Integral definida

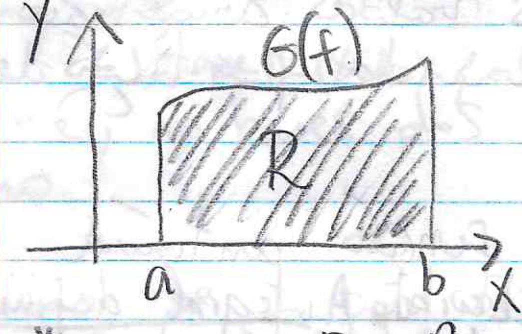
Seja $f(x)$ uma função contínua definida em um intervalo $[a,b]$. Considere agora a partição do intervalo $[a,b]$ dada por

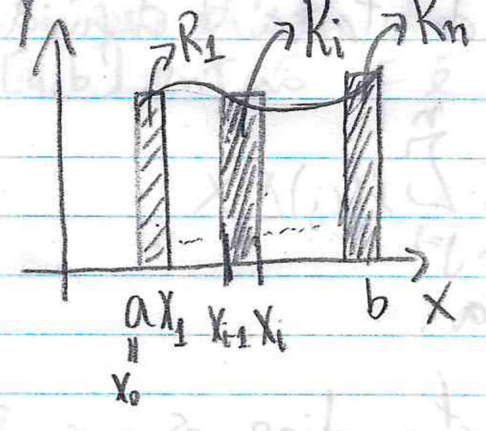
$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{i-1}<x_i<\dots<x_{n-2}<x_{n-1}<x_n=b$$

com isso obtemos retângulos R_j de base $\Delta_j x = x_j - x_{j-1}$ e altura $f(c_j)$ com $c_j\in[x_{j-1},x_j]$ e $j=1,\dots,n$. A união desses retângulos de lados adjacentes formam uma figura plana cuja área é aproximadamente a área da região

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\in[a,b] \text{ e } y=f(x)\},$$

Suponha $f(x)>0$ em $[a,b]$.





$$\bigcup_{j=1}^{n} R_j \simeq R$$

portanto a área de R é aproximadamente a soma das áreas dos retângulos R_j, isto é,

$$A(R) \simeq \sum_{j=1}^{n} A(R_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta_j x ,$$

fazendo n crescer ilimitadamente, segue-se que

$$A(R) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(c_j)\Delta_j x \qquad (1)$$

obs₁: O limite em (1) é chamado de limite da soma de Riemann de f em [a,b] e os números $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$ são os valores amostrais arbitrários nos subintervalos da partição de [a,b].

Definição: Seja f uma função contínua definida em um intervalo [a,b]. A integral definida de f de a até b é denotada e definida por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta_j x$$

desde que o limite exista.

obs: Caso o limite em (1) exista, dizemos que f é <u>Riemann-Integrável em [a,b]</u>

obs: Se $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(R).$$

Se $f(x) \leq 0$ em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A(R).$$

obs: A função $f(x)$ é chamada de integrando, a é o limite inferior e b o limite superior de integração.

obs$_2$: Ao passo que n cresce ilimitadamente temos que

$$\max\{\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x\} \to 0$$

isto é, as bases dos retângulos R_j tendem a zero.

<u>Teorema:</u> Se f for contínua em $[a,b]$, ou possui um número finito de pontos de descontinuidade em $[a,b]$, então f é Riemann-Integrável em $[a,b]$.

Propriedades: Sejam f e g funções Riemann-Integráveis em $[a,b]$

i) $\int_a^b dx = b-a$

ii) $\int_a^b k\,dx = k.(b-a)$

iii) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

iv) $\int_a^b k f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$; $k \in \mathbb{R}$

v) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ onde $c \in [a,b]$

vi) $\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\,dx = k_1 \int_a^b f(x)\,dx + k_2 \int_a^b g(x)\,dx$

vii) $\int_a^a f(x) = 0$

Exemplo 1: Sabendo que $\int_0^3 f(x)\,dx = 4$ e $\int_0^{10} f(x)\,dx = 8$, calcule o valor de

$$\int_3^{10} 7 f(x)\,dx.$$

Exercícios (Estudar)
Pág 347-348
33, 34, 47-53.

Primitivas e Integrais Indefinidas

<u>Definição</u>: Uma função $F(x)$ é dita <u>primitiva</u> de uma função $f(x)$ em um intervalo I se $F'(x) = f(x)$ em I.

<u>Exemplo 1</u>: Mostre que:

a) $F(x) = x^2 + 4$ é primitiva de $f(x) = 2x$

b) $G(x) = \operatorname{sen} x$ é primitiva de $g(x) = \cos x$.

obs: Caso F e G sejam duas primitivas de f em um intervalo I, isto é,

$$F'(x) = f(x) \quad e \quad G'(x) = f(x) \quad em\ I,$$

assim

$$F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x)$$

$$= 0$$

$$[F(x) - G(x)]' = 0 \quad em\ I$$

portanto

$$F(x) - G(x) = C \quad em\ I$$

logo

$$F(x) = G(x) + C$$

<u>Teorema</u>: Se F é uma primitiva de f em um intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é

$$F(x) + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Exemplo 2: Se F e G são respectivamente primitivas de f e g, então $aF+bG$ é primitiva de $af+bg$ onde $a,b\in\mathbb{R}$.

Definição: A <u>integral indefinida</u> de uma função $f(x)$ com relação a variável x é denotada e definida por

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

onde dx é o diferencial de x, $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ e C uma constante arbitraria.

Propriedades: Sejam f,g funções que possuem primitivas F,G respectivamente, então:

i) $\int dx = x+C$

ii) $\int K dx = Kx + C$; $K\in\mathbb{R}$

iii) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; $n\neq -1$

iv) $\int [af(x)+bg(x)]dx = aF(x)+bG(x)+C$; $a,b\in\mathbb{R}$

Em particular

$\int Kf(x)dx = KF(x)+C$; $K\in\mathbb{R}$

Note também que

$$\int [af(x)+bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

Exemplo 3: Calcule as integrais indefinidas abaixo:

a) $\int (x^2+4)\,dx$

b) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{5}{\sqrt[7]{x^3}}\right) dx$

Integrais indefinidas de algumas funções

1) $\int e^x\,dx = e^x + C$
2) $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
3) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
4) $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$
5) $\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$
6) $\int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$
7) $\int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x + C$
8) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Exemplo 4 Calcule as integrais indefinidas abaixo:

a) $\int (\operatorname{sen} x + e^x)\,dx$

b) $\int \left(\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) dx$

Exercícios (Estudar)
Pág. 365-366
Ex: 1-18.

Teorema (Mudança de variável ou Regra da substituição)

Seja f uma função que possui primitiva F e g uma função derivável tal que $Im(g) \subseteq D(f)$, então

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$
$$= F(u) + C$$
$$= F(g(x)) + C$$

onde $u = g(x)$ e $du = g'(x)\,dx$

__Exemplo 5__: Calcule as integrais indefinidas.

a) $\int e^{5x}\,dx$ c) $\int tg\,x\,dx$ e) $\int \ln(x^2+1)\,x\,dx$

b) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ d) $\int \sqrt[3]{1+x^3} \cdot x^2\,dx$ f) $\int (x^8+7)^{10} \cdot x^{15}\,dx$

Exercícios (Estudar)
Pág. 374
Ex: 1-48.

LISTA PONTO (06/18)

Pág	Ex	Pág	Ex
164	19	230	24
171	30	237	41
178	14	~~254~~	~~60~~
185	35	261	11
194	28	269	15
201	25	286	7
224	11		