LISTA 1

MATEMÁTICA DISCRETA – CC2 E ES2

- DEMONSTRAÇÃO DIRETA, DEMONSTRAÇÃO POR CONTRAPOSIÇÃO E DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO.

OBSERVAÇÃO: ***O curso de CC2 e ES2 devem resolver os exercícios que estão com marca de texto amarela e estudar os exemplos apresentados na sala de aula para CC2 (14/08, 16/08 e 21/08) e para ES (15/08, 20/08 e 22/08).***

Essas estrelas que existem do lado de alguns exercícios, são os exercícios selecionados que o autor resolve no final do livro texto (https://cbcc2011.files.wordpress.com/2013/04/fundamento-matemc3a1ticos-para-a-cic3aancia-da-computac3a7c3a3o1.pdf) - 3ª edição do livro disponível online.

★3. Prove que se $n = 25$, 100 ou 169 então n é um quadrado perfeito e é a soma de dois quadrados perfeitos.

4. Prove que se n é um inteiro par, $4 \leq n \leq 12$, então n é a soma de dois números primos.

5. Forneça uma demonstração direta de que a soma de inteiros pares é par.

6. Prove por contradição que a soma de inteiros pares é par.

★7. Prove que a soma de dois inteiros ímpares é par.

8. Prove que a soma de um inteiro par e um inteiro ímpar é ímpar.

9. Prove que o produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é par.

10. Prove que a soma de um inteiro e do seu quadrado é par.

★11. Prove que o quadrado de um número par é divisível por 4.

12. Prove que para qualquer inteiro n, o número

$$3(n^2 + 2n + 3) - 2n^2$$

é um quadrado perfeito.

Rafael

✓ 13. Prove por contradição que se qualquer número x é positivo, então $x + 1$ também é positivo.

★14. Sejam x e y números positivos, prove que $x < y$ se, e somente se, $x^2 < y^2$.

15. Prove que se $x^2 + 2x - 3 = 0$, então $x \neq 2$.

16. Prove que se x é inteiro par e primo, então $x = 2$.

★17. Prove que se dois inteiros são ambos divisíveis por um inteiro n, então a sua soma é divisível por n.

18. Prove que se o produto de dois inteiros não é divisível por um inteiro n, então nenhum dos inteiros é divisível por n.

19. Prove que a soma de três inteiros consecutivos é divisível por 3.

★20. Prove que o quadrado de um inteiro ímpar pode ser escrito como $8k + 1$ para algum inteiro k.

25. Prove que $\sqrt{3}$ não é um número racional.

26. Prove que $\sqrt{5}$ não é um número racional.

27. Prove que $\sqrt[3]{2}$ não é um número racional.

★28. Prove ou apresente um contra-exemplo: O produto de quaisquer três inteiros consecutivos é par.

29. Prove ou apresente um contra-exemplo: A soma de quaisquer três inteiros consecutivos é par.

30. Prove ou apresente um contra-exemplo: O produto de um inteiro pelo seu quadrado é par.

★31. Prove ou apresente um contra-exemplo: A soma de um inteiro com o seu cubo é par.

32. Prove ou apresente um contra-exemplo: Para um inteiro positivo x, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

33. Prove ou apresente um contra-exemplo: Para todo número primo n, $n + 4$ é primo.

34. Prove ou apresente um contra-exemplo: O produto do dois números irracionais é irracional.

★35. Prove ou apresente um contra-exemplo: A soma de dois números racionais é racional.

19. $x = 3k$

$n + n+1 + n+2$

$= 3n + 3$

$= 3(n+1) = 3s$ onde s é da forma $n+1$ e $\in \mathbb{Z}$).

- Direta → $P \to Q$ Usa somente P para chegar em Q.
- Contraposição → $P \to Q = \sim Q \to \sim P$
- Absurdo → $P \to Q$ · P e $\sim Q$ e encontre o problema.
- Ind. Fraca e Forte.

3. Prove que se $n = 25$, 100 ou 169 então n é um quadrado perfeito e é a soma de dois quadrados perfeitos.

Se n é um quadrado perfeito, sendo $n = 25, 100$ ou 169, então
$n = 25$ é igual a $5^2 = 9 + 16$ que equivale $3^2 + 4^2$, da mesma forma que
$n = 100$ é igual a $(10)^2 = 36 + 64$ equivalente a $6^2 + 8^2$, e
$n = 169$ igual a $(13)^2 = 25 + 144$ igual a $5^2 + (12)^2$
Sendo as expressões acima a soma de dois quadrados perfeitos.

