Limites no Infinito

Definição: Seja f uma função definida em algum intervalo $(a, +\infty)$. Então

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad (6)$$

sendo lido "limite de $f(x)$ quando x tende a mais infinito é igual a L".

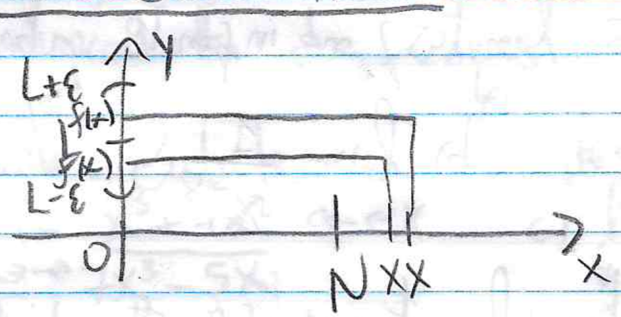
Isso significa que $f(x)$ aproxima-se de L (exceto quando $f(x)=L$, função constante), sempre que x assumir valores suficientemente grandes. Em outras palavras, $f(x)$ fica próximo de L quando x cresce ilimitadamente.

O limite em (6) é dito limite no infinito.

Definição formal: Para todo $\varepsilon > 0$, se existir $N > 0$ suficiente grande tal que se

$$x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Idéia Geométrica:



obs: Repitir o processo acima para

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

obs: Os limites no infinito podem ser limites infinitos, isto é,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty .$$

obs: No caso em que temos convergência para as funções, as propriedades dos limites bilaterais também valem para os limites no infinito.

Propriedades: Para $r \in \mathbb{Z}$, temos:

i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} +\infty & \text{se } r<0 \\ 0 & \text{se } r>0 \end{cases}$;

ii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} +\infty & \text{se } r<0 \text{ e par} \\ -\infty & \text{se } r<0 \text{ e ímpar} \\ 0 & \text{se } r>0 \end{cases}$

Exemplos: Calcule os limites no infinito abaixo:

a) $\lim_{x\to+\infty} x^3$ b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{-8}}$

obs: Queremos calcular limites no infinito de funções racionais, isto é

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. Vamos reparar em dois casos:

i) $m = \text{grau}(P) \leq \text{grau}(Q) = n$

Basta realizar o seguinte procedimento

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)/x^n}{Q(x)/x^n}$$

e depois, usar a propriedade de limites no infinito, para cada parcela do numerador e denominador.

ii) $m = \text{grau}(P) > \text{grau}(Q) = n$

Basta realizar o seguinte procedimento

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^m \cdot \frac{P(x)}{x^m}}{x^n \cdot \frac{Q(x)}{x^n}} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^m}{x^n}\right) \cdot \left[\frac{\frac{P(x)}{x^m}}{\frac{Q(x)}{x^n}}\right]$$

e depois aplicar o teorema de limites infinitos para o produto de funções.

Exemplo: Calcule os limites abaixo:

a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 7x^2}{7x^3 - 5x}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 8x^2 + 4}{-5x^4 + 8x^3 - 7x}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^3 + 7x}{2x^2 + 4}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{7x^4 - 7x^2 + 1}{-5x + 3}$

Definição: A reta $y = L$ é chamada assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Exemplo: Encontre as assíntotas horizontais de:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

b) $g(x) = \operatorname{arctg} x$