Limites Infinitos

Definição: Seja f uma função definida para valores próximos de a, exceto possivelmente em a. Então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad (3)$$

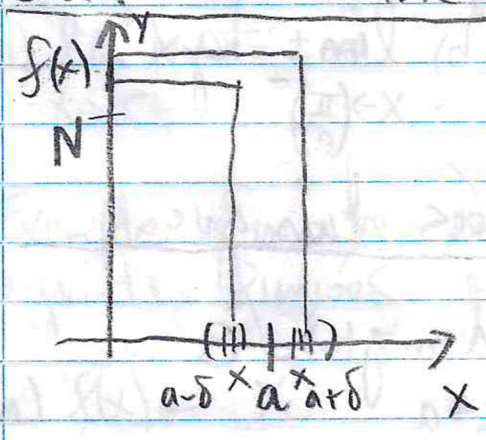
sendo lido "limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a <u>mais infinito</u>".
Isso significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente grandes (tão grande quanto quisermos) tomando x suficientemente próximo de a, mas $x \neq a$.

Obs: A função $f(x)$ cresce ilimitadamente quando x aproxima-se de a.

<u>Definição formal</u>: Dado $N > 0$ arbitrariamente grande, se existe $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |x - a| < \delta \overset{\text{(implica)}}{\Longrightarrow} f(x) > N.$$

Idéia Geométrica



obs: Repetir o processo anterior para

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

<u>Teorema 1</u>: Seja f e g duas funções tais que

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \neq 0 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \text{ e } g \to 0^+ \\ -\infty & \text{se } c > 0 \text{ e } g \to 0^- \\ -\infty & \text{se } c < 0 \text{ e } g \to 0^+ \\ +\infty & \text{se } c < 0 \text{ e } g \to 0^- \end{cases}$$

Obs: O Teorema acima vale para $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

<u>Exemplo</u>: Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tg\, x$

<u>Teorema 2</u>: Sejam f e g funções tais que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = c$$

então:

i) $\lim_{x \to a} [f(x) \mp g(x)] = \pm\infty$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

ii) $\lim_{x \to a} [f(x) g(x)] = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } c > 0 \\ \mp\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$

obs: O Teorema acima vale quando $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

<u>Exemplo</u>: Calcule os limites abaixo:

a) $\lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$ b) $\lim_{x \to -1^-} \left[\frac{x}{(x+1)^2}\right]$

<u>Definição</u>: A reta $x = a$ é chamada <u>assíntota vertical</u> da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

i) $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

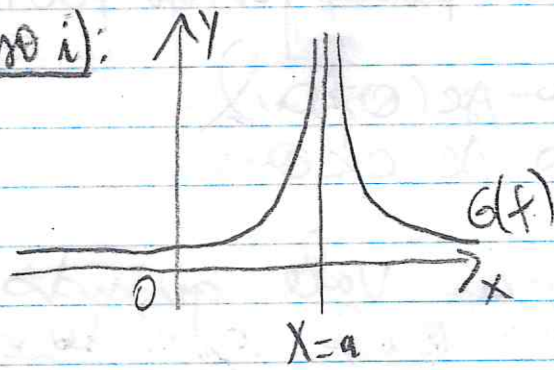
iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

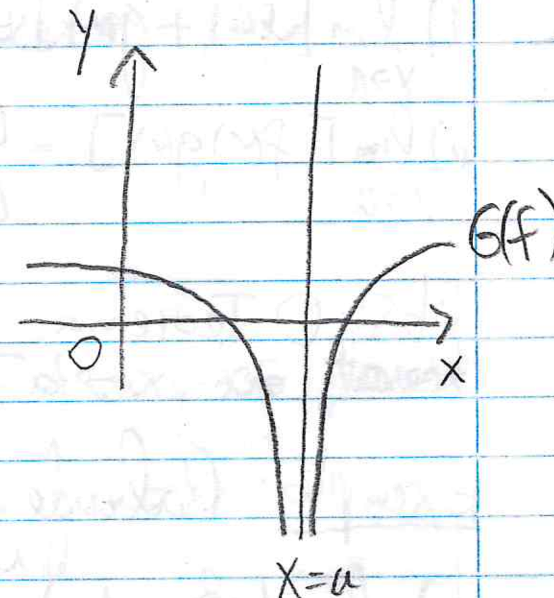
Exemplo: Encontre as assíntotas verticais das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{x}{x+4}$ b) $g(x) = \frac{4+x}{x^2-9}$

