

SAMUEL HAZZAN

**COMPLEMENTO PARA
O PROFESSOR**

**FUNDAMENTOS DE
MATEMÁTICA 5
ELEMENTAR**

COMBINATÓRIA PROBABILIDADE



Copyright desta edição:

SARAIVA S.A. Livros Editores, São Paulo, 2006.

Av. Marquês de São Vicente, 1697 — Barra Funda

01139-904 — São Paulo — SP

Fone: (0xx11) 3613-3000

Fax: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268

www.editorasaraiva.com.br

Todos os direitos reservados.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Fundamentos de matemática elementar : complemento para o professor. — São Paulo: Atual, 1993.

Conteúdo: v. 1. Conjuntos e funções / Gelson Iezzi, Carlos Murakami. — v. 2. Logaritmos / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Carlos Murakami. — v. 3. Trigonometria / Gelson Iezzi. — v. 4. Sequências, matrizes, determinantes, sistemas / Gelson Iezzi, Samuel Hazzan. — v. 5. Combinatória, probabilidade / Samuel Hazzan. — v. 6. Complexos, polinômios, equações — v. 7. Geometria analítica / Gelson Iezzi. — v. 8. Limites, derivadas, noções de integral — Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Nilson José Machado. — v. 9. Geometria plana — v. 10. Geometria espacial : posição e métrica / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo.

1. Matemática (2.º grau) 2. Matemática (2.º grau) — Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) — Testes I. Iezzi, Gelson, 1939- II. Murakami, Carlos, 1943- III. Dolce, Osvaldo, 1938- IV. Hazzan, Samuel, 1946- V. Machado, Nilson José, 1947- VI. Pompeo, José Nicolau, 1945-

93-1795

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

I. Matemática : Ensino de 2.º grau 510.7

Complemento para o Professor — Fundamentos de Matemática Elementar 5

Editora: Bárbara Ferreira Arena

Editor de campo: Valdir Montanari

Coordenadora editorial: Sandra Lucia Abrano

Chefe de preparação de texto e revisão: Noé Ribeiro

Coordenadora de revisão: Maria Luiza Xavier Souto

Revisores: Alice Kobayashi

Magna Reimberg Teobaldo

Maria Cecília Fernandes Vannucchi

Maria da Penha Faria

Vera Lúcia Pereira Della Rosa

Editor de arte: Zildo Braz

Chefe de arte: Glair Alonso Arruda

Assistentes de arte: Lu Bevilacqua Ghion

Ricardo Yorio

Rosi Meire Martins Ortega

Gerente de produção: Antonio Cabello Q. Filho

Coordenadora de produção: Silvia Regina E. Almeida

Produção gráfica: José Rogerio L. de Simone

Maurício T. de Moraes

Capa: Ettore Bottini

Foto de capa: Hilton Ribeiro

Consultor técnico: David Mauro Degenszajn

Fotolito: Binhos/H.O. Panaroni

Composição e arte-final: Paika Realizações Gráficas

Visite nosso site: www.atualeditora.com.br

Central de atendimento ao professor: (0xx11) 3613-3030

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 5, *Combinatória/Probabilidade*, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos às sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos ao professor David Mauro Degenszajn a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

Sumário

Capítulo I	— Análise combinatória	1
Capítulo II	— Binômio de Newton	35
Capítulo III	— Probabilidade	56

Capítulo I – Análise Combinatória

1. Cada refeição consta de um par ordenado (a, b) , em que a representa o tipo de carne e b a sobremesa. Logo, há $8 \cdot 5 = 40$ refeições possíveis.
2. Uma maneira de se vestir pode ser indicada pelo par (a, b) , em que a representa a blusa e b a saia vestida. Assim, temos $5 \cdot 6 = 30$ formas possíveis.
3. Cada posição do banco é um par (a, b) , em que a representa seu assento e b seu encosto. Temos, daí, $6 \cdot 5 = 30$ posições distintas.
4. Cada casal consiste em um par (a, b) , em que a representa o homem e b a mulher. O número de casais é, portanto, $80 \cdot 90 = 7\,200$.
5. Cada percurso consta de um par ordenado (a, b) , com $a \neq b$, em que a representa a porta de entrada e b a de saída. Temos, então, $8 \cdot 7 = 56$ possibilidades.
6. Qualquer premiação possível consta de um par (a, b) , com $a \neq b$, em que a e b representam, respectivamente, 1° e 2° colocados. Logo, há $12 \cdot 11 = 132$ possibilidades.
7. Uma forma de se vestir pode ser indicada por uma tripla ordenada (a, b, c) , em que a representa o terno, b a camisa e c o par de sapatos. Temos, portanto, $10 \cdot 12 \cdot 5 = 600$ formas de se vestir.
8. Cada escolha é uma terna ordenada (a, b, c) , em que a representa a cor do automóvel, b o motor e c a versão. Assim, há $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ alternativas de compra.
10. Cada resposta do teste é uma sequência do tipo $(a_1, a_2, \dots, a_{20})$, em que cada a_i vale V ou F .
Portanto, o número de possibilidades é $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{20 \text{ vezes}} = 2^{20}$.
11. Cada resultado consta de uma sequência $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$, em que cada jogo a_i pode assumir 4 resultados possíveis.
Assim, temos, $\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4}_{10 \text{ vezes}} = 4^{10} = (2^{10})^2 \cong 10^6$ resultados possíveis.

12. Qualquer palavra consiste em uma seqüência $(a_1, a_2, \dots, a_{32})$, em que cada a_i é um *bit* e vale 0 ou 1. Daí, há $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{32}$ palavras.

32 vezes

13. A sala poderá ser aberta ao abrimos 1, 2 ou até 10 portas. Então, cada porta poderá ficar aberta ou fechada. Excluindo o caso em que todas ficam fechadas, pelo princípio fundamental da contagem temos:

$$(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2) - 1 = 2^{10} - 1 = 1\,023 \text{ possibilidades.}$$

10 vezes

14. Usando a convenção

0: o aluno não é escolhido

1: o aluno é escolhido

notamos que cada aluno será identificado por 0 ou 1.

Se considerarmos a situação em que nenhum aluno é escolhido, teremos, pelo princípio fundamental da contagem, $(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2) - 1 = 2^6 - 1 = 63$ possibilidades.

6 vezes

15. Analogamente ao anterior, temos $2^5 - 1 = 31$ possibilidades.

16. Cada anagrama é uma seqüência de letras (l_1, l_2, \dots, l_6) , em que cada l_i representa a tecla batida na máquina.

Dessa forma, há $26 \cdot 26 \cdot \dots \cdot 26 = 26^6$ anagramas.

6 vezes

Sim, consta o anagrama TECTEC pois os l_i 's da seqüência acima não são necessariamente distintos.

17. Cada voto é uma seqüência (a_1, a_2, \dots, a_5) , em que cada a_i representa o candidato escolhido.

Então, temos, $3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = 3^5$ votos possíveis.

5 vezes

18. Um número formado consta de uma seqüência (a_1, a_2, a_3) , em que a_i representa um dígito escolhido dentre os disponíveis.

Dessa forma, existem $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ números.

19. Cada pessoa será identificada pelo par (a, b) , em que a representa seu nome e b seu sobrenome. Então, o número de possibilidades é $10 \cdot 20 = 200$.

20. Sejam a o número de calças e b o número de paletós. O número de conjuntos distintos que podem ser formados é $a \cdot b = 24$. Os possíveis naturais que satisfazem a condição acima são 1 e 24, 2 e 12, 3 e 8, 4 e 6. Dentre eles, a soma mínima é 10.

21. Cada resultado consiste em uma seqüência (a_1, a_2, \dots, a_6) , em que a_i representa o número obtido no lançamento do i -ésimo dado.

Assim, há $6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 6 = 6^6$ resultados possíveis.

6 vezes

22. Seja $A = \{0, 1, \dots, 9\}$. Cada número de telefone é uma seqüência do tipo $(2, a_1, a_2, b_1, \dots, b_4)$, em que $a_i \in A^*$ e $b_j \in A$.

Então, existem $9 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 81 \cdot 10^4$ números de telefone.

23. a) Cada letra é uma seqüência (a_1, a_2, a_3) , em que a_i vale $(-)$ ou (\cdot) . Assim, temos $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ letras.

- b) O total de letras será dado pela soma das letras que apresentam 1, 2, ... ou 8 símbolos, isto é,

$$= 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + \dots + \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{8 \text{ vezes}}$$

$= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^8$, que é a expressão da soma dos termos de uma

P.G., a saber, $\frac{2 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 510$.

25. O número de percursos possíveis corresponde à soma dos caminhos que, partindo de A , passam por B ou C e de lá chegam a X .

Assim, há $10 \cdot 12 + 5 \cdot 8 = 160$ percursos diferentes.

27. Cada trajetória consistirá em uma seqüência de 8 passos (a_1, a_2, \dots, a_8) , em que a_i pode ser dado para cima ou para a direita.

Pelo princípio fundamental da contagem, existem $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^8$ caminhos.

8 vezes

28. De modo análogo ao anterior, há $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^6 = 64$ maneiras.

6 vezes

30. Cada divisor positivo de N é da forma: $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4}$, em que $\alpha_1 \in \{0, 1, \dots, a\}$; $\alpha_2 \in \{0, 1, \dots, b\}$ e assim por diante.

Assim, o número de divisores de N é o número de quádruplas $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, que é $(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)$.

31. Notemos que, fixado um dos números, existem 6 peças diferentes formadas com os números restantes. Havendo 7 números, temos $6 \cdot 7$ peças. Como elas

são simétricas, cada peça foi contada 2 vezes, o que dá $\frac{6 \cdot 7}{2}$. A esta quantidade devemos somar as peças formadas de números iguais, (1, 1), por exemplo.

Logo, há $\frac{6 \cdot 7}{2} + 7 = 28$ peças.

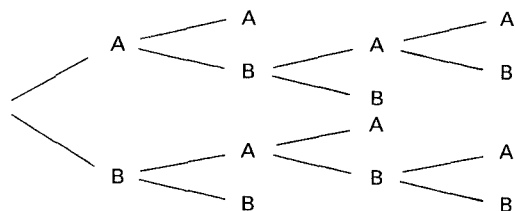
32. Através do mesmo raciocínio, generalizamos:

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

33. Cada função será constituída de n imagens, em que há r possibilidades para cada imagem. Logo, pelo princípio fundamental da contagem ficam definidas $r \cdot r \cdot \dots \cdot r = r^n$ funções.

n vezes

35. Vamos dispor as possibilidades num diagrama de árvore, no qual em cada "coluna" do diagrama representamos os possíveis ganhadores de cada jogo: Antônio (A) ou Benedito (B).



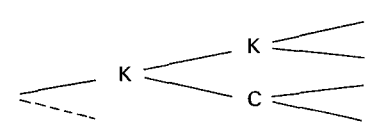
Temos as seguintes possibilidades:

{AA, ABAA, ABAB, ABB, BAA, BABA, BABB, BB}.

36. Imaginando um diagrama de árvore, verificamos que as seguintes seqüências representam P.A.:

(1, 2, 3); (1, 3, 5); (1, 4, 7); (1, 5, 9); (2, 3, 4); (2, 4, 6); (2, 5, 8); (2, 6, 10); (3, 2, 1); (3, 4, 5); (3, 5, 7); (3, 6, 9); (4, 3, 2); (4, 5, 6); (4, 6, 8); (4, 7, 10); (5, 3, 1); (5, 4, 3); (5, 6, 7); (5, 7, 9); (6, 5, 4); (6, 4, 2); (6, 7, 8); (6, 8, 10); (7, 6, 5); (7, 5, 3); (7, 4, 1); (7, 8, 9); (8, 7, 6); (8, 6, 4); (8, 5, 2); (8, 9, 10); (9, 8, 7); (9, 7, 5); (9, 6, 3); (9, 5, 1); (10, 9, 8); (10, 8, 6); (10, 7, 4); (10, 6, 2).

37. Vamos construir o diagrama de árvore, indicando em cada uma de suas colunas os possíveis resultados obtidos pelo lançamento da moeda: cara (K) ou coroa (C). Notemos ainda que, pelo enunciado, é possível concluir que o 1º lançamento resultou cara.



Se ocorrer:

(K, K, K), teremos: Pedro, Antônio e Antônio

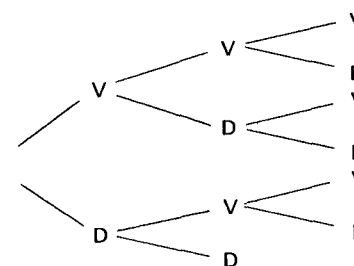
(K, K, C), teremos: Pedro, Antônio e Manoel

(K, C, K), teremos: Pedro, Manoel e Pedro

(K, C, C), teremos: Pedro, Manoel e Antônio

Logo, Antônio dará no máximo 2 voltas.

38. Em cada coluna do diagrama seguinte indicaremos os possíveis resultados em cada jogada: Vitória (V) ou Derrota (D). Temos também o total ao final de cada seqüência de resultados:



(V, V, V): R\$ 5 000,00.

(V, V, D): R\$ 3 000,00.

(V, D, V): R\$ 3 000,00.

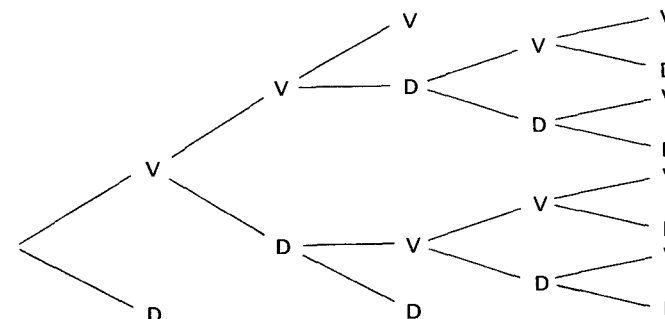
(V, D, D): R\$ 1 000,00.

(D, V, V): R\$ 3 000,00.

(D, V, D): R\$ 1 000,00.

Assim, ao final de 3 jogadas podemos ter R\$ 1 000,00, R\$ 3 000,00 ou R\$ 5 000,00.

39. Indicaremos nas colunas do diagrama seguinte os possíveis resultados: Vitória (V) ou Derrota (D), em cada uma das rodadas a serem jogadas:



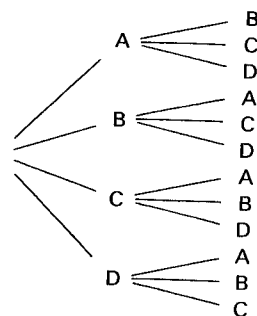
Verificando, há 11 possibilidades de jogo.

40. Sejam $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ os rapazes e $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ as moças. Esquematizando o problema da forma:

$$\begin{cases} a_1 \rightarrow 5 \\ a_2 \rightarrow 6 \\ a_3 \rightarrow 7 \\ \vdots \\ a_r \rightarrow m \end{cases}$$

notamos que a diferença entre o número de moças com quem cada homem dança e o índice que o identifica é constante e igual a 4. Daí, $m - r = 4 \Leftrightarrow m = r + 4$.

41.



Temos:

(A, B); (A, C); (A, D); (B, A); (B, C); (B, D); (C, A); (C, B); (C, D); (D, A); (D, B); (D, C).

43. Cada possibilidade para os 3 primeiros colocados consiste em um arranjo dos 20 times tomados 3 a 3, pois importa a ordem de classificação dos times. Logo, o número de resultados possíveis é $A_{20,3} = 6840$.

44. O número de maneiras de pintar um cubo com 6 cores é $6!$.

Contudo, imaginemos um observador de frente para uma determinada face, digamos a vermelha. Girando o cubo ao redor do eixo perpendicular a essa face, podemos obter 4 posições do cubo, mantendo inalterada a face vermelha.

Como isso pode ser feito com todas as 6 faces do cubo, resulta que o número de possibilidades é: $\frac{6!}{4 \cdot 6} = 30$ maneiras.

45. Como o torneio é disputado em 2 turnos, o time A, por exemplo, enfrenta o time B duas vezes. Logo, o problema consiste em formar os arranjos dos 6 times tomados 2 a 2, isto é, $A_{6,2} = 30$.

47. A 1.^a listra pode ser pintada de qualquer uma das 3 cores. A 2.^a listra deve ser pintada de uma cor diferente da 1.^a, havendo então 2 possibilidades. Já a 3.^a também deve ser pintada de uma cor diferente da 2.^a, havendo então 2 possibilidades.

Assim, o número de maneiras que a bandeira pode ser pintada é:

$$3 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{6 \text{ vezes}} = 3 \cdot 2^6 = 192.$$

48. Se considerarmos o bilhete (X, Y), X será a estação de partida e Y a de chegada. Por outro lado, no bilhete (Y, X) ocorre o contrário. Assim, cada bilhete é um arranjo das 16 estações tomadas 2 a 2, isto é, $A_{16,2} = 240$.

49. Fixadas A e F como cidades de partida e chegada, respectivamente, cada percurso consistirá em um arranjo das 4 cidades restantes tomadas 4 a 4, pois deve necessariamente passar por todas elas.

O total de possibilidades é, então:

$$A_{4,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 24.$$

50. Como importa a ordem da 1.^a, 2.^a e 3.^a colocadas, cada resultado possível é um arranjo das 5 misses tomadas 3 a 3, isto é, $A_{5,3} = 60$.

51. Cada tentativa de abrir o cofre consiste em uma sequência ordenada de 3 números distintos, isto é, a um arranjo dos 10 algarismos tomados 3 a 3. Assim, o número máximo de tentativas é $A_{10,3} = 720$.

52. Notemos inicialmente que, se numa configuração o jogador A é centroavante e B é ponta-direita, será considerada distinta a configuração em que A é ponta-direita e B é centroavante. Daí, cada escalação consta de um goleiro e de uma sequência ordenada de 10 jogadores escolhidos entre os 19. Como há 3 goleiros, o número total de possibilidades é: $3 \cdot A_{19,10}$.

53. Como importa a ordem em que as pedras são sorteadas, cada extração é um arranjo das 89 pedras tomadas 3 a 3, uma vez que se deseja que a 3.^a pedra seja "80". Logo, o número de possibilidades é: $A_{89,3} = 681 \cdot 384$.

55. a) O número de resultados possíveis é o número de arranjos, com repetição, de m bolas tomadas r a r, isto é, $m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^r$.

r vezes

- b) O número de resultados possíveis é o número de arranjos, sem repetição, de m bolas tomadas r a r, isto é, $A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$.

56. Os 3 primeiros algarismos da sequência numérica ordenada serão escolhidos entre os 5 da urna I. Temos: $A_{5,3} = 60$ possibilidades. Seus 2 últimos algarismos serão escolhidos entre os 3 da urna II. Temos: $A_{3,2} = 6$ possibilidades. Assim, ao todo há $60 \cdot 6 = 360$ possibilidades.

57. Analogamente ao anterior, o número de possibilidades é:
 $A_{4,2} \cdot A_{3,2} = 12 \cdot 6 = 72$.
59. Pelo exercício anterior, o número de funções injetoras definidas de A em B é:
 $A_{5,3} = 60$.
60. Cada função $f: I_n \rightarrow A$ será definida por uma n -upla de imagens, em que os elementos da n -upla não são necessariamente distintos e devem ser escolhidos entre os m disponíveis em A . Logo, o número de funções é o número de arranjos com repetição dos m elementos de A tomados n a n , isto é, m^n .
61. $f: A \rightarrow B$ é bijetora se ocorrer, simultaneamente:
 (I) f é injetora
 (II) f é sobrejetora, isto é, *todo* elemento de B é imagem de algum elemento de A por f .
 Assim, o número de funções bijetoras é o número de arranjos de n elementos distintos tomados n a n , pois neste caso cada função bijetora fica definida por uma n -upla de imagens, em que seus elementos são todos distintos. Isto é, ficam definidas $A_{n,n} = n!$ funções bijetoras.
62. Como importa a ordem dos algarismos, cada número formado é um arranjo dos 9 algarismos tomados 3 a 3, isto é, $A_{9,3} = 504$.
63. Cada número é uma tripla ordenada de algarismos (a, b, c) . Determinaremos inicialmente o total de números de 3 algarismos:
 • “a” pode ser escolhido de 9 possibilidades diferentes (o “0” não convém para algarismo das centenas).
 • “b” e “c” serão escolhidos entre os 10 algarismos, podendo haver repetição. Assim, o número de possibilidades é o número de arranjos com repetição de 10 algarismos tomados 2 a 2, isto é, $10 \cdot 10 = 100$.
 Assim, ao todo, há $9 \cdot 100 = 900$ números de 3 algarismos.
 Determinaremos agora o total de números formados por algarismos distintos:
 • Novamente, “a” pode ser escolhido de 9 maneiras.
 • Uma vez determinado o algarismo das centenas — “a” —, o número de possibilidades de escolher “b” e “c” é o número de arranjos dos 9 algarismos tomados 2 a 2, isto é, $A_{9,2} = 72$.
 Assim, há $9 \cdot 72 = 648$ números formados por algarismos distintos.
 Portanto, o total de números de 3 algarismos em que pelo menos 2 são repetidos é $900 - 648 = 252$.
65. Cada placa é uma sêxtupla ordenada tal que:
 • seus 2 primeiros elementos são as letras A e B , podendo haver repetição. En-

tão, o número de possibilidades é o número de arranjos com repetição das 2 letras tomadas 2 a 2, isto é, $2 \cdot 2 = 4$.

- seus elementos restantes são algarismos distintos escolhidos do conjunto: $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. O número de possibilidades é $A_{5,4} = 120$.
 Assim, há, ao todo, $4 \cdot 120 = 480$ placas.

66. As triplas ordenadas de algarismos que nos interessam são do tipo:
 $(5, _, _)$ ou $(6, _, _)$ ou $(7, _, _)$ ou $(8, _, _)$ ou $(9, _, _)$.
 Em qualquer uma das situações acima, o número de triplas possíveis é: $A_{8,2} = 56$.
 Então, o total de números é: $56 + 56 + 56 + 56 + 56 = 280$.
67. Como os algarismos podem se repetir, o que nos interessa são os arranjos com repetição dos 5 números tomados 3 a 3, isto é, $5^3 = 125$.
68. O total de números de 4 algarismos é o número de arranjos com repetição dos 9 algarismos tomados 4 a 4, isto é, $9^4 = 6\,561$.
 O total de números de 4 algarismos em que eles são distintos é: $A_{9,4} = 3\,024$.
 Logo, a diferença: $6\,561 - 3\,024 = 3\,537$ fornece a quantidade de números em que pelo menos 2 de seus algarismos são iguais.
69. As triplas ordenadas de algarismos que nos interessam são do tipo:
 $(2, _, _)$ ou $(_, 2, _)$ ou $(_, _, 2)$.
 Lembrando que o número formado não pode conter o “6”, o total de números formados em cada configuração acima é $A_{3,2} = 6$.
 Logo, o resultado procurado é: $6 + 6 + 6 = 18$.
70. As quádruplas ordenadas de algarismos que nos interessam são do tipo:
 $(1, 4, _, _)$ ou $(1, _, 4, _)$ ou $(1, _, _, 4)$ ou $(_, 1, 4, _)$ ou $(_, 1, _, 4)$ ou $(_, _, 1, 4)$.
 O número de quádruplas possíveis de cada tipo é: $A_{4,2} = 12$.
 Assim, o número total de arranjos é: $12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 72$.
71. Cada número formado é uma tripla ordenada do tipo:
 $(_, _, 2)$ ou $(_, _, 4)$ ou $(_, _, 6)$.
 O número de triplas possíveis de cada tipo é: $A_{5,2} = 20$.
 Assim, o resultado procurado é: $20 + 20 + 20 = 60$.
72. As quádruplas ordenadas de algarismos escolhidos entre os dados são do tipo:
 $(_, _, _, 1)$ ou $(_, _, _, 3)$ ou $(_, _, _, 5)$.
 O número de quádruplas de cada tipo é: $A_{5,3} = 60$.
 Dessa forma, o total de números formados é: $60 + 60 + 60 = 180$.
73. As triplas ordenadas de algarismos que nos interessam são do tipo:
 $_, _, 5$.

