GELSON IEZZI

COMPLEMENTO PARA
O PROFESSOR

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR 7

GEOMETRIA ANALÍTICA

ATUAL EDITORA

Copyright desta edição:
SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2000.
Av. Marquês de São Vicente, 1697 — Barra Funda
01139-904 — São Paulo — SP
Fone: (0xx11) 3613-3000
Fax: (0xx11) 3611-3308 — Fax Vendas: (0xx11) 3611-3268
www.editorasaraiva.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Fundamentos de matemática elementar : complemento para o professor. — São Paulo: Atual, 1993.

Conteúdo: v. 1. Conjuntos e funções / Gelson Iezzi, Carlos Murakami. — v. 2. Logaritmos / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Carlos Murakami. — v. 3. Trigonometria / Gelson Iezzi. — v. 4. Seqüências, matrizes, determinantes, sistemas / Gelson Iezzi, Samuel Hazzan. — v. 5. Combinatória, probabilidade / Samuel Hazzan. — v. 6. Complexos, polinômios, equações — v. 7. Geometria analítica / Gelson Iezzi. — v. 8. Limites, derivadas, noções de integral — Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Nilson José Machado. — v. 9. Geometria plana — v. 10. Geometria espacial : posição e métrica / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo.

1. Matemática (2.º grau) 2. Matemática (2.º grau) — Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) — Testes I. Iezzi, Gelson, 1939- II. Murakami, Carlos, 1943- III. Dolce, Osvaldo, 1938- IV. Hazzan, Samuel, 1946- V. Machado, Nilson José, 1947- VI. Pompeo, José Nicolau, 1945-

93-1795 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino de 2.º grau 510.7

Complemento para o Professor — Fundamentos de Matemática Elementar 7
Editora: Bárbara Ferreira Arena
Editor de campo: Valdir Montanari
Coordenadora editorial: Sandra Lucia Abrano
Chefe de preparação de texto e revisão: Noé Ribeiro
Coordenadora de revisão: Maria Luiza Xavier Souto
Revisores: Alice Kobayashi
Magna Reimberg Teobaldo
Maria Cecília Fernandes Vannucchi
Maria da Penha Faria
Vera Lúcia Pereira Della Rosa
Editor de arte: Zildo Braz
Chefe de arte: G[illegible] Alonso Arruda
Assistentes de arte: Lu Bevilacqua Ghion
Ricardo Yorio
Rosi Meire Martins Ortega
Gerente de produção: Antonio Cabello Q. Filho
Coordenadora de produção: Silvia Regina E. Almeida
Produção gráfica: José Rogerio L. de Simone
Maurício T. de Moraes
Capa: Ettore Bottini
Foto de capa: Hilton Ribeiro
Consultora técnica: Irene Torrano Filisetti
Fotolito: Binhos/H.O. Panaroni
Composição e arte-final: Paika Realizações Gráficas

Visite nosso *site*: www.atualeditora.com.br
Central de atendimento ao professor: (0xx11) 3613-3030

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 7, Geometria Analítica, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos às sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos à professora Irene Torrano Filisetti a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

Sumário

Capítulo I – Coordenadas cartesianas no plano

2. Calculando as medidas dos lados, temos:
$d_{AB} = \sqrt{26}$; $d_{BC} = \sqrt{72}$; $d_{AC} = \sqrt{26}$.
Como $d_{AB} = d_{AC}$, o triângulo é isósceles.
Como $(\sqrt{72})^2 > (\sqrt{26})^2 + (\sqrt{26})^2$, o triângulo é obtusângulo.

8. Para o ΔABC ser retângulo em B, devemos ter:
$d^2_{AC} = d^2_{AB} + d^2_{BC}$.
$$5^2 + (x - 5)^2 = 4^2 + (-6)^2 + 1^2 + (x + 1)^2 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$$

10. A é eqüidistante de B e C se, e somente se, $d_{AB} = d_{AC}$.
$$\sqrt{(x + 1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + 1^2} \Rightarrow x = 2$$

11. P pertence ao eixo das abscissas, portanto $P(x, 0)$.
P é eqüidistante de A e B, então $d_{PA} = d_{PB}$.
$$\sqrt{(x - 2)^2 + 1^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (-5)^2} \Rightarrow x = \frac{29}{2}$$
Portanto: $P\left(\frac{29}{2}, 0\right)$.

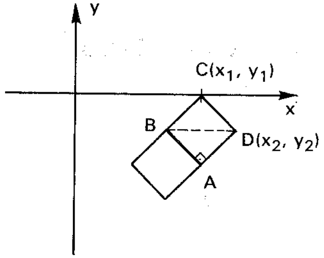
12. P pertence à bissetriz b_{24}, então $P(x, -x)$.
P é eqüidistante de A e B, portanto $d_{PA} = d_{PB}$.
$$\sqrt{x^2 + (-x - 1)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (-x - 3)^2} \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$
Portanto: $P\left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

14. $M(a, 0)$; $N(0, a)$; $P(x, y)$
ΔMNP é equilátero se, e somente se, $d_{PM} \overset{(1)}{=} d_{PN} \overset{(2)}{=} d_{MN}$.
(1) $d_{PM} = d_{PN} \Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - a)^2} \Rightarrow x = y$
(2) $d_{PN} = d_{MN} \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - a)^2} = \sqrt{(-a)^2 + a^2} \Rightarrow x = \frac{a \pm \sqrt{3}}{2}$

Há, portanto, duas possibilidades:

$$P\left(\frac{a+\sqrt{3}}{2}, \frac{a+\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou } P\left(\frac{a-\sqrt{3}}{2}, \frac{a-\sqrt{3}}{2}\right).$$

16.



Calculamos, inicialmente, o valor de d_{AB}:

$d_{AB} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Calculemos d_{AD}:

$d_{AD} = \sqrt{(x_2 - 5)^2 + (y_2 + 2)^2}$.

Como $d_{AD} = d_{AB}$ (os lados de um quadrado têm medidas iguais), vem:

$\sqrt{(x_2 - 5)^2 + (y_2 + 2)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2^2 + y_2^2 - 10x_2 + 4y_2 + 27 = 0$ (1)

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABD, vem:

$d_{BD}^2 = d_{AB}^2 + d_{AD}^2$.

$(x_2 - 4)^2 + (y_2 + 1)^2 = 2 + (x_2 - 5)^2 + (y_2 + 2)^2$

De onde vem: $x_2 - y_2 = 7$, ou seja, $x_2 = y_2 + 7$ (2)

Substituindo (2) em (1), temos:

$y_2^2 + 14y_2 + 49 + y_2^2 - 10(y_2 + 7) + 4y_2 + 27 = 0$

ou seja: $y_2^2 + 4y_2 + 3 = 0 \Rightarrow (y_2 = -1$ ou $y_2 = -3) \Rightarrow (x_2 = 6$ ou $x_2 = 4)$.

Portanto, $D(x_2, y_2) = D(6, -1)$ ou $D(x_2, y_2) = (4, -3)$.

Analogamente, aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABC, temos: $d_{AC}^2 = d_{AB}^2 + d_{BC}^2$.

$(x_1 - 5)^2 + (y_1 + 2)^2 = 2 + (x_1 - 4)^2 + (y_1 + 1)^2 \Rightarrow x_1 = y_1 + 5$ (3)

Como $d_{BC} = \sqrt{(x_1 - 4)^2 + (y_1 + 1)^2} = \sqrt{2}$

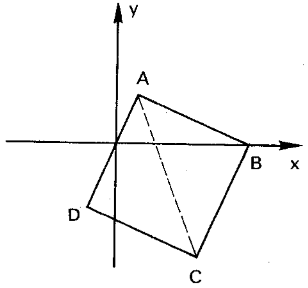
$x_1^2 + y_1^2 - 8x_1 + 2y_1 + 15 = 0$ (4)

Substituindo (3) em (4), temos:

$y_1^2 = 2y_1 = 0 \Rightarrow (y_1 = 0$ ou $y_1 = -2) \Rightarrow (x_1 = 5$ ou $x_1 = 3)$

Portanto: $C(x_1, y_1) = (5, 0)$ ou $C(x_1, y_1) = C(3, -2)$.

17.



A(1, 2); C(3, −4)

$x_B > x_D$

AC é diagonal do $\square ABCD$.

Aplicamos o teorema de Pitágoras no ΔABC:

$d_{AC}^2 = d_{BC}^2 + d_{AB}^2$ (I)

Utilizamos a condição de igualdade das medidas dos lados do quadrado:

$d_{BC} = d_{BA}$ (II)

(I) $2^2 + (-6)^2 = (x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (x - 1)^2 + (y - 2)^2$

$2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 10 = 0$ (1)

(II) $\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}$

$x - 3y = 5 \Rightarrow x = 3y + 5$ (2)

Substituindo (2) em (1), vem:

$2(9y^2 + 30y + 25) + 2y^2 - 8(3y + 5) + 4y - 10 = 0$

$y^2 + 2y = 0 \Rightarrow (y = 0$ ou $y = -2) \Rightarrow (x = 5$ ou $x = -1)$

Portanto, temos os pontos: *(5, 0)* e *(−1, −2)*.

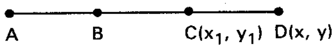
Como $x_B > x_D$, então *B(5, 0)* e *D(−1, −2)*.

19. A (5, 3); B(−1, −3); C(x, 0)

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3}$$

Utilizando a coordenada y, vem: $r = \frac{0 - 3}{-3 - 0} = 1$.

22. $A(4, -2)$; $B\left(\frac{2}{3}, -1\right)$



B é ponto médio de *AC*. Então:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3} = \frac{4 + x_1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-8}{3} \\ -1 = \frac{-2 + y_1}{2} \Rightarrow y_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ ponto } C\left(\frac{-8}{3}, 0\right)$$

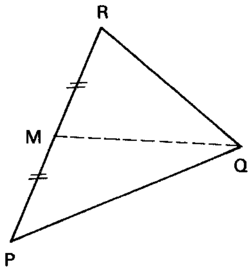
C é ponto médio de *BD*. Assim:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-8}{3} = \frac{x + \frac{2}{3}}{2} \Rightarrow x = -6 \\ 0 = \frac{y - 1}{2} \Rightarrow y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ ponto } D(-6, 1)$$

O segmento deve ser prolongado até o ponto *D(−6, 1)*.

24. *M* é ponto médio de *PR*.

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \frac{-5 + 1}{2} = -2 \\ y_M = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(-2, \frac{3}{2}\right)$$



Portanto: $d_{QM} = \sqrt{(x_Q - x_M)^2 + (y_Q - y_M)^2} =$

$= \sqrt{(5)^2 + \left(\frac{-11}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{221}}{2}$.

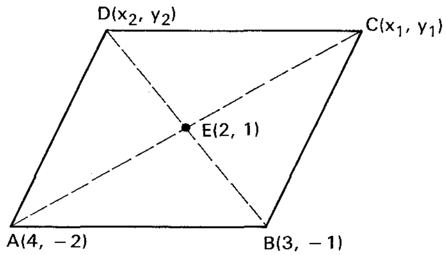
25. As diagonais de um paralelogramo interceptam-se em seu ponto médio. Assim:
E é ponto médio de AC:

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{x_1 + 4}{2} \Rightarrow x_1 = 0 \\ 1 = \dfrac{y_1 - 2}{2} \Rightarrow y_1 = 4 \end{cases}$$

Então, $C(0, 4)$.
E é ponto médio de BD:

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{x_2 + 3}{2} \Rightarrow x_2 = 1 \\ 1 = \dfrac{y_2 - 1}{2} \Rightarrow y_2 = 3 \end{cases}$$

Então, $D(1, 3)$.



27. M é ponto médio de AB:

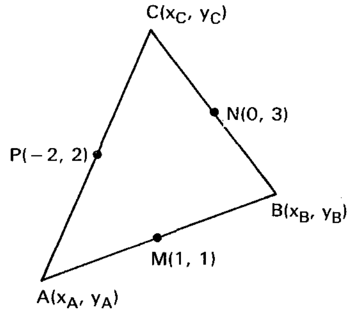
$$\begin{cases} 1 = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_A + x_B = 2 \\ 1 = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_A + y_B = 2 \end{cases}$$

N é ponto médio de BC:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_B + x_C = 0 \\ 3 = \dfrac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_B + y_C = 6 \end{cases}$$

P é ponto médio de AC:

$$\begin{cases} -2 = \dfrac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_A + x_C = -4 \\ 2 = \dfrac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_A + y_C = 4 \end{cases}$$



Temos, então, dois sistemas:

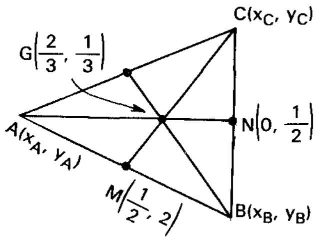
$$\text{I} \begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_B + x_C = 0 \\ x_A + x_C = -4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{II} \begin{cases} y_A + y_B = 2 \\ y_B + y_C = 6 \\ y_A + y_C = 4 \end{cases}$$

Resolvendo I, vem: $x_A = -1$, $x_B = 3$ e $x_C = -3$.
Resolvendo II, vem: $y_A = 0$, $y_B = 2$ e $y_C = 4$.
Portanto: $A(-1, 0)$; $B(3, 2)$ e $C(-3, 4)$.

30. $G\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ é baricentro.
Então G divide $\overrightarrow{AN}$ na razão 2.

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GN}} = 2 \text{ e daí:}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_A - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - 0} = 2 \Rightarrow x_A = 2 \\ \dfrac{y_A - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow y_A = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(2, 0)$$



M é ponto médio de AB, então:

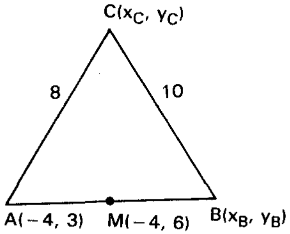
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} = \dfrac{2 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = -1 \\ 2 = \dfrac{0 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow B(-1, 4)$$

N é ponto médio de BC, então:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \dfrac{-1 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 1 \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{4 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow C(1, -3)$$

32. M é ponto médio de AB, então:

$$\left.\begin{array}{l} -4 = \dfrac{-4 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = -4 \\ 6 = \dfrac{3 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow B(-4, 9)$$



Temos, ainda:

$$d_{BC} = \sqrt{(x_C + 4)^2 + (y_C - 9)^2} = 10 \quad (1)$$
$$d_{AC} = \sqrt{(x_C + 4)^2 + (y_C - 3)^2} = 8 \quad (2)$$

$$\begin{cases} (1)\ x_C^2 + 8x_C + 16 + y_C^2 - 18y_C + 81 = 100 \\ (2)\ x_C^2 + 8x_C + 16 + y_C^2 - 6y_C + 9 = 64 \end{cases}$$

Multiplicando (2) por -1 e adicionando membro a membro, vem:

$$-12y_C + 72 = 36 \Rightarrow y_C = 3.$$

Substituindo $y_C = 3$ em (2), vem:

$$x_C^2 + 8x_C - 48 = 0 \Rightarrow x_C = 4 \text{ ou } x_C = -12.$$

Então: $C(4, 3)$ ou $C(-12, 3)$.

34. Com a teoria dada até aqui é possível resolver a questão de duas maneiras:

Solução 1

Calcular as medidas dos quatro lados e verificar se lados opostos têm medidas iguais.

Usando a fórmula da distância, encontramos:

$d_{AB} = \sqrt{10}$ $\quad d_{BC} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad d_{CD} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ $\quad$ e $\quad d_{DA} = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$

e constatamos que $d_{AB} \neq d_{CD}$ e $d_{BC} \neq d_{DA}$.

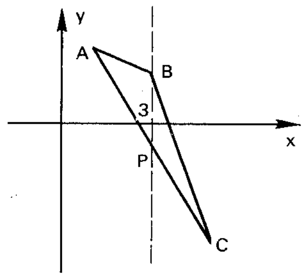
Solução 2

Calcular os pontos médios das diagonais e verificar se coincidem. Usando a fórmula do ponto médio, encontramos:

$M = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ (médio de AC) e $N = \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{2}\right)$ (médio de BD) e constatamos que $M \neq N$.

Conclusão: usando qualquer um dos dois processos, verificamos que *ABCD* não é paralelogramo.

41.



Tendo abscissa *3*, igual à de *B*, *P* só poderá ser interior ao lado *AC*.
Impondo *P*, *A* e *C* colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} 3 & m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ e daí } m = -1.$$

49. Chamemos de *P(a, b)* um ponto da reta *AB* que é eqüidistante dos eixos cartesianos. *P* está obrigado às seguintes condições:

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } |a| = |b|$$

e daí vem:

$$2a - 7b + 17 = 0 \ (1) \quad \text{e} \quad a = \pm b \ (2)$$

Resolvendo esse sistema, obtemos

$$a = b = \frac{17}{5} \quad \text{ou} \quad a = -\frac{17}{9} = -b$$

e, portanto, $P\left(\frac{17}{5}, \frac{17}{5}\right)$ ou $P\left(-\frac{17}{9}, \frac{17}{9}\right)$.

Capítulo II — Equação da reta

59. A reta $\overleftrightarrow{AO}$ é a bissetriz dos quadrantes pares; portanto, $y_A = -x_A$ ①

$d_{AO} = \sqrt{2} \Rightarrow x_A^2 + y_A^2 = 2$ ②

Resolvendo o sistema formado por ① e ②, vem $A(-1, 1)$.

A reta $\overleftrightarrow{BO}$ é a bissetriz dos quadrantes ímpares; portanto, $y_B = x_B$ ③

$d_{BO} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x_B^2 + y_B^2 = 8$ ④

Resolvendo o sistema formado por ③ e ④, vem $B(2, 2)$.

Portanto, a reta que passa pelos pontos *A* e *B* é:

$$x - 3y + 4 = 0.$$

62. A reta *r* passa pelos pontos (4, 0) e (0, 2); então, r: $x + 2y - 4 = 0$ ①.

A reta *s* passa pelos pontos (1, 0) e (0, 4); então, s: $4x + y - 4 = 0$ ②.

Resolvendo o sistema formado por ① e ②, vem $x = \frac{4}{7}$ e $y = \frac{12}{7}$.

Portanto, $r \cap s = \left\{\left(\frac{4}{7}, \frac{12}{7}\right)\right\}$.

64. Resolvendo o sistema formado pelas equações das duas retas, temos:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = ax + 2a \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2(1 - a)}{a + 1} \Rightarrow y = \frac{4a}{a + 1}$$

Para que $P\left(\frac{2(1 - a)}{a + 1}, \frac{4a}{a + 1}\right)$ esteja no primeiro quadrante, devemos ter:

$$\frac{2\,(1 - a)}{a + 1} \geqslant 0 \ (1) \quad \text{e} \quad \frac{4a}{a + 1} \geqslant 0 \ (2)$$

De (1) vem $-1 < a \leqslant 1$ e de (2) vem $a \leqslant -1$ ou $a \geqslant 0$.

Fazendo a interseção, temos $0 \leqslant a \leqslant 1$.

69. Escolhemos duas dentre as três equações e calculamos os valores de *x* e *y*. Tais valores devem satisfazer a terceira equação.

$$\begin{cases} 3x - 3y = -2a \\ 3x + 3y = 4a \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a}{3} \text{ e } y = a$$

$\left(\frac{a}{3}, a\right)$ deve pertencer à reta $ax - y = 0$, então:

$$a \cdot \frac{a}{3} - a = 0 \Rightarrow a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = 3$$

Obs.: Para $a = 0$, o ponto de interseção é $(0, 0)$. As três retas são: $y = x$ (bissetriz b_{13}); $y = -x$ (bissetriz b_{24}) e $y = 0$ (eixo *x*).

Para $a = 3$, o ponto de interseção é $(1, 3)$. As três retas são: $x - y + 2 = 0$, $x + y - 4 = 0$ e $3x - y = 0$.

71. Consideremos os sistemas de retas, tomadas duas a duas:

$$\begin{cases} s\colon 3x + 2y = 5 \\ t\colon x + 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \text{ e } y = -5$$

$$\begin{cases} r\colon x - 2y = -m \\ s\colon 3x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-m + 5}{4} \text{ e } y = \frac{5 + 3m}{8}$$

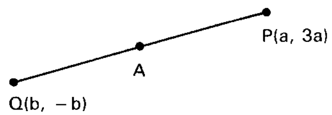
$$\begin{cases} r\colon x - 2y = -m \\ t\colon x + 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-m-5}{2} \text{ e } y = \frac{-5+m}{4}$$

As três interseções obtidas, sendo vértices de um triângulo, não podem ser colineares, então:

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ \frac{5-m}{4} & \frac{3m+5}{8} & 1 \\ \frac{-m-5}{2} & \frac{m-5}{4} & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \frac{5(m+15)}{8} + \frac{5(m+15)}{4} + \frac{2m^2+30m}{16} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow m^2 + 30m + 225 \neq 0 \Rightarrow m \neq -15$

73.



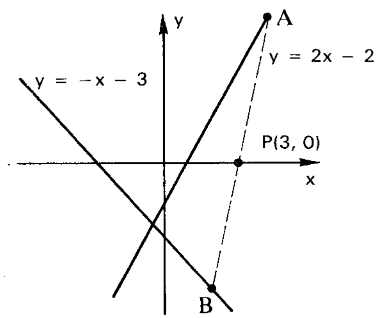
P pertence à reta $y = 3x$.
Portanto, $P(a, 3a)$.
Q pertence à reta $y = -x$.
Portanto, $Q(b, -b)$.
Como $A(-2, 4)$ é ponto médio de *PQ*, então:

$-2 = \dfrac{a+b}{2} \Rightarrow a + b = -4$ (1)

$4 = \dfrac{3a-b}{2} \Rightarrow 3a - b = 8$ (2)

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), vem: $a = 1$ e $b = -5$.
Portanto, os pontos são $P(1, 3)$ e $Q(-5, 5)$.

74.



A pertence à reta $y = 2x - 2$; $A(a, 2a - 2)$.
B pertence à reta $y = -x - 3$; $B(b, -b - 3)$.
Como *P* é ponto médio de *AB*, então:

$3 = \dfrac{a+b}{2} \Rightarrow a + b = 6$ (1)

$0 = \dfrac{2a-2-b-3}{2} \Rightarrow 2a - b = 5$ (2)

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), temos:

$a = \dfrac{11}{3}$ e $b = \dfrac{7}{3}$, de onde vem $A\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{16}{3}\right)$ e $B\left(\dfrac{7}{3}, -\dfrac{16}{3}\right)$.

Para determinar a reta procurada, podemos considerar quaisquer dois pontos entre *A*, *P* e *B*.
A equação da reta é: $8x - y - 24 = 0$.

75. A reta (r) $2x - y + 3 = 0$ pode ser escrita $y = 2x + 3$.
O ponto *M* pertence a (r). Então, $M(a, 2a + 3)$.

O ponto *B* pertence à bissetriz b_{24}. Então $B(b, -b)$.
Como *M* é ponto médio de *AB*, temos:

$a = \dfrac{b+5}{2} \Rightarrow 2a - b = 5$ (1)

$2a + 3 = \dfrac{-b+4}{2} \Rightarrow 4a + b = -2$ (2)

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), vem:

$a = \dfrac{1}{2}$ e $b = -4$.

Então, o ponto procurado é $B(-4, 4)$.

76. (r) $3x - y = 0 \Rightarrow (r)$ $y = 3x$
$C \in (r) \Rightarrow C(a, 3a)$

(s) $x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{x}{2} + 2$

$B \in (s) \Rightarrow B\left(b, \dfrac{b}{2} + 2\right)$

Considerando $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{1}{2}$, temos:

$\dfrac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{a+1}{b-a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 3a - b = -2$ (1)

$\dfrac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{3a - 6}{\frac{b}{2} + 2 - 3a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 18a - b = 28$ (2)

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), resulta: $a = 2$ e $b = 8$.
Portanto, o ponto procurado é $B(8, 6)$.

78. I. $A(x_A, 0)$

III. $A \in (\overleftrightarrow{AC})\colon x + y - 4 = 0$
Portanto, $x_A + 0 - 4 = 0 \Rightarrow x_A = 4 \Rightarrow A(4, 0)$.

II. $B(x_B, x_B)$

IV. $B \in (\overleftrightarrow{BC})\colon 2x - 3y + 7 = 0$
$2x_B - 3x_B + 7 = 0$
$x_B = 7 \Rightarrow B(7, 7)$

III e IV
C é ponto de interseção de $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

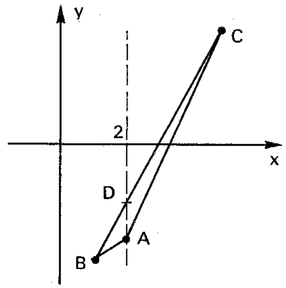
$$\begin{cases} x_C + y_C = 4 \\ 2x_C - 3y_C = -7 \end{cases} \Rightarrow x_C = 1 \text{ e } y_C = 3 \Rightarrow C(1, 3)$$

Assim, temos:
$d_{AB} = \sqrt{58}$; $d_{BC} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ e $d_{AC} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
Portanto, o perímetro do ΔABC é: $\sqrt{58} + 2\sqrt{13} + 3\sqrt{2}$.

79. $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 4x - y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2, -3)$

$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 10x - 3y - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1, -5)$

$\begin{cases} 4x - y - 11 = 0 \\ 10x - 3y - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4, 5)$



$D \in$ reta $\overleftrightarrow{BC}$: $10x - 3y - 25 = 0$ e D tem a mesma abscissa que P.

Portanto, para $x_D = 2 \Rightarrow y_D = \frac{-5}{3}$.

$P(2, y)$ é tal que $y_A < y < y_D$ e daí $-3 < y < -\frac{5}{3}$.

88. $S = d^2_{AB} + d^2_{AO} + d^2_{BO}$ deve ser mínima.

$S = (x_A^2 - 2x_Ax_B + x_B^2 + 4) + (x_A^2 + 1) + (x_B^2 + 9)$ (1)

Considerando a condição de alinhamento dos pontos A, B e P, temos:

$x_B = 3x_A - 14$ (2)

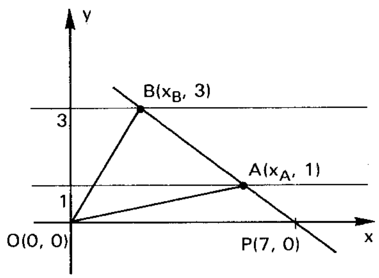
Substituindo (2) em (1):

$S = 14x_A^2 - 140x_A + 406.$

S é mínima para $x_{AV} = \frac{-b}{2a} = 5.$

Portanto, em (2), $x_B = 1.$

Assim: $A(5, 1)$ e $B(1, 3)$.



91. $(2x + 3y - 15) + k(5x - 2y + 29) = 0$

Desenvolvemos e agrupamos os termos semelhantes:

$(2 + 5k)x + (3 - 2k)y + 29k - 15 = 0.$

Como queremos a reta que passa pela origem, $29k - 15 = 0 \Rightarrow k = \frac{15}{29}$.

