Função

Uma função f é uma lei que associa, a cada elemento x em um conjunto D, exatamente um elemento, chamado f(x), em um conjunto E.

Obs: Os conjuntos D e E são subconjuntos dos reais.

O conjunto D é chamado domínio da função. O número f(x) é o valor de f em x e é lido "f de x". A imagem de f é o conjunto de todos os valores possíveis de f(x) obtidos quando x varia por todo o domínio. O elemento arbitrário $x \in D$ é chamado de variável independente e o elemento arbitrário $y = f(x) \in E$ é chamado de variável dependente.

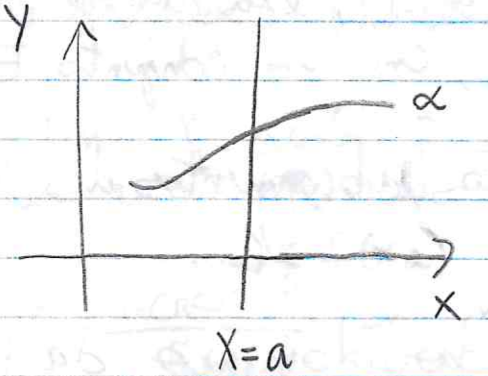
Obs: Os símbolos para o domínio e a imagem de uma função f são respectivamente D(f) e Im(f).

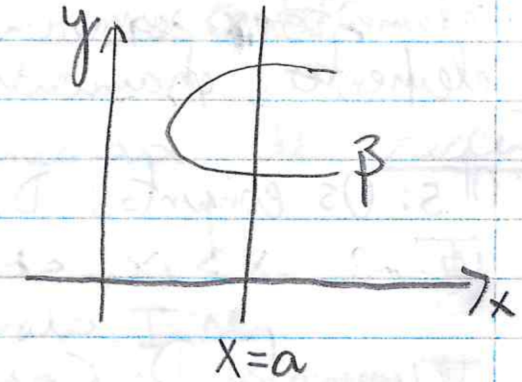
Se f for uma função com domínio D, então seu gráfico será o conjunto de pares ordenados (x, y) tais que $y = f(x)$ com $x \in D$, sendo denotado por G(f).

Idéia Geométrica

Teste da reta vertical Uma curva no plano xy é o gráfico de uma função de x se e somente se ne-

nenhuma reta vertical cortar a curva mais de uma vez.





α é o gráfico de uma função.

β não é o gráfico de uma função.

Exemplos: Encontre o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = x$

b) $F(x) = \sqrt{x}$

c) $g(x) = 1/x$

d) $G(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{3-x}}$

e) $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[6]{x^2+x}}$

Exemplos: Encontre a imagem das seguintes funções:

a) $f(x) = x$

b) $F(x) = x^2+4$

c) $g(x) = 2/x^4+1$

d) $G(x) = \sqrt[5]{x^2+32}$

• Funções definidas por partes

São funções definidas por fórmulas distintas em diferentes partes de seus domínios.

Exemplos:

a) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

b) Função valor absoluto ou módulo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

c)
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

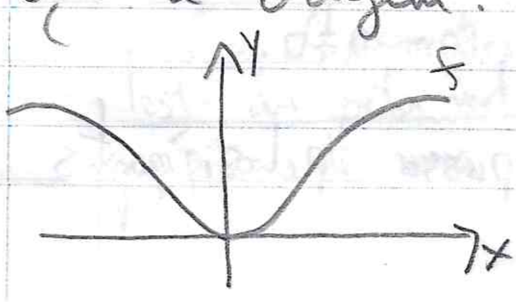
• Simetria

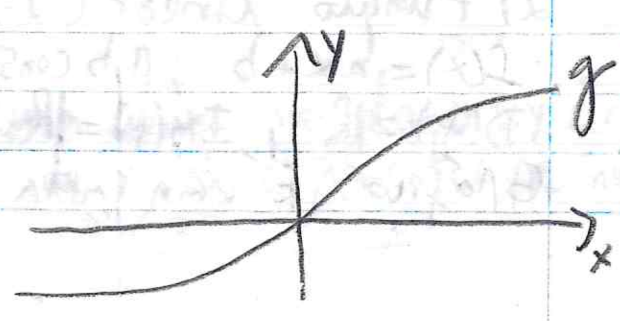
Se uma função f satisfaz $f(-x) = f(x)$ para todo número x em seu domínio, então f é chamada de função par.
Se uma função f satisfaz $f(-x) = -f(x)$ para todo número x em seu domínio, então f é chamada de função ímpar.