Podendo haver repetição, o número de triplas possíveis é o número de arranjos com repetição dos 4 algarismos tomados 2 a 2, isto é, $4 \cdot 4 = 16$.

74. Cada número formado é uma quádrupla ordenada de algarismos do tipo: $(_, _, _, 5)$.
O número de quádruplas desse tipo é: $A_{5,3} = 60$.
75. Um número é múltiplo de 4 quando terminar em "00" ou quando seus 2 últimos algarismos formarem um número divisível por 4. Como dispomos apenas dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, as quádruplas ordenadas de algarismos que nos interessam são do tipo:
 $(_, _, 1, 2)$ ou $(_, _, 1, 6)$ ou $(_, _, 2, 4)$ ou $(_, _, 3, 2)$ ou $(_, _, 3, 6)$ ou $(_, _, 5, 2)$ ou $(_, _, 5, 6)$ ou $(_, _, 6, 4)$.
Para cada tipo há: $A_{4,2} = 12$ possibilidades.
Assim, o resultado procurado é: $8 \cdot 12 = 96$.
77. Consideremos inicialmente que, com os algarismos dados, é possível escrever números com 4 ou com 5 algarismos que sejam maiores que 2 500.
(I) Com 4 algarismos, as quádruplas que nos interessam são do tipo:
 $(2, 5, _, _) \text{ ou } (3, _, _, _) \text{ ou } (4, _, _, _) \text{ ou } (5, _, _, _)$
- | | | | |
|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| $A_{3,2} = 6$
possibilidades | $A_{4,3} = 24$
possibilidades | $A_{4,3} = 24$
possibilidades | $A_{4,3} = 24$
possibilidades |
- Logo, com 4 algarismos, há $6 + 24 + 24 + 24 = 78$ números maiores que 2 500.
(II) Com 5 algarismos, qualquer número formado é maior que 2 500. O total de números formados com 5 algarismos é o número de permutações possíveis dos 5 algarismos dados, isto é, $P_5 = 5! = 120$.
- Juntando (I) e (II), temos ao todo: $78 + 120 = 198$ números.
78. As triplas ordenadas de algarismos escolhidos entre os dados que nos interessam são do tipo:
 $(1, _, _) \text{ ou } (2, _, _) \text{ ou } (5, _, _) \text{ ou } (6, _, _)$.
O número de triplas de cada tipo é: $A_{4,2} = 12$.
Logo, o total pedido é: $4 \cdot 12 = 48$.
79. O número 43 892 é precedido pelos números da forma:
- I $(2, _, _, _, _)$, que são em número de $P_4 = 4! = 24$
 - II $(3, _, _, _, _)$, que são em número de $P_4 = 4! = 24$
 - III $(4, 2, _, _, _)$, que são em número de $P_3 = 3! = 6$
 - IV $(4, 3, 2, _, _)$, que são em número de $P_2 = 2! = 2$

V $(4, 3, 8, 2, _)$, que são em número de $P_1 = 1! = 1$.

De (I), (II), (III), (IV) e (V), concluímos que 43 892 é precedido de:
 $24 + 24 + 6 + 2 + 1 = 57$ números. Portanto, ele ocupa a 58ª posição.

80. Em cada prognóstico simples, você deve escolher 1 entre as 3 colunas disponíveis (coluna 1, coluna do meio, coluna 2). Isso pode ser feito de $A_{3,1} = 3$ maneiras. No prognóstico duplo, você deve escolher 2 entre as 3 colunas, lembrando, por exemplo, que escolher as colunas 1 e 2 é o mesmo que escolher as colunas 2 e 1. Assim, o total de possibilidades de se preencher um jogo com prognóstico duplo é: $\frac{A_{3,2}}{2} = 3$.
- Suponhamos, por exemplo, que o jogo 1 seja preenchido com um "duplo" e os restantes com "simples". Pela discussão anterior, há $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = 3^{13}$
- $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \dots & \uparrow \\ 1^\circ \text{ jogo} & 2^\circ & & & 13^\circ \end{matrix}$
- maneiras de se preencher esse cartão.
Ora, o jogo escolhido para ser preenchido com o prognóstico duplo pode ser o 2, 3, ..., 13.
Assim, o total de possibilidades é: $13 \cdot 3^{13}$.
81. Cada forma de dispor as máquinas para montar a peça é uma permutação das 7 máquinas disponíveis. Assim, o resultado procurado é: $P_7 = 7! = 5\,040$.
82. Os r elementos dos k destacados podem ser escolhidos de $A_{k,r}$ formas. Os outros $n - r$ elementos devem ser escolhidos entre os $m - k$ remanescentes, havendo então $A_{m-k, n-r}$ possibilidades. Por fim, podemos colocar o "bloco" dos r , num total de $(n - r + 1)$ posições.
Assim, o resultado procurado é: $(n - r + 1) \cdot A_{k,r} \cdot A_{m-k, n-r}$.
84. Temos as seguintes possibilidades:
F_____ = $5! = 120$ anagramas
L_____ = $5! = 120$ anagramas
T_____ = $5! = 120$ anagramas
R_____ = $5! = 120$ anagramas
Assim, ao todo há $120 + 120 + 120 + 120 = 480$ anagramas.
85. O inteiro formado pode apresentar:
1 algarismo: Há 4 possibilidades.
2 algarismos: Há $A_{4,2} = 12$ possibilidades.
3 algarismos: Há $A_{4,3} = 24$ possibilidades.
4 algarismos: Há $P_4 = 4! = 24$ possibilidades.
Assim, ao todo, podemos formar: $4 + 12 + 24 + 24 = 64$ números inteiros.

86. Fixadas as consoantes nas posições de ordem ímpar, isto é,
 $C _ C _ C _ \dots$
 as vogais podem ser permutadas de $N!$ maneiras, alternando-se com as consoantes. Por outro lado, as consoantes também podem ser dispostas de $N!$ maneiras. Assim, neste caso, há $N! N!$ possibilidades.
 Analogamente, se as consoantes estiverem ocupando as posições de ordem par, há $N! N!$ possibilidades.
 Logo, o resultado procurado é $N! N! + N! N! = 2(N!)^2$.

87. Cada palavra é uma permutação das letras: P, E, R, N, A, M, B, U, C, O. Logo, há $10!$ anagramas.
 Começando com a sílaba PER, devemos apenas permutar as letras: N, A, M, B, U, C, O. Logo, há $P_7 = 7!$ anagramas.

88. Solução 1

Temos as seguintes possibilidades:

$P _ _ _ L$ ou $P _ _ _ T$ ou $P _ _ _ S$ ou $L _ _ _ P$ ou
 $L _ _ _ T$ ou $L _ _ _ S$ ou $S _ _ _ P$ ou $S _ _ _ L$ ou
 $S _ _ _ T$ ou $T _ _ _ P$ ou $T _ _ _ L$ ou $T _ _ _ S$.

Em cada uma das possibilidades acima, devemos permutar as 4 letras restantes, havendo assim $4! = 24$ anagramas. Como temos 12 possibilidades, o resultado procurado é: $12 \cdot 24 = 288$.

Solução 2

Como importa a ordem das consoantes que iniciam e terminam a palavra, o número de modos de escolhê-las é $A_{4,2}$. Uma vez determinadas as consoantes, há 4 letras a serem permutadas, num total de $P_4 = 4!$ anagramas.
 Assim, o resultado procurado é: $A_{4,2} \cdot P_4 = 12 \cdot 24 = 288$.

89. Os anagramas que nos interessam são da forma:

$_ E _ U _ _ I _ A$

Neste caso devemos permutar apenas as letras: R, P, B, L, C. Assim, ao todo, há $P_5 = 5! = 120$ anagramas.

90. Para que nenhuma torre possa “comer” outra, elas não podem ser dispostas 2 a 2 na “horizontal” e na “vertical”, podendo apenas ser dispostas na “diagonal” do tabuleiro. Assim, o número de formas de colocar as 8 torres nas 8 “casas” da diagonal é: $P_8 = 8!$

91. Denotando os anúncios existentes por A_1, A_2, \dots, A_7 , cada maneira de colocá-los nos intervalos destinados a eles é uma permutação dos A_i 's.
 Logo, o resultado procurado é $P_7 = 7! = 5\,040$.

93. a) Se os homens devem ficar juntos, devemos considerá-los como “uma só pessoa” que junto com as outras 5 mulheres devem ser permutados, num total de $6!$ permutações. Porém, em cada uma dessas permutações, os homens devem ser permutados entre si, num total de $4!$ permutações. Assim, o número total de permutações é: $6! 4!$

- b) Notemos que os homens devem ficar juntos, funcionando como “uma só pessoa” e as mulheres juntas também funcionarão como “uma única pessoa”, dando um total de $2!$ permutações. Porém, em cada uma dessas permutações os homens devem ser permutados entre si, num total de $4!$ maneiras, o mesmo acontecendo com as mulheres, num total de $5!$ maneiras.

Assim ao todo, há $2! 4! 5!$ permutações possíveis.

94. Se os meninos estiverem ocupando as posições de ordem ímpar da fila ($1^a, 3^a, \dots, 9^a$), ficam determinadas $5!$ permutações possíveis entre as mulheres para ocuparem as posições de ordem par. Lembrando que cada um dos meninos pode ocupar qualquer uma das posições ímpares, os meninos também podem ser permutados de $5!$ maneiras. Assim, o total é $5! 5!$ permutações.
 Analogamente, se os meninos estiverem ocupando as posições de ordem par, há $5! 5!$ permutações.

Juntando-se as duas possibilidades acima, há, ao todo:

$$5! 5! + 5! 5! = 2 \cdot 5! 5! = 28\,800.$$

95. Sejam a, b, c, d, e as alternativas.

O número total de maneiras de ordenar as alternativas é $P_5 = 5!$, que corresponde às permutações dos elementos a, b, c, d, e .

O número de maneiras de ordenar as alternativas, sendo a primeira correta, é $P_4 = 4!$, pois, neste caso, basta permutar as letras b, c, d, e .

Analogamente, o número de maneiras de ordenar as alternativas, sendo a última correta, é $P_4 = 4!$.

Assim, o resultado pedido é dado pela diferença:

$$5! - (4! + 4!) = 120 - 24 - 24 = 72.$$

96. O número de maneiras de escolher os dois homens a fim de ocupar as extremidades da fila é o número de arranjos dos 3 homens tomados 2 a 2, pois importa a ordem em que forem escolhidas as extremidades da fila. Em cada uma das possibilidades, devemos permutar as 4 pessoas remanescentes (1 homem e 3 mulheres), num total de $P_4 = 4!$ permutações.
 Logo, ao todo há: $A_{3,2} \cdot P_4 = 3! 4! = 144$ possibilidades.

97. O número total de maneiras de dispor as 6 pessoas numa fila é $P_6 = 6! = 720$. Se Geraldo (G) e Francisco (F) ficam juntos, eles funcionam como “uma só pessoa”, devendo se permutar com as 4 outras, num total de $5!$ permutações. Em

cada uma dessas permutações, G e F podem se permutar entre si de $2!$ maneiras. Dessa forma G e F ficam juntos em $5! \cdot 2! = 240$ configurações. Então, a diferença $720 - 240 = 480$ fornece o número de maneiras em que G e F não ficam sentados um ao lado do outro.

98. O número de maneiras de escolher as letras é o número de permutações das letras A, B, C , isto é, $P_3 = 3! = 6$.
O número de maneiras de escolher os 4 algarismos entre os 5 algarismos pares é o número de arranjos dos 5 algarismos tomados 4 a 4, isto é, $A_{5,4} = 120$.
Dessa forma, a placa pode ser formada de $6 \cdot 120 = 720$ maneiras diferentes.

99. Denotando por \square os algarismos "0", "2" e "4" agrupados, podemos ter as seguintes possibilidades:

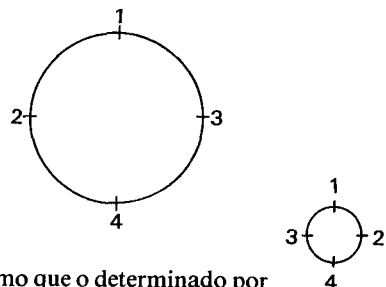
— \square — : Os 2 algarismos restantes devem ser escolhidos entre os 7 restantes e os elementos de \square podem se permutar entre si. Assim, há $A_{7,2} \cdot P_3 = 252$ possibilidades.

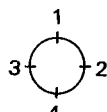
— \square \square : Analogamente ao anterior há 252 possibilidades.

\square — : Neste caso, os 2 algarismos restantes podem ser escolhidos de $A_{7,2} = 42$ maneiras. Porém, das permutações possíveis dos elementos de \square , devemos descontar as 2 que iniciam por "0". Assim, há $A_{7,2} \cdot (P_3 - 2) = 42 \cdot 4 = 168$.

Assim, ao todo, há $252 + 252 + 168 = 672$ números.

101. Utilizando o resultado do exercício anterior, há $(12 - 1)! = 11!$ permutações circulares das 12 crianças.
102. Calculando as permutações circulares das 4 contas, obtemos $(4 - 1)! = 3! = 6$ possibilidades. Chamando as contas de 1, 2, 3 e 4, notamos que o colar determinado pela posição das contas abaixo:



é o mesmo que o determinado por , que é obtido "virando-se" o colar. Assim, cada permutação circular foi contada 2 vezes.

Então, temos: $\frac{6}{2} = 3$ colares.

103. $m = 3$.

Fixando os meninos na roda, as meninas podem ser dispostas de $3!$ maneiras. Por outro lado, há $(3 - 1)! = 2!$ modos de formar uma roda só com os meninos. Assim, 3 meninos e 3 meninas podem ser alternadamente dispostos em uma roda de $2! \cdot 3! = 12$ maneiras.
Generalizando, temos: $(m - 1)! \cdot m!$ possibilidades.

104. a) $5! + 7! = 120 + 5040 = 5160 \neq 12! (= 479001600)$.
b) $8! - 3! = 40320 - 6 = 40314 \neq 5! (= 120)$.
c) $2 \cdot (5!) = 2 \cdot 120 = 240$ e $(2 \cdot 5)! = 10! = 3628800$.

$$106. \frac{A_{m,3}}{A_{m,2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\frac{m!}{(m-3)!}}{\frac{m!}{(m-2)!}} = 4 \Leftrightarrow m - 2 = 4 \Leftrightarrow m = 6.$$

$$107. \frac{A_{n-1,3}}{A_{n,3}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\frac{(n-1)!}{(n-1-3)!}}{\frac{n!}{(n-3)!}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{n-3}{n} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow n = 12.$$

$$108. A_{m,3} = 30m \Leftrightarrow \frac{m!}{(m-3)!} = 30m \Leftrightarrow \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)!}{(m-3)!} = 30m \Leftrightarrow (m-1)(m-2) = 30 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 28 = 0;$$

cuja raiz são -4 e 7. Desprezando a raiz negativa, segue que $m = 7$.
 $S = \{7\}$.

$$109. (m+2)! = 72m! \Leftrightarrow (m+2)(m+1)m! = 72m! \Leftrightarrow m^2 + 3m - 70 = 0.$$

Resolvendo a equação do 2º grau e observando a condição de existência, segue que $m = 7$.

$$110. \text{Notando que } 6! = 720, \text{ temos: } (n-6)! = 6! \Leftrightarrow n-6 = 6 \Leftrightarrow n = 12.$$

$S = \{12\}$.

$$111. 2A_{n,2} + 50 = A_{2n,2} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} + 50 = \frac{(2n)!}{(2n-2)!} \Leftrightarrow 2n(n-1) + 50 = (2n)(2n-1) \Leftrightarrow 2n^2 = 50 \Leftrightarrow n = -5 \text{ ou } n = 5.$$

Como $n = -5$ não satisfaz as condições de existência, vem que $n = 5$.

$$112. \text{De fato, } n! - (n-2)! = n(n-1)(n-2)! - (n-2)! = (n-2)! [n(n-1) - 1] = (n-2)! (n^2 - n - 1), \text{ que é o que queríamos demonstrar.}$$

113. a) De fato,

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)n!} = \frac{n+1-1}{(n+1)n!} = \frac{n}{(n+1)n!}, \text{ que é o 2.º membro da igualdade.}$$

b) Desenvolveremos o 2º membro e tentaremos chegar ao 1º membro. De fato,
 $[(m+1)! - m!] \cdot (m-1)! = [(m+1) \cdot m! - m!](m-1)! =$
 $= [m!(m+1-1)] \cdot (m-1)! = m! \cdot m \cdot (m-1)! = m! \cdot m! =$

$= (m!)^2$, que é o que queríamos demonstrar.

115. a) Vamos multiplicar e dividir a expressão dada por $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)$ e aplicar o resultado do exercício anterior:

Temos:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}.$$

b) Temos:

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^2 = (1 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 4) \cdot \dots \cdot (n \cdot n) =$$

$$= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) = n! \cdot n! = (n!)^2.$$

116. Temos:

$$\frac{(k!)^3}{\{(k-1)!\}^2} = \frac{[k \cdot (k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1]^3}{\{(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\}^2} =$$

$$= \frac{k^3 \cdot [(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1]^3}{\{(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\}^2} = k^3 \cdot \underbrace{[(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1]}_{(k-1)!} =$$

$$= k^3 \cdot (k-1)! = k^2 \cdot \underbrace{k \cdot (k-1)!}_{k!} = k^2 \cdot k!.$$

117. Temos:

$$\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!} = \frac{(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!}{(n-r-1)!} = (n-r+1)(n-r).$$

118. Temos:

$$[(m+2)! - (m+1)!] m! = [(m+2)(m+1)! - (m+1)!] m! =$$

$$= [(m+1)!(m+2-1)] \cdot m! = (m+1)! \cdot \underbrace{(m+1)m!}_{(m+1)!} = [(m+1)!]^2.$$

119. Sabendo que $m \cdot m! = (m+1)! - m!$, podemos escrever:

$$\begin{cases} 1 \cdot 1! = (1+1)! - 1! = 2! - 1! \\ 2 \cdot 2! = (2+1)! - 2! = 3! - 2! \\ 3 \cdot 3! = (3+1)! - 3! = 4! - 3! \\ \vdots \\ m \cdot m! = (m+1)! - m! = (m+1)! - m! \end{cases}$$

Somando membro a membro as relações acima, vem:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + m \cdot m! = -1! + (m+1)! = (m+1)! - 1.$$

120. Temos:

$$n^2 \cdot (n-2)! \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n^2 \cdot (n-2)! \left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)!}{n!} = n!.$$

121. Desenvolvendo a somatória, temos:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{(1+1)!} + \frac{2}{(2+1)!} + \frac{3}{(3+1)!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}.$$

Utilizando a sugestão, podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{(1+1)!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{(2+1)!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{(3+1)!}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right).$$

Cancelando, vem:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}, \text{ que é o que queríamos demonstrar.}$$

122. Temos:

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)n!} = \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)!}, \text{ que é o que queríamos demonstrar.}$$

123. Temos:

$$\frac{(n+2)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)![(n+2)n+1]}{(n+1)(n-1)!} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, \text{ que é o que queríamos demonstrar.}$$

125. Basta formar todos os subconjuntos de M formados por 2 elementos, isto é: $\{7, 8\}, \{7, 9\}, \{7, 0\}, \{8, 9\}, \{8, 0\}, \{9, 0\}$.

126. O número de subconjuntos de A com 4 elementos é o número de combinações de n elementos tomados 4 a 4, isto é,

$$C_{n,4} = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{24(n-4)!}.$$

127. Seja n o número de elementos de A . O número de subconjuntos de A formados por 2 elementos é o número de combinações de n elementos tomados 2 a 2, isto é:

$$C_{n,2} = 45 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 45 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0, \text{ cujas raízes são } 10 \text{ e } -9. \text{ Desprezando a raiz negativa, vem que } n = 10.$$

$$128. \frac{C_{8,p+2}}{C_{8,p+1}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\frac{8!}{(p+2)!(8-p-2)!}}{\frac{8!}{(p+1)!(8-p-1)!}} = 2 \Leftrightarrow \frac{(7-p)!(p+1)!}{(p+2)!(6-p)!} = 2 \Leftrightarrow \frac{7-p}{p+2} = 2 \Leftrightarrow p = 1.$$

129. De $A_{m,p} = C_{m,p}$ vem:

$$\frac{m!}{(m-p)!} = \frac{m!}{p!(m-p)!}. \text{ Cancelando os termos semelhantes, vem que } p! = 1, \text{ donde } p = 0 \text{ ou } p = 1.$$

$$130. C_{m,3} = 84 \Leftrightarrow \frac{m!}{3!(m-3)!} = 84 \Leftrightarrow \frac{m!}{(m-3)!} = 504, \text{ isto é, } A_{m,3} = 504.$$

$$131. \binom{n}{2} = 28 \Leftrightarrow C_{n,2} = 28 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 28 \Leftrightarrow n(n-1) = 56 \Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0, \text{ cujas raízes são } -7 \text{ e } 8. \text{ Desprezando a raiz negativa, temos que } n = 8.$$

$$132. A_{x,3} - 6 \cdot C_{x,2} = 0 \Leftrightarrow A_{x,3} = 6 \cdot C_{x,2} \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-3)!} = 6 \cdot \frac{x!}{2!(x-2)!} \Leftrightarrow 1 = \frac{3}{x-2} \Leftrightarrow x = 5.$$

$$133. A_{n+1,4} = 20 C_{n,2} \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n+1-4)!} = 20 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{(n+1)n!}{(n-3)!} = \frac{10n!}{(n-2)(n-3)!} \Leftrightarrow n+1 = \frac{10}{n-2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 12 = 0$, cujas raízes são 4 e -3. Desprezando a raiz negativa, temos que $n = 4$.

$$134. A_{m,3} - C_{m,3} = 25 C_{m,m-1} \Leftrightarrow \frac{m!}{(m-3)!} - \frac{m!}{3!(m-3)!} = \frac{25m!}{(m-1)!1!} \Leftrightarrow \frac{m!}{(m-3)!} \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{25m!}{(m-1)!} \Leftrightarrow \frac{5}{6(m-3)!} = \frac{25}{(m-1)(m-2)(m-3)!} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{5}{(m-1)(m-2)} \Leftrightarrow m^2 - 3m - 28 = 0.$$

Resolvendo essa equação e observando a condição de existência, vem que $m = 7$.

$$135. A_{n+2,7} = 10\,080 C_{n+1,7} \Leftrightarrow \frac{(n+2)!}{(n-5)!} = \frac{10\,080(n+1)!}{7!(n-6)!} \Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+1)!}{(n-5)(n-6)!} = \frac{2(n+1)!}{(n-6)!} \Leftrightarrow 2n-10 = n+2 \Leftrightarrow n = 12. \text{ Logo, } a = 12. \text{ Daí, } f(a) = f(12) = 12^2 - 3 \cdot 12 + 1 = 109.$$

$$136. A_{m,5} = 180 C_{m,3} \Leftrightarrow \frac{m!}{(m-5)!} = \frac{180m!}{3!(m-3)!} \Leftrightarrow \frac{1}{(m-5)!} = \frac{30}{(m-3)(m-4)(m-5)!} \Leftrightarrow m^2 - 7m - 18 = 0, \text{ cujas raízes são } 9 \text{ e } -2. \text{ Como } -2 \text{ não convém, temos que } m = 9.$$

$$137. \frac{A_{p,3}}{C_{p,4}} = 12 \Leftrightarrow A_{p,3} = 12 C_{p,4} \Leftrightarrow \frac{p!}{(p-3)!} = \frac{12p!}{4!(p-4)!} \Leftrightarrow \frac{1}{(p-3)(p-4)!} = \frac{1}{2(p-4)!} \Leftrightarrow p-3 = 2 \Leftrightarrow p = 5.$$

$$138. \begin{cases} C_{n,p} = 78 \\ A_{n,p} = 156 \end{cases} \text{ Notemos que } C_{n,p} = 78 \Leftrightarrow \frac{n!}{p!(n-p)!} = 78 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-p)!} = 78 \cdot p! \Leftrightarrow A_{n,p} = 78 p!$$

Então, o sistema pode ser escrito como $\begin{cases} A_{n,p} = 78 p! \\ A_{n,p} = 156 \end{cases}$

Comparando as duas equações, temos que: $78 p! = 156 \Leftrightarrow p! = 2$, donde $p = 2$.