Substituindo k na equação original, vem $7x + 3y = 0.$

93. $3x - 2y - 6 + k(x + 2y - 2) = 0$ (1)

$3x - 3y + 4 + \ell(2x + 3y + 1) = 0$ (2)

Determinemos o centro do feixe (1):

$\left.\begin{array}{l} k = 0 \Rightarrow 3x - 2y - 6 = 0 \\ k = 1 \Rightarrow x - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (2, 0)$

Determinemos o centro do feixe (2):

$\left.\begin{array}{l} \ell = 0 \Rightarrow 3x - 3y + 4 = 0 \\ \ell = 1 \Rightarrow x + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(-1, \frac{1}{3}\right)$

Determinando a reta que passa pelos pontos obtidos, estaremos obtendo a reta comum aos dois feixes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 9y - 2 = 0$$

94. feixe (1):

$\left.\begin{array}{l} k_1 = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 8 = 0 \\ k_1 = 1 \Rightarrow (2 + m)x - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\left(\frac{3}{2 + m}, \frac{10 + 8m}{3(2 + m)}\right); m \neq -2$

feixe (2):

$\left.\begin{array}{l} k_2 = 0 \Rightarrow 4x + 3y + 25 = 0 \\ k_2 = 1 \Rightarrow 6x + 24 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B(-4, -3)$

feixe (3):

$\left.\begin{array}{l} k_3 = 0 \Rightarrow mx + my + 1 = 0 \\ k_3 = 1 \Rightarrow (m - 4)y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C\left(\frac{-1}{m}, 0\right); m \neq 0$

Os pontos A, B, C, centros dos feixes, devem pertencer à mesma reta. Pela condição de alinhamento, temos:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2 + m} & \frac{10 + 8m}{3(2 + m)} & 1 \\ -4 & -3 & 1 \\ \frac{-1}{m} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ ou } m = \frac{-7}{8}$$

96. $(2 + m)x + (3 + 2m)y - 1 = 0$

$\left.\begin{array}{l} m = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 1 = 0 \\ m = -2 \Rightarrow y + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(2, -1)$

Substituindo $P(2, -1)$ na equação do feixe, vem:

$(2 + m) \cdot 2 + (3 + 2m)(-1) - 1 = 4 + 2m - 3 - 2m - 1 = 0, \forall m \in \mathbb{R}$

97. $(m^2 + 6m + 3)x - (2m^2 + 18m + 2)y - 3m + 2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} m = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 2 = 0 \\ m = 1 \Rightarrow 10x - 22y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$

Substituindo $P\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$ na equação do feixe, vem:

$(m^2 + 6m + 3)(-1) - (2m^2 + 18m + 2)\left(\frac{-1}{2}\right) - 3m + 2 =$

$= -m^2 - 6m - 3 + m^2 + 9m + 1 - 3m + 2 = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$

102. Verificamos, inicialmente, que $A \notin r$ e $A \notin s$.
Seja (r'): $3x - 4y + c' = 0$, tal que $r' // r$ e $A \in r'$.
Então, (r') $3x - 4y - 11 = 0$.
Seja (s'): $5x + 6y + c'' = 0$, tal que $s' // s$ e $A \in s'$.
Então, (s'): $5x + 6y - 12 = 0$.

103. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Rightarrow x = y + k\pi \Rightarrow x - y - k\pi = 0,\ k \in \mathbb{Z}$
Nessa equação, o único coeficiente variável é $k\pi$, o que significa que ela é a equação de um feixe de paralelas.

104. $\operatorname{sen}(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$
$x - y - k\pi = 0\ (k \in \mathbb{Z})$
é a equação de um feixe de paralelas, considerando que os coeficientes a e b são fixos, variando apenas $c = -k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

109. $$(r)\begin{cases} x = 10t - 2 \Rightarrow t = \dfrac{x+2}{10} \\ y = 3t \Rightarrow t = \dfrac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow 3x - 10y + 6 = 0 \text{ (forma geral)}$$
$$3x - 10y = -6$$
$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{3}{5}} = 1 \text{ (forma segmentária)}$$

110. $$(r)\begin{cases} 3t + 1 = x \Rightarrow t = \dfrac{x-1}{3} \\ -2t + 5 = y \Rightarrow t = \dfrac{y-5}{-2} \end{cases} \Rightarrow -2x - 3y + 17 = 0 \quad (1)$$

$$(s)\begin{cases} 2u - 2 = x \Rightarrow u = \dfrac{x+2}{2} \\ 7 + u = y \Rightarrow u = y - 7 \end{cases} \Rightarrow x - 2y + 16 = 0 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), vem $(-2, 7)$.

111. $(r)\ \dfrac{x}{\frac{2}{3}} + \dfrac{y}{-2} = 1 \Rightarrow y = 3x - 2$

$$(s)\begin{cases} x = t - 1 \Rightarrow t = x + 1 \\ y = 3t - 2 \Rightarrow t = \dfrac{y+2}{3} \end{cases} \Rightarrow y = 3x + 1$$

Portanto, (r) e (s) são paralelas e distintas.

114. A reta tem equação segmentária $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$, em que p e q são variáveis.

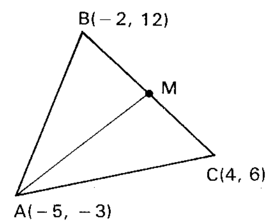
Por hipótese, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{k} \Rightarrow q = \dfrac{pk}{p-k}$ $(p \neq 0$ e $p \neq k)$.
Substituindo q na equação da reta, vem:
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{\frac{pk}{p-k}} = 1 \Rightarrow x + \frac{p-k}{k}y = p.$$
Fazendo $p = 1 \Rightarrow (r)\ x + \left(\dfrac{1-k}{k}\right)y = 1 \quad (1)$

Fazendo $p = 2 \Rightarrow (s)\ x + \left(\dfrac{2-k}{k}\right)y = 2 \quad (2)$

Resolvendo o sistema formado pelas retas (r) e (s), vem $P(k, k)$.
As retas (r) e (s) são concorrentes no ponto $P(k, k)$, fixo, no plano cartesiano, pois:
$$k + \frac{p-k}{k} \cdot k = p,\ \forall p \in \mathbb{R}^*,\ p \neq k.$$

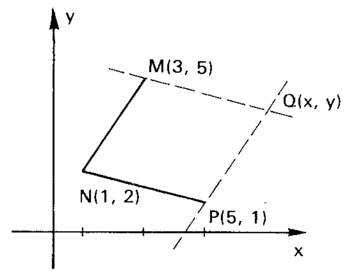
Capítulo III — Teorema angular

118.



M é ponto médio de BC:
$x_M = 1$ e $y_M = 9 \Rightarrow M(1, 9)$
$$m_{\overleftrightarrow{AM}} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{12}{6} = 2.$$

131.



Inicialmente calculamos:
$$m_{\overleftrightarrow{MN}} = \frac{3}{2} \text{ e } m_{\overleftrightarrow{NP}} = \frac{-1}{4}.$$

$\overleftrightarrow{PQ}$ passa por P e é paralela a $\overleftrightarrow{MN}$.
$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 5) \Rightarrow 3x - 2y - 13 = 0 \quad (1)$$
$\overleftrightarrow{MQ}$ passa por M e é paralela a $\overleftrightarrow{NP}$.
$$y - 5 = \frac{-1}{4}(x - 3) \Rightarrow x + 4y - 23 = 0 \quad (2)$$
Resolvendo o sistema (1) e (2), vem: $Q(7, 4)$.

132. $A(-3, 4) \notin r$ e $A(-3, 4) \notin s$

(r) $2x + y - 3 = 0 \Rightarrow m_r = -2$

(s) $x + y - 2 = 0 \Rightarrow m_s = -1$

Seja $\overleftrightarrow{AB} // s$. Então, $(\overleftrightarrow{AB})$: $y - 4 = -1\,(x + 3) \Rightarrow x + y - 1 = 0$.

$B \in \overleftrightarrow{AB} \cap r \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2, -1)$

Seja $\overleftrightarrow{AD} // r$. Então $(\overleftrightarrow{AD})$: $y - 4 = -2\,(x + 3) \Rightarrow 2x + y + 2 = 0$.

$D \in \overleftrightarrow{AD} \cap s \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(-4, 6)$

Como $B \in r$ e $D \in s$, então necessariamente $C \in r \cap s$.

$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1, 1)$

Portanto: $B(2, 1)$, $C(1, 1)$ e $D(-4, 6)$.

133. $|x - y| = 1 \leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \text{ se } x \geqslant y & \text{(I)} \\ -x + y = 1, \text{ se } x < y & \text{(II)} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & x - y - 1 = 0 \\ \text{(II)} & x - y + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ são retas paralelas.

145. $m_{\overleftrightarrow{OH}} = \dfrac{3 - 0}{2 - 0} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow m_r = \dfrac{-2}{3}$

(r) $y - 3 = \dfrac{-2}{3}(x - 2) \Rightarrow$ (r) $2x + 3y - 13 = 0$

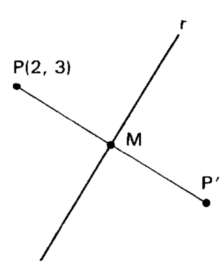
148. $m_r = 2$, $s \perp r \Rightarrow m_s = \dfrac{-1}{2}$

$P \in s \Rightarrow$ (s) $y - 1 = \dfrac{-1}{2}(x + 2) \Rightarrow$ (s) $x + 2y = 0$

Obtendo a interseção das retas r e s, vem:

$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 20 \end{cases} \Rightarrow (8, -4)$

150.



$m_r = 1$, $s \perp r \Rightarrow m_s = -1$

$P \in s \Rightarrow$ (s) $y - 3 = -1\,(x - 2) \Rightarrow$

(s) $y = -x + 5$

$M \in r \cap s \Rightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow M(4, 1)$

M é ponto médio de $PP' \Rightarrow P'(6, -1)$.

151. $\left.\begin{array}{l} A(1, 0) \\ B(0, 2) \end{array}\right. \Rightarrow (\overleftrightarrow{AB})$: $2x + y - 2 = 0 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AB}} = -2$

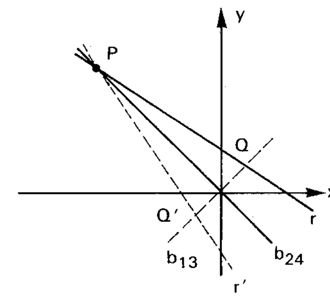
$s \perp \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow m_s = \dfrac{1}{2}$

Como $O(0, 0) \in s \Rightarrow$ (s) $y - 0 = \dfrac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow$ (s) $x - 2y = 0$.

$M \in \overleftrightarrow{AB} \cap s \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$

Como M é ponto médio de OP, vem: $P\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

153.



Seja $P \in r \cap b_{24}$.

$\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow P(-7, 7)$

Consideremos a bissetriz $b_{13} \perp b_{24}$.

Seja $Q \in b_{13} \cap r$.

$\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow Q\left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$

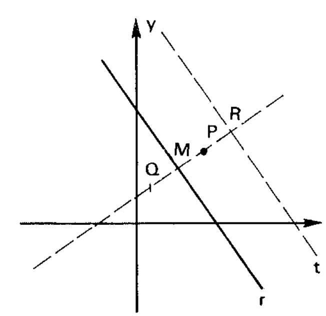
A origem $O(0, 0)$ é ponto médio de QQ', $Q' \in b_{13}$.

$0 = \dfrac{\dfrac{7}{5} + x_{Q'}}{2} \Rightarrow x_{Q'} = \dfrac{-7}{5} = y_{Q'} \Rightarrow Q'\left(\dfrac{-7}{5}, \dfrac{-7}{5}\right)$

Então, $\overleftrightarrow{PQ'} \equiv r'$, simétrica de r em relação a b_{24}.

$\begin{vmatrix} -7 & 7 & 1 \\ \dfrac{-7}{5} & \dfrac{-7}{5} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 7 = 0$

154.



(r) $3x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow m_r = \dfrac{-3}{2}$

a) $s \perp r \Rightarrow m_s = \dfrac{2}{3}$

$P \in s \Rightarrow$ (s) $y - 2 = \dfrac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (s) $2x - 3y + 2 = 0$

b) $M \in r \cap s$

$\begin{cases} \text{(r) } 3x + 2y - 6 = 0 \\ \text{(s) } 2x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{14}{13}, \dfrac{18}{13}\right)$

c) M é ponto médio de PQ:

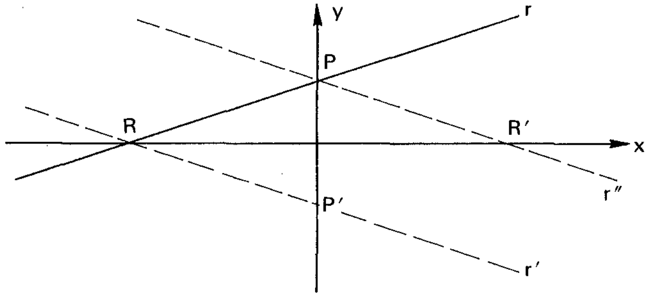
$$\begin{cases} \dfrac{14}{13} = \dfrac{2 + x}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2}{13} \\[2mm] \dfrac{18}{13} = \dfrac{2 + y}{2} \Rightarrow y = \dfrac{10}{13} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{2}{13}, \frac{10}{13}\right)$$

d) P é ponto médio de MR:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = \dfrac{\frac{14}{13} + x}{2} \Rightarrow x = \dfrac{38}{13} \\[2mm] 2 = \dfrac{\frac{18}{13} + y}{2} \Rightarrow y = \dfrac{34}{13} \end{array}\right\} \Rightarrow R\left(\frac{38}{13}, \frac{34}{13}\right)$$

$$R \in t//r \Rightarrow (t)\ y - \frac{34}{13} = \frac{-3}{2}\left(x - \frac{38}{13}\right) \Rightarrow (t)\ 3x + 2y - 14 = 0$$

155.



(r) $x - 6y + 12 = 0$
(r) intercepta o eixo y no ponto $P(0, 2)$.
(r) intercepta o eixo x no ponto $R(-12, 0)$.

a) $P'(0, -2)$ é simétrico de P em relação ao eixo x.
$\overleftrightarrow{RP'} = r'$ é simétrica de r em relação ao eixo x.

$$\begin{vmatrix} -12 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (r')\ x + 6y + 12 = 0$$

b) $R'(12, 0)$ é simétrico de R em relação ao eixo y.
$\overleftrightarrow{PR'} = r''$ é simétrica de r em relação ao eixo y.

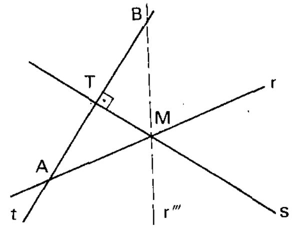
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 12 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (r'')\ x + 6y - 12 = 0$$

c) (s) $x + y - 9 = 0 \Rightarrow m_s = -1$
Seja $T(0, 9) \in s$ e seja $t \perp s$, com $T \in t$.
(t) $y - 9 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow$ (t) $x - y + 9 = 0$

$$A \in t \cap r \Rightarrow \begin{cases} (t)\ x - y + 9 = 0 \\ (r)\ x - 6y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{-42}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Sendo T ponto médio de AB, $B \in r'''$, vem:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \dfrac{\frac{-42}{5} + x}{2} \Rightarrow x = \dfrac{42}{5} \\[2mm] 9 = \dfrac{\frac{3}{5} + y}{2} \Rightarrow y = \dfrac{87}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow B\left(\frac{42}{5}, \frac{87}{5}\right)$$



Sendo $M(6, 3) \in r \cap s$, então $\overleftrightarrow{MB} = r'''$.

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ \frac{42}{5} & \frac{87}{5} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - y - 33 = 0\ (r''')$$

157. 1ª) equação de h_a tal que $h_a \perp BC$ por A

$m_{BC} = \dfrac{1}{-1} = -1 \Rightarrow m_{ha} = 1$

$A \in h_a \Rightarrow y + 1 = 1(x - 2) \Rightarrow x - y - 3 = 0\ (h_a)$

2ª) equação de h_b tal que $h_b \perp AC$ por B

$m_{AC} = \dfrac{3}{-1} = -3 \Rightarrow m_{hb} = \dfrac{1}{3}$

$B \in h_b \Rightarrow y - 3 = \dfrac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow x - 3y + 9 = 0\ (h_b)$

3ª) equação de h_c tal que $h_c \perp AB$ por C

$m_{AB} = \dfrac{4}{-2} = -2 \Rightarrow m_{hc} = \dfrac{1}{2}$

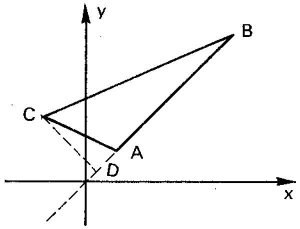
$C \in h_c \Rightarrow y - 2 = \dfrac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x - 2y + 3 = 0\ (h_c)$

4ª) $\{H\} \in h_a \cap h_b \cap h_c$

a) $\begin{cases} (h_a)\ x - y - 3 = 0 \\ (h_b)\ x - 3y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(9, 6)$

b) $H \in h_c \Rightarrow 9 - 2 \cdot 6 + 3 = 0\ (V)$

158.



1ª) equação da reta $\overleftrightarrow{CD}$ tal que $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$m_{AB} = 1 \Rightarrow m_{CD} = -1$

$(\overleftrightarrow{CD})\ y - 2 = -1\,(x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y - 1 = 0$

2ª) $\{D\} = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{AB}$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

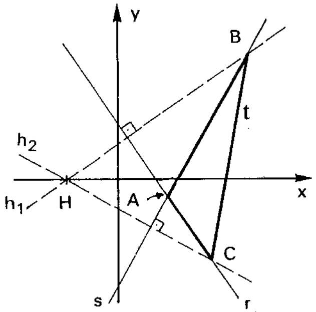
3ª)
$$\left.\begin{cases} S_{ABC} = \dfrac{d_{AB} \cdot d_{CD}}{2} \\ d_{AB} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \\ d_{CD} = \sqrt{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-3}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{20}$$

4ª)
$$\left.\begin{cases} S_{BCD} = \dfrac{d_{BD} \cdot d_{CD}}{2} \\ d_{BD} = \sqrt{\left(\dfrac{9}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2} \\ d_{CD} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow S_{BCD} = \frac{9\sqrt{20}}{8}$$

5ª)
$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{\sqrt{20}}{\dfrac{9\sqrt{20}}{8}} = \frac{8}{9}$$

Obs.: Como d_{CD} é comum aos dois triângulos, bastaria fazer a razão entre d_{AB} e d_{BD} para obter a razão entre as áreas.

159.



1ª)
$$\begin{cases} (r)\ 2x + y - 1 = 0 \\ (s)\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1, 1)$$

2ª) $H \in h_1 \perp r$

$m_r = -2 \Rightarrow m_{h_1} = \dfrac{1}{2}$

$y - 0 = \dfrac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow$

$x - 2y + 1 = 0\ (h_1)$

$\{B\} = h_1 \cap s$

$$\begin{cases} (h_1)\ x - 2y + 1 = 0 \\ (s)\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5, 3)$$

3ª) $H \in h_2 \perp s;\ m_s = 1 \Rightarrow m_{h_2} = -1$

$y - 0 = -1\,(x + 1) \Rightarrow x + y + 1 = 0\ (h_2)$

$$\{C\} = h_2 \cap r \Rightarrow \begin{cases} (h_2)\ x + y + 1 = 0 \\ (r)\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2, -3)$$

4ª) $t = \overleftrightarrow{BC}$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y - 7 = 0$$

161. 1ª) $A \in \overleftrightarrow{AC} = (r)$ e $A(0, y) \Rightarrow 7 \cdot 0 + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0, 3)$

2ª) $E \in \overleftrightarrow{AC} = (r)$ e $E\left(x, \dfrac{-1}{2}\right) \Rightarrow 7x - \dfrac{1}{2} - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow E\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$

3ª) *E* é ponto médio de *AC*:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{x_C + 0}{2} \Rightarrow x_C = 1 \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{y_C + 3}{2} \Rightarrow y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(1, -4)$$

4ª) $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC} = (r);\ m_r = -7 \Rightarrow m_{BD} = \dfrac{1}{7}$

$E \in \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow y + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{7}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow x - 7y - 4 = 0$

5ª) *B* ∈ eixo *x*; *B*(*x*, *0*)

$B \in \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow B(4, 0)$

6ª) *E* é ponto médio de *BD*:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{x_D + 4}{2} \Rightarrow x_D = -3 \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{y_D + 0}{2} \Rightarrow y_D = -1 \end{cases} \Rightarrow D(-3, -1)$$

$A(0, 3);\ B(4, 0);\ C(1, -4);\ D(-3, -1)$

164. 1º) Sendo $\overline{BC} = m \cdot \overline{AB}$, temos:

$x_C - x_B = m(x_B - x_A)$ e

$y_C - y_B = m(y_B - y_A)$

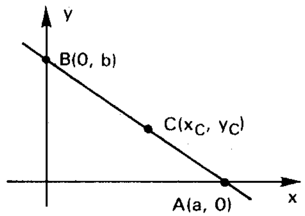
e daí

$x_C - 0 = m(0 - a)$ e

$y_C - b = m(b - 0)$

então, $x_C = -ma$ e

$y_C = (m + 1)b$.



2º) As coordenadas do ponto *M*, médio de *AC*, são

$$x_M = \frac{a + (-ma)}{2} = \frac{(1 - m)a}{2} \text{ e } y_M = \frac{0 + (m + 1)b}{2} = \frac{(m + 1)b}{2}.$$

3º) $m_{AB} = -\frac{b}{a}$ e $t \perp AB \Rightarrow m_t = \frac{a}{b}$

$M \in t \Rightarrow (t)\ y - \frac{(m + 1)b}{2} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{(1 - m)a}{2}\right)$

e daí vem:

(t) $2ax - 2by - a^2(1 - m) + b^2(1 + m) = 0$.

165. $d_{AB} = b - a = \frac{15}{2} \Rightarrow b = \frac{15 + 2a}{2}$ (1)

reta $(\overleftrightarrow{AP})$: $3x + (a - 3)y - 3a = 0 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AP}} = \frac{3}{3 - a}$

reta $(\overleftrightarrow{BP})$: $3x + (b - 3)y - 3b = 0 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{BP}} = \frac{3}{3 - b}$

Como as retas $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BP}$ são perpendiculares, vem:

$m_{\overleftrightarrow{AP}} = \frac{-1}{m_{\overleftrightarrow{BP}}} \Rightarrow ab + 3(a + b) + 18 = 0$ (2)

Substituindo (1) em (2), temos:

$$2a^2 + 3a - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow b_1 = 9 \\ a_2 = -3 \Rightarrow b_2 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

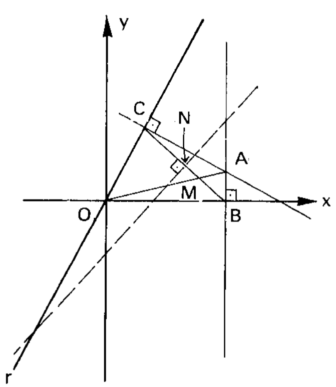
Caso (1), $a_1 = \frac{3}{2}$ e $b = 9$, vem:

$(\overleftrightarrow{AP})$: $2x - y - 3 = 0$ e $(\overleftrightarrow{BP})$: $x + 2y - 9 = 0$

Caso (2), $a_2 = -3$ e $b_2 = \frac{9}{2}$, vem:

$(\overleftrightarrow{AP})$: $x - 2y + 3 = 0$ e $(\overleftrightarrow{BP})$: $2x + y - 9 = 0$.

166.



1) $AB \perp x$ e $x_A = 3 \Rightarrow x_B = 3 \Rightarrow B(3, 0)$

2) $m_r = 2$ e $\overleftrightarrow{AC} \perp r \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AC}} = -\frac{1}{2}$

$A \in \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow (\overleftrightarrow{AC})\ y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$

e daí $(\overleftrightarrow{AC})\ x + 2y - 5 = 0$

3) C é a interseção de r com AC, então:

$$\begin{cases} (r)\ \ y = 2x \\ (\overleftrightarrow{AC})\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1, 2)$$

4) M é ponto médio de OA:

$$\begin{cases} x_M = \frac{0 + 3}{2} \Rightarrow x_M = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{0 + 1}{2} \Rightarrow y_M = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

5) N é ponto médio de BC:

$$\begin{cases} x_N = \frac{3 + 1}{2} \Rightarrow x_N = 2 \\ y_N = \frac{0 + 2}{2} \Rightarrow y_N = 1 \end{cases} \Rightarrow N(2, 1)$$

6) Determinemos os coeficientes angulares de $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{MN}$:

$$\left.\begin{array}{l} m_{\overleftrightarrow{BC}} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2 - 0}{1 - 3} = -1 \\ m_{\overleftrightarrow{MN}} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{BC}$$

167. a) 1) Determinemos as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, e seus respectivos coeficientes angulares.

$(\overleftrightarrow{AB})$: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y - 9 = 0 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AB}} = -\frac{1}{2}$

$(\overleftrightarrow{BC})$: $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{BC}} = -\frac{4}{3}$

$(\overleftrightarrow{AC})$: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y + 2 = 0 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AC}} = 2$

2) Vamos determinar r_a, r_b e r_c tais que:

$P \in r_a$ e $r_a \perp \overleftrightarrow{BC}$; $P \in r_b$ e $r_b \perp \overleftrightarrow{AC}$; $P \in r_c$ e $r_c \perp \overleftrightarrow{AB}$.

(r_a): $y - 6 = \frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow 3x - 4y + 24 = 0$

(r_b): $y - 6 = \frac{-1}{2}(x - 0) \Rightarrow x + 2y - 12 = 0$

(r_c): $y - 6 = 2(x - 0) \Rightarrow 2x - y + 6 = 0$

3) Vamos determinar os pés das perpendiculares:

$$\{R\} = r_a \cap \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 24 = 0 \\ 4x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow R\left(\frac{-48}{25}, \frac{114}{25}\right)$$

$$\{S\} = r_b \cap \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 12 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{8}{5}, \frac{26}{5}\right)$$

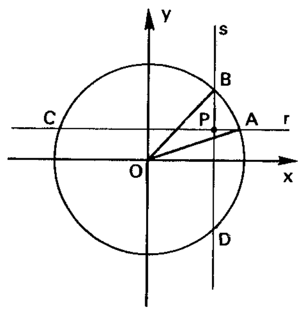
$$\{T\} = r_c \cap \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 6 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow T\left(\frac{-3}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

b) Para provar que *R*, *S* e *T* são colineares, podemos fixar a reta determinada por *S* e *T* e provar que $R \in \overleftrightarrow{ST}$.

