}.$$

$$82. 25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125 \Leftrightarrow 5^{2\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0$$

Fazendo $5^{\sqrt{x}} = y$, vem: $y^2 - 124y - 125 = 0 \Leftrightarrow (y = 125 \text{ ou } y = -1)$.
 $y = -1$ não convém.

$$\text{De } y = 125 \text{ vem: } 5^{\sqrt{x}} = 5^3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9. \quad S = \{9\}.$$

$$83. 4^{x^2+2} - 3 \cdot 2^{x^2+3} = 160 \Leftrightarrow 2^{2x^2+4} - 3 \cdot 2^{x^2+3} - 160 = 0$$

Fazendo $2^{x^2} = y$, temos:

$$16y^2 - 24y - 160 = 0 \Leftrightarrow \left(y = 4 \text{ ou } y = -\frac{5}{2}\right). \quad y = -\frac{5}{2} \text{ não convém.}$$

$$\text{De } y = 4 \text{ vem: } 2^{x^2} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow (x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}).$$

$$\text{O produto é } -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -2.$$

$$84. \text{ a) } 3^x - \frac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-3} = \frac{23}{3^{x-2}} \Leftrightarrow 3^x - \frac{15}{3^x} + \frac{3^x}{3^3} = \frac{23}{3^x}$$

Seja $3^x = t$. Temos:

$$t - \frac{45}{t} + \frac{t}{27} = \frac{207}{t} \Rightarrow t^2 = 243 \Rightarrow t = \pm 9\sqrt{3}$$

Desprezando a raiz negativa, pois $t = 3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos $t = 9\sqrt{3}$, isto é,

$$3^x = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{2}. \quad S = \left\{\frac{5}{2}\right\}.$$

$$\text{b) } 2^{x+1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2^{x-1}} = \frac{30}{2^x} \Leftrightarrow 2^x \cdot 2 + \frac{2^x}{2^2} - \frac{3}{2^x} = \frac{30}{2^x}$$

Fazendo $2^x = t$, temos:

$$2t + \frac{t}{4} - \frac{6}{t} = \frac{30}{t} \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = -4 \text{ (não convém) ou } t = 4, \text{ isto é,}$$

$$2^x = 4 \Rightarrow x = 2. \quad S = \{2\}.$$

$$\begin{aligned}
 c) 16^{2x+3} - 16^{2x+1} &= 2^{8x+12} - 2^{6x+5} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2^{8x+12} - 2^{8x+4} - 2^{8x+12} + 2^{6x+5} &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2^{6x+5} &= 2^{8x+4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

85. Seja $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Então, temos:

$$3^{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{81}{\left(x + \frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow 3^{t^2-2} = \frac{81}{3^t} \Leftrightarrow 3^{t^2-2} = 3^{4-t} \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t = -3 \text{ ou } t = 2).$$

1.^a possibilidade: $t = -3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

2.^a possibilidade: $t = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
 $S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right\}.$

86. $2^x - \frac{1}{2^x} = k \Leftrightarrow 2^{2x} - k \cdot 2^x - 1 = 0$

Pondo $2^x = y$, temos $y^2 - ky - 1 = 0$.

Examinando $\Delta = k^2 + 4$, notamos que $\Delta > 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Então essa equação tem, para todo k , duas raízes reais e de sinais contrários, pois seu produto é -1 .

Conclusão: para qualquer k , a equação dada só admite uma única solução

$$y = 2^x = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} > 0.$$

87. $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} = 2 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{-x} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3^x(1 - 2) = -3^{-x}(1 + 2) \Leftrightarrow 3^{2x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

88. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^{2x} \left(\frac{3}{2}\right) = 3^x \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{3^x} = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{\sqrt{4^3}}{\sqrt{3^3}} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

$$89. 3^x - 1 - \frac{5}{3^x + 1} = 4 \cdot 3^{1-3x} \Leftrightarrow 3^x - 1 - 5 \cdot 3^{-x-1} - 4 \cdot 3^{1-3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^x}{3} - \frac{5}{3 \cdot 3^x} - \frac{4 \cdot 3}{3^{3x}} = 0$$

Pondo $y = 3^x$, temos:

$$\frac{y}{3} - \frac{5}{3y} - \frac{12}{y^3} = 0 \Leftrightarrow y^4 - 5y^2 - 36 = 0.$$

Fazendo $y^2 = t$, temos: $t^2 - 5t - 36 = 0 \Leftrightarrow (t = 9 \text{ ou } t = -4)$.

$t = -4$ não convém. De $t = 9$ vem: $y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$, pois $y = -3$ não convém.

De $y = 3$ vem: $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

$$S = \{1\}.$$

$$90. 8^x - 3 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0 \Leftrightarrow 2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 2 + 8 = 0$$

Fazendo $2^x = y$, vem:

$$y^3 - 3y^2 - 6y + 8 = 0. \text{ Lembrando da identidade:}$$

$\overbrace{y^3 - 3y^2 - 6y + 8}^{\substack{a^3 + b^3 \\ (a+b)(a^2 - ab + b^2)}} = 0$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, temos:

$$(y + 2)(y^2 - 2y + 4) - 3y(y + 2) = 0 \Rightarrow (y + 2) \cdot (y^2 - 5y + 4) = 0 \text{ donde:}$$

$y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$, não convém pois $y = 2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

ou

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow (y = 1 \text{ ou } y = 4) \Leftrightarrow (2^x = 1 \text{ ou } 2^x = 4) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 2)$$

$$S = \{0, 2\}.$$

$$92. \text{ a) } x^{2-3x} = 1. \text{ Para } x = 0, \text{ temos } 0^2 = 1 \text{ (falso); } x = 0 \text{ não é solução; para } x = 1, \text{ temos } 1^{-1} = 1 \text{ (verdadeiro); } x = 1 \text{ é solução. Supondo } 0 < x \neq 1, \text{ temos: } x^{2-3x} = x^0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

$$S = \left\{ 1, \frac{2}{3} \right\}.$$

$$\text{b) } x^{2x+5} = 1. \text{ } x = 0 \text{ não é solução, pois } 0^5 = 1 \text{ (falso); } x = 1 \text{ é solução, pois } 1^7 = 1 \text{ (verdadeiro). Supondo } 0 < x \neq 1, \text{ temos: } x^{2x+5} = x^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ não convém.}$$

$$S = \{1\}.$$

$$\text{c) } x^{x^2-2} = 1. \text{ } x = 0 \text{ não é solução, pois } 0^{-2} = 1 \text{ (falso); } x = 1 \text{ é solução, pois } 1^{-1} = 1 \text{ (verdadeiro). Supondo } 0 < x \neq 1, \text{ temos: } x^{x^2-2} = x^0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

$$S = \{1, \sqrt{2}\}.$$

$$\text{d) } x^{x^2-7x+12} = 1. \text{ } x = 0 \text{ não é solução, pois } 0^{12} = 1 \text{ (falso); } x = 1 \text{ é solução, pois } 1^6 = 1 \text{ (verdadeiro). Supondo } 0 < x \neq 1, \text{ temos: } x^{x^2-7x+12} = x^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 4 \text{ ou } x = 3).$$

$$S = \{1, 3, 4\}.$$

e) $x^{x^2 - 3x - 4} = 1$. $x = 0$ não é solução, pois $0^{-4} = 1$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1^{-6} = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos: $x^{x^2 - 3x - 4} = x^0 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ou } x = -1) \text{ mas } x = -1 \text{ não convém.}$
 $S = \{1, 4\}$.

93. a) $x^x = x$. $x = 0$ não é solução, pois $0^0 = 0$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1^1 = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos: $x^x = x^1 \Leftrightarrow x = 1$.
 $S = \{1\}$.

b) $x^{x+1} = x$. $x = 0$ é solução, pois $0^1 = 0$ (verdadeiro); $x = 1$ é solução, pois $1^2 = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos: $x^{x+1} = x \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
 $S = \{0, 1\}$.

c) $x^{4-2x} = x$. $x = 0$ é solução, pois $0^4 = 0$ (verdadeiro); $x = 1$ é solução, pois $1^2 = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos: $x^{4-2x} = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.
 $S = \left\{0, 1, \frac{3}{2}\right\}$.

d) $x^{2x^2-5x+3} = x$. $x = 0$ é solução, pois $0^3 = 0$ (verdadeiro); $x = 1$ é solução, pois $1^0 = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos:
 $x^{2x^2-5x+3} = x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2}\right)$.
 $S = \left\{0, 1, 2, \frac{1}{2}\right\}$.

e) $x^{x^2-2x-7} = x$. $x = 0$ não é solução, pois $0^{-7} = 0$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1^{-8} = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos:
 $x^{x^2-2x-7} = x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ou } x = -2)$.
 $S = \{1, 4\}$.

94. $(x^2 - x + 1)(2x^2 - 3x - 2) = 1$. $x = 0$ é solução, pois $1^{-2} = 1$ (verdadeiro); $x = 1$ é solução, pois $1^{-3} = 1$ (verdadeiro).

Supondo $0 < x^2 - x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 > 0 \text{ (é satisfeita para } \forall x \in \mathbb{R}) \\ x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases}$

temos:

$$(x^2 - x + 1)^{(2x^2 - 3x - 2)} = 1 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)^{(2x^2 - 3x - 2)} = (x^2 - x + 1)^0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 2\right) \quad S = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1, 2\right\}$$

95. $x^{x^3-8} = 1$. $x = 0$ não é solução, pois $0^{-8} = 1$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1^{-7} = 1$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos:

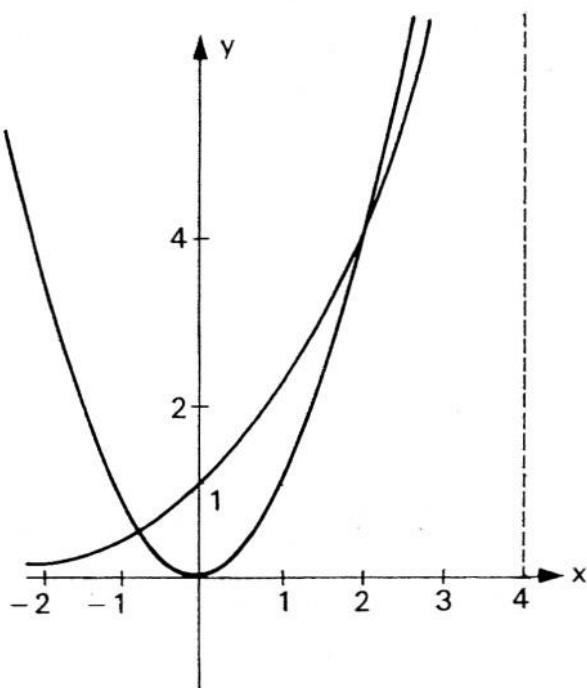
$$x^{x^3-8} = x^0 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$
 $S = \{1, 2\}$.

96.

x	2^x
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

x	x^2
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

São três soluções.



97. $x^{2x} - (x^2 + x)x^x + x^3 = 0$. $x = 0$ não é solução, pois $0^0 = 0$ (falso); $x = 1$ é solução, pois $1 - 2 + 1 = 0$ (verdadeiro). Supondo $0 < x \neq 1$, temos $(x^x)^2 - (x^2 + x)x^x + x^3 = 0$; fazendo $x^x = y$, temos:
 $y^2 - (x^2 + x)y + x^3 = 0 \Leftrightarrow (y = x^2 \text{ ou } y = x)$. De $y = x^2$ vem $x^x = x^2 \Leftrightarrow x = 2$; de $y = x$ vem $x^x = x \Leftrightarrow x = 1$.
 $S = \{1, 2\}$.

99. a) $4^x + 2 \cdot 14^x = 3 \cdot 49^x \Leftrightarrow \frac{4^x}{49^x} + \frac{2 \cdot 14^x}{49^x} = \frac{3 \cdot 49^x}{49^x} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x - 3 = 0$

Fazendo $\left(\frac{2}{7}\right)^x = y$, temos:

$$y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y = -3 \text{ ou } y = 1).$$

$y = -3$ não serve.

De $y = 1$ vem:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^x = \left(\frac{2}{7}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$S = \{0\}$.

b) $2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{4 \cdot 2^{2x}}{2^x \cdot 3^x} - \frac{2^x \cdot 3^x}{2^x \cdot 3^x} - \frac{18 \cdot 3^{2x}}{2^x \cdot 3^x} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} - 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = 0.$

Fazendo $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$, vem:

$$\frac{4}{y} - 18y - 1 = 0 \Leftrightarrow -18y^2 - y + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y = -\frac{1}{2} \text{ ou } y = \frac{4}{9}\right).$$

$y = -\frac{1}{2}$ não convém.

$$\text{De } y = \frac{4}{9} \text{ vem } \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = -2.$$

$$S = \{-2\}.$$

100. a) $\begin{cases} 4^x = 16y \Leftrightarrow 2^{2x} = 16y = 0 \\ 2^{x+1} = 4y \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x = 4y = 0 \end{cases}$

Fazendo $2^x = z$, vem:

$$\begin{cases} z^2 = 16y = 0 & (1) \\ 2z - 4y = 0 \Leftrightarrow z = 2y & (2) \end{cases}$$

De (2) em (1) vem $4y^2 - 16y = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ ou } y = 4)$.

Para $y = 0$, temos $z = 0$; portanto, $2^x = 0$ impossível.

Para $y = 4$, temos $z = 8$; portanto, $2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$.

$$S = \{(3, 4)\}.$$

b) $\begin{cases} 2^{2(x^2-y)} = 100 \cdot 5^{2(y-x^2)} \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2(x^2-y)} = 2^2 \cdot 5^{-2(x^2-y)+2} \\ y=5-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x^2-2y-2} = 5^{-2x^2+2y+2} & (1) \\ y=5-x & (2) \end{cases}$$

De (2) em (1) vem $2^{2x^2+2x-12} = 5^{-2x^2-2x+12}$.

Fazendo $2x^2+2x-12=z$, vem:

$$2^z = 5^{-z} \Leftrightarrow 2^z \cdot 5^z = 1 \Leftrightarrow 10^z = 1 \Leftrightarrow z = 0.$$

Sendo assim: $2x^2+2x-12=0 \Leftrightarrow (x=-3 \text{ ou } x=2)$.

Para $x=-3$, temos $y=8$; para $x=2$, temos $y=3$.

$$S = \{(2, 3), (-3, 8)\}.$$

c) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 24 & (1) \\ x+y=8 \Leftrightarrow x=8-y & (2) \end{cases}$

De (2) em (1) vem:

$$2^{8-y} - 2^y = 24 \Leftrightarrow 2^8 - 2^{2y} - 24 \cdot 2^y = 0.$$

Fazendo $2^y = z$, vem:

$$-z^2 - 24z + 256 = 0 \Leftrightarrow (z = -32 \text{ ou } z = 8).$$

$z = -32$ não convém.

De $z = 8$ vem $2^y = 2^3 \Leftrightarrow y = 3$.

Para $y = 3 \Rightarrow x = 5$.

$$S = \{(5, 3)\}.$$

d) $\begin{cases} 3^x - 2^{(y^2)} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\left(\frac{y^2}{2}\right)} = 7 \end{cases}$

Fazendo $3^x = a$ e $2^{(y^2)} = b$, temos:

$$\begin{cases} a - b = 77 \Leftrightarrow a = 77 + b \quad (1) \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} = 7 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 = (7 + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow a - b = 49 = 14\sqrt{b} \quad (2) \end{cases}$$

De (1) em (2) vem $77 + b - b = 49 = 14\sqrt{b} \Leftrightarrow b = 4$ (3).

De (3) em (1) vem $a = 81$. Como $3^x = a \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$.

Como $2^{(y^2)} = b \Leftrightarrow 2^{(y^2)} = 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$.

$$S = \{(4, +\sqrt{2}), (4, -\sqrt{2})\}.$$

101. $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \quad (1) \\ x+2y = 1 \quad (2) \end{cases}$

De (2) - (1) vem $y = 1$ e $x = -1$, então $x - y = -2$.

102. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y = 2^2 \cdot 3^3 \Leftrightarrow (x=2 \text{ e } y=3) \\ 4^x \cdot 2^y = 128 \Leftrightarrow 2^{2x+y} = 2^7 \Leftrightarrow 2x+y = 7 \text{ (que aceita a solução (2, 3))} \end{cases}$

O produto é $2 \cdot 3 = 6$.

103. $\begin{cases} x^{y^2-15y+56} = 1 \\ y-x = 5 \Leftrightarrow y = 5+x \end{cases}$

$x = 0$ não é solução, pois $0^{y^2-15y+56} = 1$ (falso).

$x = 1$ é solução, pois $1^{y^2-15y+56} = 1$ (verdadeiro).

Como $y = 5 + x \Rightarrow y = 6 \Rightarrow (1, 6)$. Supondo $0 < x \neq 1$, temos:

$$x^{y^2-15y+56} = x^0 \Leftrightarrow y^2 - 15y + 56 = 0 \Leftrightarrow (y=8 \text{ ou } y=7).$$

Para $y = 8$, temos $x = 3 \Rightarrow (3, 8)$.

Para $y = 7$, temos $x = 2 \Rightarrow (2, 7)$.

$$S = \{(1, 6), (3, 8), (2, 7)\}.$$

104. a) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \quad (1) \\ x^2y = 1 \Leftrightarrow y = x^{-2} \quad (2) \end{cases}$

$x = 0$ não é solução, pois $0^y = y^{-y}$ e $y \neq 0$, pois $x^2 \cdot y = 1$.

$x = 1$ é solução, pois $1^2 \cdot y = 1 \Rightarrow y = 1$ e $1^2 = 1^0$ (verdadeiro).

De (2) em (1) vem:

$$x^x + x^{-2} = (x^{-2})^{x-x^{-2}} \Leftrightarrow x + x^{-2} = -2x + 2x^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x^2} = -2x + \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow x = 3^{-\frac{1}{3}}.$$

$$\text{Como } y = x^{-2} \Rightarrow y = \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{-2} \Leftrightarrow y = 3^{\frac{2}{3}}.$$

$$S = \left\{(1, 1), \left(3^{-\frac{1}{3}}, 3^{\frac{2}{3}}\right)\right\}.$$

b) $\begin{cases} x^y = y^x \quad (1) \\ x^3 = y^2 \Leftrightarrow y = x^{\frac{3}{2}} \quad (2) \end{cases}$

$$\text{De (2) em (1) vem } x^{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{3x}{2}}.$$

$x = 0$ é solução, pois $0^0 = 0^0$ (verdadeiro); então, $x = 0$ e $y = 0$ satisfazem.

$x = 1$ é solução, pois $1^1 = 1^{\frac{3}{2}}$ (verdadeiro); então, $x = 1$ e $y = 1$ satisfazem.

Supondo $0 < x \neq 1$, temos:

$$x^{\frac{3}{2}} = \frac{3x}{2} \Leftrightarrow x\left(2x^{\frac{1}{2}} - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ou } x = \frac{9}{4}\right).$$

$$\text{Como } y = \sqrt{x^3} \Rightarrow y = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^3} \Rightarrow y = \frac{27}{8}.$$

$$S = \left\{(0, 0), (1, 1), \left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)\right\}.$$

105. $\begin{cases} x^y = y^x \Leftrightarrow x = y^{\frac{x}{y}} \Rightarrow y^{\frac{x}{y}} = y^{\frac{n}{m}} \Rightarrow mx = ny \quad (1) \\ x^m = y^n \Leftrightarrow x = y^{\frac{n}{m}} \quad (2) \end{cases}$

$x = 1$ é solução, pois $1^y = y^1 \Rightarrow y = 1$; então, $1^m = 1^n$ (verdade) $\therefore (1, 1)$ é solução. De (2) em (1) vem:

$$m \cdot y^{\frac{n}{m}} = ny \Leftrightarrow y = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n-m}}.$$

$$\text{Como } x = y^{\frac{n}{m}} \Rightarrow x = \left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n-m}}\right]^{\frac{n}{m}} \Leftrightarrow x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}.$$

$$S = \left\{(1, 1), \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}, \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n-m}}\right)\right\}.$$

107. a) $3^{2x} - (2m+3) \cdot 3^x + (m+3) = 0$

Fazendo $y = 3^x$, temos $y^2 - (2m+3)y + (m+3) = 0$. Como $y > 0$, $f(y) = y^2 - (2m+3)y + (m+3)$ deve admitir pelo menos uma raiz real e positiva.

1) as duas raízes são positivas:

$$y_1 \geq y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geq 0, S > 0 \text{ e } a \cdot f(0) > 0$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4m^2 + 8m - 3 \geq 0 \Rightarrow \left(m \leq \frac{-2 - \sqrt{7}}{2} \text{ ou } m \geq \frac{-2 + \sqrt{7}}{2}\right) \text{ (I)}$$

$$S > 0 \Rightarrow 2m + 3 > 0 \Rightarrow \left(m > \frac{-3}{2}\right) \text{ (II)}$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m + 3 > 0 \Rightarrow m > -3 \text{ (III)}$$

$$S_1 = \text{(I)} \cap \text{(II)} \cap \text{(III)} = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m \geq \frac{-2 + \sqrt{7}}{2}\right\}$$

2) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m < -3, \\ S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid m < -3\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \left(m > -\frac{3}{2} \text{ e } m = -3\right), S_3 = \emptyset \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m < -3 \text{ ou } m \geq \frac{-2 + \sqrt{7}}{2}\right\}.$$

b) $2^{2x+1} - (2m - 3) \cdot 2^{x+1} + (7 - 2m) = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$2y^2 - (2m - 3) \cdot 2y + (7 - 2m) = 0.$$

Como $y > 0$, temos:

1) as duas raízes são positivas: $y_1 \geq y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geq 0, S > 0 \text{ e } a \cdot f(0) > 0$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4m^2 - 8m - 5 \geq 0 \Rightarrow \left(m \leq \frac{-1}{2} \text{ ou } m \geq \frac{5}{2}\right) \text{ (I)}$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{2(2m - 3)}{2} > 0 \Rightarrow m > \frac{3}{2} \text{ (II)}$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow 2(7 - 2m) > 0 \Rightarrow m < \frac{7}{2} \text{ (III)}$$

$$S_1 = \text{(I)} \cap \text{(II)} \cap \text{(III)} = \left\{m \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} \leq m < \frac{7}{2}\right\}$$

2) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow 14 - 4m < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow m > \frac{7}{2}, S_2 = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m > \frac{7}{2}\right\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow (2m - 3 > 0 \text{ e } \\ 7 - 2m = 0) \Rightarrow \left(m > \frac{3}{2} \text{ e } m = \frac{7}{2}\right), S_3 = \left\{\frac{7}{2}\right\} \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m \geq \frac{5}{2}\right\}.$$

c) $m \cdot 9^x - (2m + 1) \cdot 3^x + (m - 1) = 0$

Fazendo $y = 3^x$, temos:

$$my^2 - (2m + 1) \cdot y + (m - 1) = 0.$$

Como $y > 0$, temos:

1) as duas raízes são positivas: $y_1 \geq y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geq 0, S > 0$ e $a \cdot f(0) > 0$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (2m + 1)^2 - 4m^2 + 4m \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{1}{8} \quad (I)$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{2m + 1}{m} > 0 \Rightarrow \left(m < -\frac{1}{2} \text{ ou } m > 0\right) \quad (II)$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m(m - 1) > 0 \Rightarrow (m > 1 \text{ ou } m < 0) \quad (III)$$

$$S_1 = (I) \cap (II) \cap (III) = \{m \in \mathbb{R} \mid m > 1\}.$$

2) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m(m - 1) < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 < m < 1, S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 < m < 1\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{2m + 1}{m} > 0 \text{ e } m - 1 = 0\right) \Rightarrow \left(m < -\frac{1}{2} \text{ ou } m > 0\right) \text{ e } (m = 1), S_3 = \{1\} \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{m \in \mathbb{R} \mid m > 0\}.$$

108. $m(2^x - 1)^2 - 2^x(2^x - 1) + 1 = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$m(y - 1)^2 - y(y - 1) + 1 = 0 \Rightarrow (m - 1)y^2 - (2m - 1)y + (m + 1) = 0,$$

mas $y > 0$, então:

a) as duas raízes são positivas:

$$y_1 \geq y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geq 0, S > 0$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow (2m - 1)^2 - 4(m - 1)(m + 1) \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{5}{4} \quad (I)$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{2m - 1}{m - 1} > 0 \Rightarrow \left(m < \frac{1}{2} \text{ ou } m > 1\right) \quad (II)$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0 \Rightarrow (m < -1 \text{ ou } m > 1) \quad (III)$$

$$S_1 = (I) \cap (II) \cap (III) = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m < -1 \text{ ou } 1 < m \leq \frac{5}{4}\right\}.$$

b) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m^2 - 1 < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 < m < 1, S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid -1 < m < 1\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \left(m < \frac{1}{2} \text{ ou } m > 1\right) \text{ e } (m = -1), S_3 = \{-1\} \end{cases}$$

Notemos que, para $m = 1$, a equação proposta se reduz a:

$-2^x + 2 = 0$, que apresenta uma raiz real ($x = 1$). Assim,

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m \leq \frac{5}{4}\right\}.$$

$$109. 2^x + 2^{-x} = m \Leftrightarrow 2^{2x} - m \cdot 2^x + 1 = 0$$

Fazendo $2^x = y$, temos: $y^2 - my + 1 = 0$, mas $y = 2^x > 0$, então:

a) as duas raízes são positivas:

$$y_1 \geq y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geq 0 \text{ e } S > 0 \text{ e } a \cdot f(0) > 0$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow m^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (m \leq -2 \text{ ou } m \geq 2) \quad (I)$$

$$S > 0 \Rightarrow m > 0 \quad (II)$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow 1 > 0 \quad (V)$$

$$S_1 = (I) \cap (II) = \{m \in \mathbb{R} \mid m \geq 2\}.$$

b) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) = 1 < 0 \text{ (F), } S_2 = \emptyset \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow m > 0 \text{ e } f(0) = 1 \neq 0, S_3 = \emptyset \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{m \in \mathbb{R} \mid m \geq 2\}.$$

$$110. \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = m \Leftrightarrow (m - 1)a^{2x} - m - 1 = 0$$

Fazendo $y = a^x$, temos $(m - 1)y^2 - (m + 1) = 0$.

a) As duas raízes são positivas:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4(m - 1)(m + 1) \geq 0 \Rightarrow 4m^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (m \leq -1 \text{ ou } m \geq 1) \quad (I)$$

$$S > 0 \Rightarrow 0 > 0 \text{ (F); } \nexists m \in \mathbb{R} \text{ que satisfaz } (II)$$

$$a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow (m - 1)(-m - 1) > 0 \Rightarrow m^2 - 1 < 0 \Rightarrow (-1 < m < 1) \quad (III)$$

Tendo em vista (I), (II) e (III), segue que $S_1 = \emptyset$.

b) Somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0$$

$$S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid m < -1 \text{ ou } m > 1\}$$

$$y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow (0 > 0 \text{ (F) e } m - 1 = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 = \emptyset$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{m \in \mathbb{R} \mid m < -1 \text{ ou } m > 1\}.$$

$$111. a^{2x} - (m + 1)a^x + (m - 1) = 0$$

Fazendo $a^x = y$, temos:

$$y^2 - (m + 1)y + (m - 1) = 0.$$

a) As duas raízes são positivas:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \geq 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 5 \geq 0 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R} \\ S > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1 \\ a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} S_1 = \text{I} \cap \text{II} \cap \text{III} = \\ = \{m \in \mathbb{R} \mid m > 1\} \end{array} \right\}$$

b) Somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \\ S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid m < 1\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow (m > -1 \text{ e } m = 1) \\ S_3 = \{1\} \end{array} \right.$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \mathbb{R}.$$

119. a) $8 < 2^x < 32 \Leftrightarrow 2^3 < 2^x < 2^5 \Leftrightarrow 3 < x < 5$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$$

b) $0,0001 < (0,1)^x < 0,01 \Leftrightarrow 10^{-4} < 10^{-x} < 10^{-2} \Leftrightarrow 2 < x < 4$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$$

c) $\frac{1}{27} < 3^x < 81 \Leftrightarrow 3^{-3} < 3^x < 3^4 \Leftrightarrow -3 < x < 4$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$$

d) $\frac{1}{8} \leq 4^x \leq 32 \Leftrightarrow 2^{-3} \leq 2^{2x} \leq 2^5 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \right\}$$

e) $\frac{8}{27} < \left(\frac{4}{9}\right)^x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^3 < \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \right\}$$

f) $0,1 < 100^x < 1\,000 \Leftrightarrow 10^{-1} < 10^{2x} < 10^3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \right\}$$

g) $4 < 8^{|x|} < 32 \Leftrightarrow 2^2 < 2^{3|x|} < 2^5 \Leftrightarrow 2 < 3|x| < 5$

Se $x > 0 \Rightarrow |x| = x$, então: $2 < 3x < 5 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < \frac{5}{3}$ ou

se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, então: $2 < -3x < 5 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} < x < -\frac{2}{3}$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{3} < x < -\frac{2}{3} \text{ ou } \frac{2}{3} < x < \frac{5}{3} \right\}$$

$$h) 25 < 125^{2x-1} < 125 \Leftrightarrow 5^2 < 5^{6x-3} < 5^3 \Leftrightarrow \frac{5}{6} < x < 1$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{6} < x < 1 \right\}$$

$$i) (0,3)^{x-5} \leq (0,09)^{2x+3} \leq (0,3)^{x+6} \Leftrightarrow (0,3)^{x-5} \leq (0,3)^{4x+6} \leq (0,3)^{x+6} \Leftrightarrow (x-5 \geq 4x+6 \text{ et } 4x+6 \geq x+6) \Leftrightarrow \left(x \leq -\frac{11}{3} \text{ et } x \geq 0 \right)$$

$$S = \emptyset$$

$$j) 1 \leq 7^{x^2-4x+3} \leq 343 \Leftrightarrow 7^0 \leq 7^{x^2-4x+3} \leq 7^3 \Leftrightarrow 0 \leq x^2-4x+3 \leq 3 \Leftrightarrow (x^2-4x+3 \geq 0 \text{ et } x^2-4x+3 \leq 3)$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 3 \leq x \leq 4\}$$

$$k) 3^{x^2-3} < 3^{x^2-5x+6} < 9 \Leftrightarrow 3^{x^2-3} < 3^{x^2-5x+6} < 3^2 \Leftrightarrow (x^2-5x+6 > x^2-3 \text{ et } x^2-5x+6 < 2) \Leftrightarrow \left(x < \frac{9}{5} \text{ et } 1 < x < 4 \right)$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{9}{5} \right\}$$

121. a) $(2^{x+1})^{2x-3} < 128 \Leftrightarrow 2^{2x^2-3x+2x-3} < 2^7 \Leftrightarrow 2x^2-x-10 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < \frac{5}{2}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{5}{2} \right\}$$

b) $(27^{x-2})^{x+1} \geq (9^{x+1})^{x-3} \Leftrightarrow (3^{3x-6})^{x+1} \geq (3^{2x+2})^{x-3} \Leftrightarrow x^2+x \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0)$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0\}$$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4x+2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-9} \Leftrightarrow x \geq -\frac{9}{4}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{9}{4} \right\}$$

d) $25^{3-4x} : 125^{2-x} > 5^{3x+1} \Leftrightarrow 5^{-5x} > 5^{3x+1} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{8}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{8} \right\}$$

e) $\frac{0,04^{3x+2} \cdot 25^{1-4x}}{0,008^{3-x} \cdot 125^{4-3x}} > 1 \Leftrightarrow \frac{(5^{-2})^{3x+2} \cdot (5^2)^{1-4x}}{(5^{-3})^{3-x} \cdot (5^3)^{4-3x}} > 1 \Leftrightarrow \frac{5^{-14x-2}}{5^{-6x+3}} > 1$

$$\Leftrightarrow 5^{-8x-5} > 5^0 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{8}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{8} \right\}$$

$$\begin{aligned} f) 2^{\frac{2x-3}{x-1}} : 32^{\frac{1}{x+1}} &> 4 \Leftrightarrow 2^{\frac{2x-3}{x-1}} : 2^{\frac{5}{x+1}} > 2^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} - \frac{5}{x+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{-6x+4}{(x-1)(x+1)} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x < -1 \text{ ou } \frac{2}{3} < x < 1 \right) \\ S &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } \frac{2}{3} < x < 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g) (0,1)^{\frac{1}{x+1}} \cdot (0,01)^{\frac{1}{x+3}} &< (0,001)^{\frac{1}{x+2}} \Leftrightarrow (0,1)^{\frac{1}{x+1}} \cdot (0,1)^{\frac{2}{x+3}} < (0,1)^{\frac{3}{x+2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{-x+1}{(x+1)(x+3)(x+2)} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-3 < x < -2 \text{ ou } -1 < x < 1) \\ S &= \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \text{ ou } -1 < x < 1 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h) \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} : \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x+2}} &\leq \left[\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x+3}}\right]^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{x^2+3x}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \leq \frac{3}{x^2+3x} \Leftrightarrow \frac{6x+6}{(x^2+3x)(x-1)(x+2)} \leq 0 \\ S &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -2 < x \leq -1 \text{ ou } 0 < x < 1 \} \end{aligned}$$

123. a) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} > 240 \Leftrightarrow 2^x \left(\frac{1}{2} + 1 + 2 - 4 + 8 \right) > 240 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^x > 2^5 \Leftrightarrow x > 5$
 $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \}$

b) $3^{x+5} - 3^{x+4} + 3^{x+3} - 3^{x+2} < 540 \Leftrightarrow 3^x (243 - 81 + 27 - 9) < 540 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3^x < 3 \Leftrightarrow x < 1$
 $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \}$

c) $4^{x+1} - 2^{2x+1} + 4^x - 2^{2x-1} - 4^{x-1} \geq 144 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2^{2x} \left(4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \geq 144 \Leftrightarrow 2^{2x} \geq 2^6 \Leftrightarrow x \geq 3$
 $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \}$

d) $3^{2x+1} - 9^x - 3^{2x-1} - 9^{x-1} \leq 42 \Leftrightarrow 3^{2x} \left(3 - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) \leq 42 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3^{2x} \leq 3^3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \quad S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{2} \right\}$

$$\begin{aligned}
 e) \quad & 3 \cdot 2^{2x+5} - 9 \cdot 2^{2x+3} - 5 \cdot 4^{x+1} + 7 \cdot 2^{2x+1} - 3 \cdot 4^x < 60 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2^{2x}(3 \cdot 2^5 - 9 \cdot 2^3 - 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2 - 3) < 60 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2^{2x} < 2^2 \Leftrightarrow x < 1 \\
 S = & \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f) \quad & 3^{(x^2)} + 5 \cdot 3^{(x^2+1)} + 2 \cdot 3^{(x^2+2)} - 4 \cdot 3^{(x^2+3)} + 3^{(x^2+4)} < 63 \Leftrightarrow \\
 & 3^{(x^2)} \cdot (1 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3^3 + 3^4) < 63 \Leftrightarrow 3^{(x^2)} \cdot 7 < 63 \\
 & \Leftrightarrow 3^{(x^2)} < 9 \Leftrightarrow x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}). \\
 S = & \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}.
 \end{aligned}$$

125. a) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$y^2 - 6y + 8 < 0 \Leftrightarrow 2 < y < 4 \Leftrightarrow 2 < 2^x < 4 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}.$$

b) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 > 0$

Fazendo $3^x = y$, temos:

$$y^2 - 12y + 27 > 0 \Leftrightarrow (y < 3 \text{ ou } y > 9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^x < 3 \text{ ou } 3^x > 9) \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ou } x > 2).$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}.$$

c) $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 5 \leq 0$

Fazendo $5^x = y$, temos:

$$5y^2 - 26y + 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq y \leq 5 \Rightarrow 5^{-1} \leq 5^x \leq 5 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}.$$

d) $2^{2x} - 2^{x+1} - 8 \leq 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 \leq 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$y^2 - 2y - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 4 \Rightarrow -2 \leq 2^x \leq 2^2 \Leftrightarrow x \leq 2, \text{ pois}$$

$$2^x \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}.$$

e) $3^{2x} - 3^{x+1} > 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 3^x + 3 > 0$

Fazendo $3^x = y$, temos:

$$y^2 - 3y - y + 3 > 0 \Leftrightarrow (y < 1 \text{ ou } y > 3) \Rightarrow (3^x < 1 \text{ ou } 3^x > 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x < 0 \text{ ou } x > 1)$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}.$$

f) $2^x(2^x + 1) < 2 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x - 2 < 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$y^2 + y - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < y < 1 \Rightarrow -2 < 2^x < 2^0 \Leftrightarrow x < 0, \text{ pois}$$

$$2^x > -2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

g) $25^x + 6 \cdot 5^x + 5 > 0 \Leftrightarrow 5^{2x} + 6 \cdot 5^x + 5 > 0$

Fazendo $5^x = y$, temos:

$$y^2 + 6y + 5 > 0 \Leftrightarrow (y < -5 \text{ ou } y > -1) \Rightarrow (5^x < -5 \text{ ou } 5^x > -1),$$

$5^x < -5$ impossível e $5^x > -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$S = \mathbb{R}.$$

h) $3^x(3^x + 6) < 3(2 \cdot 3^{x-1} - 3) \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 9 < 0$

Fazendo $3^x = y$, temos:

$$y^2 - 4y + 9 < 0; \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 - 4y + 9 > 0.$$

$$S = \emptyset.$$

i) $2^{x+3} + 2^{-x} < 6 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 < 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$8y^2 - 6y + 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-2} < 2^x < 2^{-1} \Leftrightarrow -2 < x < -1.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1\}.$$

j) $3(3^x - 1) \geq 1 - 3^{-x} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 \geq 0$

Fazendo $3^x = y$, temos:

$$3y^2 - 4y + 1 \geq 0 \Rightarrow \left(y \leq \frac{1}{3} \text{ ou } y \geq 1\right) \Rightarrow \left(3^x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } 3^x \geq 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0).$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0\}.$$

k) $4^{x+\frac{3}{2}} - 2^{x+2} \geq 2^{x+1} - 1 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 1 \geq 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$8y^2 - 6y + 1 \geq 0 \Rightarrow \left(y \leq \frac{1}{4} \text{ ou } y \geq \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (2^x \leq 2^{-2} \text{ ou } 2^x \geq 2^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \leq -2 \text{ ou } x \geq -1).$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq -1\}.$$

l) $e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e < 0 \Leftrightarrow e^{2x} - (e+1)e^x + e < 0$

Fazendo $e^x = y$, temos:

$$y^2 - (e+1)y + e < 0 \Rightarrow 1 < y < e \Rightarrow e^0 < e^x < e \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}.$$

126. $2^{2x+2} - 0,75 \cdot 2^{x+2} < 1 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 1 < 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$4y^2 - 3y - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} < y < 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} < 2^x < 1 \Rightarrow x < 0, \text{ pois}$$

$$2^x > -\frac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

$$\begin{aligned}
 127. \quad & 2^{x+5} + 3^x < 3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x \Leftrightarrow 2^x(2^5 - 2^2 - 1) - 3^x(-1 + 3^2) < 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x > 3 \\
 S = & \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}.
 \end{aligned}$$

$$128. \frac{e^x + 1}{1 - x^2} < 0$$

Como $e^x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, devemos ter: $1 - x^2 < 0 \Rightarrow (x < -1 \text{ ou } x > 1)$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

$$130. \text{ a)} x^{5x-2} > 1$$

$$1.^o \text{ caso: } \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^{-2} > 1 \text{ (não se define)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^3 > 1 \text{ (falso)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \emptyset$$

2.^o caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$$x^{5x-2} > x^0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{5} \text{ (II)}$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow x > 1$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

3.^o caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$$x^{5x-2} > x^0 \Leftrightarrow 5x - 2 < 0 \Rightarrow x < \frac{2}{5} \text{ (IV)}$$

$$(III) \cap (IV) \Rightarrow 0 < x < \frac{2}{5}$$

$$S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2}{5} \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2}{5} \text{ ou } x > 1 \right\}$$

$$\text{b)} x^{4x-3} < 1$$

$$1.^o \text{ caso: } \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^{-3} < 1 \text{ (não se define)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^1 < 1 \text{ (falso)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \emptyset$$

2.^o caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$$x^{4x-3} < x^0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{4} \text{ (II)}$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow S_2 = \emptyset$$

3.^o caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$$x^{4x-3} < x^0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{4} \text{ (IV)}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow \frac{3}{4} < x < 1$$

$$S_3 = \left\{ x \in \mathbb{IR} \mid \frac{3}{4} < x < 1 \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ x \in \mathbb{IR} \mid \frac{3}{4} < x < 1 \right\}$$

c) $x^{2x^2 + x - 1} < 1$

$$1.^o \text{ caso: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^{-1} < 1 \text{ (não se define)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^2 < 1 \text{ (falso)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \emptyset$$

2.^o caso: Se $x > 1$ \textcircled{I} , temos:

$$x^{2x^2 + x - 1} < x^0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2} \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \emptyset$$

3.^o caso: Se $0 < x < 1$ \textcircled{III} , temos:

$$x^{2x^2 + x - 1} < x^0 \Leftrightarrow \left(x < -1 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \right) \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{ x \in \mathbb{IR} \mid \frac{1}{2} < x < 1 \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ x \in \mathbb{IR} \mid \frac{1}{2} < x < 1 \right\}$$

d) $x^{2x^2 - 5x - 3} > 1$

$$1.^o \text{ caso: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^{-3} > 1 \text{ (não se define)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-6} > 1 \text{ (falso)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \emptyset$$

2.^o caso: Se $x > 1$ \textcircled{I} , temos:

$$x^{2x^2 - 5x - 3} > x^0 \Leftrightarrow \left(x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 3 \right) \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{IR} \mid x > 3\}$$

3.^o caso: Se $0 < x < 1$ \textcircled{III} , temos:

$$x^{2x^2 - 5x - 3} > x^0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 3 \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{IR} \mid 0 < x < 1\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{IR} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 3\}$$

e) $x^{3x^2 - 7x + 2} \leq 1$

$$1.^o \text{ caso: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^2 \leq 1 \text{ (verdadeiro)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-2} \leq 1 \text{ (verdadeiro)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{0, 1\}$$

