EXEMPLO DO LIVRO PARA AUXILIAR VOCÊS NA SOLUÇÃO

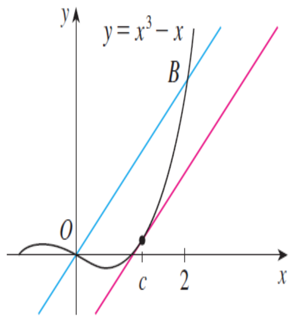
EXEMPLO 3 Para ilustrarmos o Teorema do Valor Médio com uma função específica, vamos considerar $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Uma vez que f é uma função polinomial, então ela é contínua e derivável para todo x; logo, é certamente contínua em $[0, 2]$ e derivável em $(0, 2)$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c em $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Agora $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ e $f'(x) = 3x^2 - 1$, e essa equação fica

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

o que dá $c^2 = \frac{4}{3}$, isto é, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Mas c deve estar em $(0, 2)$, então, $c = 2/\sqrt{3}$. A Figura



9–12 Verifique se a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

9. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $[0, 2]$

10. $f(x) = x^3 + x - 1$, $[0, 2]$

11. $f(x) = e^{-2x}$, $[0, 3]$

12. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$, $[1, 4]$

Nos Exercícios de 5 a 10, comprove que as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas pela função dada no intervalo indicado. Ache, então, um valor adequado de c que satisfaça a conclusão do teorema do valor médio.

5. $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $[0, 1]$
6. $f(x) = x^3 + x^2 - x$; $[-2, 1]$
7. $f(x) = x^{2/3}$; $[0, 1]$

15. Seja $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor c em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

EXEMPLO DO LIVRO PARA AUXILIAR VOCÊS NA SOLUÇÃO

EXEMPLO 5 Suponha que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leqslant 5$ para todos os valores de x. Quão grande $f(2)$ pode ser?

SOLUÇÃO Foi-nos dado que f é derivável (e, portanto, contínua) em toda parte. Em particular, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio ao intervalo $[0, 2]$. Existe, então, um número c tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

logo

$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Foi-nos dado que $f'(x) \leqslant 5$ para todo x; assim, sabemos que $f'(c) \leqslant 5$. Multiplicando por 2 ambos os lados dessa desigualdade, temos $2f'(c) \leqslant 10$, logo

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leqslant -3 + 10 = 7$$

O maior valor possível para $f(2)$ é 7.

23. Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, quão pequeno $f(4)$ pode ser?

24. Suponha que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todos os valores de x. Mostre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

25. Existe uma função f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ e $f'(x) \leqslant 2$ para todo x?

EXEMPLO DO LIVRO PARA AUXILIAR VOCÊS NA SOLUÇÃO

Se é sabido que $\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ e $\int_0^8 f(x)\,dx = 12$, encontre $\int_8^{10} f(x)\,dx$

$$\int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

logo,

$$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^8 f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

47. Escreva como uma integral única na forma $\int_a^b f(x)\,dx$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$$

48. Se $\int_1^5 f(x)\,dx = 12$ e $\int_4^5 f(x)\,dx = 3{,}6$, encontre $\int_1^4 f(x)\,dx$.

49. Se $\int_0^9 f(x)\,dx = 37$ e $\int_0^9 g(x)\,dx = 16$, encontre $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,dx$.

Propriedades Comparativas da Integral

6. Se $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Se $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

EXEMPLO DO LIVRO PARA AUXILIAR VOCÊS NA SOLUÇÃO

Use a Propriedade 8 para estimar o valor de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(x) = e^{-x^2}$ é uma função decrescente no intervalo [0, 1], seu máximo absoluto é $M = f(0) = 1$ e seu mínimo absoluto é $m = f(1) = e^{-1}$. Assim, utilizando a Propriedade 8,

$$e^{-1}(1-0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1-0)$$

ou

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Use a Propriedade 8 para estimar o valor da integral.

59. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

60. $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

61. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx$

62. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\,dx$