$(\overleftrightarrow{ST})$: $2x - 11y + 54 = 0$

$$2 \cdot \left(\frac{-48}{25}\right) - 11 \cdot \left(\frac{114}{25}\right) + 54 = 0 \Rightarrow R \in \overleftrightarrow{ST}$$

168.



a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \cos\beta \\ y = \text{sen}\,\alpha \end{cases}$

$x_A^2 + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow x_A = \cos\alpha$

$\cos^2\beta + y_B^2 = 1 \Rightarrow y_B = \text{sen}\,\beta$

Então, temos:

$A(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$; $B(\cos\beta, \text{sen}\,\beta)$

$C(-\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$; $D(\cos\beta, -\text{sen}\,\beta)$

b) *M* é ponto médio de *AB*:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{2} \\ y_M = \dfrac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}, \frac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}{2}\right)$$

$$\text{reta } \overleftrightarrow{PM}: \begin{vmatrix} \cos\beta & \text{sen}\,\alpha & 1 \\ \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{2} & \dfrac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}{2} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

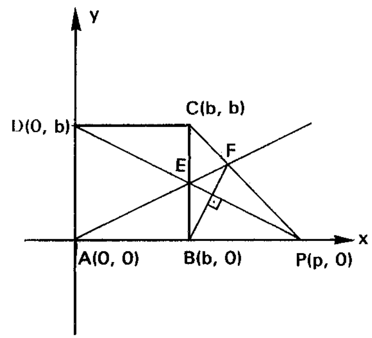
$$\Rightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta}{2} \cdot x + \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{2} \cdot y + \frac{\text{sen}\,\beta\cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{2} = 0$$

$$\text{c) } m_{\overleftrightarrow{PM}} = -\frac{\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \frac{2 \cdot \text{sen}\,\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}}{2\,\text{sen}\,\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{\alpha + \beta}{2}} = \text{cotg}\,\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$m_{\overleftrightarrow{CD}} = \frac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}{-\cos\beta - \cos\alpha} = \frac{2 \cdot \text{sen}\,\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}}{-2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}} = -\,\text{tg}\,\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$m_{\overleftrightarrow{PM}} \cdot m_{\overleftrightarrow{CD}} = -\,\text{cotg}\,\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{tg}\,\frac{\alpha + \beta}{2} = -1 \Rightarrow \overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

169. Sem perder a generalidade, vamos colocar os dados *AB* e *AD* respectivamente sobre os eixos *Ox* e *Oy* e o ponto *A* na origem do sistema.



1) reta $\overleftrightarrow{PD}$:

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bx + py - pb = 0$$

$$m_{\overleftrightarrow{PD}} = \frac{-b}{p}$$

2) reta $\overleftrightarrow{BC}$: $x = b$

3) $\{E\} = \overleftrightarrow{PD} \cap \overleftrightarrow{BC}$: $\begin{cases} bx + py - pb = 0 \\ x = b \end{cases} \Rightarrow E\left(b, \dfrac{b(p - b)}{p}\right)$

4) reta $\overleftrightarrow{AE}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & \dfrac{b(p - b)}{p} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (p - b)x - py = 0$$

5) reta $\overleftrightarrow{PC}$:

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 1 \\ b & b & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bx + (p - b)y - pb = 0$$

6) $\{F\} = \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{PC}$: $\begin{cases} (p - b)x - py = 0 \\ bx + (p - b)y - pb = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F\left(\frac{p^2b}{p^2 - pb + b^2}, \frac{pb(p - b)}{p^2 - pb + b^2}\right)$$

7) Temos:

$$m_{\overleftrightarrow{PD}} = -\frac{b}{p}$$

$$m_{\overleftrightarrow{BF}} = \frac{y_F - y_B}{x_F - x_B} = \frac{bp(p-b)}{p^2 - pb + b^2} \cdot \frac{p^2 - pb + b^2}{p^2b - b(p^2 - pb + b^2)} =$$

$$= \frac{bp(p-b)}{b^2(p-b)} = \frac{p}{b}$$

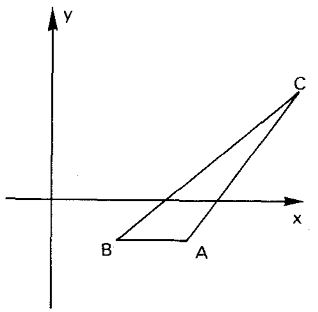
$$m_{\overleftrightarrow{PD}} \cdot m_{\overleftrightarrow{BF}} = \left(-\frac{b}{p}\right)\left(\frac{p}{b}\right) = -1 \Rightarrow \overleftrightarrow{PD} \perp \overleftrightarrow{BF}$$

174. $A(3, 0)$ e $B(10, 1) \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{1}{7}$

$A(3, 0)$ e $M(6, k) \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AM}} = \frac{k}{3}$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \left| \frac{\frac{1}{7} - \frac{k}{3}}{1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{k}{3}} \right| \Rightarrow k = \frac{-9}{4} \text{ ou } k = 4$$

175.



$$\hat{A}: \begin{cases} m_{\overleftrightarrow{AB}} = \dfrac{-1+1}{4-2} = 0 \\ m_{\overleftrightarrow{AC}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{5+\sqrt{3}-4} = 1 \end{cases}$$

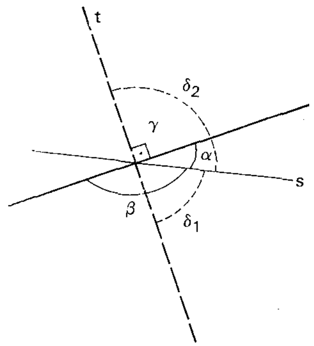
$$\operatorname{tg} \hat{A} = \left| \frac{0 - 1}{1 + 0 \cdot 1} \right| = 1 \Rightarrow \hat{A} = \frac{3\pi}{4} \text{ (pois } \hat{A} \text{ é obtuso)}$$

$$\hat{B}: \begin{cases} m_{\overleftrightarrow{AB}} = 0 \\ m_{\overleftrightarrow{BC}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \hat{B} = \left| \frac{0 - \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3}}{1 + \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} \cdot 0} \right| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

então: $\hat{B} = \frac{\pi}{6}$.

Portanto: $\hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = \frac{\pi}{12}$.

179.



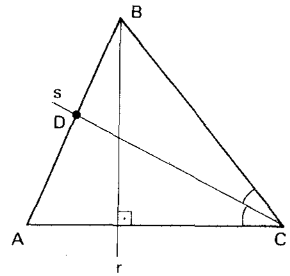
Como r e s são coplanares, $\alpha < \beta$, então $\alpha + \beta = \pi$.

A reta t forma com r um ângulo $\frac{\alpha + \beta}{2}$, ou seja, um ângulo $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Os ângulos formados pelas retas t e s são:

$\delta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $\delta_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

183. 1º) Verificamos que $A \notin r$ e $A \notin s$, pois suas coordenadas não satisfazem as equações dadas. Suponhamos que r contém a altura h_b e s contém a bissetriz s_c do triângulo ABC, conforme indica a figura.



2º) Equação da reta $\overleftrightarrow{AC}$:

$$m_r = \frac{3}{4} \text{ e } \overleftrightarrow{AC} \perp r \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AC}} = -\frac{4}{3}$$

$$A \in \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow y - 4 = -\frac{4}{3}(x + 2) \Rightarrow (\overleftrightarrow{AC})\ 4x + 3y - 4 = 0$$

3º) Vértice C, interseção de $\overleftrightarrow{AC}$ com s:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 4 = 0\ (\overleftrightarrow{AC}) \\ 2x - y + 18 = 0\ (s) \end{cases} \Rightarrow x = -5 \text{ e } y = 8 \Rightarrow C(-5, 8)$$

4º) Equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$:
s é bissetriz, então $A\hat{C}D = D\hat{C}B$ e daí:

$$\operatorname{tg} A\hat{C}D = \operatorname{tg} D\hat{C}B \Rightarrow \left| \frac{m_{AC} - m_{CD}}{1 + m_{AC}m_{CD}} \right| = \left| \frac{m_{DC} - m_{CB}}{1 + m_{DC} \cdot m_{CB}} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\left(-\frac{4}{3}\right) - 2}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 2} \right| = \left| \frac{2 - m_{CB}}{1 + 2 \cdot m_{CB}} \right| \Rightarrow m_{CB} = 0$$

$$C \in \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow y - 8 = 0(x + 5) \Rightarrow (\overleftrightarrow{BC})\ y - 8 = 0$$

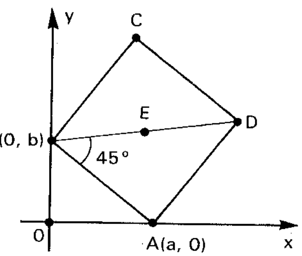
5º) Vértice B, interseção de $\overleftrightarrow{BC}$ com r:

$$\begin{cases} y - 8 = 0 \ (\overleftrightarrow{BC}) \\ 3x - 4y + 59 = 0 \ (r) \end{cases} \Rightarrow x = -9 \text{ e } y = 8 \Rightarrow B(-9, 8)$$

6º) Equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -9 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\overleftrightarrow{AB})\ 4x + 7y - 20 = 0$$

184. 1) Consideremos o ΔOAB retângulo e suponhamos A(a, 0) e B(0, b) com $a \geqslant b$.



2) Equação da reta $\overleftrightarrow{AD}$:

$$m_{\overleftrightarrow{AB}} = -\frac{b}{a} \text{ e } \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AD}} = \frac{a}{b}$$

$$A \in \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow y - 0 = \frac{a}{b}(x - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\overleftrightarrow{AD})\ ax - by - a^2 = 0.$$

3) Equação da reta $\overleftrightarrow{BD}$:

$$A\hat{B}D = 45° \Rightarrow \text{tg } A\hat{B}D = \left| \frac{m_{\overleftrightarrow{AB}} - m_{\overleftrightarrow{BD}}}{1 + m_{\overleftrightarrow{AB}} \cdot m_{\overleftrightarrow{BD}}} \right| = \left| \frac{-\frac{b}{a} - m_{\overleftrightarrow{BD}}}{1 - \frac{b}{a} \cdot m_{\overleftrightarrow{BD}}} \right| = 1$$

e daí $m_{\overleftrightarrow{BD}} = \dfrac{a - b}{a + b}$ (outra possibilidade deve ser descartada, pois $m_{\overleftrightarrow{BD}} > 0$)

$$B \in \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow y - b = \frac{a - b}{a + b}(x - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\overleftrightarrow{BD}\ (a - b)x - (a + b)y + b(a + b) = 0$$

4) Coordenadas de D, interseção de $\overleftrightarrow{AD}$ com $\overleftrightarrow{BD}$:

$$\begin{cases} (\overleftrightarrow{AD})\ ax - by = a^2 \\ (\overleftrightarrow{BD})\ (a - b)x - (a + b)y = -b(a + b) \end{cases}$$

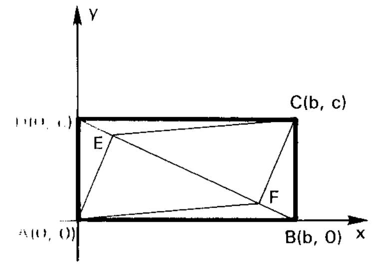
e daí $x = a + b$ e $y = a$.

5) Coordenadas de E, médio de BD:

$$x_E = \frac{0 + (a + b)}{2} = \frac{a + b}{2} \text{ e } y_E = \frac{b + a}{2}$$

e assim $\overleftrightarrow{OE} = b_{13}$.

185.



Vamos supor:
A = (0, 0)
B = (b, 0)
C = (b, c)
D = (0, c)

$(\overleftrightarrow{AE}) \perp (\overleftrightarrow{BD})$ e $(\overleftrightarrow{CF}) \perp (\overleftrightarrow{BD})$. Então, sendo $m_{\overleftrightarrow{BD}} = \dfrac{-c}{b}$, $m_{\overleftrightarrow{AE}} = m_{\overleftrightarrow{CF}} = \dfrac{b}{c}$, ou seja, $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$ (1)

Determinemos os pontos E e F.

Por determinante: $(\overleftrightarrow{BD})$: $cx + by - bc = 0$.

$\{E\} = \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{BD}$

$(\overleftrightarrow{AE})$: $y - 0 = m_{\overleftrightarrow{AE}}(x - 0) \Rightarrow (\overleftrightarrow{AE})\ bx - cy = 0$

Fazendo a interseção das retas, vem: $E\left(\dfrac{bc^2}{b^2 + c^2}, \dfrac{b^2c}{b^2 + c^2}\right)$.

$\{F\} = \overleftrightarrow{CF} \cap \overleftrightarrow{BD}$

$(\overleftrightarrow{CF})$: $y - c = m_{\overleftrightarrow{CF}}(x - b) \Rightarrow (\overleftrightarrow{CF})\ bx - cy + c^2 - b^2 = 0$

Fazendo a interseção das retas, vem: $F\left(\dfrac{b^3}{b^2 + c^2}, \dfrac{c^3}{b^2 + c^2}\right)$.

Então:

$$\left.\begin{aligned} m_{\overleftrightarrow{CE}} &= \frac{\frac{b^2c}{b^2 + c^2} - c}{\frac{bc^2}{b^2 + c^2} - b} = \frac{c^3}{b^3} \\ m_{\overleftrightarrow{AF}} &= \frac{\frac{c^3}{b^2 + c^2} - 0}{\frac{b^3}{b^2 + c^2} - 0} = \frac{c^3}{b^3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{CE}} = m_{\overleftrightarrow{AF}} \Rightarrow \overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AF} \ (2)$$

De (1) e (2) vem: $AECF$ é paralelogramo.

186. Os pontos $B(0, y)$, $C(1, 2)$ e $A(x, 0)$ são colineares, então:

a) 1) $$\begin{vmatrix} 0 & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + (1 - x)y = 0 \Rightarrow y = \frac{2x}{x - 1}$$

2) $$\ell = \sqrt{\left(\frac{2x}{x - 1}\right)^2 + (-x)^2} = \frac{x\sqrt{x^2 - 2x + 5}}{x - 1}$$

b) Para $x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(2, 0)$ e $B(0, 4)$

$$m_{\overleftrightarrow{OC}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

$$m_{\overleftrightarrow{AB}} = -2 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{OP}} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} \right| = \frac{3}{4}$$

Capítulo IV — Distância de ponto a reta

193. Temos $m_{\overleftrightarrow{AB}} = m_{\overleftrightarrow{CD}} = \frac{1}{7}$, então AB e CD são bases.

Determinemos, por exemplo, a reta (r) suporte do lado CD.

$$\begin{vmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 7y + 9 = 0$$

$$d_{A,CD} = \left| \frac{(-1) - 7(-3) + 9}{\sqrt{1 + 49}} \right| = \frac{29\sqrt{2}}{10}$$

194. Calculemos a distância de $P(0, 0)$ à reta (r):

$$d_{P,r} = \left| \frac{5}{\sqrt{1 + 4}} \right| = \sqrt{5}$$

Essa distância é o lado do quadrado.

$$\text{Área} = \ell^2 \Rightarrow \text{Área} = 5$$

197. Seja $P \in (r)\ y = 2x + 1 \Rightarrow P(x, 2x + 1)$.

Então, $d_{P,s} = \left| \dfrac{3x_P - 2y_P + 1}{\sqrt{3^2 + 2^2}} \right| = 2$

$$d_{P,s} = \left| \frac{3x - 2(x + 1) + 1}{\sqrt{13}} \right| = 2 \Rightarrow x = -1 \pm 2\sqrt{13}$$

Para $x = -1 + 2\sqrt{13} \Rightarrow y = -1 + 4\sqrt{13} \Rightarrow P(-1 + 2\sqrt{13};\ -1 + 4\sqrt{13})$.

Para $x = -1 - 2\sqrt{13} \Rightarrow y = -1 - 4\sqrt{13} \Rightarrow P(-1 - 2\sqrt{13};\ -1 - 4\sqrt{13})$.

200. $m_r = \frac{-3}{4} \Rightarrow m_s = \frac{4}{3}$, em que $s \perp r$

Então, $(s)\ y - y_0 = \frac{4}{3}(x - x_0) \Rightarrow 4x - 3y - 4x_0 + 3y_0 = 0$

$$4x - 3y + c = 0\ (s)$$

Assim, $d_{P,s} = \left| \dfrac{4 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + c}{\sqrt{16 + 9}} \right| = 4.$

$$\left| \frac{8 + c}{5} \right| = 4 \Rightarrow c = 12 \text{ ou } c = -28 \text{ e daí}$$

$$(s)\ 4x - 3y + 12 = 0 \text{ ou } (s)\ 4x - 3y - 28 = 0.$$

212. A interseção da reta $(r)\ x + y - 2 = 0$ com o eixo x é o ponto $B(2, 0)$.

Como C pertence à reta (r), então $C(x, -x + 2)$.

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & -x + 2 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 6$$

Seja $\frac{1}{2}|D_{ABC}| = 12 \Rightarrow |-3x + 6| = 24 \Rightarrow x = -6$ ou $x = 10$

Sendo $x = -6$, vem $y = 8 \Rightarrow C(-6, 8)$.

Sendo $x = 10$, vem $y = -8 \Rightarrow C(10, -8)$.

213. Sendo $C \in (r)\ y = x + 1$, então $C(x, x + 1)$.

Sendo $A(1, 0)$, então $m_{\overleftrightarrow{AC}} = \dfrac{x + 1}{x - 1} = 2 \Rightarrow x = 3$.

Portanto, $C(3, 4)$.

Então, $D_{ABC} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -8$

$$S = \frac{1}{2}|D_{ABC}| = \frac{1}{2}|-8| = 4.$$

214. I. Temos $A(3, -2)$, $B(4, -1)$ e $C(a, b)$; então:

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = -a + b + 5$$

$S = 2 \Rightarrow |D_{ABC}| = 4 \Rightarrow |-a + b + 5| = 4 \quad (1)$

II. O baricentro do triângulo ABC é $G\left(\dfrac{7 + a}{3}, \dfrac{-3 + b}{3}\right)$ e está na reta $2x - y + 3 = 0$; então:

$$\frac{2(7 + a)}{3} - \frac{-3 + b}{3} + 3 = 0 \text{ e daí } 2a - b + 26 = 0 \quad (2)$$

III. Resolvendo o sistema (1) e (2), vem:

$(a = -27$ e $b = -28)$ ou $(a = -35$ e $b = -44)$.

Portanto: $C(-27, -28)$ ou $C(-35, -44)$.

215. reta BC: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - y + 3 = 0 \Rightarrow M \in \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow M(x, 3x + 3)$

$$\left.\begin{array}{l} S_{AMC} = \frac{1}{2}\,|D_{AMC}| \\ D_{AMC} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ x & 3x+3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8x + 8 \end{array}\right\} \Rightarrow S_{AMC} = |4x + 4|$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{AMB} = \frac{1}{2}\,|D_{AMB}| \\ D_{AMB} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ x & 3x+3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8x \end{array}\right\} \Rightarrow S_{AMB} = |4x|$$

$$\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{|4x+4|}{|4x|} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{-4}{5} \text{ ou } x = \frac{-4}{3}$$

Sendo $x = \frac{-4}{5}$, $y = \frac{3}{5} \Rightarrow M\left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Sendo $x = \frac{-4}{3}$, $y = -1 \Rightarrow M\left(\frac{-4}{3}, -1\right)$.

217. Vamos supor $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (b, c)$, então $M = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

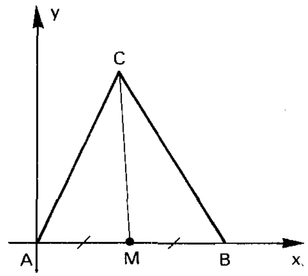
Temos:

$$D_{AMC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a/2 & 0 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = \frac{ac}{2}$$

$$D_{BMC} = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ a/2 & 0 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = -\frac{ac}{2}$$

então:

$$S_{AMC} = S_{BMC} = \frac{ac}{4}.$$

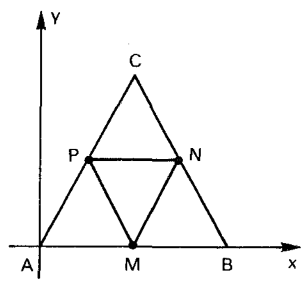


218. Vamos supor $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (b, c)$; então, temos:

$$M = \left(\frac{a}{2}, 0\right),\ N = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right) \text{ e}$$

$$P = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right).$$

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = ac$$



$$D_{MNP} = \begin{vmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 1 \\ \frac{a+b}{2} & \frac{c}{2} & 1 \\ \frac{b}{2} & \frac{c}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{ac}{4}$$

então: $S_{ABC} = \frac{ac}{2} = 4 \cdot \frac{ac}{8} = 4 \cdot S_{MNP}$.

219. $m_r = \frac{2}{3}$ e $s \perp r \Rightarrow m_s = \frac{-3}{2}$

A equação de (s) é: $y - y_0 = \frac{-3}{2}(x - x_0)$

$$3x + 2y - \underbrace{(2y_0 + 3x_0)}_{c} = 0 \Rightarrow 3x + 2y - c = 0$$

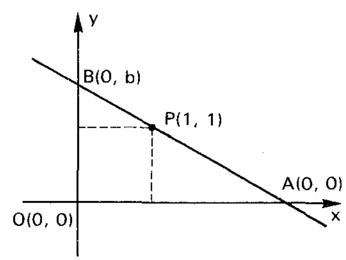
$$s \cap b_{13} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ 3x + 2y - c = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{c}{5}, \frac{c}{5}\right)$$

$$s \cap b_{24} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ 3x + 2y - c = 0 \end{cases} \Rightarrow B(c, -c)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{OAB} = \frac{1}{2}\,|D_{OAB}| = 20 \\ D_{OAB} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{c}{5} & \frac{c}{5} & 1 \\ c & -c & 1 \end{vmatrix} = \frac{-2c^2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}\left|\frac{-2c^2}{5}\right| = 20 \Rightarrow c = \pm 10$$

Portanto: (s) $3x + 2y - 10 = 0$ ou (s) $3x + 2y + 10 = 0$.

220.



1) área do $\Delta OAB = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{ab}{2}$

área do $\Delta OAB = 2$, vem $ab = 4$.

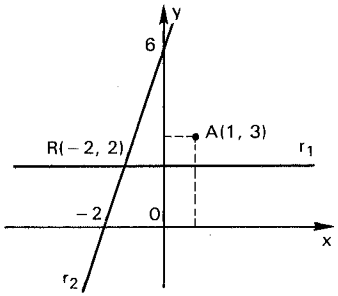
2) pela condição de alinhamento dos pontos AP e B, vem:

$$\begin{vmatrix} 0 & b & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ab = a + b$$

3) Como $ab = 4$ e $a + b = 4$, a e b são as raízes da equação $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ $\Rightarrow \alpha = 2$, ou seja, $a = b = 2$.

$$4) \text{ reta procurada: } \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - 2 = 0$$

221.



1) r_2 na forma paramétrica $\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$ deve ser transformada para a forma geral: $(r_2)\ 2x - y + 6 = 0$.

2) forma geral da reta r que passa pelo ponto $A(1, 3) \Rightarrow y - 3 = m(x - 1) \Rightarrow$ $(r)\ mx - y + 3 - m = 0$

3) Seja $\{P\} = r \cap r_1$: $\begin{cases} mx - y + 3 - m = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow P\left(\dfrac{m-1}{m}, 2\right)$

Seja $\{Q\} = r \cap r_2$: $\begin{cases} mx - y + 3 - m = 0 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\dfrac{m+3}{m-2}, \dfrac{8m-6}{m-2}\right)$

4) A deve ser o ponto médio de PQ, pois $A \in PQ$ e $d_{AP} = d_{AQ}$; então:

$$\frac{\dfrac{m-1}{m} + \dfrac{m+3}{m-2}}{2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{2 + \dfrac{8m-6}{m-2}}{2} = 3$$

A solução para essas duas equações é $m = -\dfrac{1}{2}$ e então

$(r)\ y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x - 1)$ ou ainda $(r)\ x + 2y - 7 = 0$.

5) Para $m = -\dfrac{1}{2}$, temos $P(3, 2)$ e $Q(-1, 4)$.

A interseção de r_1 e r_2 é $R(-2, 2)$.

$$D_{PQR} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow S_{PQR} = 5$$

240. Estabelecemos as equações das bissetrizes:

$$\frac{4x + 3y}{\sqrt{16 + 9}} \pm \frac{6x + 8y + 1}{\sqrt{36 + 64}} = 0$$

$$8x + 6y \pm (6x + 8y + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (t_1)\ 14x + 14y + 1 = 0 \\ (t_2)\ 2x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Sendo $(r)\ 4x + 3y = 0$, então $P(0, 0) \in r$.
Calculemos as distâncias de $P \in r$ às bissetrizes t_1 e t_2:

$$\left.\begin{aligned} d_{Pt_1} &= \left| \frac{14 \cdot 0 + 14 \cdot 0 + 1}{\sqrt{14^2 + 14^2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{28} \\ d_{Pt_2} &= \left| \frac{2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{2^2 + 2^2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d_{Pt_1} < d_{Pt_2}$$

Portanto, $(t_1)\ 14x + 14y + 1 = 0$ é a bissetriz do ângulo agudo.

241. As equações das bissetrizes são:

$$\frac{3x + 4y + 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \pm \frac{3x - 4y - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$$

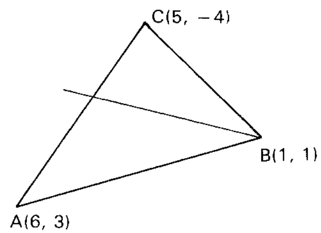
$$3x + 4y + 1 \pm (3x - 4y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (t_1)\ x = 0 \\ (t_2)\ 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Tomemos $P(1, -1) \in r$.
Calculando as distâncias d_{Pt_1} e d_{Pt_2}, vem:

$$\left.\begin{aligned} d_{Pt_1} &= \left| \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{1^2}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{1}} \right| = 1 \\ d_{Pt_2} &= \left| \frac{4(-1) + 1}{\sqrt{4^2}} \right| = \left| \frac{-3}{\sqrt{16}} \right| = \frac{3}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d_{Pt_2} < d_{Pt_1}$$

Então, a bissetriz do ângulo agudo é $(t_2)\ 4y + 1 = 0$.

243.



1) retas:

$$\overleftrightarrow{AB}: \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 5y + 3 = 0$$

$$\overleftrightarrow{BC}: \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + 4y - 9 = 0$$

2) bissetrizes:

$$\frac{2x - 5y + 3}{\sqrt{4 + 25}} \pm \frac{5x + 4y - 9}{\sqrt{25 + 16}} = 0$$

$(t_1)\ (2\sqrt{41} + 5\sqrt{29})x + (-5\sqrt{41} + 4\sqrt{29})y + (3\sqrt{41} - 9\sqrt{29}) = 0$

$(t_2)\ (2\sqrt{41} - 5\sqrt{29})x + (-5\sqrt{41} - 4\sqrt{29})y + (3\sqrt{41} + 9\sqrt{29}) = 0$

3) Seja $E_1 = (2\sqrt{41} + 5\sqrt{29})x + (-5\sqrt{41} + 4\sqrt{29})y + (3\sqrt{41} - 9\sqrt{29})$

Calculando E_1 nos pontos A e C, vem:

$E_1(A) = 33\sqrt{29}$
$E_1(C) = 33\sqrt{41}$

Como $E_1(A)$ e $E_2(C)$ têm sinais iguais, A e C estão no mesmo semiplano em relação a t_1.
Portanto, $(t_2)\ (2\sqrt{41} - 5\sqrt{29})x - (5\sqrt{41} + 4\sqrt{29})y + 3\sqrt{41} + 9\sqrt{29} = 0$ é a bissetriz interna do triângulo ABC, por B.