Exemplo: Classifique as funções abaixo em par ou ímpar.

a) $f(x) = x^2$
b) $g(x) = x^3$
c) $h(x) = x^4 - x^2 + 2$
d) $s(x) = x^5 + 8x^3 - x$

Obs: Uma função par tem seu gráfico simétrico com relação ao eixo y e a ímpar tem seu gráfico simétrico com relação a origem.





f é par   g é impar

- Funções Crescentes e decrescentes

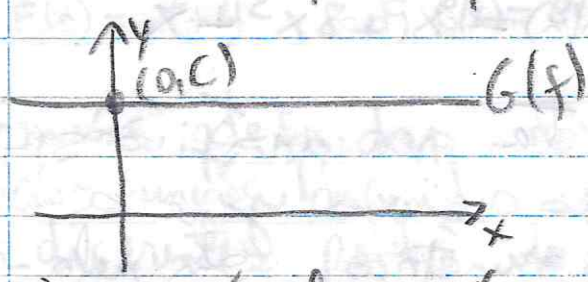
Uma função f é chamada de <u>crescente</u> em um intervalo I se
$f(x_1) < f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$ em I
e <u>decrescente</u> em um intervalo I se
$f(x_1) > f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$ em I.

Exemplo: Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x) = x^n$ onde n é par.

Tipos de funções

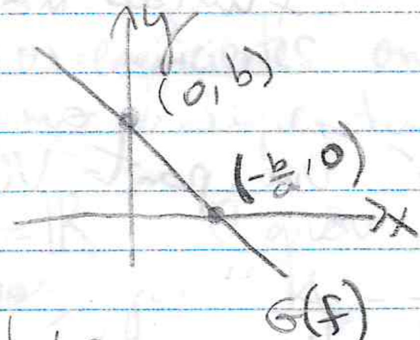
1) Função constante
$f(x) = c$
$D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \{c\}$

Gráfico: É uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto $(0, c)$.

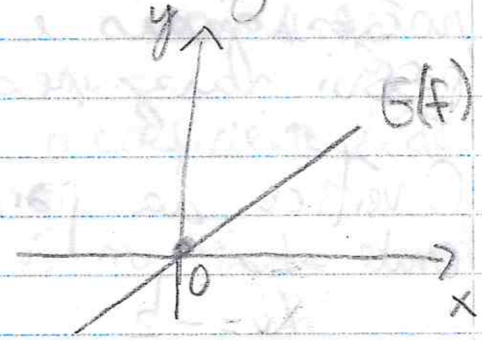


2) Função linear (1º grau)
$f(x) = ax + b$; a,b constantes com $a \neq 0$.
$D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}$
Gráfico: É uma reta que passa pelos pontos

$(-b/a, 0)$ e $(0, b)$ se $b \neq 0$. Caso $b = 0$ é uma reta que passa na origem.



$b \neq 0$



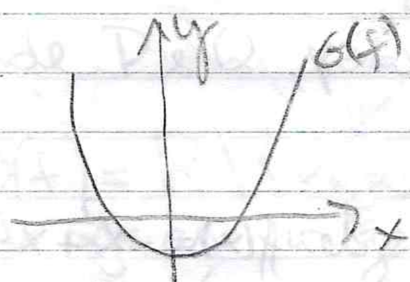
3) Função Quadrática (2º grau)

$f(x) = ax^2 + bx + c$; a, b, c constantes com $a \neq 0$.

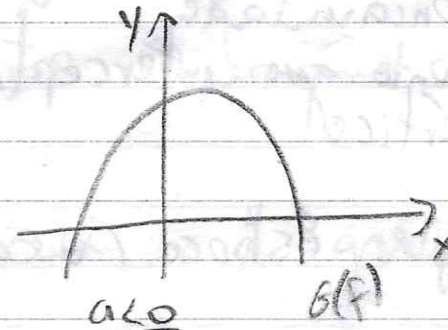
$D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ se $a > 0$ ou

$\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Gráfico: É uma parábola com concavidade para cima se $a > 0$ e com concavidade para baixo se $a < 0$.



