

# Derivada Implícita

Seja  $y = y(x)$  a variável dependente de uma equação implícita, isto é, uma equação que depende de  $x$  e  $y$ , onde algumas vezes não é possível obter a lei de formação de  $y = y(x)$ . Sabendo que  $y(x)$  é derivável, basta derivar a equação implícita e pela regra da cadeia obter  $y'(x)$ .

Exemplo: Encontre o que se pede para cada equação abaixo:

a)  $y'(x) = ?$  onde  $x^2 + y^2 = 16$ .  
 b)  $y'(x) = ?$  onde  $x^3 + y^3 = 6xy$ .  
 c)  $\frac{dy}{dx} = ?$  onde  $\sin(x+y) = y^2 \cos x$ .

d)  $w'(t) = ?$  onde  $w^3 t^2 + w^5 t^6 = 7wt^2$ .  
 e)  $\frac{dz}{du} = ?$  onde  $\sqrt{z^3 + u^2} = -5zu$ .

## Derivada das funções trigonométricas Inversas

### 1) Arco seno

Seja  $y = \arcsen x$  onde  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ . Note que

$\sin y = \sin(\arcsen x) = x$   
 derivando com relação a  $x$ , temos

$$(\sin y)' = (x)'$$

1

2

isto é  $\cos y \cdot y' = 1$

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

mas

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

logo

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2) Arco cosseno

$y = \arccos x$  onde  $0 \leq y \leq \pi/2$   
(casa)

3) Arco tangente

$y = \arctg x$  onde  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Note que

$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(\arctg x) = x$   
derivando com relação a  $x$

$$(\operatorname{tg} y)' = (x)'$$

$$\sec^2 y \cdot y' = 1$$

isto é

$$y' = \frac{1}{\sec^2 y}$$

mas

$$\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

logo

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}$$



(3)

4) Arco cotangente

 $y = \operatorname{arccotg} x$  onde  $0 < y < \pi$   
(casa)

5) Arco secante

 $y = \operatorname{arcsec} x$  onde  $0 \leq y < \pi/2$  ou  $\pi/2 < y \leq \pi$ .

Note que

 $\sec y = \sec(\operatorname{arcsec} x) = x$   
derivando com relação a  $x$ 

$$(\sec y)' = (x)'$$

isto é  $\sec y \cdot \operatorname{tg} y \cdot y' = 1$ 

$$y' = \frac{1}{\sec y \operatorname{tg} y}$$

mas

$$\sec y \operatorname{tg} y = \sec y \sqrt{\sec^2 y - 1} = x \sqrt{x^2 - 1}$$

logo

$$y' = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

6) Arco cosecante

 $y = \operatorname{arccosec} x$  onde  $-\pi/2 \leq y < 0$  ou  $0 < y \leq \pi/2$   
(casa)

Exercícios (Estudar)

Pág 194

1-24, 49-60