244. 1) retas PM e PN

$$\overleftrightarrow{PM}: \begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 5y = 0$$

$$\overleftrightarrow{PN}: \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + 2y = 0$$

2) bissetrizes: $\dfrac{2x + 5y}{\sqrt{4 + 25}} \pm \dfrac{5x + 2y}{\sqrt{25 + 4}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (t_1) x + y = 0 \\ (t_2) x - y = 0 \end{cases}$

3) Sendo $E_1 = x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_1(M) = -3 \\ E_1(N) = 3 \end{cases}$

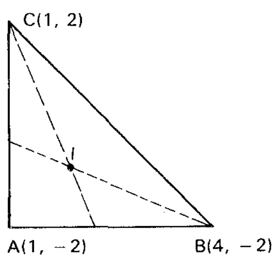
Como $E_1(M)$ e $E_1(N)$ têm sinais contrários, $(t_1)\ x + y = 0$ é bissetriz interna, por P, do triângulo MNP.

4) reta $\overleftrightarrow{MN}: \begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 7 = 0$

$\overleftrightarrow{MN} \cap t_1: \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\dfrac{-7}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

5) $d_{PQ} = \sqrt{\left(\dfrac{-7}{2} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{7}{2} - 0\right)^2} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

245.



O incentro I, centro da circunferência inscrita no triângulo, é o ponto de interseção das bissetrizes internas do triângulo.

1) retas:

$$\overleftrightarrow{BC}: \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 10 = 0$$

$$\overleftrightarrow{AB}: \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y + 2 = 0$$

2) bissetrizes: $\dfrac{4x + 3y - 10}{\sqrt{16 + 9}} \pm \dfrac{y + 2}{\sqrt{1^2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (t_1)\ x + 2y = 0 \\ (t_2)\ 2x - y - 10 = 0 \end{cases}$

3) Seja $E_2 = 2x - y - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_2(A) = -6 \\ E_2(C) = -10 \end{cases} \Rightarrow (t_1)\ x + 2y = 0$ é a bissetriz interna.

4) reta $\overleftrightarrow{AC}: \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$

reta $\overleftrightarrow{BC}$: $4x + 3y - 10 = 0$

5) bissetrizes: $\dfrac{x - 1}{\sqrt{1}} \pm \dfrac{4x + 3y - 10}{\sqrt{16 + 9}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (t_3)\ 3x + y - 5 = 0 \\ (t_4)\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$

6) Seja $E_3 = 3x + y - 5 \Rightarrow \begin{cases} E_3(A) = -4 \\ E_3(B) = 5 \end{cases} \Rightarrow (t_3)\ 3x + y - 5 = 0$ é a bissetriz interna.

7) incentro $= \{I\} = t_1 \cap t_3: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow I(2, -1)$

247. 1) Por determinante, obtemos as equações das retas suportes dos lados AB, BC e AC.

$(\overleftrightarrow{AB})\ 5x - 12y - 21 = 0$
$(\overleftrightarrow{AC})\ 15x - 8y + 21 = 0$
$(\overleftrightarrow{BC})\ 5x + 2y - 49 = 0$

2) Vamos determinar as bissetrizes de $\hat{A}$:

$$\frac{5x - 12y - 21}{\sqrt{25 + 144}} \pm \frac{15x - 8y + 21}{\sqrt{225 + 64}} = 0$$

$(t_1)\ 70x - 77y - 21 = 0$
$(t_2)\ 11x + 10y + 63 = 0$

Fazendo $E = 11x + 10y + 63$, calculamos $E(B)$ e $E(C)$:

$\begin{matrix} E(B) = 182 > 0 \\ E(C) = 238 > 0 \end{matrix} \Rightarrow (t_1)\ 70x - 77y - 21 = 0$ é a bissetriz interna

3) $\{S\} = t_1 \cap (\overleftrightarrow{BC})$

$\begin{cases} 70x - 77y - 21 = 0 \\ 5x + 2y - 49 = 0 \end{cases} \Rightarrow S\left(\dfrac{763}{105}, \dfrac{665}{105}\right)$

4) $d_{AS} = \sqrt{\left(\dfrac{763}{105} + \dfrac{315}{105}\right)^2 + \left(\dfrac{665}{105} + \dfrac{315}{105}\right)^2} = \dfrac{14\sqrt{221}}{15}$

Capítulo V Circunferências

256. $x^2 + y^2 - 3x - 5y - 7 = 0 \Rightarrow C\left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2A}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

O ponto $C_1(x_1, y_1)$, simétrico de C em relação ao eixo das ordenadas, é

$C_1\left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow D = 3$ e $E = -5$.

Portanto: $x^2 + y^2 + 3x - 5y - 7 = 0$.

257. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = r^2 \Rightarrow C\left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2A}\right) = (-1, -2)$

Para obter o simétrico O' da origem O em relação a $C(-1, -2)$, verificamos que C é ponto médio de OO'. Assim, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{0 + x'}{2} = -1 \Rightarrow x' = -2 \\ \frac{0 + y'}{2} = -2 \Rightarrow y' = -4 \end{array}\right\} O'(-2, -4)$$

259. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$ tem centro $C(4, -3)$ e raio $r = 1$.

A ordenada máxima obtém-se partindo da ordenada do centro e adicionando o raio: $y_{máx} = (-3) + 1 = -2$.

261. 1º) $mx^2 + y^2 + 10x - 8y + k = 0$

a) Como $B = 1$, então $A = B = m = 1$.

b) $D^2 + E^2 - 4AF > 0 \Rightarrow 100 + 64 - 4mk > 0 \Rightarrow k < 41$

2º) $mx^2 + 2y^2 + 24x + 24y - k = 0$

a) $A = B \Rightarrow m = 2$

b) $D^2 + E^2 - 4AF > 0 \Rightarrow 576 + 576 - 4m(-k) > 0 \Rightarrow k > -144$

3º) $4x^2 + my^2 - 4x + 3k = 0$

a) $A = B \Rightarrow m = 4$

b) $D^2 + E^2 - 4AF > 0 \Rightarrow 16 + 0 - 4 \cdot 4 \cdot 3k > 0 \Rightarrow k < \frac{1}{3}$

262. $36x^2 + ay^2 + bxy + 24x - 12y + c = 0$

a) $A = B \neq 0 \Rightarrow a = 36$

b) $b = 0$

c) $D^2 + E^2 - 4AF > 0 \Rightarrow 24^2 + (-12)^2 - 4 \cdot 36 \cdot c > 0 \Rightarrow c < 5$

266. $x^2 + y^2 - mx - ny + p = 0$

a) O centro deve pertencer às bissetrizes b_{13} ou b_{24}. Então, $m = n \neq 0$ ou $m = -n \neq 0 \Rightarrow |m| = |n| \neq 0$.

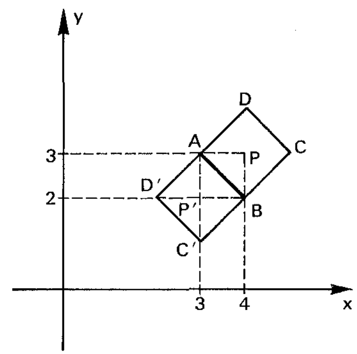
b) O raio deve ser igual às ordenadas do centro $C\left(\frac{|m|}{2}, \frac{|m|}{2}\right)$:

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} = \frac{m^2}{4} \Rightarrow m^2 = 4p.$$

267. $x^2 + y^2 - ax - by + c = 0$ é tangente ao eixo dos x se a ordenada y do centro tiver o mesmo valor do raio.

$$C\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right); r = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{b^2}{4} \Rightarrow c = \frac{a^2}{4}$$

268.



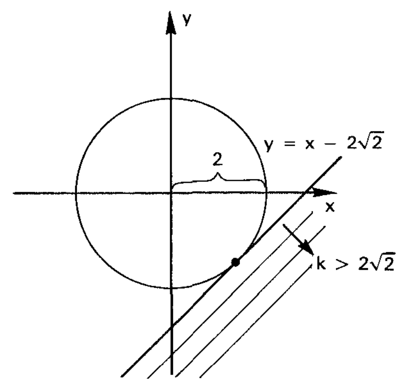
O raio é $r = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} = 1$ (em que $\ell = d_{AB}$).

Verificamos que há duas possibilidades para o centro (P ou P'), em que:

$P(4, 3) \Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$

$P'(3, 2) \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

280.



$A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ é o círculo de centro $(0, 0)$ e raio 2.

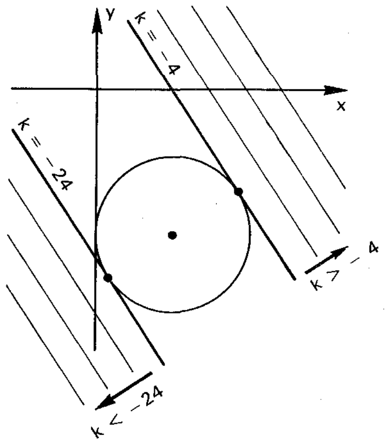
$B = \{(x, y) | x - y \leqslant k\}$ é o semiplano situado acima da reta $y = x - k$. A figura indica a posição da reta para $k = 2\sqrt{2}$ (reta tangente ao círculo).

Se $k > 2\sqrt{2}$, a reta $y = x - k$ será paralela à tangente e abaixo desta.

Então, $A \subset B \Leftrightarrow k \geqslant 2\sqrt{2}$.

281. $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 \leqslant 0\}$ é o círculo de centro $(2, -5)$ e raio $r = 2$.

$B = \{(x, y) | 3x + 4y \leqslant k\}$ é o semiplano situado abaixo da reta $3x + 4y = k$.



Notemos que, variando k, essa reta se desloca no plano mas tendo sempre coeficiente angular $-\frac{3}{4}$. Determinemos k para que a reta $3x + 4y = k$ fique tangente ao círculo dado:

$$\left|\frac{3(2) + 4(-5) - k}{\sqrt{9 + 16}}\right| = 2 \Rightarrow k = -24$$

ou $k = -4$.

Notemos que, se $k > -4$, a reta será exterior ao círculo e o semiplano abaixo dela conterá o círculo.

Notemos que, se $k < -24$, a reta será exterior ao círculo e o semiplano abaixo dela será disjunto com o círculo. Então:

a) $k \geqslant -4$ b) $k < -24$

287. $\begin{cases} 3x + 2y + 7 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-3}{2}x - \dfrac{7}{2} & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8 = 0 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), vem:

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -3$.

Para $x = 1$, $y = -5 \Rightarrow P(1, -5)$.

Para $x = -3$, $y = 1 \Rightarrow Q(-3, 1)$.

288. O sistema

$\begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 = 25 & (1) \\ x = k & (2) \end{cases}$

deverá admitir duas soluções distintas.

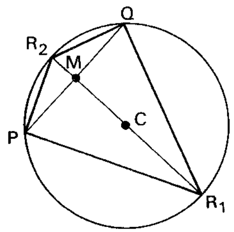
Substituindo (2) em (1), vem:

$y^2 = 25 - (k - 3)^2 = -k^2 + 6k + 16$

então devemos ter:

$-k^2 + 6k + 16 > 0$, ou seja, $-2 < k < 8$.

298.



1) Vamos obter os pontos P e Q, interseção da reta (r) com a circunferência (λ).

$\begin{cases} (r)\ 3x - 4y + 19 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{19}{4} & (1) \\ (\lambda)\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 100 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), vem:

$5x^2 + 26x - 171 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{19}{5}$ ou $x = -9$.

Para $x = \dfrac{19}{5} \Rightarrow y = \dfrac{38}{5} \Rightarrow P\left(\dfrac{19}{5}, \dfrac{38}{5}\right)$.

Para $x = -9 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow Q(-9, -2)$.

2) Seja M o ponto médio de PQ:

$$\left\{\begin{array}{l} x_M = \dfrac{\frac{19}{5} - 9}{2} = \dfrac{-13}{5} \\ y_M = \dfrac{\frac{38}{5} - 2}{2} = \dfrac{14}{5} \end{array}\right. \Rightarrow M\left(\frac{-13}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

Vamos passar por M a reta $s \perp r$. Como $m_r = \dfrac{3}{4}$, temos $m_s = \dfrac{-4}{3}$.

Então: $(s)\ y - y_M = m_s(x - x_M) \Rightarrow y = \dfrac{-4}{3}x - \dfrac{2}{3}$ (3).

3) Vamos obter os pontos R_1 e R_2, interseção da reta (s) com a circunferência (λ).

$\begin{cases} (s)\ y = -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{2}{3} & (3) \\ (\lambda)\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 200 & (2) \end{cases}$

Substituindo (3) em (2), vem: $x^2 - 2x - 35 = 0 \Rightarrow x = 7$ ou $x = -5$.

Para $x = 7 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow R_1(7, -10)$.

Para $x = -5 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow R_2(-5, 6)$.

4) $S_{PQR_1} = \dfrac{1}{2}|D_{PQR_1}|$

$D_{PQR_1} = \begin{vmatrix} -9 & -2 & 1 \\ \frac{19}{5} & \frac{38}{5} & 1 \\ 7 & -10 & 1 \end{vmatrix} = -256$ $\Rightarrow S_{PQR_1} = 128$

$S_{PQR_2} = \dfrac{1}{2}|D_{PQR_2}|$

$D_{PQR_2} = \begin{vmatrix} -9 & -2 & 1 \\ \frac{19}{5} & \frac{38}{5} & 1 \\ -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 64$ $\Rightarrow S_{PQR_2} = 32$

299. 1) Centro de (λ): $C(3, -1)$

2) $(r)\ 2x + y - 6 = 0 \Rightarrow m_r = -2$

$\left.\begin{array}{l} \text{(h): hipotenusa; } h // r \Rightarrow m_h = -2 \\ C(3, -1) \in h \end{array}\right\} \Rightarrow (h)\ y = -2x + 5$

3) $h \cap \lambda$

$$\begin{cases} (h)\ y = -2x + 5 \\ (\lambda)\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 2$$

Para $x = 2$, $y = 1 \Rightarrow A(2, 1)$.
Para $x = 4$, $y = -3 \Rightarrow B(4, -3)$.

4) $$\left.\begin{matrix} k_1 \text{ (cateto) } // \text{ (s) } x - 6 = 0 \\ A(2, 1) \in k_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (k_1)\ x - 2 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} k_2 \text{ (cateto) } // \text{ (s) } x - 6 = 0 \\ B(4, -3) \in k_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (k_2)\ x - 4 = 0$$

5) $k_1 \cap \lambda$

$$\begin{cases} (k_1)\ x - 2 = 0 \\ (\lambda)\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = -3$$

pontos $A(2, 1)$ e $D(2, -3)$

6) $k_2 \cap \lambda$

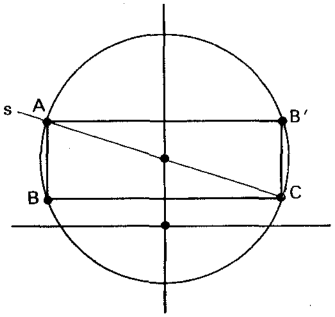
$$\begin{cases} (k_2)\ x - 4 = 0 \\ (\lambda)\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = -3$$

pontos $B(4, -3)$ e $E(4, 1)$

Portanto: ΔABD: $A(2, 1)$; $B(4, -3)$ e $D(2, -3)$
ΔABE: $A(2, 1)$; $B(4, -3)$ e $E(4, 1)$

300. 1) A circunferência dada tem centro $O\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e raio $r = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

2) O triângulo procurado, por ter um lado paralelo ao eixo x e outro paralelo ao eixo y, é retângulo e, portanto, um de seus lados (a hipotenusa) passa pelo centro $O\left(0, \frac{3}{2}\right)$. A reta s que contém a hipotenusa tem equação $y - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}(x - 0)$, poir s é paralela à reta dada cujo declive é $-\frac{3}{2}$.



3) A interseção de (s) $3x + 2y - 3 = 0$ com (λ) $x^2 + y^2 - 3y - 1 = 0$ são os pontos $A(-1, 3)$ e $C(1, 0)$.

4) O outro vértice do triângulo é $B = (x_A, y_C) = (-1, 0)$ ou $B' = (x_C, y_A) = (1, 3)$.

5) Área

$$S_{ABC} = S_{AB'C} = \frac{1}{2} \cdot |D_{ABC}| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

302. 1º) $(\lambda) \Rightarrow C(0, 0);\ r = 4$
$(\lambda') \Rightarrow C'(-3, 2);\ r' = 3$

$$d = \sqrt{13} < \begin{matrix} r + r' = 7 \\ r - r' = 1 \end{matrix} \Rightarrow r - r' < d < r + r' \text{ (secantes)}$$

2º) $(\lambda) \Rightarrow C\left(0, \frac{1}{2}\right);\ r = 1$

$(\lambda') \Rightarrow C'\left(0, \frac{1}{2}\right);\ r' = \frac{1}{2}$

$d = 0 \Rightarrow$ (concêntricas)

3º) $(\lambda) \Rightarrow C(0, 0);\ r = 3\sqrt{2}$
$(\lambda') \Rightarrow C'(-10, 5);\ r' = 2$

$$d = 5\sqrt{5} < \begin{matrix} r + r' = 2 + 3\sqrt{2} \\ r - r' = 3\sqrt{2} - 2 \end{matrix} \Rightarrow d > r + r' \text{ (exteriores)}$$

4º) $(\lambda) \Rightarrow C(2, 3);\ r = 1$
$(\lambda') \Rightarrow C'(-2, 6);\ r' = 4$
$d = 5 = r + r'$ (tangentes exteriormente)

5º) $(\lambda) \Rightarrow C(0, 0);\ r = 9$
$(\lambda') \Rightarrow C'(3, -4);\ r' = 4$

$$d = 5 < \begin{matrix} r + r' = 13 \\ r - r' = 5 \end{matrix} \Rightarrow d = r - r' \text{ (tangentes interiormente)}$$

305. 1) $$\left.\begin{matrix} (\lambda)\ x^2 + y^2 - 10x + 2y + 16 = 0 \Rightarrow C(5, -1);\ r = 2\sqrt{10} \\ (\lambda')\ x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0 \Rightarrow C'(4, -2);\ r' = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r > r'$$

2) Fazendo $(\lambda) - (\lambda')$, vem: $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ (1)
Substituindo (1) em (λ), temos:
$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 2$.
Para $x = 4$, $y = -4 \Rightarrow A(4, -4)$.
Para $x = 2$, $y = -2 \Rightarrow B(2, -2)$.

3) reta AB: $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y = 0$ (observe que esta foi a reta obtida em 1)

4) $d_{C,AB} = \dfrac{|5 - 1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

306. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0 \Rightarrow C'(-2, 3);\ r' = \sqrt{13}$
$d = d_{CC'} = \sqrt{(2 + 2)^2 + (-1 - 3)^2} = 4\sqrt{2}$
Há duas hipóteses para a tangência de circunferências:

I) tangentes exteriormente: $d = r + r'$
$d_{CC'} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{13} + r = 4\sqrt{2} \Rightarrow r = 4\sqrt{2} - \sqrt{13}$
Então: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (4\sqrt{2} - \sqrt{13})^2$.

II) tangentes interiormente: $d = |r - r'|$

$$|\sqrt{13} - r| = 4\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} -13 - r = 4\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{13} - 4\sqrt{2} < 0 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ \sqrt{13} - r = -4\sqrt{2} \Rightarrow r = 4\sqrt{2} + \sqrt{13} \end{cases}$$

Então: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (4\sqrt{2} + \sqrt{13})^2$.

307. 1) $(C_1)\ x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0$
$(C_2)\ x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow O_2(1, 0)$

2) Vamos obter o ponto Q tal que $\{Q\} = C_1 \cap C_2$.
Fazendo $(C_1) - (C_2)$, vem: $x = 0$ e $y = \pm 1 \Rightarrow A(0, -1)$ e $Q(0, 1)$.

3) Determinemos a reta $\overleftrightarrow{QO_2}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = -x + 1$$

4) $\{P\} = \overleftrightarrow{QO_2} \cap C_1$

$$\begin{cases} (QO_2)\ y = -x + 1 \\ (C_1)\ x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$$

Então, para $x = 0$, $y = 1 \Rightarrow Q(0, 1)$ e para $x = -2$, $y = 3 \Rightarrow P(-2, 3)$.

Capítulo VI — Problemas sobre circunferências

309. $\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow O(2, 3);\ r = 4 \\ (s)\ y = x \Rightarrow x - y = 0 \end{cases}$

feixe $t \mathbin{/\!/} s$ é $(t)\ x - y + c = 0$

Aplicando a fórmula $\left| \dfrac{Aa + Bb + k}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = r$, vem:

$$\left| \frac{2 - 3 + c}{\sqrt{1 + 1}} \right| = 4 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c - 1}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow c = 4\sqrt{2} + 1 \\ \text{ou} \\ \dfrac{c - 1}{\sqrt{2}} = -4 \Rightarrow c = -4\sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

Portanto: $(t_1)\ x - y + 4\sqrt{2} + 1 = 0$
$(t_2)\ x - y - 4\sqrt{2} + 1 = 0$

310. $\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \Rightarrow O(1, -1);\ r = \sqrt{2} \\ (s)\ x = -y \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow m_s = -1 \end{cases}$

feixe $t \perp s \Rightarrow (t)\ x - y + c = 0$
Aplicando a fórmula, vem:

$$\left| \frac{c + 2}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2} \Rightarrow c = 0 \text{ ou } c = -4$$

Portanto, $(t_1)\ x - y = 0$; $(t_2)\ x - y - 4 = 0$.

311. 1º) $\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 34 = 0 \Rightarrow O(-1, 1);\ r_\lambda = 6 \\ (r)\ x + 3y = 0 \Rightarrow m_r = \dfrac{-1}{3} \\ \theta = 90° \Rightarrow (t) \perp (r) \Rightarrow \text{feixe } (t)\ 3x - y + c = 0 \end{cases}$

$$d_{Ot} = \left| \frac{3(-1) - 1 + c}{\sqrt{9 + 1}} \right| = 6 \Rightarrow c = 4 \pm 6\sqrt{10}$$

$(t)\ 3x - y + 4 \pm 6\sqrt{10} = 0$

2º) $\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 + 2y - 24 = 0 \Rightarrow O(0, -1);\ r_\lambda = 5 \\ (r)\ x - 2y = 0 \Rightarrow m_r = \dfrac{+1}{2} \\ \theta = 90° \Rightarrow (t) \perp (r) \Rightarrow \text{feixe } (t)\ 2x + y + c = 0 \end{cases}$

$$d_{Ot} = \left| \frac{2 \cdot 0 - 1 + c}{\sqrt{4 + 1}} \right| = 5 \Rightarrow c = 1 \pm 5\sqrt{5}$$

$(t)\ 2x + y + 1 \pm 5\sqrt{5} = 0$

3º) $\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 = 49 \Rightarrow O(0,\ 0);\ r_\lambda = 7 \\ (r)\ 4x + y - 3 = 0 \Rightarrow m_r = -4 \\ \theta = 45° \Rightarrow \text{tg}\ \theta = 1 \end{cases}$

Devemos inicialmente obter m_t para definir a equação do feixe.

$$\text{tg}\ \theta = \text{tg}\ 45° = 1 = \left|\frac{m_r - m_t}{1 + m_r m_t}\right| \Rightarrow \left|\frac{-4 - m_t}{1 - 4\,m_t}\right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_t = \frac{5}{3} \text{ ou } m_t = \frac{-3}{5}$$

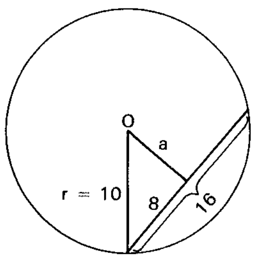
Então, $(t_1)\ y - y_0 = \frac{5}{3}(x - x_0) \Rightarrow 5x - 3y + c = 0$

$$(t_2)\ y - y_0 = \frac{-3}{5}(x - x_0) \Rightarrow 3x + 5y + c = 0$$

$$d_{Ot_1} = \frac{|c|}{\sqrt{34}} = 7 \Rightarrow |c| = 7\sqrt{34} \Rightarrow c = \pm 7\sqrt{34} \Rightarrow (t_1)\ 5x - 3y \pm 7\sqrt{34} = 0$$

$$d_{Ot_2} = \frac{|c|}{\sqrt{34}} = 7 \Rightarrow |c| = 7\sqrt{34} \Rightarrow c = \pm 7\sqrt{34} \Rightarrow (t_2)\ 3x + 5y \pm 7\sqrt{34} = 0$$

312. $\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow O(0,\ 0);\ r_\lambda = 10 \\ (r)\ y = 2x \Rightarrow m_r = 2 \\ (s)\ //\ (r) \Rightarrow m_s = m_r = 2 \Rightarrow y = 2x + c \Rightarrow 2x - y + c = 0\ (s) \end{cases}$



Da figura, temos: $a^2 = r^2 - 8^2 \Rightarrow a = 6.$

Impondo a condição $d_{Os} = a$, vem:

$$\left|\frac{2 \cdot 0 - 0 + c}{\sqrt{4 + 1}}\right| = 6 \Rightarrow c = \pm 6\sqrt{5}$$

$(s)\ 2x - y \pm 6\sqrt{5} = 0$

314. $(\lambda)\ x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow C(0,\ 0)$

$$m_{CT} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0} \Rightarrow m_t = -\frac{x_0}{y_0}$$

equação da reta tangente por $(x_0,\ y_0)$:

$$y - y_0 = \frac{-x_0}{y_0}(x - x_0) \text{ e daí } x_0x + y_0y - (x_0^2 + y_0^2) = 0$$

Como $(x_0,\ y_0) \in (\lambda)$, vem $(t)\ x_0\,x + y_0\,y - r^2 = 0.$

315. a) 1º) $\begin{cases} (C_1)\ x^2 + y^2 + 2ay = 0 \Rightarrow O(0,\ -a);\ r = a\ (a > 0) \\ \text{feixe de retas por } P(\lambda,\ 0)\text{: } y - 0 = m\,(x - \lambda) \text{ ou ainda} \\ \qquad mx - y - m\lambda = 0 \quad (1) \end{cases}$

2º) Como $d_{OP} = \sqrt{\lambda^2 + a^2} > a$, temos duas soluções.