2.^o caso: Se $x > 1$ \textcircled{I} , temos:

$$x^{3x^2 - 7x + 2} \leq x^0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 2 \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$$

3º caso: Se $0 < x < 1$ \textcircled{III} , temos:

$$x^{3x^2 - 7x + 2} \leq x^0 \Leftrightarrow \left(x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 2\right) \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{3}\right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } 1 \leq x \leq 2\right\}$$

$$\text{f)} \quad x^{4x^2 - 11x + 6} \geq 1$$

$$1^\circ \text{ caso: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^6 \geq 1 \text{ (falso)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-1} \geq 1 \text{ (verdadeiro)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{1\}$$

2º caso: Se $x > 1$ \textcircled{I} , temos:

$$x^{4x^2 - 11x + 6} \geq x^0 \Leftrightarrow \left(x \leq \frac{3}{4} \text{ ou } x \geq 2\right) \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

3º caso: Se $0 < x < 1$ \textcircled{III} , temos:

$$x^{4x^2 - 11x + 6} \geq x^0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq x \leq 2 \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} \leq x < 1\right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\right\}$$

$$131. \quad |x|^{3x^2 - 4x - 4} > 1$$

$$1^\circ \text{ caso: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^{-4} > 1 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-5} > 1 \text{ (F)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \emptyset$$

2º caso: $|x| > 1$, ou seja, $x < -1$ ou $x > 1$ \textcircled{I}

Temos:

$$|x|^{3x^2 - 4x - 4} > 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 > 0 \Leftrightarrow \left(x < -\frac{2}{3} \text{ ou } x > 2\right) \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$$

3º caso: $0 < |x| < 1$, ou seja, $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$ \textcircled{III}

Temos:

$$|x|^{3x^2 - 4x - 4} > 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 < 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3} < x < 2\right) \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < 1 \text{ e } x \neq 0\right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } \left(-\frac{2}{3} < x < 1 \text{ e } x \neq 0\right) \text{ ou } x > 2\right\}$$

132. a) $x^{2x+4} < x$

1º caso: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^4 < 0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^6 < 1 \text{ (F)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$$x^{2x+4} < x^1 \Leftrightarrow x < \frac{-3}{2} \quad (\text{II})$$

$$(I) \cap (\text{II}) \Rightarrow S_2 = \emptyset$$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$$x^{2x+4} < x^1 \Leftrightarrow x > \frac{-3}{2} \quad (\text{IV})$$

$$(III) \cap (\text{IV}) \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$$

b) $x^{4x-1} \geq x$

1º caso: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^{-1} \geq 0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^3 \geq 1 \text{ (V)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{1\}$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$$x^{4x-1} \geq x^1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \quad (\text{II})$$

$$(I) \cap (\text{II}) \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 1\}$$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$$x^{4x-1} \geq x^1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \quad (\text{IV})$$

$$(III) \cap (\text{IV}) \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 1\right\}$$

c) $x^{4x^2 - 17x + 5} < x$

1º caso: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^5 < 0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-8} < 1 \text{ (F)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se $x > 1$ (I), temos:

$$x^{4x^2 - 17x + 5} < x^1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < 4 \quad (\text{II})$$

$$(I) \cap (\text{II}) \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 1 < x < 4\}$$

3º caso: Se $0 < x < 1$ (III), temos:

$$4x^2 - 17x + 4 > 0 \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 4\right) \quad (\text{IV})$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < \frac{1}{4} \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < \frac{1}{4} \text{ ou } 1 < x < 4 \right\}$$

d) $x^{5x^2 - 11x + 3} > x$

1º caso: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^3 > 0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-3} > 1 \text{ (F)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se $x > 1$ \textcircled{I} , temos:

$$x^{5x^2 - 11x + 3} > x^1 \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{5} \text{ ou } x > 2 \right) \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 2\}$$

3º caso: Se $0 < x < 1$ \textcircled{III} , temos:

$$5x^2 - 11x + 2 < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5} < x < 2 \right) \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid \frac{1}{5} < x < 1 \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid \frac{1}{5} < x < 1 \text{ ou } x > 2 \right\}$$

e) $x^{x^2 - 5x + 7} \leq x$

1º caso: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^7 \leq 0 \text{ (V)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^3 \leq 1 \text{ (V)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{0, 1\}$

2º caso: Se $x > 1$ \textcircled{I} , temos:

$$x^{x^2 - 5x + 7} \leq x^1 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3 \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 2 \leq x \leq 3\}$$

3º caso: Se $0 < x < 1$ \textcircled{III} , temos:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3) \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$$

133. a) $x^{(x^2)} > x^{2x}$

1º caso: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^0 > 0^0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^1 > 1^1 \text{ (F)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se $x > 1$ \textcircled{I} , temos:

$$x^{x^2} > x^{2x} \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow (x < 0 \text{ ou } x > 2) \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 2\}$$

3º caso: Se $0 < x < 1$ \textcircled{III} , temos:

$$x^{x^2} > x^{2x} \Leftrightarrow 0 < x < 2 \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$$

b) $x^2 < x^{x^2 - 7x + 8}$

$$1^\circ \text{ caso: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^2 < 0^8 (\text{F}) \\ x = 1 \Rightarrow 1^2 < 1^2 (\text{F}) \end{cases} \Rightarrow S_1 = \emptyset$$

2º caso: Se $x > 1$ \textcircled{I} , temos:

$$x^2 < x^{x^2 - 7x + 8} \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ou } x > 6) \text{ II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 6\}$$

3º caso: Se $0 < x < 1$ \textcircled{III} , temos:

$$x^2 < x^{x^2 - 7x + 8} \Leftrightarrow 1 < x < 6 \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \emptyset$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 6\}$$

c) $x^{x^2 - x - 2} \geq x^4$

$$1^\circ \text{ caso: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0^{-2} \geq 0^4 (\text{F}) \\ x = 1 \Rightarrow 1 \geq 1 (\text{V}) \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{1\}$$

2º caso: Se $x > 1$ \textcircled{I} , temos:

$$x^{x^2 - x - 2} \geq x^4 \Leftrightarrow (x \leq -2 \text{ ou } x \geq 3) \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x \geq 3\}$$

3º caso: Se $0 < x < 1$ \textcircled{III} , temos:

$$x^{x^2 - x - 2} \leq 0 \Leftrightarrow (-2 \leq x \leq 3) \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3\}$$

Capítulo III – Logaritmos

135. a) $\log_4 16 = x \Leftrightarrow 4^x = 16 \Leftrightarrow 4^x = 4^2 \Leftrightarrow x = 2$

b) $\log_3 \frac{1}{9} = x \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

c) $\log_{81} 3 = x \Leftrightarrow 81^x = 3 \Leftrightarrow 3^{4x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^3 \Leftrightarrow x = -3$

e) $\log_7 \frac{1}{7} = x \Leftrightarrow 7^x = \frac{1}{7} \Leftrightarrow 7^x = 7^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

f) $\log_{27} 81 = x \Leftrightarrow 27^x = 81 \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

g) $\log_{125} 25 = x \Leftrightarrow 125^x = 25 \Leftrightarrow 5^{3x} = 5^2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

h) $\log_{\frac{1}{4}} 32 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 32 \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$

i) $\log_9 \frac{1}{27} = x \Leftrightarrow 9^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

j) $\log_{0,25} 8 = x \Leftrightarrow (0,25)^x = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 8 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

k) $\log_{25} 0,008 = x \Leftrightarrow 25^x = 0,008 \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

l) $\log_{0,01} 0,001 = x \Leftrightarrow (0,01)^x = 0,001 \Leftrightarrow 10^{-2x} = 10^{-3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

136. $\log_{10} \frac{M_1}{M_2} = R_1 - R_2 = 8 - 6 = 2 \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = 10^2 = 100$

137. a) $\log_2 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow 2^x = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_{\sqrt[3]{7}} 49 = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{7})^x = 7^2 \Leftrightarrow x = 6$

c) $\log_{100} \sqrt[3]{10} = x \Leftrightarrow 100^x = \sqrt[3]{10} \Leftrightarrow 10^{2x} = 10^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

d) $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32} = x \Leftrightarrow (\sqrt{8})^x = \sqrt{32} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

e) $\log_{\sqrt[4]{5}} \sqrt[4]{5} = x \Leftrightarrow (\sqrt[4]{5})^x = \sqrt[4]{5} \Leftrightarrow 5^{\frac{x}{4}} = 5^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

f) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9} = x \Leftrightarrow (\sqrt{27})^x = \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x}{2}} = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$

g) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{27} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x = \sqrt{27} \Leftrightarrow 3^{-\frac{x}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -3$

$$\text{h) } \log_{\sqrt[3]{4}} \frac{1}{\sqrt{8}} = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{4})^x = \frac{1}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x}{3}} = 2^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{4}$$

$$\text{i) } \log_{\sqrt[4]{3}} \frac{3}{\sqrt[3]{3}} = x \Leftrightarrow (\sqrt[4]{3})^x = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{4}} = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$\text{138. } \log_3 \sqrt[3]{\frac{25}{9}} = x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \sqrt[3]{\frac{25}{9}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$V = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

$$\text{139. a) } \log_{100} 0,001 = x \Leftrightarrow 100^x = 0,001 \Leftrightarrow 10^{2x} = 10^{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\log_{1,5} \frac{4}{9} = y \Leftrightarrow (1,5)^y = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow y = -2$$

$$\log_{1,25} 0,64 = z \Leftrightarrow (1,25)^z = 0,64 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^z = \frac{16}{25} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \Leftrightarrow z = -2$$

$$S = x + y - z = -\frac{3}{2} - 2 + 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \log_8 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow 8^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$\log_{\sqrt{2}} 8 = y \Leftrightarrow (\sqrt{2})^y = 8 \Leftrightarrow 2^{\frac{y}{2}} = 2^3 \Leftrightarrow y = 6$$

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{8} = z \Leftrightarrow (\sqrt{2})^z = \sqrt{8} \Leftrightarrow 2^{\frac{z}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow z = 3$$

$$S = x + y - z = \frac{1}{6} + 6 - 3 = \frac{19}{6}$$

$$\text{c) } \log_{\sqrt[3]{9}} \sqrt{\frac{1}{27}} = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{9})^x = \sqrt{\frac{1}{27}} \Leftrightarrow 3^{\frac{2x}{3}} = 3^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{4}$$

$$\log_{\sqrt[3]{0,5}} \sqrt{8} = y \Leftrightarrow (\sqrt[3]{0,5})^y = \sqrt{8} \Leftrightarrow 2^{-\frac{y}{3}} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow y = -\frac{9}{2}$$

$$\log_{\sqrt[3]{100}} \sqrt[6]{0,1} = z \Leftrightarrow (\sqrt[3]{100})^z = \sqrt[6]{0,1} \Leftrightarrow 10^{\frac{2z}{3}} = 10^{-\frac{1}{6}} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{4}$$

$$S = x - y + z = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - \frac{1}{4} = 2$$

$$\text{140. } \log_4 (\log_3 9) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 (\log_{81} 3) = \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

$$\log_{0,8}(\log_{16} 32) = \log_{0,8} \frac{5}{4} = x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = -1$$

$$S = \frac{1}{2} - 2 - 1 = -\frac{5}{2}$$

141. a) $\text{antilog}_3 4 = x \Leftrightarrow \log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 = 81$

b) $\text{antilog}_{16} \frac{1}{2} = x \Leftrightarrow \log_{16} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 16^{\frac{1}{2}} = 4$

c) $\text{antilog}_3(-2) = x \Leftrightarrow \log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

d) $\text{antilog}_{\frac{1}{2}}(-4) = x \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = -4 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

142. $2^{\log_3(x+4)} = 8 = 2^3 \Leftrightarrow \log_3(x+4) = 3 \Leftrightarrow x+4 = 3^3 \Leftrightarrow x = 23$

144. a) $3^{\log_3 2} = 2$

b) $4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$

c) $5^{\log_{25} 2} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25} 2} = (25^{\log_{25} 2})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

d) $8^{\log_4 5} = \left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{\log_4 5} = (4^{\log_4 5})^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{5}$

e) $2^{1 + \log_2 5} = 2^1 \cdot 2^{\log_2 5} = 2 \cdot 5 = 10$

f) $3^{2 - \log_3 6} = 3^2 \cdot 3^{-\log_3 6} = 3^2 \cdot (3^{\log_3 6})^{-1} = 3^2 \cdot 6^{-1} = \frac{3}{2}$

g) $8^{1 + \log_2 3} = 8^1 \cdot 8^{\log_2 3} = 8^1 \cdot (2^{\log_2 3})^3 = 8 \cdot 3^3 = 216$

h) $9^{2 - \log_3 \sqrt{2}} = 9^2 \cdot 9^{-\log_3 \sqrt{2}} = 9^2 \cdot (3^{\log_3 \sqrt{2}})^{-2} = 9^2 \cdot (\sqrt{2})^{-2} = \frac{81}{2}$

145. a) $\text{antilog}_2(\log_2 3) = x \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 3 \Leftrightarrow x = 3$

b) $\text{antilog}_3(\log_3 5) = x \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 5$

146. $A = 5^{\log_{25} 2} = (\sqrt{25})^{\log_{25} 2} = (25^{\log_{25} 2})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

$$A^3 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

147. $4^{\log_2 A} = (2^2)^{\log_2 A} = (2^{\log_2 A})^2 = A^2$

então

$$A^2 + 2A - 2 = 0 \Rightarrow A = -1 \pm \sqrt{3}$$

mas $A > 0$, então $A = -1 + \sqrt{3}$.

$$148. \log_{\sqrt[3]{9}} x = 0,75 \Leftrightarrow x = (\sqrt[3]{9})^{0,75} = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$149. \log_{16} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = (16)^{\frac{2}{3}} = (2^4)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{8}{3}}$$

$$\log_{\frac{1}{4}} x = \log_{\frac{1}{4}} 2^{\frac{8}{3}} = y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^y = 2^{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow 2^{-2y} = 2^{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}$$

$$150. \log_a x = 4 \Leftrightarrow a^4 = x \quad (1)$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{3}\right)^8 = x \Leftrightarrow a^8 = 3^8 x \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$x^2 = 3^8 x \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 3^8)$$

Como $x = 0$ não convém, $x = 3^8 = 6561$.

$$151. \log_{2\sqrt{3}} 144 = x \Leftrightarrow (2\sqrt{3})^x = 144 \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^{\frac{x}{2}} = 2^4 \cdot 3^2 \Leftrightarrow x = 4$$

$$152. \log_x \sqrt{2} = -1 \Leftrightarrow x^{-1} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$154. \text{a)} \log_5 \left(\frac{5a}{bc} \right) = \log_5 (5a) - \log_5 (bc) = 1 + \log_5 a - \log_5 b - \log_5 c$$

$$\text{b)} \log_3 \left(\frac{ab^2}{c} \right) = \log_3 (ab^2) - \log_3 c = \log_3 a + 2 \cdot \log_3 b - \log_3 c$$

$$\text{c)} \log_2 \left(\frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}} \right) = \log_2 (a^2 \sqrt{b}) - \log_2 \sqrt[3]{c} = 2 \cdot \log_2 a + \frac{1}{2} \cdot \log_2 b - \frac{1}{3} \cdot \log_2 c$$

$$\text{d)} \log_3 \left(\frac{ab^3}{c \cdot \sqrt[3]{a^2}} \right) = \log_3 (ab^3) - \log_3 (c \sqrt[3]{a^2}) =$$

$$= \log_3 a + 3 \cdot \log_3 b - \log_3 c - \frac{2}{3} \cdot \log_3 a =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \log_3 a + 3 \cdot \log_3 b - \log_3 c$$

$$\text{e)} \log \sqrt{\frac{ab^3}{c^2}} = \frac{1}{2} \cdot \log \left(\frac{ab^3}{c^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \log (ab^3) - \frac{1}{2} \cdot \log c^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log a + \frac{3}{2} \cdot \log b - \log c$$

$$\begin{aligned}
 f) \log \sqrt[3]{\frac{a}{b^2 \sqrt{c}}} &= \frac{1}{3} \cdot \log \left(\frac{a}{b^2 \sqrt{c}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \log a - \frac{1}{3} \cdot \log (b^2 \sqrt{c}) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \log a - \frac{2}{3} \cdot \log b - \frac{1}{6} \cdot \log c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) \log_2 \sqrt{\frac{4a\sqrt{ab}}{b \sqrt[3]{a^2b}}} &= \frac{1}{2} \cdot \log_2 \frac{4a\sqrt{ab}}{b \sqrt[3]{a^2b}} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 (4a\sqrt{ab}) - \frac{1}{2} \cdot \log_2 (b \sqrt[3]{a^2b}) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \log_2 4 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 a + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \sqrt{ab} - \frac{1}{2} \cdot \log_2 b - \frac{1}{2} \cdot \log_2 \sqrt[3]{a^2b} = \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 a + \frac{1}{4} \cdot \log_2 a + \frac{1}{4} \cdot \log_2 b - \frac{1}{2} \cdot \log_2 b - \frac{2}{6} \cdot \log_2 a - \\
 &\quad - \frac{1}{6} \cdot \log_2 b = 1 + \frac{5}{12} \cdot \log_2 a - \frac{5}{12} \cdot \log_2 b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h) \log \left(\sqrt[3]{\frac{a^4 \sqrt{ab}}{b^2 \sqrt[3]{bc}}} \right)^2 &= \frac{2}{3} \cdot \log \left(\frac{a^4 \sqrt{ab}}{b^2 \sqrt[3]{bc}} \right) = \frac{2}{3} \cdot \log (a^4 \sqrt{ab}) - \frac{2}{3} \cdot \log (b^2 \sqrt[3]{bc}) = \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \log a^4 + \frac{2}{3} \cdot \log \sqrt{ab} - \frac{2}{3} \cdot \log b^2 - \frac{2}{3} \cdot \log \sqrt[3]{bc} = \\
 &= \frac{8}{3} \cdot \log a + \frac{2}{6} \cdot \log a + \frac{2}{6} \cdot \log b - \frac{4}{3} \cdot \log b - \frac{2}{9} \cdot \log b - \frac{2}{9} \cdot \log c = \\
 &= 3 \cdot \log a - \frac{11}{9} \cdot \log b - \frac{2}{9} \cdot \log c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 155. \log m &= \log \left(\frac{bc}{d^2} \right) = \\
 &= \log (bc) - \log d^2 = \log b + \log c - 2 \cdot \log d
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 156. \log x &= \log \left(\frac{\sqrt{a}}{bc} \right) = \log \sqrt{a} - \log (bc) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \log a - \log b - \log c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 157. a) \log_2 \frac{2a}{(a+b)(a-b)} &= \log_2 (2a) - \log_2 [(a+b)(a-b)] = \\
 &= 1 + \log_2 a - \log_2 (a+b) - \log_2 (a-b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \log_3 \frac{a^2 \sqrt{bc}}{\sqrt[3]{(a+b)^3}} &= \log_3 (a^2 \sqrt{bc}) - \log_3 \sqrt[5]{(a+b)^3} = \\
 &= \log_3 a^2 + \log_3 \sqrt{bc} - \frac{3}{5} \cdot \log_3 (a+b) = \\
 &= 2 \cdot \log_3 a + \frac{1}{2} \cdot \log_3 b + \frac{1}{2} \cdot \log_3 c - \frac{3}{5} \cdot \log_3 (a+b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \log \left(c \cdot \sqrt[3]{\frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}} \right) &= \log c + \log \sqrt[3]{\frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}} = \\
 &= \log c + \frac{1}{3} \cdot \log \frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}} = \\
 &= \log c + \frac{1}{3} \cdot \log (a(a+b)^2) - \frac{1}{3} \cdot \log \sqrt{b} = \\
 &= \log c + \frac{1}{3} \cdot \log a + \frac{2}{3} \cdot \log (a+b) - \frac{1}{6} \cdot \log b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \log \frac{\sqrt[5]{a(a-b)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} &= \log \sqrt[5]{a(a-b)^2} - \log \sqrt{a^2+b^2} = \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \log (a(a-b)^2) - \frac{1}{2} \cdot \log (a^2+b^2) = \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \log a + \frac{2}{5} \cdot \log (a-b) - \frac{1}{2} \cdot \log (a^2+b^2)
 \end{aligned}$$

159. a) $\log_2 a + \log_2 b - \log_2 c = \log_2 (ab) - \log_2 c =$
 $= \log_2 \frac{ab}{c}$, então $E = \frac{ab}{c}$.

b) $2 \cdot \log a - \log b - 3 \cdot \log c = \log a^2 - \log b - \log c^3 =$
 $= \log a^2 - \log (bc^3) = \log \frac{a^2}{bc^3}$, então $E = \frac{a^2}{bc^3}$.

c) $2 - \log_3 a + 3 \cdot \log_3 b - 2 \cdot \log_3 c =$
 $= \log_3 3^2 - \log_3 a + \log_3 b^3 - \log_3 c^2 =$
 $= \log_3 (3^2 \cdot b^3) - \log_3 (ac^2) = \log_3 \frac{9b^3}{ac^2}$, então $E = \frac{9b^3}{ac^2}$.

d) $\frac{1}{2} \cdot \log a - 2 \cdot \log b - \frac{1}{3} \cdot \log c =$
 $= \log \sqrt{a} - \log b^2 - \log \sqrt[3]{c} =$
 $= \log \sqrt{a} - \log (b^2 \sqrt[3]{c}) = \log \frac{\sqrt{a}}{b^2 \sqrt[3]{c}},$
então $E = \frac{\sqrt{a}}{b^2 \sqrt[3]{c}}$.

e) $\frac{1}{3} \cdot \log a - \frac{1}{2} \cdot \log c - \frac{3}{2} \cdot \log b =$
 $= \log \sqrt[3]{a} - \log \sqrt{c} - \log \sqrt{b^3} =$
 $= \log \sqrt[3]{a} - \log \sqrt{cb^3} = \log \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3 c}}$,

$$\text{então } E = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3 c}}.$$

$$\begin{aligned} f) \quad & 2 + \frac{1}{3} \cdot \log_2 a + \frac{1}{6} \cdot \log_2 b - \log_2 c = \\ & = \log_2 4 + \log_2 \sqrt[3]{a} + \log_2 \sqrt[6]{b} - \log_2 c = \\ & = \log_2 (4 \sqrt[3]{a} \sqrt[6]{b}) - \log_2 c = \log_2 \frac{4 \sqrt[3]{a \sqrt{b}}}{c}, \text{ então } E = \frac{4 \sqrt[3]{a \sqrt{b}}}{c}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g) \quad & \frac{1}{4} (\log a - 3 \cdot \log b - 2 \cdot \log c) = \frac{1}{4} (\log a - \log b^3 - \log c^2) = \\ & = \frac{1}{4} (\log a - \log (b^3 c^2)) = \frac{1}{4} \cdot \log \frac{a}{b^3 c^2} = \log \sqrt[4]{\frac{a}{b^3 c^2}}, \\ & \text{então } E = \sqrt[4]{\frac{a}{b^3 c^2}}. \end{aligned}$$

160. a) $1 + \log_2 (a + b) - \log_2 (a - b) =$
 $= \log_2 2 + \log_2 (a + b) - \log_2 (a - b) = \log_2 \frac{2(a + b)}{a - b},$
 $\text{então } E = \frac{2(a + b)}{a - b}.$

b) $2 \cdot \log (a + b) - 3 \cdot \log a - \log (a - b) =$
 $= \log (a + b)^2 - \log a^3 - \log (a - b) =$
 $= \log \frac{(a + b)^2}{a^3(a - b)}, \text{ então } E = \frac{(a + b)^2}{a^3(a - b)}.$

c) $\frac{1}{2} \cdot \log (a - b) + \log a - \log (a + b) =$
 $= \log \sqrt{a - b} + \log a - \log (a + b) = \log \frac{a \sqrt{a - b}}{a + b},$
 $\text{então } E = \frac{a \sqrt{a - b}}{a + b}.$

d) $\frac{1}{2} \cdot \log (a^2 + b^2) - \frac{1}{3} \cdot \log (a + b) + \log (a - b) =$
 $= \log \sqrt{a^2 + b^2} - \log \sqrt[3]{a + b} + \log (a - b) =$
 $= \log \frac{(a - b) \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt[3]{a + b}}, \text{ então } E = \frac{(a - b) \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt[3]{a + b}}.$

e) $\frac{3 \log(a - b) - 2 \log(a + b) + 4 \log b}{5} = \log(a - b)^{\frac{3}{5}} - \log(a + b)^{\frac{2}{5}} + \log b^{\frac{4}{5}} =$

$$\log \left[\frac{(a - b)^{\frac{3}{5}} \cdot b^{\frac{4}{5}}}{(a + b)^{\frac{2}{5}}} \right] = \log \left[\frac{\sqrt[5]{(a - b)^3} \cdot \sqrt[5]{b^4}}{\sqrt[5]{(a + b)^2}} \right] = \log \left(\sqrt[5]{\frac{(a - b)^3 \cdot b^4}{(a + b)^2}} \right)$$

161. $\log x = \log b + \log c^2 - \log \sqrt[3]{a} = \log \left(\frac{bc^2}{\sqrt[3]{a}} \right)$,

então, $x = \frac{bc^2}{\sqrt[3]{a}}$.

162. a) $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$

b) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \cdot \log 2 = 2a$

c) $\log 12 = \log (4 \cdot 3) = \log 4 + \log 3 = 2a + b$

d) $\log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \log 2 = \frac{a}{2}$.

e) $\log 0,5 = \log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -\log 2 = -a$

f) $\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = a + 1$

g) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$

h) $\log 15 = \log \frac{3 \cdot 10}{2} = \log 3 + \log 10 - \log 2 = b + 1 - a$

163. $pH = \log \frac{1}{H^+} = \log \frac{1}{10^{-8}} = \log 10^8 = 8$

164. $\log \frac{125}{\sqrt[5]{2}} = \log \frac{5^3}{\sqrt[5]{2}} = 3 \cdot \log 5 - \frac{1}{5} \cdot \log 2 =$
 $= 3 \cdot \log \frac{10}{2} - \frac{1}{5} \cdot \log 2 = 3 - 3 \cdot \log 2 - \frac{1}{5} \cdot \log 2 =$
 $= 3 - \frac{16}{5} \cdot \log 2 = 3 - \frac{16}{5} \cdot (0,3010) = 3 - 0,9632 = 2,0368$

165. $\log 20 + \log 40 + \log 800 = \log (2 \cdot 10) + \log (4 \cdot 10) + \log (8 \cdot 100) =$
 $= \log (2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 100) = \log (2^6 \cdot 10^4) = 6 \cdot \log 2 + 4 =$
 $= 5,806$

166. Fazendo $\log_a 16 = x$, vem:

$$a^x = 16 \Rightarrow \log_2 a^x = \log_2 16 \Rightarrow x \cdot \log_2 a = 4 \quad (1)$$

Fazendo $\log_a 4 = y$, vem:

$$a^y = 4 \Rightarrow \log_2 a^y = \log_2 4 \Rightarrow y \cdot \log_2 a = 2 \quad (2)$$

Dividindo (1) por (2), vem:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{2} = 2.$$

167. $\log \frac{1}{a} + \log \frac{1}{b} = -\log a - \log b = -p$

168. $\log_2 (a^2 - b^2) = \log_2 [(a + b)(a - b)] = \log_2 (a + b) + \log_2 (a - b) =$
 $= \log_2 8 + \log_2 (a - b) = 3 + m$

$$169. \log_9 x + \log_9 y = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_9(xy) = \frac{1}{2} \Rightarrow xy = 9^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$170. \log_a \sqrt[3]{x^2y} = \frac{1}{3} \cdot \log_a(x^2y) = \frac{1}{3} \cdot \log_a x^2 + \frac{1}{3} \cdot \log_a y = \\ = \frac{2}{3} \cdot \log_a x + \frac{1}{3} \cdot \log_a y = \frac{2n}{3} + \frac{6n}{3} = \frac{8n}{3}$$

$$171. \log_m \frac{64}{2,7} - \log_m 60 = \log_m 64 - \log_m 2,7 - \log_m 60 = \\ = \log_m 2^6 - \log_m \left(\frac{3^3}{10} \right) - \log_m (2 \cdot 3 \cdot 10) = \\ = 6 \cdot \log_m 2 - 3 \log_m 3 + \log_m 10 - \log_m 2 - \log_m 3 - \log_m 10 = \\ = 6a - 3b - a - b = 5a - 4b$$

$$172. \text{colog}_2 \frac{1}{32} = x \Rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -x \Rightarrow 2^{-x} = \frac{1}{32} \Rightarrow x = 5 \\ \log_y 256 = 4 \Rightarrow y^4 = 256 = 2^8 \Rightarrow y = 2^2 = 4, \text{ então } x + y = 9.$$

$$173. \log 2^{20} = 20 \cdot \log 2 = 20 \cdot 0,3010300 = 6,020600$$

$$174. 2^n > 10^4 \Rightarrow \log 2^n > \log 10^4 \Rightarrow n \cdot \log 2 > 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow n > \frac{4}{\log 2} = \frac{40}{3} \Rightarrow n = 14$$

$$176. \log_6 5 = \frac{\log_{20} 5}{\log_{20} 6} = \frac{\log_{20} \frac{20}{4}}{\log_{20} (2 \cdot 3)} = \frac{\log_{20} 20 - \log_{20} 4}{\log_{20} 2 + \log_{20} 3} = \frac{1 - 2a}{a + b}$$

$$177. \log_{ab} a = 4 \Rightarrow \log_a(ab) = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + \log_a b = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_a b = -\frac{3}{4} \\ \log_{ab} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} \right) = \frac{\log_a \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} \right)}{\log_a(ab)} = \left(\frac{1}{3} \cdot \log_a a - \frac{1}{2} \cdot \log_a b \right) \cdot 4 = \\ = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) \cdot 4 = \frac{17}{6}$$

$$178. \log_{12} 27 = a \Rightarrow 3 \cdot \log_{12} 3 = a \Rightarrow \log_{12} 3 = \frac{a}{3} \Rightarrow \log_3 12 = \frac{3}{a} \\ \Rightarrow 2 \cdot \log_3 2 + \log_3 3 = \frac{3}{a} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{3-a}{2a} \\ \log_6 16 = 4 \cdot \log_6 2 = \frac{4 \cdot \log_3 2}{\log_3 6} = \frac{4 \cdot \log_3 2}{\log_3 2 + 1} = \frac{4(3-a)}{a+3}$$

$$179. \log_{0,04} 125 = \log_{5^{-2}} 5^3 = x \Leftrightarrow 5^{-2x} = 5^3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$180. \log_8 m = \frac{\log_2 m}{\log_2 8} = \frac{k}{3}$$

$$181. \log_9 20 = \frac{\log 20}{\log 9} = \frac{\log 2 + \log 10}{2 \cdot \log 3} = \frac{a+1}{2b}$$

$$182. \log_3 5 \cdot \log_{25} 27 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 25} = \log_3 5 \cdot \frac{3}{2 \cdot \log_3 5} = \frac{3}{2}$$

$$183. \log_{\frac{1}{a}} b^2 = \frac{\log_b b^2}{\log_b \frac{1}{a}} = \frac{2}{-\log_b a} = -\frac{2}{m}$$

$$\begin{aligned} 184. \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9 &= \\ &= \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 4} \cdot \frac{\log 4}{\log 5} \cdot \frac{\log 5}{\log 6} \cdot \frac{\log 6}{\log 7} \cdot \frac{\log 7}{\log 8} \cdot \frac{\log 8}{\log 9} \cdot \log 9 = \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

$$185. \log_b \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \log_b a = \frac{1}{2} \cdot \log_b \frac{1}{b} = -\frac{1}{2}$$

$$186. \log_{35} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{\log_{14} \left(\frac{14^2}{7} \right)}{\log_{14} (7 \cdot 5)} = \frac{2 - \log_{14} 7}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5} = \frac{2 - a}{a + b}$$

$$187. A = \frac{\log 5}{\log 3} \cdot \frac{\log 27}{\log 4} \cdot \frac{\log \sqrt{2}}{\log 25} = \frac{(\log 5) \cdot (3 \cdot \log 3) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \log 2 \right)}{(\log 3) \cdot (2 \cdot \log 2) \cdot (2 \cdot \log 5)} = \frac{3}{8}$$

$$188. A = (a^{\log_a b})^{\log_b c \cdot \log_c d} = (b^{\log_b c})^{\log_c d} = c^{\log_c d} = d$$

$$189. \text{Fazendo } x = a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}, \text{ vem:}$$

$$\log x = \log a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}} = \frac{\log(\log a)}{\log a} \cdot \log a = \log(\log a),$$

$$\text{então } x = \log a.$$

190. Sejam x e y dois números positivos e diferentes de 1 e seja a a base do sistema de logaritmos. Temos:

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_y x \text{ para todo } a \text{ com } 0 < a \neq 1.$$

$$191. (\log_{ac} b)(1 + \log_a c) = (\log_{ac} b)(\log_a ac) = \frac{\log_{ac} b}{\log_{ac} a} = \log_a b$$

$$192. a = b \cdot c \Rightarrow \log_c a = \log_c(b \cdot c) \Rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c c \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\log_a c} = \frac{1}{\log_b c} + 1$$

193. Escrevendo os logaritmos em base a temos:

$$\begin{aligned} \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{(\log_{ab} c)^2} &= \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_{ab} c \cdot \log_{ab} c} = \frac{\log_a c \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b}}{\log_a c \cdot \frac{\log_a c}{\log_a (ab)}} = \\ &= \frac{(\log_a (ab))^2}{\log_a b} = \frac{(1 + \log_a b)^2}{\log_a b}, \text{ que é o que queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 194. \log_a d \cdot \log_b d + \log_b d \cdot \log_c d + \log_c d \cdot \log_a d &= \\ &= \frac{1}{\log_d a} \cdot \frac{1}{\log_d b} + \frac{1}{\log_d b} \cdot \frac{1}{\log_d c} + \frac{1}{\log_d c} \cdot \frac{1}{\log_d a} = \\ &= \frac{\log_d c + \log_d a + \log_d b}{\log_d (abc)} = \frac{1}{\log_d a \cdot \log_d b \cdot \log_d c} = \\ &= \frac{\log_a d \cdot \log_b d \cdot \log_c d}{\log_{abc} d} \end{aligned}$$

$$195. a^{\log b} = a^{\frac{\log b}{\log a} \cdot \log a} = a^{\log_a b \cdot \log a} = (a^{\log_a b})^{\log a} = b^{\log a}$$

$$196. \log_a b^{(\log_c d)} = (\log_c d)(\log_a b) = (\log_a b)(\log_c d) = \log_c d^{(\log_a b)}$$

$$\begin{aligned} 197. \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{1 + \log_c(ab)} + \frac{1}{1 + \log_b(ac)} + \frac{1}{1 + \log_a(bc)} = \\ &= \frac{1}{\log_c c + \log_c(ab)} + \frac{1}{\log_b b + \log_b(ac)} + \frac{1}{\log_a a + \log_a(bc)} = \\ &= \frac{1}{\log_c(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_a(abc)} = \log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c = \\ &= \log_{abc}(abc) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 198. \frac{\log_a d}{\log_c d} = \frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} &\Leftrightarrow \log_a c = \frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_a c \cdot \log_b d - \log_a c \cdot \log_c d = \log_a d - \log_b d \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_a c \cdot \log_b d + \log_b d = \log_a c \cdot \log_c d + \log_a d \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log_b d)(1 + \log_a c) = 2 \cdot \log_a d \Leftrightarrow \frac{\log_b d}{\log_a d} \cdot (1 + \log_a c) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log_b a)(\log_a ac) = 2 \Leftrightarrow \log_a ac = 2 \cdot \log_a b \Leftrightarrow ac = b^2 \end{aligned}$$

199. $\log_q a^a + \log_q b^b + \log_q a^b + \log_q b^a =$
 $= a \cdot \log_q a + b \cdot \log_q b + b \cdot \log_q a + a \cdot \log_q b =$
 $= (a + b)(\log_q a + \log_q b) = (a + b) \cdot \log_q (ab) = p \cdot \log_q q = p$

200. De fato,

$$\begin{aligned} \log_{a+b} c + \log_{a-b} c &= \frac{1}{\log_c(a+b)} + \frac{1}{\log_c(a-b)} = \\ &= \frac{\log_c(a-b) + \log_c(a+b)}{\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)} = \frac{\log_c[(a-b)(a+b)]}{\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)} = \\ &= \frac{\log_c(a^2 - b^2)}{\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)} \stackrel{\text{Pitágoras}}{=} \frac{\log_c c^2}{\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)} = \\ &= \frac{2}{\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)} = 2 \log_{a+b} c \cdot \log_{a-b} c, \text{ que é o que queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

201. De acordo com o exercício 195, sabemos que $x^{\log y} = y^{\log x}$, para quaisquer $x > 0$ e $y > 0$. Temos, então:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log b} = \frac{a^{\log c}}{b^{\log c}} \cdot \frac{b^{\log a}}{c^{\log a}} \cdot \frac{c^{\log b}}{a^{\log b}} = 1,$$

pois $a^{\log c} = c^{\log a}$, $b^{\log a} = a^{\log b}$ e $c^{\log b} = b^{\log c}$.

202. $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}} \Leftrightarrow \log x = \frac{1}{1-\log z}$ (1)

$$y = 10^{\frac{1}{1-\log x}} \Leftrightarrow \log y = \frac{1}{1-\log x}$$
 (2)

Substituindo (1) em (2), vem:

$$\log y = \frac{1-\log z}{-\log z} \Leftrightarrow \log z = \frac{1}{1-\log y} \Leftrightarrow z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}.$$

203. De $a^b \cdot b^a = b^c \cdot c^b$ resulta:

$$\begin{aligned} \frac{a^b}{c^b} &= \frac{b^c}{b^a} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^b = b^{c-a} \Rightarrow \left(\frac{ab}{c}\right)^b = b^{b+c-a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow b \cdot \log \frac{ab}{c} = (b+c-a) \cdot \log b \Rightarrow \log \frac{ab}{c} = \frac{(b+c-a) \cdot \log b}{b} \quad (\text{I}). \end{aligned}$$

Analogamente, de $a^b \cdot b^a = a^c \cdot c^a$ resulta:

$$\log \frac{ab}{c} = \frac{(a+c-b) \cdot \log a}{a} \quad (\text{II}).$$

Comparando (I) e (II), resulta:

$$\frac{(b+c-a) \cdot \log b}{b} = \frac{(a+c-b) \cdot \log a}{a}$$

e daí vem a tese:

$$\frac{a(b+c-a)}{\log a} = \frac{b(a+c-b)}{\log b}.$$

- 204.** Notemos que cada parcela do 1º membro é da forma

$$\frac{I}{\log_x 2^{p-1} \cdot \log_x 2^p} = \frac{I}{p(p-1)} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}, \text{ em que } p \text{ varia de } 2 \text{ até } n.$$

Temos, usando a sugestão dada:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} &= \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} \\ \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} &= \frac{1}{3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} \\ \frac{1}{\log_x 8 \cdot \log_x 16} &= \frac{1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}\end{aligned}$$

etc.

$$\frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

Somando essas igualdades membro a membro, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \frac{1}{\log_x 8 \cdot \log_x 16} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} &= \\ = \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \right] \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} &= \\ = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}\end{aligned}$$

Capítulo IV – Função logarítmica

- 206.** Permutando as variáveis $x = e^y$, então $y = \log_e x$, em que $x \in \text{IR}_+^*$.

207. $f(e^3) = \log_e \frac{1}{e^3} = \log_e e^{-3} = -3$

- 208.** A função f é definida pela lei $f(x^2) = \log_2 x^2$.

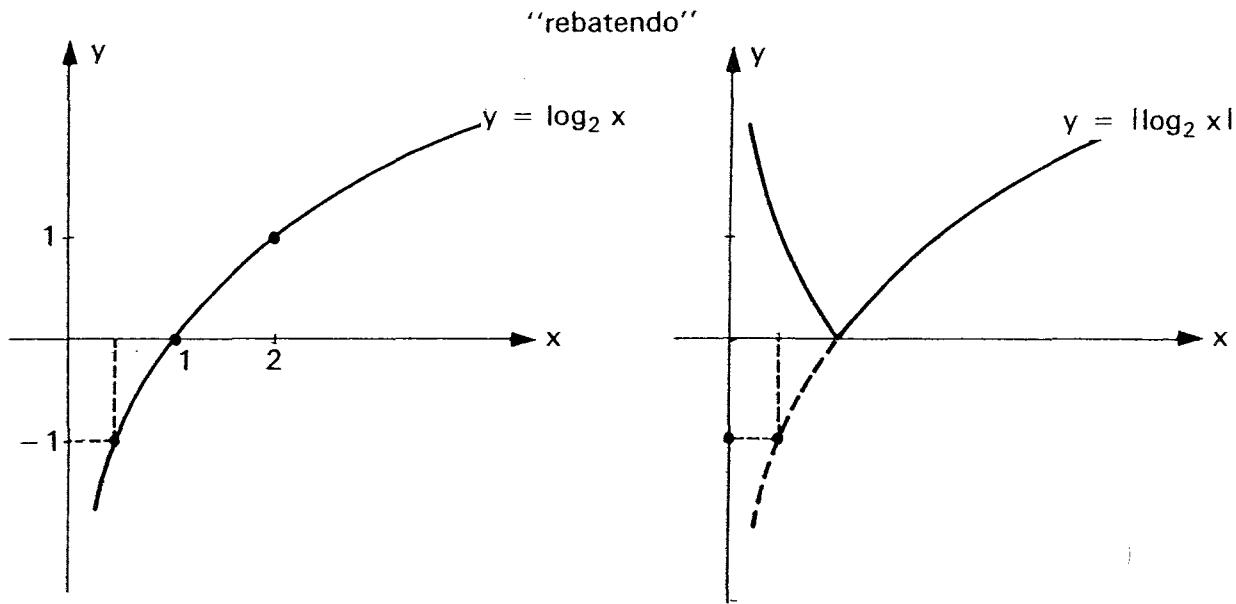
Se $f(x^2) = 2$, então $\log_2 x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

- 209.** O domínio de cada uma das funções dadas é $x > 0$ (pois para que o logaritmo seja real devemos ter logaritmando positivo). Assim, em cada uma das funções propostas, basta construir uma tabela de valores de x e $y = f(x)$, atribuindo valores convenientes de x e tais que $x > 0$.

