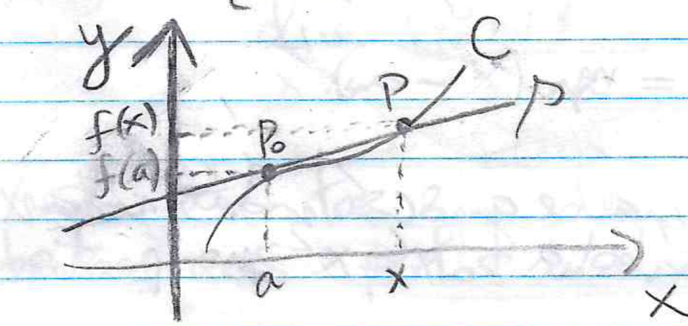
Derivadas

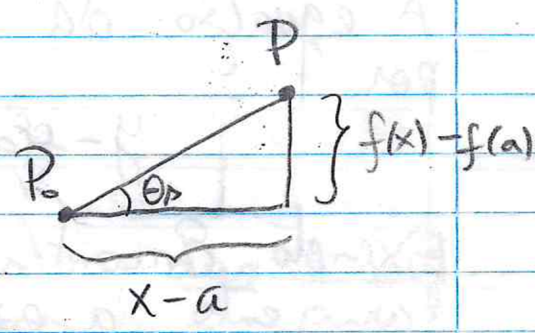
Seja $f = f(x)$ uma função cujo gráfico é a curva $C = G(f)$. Para um ponto $P(a, f(a)) \in C$, queremos encontrar a reta r tangente a C que passa por P_0.

Considere agora um ponto $P(x, f(x)) \in C$, onde $x \neq a$, próximo de P_0. O coeficiente angular da reta secante s que passa por P e P_0 é definido por

$$m_s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (m_s = tg\,\theta_s)$$

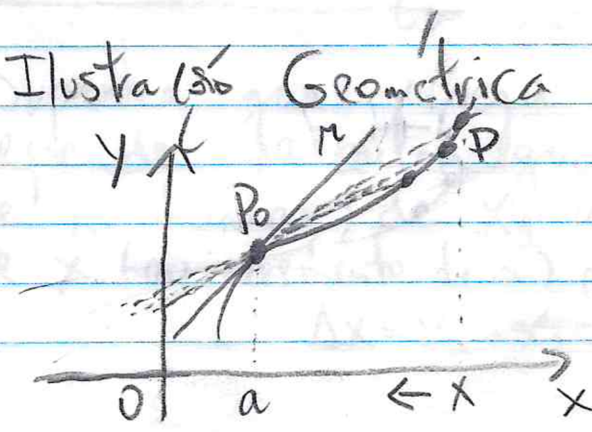
Ilustração Geométrica





Vamos agora fazer P aproximar-se de P_0, com isso a reta secante s aproxima-se da reta tangente r, portanto, m_s aproxima-se de m_r, onde m_r é o coeficiente angular de r.

Ilustração Geométrica



Logo o coeficiente angular de r é dado por

$$m_r = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (1)$$

obs: O limite (1) é equivalente ao seguinte limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A equação da reta tangente r é dada por

$$y - f(a) = m_r(x - a)$$

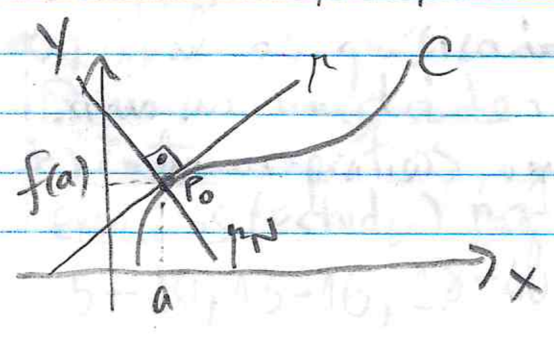
Exemplo: Encontra a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

A equação da reta normal ao gráfico de uma função f no ponto $P_0(a, f(a))$ é dada por

$$y - f(a) = m_N(x - a)$$

onde

$$m_r \cdot m_N = -1$$



Exemplo: Encontre as equações das retas tangente e normal à hipérbole $y = 3/x$ no ponto $(3,1)$.

Derivadas

Definição: A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (2)$$

se o limite existir (convergência).

obs: Temos que o limite em (2) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemplo: Encontre as derivadas das funções abaixo nos pontos indicados.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 9$ em $a = 2$.

b) $g(x) = \sqrt{x}$ em $a = 4$.

Taxas de variação

Suponha que y seja uma quantidade que depende de outra quantidade x, isto é, $y = f(x)$. Se x variar de x_1 a x_2, então a variação de x (ou incremento de x) será denotada por

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

O quociente das variações de y e x respectivamente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é denominado taxa média de variação de y com relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$.

Um caso particular é o coeficiente angular da reta secante que passa por P_0 e P.

Quando o intervalo $[x_1, x_2]$ tem comprimento próximo de zero, isto é, $\Delta x \to 0$, então o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é denominado a taxa instantânea de variação de y com relação a x no ponto x_1. Isso representa a derivada de $y = f(x)$ no ponto x_1.

Exemplo: Um fabricante produz peças de tecido com tamanho fixo. O custo, em dólares, da produção de x metros de certo tecido é $C = f(x)$.

a) Qual o significado da derivada $C'(x)$? Quais as unidades?

b) Em termos práticos, o que significa dizer que $f'(1000) = 9$?

Exercícios (Estudar) Pág 137-139

5-10, 13-16, 18-40 e 45-48.

Derivada de uma função

Definição: Seja f uma função tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (1)$$

exista. Denotaremos por $f'(x)$ o limite (1) sendo a <u>função derivada de $f(x)$</u> com domínio sendo $x \in D(f)$ tais que (1) exista.

obs: Vimos anteriormente que $f'(x)$ representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

<u>Exemplo</u>: Encontre as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - x$ b) $g(x) = \sqrt{x}$

obs: Outras notações para a derivada de uma função f são

$$\frac{df}{dx}, \; D_x f, \; D_x y, \; y', \; \frac{dy}{dx} \text{ e } Df$$

sendo D e $\frac{d}{dx}$ os operadores diferenciais.

Definição: Uma função f é derivável ou diferenciável em a se $f'(a)$ existir. É derivável ou diferenciável em um intervalo aberto se for em cada ponto do intervalo