Aplicando a fórmula da distância de ponto a reta, vem:

$$\left|\frac{m \cdot 0 - (-a) - m\lambda}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 0 \Rightarrow m = \frac{2a\lambda}{\lambda^2 - a^2}\ (2) \text{ ou } m = 0\ (3)$$

3º) Substituindo (2) em (1), temos:

$$(t_1)\ \frac{2a\lambda}{\lambda^2 - a^2}\,x - y - \frac{2a\lambda^2}{\lambda^2 - a^2} = 0.$$

Substituindo (3) em (1), temos:

$(t_2)\ 0x - y - 0\lambda = 0 \Rightarrow y = 0.$

4º) Calculando as interseções $(C_1) \cap (t_1)$ e $(C_1) \cap (t_2)$, vem:

$$(C_1) \cap (t_1) \Rightarrow x = \frac{2a^2\lambda}{\lambda^2 + a^2} \Rightarrow y = \frac{-2a\lambda^2}{\lambda^2 + a^2} \Rightarrow A\left(\frac{2a^2\lambda}{\lambda^2 + a^2},\ \frac{-2a\lambda^2}{\lambda^2 + a^2}\right)$$

$$(C_2) \cap (t_2) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B(0,\ 0).$$

b) O ponto Q com ordenada λ pertence à reta $x + a = 0$, portanto tem abscissa $-a$: $Q(-a,\ \lambda)$.

Provemos que os pontos A, B e Q são colineares:

$$\begin{vmatrix} \frac{2a^2\lambda}{\lambda^2 + a^2} & \frac{-2a\lambda^2}{\lambda^2 + a^2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \frac{2a^2\lambda^2}{\lambda^2 + a^2} - \frac{2a^2\lambda^2}{\lambda^2 + a^2} = 0$$

316. $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \Rightarrow C(-2,\ 4);\ r = 5$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow y^2 - 8y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow P(1,\ 0) \\ \text{ou} \\ y = 8 \Rightarrow Q(1,\ 8) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} P(1,\ 0) \\ C(-2,\ 4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (t_1)\ y - y_0 = \frac{a - x_0}{y_0 - b}(x - x_0)$$

$$y - 0 = \frac{-2 - 1}{0 - 4}(x - 1) \Rightarrow 3x - 4y - 3 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} Q(1,\ 8) \\ C(-2,\ 4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (t_2)\ y - 8 = \frac{-2 - 1}{8 - 4}(x - 1) \Rightarrow 3x + 4y - 35 = 0$$

317. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0 \Rightarrow C(1,\ 3) \text{ e } r = \sqrt{5} \\ \lambda(2x + y + 5) + \mu(x + y + 1) = 0 \Rightarrow P(-4,\ 3) \text{ é o centro do feixe de retas concorrentes.} \end{cases}$

Uma reta do feixe é $y - 3 = m(x + 4)$ ou ainda $mx - y + 4m + 3 = 0.$

Aplicando a fórmula da distância de ponto a reta, temos:

$$\left|\frac{m \cdot 1 - 3 + 4m + 3}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = \sqrt{5} \Rightarrow m = \pm\frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - y + 4\left(\dfrac{1}{2}\right) + 3 = 0 \Rightarrow x - 2y + 10 = 0 \\ \dfrac{-1}{2}x - y + 4\left(\dfrac{-1}{2}\right) + 3 = 0 \Rightarrow x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

318. $(\lambda)\ x^2 + y^2 + 2y = 0 \Rightarrow C(0, -1),\ r = 1$

Centro do feixe: $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow P(1, 3)$ exterior a $\lambda \Rightarrow$ 2 soluções

Considerando que $x_P = 1$, $x_C = 0$ e $r = 1$, então uma das tangentes (t_1) é a reta $x = 1$ ou $(t_1)\ x - 1 = 0$.

Calculando a outra tangente, temos $y - 3 = m(x - 1)$ ou ainda $mx - y + 3 - m = 0$.

Então, vem:

$$\left|\frac{m \cdot 0 + 1 + 3 - m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 1 \Rightarrow m = \frac{15}{8} \Rightarrow 15x - 8y + 9 = 0\ (t_2).$$

319. $(\lambda)\ x^2 + y^2 + 2y - 2 = 0 \Rightarrow C(0, -1);\ r = \sqrt{3}$

$d_{PC} = \sqrt{10} > r \Rightarrow$ P é exterior a λ

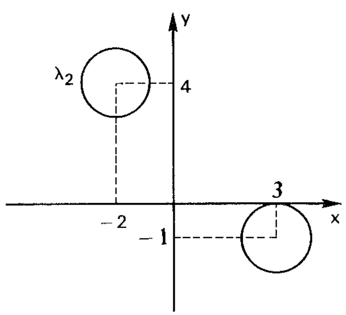
Então, feixe de retas por P: $mx - y - 3m = 0$.

Como as retas devem ser externas, a distância do centro $C(0, -1)$ às retas deve ser maior que o raio.

$$\left|\frac{m \cdot 0 + 1 - 3m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| > \sqrt{3} \Rightarrow m < \frac{3 - \sqrt{21}}{6} \text{ ou } m > \frac{3 + \sqrt{21}}{6}$$

320. $(\lambda_1)\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \Rightarrow O_1(3, -1);\ r_1 = 1$

$(\lambda_2)\ x^2 + y^2 + 4x - 8y + 19 = 0 \Rightarrow O_2(-2, 4);\ r_2 = 1$



1º) Verifica-se que $x = 0$ é uma das retas;

2º) as demais pertencem ao feixe $y = mx$. Então, $(t)\ mx - y = 0$.

3º) $d_{O_1t} = \dfrac{|3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$ (I)

$d_{O_2t} = \dfrac{|-2m - 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$ (II)

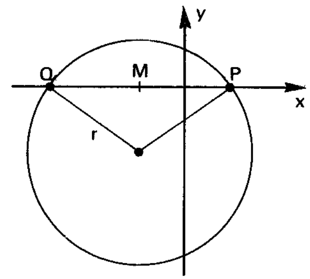
(I) $4m^2 + 3m > 0 \Rightarrow m < \dfrac{-3}{4}$ ou $m > 0$

(II) $3m^2 + 16m + 15 > 0 \Rightarrow m < \dfrac{-8 - \sqrt{19}}{3}$ ou $m > \dfrac{-8 + \sqrt{19}}{3}$

Fazendo a interseção das soluções de (I) e (II), vem:

$$m < \frac{-8 - \sqrt{19}}{3} \text{ ou } \frac{-8 + \sqrt{19}}{3} < m < \frac{-3}{4} \text{ ou } m > 0.$$

321. $(\lambda)\ x^2 + y^2 + 5x + 8y + a = 0 \Rightarrow C\left(\dfrac{-5}{2}, -4\right)$



$\overline{PQ} = 9$, sendo $P(x_P, 0)$ e $Q(x_Q, 0)$.

M é ponto médio de PQ, $M\left(\dfrac{-5}{2}, 0\right)$.

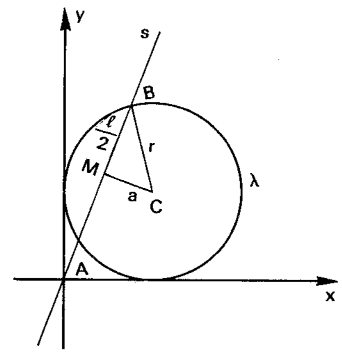
Então: $x_P = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{9}{2} \Rightarrow x_P = 2$

$x_Q = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{2} \Rightarrow x_Q = -7$

Portanto, $P(2, 0)$ e $Q(-7, 0)$.

Substituindo qualquer dos pontos (P ou Q) em λ, obtém-se $a = -14$.

322.



$(\lambda)\ (-5)^2 + (y - 5)^2 = 5 \Rightarrow C(5, 5);\ \lambda = 5$

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔBMC, temos: $r^2 = \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \dfrac{7\sqrt{5}}{17}$.

Assim, vamos impor que a distância do centro C à reta $(s)\ mx - y = 0$ seja a:

$$d_{Cs} = \frac{|5m - 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{7\sqrt{5}}{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18m^2 - 85m + 18 = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{9}$$

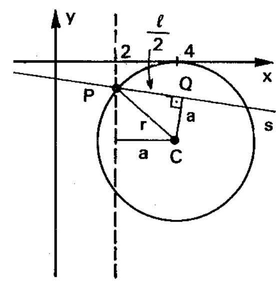
ou $m = \dfrac{9}{2}$

Portanto: $2x - 9y = 0$ ou $9x - 2y = 0$.

323. 1º) $(\lambda)\ (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9 \Rightarrow C(4, -3)$ e $r = 3$

$P(2, 1) \in (s) \Rightarrow (s) = mx - y + 1 - 2m = 0$

$P(2, 1) \in \lambda$



2º) Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔPQC:

$$r^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow a = 2.$$

3º) $d_{Cs} = \dfrac{|4m + 3 + 1 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \Rightarrow \dfrac{|2m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \Rightarrow$

$16m + 12 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{-3}{4} \Rightarrow 3x + 4y - 10 = 0$

4º) A outra solução é $x = 2$.

324. 1) (r) $3x + y = 0 \Rightarrow m_r = -3$

$\left.\begin{array}{l}(s)\ y - y_0 = m_s(x - x_0)\\ P(0, 2) \in (s)\end{array}\right\}\ y - 2 = m_s(x - 0)\ \ (s)\ m_sx - y + 2 = 0$

$\text{tg } 45° = 1 = \left|\dfrac{m_r - m_s}{1 + m_rm_s}\right| \Rightarrow m_s = \dfrac{-1}{2}$ (rejeitado) ou $m_s = 2$

$\therefore$ (s) $2x - y + 2 = 0$

2) $Q(x_Q, y_Q) \in (s) \Rightarrow Q(x_Q, 2x_Q + 2)$

$d_{PQ} = \sqrt{x_Q^2 + (2x_Q + 2 - 2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow x_Q = \pm 1$

Para $x_Q = 1 \Rightarrow y_Q = 4 \Rightarrow Q(1, 4)$.

Para $x_Q = -1 \Rightarrow y_Q = 0 \Rightarrow Q(-1, 0)$.

3) Os pontos $P(0, 2)$ e $Q(1, 4)$ pertencem à circunferência λ_1.
Os pontos $P(0, 2)$ e $Q(-1, 0)$ pertencem à circunferência λ_2.
Além disso, a reta (r) $3x + y = 0$ contém o diâmetro da circunferência (λ_1 ou λ_2); portanto, $C(x_C, y_C)$ é tal que $y_C = -3x_C$.

4) Considerando a equação genérica da circunferência, vem:
$(\lambda)\ (x - x_C)^2 + (y - y_C) = r^2$

1º) $P(0, 2) \in \lambda_1 \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 - 4y_C + 4 - r^2 = 0$ ①

$Q(1, 4) \in \lambda_1 \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 - 2x_C - 8y_C + 17 - r^2 = 0$ ②

Sendo $y_C = -3x_C$ ③, resolvendo o sistema formado por ①, ② e ③, resulta: $x_C = \dfrac{-13}{10}$, $y_C = \dfrac{39}{10}$ e $r^2 = \dfrac{53}{10}$.

$(\lambda_1)\ \left(x + \dfrac{13}{10}\right)^2 + \left(y - \dfrac{39}{10}\right)^2 = \dfrac{53}{10}$

2º) $P(0, 2) \in \lambda_2 \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 - 4y_C + 4 - r^2 = 0$ ①

$Q(-1, 0) \in \lambda_2 \Rightarrow x_C^2 + y_C^2 + 2x_C + 1 - r^2 = 0$ ④

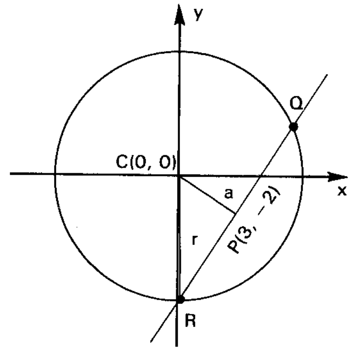
Novamente, $y_C = -3x_C$ ③.

Resolvendo o sistema de ①, ④ e ③, vem:

$x_C = \dfrac{-3}{10}$, $y_C = \dfrac{9}{10}$ e $r^2 = \dfrac{13}{10}$.

$(\lambda_2)\ \left(x + \dfrac{3}{10}\right)^2 + \left(y - \dfrac{9}{10}\right)^2 = \dfrac{13}{10}$

325.



1) $\overline{CP} = a = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

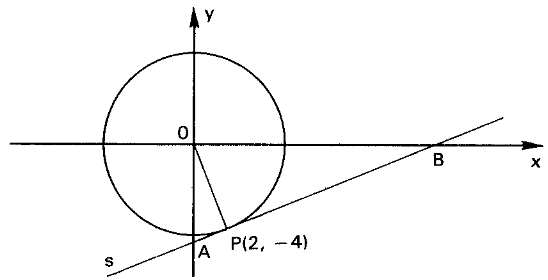
2) $m_a = \dfrac{-2}{3}$

3) Como P é ponto médio da corda, então $CP \perp QR \Rightarrow m_{QR} = \dfrac{3}{2}$.

4) QR passa por $P(3, -2)$ e $m_{QR} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$y + 2 = \dfrac{3}{2}(x - 3) \Rightarrow 3x - 2y - 13 = 0$.

326.



1) $m_{OP} = \dfrac{-4}{2} = -2 \Rightarrow m_s = \dfrac{1}{2}$

2) $\left.\begin{array}{l} m_s = \dfrac{1}{2}\\ P(2, -4) \in s\end{array}\right\} \Rightarrow y + 4 = \dfrac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x - 2y - 10 = 0$ (s)

3) Interseção de (s) com os eixos:
$x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow A(0, -5)$
$y = 0 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow B(10, 0)$

4) Área do ΔOAB:

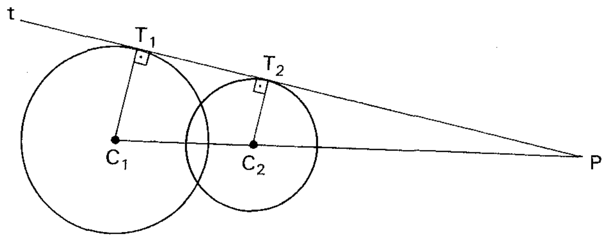
1ª solução: Área $= \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \dfrac{\overline{OB} \cdot \overline{OA}}{2} = \dfrac{10 \cdot 5}{2} = 25$

2ª solução: $\left.\begin{array}{l} S_{OAB} = \dfrac{1}{2}|D_{OAB}| \\ D_{OAB} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow S_{OAB} = 25$

327. I) $(\lambda_1)\ x^2 + y^2 = 64 \Rightarrow C_1(0, 0)$ e $r_1 = 8$

$(\lambda_2)\ \left(x - \frac{25}{3}\right)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow C_2\left(\frac{25}{3}, 0\right)$ e $r_2 = 3$

$d_{C_1C_2}\ \frac{25}{3} \Rightarrow r_1 - r_2 < d_{C_1C_2} < r_1 + r_2 \Rightarrow \lambda_1$ e λ_2 secantes.



II) Se t é tangente comum conforme a figura, então:

$$\Delta PC_1T_1 \sim \Delta PC_2T_2 \Rightarrow \frac{\overline{C_1P}}{\overline{C_2P}} = \frac{\overline{C_1T_1}}{\overline{C_2T_2}} = \frac{8}{3}.$$

Usando a teoria da razão de segmentos colineares, vem:

$$\frac{x_P - x_{C_1}}{x_P - x_{C_2}} = \frac{8}{3} \text{ e } y_{C_1} = y_{C_2} = y_P$$

e daí

$$\frac{x_P - 0}{x_P - \frac{25}{3}} = \frac{8}{3} \Rightarrow x_P = \frac{40}{3} \text{ e } y_P = 0$$

III) Equação da reta t:

$$P \in t \Rightarrow y - 0 = m\left(x - \frac{40}{3}\right) \Rightarrow 3mx - 3y - 40m = 0$$

$$d_{C_1t} = r_1 \Rightarrow \left|\frac{3m \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 40m}{\sqrt{9m^2 + 9}}\right| = 8 \Rightarrow m = \pm\frac{3}{4}$$

então, $(t)\ 3x + 4y - 40 = 0$ ou $(t)\ 3x - 4y - 40 = 0$.

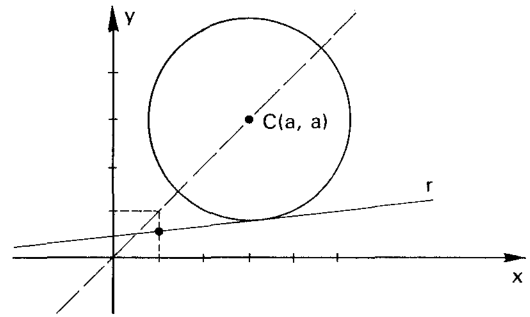
328. Calculando as interseções das retas, vem: $A(0, -2)$, $B(-2, 0)$ e $C(0, 0)$.

$A \in \lambda \Rightarrow (a - 0)^2 + (b + 2)^2 = r^2$
$B \in \lambda \Rightarrow (a + 2)^2 + (b - 0)^2 = r^2$
$C \in \lambda \Rightarrow (a - 0)^2 + (b - 0)^2 = r^2$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = -1$, $b = -1$, $r = \sqrt{2}$.
Portanto, $C(-1, -1)$ e $r = \sqrt{2}$.

329. $A \in \lambda \Rightarrow (a + 4)^2 + (b - 4)^2 = r^2$
$B \in \lambda \Rightarrow (a + 7)^2 + (b - 3)^2 = r^2$
$C \in \lambda \Rightarrow (a + 8)^2 + (b + 4)^2 = r^2$
Resolvendo o sistema, obtemos: $a = -4$, $b = -1$ e $r = 5$.
Portanto, a equação da circunferência é $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

330.



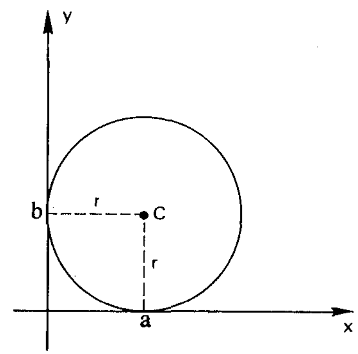
$C(a, b) \in b_{13} \Rightarrow b = a \Rightarrow C(a, a)$

$$d_{Ct} = r \Rightarrow \left|\frac{5a - 12a + 3}{\sqrt{25 + 144}}\right| = 4 \Rightarrow a = -7 \text{ ou } a = \frac{55}{7}$$

portanto a circunferência é:

$$(x + 7)^2 + (y + 7)^2 = 16 \text{ ou } \left(x - \frac{55}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{55}{7}\right)^2 = 16.$$

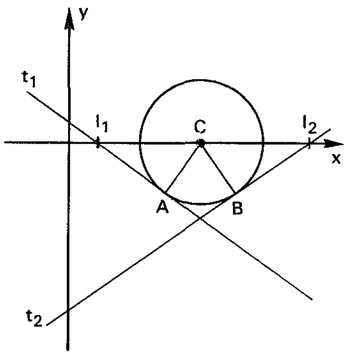
331.



λ tg Ox $\Rightarrow |b| = r$ (1)
λ tg Oy $\Rightarrow |a| = r$ (2)
$C \in s \Rightarrow 2a + b - 3 = 0$
Resolvendo esse sistema, obtemos:
$a = b = r = 1$ ou $a = -b = r = 3$

e, portanto, há duas soluções:
$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ou $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

332.



$C \in Ox \Rightarrow b = 0$ (1)

$\lambda \text{ tg } t_1 \Rightarrow \left| \dfrac{2a + 3b - 1}{\sqrt{13}} \right| = r$ (2)

$\lambda \text{ tg } t_2 \Rightarrow \left| \dfrac{2a - 3b - 7}{\sqrt{13}} \right| = r$ (3)

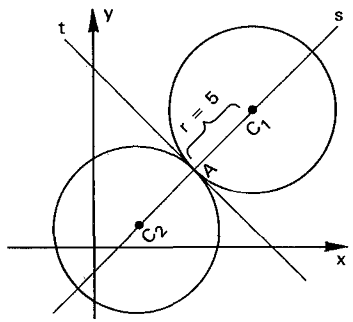
Resolvendo esse sistema, obtemos:

$a = 2,\ b = 0$ e $r = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

e, portanto, a solução é:

$(x - 2)^2 + y^2 = \dfrac{9}{13}$.

333.



I) (t) $3x + 4y - 35 \Rightarrow m_t = -\dfrac{3}{4}$

$s \perp t \Rightarrow m_s = \dfrac{4}{3}$

$A \in s \Rightarrow y - 5 = \dfrac{4}{3}(x - 5)$

(s) $4x - 3y - 5 = 0$

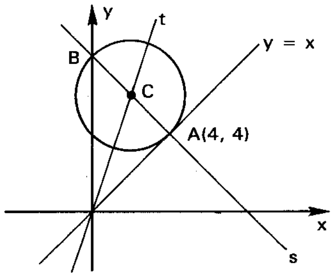
II) Temos, então:

$C \in s \Rightarrow 4a - 3b - 5 = 0$ (1)

$AC = r \Rightarrow (a - 5)^2 + (b - 5)^2 = 25$ (2)

Resolvendo o sistema, obtemos:
($a = 8$ e $b = 9$) ou ($a = 2$ e $b = 1$)
e, portanto, há duas soluções:
$(x - 8)^2 + (y - 9)^2 = 25$ ou $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

334.



$C \in s \Rightarrow b = 3a$ (1)

$\lambda \text{ tg } b_{13} \Rightarrow \left| \dfrac{a - b}{\sqrt{2}} \right| = R$ (2)

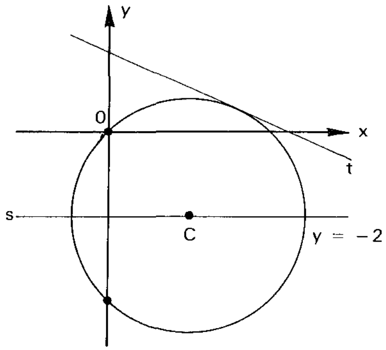
$A \in \lambda \Rightarrow (a - 4)^2 + (b - 4)^2 = R^2$ (3)

Resolvendo esse sistema, vem:

$a = 2,\ b = 6$ e $R = 2\sqrt{2}$

portanto, $R^2 = 8$.

335.



$O \in \lambda \Rightarrow a^2 + b^2 = r^2$ (1)

$C \in s \Rightarrow b = -2$ (2)

$t \text{ tg } \lambda \Rightarrow \left| \dfrac{a + b - 4}{\sqrt{2}} \right| = r$ (3)

Substituindo (2) em (1) e (3), resulta:

(1) $a^2 + 4 = r^2$ e (3) $\left| \dfrac{a - 6}{\sqrt{2}} \right| = r$

então $a^2 + 4 = \dfrac{(a - 6)^2}{2}$ e daí $a = 2$ ou $a = -14$.

Se $a = 2$, então $r^2 = 8$ e, se $a = -14$, então $r^2 = 200$.

Há duas soluções para o problema:

$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$ ou $(x + 14)^2 + (y + 2)^2 = 200$.

336. $C \in s \Rightarrow a - 3b - 6 = 0$ (1)

$\lambda \text{ tg } Ox \Rightarrow |b| = r$ (2)

$\lambda \text{ tg } Oy \Rightarrow |a| = r$ (3)

Resolvendo esse sistema, temos:

($a = b = -3$ e $r = 3$) ou $\left(a = -b = \dfrac{3}{2} \text{ e } r = \dfrac{3}{2}\right)$

portanto, as circunferências são:

$(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ ou $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$.

337. $O \in \lambda \Rightarrow a^2 + b^2 = R^2$ (1)

$r \text{ tg } \lambda \Rightarrow d_{Cr} = R \Rightarrow \left| \dfrac{4a - 3b - 25}{5} \right| = R$ (2)

$s \text{ tg } \lambda \Rightarrow d_{Cs} = R \Rightarrow \left| \dfrac{4a + 3b + 1}{5} \right| = R$ (3)

Comparando (2) e (3), resulta:

$a = 3$ ou $b = -\dfrac{13}{3}$.

Se $a = 3$, temos:

$9 + b^2 = R^2$ e $\left| \dfrac{13 + 3b}{5} \right| = R \Rightarrow (b = 4 \text{ e } R = 5)$ ou $\left(b = \dfrac{7}{8} \text{ e } R = \dfrac{25}{8}\right)$.

Se $b = -\dfrac{13}{3}$, temos:

$a^2 + \dfrac{169}{9} = R^2$ e $\left| \dfrac{4a - 12}{5} \right| = R \Rightarrow$ não existe a, R reais.

Portanto, o problema admite duas soluções:

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ ou $(x - 3)^2 + \left(y - \frac{7}{8}\right)^2 = \frac{625}{64}$.

338. $A \in \lambda \Rightarrow (a + 1)^2 + (b - 2)^2 = r^2$ (1) e $r \neq 1$

Ox tg $\lambda \Rightarrow |b| = r$ (2)

Oy tg $\lambda \Rightarrow |a| = r$ (3)

De (2) e (3) vem $|a| = |b|$, então:

1.ª possibilidade: $a = b$

(1) $(a + 1)^2 + (a - 2)^2 = a^2 \Rightarrow a^2 - 2a + 5 = 0 \Rightarrow \nexists a \in \mathbb{R}$

2.ª possibilidade: $a = -b$

(1) $(a + 1)^2 + (-a - 2)^2 = a^2 \Rightarrow a^2 + 6a + 5 = 0 \Rightarrow a = -1$ ou $a = -5$

Se $a = -1$, então $r = 1$. (não convém)

Se $a = -5$, então $b = 5$ e $r = 5$.

Solução: $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

339. $A \in \lambda \Rightarrow (a - 8)^2 + b^2 = r^2$ (1)

$O \in \lambda \Rightarrow a^2 + b^2 = r^2$ (2)

λ tg $b_{13} \Rightarrow \left|\frac{a - b}{\sqrt{2}}\right| = r$ (3)

Comparando (1) e (2), vem $a = 4$, então:

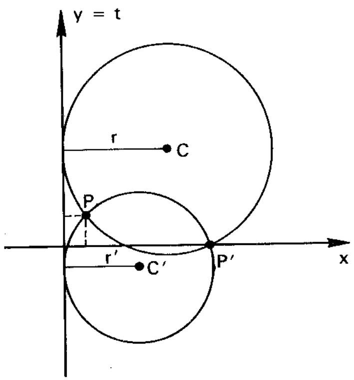
(2) $r^2 = 16 + b^2$ e (3) $r = \left|\frac{4 - b}{\sqrt{2}}\right|$

e daí $16 + b^2 = \frac{(4 - b)^2}{2} \Rightarrow b = -4$.

$r^2 = 16 + 16 = 32$

Solução: $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 32$.

340.