$\underline{a > 0}$



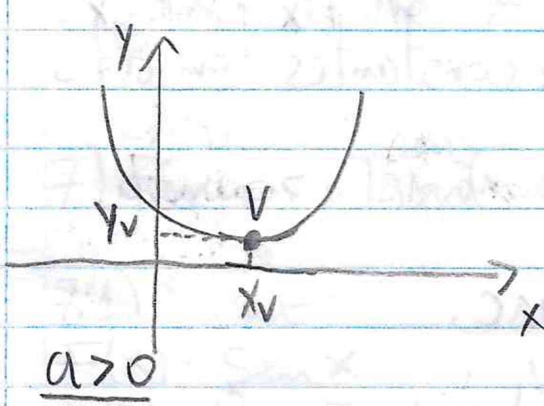
$\underline{a < 0}$

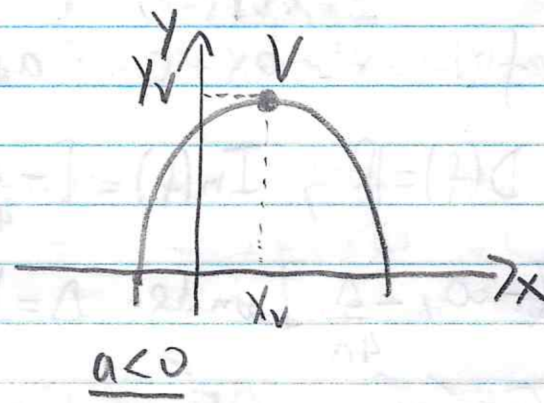
Obs: Se $\Delta > 0$ a função possui duas raízes distintas, se $\Delta = 0$ a função possui duas raízes iguais e se $\Delta < 0$ a função não possui raiz real.

O vértice da parábola é um ponto $V(x_v, y_v)$ onde

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad e \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

sendo y_v o máximo de f se $a < 0$ e o mínimo de f se $a > 0$.





Esboço do gráfico. (Passos a seguir)

a) Encontrar as raízes, caso tenha.
b) Concavidade
c) Ponto que intercepta o eixo y.
d) Vértice

Exemplo: Esboce o gráfico de $f(x) = -x^2 + x + 2$.

4) Função Polinômial

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$; a_i constante com $a_n \neq 0$

a_i's são os coeficientes onde $i = 0, \dots, n$.
a_0 termo independente e a_n o coeficiente líder

$D(f) = \mathbb{R}$; O grau de $f(x)$ é n sendo denotado por grau(f).
Um número α é dito uma raiz de $f(x)$ se $f(\alpha) = 0$.
O número de raízes de f é menor ou igual ao grau do polinômio.
Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ é são todas as raízes de f onde $r \leq n$ então

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)^{i_1}(x-\alpha_2)^{i_2} \dots (x-\alpha_r)^{i_r}$$

sendo $i_1 + i_2 + \dots + i_r = n$ onde i_j é a multiplicidade da raiz α_j.

5) Funções Racionais

São funções da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. O domínio é

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$$

sendo α_j's as raízes de $Q(x)$ e $r \leq$ grau Q.

Exemplo: Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x+1}$

6) Funções Algébricas

São funções obtidas pelas operações algébricas soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes a partir dos polinômios.

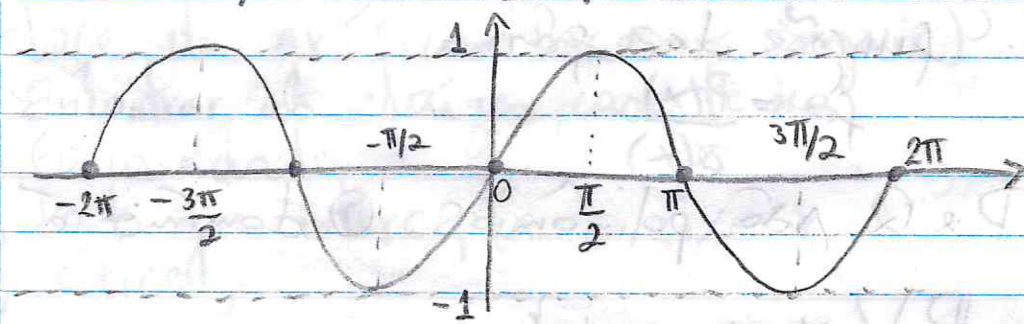
Exemplos: $x^2 + \sqrt{x}$, $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^3+1}}$ e $(x-2)\sqrt[4]{x+1}$.