Substituindo $p = 2$ em qualquer uma das equações, vem que $n = 13$. Logo, $S = \{(13, 2)\}$.

- 139.** Seja $(n + 1)(n + 2) \dots (n + m)$ o produto. Multiplicando numerador e denominador por $n! = n(n - 1)(n - 2) \dots 2 \cdot 1$, vem:

$$\begin{aligned} & (n + 1)(n + 2) \dots (n + m) \cdot \frac{n(n - 1)(n - 2) \dots 2 \cdot 1}{n(n - 1)(n - 2) \dots 2 \cdot 1} = \\ & = \frac{(n + m)!}{n!} \cdot \frac{m!}{m!} = \frac{(n + m)!}{n! m!} \cdot m! = \binom{n + m}{m} m! \end{aligned}$$

$$= \binom{n + m}{m} m!$$

Como $\binom{n + m}{m}$ é inteiro, segue que $(n + 1)(n + 2) \dots (n + m)$ é divisível por $m!$.

- 141.** Cada resultado possível consiste em uma combinação das 52 cartas, tomadas 4 a 4.

Logo, o número de resultados possíveis é $C_{52, 4} = \frac{52!}{4! 48!} = 270\,725$.

- 142.** Notemos inicialmente que A dar a mão para B é a mesma coisa que B dar a mão para A . Assim, cada aperto de mão é uma combinação das n pessoas tomadas 2 a 2. Temos, então:

$$C_{n, 2} = 45 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n - 2)! 2!} = 45 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0.$$

Resolvendo a equação e desprezando a raiz negativa, segue que $n = 10$.

- 143.** Como num produto não importa a ordem dos fatores, cada produto é uma combinação dos 5 dígitos disponíveis, tomados 3 a 3.

Logo, o número de produtos é: $C_{5, 3} = 10$.

- 144.** Numa comissão não importa a ordem das pessoas escolhidas. As comissões formadas poderão apresentar 4, 5, ... ou até 10 pessoas, escolhidas sempre entre as 10 disponíveis. Logo, o número de comissões é:

$$C_{10, 4} + C_{10, 5} + \dots + C_{10, 10} = \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \dots + \binom{10}{10}.$$

Por outro lado, sabemos que:

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10}$$

$$\text{assim, } \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} - \binom{10}{2} - \binom{10}{3}$$

$$\text{isto é, } \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \dots + \binom{10}{10} = 848.$$

- 145.** O salão poderá ser aberto abrindo-se 1, 2, ... ou até 10 portas, escolhidas entre as 10 existentes. Observemos que abrir as portas (A, B, C, D) , por exemplo, é o mesmo que abrir as portas (B, C, D, A) . Logo, o número de possibilidades é:

$$C_{10, 1} + C_{10, 2} + \dots + C_{10, 10} = \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10} - 1 = 1\,023.$$

- 146.** Como cada jogo é uma combinação dos 10 times tomados 2 a 2, o número de jogos no primeiro turno é $C_{10, 2}$.

Como o torneio é disputado em 2 turnos e houve um jogo extra, o total de jogos é: $2 \cdot C_{10, 2} + 1 = 91$.

- 148.** Como não importa a ordem, cada aperto de mão é uma combinação das 5 pessoas tomadas 2 a 2. O número total de apertos de mão é $C_{5, 2}$. Entre os conhecidos, são dados $C_{3, 2}$ apertos de mão.

Portanto, a diferença $C_{5, 2} - C_{3, 2} = 7$ fornece o número de apertos de mão efetivamente dados.

- 149.** Como João é o único goleiro, o número de maneiras de escalar os outros 4 jogadores (não importando a ordem em que eles são escolhidos) é: $C_{9, 4} = 126$.

- 150.** Como Ari e Arnaldo devem ser necessariamente escalados, sobram, no time, 3 vagas para serem preenchidas pelos 8 jogadores restantes. Logo, o número de possibilidades de escalar o time é: $C_{8, 3} = 56$.

- 151.** Seja n o número mínimo de piadas que ele pode contar em 35 anos. Em cada ano, o número de piadas que ele conta é uma combinação das n piadas tomadas 3 a 3.

$$\text{Devemos ter: } \binom{n}{3} = 35 \Leftrightarrow \frac{n(n - 1)(n - 2)}{6} = 210 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n^3 - 3n^2 + 2n - 210 = 0$. As possíveis raízes racionais dessa equação são os divisores inteiros de 210. Verifica-se que $n = 7$ é a única raiz real dessa equação ($7^3 - 3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 - 210 = 0$). Logo, $n = 7$.

- 152.** Os 3 carros podem ser escolhidos de $\binom{4}{3} = 4$ formas; os 3 pilotos podem ser

escolhidos de $\binom{4}{3} = 4$ formas, totalizando $4 \cdot 4 = 16$ possibilidades. Dentre elas, em apenas uma situação nem piloto nem carro é brasileiro.

Dessa forma, o número de maneiras de fazer a inscrição em que pelo menos um piloto ou carro é brasileiro é: $16 - 1 = 15$.

- 153.** Misturar $\{A, B, C, D, E, F\}$ é o mesmo que misturar $\{B, F, A, D, C, E\}$. Assim, o número total de misturas existentes é: $C_{10, 6}$. Por outro lado, o número de combinações em que as duas substâncias explosivas aparecem é: $C_{8, 4}$.

Logo, a diferença $C_{10,6} - C_{8,4} = 140$ fornece o número de modos possíveis de efetuar as misturas.

154. a) Excluindo os matemáticos, cada comissão é uma combinação das outras 15 pessoas tomadas 10 a 10, isto é, $C_{15,10} = \binom{15}{10}$.

b) Neste caso, sobram apenas 5 vagas para serem ocupadas pelos outros 15 participantes, isto é, $C_{15,5} = \binom{15}{5}$.

c) Podemos escolher 9 entre os outros 15 participantes de $\binom{15}{9}$ formas. Cada comissão será formada quando um dos matemáticos se juntar a esses $\binom{15}{9}$ grupos.

Como existem 5 matemáticos, teremos ao todo $5 \cdot \binom{15}{9}$ comissões.

d) O número total de comissões possíveis é $C_{20,10}$. Pela parte a), vimos que o número de comissões em que nenhum membro é matemático é $C_{15,10}$. Assim, o número de comissões em que pelo menos um membro é matemático é:

$$C_{20,10} - C_{15,10} = \binom{20}{10} - \binom{15}{10}.$$

155. O número de comissões formadas em que A e B comparecem é $\binom{8}{3}$. O número de comissões em que A e B não participam é $\binom{8}{5}$. Assim, o número total de comissões possíveis será dado por $\binom{8}{3} + \binom{8}{5} = 112$.

156. Sejam: A : administrador e E : economista.

Podemos ter os seguintes “tipos” de comissão:

$\{A, A, A, E, E, E\}$ ou $\{A, A, A, A, E, E\}$ ou $\{A, A, A, A, A, E\}$ ou $\{A, A, A, A, A, A\}$.

Analisando a 1ª “possibilidade” de comissão, temos:

Podemos escolher 3 entre 6 administradores de $\binom{6}{3} = 20$ formas e podemos

escolher 3 entre 10 economistas de $\binom{10}{3} = 120$ formas. Cada grupo de 3 administradores deverá se juntar a um dos 120 grupos de economistas, formando uma comissão. Como existem 20 grupos de administradores, teremos ao todo $20 \cdot 120 = 2\,400$ comissões.

Analogamente, temos:

$$\{A, A, A, A, E, E\} \rightarrow C_{6,4} \cdot C_{10,2} = 675 \text{ comissões}$$

$$\{A, A, A, A, A, E\} \rightarrow C_{6,5} \cdot C_{10,1} = 60 \text{ comissões}$$

$$\{A, A, A, A, A, A\} \rightarrow C_{6,6} = 1 \text{ comissão}$$

Somando todas as possibilidades, temos: $2\,400 + 675 + 60 + 1 = 3\,136$ comissões.

157. Sejam: D : diretor e G : gerente.

Podemos ter os seguintes “tipos” de comissões:

$$\{D, G, G, G, G\} \rightarrow C_{3,1} \cdot C_{5,4} = 15$$

$$\{D, D, G, G, G\} \rightarrow C_{3,2} \cdot C_{5,3} = 30$$

$$\{D, D, D, G, G\} \rightarrow C_{3,3} \cdot C_{5,2} = 10$$

Logo, o número total de comissões possíveis é: $15 + 30 + 10 = 55$.

158. O número de grupos formados nos quais marido e mulher participam é: $C_{8,2}$.

O número de grupos em que eles não participam é: $C_{8,4}$.

Logo, o número de maneiras de formar o grupo é: $C_{8,2} + C_{8,4} = 98$.

159. O número total de formas de selecionar 2 meias é: $C_{16,2}$. Há apenas 8 combinações de meias do mesmo par. Logo, o número de maneiras de selecionar 2 meias sem que elas sejam do mesmo par é: $C_{16,2} - 8 = 112$.

161. a) Cada comissão formada é uma combinação de 11 pessoas tomadas 3 a 3, isto é, $C_{11,3} = 165$ comissões.

b) Podemos escolher 2 entre 5 homens de $\binom{5}{2}$ modos e uma entre 6 mulheres de $\binom{6}{1}$ modos. Logo, o número de comissões possíveis é: $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{1} = 60$.

162. Cada extração é uma combinação das peças tomadas 8 a 8, pois não influi a ordem em que elas são extraídas. Podemos escolher 4 entre 50 peças boas de $\binom{50}{4}$ formas e 4 entre 10 defeituosas de $\binom{10}{4}$ formas.

Assim, há $\binom{50}{4} \binom{10}{4}$ possibilidades.

163. Podemos escolher 2 entre 5 brancas de $\binom{5}{2} = 10$ formas e 4 entre 7 pretas de $\binom{7}{4} = 35$ formas.

Então, temos, ao todo, $10 \cdot 35 = 350$ possibilidades.

164. Podemos escolher 3 entre os 4 ases disponíveis de $\binom{4}{3} = 4$ formas. As outras 2 cartas serão, então, escolhidas entre as 48 restantes, havendo, portanto,

$\binom{48}{2} = 1\,128$ possibilidades. Cada terno de ases deverá se “juntar” a um dos 1 128 grupos, formando um subconjunto. Como há 4 ternos de ases, ao todo teremos $4 \cdot 1\,128 = 4\,512$ subconjuntos.

165. a) Há $\binom{3}{2} = 3$ possibilidades de escolher 2 entre 3 vermelhas.

b) Podemos escolher 2 entre 5 bolas brancas de $\binom{5}{2} = 10$ formas.

c) Podemos escolher 1 entre 3 vermelhas de $\binom{3}{1} = 3$ formas e 1 entre 5 brancas de $\binom{5}{1} = 5$ formas. Logo, o número de possibilidades é $3 \cdot 5 = 15$.

166. Podemos ter:

$\{P, P, P, P, B, B, B\}$: $C_{6,4} \cdot C_{10,3} = 1\,800$

$\{P, P, P, P, P, B, B\}$: $C_{6,5} \cdot C_{10,2} = 270$

$\{P, P, P, P, P, P, B\}$: $C_{6,6} \cdot C_{10,1} = 10$

Ao todo, temos: $1\,800 + 270 + 10 = 2\,080$ modos.

167. Há $\binom{7}{3}$ maneiras de escolher 3 entre 7 brasileiros e $\binom{4}{3}$ maneiras de escolher 3 entre os 4 japoneses.

Então, há $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3} = 140$ possibilidades.

168. Cada grupo de 3 estatísticos deverá se juntar a um dos $\binom{6}{3}$ grupos de economistas. Como há $\binom{7}{3}$ grupos de estatísticos, ao todo teremos: $\binom{7}{3} \binom{6}{3} = 700$ comissões.

169. Cada tripla de professores de Matemática deverá se juntar a uma das $\binom{12}{2}$ duplas de professores de Física. Como há $\binom{30}{3}$ triplas de matemáticos, o número total de comissões é: $\binom{30}{3} \binom{12}{2} = 267\,960$.

170. Há 8 possibilidades para se escolher o presidente neste grupo. Os outros 3 membros serão escolhidos entre os 7 restantes, num total de $\binom{7}{3} = 35$ grupos. Em cada comissão, o presidente se junta a um desses 35 grupos. Logo, há, ao todo, $8 \cdot 35 = 280$ comissões.

171. Podemos escolher 2 entre 5 médicos de $\binom{5}{2}$ maneiras, 2 entre 7 engenheiros de $\binom{7}{2}$ maneiras e 1 entre 3 advogados de $\binom{3}{1}$ maneiras.

Logo, o número de comissões possíveis é: $\binom{5}{2} \binom{7}{2} \binom{3}{1} = 630$.

172. As crianças podem ter 1, 2 ou 3 nomes.

Com 1 nome, o número de maneiras de chamar a criança é $\binom{300}{1} = 300$.

Com 2 nomes, temos $\binom{300}{2}$ possibilidades.

Com 3 nomes, temos $\binom{300}{3}$ possibilidades.

Juntando as três situações possíveis, temos:

$\binom{300}{1} + \binom{300}{2} + \binom{300}{3}$ nomes.

173. Inicialmente notemos que cada forma de ocupar as cadeiras corresponde à escolha de 4 entre 8 cadeiras disponíveis, não importando a ordem em que elas são escolhidas (por exemplo, escolher as cadeiras A, B, C, D é o mesmo que escolher as cadeiras B, C, D, A). Por outro lado, para cada conjunto de cadeiras escolhidas, há 4! formas de se sentar, que corresponde à permutação das 4 pessoas, nas referidas cadeiras. Como há $\binom{8}{4} = C_{8,4}$ conjuntos de cadeiras a escolher, o total de configurações é: $C_{8,4} \cdot P_4 = \binom{8}{4} \cdot 4! = 1\,680$.

174. Podemos escolher 4 dentre os 7 voluntários de $\binom{7}{4} = 35$ formas distintas, a fim de exercer as 4 funções. Suponhamos que tenham sido escolhidos os voluntários $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$. V_1 poderá exercer qualquer uma das 4 funções, assim como V_2, V_3 e V_4 . Em outras palavras, haverá uma permutação dos 4 voluntários escolhidos no exercício de cada uma das funções.

Como há 35 maneiras de escolher os voluntários, o total de possibilidades é:
 $35 \cdot 4! = 840$.

175. Como cada reta fica determinada por 2 pontos e não existem 3 pontos colineares, cada reta é uma combinação dos 5 pontos tomados 2 a 2, que resulta
 $\binom{5}{2} = 10$ retas.

176. Cada plano formado é uma combinação dos 4 pontos tomados 3 a 3, pois, como sabemos, um plano fica determinado por três pontos não colineares. Assim, o total de planos é: $C_{4,3} = 4$.

177. Cada triângulo formado é uma combinação dos n pontos tomados 3 a 3.

Assim, o resultado procurado é: $C_{n,3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$.

178. Como um dos vértices do triângulo já está determinado, cada triângulo formado é uma combinação dos 11 pontos restantes tomados 2 a 2, isto é,
 $\binom{11}{2} = 55$.

179. Cada combinação de 2 pontos, entre os 20 existentes, dá origem a uma reta, com exceção das combinações de 2 pontos tomados entre os 6 colineares, pois eles determinam uma única reta.

Assim, o resultado procurado é: $\binom{20}{2} - \binom{6}{2} + 1 = 176$.

180. a) Cada combinação de 2 pontos, entre os 8 existentes, dá origem a uma corda.

Assim, temos $\binom{8}{2} = 28$ cordas.

b) Cada triângulo formado é uma combinação dos 8 pontos tomados 3 a 3, isto é, $\binom{8}{3} = 56$.

c) Cada combinação de 6 pontos, entre os 8 existentes, dá origem a um hexágono.

Assim, temos $\binom{8}{6} = 28$ hexágonos.

182. a) Cada combinação de 2 pontos, entre os 8 vértices existentes, dá origem a um segmento com extremidades nos vértices do cubo. Temos: $\binom{8}{2} = 28$ segmentos.

Devemos, desse valor, descontar:

- as diagonais da face; sendo as faces quadradas, temos 2 diagonais por face. Como o cubo possui 6 faces, ao todo há $6 \cdot 2 = 12$ diagonais da face.
- as arestas do cubo, que são em número de 12.

Assim, o resultado procurado é: $28 - 12 - 12 = 4$.

b) Cada combinação de 2 pontos, entre os 6 vértices do octaedro, dá origem a um segmento com extremidades nos vértices do octaedro. Temos: $\binom{6}{2} = 15$ segmentos.

Se quisermos saber o número de diagonais do octaedro, basta descontar as 12 arestas, uma vez que, como suas faces são triângulos, não há diagonais das faces.

Assim, o resultado procurado é $15 - 12 = 3$.

183. Lembrando que o dodecaedro tem 12 faces, pela relação de Euler:

$V - A + F = 2$ vem $A = 30$.

Cada combinação de 2 pontos entre os 20 vértices do dodecaedro dá origem a uma reta. Temos: $\binom{20}{2} = 190$ retas. Dessas retas, precisamos descontar as 30

arestas e as diagonais das faces. Sendo as faces pentágonos, há $\frac{5 \cdot (5-3)}{2} = 5$ diagonais por face.

Dessa forma, o resultado procurado é: $190 - 30 - 12 \cdot 5 = 100$.

184. Notemos que um prisma, cuja base é um polígono de n lados, tem $2n$ vértices. Logo, o número de segmentos que ficam determinados com extremidades nos vértices do prisma é $\binom{2n}{2}$. Se quisermos saber o número de diagonais não das faces desse prisma, devemos descontar:

- as diagonais da base. Como a base é um polígono de n lados e há 2 bases no prisma, o total a ser descontado é: $2 \cdot \frac{n(n-3)}{2} = n^2 - 3n$.
- as diagonais das faces laterais. Como as faces laterais são quadriláteros, há 2 diagonais por face. Havendo n faces laterais, o total a ser descontado é $2 \cdot n$.
- as arestas do prisma. Há $2n$ arestas das bases e n arestas laterais, num total de $3n$ arestas.

Assim, o resultado procurado é:

$$\binom{2n}{2} - (n^2 - 3n) - 2n - 3n = n(2n - 1) - (n^2 - 3n) - 5n = n^2 - 3n = n(n - 3).$$

185. Cada combinação de 3 pontos entre os 7 disponíveis dá origem a um plano.

Assim, o número de planos é $\binom{7}{3} = 35$.

- 186.** Cada combinação dos n pontos tomados 3 a 3 dá origem a um plano, descontadas porém as combinações 3 a 3 dos 5 pontos coplanares que determinam um único plano.

Assim, o resultado procurado é: $\binom{n}{3} - \binom{5}{3} + 1 = \binom{n}{3} - 9$.

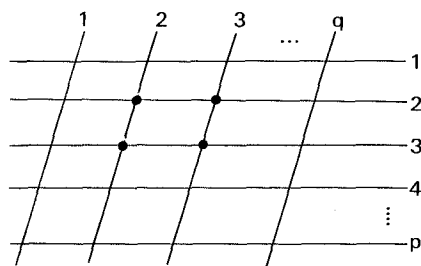
- 187.** Cada superfície esférica fica determinada quando passar pelo ponto fora do plano dado e por outros 3 quaisquer pontos do plano.

Assim, há $\binom{19}{3} = 969$ superfícies esféricas.

- 189.** Cada combinação de 3 pontos, entre os 18 existentes, dá origem a um triângulo, excluindo, porém, as combinações 3 a 3 dos pontos que estão sobre uma mesma reta. Assim, o número de triângulos formados é:

$$\binom{18}{3} - \binom{10}{3} - \binom{8}{3} = 816 - 120 - 56 = 640.$$

- 190.** Temos:



Notemos que cada paralelogramo ficará determinado ao escolhermos 2 entre as p retas e 2 entre as outras q retas.

Assim, o número de paralelogramos é: $\binom{p}{2} \binom{q}{2}$.

- 191.** As vogais podem ser escolhidas de $\binom{4}{3} = 4$ formas e as consoantes de $\binom{5}{3} = 10$ formas, num total de $4 \cdot 10 = 40$ possibilidades. Para cada uma dessas possibilidades, o número de palavras formadas é o número de permutações das 6 letras escolhidas, isto é, P_6 .

Então, o total de palavras é: $40 \cdot P_6 = 40 \cdot 6! = 28\,800$.

- 192.** Como existem 2 cavalos de cada cor, precisamos escolher 2 casas entre as 64 disponíveis para colocar, por exemplo, os cavalos brancos. Isso pode ser feito

de $\binom{64}{2}$ modos. Uma vez colocados os brancos, devemos escolher 2 casas entre as 62 restantes, a fim de colocar os cavalos pretos. Isso pode ser feito de $\binom{62}{2}$ maneiras.

Assim, o resultado procurado é: $\binom{64}{2} \binom{62}{2}$.

- 194.** $- \oplus - \oplus - \dots \oplus -$

Dispostos os p sinais “+”, existem $p + 1$ posições que os sinais “-” podem ocupar. Como existem q sinais “-”, precisamos escolher q lugares entre os $p + 1$ disponíveis.

Assim, o resultado procurado é: $\binom{p+1}{q}$.

- 195.** Se um certo elemento figura na combinação, faltam $m - 1$ elementos para serem escolhidos entre os $p - 1$ restantes. O número de possibilidades é

$$\binom{p-1}{m-1}.$$

Se o mesmo elemento não figura na combinação, os m elementos deverão ser escolhidos entre os $p - 1$ remanescentes, havendo, então, $\binom{p-1}{m}$ possibilidades.

Assim, a razão pedida é:

$$\frac{\binom{p-1}{m-1}}{\binom{p-1}{m}} = \frac{m}{p-m}.$$

- 196.** Como o determinado elemento deve fazer parte da combinação, ficam restando 2 números a serem escolhidos entre os 7 restantes.

O resultado procurado é, então, $C_{7,2} = 21$.

- 197.** Como dentre os “ p ” elementos escolhidos devem necessariamente aparecer “ k ” elementos determinados, faltarão $p - k$ elementos para serem escolhidos entre os $n - k$ restantes. O número de possibilidades é, então,

$$C_{n-k, p-k} = \binom{n-k}{p-k}.$$

- 198.** Cada sequência formada consta de uma permutação de 12 sinais, sendo 8 “+” e 4 “-”, isto é, $n = 12$, $n_1 = 8$ e $n_2 = 4$.

Logo, temos: $\frac{{}^{(8,4)}P_{12}}{8!4!} = \frac{12!}{8!4!} = 495$ formas possíveis.

- O número de partições ordenadas é: $\binom{9}{3} \binom{6}{3} \binom{3}{3} = 1\,680$.
- Cada grupo de $3!$ partições ordenadas dá origem à mesma partição não ordenada.

