EXERCÍCIOS SOBRE FUNÇÃO IMPLICÍTA

5–20 Encontre dy/dx por derivação implícita.

5. $x^3 + y^3 = 1$

6. $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^2 + xy - y^2 = 4$

8. $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

10. $xe^y = x - y$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$

12. $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$

14. $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

15. $e^{x/y} = x - y$

16. $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\operatorname{tg}^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

18. $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

19. $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$

20. $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

EXERCÍCIOS SOBRE REGRAS DE DERIVAÇÃO E DA CADEIA.

Nos Exercícios de 13 a 24, calcule a derivada indicada.

13. $\dfrac{d}{dx}(\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x)$

14. $\dfrac{d}{dt}(2 \operatorname{sen}^3 t \cos^2 t)$

15. $\dfrac{d}{dt}(\operatorname{cotg}^4 t - \operatorname{cosec}^4 t)$

16. $\dfrac{d}{dx}[(4x^2 + 7)^2(2x^3 + 1)^4]$

17. $D_u[(3u^2 + 5)^3(3u - 1)^2]$

18. $D_x[(x^2 - 4x^{-2})^2(x^2 + 1)^{-1}]$

19. $D_x[(2x - 5)^{-1}(4x + 3)^{-2}]$

20. $D_x[(2x - 9)^2(x^3 + 4x - 5)^3]$

21. $D_r[(r^2 + 1)^3(2r^2 + 5r - 3)^2]$

22. $D_y[(y + 3)^3(5y + 1)^2(3y^2 - 4)]$

23. $\dfrac{d}{dy}\left[\left(\dfrac{y - 7}{y + 2}\right)^2\right]$

24. $\dfrac{d}{dt}\left[\left(\dfrac{2t^2 + 1}{3t^3 + 1}\right)^2\right]$

Nos Exercícios de 25 a 36, ache a derivada da função dada.

25. $f(x) = \left(\dfrac{2x - 1}{3x^2 + x - 2}\right)^3$

26. $F(x) = \dfrac{(x^2 + 3)^3}{(5x - 8)^2}$

27. $f(z) = \dfrac{(z^2 - 5)^3}{(z^2 + 4)^2}$

28. $G(x) = \dfrac{(4x - 1)^3(x^2 + 2)^4}{(3x^2 + 5)^2}$

29. $g(t) = \operatorname{sen}^2(3t^2 - 1)$

30. $f(x) = \operatorname{tg}^2 x^2$

31. $f(x) = (\operatorname{tg}^2 x - x^2)^3$

32. $G(x) = (2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x)^3$

33. $f(y) = \dfrac{3 \operatorname{sen} 2y}{\cos^2 2y + 1}$

34. $g(x) = \dfrac{\operatorname{cotg}^2 2x}{1 + x^2}$

35. $F(x) = 4 \cos(\operatorname{sen} 3x)$

36. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos 2x)$

TAXAS RELACIONADAS

EXEMPLO 2 Uma escada com 5 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 1 m/s, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a 3 m da parede?

EXEMPLO 1 Uma escada com 25 unidades de comprimento está apoiada numa parede vertical. Se o pé da escada for puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 unidades de comprimento por segundo, qual a velocidade com que a escada está deslizando, quando seu pé está a 15 unidades de comprimento da parede?

EXEMPLO 4 O carro A está se movimentando para o oeste a 90 km/h e o carro B está se movimentando para o norte a 100 km/h. Ambos vão em direção à intersecção de duas estradas. A que taxa os carros se aproximam um do outro quando o carro A está a 60 m e o carro B está a 80 m da intersecção?

EXEMPLO 6 Um avião voa a 152,4 m/s paralelamente ao solo, a uma altitude de 1.220 m no sentido oeste, tomando como referência um holofote fixado no solo que o focaliza e que se encontra à esquerda da projeção vertical do avião em relação ao solo.

Sabendo-se que a luz do holofote deverá permanecer iluminando o avião, qual deverá ser a velocidade angular (de giro) do holofote, no instante em que a distância horizontal entre ele e a projeção vertical do avião for de 610 m?