4. Prove que se n é um inteiro par, $4 \leq n \leq 12$, então n é a soma de dois números primos.

$4 = 2 + 2$
$6 = 3 + 3$
$8 = 5 + 3$
$10 = 7 + 3$
$12 = 5 + 7$ ∎

5. Forneça uma demonstração direta de que a soma de inteiros pares é par.

Se a e b são inteiros pares então $a + b$ terá como resultado um inteiro também par.
Sendo a e b da forma $2K$ e $2R$ sucessivamente, segue-se que:
$a + b = 2K + 2R = 2(K+R)$. Fazendo $K+R = C$, nós temos $a + b = C$, C inteiro e par.

6. Prove por contradição que a soma de inteiros pares é par.

Suponha por absurdo que a soma de inteiros pares é ímpar.
Isso implica que $a + b$, sendo a e b da forma $2K$ e $2R$ sucessivamente, seguindo a seguinte lógica:
$2K + 2R = 2P + 1$, sendo $2P+1$ o resultado ímpar. Isso implica em
$2K + 2R = 2(K+R)$. Fazendo $K + R = L$, temos que o somatório dos inteiros a mais b resultam em $2L$, sendo $2L$ da forma par. Concluindo que a afirmativa suposta inicialmente é tida como absurdo. Pois $a + b \neq 2P + 1$.

7. Prove que a soma de dois inteiros é ímpar é par.

Seja $\underline{x}$ um inteiro ímpar da forma: $2m+1$, e

$\underline{y}$ outro inteiro ímpar: $2n+1$, onde m e n são inteiros.

segue que,

$$x + y = 2m+1 + 2n+1$$
$$= 2m + 2n + 2$$
$$= 2(m+n+1)$$

onde $m+n+1$ é um inteiro. Portanto, $x+y$ é par.

8. Prove que a soma de um inteiro par e um inteiro ímpar é ímpar.

Seja x um inteiro par da forma $2K$

e y um inteiro ímpar da forma $2R+1$, a soma de x e y é representada

por: $2K + 2R+1$

$$= 2(K+R)+1$$

Fazendo $K+R = p$, temos que um inteiro x somado a y resulta em um inteiro ímpar.

Pois $x+y = 2p+1$.

9. Prove que o produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é par.

Sendo $x \in \mathbb{Z}$, na forma $2K$

Sendo $y \in \mathbb{Z}$, na forma $2K+1$

$$x \cdot y = 2K \cdot 2K+1$$
$$4K^2 + 2K$$
$$2^2K^2 + 2K$$

$2(2K^2+2K)$, fazendo $2K^2+2K$ igual a F temos $2F$ par.

10. Prove que a soma de um inteiro e do seu quadrado é par.

$X + X^2$ é par

$X \in \mathbb{Z} \Rightarrow X = 2K$

ou

$X = 2K+1$

$X = 2K \Rightarrow X + X^2 = 2K + (2K)^2 = 2K + 4K^2 = 2(K+2K^2)$

$= 2S \Rightarrow$ (Fazendo $S = K+2K^2$), Então $X+X^2$ é par

$X = 2K+1 \Rightarrow X+X^2 = 2K+1 + (2K+1)^2 = 2K+1 + 4K^2 + 4K+1 = 4K^2 + 6K + 2 = 2(2K^2 + 3K+1) = 2$

$(S = 2K^2 + 3K + 1)$ então a soma é par.

que o quadrado de um número par é divisível por 4.
x um número par da forma $2K$, sendo K inteiro,
...o,
$x^2 = (2K)^2$
$= 4K^2$, inteiro.
Portanto, x^2 é divisível por 4.

12. Prove que para qualquer inteiro n, o número $3(n^2+2n+3)-2n^2$ é um quadrado perfeito.

$$3(n^2+2n+3)-2n^2$$
$$= 3n^2+6n+9-2n^2$$
$$= n^2+6n+9 = (n+3)(n+3)$$

13. Prove por contradição que se qualquer número x é positivo, então $x+1$ também é.
Suponha que qualquer número x é positivo e, $x+1$ é negativo.
Isso implica $x+1<0 \rightarrow x<-1$ pois x é positivo $(x>0)$

14. Sejam x e y números positivos, prove que $x < y$ se, e somente se, $x^2 < y^2$

$\boxed{x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2}$

$a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$

Ida
$(\Rightarrow)$ $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$
Volta
$(\Leftarrow)$ $x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$

Ida

$\Rightarrow \begin{cases} x < y \Rightarrow x \cdot x < y \cdot x \Rightarrow x^2 < y \cdot x \\ x < y \Rightarrow y \cdot x < y \cdot y \Rightarrow y \cdot x < y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 < y^2$

Volta

Suponha por contradição $x^2 < y^2$ e $x \geq y$ (H.I)

$x \geq y \Rightarrow x \cdot x \geq y \cdot x \Rightarrow x^2 \geq yx$
$x \geq y \Rightarrow y \cdot x \geq y \cdot y \Rightarrow yx \geq x^2$

$\Rightarrow x^2 \geq y^2$ Absurdo pois $x^2 < y^2$ por hipótese.