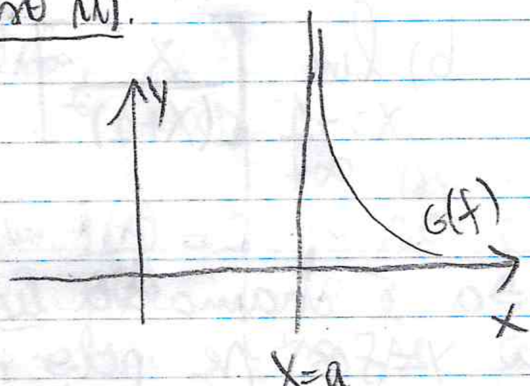
Idéia Geométrica

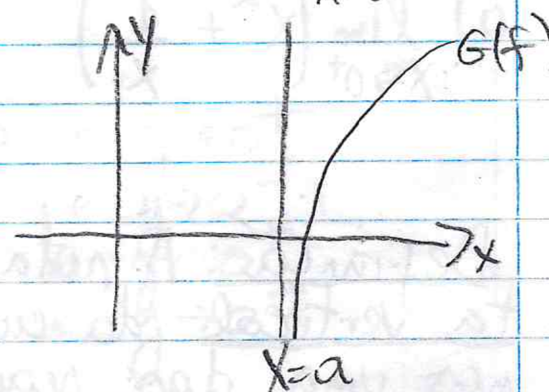
Caso i):



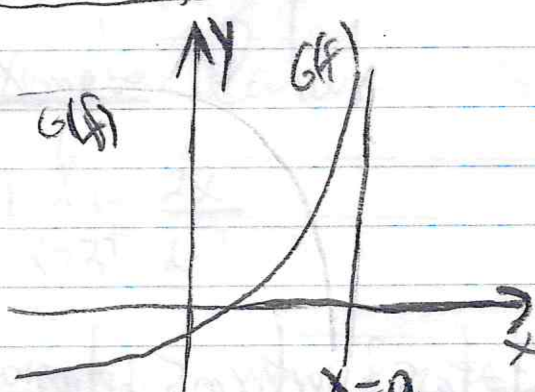


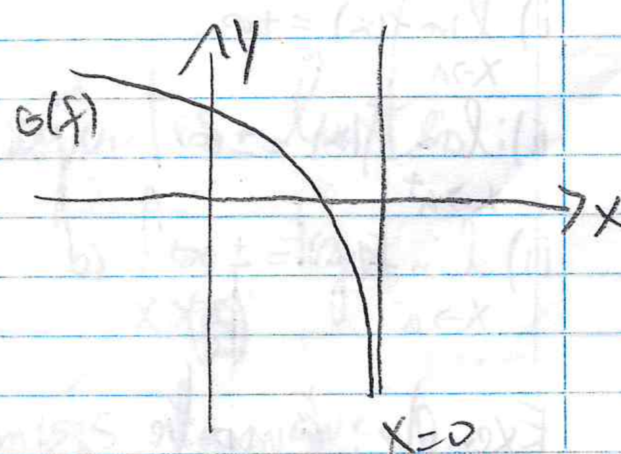
Caso ii):





Caso iii):





Lista de exercícios

Pág 88-89 : 2, 4, 11 e 12.

Pág 98-99 : 1, 2, 11-32.

Pág 90 : 29-37 e 38 a)

Pág 129: 13-38.