TEOREMA DE ROLLE

1– 4 Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

1. $f(x) = 5 - 12x + 3x^2, \quad [1, 3]$

2. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2, \quad [0, 3]$

3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, \quad [0, 9]$

Nos Exercícios de 1 a 4, comprove que as condições (i), (ii) e (iii) das hipóteses do teorema de Rolle estão satisfeitas pela função dada no intervalo indicado. Ache, então, um valor adequado de c que satisfaça a conclusão do teorema de Rolle.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $[1, 3]$
2. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$; $[1, 2]$
3. $f(x) = \text{sen}\, 2x$; $[0, \frac{1}{2}\pi]$
4. $f(x) = 3\cos^2 x$; $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$

TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA

Teste da Primeira Derivada Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

(c) Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c.

EXEMPLO

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

ache os extremos relativos de f, aplicando o teste da derivada primeira. Determine os valores de x nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

Solução

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$f'(x)$ existe para todos os valores de x. Equacione $f'(x) = 0$.

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 3 \qquad x = 1$$

Assim, os números críticos de f são 1 e 3. Para determinar se f tem um extremo relativo nesses números, aplicamos o teste da derivada primeira. Os resultados são resumidos na Tabela 1.

Tabela 1

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$x < 1$		$+$	f é crescente
$x = 1$	5	0	f tem um valor máximo relativo
$1 < x < 3$		$-$	f é decrescente
$x = 3$	1	0	f tem um valor mínimo relativo
$3 < x$		$+$	f é crescente

Segundo a tabela, 5 é um valor máximo relativo de f ocorrendo em $x = 1$, e 1 é um valor mínimo relativo de f, ocorrendo em $x = 3$. Um esboço do gráfico está na Figura 6.

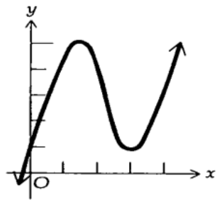

FIGURA 6

EXEMPLO

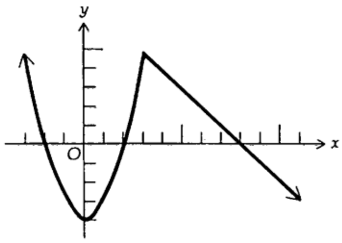

FIGURA 7

Solução Se $x < 3$, $f'(x) = 2x$. Se $x > 3$, $f'(x) = -1$. Como $f'_-(3) = 6$ e $f'_+(3) = -1$, $f'(3)$ não existe. Logo, 3 é um número crítico de f.

Como $f'(x) = 0$ se $x = 0$, segue que 0 é um número crítico de f. Aplicando o teste da derivada primeira, resumimos os resultados na Tabela 2. Um esboço do gráfico está na Figura 7.

Tabela 2

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$x < 0$		$-$	f é decrescente
$x = 0$	-4	0	f tem um valor mínimo relativo
$0 < x < 3$		$+$	f é crescente
$x = 3$	5	não existe	f tem um valor máximo relativo
$3 < x$		$-$	f é decrescente

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

ache os extremos relativos de f, determine os valores de x onde ocorrem extremos relativos e determine os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

Solução

$$f'(x) = \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3}$$
$$= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x + 1)$$

Como $f'(x)$ não existe quando $x = 0$ e $f'(x) = 0$ quando $x = -1$, os números críticos de f são -1 e 0. Vamos aplicar o teste da derivada primeira, cujos resultados estão resumidos na Tabela 3. Um esboço do gráfico está na Figura 8.

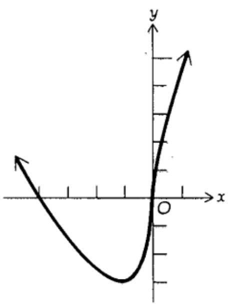

FIGURA 8

Tabela 3

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$x < -1$		$-$	f é decrescente
$x = -1$	-3	0	f tem um valor mínimo relativo
$-1 < x < 0$		$+$	f é crescente
$x = 0$	0	não existe	f não tem um extremo relativo em $x = 0$
$0 < x$		$+$	f é crescente

Nos Exercícios de 1 a 40, faça o seguinte: (a) ache os extremos relativos de f pelo teste da derivada primeira; (b) determine os valores de x nos quais os extremos relativos ocorrem; (c) determine os intervalos nos quais f é crescente; (d) determine os intervalos nos quais f é decrescente; (e) faça um esboço do gráfico.