Assim, o número de partições não ordenadas é $\frac{1\,680}{3!} = 280$.

- 222.** Cada maneira de formar os times de bola-ao-cesto é uma partição não ordenada do tipo:

$$\{ \{ _, _, _, _, _ \}; \{ _, _, _, _, _ \} \}$$

\uparrow \uparrow
 1º time 2º time

- O número de partições ordenadas é: $\binom{10}{5} \binom{5}{5} = 252$.
- Cada grupo de $2! = 2$ partições ordenadas dá origem à mesma partição não ordenada.

Assim, o resultado procurado é: $\frac{252}{2} = 126$.

- 223.** Repetindo o raciocínio acima, temos que o número de possibilidades é:

$$\frac{\binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5}}{3!} = \frac{15!}{(5!)^3 \cdot 6}.$$

- 224.** Aplicando o resultado do teorema, vem:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{(3+6-1)!}{6! (3-1)!} = \frac{8!}{6! 2!} = 28. \\ \text{b)} \quad & \frac{(4+10-1)!}{10! (4-1)!} = \frac{13!}{10! 3!} = 286. \\ \text{c)} \quad & \frac{(5+10-1)!}{10! (5-1)!} = \frac{14!}{10! 4!} = 1\,001. \end{aligned}$$

- 225.** Seja $y_i = x_i - 3$, $i = 1, 2, \dots, 5$.

A equação $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 20$ equivale a:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 20 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3, \text{ isto é,}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 5.$$

O número de soluções inteiras não negativas da equação acima é:

$$\frac{(5+5-1)!}{5! (5-1)!} = \frac{9!}{5! 4!} = 126.$$

- 226.** Seja:

x : o número de pastéis de carne

y : o número de pastéis de queijo

z : o número de pastéis de palmito.

O problema consiste em se determinar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z = 5$, que é, como sabemos,

$$\frac{(3+5-1)!}{5! (3-1)!} = \frac{7!}{5! 2!} = 21.$$

- 227.** Sejam m_1, m_2, \dots, m_6 as marcas de café. O problema consiste em determinar o número de soluções inteiras não negativas da equação:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 = 8, \text{ que é, então,}$$

$$\frac{(6+8-1)!}{8! (6-1)!} = \frac{13!}{8! 5!} = 1\,287.$$

- 228.** Sejam: d_1, d_2, \dots, d_5 os números de doces de cada tipo. Nosso interesse é resolver a equação:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 3,$$

cujas soluções inteiras não negativas são em número de:

$$\frac{(5+3-1)!}{3! (5-1)!} = \frac{7!}{3! 4!} = 35.$$

- 229.** Sejam n_1 o número de bolas na urna A e n_2 o número de bolas na urna B . O problema consiste em determinar o número de soluções inteiras não negativas da equação: $n_1 + n_2 = 5$.

Como sabemos, há $\frac{(2+5-1)!}{5! (2-1)!} = \frac{6!}{5!} = 6$ soluções.

Capítulo II – Binômio de Newton

230. a) $(x + 3b)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2 \cdot (3b)^1 + \binom{3}{2}x \cdot (3b)^2 + \binom{3}{3} \cdot (3b)^3$
 $(x + 3b)^3 = x^3 + 9x^2b + 27xb^2 + 27b^3.$

b) $(1 - x^2)^5 = [1 + (-x^2)]^5 = \binom{5}{0}1^5 + \binom{5}{1}1^4 \cdot (-x^2) + \binom{5}{2}1^3 \cdot (-x^2)^2 +$
 $+ \binom{5}{3}1^2 \cdot (-x^2)^3 + \binom{5}{4}1^1 \cdot (-x^2)^4 + \binom{5}{5}(-x^2)^5. \text{ Daí:}$
 $(1 - x^2)^5 = 1 - 5x^2 + 10x^4 - 10x^6 + 5x^8 - x^{10}.$

c) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 = [\sqrt{x} + (-\sqrt{y})]^4 = \binom{4}{0}(\sqrt{x})^4 + \binom{4}{1}(\sqrt{x})^3(-\sqrt{y}) +$
 $+ \binom{4}{2}(\sqrt{x})^2(-\sqrt{y})^2 + \binom{4}{3}\sqrt{x}(-\sqrt{y})^3 + \binom{4}{4}(-\sqrt{y})^4, \text{ isto é,}$
 $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 = x^2 - 4x\sqrt{xy} + 6xy - 4y\sqrt{xy} + y^2.$

$$\begin{aligned} \text{d) } (\sin \theta + \cos \theta)^4 &= \binom{4}{0} \sin^4 \theta + \binom{4}{1} \sin^3 \theta \cos \theta + \binom{4}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \\ &+ \binom{4}{3} \sin \theta \cos^3 \theta + \binom{4}{4} \cos^4 \theta, \text{ isto é,} \\ (\sin \theta + \cos \theta)^4 &= \sin^4 \theta + 4 \sin^3 \theta \cos \theta + 6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4 \sin \theta \cos^3 \theta + \cos^4 \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (3 - y)^5 &= [3 + (-y)]^5 = \binom{5}{0} 3^5 + \binom{5}{1} 3^4 (-y)^1 + \binom{5}{2} 3^3 (-y)^2 + \\ &+ \binom{5}{3} 3^2 (-y)^3 + \binom{5}{4} 3^1 (-y)^4 + \binom{5}{5} (-y)^5, \text{ isto é,} \\ (3 - y)^5 &= 243 - 405y + 270y^2 - 90y^3 + 15y^4 - y^5. \end{aligned}$$

231. Usando o teorema binomial, temos que:

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)^5 = m^5 + 5m^3 + 10m + \frac{10}{m} + \frac{5}{m^3} + \frac{1}{m^5}$$

e

$$\left(m - \frac{1}{m}\right)^5 = m^5 - 5m^3 + 10m - \frac{10}{m} + \frac{5}{m^3} - \frac{1}{m^5}$$

Efetuada a diferença entre seus desenvolvimentos, vem que:

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)^5 - \left(m - \frac{1}{m}\right)^5 = 10m^3 + \frac{20}{m} + \frac{2}{m^5}$$

$$\begin{aligned} \text{232. } (x + a)^7 &= \binom{7}{0} x^7 + \binom{7}{1} x^6 a + \binom{7}{2} x^5 a^2 + \binom{7}{3} x^4 a^3 + \\ &+ \binom{7}{4} x^3 a^4 + \binom{7}{5} x^2 a^5 + \binom{7}{6} x a^6 + \binom{7}{7} a^7 \\ (x + a)^7 &= x^7 + 7x^6 a + 21x^5 a^2 + 35x^4 a^3 + 35x^3 a^4 + 21x^2 a^5 + 7x a^6 + a^7. \end{aligned}$$

233. O desenvolvimento dado corresponde à expansão de $(a - b)^5$, utilizando o teorema binomial.

Temos então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (a - b)^5 = -32 \Leftrightarrow a - b = \sqrt[5]{-32} \Leftrightarrow a - b = -2 \\ (a + b)^3 = 64 \Leftrightarrow a + b = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow a + b = 4 \end{cases}$$

cujo conjunto solução é $a = 1$ e $b = 3$.

234. Notemos inicialmente que, no desenvolvimento de $(x + a)^n$, há $n + 1$ termos. Temos, portanto:

a) 8 termos b) 11 termos c) $n + 1$ termos

235. a) 51 termos

b) $x^{50}, x^{49} \cdot a, x^{48} \cdot a^2, x^{47} \cdot a^3$

236. Ao desenvolvermos $(x + y)^{1000}$ utilizando o teorema binomial, notamos que:

$$\text{o } 1^\circ \text{ termo é } \binom{1000}{0} x^{1000} \cdot y^0$$

$$\text{o } 2^\circ \text{ termo é } \binom{1000}{1} x^{1000-1} \cdot y^1$$

$$\text{o } 3^\circ \text{ termo é } \binom{1000}{2} x^{1000-2} \cdot y^2$$

⋮

$$\text{Logo, o } 100^\circ \text{ termo será } \binom{1000}{99} x^{1000-99} \cdot y^{99}, \text{ isto é, } \binom{1000}{99} x^{901} \cdot y^{99}.$$

237. Pelo teorema binomial, os 3 primeiros termos de $(x + y)^{100}$ serão:

$$\binom{100}{0} x^{100} y^0; \binom{100}{1} x^{100-1} y^1; \binom{100}{2} x^{100-2} y^2, \text{ isto é, } x^{100}; 100x^{99}y; 4950x^{98}y^2.$$

238. Notando que o desenvolvimento dado corresponde a $(a + b)^5$, temos:

$$(a + b)^5 = 1024 \Leftrightarrow a + b = \sqrt[5]{1024} \Leftrightarrow a + b = 4, \\ \text{donde } (a + b)^2 = 16.$$

239. A expressão dada pode ser escrita sob a forma:

$$\begin{aligned} &\binom{5}{0} 99^5 \cdot 1^0 + \binom{5}{1} 99^4 \cdot 1^1 + \binom{5}{2} 99^3 \cdot 1^2 + \binom{5}{3} 99^2 \cdot 1^3 + \binom{5}{4} 99^1 \cdot 1^4 + \\ &+ \binom{5}{5} 99^0 1^5, \end{aligned}$$

que corresponde ao desenvolvimento de $(99 + 1)^5 = 100^5 = 10^{10}$.

240. O polinômio dado é o desenvolvimento de

$$(x - y)^4 = \left(\frac{1 + \sqrt{6}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{6} - 1}{\sqrt{5}}\right)^4 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4 = \frac{16}{5}$$

241. Escrevendo S sob a forma:

$$S = \binom{20}{0} 1^{20} \cdot 2^0 + \binom{20}{1} 1^{19} \cdot 2^1 + \binom{20}{2} 1^{18} \cdot 2^2 + \dots + \binom{20}{20} 1^0 \cdot 2^{20}, \\ \text{notamos que } S = (1 + 2)^{20} = 3^{20}.$$

242. Ao desenvolvermos separadamente utilizando o teorema binomial, temos que:

$$(1 - \sqrt{5})^5 = 1 - 5\sqrt{5} + 50 - 50\sqrt{5} + 125 - 25\sqrt{5}$$

e

$$(1 + \sqrt{5})^5 = 1 + 5\sqrt{5} + 50 + 50\sqrt{5} + 125 + 25\sqrt{5}$$

Logo, efetuando a diferença vem:

$$(1 - \sqrt{5})^5 - (1 + \sqrt{5})^5 = -10\sqrt{5} - 100\sqrt{5} - 50\sqrt{5} = -160\sqrt{5}.$$

243. A expressão $x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + y^n$ corresponde ao desenvolvimento de $(x + y)^n$.

Quando $x = y = 1$, temos que o valor numérico da expressão é $(1 + 1)^n = 2^n$.

244. A expressão

$S = (x^3 - 1)^4 + 4 \cdot (x^3 - 1)^3 + 6 \cdot (x^3 - 1)^2 + 4 \cdot (x^3 - 1) + 1$
pode ser escrita como:

$$S = \binom{4}{0}(x^3 - 1)^4 \cdot 1^0 + \binom{4}{1}(x^3 - 1)^3 \cdot 1^1 + \binom{4}{2}(x^3 - 1)^2 \cdot 1^2 + \binom{4}{3}(x^3 - 1) \cdot 1^3 + \binom{4}{4}(x^3 - 1)^0 \cdot 1^4$$

que é o desenvolvimento de $[(x^3 - 1) + 1]^4$, isto é,
 $S = (x^3)^4 = x^{12}$.

245. Utilizando o teorema binomial, temos:

$$\sum_{x=0}^n \binom{n}{x} 2^x 3^{n-x} = (3 + 2)^n = 5^n.$$

246. O termo geral do desenvolvimento é:

$$\binom{6}{p} 1^{6-p} (-2x)^p = \binom{6}{p} (-1)^p 2^p x^p.$$

O coeficiente de x^2 é obtido quando $p = 2$ e vale: $\binom{6}{2} (-1)^2 2^2 = 60$.

247. O termo geral é:

$$\binom{9}{p} x^{9-p} (3y)^p = \binom{9}{p} x^{9-p} 3^p y^p.$$

Devemos ter $9 - p = 4 \Leftrightarrow p = 5$.

Logo, o termo que contém x^4 é:

$$\binom{9}{5} 3^5 y^5 x^4 = 30\,618 x^4 y^5.$$

248. O termo geral do desenvolvimento é:

$$\binom{5}{p} 1^{5-p} \cdot (-2x^2)^p = \binom{5}{p} (-1)^p \cdot 2^p \cdot x^{2p}.$$

O coeficiente de x^8 é obtido quando $2p = 8 \Leftrightarrow p = 4$. Seu valor é, portanto:

$$\binom{5}{4} (-1)^4 2^4 = 80.$$

249. O termo geral de $(x^2 + x^{-3})^8$ é:

$$\binom{8}{p} (x^2)^{8-p} \cdot (x^{-3})^p = \binom{8}{p} x^{16-5p}.$$

Devemos ter: $16 - 5p = 6 \Leftrightarrow p = 2$.

Logo, o coeficiente de x^6 é $\binom{8}{2} = 28$.

250. O termo geral do desenvolvimento é:

$$\binom{15}{p} x^{15-p} \cdot \left(\frac{-a^2}{x}\right)^p = \binom{15}{p} (-1)^p x^{15-2p} a^{2p}.$$

Para obtermos o termo em x^3 , devemos ter:

$$15 - 2p = 3 \Leftrightarrow p = 6, \text{ que resulta } \binom{15}{6} (-1)^6 x^3 a^{12} = 5\,005 x^3 a^{12}.$$

251. O termo geral é:

$$\binom{15}{p} (\sqrt{x})^{15-p} \cdot \left(\frac{-a^2}{x}\right)^p = \binom{15}{p} (-1)^p x^{\frac{15-p}{2}} \cdot a^{2p}.$$

Devemos ter: $\frac{15-3p}{2} = 3 \Leftrightarrow p = 3$.

O termo procurado é, portanto, $\binom{15}{3} (-1)^3 x^3 a^6 = -455 x^3 a^6$.

252. O termo geral de $(x - 2)^7$ é: $\binom{7}{p} x^{7-p} \cdot (-2)^p$. Para determinarmos o termo

de 4º grau, devemos impor:

$$7 - p = 4 \Leftrightarrow p = 3.$$

Logo, seu coeficiente é $\binom{7}{3} (-2)^3 = -280$.

253. Escrevendo o termo geral:

$$\binom{10}{p} \left(\frac{1}{2} x^2\right)^{10-p} \cdot (-y)^p = \binom{10}{p} (-1)^p \left(\frac{1}{2}\right)^{10-p} \cdot x^{20-2p} y^p,$$

o coeficiente do termo que contém o fator y^4 é obtido fazendo $p = 4$, isto é,

$$\binom{10}{4} (-1)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-4} = \frac{105}{32}.$$

254. O termo geral é:

$$\binom{6}{p} x^{6-p} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^p = \binom{6}{p} x^{6-2p} \cdot 2^p.$$

Devemos ter: $6 - 2p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{5}{2}$, que não convém, pois

$p = 0, 1, 2, \dots, 6$. Logo, não há termo em x no desenvolvimento de $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$.

255. O termo geral é:

$$\binom{6}{p} 1^{6-p} \cdot \left(-\frac{2}{3}x\right)^p = \binom{6}{p} (-1)^p \left(\frac{2}{3}\right)^p x^p.$$

O coeficiente de x^5 será obtido quando $p = 5$, o que resulta:

$$\binom{6}{5} (-1)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{64}{81}.$$

256. O termo geral desse desenvolvimento é:

$$\binom{6}{p} (\sqrt{x})^{6-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = \binom{6}{p} (x^{\frac{1}{2}})^{6-p} x^{-p} = \binom{6}{p} x^{\frac{6-3p}{2}}.$$

Devemos impor:

$$\frac{6-3p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = 4.$$

Assim, o coeficiente em x^{-3} é $\binom{6}{4} = 15$.

257. O termo geral é:

$$\binom{12}{p} \left(\frac{2x}{3}\right)^{12-p} \cdot \left(-\frac{3}{2x}\right)^p = \binom{12}{p} (-1)^p \cdot 2^{12-2p} \cdot 3^{2p-12} x^{12-2p}.$$

Devemos ter: $12 - 2p = 2 \Leftrightarrow p = 5$. Logo, o coeficiente em x^2 é:

$$\binom{12}{5} (-1)^5 \cdot 2^2 \cdot 3^{-2} = -352.$$

258. O termo geral é: $\binom{100}{p} x^{100-p} \cdot a^p$. O coeficiente do termo que contém x^{60} é obtido fazendo: $100 - p = 60 \Leftrightarrow p = 40$, que resulta em $\binom{100}{40}$.

259. O desenvolvimento de $(x^3 + y^2)^{10}$ apresenta, como vimos, 11 termos e seu termo médio é o sexto. O termo geral é: $\binom{10}{p} (x^3)^{10-p} \cdot (y^2)^p$. Lembrando que o 1º termo é obtido fazendo $p = 0$; o 2º fazendo $p = 1$, e assim por diante, o coeficiente do sexto termo é obtido fazendo $p = 5$, isto é, $\binom{10}{5} = 252$.

260. O termo geral é:

$$\binom{4}{p} y^{4-p} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^p = \binom{4}{p} y^{4-2p}.$$

O termo independente de y é obtido fazendo $4 - 2p = 0 \Leftrightarrow p = 2$, o que resulta $\binom{4}{2} = 6$.

261. O termo geral de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ é:

$$\binom{2n}{p} x^{2n-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = \binom{2n}{p} x^{2n-2p}.$$

Devemos ter: $2n - 2p = 0 \Leftrightarrow n = p$. O termo independente é, portanto,

$$\binom{2n}{n}.$$

262. O termo geral é:

$$\binom{8}{p} (-x)^{8-p} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^p = \binom{8}{p} (-1)^p (\sqrt{2})^p \cdot x^{8-2p}.$$

Para determinarmos o termo independente de x , devemos impor:

$$8 - 2p = 0 \Leftrightarrow p = 4, \text{ que resulta } \binom{8}{4} (-1)^4 (\sqrt{2})^4 = 280.$$

263. O termo geral é:

$$\binom{18}{p} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{18-p} \cdot (-\sqrt[4]{x})^p = \binom{18}{p} (-1)^p \cdot x^{\frac{9p}{4} - 36}$$

O termo independente de x será obtido quando $\frac{9p}{4} - 36 = 0 \Leftrightarrow p = 16$

$$\text{e vale } \binom{18}{16} (-1)^{16} = 153.$$

264. O termo geral é:

$$\binom{8}{p} x^{8-p} \cdot \left(\frac{2}{5x}\right)^p = \binom{8}{p} \left(\frac{2}{5}\right)^p \cdot x^{8-2p}.$$

Devemos ter: $8 - 2p = 0 \Leftrightarrow p = 4$.

$$\text{Assim, o termo independente de } x \text{ é: } \binom{8}{4} \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{224}{125}.$$

265. O termo geral é:

$$\binom{5}{p} x^{5-p} (3a)^p = \binom{5}{p} 3^p x^{5-p} a^p.$$

Lembrando que a independe de x e comparando o termo geral com $360x^3$, devemos ter: $5 - p = 3 \Leftrightarrow p = 2$. Daí, vem:

$$\binom{5}{2} 3^2 a^2 = 360 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2.$$

266. O termo geral de $(x + a)^5$ é: $\binom{5}{p} x^{5-p} a^p$.

Para que um de seus termos seja $270x^2$, devemos ter: $5 - p = 2 \Leftrightarrow p = 3$.

$$\text{Segue, então, que: } \binom{5}{3} a^3 = 270 \Leftrightarrow a = 3.$$

267. O termo geral é:

$$\binom{517}{p} x^{517-p} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^p = \binom{517}{p} (-1)^p x^{517-2p}.$$

Devemos ter:

$$517 - 2p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{517}{2}.$$

Da condição de existência de $\binom{517}{p}$, notamos que $p = \frac{517}{2}$ não convém.

Logo, não há termo independente de x em $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{517}$.

268. O termo geral do desenvolvimento é:

$$\binom{11}{p} 3^{11-p} \cdot (6x^2)^p = \binom{11}{p} 3^{11-p} \cdot 6^p \cdot x^{2p}.$$

Para obtermos o termo independente de x , devemos ter: $2p = 0 \Leftrightarrow p = 0$, que, como vimos, fornece o 1º termo do desenvolvimento.

269. O termo geral é dado por:

$$\binom{n}{p} x^{n-p} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^p = \binom{n}{p} x^{n-3p}.$$

Para que exista um termo independente de x , é preciso que $n - 3p = 0 \Leftrightarrow n = 3p$, isto é, n deve ser divisível por 3.

270. O termo geral é:

$$\binom{2n+1}{p} x^{2n+1-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = \binom{2n+1}{p} x^{2n+1-2p}.$$

Devemos impor: $2n + 1 - 2p = 0 \Leftrightarrow p = n + \frac{1}{2}$. Como $n \in \mathbb{N}$, p resulta não inteiro, o que não convém. Logo, não há termo independente de x .

271. Devemos notar inicialmente que, ao desenvolvermos $(x + y)^n$ usando o teorema binomial, qualquer termo apresentará soma de expoentes igual a n . Assim, se um dos termos de $(2x - 3y)^n$ é $-1080x^2y^3$, devemos ter $2 + 3 = n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 5$. Então, o termo geral é: $\binom{5}{p} 2^{5-p} (-1)^p 3^p x^{5-p} y^p$ e o terceiro termo é obtido fazendo $p = 2$, que resulta:

$$\binom{5}{2} 2^3 \cdot (-1)^2 \cdot 3^2 x^3 y^2 = 720x^3 y^2.$$

272. Os 3 primeiros termos do desenvolvimento são:

$$\binom{n}{0} (x^2)^n; \binom{n}{1} (x^2)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^1 \text{ e } \binom{n}{2} (x^2)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^2$$

cujos coeficientes são, respectivamente:

$$\binom{n}{0}, \frac{1}{2} \binom{n}{1} \text{ e } \frac{1}{4} \binom{n}{2}$$

Como eles estão em P.A., podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \binom{n}{1} - \binom{n}{0} &= \frac{1}{4} \binom{n}{2} - \frac{1}{2} \binom{n}{1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \binom{n}{1} &= 1 + \frac{1}{4} \binom{n}{2} \Leftrightarrow n = 1 + \frac{n(n-1)}{8} \Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \end{aligned}$$

cujas raízes são 1 e 8. Observando que $n = 1$ não convém, segue que $n = 8$.

273. O termo geral é: $\binom{n}{p} I^{n-p} \cdot x^p = \binom{n}{p} x^p$.

Fazendo $p = 4$, temos $\binom{n}{4} x^4$, que é o 5º termo.

Analogamente, o 6º e 7º termos são $\binom{n}{5} x^5$ e $\binom{n}{6} x^6$.

Como seus coeficientes estão em P.A., podemos escrever:

$$\begin{aligned} \binom{n}{5} - \binom{n}{4} &= \binom{n}{6} - \binom{n}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{5(n-5)} = \frac{1}{(n-4)(n-5)} + \frac{1}{30} \\ \Leftrightarrow \frac{2n-13}{(n-5)(n-4)} &= \frac{1}{6} \Leftrightarrow n^2 - 21n + 98 = 0, \text{ cujas raízes são } 14 \text{ e } 7. \end{aligned}$$

Como $n \leq 10$, temos $n = 7$, donde $2n - 1 = 13$.