210. a) Basta construir a tabela de valores de x e y , lembrando que o domínio de $y = \log_2 |x|$ é: $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

b) Construímos inicialmente o gráfico de $y = \log_2 x$; $x > 0$.

Como queremos o gráfico de $y = |\log_2 x|$, basta “rebater” a parte do gráfico $y = \log_2 x$ em que $y < 0$. Vejamos:



Notemos que “rebater a parte do gráfico em que $y < 0$ ” equivale a fazer uma nova construção simétrica à anterior em relação ao eixo das abscissas.

c) Construímos inicialmente o gráfico da função $g(x) = \log_2 |x|$ (item a) e a partir dele “rebatemos” a parte do gráfico em que $y < 0$, obtendo o gráfico de $y = |\log_2 |x||$.

211. Análogo ao item a) do exercício anterior.

212. a) Como o domínio dessa função é: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, devemos construir a tabela atribuindo valores convenientes para x e tais que $x > 1$.

b) O domínio da função é: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. A partir dessa condição, construímos a tabela.

c) Notemos que $f(x) = \log_2 x^2 = 2 \log_2 x$. O gráfico de f é obtido diretamente do gráfico de $g(x) = \log_2 x$, notando que, se, por exemplo, o ponto $(4, 2)$ pertence ao gráfico de g , então o ponto $(4, 4)$ pertence ao gráfico de f (isto é, a ordenada de cada ponto do gráfico de g fica multiplicada por 2).

d) Notemos que $f(x) = \log_2 \sqrt{x} = \log_2 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 x$. Procede-se de forma análoga ao anterior.

213. a) Construímos inicialmente o gráfico de $g(x) = \log_2 x$.

Para obtermos o gráfico de $f(x) = 2 + g(x)$, deslocamos cada ponto do gráfico da função g duas unidades “para cima”.

Por exemplo, se $(2, 1)$ pertence ao gráfico de g , então $(2, 3)$ pertence ao gráfico de f .

b) Análogo ao anterior.

214. A função f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \sqrt{\log_a |x|} & \text{se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \text{ (com } a > 1\text{)} \end{cases}$$

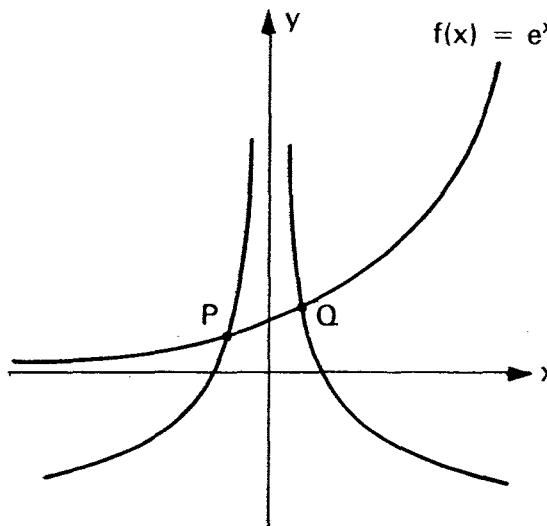
O gráfico de $\log_a |x|$, com $a > 1$, é semelhante ao do exercício 210a.

O gráfico de $\sqrt{\log_a |x|}$ é tal que as ordenadas de seus pontos são as raízes quadradas das ordenadas dos pontos do anterior.

215. Construímos inicialmente o gráfico de $g(x) = \log_2 |x - 2|$, notando que o domínio dessa função é: $|x - 2| > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Para obtermos o gráfico de $f(x) = |g(x)|$, basta “rebater” a parte em que $y < 0$ do gráfico de $g(x)$.

216. Vamos construir o gráfico das duas funções num mesmo plano cartesiano.

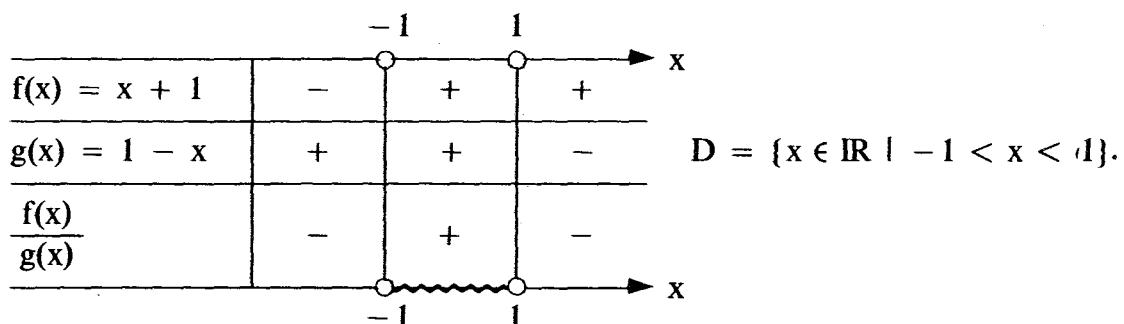


Assim, há 2 pontos comuns (P e Q) aos gráficos das funções dadas.

218. a) Devemos ter: $1 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\}$.

b) Devemos ter: $(4x - 3)^2 > 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{4}$, $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

c) Devemos ter: $\frac{x+1}{1-x} > 0$. Fazendo o quadro-quociente, temos:



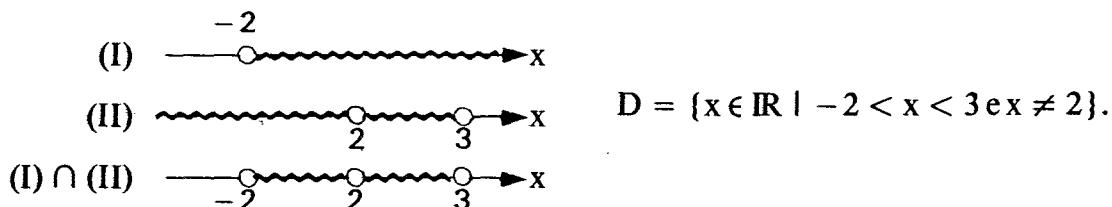
d) Devemos ter: $x^2 + x - 12 > 0 \Rightarrow x < -4 \text{ ou } x > 3$,
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 3\}$.

219. Devemos ter: $x^2 - 6x + 9 > 0 \Rightarrow (x - 3)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 3$,
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$.

220. Como queremos que o domínio da função f seja \mathbb{R} , devemos ter:
 $x^2 + Kx + K > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 1 > 0 \text{ e } \Delta < 0$, isto é:
 $K^2 - 4 \cdot 1 \cdot K < 0 \Rightarrow K^2 - 4K < 0 \Rightarrow 0 < K < 4$.

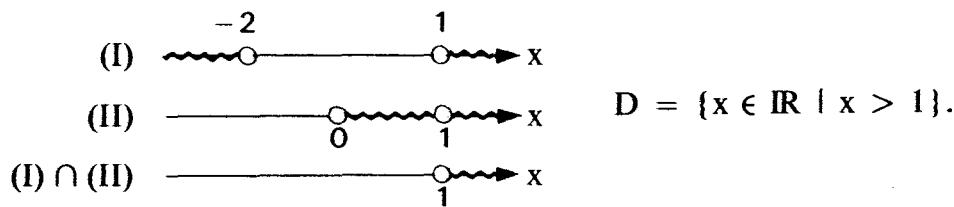
222. a) Devemos ter: $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 0 < 3 - x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 3 \text{ e } x \neq 2 \end{cases}$ (I)
 (II)

Fazendo a interseção, vem:



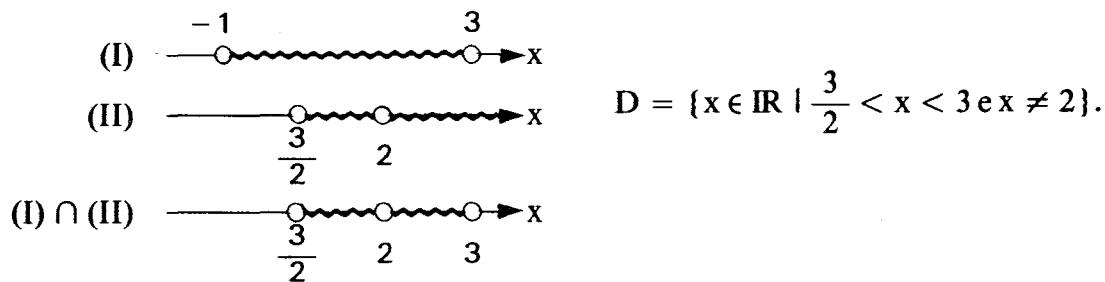
b) Devemos ter: $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ ou } x > 1 \text{ (I)} \\ 0 < x \neq 1 \text{ (II)} \end{cases}$

Fazendo a interseção, vem:



c) Devemos ter:
$$\begin{cases} 3 + 2x - x^2 > 0 \\ e^{2x-3} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 & \text{(I)} \\ \frac{3}{2} < x \neq 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo a interseção, vem:



Capítulo V – Equações exponenciais e logarítmicas

224. a) $5^x = 4 \Rightarrow x = \log_5 4, S = \{\log_5 4\}$

b) $3^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \log_3 \frac{1}{2}, S = \left\{ \log_3 \frac{1}{2} \right\}$

c) $7^{\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \log_7 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = (\log_7 2)^2, S = \{(\log_7 2)^2\}$

d) $3^{(x^2)} = 5 \Rightarrow \log_3 5 = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\log_3 5}$
 $S = \{-\sqrt{\log_3 5}; +\sqrt{\log_3 5}\}$

e) $5^{4x-3} = 0,5 \Leftrightarrow \frac{5^{4x}}{5^3} = 0,5 \Leftrightarrow (5^4)^x = 62,5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \log_{62,5} 62,5, S = \{\log_{62,5} 62,5\}$

f) $3^{2x+1} = 2 \Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3^1 = 2 \Leftrightarrow (3^2)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \log_9 \frac{2}{3}, S = \left\{ \log_9 \frac{2}{3} \right\}$

$$g) 7^{2-3x} = 5 \Leftrightarrow \frac{7^2}{7^{3x}} = 5 \Leftrightarrow (7^3)^x = \frac{49}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \log_{343} \frac{49}{5}, S = \left\{ \log_{343} \frac{49}{5} \right\}$$

225. Aplicando o logaritmo decimal a ambos os membros, vem:

$$\log a^x = \log b \Leftrightarrow x \cdot \log a = \log b \Rightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$$

$$S = \left\{ \frac{\log b}{\log a} \right\}.$$

227. Devemos ter: $A(t) = \frac{A(0)}{2}$.

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{A(0)}{2} &= A(0) \cdot e^{-3t} \Leftrightarrow \frac{1}{(e^t)^3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^t = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = \ln \sqrt[3]{2} = \ln \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

228. A quantidade inicial de radium é:

$$M(0) = C \cdot e^0 = C.$$

Do enunciado, após 1 600 anos a quantidade de radium é $\frac{C}{2}$, isto é,

$$\frac{C}{2} = C e^{-K \cdot 1600} \Rightarrow K = \ln \frac{1}{2^{1600}}$$

Após 100 anos, a quantidade de radium é:

$$\begin{aligned} M(100) &= C \cdot e^{-100 \cdot \ln \frac{1}{2^{1600}}} = C \cdot \left(e^{\ln \frac{1}{2^{1600}}} \right)^{-100} = \\ &= C \cdot \left(\frac{1}{2^{1600}} \right)^{-100} = C \cdot 2^{-\frac{1}{16}}. \end{aligned}$$

Assim, a quantidade perdida em 100 anos é dada pela diferença.

$$M(0) - M(100) = C - C \cdot 2^{-\frac{1}{16}} = C \cdot \left(1 - 2^{-\frac{1}{16}} \right), \text{ isto é, } 1 - 2^{-\frac{1}{16}} \text{ da quantidade inicial.}$$

230. a) $2^x = 3^{x+2} \Rightarrow 2^x = 3^x \cdot 3^2 \Rightarrow \frac{2^x}{3^x} = 3^2 \Rightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^x = 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 9$$

$$S = \left\{ \log_{\frac{2}{3}} 9 \right\}$$

$$\text{b)} 7^{2x-1} = 3^{3x+4} \Rightarrow \frac{7^{2x}}{7} = 3^{3x} \cdot 3^4 \Rightarrow \frac{(7^2)^x}{(3^3)^x} = 567$$

$$\Rightarrow \left(\frac{49}{27}\right)^x = 567 \Rightarrow x = \log_{\frac{49}{27}} 567$$

$$S = \left\{ \log_{\frac{49}{27}} 567 \right\}$$

$$\text{c)} 5^x - 1 = 3^{4-2x} \Rightarrow \frac{5^x}{5} = \frac{3^4}{3^{2x}} \Rightarrow 5^x \cdot 9^x = 405 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45^x = 405 \Rightarrow x = \log_{45} 405$$

$$S = \{\log_{45} 405\}$$

$$\text{231. a)} 3^x = 2^x + 2^{x+1} \Rightarrow 3^x = 2^x + 2^x \cdot 2 \Rightarrow 3^x = 2^x(1+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3 \Rightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 3$$

$$S = \left\{ \log_{\frac{3}{2}} 3 \right\}$$

$$\text{b)} 5^x + 5^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} \Rightarrow 5^x + 5^x \cdot 5 = 3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^x(1+5) = 3^x(1+3+9) \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{13}{6} \Rightarrow x = \log_{\frac{5}{3}} \frac{13}{6}$$

$$S = \left\{ \log_{\frac{5}{3}} \frac{13}{6} \right\}$$

$$\text{c)} 2^{x+1} - 2^x = 3^{x+2} - 3^x \Rightarrow 2^x \cdot 2 - 2^x = 3^x \cdot 3^2 - 3^x \Rightarrow$$

$$2^x(2-1) = 3^x(9-1) \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 8 \Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 8$$

$$S = \left\{ \log_{\frac{2}{3}} 8 \right\}$$

$$\text{232. } 2^{3x+2} \cdot 3^{2x-1} = 8 \Rightarrow 2^{3x} \cdot 2^2 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-1} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8^x \cdot 9^x = 6 \Rightarrow 72^x = 6 \Rightarrow x = \log_{72} 6$$

$$S = \{\log_{72} 6\}$$

$$\text{233. a)} (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 6 = 0. \text{ Seja } 2^x = t. \text{ Temos:}$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 3) \Leftrightarrow (2^x = 2 \text{ ou } 2^x = 3) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = \log_2 3).$$

$$S = \{1, \log_2 3\}.$$

$$\text{b)} (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 5 = 0. \text{ Seja } 2^x = t. \text{ Temos:}$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 5) \Leftrightarrow (2^x = 1 \text{ ou } 2^x = 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = \log_2 5).$$

$$S = \{0, \log_2 5\}.$$

c) $(3^x)^2 - 3^x \cdot 3 - 4 = 0$. Fazendo $3^x = t$, vem:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t = 4 \text{ ou } t = -1).$$

Como $3^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, vem que $3^x = 4 \Rightarrow x = \log_3 4$.

$$S = \{\log_3 4\}.$$

d) $3^{2x} \cdot 3 - 3^x \cdot 3 + 2 = 0$. Seja $3^x = t$. Temos: $3 \cdot t^2 - 3t + 2 = 0$. Como essa equação não tem raízes reais, resulta que não existe x que a satisfaz. Logo, $S = \emptyset$.

e) $(2^x)^2 \cdot 4 - 2^x \cdot 2^4 + 15 = 0$. Fazendo $2^x = t$, vem:

$$4t^2 - 16t + 15 = 0 \Rightarrow \left(t = \frac{5}{2} \text{ ou } t = \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(2^x = \frac{5}{2} \text{ ou } 2^x = \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \left(x = \log_2 \frac{5}{2} \text{ ou } x = \log_2 \frac{3}{2}\right).$$

$$S = \left\{\log_2 \frac{5}{2}, \log_2 \frac{3}{2}\right\}.$$

f) $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 29 \Rightarrow 3^x \cdot 3 + \frac{18}{3^x} = 29$

Seja $3^x = t$. Temos:

$$3t + \frac{18}{t} = 29 \Leftrightarrow 3t^2 - 29t + 18 = 0 \Rightarrow \left(t = \frac{2}{3} \text{ ou } t = 9\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x = \frac{2}{3} \text{ ou } 3^x = 9\right) \Rightarrow \left(x = \log_3 \frac{2}{3} \text{ ou } x = 2\right).$$

$$S = \left\{\log_3 \frac{2}{3}, 2\right\}.$$

234. Como $9^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, podemos dividir ambos os membros por 9^x . Temos:

$$\frac{4^x}{9^x} + \frac{6^x}{9^x} = \frac{9^x}{9^x} \Rightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1.$$

Fazendo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, temos:

$$t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Desprezando a raiz negativa (pois $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$), temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

$$S = \left\{\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$$

235. Dividindo ambos os membros por 49^x , temos:

$$\left(\frac{4}{49}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{14}{49}\right)^x + 3 \Rightarrow \left[\left(\frac{2}{7}\right)^x\right]^2 = 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x + 3.$$

Seja $\left(\frac{2}{7}\right)^x = t$. Temos:

$$t^2 = 2t + 3 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 3), \text{ donde } \left(\frac{2}{7}\right)^x = 3 \Rightarrow x = \log_{\frac{2}{7}} 3.$$

$$S = \left\{ \log_{\frac{2}{7}} 3 \right\}.$$

236. Fazendo $a^{2x} = t$, vem:

$$t^2 + t = 1 \Rightarrow t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (não convém) ou } t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Dai, $a^{2x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Aplicando logaritmo de base a a ambos os membros, vem:

$$2x = \log_a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \log_a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \log_a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right\}.$$

237. $\begin{cases} (64^x)^2 + (64^y)^2 = 40 \\ 64^x \cdot 64^y = 12 \end{cases}$

Fazendo $64^x = a$ e $64^y = b$, temos:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 40 \\ ab = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{b}. \end{cases}$$

Substituindo na 1.^a equação, temos:

$$b^4 - 40b^2 + 144 = 0 \Rightarrow b = \pm 6 \text{ ou } b = \pm 2.$$

Lembrando que b deve ser estritamente positivo, temos 2 possibilidades:

$$(I) (b = 6 \text{ e } a = 2) \Rightarrow (64^y = 6 \text{ e } 64^x = 2) \Rightarrow \left(y = \log_{64} 6 \text{ e } x = \frac{1}{6} \right)$$

$$(II) (b = 2 \text{ e } a = 6) \Rightarrow (64^y = 2 \text{ e } 64^x = 6) \Rightarrow \left(y = \frac{1}{6} \text{ e } x = \log_{64} 6 \right)$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \left(\frac{1}{6}, \log_{64} 6 \right); \left(\log_{64} 6, \frac{1}{6} \right) \right\}.$$

238. a) $\log_4 (3x + 2) = \log_4 (2x + 5) \Rightarrow 3x + 2 = 2x + 5 > 0$

Resolvendo $3x + 2 = 2x + 5$, vem $x = 3$, que convém, pois $3 \cdot 3 + 2 > 0$.

$$S = \{3\}.$$

b) Devemos ter: $5x - 6 = 3x - 5 > 0$.

De $5x - 6 = 3x - 5$ segue que $x = \frac{1}{2}$.

$x = \frac{1}{2}$ não é solução, pois $5 \cdot \frac{1}{2} - 6 < 0$. Daí, $S = \emptyset$.

c) Devemos ter: $5x^2 - 14x + 1 = 4x^2 - 4x - 20 > 0$.

De $5x^2 - 14x + 1 = 4x^2 - 4x - 20 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x = 7 \text{ ou } x = 3)$.

$x = 7$ é solução, pois $5 \cdot 7^2 - 14 \cdot 7 + 1 = 148 > 0$.

$x = 3$ é solução, pois $5 \cdot 3^2 - 14 \cdot 3 + 1 = 4 > 0$.

$$S = \{3, 7\}.$$

d) Devemos ter: $3x^2 - 4x - 17 = 2x^2 - 5x + 3 > 0$.

$3x^2 - 4x - 17 = 2x^2 - 5x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x = 4 \text{ ou } x = -5)$.

$x = 4$ é solução, pois $3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 17 = 15 > 0$.

$x = -5$ é solução, pois $3 \cdot (-5)^2 - 4 \cdot (-5) - 17 = 78 > 0$.

$$S = \{-5, 4\}.$$

e) Devemos ter: $4x^2 + 13x + 2 = 2x + 5 > 0$.

$4x^2 + 13x + 2 = 2x + 5 \Leftrightarrow 4x^2 + 11x - 3 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left(x = -3 \text{ ou } x = \frac{1}{4}\right)$.

$x = -3$ não é solução, pois $4 \cdot (-3)^2 + 13 \cdot (-3) + 2 = -1 < 0$.

$x = \frac{1}{4}$ é solução, pois $4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 13 \cdot \frac{1}{4} + 2 = \frac{11}{2} > 0$.

$$S = \left\{\frac{1}{4}\right\}.$$

f) Devemos ter: $5x^2 - 3x - 11 = 3x^2 - 2x - 8 > 0$.

$5x^2 - 3x - 11 = 3x^2 - 2x - 8 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left(x = -1 \text{ ou } x = \frac{3}{2}\right)$.

$x = -1$ não é solução, pois $5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 11 = -3 < 0$.

$x = \frac{3}{2}$ não é solução, pois $5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - 11 = -\frac{17}{4} < 0$.

Daí, $S = \emptyset$.

239. a) $\log_5(4x - 3) = 1 \Rightarrow 5^1 = 4x - 3 \Rightarrow x = 2$

$$S = \{2\}$$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(3 + 5x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 3 + 5x \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$

$$S = \left\{-\frac{2}{5}\right\}$$

c) $\log_{\sqrt{2}}(3x^2 + 7x + 3) = 0 \Rightarrow (\sqrt{2})^0 = 3x^2 + 7x + 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left(x = -2 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}\right)$
 $S = \left\{-2, -\frac{1}{3}\right\}$

d) $\log_4(2x^2 + 5x + 4) = 2 \Rightarrow 4^2 = 2x^2 + 5x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 12 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left(x = -4 \text{ ou } x = \frac{3}{2}\right)$
 $S = \left\{-4, \frac{3}{2}\right\}$

e) $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 9x + 4) = -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 2x^2 - 9x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 5 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 5\right)$
 $S = \left\{-\frac{1}{2}, 5\right\}$

f) $\log_3(x - 1)^2 = 2 \Rightarrow 3^2 = (x - 1)^2 \Rightarrow (x - 1 = -3 \text{ ou } x - 1 = 3) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 4)$
 $S = \{-2, 4\}$

g) $\log_4(x^2 - 4x + 3) = \frac{1}{2} \Rightarrow 4^{\frac{1}{2}} = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x = 2 - \sqrt{3} \text{ ou } x = 2 + \sqrt{3})$
 $S = \{2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$

240. Temos: $\log_3 x = y$ (1).

Do enunciado: $\log_3(x + 16) = y + 2$ (2)

De (1) vem que $3^y = x$ e de (2) vem que:

$$3^{y+2} = x + 16 \Rightarrow 3^y \cdot 3^2 = x + 16 \Rightarrow 9x = x + 16 \Rightarrow x = 2.$$

241. Notemos inicialmente que:

$$\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{32} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^y = \frac{1}{32} \Rightarrow y = \frac{5}{3}.$$

Então, podemos escrever:

$$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

242. a) $\log_3(\log_2 x) = 1 \Rightarrow 3^1 = \log_2 x \Rightarrow 2^3 = x \Rightarrow x = 8$
 $S = \{8\}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} [\log_3 (\log_4 x)] = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \log_3 (\log_4 x) \Rightarrow 3^1 = \log_4 x \Rightarrow x = 4^3 = 64$

$$S = \{64\}$$

c) $\log_{\frac{1}{4}} \{\log_3 [\log_2 (3x - 1)]\} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \log_3 [\log_2 (3x - 1)] \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3^1 = \log_2 (3x - 1) \Rightarrow 8 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = 3$

$$S = \{3\}$$

d) $\log_2 [1 + \log_3 (1 + \log_4 x)] = 0 \Rightarrow 2^0 = 1 + \log_3 (1 + \log_4 x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3^0 = 1 + \log_4 x \Rightarrow 4^0 = x \Leftrightarrow x = 1$

$$S = \{1\}$$

e) $\log_{\sqrt{2}} \{2 \cdot \log_3 [1 + \log_4 (x + 3)]\} = 2 \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = 2 \cdot \log_3 [1 + \log_4 (x + 3)] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log_3 [1 + \log_4 (x + 3)] = 1 \Rightarrow 3^1 = 1 + \log_4 (x + 3) \Rightarrow 4^2 = x + 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 13$

$$S = \{13\}$$

f) $\log_3 [1 + 2 \cdot \log_2 (3 - \log_4 x^2)] = 1 \Rightarrow 3^1 = 1 + 2 \cdot \log_2 (3 - \log_4 x^2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 1 = \log_2 (3 - \log_4 x^2) \Rightarrow 2^1 = 3 - \log_4 x^2 \Leftrightarrow \log_4 x^2 = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4^1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$

$$S = \{-2, 2\}$$

g) $\log_2 \{2 + 3 \cdot \log_3 [1 + 4 \cdot \log_4 (5x + 1)]\} = 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2^3 = 2 + 3 \cdot \log_3 [1 + 4 \cdot \log_4 (5x + 1)] \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 = \log_3 [1 + 4 \cdot \log_4 (5x + 1)] \Rightarrow 3^2 = 1 + 4 \cdot \log_4 (5x + 1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 = \log_4 (5x + 1) \Rightarrow 4^2 = 5x + 1 \Rightarrow x = 3$

$$S = \{3\}$$

243. $\log_3 [\log_2 (3x^2 - 5x + 2)] = \log_3 2 \Rightarrow \log_2 (3x^2 - 5x + 2) = 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2^2 = 3x^2 - 5x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow \left(x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 2\right)$,
que satisfazem a condição de existência.

$$S = \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}.$$

244. a) $x^{\log_x (x+3)} = 7 \Rightarrow \log_x 7 = \log_x (x+3) \Rightarrow 7 = x+3 > 0; x > 0 \text{ e } x \neq 1.$
Dai, $x = 4$, que satisfaz as condições de existência.
 $S = \{4\}$.

b) $x^{\log_x (x-5)^2} = 9 \Rightarrow \log_x 9 = \log_x (x-5)^2 \Rightarrow 9 = (x-5)^2 > 0, x \neq 1 \text{ e } x > 0$
De $9 = (x-5)^2$, segue que $x = 2$ ou $x = 8$.
 $S = \{2, 8\}$.

c) $x^{\log_x(x+3)^2} = 16 \Rightarrow \log_x 16 = \log_x(x+3)^2 \Rightarrow 16 = (x+3)^2 > 0, x > 0 \text{ e } x \neq 1.$
 De $16 = (x+3)^2$, segue que $x = 1$ (não convém) ou $x = -7$ (não convém).
 Daí, $S = \emptyset$.

d) Notemos que $\log_3 \sqrt{27} = y \Rightarrow 3^y = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$.

Então, podemos reescrever a equação na forma:

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\log_x(x^2+2)} = 2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow x^{\log_x(x^2+2)} = 3^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x 3^3 = \log_x(x^2+2) \Rightarrow x^2+2 = 3^3, x > 0 \text{ e } x \neq 1.$$

De $x^2 + 2 = 27$ vem que $x = \pm 5$. Desprezando a raiz negativa, segue que $x = 5$.
 $S = \{5\}$.

245. Da 2.^a equação, temos:

$$\log_2 y = \sqrt{x} \Rightarrow (\log_2 y)^2 = x \text{ para } x > 0 \text{ e } y > 0 \quad (1).$$

Substituindo esse valor de x na 1.^a equação, temos:

$$2 \cdot [(\log_2 y)^2]^y - \frac{1}{[(\log_2 y)^2]^y} = 1.$$

Fazendo $(\log_2 y)^2y = t$, vem:

$$2t - \frac{1}{t} = 1 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = 1 \text{ ou } t = -\frac{1}{2}\right).$$

Como $t > 0$, segue que:

$$t = 1 \Leftrightarrow (\log_2 y)^2y = 1^{2y \neq 0} \Leftrightarrow \log_2 y = 1 \Rightarrow y = 2.$$

Em (1) temos:

$$x = (\log_2 y)^2 = (\log_2 2)^2 = 1.$$

$$S = \{(1, 2)\}.$$

246. a) $\log_4^2 x - 2 \log_4 x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\log_4 x)^2 - 2 \log_4 x - 3 = 0$

Fazendo $\log_4 x = t$, vem:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 3) \Leftrightarrow (\log_4 x = -1 \text{ ou } \log_4 x = 3) \Rightarrow \\ \Rightarrow (4^{-1} = x \text{ ou } 4^3 = x) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = 64\right), \text{ que satisfazem a condição de existência.}$$

$$S = \left\{\frac{1}{4}, 64\right\}.$$

b) $6 \log_2^2 x - 7 \log_2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow 6(\log_2 x)^2 - 7 \log_2 x + 2 = 0$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$6t^2 - 7t + 2 = 0 \Rightarrow \left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\log_2 x = \frac{1}{2} \text{ ou } \log_2 x = \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \left(x = 2^{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = 2^{\frac{2}{3}}\right), \text{ isto é,}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt[3]{4}.$$

Como $x > 0$, vem:

$$S = \{\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}\}.$$

c) $\log x (\log x - 1) = 6$

Fazendo $\log x = t$, vem:

$$\begin{aligned} t(t - 1) = 6 &\Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t = -2 \text{ ou } t = 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log x = -2 \text{ ou } \log x = 3) \Rightarrow (x = 10^{-2} \text{ ou } x = 10^3), \text{ que são} \\ &\text{raízes da equação proposta, pois } x > 0. \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{100}, 1000 \right\}.$$

d) $\log_2 x \cdot (2 \log_2 x - 3) = 2$

Fazendo $\log_2 x = t$, temos:

$$\begin{aligned} t(2t - 3) = 2 &\Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = 2 \right) \Leftrightarrow \\ &\left(\log_2 x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \log_2 x = 2 \right) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = 4 \right), \text{ que satisfazem} \\ &\text{a condição } x > 0. \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 4 \right\}.$$

e) $2 \log_4 x + 2 = 5 \log_4 x \Leftrightarrow 2(\log_4 x)^2 + 2 = 5 \log_4 x$

Fazendo $\log_4 x = t$, vem:

$$\begin{aligned} 2t^2 + 2 = 5t &\Rightarrow \left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 2 \right) \Leftrightarrow \left(\log_4 x = \frac{1}{2} \text{ ou } \log_4 x = 2 \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x = 2 \text{ ou } x = 16), \text{ que satisfazem a condição } x > 0. \\ S &= \{2, 16\}. \end{aligned}$$

f) $\log^3 x = 4 \log x \Leftrightarrow (\log x)^3 = 4 \log x$

Fazendo $\log x = t$, vem:

$$\begin{aligned} t^3 = 4t &\Leftrightarrow t(t^2 - 4) = 0 \Rightarrow (t = 0 \text{ ou } t = -2 \text{ ou } t = 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log x = 0 \text{ ou } \log x = -2 \text{ ou } \log x = 2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{100} \text{ ou } x = 100 \right), \text{ que satisfazem a condição } x > 0. \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{100}, 1, 100 \right\}.$$

247. $\sqrt[3]{3} - \sqrt[2x]{3} = 2 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{2x}} = 2$

Fazendo $\frac{1}{x} = 2y$, temos:

$$3^{2y} - 3^{\frac{2y+1}{2}} = 2 \Leftrightarrow (3^y)^2 - 3^y - 2 = 0.$$

Fazendo $3^y = t$, vem:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2).$$

Como $3^y > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, segue que $t = -1$ não convém. Daí, $3^y = 2 \Rightarrow \log_3 2 = y$.

$$\text{Logo, } \frac{1}{x} = 2 \log_3 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \log_3 2^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\log_3 4}.$$

Transformando o logaritmo para a base 10, vem:

$$x = \frac{1}{\frac{\log 4}{\log 3}} = \frac{\log 3}{\log 4}, \text{ não convém pois } x \in \mathbb{N}^*.$$

$$S = \emptyset$$

248. a) Fazendo $\log x = t$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} = 1 &\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log x = 2 \text{ ou } \log x = 3) \Rightarrow (x = 100 \text{ ou } x = 1000), \text{ que satisfazem} \\ &\text{a condição } x > 0. \\ S &= \{100, 1000\}. \end{aligned}$$

b) Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$\begin{aligned} \frac{3+t}{t} + \frac{2-t}{3-t} = \frac{5}{2} &\Leftrightarrow t^2 - 11t + 18 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 9) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log_2 x = 2 \text{ ou } \log_2 x = 9) \Rightarrow (x = 4 \text{ ou } x = 2^9 = 512), \text{ que satisfazem} \\ &\text{a condição } x > 0. \\ S &= \{4, 512\}. \end{aligned}$$

c) Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$$\begin{aligned} \frac{t}{1+t} + \frac{t+2}{t+3} = \frac{5}{4} &\Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 7 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(t = 1 \text{ ou } t = -\frac{7}{3} \right) \Rightarrow \left(\log_3 x = 1 \text{ ou } \log_3 x = -\frac{7}{3} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(x = 3 \text{ ou } x = 3^{-\frac{7}{3}} \right), \text{ que satisfazem a condição } x > 0. \\ S &= \left\{ 3, 3^{-\frac{7}{3}} \right\}. \end{aligned}$$

d) Fazendo $\log x = t$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1-t}{2+t} - \frac{1+t}{2-t} = 2 &\Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 4) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log x = -1 \text{ ou } \log x = 4) \Rightarrow (x = 10^{-1} \text{ ou } x = 10^4), \text{ que satisfazem} \\ &\text{a condição } x > 0. \\ S &= \{10^{-1}, 10^4\}. \end{aligned}$$

e) Fazendo $\log_2 x = t$, segue que:

$$\frac{1-t}{2-t} - \frac{2-t}{3-t} = \frac{4-t}{5-t} - \frac{5-t}{6-t} \Leftrightarrow \frac{-1}{t^2 - 5t + 6} = \frac{-1}{30 - 11t + t^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t = 4.$$

Então, $\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16$.

Como $x > 0$, $x = 16$ é solução.

$$S = \{16\}.$$

250. a) Devemos ter:

$$0 < x \neq 1 \text{ (I)} \text{ e } 3x^2 - 13x + 15 = x^2 \text{ (II).}$$

De (II) temos que $x = 5$ ou $x = \frac{3}{2}$, que são soluções, pois satisfazem (I).

$$S = \left\{ \frac{3}{2}, 5 \right\}.$$

b) Devemos ter:

$$0 < x \neq 1 \text{ (I)} \text{ e } 4 - 3x = x^2 \text{ (II).}$$

De (II) temos que $x = 1$ ou $x = -4$, que não satisfazem (I).

$$S = \emptyset.$$

c) Devemos ter:

$$0 < x - 2 \neq 1 \Leftrightarrow 2 < x \neq 3 \text{ (I)} \text{ e } 2x^2 - 11x + 16 = (x - 2)^2 \text{ (II).}$$

De (II) temos que $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 3$. Somente $x = 4$ satisfaz (I). Então, $S = \{4\}$.

d) Devemos ter:

$$0 < \sqrt{x} \neq 1 \text{ (I)} \text{ e } (\sqrt{x})^4 = 2x^2 + 5x + 6 \text{ (II).}$$

De (II) temos que $x = -2$ ou $x = -3$, que não satisfazem (I).

$$\text{Assim, } S = \emptyset.$$

e) Devemos ter:

$$0 < x - 1 \neq 1 \Leftrightarrow 1 < x \neq 2 \text{ (I)} \text{ e } x^3 - x^2 + x - 3 = (x - 1)^3 \text{ (II).}$$

De (II) temos que:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \left(x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Somente $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é solução, pois satisfaz (I).

$$S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

f) Devemos ter:

$$0 < x + 2 \neq 1 \Leftrightarrow -2 < x \neq -1 \text{ (I)} \text{ e } x^3 + 7x^2 + 8x + 11 = (x + 2)^3 \text{ (II).}$$

De (II) temos que $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 3)$, que são soluções pois satisfazem (I).

$$S = \{1, 3\}.$$

g) Devemos ter:

$$0 < 2 - x \neq 1 \Leftrightarrow 2 > x \neq 1 \text{ (I)} \text{ e } 2x^3 - x^2 - 18x + 8 = (2 - x)^3 \text{ (II).}$$

De (II) temos que:

$$3x^3 - 7x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(3x^2 - 7x - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = -\frac{2}{3} \right).$$

$x = 3$ não é solução, pois não satisfaz (I).

$$S = \left\{ 0, -\frac{2}{3} \right\}.$$

251. Devemos ter:

$$0 < x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow -1 < x \neq 0 \text{ (I)} \text{ e } x^2 + x + 6 = (x + 1)^3 \text{ (II).}$$

De (II) temos que $x^3 + 2x^2 + 2x - 5 = 0$. As possíveis raízes racionais dessa equação pertencem ao conjunto $\{-1, 1, -5, 5\}$.

$x = 1$ é raiz da equação, pois $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 0$ (V).

Logo, o polinômio $x^3 + 2x^2 + 2x - 5$ é divisível por $x - 1$. Efetuando a divisão, podemos escrever:

$$x^3 + 2x^2 + 2x - 5 = (x - 1)(x^2 + 3x + 5)$$

Como $x^2 + 3x + 5 = 0$ não admite raízes reais, segue que a única solução real de (II) é $x = 1$, que satisfaz (I).

$$S = \{1\}.$$

253. a) Devemos ter:

$$0 < x \neq 1 \text{ (I)} \text{ e } 4x - 3 = 2x + 1 > 0 \text{ (II).}$$

De (II) temos que $x = 2$.

$x = 2$ é solução, pois satisfaz (I) e (II), pois $4 \cdot 2 - 3 > 0$.

$$S = \{2\}.$$

b) Devemos ter:

$$0 < x \neq 1 \text{ (I)} \text{ e } 5x + 2 = 3x + 4 > 0 \text{ (II).}$$

Resolvendo (II), temos que $x = 1$, que não é solução, pois não satisfaz (I).

$$S = \emptyset.$$

c) Devemos ter:

$$0 < x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow -1 < x \neq 0 \text{ (I)} \text{ e } 3x + 14 = 2 - x > 0 \text{ (II).}$$

Resolvendo (II), temos que $x = -3$, que não é solução, pois não satisfaz (I).

$$S = \emptyset.$$

d) Devemos ter:

$$0 < x + 5 \neq 1 \Leftrightarrow -5 < x \neq -4 \text{ (I)} \text{ e } 3x^2 - 5x - 8 = 2x^2 - 3x > 0 \text{ (II).}$$

Resolvendo (II), temos que $x = -2$ ou $x = 4$.

$x = -2$ satisfaz (II), pois $3 \cdot (-2)^2 - 5(-2) - 8 = 14 > 0$ e satisfaz (I).

Logo, $x = -2$ é solução.

$x = 4$ satisfaz (II), pois $3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 - 8 = 20 > 0$ e satisfaz (I).

Logo, $x = 4$ é solução.

$$S = \{-2, 4\}.$$

e) Devemos ter:

$$0 < 2x - 4 \neq 1 \Leftrightarrow 2 < x \neq \frac{5}{2} \text{ (I) e } 5x^2 - 15x + 7 = x^2 - 3x + 2 > 0 \text{ (II).}$$

Resolvendo (II), temos que $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$.

$x = \frac{1}{2}$ não é solução, pois não satisfaz (I).

$x = \frac{5}{2}$ não é solução, pois não satisfaz (I).

Daí, $S = \emptyset$.

f) Devemos ter:

$$0 < x + 2 \neq 1 \Leftrightarrow -2 < x \neq -1 \text{ (I) e } 3x^2 - 8x - 2 = 2x^2 - 5x + 2 > 0 \text{ (II).}$$

Resolvendo (II), temos que $x = -1$ ou $x = 4$.

$x = -1$ não é solução, pois não satisfaz (I).

$x = 4$ satisfaz (II), pois $3 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 - 2 = 14 > 0$ e satisfaz (I).

Assim, $x = 4$ é solução.

$$S = \{4\}.$$

254. a) Fazendo $\log_x(5x - 6) = t$, vem:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 2), \text{ isto é,}$$

$$(1) \log_x(5x - 6) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \text{ (I)} \\ 5x - 6 = x \text{ (II)} \end{cases}$$

De (II), $x = \frac{3}{2}$, que é solução, pois satisfaz (I).

$$(2) \log_x(5x - 6) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \text{ (I)} \\ 5x - 6 = x^2 \text{ (II)} \end{cases}$$

De (II), segue que $x = 2$ ou $x = 3$, que são soluções, pois satisfazem (I).

Assim, de (1) e (2), temos que:

$$S = \left\{ \frac{3}{2}, 2, 3 \right\}.$$

b) Fazendo $\log_x(x + 1) = t$, temos:

$$t^2 = 2 + t \Rightarrow t = -1 \text{ ou } t = 2, \text{ isto é,}$$

$$(1) \log_x(x + 1) = -1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \text{ (I)} \\ x + 1 = x^{-1} > 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Resolvendo (II), temos que $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ não é solução, pois não satisfaz (I).

$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ é solução, pois satisfaz (I).

$$(2) \log_x(x+1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 & (\text{I}) \\ x+1 = x^2 & (\text{II}) \end{cases}$$

Resolvendo (II), temos que: $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Somente $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é solução, pois deve satisfazer (I).

Assim, de (I) e (2) segue que:

$$S = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

c) Fazendo $\log_{3x-2}(4-x) = t$, vem:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow \left(t = 2 \text{ ou } t = \frac{1}{2} \right), \text{ isto é:}$$

$$(1) \log_{3x-2}(4-x) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3x-2 \neq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x \neq 1 & (\text{I}) \\ 4-x = (3x-2)^2 & (\text{II}) \end{cases}$$

Resolvendo (II), temos que:

$$9x^2 - 11x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{11}{9}.$$

$x = 0$ não é solução, pois não satisfaz (I).

