

Derivada de ordem superior.

1

Definição: A derivada de ordem n ou n -ésima derivada de uma função f é uma função denotada por $f^{(n)}(x)$ sendo definida de forma recorrente por

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

onde $f^{(n-1)}(x)$ é a de ordem $(n-1)$.

Note que $f^{(0)}(x) = f(x)$ e $f'(x) = [f^{(0)}(x)]'$ e para $n \leq 2$ temos que $f^{(1)}(x) = f'(x)$ e $f^{(2)}(x) = f''(x)$.

obs: Pela definição recorrente é necessário que as derivadas $f^{(k)}(x)$ com $0 < k \leq n-1$ existam (convergir) para que exista $f^{(n)}(x)$.

Outras notações:

$$\frac{d^n f}{dx^n}, D_x^n(f), \frac{d^n y}{dx^n}, y^{(n)}(x), D^n(f)$$

Exemplos: Calcule as derivadas de ordem superior:

a) $f''(x)$ para $f(x) = x^{10}$.

b) $g^{(3)}(x)$ para $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

c) $R^{(50)}(x)$ para $R(x) = e^x$.

d) $S^{(4)}(x)$ para $S(x) = \ln x$.

e) $T^{(k)}(x)$ para $T(x) = x^n$ com $k \leq n$ e $k > n$.

f) $F''(x)$ para $F(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}}\right) \cdot (x^8 - \sqrt[6]{x^7})$.

Séries de Taylor

Definição: O polinômio de Taylor de grau n de uma função f em um ponto a é denotado e definido por

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$$

onde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

obs: É necessário que a função f possua todas as derivadas de ordem até n contínuas em a , isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} f^{(j)}(x) = f^{(j)}(a)$$

para $j = 0, \dots, n$.

Definição: A expansão em série de Taylor de uma função f no ponto a é definida da seguinte forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$$

onde $a_k = f^{(k)}(a)/k!$.

obs: Os polinômios de Taylor nas proximidades do ponto a tem seus gráficos aproximadamente ao gráfico de f .

(3)

Pelo teorema fundamental do cálculo conseguimos mostrar que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

onde

$$R_n(x) = (-1)^n \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (t-x)^n dt$$

é o resto, ou erro de aproximação, em sua forma integral.

Exemplos: Encontre a expansão em série de Taylor das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x) = e^x$ em $a=0$

b) $g(x) = \cos x$ em $a=0$

c) $h(x) = \frac{1}{1-x}$ em $a=0$

d) $F(x) = \ln x$ em $a=1$

e) $G(x) = \frac{1}{1+x^2}$ em $a=0$

f) $S(x) = \sqrt{x}$ em $a=4$.