274. O termo geral do desenvolvimento é: $\binom{n+5}{p} a^{n+5-p} b^p$.

Temos:

$$T_{n+3} = \binom{n+5}{n+2} a^3 b^{n+2} \text{ e } T_{n+1} = \binom{n+5}{n} a^5 b^n.$$

Da hipótese do exercício, vem:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n+5}{n+2} a^3 b^{n+2}}{\binom{n+5}{n} a^5 b^n} &= \frac{2b^2}{3a^2} \Leftrightarrow \frac{\binom{n+5}{n+2}}{\binom{n+5}{n}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{(n+2)! 3!}{n! 5!}} &= \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{20}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow n^2 + 3n - 28 = 0$, que, desprezando a raiz negativa, vem que $n = 4$.

275. O termo geral é $\binom{n}{p} x^{n-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = \binom{n}{p} x^{n-2p}$.

Fazendo $p = 2$ e $p = n - 2$, obtemos o 3.º e o antepenúltimo termos, que valem respectivamente:

$$\binom{n}{2}x^{n-4} \text{ e } \binom{n}{n-2}x^{4-n}.$$

Seu produto, portanto, vale:

$$\binom{n}{2}x^{n-4} \cdot \binom{n}{n-2}x^{4-n} = \binom{n}{2} \cdot \binom{n}{n-2} = \left[\binom{n}{2} \right]^2$$

$$\text{pois } \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}.$$

276. O termo geral de $(x + 2)^n$ é: $\binom{n}{p}x^{n-p} \cdot 2^p$.

Multiplicando-o por x^3 , obtemos o termo geral de $(x + 2)^n \cdot x^3$, que é:

$$\binom{n}{p}x^{n-p} \cdot 2^p \cdot x^3 = \binom{n}{p}x^{3+n-p} \cdot 2^p.$$

Devemos impor:

$$3 + n - p = n + 1 \Leftrightarrow p = 2.$$

$$\text{Logo, o coeficiente de } x^{n+1} \text{ é: } \binom{n}{2}2^2 = 2n(n-1).$$

277. Como $a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \dots + b^k = (a + b)^k$, o produto pedido resulta $(a + b)^k(a + b) = (a + b)^{k+1} = (a + b)^{n+1}$, para $k = n$.

O termo geral desse desenvolvimento é, como sabemos, $\binom{n+1}{p}a^{n+1-p}b^p$.

Assim, o coeficiente pedido é $\binom{n+1}{p}$.

278. Observemos, inicialmente, que:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)^6 = \left[\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)\right]^6 = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^6,$$

cujos termos são:

$$\binom{6}{p}(x^2)^{6-p} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^p = \binom{6}{p}(-1)^p x^{12-4p}.$$

Devemos impor: $12 - 4p = 0 \Leftrightarrow p = 3$.

Assim, o termo independente de x é: $\binom{6}{3}(-1)^3 = -20$.

279. O termo geral de $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{100}$ é:

$$\binom{100}{p}(\sqrt{2})^{100-p}(\sqrt[3]{3})^p = \binom{100}{p} \cdot 2^{\frac{100-p}{2}} \cdot 3^{\frac{p}{3}}$$

O número acima será racional se, e somente se, $\frac{100-p}{2}$ e $\frac{p}{3}$ forem inteiros.

Tal condição é satisfeita quando p é simultaneamente múltiplo de 2 e de 3, isto é, múltiplo de 6. Logo, o problema consiste em determinar os múltiplos de 6 compreendidos entre 0 e 100: (0, 6, ..., 96). Utilizando a expressão do termo geral da P.A., segue que há 17 múltiplos de 6 e portanto o desenvolvimento apresenta 17 termos racionais.

280. O termo geral é:

$$\binom{10}{p}(2\sqrt{3})^{10-p} \cdot (\sqrt{5})^p = \binom{10}{p}2^{10-p}(\sqrt{3})^{10-p}(\sqrt{5})^p,$$

que será racional se, e somente se, p for par e $0 \leq p \leq 10$, isto é, $p = 0, 2, 4, 6, 8$ e 10 .

Logo, há 6 termos racionais em $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^{10}$.

282. a) $(1,002)^{10} \cong 1 + 10 \cdot 0,002 = 1,02$.

b) $(0,997)^{20} = (1 - 0,003)^{20} \cong 1 - 20 \cdot 0,003 = 0,94$.

283. $(1,003)^{20} = (1 + 0,003)^{20} \cong 1 + 20 \cdot 0,003 = 1,06$.

285. a) Fazendo $x = y = 1$, vem: $(3 \cdot 1 + 2 \cdot 1)^{10} = 5^{10}$.

b) Fazendo $x = y = 1$, vem: $(5 \cdot 1 + 1)^8 = 6^8$.

286. Fazendo $x = y = 1$, vem: $(4 \cdot 1 + 3 \cdot 1)^4 = 7^4$.

287. a) Fazendo $x = y = 1$, vem: $(1 - 1)^5 = 0$.

b) Analogamente, temos: $(3 \cdot 1 - 1)^4 = 2^4 = 16$.

288. Basta fazer $x = y = 1$. Assim, a soma dos coeficientes é: $(5 \cdot 1 + 2 \cdot 1)^5 = 7^5 = 16\,807$.

289. A soma dos coeficientes é obtida fazendo $x = a = 1$. Temos: $(1 + 1)^p = 512 \Leftrightarrow 2^p = 512 \Leftrightarrow p = 9$.

290. Notemos que:

$$\sum_{i=1}^5 a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$

que representa a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x - y)^4$, que é:

$$(2 \cdot 1 - 1)^4 = 1. \text{ Logo, } \sum_{i=1}^5 a_i = 1.$$

291. A soma dos coeficientes de $(x + y)^n$ é 2^n , isto é,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (1).$$

A soma dos coeficientes de $(x - y)^n$ é 0, isto é,

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots \pm \binom{n}{n} = 0 \quad (2)$$

Somando membro a membro (1) e (2), vem:

$$2 \cdot \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots \right] = 2^n \Leftrightarrow 2 \cdot 256 = 2^n \Leftrightarrow n = 9.$$

soma dos coeficientes dos
termos de ordem ímpar

292. Fazendo $x = 1$, vem:

$$(3 \cdot 1 + 1)^m = 1024 \Leftrightarrow 4^m = 1024 \Leftrightarrow m = 5.$$

293. Fazendo $a = b = 1$, segue que:

$$(1 + 1)^m = 256 \Leftrightarrow 2^m = 256 \Leftrightarrow m = 8.$$

Logo, o número de permutações de $\frac{m}{2} = 4$ elementos é $4! = 24$.

294. a) $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1.$

b) $\binom{8}{8} = \frac{8!}{0!8!} = 1.$

c) $\binom{4}{0} = \binom{4}{4}$ é verdadeiro pela propriedade 4.

d) $\binom{8}{5} + \binom{8}{4} = \binom{9}{5}$ é verdadeiro pela relação de Stifel.

e) $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$ é verdadeiro pela propriedade 4.

f) $\binom{8}{0} = \binom{15}{0}$ é verdadeiro, pois são ambos iguais a 1.

296. Do exercício anterior, vem que:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16.$$

297. Notemos inicialmente que:

$$\binom{n}{1} = n; \binom{n+1}{1} = n+1; \binom{n+2}{1} = n+2 \text{ e } \binom{n+3}{1} = n+3$$

Assim, o determinante pode ser escrito como:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n+1 \\ 1 & n+1 & n+2 \\ 1 & n+2 & n+3 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois é fácil notar que a 3ª coluna é a soma das}$$

duas primeiras, sendo portanto uma combinação linear delas.

298. a) $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10} = 1024.$

b) $\sum_{i=1}^{10} \binom{10}{i} = \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10}.$

Como vimos:

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10} = 1024.$$

$$\sum_{i=1}^{10} \binom{10}{i}$$

Logo, $\sum_{i=1}^{10} \binom{10}{i} = 1024 - \binom{10}{0} = 1024 - 1 = 1023.$

c) Sabemos que:

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10}.$$

$$\sum_{i=2}^{10} \binom{10}{i}$$

Temos: $1 + 10 + \sum_{i=2}^{10} \binom{10}{i} = 2^{10} \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{10} \binom{10}{i} = 1024 - 11 = 1013.$

299. Desenvolvendo a somatória, temos:

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m} = 1023.$$

Por outro lado, sabemos que:

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m} = 2^m.$$

Da hipótese do problema, vem:

$$\binom{m}{0} + 1023 = 2^m \Leftrightarrow 1 + 1023 = 2^m \Leftrightarrow m = 10.$$

300. Sabemos que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

$$1 + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} = 2^n \Leftrightarrow \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} = 2^n - 1.$$

301. Sabemos que:

$$\underbrace{\binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \dots + \binom{11}{10} + \binom{11}{11}}_{\sum_{k=0}^{10} \binom{11}{k}} = 2^{11}$$

Logo, $\sum_{k=0}^{10} \binom{11}{k} = 2^{11} - 1 = 2047.$

302. $\sum_{p=0}^n (-1)^{p-n} (-1)^p (-1)^{n-p} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} = \binom{n}{0} (-1)^0 + \binom{n}{1} (-1)^1 + \dots + \binom{n}{n} (-1)^n = \binom{n}{0} (-1)^0 1^n + \binom{n}{1} (-1)^1 1^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} (-1)^n 1^0 = [1 + (-1)]^n = 0.$

303. $A_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (2^p 3^{n-p} - 4^p) = \sum_{p=0}^n \left[\binom{n}{p} 2^p 3^{n-p} - \binom{n}{p} 4^p \right] = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 3^{n-p} \cdot 2^p - \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 4^p$

Pelo teorema binomial, o 1º termo corresponde ao desenvolvimento de $(3 + 2)^n$ e o 2º corresponde ao desenvolvimento de $(1 + 4)^n$.
Portanto, $A_n = (3 + 2)^n - (1 + 4)^n = 0.$

304. Os subconjuntos de A podem conter 0, 1, ... até n elementos.

- Com 0 elemento, o subconjunto formado é o vazio.
- Com 1 elemento, o número de subconjuntos formados corresponde à combinação de n elementos tomados 1 a 1.
- Com 2 elementos, o número de subconjuntos formados é o número de combinações de n elementos tomados 2 a 2.
- Com n elementos, o número de subconjuntos formados é o número de combinações de n elementos tomados n a n .

Somando o número de subconjuntos em cada caso, obtemos:

$$1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \dots + C_{n,n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}, \text{ que, como sabemos, é igual a } 2^n.$$

Logo, se o conjunto A tem n elementos, o número de subconjuntos de A é 2^n .

305. Como A possui 2^n subconjuntos, o número de subconjuntos não vazios de A é $2^n - 1.$

306. Notemos inicialmente que:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^0 + \binom{n}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ é o desenvolvimento de } \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^n = 1.$$

Então,

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 1 - \underbrace{\binom{n}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^0}_{1^\circ \text{ termo}},$$

isto é,

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Dai, o valor da expressão pedida é:

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2.$$

307. Vamos desenvolver $[1 + (-1)]^n$ utilizando o teorema binomial:

$$0 = [1 + (-1)]^n = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} (-1) + \binom{n}{2} 1^{n-2} (-1)^2 + \dots + \binom{n}{n} (-1)^n$$

Logo,

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

308. Temos:

$$1 = (p + q)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p q^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} p^n.$$

Notemos, inicialmente, que como $p > 0$ e $q > 0$, cada termo do desenvolvimento é estritamente positivo.

Ora, $\binom{n}{i} p^i q^{n-i}$ é um termo qualquer desse desenvolvimento e a soma de todos os termos é igual a 1.

Logo, $\binom{n}{i} p^i q^{n-i} < 1.$

309. Do exercício 307, mostramos que:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

Como n é ímpar, podemos escrever:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots - \binom{n}{n} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}.$$

Utilizando a igualdade acima na sugestão, vem:

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} \right] + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} \right] = 2^n$$

isto é,

$$2 \cdot \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} \right] = 2^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1},$$

que é o que queríamos demonstrar.

311. Do exercício anterior, temos:

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \dots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

Derivando novamente membro a membro em relação a x , vem:

$$n \cdot (n-1)(1+x)^{n-2} = 2 \cdot 1 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot 2 \cdot \binom{n}{3}x + \dots + n(n-1)\binom{n}{n}x^{n-2}$$

Fazendo $x = 1$ na igualdade acima, resulta:

$$n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2} = 2 \cdot 1 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot 2 \cdot \binom{n}{3} + \dots + n(n-1)\binom{n}{n},$$

que é o que queríamos demonstrar.

312. Sabemos que:

$$(1+x)^{m+n} = \binom{m+n}{0} + \binom{m+n}{1}x + \binom{m+n}{2}x^2 + \dots + \binom{m+n}{m+n}x^{m+n} (*)$$

$$(1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{m}x^m$$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

Então,

$$(1+x)^m(1+x)^n = \left[\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{m}x^m \right] \cdot$$

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \right].$$

Notemos que, ao efetuarmos esse produto, temos que:

- o termo independente será: $\binom{m}{0}\binom{n}{0}$

- o termo que contém x será: $\binom{m}{0}\binom{n}{1} + \binom{m}{1}\binom{n}{0}$

- o termo que contém x^2 será: $\binom{m}{0}\binom{n}{2} + \binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{m}{2}\binom{n}{0}$

e assim por diante.

Comparando com os coeficientes de (*), temos:

- $\binom{m+n}{0} = \binom{m}{0}\binom{n}{0}$

- $\binom{m+n}{1} = \binom{m}{0}\binom{n}{1} + \binom{m}{1}\binom{n}{0}$

- $\binom{m+n}{2} = \binom{m}{0}\binom{n}{2} + \binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{m}{2}\binom{n}{0}$

\vdots

de um modo geral:

$$\binom{m+n}{p} = \binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{p-2} + \dots + \binom{m}{p}\binom{n}{0},$$

que é o que queríamos demonstrar.

313. Fazendo $m = p = n$ na relação de Euler, segue que:

$$\binom{n+n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}.$$

Lembrando da propriedade dos coeficientes binomiais equidistantes dos extremos, podemos escrever:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{n}$$

isto é,

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2.$$

315. Utilizando a identidade:

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \text{ temos:}$$

$$x = 1 \Rightarrow (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$x = 2 \Rightarrow (2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$x = 3 \Rightarrow (3+1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

\vdots

$$x = n \Rightarrow (n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

Somando "coluna a coluna" os termos das igualdades acima, obtemos:

$$2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (n+1)^3 = (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) +$$

$$+ 3 \cdot \underbrace{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)}_S + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) +$$

$$+ (1 + 1 + \dots + 1)$$

$n \text{ vezes}$

Cancelando os termos semelhantes, vem:

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot S + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n.$$

Lembrando que:

$1 + 2 + 3 + \dots + n$ representa a soma dos n primeiros naturais não nulos, pela expressão da soma dos termos da P.A. vem:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{(1 + n)n}{2}.$$

Daí,

$$(n + 1)^3 = 1 + 3 \cdot S + 3 \cdot \frac{(1 + n)n}{2} + n \Leftrightarrow$$

$$2n^3 + 3n^2 + n = 6S \Leftrightarrow 6S = n(2n^2 + 3n + 1)$$

$$\Leftrightarrow 6S = n(2n^2 + 2n + n + 1) \Leftrightarrow 6 \cdot S = n \cdot (2n + 1)(n + 1)$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{n(2n + 1)(n + 1)}{6}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

316. Idem ao exercício anterior.

318. Pelo exercício resolvido anterior, os valores de $\binom{n}{p}$ crescem até $p = \frac{n + 1}{2}$

e a partir daí decrescem. Ora, como n é ímpar, $\frac{n + 1}{2}$ e seu antecessor

$\frac{n + 1}{2} - 1 = \frac{n - 1}{2}$ são inteiros e portanto valores possíveis para p .

Notando que $\binom{n}{\frac{n - 1}{2}} = \binom{n}{\frac{n + 1}{2}}$, vem que $p = \frac{n - 1}{2}$ também satisfaz,

isto é, os valores de $\binom{n}{p}$ vão crescendo até atingir valor máximo para dois valores de p .

319. Devemos ter:

$$\binom{n}{k} = 2 \binom{n}{k - 1} \Leftrightarrow \frac{n!}{k! (n - k)!} = 2 \cdot \frac{n!}{(k - 1)! (n - k + 1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k(k - 1)! (n - k)!} = \frac{2}{(k - 1)! (n - k + 1)(n - k)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k} = \frac{2}{n - k + 1} \Leftrightarrow n = 3k - 1.$$

320. Como $P(x)$ é de grau 100 e é divisível por

$$(x + 9)^{100} = \binom{100}{0} x^{100} + \binom{100}{1} x^{99} \cdot 9 + \dots + \binom{100}{100} 9^{100},$$

também um polinômio de grau 100, podemos escrever:

$P(x) = k \cdot (x + 9)^{100}$, isto é,

$$x^{100} + a_{99}x^{99} + \dots + a_1x + a_0 = k \cdot \left[\binom{100}{0} x^{100} + \dots + \binom{100}{100} 9^{100} \right].$$

Comparando seus coeficientes dominantes, vem que $k = 1$.

Se quisermos descobrir a_2 , basta compará-lo ao coeficiente de x^2 em $(x + 9)^{100}$.

O termo geral é: $\binom{100}{p} x^{100 - p} \cdot 9^p$ e devemos ter: $100 - p = 2 \Leftrightarrow p = 98$.

$$\text{Daí, } a_2 = \binom{100}{98} \cdot 9^{98} = 50 \cdot 99 \cdot 9^{98}.$$

321. Notemos que:

$$\sin^4 x - 4 \sin^3 x + 6 \sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sin x - 1)^4 = 0 \Leftrightarrow \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{323. } \binom{10}{p - 3} = \binom{10}{p + 3}$$

$$\text{Temos duas possibilidades: } \begin{cases} p - 3 = p + 3 \Leftrightarrow 0 = 6, \text{ absurdo!} \\ \text{ou} \\ p - 3 + p + 3 = 10 \Leftrightarrow p = 5 \end{cases}$$

324. Temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} x = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ x + 2x - 1 = 14 \Leftrightarrow x = 5 \end{cases}$$

$$\text{325. Temos: } \begin{cases} p + 3 = p - 1 \Leftrightarrow 0 = -4, \text{ absurdo!} \\ \text{ou} \\ p + 3 + p - 1 = 12 \Leftrightarrow p = 5 \end{cases}$$

$$\text{326. Temos: } \begin{cases} m - 1 = 2m - 3 \Leftrightarrow m = 2 \\ \text{ou} \\ m - 1 + 2m - 3 = 11 \Leftrightarrow m = 5 \end{cases}$$

327. A forma sugerida do agrupamento consiste em uma combinação de m objetos tomados 3 a 3 e depois tomados 5 a 5. Da condição do exercício, devemos ter:

$$C_{m, 3} = C_{m, 5} \Leftrightarrow \binom{m}{3} = \binom{m}{5}.$$

$$\text{Temos: } \begin{cases} 3 = 5, \text{ absurdo!} \\ \text{ou} \\ 3 + 5 = m \Leftrightarrow m = 8 \end{cases}$$

$$\text{Então, } \binom{m}{3} = \binom{8}{3} = 56.$$

$$\text{328. De } \binom{m}{p + q} = \binom{m}{p - q}, \text{ temos:}$$

$$\begin{cases} p + q = p - q \Leftrightarrow q = 0, \text{ não convém} \\ \text{ou} \\ p + q + p - q = m \Leftrightarrow 2p = m \end{cases}$$

329. Já vimos que $\binom{m}{m-p} = \binom{m}{p} = 55$.

Pela relação de Stifel, podemos escrever:

$$\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p} + \binom{m-1}{p-1}$$

$$55 = \binom{m-1}{p} + 10$$

Logo, $\binom{m-1}{p} = 45$.

330. A relação $\binom{n}{3} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2}$ é a relação de Stifel, que é, naturalmente, verdadeira se os binomiais acima estiverem definidos.

Devemos ter:

(1) $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$

(2) $n-1 \geq 3 \Leftrightarrow n \geq 4, n \in \mathbb{Z}$

(3) $n-1 \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 3, n \in \mathbb{Z}$

De (1), (2) e (3), devemos ter:

R: $\{n \in \mathbb{Z} \mid n > 3\}$.

331. Utilizaremos os resultados obtidos pelos exercícios 317 e 318.

a) $n = 12$

O maior coeficiente binomial é $\binom{12}{6}$.

b) $n = 15$.

Os maiores coeficientes binomiais são: $\binom{15}{7}$ e $\binom{15}{8}$.

332. Como $n = 10$ é par, o maior coeficiente binomial é $\binom{10}{5}$, que representa o coeficiente do 6º termo.

O termo geral de $(\sqrt{x} + y^2)^{10}$ é: $\binom{10}{p} (\sqrt{x})^{10-p} (y^2)^p$.

Fazendo $p = 5$, obtemos:

$$\binom{10}{5} (\sqrt{x})^5 (y^2)^5 = 252 x^{\frac{5}{2}} y^{10}.$$

333. O coeficiente de $x^2 y z$ é:

$${}^{2,1,1}_4 P_4 = \frac{4!}{2! 1! 1!} = 12.$$

O coeficiente do termo $x y z^2$ é:

$${}^{1,1,2}_4 P_4 = \frac{4!}{1! 1! 2!} = 12.$$

334. O coeficiente de $x^2 y^3 z^2$ é:

$${}^{2,3,2}_7 P_7 = \frac{7!}{2! 3! 2!} = 210.$$

335. O termo geral é:

$$\frac{10!}{i! j! k!} \cdot 1^i \cdot (3x)^j (2x^2)^k = \frac{10! 3^j 2^k}{i! j! k!} \cdot x^{j+2k}$$

Devemos ter: $j + 2k = 3$ e i fica automaticamente determinado pela relação:

$$i + j + k = 10.$$

Podemos ter:

j	k	i
1	1	8
3	0	7

a) para $i = 8, j = 1, k = 1$, o coeficiente é: $\frac{10! 3^1 2^1}{8! 1! 1!} = 540$.

b) para $i = 7, j = 3, k = 0$, o coeficiente é: $\frac{10! 3^3 2^0}{7! 3! 0!} = 3\,240$.

Logo, o coeficiente de x^3 será: $540 + 3\,240 = 3\,780$.

336. Fazendo $x = y = z = 1$, obtemos:

$$(1 + 1 + 1)^5 = 3^5 = 243.$$

337. O termo geral de $\left(1 + x + \frac{2}{x}\right)^3$ é:

$$\frac{3!}{i! j! k!} \cdot 1^i \cdot x^j \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = \frac{3! 2^k}{i! j! k!} \cdot x^{j-k}$$

Devemos ter:

$$j - k = 0, \text{ a fim de obter o termo independente de } x.$$

Os possíveis valores de j e k que satisfazem a condição acima e determinam automaticamente o valor de i ($i + j + k = 3$) são:

j	k	i
0	0	3
1	1	1

Temos:

1) $i = 3, j = 0$ e $k = 0$

O coeficiente independente será: $\frac{3! 2^0}{3! 0! 0!} = 1$.

2) $i = 1, j = 1, k = 1$

O coeficiente será: $\frac{3! 2^1}{1! 1! 1!} = 12$.

Logo, desenvolvendo todo o polinômio, o termo independente será: $1 + 12 = 13$.

338. O termo geral de $(1 + x^2 - x^3)^9$ é:

$$\frac{9!}{i! j! k!} \cdot 1^i \cdot (x^2)^j \cdot (-x^3)^k = \frac{9! (-1)^k}{i! j! k!} \cdot x^{2j + 3k}$$

Para determinar o coeficiente de x^8 , devemos ter: $2j + 3k = 8$, sendo que i fica automaticamente determinado pela relação: $i + j + k = 9$.

Os possíveis valores de j e k que satisfazem a primeira condição são:

j	k	i
1	2	6
4	0	5

Temos, então:

1) $i = 6, j = 1$ e $k = 2$

O coeficiente x^8 será: $\frac{9! (-1)^2}{6! 1! 2!} = 252$.