$x = \frac{11}{9}$ é solução, pois satisfaz (I).

$$(2) \log_{3x-2}(4-x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3x-2 \neq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x \neq 1 & (\text{I}) \\ 4-x = (3x-2)^{\frac{1}{2}} & (\text{II}) \end{cases}$$

Resolvendo a equação irracional em (II), vem que

$x = 2$, que é solução, pois satisfaz (I).

De (1) e (2) vem:

$$S = \left\{ \frac{11}{9}, 2 \right\}.$$

256. A condição de existência dos logaritmos é $x > \frac{1}{3}$ (I)

Para $x > \frac{1}{3}$, temos:

$$\log\left(x + \frac{1}{3}\right) + \log\left(x - \frac{1}{3}\right) = \log \frac{24}{9} \Rightarrow \log\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\right] = \log \frac{24}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log\left(x^2 - \frac{1}{9}\right) = \log \frac{24}{9} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{9} = \frac{24}{9} \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x = -\frac{5}{3} \text{ ou } x = \frac{5}{3}\right).$$

Como somente $x = \frac{5}{3}$ satisfaz (I), vem que: $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

- 257.** Notemos que as condições $2^x > 0$ e $1 + 2^x > 0$ são satisfeitas para $\forall x \in \mathbb{R}$.

Temos:

$$\log 2^x + \log(1 + 2^x) = \log 6 \Rightarrow \log[2^x \cdot (1 + 2^x)] = \log 6 \Rightarrow 2^x \cdot (1 + 2^x) = 6.$$

$$\text{Fazendo } 2^x = t, \text{ vem: } t(1 + t) = 6 \Rightarrow t = -3 \text{ ou } t = 2.$$

$$\text{Como } t > 0, \text{ vem que } 2^x = 2 \Rightarrow x = 1.$$

$$S = \{1\}.$$

- 258.** Notemos inicialmente que $1 + 2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Temos:

$$x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6 \Rightarrow x + \log(1 + 2^x) = x \cdot \log\left(\frac{10}{2}\right) + \log 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \log(1 + 2^x) = x \cdot [\log 10 - \log 2] + \log 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \log(1 + 2^x) = x - x \log 2 + \log 6 \Leftrightarrow \log(1 + 2^x) = \log 6 - \log 2^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(1 + 2^x) = \log\left(\frac{6}{2^x}\right) \Rightarrow 1 + 2^x = \frac{6}{2^x}.$$

Fazendo $2^x = t$, vem:

$$1 + t = \frac{6}{t} \Rightarrow (t = -3 \text{ ou } t = 2).$$

$$\text{Como } 2^x > 0, \text{ segue que } 2^x = 2 \Rightarrow x = 1.$$

$$S = \{1\}.$$

- 259. a)** A condição de existência dos logaritmos é $x > 3$ (I).

Para $x > 3$, temos:

$$\log_2(x - 3) + \log_2(x + 3) = 4 \Rightarrow \log_2[(x - 3)(x + 3)] = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = 2^4 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = -5 \text{ ou } x = 5.$$

Somente $x = 5$ é solução, pois deve satisfazer (I).

$$S = \{5\}.$$

- b)** A condição de existência dos logaritmos é $x > 2$ (I).

Para $x > 2$, temos:

$$\log_2(x + 1) + \log_2(x - 2) = 2 \Rightarrow \log_2[(x + 1) \cdot (x - 2)] = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 2) = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 3.$$

Somente $x = 3$ é solução, pois deve satisfazer (I).

$$S = \{3\}.$$

c) A condição de existência dos logaritmos é $x > 21$ (I).

Para $x > 21$, temos:

$$\log x + \log(x - 21) = 2 \Rightarrow \log[x \cdot (x - 21)] = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x(x - 21) = 10^2 \Leftrightarrow x^2 - 21x - 100 = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ ou } x = 25.$$

Como somente $x = 25$ satisfaz (I), $S = \{25\}$.

d) A condição de existência dos logaritmos é $x > 1$ (I).

Para $x > 1$, temos:

$$\log_2(5x - 2) - [\log_2 x + \log_2(x - 1)] = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2(5x - 2) - \log_2[x \cdot (x - 1)] = 2 \Rightarrow \log_2\left(\frac{5x - 2}{x(x - 1)}\right) = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{5x - 2}{x(x - 1)} = 2^2 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = 2.$$

Somente $x = 2$ é solução, pois deve satisfazer (I).

$$S = \{2\}.$$

e) A condição de existência dos logaritmos é $x > 2$ (I).

Para $x > 2$, temos:

$$\log_3(5x + 4) - [\log_3 x + \log_3(x - 2)] = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3(5x + 4) - \log_3[x \cdot (x - 2)] = 1 \Rightarrow \log_3\left(\frac{5x + 4}{x(x - 2)}\right) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{5x + 4}{x(x - 2)} = 3^1 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 4.$$

Somente $x = 4$ é solução, pois deve satisfazer (I).

$$S = \{4\}.$$

f) A condição de existência dos logaritmos é $x \neq -\frac{2}{3}$ e $x \neq \frac{3}{2}$ (I).

Para $x \neq -\frac{2}{3}$ e $x \neq \frac{3}{2}$, temos:

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x + 2)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(2x - 3)^2 = -4 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\frac{(3x + 2)^2}{(2x - 3)^2} = -4 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3x + 2}{2x - 3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Rightarrow \left(\frac{3x + 2}{2x - 3}\right)^2 = 2^4 \Rightarrow \left|\frac{3x + 2}{2x - 3}\right| = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3x + 2}{2x - 3} = 4 \Rightarrow x = \frac{14}{5} \\ \text{ou} \\ \frac{3x + 2}{2x - 3} = -4 \Rightarrow x = \frac{10}{11} \end{cases}$$

Os dois valores encontrados são soluções, pois satisfazem (I).

$$S = \left\{-\frac{14}{5}, \frac{10}{11}\right\}.$$

g) A condição de existência dos logaritmos é $x \neq -2$ e $x \neq 3$ (I).

Para $x \neq -2$ e $x \neq 3$, temos:

$$\log_{36}(x+2)^2 + \log_{36}(x-3)^2 = 1 \Rightarrow \log_{36}[(x+2)^2(x-3)^2] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)^2(x-3)^2 = 36 \Rightarrow (x^2 - x - 6) = \pm 6$$

$$x^2 - x - 6 = 6 \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 4$$

$$x^2 - x - 6 = -6 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Esses quatro valores são soluções, pois satisfazem (I).

$$S = \{-3, 0, 1, 4\}.$$

260. A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$.

$$(0,4)^{\log^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \log x^3} \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^{\log^2 x + 1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2 - 3 \log x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x + 1} = \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{2 - 3 \log x} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-\log^2 x - 1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{4 - 6 \log x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\log^2 x - 1 = 4 - 6 \log x \Rightarrow \log^2 x - 6 \log x + 5 = 0.$$

Fazendo $\log x = t$, vem:

$$t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 5) \Rightarrow (\log x = 1 \text{ ou } \log x = 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x = 10^1 \text{ ou } x = 10^5).$$

$$S = \{10, 10^5\}.$$

261. Notemos que $9^{x-1} + 7 > 0$ e $3^{x-1} + 1 > 0$ são satisfeitas para todo x real.

Temos:

$$\log_2(9^{x-1} + 7) - \log_2(3^{x-1} + 1) = 2 \Rightarrow \log_2\left(\frac{9^{x-1} + 7}{3^{x-1} + 1}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9^{x-1} + 7}{3^{x-1} + 1} = 2^2 \Rightarrow 9^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9^x}{9} - 4 \cdot \frac{3^x}{3} + 3 = 0.$$

Fazendo $3^x = t$, vem:

$$\frac{t^2}{9} - \frac{4t}{3} + 3 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow (t = 3 \text{ ou } t = 9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3^x = 3 \text{ ou } 3^x = 9) \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2).$$

$$S = \{1, 2\}.$$

262. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > \frac{15}{4}$ (I).

Temos:

$$\frac{\log_3(2x)}{\log_3(4x-15)} = 2 \Rightarrow \log_3 2x = 2 \cdot \log_3(4x-15) \Rightarrow$$

$$\log_3 2x = \log_3(4x-15)^2 \Rightarrow 2x = (4x-15)^2 \Rightarrow 16x^2 - 122x + 225 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{2} \text{ ou } x = \frac{25}{8}.$$

Como $x = \frac{25}{8}$ não satisfaz (I) e $x = \frac{9}{2}$ satisfaz, a única solução é $x = \frac{9}{2}$.

$$S = \left\{ \frac{9}{2} \right\}.$$

$$\text{b)} \frac{\log_2(35 - x^3)}{\log_2(5 - x)} = 3 \Rightarrow \log_2(35 - x^3) = 3 \log_2(5 - x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2(35 - x^3) = \log_2(5 - x)^3 \Rightarrow 35 - x^3 = (5 - x)^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3.$$

Verificando $x = 2$: $35 - 2^3 > 0$ e $5 - 2 > 0$.

Verificando $x = 3$: $35 - 3^3 > 0$ e $5 - 3 > 0$.

$$S = \{2, 3\}.$$

$$\text{c)} \frac{\log(\sqrt{x+1} + 1)}{\log \sqrt[3]{x-40}} = 3 \Rightarrow \log(\sqrt{x+1} + 1) = 3 \log \sqrt[3]{x-40} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log(\sqrt{x+1} + 1) = \log(\sqrt[3]{x-40})^3 \Rightarrow \sqrt{x+1} + 1 = x - 40 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{x+1} = x - 41 \Rightarrow x^2 - 83x + 1680 = 0 \Rightarrow (x = 48 \text{ ou } x = 35) \\ (x = 35 \text{ não convém, pois } \sqrt{35+1} \neq 35-41).$$

Verificando $x = 48$: $\sqrt{48+1} + 1 > 0$ e $\sqrt[3]{48-40} > 0$.

$$S = \{48\}.$$

263. A condição de existência dos logaritmos é $x > 16$ (I).

$$\frac{1}{2} \log_3(x-16) - \log_3(\sqrt{x}-4) = 1 \Rightarrow \log_3(x-16)^{\frac{1}{2}} - \log_3(\sqrt{x}-4) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3 \frac{(x-16)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}-4} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-16}}{\sqrt{x}-4} = 3^1 \Rightarrow 3\sqrt{x}-12 = \sqrt{x-16}.$$

Resolvendo essa equação irracional, temos $x = 25$ ou $x = 16$.

$x = 25$ é solução dessa equação irracional, pois:

$$3 \cdot \sqrt{25} - 12 = \sqrt{25-16} \text{ (V) e satisfaz (I).}$$

$x = 16$ é solução da equação irracional, pois:

$$3 \cdot \sqrt{16} - 12 = \sqrt{16-16} \text{ (V), mas não satisfaz (I).}$$

Dai, $S = \{25\}$.

264. A condição de existência dos logaritmos é $2^{x+2} - 3 > 0$, pois $4^x + 15 \cdot 2^x + 27 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (I)

Temos:

$$\begin{aligned} \log_3(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) &= 2 \log_3(2^{x+2} - 3) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) &= \log_3(2^{x+2} - 3)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4^x + 15 \cdot 2^x + 27 &= (2^{x+2})^2 - 6 \cdot 2^{x+2} + 9 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4^x + 15 \cdot 2^x + 27 &= 2^{2x} \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^x \cdot 2^2 + 9. \end{aligned}$$

Fazendo $2^x = t$, vem:

$$t^2 + 15t + 27 = 16t^2 - 24t + 9 \Rightarrow 15t^2 - 39t - 18 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -\frac{2}{5} \text{ (não convém, pois } t > 0) \text{ ou } t = 3.$$

Daí, $2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$, que satisfaz (I), pois:

$$2^{\log_2 3 + 2} - 3 = 2^{\log_2 3} \cdot 2^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 > 0.$$

$$S = \{\log_2 3\}.$$

- 266.** a) A condição de existência dos logaritmos é $x > 3$ (I).

Temos:

$$\log_2(x+4) + \log_2(x-3) = \log_2 18 \Rightarrow \log_2 [(x+4)(x-3)] = \log_2 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-3) = 18 \Rightarrow x^2 + x - 30 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -6.$$

Somente $x = 5$ satisfaz (I).

$$S = \{5\}.$$

- b) A condição de existência dos logaritmos é $x < 1$ (I).

Temos:

$$\log_5(1-x) + \log_5(2-x) = \log_5(8-2x) \Rightarrow \log_5[(1-x)(2-x)] = \log_5(8-2x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-x)(2-x) = 8-2x \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 3.$$

Somente $x = -2$ é solução, pois satisfaz (I).

$$S = \{-2\}.$$

- c) A condição de existência dos logaritmos é $x > 5$ (I).

Temos:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-5) = \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}[(x+1)(x-5)] = \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-5) = 2x-3 \Rightarrow x^2 - 6x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3 - \sqrt{11} \text{ ou } x = 3 + \sqrt{11}.$$

Somente $x = 3 + \sqrt{11}$ satisfaz (I).

$$S = \{3 + \sqrt{11}\}.$$

- d) A condição de existência dos logaritmos é $x > \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$ (I).

Temos:

$$\log(2x+1) + \log(4x-3) = \log(2x^2 - x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log[(2x+1)(4x-3)] = \log(2x^2 - x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x+1)(4x-3) = 2x^2 - x - 2 \Rightarrow 6x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{1}{2}, \text{ que não satisfazem (I).}$$

$$S = \emptyset.$$

- e) A condição de existência dos logaritmos é $\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$ (I).

Temos:

$$\log_2(4-3x) - \log_2(2x-1) = \log_2(3-x) - \log_2(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 \left(\frac{4 - 3x}{2x - 1} \right) = \log_2 \left(\frac{3 - x}{x + 1} \right) \Rightarrow \frac{4 - 3x}{2x - 1} = \frac{3 - x}{x + 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \text{ ou } x = 1.$$

Somente $x = 1$ satisfaz (I).

$$S = \{1\}.$$

f) A condição de existência dos logaritmos é $x > \frac{1}{3}$ (I).

Temos:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 13x) + \operatorname{colog}_{\frac{1}{3}}(x + 3) &= \log_{\frac{1}{3}}(3x - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 13x) - \log_{\frac{1}{3}}(x + 3) &= \log_{\frac{1}{3}}(3x - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^2 + 13x}{x + 3}\right) &= \log_{\frac{1}{3}}(3x - 1) \Rightarrow \frac{x^2 + 13x}{x + 3} = 3x - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 &= 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 3. \end{aligned}$$

Somente $x = 3$ satisfaz (I).

$$S = \{3\}.$$

g) A condição de existência dos logaritmos é $x > -1 + \sqrt{3}$ (I).

Temos:

$$\begin{aligned} \log(2x^2 + 4x - 4) + \operatorname{colog}(x + 1) &= \log 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log(2x^2 + 4x - 4) - \log(x + 1) &= \log 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log\left(\frac{2x^2 + 4x - 4}{x + 1}\right) &= \log 4 \Rightarrow \frac{2x^2 + 4x - 4}{x + 1} = 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x^2 - 8 &= 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2. \end{aligned}$$

Somente $x = 2$ satisfaz (I).

$$S = \{2\}.$$

267. Fazendo $\log x = y$, vem:

$$\begin{aligned} 2 \log y &= \log(7 - 2y) - \log 5 \Rightarrow \log y^2 = \log\left(\frac{7 - 2y}{5}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow y^2 &= \frac{7 - 2y}{5} \Rightarrow 5y^2 + 2y - 7 = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{5} \text{ ou } y = 1. \end{aligned}$$

Dai, $\log x = -\frac{7}{5}$ ou $\log x = 1$.

Notemos que, se $\log x = -\frac{7}{5}$ no primeiro membro, teremos:

$$\log(\log x) = \log\left(-\frac{7}{5}\right) \notin \text{IR!}$$

Então, $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$.

$$S = \{10\}.$$

268. A condição de existência dos logaritmos é $x > -\frac{5}{7}$ (I).

Temos:

$$\begin{aligned} \log \sqrt{7x + 5} + \frac{1}{2} \log (2x + 7) &= 1 + \log \frac{9}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log \sqrt{7x + 5} + \log (2x + 7)^{\frac{1}{2}} &= \log 10 + \log \frac{9}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log [\sqrt{7x + 5} \cdot \sqrt{2x + 7}] &= \log \left(10 \cdot \frac{9}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{(7x + 5)(2x + 7)} &= 45 \Rightarrow 14x^2 + 59x - 1990 = 0 \Rightarrow \\ x = -\frac{199}{14} \text{ ou } x &= 10. \end{aligned}$$

Somente $x = 10$ satisfaz (I). $S = \{10\}$.

269. a) Temos:

$$\sqrt{\log x} = \log \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{\log x} = \frac{1}{2} \cdot \log x$$

Fazendo $\log x = t$, vem:

$$\begin{aligned} \sqrt{t} = \frac{1}{2}t &\Rightarrow \frac{1}{4}t^2 = t \Rightarrow (t = 0 \text{ ou } t = 4) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\log x = 0 \text{ ou } \log x = 4) &\Rightarrow (x = 10^0 \text{ ou } x = 10^4). \end{aligned}$$

Verificando $x = 1$: $\sqrt{\log 1} = \log \sqrt{1}$. (V)

Verificando $x = 10^4$: $\sqrt{\log 10^4} = \log \sqrt{10^4}$. (V)

$$S = \{1, 10^4\}.$$

$$\text{b) } \log^{-1} x = 2 + \log x^{-1} \Rightarrow (\log x)^{-1} = 2 - \log x$$

Fazendo $\log x = t$, vem:

$$t^{-1} = 2 - t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Então, $\log x = 1 \Rightarrow x = 10^1 = 10$.

$$x = 10 \text{ é solução, pois } x > 0. \quad S = \{10\}.$$

c) A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$.

Temos:

$$\log_8 x^3 = 5 + \frac{12}{\log_8 x} \Rightarrow 3 \log_8 x = 5 + \frac{12}{\log_8 x}.$$

Fazendo $\log_8 x = t$, vem:

$$\begin{aligned} 3t = 5 + \frac{12}{t} &\Rightarrow \left(t = -\frac{4}{3} \text{ ou } t = 3\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\log_8 x = -\frac{4}{3} \text{ ou } \log_8 x = 3\right) &\Rightarrow \left(x = 8^{-\frac{4}{3}} \text{ ou } x = 8^3\right), \end{aligned}$$

$x = \frac{1}{16}$ ou $x = 512$, que satisfazem a condição de existência.

$$S = \left\{ \frac{1}{16}, 512 \right\}.$$

270. $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 6 \Rightarrow \log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^x \cdot 3 - 3) = 6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log_3(3^x - 1) \cdot \log_3[3 \cdot (3^x - 1)] = 6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log_3(3^x - 1) \cdot [\log_3 3 + \log_3(3^x - 1)] = 6$
Fazendo $\log_3(3^x - 1) = t$, vem:
 $t \cdot [1 + t] = 6 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t = -3 \text{ ou } t = 2).$

Dai,

$$\log_3(3^x - 1) = -3 \Rightarrow 3^x - 1 = 3^{-3} \Rightarrow 3^x = \frac{28}{27} \Rightarrow x = \log_3 \frac{28}{27}$$

ou

$$\log_3(3^x - 1) = 2 \Rightarrow 3^x - 1 = 9 \Rightarrow 3^x = 10 \Rightarrow x = \log_3 10.$$

Os valores encontrados garantem a existência dos logaritmos acima e são portanto soluções.

$$S = \left\{ \log_3 \frac{28}{27}, \log_3 10 \right\}.$$

271. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$.

Temos:

$$\begin{aligned} \log^2 x^3 - 20 \cdot \log \sqrt{x} + 1 = 0 &\Leftrightarrow (\log x^3)^2 - 20 \cdot \log x^{\frac{1}{2}} + 1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (3 \cdot \log x)^2 - 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Fazendo $\log x = t$, vem:

$$(3 \cdot t)^2 - 10t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{9} \text{ ou } t = 1. \text{ Daí,}$$

$$\log x = \frac{1}{9} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{10}$$

ou

$$\log x = 1 \Rightarrow x = 10.$$

Os dois valores encontrados satisfazem a condição de existência.

$$S = \{\sqrt[9]{10}, 10\}.$$

b) A condição de existência dos logaritmos é $0 < x \neq 1$.

Temos:

$$\begin{aligned} \log_x 5\sqrt{5} - 1,25 &= \log_x^2 \sqrt{5} \Rightarrow \log_x 5 + \log_x \sqrt{5} - 1,25 = (\log_x \sqrt{5})^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_x 5 + \log_x 5^{\frac{1}{2}} - 1,25 = \left(\log_x 5^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_x 5 + \frac{1}{2} \log_x 5 - 1,25 = \left(\frac{1}{2} \cdot \log_x 5\right)^2 \end{aligned}$$

Fazendo $\log_x 5 = t$, vem:

$$t + \frac{1}{2}t - 1,25 = \left(\frac{1}{2}t\right)^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t = 5 \text{ ou } t = 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_x 5 = 5 \text{ ou } \log_x 5 = 1) \Rightarrow (x^5 = 5 \text{ ou } x^1 = 5) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x = \sqrt[5]{5} \text{ ou } x = 5)$, que satisfazem a condição de existência.

$$S = \{\sqrt[5]{5}, 5\}.$$

c) A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$ (I).

Temos:

$$\frac{\log_8 \left(\frac{8}{x^2} \right)}{\log_8 x^2} = 3 \Rightarrow \frac{\log_8 8 - \log_8 x^2}{(\log_8 x)^2} = 3 \Rightarrow \frac{1 - 2 \log_8 x}{(\log_8 x)^2} = 3.$$

Fazendo $\log_8 x = t$, vem:

$$\frac{1 - 2t}{t^2} = 3 \Rightarrow 3t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = -1 \text{ ou } t = \frac{1}{3} \right), \text{ isto é,}$$

$$\left(\log_8 x = -1 \text{ ou } \log_8 x = \frac{1}{3} \right) \Rightarrow \left(x = 8^{-1} \text{ ou } x = 8^{\frac{1}{3}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \text{ ou } x = 2, \text{ que satisfazem (I).}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{8}, 2 \right\}.$$

272. Escrevendo $\log 5$ como $\log \left(\frac{10}{2} \right)$, temos:

$$\log 5 = \log \left(\frac{10}{2} \right) = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2.$$

A equação proposta é, então, $x^2 + x \cdot (1 - \log 2) - \log 2 = 0$.

Temos:

$$\Delta = (1 - \log 2)^2 + 4 \log 2 = (1 + \log 2)^2.$$

Dai,

$$x = \frac{-(1 - \log 2) \pm \sqrt{(1 + \log 2)^2}}{2} = \frac{(\log 2 - 1) \pm (1 + \log 2)}{2},$$

onde $x' = \log 2$ e $x'' = -1$.

$$S = \{\log 2, -1\}.$$

274. a) Devemos ter $x > 0$ e $y > 0$.

Aplicando a propriedade dos logaritmos na 2.^a equação, temos:

$$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 8 \Rightarrow \log_2 (x \cdot y) = \log_2 8 \Rightarrow xy = 8.$$

Então o sistema fica: $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$, cujas soluções são

$$(x = 4 \text{ e } y = 2) \text{ ou } (x = 2 \text{ e } y = 4).$$

$$S = \{(4, 2); (2, 4)\}.$$

b) Devemos ter $x > 0$ e $y > 0$.

Da 1.^a equação temos:

$$4^x - y = 8 \Rightarrow 2^{2x} - 2y = 2^3 \Rightarrow 2x - 2y = 3.$$

Da 2.^a equação, aplicando a propriedade dos logaritmos, vem:

$$\log_2 x - \log_2 y = 2 \Rightarrow \log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2^2 \Rightarrow x = 4y.$$

Então o sistema proposto fica reduzido a $\begin{cases} 2x - 2y = 3 \\ x = 4y \end{cases}$

cuja solução é $x = 2$ e $y = \frac{1}{2}$.

$$S = \left\{ \left(2, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

c) Devemos ter: $x > 0$ e $y > 0$.

Aplicando a propriedade dos logaritmos na 2ª equação, temos:

$$\log x + \log y = 2 \Rightarrow \log(x \cdot y) = 2 \Rightarrow x \cdot y = 10^2 = 100.$$

Então, o sistema proposto fica reduzido a $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ xy = 100 \end{cases}$

cujas soluções são ($x = 20$ e $y = 5$) ou ($x = 5$ ou $y = 20$).

$$S = \{(20, 5); (5, 20)\}.$$

d) Devemos ter: $x > 0$ e $y > 0$.

Aplicando as propriedades dos logaritmos na 2ª equação, vem:

$$2 \log x - \log y = 2 \log 2 + \log 3 \Rightarrow \log x^2 - \log y = \log 2^2 + \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{x^2}{y} \right) = \log (2^2 \cdot 3) \Rightarrow \frac{x^2}{y} = 12 \Rightarrow x^2 = 12y.$$

Assim, o sistema proposto fica reduzido a: $\begin{cases} 2x^2 + y = 75 \\ x^2 = 12y \end{cases}$

cujas soluções são ($x = 6$ e $y = 3$) ou ($x = -6$ e $y = 3$).

(Note que $x = -6$ não convém.)

$$S = \{(6, 3)\}.$$

e) Devemos ter: $x > 0$ e $y > 0$. Da 1ª equação vem:

$$2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 512 \Rightarrow 2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 2^9 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9.$$

Da 2ª equação, aplicando as propriedades dos logaritmos, vem:

$$\log \sqrt{xy} = 1 + \log 2 \Rightarrow \log \sqrt{xy} = \log 10 + \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \sqrt{xy} = \log (10 \cdot 2) \Rightarrow \sqrt{xy} = 20.$$

Assim, o sistema proposto fica reduzido a $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \\ \sqrt{xy} = 20 \end{cases}$, cujas soluções

são ($x = 25$ e $y = 16$) ou ($x = 16$ e $y = 25$).

$$S = \{(25, 16); (16, 25)\}.$$

275. Devemos ter $x + y > 0$, $x - y > 0$, $x > 0$ e $y > 0$ (I).

Da 1ª equação segue que:

$$2^{\frac{\log_5(x+y)}{2}} = 5^{\log_5(x-y)} \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \right]^{\log_5(x+y)} = 5^{\log_5(x-y)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{\log_5(x+y)} \right]^{-1} = 5^{\log_5(x-y)} \Rightarrow (x+y)^{-1} = x-y \Rightarrow x^2 - y^2 = 1.$$

Da 2.^a equação vem:

$$\log_2 x + \log_2 y = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2(x \cdot y) = \frac{1}{2} \Rightarrow xy = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Assim, o sistema proposto fica reduzido a $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ xy = \sqrt{2} \end{cases}$

cuja única solução é $x = \sqrt{2}$ e $y = 1$, pois deve satisfazer (I).

$$S = \{(\sqrt{2}, 1)\}.$$

277. a) Devemos ter $x > 0$ e $y > 0$.

Fazendo $\log x = a$ e $\log y = b$, vem: $\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ 4a + 3b = 17 \end{cases}$

que resolvido fornece $a = 2$ e $b = 3$, isto é,

$$(\log x = 2 \text{ e } \log y = 3) \Rightarrow (x = 10^2 \text{ e } y = 10^3).$$

$$S = \{(100, 1\,000)\}.$$

b) Devemos ter $x > 0$ e $y > 0$.

Fazendo $\log_2 x = a$ e $\log_2 y = b$, vem: $\begin{cases} 2a + 3b = 27 \\ 5a - 2b = 1 \end{cases}$

que resolvido dá $a = 3$ e $b = 7$. Então:

$$(\log_2 x = 3 \text{ e } \log_2 y = 7) \Rightarrow (x = 2^3 = 8 \text{ e } y = 2^7 = 128).$$

$$S = \{(8, 128)\}.$$

278. Devemos ter $x > 0$ e $y > 0$.

Aplicando propriedades na 1.^a equação, temos:

$$\log_2(xy) \cdot \log_2\left(\frac{x}{y}\right) = -3 \Rightarrow (\log_2 x + \log_2 y) \cdot (\log_2 x - \log_2 y) = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2 x)^2 - (\log_2 y)^2 = -3.$$

Então, o sistema proposto fica reduzido a: $\begin{cases} (\log_2 x)^2 - (\log_2 y)^2 = -3 \\ (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = 5 \end{cases}$

Somando membro a membro as equações acima, vem:

$$(\log_2 x)^2 = 1 \Rightarrow (\log_2 x = -1 \text{ ou } \log_2 x = 1) \Rightarrow \left(x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 2\right).$$

- Se $x = \frac{1}{2}$, na 1.^a equação, segue que:

$$(\log_2 y)^2 = 4 \Rightarrow (\log_2 y = -2 \text{ ou } \log_2 y = 2) \Rightarrow$$

$$\left(y = \frac{1}{4} \text{ ou } y = 4\right).$$

- Se $x = 2$, na 1.^a equação, temos novamente $y = \frac{1}{4}$ ou $y = 4$.

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right); \left(\frac{1}{2}, 4\right); \left(2, \frac{1}{4}\right); (2, 4) \right\}.$$

280. a) Aplicando logaritmo de base 3 a ambos os membros, temos:

$$\begin{aligned} 9 \cdot x^{\log_3 x} &= x^3 \Rightarrow \log_3(9 \cdot x^{\log_3 x}) = \log_3 x^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_3 9 + \log_3 x^{\log_3 x} = 3 \log_3 x \Rightarrow 2 + (\log_3 x) \cdot (\log_3 x) = 3 \log_3 x. \end{aligned}$$

Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$$\begin{aligned} 2 + t^2 &= 3t \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow (\log_3 x = 1 \text{ ou } \log_3 x = 2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x = 3 \text{ ou } x = 9), \text{ que satisfazem a condição } x > 0. \end{aligned}$$

$$S = \{3, 9\}.$$

b) Aplicando logaritmo decimal a ambos os membros, temos:

$$\begin{aligned} x^{\log x} &= 100 \cdot x \Rightarrow \log(x^{\log x}) = \log(100 \cdot x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log x) \cdot (\log x) = \log 100 + \log x. \end{aligned}$$

Fazendo $\log x = t$, vem:

$$\begin{aligned} t \cdot t &= 2 + t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log x = -1 \text{ ou } \log x = 2) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{10} \text{ ou } x = 100\right), \text{ que satisfazem} \\ &\text{a condição } x > 0. \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{10}, 100 \right\}.$$

c) A condição de existência do logaritmo é $0 < x \neq 1$.

Aplicando logaritmo de base x a ambos os membros, temos:

$$\begin{aligned} 16^{\log_x 2} &= 8x \Rightarrow \log_x(16^{\log_x 2}) = \log_x(8 \cdot x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log_x 2) \cdot (\log_x 16) = \log_x 8 + \log_x x \Rightarrow (\log_x 2) \cdot (\log_x 2^4) = \log_x 2^3 + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log_x 2) \cdot 4 \cdot \log_x 2 = 3 \cdot \log_x 2 + 1. \end{aligned}$$

Fazendo $\log_x 2 = t$, temos:

$$\begin{aligned} t \cdot 4t &= 3t + 1 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{4} \text{ ou } t = 1\right) \Rightarrow \left(\log_x 2 = -\frac{1}{4} \text{ ou } \log_x 2 = 1\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(x^{-\frac{1}{4}} = 2 \text{ ou } x = 2\right) \Rightarrow (x = 16^{-1} \text{ ou } x = 2). \end{aligned}$$

$$S = \left\{ 2, \frac{1}{16} \right\}.$$

d) A condição de existência do logaritmo é: $0 < x \neq 1$.

Aplicando logaritmo de base \sqrt{x} a ambos os membros, temos:

$$\begin{aligned} 9^{\log_{\sqrt{x}} 3} &= 27x \Rightarrow \log_{\sqrt{x}}(9^{\log_{\sqrt{x}} 3}) = \log_{\sqrt{x}}(27x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log_{\sqrt{x}} 3) \cdot (\log_{\sqrt{x}} 9) = \log_{\sqrt{x}} 27 + \log_{\sqrt{x}} x \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log_{\sqrt{x}} 3) \cdot (2 \log_{\sqrt{x}} 3) = 3 \log_{\sqrt{x}} 3 + 2. \end{aligned}$$

Fazendo $\log_{\sqrt{x}} 3 = t$, vem:

$$\begin{aligned} 2t^2 &= 3t + 2 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = 2\right) \Rightarrow \left(\log_{\sqrt{x}} 3 = -\frac{1}{2} \text{ ou } \log_{\sqrt{x}} 3 = 2\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(x = \frac{1}{81} \text{ ou } x = 3\right). \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{81}, 3 \right\}.$$

e) A condição de existência do logaritmo é: $0 < x \neq 1$.

Temos:

$$3^{2 \log_x 3} = x^{\log_x 3x} \Rightarrow 3^{\log_x 3^2} = 3x$$

Aplicando logaritmo de base x a ambos os membros, vem:

$$3^{\log_x 9} = 3x \Rightarrow \log_x (3^{\log_x 9}) = \log_x (3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_x 9) \cdot (\log_x 3) = \log_x 3 + \log_x x \Rightarrow 2 \log_x 3 \cdot \log_x 3 = \log_x 3 + 1.$$

Fazendo $\log_x 3 = t$, vem:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = 1 \right) \Rightarrow$$

$$\left(\log_x 3 = -\frac{1}{2} \text{ ou } \log_x 3 = 1 \right) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{9} \text{ ou } x = 3 \right).$$

$$S = \left\{ \frac{1}{9}, 3 \right\}.$$

281. A condição de existência dos logaritmos é $0 < x \neq 1$ e $x \neq 3$ (I).

Notemos inicialmente que $\log_x \sqrt{x} = \frac{1}{2}$. Então, a equação proposta pode ser escrita como:

$$2^{\log_x (x^2 - 6x + 9)} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{\log_x (x-3)^2} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log_x (x-3)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = x^0 \Rightarrow (x-3)^2 = 1 \Rightarrow (x-3 = -1 \text{ ou } x-3 = 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x = 2 \text{ ou } x = 4), \text{ que satisfazem (I).}$$

$$S = \{2, 4\}.$$

282. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$ (I).

Temos:

$$\log(x^{\log x}) = 1 \Rightarrow (\log x) \cdot (\log x) = 1 \Rightarrow (\log x)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log x = -1 \text{ ou } \log x = 1) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{10} \text{ ou } x = 10 \right), \text{ que satisfazem (I).}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{10}, 10 \right\}.$$

b) A condição de existência do logaritmo é $0 < x \neq 1$ (I).

Temos:

$$x^{\log x - 1} = 100 \Rightarrow \log_x 100 = \log x - 1.$$

Escrevendo $\log_x 100$ na base 10, temos:

$$\frac{\log 100}{\log x} = \log x - 1 \Rightarrow \frac{2}{\log x} = \log x - 1.$$

Fazendo $\log x = t$, vem:

$$\frac{2}{t} = t - 1 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log x = -1 \text{ ou } \log x = 2) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{10} \text{ ou } x = 100 \right), \text{ que satisfazem (I).}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{10}, 100 \right\}.$$

c) Temos:

$$\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10 \Rightarrow x^{\log \sqrt{x}} = 100 \Rightarrow \log_x 100 = \log \sqrt{x} \Rightarrow \log_x 100 = \frac{1}{2} \log x.$$

Escrevendo $\log_x 100$ em base 10, vem:

$$\frac{\log 100}{\log x} = \frac{1}{2} \log x \Rightarrow \frac{2}{\log x} = \frac{\log x}{2} \Rightarrow (\log x)^2 = 4 \Rightarrow (\log x = -2 \text{ ou } \log x = 2) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{100} \text{ ou } x = 100 \right).$$

Verificando $x = \frac{1}{100}$, temos:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^{\log \sqrt{\frac{1}{100}}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^{-1}} = 10.$$

Verificando $x = 100$, temos:

$$\sqrt{100^{\log \sqrt{100}}} = \sqrt{100^1} = 10.$$

$$S = \left\{ \frac{1}{100}, 100 \right\}.$$

283. a) A condição de existência do logaritmo é: $0 < x \neq 1$.

Temos:

$$x^{3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x} = 100 \cdot \sqrt[3]{10} \Rightarrow x^{3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x} = 10^{\frac{7}{3}} \Rightarrow \log_x 10^{\frac{7}{3}} = 3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x \Rightarrow \frac{7}{3} \log_x 10 = 3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x.$$

Escrevendo $\log_x 10$ em base 10, vem:

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{\log 10}{\log x} = 3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x \Rightarrow \frac{7}{3 \log x} = 3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x.$$

Fazendo $\log x = t$, vem:

$$\frac{7}{3t} = 3t^2 - \frac{2t}{3} \Rightarrow 9t^3 - 2t^2 - 7 = 0 \Rightarrow 7t^3 + 2t^3 - 2t^2 - 7 = 0.$$

Fatorando por agrupamento, vem: $7(t-1)(t^2+t+1) + 2t^2(t-1) = 0 \Leftrightarrow (t-1)[7t^2+7t+7+2t^2] = 0 \Rightarrow (t-1) \cdot (9t^2+7t+7) = 0$, donde $t-1=0$ ou $9t^2+7t+7=0 \Rightarrow t=1$.

$$\Delta < 0 \\ (t \notin \mathbb{R})$$

Daí, $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$, que é solução, pois satisfaz (I).

$$S = \{10\}.$$

b) Notemos inicialmente que: $\log_{2\sqrt{2}} 4 = y \Rightarrow (2\sqrt{2})^y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$.

Então:

$$x^{\log_3 x - \log_3 x^3} = 3^{-3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + 8} \Rightarrow x^{(\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x} = 3^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x 3^4 = (\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x \Rightarrow 4 \log_x 3 = (\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x$$

Escrevendo $\log_x 3$ em base 3, vem:

$$4 \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 x} = (\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x.$$

Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$$4 \cdot \frac{1}{t} = t^3 - 3t \Rightarrow t^4 - 3t^2 - 4 = 0 \Rightarrow (t = -2 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x = -2 \text{ ou } \log_3 x = 2) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{9} \text{ ou } x = 9 \right).$$

$$S = \left\{ \frac{1}{9}, 9 \right\}.$$

c) Devemos ter: $0 < x \neq 1$.

$$x^{\log^2 x - 3 \log x + 1} = 1000 \Rightarrow \log_x 1000 = \log^2 x - 3 \log x + 1.$$

Escrevendo $\log_x 1000$ em base 10, temos:

$$\frac{\log 1000}{\log x} = \log^2 x - 3 \log x + 1 \Rightarrow \frac{3}{\log x} = (\log x)^2 - 3 \log x + 1.$$

Fazendo $\log x = t$, temos:

$$\frac{3}{t} = t^2 - 3t + 1 \Rightarrow t^3 - 3t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow t^2(t - 3) + (t - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t - 3)(t^2 + 1) = 0 \Rightarrow (t - 3 = 0 \text{ ou } \underbrace{t^2 + 1 = 0}) \Rightarrow t = 3.$$

$$t \notin \mathbb{R}$$

Daí, $\log x = 3 \Rightarrow x = 1000$.

$$S = \{1000\}.$$

$$284. \log_x (2 \cdot x^{x-2} - 1) = 2x - 4 \Rightarrow 2 \cdot x^{x-2} - 1 = x^{2x-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x^{x-2} - 1 = x^{2 \cdot (x-2)}.$$

Fazendo $x^{x-2} = t$, vem:

$$2 \cdot t - 1 = t^2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 1, \text{ isto é, } x^{x-2} = 1.$$

Como $0 < x \neq 1$, temos: $x^{x-2} = 1 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

$$S = \{2\}.$$

285. Devemos ter: $0 < x \neq 1$.

$$3 + \log_x \left(\frac{x^{4x-6} + 1}{2} \right) = 2x \Rightarrow \log_x \left(\frac{x^{4x-6} + 1}{2} \right) = 2x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^{4x-6} + 1}{2} = x^{2x-3} \Rightarrow \frac{x^{2 \cdot (2x-3)} + 1}{2} = x^{2x-3}$$

Fazendo $x^{2x-3} = t$, vem:

$$\frac{t^2 + 1}{2} = t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x^{2x-3} = 1.$$

Como $0 < x \neq 1$, temos:

$$x^{2x-3} = 1 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

286. a) Devemos ter: $x > 0$ e $y > 0$.

Aplicando a propriedade dos logaritmos à 2.^a equação, temos:

$$\log_2 x - \log_2 y = 2 \Rightarrow \log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2^2 \Rightarrow x = 4y.$$

$$\text{Então, o sistema proposto fica reduzido a } \begin{cases} x \cdot y = 16 \\ x = 4y \end{cases}$$

onde $y = -2$ (não convém) ou $y = 2$ e $x = 8$.

$$S = \{(8, 2)\}.$$

b) Devemos ter $0 < x \neq 1$ e $y > 0$.

Da 2.^a equação temos:

$$x^{\log_2 y} = 64 \Rightarrow \log_x 64 = \log_2 y \quad (\text{I}).$$

$$\text{Da 1.^a equação vem } y = \frac{32}{x} \quad (\text{II}).$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\log_x 64 = \log_2 \left(\frac{32}{x} \right) \Rightarrow \log_x 64 = \log_2 32 - \log_2 x.$$

Passando $\log_x 64$ para a base 2, vem:

$$\frac{\log_2 64}{\log_2 x} = 5 - \log_2 x.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$\frac{6}{t} = 5 - t \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2 x = 2 \text{ ou } \log_2 x = 3) \Rightarrow (x = 4 \text{ ou } x = 8).$$

Se $x = 4$, de (II), segue que $y = 8$.

Se $x = 8$, de (II), segue que $y = 4$.

$$S = \{(4, 8); (8, 4)\}.$$

c) Devemos ter: $0 < x \neq 1$ e $y > 0$.