7) Funções Trigonométricas

7.1) Seno

$F(x) = \operatorname{sen} x$

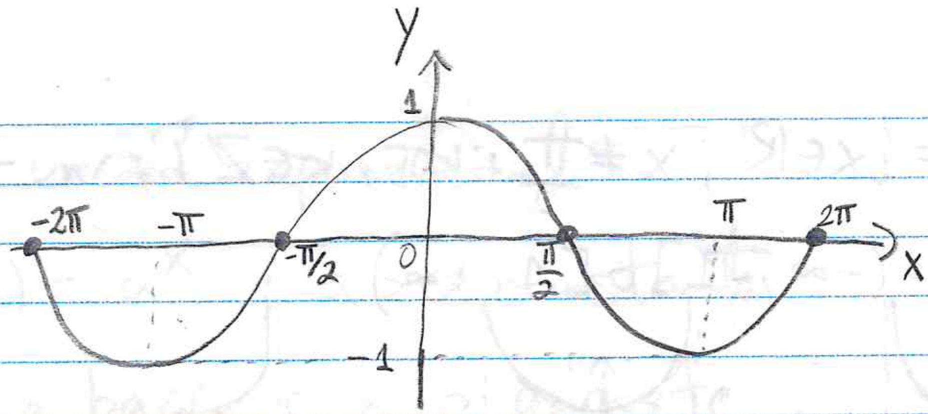
$D(F) = \mathbb{R}$, $Im(F) = [-1, 1]$



7.2) Cosseno

$F(x) = \cos x$

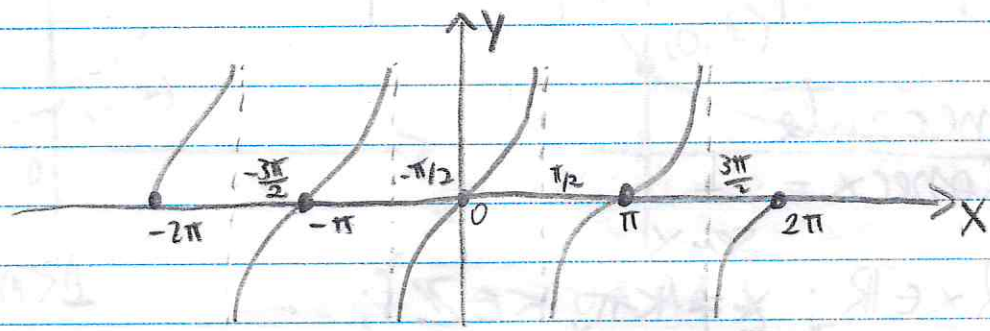
$D(F) = \mathbb{R}$, $Im(F) = [-1, 1]$



7.3) Tangente

$F(x) = tgx = \dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$

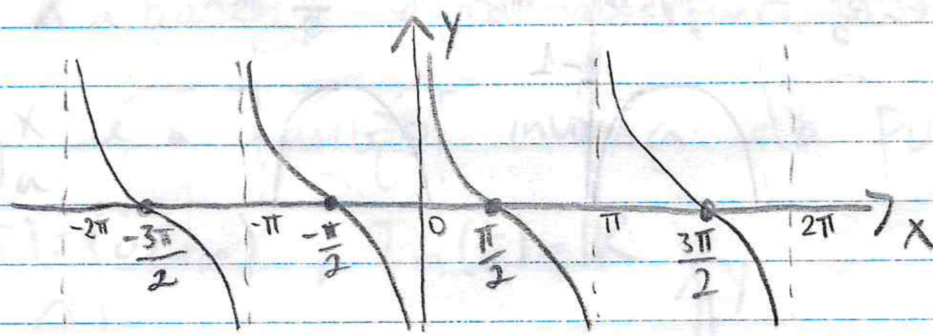
$D(F) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $Im(F) = \mathbb{R}$