1. $f(x) = x^2 - 4x - 1$
2. $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$
3. $f(x) = x^3 - x^2 - x$
4. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$
5. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$
6. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
7. $f(x) = 4\,\text{sen}\,\frac{1}{2}x$
8. $f(x) = x^4 + 4x$
9. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$
10. $f(x) = 2\cos 3x$
11. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1$
12. $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA

Teste da Segunda Derivada Suponha que f'' seja contínua na proximidade de c. (a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c. (b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

EXEMPLO

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x) = x^4 + \tfrac{4}{3}x^3 - 4x^2$$

ache os máximos e mínimos relativos de f, aplicando o teste da derivada segunda. Faça um esboço do gráfico de f.

Solução Calculamos as derivadas primeira e segunda de f.

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x \qquad f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$$

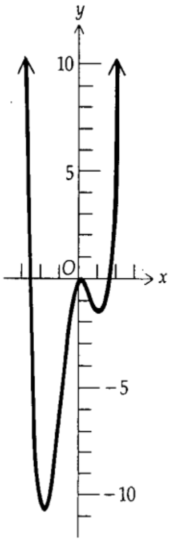

FIGURA 3

Equacionando $f'(x) = 0$,

$$4x(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 1$$

Assim, os números críticos de f são -2, 0 e 1. Vamos determinar se existe extremo relativo entre esses números críticos, encontrando o sinal da derivada segunda neles. Os resultados estão resumidos na Tabela 1.

Tabela 1

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x = -2$	$-\frac{32}{2}$	0	+	f tem um valor mínimo relativo
$x = 0$	0	0	−	f tem um valor máximo relativo
$x = 1$	$-\frac{5}{3}$	0	+	f tem um valor mínimo relativo

A partir da tabela e mais alguns pontos, obtemos o esboço do gráfico de f, conforme mostra a Figura 3.

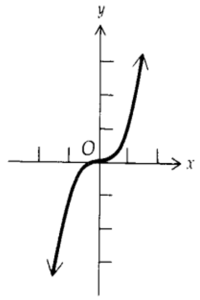

FIGURA 6

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$$

ache os extremos relativos de f, aplicando o teste da derivada segunda, quando possível. Use a derivada segunda para encontrar os pontos de inflexão do gráfico de f e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico.

Solução

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3} - \tfrac{2}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-4/3} + \tfrac{4}{9}x^{-5/3}$$

Como $f'(0)$ não existe, 0 é um númeo crítico de f. Encontramos os demais números críticos equacionando $f'(x) = 0$.

$$\frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2}{3x^{2/3}} = 0$$

$$2x^{1/3} - 2 = 0$$

$$x^{1/3} = 1$$

$$x = 1$$

Assim, 1 também é um número crítico. Podemos determinar se há um extremo relativo em 1 aplicando o teste da derivada segunda. Não podemos usar o teste da derivada segunda no número crítico 0, pois $f'(0)$ não existe. Aplicamos então, em $x = 0$, o teste da derivada primeira. A Tabela 3 mostra os resultados desses testes.

Tabela 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < 0$		$-$	$-$	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	não existe	não existe	f não tem extremo relativo; o gráfico tem um ponto de inflexão
$0 < x < 1$		$-$	$+$	f é decrescente; o gráfico é coñcavo para cima
$x = 1$	-1	0	$+$	f tem um valor mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$1 < x < 8$		$+$	$+$	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

DESCONSIDERAR ESSE < 8

ENCONTRE OS PONTOS DE MÍNIMOS E VALORES DE MÁXIMO, MÍNIMO USANDO A SEGUNDA DERIVADA

Nos Exercícios de 1 a 26, ache os extremos relativos da função dada usando o teste da derivada segunda, quando aplicável. Quando ele não for aplicável, use o teste da derivada primeira.

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ **2.** $g(x) = 7 - 6x - 3x^2$

3. $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$ **4.** $h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$

5. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3$ **6.** $f(y) = y^3 - 5y + 6$