Da 1.^a equação temos:

$$\log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \Rightarrow \log_5 x + y = 7.$$

Da 2.^a equação temos:

$$x^y = 5^{12} \Rightarrow \log_5 5^{12} = y.$$

Então, o sistema proposto fica reduzido a: $\begin{cases} \log_5 x + y = 7 & (\text{I}) \\ y = \log_x 5^{12} & (\text{II}) \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\log_5 x + \log_x 5^{12} = 7 \Rightarrow \log_5 x + 12 \log_x 5 = 7.$$

Escrevendo $\log_x 5$ em base 5, vem:

$$\log_5 x + 12 \cdot \frac{\log_5 5}{\log_5 x} = 7.$$

Fazendo $\log_5 x = t$, vem:

$$t + \frac{12}{t} = 7 \Rightarrow t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ ou } t = 4,$$

isto é,

$$t = 3 \Leftrightarrow \log_5 x = 3 \Rightarrow x = 5^3. \text{ Em (II): } y = \log_{5^3} 5^{12} \Rightarrow y = 4.$$

$$t = 4 \Leftrightarrow \log_5 x = 4 \Rightarrow x = 5^4. \text{ Em (II): } y = \log_{5^4} 5^{12} \Rightarrow y = 3.$$

$$S = \{(125, 4); (625, 3)\}.$$

288. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > 6$ (I).

Escrevendo $\log_3(x - 6)$ em base 3 e aplicando propriedades dos logaritmos, vem:

$$\log_3(x + 2) - \log_{\frac{1}{3}}(x - 6) = \log_3(2x - 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x + 2) - \frac{\log_3(x - 6)}{\log_3 \frac{1}{3}} = \log_3(2x - 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x + 2) + \log_3(x - 6) = \log_3(2x - 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3[(x + 2)(x - 6)] = \log_3(2x - 5) \Rightarrow (x + 2)(x - 6) = 2x - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow (x = -1 \text{ ou } x = 7).$$

Apenas $x = 7$ satisfaz (I).

$$S = \{7\}.$$

b) A condição de existência dos logaritmos é $1 < x < 5$ (I).

Aplicando propriedades e escrevendo os logaritmos em base 2, vem:

$$\log_2(x + 2) + \log_{\frac{1}{2}}(5 - x) + \operatorname{colog}_{\frac{1}{2}}(x - 1) = \log_2(8 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(x + 2) + \frac{\log_2(5 - x)}{\log_2 \frac{1}{2}} - \frac{\log_2(x - 1)}{\log_2 \frac{1}{2}} = \log_2(8 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(x + 2) - \log_2(5 - x) + \log_2(x - 1) = \log_2(8 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 \left[\frac{(x + 2)(x - 1)}{5 - x} \right] = \log_2(8 - x) \Rightarrow \frac{(x + 2)(x - 1)}{5 - x} = 8 - x \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 3$, que é solução, pois satisfaz (I).

$$S = \{3\}.$$

c) A condição de existência dos logaritmos é $x > 4$ (I).

Aplicando propriedades e escrevendo os logaritmos em base 3, vem:

$$\begin{aligned} \log_3(x^2 - 2x + 2) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) &= \log_3(x - 4) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3(x^2 - 2x + 2) + \frac{\log_3(2x + 1)}{\log_3 \frac{1}{3}} &= \log_3(x - 4) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3(x^2 - 2x + 2) - \log_3(2x + 1) &= \log_3(x - 4) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x + 1}\right) &= \log_3(x - 4) \Rightarrow \\ \frac{x^2 - 2x + 2}{2x + 1} &= x - 4 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 6. \end{aligned}$$

Apenas $x = 6$ satisfaz (I).

$$S = \{6\}.$$

290. a) Devemos ter $x > 0$.

Escrevendo $\log_9 x$ em base 3, vem:

$$\begin{aligned} \log_3^2 x - 5 \log_9 x + 1 &= 0 \Rightarrow (\log_3 x)^2 - 5 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 9} + 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\log_3 x)^2 - \frac{5}{2} \log_3 x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo $\log_3 x = t$, temos:

$$\begin{aligned} t^2 - \frac{5}{2}t + 1 &= 0 \Rightarrow \left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 2\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\log_3 x = \frac{1}{2} \text{ ou } \log_3 x = 2\right) &\Rightarrow (x = \sqrt{3} \text{ ou } x = 9). \end{aligned}$$

$$S = \{\sqrt{3}, 9\}.$$

b) Devemos ter $x > 0$.

Aplicando propriedades dos logaritmos e passando-os para a base 2, vem:

$$\begin{aligned} \log_2^2 x - \log_8 x^8 &= 1 \Rightarrow (\log_2 x)^2 - 8 \cdot \log_8 x = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\log_2 x)^2 - 8 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 8} &= 1 \Rightarrow (\log_2 x)^2 - \frac{8}{3} \log_2 x = 1. \end{aligned}$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$\begin{aligned} t^2 - \frac{8}{3}t - 1 &= 0 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{3} \text{ ou } t = 3\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\log_2 x = -\frac{1}{3} \text{ ou } \log_2 x = 3\right) &\Rightarrow \left(x = 2^{-\frac{1}{3}} \text{ ou } x = 8\right). \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 8 \right\}.$$

c) Devemos ter $x > 0$.

Aplicando propriedades dos logaritmos e escrevendo-os em base 3, vem:

$$\log_3^2 x = 2 + \log_9 x^2 \Rightarrow (\log_3 x)^2 = 2 + 2 \log_9 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x)^2 = 2 + 2 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 9} \Rightarrow (\log_3 x)^2 = 2 + 2 \cdot \frac{\log_3 x}{2}.$$

Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$$t^2 = 2 + t \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow (\log_3 x = -1 \text{ ou } \log_3 x = 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = 9 \right).$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3}, 9 \right\}.$$

- 291.** a) Aplicando propriedades dos logaritmos e passando-os para a base 2, podemos escrever:

$$\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \cdot \log_4 \sqrt{\frac{2}{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{4 \cdot \log_2 x} + 4 \cdot \log_4 \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 2 \log_4 \left(\frac{2}{x} \right) = 2 \Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 2 \cdot [\log_4 2 - \log_4 x] = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 2 \left(\frac{1}{2} - \log_4 x \right) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 1 - 2 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 1 - \log_2 x = 2$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$\sqrt{4t} + 1 - t = 2 \Rightarrow \sqrt{4t} = 1 + t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$, que de fato é solução, por verificação.

$$S = \{2\}.$$

- b) Escrevendo $\log_4 x$ em base 2, vem:

$$\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \log_4 x - 2} = 4 \Rightarrow \sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} - 2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{2 \cdot \log_2 x - 2} = 4.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$\sqrt{1 + t} + \sqrt{2t - 2} = 4 \Rightarrow (t = 99 \text{ ou } t = 3).$$

Verificando $t = 99$: $\sqrt{100} + \sqrt{196} = 4$ (F).

Verificando $t = 3$: $\sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$ (V).

Assim, $t = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8$, que é de fato solução, pois:

$$\sqrt{1 + \log_2 8} + \sqrt{4 \cdot \log_4 8 - 2} = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4 \text{ (V)!}$$

$$S = \{8\}.$$

$$\text{292. } \frac{1 + \log_2(x - 4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3})} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \log_2(x - 4) = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 2 + \log_2(x - 4) = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}).$$

Aplicando a propriedade dos logaritmos e escrevendo-os em base 2, vem:

$$\log_2[2 \cdot (x - 4)] = \frac{\log_2(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})}{\log_2 \sqrt{2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2(2x - 8) = 2 \log_2(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2(2x - 8) = \log_2(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x - 8 = (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})^2 \Rightarrow (x = -5 \text{ ou } x = 5).$$

Como $x = -5$ não convém, a única solução é $x = 5$.

$$S = \{5\}.$$

- 293.** a) Devemos ter $y > 0$ e $x < y$.

Da 1.^a equação, vem:

$$\log_{\frac{1}{2}}(y - x) + \log_2\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \Rightarrow \frac{\log_2(y - x)}{\log_2 \frac{1}{2}} + \log_2\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\log_2(y - x) + \log_2\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \Rightarrow \log_2\left(\frac{\frac{1}{y}}{y - x}\right) = -2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{y}}{y - x} = 2^{-2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{y^2 - 4}{y} \quad (\text{I}).$$

Substituindo esse valor de x na 2.^a equação, vem: $\left(\frac{y^2 - 4}{y}\right)^2 + y^2 = 25$.

Fazendo $y^2 = t$, segue que:

$$\frac{(t - 4)^2}{t} + t = 25 \Rightarrow 2t^2 - 33t + 16 = 0 \Rightarrow \left(t = 16 \text{ ou } t = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(y^2 = 16 \text{ ou } y^2 = \frac{1}{2}\right) \stackrel{y > 0}{\Rightarrow} y = 4 \text{ ou } y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Em (I), temos que:

$$y = 4 \Rightarrow x = \frac{4^2 - 4}{4} = 3 \text{ e } y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

$$S = \left\{(3, 4); \left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

- b) Devemos ter $y > 2$ e $x^2 - 2y^2 + 10y - 7 > 0$ (I).

Da 1.^a equação vem:

$$\log_3(x^2 + 1) - \log_3(y - 2) = 0 \Rightarrow \frac{\log_3(x^2 + 1)}{\log_3 9} = \log_3(y - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x^2 + 1) = 2 \log_3(y - 2) \Rightarrow \log_3(x^2 + 1) = \log_3(y - 2)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 1 = (y - 2)^2 \Rightarrow x^2 = y^2 - 4y + 3 \text{ (II).}$$

Da 2.^a equação vem:

$$\log_2(x^2 - 2y^2 + 10y - 7) = 2 \Rightarrow x^2 - 2y^2 + 10y - 7 = 2^2.$$

$$\text{Por (II): } (y^2 - 4y + 3) - 2y^2 + 10y - 7 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 2, \text{ que não convém, pois não satisfaz (I), ou } y = 4.$$

Substituindo $y = 4$ em (II), temos:

$$x^2 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}.$$

$$S = \{(-\sqrt{3}, 4); (\sqrt{3}, 4)\}.$$

c) Devemos ter $x + y > 0$ e $x - y > 0$ (I).

Da 1.^a equação temos que:

$$\log_9(x^2 + 2) + \log_{81}(y^2 + 9) = 2 \Rightarrow \log_9(x^2 + 2) + \frac{\log_9(y^2 + 9)}{\log_9 81} = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_9(x^2 + 2) + \frac{1}{2} \log_9(y^2 + 9) = 2 \Rightarrow \log_9[(x^2 + 2) \cdot (y^2 + 9)^{\frac{1}{2}}] = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x^2 + 2) \cdot (y^2 + 9)^{\frac{1}{2}} = 81 \text{ (II).}$$

Da 2.^a equação temos que:

$$2 \cdot \log_4(x + y) = \log_2(x - y) \Rightarrow 2 \cdot \frac{\log_2(x + y)}{\log_2 4} = \log_2(x - y) \Rightarrow \\ \Rightarrow x + y = x - y \Rightarrow y = 0.$$

Substituindo $y = 0$ em (II), vem:

$$(x^2 + 2) \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 81 \Rightarrow x = -5 \text{ ou } x = 5.$$

$x = -5$ e $y = 0$ não satisfazem (I).

$x = 5$ e $y = 0$ satisfazem (I).

$$S = \{(5, 0)\}.$$

d) Da 1.^a equação vem:

$$\log_3(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} y) = 1 \Rightarrow \log_3(\log_2 x) + \frac{\log_3(\log_{\frac{1}{2}} y)}{\log_3 \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3(\log_2 x) - \log_3(\log_{\frac{1}{2}} y) = 1 \Rightarrow \log_3\left(\frac{\log_2 x}{\log_{\frac{1}{2}} y}\right) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_{\frac{1}{2}} y} = 3 \Rightarrow \log_2 x = 3 \log_{\frac{1}{2}} y \text{ (I).}$$

Da 2.^a equação, aplicando logaritmo de base 2 a ambos os membros, vem:

$$xy^2 = 4 \Rightarrow \log_2(x \cdot y^2) = \log_2 4 \Rightarrow \log_2 x + \log_2 y^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x + 2 \log_2 y = 2.$$

Por (I), podemos escrever:

$$3 \cdot \log_{\frac{1}{2}} y + 2 \log_2 y = 2 \Rightarrow 3 \cdot \frac{\log_2 y}{\log_2 \frac{1}{2}} + 2 \log_2 y = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -3 \log_2 y + 2 \log_2 y = 2 \Rightarrow \log_2 y = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}.$$

Substituindo $y = \frac{1}{4}$ em (I) segue que:

$$\log_2 x = 3 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \Rightarrow \log_2 x = 6 \Rightarrow x = 2^6 = 64.$$

$$S = \left\{ \left(64, \frac{1}{4} \right) \right\}.$$

e) Devemos ter: $x > 0$ e $y > 0$.

Escrevendo os logaritmos das duas equações em base 2, vem:

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = a \\ \log_4 x - \log_8 y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - \frac{\log_2 y}{\log_2 4} = a \\ \frac{\log_2 x}{\log_2 4} - \frac{\log_2 y}{\log_2 8} = b \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 y = a \quad (*) \\ \frac{1}{2} \log_2 x - \frac{1}{3} \log_2 y = b \end{cases}$$

Somando à 2.^a equação a 1.^a multiplicada por $\left(-\frac{1}{2}\right)$, vem:

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \log_2 y = -\frac{a}{2} + b \Rightarrow \frac{1}{12} \log_2 y = \frac{a - 2b}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 y = 6a - 12b \Rightarrow y = 2^{6a - 12b}.$$

Substituindo $y = 2^{6a - 12b}$ em (*), segue que:

$$\log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 2^{6a - 12b} = a \Rightarrow \log_2 x - \frac{1}{2} \cdot (6a - 12b) = a \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 x = 4a - 6b \Rightarrow x = 2^{4a - 6b}.$$

$$S = \{(2^{4a - 6b}, 2^{6a - 12b})\}.$$

295. Escrevendo $\log_{16}(x - 3)$ em base 4, vem:

$$\log_4(x - 3) - \log_{16}(x - 3) = 1 \Rightarrow \log_4(x - 3) - \frac{\log_4(x - 3)}{\log_4 16} = 1.$$

Fazendo $\log_4(x - 3) = t$, vem:

$$t - \frac{t}{2} = 1 \Rightarrow t = 2, \text{ isto é, } \log_4(x - 3) = 2 \Rightarrow x - 3 = 4^2 \Rightarrow x = 19,$$

que é solução, pois satisfaz a condição $x > 3$.

$$S = \{19\}.$$

- 296.** A equação $x^2 - x \cdot (\log_b a) + 2 \log_a b = 0$ tem duas raízes reais e iguais se, e somente se, $\Delta = 0$, isto é,

$$(-\log_b a)^2 - 4 \cdot 2 \log_a b = 0 \Rightarrow (\log_b a)^2 - 8 \log_a b = 0.$$

$$\text{Lembrando que } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ temos: } (\log_b a)^2 - 8 \frac{1}{\log_b a} = 0.$$

Fazendo $\log_b a = t$, vem:

$$t^2 - \frac{8}{t} = 0 \Rightarrow t = 2, \text{ isto é, } \log_b a = 2 \Rightarrow a = b^2.$$

- 297.** A condição de existência dessa equação é: $0 < x \neq 1$.

Notemos inicialmente que:

$$\log_{\sqrt{x}} x^2 = y \Rightarrow (\sqrt{x})^y = x^2 \Rightarrow y = 4 \text{ e } \log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}.$$

Então, temos:

$$\log_2 x = \log_{\sqrt{x}} x^2 + \log_x 2 \Rightarrow \log_2 x = 4 + \frac{1}{\log_2 x}.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, temos:

$$t = 4 + \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - 4t - 1 = 0 \Rightarrow t = 2 - \sqrt{5} \text{ ou } t = 2 + \sqrt{5},$$

$$\text{isto é, } \log_2 x = 2 - \sqrt{5} \text{ ou } \log_2 x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = 2^{2-\sqrt{5}} \text{ ou } x = 2^{2+\sqrt{5}}.$$

$$S = \{2^{2-\sqrt{5}}, 2^{2+\sqrt{5}}\}.$$

- 298.** Como sabemos, $\log_{a^2} x = \frac{1}{\log_x a^2} = \frac{1}{2 \log_x a}$.

Escrevendo $\log_{x^2} a$ em base x , vem:

$$\log_{x^2} a = \frac{\log_x a}{\log_x x^2} = \frac{\log_x a}{2}.$$

Então, temos:

$$\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1 \Rightarrow \frac{1}{2 \log_x a} + \frac{\log_x a}{2} = 1.$$

Fazendo $\log_x a = t$, temos:

$$\frac{1}{2t} + \frac{t}{2} = 1 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x a = 1 \Rightarrow x = a.$$

- 299.** A condição de existência dessa equação é $0 < x \neq 1$ (I).

Expressando $\log_{(x+1)} x$ em base x , temos:

$$\log_x (x+1) = \log_{(x+1)} x \Rightarrow \log_x (x+1) = \frac{\log_x x}{\log_x (x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x (x+1) = \frac{1}{\log_x (x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_x(x+1))^2 = 1 \Rightarrow \log_x(x+1) = -1 \text{ ou } \log_x(x+1) = 1.$$

Se $\log_x(x+1) = -1 \Rightarrow x^{-1} = x+1 \Rightarrow x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, que não convém,

pois não satisfaz (I), ou $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (satisfaz (I)).

Se $\log_x(x+1) = 1 \Rightarrow x+1 = x \Rightarrow 0 = -1$, absurdo!

$$S = \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

300. a) Devemos ter: $0 < x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \log_2 x = \log_x 2 &\Rightarrow \log_2 x = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} \Rightarrow (\log_2 x)^2 = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log_2 x = -1 \text{ ou } \log_2 x = 1) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 2 \right). \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}.$$

b) Devemos ter: $0 < x \neq 1$.

$$\log_3 x = 1 + \log_x 9 \Rightarrow \log_3 x = 1 + \frac{\log_3 9}{\log_3 x}.$$

Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$$t = 1 + \frac{2}{t} \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x = -1 \text{ ou } \log_3 x = 2) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = 9 \right).$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3}, 9 \right\}.$$

c) Devemos ter: $0 < x \neq 1$.

$$\log_2 x - 8 \log_{x^2} 2 = 3 \Rightarrow \log_2 x - 8 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 x^2} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x - \frac{8}{2 \log_2 x} = 3.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$t - \frac{8}{2t} = 3 \Rightarrow 2t^2 - 6t - 8 = 0 \Rightarrow (t = 4 \text{ ou } t = -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2 x = 4 \text{ ou } \log_2 x = -1) \Rightarrow \left(x = 16 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \right).$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, 16 \right\}.$$

d) Devemos ter: $0 < x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{x}} 2 + 4 \cdot 2 \log_4 x + 9 = 0 &\Rightarrow \frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{x}} + 8 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + 9 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\log_2 x^2}} + 4 \log_2 x + 9 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \log_2 x} + 4 \log_2 x + 9 = 0. \end{aligned}$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$\begin{aligned} \frac{2}{t} + 4t + 9 = 0 &\Rightarrow 4t^2 + 9t + 2 = 0 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{4} \text{ ou } t = -2 \right) \Rightarrow \\ \left(\log_2 x = -\frac{1}{4} \text{ ou } \log_2 x = -2 \right) &\Rightarrow \left(x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \text{ ou } x = \frac{1}{4} \right). \\ S &= \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{4} \right\}. \end{aligned}$$

301. a) Notemos inicialmente que:

$$\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} = y \Rightarrow (\sqrt{5})^y = 5\sqrt{5} \Rightarrow 5^{\frac{y}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = 3.$$

Então:

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} &= -\sqrt{6} \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + 3} = -\sqrt{6} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\frac{\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}}{\log_{\sqrt{5}} x} + 3} &= -\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Fazendo $\log_{\sqrt{5}} x = t$, vem:

$$t \cdot \sqrt{\frac{3}{t} + 3} = -\sqrt{6} \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = -2).$$

$t = 1$ não é solução da equação irracional, pois $1 \cdot \sqrt{\frac{3}{1} + 3} = -\sqrt{6}$. (F)

$t = -2$ é solução da equação irracional, pois $(-2)\sqrt{-\frac{3}{2} + 3} = -\sqrt{6}$. (V)

Assim, $t = -2 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} x = -2 \Rightarrow x = (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{5}$.

$$S = \left\{ \frac{1}{5} \right\}.$$

b) Escrevendo $\log_x \sqrt{27}$ em base 3, vem:

$$\sqrt{1 + \log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{\log_3 \sqrt{27}}{\log_3 x}} \cdot \log_3 x + 1 = 0.$$

Fazendo $\log_3 x = t$ e lembrando que $\log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$, vem:

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2t}} \cdot t + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + \frac{3}{2}t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = -2 \text{ ou } t = \frac{1}{2} \right).$$

$t = -2$ é solução da equação irracional, pois: $\sqrt{1 + \frac{3}{2(-2)}} \cdot (-2) + 1 = 0$. (V)

$t = \frac{1}{2}$ não é solução da equação irracional, pois: $\sqrt{1 + \frac{3}{2 \cdot \frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0$. (F)

Dai, $t = -2 \Rightarrow \log_3 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$.

$$S = \left\{ \frac{1}{9} \right\}.$$

302. Devemos ter $0 < x < 10$ e $x \neq 1$ (I).

$$\begin{aligned} 1 + 2 \log_x 2 \cdot \log_4 (10 - x) &= \frac{2}{\log_4 x} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + 2 \cdot \frac{\log_4 2}{\log_4 x} \cdot \log_4 (10 - x) &= \frac{2}{\log_4 x}. \end{aligned}$$

Fazendo $\log_4 x = a$ e $\log_4 (10 - x) = b$ (II), temos:

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot b = \frac{2}{a} \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow a = 2 - b \quad (\text{III}).$$

De (II) segue que: $\begin{cases} 4^a = x \\ 4^b = 10 - x \end{cases}$

Utilizando (III) na 1.^a equação, vem:

$$\begin{aligned} 4^{2-b} = x &\Leftrightarrow \frac{4^2}{4^b} = x \Rightarrow \frac{16}{10-x} = x \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x = 2 \text{ ou } x = 8), \text{ que são soluções, pois satisfazem (I).} \\ S &= \{2, 8\}. \end{aligned}$$

303. a) Devemos ter $0 < x \neq 1$ e $0 < y \neq 1$.

Como $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$, temos na 1.^a equação:

$$\log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{\log_x y} + \log_x y = \frac{5}{2} \quad (\text{I}).$$

Aplicando logaritmo de base x à 2.^a equação, vem:

$$\begin{aligned} xy = 8 &\Rightarrow \log_x (x \cdot y) = \log_x 8 \Rightarrow 1 + \log_x y = \log_x 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_x y &= \log_x 8 - 1 \quad (\text{II}). \end{aligned}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$\frac{1}{\log_x 8 - 1} + \log_x 8 - 1 = \frac{5}{2}.$$

Fazendo $\log_x 8 = t$, vem:

$$\frac{1}{t-1} + t - 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2 - 9t + 9 = 0 \Rightarrow \left(t = 3 \text{ ou } t = \frac{3}{2} \right).$$

Se $t = 3$, $\log_x 8 = 3 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$.

Em (II): $\log_2 y = \log_2 8 - 1 \Rightarrow \log_2 y = 2 \Rightarrow y = 4$.

Se $t = \frac{3}{2}$, $\log_x 8 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 4$.

$$\text{Em (II): } \log_4 y = \log_4 8 - 1 \Rightarrow \log_4 y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2.$$

$$S = \{(2, 4); (4, 2)\}.$$

b) Devemos ter: $0 < x \neq 1$ e $0 < y \neq 1$.

Expressando os logaritmos da 1.^a equação em base x , vem:

$$3 \cdot \left(2 \log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y \right) = 10 \Rightarrow 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x y^2} - \frac{\log_x y}{\log_x \left(\frac{1}{x}\right)} \right) = 10 \Rightarrow$$

$$3 \cdot \left(\frac{2}{2 \log_x y} + \log_x y \right) = 10 \Rightarrow \frac{1}{\log_x y} + \log_x y = \frac{10}{3} \quad (\text{I}).$$

Aplicando logaritmo de base x a ambos os membros da 2.^a equação, temos:

$$xy = 81 \Rightarrow \log_x(xy) = \log_x 81 \Rightarrow 1 + \log_x y = \log_x 81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x y = \log_x 81 - 1 \quad (\text{II}).$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\frac{1}{\log_x 81 - 1} + \log_x 81 - 1 = \frac{10}{3}.$$

Fazendo $\log_x 81 = t$, temos:

$$\frac{1}{t - 1} + t - 1 = \frac{10}{3} \Rightarrow 3t^2 - 16t + 16 = 0 \Rightarrow \left(t = 4 \text{ ou } t = \frac{4}{3} \right).$$

1.^a possibilidade: $t = 4$

Temos: $\log_x 81 = 4 \Rightarrow x^4 = 81 \Rightarrow x = -3$ (não convém) ou $x = 3$.

Se $x = 3$, em (II), temos:

$$\log_3 y = \log_3 81 - 1 \Rightarrow y = 3^3 = 27.$$

2.^a possibilidade: $t = \frac{4}{3}$

Temos: $\log_x 81 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 27$. Se $x = 27$, em (II) temos:

$$\log_{27} y = \log_{27} 81 - 1 \Rightarrow \log_{27} y = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3.$$

$$S = \{(3, 27), (27, 3)\}.$$

304. Devemos ter: $\begin{cases} 4 - x > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < 4$.

Expressando os logaritmos em base 2, temos:

$$\log_6(x+3) = \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 6}; \log_{0,25}(4-x) = \frac{\log_2(4-x)}{\log_2 0,25} = -\frac{1}{2} \log_2(4-x).$$

Então, voltando à equação, temos:

$$\frac{1}{\log_6(x+3)} + \frac{2 \log_{0,25}(4-x)}{\log_2(x+3)} = 1 \Rightarrow \frac{\log_2 6}{\log_2(x+3)} + \frac{2 \left(-\frac{1}{2}\right) \log_2(4-x)}{\log_2(x+3)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 6 - \log_2 (4-x)}{\log_2 (x+3)} = 1 (*) \Rightarrow \log_2 \left(\frac{6}{4-x} \right) = \log_2 (x+3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6}{4-x} = x+3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 3).$$

Notemos, porém, que $x = -2$ não convém, pois $x = -2$ anula o denominador de (*).

Logo, a única solução da equação é $x = 3$.

$$S = \{3\}.$$

306. a) $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3 \left(\frac{x}{3}\right)} + \frac{1}{\log_3 \left(\frac{x}{81}\right)} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3 x - 1} + \frac{1}{\log_3 x - 4} = 0.$$

Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-4} = 0 \Rightarrow t^2 - 4 = 0 \Rightarrow (t = -2 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x = 2 \text{ ou } \log_3 x = -2) \Rightarrow \left(x = 9 \text{ ou } x = -\frac{1}{9}\right).$$

$$S = \left\{9, -\frac{1}{9}\right\}.$$

b) $\log_{3x} \left(\frac{3}{x}\right) + \log_3 27x^2 = 5 \Rightarrow \frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3 3x} + \log_3 27x^2 = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} + (3 + 2 \cdot \log_3 x) = 5$$

Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$$\frac{1-t}{1+t} + (3 + 2t) = 5 \Rightarrow (1-t) + (3 + 2t)(1+t) = 5(1+t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = 1 \text{ ou } t = -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\log_3 x = 1 \text{ ou } \log_3 x = -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$S = \left\{3, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

c) Expressando os logaritmos em base 2, vem:

$$\log_x 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 x} = \frac{3}{\log_2 x}; \log_{2x} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 2x} = \frac{3}{1 + \log_2 x},$$

$$\log_{4x} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4x} = \frac{3}{2 + \log_2 x}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_x 8} + \frac{1}{\log_{2x} 8} + \frac{1}{\log_{4x} 8} &= 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\frac{3}{\log_2 x}} + \frac{1}{\frac{1 + \log_2 x}{3}} + \frac{1}{\frac{2 + \log_2 x}{3}} &= 2 \end{aligned}$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$\frac{t}{3} + \frac{1+t}{3} + \frac{2+t}{3} = 2 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2, \text{ que é, de fato, solução.}$$

$$S = \{2\}.$$

d) Notemos que $x = 1$ é solução particular da equação.

Expressando os logaritmos em base x , vem:

$$\begin{aligned} \log_x \frac{x^2}{2} - 14 \cdot \log_{16x} x^3 + 40 \cdot \log_{4x} \sqrt{x} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \log_x \frac{x}{2} - 42 \log_{16x} x + 20 \log_{4x} x &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x \left(\frac{x}{2}\right)} - 42 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x (16x)} + 20 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x 4x} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2}{1 - \log_x 2} - \frac{42}{\log_x 2^4 + 1} + \frac{20}{\log_x 2^2 + 1} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2}{1 - \log_x 2} - \frac{42}{4 \log_x 2 + 1} + \frac{20}{2 \log_x 2 + 1} &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo $\log_x 2 = t$, vem:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-t} - \frac{42}{4t+1} + \frac{20}{2t+1} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{1-t} + \frac{10}{2t+1} &= \frac{21}{4t+1} \Rightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = -2\right), \text{ isto é,} & \end{aligned}$$

$$\log_x 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ ou}$$

$$\log_x 2 = -2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 2 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Como $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ não convém, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$S = \left\{1, 4, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

307. Como $\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10 = \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} \cdot \log(x^2 - 3x + 2) = -2 + \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} \cdot \log(x - 3) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{\log(x^2 - 3x + 2)}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} - \frac{\log(x - 3)}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} = -2 \\ & \Rightarrow \frac{\log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}\right)}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} = -2 \Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}\right) = -2 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{-2} \Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}\right) = \log(1+x) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} = 1 + x \Rightarrow x = 5. \\ S & = \{5\}. \end{aligned}$$

308. Lembrando que $a^{\log_a b} = b$, temos:

$$\begin{aligned} & x^{\log_2^2 x^2 - \log_2(2x) - 2} + \left[(x+2)^2 \right]^{\log_2(x+2)^2 - 4} = 3 \Rightarrow \\ & \Rightarrow x^{(2 \log_2 x)^2 - [\log_2 2 + \log_2 x] - 2} + 4^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow \\ & \Rightarrow x^{(2 \log_2 x)^2 - \log_2 x - 3} = 1 \end{aligned}$$

Notando que $x = 1$ é solução particular dessa equação exponencial, para $x \neq 1$ temos:

$$(2 \log_2 x)^2 - \log_2 x - 3 = 0.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$4t^2 - t - 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{4} \text{ ou } t = 1, \text{ isto é,}$$

$$\log_2 x = -\frac{3}{4} \text{ ou } \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^{-\frac{3}{4}} \text{ ou } x = 2.$$

$$S = \{1, 2^{-\frac{3}{4}}, 2\}.$$

$$\begin{aligned} 309. \text{ a) } & \log_a(ax) \cdot \log_x(ax) = \log_{a^2} \frac{1}{a} \Rightarrow \log_a(ax) \cdot \frac{\log_a(ax)}{\log_a x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\log_a x + 1) \cdot \frac{(1 + \log_a x)}{\log_a x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Fazendo $\log_a x = t$, vem:

$$(t + 1) \cdot \frac{(1+t)}{t} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = -2\right) \Rightarrow$$

$$\left(\log_a x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \log_a x = -2\right) \Rightarrow (x = a^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } x = a^{-2}).$$

$$S = \{a^{-\frac{1}{2}}, a^{-2}\}.$$

b) $2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2 x} a = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \log_x a + \frac{\log_x a}{\log_x (ax)} + 3 \cdot \frac{\log_x a}{\log_x (a^2 \cdot x)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \log_x a + \frac{\log_x a}{1 + \log_x a} + 3 \cdot \frac{\log_x a}{1 + 2 \log_x a} = 0$$

Fazendo $\log_x a = t$, vem:

$$2t + \frac{t}{1+t} + \frac{3t}{1+2t} = 0 \Rightarrow 4t^3 + 11t^2 + 6t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(4t^2 + 11t + 6) = 0.$$

1.^a possibilidade: $t = 0$, isto é, $\log_x a = 0 \Rightarrow a = 1$, o que é impossível por hipótese.

2.^a possibilidade: $4t^2 + 11t + 6 = 0 \Rightarrow \left(t = -2 \text{ ou } t = -\frac{3}{4}\right)$. Daí,

$$t = -2, \log_x a = -2 \Rightarrow x^{-2} = a \Rightarrow x = a^{-\frac{1}{2}}$$

ou

$$t = -\frac{3}{4}, \log_x a = -\frac{3}{4} \Rightarrow x^{-\frac{3}{4}} = a \Rightarrow x = a^{-\frac{4}{3}}.$$

$$S = \left\{a^{-\frac{1}{2}}, a^{-\frac{4}{3}}\right\}.$$

c) Como $\log_a x = \frac{I}{\log_x a}$, podemos escrever:

$$\log_x (ax) \cdot \frac{1}{\log_x a} = 1 + \log_x \sqrt{a} \Rightarrow (\log_x a + 1) \cdot \frac{1}{\log_x a} = 1 + \log_x a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_x a + 1) \cdot \frac{1}{\log_x a} = 1 + \frac{1}{2} \log_x a.$$

Fazendo $\log_x a = t$, vem:

$$(t + 1) \cdot \frac{1}{t} = 1 + \frac{t}{2} \Rightarrow \frac{t + 1}{t} = \frac{2 + t}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 2 = 0 \Rightarrow (t = -\sqrt{2} \text{ ou } t = \sqrt{2}).$$

$$\text{Se } t = -\sqrt{2}, \log_x a = -\sqrt{2} \Rightarrow a = x^{-\sqrt{2}} \Rightarrow x = a^{-\frac{I}{\sqrt{2}}}.$$

ou

Se $t = \sqrt{2}$, $\log_x a = \sqrt{2} \Rightarrow a = x^{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$.
 $S = \left\{ a^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}, a^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right\}$.

d) Expressando os logaritmos em base x , $0 < x \neq 1$, vem:

$$\log_{a^2\sqrt{x}} a = \frac{\log_x a}{\log_x (a^2\sqrt{x})} = \frac{\log_x a}{\log_x a^2 + \log_x \sqrt{x}} = \frac{\log_x a}{2\log_x a + \frac{1}{2}}$$

$$\log_{2x} a = \frac{\log_x a}{\log_x (2x)} = \frac{\log_x a}{1 + \log_x 2}; a > 0 \text{ e } 0 < x \neq \frac{1}{2} \quad (*).$$

$$\log_{ax} a = \frac{\log_x a}{\log_x (ax)} = \frac{\log_x a}{1 + \log_x a}$$

$$\log_{\frac{1}{a}} 2x = \frac{\log_x (2x)}{\log_x \left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\log_x 2 + 1}{-\log_x a}$$

Fazendo $\log_x a = m$ e $\log_x 2 = n$, a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{\frac{m}{2m + \frac{1}{2}} + \frac{m}{1+m} \cdot \frac{n+1}{-m} = 0}{\frac{m}{1+n}} \Rightarrow \frac{1+n}{2m + \frac{1}{2}} - \frac{n+1}{m+1} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (n+1) \left(\frac{1}{2m + \frac{1}{2}} - \frac{1}{m+1} \right) = 0$$

1.^a possibilidade: $n+1=0 \Rightarrow n=-1 \Rightarrow \log_x 2 = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$,
não convém, pois não satisfaz (*).

$$2.^a possibilidade: \frac{1}{2m + \frac{1}{2}} - \frac{1}{m+1} = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x a = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = a \Rightarrow x = a^2.$$

$$S = \{a^2\}.$$

310. Expressando os logaritmos em base 2, temos:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2^2 a} - 2 \frac{\log_a x}{\log_{\frac{1}{b}} a} = \log_{\sqrt[3]{a}} x \cdot \log_a x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2^2 a} - 2 \cdot \frac{\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 a} \right)}{\left(\frac{1}{\log_2 \frac{x}{b}} \right)} = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt[3]{a}} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 x}{(\log_2 a)^2} + 2 \cdot \frac{\log_2 x \cdot \log_2 b}{(\log_2 a)^2} = 3 \cdot \frac{(\log_2 x)^2}{(\log_2 a)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x + 2 \cdot \log_2 x \cdot \log_2 b = 3(\log_2 x)^2$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$t + 2t \cdot \log_2 b = 3t^2 \Rightarrow 3t^2 - t - 2t \log_2 b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(3t - 1 - 2 \log_2 b) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ou } 3t - 1 - 2 \log_2 b = 0.$$

1.^a possibilidade: $t = 0$

$$t = 0 \Rightarrow \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1$$

2.^a possibilidade: $3t - 1 - 2 \log_2 b = 0 \Rightarrow t = \frac{1 + 2 \log_2 b}{3}$. Daí,

$$\log_2 x = \frac{1 + 2 \log_2 b}{3} \Rightarrow 3 \log_2 x = 1 + 2 \log_2 b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \log_2 x = \log_2 2 + \log_2 b^2 \Rightarrow \log_2 x^3 = \log_2 (2 \cdot b^2) \Rightarrow x^3 = 2b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{2b^2}.$$

$$S = \{1, \sqrt[3]{2b^2}\}.$$

311. Devemos ter: $x > 0$.

Expressando os logaritmos em base 2, vem:

$$\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1 \Rightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, temos:

$$t + \frac{t}{\log_2 3} + \frac{t}{2} = 1 \Rightarrow t \left(1 + \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{2} \right) = 1 \Rightarrow$$

$$t \cdot \left(\frac{2 \log_2 3 + 2 + \log_2 3}{2 \log_2 3} \right) = 1 \Rightarrow t \cdot (2 \log_2 3 + 2 + \log_2 3) = 2 \log_2 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot (\log_2 3^2 + \log_2 4 + \log_2 3) = \log_2 3^2 \Rightarrow t [\log_2 (3^2 \cdot 4 \cdot 3)] = \log_2 9$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log_2 9}{\log_2 108} = \log_{108} 9.$$

Então,

$$\log_2 x = \log_{108} 9 \Rightarrow x = 2^{\log_{108} 9}.$$

$$S = \{2^{\log_{108} 9}\}.$$

312. $10^{\log_a (x^2 - 3x + 5)} = 3^{\log_a 10} \Rightarrow \log_{10} 3^{\log_a 10} = \log_a (x^2 - 3x + 5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_a 10 \cdot \log_{10} 3 = \log_a (x^2 - 3x + 5) \Rightarrow \log_{10} 3 = \frac{\log_a (x^2 - 3x + 5)}{\log_a 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{10} 3 = \log_{10} (x^2 - 3x + 5) \Rightarrow x^2 - 3x + 5 = 3 \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2).$$

$$S = \{1, 2\}.$$

313. Escrevendo os logaritmos em base 10, temos:

$$1 + \frac{\log(a-x)}{\log(x+b)} = \frac{2 - \log_{(a-b)} 4}{\log_{(a-b)}(x+b)} \Rightarrow 1 + \frac{\log(a-x)}{\log(x+b)} = \frac{2 - \frac{\log 4}{\log(a-b)}}{\frac{\log(x+b)}{\log(a-b)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log(x+b) + \log(a-x)}{\log(x+b)} = \frac{\frac{2 \log(a-b) - \log 4}{\log(a-b)}}{\frac{\log(x+b)}{\log(a-b)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log[(x+b)(a-x)]}{\log(x+b)} = \frac{\log \frac{(a-b)^2}{4}}{\log(x+b)} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{x \neq (1-b)} \log[(x+b)(a-x)] = \log \frac{(a-b)^2}{4} \Rightarrow (x+b)(a-x) = \frac{(a-b)^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x(a-b) + (a^2 - 6ab + b^2) = 0, \text{ cujo discriminante é:}$$

$$\Delta = [-4(a-b)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot (a^2 - 6ab + b^2)$$

$$\Delta = 64ab$$

Logo,

$$x = \frac{4a - 4b \pm 8\sqrt{ab}}{8}, \text{ donde } x = \frac{a-b}{2} + \sqrt{ab} \text{ ou } x = \frac{a-b}{2} - \sqrt{ab}.$$

$$S = \left\{ \frac{a-b}{2} + \sqrt{ab}; \frac{a-b}{2} - \sqrt{ab} \right\}.$$

314. a) Expressando os logaritmos da 2.^a equação em base 2, vem:

$$\log_{y^2} 2 = \log_{xy} 4 \Rightarrow \frac{\log_2 2}{\log_2 y^2} = \frac{\log_2 4}{\log_2(xy)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 \log_2 y} = \frac{2}{\log_2 x + \log_2 y} \Rightarrow 4 \log_2 y = \log_2 x + \log_2 y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \log_2 y = \log_2 x \Rightarrow \log_2 y^3 = \log_2 x \Rightarrow x = y^3 \text{ (I).}$$

Substituindo (I) na 1.^a equação, vem:

$$x^2 + 4y^3 = 96 \Rightarrow x^2 + 4 \cdot x - 96 = 0 \Rightarrow x = -12 \text{ ou } x = 8.$$

$$\text{Se } x = -12, \text{ em (I), vem: } y^3 = -12 \Rightarrow y = \sqrt[3]{-12}.$$

$$\text{Se } x = 8, \text{ em (I), vem: } y^3 = 8 \Rightarrow y = 2.$$

$$S = \{(-12, \sqrt[3]{-12}); (8, 2)\}.$$

b) Da 2.^a equação vem:

$$\log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\log_y 4} \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_y (y - 3x) = \log_y 4 \Rightarrow y - 3x = 4 \quad (\text{I}).$$

Aplicando logaritmo de base y a ambos os membros da 1.^a equação, vem:

$$y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \log_y (y \cdot x^{\log_y x}) = \log_y x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + (\log_y x) \cdot (\log_y x) = \frac{5}{2} (\log_y x).$$

Fazendo $\log_y x = t$, vem:

$$1 + t^2 = \frac{5t}{2} \Rightarrow \left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 2 \right), \text{ isto é,} \\ \left(\log_y x = \frac{1}{2} \text{ ou } \log_y x = 2 \right) \Rightarrow x = \sqrt{y} \text{ ou } x = y^2 \quad (\text{II}).$$

Substituindo (II) em (I), temos:

1.^º caso: $x = \sqrt{y}$ e $y - 3x = 4 \Rightarrow y - 3\sqrt{y} = 4 \Rightarrow y = 1$ (não convém, pois y é base do sistema de logaritmo) ou $y = 16$.