1) $P \in \lambda \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = r^2$ (1)

$P' \in \lambda \Leftrightarrow (a - 8)^2 + b^2 = r^2$ (2)

Comparando (1) e (2), vem:

$b = 7a - 31$ (3)

2) (t) $x = 0$ tg $\lambda \Leftrightarrow d_{Ct} = \frac{|a|}{1} = r$ (4)

Substituindo (3) e (4) em (2), vem:

$(r - 8)^2 + (7r - 31)^2 = r^2 \Rightarrow r = \frac{+205}{49}$ ou $r = 5$.

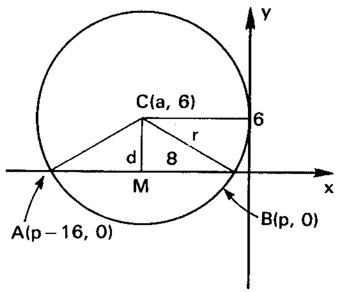
Em (4) $a = \pm r$, mas, pelas condições do problema, $a > 0$.

Então: $a = 5$ ou $a = \frac{205}{49}$.

Substituindo esses valores em (3): $b = 4$ ou $b = \frac{-12}{7}$.

Portanto: $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$ ou $\left(x - \frac{205}{49}\right)^2 + \left(y + \frac{12}{7}\right)^2 = \left(\frac{205}{49}\right)^2$.

341.



1.ª solução:

1) (t) $x = 0$ tg $\lambda \Rightarrow \frac{|a|}{1} = r \Rightarrow a = \pm r$, ou seja, $a = -r$, porque $a < 0$.

2) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *CMB*, temos:

$r^2 = d^2 + \overline{MB}^2 \Rightarrow r^2 = 36 + 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 10$.

Portanto, $a = -10$.

3) $(x + 10)^2 + (y - 6)^2 = 100$

2.ª solução:

(t) $x = 0$ tg $\lambda \Rightarrow \frac{|a|}{1} = r \Rightarrow a = \pm r$ ou $a = -r$ (1), porque $a < 0$

$A(p - 16, 0) \in \lambda \Leftrightarrow (a - p + 16)^2 + 6^2 = r^2$ (2)

$B(p, 0) \in \lambda \Leftrightarrow (a - p)^2 + 6^2 = r^2$ (3)

Resolvendo o sistema de (2) e (3), vem $p = a + 8$ (4).

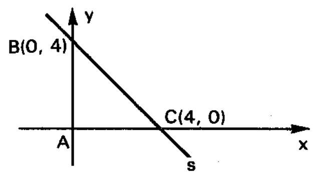
Substituindo (1) e (4) em (3), temos: $r = 10 \Rightarrow a = -10$.

Então: $(x + 10)^2 + (y - 6)^2 = 100$.

342. O centro da circunferência inscrita é o incentro (ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo).

Obs.: Uma solução é obter as bissetrizes e sua interseção. No caso, vamos usar a teoria das distâncias.

Seja (*s*) a reta dos pontos *B* e *C*: (*s*) $x + y - 4 = 0$.



(1) $d_{Cs} = \frac{|a + b - 4|}{\sqrt{2}} = r$

$\left.\begin{array}{l} (2)\ d_{Cx} = \frac{|b|}{1} = r \\ (3)\ d_{Cy} = \frac{|a|}{1} = r \end{array}\right\} r = |a| = |b|$

Como o centro $C(a, b)$ pertence à bissetriz do primeiro quadrante, então $b = a = r$ (4).
Substituindo (4) em (1), vem:
$|a + a - 4| = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 4 \pm 2\sqrt{2}$.
A solução $a = 4 + 2\sqrt{2}$ é rejeitado por estar fora do ΔABC.
Portanto:
$(x - 4 + 2\sqrt{2})^2 + (y - 4 + 2\sqrt{2})^2 = (4 - 2\sqrt{2})^2$.

343. a) 1º) (r) $3x - 4y - 25 = 0 \Rightarrow m_r = \dfrac{3}{4}$

2º) $\sphericalangle rs$ é tal que $\operatorname{arctg} \dfrac{24}{7} = \hat{rs} \Rightarrow \operatorname{tg} \hat{rs} = \dfrac{24}{7}$.

$$\text{Assim, } \operatorname{tg} \hat{rs} = \frac{24}{7} = \left| \frac{\frac{3}{4} - m_s}{1 + \frac{3}{4} m_s} \right| \Rightarrow m_s = \frac{-3}{4} \text{ ou } m_s = \frac{-117}{44}.$$

Como $-1 < m_s < 0$, então devemos ficar com $m_s = \dfrac{-3}{4}$.

Como $A(-3, 5) \in s$, então (s) $y - 5 = \dfrac{-3}{4}(x + 3)$ e daí

$$(s)\ 3x + 4y - 11 = 0$$

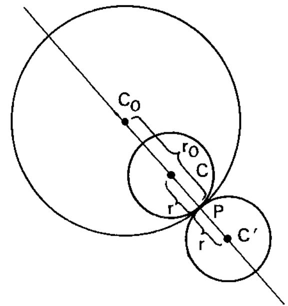
b) $t \,//\, s \Leftrightarrow m_t = m_s = \dfrac{-3}{4}$

$B(3, -12) \in t \Rightarrow (t)\ y + 12 = \dfrac{-3}{4}(x - 3) \Rightarrow (t)\ 3x + 4y + 39 = 0$

$$c) \begin{cases} (r) \operatorname{tg} \lambda \Leftrightarrow \left(\dfrac{3a - 4b - 25}{\sqrt{25}}\right)^2 = r^2 \ (1) \\ (s) \operatorname{tg} \lambda \Leftrightarrow \left(\dfrac{3a + 4b - 11}{\sqrt{25}}\right)^2 = r^2 \ (2) \\ (t) \operatorname{tg} \lambda \Leftrightarrow \left(\dfrac{3a + 4b + 39}{\sqrt{25}}\right)^2 = r^2 \ (3) \end{cases}$$

Desenvolvendo os quadrados e, por escalonamento, resolvendo o sistema, vem: $a = \dfrac{-4b}{3} - \dfrac{14}{3}$ em (3).
Substituindo esse valor de a em (2), vem:
$4b^2 + 39b + 56 = 0 \Rightarrow b = \dfrac{-7}{4}$ ou $b = -8$.
Para $b = \dfrac{-7}{4}$, vem $a = \dfrac{-7}{3}$, que em (1) dá $r^2 = 25$.
Para $b = -8$, vem $a = 6$, que em (1) dá $r^2 = 25$.
Portanto: $\left(x + \dfrac{7}{3}\right)^2 + \left(y + \dfrac{7}{4}\right)^2 = 25$ ou $(x - 6)^2 + (x + 8)^2 = 25$ é a solução.

344.



Usando a razão entre segmentos, temos:

(I) $\dfrac{\overline{C_0C}}{\overline{CP}} = \dfrac{r_0 - r}{r} \Rightarrow \dfrac{\overline{C_0C}}{\overline{CP}} = \dfrac{3}{2}$

então:

$\dfrac{x_C - x_{C_0}}{x_P - x_C} = \dfrac{a - 0}{3 - a} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow a = \dfrac{9}{5}$

$\dfrac{y_C - y_{C_0}}{y_P - y_C} = \dfrac{b - 0}{-4 - b} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow b = \dfrac{-12}{5}$

$\left(x - \dfrac{9}{5}\right)^2 + \left(y + \dfrac{12}{5}\right)^2 = 4$

(II) $\dfrac{\overline{C_0C'}}{\overline{C'P}} = \dfrac{r_0 + r'}{r'} \Rightarrow \dfrac{\overline{C_0C'}}{\overline{C'P}} = \dfrac{-7}{2}$

então:

$\dfrac{x_{C'} - x_{C_0}}{x_P - x_{C'}} = \dfrac{a' - 0}{3 - a'} = \dfrac{-7}{2} \Rightarrow a' = \dfrac{21}{5}$

$\dfrac{y_{C'} - y_{C_0}}{y_P - y_{C'}} = \dfrac{b' - 0}{-4 - b'} = \dfrac{-7}{2} \Rightarrow b' = \dfrac{-28}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x - \dfrac{21}{5}\right)^2 + \left(y + \dfrac{28}{5}\right)^2 = 4$

345. $\lambda \operatorname{tg} \lambda_0 \Leftrightarrow d_{CC_0} = r \pm r_0 \Leftrightarrow (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2 = (r \pm r_0)^2$
$(-8 - 0)^2 + (6 - 0)^2 = (r \pm 6)^2$

$$r^2 \pm 12r - 64 = 0 \Rightarrow r = \frac{\pm 12 \pm 20}{2} \begin{cases} r' = 4 \\ r'' = -16 \text{ (rej.)} \\ r''' = 16 \\ r^{iv} = -4 \text{ (rej.)} \end{cases}$$

$(x + 8)^2 + (x - 6)^2 = 16$ ou $(x + 8)^2 + (x - 6)^2 = 256$

346. Usando a razão entre os segmentos, temos:

(I) $\dfrac{\overline{C_0C}}{\overline{CP}} = \dfrac{r_0 - r}{r} \Rightarrow \dfrac{\overline{C_0C}}{\overline{CP}} = 14$, então:

$\dfrac{0 - a}{a + 9} = 14 \Rightarrow a = \dfrac{-42}{5}$

$\dfrac{0 - b}{b - 12} = 14 \Rightarrow b = \dfrac{56}{5}$

$\Rightarrow \left(x + \dfrac{42}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{56}{5}\right)^2 = 1$

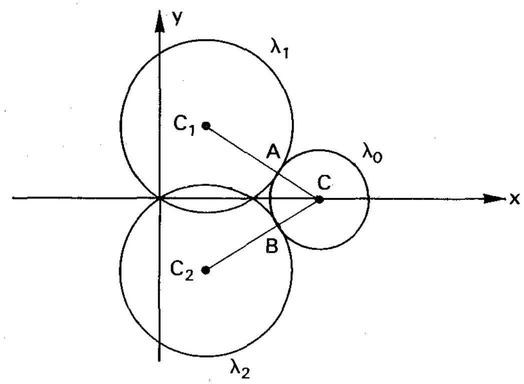
(II) $\dfrac{\overline{C_0C'}}{\overline{C'P}} = \dfrac{r_0 - r'}{r'} \Rightarrow \dfrac{\overline{C_0C'}}{\overline{C'P}} = -16$, então:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{0 - a'}{a' + 9} = -16 \Rightarrow a' = \dfrac{-48}{5} \\ \dfrac{0 - b'}{b' - 12} = -16 \Rightarrow b' = \dfrac{64}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left(x + \frac{48}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{64}{5}\right)^2 = 1$$

347. $P \in \lambda \Leftrightarrow (a - 0)^2 + (b - 12)^2 = r^2$ (1)
$P' \in \lambda \Leftrightarrow (a - 5)^2 + (b - 7)^2 = r^2$ (2)
$\lambda_0 \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow (a - 0)^2 + (b - 0)^2 = (r + 8)^2$ (3)
Comparando as equações (1) e (2), vem:
$a^2 + b^2 - 24b + 144 = a^2 - 10a + 25 + b^2 - 14b + 49 \Rightarrow a = b - 7$ (4)
Comparando as equações (1) e (3), vem:
$a^2 + b^2 - 24b + 144 - r^2 = a^2 + b^2 - r^2 - 16r - 64 \Rightarrow r = \frac{3}{2}b - 13$ (5)
Substituindo (4) e (5) em (1), temos:
$(b - 7)^2 + (b - 12)^2 = \left(\frac{3}{2}b - 13\right)^2 \Rightarrow b = 12$ ou $b = -8$
Para $b = 12$, vem $a = 5$ e $r = 5$.
Para $b = -8$, vem $a = -15$ e $r = -25$. (rejeitado)
Portanto: $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 25$.

348. $P \in \lambda \Leftrightarrow (a - 1)^2 + b^2 = r^2$ (1)
$\lambda \text{ tg } \lambda_0 \Leftrightarrow (a + 2)^2 + b^2 = (r + 3)^2$ (2)
$\lambda \text{ tg } r \Leftrightarrow \dfrac{|3a + 4b - 24|}{\sqrt{25}} = r$ (3)
Obs.: λ tangente externa a λ_0, pois r é externa a λ_0.
Comparando as equações (1) e (2), vem: $r = a - 1$ (4).
Substituindo (4) em (1), temos: $b = 0$ (5).
Substituindo (4) e (5) em (3) e resolvendo a equação, temos:
$a = \dfrac{-19}{2}$ ou $a = \dfrac{29}{8}$.
Para $a = \dfrac{-19}{2} \Rightarrow r = \dfrac{-21}{2}$. (rejeitado)
Para $a = \dfrac{29}{8} \Rightarrow r = \dfrac{21}{8} \Rightarrow r^2 = \dfrac{441}{64}$.
Portanto: $\left(x - \dfrac{29}{8}\right)^2 + y^2 = \dfrac{441}{64}$.

349.



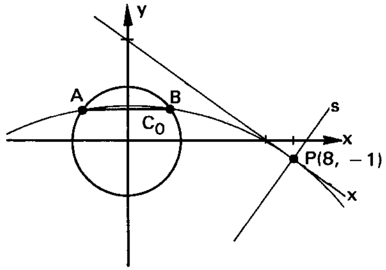
A circunferência λ_0 dada tem centro $(20, 0)$ e raio 4.
Condições do problema:
$O \in \lambda \Rightarrow a^2 + b^2 = 144$ (1)
$\lambda \text{ tg } \lambda_0 \Rightarrow (a - 20)^2 + b^2 = (12 \pm 4)^2$ (2)
Tomando + em (2) e resolvendo o sistema, encontramos $a = \dfrac{36}{5}$ e $b = \pm\dfrac{48}{5}$;
portanto, os centros são $C_1\left(\dfrac{36}{5}, \dfrac{48}{5}\right)$ e $C_2\left(\dfrac{36}{5}, -\dfrac{48}{5}\right)$.
Tomando − em (2) e resolvendo o sistema, encontramos $a = 12$ e $b = 0$, que não convém pois o centro $(12, 0)$ estaria no eixo Ox, contrariando exigência do enunciado.
Para obter os pontos de tangência, trabalhamos com a teoria da razão entre os segmentos formados pelos centros e os pontos de tangência.

$$\frac{C_1A}{AC} = \frac{12}{4} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A - \frac{36}{5}}{20 - x_A} = \dfrac{12}{4} \Rightarrow x_A = \dfrac{84}{5} \\ \dfrac{y_A - \frac{48}{5}}{0 - y_A} = \dfrac{12}{4} \Rightarrow y_A = \dfrac{12}{5} \end{cases}$$

$$\frac{C_2A}{AC} = \frac{12}{4} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_B - 36}{20 - x_B} = \dfrac{12}{4} \Rightarrow x_B = \dfrac{84}{5} \\ \dfrac{y_B + \frac{48}{5}}{0 - y_B} = \dfrac{12}{4} \Rightarrow y_B = -\dfrac{12}{5} \end{cases}$$

então, $A\left(\dfrac{84}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$ e $B\left(\dfrac{84}{5}, -\dfrac{12}{5}\right)$.

350.



1) A mediatriz m da corda AB passa pelo centro $C_0(0, 0)$ da circunferência dada e pelo centro $C(a, b)$ da circunferência procurada.
Como $AB // Ox$, temos $m // Oy$, ou seja, $\overleftrightarrow{C_0C} // Oy$ e daí $a = 0$.

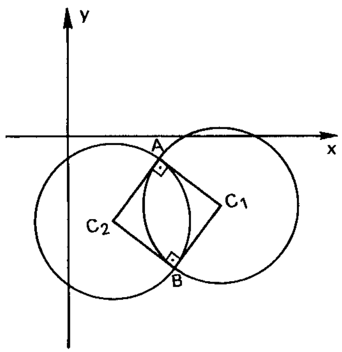
2) O ponto $P(x_P, -1)$ da reta $(t)\ x + 2y - 6 = 0$ é tal que $x_P + 2(-1) - 6 = 0$, ou seja, $x_P = 8$ e $P = (8, -1)$.
A reta $s = \overleftrightarrow{PC}$ é perpendicular a t, então:

$$\left.\begin{array}{l} m_s = -\dfrac{1}{m_t} = 2 \\ P \in s \end{array}\right\} \Rightarrow (s)\ y + 1 = 2(x - 8) \Rightarrow (s)\ 2x - y - 17 = 0$$

Como $C(0, b) \in s$, temos $2 \cdot 0 - b - 17 = 0$, isto é, $b = -17$.

3) $r = d_{PC} = \sqrt{(0 - 8)^2 + (-17 + 1)^2} = \sqrt{320}$
Solução: $x^2 + (y + 17)^2 = 320$.

351.



1) Determinamos os pontos A e B, interseção das circunferências:

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 5 \quad (1) \\ (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5 \quad (2) \end{cases}$$

$(2) - (1) \Rightarrow y = -3x + 5 \quad (3)$
(3) em $(1) \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x = 3$ ou $x = 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow (y = -4$ ou $y = -1)$
então: $A = (3, -4)$ e $B(2, -1)$.

2) Calculamos os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{AC_1}$ e $\overleftrightarrow{AC_2}$ e das retas $\overleftrightarrow{BC_1}$ e $\overleftrightarrow{BC_2}$:

$$\left.\begin{array}{l} m_{AC_1} = 2 \\ m_{AC_2} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AC_1} \perp \overleftrightarrow{AC_2} \qquad \left.\begin{array}{l} m_{BC_1} = -\dfrac{1}{2} \\ M_{BC_2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC_1} \perp \overleftrightarrow{BC_2}$$

o que significa que as circunferências são perpendiculares.

Capítulo VII — Cônicas

354. $C_0(4, 3) \Rightarrow x_0 = 4$ e $y_0 = 3$; $2a = 8$ e $2b = 6 \Rightarrow a > b$, então o semi-eixo maior é paralelo ao eixo x.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x - 4)^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$$

355. $\begin{cases} a = 5 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow b = 3$ e o eixo menor é paralelo ao eixo x.

Portanto: $\dfrac{(x - 6)^2}{9} + \dfrac{(y + 3)^2}{25} = 1$.

356. $\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4$

357. $9x^2 + 25y^2 = 900 \Rightarrow \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow a = 10$ e $b = 6$
$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow 2c = 16$ (distância focal)
$\dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$ (excentricidade)

358. $\left.\begin{array}{l} c = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = b^2 + \dfrac{2}{3}$ (1)

$P \in$ elipse $\Rightarrow \dfrac{\frac{1}{4}}{a^2} + \dfrac{\frac{1}{4}}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4a^2b^2$ (2)

Substituindo (1) em (2), vem: $6b^4 + b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b^2 = \dfrac{1}{3}$.

Para $b^2 = \dfrac{1}{3}$, vem $a^2 = 1$.

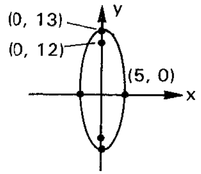
Portanto: $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow x^2 + 3y^2 = 1$.

359. $9x^2 + 25y^2 = 225 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 5$ e $b = 3$
$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \pm 4 \Rightarrow (4, 0)$ e $(-4, 0)$.

360. $169x^2 + 25y^2 = 4\,225 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{169} = 1$

$\Rightarrow a = 13 \text{ e } b = 5$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \pm 12 \Rightarrow (0, -12) \text{ e } (0, 12).$



361. $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 5 \text{ e } b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \pm 4$

Se a elipse tivesse o centro na origem do sistema, os focos seriam $(-4, 0)$ e $(4, 0)$. Porém, há um deslocamento do centro para o ponto $(3, 2)$.
Assim, aplicando esse deslocamento, obtemos os focos: $(-1, 2)$ e $(7, 2)$.

362. A equação já está na forma reduzida.
Fazendo a leitura: $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $a^2 = 16$ e $b^2 = 4$ (a^2 é o maior denominador).
Conclusão: $C(2, 3)$, $a = 4$ e $b = 2$.

363. $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 4 \Rightarrow \dfrac{(x-3)^2}{100} + \dfrac{(y-2)^2}{36} = 1$

$\left.\begin{array}{l} a^2 = 100 \\ b^2 = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \pm 8$

Se a elipse tivesse o centro na origem do sistema, os focos seriam $(-8, 0)$ e $(8, 0)$. Como há um deslocamento para o ponto $(3, 2)$, então os focos são: $(-5, 2)$ e $(11, 2)$.

364. Como $F_1(0, -5)$ e $F_2(0, 55)$, sendo $2c$ a distância focal, então
$2c = 60 \Rightarrow c = 30$ (1).
Como $PF_1 + PF_2 = 68 = 2a \Rightarrow a = 34$ (2).
De (1) e (2) em $a^2 = b^2 + c^2$ vem: $b^2 = 256$.
Mas, como $F_1(0, -5)$ e $c = 30$, então o centro C está deslocado no eixo y em 25 unidades, isto é, $C(0, 25)$.
Portanto, a equação da elipse é: $\dfrac{x^2}{256} + \dfrac{(y-25)^2}{1156} = 1.$

365. Sendo $F_1(-8, 0)$ e $F_2(8, 0)$, então $2c = 16 \Rightarrow c = 8$.
Como $A(10, 0)$ pertence à elipse, então $a = 10$.
Portanto, $b^2 = a^2 - c^2 = 100 - 64 = 36$.
Como $B(-5, y)$ pertence à elipse, então: $\dfrac{(-5)^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ e daí $y = \pm 3\sqrt{3}$.

$d_{BF_1} = \sqrt{(-13)^2 + (\pm 3\sqrt{3})^2} = 14$

$d_{BF_2} = \sqrt{3^2 + (\pm 3\sqrt{3})^2} = 6$

$d_{F_1F_2} = 2c = 16$

A soma das distâncias é o perímetro: 36.

367. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = 16 \text{ e } b^2 = 9$

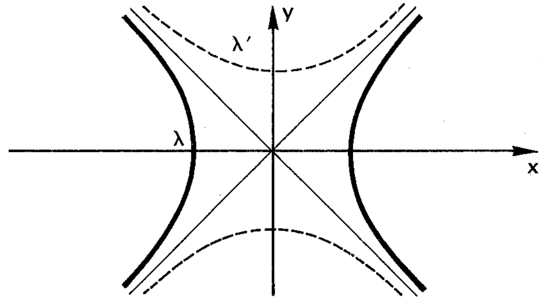
Portanto, $c^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow 2c = 10.$

368. $36x^2 - 49y^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{36}} - \dfrac{y^2}{\frac{1}{49}} = 1 \Rightarrow a^2 = \dfrac{1}{36} \text{ e } b^2 = \dfrac{1}{49}$

Portanto, $c^2 = \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{49} = \dfrac{85}{1764} \Rightarrow c = \dfrac{\sqrt{85}}{42}.$

A excentricidade é $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\frac{\sqrt{85}}{42}}{\frac{1}{6}} \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{85}}{7}.$

369. $(\lambda)\ x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow$ o eixo imaginário é Oy; $F_1(-\sqrt{2}, 0)$; $F_2(\sqrt{2}, 0)$
$(\lambda')\ y^2 - x^2 = 1 \Rightarrow$ o eixo imaginário é Ox; $F_1(0, -\sqrt{2})$; $F_2(0, \sqrt{2})$
Não são coincidentes.



370. $144y^2 - 25x^2 = 3600 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{144} = 1$ (eixo imaginário Ox)

$\left.\begin{array}{l} a^2 = 25 \\ b^2 = 144 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = 13$

Focos: $(0, -13)$ e $(0, 13)$.

371. $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{7} = 1$ (eixo imaginário paralelo a Oy)

Centro $C(2, 2)$

$\left.\begin{array}{l} a^2 = 9 \\ b^2 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

Se não houvesse deslocamento, os focos estariam sobre o eixo x, sendo $(-4, 0)$ e $(4, 0)$. Considerando o deslocamento em duas unidades para ambas as ordenadas, vem:
$F_1(-2, 2)$ e $F_2(6, 2)$.

372. ① $9x^2 - 16y^2 = -144 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ (eixo imaginário Ox)

$$\left.\begin{array}{l} a_0^2 = 9 \\ b_0^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow c_0^2 = 25 \Rightarrow c_0 = 5 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{focos: } (0, -5) \text{ e } (0, 5) \\ \text{excentricidade: } \dfrac{c_0}{a_0} = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

② Elipse tem por eixo menor os focos da hipérbole. Então, $b = 5$ e excentricidade inversa à da hipérbole, isto é, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$.

Portanto: $\left\{\begin{array}{l} b = 5 \text{ ①} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow c = \dfrac{3a}{5} \text{ ②} \\ a^2 = b^2 + c^2 \text{ ③} \end{array}\right.$

Substituindo ① e ② em ③, vem $a^2 = \dfrac{625}{16}$.

Então: $\dfrac{x^2}{\frac{625}{16}} + \dfrac{y^2}{25} = 1 \Leftrightarrow 16x^2 + 25y^2 = 625.$

373. $y^2 = -16x$ (foco no eixo Ox)
$2p = -16 \Rightarrow p = -8$
$VF = \dfrac{p}{2}$, isto é, $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right) \Rightarrow F(-4, 0)$

Diretriz: $x = \dfrac{-p}{2}$, então $x = 4$.

374. $(y - 5)^2 = 12(x - 3)$; $VF//Ox$; $V(3, 5)$
$2p = 12 \Rightarrow p = 6$; foco $(3, 0)$, se não houvesse deslocamento.
Como $V(3, 5)$, então $F(6, 5)$.

375. $(x - 2)^2 = (1)y \Rightarrow 2p = 1 \Rightarrow p = \dfrac{1}{2}$
Esta parábola tem deslocamento: $V(2, 0)$, $VF//Oy$.
Então: $F\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$ e a diretriz é $y = -\dfrac{1}{4}$.

377. $2x^2 + 4x - 4 = -3y$

$x^2 + 2x - 2 = -\dfrac{3}{2}y$

(substituímos -2 por $1 - 3$)

$x^2 + 2x + 1 - 3 = \dfrac{-3}{2}y$

$(x + 1)^2 = \dfrac{-3}{2}y + 3$

$(x + 1)^2 = \dfrac{-3}{2}(y - 2) \Rightarrow V(-1, 2)$

378. $A(0, 0) \in$ parábola $\Leftrightarrow (0 - x_0)^2 = 2p(0 - y_0)$ ①
$B(3, 3) \in$ parábola $\Leftrightarrow (3 - x_0)^2 = 2p(3 - y_0)$ ②
$C(-6, 30) \in$ parábola $\Leftrightarrow (-6 - x_0)^2 = 2p(30 - y_0)$ ③
Desenvolvendo as equações ② e ③, nelas substituindo ①,
vem: $\left\{\begin{array}{l} 9 - 6x_0 = +6p \\ 36 + 12x_0 = +60p \end{array}\right. \Rightarrow p = \dfrac{+3}{4}$ e $x_0 = \dfrac{+3}{4}$.

Substituindo esses valores em ①, vem: $y_0 = \dfrac{-3}{8}$.