2) $i = 5, j = 4, k = 0$

O coeficiente de x^8 será: $\frac{9! (-1)^0}{5! 4! 0!} = 126$.

Logo, o coeficiente de x^8 será: $252 + 126 = 378$.

Capítulo III – Probabilidade

339. $\Omega = \{P, R, O, B, A, I, L, D, E\}$

340. $\Omega = \{V, B, A\}$

341. $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 49, 50\}$

342. $\Omega = \{2_e, 2_c, 2_p, 2_o, 3_e, 3_c, 3_p, 3_o, \dots, K_e, K_c, K_p, K_o, A_e, A_c, A_p, A_o\}$

em que e : espadas

c : copa

p : paus

o : ouro

A : ás.

343. $\Omega = \{(V V), (V B), (B V), (B B)\}$

344. $\Omega = \{ABC, ACB, CAB, CBA, BAC, BCA\}$

345. Sejam M : masculino

F : feminino

$\Omega = \{(MMM), (MFM), (MMF), (MFF), (FFF), (FMM), (FMF), (FFM)\}$

347. $\Omega = \{\{AB\}, \{AC\}, \{AD\}, \{AE\}, \{BC\}, \{BD\}, \{BE\}, \{CD\}, \{CE\}, \{DE\}\}$

348. $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 364, 365\}$

349. a) $A = \{2, 4, 6, \dots, 28, 30\}$

b) $B = \{1, 3, 5, \dots, 27, 29\}$

c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

d) $D = \{17, 18, 19, \dots, 29, 30\}$

e) Um número que é simultaneamente múltiplo de 2 e de 5 é múltiplo de 10.

Logo, $E = \{10, 20, 30\}$.

f) $F = \{3, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 21, 24, 27, 30\}$

g) Basta fazer a diferença entre Ω e o conjunto dos múltiplos de 6, isto é,

$G = \Omega - \{6, 12, 18, 24, 30\}$.

350. a) $A = \{(3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6)\}$

b) $B = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$

c) $C = \{(1, 2); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 2); (4, 2); (5, 2); (6, 2)\}$

d) $D = \{(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)\}$

e) $E = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (4, 1); (4, 2); (5, 1)\}$

351. a) $A = \{(K, 1); (K, 2); (K, 3); (K, 4); (K, 5); (K, 6)\}$

b) $B = \{(K, 2); (K, 4); (K, 6); (C, 2); (C, 4); (C, 6)\}$

c) $C = \{(K, 3); (C, 3)\}$

- d) $A \cup B$: representa o evento em que ocorre cara ou número par, isto é,
 $A \cup B = \{(K, 1); (K, 2); (K, 3); (K, 4); (K, 5); (K, 6); (C, 2); (C, 4); (C, 6)\}$.
- e) $B \cap C$: ocorrem simultaneamente número par e número igual a 3. Logo,
 $B \cap C = \emptyset$.
- f) $A \cap C$: ocorrem simultaneamente cara e o número 3.
 Daí, $A \cap C = \{(K, 3)\}$.
- g) A^c : não ocorre cara, isto é,
 $A^c = \{(C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4); (C, 5); (C, 6)\}$.
- h) C^c : não ocorre o número 3. Daí,
 $C^c = \{(K, 1); (K, 2); (K, 4); (K, 5); (K, 6); (C, 1); (C, 2); (C, 4); (C, 5); (C, 6)\}$.

352. a) $A = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4)\}$
 b) $B = \{(2, 1); (3, 1); (3, 2); (4, 1); (4, 2); (4, 3)\}$
 c) $C = \{(1, 1)\}$
 d) $D = \{(1, 1); (2, 4)\}$
 e) $E = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5)\}$
 f) $F = \{(1, 3); (2, 3); (3, 3); (4, 3)\}$

353. a) $A = \{(I, V); (II, B)\}$
 b) $B = \{(II, V); (II, B)\}$
 c) $C = \{(I, V); (II, V)\}$
 d) $D = \{(I, B); (II, B)\}$
 e) $A \cup B$: a urna escolhida é a I ou a II. Daí, $A \cup B = \Omega$.
 f) $A \cap C$: a urna escolhida é a I e a bola sorteada é vermelha, isto é,
 $A \cap C = \{(I, V)\}$.
 g) D^c : a bola escolhida não é branca.
 Logo, $D^c = \{(I, V); (II, V)\}$.

354. Sejam: S: Sim e N: Não.
 a) $\Omega = \{(S, S, S); (S, S, N); (S, N, S); (S, N, N); (N, N, N); (N, S, S); (N, S, N); (N, N, S)\}$.
 b) $A = \{(S, S, N); (S, N, S); (S, N, N); (N, N, N); (N, S, S); (N, S, N); (N, N, S)\}$.

355. Seja $\Omega = \{V_1, V_2, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$.

Admitindo igual probabilidade (p) para cada resultado, segue-se que $p = \frac{1}{8}$.

Assim, o evento dado $A = \{V_1, V_2\}$ tem probabilidade

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

356. Como mais da metade dos eleitores já se decidiu por A, o evento: A ganha a eleição é o evento certo, isto é, $P(A) = 1$.

- 15.1 a) Sabemos que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Temos, então:

$$p_1 + p_1 + p_1 + 0,1 = 1 \Leftrightarrow p_1 = 0,3$$

$$\text{Logo, } p_1 = p_2 = p_3 = 0,3.$$

$$\text{b) } P(A) = p_1 + p_3 = 0,6.$$

$$\text{c) } P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

$$\text{d) } P(B) = p_1 + p_4 = 0,3 + 0,1 = 0,4.$$

$$\text{e) } A \cup B = \{a_1, a_3, a_4\}. \text{ Daí, } p(A \cup B) = p_1 + p_3 + p_4 = 0,3 + 0,3 + 0,1 = 0,7.$$

$$A \cap B = \{a_1\}. \text{ Daí, } P(A \cap B) = p_1 = 0,3.$$

$$\text{f) } P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

$$P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,3 = 0,7.$$

- 15.8. Sim, é correta, pois $P(K) + P(C) = 1$ e $P(K) > 0$ e $P(C) > 0$.
 A distribuição, entretanto, não é compatível com a realidade, pois se esperam valores iguais para $P(K)$ e $P(C)$.

- 15.9. $\Omega = \{K, C\}$ e $P(K) = 2P(C)$.

$$\text{Sabemos que: } P(K) + P(C) = 1 \Leftrightarrow 2P(C) + P(C) = 1 \Leftrightarrow$$

$$P(C) = \frac{1}{3} \text{ e } P(K) = \frac{2}{3}$$

$$\text{Então: a) } \frac{2}{3}; \text{ b) } \frac{1}{3}.$$

160. Chamando de I a moeda perfeita e II a moeda com 2 caras, (K e K'), temos:

$$\Omega = \{(I, K), (I, C), (II, K), (II, K')\}.$$

$$\text{O evento } A: \text{ ocorre cara é tal que } A = \{(I, K), (II, K), (II, K')\}.$$

$$\text{Logo, } P(A) = \frac{3}{4}.$$

162. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Temos:

$$P(2) = P(4) = P(6) = p, P(1) = P(3) = P(5) = p' \text{ e } p = 3p'.$$

$$\text{Como } P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1, \text{ temos:}$$

$$3p + 3p' = 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 3p' + 3p' = 1 \Leftrightarrow p' = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Daí, } p = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{a) } A = \{2, 3, 5\}$$

$$P(A) = P(2) + P(3) + P(5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$\text{b) } B = \{3, 6\}. \text{ Daí, } P(B) = P(3) + P(6) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{c) } C = \{1, 2, 3\}. \text{ Então,}$$

$$P(C) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$\begin{aligned} 363. \quad p_1 &= p(a_1) = K \\ p_2 &= p(a_2) = 2K \\ &\vdots \\ p_9 &= p(a_9) = 9K \\ p_{10} &= p(a_{10}) = 10K \end{aligned}$$

a) Temos:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_9 + p_{10} = 1 \Leftrightarrow K + 2K + \dots + 9K + 10K = 1$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{1}{55}.$$

$$b) p_3 = p(a_3) = 3K = \frac{3}{55} \text{ e } p_7 = p(a_7) = 7K = \frac{7}{55}.$$

$$c) P(A) = p_1 + p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{55} + \frac{2}{55} + \frac{4}{55} + \frac{6}{55} = \frac{13}{55}.$$

$$d) P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{13}{55} = \frac{42}{55}.$$

$$364. \quad a) \sum_{i=0}^{10} p_i = p_0 + p_1 + \dots + p_{10} = \binom{10}{0}(0,6)^0(0,4)^{10} + \binom{10}{1}(0,6)^1(0,4)^9 + \dots + \binom{10}{10}(0,6)^{10}.$$

Como vimos, a expressão acima é o desenvolvimento de $(0,6 + 0,4)^{10} = 1$.

$$b) p_3 = \binom{10}{3}(0,6)^3(0,4)^7 \cong 0,042.$$

$$c) P(A) = p_0 + p_1 + p_2 = \binom{10}{0}(0,6)^0(0,4)^{10} + \binom{10}{1}(0,6)^1(0,4)^9 + \binom{10}{2}(0,6)^2(0,4)^8 \cong 0,0123.$$

365. 1.º caso: Se A e B são mutuamente exclusivos, $A \cap B = \emptyset$ e $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

2.º caso: Se $A \cap B \neq \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Como $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B) > 0$, vem que $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

366. Temos:

$$A \subset (A \cup B) \Rightarrow P(A) \leq P(A \cup B) \quad (1)$$

$$(A \cap B) \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \quad (2)$$

De (1), (2) e do exercício anterior vem:

$$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

$$367. \quad a) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,1 = 0,4.$$

$$b) P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

$$c) P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0,3 = 0,7.$$

168. Seja $D = B \cup C$.

Temos, então, $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D)$. Daí:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$

$$P(A \cup D) = P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)]$$

Notemos que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Então:

$$P(A \cup B \cup C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)]$$

$$P(A \cup B \cup C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C),$$

que é o que queríamos demonstrar.

$$169. \quad a) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,2 = 0,5.$$

$$b) P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0,4 + 0,6 - 0,2 = 0,8.$$

$$c) P(A \cup B \cup C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0,4 + 0,3 + 0,6 - 0,2 - 0,2 - 0,2 + 0,1 = 0,8.$$

170. $\Omega = \{2p, 2c, 2o, 2e, 3p, 3c, 3o, 3e, \dots, Ap, Ac, Ao, Ae\}$; $\#\Omega = 52$ em que p : paus; c : copas; o : ouro; e : espada.

$$a) A = \{Qc\}. \text{ Daí } P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{1}{52}.$$

$$b) B = \{Qp, Qc, Qo, Qe\}. \text{ Logo } P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

$$c) C = \{2p, 3p, \dots, Kp, Qp\}. \text{ Então, } P(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

$$d) D = \{Jp, Jc, Jo, Je, Qp, Qc, Qo, Qe, Kp, Kc, Ko, Ke\}$$

$$\text{Então, } P(D) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

$$e) E = \Omega - \{Kp, Kc, Ko, Ke\}. \#E = 52 - 4 = 48$$

$$\text{Logo, } P(E) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}.$$

171. $\Omega = \{1, 2, \dots, 18, 19, 20\}$; $\#\Omega = 20$.

$$a) A = \{2, 4, 6, \dots, 18, 20\}. P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

$$b) B = \{1, 3, \dots, 17, 19\}. P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

$$c) C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}. \text{ Então, } P(C) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

$$d) D = \{1, 4, 9, 16\}. \text{ Logo, } P(D) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

$$372. \Omega = \{1, 2, \dots, 99, 100\}; \# \Omega = 100.$$

a) $A = \{9, 18, \dots, 99\}$. Usando a expressão do termo geral da P.A., em que $a_1 = 9$, $r = 9$ e $a_n = 99$, vem que $n = 11$.

$$\text{Daí, } P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{11}{100}.$$

b) Um número é múltiplo de 3 e de 4 se é múltiplo de 12.

$$B = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96\}. \text{ Assim, } P(B) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}.$$

c) Sejam os eventos:

M : o número é múltiplo de 3. $\#M = 33$

N : o número é múltiplo de 4. $\#N = 25$

$M \cap N$: o número é múltiplo de 12, isto é, $M \cap N = B$ e $\#M \cap N = 8$.

$$\text{Daí, } P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N) = \frac{33}{100} + \frac{25}{100} - \frac{8}{100} = \frac{1}{2}.$$

$$373. A = \{2, 4, 6, \dots, 18, 20\}; \#A = 10$$

$$B = \{5, 10, 15, 20\}; \#B = 4$$

$$A \cap B = \{10, 20\}; \#(A \cap B) = 2$$

$$\text{Assim, } P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{4}{20} - \frac{2}{20} = \frac{3}{5}.$$

374. O número de elementos do espaço amostral é o número de pares ordenados de $A \times A$. Isto é, $\#\Omega = 16$.

Seja B o evento formado pelos pares (a, b) , tais que a equação $ax = b$ tem soluções inteiras.

$$B = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 4); (3, 3); (4, 4)\}$$

$$\text{Assim, } P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

376. Sejam:

P_1, P_2, \dots, P_6 as bolas pretas; B_1, B_2 as bolas brancas e A_1, A_2, \dots, A_{10} as amarelas.
 $\Omega = \{P_1, P_2, \dots, P_6, B_1, B_2, A_1, A_2, \dots, A_{10}\}; \#\Omega = 18$.

$$a) A = \{P_1, \dots, P_6, B_1, B_2\}. P(A) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

$$b) B = A; \text{ logo } P(B) = \frac{4}{9}.$$

$$c) C = \{P_1, P_2, \dots, P_6\}. \text{ Daí, } P(C) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

377. Consideremos os pares (a, b) em que a representa o número obtido no lançamento do dado verde e b o número obtido no vermelho.

$$\Omega = \{(1, 1); (1, 2); \dots (1, 6); (2, 1); \dots (2, 6); (3, 1); \dots (3, 6); \dots (6, 1); \dots (6, 6)\}$$

$$\text{e } \#\Omega = 36.$$

$$a) A = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}. P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$b) B = A^c, \text{ donde } P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$c) C = \{(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)\} \text{ e } P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$d) D = \{(6, 6)\} \text{ e } P(D) = \frac{1}{36}.$$

e) $E = \Omega$ é o evento certo. Logo, $P(E) = 1$.

$$f) F = \{(1, 3); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6); (4, 3); (5, 3); (6, 3)\}$$

$$\text{Daí, } P(F) = \frac{11}{36}.$$

378. Pelo princípio fundamental da contagem, o número de resultados possíveis deste experimento é $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Seja o evento A : a soma obtida é menor ou igual a 4.

$$A = \{(1, 1, 1); (1, 1, 2); (2, 1, 1); (1, 2, 1)\}.$$

$$\text{Daí, } P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}.$$

379. Como cada lançamento do icosaedro pode resultar em 20 números, pelo princípio fundamental da contagem, $\#\Omega = 20^2 = 400$.

Como há 2 faces com o número zero, indicaremos por 0_A e 0_B .

Seja o evento C : a soma dos pontos é igual a 2.

$$C = \{(9, -7); (-7, 9); (8, -6); (-6, 8); (7, -5); (-5, 7); (6, -4); (-4, 6); (5, -3); (-3, 5); (4, -2); (-2, 4); (3, -1); (-1, 3); (2, 0_A); (0_A, 2); (2, 0_B); (0_B, 2); (1, 1)\}.$$

$$\text{Daí, } P(C) = \frac{19}{400}.$$

380. Vamos construir o espaço amostral correspondente aos possíveis resultados de vitória nas 3 últimas partidas:

$$\Omega = \{(AAA), (AAB), (ABA), (ABB), (BBB), (BBA), (BAB), (BAA)\}.$$

Baseado na informação que A venceu as duas primeiras partidas, A sairá vencedor se ocorrer o evento:

$$\{(AAA), (AAB), (ABA), (ABB), (BBA), (BAB), (BAA)\}.$$

A probabilidade de ocorrer esse evento é, então, $\frac{7}{8}$. Por outro lado, B só sai vencedor se ocorrer o evento $\{(BBB)\}$, cuja probabilidade é $\frac{1}{8}$.

Desse modo, os 5 600 reais. deveriam ser assim distribuídos:

A: $\frac{7}{8}$ de 5 600 = 4 900 reais.

B: $\frac{1}{8}$ de 5 600 = 700 reais.

381. Cada retirada corresponde a uma combinação das 22 notas tomadas 2 a 2, isto é, $\# \Omega = \binom{22}{2}$. O número de maneiras de extrair 2 notas de R\$ 5,00 é dado por $\binom{5}{2} = 10$. Daí, a probabilidade pedida é: $\frac{10}{\binom{22}{2}} = \frac{10}{231}$.

382. $\Omega = \{c, s, d, v\}$, em que c : casado, s : solteiro, d : desquitado e v : viúvo.

Temos: $P_c = 0,3$; $P_s = 0,4$; $P_d = 0,2$ e $P_v = 0,1$.

a) Seja o evento S : o homem é solteiro. $P(S) = P_s = 0,4$.

b) Seja o evento B : o homem não é casado. $B = \{s, d, v\}$ e

$P(B) = P_s + P_d + P_v = 0,4 + 0,2 + 0,1 = 0,7$.

c) Como os eventos "ser solteiro" e "ser desquitado" são mutuamente exclusivos, a probabilidade pedida é: $P_s + P_d = 0,4 + 0,2 = 0,6$.

383. Seja o par (X, Y) , em que X representa a nacionalidade da criança e Y a bandeira escolhida.

Temos:

$\Omega = \{(B, B), (B, J), (B, I_G), (B, I_T), (B, F), \dots, (F, F)\}$. $\# \Omega = 25$.

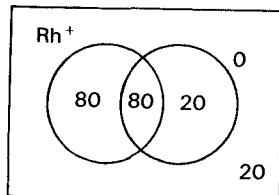
Seja também o evento A : a criança recebe sua bandeira.

$A = \{(B, B); (I_G, I_G); (I_T, I_T); (J, J); (F, F)\}$. $P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

Então, a probabilidade de que a criança sorteada não receba a sua bandeira é

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

385. Construindo o diagrama de Venn, temos:



O número de pessoas que não possuem fator Rh^+ nem o tipo O é:

$$200 - (80 + 80 + 20) = 20.$$

$$a) P(Rh^+) = \frac{80 + 80}{200} = \frac{4}{5}$$

$$b) P(O^c) = 1 - P(O)$$

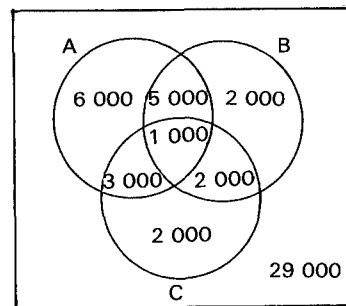
$$\text{Mas } P(O) = \frac{20 + 80}{200} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Daí, } P(O^c) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$c) P(Rh^+ \cup O) = P(Rh^+) + P(O) - P(Rh^+ \cap O)$$

$$P(Rh^+ \cup O) = \frac{4}{5} + \frac{1}{2} - \frac{80}{200} = \frac{9}{10}.$$

386. Construindo o diagrama, temos:



O número de pessoas que não lêem nenhum dos jornais é:

$$50\,000 - (6\,000 + 5\,000 + 2\,000 + 1\,000 + 2\,000 + 3\,000 + 2\,000) = 29\,000$$

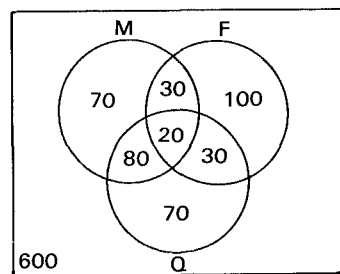
a) A probabilidade pedida é:

$$\frac{21\,000}{50\,000} = \frac{21}{50}.$$

b) A probabilidade pedida é:

$$\frac{6\,000 + 2\,000 + 2\,000}{50\,000} = \frac{1}{5}.$$

387. Construindo o diagrama, temos:



$$a) \frac{70}{1\,000} = \frac{7}{100}$$

$$b) \frac{100}{1\,000} = \frac{1}{10}$$

$$c) \frac{80 + 20}{1\,000} = \frac{1}{10}.$$

388. $\Omega = \{(K, K, K); (K, K, C); (K, C, K); (K, C, C); (C, C, C); (C, C, K); (C, K, C); (C, K, K)\}$; $\# \Omega = 8$

$$a) A = \{(C, C, C)\}. P(A) = \frac{1}{8}.$$

$$b) B = \{(K, K, C); (K, C, K); (C, K, K)\}. P(B) = \frac{3}{8}.$$

$$c) C = \Omega - \{(C, C, C)\}, \#C = 7. \text{ Daí, } P(C) = \frac{7}{8}.$$

$$d) D = \{(K, K, K)\}. P(D) = \frac{1}{8}.$$

$$e) E = \{(K, K, C); (K, C, K); (K, C, C); (C, C, C); (C, C, K); (C, K, C); (C, K, K)\}.$$

$$\text{Daí, } P(E) = \frac{7}{8}.$$

389. Pelo princípio fundamental da contagem, $\# \Omega = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Seja o evento A : ocorra cara 3 vezes. Temos:

$$A = \{(K, K, K, C); (K, K, C, K); (K, C, K, K); (C, K, K, K)\}.$$

$$\text{Daí, } P(A) = \frac{\#A}{\# \Omega} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

390. Cada extração corresponde a uma combinação das 52 cartas tomadas 5 a 5, isto é, $\# \Omega = \binom{52}{5}$.

Podemos escolher 3 entre 4 valetes de $\binom{4}{3} = 4$ formas e 2 dentre as 48 restantes de $\binom{48}{2}$ maneiras. Ao todo, há $4 \cdot \binom{48}{2}$ possibilidades.

$$\text{Assim, a probabilidade pedida é: } \frac{4 \binom{48}{2}}{\binom{52}{5}}.$$

392. O número de possibilidades de extrações a serem feitas é o número de permutações possíveis das 6 bolinhas, isto é, $\# \Omega = P_6 = 6! = 720$. Por outro lado, a única sequência crescente dentre as 720 é (1, 2, 3, 4, 5, 6). Assim, a probabilidade pedida é: $\frac{1}{720}$.

393. Como o sorteio é feito com reposição, pelo princípio fundamental da contagem o número total de possibilidades é $9 \cdot 9 = 81$.

O evento que nos interessa é formado pelos pares (a, b) , em que $b > a$. Temos: Se o 1º número sorteado é 1, há 8 possibilidades: (1, 2), (1, 3), (1, 4), ..., (1, 9). Se o 1º número sorteado é 2, há 7 possibilidades: (2, 3), (2, 4), ..., (2, 9).

⋮
Se o 1º número sorteado é 8, há 1 possibilidade.

Ao todo, há, então: $8 + 7 + 6 + \dots + 2 + 1 = 36$ possibilidades.

$$\text{Logo, a probabilidade pedida é: } \frac{36}{81} = \frac{4}{9}.$$

394. O número de possibilidades de sortear 3 etiquetas quaisquer da urna sem reposição é $C_{n,3} = \binom{n}{3}$, isto é, $\# \Omega = \binom{n}{3}$.