Se $y = 16$, $x = \sqrt{16} = 4$.

2.^º caso: $x = y^2$ e $y - 3x = 4 \Rightarrow y - 3y^2 = 4 \Rightarrow 3y^2 - y + 4 = 0$, que não apresenta raízes reais.

$$S = \{(4, 16)\}.$$

c) Escrevendo os logaritmos da 1.^a equação em base y ($0 < y \neq 1$), vem:

$$x \cdot \log_2 y \cdot \log_{\frac{1}{x}} 2 = y\sqrt{y} \cdot (1 - \log_x 2) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \cdot \frac{\log_y y}{\log_y 2} \cdot \frac{\log_y 2}{\log_y \left(\frac{1}{x}\right)} = y^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \frac{\log_y 2}{\log_y x}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{x}{\log_y x} = y^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(\log_y x - \log_y 2)}{\log_y x} \quad (\text{I}).$$

Escrevendo os logaritmos da 2.^a equação em base 2, vem:

$$\log_y 3 \cdot \log_{\sqrt{2}} x = 1 \Rightarrow \frac{\log_2 2}{\log_2 y^3} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{3 \log_2 y} \cdot \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 y} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2}{3} \log_y x = 1 \Rightarrow \log_y x = \frac{3}{2} \quad (\text{II}).$$

Substituindo (II) em (I) e notando que, por (II), $x = y^{\frac{3}{2}}$, vem:

$$\begin{aligned} -\frac{x}{\log_y x} &= y^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(\log_y x - \log_y^2)}{\log_y x} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{x}{\frac{3}{2}} &= x \cdot \frac{\left(\frac{3}{2} - \log_y 2\right)}{\frac{3}{2}} \xrightarrow{x \neq 0} -1 = \frac{3}{2} - \log_y 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_y 2 &= \frac{5}{2} \Rightarrow y^{\frac{5}{2}} = 2 \Rightarrow y = 2^{\frac{2}{5}}. \end{aligned}$$

De (II), $x = y^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{5}}.$
 $S = \left\{ \left(2^{\frac{3}{5}}, 2^{\frac{2}{5}}\right) \right\}.$

315. Da 2.^a equação vem:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = 2 &\Rightarrow \log_2(x^2 - y^2) = \log_2 2 \Rightarrow \log_2 [(x + y)(x - y)] = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_2(x + y) + \log_2(x - y) = 1 \Rightarrow \log_2(x + y) = 1 - \log_2(x - y). \end{aligned}$$

Substituindo essa expressão na 1.^a equação, vem:

$$\begin{aligned} \log_2(x + y) - \log_3(x - y) = 1 &\Rightarrow 1 - \log_2(x - y) - \log_3(x - y) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_2(x - y) = -\log_3(x - y) \Rightarrow \log_2(x - y) = \log_3(x - y)^{-1}. \end{aligned}$$

Transformando para a base 2, vem:

$$\begin{aligned} \log_2(x - y) &= \log_3\left(\frac{1}{x - y}\right) \Rightarrow \log_2(x - y) = \frac{\log_2\left(\frac{1}{x - y}\right)}{\log_2 3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_2(x - y) = \frac{-\log_2(x - y)}{\log_2 3} \Rightarrow \log_2(x - y) \cdot \log_2 3 = -\log_2(x - y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_2(x - y) \cdot \log_2 3 + \log_2(x - y) = 0 \Rightarrow \log_2(x - y) \cdot [\log_2 3 + 1] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_2(x - y) = 0 \text{ ou } \log_2 3 + 1 = 0 \text{ (F)!} \end{aligned}$$

Então: $\log_2(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 1$ (I)

Como $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, vem:

$$2 = (x + y) \cdot 1 \Rightarrow x + y = 2 \quad (\text{II})$$

De (I) e (II) vem que $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$.

$$S = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

316. Escrevendo cada um dos logaritmos das três equações em base 2, vem:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \frac{\log_2 y}{\log_2 4} + \frac{\log_2 z}{\log_2 4} = 2 \\ \frac{\log_2 y}{\log_2 3} + \frac{\log_2 z}{\log_2 9} + \frac{\log_2 x}{\log_2 9} = 2 \\ \frac{\log_2 z}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 16} + \frac{\log_2 y}{\log_2 16} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \frac{\log_2 y}{2} + \frac{\log_2 z}{2} = 2 \\ \frac{\log_2 y}{\log_2 3} + \frac{\log_2 z}{2 \log_2 3} + \frac{\log_2 x}{2 \log_2 3} = 2 \\ \frac{\log_2 z}{2} + \frac{\log_2 x}{4} + \frac{\log_2 y}{4} = 2 \end{cases}$$

Fazendo $\log_2 x = a$, $\log_2 y = b$ e $\log_2 z = c$, vem:

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 2 \\ \frac{b}{\log_2 3} + \frac{c}{2 \log_2 3} + \frac{a}{2 \log_2 3} = 2 \\ \frac{c}{2} + \frac{a}{4} + \frac{b}{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 4 \\ a + 2b + c = 4 \log_2 3 \\ a + b + 2c = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima por Cramer, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4; a = \frac{D_A}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 \log_2 3 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} \Rightarrow$$

$$a = \frac{4 - \log_2 81}{4} = \frac{\log_2 16 - \log_2 81}{4} = \frac{\log_2 \left(\frac{16}{81}\right)}{4} = \frac{\log_2 \left(\frac{2}{3}\right)^4}{4} = \log_2 \left(\frac{2}{3}\right).$$

Analogamente,

$$b = \frac{12 \log_2 3 - 12}{4} = \frac{12(\log_2 3 - 1)}{4} = 3(\log_2 3 - \log_2 2) = 3 \cdot \log_2 \left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \log_2 \left(\frac{27}{8}\right);$$

$$c = \frac{20 - 4 \log_2 3}{4} = \frac{4(5 - \log_2 3)}{4} = \log_2 32 - \log_2 3 = \log_2 \left(\frac{32}{3}\right).$$

Dessa forma, temos:

$$\log_2 x = a \Rightarrow \log_2 x = \log_2 \left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\log_2 y = b \Rightarrow \log_2 y = \log_2 \left(\frac{27}{8}\right) \Rightarrow y = \frac{27}{8}$$

$$\log_2 z = c \Rightarrow \log_2 z = \log_2 \left(\frac{32}{3}\right) \Rightarrow z = \frac{32}{3}.$$

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3} \right) \right\}.$$

317. Aplicando logaritmo de base a ($0 < a \neq 1$) a ambos os membros da 1.^a equação, vem:

$$a^x \cdot b^y = ab \Rightarrow \log_a(a^x \cdot b^y) = \log_a(ab) \Rightarrow x + y \log_a b = 1 + \log_a b \Rightarrow \\ \Rightarrow x - 1 = (1 - y) \log_a b \quad (\text{I}).$$

Transformando para a base a os logaritmos da 2.^a equação, temos:

$$2 \log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b \Rightarrow 2 \log_a x = \frac{\log_a y \cdot \log_a b}{\log_a \frac{1}{b} \cdot \log_a \sqrt{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a x^2 = \frac{\log_a y}{-\log_a b} \cdot \frac{\log_a b}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log_a x^2 = -2 \log_a y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a x^2 = \log_a y^{-2} \Rightarrow x^2 = y^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \text{ ou } x = -\frac{1}{y}.$$

Voltando a (I), temos:

1.^o caso: $x = \frac{1}{y}$, isto é,

$$x - 1 = (1 - y) \log_a b \Rightarrow \frac{1}{y} - 1 = (1 - y) \log_a b \Rightarrow \frac{1 - y}{y} = (1 - y) \log_a b$$

$$(1 - y) \cdot \left(\frac{1}{y} - \log_a b \right) = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{1}{\log_a b} = \log_b a$$

$$\text{Se } y = 1, x = \frac{1}{y} = 1.$$

$$\text{Se } y = \log_b a, x = \frac{1}{\log_b a} = \log_a b.$$

2.^o caso: $x = -\frac{1}{y}$ não ocorre, pois, para garantir a existência dos logaritmos do sistema devemos ter $x > 0$ e $y > 0$.

$$S = \{(1, 1); (\log_a b, \log_b a)\}.$$

318. Da 1.^a equação temos:

$$\log_{12} x \cdot (\log_2 x + \log_2 y) = \log_2 x \Rightarrow \log_{12} x \cdot \log_2(xy) = \log_2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{12} x = \frac{\log_2 x}{\log_2(xy)}, xy \neq 1.$$

Por outro lado, escrevendo $\log_{12} x$ em base 2, temos:

$$\log_{12} x = \frac{\log_2 x}{\log_2(xy)} \Rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 12} = \frac{\log_2 x}{\log_2(xy)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x \left(\frac{1}{\log_2 12} - \frac{1}{\log_2(xy)} \right) = 0 \Rightarrow \left(\log_2 x = 0 \text{ ou } \log_2 12 = \log_2(xy) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ (não convém)}$$

ou

$$\log_2 12 = \log_2(xy) \Rightarrow xy = 12 \quad (\text{I}).$$

Da 2.^a equação temos que:

$$\log_2 x \cdot \log_3 (x + y) = 3 \log_3 x \Rightarrow \log_2 x = \frac{\log_3 x^3}{\log_3 (x + y)} = \log_{x+y} x^3.$$

Passando para a base 2, vem:

$$\begin{aligned} \log_2 x &= \frac{\log_2 x^3}{\log_2 (x + y)} \Rightarrow \log_2 x = \frac{3 \log_2 x}{\log_2 (x + y)} \xrightarrow{\text{por (I)}} \\ &\Rightarrow \log_2 x = \frac{3 \log_2 x}{\log_2 \left(x + \frac{12}{x}\right)} \xrightarrow{x \neq 1} \log_2 \left(x + \frac{12}{x}\right) = 3 \Rightarrow x + \frac{12}{x} = 8 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 6. \end{aligned}$$

Se $x = 2$, por (I), vem que $y = 6$.

Se $x = 6$, por (I), vem que $y = 2$.

$$S = \{(2, 6); (6, 2)\}.$$

319. a) Notemos que $x = y = 1$ é solução particular desse sistema.

Para $0 < x \neq 1$ e $0 < y \neq 1$, aplicando logaritmo decimal a ambos os membros da 1.^a e da 2.^a equações, vem:

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x^{x+y}) = \log y^{12} \\ \log(y^{x+y}) = \log x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y) \cdot \log x = 12 \log y \\ (x+y) \cdot \log y = 3 \log x \end{cases}$$

Dividindo membro a membro, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\log x}{\log y} &= 4 \cdot \frac{\log y}{\log x} \Rightarrow (\log x)^2 = 4(\log y)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log x = 2 \log y \text{ ou } \log x = -2 \log y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log x = \log y^2 \text{ ou } \log x = \log y^{-2}) \Rightarrow \left(x = y^2 \text{ ou } x = \frac{1}{y^2} \right). \end{aligned}$$

1.^o caso: Se $x = y^2$, substituindo na 1.^a equação (original), vem:

$$(y^2)^{y^2+y} = y^{12} \Rightarrow 2y^2 + 2y - 12 = 0 \Rightarrow y = -3 \text{ (não convém) ou } y = 2, \text{ donde } x = 2^2 = 4.$$

2.^o caso: Se $x = \frac{1}{y^2}$, vem, na 1.^a equação:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{y^2}\right)^{\frac{1}{y^2}+y} &= y^{12} \Rightarrow (y^{-2})^{\frac{1}{y^2}+y} = y^{12} \Rightarrow -\frac{2}{y^2} - 2y = 12 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{1}{y^2} - y = 12 \Rightarrow y^3 + 6y^2 + 1 = 0, \text{ que não apresenta raiz real positiva.} \\ S &= \{(1, 1); (4, 2)\}. \end{aligned}$$

b) Notemos que $x = y = 1$ é solução particular desse sistema.

Para $0 < x \neq 1$ e $0 < y \neq 1$, aplicando logaritmo de base x a ambos os membros da 1.^a e da 2.^a equações, vem:

$$\begin{cases} x^x + y = y^3 \\ y^x + y = x^6 y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_x(x^x + y) = \log_x y^3 \\ \log_x(y^x + y) = \log_x(x^6 y^3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \log_x y \\ (x + y) \log_x y = 6 + 3 \log_x y \end{cases}$$

Dividindo membro a membro, vem:

$$\frac{1}{\log_x y} = \frac{3 \log_x y}{6 + 3 \log_x y}. \text{ Fazendo } \log_x y = t, \text{ vem:}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{3t}{6 + 3t} \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = -1 \text{ ou } t = 2.$$

1.^a possibilidade: $t = -1$

Temos: $\log_x y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$. Substituindo esse valor de y na 1.^a equação, temos:

$$x^x + y = y^3 \Rightarrow x^{x+\frac{1}{x}} = x^{-3} \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (não convém)} \text{ e } x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (não convém)}$$

2.^a possibilidade: $t = 2$

Temos: $\log_x y = 2 \Rightarrow y = x^2$. Na 1.^a equação temos:

$$x^x + y = y^3 \Rightarrow x^x + x^2 = x^6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0,$$

que, desprezando a raiz negativa, fornece $x = 2$ e $y = 4$.

$$S = \{(1, 1); (2, 4)\}.$$

c) $x = y = 1$ não é solução desse sistema. Para $0 < x \neq 1$ e $0 < y \neq 1$, aplicando logaritmo de base x a ambos os membros da 1.^a equação, temos:

$$x^y = y^x \Rightarrow \log_x(x^y) = \log_x(y^x) \Rightarrow y = x \log_x y \quad (\text{I}).$$

Aplicando logaritmo de base 2 a ambos os membros da 2.^a equação, vem:

$$2^x = 3^y \Rightarrow \log_2(2^x) = \log_2(3^y) \Rightarrow x = y \cdot \log_2 3.$$

Vamos chamar $\log_2 3 = a$; daí $x = y \cdot a$ (II).

Substituindo (I) em (II), vem:

$$x = x \cdot \log_x y \cdot a \stackrel{x \neq 0}{\implies} \log_x y \cdot a = 1 \Rightarrow \log_x y = \frac{1}{a} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{a}} \quad (\text{III}).$$

Em (II) temos:

$$x = y \cdot a \Rightarrow x = x^{\frac{1}{a}} \cdot a \Rightarrow x^{\frac{a-1}{a}} = a \Rightarrow x = a^{\frac{a}{a-1}},$$

que, substituído em (III), fornece:

$$y = \left(a^{\frac{a}{a-1}}\right)^{\frac{1}{a}} \Rightarrow y = a^{\frac{1}{a-1}}.$$

$$S = \left\{ \left(a^{\frac{a}{a-1}}, a^{\frac{1}{a-1}} \right), \text{ em que } a = \log_2 3 \right\}.$$

320. a) Aplicando logaritmo decimal a ambos os membros da 2.^a equação, vem:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^{\log y} \cdot y^{\log x}} &= y \Rightarrow x^{\log y} \cdot y^{\log x} = y^2 \Rightarrow \log(x^{\log y} \cdot y^{\log x}) = \log y^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log x^{\log y} + \log y^{\log x} = 2 \log y \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log y) \cdot (\log x) + (\log x) \cdot (\log y) = 2 \log y \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \log x \log y - 2 \log y = 0 \Rightarrow 2 \log y (\log x - 1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log y = 0 \text{ ou } \log x = 1.\end{aligned}$$

1.^a possibilidade: Se $\log y = 0 \Rightarrow y = 1$. Na 1.^a equação teremos: $x^0 + 1^{\log x} = 200$, o que é absurdo!

2.^a possibilidade: $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$. Na 1.^a equação teremos:

$$\begin{aligned}10^{\log y} + y^{\log 10} &= 200 \Rightarrow 10^{\log y} = 200 - y \Rightarrow \log_{10}(200 - y) = \log_{10} y \Rightarrow \\ &\Rightarrow 200 - y = y \Rightarrow y = 100. \\ S &= \{(10, 100)\}.\end{aligned}$$

b) Da 2.^a equação vem:

$$\sqrt[x]{(\log x \cdot \log y)^y} = 1\,024 \Rightarrow \log x \cdot \log y = 1\,024^{\frac{1}{y}}.$$

Aplicando logaritmo de base 2 a ambos os membros dessa última expressão, vem:

$$\begin{aligned}\log_2 [\log x \cdot \log y] &= \log_2 1\,024^{\frac{1}{y}} \Rightarrow \log_2 (\log x) + \log_2 (\log y) = \frac{x}{y} \log_2 2^{10} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_2 (\log x) + \log_2 (\log y) = \frac{10x}{y}.\end{aligned}$$

Fazendo $\log x = a$ e $\log y = b$ ($x = 10^a$ e $y = 10^b$), temos:

$$\log_2 a + \log_2 b = 10 \cdot \frac{10^a}{10^b} \Rightarrow \log_2 (ab) = 10^{a+1-b} \quad (\text{I}).$$

Em termos das novas variáveis, a 1.^a equação pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}x^{\log y} + y^{\log x} &= 200 \Rightarrow (10^a)^b + (10^b)^a = 200 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10^{ab} + 10^{ab} = 200 \Rightarrow 2 \cdot 10^{ab} = 200 \Rightarrow 10^{ab} = 100 \Rightarrow ab = 2 \quad (\text{II}).\end{aligned}$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\begin{aligned}\log_2 (ab) &= 10^{a+1-b} \Rightarrow \log_2 2 = 10^{a+1-b} \Rightarrow 10^{a+1-b} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a + 1 - b = 0 \Rightarrow a - b = -1 \quad (\text{III})\end{aligned}$$

De (II) e (III) temos: $\begin{cases} ab = 2 \\ a - b = -1 \end{cases}$, que resolvido fornece

$(a = 1 \text{ e } b = 2)$ ou $(a = -2 \text{ e } b = -1)$.

1.^a possibilidade: $a = 1$ e $b = 2$, isto é, $\log x = 1$ e $\log y = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ e } y = 100$$

2.^a possibilidade: $a = -2$ e $b = -1$, isto é, $\log x = -2$ e $\log y = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{100} \text{ e } y = \frac{1}{10} \text{ (não convém, pois } x \text{ deve ser natural, já que é índice de raiz).}$$

$$S = \{(10, 100)\}.$$

c) Da 2.^a equação vem:

$$\log \sqrt{xy} = 1 \Rightarrow \sqrt{xy} = 10 \Rightarrow xy = 100 \text{ (I).}$$

Fazendo $\log x = a$ e $\log y = b$ ($x = 10^a$ e $y = 10^b$) e tendo em vista (I), o sistema pode ser reescrito da forma:

$$\begin{cases} (10^a)^b + (10^b)^a = 20 \\ 10^a \cdot 10^b = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 10^{ab} = 20 \\ 10^{a+b} = 100 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}, \text{ que resolvido fornece } a = 1 \text{ e } b = 1, \text{ isto é,}$$

$$\log x = 1 \text{ e } \log y = 1 \Rightarrow x = 10 \text{ e } y = 10.$$

$$S = \{(10, 10)\}.$$

Capítulo VI – Inequações exponenciais e logarítmicas

322. a) $4^x > 7 \Rightarrow \log_4 4^x > \log_4 7 \Rightarrow x \cdot \log_4 4 > \log_4 7 \Rightarrow x > \log_4 7$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_4 7\}$$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 5 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 5 \Rightarrow x \cdot \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 5 \Rightarrow x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 5$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 5\}$$

c) $2^{3x+2} > 9 \Rightarrow 2^{3x} \cdot 2^2 > 9 \Rightarrow 8^x > \frac{9}{4} \Rightarrow \log_8 8^x > \log_8\left(\frac{9}{4}\right) \Rightarrow$

$$x > \log_8 \frac{9}{4}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_8\left(\frac{9}{4}\right)\right\}$$

d) $5^{4x-1} < 3 \Rightarrow \frac{5^{4x}}{5} < 3 \Rightarrow 625^x < 15 \Rightarrow \log_{625} 625^x < \log_{625} 15 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \cdot \log_{625} 625 < \log_{625} 15 \Rightarrow x < \log_{625} 15$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{625} 15\}$$

e) $3^{2-3x} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3^2}{3^{3x}} < \frac{1}{4} \Rightarrow 27^x > 36 \Rightarrow \log_{27} 27^x > \log_{27} 36 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \cdot \log_{27} 27 > \log_{27} 36 \Rightarrow x > \log_{27} 36$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{27} 36\}$$

f) $3^{\sqrt{x}} > 4 \Rightarrow \log_3 3^{\sqrt{x}} > \log_3 4 \Rightarrow \sqrt{x} > \log_3 4 \Rightarrow x > \log_3^2 4$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_3^2 4\}$$

g) $2^{(x^2)} \leqslant 5 \Rightarrow \log_2 2^{x^2} \leqslant \log_2 5 \Rightarrow x^2 \cdot \log_2 2 \leqslant \log_2 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 \leqslant \log_2 5 \Rightarrow x^2 - \log_2 5 \leqslant 0 \Rightarrow -\sqrt{\log_2 5} \leqslant x \leqslant \sqrt{\log_2 5}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{\log_2 5} \leqslant x \leqslant \sqrt{\log_2 5}\}$$

324. a) $2^x > 3^{x-1} \Rightarrow 2^x > \frac{3^x}{3} \Rightarrow \frac{2^x}{3^x} > \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{1}{3} \Rightarrow \log_2 \left(\frac{2}{3}\right)^x < \log_2 \frac{1}{3} \Rightarrow x \cdot \log_2 \frac{2}{3} < \log_2 \frac{1}{3} \Rightarrow x < \log_2 \frac{1}{3}$

b) $2^{3x-1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} \Rightarrow \frac{2^{3x}}{2} \leq \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} \Rightarrow \frac{(2^3)^x}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^x} \leq \frac{2}{\frac{1}{27}}$

$$\frac{8^x}{\left(\frac{1}{9}\right)^x} \leq 54 \Rightarrow 72^x \leq 54 \Rightarrow \log_{72} 72^x \leq \log_{72} 54 \Rightarrow x \leq \log_{72} 54$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \log_{72} 54 \right\}$$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+3} > 2^{4x-3} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 > \frac{2^{4x}}{2^3} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{25}\right)^x}{16^x} > \frac{1}{2^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{400}\right)^x > \frac{125}{8} \Rightarrow 400^x < \frac{8}{125} \Rightarrow \log_{400} 400^x < \log_{400} \frac{8}{125} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < \log_{400} \frac{8}{125}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{400} \frac{8}{125} \right\}$$

d) $2^{x-2} > 3^{2x-1} \Rightarrow \frac{2^x}{2^2} > \frac{3^{2x}}{3} \Rightarrow \frac{2^x}{9^x} > \frac{4}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{9}\right)^x > \frac{4}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_2 \left(\frac{2}{9}\right)^x < \log_2 \frac{4}{3} \Rightarrow x < \log_2 \frac{4}{3}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \log_2 \frac{4}{3} \right\}$$

325. a) $5^x > 3^x + 3^{x+1} \Rightarrow 5^x > 3^x + 3^x \cdot 3 \Rightarrow 5^x > 3^x \cdot (1 + 3) \Rightarrow \Rightarrow \frac{5^x}{3^x} > 4 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x > 4 \Rightarrow \log_5 \left(\frac{5}{3}\right)^x > \log_5 4 \Rightarrow x > \log_5 4$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \log_5 \frac{4}{3} \right\}$$

b) $3^x + 3^{x+1} \leq 2^x - 2^{x-1} \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 \leq 2^x - \frac{2^x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3^x \cdot (1 + 3) \leq 2^x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} \leq \frac{\frac{1}{2}}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \log_3 \frac{1}{8} \Rightarrow x \leq \log_3 \frac{1}{8}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \log_3 \frac{1}{8} \right\}$$

c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} > 3^{x+1} - 3^x \Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 > 3^x \cdot 3 - 3^x \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2^x(1 + 2 + 4) > 3^x(3 - 1) \Rightarrow \frac{2^x}{3^x} > \frac{2}{7} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{2}{7} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log_2 \left(\frac{2}{3}\right)^x < \log_2 \frac{2}{7} \Rightarrow x < \log_2 \frac{2}{7}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \log_2 \frac{2}{7} \right\}$$

d) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} < 2^{x-2} - 2^x \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 < \frac{2^x}{2^2} - 2^x \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3^x \cdot (1 + 3 + 9) < 2^x \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right) \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} < \frac{-\frac{3}{4}}{13} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < -\frac{3}{52}.$

Como $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, a desigualdade acima nunca é satisfeita.

$$S = \emptyset.$$

e) $2^x + 2^{x+1} - 2^{x+3} < 5^{x+2} - 5^{x-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2 - 2^x \cdot 2^3 < 5^x \cdot 5^2 - \frac{5^x}{5} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2^x \cdot (1 + 2 - 8) < 5^x \cdot \left(25 - \frac{1}{5}\right) \Rightarrow (-5) \cdot 2^x < \frac{124}{5} \cdot 5^x.$

Multiplicando a desigualdade acima por (-1) , vem:

$$5 \cdot 2^x > -\frac{124}{5} \cdot 5^x \Rightarrow \frac{2^x}{5^x} > -\frac{124}{25} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x > -\frac{124}{25}.$$

Como $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, a desigualdade acima é sempre satisfeita.

$$S = \mathbb{R}.$$

326. a) $2^{3x+1} \cdot 5^{2x-3} > 6 \Rightarrow 2^{3x} \cdot 2 \cdot \frac{5^{2x}}{5^3} > 6 \Rightarrow$

$$8^x \cdot 25^x > 375 \Rightarrow 200^x > 375 \Rightarrow \log_{200} 200^x > \log_{200} 375 \Rightarrow x > \log_{200} 375$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{200} 375\}$$

b) $3^{2x-1} \cdot 2^{5-4x} > 5 \Rightarrow \frac{3^{2x}}{3} \cdot \frac{2^5}{2^{4x}} > 5 \Rightarrow \frac{9^x}{16^x} > \frac{15}{32} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{16}\right)^x > \frac{15}{32} \Rightarrow \log_{\frac{9}{16}} \left(\frac{9}{16}\right)^x < \log_{\frac{9}{16}} \frac{15}{32} \Rightarrow x < \log_{\frac{9}{16}} \frac{15}{32}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{\frac{9}{16}} \frac{15}{32} \right\}$$

327. a) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 > 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 6 > 0.$

Fazendo $3^x = t$, temos:

$$t^2 - 5t + 6 > 0 \Rightarrow (t < 2 \text{ ou } t > 3) \Rightarrow (3^x < 2 \text{ ou } 3^x > 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 3^x < \log_3 2 \text{ ou } x > 1) \Rightarrow (x < \log_3 2 \text{ ou } x > 1).$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_3 2 \text{ ou } x > 1\}.$$

b) $4^x - 2^{x+2} + 3 < 0 \Rightarrow (2^2)^x - 2^x \cdot 2^2 + 3 < 0.$

Fazendo $2^x = t$, vem:

$$t^2 - 4t + 3 < 0 \Rightarrow 1 < t < 3 \Rightarrow 1 < 2^x < 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 1 < \log_2 2^x < \log_2 3 \Rightarrow 0 < x < \log_2 3.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \log_2 3\}.$$

c) $25^x - 5^x - 6 \geq 0 \Rightarrow (5^x)^2 - 5^x - 6 \geq 0.$

Fazendo $5^x = t$, temos:

$$t^2 - t - 6 \geq 0 \Rightarrow t \leq -2 \text{ ou } t \geq 3.$$

Se $t \leq -2$, vem: $5^x \leq -2$, nunca é satisfeita.

Se $t \geq 3$, vem:

$$5^x \geq 3 \Rightarrow \log_5 5^x \geq \log_5 3 \Rightarrow x \geq \log_5 3.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \log_5 3\}.$$

d) $4^{x+\frac{1}{2}} - 2^x - 3 \leq 0 \Rightarrow 4^x \cdot 4^{\frac{1}{2}} - 2^x - 3 \leq 0.$

Fazendo $2^x = t$, vem:

$$t^2 \cdot 2 - t - 3 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq t \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -1 \leq 2^x \leq \frac{3}{2}.$$

Como $2^x \geq -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$|2^x| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \log_2 2^x \leq \log_2 \frac{3}{2} \Rightarrow x \leq \log_2 \frac{3}{2}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \log_2 \frac{3}{2} \right\}.$$

e) $25^x + 5^{x+1} + 4 \leq 0 \Rightarrow (5^x)^2 + 5^x \cdot 5 + 4 \leq 0.$

Fazendo $5^x = t$, vem:

$$t^2 + 5t + 4 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq t \leq -1, \text{ isto é, } -4 \leq 5^x \leq -1.$$

Como a 2ª parte da inequação simultânea nunca é satisfeita, pois $5^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, não há solução.

$$S = \emptyset.$$

f) $2 \cdot 9^x + 3^{x+2} + 4 > 0 \Rightarrow 2 \cdot (3^2)^x + 3^x \cdot 3^2 + 4 > 0.$

Fazendo $3^x = t$, vem:

$$\begin{aligned} 2t^2 + 9t + 4 > 0 &\Rightarrow \left(t < -4 \text{ ou } t > -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(3^x < -4 \text{ ou } 3^x > -\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

A 1.^a desigualdade nunca é satisfeita e a 2.^a desigualdade é satisfeita $\forall x \in \mathbb{IR}$.
 $S = \mathbb{IR}$.

328. $9^x - 6^x - 4^x > 0 \Rightarrow 9^x - 6^x > 4^x$.

Como $4^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{IR}$, podemos dividir membro a membro por 4^x :

$$\frac{9^x - 6^x}{4^x} > \frac{4^x}{4^x} \Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x - \left(\frac{6}{4}\right)^x > 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x > 1.$$

Fazendo $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$, temos:

$$\begin{aligned} t^2 - t - 1 > 0 &\Rightarrow \left(t < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } t > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (absurdo!) ou } \left(\frac{3}{2}\right)^x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^x > \log_{\frac{3}{2}} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x > \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{IR} \mid x > \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$$

329. Como $25^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{IR}$, podemos dividir ambos os membros por 25^x :

$$\begin{aligned} 4^x - 6 \cdot 10^x + 8 \cdot 25^x \leqslant 0 &\Rightarrow \frac{4^x - 6 \cdot 10^x + 8 \cdot 25^x}{25^x} \leqslant 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{4}{25}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{10}{25}\right)^x + 8 \leqslant 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 8 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Fazendo $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$, temos:

$$\begin{aligned} t^2 - 6t + 8 \leqslant 0 &\Rightarrow 2 \leqslant t \leqslant 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^x \leqslant 4 \Rightarrow \log_2 2 \geqslant \log_2 \left(\frac{2}{5}\right)^x \geqslant \log_2 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_{\frac{2}{5}} 4 \leqslant x \leqslant \log_{\frac{2}{5}} 2. \end{aligned}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{IR} \mid \log_{\frac{2}{5}} 4 \leqslant x \leqslant \log_{\frac{2}{5}} 2\right\}.$$

330. $4^{x+1} - 8 \cdot 6^x + 9^{x+\frac{1}{2}} \geqslant 0 \Rightarrow 4^x \cdot 4 - 8 \cdot 6^x + 9^x \cdot 9^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$.

Como $9^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{IR}$, podemos dividir ambos os membros por 9^x :

$$\frac{4^x \cdot 4 - 8 \cdot 6^x + 9^x \cdot 3}{9^x} \geq 0 \Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 \geq 0.$$

Fazendo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, temos:

$$4t^2 - 8t + 3 \geq 0 \Rightarrow \left(t \leq \frac{1}{2} \text{ ou } t \geq \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2} \text{ ou } \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \log_{\frac{2}{3}}\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x \geq \log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2} \text{ ou } x \leq -1\right).$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq \log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}\right\}.$$

331. a) $\log_3(5x - 2) < \log_3 4 \Rightarrow 0 < 5x - 2 < 4 \Rightarrow \frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}\right\}.$$

b) $\log_{0,3}(4x - 3) < \log_{0,3} 5 \Rightarrow 4x - 3 > 5 \Rightarrow 4x > 8 \Rightarrow x > 2$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}.$$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x + 3) \Rightarrow 0 < 3x - 1 \leq 2x + 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < x \leq 4$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x \leq 4\right\}.$$

d) $\log_2(2x^2 - 5x) \leq \log_2 3 \Rightarrow 0 < 2x^2 - 5x \leq 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 5x > 0 \text{ e } 2x^2 - 5x \leq 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x < 0 \text{ ou } x > \frac{5}{2} \text{ (I) e } -\frac{1}{2} \leq x \leq 3 \text{ (II)}\right)$$

Determinando (I) \cap (II), temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ ou } \frac{5}{2} < x \leq 3\right\}.$$

e) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) > \log_{\frac{1}{2}}(3x + 9) \Rightarrow 0 < x^2 - 1 < 3x + 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1 < 3x + 9 \text{ e } 0 < x^2 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2 < x < 5 \text{ (I) e } x < -1 \text{ ou } x > 1 \text{ (II)})$$

Determinando (I) \cap (II), temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } 1 < x < 5\}.$$

$$\text{f)} \log_{\frac{1}{10}}(x^2 + 1) < \log_{\frac{1}{10}}(2x - 5) \Rightarrow x^2 + 1 > 2x - 5 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1 > 2x - 5 \text{ e } 2x - 5 > 0) \Rightarrow x > \frac{5}{2}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{2} \right\}.$$

$$\text{g)} \log(x^2 - x - 2) < \log(x - 4) \Rightarrow 0 < x^2 - x - 2 < x - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2 > 0 \text{ e } x^2 - x - 2 < x - 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x < -1 \text{ ou } x > 2) \text{ e } (x^2 - 2x + 2 < 0)$$

Como a 2ª desigualdade não é nunca satisfeita, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se $x^2 - 2x + 2 > 0$, segue que não há solução.

$$S = \emptyset.$$

$$\text{332. a)} \log_5(x^2 - x) > \log_{0,2} \frac{1}{6} \Rightarrow \log_5(x^2 - x) > \log_1 \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5(x^2 - x) > -\log_5 \frac{1}{6} \Rightarrow \log_5(x^2 - x) > \log_5 \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x > 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow (x < -2 \text{ ou } x > 3).$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}.$$

$$\text{b)} \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > 2 - \log_2 5 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > \log_2 4 - \log_2 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > \log_2 \left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < x^2 - x - \frac{3}{4} < \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 - x - \frac{3}{4} > 0 \text{ e } x^2 - x - \frac{3}{4} < \frac{5}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{3}{2} \text{ (I) e } -1 < x < 2 \text{ (II)}\right)$$

Determinando (I) \cap (II), temos:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{3}{2} < x < 2 \right\}.$$

$$\text{333. } \log x - \operatorname{colog}(x + 1) > \log 12 \Rightarrow \log x + \log(x + 1) > \log 12$$

Lembrando que as propriedades operatórias só podem ser aplicadas se estabelecermos a condição de existência dos logaritmos, temos: $x > 0$ e $x + 1 > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x > 0$ (I). Então:

$$\log x + \log(x+1) > \log 12 \Rightarrow \log[x \cdot (x+1)] > \log 12 \Rightarrow x^2 + x > 12 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x < -4 \text{ ou } x > 3) \text{ (II).}$$

Fazendo (I) \cap (II), temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}.$$

334. a) Para mudarmos de base precisamos garantir a existência dos logaritmos, isto é, $2-x > 0$ e $x+1 > 0 \Rightarrow -1 < x < 2$ (I). Assim, temos:

$$\begin{aligned} \log_2(2-x) < \log_1(x+1) &\Rightarrow \log_2(2-x) < \log_2(x+1)^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2-x < \frac{1}{x+1}^{\frac{1}{2}} &\Rightarrow (2-x)(x+1) < 1 \text{ (esta passagem é garantida por (I))} \\ \Rightarrow -x^2 + x + 1 < 0 &\Rightarrow \left(x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ (II).} \end{aligned}$$

De (I) e (II) vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2\right\}$$

b) 1º caso: $\log_2 x > 0 \Rightarrow x > 1$ (I)

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 x} \leqslant \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+2}} &\Rightarrow 1 \leqslant \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{x+2}} \Rightarrow \log_2 x \geqslant \log_2 \sqrt{x+2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x \geqslant \sqrt{x+2} &\Rightarrow x^2 - x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow (x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 2) \text{ (II).} \end{aligned}$$

De (I) \cap (II) temos: $x \geqslant 2$.

2º caso: $\log_2 x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$ (I)

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 x} \leqslant \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+2}} &\Rightarrow 1 \geqslant \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{x+2}} \Rightarrow \log_2 x \leqslant \log_2 \sqrt{x+2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - x - 2 \leqslant 0 &\Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ (II).} \end{aligned}$$

De (I) \cap (II) resulta $0 < x < 1$.

Juntando os dois casos, temos: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2 \text{ ou } 0 < x < 1\}$.

335. a) $\log_2(3x+5) > 3 \Rightarrow 3x+5 > 2^3 \Rightarrow 3x+5 > 8 \Rightarrow x > 1$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

$$\text{b)} \log_{\frac{1}{3}}(4x-3) \geqslant 2 \Rightarrow 0 < 4x-3 \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{4} < x \leqslant \frac{7}{9}.$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} < x \leqslant \frac{7}{9}\right\}.$$

$$\text{c)} \log_2(x^2+x-2) \leqslant 2 \Rightarrow 0 < x^2+x-2 \leqslant 4 \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-2 > 0 \\ \text{e} \\ x^2+x-6 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ ou } x > 1 \text{ (I)} \\ e \\ -3 \leq x \leq 2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) \cap (II), vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2 \text{ ou } 1 < x \leq 2\}.$$

$$d) \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 6x + 3) < 1 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 3 > \left(\frac{1}{2}\right)^1 \Rightarrow 2x^2 - 6x + \frac{5}{2} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{5}{2}.$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\}.$$

$$e) \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) > -4 \Rightarrow 0 < x^2 + 4x - 5 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ e \\ x^2 + 4x - 21 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -5 \text{ ou } x > 1 \text{ (I)} \\ e \\ -7 < x < 3 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) \cap (II), vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < -5 \text{ ou } 1 < x < 3\}.$$

$$f) \log_{\frac{5}{8}}\left(2x^2 - x - \frac{3}{8}\right) \geq 1 \Rightarrow 0 < 2x^2 - x - \frac{3}{8} \leq \frac{5}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - \frac{3}{8} > 0 \\ e \\ 2x^2 - x - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{4} \text{ ou } x > \frac{3}{4} \text{ (I)} \\ e \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) \cap (II), vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{4} \text{ ou } \frac{3}{4} < x \leq 1\right\}.$$

$$g) \log(x^2 + 3x + 3) > 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 3 > 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > -1.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > -1\}.$$

$$h) \log_{0,3}(x^2 - 4x + 1) \geq 0 \Rightarrow 0 < x^2 - 4x + 1 \leq 0,3^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 > 0 \\ e \\ x^2 - 4x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 - \sqrt{3} \text{ ou } x > 2 + \sqrt{3} \text{ (I)} \\ e \\ 0 \leq x \leq 4 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) \cap (II), vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2 - \sqrt{3} \text{ ou } 2 + \sqrt{3} < x \leq 4\}.$$

336. $\log_a(2x - 3) > 0 \stackrel{0 < a < 1}{\iff} 0 < 2x - 3 < a^0 \Rightarrow 0 < 2x - 3 < 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2.$
 $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 2 \right\}.$

337. a) $2 < \log_2(3x + 1) < 4 \Rightarrow 2^2 < 3x + 1 < 2^4 \Rightarrow 4 < 3x + 1 < 16 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 1 < x < 5.$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}.$

b) $2 < \log_2(3 - 2x) \leq 3 \Rightarrow 4 < 3 - 2x \leq 8 \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq x < -\frac{1}{2}.$
 $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \right\}.$

c) $\frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}}(2x) < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > 2x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2} < 2x < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$
 $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2\sqrt{2}} \right\}.$

d) $0 < \log_3(x^2 - 4x + 3) < 1 \Rightarrow 1 < x^2 - 4x + 3 < 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 > 0 \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 - \sqrt{2} \text{ ou } x > 2 + \sqrt{2} \text{ (I)} \\ 0 < x < 4 \text{ (II)} \end{cases}$

Fazendo (I) \cap (II), vem:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 - \sqrt{2} \text{ ou } 2 + \sqrt{2} < x < 4\}.$

338. Temos: $1 \leq \log_{10}(x - 1) \leq 2 \Rightarrow 10 \leq x - 1 \leq 100 \Rightarrow 11 \leq x \leq 101.$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 11 \leq x \leq 101\}.$

339. a) $|\log_2 x| > 1 \Rightarrow (\log_2 x < -1 \text{ ou } \log_2 x > 1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left(0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right).$
 $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \right\}.$

b) $|\log_3(x - 3)| \geq 2 \Rightarrow (\log_3(x - 3) \leq -2 \text{ ou } \log_3(x - 3) \geq 2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left(0 < x - 3 \leq \frac{1}{9} \text{ ou } x - 3 \geq 9\right) \Rightarrow \left(3 < x \leq \frac{28}{9} \text{ ou } x \geq 12\right).$
 $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq \frac{28}{9} \text{ ou } x \geq 12 \right\}.$

c) $|\log x| < 1 \Rightarrow -1 < \log x < 1 \Rightarrow 10^{-1} < x < 10 \Rightarrow \frac{1}{10} < x < 10.$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10} < x < 10 \right\}.$$

d) $|2 + \log_2 x| \geq 3 \Rightarrow (2 + \log_2 x \leq -3 \text{ ou } 2 + \log_2 x \geq 3) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\log_2 x \leq -5 \text{ ou } \log_2 x \geq 1) \Rightarrow (0 < x \leq 2^{-5} \text{ ou } x \geq 2).$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{32} \text{ ou } x \geq 2 \right\}.$$

e) $|\log_3(x^2 - 1)| < 1 \Rightarrow -1 < \log_3(x^2 - 1) < 1 \Rightarrow 3^{-1} < x^2 - 1 < 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > \frac{1}{3} \\ x^2 - 1 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } x > \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ (I)} \\ -2 < x < 2 \text{ (II)} \end{cases}$

Fazendo (I) \cap (II), vem:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } \frac{2}{\sqrt{3}} < x < 2 \right\}.$$

340. a) Fazendo $\log_3 x = t$, vem:

$$3 \log_3^2 x + 5 \log_3 x - 2 \leq 0 \Rightarrow 3t^2 + 5t - 2 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq t \leq \frac{1}{3} \Rightarrow$$

 $\Rightarrow -2 \leq \log_3 x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{-2} \leq x \leq 3^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{1}{9} \leq x \leq \sqrt[3]{3}.$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{9} \leq x \leq \sqrt[3]{3} \right\}.$$

b) Fazendo $\log_{\frac{1}{2}} x = t$, vem:

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 3 \log_{\frac{1}{2}} x - 4 > 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 > 0 \Rightarrow (t < -1 \text{ ou } t > 4)$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x < -1 \text{ ou } \log_{\frac{1}{2}} x > 4) \Rightarrow \left(x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ ou } 0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x > 2 \text{ ou } 0 < x < \frac{1}{16} \right).$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{16} \text{ ou } x > 2 \right\}.$$

c) $\log_2^2 x < 4$.