Portanto, temos: $\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{2}\left(y + \dfrac{3}{8}\right) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 3y.$

379. (*d*) $x = 0 \Rightarrow$ eixo de simetria é paralelo ao eixo Ox
$p = \text{dist}(F, d) = 4 - 0 = 4 \Rightarrow 2p = 8$

$$\left.\begin{array}{l} x_V = \dfrac{p}{2} = 2 \\ y_V = y_F = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(2, 1)$$

equação $(y - 1)^2 = 8(x - 2)$

380. $\left.\begin{array}{l} \text{(d) } y = 3 \\ F(0, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow VF = \dfrac{3}{2} = \dfrac{p}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p = 3 \Rightarrow 2p = 6 \\ V\left(0, \dfrac{3}{2}\right) \end{array}\right.$

O eixo de simetria é paralelo ao eixo Oy e F abaixo de **V** $\Rightarrow$ **2p − 6**.

$x^2 = -6\left(y - \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow x^2 = -6y + 9$

381. $y = x^2 - x$ tem por inversa $x = y^2 - y$.
$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 - x \Rightarrow y^2 = x^4 - 2x^3 + x^2 \text{ ①} \\ x = y^2 - y \text{ ②} \end{array}\right.$

Substituindo ① em ②, vem: $x = x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 2 \end{array}\right.$

Para $x = 0$, $y = 0$ e para $x = 2$, $y = 2$.
Então $A(0, 0)$ e $B(2, 2)$ são os pontos de interseção das funções $f(x)$ e $f'(x)$.
Determinando a reta $\overleftrightarrow{AB}$, vem $x - y = 0$.

$d_{P\overline{AB}} = \dfrac{|3 - 6|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|-3|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

382. $\left\{\begin{array}{l} x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x^2 = y^2 \text{ ①} \\ x^2 + y^2 + 8y = 0 \text{ ②} \end{array}\right.$
Substituindo ① em ②, vem: $y = 0$ ou $y = -4$.

Para $y = 0$, $x = 0 \Rightarrow A(0, 0)$.
Para $y = -4$, $x = 4 \Rightarrow B(4, -4)$.
Como y é eixo de simetria da parábola e ela passa pela origem, então $A(0, 0)$ é o vértice e $x^2 = 2py$ é a equação.
Como $B(4, -4)$ pertence a $x^2 = 2py$, vem $p = -2$.
Então, $x^2 = -4y$ é a equação da parábola.

383. 1) $y = x^2 + 6x + 4$
Completando o quadrado perfeito, vem: $y + 5 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow$
$y + 5 = (x + 3)^2 \Rightarrow V_1(-3, -5)$.
2) $y = x^2 - 6x + 2$
Completando o quadrado perfeito, vem: $y + 7 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow$
$y + 7 = (x - 3)^2 \Rightarrow V_2(3, -7)$.
3) Ponto médio de $\overline{V_1V_2}$ é $M(0, -6)$.
4) Coeficiente angular de $\overline{V_1V_2}$ é $m = \frac{-1}{3} \Rightarrow m_s = 3$.
5) Mediatriz de $\overline{V_1V_2}$: $y - y_0 = m_s (x - x_0)$
$y + 6 = 3(x - 0) \Rightarrow 3x - y - 6 = 0$

384. $x = y^2 + 10y + 27$
Completando o quadrado perfeito, vem: $x - 2 = y^2 + 10y + 25 \Rightarrow$
$x - 2 = (y + 5)^2 \Rightarrow V(2, -5)$.

393. a) $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$
Identificando com a equação teórica:
$k_2x^2 + k_1y^2 - 2k_2x_0x - 2k_1y_0y + (k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2) = 0$, vem:

$$\begin{cases} k_2 = 9 = b^2 \\ k_1 = 25 = a^2 \\ 2k_2x_0 = 36 \Rightarrow x_0 = 2 \\ 2k_1y_0 = -50 \Rightarrow y_0 = -1 \\ k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2 = -164 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 > k_2 \\ k_1 > 0 \\ k_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{elipse} \begin{cases} \text{com eixo maior horizontal; centro } C(2, -1) \\ \dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1 \end{cases}$$

b) $y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$
$-4x = -y^2 + 6y - 13 \Rightarrow x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{13}{4}$
Identificando com a equação teórica:
$x = \frac{1}{2p}y^2 - \frac{y_0}{p}y + \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p}$, vem:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2p} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow p = 2 \\ \dfrac{y_0}{p} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y_0 = 3 \\ \dfrac{y_0^2 + 2px_0}{2p} = \dfrac{13}{4} \Rightarrow x_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{parábola} \begin{cases} p = 2 \\ V(1, 3) \\ F(2, 3) \end{cases}$$

c) $5x^2 - 4y^2 + 30x + 16y + 49 = 0$
equação teórica: $k_2x^2 + k_1y^2 - 2k_2x_0x - 2k_1y_0y + (k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2) = 0$

$$\begin{cases} k_2 = 5 \\ k_1 = -4 \\ 2k_2x_0 = -30 \Rightarrow x_0 = -3 \\ 2k_1y_0 = -16 \Rightarrow y_0 = 2 \\ k_2x_0^2 + k_1 y_0^2 - k_1k_2 = 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_2 > k_1 \\ k_1 > 0 \\ k_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{hipérbole} \begin{cases} \text{com eixo real horizontal; } C(-3, 2) \\ \dfrac{(x+3)^2}{5} - \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

d) $x^2 - 4x - 12y = 32 \Rightarrow y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$

equação teórica: $y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{x_0}{p}x + \frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2p} = \dfrac{1}{12} \Rightarrow p = 6 \\ \dfrac{x_0}{p} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x_0 = 2 \\ \dfrac{x_0^2 + 2py_0}{2p} = \dfrac{-8}{3} \Rightarrow y_0 = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{parábola} \begin{cases} p = 6 \\ V(2, -3) \\ F(2, 0) \end{cases}$$

e) $289x^2 - 17\,183 = 2(256y - 289x - 32y^2) \Rightarrow$
$289x^2 + 64y^2 + 578x - 512y - 17\,183 = 0$
equação teórica: $k_2x^2 + k_1y^2 - 2k_2x_0x - 2k_1y_0y + (k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2) = 0$

$$\begin{cases} k_2 = 289 \\ k_1 = 64 \\ 2k_2x_0 = -578 \Rightarrow x_0 = 1 \\ 2k_1y_0 = 512 \Rightarrow y_0 = 4 \\ k_2x_0^2 + k_1 y_0^2 - k_1k_2 = -17\,183 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_2 > k_1 \\ k_2 > 0 \\ k_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{elipse} \begin{cases} \text{com eixo maior vertical; centro } C(-1, 4) \\ \dfrac{(x+1)^2}{64} + \dfrac{(y-4)^2}{289} = 1 \end{cases}$$

394. $9x^2 + 5y^2 + 54x - 30y + 81 = 0$

equação teórica: $k_2x^2 + k_1y^2 - 2k_2x_0x - 2k_1y_0y + (k_2x_0^2 + k_1y_0^2 - k_1k_2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} k_2 = 9 = a^2 \Rightarrow a = 3 \\ k_1 = 5 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{5} \end{array}\right\} \Rightarrow c = 2 \text{ e } \frac{c}{a} = e = \frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2k_2x_0 = -54 \Rightarrow x_0 = -3 \\ 2k_1y_0 = 30 \Rightarrow y_0 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow C(-3, 3)$$

$$\left\{\begin{array}{l} k_2 > k_1 \\ k_2 > 0 \\ k_1 > 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{elipse} \left\{\begin{array}{l} \text{com eixo maior vertical} \\ \dfrac{(x+3)^2}{5} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1 \\ F_1(-3, 5) \text{ e } F_2(-3, 1) \end{array}\right.$$

396. $\left\{\begin{array}{ll} (\lambda)\ y^2 = x & (1) \\ (\lambda')\ x^2 + 5y^2 = 6 & (2) \end{array}\right.$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = +1 \text{ ou } y = -1 \\ x = -6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{-6} \notin \mathbb{R} \end{array}\right.$$

$S = \{(1, -1), (1, 1)\}$.

397. $\left\{\begin{array}{ll} y = x^2 & (1) \\ y = x^{\frac{3}{2}} & (2) \end{array}\right.$

De (1) e (2), vem: $x^2 = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x^4 = x^3 \Rightarrow x^4 - x^3 = 0 \Rightarrow$

$$x^3(x - 1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$$

São dois pontos de interseção: (0, 0) e (1, 1).

398. $y = -1 - \sqrt{19 - x^2 - 2x} \Rightarrow y + 1 = -\sqrt{19 - x^2 - 2x}$ (1)

$x = 3 - \sqrt{9 - y^2 - 4y} \Rightarrow x - 3 = -\sqrt{9 - y^2 - 4y}$ (2)

Elevando (1) e (2) ao quadrado, vem:

$$\left\{\begin{array}{ll} x^2 + y^2 + 2x + 2y - 18 = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0 & (4) \end{array}\right.$$

De (3) − (4) vem $8x - 2y - 18 = 0$, isto é, $y = 4x - 9$ (5).

De (5) em (4) vem $17x^2 - 98x + 45 = 0$ e daí

$x = \frac{45}{17} \Rightarrow y = \frac{27}{17}$

ou

$x = 1 \Rightarrow y = -5$

São dois pontos de interseção: $\left(\frac{45}{17}, \frac{27}{17}\right)$ e $(1, -5)$.

399. $\left\{\begin{array}{ll} x^2 - 4y^2 = 4 & (1) \\ x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 - y^2 & (2) \end{array}\right.$

Substituindo (2) em (1), vem: $y = \pm 1$ (3).

Substituindo (3) em (2), temos: $x = \pm 2\sqrt{2}$.

Há *4* pontos de interseção:

$(2\sqrt{2}, 1)$; $(-2\sqrt{2}, 1)$; $(2\sqrt{2}, -1)$; $(-2\sqrt{2}, -1)$.

400. $\left\{\begin{array}{ll} x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 & (1) \\ 3x^2 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 3x^2 + 1 & (2) \end{array}\right.$

$$\text{Substituindo (2) em (1), vem: } 9x^4 - 5x^2 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pm\sqrt{5}}{3} \end{array}\right.$$

Para $x = 0$, $y = 1$.

Para $x = \frac{\pm\sqrt{5}}{3}$, $y = \frac{8}{3}$.

Há *3* pontos de interseção: $(0, 1)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{8}{3}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

401. $\left\{\begin{array}{ll} y = x & (1) \\ 9x^2 + 25y^2 = 225 & (2) \end{array}\right.$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$34x^2 = 225 \Rightarrow x = \frac{\pm 15\sqrt{34}}{34} \Rightarrow y = \frac{\pm 15\sqrt{34}}{34}$$

$$A\left(\frac{-15\sqrt{34}}{34}, \frac{-15\sqrt{34}}{34}\right) \text{ e } B\left(\frac{15\sqrt{34}}{34}, \frac{15\sqrt{34}}{34}\right)$$

$$d_{AB} = \sqrt{\left(\frac{30\sqrt{34}}{34}\right)^2 + \left(\frac{30\sqrt{34}}{34}\right)^2} = \frac{30\sqrt{17}}{17}$$

402. $\left\{\begin{array}{ll} x^2 + y = 10 & (1) \\ x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x & (2) \end{array}\right.$

Substituindo (2) em (1) e resolvendo, vem:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow A(0, 10) \\ \text{ou} \\ x = 1 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow B(1, 9) \end{array}\right.$$

$d_{AB} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

403. $\left\{\begin{array}{ll} y = x + m \Rightarrow y^2 = x^2 + 2mx + m^2 & (1) \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 & (2) \end{array}\right.$

Substituindo ① em ②, temos:

$5x^2 + 8mx + 4m^2 - 4 = 0$

$\Delta = 64\,m^2 - 80m^2 + 80 \geqslant 0$ (para que haja *2* pontos ou *1* ponto de interseção)

$16m^2 - 80 \leqslant 0$

$m^2 - 5 \leqslant 0$

Portanto: $-\sqrt{5} \leqslant m \leqslant \sqrt{5}$.

404. $\begin{cases} y = mx + 2 \Rightarrow y^2 = m^2x^2 + 4mx + 4 & ① \\ y^2 = 4x & ② \end{cases}$

Substituindo ① em ②, temos:

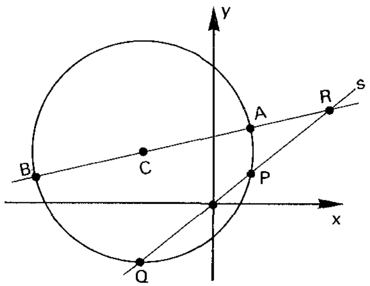
$m^2x^2 + (4m - 4)x + 4 = 0$

$\Delta = (4m - 4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot m^2 \geqslant 0$ (para que haja *2* pontos ou *1* ponto de interseção)

$-32m + 16 \geqslant 0$

$2m - 1 \leqslant 0 \Rightarrow m \leqslant \dfrac{1}{2}$

405.



1) Analisando os dados:
$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ é circunferência *$C(-3, 2)$* e *$r = 5$*.
$R(2, 3)$ está em *(s)* *$3x - 2y = 0$*, pois *$3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$*.

2) Interseção da reta com a circunferência:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\frac{4\sqrt{39}}{13} \text{ e } y = \pm\frac{6\sqrt{39}}{13}$$

portanto, $P = \left(\dfrac{4\sqrt{39}}{13}, \dfrac{6\sqrt{39}}{13}\right)$ e $Q = \left(-\dfrac{4\sqrt{39}}{13}, -\dfrac{6\sqrt{39}}{13}\right)$.

3) Produto das distâncias:

$$d_{PR} = \sqrt{\left(2 - \frac{4\sqrt{39}}{13}\right)^2 + \left(3 - \frac{6\sqrt{39}}{13}\right)^2} = \sqrt{25 - 4\sqrt{39}}$$

$$d_{QR} = \sqrt{\left(2 + \frac{4\sqrt{39}}{13}\right)^2 + \left(3 + \frac{6\sqrt{39}}{13}\right)^2} = \sqrt{25 + 4\sqrt{39}}$$

$$d_{PR} \cdot d_{QR} = \sqrt{625 - 624} = 1$$

Obs.: Uma solução menos trabalhosa é usar a Geometria:

$d_{PR} \cdot d_{QR} = d_{AR} \cdot d_{BR} = (d_{RC} - r)(d_{RC} + r) = (d_{PC})^2 - r^2 = 26 - 25 = 1.$

406. $y = ax^2 + bx + c$ ① $(b \neq 0, c \neq 0)$

Fazendo a mudança de *x* para $-x$, vem:

$y = ax^2 - bx + c$ ②

Considerando e resolvendo o sistema formado por ① e ②, vem:

$x = 0 \Rightarrow y = c$.

Portanto: *(0, c)* é o ponto de interseção.

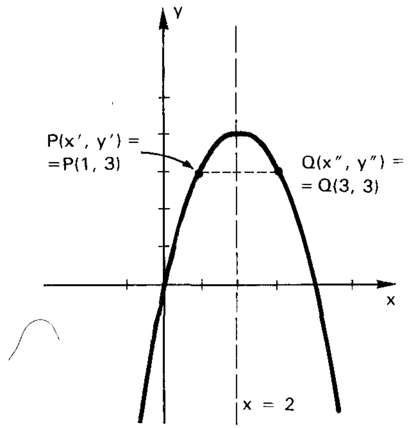
407. $f(x) = 4x - x^2$

a) $\begin{cases} y = 4x - x^2 & ① \\ y = 3x & ② \end{cases}$

Resolvendo o sistema formado por ① e ②, vem:

$x = 0$ e *$y = 0$* $\Rightarrow$ *$A(0, 0)$* ou *$x = 1$* e *$y = 3$* $\Rightarrow$ *$P(x', y') = P(1, 3)$*.

b)



O ponto *Q(x", y")* simétrico de *P(1, 3)* em relação à reta *$x = 2$* é o ponto *Q(3, 3)*. Como a reta procurada passa pelos pontos *A(0, 0)* e *Q(3, 3)*, então ela é a bissetriz dos quadrantes ímpares (b_{13}) *$y = x$*.

408. $y = x^2 + x - 12$

① Comparando com a equação teórica: $y = \dfrac{1}{2p}x^2 - \dfrac{x_0}{p}x + \dfrac{x_0^2 + 2py_0}{2p}$,

temos: $\begin{cases} \dfrac{1}{2p} = 1 \Rightarrow p = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x_0}{p} = -1 \Rightarrow x_0 = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow V\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-49}{4}\right) \\ \dfrac{x_0^2 + 2py_0}{2p} = -12 \Rightarrow y_0 = \dfrac{-49}{4} \end{cases}$

② Como os outros dois vértices pertencem à parábola e ao eixo *Ox*, então *$y = 0$*.

$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -4 \Rightarrow A(3, 0); B(-4, 0)$

$$③\ S_{ABV} = \frac{1}{2}|D_{ABV}|$$

$$\left. D_{ABV} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{49}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{343}{4} \right\} \Rightarrow S_{ABV} = \frac{343}{8}$$

412. $(b_{13})\ y = x \Rightarrow t // b_{13}$ é tal que $(t)\ y = x + k$

$$\begin{cases} (t)\ y = x + k \\ (\lambda)\ y = x^2 - x + 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + (5 - k) = 0$$
$$\Delta = 4k - 16 = 0 \Rightarrow k = 4$$

Portanto: (t) $y = x + 4$.
Resolvendo o sistema quando $k = 4$, vem $x = 1$ e $y = 5$; portanto, $T = (1, 5)$.

413. (r) $x + 3y + 5 = 0 \Rightarrow m_r = \frac{-1}{3}$

$t \perp r$ é tal que $m_t = 3 \Rightarrow (t)\ y = 3x + k$

$$\begin{cases} (t)\ y = 3x + k \\ (\lambda)\ 6x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 6kx + k^2 + 1 = 0$$
$$\Delta = 36k^2 - 12(k^2 + 1) = 0 \Rightarrow k = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$$

Portanto: (t) $y = 3x \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

416. $P(0, 0) \in y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = mx$

$$\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + 4y^2 - 16y + 12 = 0 & ① \\ (t)\ y = mx & ② \end{cases}$$

Substituindo ② em ①, vem:
$(1 + 4m^2)x^2 - 16mx + 12 = 0$
$\Delta = (-16m)^2 - 4(1 + 4m^2) \cdot 12 = 0 \Rightarrow 4m^2 - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$

Portanto: (t) $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

417. $P(0, 2) \in y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = mx + 2$

$$\begin{cases} (t)\ y = mx + 2 & ① \\ (\lambda)\ x^2 - 4y^2 = 4 & ② \end{cases}$$

Substituindo ① em ②, vem:
$(1 - 4m^2)x^2 - 16mx - 20 = 0$
$\Delta = (-16m)^2 - 4(1 - 4m^2)(-20) = 0$
$4m^2 - 5 = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow m = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}$

Portanto: (t) $y = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}x + 2$.

418. $P(3, 0) \in y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = m(x - 3)$ ou $y = mx - 3m$

$$\begin{cases} (t)\ y = mx - 3m \Rightarrow y^2 = m^2x^2 - 6m^2x + 9m^2 & ① \\ (\lambda)\ x = -2y^2 & ② \end{cases}$$

Substituindo ① em ②, vem:
$2m^2x^2 - (12m^2 - 1)x + 18m^2 = 0$
$\Delta = [-(12m^2 - 1)]^2 - 4 \cdot 2m^2 \cdot 18m^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 24m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{\pm\sqrt{6}}{12}$

Portanto: $y = \frac{\pm\sqrt{6}}{12}(x - 3)$.

419. $9x^2 - 4y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\ b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sendo as assíntotas $(s_1)\ y = \frac{b}{a}x$ e $(s_2)\ y = \frac{-b}{a}x$, vem:

$(s_1)\ y = \frac{3}{2}x$ e $(s_2)\ y = \frac{-3}{2}x$.

420. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1 \Rightarrow a^2 = 16$ e $b^2 = 64$
Assim: $a = 4$ e $b = 8$.
A assíntota que forma ângulo agudo tem coeficiente angular positivo $m = \frac{b}{a}$.
Portanto, $(s)\ y = 2x$.

421. 1) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $a > 0$, $b > 0$ é uma elipse de equação reduzida
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2) Como as diagonais do quadrado passam pela origem e se interceptam formando ângulos retos, então essas diagonais são as bissetrizes:
(r) $y = x$ e (s) $y = -x$.

1º) Determinação dos pontos A e C, pertencentes a (r):

$$\begin{cases} (\lambda)\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ (r)\ y = x \end{cases} \Rightarrow (b^2 + a^2)\,x^2 = a^2b^2$$

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow x = \frac{\pm ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ou

$$x = \frac{\pm ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$$

$$A\left(\frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}\right)$$

$$C\left(\frac{-ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \frac{-ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}\right)$$

2º) Determinação dos pontos B e D, pertencentes a (s):

$$\begin{cases} (\lambda)\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ (s)\,y = -x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pm ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$$

$$B\left(\frac{-ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}\right)$$

$$D\left(\frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \frac{-ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}\right)$$

422. a) $S_{ABX} = \frac{1}{2}\,|D_{ABX}|$

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (b - a)(x - a)(x - b)$$

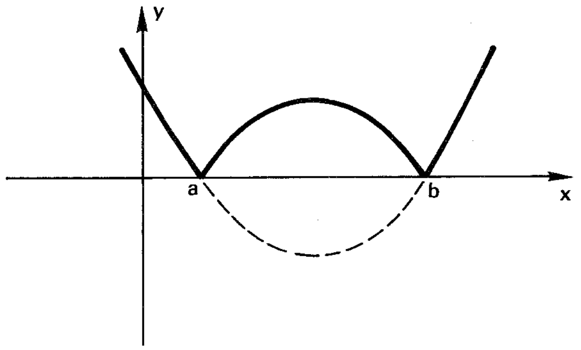
$$\therefore S_{ABX} = \left|\frac{(b - a)(x - a)(x - b)}{2}\right|$$

b) Considerando a função $f(x)$ da área positiva, então:

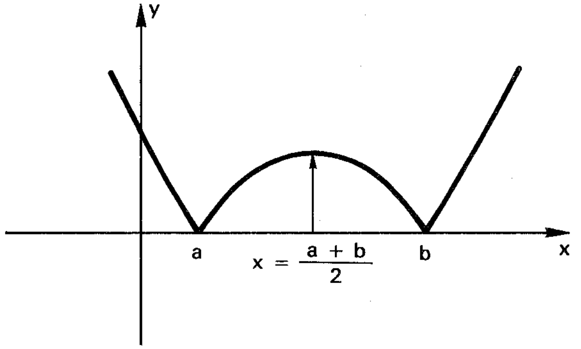
$$f(x) = \left|\frac{(b - a)(x - a)(x - b)}{2}\right|$$

$$f(x) = \left|\frac{1}{2}\,[(b - a)x^2 + (a^2 - b^2)x + ab(b - a)]\right|$$

$g(x) = \frac{1}{2}\,[x^2 - (a + b)x + ab]$ é uma parábola que intercepta o eixo x nos pontos a e b.



c) $f(x)$ é máximo local para $x = \dfrac{a + b}{2}$, isto é, x é o ponto médio.



Capítulo VIII — Lugares geométricos

424. Se $P(X, Y)$ pertence ao l.g., então:

$d_{AP} = d_{BP} \Rightarrow (X - a)^2 + (Y - b)^2 = (X - c)^2 + (Y - d)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(a - c) \cdot X + 2(b - d) \cdot Y + (c^2 + d^2 - a^2 - b^2) = 0$
que é a equação do l.g.
Conclusão: o l.g. é uma reta (é a mediatriz do segmento AB).

425. Se $P(X, Y)$ pertence ao l.g., então:

$$d_{Pr} = d_{Ps} \Rightarrow \left|\frac{aX + bY + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{aX + bY + c'}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \Rightarrow$$

1º) Determinação dos pontos A e C, pertencentes a (r):

$$\begin{cases} (\lambda)\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ (r)\ y = x \end{cases} \Rightarrow (b^2 + a^2)\,x^2 = a^2b^2$$

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow x = \frac{\pm ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ou

$$x = \frac{\pm ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$$

$$A\left(\frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}\right)$$

$$C\left(\frac{-ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \frac{-ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}\right)$$

2º) Determinação dos pontos B e D, pertencentes a (s):

$$\begin{cases} (\lambda)\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ (s)\ y = -x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pm ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$$

$$B\left(\frac{-ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}\right)$$

$$D\left(\frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}, \frac{-ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}\right)$$

422. a) $S_{ABX} = \frac{1}{2}\,|D_{ABX}|$

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (b - a)(x - a)(x - b)$$

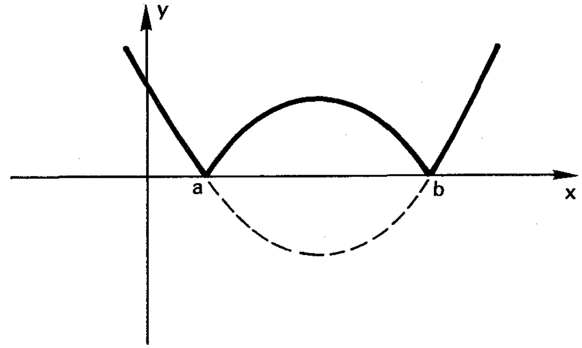
$$\therefore S_{ABX} = \left|\frac{(b - a)(x - a)(x - b)}{2}\right|$$

b) Considerando a função $f(x)$ da área positiva, então:

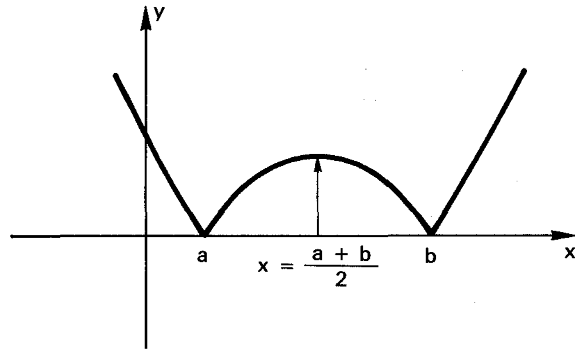
$$f(x) = \left|\frac{(b - a)(x - a)(x - b)}{2}\right|$$

$$f(x) = \left|\frac{1}{2}\,[(b - a)x^2 + (a^2 - b^2)x + ab(b - a)]\right|$$

$g(x) = \frac{1}{2}\,[x^2 - (a + b)x + ab]$ é uma parábola que intercepta o eixo x nos pontos a e b.



c) $f(x)$ é máximo local para $x = \dfrac{a + b}{2}$, isto é, x é o ponto médio.



Capítulo VIII — Lugares geométricos

424. Se $P(X, Y)$ pertence ao l.g., então:
$d_{AP} = d_{BP} \Rightarrow (X - a)^2 + (Y - b)^2 = (X - c)^2 + (Y - d)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(a - c) \cdot X + 2(b - d) \cdot Y + (c^2 + d^2 - a^2 - b^2) = 0$
que é a equação do l.g.
Conclusão: o l.g. é uma reta (é a mediatriz do segmento AB).