O evento A que nos interessa é aquele em que os números contidos nas etiquetas são consecutivos. Podemos ter:

$$\left. \begin{array}{l} \{1, 2, 3\} \\ \{2, 3, 4\} \\ \vdots \\ \{n-2, n-1, n\} \end{array} \right\} \text{ Isto é, } \#A = n-2.$$

$$\text{Assim, } P(A) = \frac{\#A}{\# \Omega} = \frac{n-2}{\binom{n}{3}} = \frac{n-2}{\frac{n!}{3!(n-3)!}} =$$

$$= \frac{(n-2) 6 (n-3)!}{n(n-1)(n-2)(n-3)!} = \frac{6}{n(n-1)}.$$

395. O número de elementos do espaço amostral é o número de formas de dispor 8 pessoas em uma fila, que corresponde a $P_8 = 8!$

a) Considerando-os como "uma só pessoa", haverá 7! permutações. Como os elementos do par podem permutar entre si, ao todo temos 2! 7! possibilidades.

$$\text{Assim, a probabilidade pedida é: } \frac{2! 7!}{8!} = \frac{1}{4}.$$

b) Tendo em vista o item anterior, a probabilidade de Pedro e Sílvia ficarem separados é $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

396. Através de argumento idêntico ao anterior, a probabilidade pedida é:

$$\frac{P_3 \cdot P_7}{P_9} = \frac{3! 7!}{9!} = \frac{1}{12}.$$

397. $\# \Omega = A_{1\,000, 10}$, pois interessa a ordem em que os números são sorteados.

a) O evento A que nos interessa é formado pelas seqüências do tipo (341, —, —, —, —, —, —, —, —, —). $\#A = A_{999, 9}$.

$$\text{Logo, } P(A) = \frac{\#A}{\# \Omega} = \frac{A_{999, 9}}{A_{1\,000, 10}} = \frac{1}{1\,000}.$$

b) O evento B que nos interessa é formado pelas seqüências do tipo (—, —, —, 341, —, —, —, —, —, —). $\#B = A_{999, 9}$ e $P(B) = \frac{1}{1\,000}$.

c) Analogamente aos anteriores, $P(C) = \frac{1}{1\,000}$.

398. Como cada resultado pode apresentar *cara* e *coroa*, pelo princípio fundamental da contagem temos:

$\# \Omega = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{10 \text{ vezes}} = 2^{10}$. O número de maneiras de observar 5 caras e 5 coroas cor-

responde ao número de permutações de 10 faces, com 5 repetições de cara e 5 repetições de coroa.

Assim, a probabilidade pedida é: $\frac{{}^{(5,5)}P_{10}}{2^{10}} = \frac{63}{256}$.

399. O número de maneiras de a pessoa concentrar a atenção de dois determinados números é $C_{6,2} = 15$, pois pensar, por exemplo, nos números 2 e 5 é o mesmo que pensar em 5 e 2. Se o adivinho estiver realmente “chutando”, em uma única ocasião ele acertará os números pensados. Daí, a probabilidade pedida é $\frac{1}{15}$.

401. Como a extração é feita com reposição, o número total de resultados possíveis é $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$.

O número de possibilidades de extrair todas as bolas com números diferentes equivale ao número de arranjos das 6 bolas tomadas 4 a 4, isto é, $A_{6,4} = 360$.

Dessa forma, a probabilidade pedida é: $\frac{360}{1296} = \frac{5}{18}$.

402. Temos:

$$\# \Omega = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_{5 \text{ vezes}} = 10^5.$$

O evento A que nos interessa é aquele formado por cinco algarismos diferentes. Como vimos, $\#A = A_{10,5}$.

Assim, a probabilidade pedida é: $\frac{A_{10,5}}{10^5} = \frac{30240}{10^5}$.

403. Notando que a extração é feita com reposição, pelo princípio fundamental da contagem, $\# \Omega = 8 \cdot 8 = 64$.

Podemos ter, pelo princípio fundamental da contagem:

(VV): o número de possibilidades é $5 \cdot 5 = 25$

(VB): o número de possibilidades é $5 \cdot 3 = 15$

(BV): o número de possibilidades é $3 \cdot 5 = 15$

(BB): o número de possibilidades é $3 \cdot 3 = 9$

a) $P(VV) = \frac{25}{64}$.

b) $P(BB) = \frac{9}{64}$.

404. Analogamente ao anterior, temos: $\# \Omega = 10 \cdot 10 = 100$.

Podemos observar:

(V, V): $5 \cdot 5 = 25$ possibilidades

(V, B): $5 \cdot 3 = 15$ possibilidades

(V, P): $5 \cdot 2 = 10$ possibilidades

(B, B): $3 \cdot 3 = 9$ possibilidades

(B, V): $3 \cdot 5 = 15$ possibilidades

(B, P): $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades

(P, P): $2 \cdot 2 = 4$ possibilidades

(P, B): $2 \cdot 3 = 6$ possibilidades

(P, V): $2 \cdot 5 = 10$ possibilidades

a) $P(VV) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

b) Há $25 + 10 + 4 + 10 = 49$ possibilidades de não se observar nenhuma branca. Então, a probabilidade é $\frac{49}{100}$.

c) Há $25 + 15 + 9 + 15 = 64$ possibilidades. Assim, a probabilidade é $\frac{64}{100} = \frac{16}{25}$.

405. O número de possibilidades de serem extraídas 3 cartas sucessivamente, sem reposição, é $C_{52,3}$, pois não importa a ordem das cartas sorteadas. O número de maneiras de selecionar três cartas de “paus” é o número de combinações possíveis das 13 cartas de “paus” tomadas 3 a 3.

Logo, a probabilidade pedida é:

$$\frac{C_{13,3}}{C_{52,3}} = \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{11}{850}.$$

406. Temos: $\# \Omega = \binom{52}{2} = 1326$.

a) O número de formas de selecionar 2 entre os 4 ases possíveis é $C_{4,2} = 6$.

Daí, a probabilidade é: $\frac{6}{1326} = \frac{1}{221}$.

b) Existem $\binom{4}{1} = 4$ maneiras de selecionar um ás e $\binom{4}{1} = 4$ maneiras de selecionar um rei. Assim, há 16 possibilidades de selecionar o par “ás e rei”.

Daí, a probabilidade é $\frac{16}{1326} = \frac{8}{663}$.

407. Temos: $\# \Omega = \binom{12}{2} = 66$.

a) Existem $\binom{7}{2}$ maneiras de escolher 2 bolas brancas. Assim, a probabilidade é

$$\frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{7}{22}.$$

b) Analogamente ao anterior, a probabilidade é: $\frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{5}{33}.$

c) Uma das 5 bolas vermelhas deverá se “juntar” a uma das 7 bolas brancas, totalizando 35 possibilidades. Logo, a probabilidade é $\frac{35}{66}.$

408. Selecionar 10 peças de um lote de 200 pode ser feito de $\binom{200}{10}$ modos distintos.

a) Há $\binom{180}{10}$ maneiras de selecionar as 10 peças boas.

Então, a probabilidade é: $\frac{\binom{180}{10}}{\binom{200}{10}}.$

b) Há $\binom{20}{10}$ maneiras de selecionar as 10 defeituosas.

Então, a probabilidade é: $\frac{\binom{20}{10}}{\binom{200}{10}}.$

c) Existem $\binom{180}{5}$ “grupos” de 5 peças boas. Cada “grupo” desses irá se “juntar” a um dos $\binom{20}{5}$ “grupos” de defeituosas. Ao todo há, portanto, $\binom{180}{5} \binom{20}{5}$ possibilidades. Logo, a probabilidade pedida é:

$$\frac{\binom{180}{5} \binom{20}{5}}{\binom{200}{10}}.$$

409. Analogamente ao anterior, $\# \Omega = \binom{60}{5}.$

a) $\frac{\binom{50}{5}}{\binom{60}{5}}$

b) $\frac{\binom{10}{5}}{\binom{60}{5}}$

c) $\frac{\binom{50}{2} \binom{10}{3}}{\binom{60}{5}}$

d) A probabilidade de não serem observadas peças defeituosas é, pelo item a, $\frac{\binom{50}{5}}{\binom{60}{5}}.$ Logo, a probabilidade de ser observada ao menos uma peça defei-

tuosa é $1 - \frac{\binom{50}{5}}{\binom{60}{5}}.$

410. Sejam $\underbrace{\{A_1, A_2\}}_{\text{rasgadas}}, \{B_1, B_2\}, \dots, \{J_1, J_2\}$ os 10 pares de meias. O número de manei-

ras de selecionar duas quaisquer meias é $\binom{20}{2} = 190.$ Excluindo o par de meias rasgadas, há 9 possibilidades de ter pés do mesmo par: $\{B_1, B_2\}, \{C_1, C_2\}, \dots, \{J_1, J_2\}.$

Então, a probabilidade pedida é $\frac{9}{190}.$

411. Temos $\binom{100}{5}$ maneiras de escolher as camisas, isto é, $\# \Omega = \binom{100}{5}.$

O evento E que nos interessa é aquele em que uma das outras 20 camisas “se junta” a um dos $\binom{80}{4}$ “grupos” de 4 camisas da marca $A.$ Logo,

$$\# E = 20 \binom{80}{4}.$$

$$\text{Daí, } P(E) = \frac{\# E}{\# \Omega} = \frac{20 \binom{80}{4}}{\binom{100}{5}}.$$

412. $\# \Omega = \binom{52}{5}.$

a) O evento A pedido é formado pelas combinações em que uma das 48 outras cartas “se juntam” à única combinação em que os 4 reis aparecem, isto é, $\# A = 48.$

$$\text{Logo, } P(A) = \frac{48}{\binom{52}{5}}.$$

b) Excluindo os reis, há $\binom{48}{5}$ modos de selecionar as outras cartas. Logo, a probabilidade é: $\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}.$

$$\text{c) } 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}.$$

$$413. \# \Omega = \binom{52}{2}.$$

Existem $\binom{39}{2}$ maneiras de escolher cartas que não sejam de “copas”. Então, a probabilidade de que pelo menos uma das cartas seja de “copas” é:

$$1 - \frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{15}{34}.$$

414. O número de maneiras de escolher 5 quaisquer pessoas é $C_{10,5} = \binom{10}{5}$. O número de combinações em que Regina comparece é $\binom{9}{4}$. Assim, a probabilidade de pedida é: $\frac{\binom{9}{4}}{\binom{10}{5}}.$

415. Podemos escolher as 10 000 declarações a serem analisadas de $\binom{100\ 000}{10\ 000}$ modos, pois não importa a ordem das declarações escolhidas. Por outro lado, existem $\binom{99\ 999}{9\ 999}$ maneiras de escolher as declarações, incluindo a do Sr. K.

$$\text{Assim, a probabilidade é: } \frac{\binom{99\ 999}{9\ 999}}{\binom{100\ 000}{10\ 000}} = \frac{1}{10}.$$

416. As 10 pessoas podem ser escolhidas de $\binom{100}{10}$ maneiras.

Incluindo a pessoa portadora da moléstia, podemos ter $\binom{99}{9}$ “grupos”.

$$\text{Logo, a probabilidade pedida é: } \frac{\binom{99}{9}}{\binom{100}{10}} = \frac{1}{10}.$$

418. Podemos selecionar 3 quaisquer dessas meninas de $\binom{10}{3} = 120$ modos.

O evento A que nos interessa é formado por todas as combinações tais que em cada uma há 2 ou 3 meninas de olhos azuis. Daí $\#A = \binom{4}{2}\binom{6}{1} + \binom{4}{3} = 40$.

$$\text{Assim, } P(A) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}.$$

419. O número de formas de extrair 5 bolas quaisquer da urna é $\binom{9}{5} = 126 = \# \Omega$.

O evento A que nos interessa é observar 2 brancas, 1 vermelha e 2 azuis.

As brancas podem ser escolhidas de $\binom{4}{2} = 6$ formas; a vermelha de $\binom{2}{1} = 2$ formas e as azuis de $\binom{3}{2} = 3$ formas. Daí, $\#A = 6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

$$\text{Logo, } P(A) = \frac{\#A}{\# \Omega} = \frac{36}{126} = \frac{2}{7}.$$

421. $\# \Omega = \binom{52}{2}$. O número de maneiras de escolher 2 cartas de mesmo naipe é $4 \cdot \binom{13}{2}$. Logo, a probabilidade de que as cartas escolhidas apresentem naipes diferentes é: $1 - \frac{4 \cdot \binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{13}{17}.$

422. $\# \Omega = \binom{52}{2}$. Sejam os eventos:

$$A: \text{ ocorrem 2 reis } \#A = \binom{4}{2}$$

$$B: \text{ ocorrem 2 cartas de copas } \#B = \binom{13}{2}.$$

$A \cap B$: ocorrem 2 reis e 2 cartas de copas. $A \cap B = \emptyset$, pois só existe um rei de copas. Assim $P(A \cap B) = 0$.

$$\text{Daí, } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} + \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{14}{221}.$$

- 423.** O número de maneiras de dispor 10 pessoas em uma fila é $P_{10} = 10!$. O evento E que nos interessa é formado por todas as configurações em que há exatamente 4 pessoas entre Jonas (J) e César (C). Temos:

J _ _ _ _ C _ _ _ _
 _ J _ _ _ _ C _ _ _ _
 _ _ J _ _ _ _ C _ _ _ _
 _ _ _ J _ _ _ _ C _ _ _ _
 _ _ _ _ J _ _ _ _ C

Levando em consideração que para cada uma das disposições acima há $8!$ possibilidades (pois corresponde à permutação das 8 pessoas restantes) e que Jonas e César podem trocar de lugar, vem que $\#E = 5 \cdot 8! \cdot 2!$,

$$\text{donde } P(E) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{9}.$$

- 424.** Como para cada passo há 2 possibilidades (para cima e para a direita), pelo princípio fundamental da contagem há $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{10}$ possibilidades.

10 vezes

O número de maneiras de atingir o ponto (7, 3) corresponde ao número de permutações de 10 passos, com 7 e 3 repetições. Logo, a probabilidade pedida é:

$$\frac{\binom{7, 3}{10}}{2^{10}} = \frac{15}{128}.$$

- 425.** a) O espaço amostral reduzido é $B = \{2, 4, 6\}$. Seja o evento A : o número obtido é maior ou igual a 5; $A = \{6\}$.

$$\text{Assim, } P(A|B) = \frac{1}{3}.$$

- b) O espaço amostral reduzido é $B = \{5, 6\}$. O evento A que nos interessa é $A = \{6\}$. Logo, $P(A|B) = \frac{1}{2}$.

- c) O espaço amostral reduzido é $B = \{1, 3, 5\}$. Seja o evento A : o número obtido é menor que 3; $A = \{1\}$. Daí, $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

- d) O espaço amostral reduzido é $B = \{1, 2\}$. O evento A que nos interessa é $A = \{1\}$. Logo, $P(A|B) = \frac{1}{2}$.

$$\mathbf{426.} \Omega = \{1, 2, \dots, 99, 100\}; \# \Omega = 100.$$

- a) Seja o evento A : o número obtido é par; $A = \{2, 4, \dots, 98, 100\}$.

$$\text{Daí, } P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

- b) Sejam os eventos:

A : o número obtido é par; $A = \{2, 4, \dots, 98, 100\}$

B : o número obtido é menor que 50; $B = \{1, 2, \dots, 49\}$ e $P(B) = \frac{49}{100}$

$A \cap B$: o número obtido é par e menor que 50; $A \cap B = \{2, 4, \dots, 48\}$ e

$$P(A \cap B) = \frac{24}{100}.$$

$$\text{Logo, } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{24}{100}}{\frac{49}{100}} = \frac{24}{49}.$$

- c) Sejam os eventos:

A : o número obtido é divisível por 5; $A = \{5, 10, \dots, 95, 100\}$.

B : o número obtido é par; $B = \{2, 4, \dots, 98, 100\}$ e $P(B) = \frac{50}{100}$.

$A \cap B$: o número obtido é divisível por 5 e par; $A \cap B = \{10, 20, \dots, 90, 100\}$

$$\text{e } P(A \cap B) = \frac{10}{100}.$$

$$\text{Assim, } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{50}{100}} = \frac{1}{5}.$$

- 427.** Seja o par (a, b) , em que a representa o número obtido no lançamento de d_1 e b o número obtido no lançamento de d_2 .

- a) O espaço amostral reduzido é:

$B = \{(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6)\}$. O evento A que nos interessa é $A = \{(2, 4)\}$. Logo, $P(A|B) = \frac{1}{6}$.

$$\text{Logo, } P(A|B) = \frac{1}{6}.$$

- b) O espaço amostral reduzido é $B = \{(1, 5); (2, 4); (3, 3); (4, 2); (5, 1)\}$. O evento A que nos interessa é $A = \{(2, 4)\}$. Assim, $P(A|B) = \frac{1}{5}$.

$$\text{Assim, } P(A|B) = \frac{1}{5}.$$

- c) O espaço amostral reduzido é:

$B = \{(1, 2); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 2); (4, 2); (5, 2); (6, 2)\}$.

O evento A que nos interessa é

$A = \{(1, 2); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 2); (4, 2)\}$. Temos, então:

$$P(A|B) = \frac{7}{11}.$$

d) O espaço amostral reduzido é $B = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (3, 1)\}$.
O evento A formado por todos os pares de B tais que a soma dos pontos é menor ou igual a 6 é o próprio B , isto é, A é o evento certo. Daí, $P(A|B) = 1$.

e) O espaço amostral reduzido é $B = \Omega - \{(4, 6); (5, 5); (5, 6); (6, 4); (6, 5); (6, 6)\}$ em que $\Omega = \{(1, 1); (1, 2); \dots; (6, 5); (6, 6)\}$, $\# \Omega = 36$ e $\# B = 30$. O evento A que nos interessa é formado por todos os pares de B tais que o máximo dos números observados é 5, isto é,
 $A = \{(1, 5); (2, 5); (3, 5); (4, 5); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4)\}$. Daí,
 $P(A|B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

428. Seja o par (a, b) , em que a representa o número obtido em t_1 e b o número obtido em t_2 .

Temos: $\Omega = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); \dots; (4, 4)\}$ e $\# \Omega = 4 \cdot 4 = 16$.
Seja B o evento: a soma dos pontos obtidos é maior que 5.

$B = \{(2, 4); (3, 3); (3, 4); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}$; $P(B) = \frac{\# B}{\# \Omega} = \frac{6}{16}$.

a) Sejam os eventos A : o número observado em t_1 é 4;

$A = \{(4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}$

e $A \cap B = \{(4, 2); (4, 3); (4, 4)\}$ e $P(A \cap B) = \frac{3}{16}$.

Logo, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{1}{2}$.

b) Sejam os eventos:

A : o número observado em t_1 é 3; $A = \{(3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4)\}$

$A \cap B = \{(3, 3); (3, 4)\}$ e $P(A \cap B) = \frac{2}{16}$.

Daí, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{1}{3}$.

429. a) 1) Seja A o evento: a garota escolhida é loira; $\# A = 17 + 9 = 26$.

Daí, $P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{26}{50} = \frac{13}{25}$.

2) Seja A o evento: a garota escolhida é morena de olhos azuis; $\# A = 4$.

Logo, $P(A) = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$.

3) Sejam os eventos: A : a garota escolhida é morena; $P(A) = \frac{18}{50}$.

B : a garota escolhida tem olhos azuis;

$P(B) = \frac{24}{50}$.

$A \cap B$: a garota escolhida é morena de olhos

azuis; $P(A \cap B) = \frac{4}{50}$.

Daí, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{18}{50} + \frac{24}{50} - \frac{4}{50} = \frac{19}{25}$.

b) Sejam os eventos:

A : a garota escolhida é morena.

B : a garota escolhida tem olhos castanhos; $P(B) = \frac{26}{50}$.

$A \cap B$: a garota escolhida é morena de olhos castanhos; $P(A \cap B) = \frac{14}{50}$.

Logo, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{14}{50}}{\frac{26}{50}} = \frac{7}{13}$.

430. Com os dados do problema é possível construir a tabela seguinte:

curso	sexo	
	masculino	feminino
Física	20	30
Química	10	10
Matemática	20	10

Sejam os eventos:

A : o aluno sorteado é do curso de Matemática.

B : o aluno sorteado é do sexo feminino; $P(B) = \frac{50}{100}$.

$A \cap B$: o aluno sorteado é do sexo feminino e do curso de Matemática;

$P(A \cap B) = \frac{10}{100}$.

Logo, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{50}{100}} = \frac{1}{5}$.

431. $\Omega = \{2p, 2c, 2o, 2e, \dots, Kp, Kc, Ko, Ke, Ap, Ac, Ao, Ae\}$ e $\#\Omega = 52$.

Sejam os eventos:

A: o número da carta é 6; $A = \{6p, 6c, 6o, 6e\}$.

B: o número da carta está entre 4 e 10; $B = \{4p, 4c, 4o, 4e, \dots, 10p, 10c, 10o, 10e\}$;

$$P(B) = \frac{28}{52}.$$

$$A \cap B = A = \{6p, 6c, 6o, 6e\} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{4}{52}.$$

$$\text{Daí, } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{52}}{\frac{28}{52}} = \frac{1}{7}.$$

432. O número de elementos do espaço amostral é o número de combinações das 5 pessoas tomadas 3 a 3, isto é, $\#\Omega = \binom{5}{3} = 10$.

Sejam os eventos:

A: César pertence à comissão.

B: Denise não pertence à comissão; $\#B = \binom{4}{3} = 4$ e $P(B) = \frac{4}{10}$.

$A \cap B$: César pertence e Denise não pertence à comissão; $\#A \cap B = \binom{3}{2} = 3$ e

$$P(A \cap B) = \frac{3}{10}.$$

$$\text{Daí, } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}.$$

433. O espaço amostral reduzido (com a informação de que há 3 apartamentos ocupados) é tal que $\#\Omega = \binom{6}{3} = 20$.

O evento A que nos interessa é aquele em que há exatamente um apartamento ocupado por andar.

Pelo princípio fundamental da contagem, $\#A = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

$$\text{Assim, } P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

$$434. \text{ a) } P(A|A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

$$\text{b) } P(A^c|A) = \frac{P(A^c \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$$

- c) Se A e B são mutuamente exclusivos, $A \cap B = \emptyset$ e $P(A \cap B) = 0$.

$$\text{Daí, } P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0.$$

$$\text{d) } P(A \cup B|A) = \frac{P[(A \cup B) \cap A]}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

- e) Da hipótese, $P(A \cap B) = 0$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

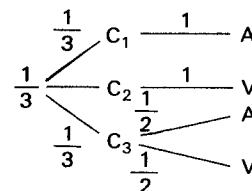
Temos, então:

$$P(A|A \cup B) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P[A \cup B]} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$

435. Construiremos o diagrama da árvore, notando que a 1ª “coluna” do diagrama representa o cartão retirado pelo juiz e a 2ª “coluna” representa a face mostrada ao jogador.

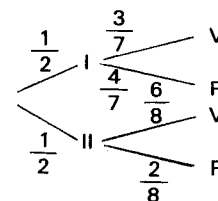
Sejam ainda:

C_1 : cartão todo amarelo, C_2 : cartão todo vermelho e C_3 : cartão vermelho de um lado e amarelo de outro.



O evento que nos interessa é $C_3 \cap A$. Pelo teorema da multiplicação, essa probabilidade é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

436. Construindo o diagrama da árvore, temos:



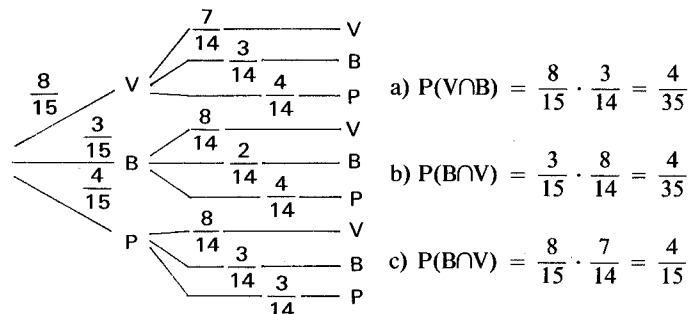
Pelo teorema da multiplicação, vem:

$$\text{a) } P(I \cap V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

$$\text{b) } P(I \cap P) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$$

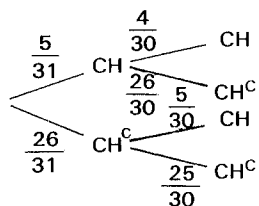
$$\begin{aligned} \text{c) } P(\text{II} \cap \text{V}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = \frac{3}{8} \\ \text{d) } P(\text{II} \cap \text{P}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

437. Neste caso, indicaremos a primeira e a segunda bolas escolhidas, respectivamente, na 1.^a e 2.^a “colunas” do diagrama.