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$t^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < t < 2 \Rightarrow -2 < \log_2 x < 2 \Rightarrow \frac{1}{4} < x < 4.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < 4 \right\}.$$

$$d) 1 < \log^2 x < 3 \Rightarrow \begin{cases} \log^2 x > 1 \\ e \\ \log^2 x < 3 \end{cases}$$

Fazendo $\log x = t$, temos:

$$\begin{cases} t^2 > 1 \\ e \\ t^2 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t < -1 \text{ ou } t > 1 \text{ (I)} \\ -\sqrt{3} < t < \sqrt{3} \text{ (II)} \end{cases}$$

De (I) e (II) vem:

$$\begin{aligned} (-\sqrt{3} < t < -1 \text{ ou } 1 < t < \sqrt{3}) &\Rightarrow \\ \Leftrightarrow (-\sqrt{3} < \log x < -1 \text{ ou } 1 < \log x < \sqrt{3}) &\Rightarrow \\ \Rightarrow (10^{-\sqrt{3}} < x < 10^{-1} \text{ ou } 10 < x < 10^{\sqrt{3}}). \end{aligned}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10^{\sqrt{3}}} < x < \frac{1}{10} \text{ ou } 10 < x < 10^{\sqrt{3}} \right\}.$$

e) Fazendo $\log^2 x = t$, temos:

$$\log^4 x - 5 \log^2 x + 4 < 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 < 0 \Rightarrow 1 < t < 4, \text{ isto é, } 1 < \log^2 x < 4.$$

Se fizermos $\log x = v$, teremos:

$$\begin{aligned} 1 < v^2 < 4 \Rightarrow \begin{cases} v^2 > 1 \\ e \\ v^2 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v < -1 \text{ ou } v > 1 \\ e \\ -2 < v < 2 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow (-2 < v < -1 \text{ ou } 1 < v < 2) \Rightarrow (-2 < \log x < -1 \text{ ou } 1 < \log x < 2) \Rightarrow \\ \Rightarrow (10^{-2} < x < 10^{-1} \text{ ou } 10 < x < 10^2). \\ S = \{x \in \mathbb{R} \mid 10^{-2} < x < 10^{-1} \text{ ou } 10 < x < 10^2\}. \end{aligned}$$

f) Fazendo $\log_2 x = t$, temos:

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} < 1 \Rightarrow \frac{-t^2 + t - 1}{t^2 - t} < 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$$(t < 0 \text{ ou } t > 1) \Rightarrow (\log_2 x < 0 \text{ ou } \log_2 x > 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow (0 < x < 1 \text{ ou } x > 2).$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}.$$

341. Fazendo $\log_e x = t$, temos:

$$2(\log_e x)^2 - \log_e x > 6 \Rightarrow 2t^2 - t - 6 > 0 \Rightarrow \left(t < -\frac{3}{2} \text{ ou } t > 2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\log_e x < -\frac{3}{2} \text{ ou } \log_e x > 2 \right) \Rightarrow (0 < x < e^{-\frac{3}{2}} \text{ ou } x > e^2).$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < e^{-\frac{3}{2}} \text{ ou } x > e^2\}.$$

342. a) Como $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, temos:

$$\log_2 x - 6 \log_x 2 + 1 > 0 \Rightarrow \log_2 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_2 x} + 1 > 0.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$t - \frac{6}{t} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{t^2 + t - 6}{t} > 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$$(-3 < t < 0 \text{ ou } t > 2) \Rightarrow (-3 < \log_2 x < 0 \text{ ou } \log_2 x > 2) \Rightarrow \left(\frac{1}{8} < x < 1 \text{ ou } x > 4 \right).$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{8} < x < 1 \text{ ou } x > 4 \right\}.$$

b) $\log_2 x - \log_x 8 - 2 \geq 0 \Rightarrow \log_2 x - \frac{\log_2 8}{\log_2 x} - 2 \geq 0.$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$t - \frac{3}{t} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{t^2 - 2t - 3}{t} \geq 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$$(-1 \leq t < 0 \text{ ou } t \geq 3) \Rightarrow (-1 \leq \log_2 x < 0 \text{ ou } \log_2 x \geq 3) \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ ou } x \geq 8 \right).$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ ou } x \geq 8 \right\}.$$

c) Como sabemos,

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^5}{4}\right) = \frac{\log_2\left(\frac{x^5}{4}\right)}{\log_2\frac{1}{2}} = -\log_2\left(\frac{x^5}{4}\right) = -[\log_2 x^5 - \log_2 4] = 2 - 5\log_2 x.$$

Então, a desigualdade proposta é equivalente a:

$$(\log_2 x)^4 - (2 - 5\log_2 x)^2 - 20\log_2 x + 148 < 0.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$t^4 - (2 - 5t)^2 - 20t + 148 < 0 \Rightarrow t^4 - 25t^2 + 144 < 0.$$

Fazendo $t^2 = v$, temos:

$$v^2 - 25v + 144 < 0 \Rightarrow 9 < v < 16 \Rightarrow 9 < t^2 < 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-4 < t < -3 \text{ ou } 3 < t < 4) \Rightarrow (-4 < \log_2 x < -3 \text{ ou } 3 < \log_2 x < 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{16} < x < \frac{1}{8} \text{ ou } 8 < x < 16 \right).$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{16} < x < \frac{1}{8} \text{ ou } 8 < x < 16 \right\}.$$

343. Como $\log_x e = \frac{1}{\log_e x}$, podemos escrever:

$$\frac{1}{\log_e x} + \frac{1}{\frac{1}{\log_e x} - 1} > 1.$$

Fazendo $\log_e x = t$, vem:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{1}{t} - 1} > 1 \Rightarrow \frac{2t^2 - 2t + 1}{t - t^2} > 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$$0 < t < 1 \Rightarrow 0 < \log_e x < 1 \Rightarrow 1 < x < e.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < e\}.$$

344. A condição de existência dos logaritmos é $1 - \frac{8(\log_{\frac{1}{4}} x)^2}{4} \geq 0$ e $x > 0$.

Fazendo $\log_{\frac{1}{4}} x = t$, vem:

$$1 - 8t^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq t \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \log_{\frac{1}{4}} x \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ e } x > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ (I).}$$

Voltando à desigualdade proposta, temos:

$$1 - \sqrt{1 - 8(\log_{\frac{1}{4}} x)^2} < 3 \log_{\frac{1}{4}} x \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - 8t^2} < 3t \Rightarrow$$

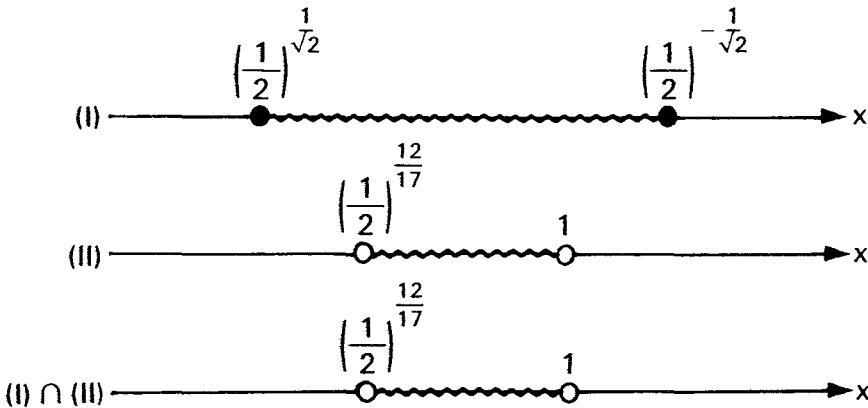
$$\Rightarrow 1 - 3t < \sqrt{1 - 8t^2} \Rightarrow 0 \leq (1 - 3t)^2 < 1 - 8t^2.$$

Como $(1 - 3t)^2 \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, temos apenas:

$$(1 - 3t)^2 < 1 - 8t^2 \Rightarrow 17t^2 - 6t < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < t < \frac{6}{17} \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{4}} x < \frac{6}{17} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{17}} < x < 1 \text{ (II).}$$

A solução da inequação é dada pela interseção de (I) e (II):



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{17}} < x < 1\right\}.$$

345. Escrevendo os logaritmos em base 2, temos:

$$\frac{\log_2 8}{2} + \frac{\log_2 8}{4} < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4} \Rightarrow \frac{\log_2 8}{\log_2 \left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\log_2 8}{\log_2 \left(\frac{x}{4}\right)} < \frac{4 \log_2 x}{2 \log_2 x - 4}.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, temos:

$$\frac{3}{t-1} + \frac{3}{t-2} < \frac{4t}{2t-4} \Rightarrow \frac{-2t^2 + 8t - 9}{t^2 - 3t + 2} < 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, obtemos:

$$(t < 1 \text{ ou } t > 2) \Rightarrow (\log_2 x < 1 \text{ ou } \log_2 x > 2) \Rightarrow (0 < x < 2 \text{ ou } x > 4). \\ S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ ou } x > 4\}.$$

346. Fazendo $\log_a x = t$, temos:

$$\frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1 \Rightarrow \frac{1 + t^2}{1 + t} > 1 \Rightarrow \frac{t^2 - t}{1 + t} > 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, obtemos: $-1 < t < 0$ ou $t > 1$, isto é:

$$-1 < \log_a x < 0 \stackrel{0 < a < 1}{\iff} 1 < x < \frac{1}{a}$$

ou

$$\log_a x > 1 \stackrel{0 < a < 1}{\iff} 0 < x < a.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{1}{a} \text{ ou } 0 < x < a \right\}.$$

348. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > \frac{1}{2}$ (I).

Temos:

$$\log_3(3x+4) - \log_3(2x-1) > 1 \Rightarrow \log_3 \left(\frac{3x+4}{2x-1} \right) > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x+4}{2x-1} > 3 \stackrel{x > \frac{1}{2}}{\iff} 3x+4 > 3(2x-1) \Rightarrow x < \frac{7}{3} \text{ (II).}$$

A solução da inequação é dada por (I) \cap (II):

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < \frac{7}{3} \right\}.$$

b) A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$ (I).

Temos:

$$\log_2 x + \log_2(x+1) < \log_2(2x+6) \Rightarrow \log_2[x \cdot (x+1)] < \log_2(2x+6) \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + x < 2x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow -2 < x < 3 \text{ (II).}$$

De (I) \cap (II) vem: $0 < x < 3$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}.$$

c) A condição de existência dos logaritmos é $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$ (I).

Temos:

$$\log_2(3x + 2) - \log_2(1 - 2x) > 2 \Rightarrow \log_2\left(\frac{3x + 2}{1 - 2x}\right) > 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x + 2}{1 - 2x} > 4 \stackrel{1-2x>0}{\iff} 3x + 2 > 4 - 8x \Rightarrow x > \frac{2}{11} \text{ (II).}$$

De (I) \cap (II) segue que: $\frac{2}{11} < x < \frac{1}{2}$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{11} < x < \frac{1}{2} \right\}.$$

d) A condição de existência dos logaritmos é $x > \frac{1}{2}$ (I).

Temos:

$$\log(2x - 1) - \log(x + 2) < \log 3 \Rightarrow \log\left(\frac{2x - 1}{x + 2}\right) < \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x - 1}{x + 2} < 3 \stackrel{x+2>0}{\iff} 2x - 1 < 3x + 6 \Rightarrow x > -7 \text{ (II).}$$

De (I) \cap (II) temos: $x > \frac{1}{2}$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \right\}.$$

e) A condição de existência dos logaritmos é $x > 2$ (I).

Temos:

$$\log_3(x^2 + x - 6) - \log_3(x + 1) > \log_3 4 \Rightarrow \log_3\left(\frac{x^2 + x - 6}{x + 1}\right) > \log_3 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x + 1} > 4 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} x^2 + x - 6 > 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > 5 \text{ (II).}$$

(I) \cap (II): $x > 5$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}.$$

f) A condição de existência dos logaritmos é $x > 1$ (I).

Temos:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(3x - 2) \geq -2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}[(x - 1) \cdot (3x - 2)] \geq -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 1)(3x - 2) \leq 4 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 2 \text{ (II).}$$

De (I) \cap (II) temos: $1 < x \leq 2$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}.$$

349. A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$ (I).

Temos:

$$\log_{10}x + \log_{10}(x + 3) < 1 \Rightarrow \log_{10}[x \cdot (x + 3)] < 1 \Rightarrow x^2 + 3x < 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow -5 < x < 2 \text{ (II).}$$

De (I) \cap (II) vem: $0 < x < 2$.
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$.

350. a) A condição de existência dos logaritmos é $x > -\frac{1}{6}$ (I).

Temos:

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt{6x+1} + \log_2 \sqrt{x+1} &> \log_2 3 \Rightarrow \log_2 \left[\sqrt{6x+1} \cdot \sqrt{x+1} \right] > \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 \sqrt{6x^2 + 7x + 1} &> \frac{1}{2} \cdot \log_2 3 \Rightarrow 2 \cdot \log_2 \sqrt{6x^2 + 7x + 1} > \log_2 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 (\sqrt{6x^2 + 7x + 1})^2 &> \log_2 3 \Rightarrow 6x^2 + 7x + 1 > 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 6x^2 + 7x - 2 > 0 &\Rightarrow x < \frac{-7 - \sqrt{97}}{12} \text{ ou } x > \frac{-7 + \sqrt{97}}{12} \text{ (II).} \end{aligned}$$

De (I) \cap (II) temos: $x > \frac{-7 + \sqrt{97}}{12}$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{-7 + \sqrt{97}}{12} \right\}.$$

b) A condição de existência dos logaritmos é $x > 1$ (I).

Como $\log_4(8x) = \frac{\log_2(8x)}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \cdot \log_2(8x) = \log_2(8x)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{8x}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \log_4(8x) - \log_2 \sqrt{x-1} - \log_2 \sqrt{x+1} &< \log_2 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 \sqrt{8x} &< \log_2 3 + \log_2 \sqrt{x-1} + \log_2 \sqrt{x+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 \sqrt{8x} &< \log_2 (3 \cdot \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 \sqrt{8x} &< \log_2 (3 \cdot \sqrt{x^2-1}) \Rightarrow 8x < 9(x^2-1) \Rightarrow 9x^2 - 8x - 9 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x < \frac{4 - \sqrt{97}}{9} \text{ ou } x > \frac{4 + \sqrt{97}}{9} \text{ (II).} \end{aligned}$$

Fazendo (I) \cap (II), obtemos: $x > \frac{4 + \sqrt{97}}{9}$. $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{4 + \sqrt{97}}{9} \right\}$.

351. A condição de existência dos logaritmos é:

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 1 > 0 \text{ (é satisfeita para } \forall x \in \mathbb{R}) \\ \text{e} \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2} \text{ (I)}$$

Como $\log_4(2x^2 + x + 1) = \frac{\log_2(2x^2 + x + 1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \cdot \log_2(2x^2 + x + 1) =$

$= \log_2(2x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{2x^2 + x + 1}$, podemos escrever:
 $\log_4(2x^2 + x + 1) - \log_2(2x - 1) \leq 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \log_2 \sqrt{2x^2 + x + 1} - \log_2 (2x - 1) \leq 1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{2x - 1} \right) \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{2x - 1} \leq 2 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \\
 &\Rightarrow \sqrt{2x^2 + x + 1} \leq 2(2x - 1) \Rightarrow 2x^2 + x + 1 \leq [2(2x - 1)]^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 14x^2 - 17x + 3 \geq 0 \Rightarrow \left(x \leq \frac{3}{14} \text{ ou } x \geq 1 \right) \text{ (II).}
 \end{aligned}$$

Fazendo (I) \cap (II), temos: $x \geq 1$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}.$$

353. a) $\log_{\frac{1}{3}} (\log_2 x) < 0 \Rightarrow \log_2 x > \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow \log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}.$$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_{\frac{1}{3}} x) \geq 0 \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{3}} x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x < 1$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq x < 1 \right\}.$$

c) $\log_2 (\log_{\frac{1}{2}} x) \geq 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \geq 2 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{4}$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

d) $\log_2 [\log_3 (\log_5 x)] > 0 \Rightarrow \log_3 (\log_5 x) > 1 \Rightarrow \log_5 x > 3 \Rightarrow x > 125$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 125\}.$$

e) $\log_{\frac{1}{2}} [\log_3 (\log_{\frac{1}{2}} x)] < 0 \Rightarrow \log_3 (\log_{\frac{1}{2}} x) > 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x > 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 < x < \frac{1}{8}$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{8} \right\}.$$

f) $\log_2 [\log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x)] > 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x) > 2 \Rightarrow 0 < \log_3 x < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 < \log_3 x < \frac{1}{4} \Rightarrow 1 < x < \sqrt[4]{3}$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \sqrt[4]{3}\}.$$

354. $\log_{\frac{1}{3}} [\log_{\frac{1}{3}} x] \geq 0 \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{3}} x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x < 1$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq x < 1 \right\}.$$

355. Temos:

$$\log_a (\log_a x) < 0 \stackrel{a>1}{\implies} 0 < \log_a x < 1 \stackrel{a>1}{\implies} 1 < x < a.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < a\}.$$

356. Temos:

$$\log_a \left(\log_{\frac{1}{a}} x \right) \leqslant 0 \stackrel{0 < a < 1}{\implies} \log_{\frac{1}{a}} x \geqslant 1 \stackrel{\frac{1}{a} > 1}{\implies} x \geqslant \frac{1}{a}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{a} \right\}.$$

357. Temos:

$$\log_a \left[\log_{\frac{1}{a}} (\log_a x) \right] \geqslant 0 \stackrel{a>1}{\implies} \log_{\frac{1}{a}} (\log_a x) \geqslant 1 \stackrel{0 < \frac{1}{a} < 1}{\implies} 0 < \log_a x \leqslant \frac{1}{a} \Rightarrow$$

$$\stackrel{a>1}{\implies} 1 < x \leqslant a^{\frac{1}{a}}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant \sqrt[a]{a}\}.$$

358. Temos:

$$\log_{\frac{1}{a}} \left[\log_a (\log_a x) \right] \leqslant 0 \stackrel{\frac{1}{a} > 1}{\implies} 0 < \log_a (\log_a x) \leqslant 1 \stackrel{0 < a < 1}{\implies}$$

$$\Rightarrow a \leqslant \log_a x < 1 \stackrel{0 < a < 1}{\implies} a < x \leqslant a^a.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant a^a\}.$$

359. a) $\log_2 \{1 + \log_3 [\log_2 (x^2 - 3x + 2)]\} \geqslant 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 + \log_3 [\log_2 (x^2 - 3x + 2)] \geqslant 1 \Rightarrow \log_3 [\log_2 (x^2 - 3x + 2)] \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 (x^2 - 3x + 2) \geqslant 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \geqslant 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3\}.$$

b) $\log_{\frac{1}{3}} [\log_4 (x^2 - 5)] > 0 \Rightarrow 0 < \log_4 (x^2 - 5) < 1 \Rightarrow 1 < x^2 - 5 < 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5 > 1 \\ x^2 - 5 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{6} \text{ ou } x > \sqrt{6} \text{ (I)} \\ -3 < x < 3 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) \cap (II), vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -\sqrt{6} \text{ ou } \sqrt{6} < x < 3\}.$$

c) $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x-1} \right) < 0 \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x-1} \right) < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-1} > \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x-1} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4-x}{x-1} > 0 \text{ (I)} \\ \frac{2-x}{x-1} < 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo o quadro-quociente para (I), decorre $1 < x < 4$, e para (II) decorre $x < 1$ ou $x > 2$.

Fazendo a interseção desses intervalos, vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}.$$

$$\text{d) } \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} \right) \leq 0 \Rightarrow \log_8 \left(\frac{x^2 - 2x}{x - 3} \right) \geq 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x}{x - 3} \geq 8 \Rightarrow \frac{x^2 - 10x + 24}{x - 3} \geq 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 4 \text{ ou } x \geq 6\}.$$

360. a) Devemos ter: $\log_2 x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$.

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}.$$

b) Devemos ter: $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1$.

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0^{\frac{1}{2}} < x \leq 1\}.$$

c) Devemos ter: $\log_2 (\log_{\frac{1}{2}} x) \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \geq 1 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}$.

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

d) Neste caso, precisamos garantir somente a existência do logaritmo, isto é, $\log_2 x > 0 \Rightarrow x > 1$.

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

e) Devemos ter: $\log_3 \frac{x^2 + 2x - 7}{x - 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 7}{x - 1} \geq 1 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x - 1} \geq 0$.

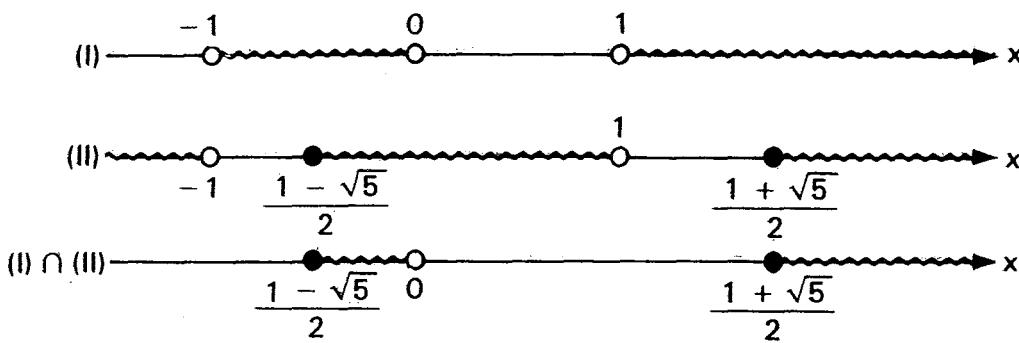
Fazendo o quadro-quociente, temos:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1 \text{ ou } x \geq 2\}.$$

f) Devemos ter: $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) \geq 0 \Rightarrow 0 < \frac{x}{x^2 - 1} \leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 1} > 0 \\ \frac{x}{x^2 - 1} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 1} > 0 \quad (\text{I}) \\ \frac{-x^2 + x + 1}{x^2 - 1} \leq 0 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

Fazendo o quadro-quociente para (I) e (II), obtemos:



$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x < 0 \text{ ou } x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

361. Devemos ter: $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq 0 \Rightarrow 0 < x - 1 \leq 1 \Rightarrow 1 < x \leq 2$.

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}.$$

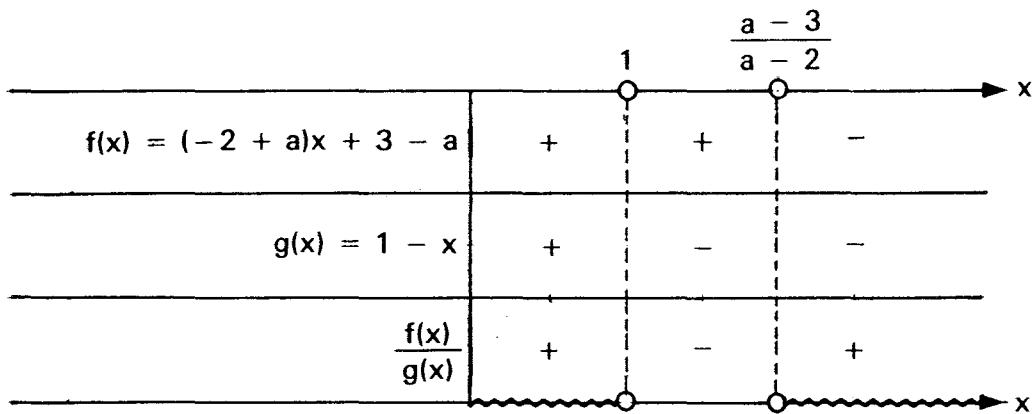
362. A desigualdade $\sqrt{\log_a \frac{3 - 2x}{1 - x}} < I$ é equivalente à desigualdade $0 \leq \log_a \frac{3 - 2x}{1 - x} < I$.

1º caso: $0 < a < 1$

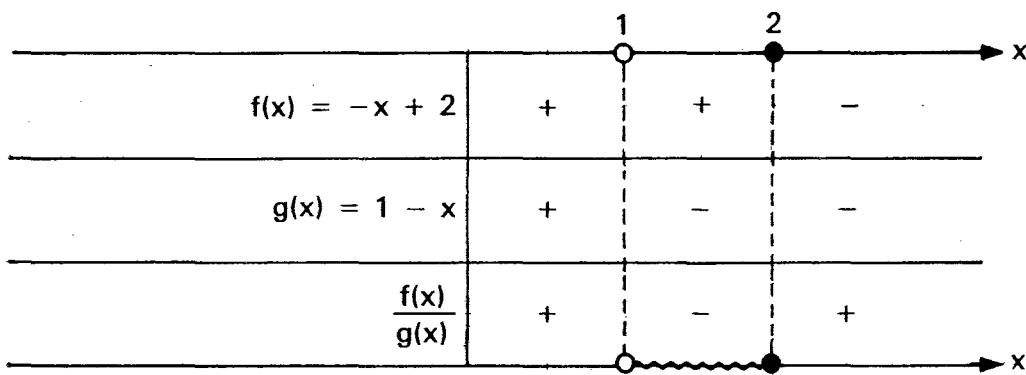
$$0 \leq \log_a \frac{3 - 2x}{1 - x} < 1 \Rightarrow a < \frac{3 - 2x}{1 - x} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3 - 2x}{1 - x} > a & (\text{I}) \\ \frac{3 - 2x}{1 - x} \leq 1 & (\text{II}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{(-2 + a)x + 3 - a}{1 - x} > 0 & (\text{I}) \\ \frac{-x + 2}{1 - x} \leq 0 & (\text{II}) \end{cases}$$

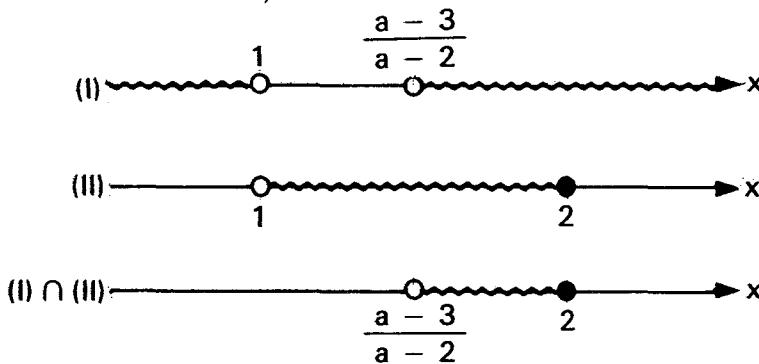
Para resolver (I), notemos que, como $0 < a < 1$, $-2 + a < 0$ e portanto a função $f(x) = (-2 + a)x + 3 - a$ é decrescente. Então, fazendo o quadro-quociente, temos:



Fazendo o quadro-quociente para (II), obtemos:



Fazendo (I) \cap (II), vem:



2º caso: $a > 1$ e $-2 + a < 0$, isto é, $1 < a < 2$

Temos:

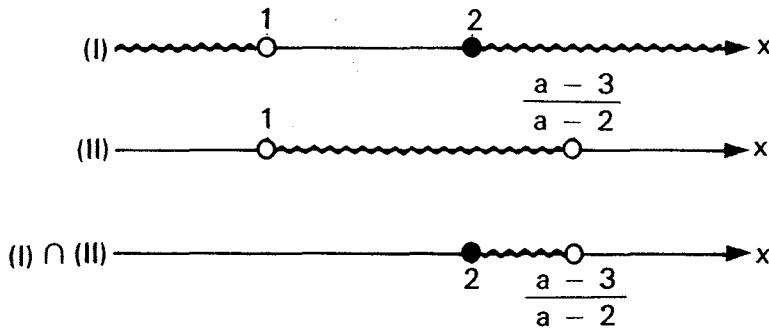
$$0 \leq \log_a \frac{3 - 2x}{1 - x} < 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{3 - 2x}{1 - x} < a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3 - 2x}{1 - x} \geq 1 \\ \frac{3 - 2x}{1 - x} < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x + 2}{1 - x} \geq 0 \quad (\text{I}) \\ \frac{(-2 + a)x + 3 - a}{1 - x} < 0 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

Utilizando o quadro-quociente anterior para (I) e (II) (notemos que a função $f(x) = (-2 + a)x + 3 - a$ neste caso também é decrescente), temos:

$$(I): x < 1 \text{ ou } x \geq 2 \text{ e } (II): 1 < x < \frac{a-3}{a-2}.$$

Fazendo $(I) \cap (II)$, temos:



(Notemos que para $1 < a < 2$, $\frac{a-3}{a-2} > 2$.)

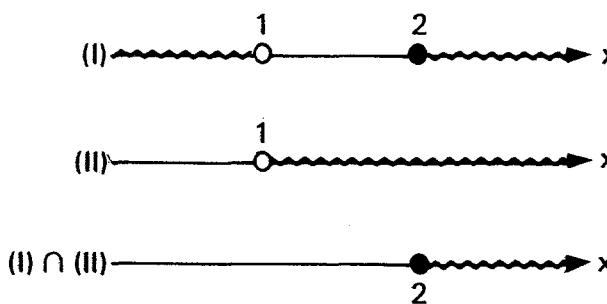
3º caso: $a > 1$ e $-2 + a = 0$, isto é, $a = 2$

Temos:

$$0 \leq \log_a \frac{3-2x}{1-x} < 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{3-2x}{1-x} < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3-2x}{1-x} \geq 1 \\ \frac{3-2x}{1-x} < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x+2}{1-x} \geq 0 \quad (I) \\ \frac{1}{1-x} < 0 \quad (II) \end{cases}$$

Temos:



4º caso: $a > 1$ e $-2 + a > 0$, isto é, $a > 2$

Temos:

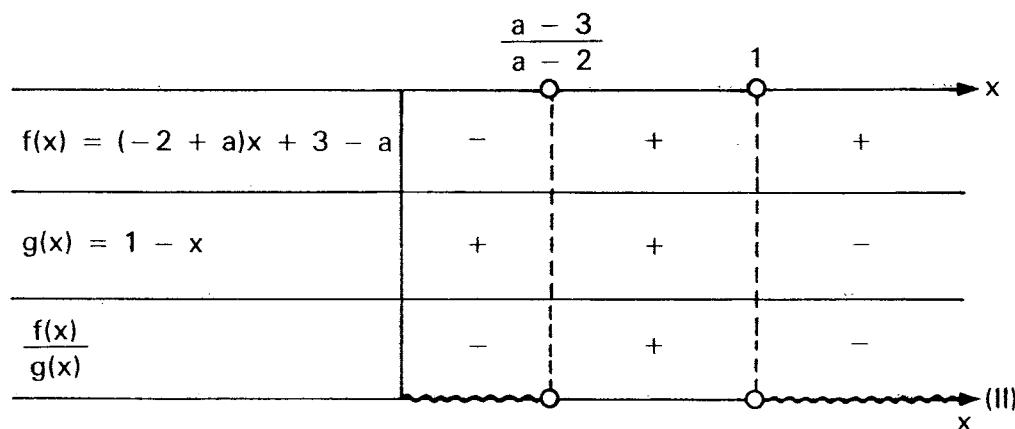
$$0 \leq \log_a \left(\frac{3 - 2x}{1 - x} \right) < 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{3 - 2x}{1 - x} < a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3 - 2x}{1 - x} \geq 1 \\ \frac{3 - 2x}{1 - x} < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x + 2}{1 - x} \geq 0 \quad (\text{I}) \\ \frac{(-2 + a)x + 3 - a}{1 - x} < 0 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

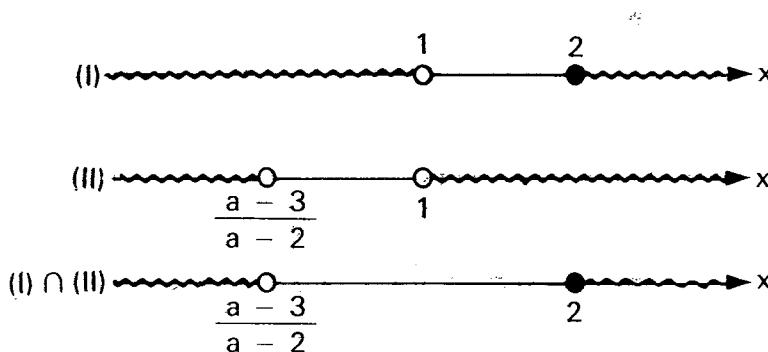
Para resolvemos (II), notemos que, como $a > 2$, a função

$f(x) = (-2 + a)x + 3 - a$ é crescente. Fazendo o quadro-quociente, temos:

(Notemos também que para $a > 2$, $\frac{a-3}{a-2} < 1$.)



Fazendo, então, $(\text{I}) \cap (\text{II})$, temos:



Agrupando os 4 casos, temos:

$$0 < a < 1 \Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{a-3}{a-2} < x \leq 2 \right\}$$

$$1 < a < 2 \Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < \frac{a-3}{a-2} \right\}$$

$$a = 2 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

$$a > 2 \Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{a-3}{a-2} \text{ ou } x \geq 2 \right\}.$$

363. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\log_1(4x^2 - 9x + 5)}{3}} > 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\log_1(4x^2 - 9x + 5)}{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow$
 $\log_{\frac{1}{3}}(4x^2 - 9x + 5) < -1 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 5 > 3 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 2$
 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 2\right\}.$

b) $3^{\frac{\log_1(x^2 + 6x)}{2}} \leq \frac{1}{81} \Rightarrow 3^{\frac{\log_1(x^2 + 6x)}{2}} \leq 3^{-4} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 6x) \leq -4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 + 6x \geq 16 \Rightarrow x^2 + 6x - 16 \geq 0 \Rightarrow x \leq -8 \text{ ou } x \geq 2$
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -8 \text{ ou } x \geq 2\}.$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\log_3\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]}{2}} < 1 \Rightarrow \log_3\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] > 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{x}\right) > 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 < x - \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} > 0 \\ x - \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x} > 0 \\ \frac{2x^2 - x - 2}{2x} < 0 \end{cases}$

Fazendo o quadro-quociente, vem:

$\Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1 \text{ (I)} \\ x < \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \text{ ou } 0 < x < \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \text{ (II).} \end{cases}$

Fazendo (I) \cap (II), vem:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \text{ ou } 1 < x < \frac{1 + \sqrt{17}}{4}\right\}.$

d) $(1,25)^{1 - \log_2^2 x} < (0,64)^{2 + \log_{\sqrt{2}} x} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{1 - \log_2^2 x} < \left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^{(2 + \log_{\sqrt{2}} x)} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{1 - \log_2^2 x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4 + 2 \log_{\sqrt{2}} x} \Rightarrow \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right]^{1 - \log_2^2 x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4 + 2 \log_{\sqrt{2}} x} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_2^2 x - 1} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4 + 2 \log_{\sqrt{2}} x} \Rightarrow \log_2^2 x - 1 > 4 + 2 \log_{\sqrt{2}} x$

Como $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}} = 2 \log_2 x$, podemos escrever:

$(\log_2 x)^2 - 1 > 4 + 4 \log_2 x.$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$t^2 - 1 > 4 + 4t \Rightarrow t^2 - 4t - 5 > 0 \Rightarrow (t < -1 \text{ ou } t > 5), \text{ isto é,}$$

$$\left(\log_2 x < -1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2} \right) \text{ ou } (\log_2 x > 5 \Rightarrow x > 32).$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 32 \right\}.$$

364. 1º caso: $0 < x < 1$ (I)

$$x^2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 > x^{-1} \Rightarrow 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 < -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - (\log_2 x)^2 - 2 \cdot \log_2 x < -1.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$2 - t^2 - 2t < -1 \Rightarrow -t^2 - 2t + 3 < 0 \Rightarrow (t < -3 \text{ ou } t > 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2 x < -3 \text{ ou } \log_2 x > 1) \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{8} \text{ ou } x > 2 \text{ (II).}$$

A solução do 1º caso é dada por (I) \cap (II), isto é: $0 < x < \frac{1}{8}$.

2º caso: $x > 1$ (I)

$$x^2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 > x^{-1} \Rightarrow 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 > -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - (\log_2 x)^2 - 2 \cdot \log_2 x + 1 > 0.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$2 - t^2 - 2t + 1 > 0 \Rightarrow -t^2 - 2t + 3 > 0 \Rightarrow -3 < t < 1, \text{ isto é,}$$

$$-3 < \log_2 x < 1 \Rightarrow \frac{1}{8} < x < 2 \text{ (II).}$$

A solução do 2º caso é dada por (I) \cap (II), isto é: $1 < x < 2$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{8} \text{ ou } 1 < x < 2 \right\}.$$

366. a) Devemos ter $\Delta \geq 0$, isto é,

$$4 + 4 \log_2 a \geq 0 \Rightarrow \log_2 a \geq -1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}.$$

b) Devemos ter $\Delta \geq 0$, isto é,

$$36 - 4 \cdot 3 \cdot \log a \geq 0 \Rightarrow \log a \leq 3 \Rightarrow 0 < a \leq 10^3.$$

c) Devemos ter $\Delta \geq 0$, isto é,

$$(-\log_3 a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \geq 0 \Rightarrow (\log_3 a)^2 - 16 \geq 0.$$

Fazendo $\log_3 a = t$, vem:

$$t^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow (t \leq -4 \text{ ou } t \geq 4), \text{ isto é,}$$

$$(\log_3 a \leq -4 \text{ ou } \log_3 a \geq 4) \Rightarrow 0 < a \leq \frac{1}{81} \text{ ou } a \geq 81.$$

d) Devemos ter $\Delta \geq 0$, isto é,

$$(-\log_2 a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \log_2 a \geq 0 \Rightarrow (\log_2 a)^2 - 4 \log_2 a \geq 0.$$

Fazendo $\log_2 a = t$, vem:

$$t^2 - 4t \geq 0 \Rightarrow (t \leq 0 \text{ ou } t \geq 4), \text{ isto é,}$$

$$(\log_2 a \leq 0 \text{ ou } \log_2 a \geq 4) \Rightarrow 0 < a \leq 1 \text{ ou } a \geq 16.$$

367. Devemos ter $\Delta < 0$, isto é,

$$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\log_{10} m) < 0 \Rightarrow 4 + 4 \log_{10} m < 0 \Rightarrow \log_{10} m < -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < m < \frac{1}{10}.$$

368. A equação admitirá raízes de sinais contrários se o produto das raízes for negativo, isto é, $P = \frac{c}{a} < 0$.

Temos, então:

$$\frac{\log_{10} N}{1} < 0 \Rightarrow \log_{10} N < 0 \Rightarrow 0 < N < 1.$$

369. Devemos ter $\Delta > 0$, isto é,

$$[-(\log_e t + 3)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\log_e t) > 0 \Rightarrow (\log_e t)^2 + 10 \log_e t + 9 > 0.$$

Fazendo $\log_e t = y$, vem:

$$y^2 + 10y + 9 > 0 \Rightarrow y < -9 \text{ ou } y > -1, \text{ isto é,}$$

$$\log_e t < -9 \text{ ou } \log_e t > -1 \Rightarrow 0 < t < e^{-9} \text{ ou } t > \frac{1}{e}.$$

370. Devemos ter $P = \frac{c}{a} < 0$, isto é,

$$\frac{\log(2a^2 - 9a + 10)}{3} < 0 \Rightarrow \log(2a^2 - 9a + 10) < 0 \Rightarrow$$

$$0 < 2a^2 - 9a + 10 < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 - 9a + 10 > 0 \\ 2a^2 - 9a + 10 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 2 \text{ ou } a > \frac{5}{2} & \text{(I)} \\ \frac{3}{2} < a < 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Devemos ter $\frac{3}{2} < a < 2$ ou $\frac{5}{2} < a < 3$ para satisfazer (I) e (II).

371. a) 1º caso: Se $\log_2(1 - x) \geq 0$, isto é, $1 - x \geq 1 \Rightarrow x \leq 0$ (I).

Temos:

$$(4 - x^2) \cdot \log_2(1 - x) \leq 0 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} 4 - x^2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \text{ (II).}$$

Fazendo (I) ∩ (II), temos: $x \leq -2$.

2º caso: Se $\log_2(1 - x) \leq 0$, isto é, $0 < 1 - x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$ (I).

Temos:

$$(4 - x^2) \cdot \log_2(1 - x) \leq 0 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \text{ (II).}$$

Fazendo (I) ∩ (II), temos: $0 \leq x < 1$.

Assim, agrupando as 2 possibilidades, vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 0 \leq x < 1\}.$$

b) 1º caso: Se $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) \geq 0 \Rightarrow 0 < 3x - 4 \leq 1 \Rightarrow \frac{4}{3} < x \leq \frac{5}{3}$ (I).

Temos:

$$(5x^2 + x - 6) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) \geq 0 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} 5x^2 + x - 6 \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x \leq -\frac{6}{5} \text{ ou } x \geq 1 \text{ (II).}$$

Fazendo (I) \cap (II), temos: $\frac{4}{3} < x \leq \frac{5}{3}$.

2º caso: $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) \leq 0 \Rightarrow 3x - 4 \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3}$ (I).

