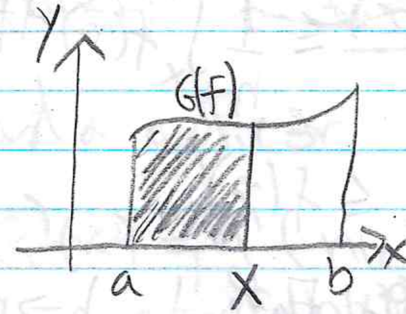
Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua em $[a,b]$. Considere a seguinte função

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (1)$$

em $[a,b]$. Sendo $f(t) \geq 0$ em $[a,b]$, temos que $g(x)$ representa a área da região hachurada



Teorema (Fundamental do Cálculo parte 1)
Se f for contínua em $[a,b]$, então a função g definida em (1) é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) com derivada

$$g'(x) = f(x)$$

Demonstração: Considere $x, x+h \in (a,b)$, então para $h>0$

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

logo

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Como f é contínua em $[x, x+h]$, pelo teorema dos valores extremos

$$f(u) \leq f(t) \leq f(v)$$

para $u, v \in [x, x+h]$. Portanto

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\,dt \leq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(v)\,dt$$

$$f(u) \leq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq f(v)$$

Para $h<0$ é análogo. Fazendo $h \to 0$ temos que $u, v \to x$ já que $u, v \in [x; x+h]$ e pela continuidade de f em x

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x)$$

e

$$\lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

assim pelo teorema do Confronto

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x) \qquad (2)$$

isto é, $g'(x) = f(x)$ para $x \in (a,b)$ qualquer. Se $x = a$ ou b então podemos ver (2) como limites laterais, assim garantindo a continuidade lateral, mostrando que g é contínua em $[a,b]$ ∎

Exemplo 1: Encontre a derivada de $g(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+1}\, d$

Exemplo 2: Encontre a derivada de

$$g(x) = \int_1^{x^2} \sec t \, dt$$

obs: Se $G(x) = \int_a^{h(x)} f(t)\, dt$ então

$G(x) = g(h(x))$ onde $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$,

daí basta aplicar a regra da cadeia.

$$G'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$
$$= f(h(x)) \cdot h'(x).$$

Teorema (Fundamental do cálculo parte 2)
Se f for contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f.

Demonstração: Considere

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

em $[a,b]$. Pelo TFC parte 1, $g'(x) = f(x)$ em (a,b). Assim g é primitiva de f em (a,b), portanto qualquer primitiva F de f é dada por

$$F(x) = g(x) + C$$

em (a,b). Fazendo $x \to a^+$ temos por continuidade que

$$F(a) = g(a) + C \qquad (3)$$

Se $x \to b^-$ da mesma sorte

$$F(b) = g(b) + C \qquad (4)$$

De (3) e (4) temos que

$$g(b) + C - (g(a) + C) = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(t)\,dt + C - \cancel{\int_a^a f(t)\,dt}^{\,0} - C = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

■

Exemplo 3: Calcule as integrais definidas abaixo:

a) $\int_1^2 (x^3+4)\,dx$ b) $\int_{-2}^{0} \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right) dx$ c) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

d) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

obs: O teorema da mudança de variável ou método da substituição tem sua versão para a integral definida (

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du =$$

$$= F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Exemplo 4: Calcule as integrais definidas abaixo:

a) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ b) $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ c) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$

Teorema (Variação total)
A integral de uma derivada $F'(x)$ de a até b é dada por

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

obs: Note que basta fazer $u = F(x)$, daí $du = F'(x)\,dx$ e aplicar o método da substituição ou aplicar o T.F.C parte 2 sabendo que a primitiva de F' é F.

Exemplo 5: Sabendo que a velocidade instantânea de uma partícula é dada por

$$v(t) = s'(t)$$

para $t \in [t_1, t_2]$. Mostre que:

a) $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$

b) Se a distância total percorrida é dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt,$$

Calcule a distância total percorrida por uma partícula que se desloca pela função posição

$$s(t) = \frac{t^3}{3} - t$$

no intervalo $[0, 2]$.

Exercícios (Estudar)
Pág 357-358
EX: 7-44 e 55-59
Pág 366
EX: 21-46
Pág 375
EX: 53-73