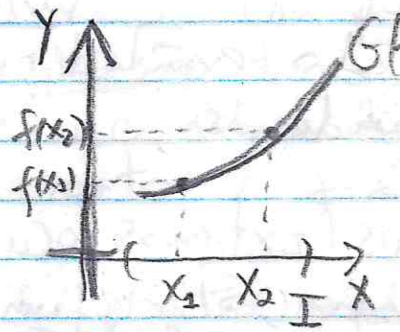
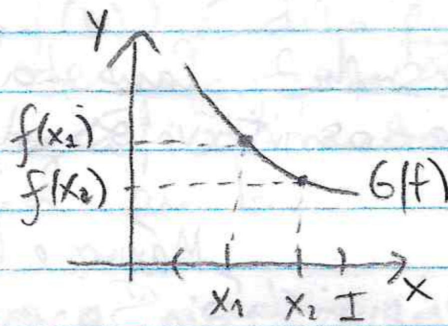
Monotonicidade e Concavidade

Definição: Uma função f é dita crescente em um intervalo aberto I se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$. Caso $f(x_1) > f(x_2)$ dizemos que f é decrescente em I.



CRESCENTE EM I



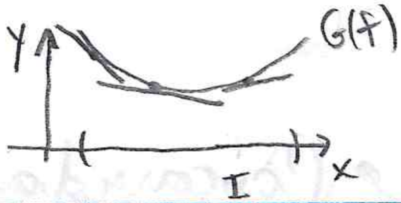
DECRESCENTE EM I

TEOREMA: Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I, então:

i) f é crescente em I se $f'(x) > 0$ em I.
ii) f é decrescente em I se $f'(x) < 0$ em I.

Exemplo 1: Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Definição: O gráfico de uma função f tem concavidade para cima em um intervalo aberto I se todas as retas tangentes em I estão abaixo do gráfico. Caso todas as retas tangentes estejam acima do gráfico em I dizemos que o gráfico tem concavidade para baixo em I.



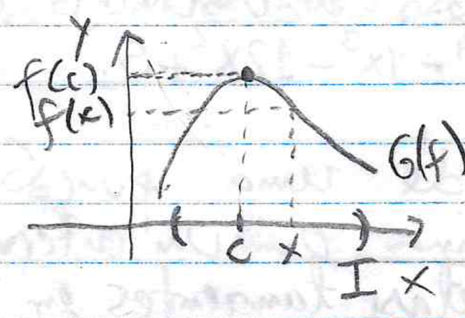
Teorema Seja f uma função duas vezes derivável em I. Então:
i) G(f) tem concavidade para cima em I se $f''(x) > 0$ em I.
ii) G(f) tem concavidade para baixo em I se $f''(x) < 0$ em I.

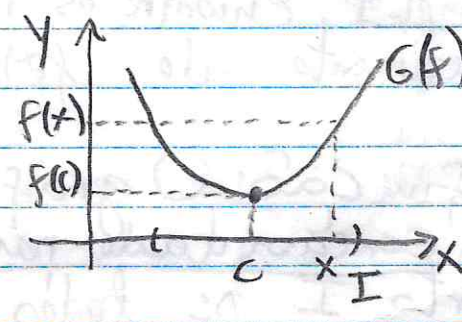
Exemplo 2: Para a função do exemplo 1, encontre os intervalos de concavidade.

Máximos e Mínimos locais (Extremos locais)

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Se $c \in I$ é um número tal que:

i) $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$, então dizemos que c é o ponto máximo de f em I e f(c) é o valor máximo de f em I.
ii) $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$, então dizemos que c é o ponto mínimo de f em I e f(c) é o valor mínimo de f em I.





obs: Quando I é um intervalo pequeno, dizemos que c é um extremo local de f em I, isto é, c é máximo local se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$ ou c é mínimo local se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.

Definição: Um número c é dito ponto crítico de uma função f se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Definição: Um ponto $(b, f(b))$ é dito ponto de inflexão do gráfico de uma função f se a concavidade do gráfico muda nesse ponto e f é contínua em b.

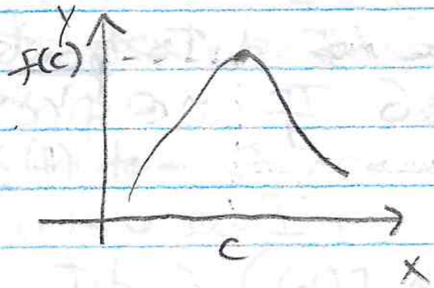
obs: O ponto onde ocorre a mudança da monotonicidade do gráfico é ponto crítico e o ponto onde ocorre a mudança da concavidade é ponto de inflexão.

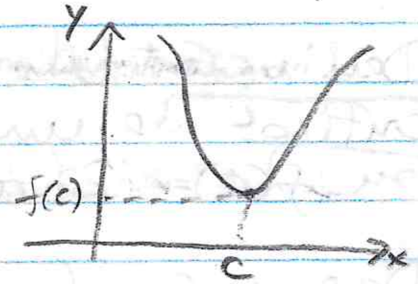
Exemplo 3. Encontre os pontos críticos e de inflexão para a função do exemplo 1.

Teorema (Teste da 1ª derivada)
Suponha que c seja um ponto crítico de uma função f contínua. Então:

i) Se f' mudar do sinal positivo para o negativo em c, então c é um ponto de máximo local de f.
ii) Se f' mudar do sinal negativo para o positivo em c, então c é um ponto de mínimo local de f.
iii) Se f' não mudar de sinal em c, então c não é extremo local de f.

Idéia Geométrica

i) 

ii) 

Exemplo 4: Encontre os extremos locais de f do exemplo 1.

Teorema (Teste da 2ª derivada)
Suponha que f'' seja contínua nas proximidades de c e $f'(c) = 0$. Então:

i) Se $f''(c) > 0$, temos que c é mínimo local de f.
ii) Se $f''(c) < 0$, temos que c é máximo local de f.

Exemplo 5: Mostre que $f(x) = x^4 - 4x^3$ possui um extremo local?

Exercícios (Estudar)
Pg 269 - 270 Ex: 9 - 29, 33 - 44
Pg 254 Ex: 29 - 44

Máximos e Mínimos Absolutos (Extremos)

Definição: Seja c um número no domínio D de uma função f. Então

i) c é ponto de máximo absoluto de f se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D$ e f(c) o valor máximo absoluto de f.

ii) c é ponto de mínimo absoluto de f se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D$ e f(c) o valor mínimo absoluto de f.

Os extremos absolutos são também denominados máximo e mínimo global.

Teorema (Valor Extremo) Se f for contínua em um intervalo fechado [a,b], então f possui um valor máximo absoluto f(c) e um valor mínimo absoluto f(d) onde $c, d \in [a,b]$.

O método do intervalo fechado Para encontrar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um intervalo fechado [a,b]:

1. Encontre os valores f(c) onde c é um ponto crítico de f em (a,b)
2. Encontre os valores de f(a) e f(b).
3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto e o menor valor é o mínimo absoluto.