Temos:

$$(5x^2 + x - 6) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) \geq 0 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} 5x^2 + x - 6 \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{6}{5} \leq x \leq 1 \text{ (II).}$$

Fazendo (I) \cap (II), temos: (I) \cap (II) = \emptyset .

Assim, temos soluções apenas no 1º caso.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{4}{3} < x \leq \frac{5}{3}\right\}.$$

372. A condição de existência dos logaritmos é $x > 0$.

Fazendo $\log x = t$ ($x = 10^t$), vem:

$$x^{\frac{1}{\log x}} \cdot \log x < 1 \Rightarrow (10^t)^{\frac{1}{t}} \cdot t < 1 \Rightarrow t < \frac{1}{10} \Rightarrow \log x < \frac{1}{10} \Rightarrow 0 < x < 10^{\frac{1}{10}}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \sqrt[10]{10}\}.$$

374. a) A condição de existência do logaritmo é

$$x > -2 \text{ e } x \neq 0 \text{ e } x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ (I).}$$

1º caso: $x^2 > 1$, isto é, $x < -1$ ou $x > 1$ (II).

Temos:

$$\log_{x^2}(x+2) < 1 \Rightarrow x+2 < x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x < -1 \text{ ou } x > 2 \text{ (II).}$$

A solução é dada por (I) \cap (II) \cap (III): $-2 < x < -1$ ou $x > 2$.

2º caso: $0 < x^2 < 1$, isto é, $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$ (IV).

Temos:

$$\log_{x^2}(x+2) < 1 \Rightarrow x+2 > x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow -1 < x < 2 \text{ (V).}$$

A solução, neste caso, é dada por (I) \cap (IV) \cap (V): $-1 < x < -1$ e $x \neq 0$.

Considerando as duas possibilidades, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } x > 2 \text{ ou } (-1 < x < 1 \text{ e } x \neq 0)\}$,
que é equivalente a $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (-2 < x < 1 \text{ e } x \neq 0 \text{ e } x \neq -1) \text{ ou } x > 2\}$.

b) A condição de existência do logaritmo é $x > -\frac{3}{2}$ e $x \neq -1$ e $x \neq 0$ (I).

1º caso: Se $2x + 3 > 1$, isto é, $x > -1$ (II).

Temos:

$$\log_{2x+3} x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow -1 < x < 3 \text{ (III).}$$

A solução S_1 neste caso é dada por (I) \cap (II) \cap (III):

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } -1 < x < 3\}.$$

2º caso: Se $0 < 2x + 3 < 1$, isto é, $-\frac{3}{2} < x < -1$ (IV).

Temos:

$$\log_{2x+3} x^2 < 1 \Rightarrow x^2 > 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ ou } x > 3 \text{ (V).}$$

A solução S_2 neste caso é dada por $S_2 = (I) \cap (IV) \cap (V)$.

$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < -1 \right\}.$$

A solução da inequação proposta é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < 3 \text{ e } x \neq 0 \text{ e } x \neq -1 \right\}.$$

c) A condição de existência do logaritmo é $(x < 1 \text{ e } x \neq 0 \text{ e } x \neq -1) \text{ ou } x > 4$ (I).

1º caso: Se $x^2 > 1$, isto é, $x < -1$ ou $x > 1$ (II), temos:

$$\log_{x^2} (x^2 - 5x + 4) < 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 < x^2 \Rightarrow x > \frac{4}{5} \text{ (III).}$$

A solução S_1 neste caso é dada por: (I) \cap (II) \cap (III):

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}.$$

2º caso: Se $x^2 < 1$, isto é, $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$ (IV), temos:

$$\log_{x^2} (x^2 - 5x + 4) < 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 > x^2 \Rightarrow x < \frac{4}{5} \text{ (V).}$$

A solução S_2 neste caso é dada por (I) \cap (IV) \cap (V), isto é,

$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{4}{5} \text{ e } x \neq 0 \right\}.$$

A solução da inequação proposta é: $S = S_1 \cup S_2$, isto é,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{4}{5} \text{ e } x \neq 0 \text{ ou } x > 4 \right\}.$$

d) A condição de existência do logaritmo é $0 < x < \frac{6}{5}$ e $x \neq 1$ (I).

1º caso: Se $x > 1$ (II), então:

$$\log_x \left(\frac{4x+5}{6-5x} \right) < -1 \Rightarrow \frac{4x+5}{6-5x} < x^{-1} \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 < x < \frac{1}{2} \text{ (III).}$$

A solução S_1 neste caso é dada por (I) \cap (II) \cap (III), isto é, $S_1 = \emptyset$.

2º caso: Se $0 < x < 1$ (IV), então:

$$\log_x \left(\frac{4x + 5}{6 - 5x} \right) < -1 \Rightarrow \frac{4x + 5}{6 - 5x} > x^{-1} \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x < -3 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \text{ (V).}$$

A solução S_2 neste caso é dada por (I) \cap (IV) \cap (V), isto é:

$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{IR} \mid \frac{1}{2} < x < 1 \right\}.$$

A solução da inequação proposta é: $S = S_1 \cup S_2 = S_2 = \left\{ x \in \mathbb{IR} \mid \frac{1}{2} < x < 1 \right\}$.

e) A condição de existência do logaritmo é $0 < 3x^2 + 1 \neq 1$. Como para $\forall x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 1 > 0$, devemos ter: $3x^2 + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$ (I). Notemos que, para $\forall x \in \mathbb{IR}^*$, vem $3x^2 + 1 > 1$. Assim, há um único caso a considerar:

$$\log_{3x^2 + 1} 2 < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < (3x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}, \text{ isto é, } 2 < \sqrt{3x^2 + 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 < 3x^2 + 1 \Rightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1 \text{ (II).}$$

A solução da inequação proposta é $S = (I) \cap (II)$, isto é:

$$S = \{x \in \mathbb{IR} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}.$$

f) A condição de existência do logaritmo é $\begin{cases} \frac{x+3}{x-1} > 0 & (x < -3 \text{ ou } x > 1) \\ \text{e} & \Rightarrow \\ 0 < x \neq 1 & 0 < x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1 \text{ (I).}$

Como $x < 1$, temos:

$$\log_x \left(\frac{x+3}{x-1} \right) > 1 \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} > x \Rightarrow -1 < x < 3 \text{ (II).}$$

A solução S neste caso é dada por: (I) \cap (II), isto é,

$$S = \{x \in \mathbb{IR} \mid 1 < x < 3\}.$$

g) A condição de existência do logaritmo é $(-6 < x < -1 \text{ e } x \neq -5) \text{ ou } x > 2$ (I).

1º caso: Se $x + 6 > 1$, isto é, $x > -5$ (II), temos:

$$\log_{x+6} (x^2 - x - 2) \geq 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq x + 6 \Rightarrow x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4 \text{ (III).}$$

A solução S_1 neste caso é dada por (I) \cap (II) \cap (III):

$$S_1 = \{x \in \mathbb{IR} \mid -5 < x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}.$$

2º caso: Se $0 < x + 6 < 1$, isto é, $-6 < x < -5$ (IV), temos:

$$\log_{x+6} (x^2 - x - 2) \geq 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 \leq x + 6 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4 \text{ (V).}$$

A solução S_2 neste caso é dada por: (I) \cap (IV) \cap (V), isto é, $S_2 = \emptyset$.

A solução da inequação proposta é $S = S_1 \cup S_2 = S_1$, isto é:

$$S = \{x \in \mathbb{IR} \mid -5 < x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}.$$

h) A condição de existência do logaritmo é $x > -\frac{5}{2}$ e $x \neq \frac{3}{2}$ e $x \neq 5$ e $x \neq -\frac{3}{2}$ (I).

1º caso: Se $\frac{2x+5}{2} > 1 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$ (II), temos:

$$\log_{\left(\frac{2x+5}{2}\right)} \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 1 \Rightarrow \frac{-3x^2 + 2x + 16}{(2x-3)^2} > 0 \Rightarrow$$

$$\stackrel{x \neq \frac{3}{2}}{\Rightarrow} -3x^2 + 2x + 16 > 0 \stackrel{x \neq \frac{3}{2}}{\Rightarrow} -2 < x < \frac{8}{3} \text{ (III).}$$

A solução S_1 neste caso é dada por (I) \cap (II) \cap (III), isto é:

$$S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < \frac{8}{3} \text{ e } x \neq \frac{3}{2} \right\}.$$

2º caso: Se $0 < \frac{2x+5}{2} < 1 \Rightarrow -\frac{5}{2} < x < -\frac{3}{2}$ (IV), temos:

$$\log_{\left(\frac{2x+5}{2}\right)} \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 < 1 \Rightarrow \frac{-3x^2 + 2x + 16}{(2x-3)^2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x^2 + 2x + 16 < 0 \Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > \frac{8}{3} \text{ (V).}$$

A solução S_2 neste caso é dada por: (I) \cap (IV) \cap (V), isto é:

$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} < x < -2 \right\}.$$

A solução S da inequação proposta é $S := S_1 \cup S_2$, isto é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < \frac{8}{3} \text{ e } x \neq \frac{3}{2} \text{ ou } -\frac{5}{2} < x < -2 \right\}.$$

i) A condição de existência do logaritmo é

$$\begin{cases} \frac{x}{3} > 0 & x > 0 \\ \text{e} & \text{e} \\ 0 < 2x^2 - 7x + 6 \neq 1 & \left(x < \frac{3}{2} \text{ ou } x > 2\right) \text{ e } x \neq \frac{5}{2} \text{ e } x \neq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(0 < x < \frac{3}{2} \text{ e } x \neq 1\right) \text{ ou } \left(x > 2 \text{ e } x \neq \frac{5}{2}\right). \end{cases}$$

1º caso: Se $\sqrt{2x^2 - 7x + 6} > 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 6 > 1 \Rightarrow x < 1 \text{ ou } x > \frac{5}{2}$ (II), temos: $\log_{\sqrt{2x^2 - 7x + 6}} \left(\frac{x}{3}\right) > 0 \Rightarrow \frac{x}{3} > 1 \Rightarrow x > 3$ (III).

A solução S_1 neste caso é dada por (I) \cap (II) \cap (III), isto é:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}.$$

2º caso: Se $0 < \sqrt{2x^2 - 7x + 6} < 1 \Rightarrow 1 < x < \frac{5}{2}$ (IV), temos:

$$\log_{\sqrt{2x^2 - 7x + 6}} \left(\frac{x}{3}\right) > 0 \Rightarrow \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow x < 3 \text{ (V).}$$

A solução S_2 neste caso é dada por (I) \cap (IV) \cap (V):

$$S_2 = \left\{ x \in \text{IR} \mid 1 < x < \frac{3}{2} \text{ ou } 2 < x < \frac{5}{2} \right\}.$$

A solução da inequação proposta é $S = S_1 \cup S_2$, isto é:

$$S = \left\{ x \in \text{IR} \mid 1 < x < \frac{3}{2} \text{ ou } 2 < x < \frac{5}{2} \text{ ou } x > 3 \right\}.$$

375. A condição de existência do logaritmo é $\frac{1}{2} < x \neq 1$ (I).

1º caso: Se $x > 1$ (II), temos:

$$\log_x(2x - 1) \leq 2 \Rightarrow 2x - 1 \leq x^2 \Rightarrow -x^2 + 2x - 1 \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)^2 \geq 0, \text{ que é satisfeita } \forall x \in \text{IR} \text{ (III).}$$

A solução S_1 neste caso é dada por (I) \cap (II) \cap (III), isto é:

$$S_1 = \{x \in \text{IR} \mid x > 1\}.$$

2º caso: Se $0 < x < 1$ (IV), temos:

$$\log_x(2x - 1) \leq 2 \Rightarrow 2x - 1 \geq x^2 \Rightarrow -x^2 + 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (V).}$$

A solução S_2 neste caso é dada por (I) \cap (IV) \cap (V), isto é, $S_2 = \emptyset$.

A solução da inequação proposta é $S = S_1 \cup S_2 = S_1 = \{x \in \text{IR} \mid x > 1\}$.

376.

A condição de existência da equação é: $\begin{cases} a^2b > 0 \\ 0 < a \neq 1 \text{ (I)} \\ 0 < b \neq 1 \end{cases}$

Temos:

$$\log_a(a^2b) > \log_b a^{-5} \Rightarrow 2 + \log_a b > -5 \log_b a.$$

$$\text{Como } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \text{ temos: } 2 + \log_a b > -\frac{5}{\log_a b}.$$

Fazendo $\log_a b = t$, vem:

$$2 + t > -\frac{5}{t} \Rightarrow \frac{t^2 + 2t + 5}{t} > 0.$$

Como para $\forall t \in \text{IR}$, temos $t^2 + 2t + 5 > 0$, devemos ter $t > 0$, isto é, $\log_a b > 0$.

1º caso: $a > 1 \Rightarrow \log_a b > 0 \Rightarrow b > 1$ (II).

De (I) \cap (II) resulta que $a > 1$ e $b > 1$.

2º caso: $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b > 0 \Rightarrow 0 < b < 1$ (III).

De (I) \cap (III) resulta que $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$.

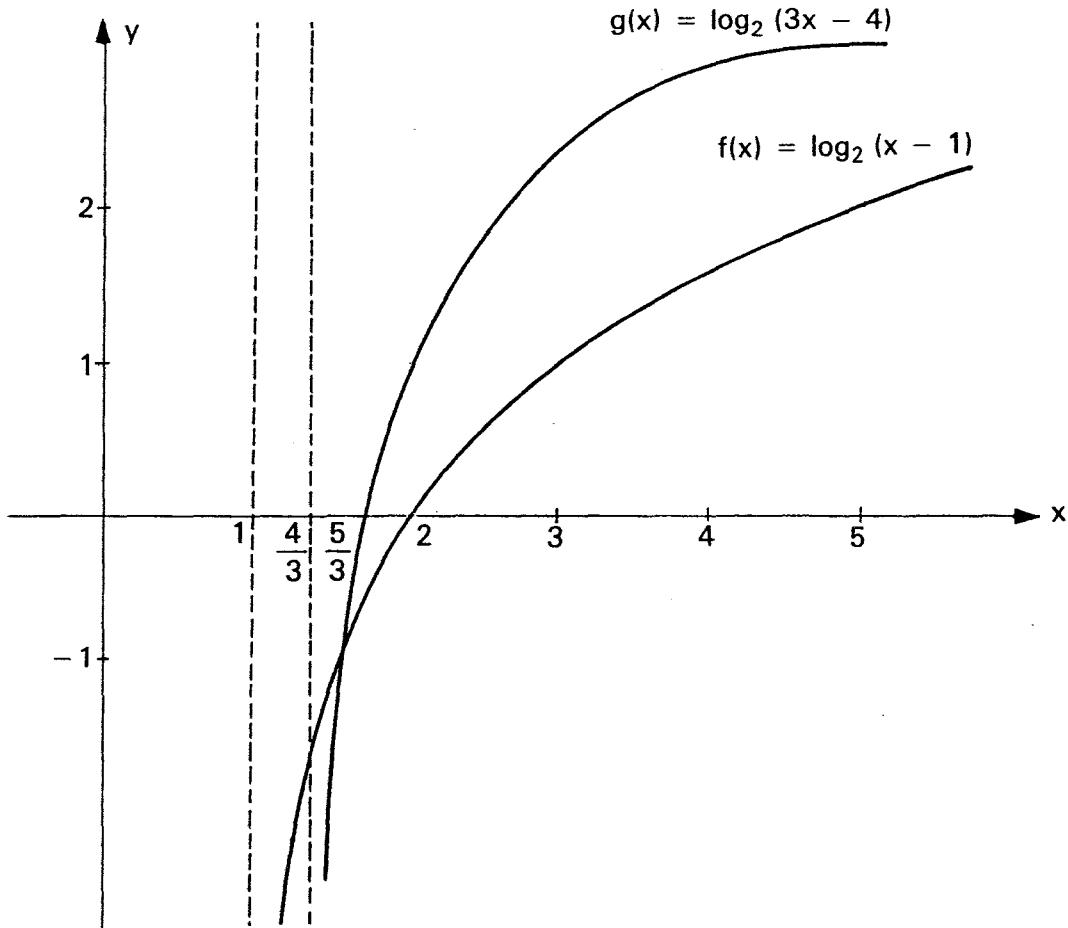
Assim há 2 possibilidades $\begin{cases} a > 1 \text{ e } b > 1 \\ \text{ou} \\ 0 < a < 1 \text{ e } 0 < b < 1 \end{cases}$

377. Como $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) = -\log_2(3x - 4)$, a inequação proposta equivale a:

$$\log_2(x - 1) \cdot [-\log_2(3x - 4)] > 0 \Rightarrow \log_2(x - 1) \cdot \log_2(3x - 4) < 0.$$

Vamos obter graficamente a solução. Para isso, precisamos construir os gráficos de $f(x) = \log_2(x - 1)$ e $g(x) = \log_2(3x - 4)$.

Temos:



Notemos que $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ é o ponto de interseção das duas curvas, pois corresponde à solução da equação: $\log_2(x - 1) = \log_2(3x - 4)$.

O que desejamos encontrar são os valores de x tais que $f(x) \cdot g(x) < 0$.

Notemos que para $\frac{5}{3} < x < 2$ temos $g(x) > 0$ e $f(x) < 0$, de modo que $f(x) \cdot g(x) < 0$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{3} < x < 2 \right\}.$$

378. Aplicando logaritmo de base a ($a > 1$) a ambos os membros da desigualdade, vem:

$$\begin{aligned} x^{\log_a x + 1} &> a^2 x \stackrel{a > 1}{\implies} \log_a(x^{\log_a x + 1}) > \log_a(a^2 x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log_a x + 1) \cdot \log_a x > 2 + \log_a x. \end{aligned}$$

Fazendo $\log_a x = t$, vem:

$$(t+1)t > 2 + t \Rightarrow t^2 - 2 > 0 \Rightarrow t < -\sqrt{2} \text{ ou } t > \sqrt{2}, \text{ isto é,}$$

$$\log_a x < -\sqrt{2} \text{ ou } \log_a x > \sqrt{2} \stackrel{a>1}{\implies} 0 < x < a^{-\sqrt{2}} \text{ ou } x > a^{\sqrt{2}}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < a^{-\sqrt{2}} \text{ ou } x > a^{\sqrt{2}}\}.$$

379. Escrevendo os logaritmos em base 2, temos:

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1 \Rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} + \frac{\log_2 x}{\log_3 2} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_3 2} > 1.$$

Fazendo $\log_2 x = t$, vem:

$$-t + \frac{t}{\log_3 2} > 1 \Rightarrow t \cdot \left(\frac{1}{\log_3 2} - 1 \right) > 1 \Rightarrow t < \frac{\log_2 3}{1 - \log_2 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t < \frac{\log_2 3}{\log_2 2 - \log_2 3} \Rightarrow t < \frac{\log_2 3}{\log_2 \left(\frac{2}{3} \right)} \Rightarrow t < \log_2 \frac{3}{2}, \text{ isto é:}$$

$$\log_2 x < \log_2 \frac{3}{2} \Rightarrow 0 < x < 2^{\frac{\log_2 3}{2}}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2^{\frac{\log_2 3}{2}} \right\}.$$

380. A condição de existência é $x > 0$ (I).

Temos:

$$\log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2^{x+1} - 2) > -2 \Rightarrow \log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2^x \cdot 2 - 2) > -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} [2(2^x - 1)] > -2.$$

Fazendo $2^x - 1 = t$, vem:

$$\log_2 t \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2t) > -2 \Rightarrow \log_2 t \cdot [\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} t] > -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 t \cdot (-1 - \log_2 t) > -2.$$

Fazendo $\log_2 t = r$, vem:

$$r \cdot (-1 - r) > -2 \Rightarrow -r^2 - r + 2 > 0 \Rightarrow r^2 + r - 2 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 < r < 1, \text{ isto é,}$$

$$-2 < \log_2 t < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < t < 2, \text{ isto é,}$$

$$\frac{1}{4} < 2^x - 1 < 2 \Rightarrow \frac{5}{4} < 2^x < 3 \Rightarrow \log_2 \left(\frac{5}{4} \right) < x < \log_2 3 \text{ (II).}$$

A solução da inequação proposta é dada por (I) \cap (II), isto é,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \log_2 \left(\frac{5}{4} \right) < x < \log_2 3 \right\}.$$

- 381.** Como $\log_3 27 = 3$ e $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$, a desigualdade proposta equivale a:

$$(x - 3) \cdot \left(x - \frac{3}{2} \right) < 0.$$

Fazendo o quadro-produto, temos:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 3 \right\}.$$

- 382.** 1º caso: Se $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > 0$, isto é, $0 < x - 1 < 1 \Rightarrow 1 < x < 2$ (I), temos:

$$x \cdot \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) < 0 \Rightarrow x < 0 \text{ (II)}$$

A solução neste caso é dada por (I) \cap (II), isto é, $S_1 = \emptyset$.

- 2º caso: Se $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) < 0$, isto é, $x - 1 > 1 \Rightarrow x > 2$ (I), temos:

$$x \cdot \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) < 0 \Rightarrow x > 0 \text{ (II).}$$

A solução neste caso é dada por (I) \cap (II), isto é,

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}.$$

A solução da inequação proposta é $S = S_1 \cup S_2 = S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$.

Capítulo VII – Logaritmos decimais

- 383.** Utilizando as regras (I) e (II), temos:

$$\log 7 \rightarrow C = 0$$

$$\log 0,032 \rightarrow C = -2$$

$$\log 10^5 \rightarrow C = 5$$

$$\log 0,00010 \rightarrow C = -4$$

- 384.** a) A característica é 3 e a mantissa é 0,5065.

Temos, então: $\log 3210 = 3 + 0,5065 = 3,5065$.

- b) A característica é 1 e a mantissa é 0,4048.

Assim, $\log 25,4 = 1 + 0,4048 = 1,4048$.

- c) A característica é 0 e a mantissa é 0,7574.

Assim, $\log 5,72 = 0 + 0,7574 = 0,7574$.

- d) A característica é -1 e a mantissa é 0,8692.

Assim, $\log 0,74 = -1 + 0,8692 = \bar{1},8692$.

- e) A característica é -3 e a mantissa é 0,5527.

Assim, $\log 0,00357 = -3 + 0,5527 = \bar{3},5527$.

385. a) $x = \text{antilog } 3,8768 \Rightarrow \log x = 3,8768 = 3 + 0,8768$.

Com a mantissa 0,8768 encontramos o número 753, mas, como a característica de $\log x$ é 3, temos $x = 7530$.

b) $x = \text{antilog } 1,8035 \Rightarrow \log x = 1,8035 = 1 + 0,8035$.

Com a mantissa 0,8035 encontramos o número 636, mas, como a característica de $\log x$ é 1, temos $x = 636$.

c) $x = \text{antilog } 0,9175 \Rightarrow \log x = 0,9175 = 0 + 0,9175$.

Com a mantissa 0,9175 encontramos o número 827, mas, como a característica de $\log x$ é 0, temos $x = 827$.

d) $x = \text{antilog } \bar{1},5145 \Rightarrow \log x = \bar{1},5145 = -1 + 0,5145$.

Com a mantissa 0,5145 encontramos o número 327, mas, como a característica de $\log x$ é -1, temos $x = 327$.

e) $\text{antilog } \bar{3},6693 = x \Rightarrow \log x = \bar{3},6693 = -3 + 0,6693$.

Com a mantissa 0,6693 encontramos o número 467, mas, como a característica de $\log x$ é -3, temos $x = 467$.

f) $x = \text{antilog } \bar{2},1271 \Rightarrow \log x = \bar{2},1271 \Rightarrow \log x = -2 + 0,1271$.

Com a mantissa 0,1271 encontramos o número 134, mas, como a característica de $\log x$ é -2, temos $x = 134$.

386. a) $\text{antilog } -2,0899 = x \Rightarrow \log x = -2,0899 = -2 - 0,0899 =$

$$= -2 - 1 + 1 - 0,0899 = -3 + 0,9101.$$

Com a mantissa 0,9101 encontramos o número 813, mas, como a característica de $\log x$ é -3, temos $x = 813$.

b) $\text{antilog } -3,2147 = x \Rightarrow \log x = -3,2147 = -3 - 0,2147 =$

$$= -3 - 1 + 1 - 0,2147 = -4 + 0,7853.$$

Com a mantissa 0,7853 encontramos o número 610, mas, como a característica de $\log x$ é -4, temos $x = 610$.

c) $\text{antilog } -0,4473 = x \Rightarrow \log x = -0,4473 = -1 + 1 - 0,4473 =$
 $= -1 + 0,5527.$

Com a mantissa 0,5527 encontramos o número 357, mas, como a característica de $\log x$ é -1, temos $x = 357$.

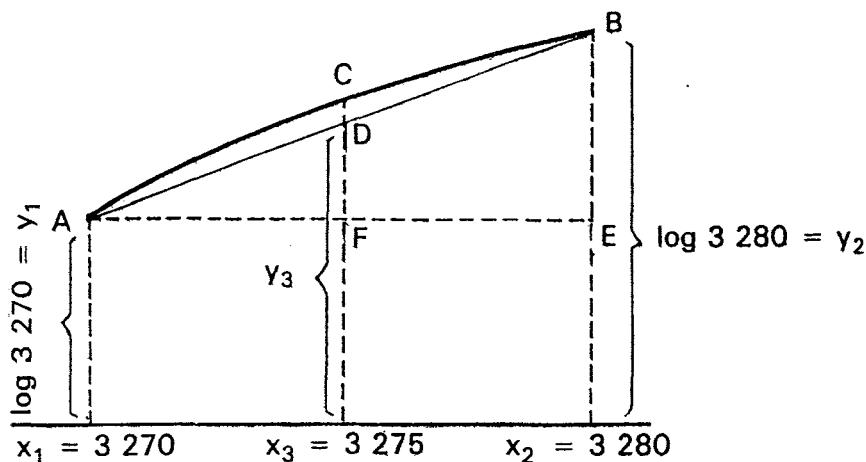
d) $\text{antilog } -1,6517 = x \Rightarrow \log x = -1,6517 = -1 - 0,6517 =$
 $= -1 - 1 + 1 - 0,6517 = -2 + 0,3483.$

Com a mantissa 0,3483 encontramos o número 223, mas, como a característica de $\log x$ é -2, vem que $x = 223$.

387. a) Considerando a função $y = \log x$, temos:

x	$y = \log x$
$x_1 = 3270$	$y_1 = 3 + 0,5145 = 3,5145$
$x_3 = 3275$	$y_3 = ?$
$x_2 = 3280$	$y_2 = 3 + 0,5159 = 3,5159$

Utilizando a aproximação linear para a função logarítmica, temos:



$\Delta AFD \sim \Delta AEB$, donde:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{y_3 - 3,5145}{3,5159 - 3,5145} \Rightarrow \\ \Rightarrow y_3 = 3,5152, \text{ isto é, } \log 3275 = 3,5152.$$

b) Considerando a função $y = \log x$, temos:

x	$y = \log x$
$x_1 = 23,7$	$y_1 = 1 + 0,3747 = 1,3747$
$x_3 = 23,72$	$y_3 = ?$
$x_2 = 23,8$	$y_2 = 1 + 0,3766 = 1,3766$

Por raciocínio idêntico ao anterior, temos:

$$y_3 = \log 23,72 = 1,3751.$$

c) Considerando a função $y = \log x$, temos:

x	$y = \log x$
$x_1 = 0,0457$	$y_1 = -2 + 0,6599$
$x_3 = 0,04576$	$y_3 = ?$
$x_2 = 0,0458$	$y_2 = -2 + 0,6609$

Por raciocínio idêntico aos anteriores, vem:

$$y_3 = \log 0,04576 = -1,3395 = 2,6605.$$

d) Considerando a função $y = \log x$, temos:

x	$y = \log x$
$x_1 = 0,835$	$y_1 = -1 + 0,9217$
$x_3 = 0,8358$	$y_3 = ?$
$x_2 = 0,836$	$y_2 = -1 + 0,9222$

Analogamente aos anteriores, segue que:

$$y_3 = \log 0,8358 = -0,0779 = 1,9221.$$

e) Considerando a função $y = \log x$, temos:

x	$y = \log x$
$x_1 = 2,71$	$y_1 = 0 + 0,4330$
$x_3 = 2,718$	$y_3 = ?$
$x_2 = 2,7$	$y_2 = 0 + 0,4346$

Analogamente aos anteriores, vem:

$$y_3 = \log 2,718 \cong \log e \cong 0,4343.$$

388. a) $x = \text{antilog } 1,3552 \Rightarrow \log x = 1,3552 = 1 + 0,3552$.

A mantissa 0,3552 não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas 0,3541 e 0,3560.

Considerando a função $y = \log x$, temos:

x	$y = \log x$
$x_1 = 22,6$	$y_1 = \log 22,6 = 1,3541$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = 1,3552$
$x_2 = 22,7$	$y_2 = \log 22,7 = 1,3560$

Analogamente ao exercício anterior, temos que $x_3 \cong 22,65$.

Assim, $\text{antilog } 1,3552 \cong 22,65$.

b) $x = \text{antilog } 0,4357 \Rightarrow \log x = 0,4357 = 0 + 0,4357$.

A mantissa 0,4357 não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas 0,4346 e 0,4362. Temos:

x	$y = \log x$
$x_1 = 2,72$	$y_1 = \log 2,72 = 0,4346$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = 0,4357$
$x_2 = 2,73$	$y_2 = \log 2,72 = 0,4362$

Analogamente ao anterior, vem:

$$x_3 = 2,727, \text{ isto é, antilog } 0,4357 = 2,727.$$

c) $x = \text{antilog } \bar{1},7383 \Rightarrow \log x = \bar{1},7383 = -1 + 0,7383.$

A mantissa 0,7383 não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas 0,7380 e 0,7388. Temos:

x	$y = \log x$
$x_1 = 0,547$	$y_1 = \log 0,547 = -0,262$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = -0,2617$
$x_2 = 0,548$	$y_2 = 0,548 = -0,261$

Do raciocínio anterior, vem:

$$x_3 = 0,5474, \text{ isto é, antilog } \bar{1},7383 = 0,5474.$$

d) $x = \text{antilog } -1,6336 \Rightarrow \log x = -1,6336 \Rightarrow \log x = -1 - 0,6336 = -1 - 1 + 1 - 0,6336 = -2 + 0,3664.$

A mantissa 0,3664 não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas 0,3655 e 0,3674. Temos:

x	$y = \log x$
$x_1 = 0,0232$	$y_1 = \log 0,0232 = -1,6345$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = -1,6336$
$x_2 = 0,0233$	$y_2 = \log 0,0233 = -1,6326$

Teremos: $x_3 = 0,02325$, isto é, $\text{antilog } -1,6336 = 0,02325$.

389. (I) Para calcularmos a_1 , notemos que:

$$\log 12\,300 = 4 + 0,0899 = 4,0899$$

e

$$\log 12\,400 = 4 + 0,0934 = 4,0934$$

Por interpolação linear, temos que $a_1 = \log 12\,345 = 4,0909$.

(II) Para calcularmos a_2 , notemos que:

$$\log 4 = 0 + 0,6021 = 0,6021$$

e

$$\log 4,1 = 0 + 0,6128 = 0,6128$$

Por interpolação linear, temos que $a_2 = \log 4,0909 = 0,6118$.

(III) Para calcularmos a_3 , notemos que:

$$\log 0,61 = -1 + 0,7853 = -0,2147$$

e

$$\log 0,62 = -1 + 0,7924 = -0,2076$$

Por interpolação linear, temos que $a_3 = \log 0,6118 = -0,2134$.

(IV) Como $a_4 = \log a_3$ e $a_3 < 0$, a_4 não está definido em IR, pois precisamos ter logaritmando positivo.

Assim, o maior valor de n é $n = 3$.

$$391. \text{ a)} \log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0,3010}{0,4771} = 0,6309$$

$$\text{b)} \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0,6990}{0,3010} = 2,3222$$

$$\text{c)} \log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{0,4771}{0,6990} = 0,6825$$

$$\text{d)} \log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{0,7782}{0,6990} = 1,1133$$

$$\text{e)} \log_6 4 = \frac{\log 4}{\log 6} = \frac{0,6021}{0,7782} = 0,7737$$

392. Temos:

$$\log_3 800 = \frac{\log 800}{\log 3} = \frac{2 + 0,9031}{0,4771} = 6,084.$$

Assim, $\log_3 800 = 6,084$; temos então característica 6.

393. Seja $N = 50^{50}$. Temos:

$$\begin{aligned} N = 50^{50} &\Rightarrow \log N = \log(50^{50}) \Rightarrow \log N = 50 \cdot \log 50 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log N = 50 \cdot (1 + 0,699) \Rightarrow \log N = 84,95 = \underbrace{84}_{\text{c}} + \underbrace{0,95}_{\text{m}}. \end{aligned}$$

Como a característica de $\log N$ é 84, pela regra I, segue que $N = 50^{50}$ possui 85 algarismos.

$$394. \text{ a)} 5^x = 100 \Rightarrow \log 5^x = \log 100 \Rightarrow x \cdot \log 5 = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{0,699} \cong 2,86.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} 3^x = 20 &\Rightarrow \log 3^x = \log 20 \Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 20 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \cdot 0,4771 = (1 + 0,3010) \Rightarrow x \cong 2,73. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} 2^x = 30 &\Rightarrow \log 2^x = \log 30 \Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 30 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{(1 + 0,4771)}{0,3010} \cong 4,91. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} 7^x = 0,3 &\Rightarrow \log 7^x = \log 0,3 \Rightarrow x \cdot \log 7 = \log 0,3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \cdot 0,8451 = (-1 + 0,4771) \Rightarrow x \cong -0,62. \end{aligned}$$

$$\text{e)} e^x = 50 \Rightarrow \log e^x = \log 50 \Rightarrow x \cdot \log e = \log 50.$$

Pelo item e do exercício 387, $\log e \cong 0,4343$.

$$\text{Então, } x = \frac{1,6990}{0,4343} \cong 3,91.$$

395. a) Fazendo $2^x = t$, a equação proposta é equivalente a:

$$t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow (t = 3 \text{ ou } t = 5), \text{ isto é:}$$

$$2^x = 3 \Rightarrow \log 2^x = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58$$

ou

$$2^x = 5 \Rightarrow \log 2^x = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} = 2,32.$$

$$S = \{1,58; 2,32\}.$$

b) Fazendo $3^x = t$, a equação proposta é equivalente a:

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 4), \text{ isto é:}$$

$$3^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

ou

$$3^x = 4 \Rightarrow x = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26.$$

$$S = \{0; 1,26\}.$$

c) Fazendo $10^x = t$, a equação proposta é equivalente a:

$$t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 5), \text{ isto é:}$$

$$10^x = 2 \Rightarrow x = \log 2 = 0,30$$

ou

$$10^x = 5 \Rightarrow x = \log 5 = 0,69$$

$$S = \{0,30; 0,69\}.$$

d) Fazendo $e^x = t$, a equação proposta é equivalente a:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 3), \text{ isto é:}$$

$$e^x = 2 \Rightarrow x \cdot \log e = \log 2 \Rightarrow x = 0,69$$

ou

$$e^x = 3 \Rightarrow x \cdot \log e = \log 3 \Rightarrow x = 1,10$$

$$S = \{0,69; 1,10\}.$$

396. Inicialmente, notemos que:

$$\log_{10} 6 = \log_{10} (2 \cdot 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0,30 + 0,48 = 0,78$$

e

$$\log_{10} 12 = \log_{10} (2^2 \cdot 3) = 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 2 \cdot 0,30 + 0,48 = 1,08$$

Então, temos:

$$3^x \cdot 2^{3x-1} = 6^{2x+1} \Rightarrow 3^x \cdot \frac{2^{3x}}{2} = 6^{2x} \cdot 6 \Rightarrow 3^x \cdot 2^{3x} = 12 \cdot 6^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{10} (3^x \cdot 2^{3x}) = \log_{10} (12 \cdot 6^{2x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \log_{10} 3 + 3x \cdot \log_{10} 2 = \log_{10} 12 + 2x \cdot \log_{10} 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot 0,48 + 3x \cdot 0,30 = 1,08 + 2x \cdot 0,78 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,38x = 1,08 + 1,56x \Rightarrow x = -6.$$

$$S = \{-6\}.$$

398. a) $x = \sqrt[6]{3} \Rightarrow \log x = \log \sqrt[6]{3} \Rightarrow \log x = \log 3^{\frac{1}{6}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log x = \frac{1}{6} \cdot \log 3 \Rightarrow \log x = \frac{1}{6} \cdot 0,4771 = 0,0795$

Por interpolação linear, $x = 1,201$.

b) $x = \sqrt[4]{10} \Rightarrow \log x = \log \sqrt[4]{10} \Rightarrow \log x = \log 10^{\frac{1}{4}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log x = \frac{1}{4} \cdot \log 10 \Rightarrow \log x = 0,25$.

Por interpolação linear, $x = 1,778$.

c) $x = 2^{3,4} \Rightarrow \log x = \log 2^{3,4} \Rightarrow \log x = 3,4 \cdot \log 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log x = 3,4 \cdot 0,3010 = 1,0234$.

Por interpolação linear, $x = 10,554$.

d) $x = 5^{2,3} \Rightarrow \log x = 2,3 \cdot \log 5 \Rightarrow \log x = 2,3 \cdot 0,6990 \Rightarrow \log x = 1,6077$.
 Por interpolação linear, $x = 40,520$.

399. Temos:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow R^3 = \frac{3V}{4\pi} \cong \frac{3 \cdot 20}{4 \cdot 3,14} \cong 4,78.$$

Assim,

$$R^3 = 4,78 \Rightarrow \log R^3 = \log 4,78 \Rightarrow 3 \log R = \log 4,78.$$

Da tábua, $\log 4,78 = 0 + 0,6794$, isto é, $\log 4,78 \cong 0,6794$, donde
 $\log R \cong 0,2264$,

Novamente por interpolação linear, vem que $R \cong 1,68 \text{ cm}$.

400. Temos:

$$\mathbf{A} = \sqrt[5]{(3,4)^3 \cdot (1,73)^2} \Rightarrow A = [(3,4)^3 \cdot (1,73)^2]^{\frac{1}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log A = \frac{1}{5} \cdot \log [(3,4)^3 \cdot (1,73)^2] \Rightarrow \log A = \frac{1}{5} \cdot [3 \log 3,4 + 2 \log 1,73].$$

Da tábua temos:

$\log 3,4 = 0,5315$ e $\log 1,73 = 0,2380$, donde:

$$\log A = \frac{1}{5} \cdot [3 \cdot 0,5315 + 2 \cdot 0,2380] \Rightarrow \log A = 0,414.$$

Por interpolação linear, $A = 2,60$.

402. Devemos ter: $C = 3Co$, isto é:

$$C = Co \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 3 \cdot Co = Co \cdot (1 + 0,03)^t \Rightarrow (1,03)^t = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot \log 1,03 = \log 3 \Rightarrow t \cdot 0,0128 = 0,4771 \Rightarrow t = 37,2.$$

Resposta: 38 meses.

403. Devemos ter: $C = 2Co$, isto é:

$$C = Co \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 2 \cdot Co = Co \cdot (1 + 0,105)^t \Rightarrow 2 = 1,105^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 2 = t \cdot \log 1,105.$$

Como $\log 1,1 = 0,0414$ e $\log 1,2 = 0,0792$, por interpolação linear,
 $\log 1,105 = 0,0433$.

$$\text{Daí, } t = \frac{0,301}{0,0433} = 6,95.$$

Resposta: 7 trimestres.

- 404.** Temos: $Co = 10^6$, $i = 0,03$ e $t = 18$.

Daí,

$$C = Co \cdot (1 + i)^t \Rightarrow C = 10^6 \cdot (1 + 0,03)^{18} \Rightarrow C = 10^6 \cdot 1,03^{18} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log C = \log (10^6 \cdot 1,03^{18}) \Rightarrow \log C = 6 + 18 \cdot \log 1,03.$$

Da tábua, $\log 1,03 = 0,0128$.

$$\text{Daí, } \log C = 6 + 18 \cdot 0,0128 = 6,2304 = 6 + 0,2304.$$

Com a mantissa 0,2304 encontramos na tábua o número 170. Como a característica de $\log C$ é 6, segue que $C = 1\ 700\ 000$.

Resposta: CR\$1 700 000,00.

- 405.** Temos: $Co = 5 \cdot 10^5$, $i = 0,04$ e $t = 48$ trimestres.

Daí,

$$C = Co \cdot (1 + i)^t \Rightarrow C = 5 \cdot 10^5 \cdot (1,04)^{48} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log C = \log [5 \cdot 10^5 \cdot (1,04)^{48}] \Rightarrow \log C = \log 5 + 5 + 48 \cdot \log 1,04.$$

$$\text{Como } \begin{cases} \log 1,04 = 0,017 \\ \text{e} \\ \log 5 = 0,699 \end{cases}, \text{ vem que } \log C = 6,515.$$

Por interpolação linear, segue que $C = 3\ 273\ 000$.

Resposta: CR\$ 3 273 000,00.

- 406.** O número de bactérias após 3 horas é dado por:

$$N(3) = 2\ 000 \cdot 10^{\frac{3}{36}} \Rightarrow \log N(3) = \log (2\ 000 \cdot 10^{\frac{3}{36}}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log N(3) = \log 2\ 000 + \frac{1}{12} \log 10.$$

Como $\log 2\ 000 = 3,3010$, vem que:

$$\log N(3) = 3,3010 + \frac{1}{12} \approx 3,3843.$$

Por interpolação linear, $N(3) = 2\ 422$.

Resposta: Após 3 horas, haverá 2 422 bactérias.

- 407.** Temos:

$$Q(t) = Q_0 \cdot 10^{-Kt} \Rightarrow Q(20) = Q_0 \cdot 10^{-20K} \Rightarrow \\ \Rightarrow 400 = 500 \cdot 10^{-20K} \Rightarrow \frac{4}{5} = 10^{-20K} \Rightarrow 0,8 = 10^{-20K} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log 0,8 = \log 10^{-20K} \xrightarrow{\text{tábua}} (-1 + 0,9031) = -20K \Rightarrow \\ \Rightarrow -20K = -0,0969 \Rightarrow K = 0,004845.$$