7.4) Cotangente

$F(x) = cotgx = \dfrac{1}{tgx} = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$

$D(F) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $Im(F) = \mathbb{R}$

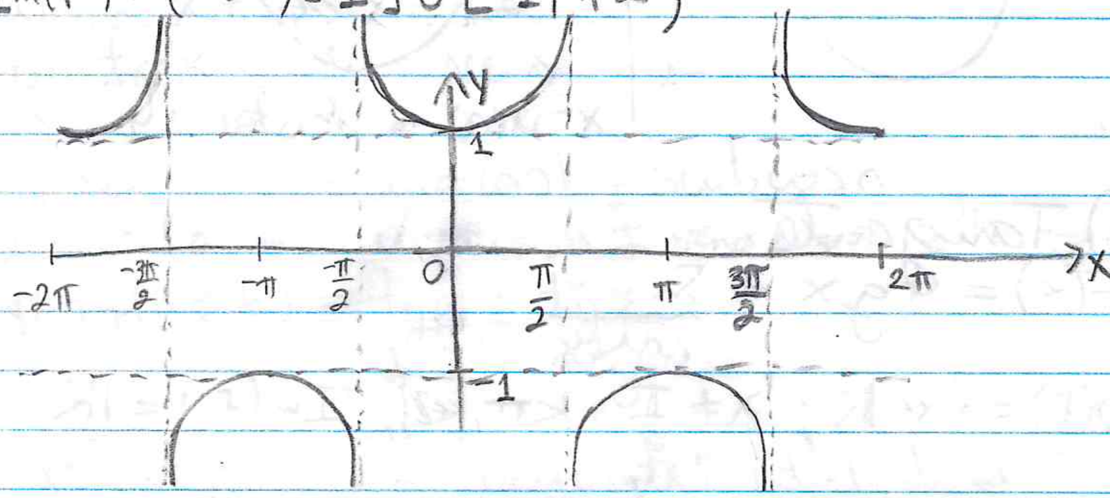


7.5) Secante

$F(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$D(F) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}\}$;

$Im(F) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

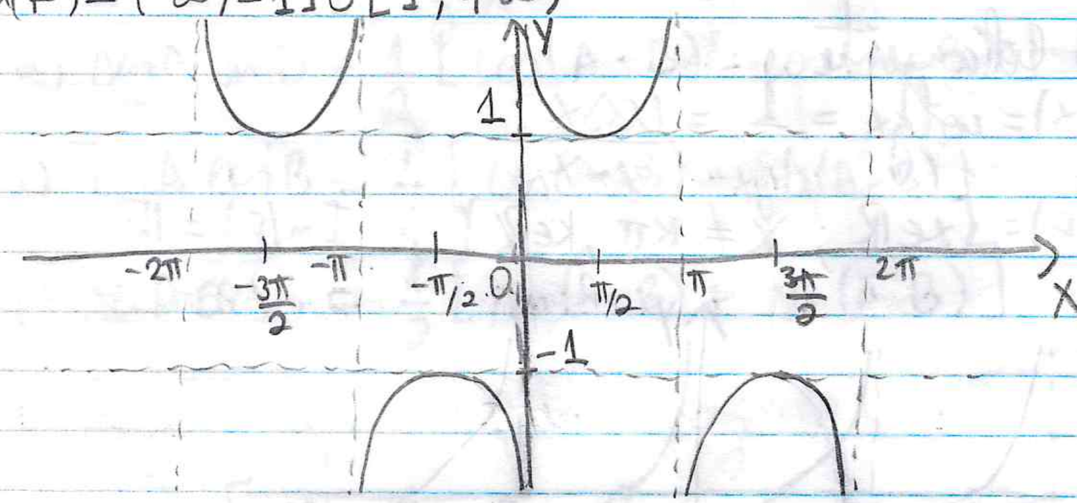


7.6) Cosecante

$F(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

$D(F) = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}\}$;