438. Neste diagrama, a 1.^a “coluna” representa as possibilidades para o 1.^o dia e a 2.^a “coluna” para o 2.^o dia.

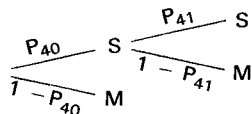
Representaremos: chover por CH e não chover por CH^C. Temos:



O evento que nos interessa é CH^C ∩ CH^C. Pelo teorema da multiplicação,

$$P(\text{CH}^C \cap \text{CH}^C) = \frac{26}{31} \cdot \frac{25}{30} = \frac{65}{93}.$$

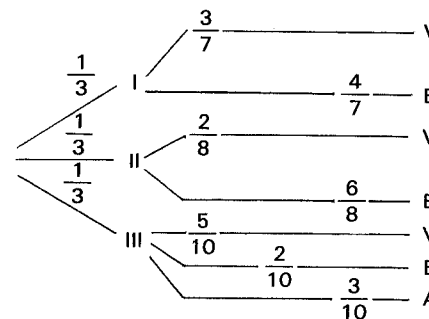
439. a) P_{40} : a probabilidade de que uma pessoa com 40 anos sobreviva mais um ano.
 b) $2P_{40}$: a probabilidade de que uma pessoa com 40 anos sobreviva mais 2 anos.
 c) Vamos construir o diagrama da árvore para uma pessoa com 40 anos. Na 1.^a coluna indicaremos as possibilidades de sobrevivência até os 41 anos e na 2.^a coluna, as possibilidades de sobrevivência até os 42 anos. Indicaremos sobrevivência por S e morte por M. Temos:



O evento que nos interessa é aquele em que uma pessoa com 40 anos sobreviva mais 2 anos, isto é,

$$2P_{40} = P(S \cap S) = P_{40} \cdot P_{41}, \text{ que é o que queríamos demonstrar.}$$

440. Construindo o diagrama da árvore, temos:



Pelo teorema da probabilidade total, temos:

$$\text{a) } P(V) = P(\text{I} \cap V) + P(\text{II} \cap V) + P(\text{III} \cap V), \text{ isto é,}$$

$$P(V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{10} = \frac{11}{28}.$$

$$\text{b) } P(B) = P(\text{I} \cap B) + P(\text{II} \cap B) + P(\text{III} \cap B), \text{ isto é,}$$

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10} = \frac{71}{140}.$$

$$\text{c) } P(A) = P(\text{III} \cap A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{10}.$$

441. No primeiro experimento, a probabilidade de saírem duas bolas pretas é

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{x}{10} = \frac{x}{100}.$$

No segundo experimento, a urna terá $(1 + x)$ bolas pretas e $(19 - x)$ bolas brancas, num total de 20 bolas.

O número de maneiras de extrair 2 quaisquer bolas é $\binom{20}{2}$.

O número de maneiras de extrair 2 bolas pretas é $\binom{1+x}{2}$.

Assim, a probabilidade de saírem 2 bolas pretas é

$$\frac{\binom{1+x}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{(1+x)x}{20 \cdot 19}.$$

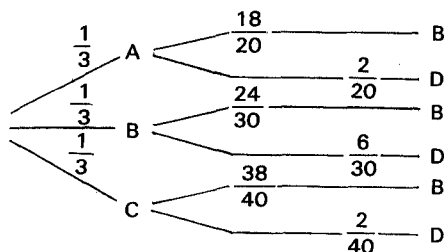
Devemos ter:

$$\frac{(1+x)x}{20 \cdot 19} > \frac{x}{100} \Leftrightarrow x > \frac{14}{5}.$$

Como x deve ser natural, vem que $x = 3$.

- 442.** Na 1ª coluna do diagrama representaremos a fábrica e na 2ª coluna, a qualidade da peça: boa (B) ou defeituosa (D).

Temos:



Pelo teorema da probabilidade total, temos:

$$\begin{aligned} a) P(B) &= P(A \cap B) + P(B \cap B) + P(C \cap B) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{20} + \frac{1}{3} \cdot \frac{24}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{38}{40} = \frac{53}{60}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{20} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{40} = \frac{7}{60}. \end{aligned}$$

- 443.** Em cada tentativa podemos ter:

$\{(K, K, K); (K, C, K); (K, C, C); (K, K, C); (C, C, C); (C, K, C); (C, C, K); (C, K, K)\}$.

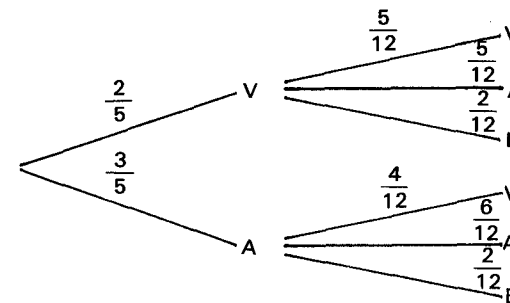
Um sucesso ocorrerá se ocorrer o evento:

$\{(K, K, K); (K, C, K); (K, K, C); (C, K, K)\}$.

Assim, a probabilidade de obtermos um sucesso é $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Pelo teorema da multiplicação, a probabilidade de obtermos 2 sucessos nas duas primeiras tentativas é, então, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

- 444.** Construiremos um diagrama da árvore em que a 1ª “coluna” representa a cor da bola extraída da urna I e a 2ª “coluna” representa a cor da bola extraída da urna II. Notemos, por exemplo, que se a bola extraída da urna I é vermelha, a configuração da urna II passa a ser: 5 vermelhas, 5 amarelas e 2 brancas. Temos, então:



Pelo teorema da probabilidade total, vem:

$$a) P(V) = P(V \cap V) + P(A \cap V) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{12} = \frac{11}{30}.$$

$$b) P(A) = P(V \cap A) + P(A \cap A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12} + \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{12} = \frac{7}{15}.$$

$$c) P(B) = P(V \cap B) + P(A \cap B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{12} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

- 445.** Sabemos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A), \text{ isto é, } 0,8 = P(A) \cdot P(B|A) \quad (I)$$

e

$$P(B^c \cap A) = P(A) \cdot P(B^c|A), \text{ isto é, } 0,1 = P(A) \cdot P(B^c|A) \quad (II)$$

Notando que $P(B|A) + P(B^c|A) = 1$, em (II), temos:

$$0,1 = P(A) \cdot [1 - P(B|A)] \Leftrightarrow 0,1 = P(A) - P(A) \cdot P(B|A).$$

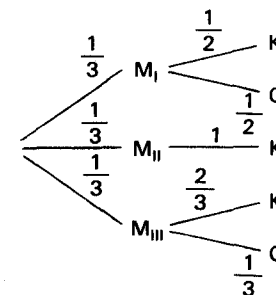
Substituindo (I) nessa última expressão, vem:

$$0,1 = P(A) - 0,8 \Leftrightarrow P(A) = 0,9.$$

- 447.** Inicialmente, para a moeda III, temos:

$$P(K) + P(C) = 1 \Leftrightarrow 2P(C) + P(C) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P(C) = 1/3 \\ e \\ P(K) = 2/3. \end{cases}$$

Construiremos agora o diagrama da árvore:



$$a) P(M_I \cap K) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

$$b) P(K) = P(M_I \cap K) + P(M_{II} \cap K) + P(M_{III} \cap K) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{18}.$$

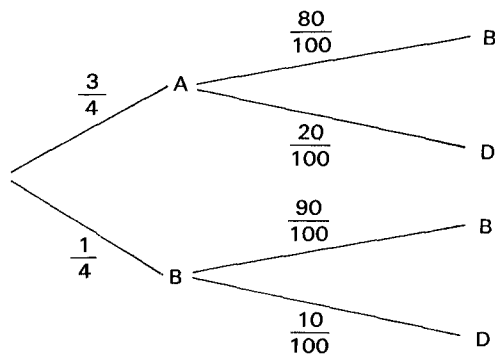
$$c) P(M_I | K) = \frac{P(M_I \cap K)}{P(K)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{18}} = \frac{3}{13}.$$

448. Uma peça selecionada ao acaso do estoque pode ter sido produzida pela máquina A ou pela máquina B . Do enunciado, temos: $P(A) = 3 P(B)$.

$$\text{Como } P(A) + P(B) = 1, \text{ vem: } P(B) = \frac{1}{4} \text{ e } P(A) = \frac{3}{4}.$$

Construindo o diagrama da árvore:

(na 2ª coluna, indicaremos B : boa e D : defeituosa)



Temos:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{80}{100} = \frac{3}{5} \text{ (é a probabilidade de observarmos)} \\ \text{máquina } A \text{ e peça boa} \\ P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{80}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{90}{100} = \frac{33}{40} \text{ (é a probabilidade} \\ \text{de observarmos uma peça boa)} \end{cases}$$

$$\text{Daí, } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{33}{40}} = \frac{8}{11}.$$

$$450. a) P(X|C) = \frac{P(X \cap C)}{P(C)} = \frac{0,5 \cdot 0,8}{0,855} \approx 46,7\%$$

$$b) P(Z|C) = \frac{P(Z \cap C)}{P(C)} = \frac{0,1 \cdot 0,95}{0,855} \approx 11,1\%$$

451. Vamos construir uma tabela em que:

A representa o indivíduo portador da moléstia;

A^C representa o não portador da moléstia;

SIM representa o resultado afirmativo do exame para detectar a moléstia;

$NÃO$ representa o resultado negativo.

Além disso, notemos que a tabela tem seus valores expressos em termos relativos (isto é, em termos percentuais):

moléstia	A	A^C
sangue		
SIM	$0,8 \cdot 0,02 = 0,016$	$0,05 \cdot 0,98 = 0,049$
NÃO	$0,2 \cdot 0,02 = 0,004$	$0,95 \cdot 0,98 = 0,931$

A probabilidade pedida é $P(A|SIM)$.

Temos:

$$P(A|SIM) = \frac{P(A \cap SIM)}{P(SIM)} = \frac{0,016}{0,016 + 0,049} = \frac{16}{65} \approx 24,6\%$$

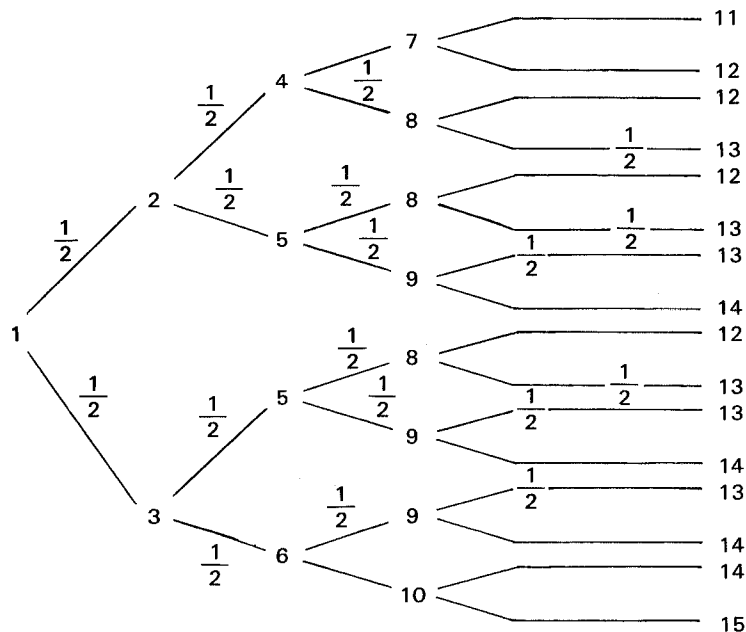
452. Seja n o número de homens e n o número de mulheres dessa população. Indicaremos daltônico por D e não daltônico por D^C . Podemos construir a seguinte tabela (de forma análoga à tabela anterior):

sexo	M	F
D	$0,05n$	$0,0025n$
D^C	$0,95n$	$0,9975n$

Assim,

$$P(F|D) = \frac{P(F \cap D)}{P(D)} = \frac{0,0025n}{0,05n + 0,0025n} \approx 0,0476 \approx 4,8\%.$$

453. Vamos construir o diagrama da árvore, sendo que em cada "coluna" do diagrama representamos os passos possíveis a partir do passo anterior dado:



Pelo teorema da multiplicação,

$$P(13) = P(1 \cap 2 \cap 4 \cap 8 \cap 13) + P(1 \cap 2 \cap 5 \cap 8 \cap 13) + P(1 \cap 2 \cap 5 \cap 9 \cap 13) + P(1 \cap 3 \cap 5 \cap 8 \cap 13) + P(1 \cap 3 \cap 5 \cap 9 \cap 13) + P(1 \cap 3 \cap 6 \cap 9 \cap 13)$$

$$P(13) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}.$$

455. a) Se A e B são independentes, é claro que B e A também são independentes. Pela proposição anterior, B^C e A são independentes.
b) Do item anterior, A e B^C são independentes. Pelo exercício anterior, A^C e B^C também são independentes.

456. A e B mutuamente exclusivos $\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$.

Temos: $\begin{cases} P(A \cap B) = 0 \\ P(A) \cdot P(B) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ logo, $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$ e os eventos A e B são dependentes.

457. a) $P(H) = \frac{\#H}{\#\Omega} = \frac{4}{10} = 0,4$.

b) $P(M) = \frac{\#M}{\#\Omega} = \frac{6}{10} = 0,6$.

- c) $H \cap M$ é o evento no qual uma mosca pousa ao mesmo tempo num homem e numa mulher, isto é, $H \cap M = \emptyset$.
Logo $P(H \cap M) = 0 \neq P(H) \cdot P(M)$, o que mostra que $P(H)$ e $P(M)$ não são independentes.

458. $\Omega = \{2p, 2o, 2e, 2c, \dots, Ap, Ao, Ae, Ac\}$; $\#\Omega = 52$

Temos:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}; P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(C) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}.$$

- a) Seja o evento $A \cap B$: a carta é um rei de copas,

$$A \cap B = \{Kc\} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{1}{52}.$$

Por outro lado, $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{52}$, o que mostra que A e B são independentes.

- b) $A \cap C$: a carta extraída é um rei de copas ou uma dama de copas,

$$A \cap C = \{Qc, Kc\} \text{ e } P(A \cap C) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}.$$

Como $P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{13} = \frac{1}{26} = P(A \cap C)$, A e C são independentes.

- c) $B \cap C$: a carta extraída é um rei, $B \cap C = \{Kc, Kp, Ke, Ko\}$,

$$P(B \cap C) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Por outro lado, $P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{13} \cdot \frac{2}{13} = \frac{2}{169} \neq \frac{1}{13} = P(B \cap C)$.

Logo, B e C não são independentes.

459. a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, pois A e B resolvem o problema de forma independente. Assim, $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{11}{15}$.

c) $P(A^C \cap B^C) = P(A^C) \cdot P(B^C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

d) $P(A \cap B^C) = P(A) \cdot P(B^C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$.

$$e) P(B \cap A^c) = P(B) \cdot P(A^c) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}.$$

$$460. a) P(H \cap M) = P(H) \cdot P(M) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2.$$

$$b) P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7.$$

462. Sejam:

$$P(L): \text{probabilidade de Luís convidar Alice}; P(L) = \frac{1}{4}$$

$$P(C): \text{probabilidade de César convidar Alice}; P(C) = \frac{2}{5}$$

$$P(O): \text{probabilidade de Olavo convidar Alice}; P(O) = \frac{1}{2}$$

$$a) P(L \cap C \cap O) = P(L) \cdot P(C) \cdot P(O) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}, \text{ pois os eventos são independentes.}$$

$$b) P(L \cup C \cup O) = P(L) + P(C) + P(O) - P(L \cap C) - P(L \cap O) - P(C \cap O) + P(L \cap C \cap O). \text{ Notando novamente eventos independentes, vem:}$$

$$P(L \cup C \cup O) = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{31}{40}.$$

$$c) P(L^c \cap C^c \cap O^c) = P(L^c) \cdot P(C^c) \cdot P(O^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{40}.$$

463. Como o circuito está ligado em série, ele funcionará somente se C_1 , C_2 e C_3 funcionarem simultaneamente, isto é, $P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,8 = 0,648$. Então, a probabilidade de não passar corrente pelo circuito é: $1 - 0,648 = 0,352$.

464. a) A probabilidade de não se obter o número 6 no lançamento de um dado é $\frac{5}{6}$. Como os lançamentos dos dados são independentes entre si, a probabilidade de não se observar face 6 no lançamento de um dado 4 vezes é $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$. Logo, a probabilidade de se obter pelo menos um "6" é $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177$.

b) Jogando-se dois dados simultaneamente uma vez, a probabilidade de não se observar o par (6, 6) é $\frac{35}{36}$. Lançando-os 24 vezes, pelo fato de termos even-

tos independentes, a probabilidade passa a ser de $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Logo, a probabilidade de se obter pelo menos 1 par de "6" é $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,4914$.

Assim, a) é mais provável.

465. Temos: $P(K) = P(C) = \frac{1}{2}$, no lançamento de uma moeda.

a) Como os lançamentos são independentes entre si, temos que:

$$\underbrace{P(K \cap K \cap \dots \cap K)}_{10 \text{ vezes}} = \underbrace{P(K) \cdot P(K) \cdot \dots \cdot P(K)}_{10 \text{ vezes}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}.$$

$$b) \text{ Analogamente, } \underbrace{P(C \cap C \dots \cap C)}_{10 \text{ vezes}} = \underbrace{P(C) \cdot P(C) \cdot \dots \cdot P(C)}_{10 \text{ vezes}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}.$$

c) Como cada lançamento pode resultar em cara ou coroa, pelo princípio fundamental da contagem, o número de elementos do espaço amostral é $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{10} = 1024$. O evento A que nos interessa é observarmos

4 caras e 6 coroas. O número de elementos do evento A é o número de permutações de 10 elementos com 4 repetições de "K" e 6 repetições de "C", isto é,

$$P_{10}^{(4,6)} = \frac{10!}{4!6!} = 210.$$

$$\text{Logo, } P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{210}{1024} = \frac{105}{512}.$$

466. Temos: $P_k = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = \binom{10}{k} 0,4^k 0,6^{10-k}$.

$$a) P_0 = \binom{10}{0} (0,4)^0 \cdot (0,6)^{10-0} \approx 0,006.$$

$$b) P_4 = \binom{10}{4} (0,4)^4 \cdot (0,6)^{10-4} \approx 0,251.$$

$$c) P_6 = \binom{10}{6} (0,4)^6 \cdot (0,6)^{10-6} \approx 0,111.$$

$$d) P_8 = \binom{10}{8} (0,4)^8 \cdot (0,6)^{10-8} \approx 0,011.$$

467. Seja sucesso a ocorrência de cara. Temos: $p = q = \frac{1}{2}$ e $n = 6$.

Daí, $P_k = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k} = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^6$. O que nos interessa é a probabilidade de observarmos exatamente duas caras, isto é, $P_2 = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64} \cong 0,234$.

468. Consideremos sucesso o evento: a face observada é o “4”. Temos $p = \frac{1}{6}$ e $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Como $P_k = \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$, a probabilidade de que o “4” apareça exatamente 3 vezes é: $P_3 = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{3\,888}$.

469. Para cada tentativa de resolver o problema, temos:
sucesso: o estudante acerta o problema; $p = 0,8$.
fracasso: o estudante erra o problema; $q = 0,2$.
Estamos interessados em calcular P_6 . Temos:

$$P_6 = \binom{8}{6} (0,8)^6 \cdot (0,2)^2 \cong 0,294.$$

470. Para cada tiro dado, temos:
sucesso: a pessoa acerta o alvo; $p = 0,2$.
fracasso: a pessoa erra o alvo; $q = 0,8$.

Temos: $P_k = \binom{8}{k} (0,2)^k (0,8)^{8-k}$. A probabilidade pedida é P_4 :

$$P_4 = \binom{8}{4} (0,2)^4 \cdot (0,8)^4 \cong 0,046.$$

471. Consideremos:
sucesso: um homem de 45 anos sobrevive mais 20 anos; $p = 0,6$.
fracasso: um homem de 45 anos não sobrevive mais 20 anos; $q = 0,4$.
Estamos interessados em calcular P_4 . Temos:

$$P_4 = \binom{5}{4} (0,6)^4 \cdot (0,4)^1 = 0,259.$$

472. Para cada questão, temos:
sucesso: o aluno acerta a questão.
fracasso: o aluno erra a questão.

Como o aluno está “chutando”, temos que $p = q = \frac{1}{2}$.

O que nos interessa é calcular P_{10} . Temos:

$$P_{10} = \binom{20}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20-10} \cong 0,176.$$

473. Em cada lançamento, temos:

sucesso: ocorre cara; $p = \frac{1}{2}$.

fracasso: ocorre coroa; $q = \frac{1}{2}$.

Temos $P_k = \binom{2n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$. Assim, a probabilidade de observarmos

n caras é: $P_n = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

475. Em cada lançamento da moeda, temos:

sucesso: ocorre cara; $p = \frac{1}{2}$.

fracasso: ocorre coroa; $q = \frac{1}{2}$.

A probabilidade de observarmos pelo menos 8 caras em 10 lançamentos é:

$$P_8 + P_9 + P_{10} = \binom{10}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{7}{128}.$$

476. Para cada partida disputada, temos:

sucesso: o time vence; $p = \frac{3}{5}$.

fracasso: o time perde; $q = \frac{2}{5}$.

Estamos interessados em calcular $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$.

Ora, como $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$, a probabilidade pedida é:

$$1 - P_0 = 1 - \binom{5}{0} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 = 1 - \frac{32}{3\,125} = \frac{3\,093}{3\,125}.$$

478. A probabilidade pedida é:

$$P_3 + P_4 = \binom{4}{3} (0,4)^3 \cdot (0,6)^1 + \binom{4}{4} (0,4)^4 \cdot (0,6)^0 = 0,1536 + 0,0256 = 0,1792.$$

479. Para cada questão respondida, consideremos:

sucesso: o aluno acerta a questão.

fracasso: o aluno erra a questão.

Como o aluno está “chutando”, temos que $p = q = \frac{1}{2}$.

O que nos interessa calcular é: $P_3 + P_4 + P_5 + P_6$. Temos:

$$\binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{6}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{21}{32}.$$

480. Consideremos:

sucesso: o eleitor é favorável ao candidato; $p = 0,3$.

fracasso: o eleitor não é favorável ao candidato; $q = 0,7$.

Estamos interessados em calcular:

$$P(6) + P(7) + P(8) + P(9) + P(10) =$$

$$\binom{10}{6}(0,3)^6(0,7)^{10-6} + \dots + \binom{10}{10}(0,3)^{10}(0,7)^{10-10} = \sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i}(0,3)^i(0,7)^{10-i}.$$

481. Sejam:

sucesso: o filho nascido é do sexo masculino; $p = 0,5$.

fracasso: o filho nascido é do sexo feminino; $q = 0,5$.

$$a) P_5 = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-5} = \frac{1}{32}.$$

$$b) P_3 = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5}{16}.$$

c) Podemos ter “um” ou “nenhum” do sexo masculino, isto é, estamos interessados em:

$$P_1 + P_0 = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{16}.$$

d) Como o nascimento de um filho é independente do nascimento dos outros, a probabilidade pedida é $p = 0,5$.