15. Prove que se $x^2 + 2x - 3 = 0$, então $x \neq 2$.

3 Suponha que se $x^2 + 2x - 3 = 0$ $x = 2$

$2^2 + 2(2) - 3 = 0$
$4 + 4 - 3 = 0$
$5 = 0$ ↯

~~16. Prove que se dois inteiros são ambos~~

16. Prove que se x é inteiro par e primo, então $x = 2$.

3 Suponha que x é inteiro par e primo, $x \neq 2$.

Tomemos 2 como x então temos que isso é absurdo pois $2 \in \mathbb{Z}$, 2 pode ser escrito da forma $2K$ e é primo.

17. Prove que se dois inteiros são ambos divisíveis por um inteiro n, então a sua soma é divisível por n.

Seja x e y divisíveis por n. $x = K_1 n$ e $y = K_2 n$ ambos inteiros, e

$x + y = K_1 n + K_2 n = (K_1 + K_2) n$, onde $K_1 + K_2$ é um inteiro.

Portanto $x + y$ é divisível por n.

19. Prove que a soma de três inteiros consecutivos ~~é par~~ é divisível por 3.

$X = 3K$

$n + n+1 + n+2$

$= 3n + 3$

$= 3(n+1) = 3s$ onde s é da forma $n+1$ e $\in \mathbb{Z}$.

20. Prova que o quadrado de um inteiro ímpar pode ser escrito como $8K+1$ para algum inteiro K.

$X = 2n+1$

$X^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$

$= 4n(n+1) + 1$, fazendo $n(n+1)$ da forma $2K$, temos que,

$= 4(2K)+1$

$= 8K+1$

25. Prove que $\sqrt{3}$ não é um número racional.

Suponha por absurdo que $\sqrt{3}$ seja racional então existem dois números p e q primos entre si,

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3, \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 3$

$p^2 = 3 \cdot q^2 \Rightarrow$ que p^2 é divisível por 3

e sendo p e q primos, temos que:

$q = 1$ e $p^2 = 3$, o que absurdo pois 3 não é um quadrado perfeito, $\sqrt{3}$ não é racional.

26.

27. Prove que $\sqrt[3]{2}$ não é um número racional.

~~Contra exemplo: tomando $\sqrt{2}$, temos $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{4}=2$~~

Suponha por absurdo que $\sqrt[3]{2}$ é racional, assim:

$\sqrt[3]{2}$ é da forma $\frac{p}{q}$, onde p é irredutível, $\sqrt[3]{2}\cdot q = p$

Elevamos os dois membros ao cubo ficamos com

$(\sqrt[3]{2})^3 \cdot q^3 = p^3 \Rightarrow 2\cdot q^3 = p^3$

Fazendo $q^3 = s$, temos um número par, $2s$, sendo $s \in \mathbb{Z}$.

Assim, $2s = p^3 \Rightarrow p^3 = 2t \Rightarrow 2s = 2t$

pois supomos que p/q é irredutível e encontramos que p e q são divisíveis por dois.

28. Prova ou apresente um contra exemplo o produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é par.

$n(n+1)$

n^2+n

$2n^2$

, ou contra exemplo, A soma de qualquer três inteiros consecutivos é par.

$+ (n+1) + (n+2)$

$3n + 3$

$= 3(n+1)$, que é multiplo de 3, portanto não é par.

30. P. ou C.E. O produto de um inteiro pelo seu quadrado é par.

$X \cdot X^2 = 2K \cdot (2K)^2$

$= 2K \cdot 4K$

$= 8K$

31. P. ou C.E. A soma de um inteiro com o seu cubo é par.

$X + X^3 = 2K + (2K)^3$

$= 2K + 8K$

$= 10K$

33. Prove ou apresente um C.E. $\forall$ número primo n, $n+4$ é primo.

(?)

(?)

C.E.

$n = 2 \Rightarrow 2+4 = 6$, e seis não é primo.

34. P. ou C.E. O produto de dois números irracionais é irracional.

$\sqrt{2}$

temos: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$

35. P. ou C.E. A soma de dois números racionais é racional.

Seja x e y racionais, $x = \frac{p}{q}$ e $y = \frac{r}{s}$, com $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, e q e $s \neq 0$.

$x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{(ps + rq)}{qs}$, onde $ps + rq$ e $qs \in \mathbb{Z}$ com $qs \neq 0$. Portanto $x+y$ é racional.

C.E $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$