$Im(F) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

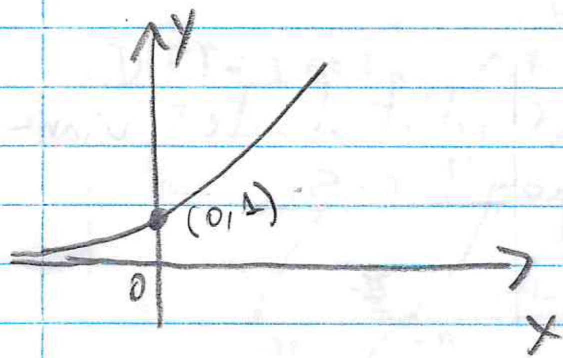


8) Função exponencial

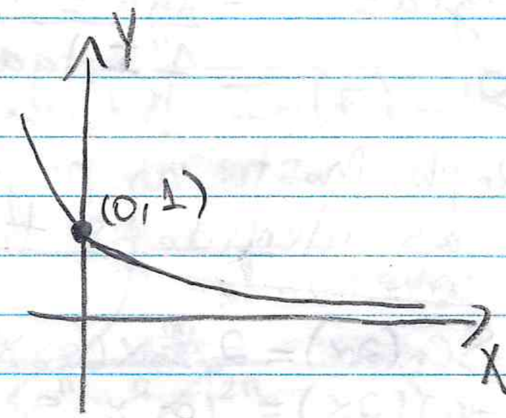
$f(x) = a^x$; $a > 0$ constante

a é a base e x o expoente

$D(f) = \mathbb{R}$, $Im(F) = (0, +\infty)$



$a > 1$



$0 < a < 1$

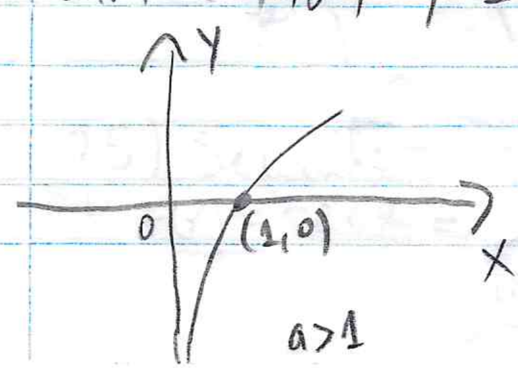
9) Função logarítmica

$F(x) = \log_a x$; $a > 0$ constante , $a \neq 1$.

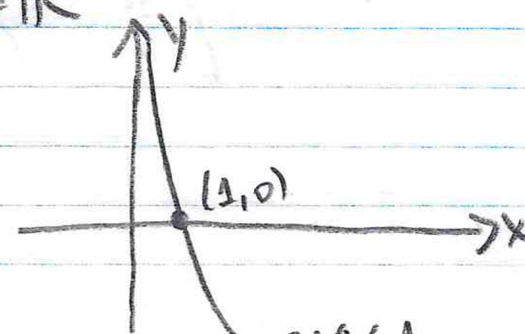
a é a base e x o logaritmando

$\log_a x$ é a função inversa da função a^x.

$D(F) = (0, +\infty)$, $Im(F) = \mathbb{R}$



$a > 1$



$0 < a < 1$

• Identidades Trigonométricas

a) $sen^2 x + cos^2 x = 1$
b) $tg^2 x + 1 = sec^2 x$
c) $1 + cotg^2 x = cosec^2 x$
d) $sen(a \pm b) = sen\,a\,cos\,b \pm sen\,b\,cos\,a$
e) $cos(a \pm b) = cos\,a\,cos\,b \mp sen\,a\,sen\,b$
f) $tg(a \pm b) = \dfrac{tg\,a \pm tg\,b}{1 \mp tg\,a\,tg\,b}$

Exemplo: Mostre as seguintes identidades usando as identidades trigonométricas:

a) $Sen(2x) = 2\,sen\,x\,cos\,x$
b) $cos(2x) = cos^2 x - sen^2 x$
c) $tg(2x) = \dfrac{2\,tg\,x}{1 - tg^2 x}$
d) $sen\,A\,sen\,B = \dfrac{1}{2}\left[cos(A-B) - cos(A+B)\right]$
e) $cos\,A\,cos\,B = \dfrac{1}{2}\left[cos(A+B) + cos(A-B)\right]$
f) $sen\,A\,cos\,B = \dfrac{1}{2}\left[sen(A+B) + sen(A-B)\right]$