425. Se $P(X, Y)$ pertence ao l.g., então:

$$d_{Pr} = d_{Ps} \Rightarrow \left|\frac{aX + bY + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{aX + bY + c'}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \Rightarrow$$

$2aX + 2bY + (c + c') = 0$
que é a equação do l.g.
Conclusão: o l.g. é a reta paralela a *r* e a *s* e eqüidistante de ambas.

426. Se $P(X, Y)$ pertence ao l.g., então:
$d_{Px} = 2 \cdot d_{Py} \Rightarrow |Y| = 2|x| \Rightarrow Y^2 = 4X^2 \Rightarrow (Y + 2X)(Y - 2X) = 0$
que é a equação do l.g.
Conclusão: o l.g. é a reunião de duas retas, $Y = -2X$ e $Y = 2X$, concorrentes na origem.

427. Se $P(X, Y)$ pertence ao l.g., então:

$$d_{Pr} = 2 \cdot d_{Ps} \Rightarrow \left|\frac{3X + 4Y - 3}{5}\right| = 2 \cdot \left|\frac{4X - 3Y + 8}{5}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3X + 4Y - 3)^2 = 4(4X - 3Y + 8)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(3X + 4Y - 3) + 2(4X - 3Y + 8)][(3X + 4Y - 3) - 2(4X - 3Y + 8)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5X - 10Y + 19)(11X - 2Y + 13) = 0$$

ou, então, desenvolvendo:

$$55X^2 + 20Y^2 - 120XY + 274X - 168Y + 247 = 0$$

que é a equação do l.g.
Conclusão: o l.g. é a reunião de duas retas $5X - 10Y + 19 = 0$ e $11X - 2Y + 13 = 0$, concorrentes com *r* e *s* na interseção de *r* com *s*.

428. Se $P(X, Y)$ pertence ao l.g., então:

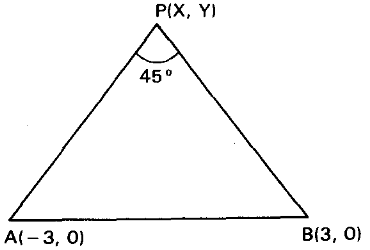
$$d_{Pd} = d_{PF} \Rightarrow \left|\frac{4X - 3Y + 2}{5}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4X - 3Y + 2)^2 = 25(X^2 + Y^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9X^2 + 16Y^2 + 24XY - 16X + 12Y - 4 = 0$$

que é a equação do l.g.
Obs.: Pode-se verificar que o l.g. é a parábola de foco *F* e diretriz *d* (ver item 179, p. 208).

430. Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. Temos:



$$m_{AP} = \frac{Y}{X + 3}$$

$$m_{BP} = \frac{Y}{X - 3}$$

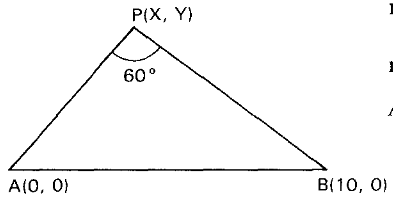
$$A\hat{P}B = 45° \Rightarrow \text{tg } A\hat{P}B = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{m_{AP} - m_{BP}}{1 + m_{AP} \cdot m_{BP}}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{\frac{Y}{X + 3} - \frac{Y}{X - 3}}{1 + \frac{Y}{X + 3} \cdot \frac{Y}{X - 3}}\right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-6Y}{X^2 + Y^2 - 9}\right| = 1 \Rightarrow |-6Y| = |X^2 + Y^2 - 9|$$

então:
se $Y \leqslant 0$, $-6Y = X^2 + Y^2 - 9 \Rightarrow X^2 + Y^2 + 6Y - 9 = 0$
se $Y \geqslant 0$, $-(-6Y) = X^2 + Y^2 - 9 \Rightarrow X^2 + Y^2 - 6Y - 9 = 0.$
Conclusão: o l.g. é a reunião de dois arcos de circunferência, $X^2 + Y^2 + 6Y - 9 = 0$ (no semiplano $Y \leqslant 0$) e $X^2 + Y^2 - 6Y - 9 = 0$ (no semiplano $Y \geqslant 0$).

431. Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. Temos:



$$m_{AP} = \frac{Y}{X}$$

$$m_{PB} = \frac{Y}{X - 10}$$

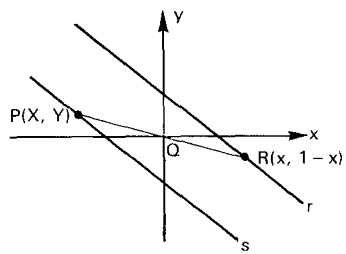
$$A\hat{P}B = 60° \Rightarrow \text{tg } A\hat{P}B = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{m_{AP} - m_{BP}}{1 + m_{AP} \cdot m_{BP}}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow \left|\frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{X - 10}}{1 + \frac{Y}{X} \cdot \frac{Y}{X - 10}}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-10Y}{X^2 + Y^2 - 10X}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow |-10Y| = \sqrt{3} \cdot |X^2 + Y^2 - 10X|$$

então:
se $Y \leqslant 0$, $-10Y = \sqrt{3}(X^2 + Y^2 - 10X) \Rightarrow 3X^2 + 3Y^2 - 30X + 10\sqrt{3}Y = 0$
se $Y \geqslant 0$, $-(-10Y) = \sqrt{3}(X^2 + Y^2 - 10X) \Rightarrow 3X^2 + 3Y^2 - 30X - 10\sqrt{3}Y = 0.$
Conclusão: o l.g. é a reunião de dois arcos de circunferência,
$3X^2 + 3Y^2 - 30X + 10\sqrt{3}Y = 0$ (no semiplano $Y \leqslant 0$) e
$3X^2 + 3Y^2 - 30X - 10\sqrt{3}Y = 0$ (no semiplano $Y \geqslant 0$).

432.

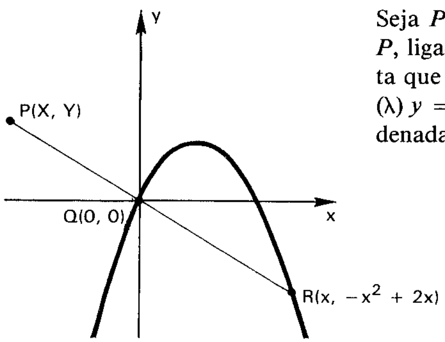


Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. O ponto *P*, ligado ao ponto $Q(0, 0)$, define uma reta que intercepta a reta (r) $y = 1 - x$ no ponto *R* cujas coordenadas são $(x, 1 - x)$. Como $\frac{PQ}{QR} = 1$, decorre que *Q* é ponto médio de *PR*; então:

$$0 = \frac{x + X}{2} \quad \text{e} \quad 0 = \frac{(1 - x) + Y}{2}$$

e daí $x = -X = 1 + Y$; portanto, $X + Y + 1 = 0$, que é a equação do l.g.
Conclusão: o l.g. é a reta s de equação $X + Y + 1 = 0$ paralela à reta r e simétrica desta em relação à origem.

433.



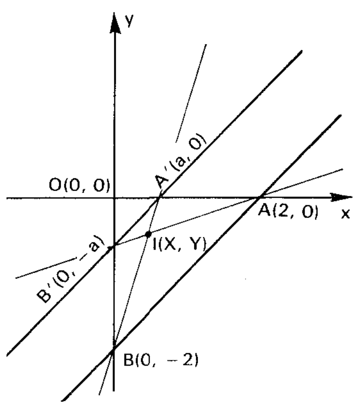
Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. O ponto P, ligado ao ponto $Q(0, 0)$, define uma reta que intercepta a parábola $(\lambda)\ y = -x^2 + 2x$ em pontos R cujas coordenadas são $(x, -x^2 + 2x)$.

Como $\frac{PQ}{QR} = 2$, temos:

$$\frac{x_Q - x_P}{x_R - x_Q} = 2 \Rightarrow \frac{0 - X}{x - 0} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{y_Q - y_P}{y_R - y_Q} = 2 \Rightarrow \frac{0 - Y}{-x^2 + 2x - 0} = 2$$

e daí vem $x = -\frac{X}{2}$ (1) e $-x^2 + 2x = -\frac{Y}{2}$ (2).
Substituindo x de (1) em (2), vem:
$-\frac{X^2}{4} - X = -\frac{Y}{2}$ e, portanto, $X^2 + 4X - 2Y = 0$, que é a equação do l.g.

435.

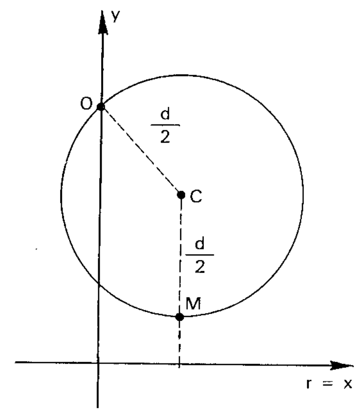


A equação da reta AB é $x - y - 2 = 0$, então a equação da reta $A'B'$, paralela a AB, é $x - y + c = 0$; portanto, temos $A' = (-c, 0)$ e $B' = (0, c)$.
Seja $I(X, Y)$ pertencente ao l.g., então I é interseção das retas AB' e $A'B$.
Impondo o alinhamento de I, A e B', resulta (1) $cX + 2Y = 2c$.
Impondo o alinhamento de I, A' e B, resulta (2) $2X + cY = -2c$.
Eliminando c entre as equações (1) e (2), vem:

$$c = \frac{2Y}{2 - X} = \frac{-2X}{2 + Y} \Rightarrow 2Y + Y^2 = X^2 - 2X \Rightarrow (X + Y)(X - Y - 2) = 0$$

que é a equação do l.g.
Conclusão: variando c, o ponto I percorre a bissetriz b_{24} $(X + Y = 0)$ ou pode ser qualquer ponto da reta AB $(X - Y - 2 = 0)$, o que vai acontecer para $c = -2$, quando $A = A'$ e $B = B'$.

436.



Suponhamos que a reta r coincida com o eixo x e que o ponto O esteja sobre o eixo y, tendo ordenada y_0, com $y_0 > d$.
Seja $M(X, Y)$ o ponto da circunferência de centro $C(a, b)$, variável, com diâmetro d e passando por $O(0, y)$. Temos:
$CM \perp x \Rightarrow a = X$ (1)

$$d_{CM} = \frac{d}{2} \Rightarrow b - Y = \frac{d}{2} \ (2)$$

$$d_{OC} = \frac{d}{2} \Rightarrow a^2 + (b - y_0)^2 = \frac{d^2}{4} \ (3)$$

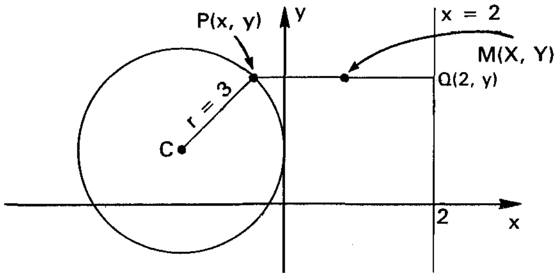
Substituindo (1) e (2) em (3), vem:

$$X^2 + \left(Y + \frac{d}{2} - y_0\right)^2 = \frac{d^2}{4}$$

e daí $X^2 + Y^2 + (d - 2y_0)Y + y_0(y_0 - d) = 0$
que é a equação do l.g.
Conclusão: o l.g. é a circunferência de centro $\left(0, \frac{d}{2} - y_0\right)$ e raio $\frac{d}{2}$.

437. Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. Sendo $\overline{OP} = 3 \cdot \overline{AP}$, temos:
$\overline{OP} = \sqrt{X^2 + Y^2} = 3 \cdot \sqrt{(X - 2)^2 + Y^2}$
e daí vem
$2X^2 + 2Y^2 - 9X + 9 = 0$
que é a equação do l.g.
Conclusão: o l.g. é a circunferência de centro $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$ e raio $\frac{3}{4}$.

439.



Seja $M(X, Y)$ pertencente ao l.g. Temos que M é ponto médio do segmento PQ, então:

$$X = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{x + 2}{2} \text{ e } Y = \frac{y_P + y_Q}{2} = y$$

e daí vem:

$x = 2X - 2$ e $y = Y$.

Como P está sobre a circunferência de centro $C(-3, 1)$ e raio 3, temos:

$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$

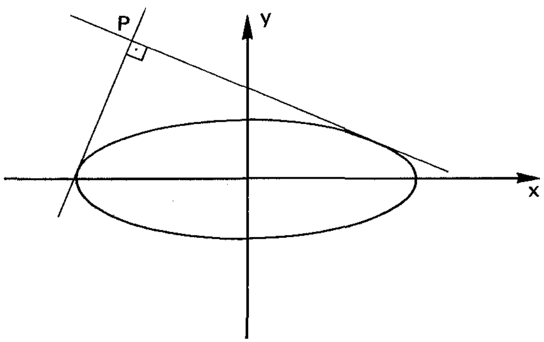
e daí vem:

$(2X - 2 + 3)^2 + (Y - 1)^2 = 9$

$4X^2 + Y^2 + 4X - 2Y - 7 = 0$

que é a equação do l.g.

440.



Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g.

Consideremos, por P, as tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ (1). As tangentes têm equação da forma $y - Y = m(x - X)$ (2). As equações (1) e (2) devem formar um sistema que tem um só ponto comum. Substituindo y de (2) em (1), resulta:

$x^2 + 4(Y + mx - mX)^2 = 4$

e daí

$(1 + 4m^2)\, x^2 + 8m(Y - mX)\, x + 4[(Y - mX)^2 - 1] = 0,$

que deve fornecer um único valor para x.

Então:

$\Delta = 0 \Rightarrow 64m^2(Y - mX)^2 - 16(1 + 4m^2)[(Y - mX)^2 - 1] = 0$

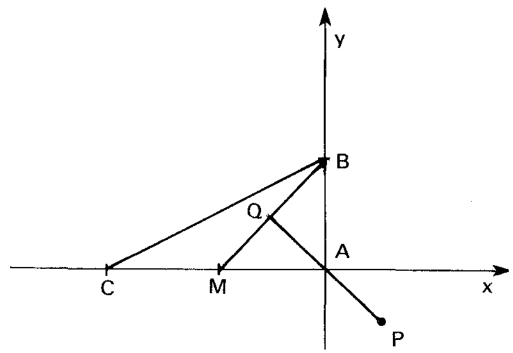
e daí $-(Y - mX)^2 + (1 + 4m^2) = 0$

ou seja, $(4 - X^2)m^2 + 2XYm + (1 - Y^2) = 0$.

Essa equação fornece os coeficientes angulares das duas tangentes por P, que são perpendiculares.

Então, o produto das raízes dessa equação é -1, ou seja, $\dfrac{1 - Y^2}{4 - X^2} = -1$ e finalmente $X^2 + Y^2 = 5$, que é a equação do l.g.

441.



Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. e seja $Q(x, y)$ a interseção de AP com a mediana BM.

Como $\dfrac{AQ}{PQ} = \dfrac{1}{2}$, temos:

$$\frac{x_Q - x_A}{x_Q - x_P} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x - 0}{x - X} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -X$$

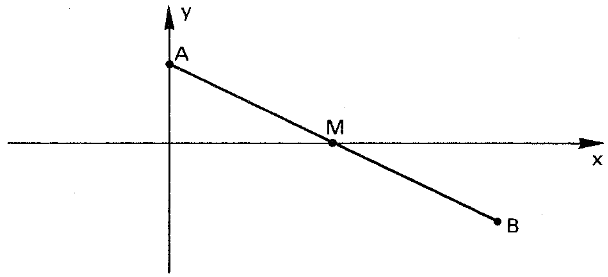
$$\frac{y_Q - y_A}{y_Q - y_P} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y - 0}{y - Y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -Y.$$

Como Q percorre a mediana BM cuja reta suporte tem equação $x - y + 1 = 0$, temos: $(-X) - (-Y) + 1 = 0$ e daí $-X + Y + 1 = 0$.

Notemos que $-1 \leqslant x \leqslant 0$ e $0 \leqslant y \leqslant 1$ (pois Q está entre M e B) e, então, $0 \leqslant X \leqslant 1$ e $-1 \leqslant Y \leqslant 0$.

Conclusão: o l.g. é o segmento da reta $-X + Y + 1 = 0$ de extremos $(0, -1)$ e $(1, 0)$.

442.



O ponto A, variável, tem coordenadas $(0, y)$.
O ponto M, médio de AB, tem coordenadas $(x, 0)$.
O ponto B, pertencente ao l.g., é (X, Y).

Devemos ter:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \text{ e } d_{AM} = a$$

então:

$$x = \frac{0 + X}{2}\ (1),\ 0 = \frac{y + Y}{2}\ (2) \text{ e } x^2 + y^2 = a^2\ (3).$$

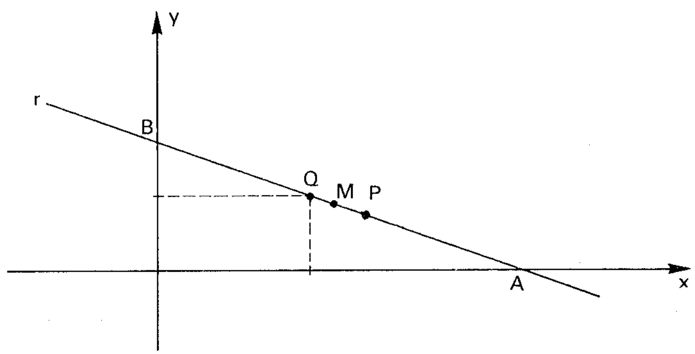
Tirando x de (1), y de (2) e substituindo em (3), resulta:

$\left(\frac{X}{2}\right)^2 + (-Y)^2 = a^2$ e daí $X^2 + 4Y^2 = 4a^2$, que é a equação do l.g.

Conclusão: o l.g. é a elipse de equação reduzida $\frac{X^2}{4a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$.

443. $d^2_{PP_1} + d^2_{PP_2} = 4r^2$
$(x - r)^2 + y^2 + (x + r)^2 + y^2 = 4r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

444.



Se $A(a, 0)$ e $B = (0, b)$, a equação segmentária de r é $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Como $Q(2, 1)$ está em r, devemos ter $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$ (1).

As coordenadas de M são $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

Seja $P(X, Y)$ pertencente ao l.g. Como M é médio de PQ, então:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{X + 2}{2} \Rightarrow a = X + 2\ (2)$$

$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{Y + 1}{2} \Rightarrow b = Y + 1\ (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), resulta:

$\frac{2}{X + 2} + \frac{1}{Y + 1} = 1$ e daí $XY = 2$, que é a equação do l.g.

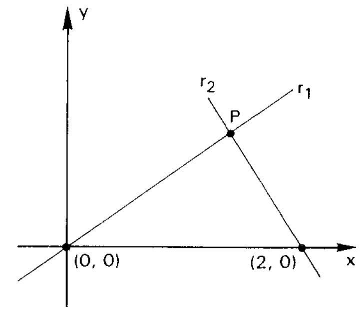
Conclusão: o l.g. é uma hipérbole equilátera.

445. Seja $P(X, Y)$ a interseção de r_1 com r_2.

Temos:

$$m_1 = \frac{Y - 0}{X - 0} = \frac{Y}{X} \text{ e}$$

$$m_2 = \frac{Y - 0}{X - 2} = \frac{Y}{X - 2}.$$



Como $m_1^2 + m_2^2 = 1$, resulta:

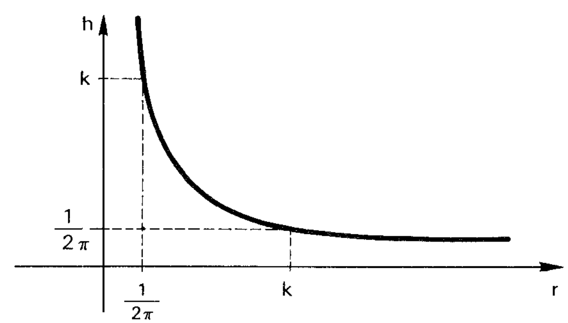
$$\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + \left(\frac{Y}{X - 2}\right)^2 = 1$$

e daí

$X^2Y^2 - (X - 2)^2(X^2 - Y^2) = 0$,

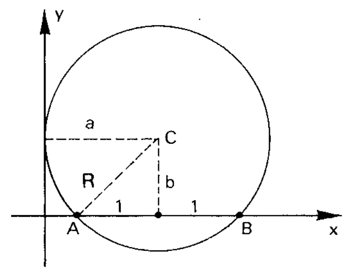
que é a equação do l.g.

446.



A área da superfície lateral de um cilindro é dada por $A_\ell = 2\pi rh$. Fixando o valor de A_ℓ em k, os cilindros que possuem área lateral igual a k têm dimensões r (raio da base) e h (altura) tais que $2\pi rh = k$ ou seja $rh = \frac{k}{2\pi}$. Variando r e calculando h, obtemos os pontos da hipérbole equilátera da figura.

447.



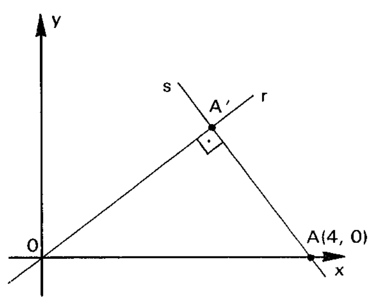
a) Seja $C(a, b)$ o centro e seja R o raio de uma dessas circunferências.
Devemos ter:
$R = a$ e $R^2 = b^2 + 1$
então
$a = R$ (1) e $b = \sqrt{R^2 - 1}$ (2)

portanto a equação da circunferência fica sendo
$(x - R)^2 + (y - \sqrt{R^2 - 1})^2 = R^2$.

b) Eliminando R entre as equações (1) e (2), resulta:
$b = \sqrt{a^2 - 1}$ ou ainda $a^2 - b^2 = 1$.

448. $z = x + yi$
$z - 2i = x + (y - 2)i$
$|z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$
$|z - 2i| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 2 \Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4$
que é a equação da curva cujos pontos representam z. Trata-se da circunferência de centro $(0, 2)$ e raio 2.

449.



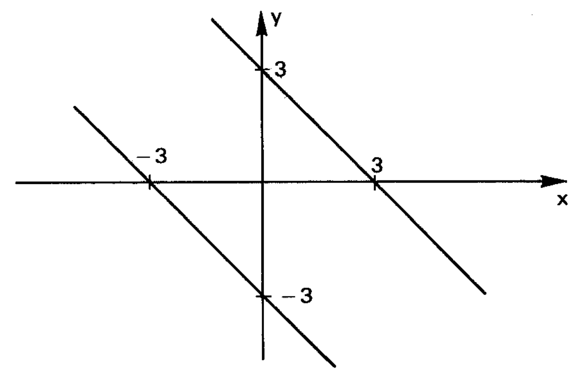
A equação de r é $y = mx$. A equação da reta s é $y - 0 = -\frac{1}{m}(x - 4)$.
O ponto A', interseção de r com s, está nas duas retas e, então, satisfaz as duas equações. Eliminando m entre as equações, temos:

$y = \left(-\frac{x}{y}\right)(x - 4)$ e daí $x^2 + y^2 - 4x = 0$.
Conclusão: o l.g. é uma circunferência de centro $(2, 0)$ e raio 2.

450. $x^2 - y^2 + x + y = 0$
Fatorando, temos:
$(x - y)(x + y) + (x + y) = 0$
$(x + y)(x - y + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ \text{ou} \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$
que são duas retas concorrentes e perpendiculares.

451. $y^2 - xy - 6x^2 = 0$
Resolvendo a equação em y, vem:
$\Delta = x^2 + 24x^2 = 25x^2$
$y = \frac{x \pm 5x}{2} \Rightarrow y = 3x$ e $y = -2x$ (retas pela origem)

452. $x^2 + 2xy + y^2 - 9 = 0$
Fatorando, vem:
$(x + y)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + y - 3)(x + y + 3) = 0 \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ \text{ou} \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$



453. $6x^2 - 6y^2 + 5xy - 6x + 4y = 0$
Resolvendo a equação em x, vem:
$6x^2 + (5y - 6)x - 6y^2 + 4y = 0$.
Δ deve ser um quadrado perfeito para que a equação represente uma reunião de retas.
$\Delta = (5y - 6)^2 - 24(-6y^2 + 4y) = (13y - 6)^2$

Portanto:

$$x = \frac{-5y + 6 \pm (13y - 6)}{12} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ 2x + 3y - 3 = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$m_1 = \frac{-1}{m_2} \Rightarrow$ retas perpendiculares.

454. a) $x^2 + 8x + 15 - xy - 3y = 0$

Fatorando, temos:

$(x + 3)(x + 5) - y(x + 3) = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - y + 5) = 0$

$(r_1)\ x + 3 = 0 \Rightarrow \nexists\ m_1;\ r_1 \perp 0x$

$(r_2)\ x - y + 5 = 0 \Rightarrow m_2 = 1$

Então, $r_2 \mathbin{/\!/} b_{13}$. Portanto, r_2 faz um ângulo de 45° com os eixos $0x$ e $0y$.

Como $r_1 \mathbin{/\!/} 0y$, então o ângulo θ entre r_1 e r_2 é $\frac{\pi}{4}$.

b) $3x^2 - 3y^2 + 6x - 2y + 8xy = 0$

Resolvendo em x, temos:

$3x^2 + (6 + 8y)x - (3y^2 + 2y) = 0$

$\Delta = (10y + 6)^2$

$$x = \frac{-6 - 8y \pm (10y + 6)}{6} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \Rightarrow m_1 = 3 \\ \text{ou} \\ x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Como $m_1 = \frac{-1}{m_2}$, as retas são perpendiculares $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

c) $25x^2 + y^2 - 10xy + 5x - y = 0$

Fatorando:

$(5x - y)^2 + (5x - y) = 0$

$$(5x - y)(5x - y + 1) = 0 \begin{cases} 5x - y = 0 \Rightarrow m_1 = 5 \\ \text{ou} \\ 5x - y + 1 = 0 \Rightarrow m_2 = 5 \end{cases}$$

$m_1 = m_2 \Rightarrow$ retas paralelas $\Rightarrow \theta = 0$.

455. $2x^2 + my^2 + 2xy + 10x + my + 4 = 0$

Resolvendo em x, vem:

$2x^2 + (2y + 10)x + (my^2 + my + 4) = 0$

$\Delta = (2y + 10)^2 - 8(my^2 + my + 4)$

$\Delta = (4 - 8m)y^2 + (40 - 8m)y + 68$

Δ é quadrado perfeito se $\Delta' = 0$.

$\Delta' = (40 - 8m)^2 - 4 \cdot 68(4 - 8m) = 0 \Rightarrow m = -12 \pm 2\sqrt{34}$

456. $xy = 2$

Comparando com a forma teórica $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, temos: $A = B = D = E = 0$; $C = 2$; $F = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \begin{vmatrix} 2A & C & D \\ C & 2B & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} \Rightarrow \alpha = 4 \\ \beta = 4AB - C^2 \Rightarrow \beta = -1 \end{array}\right\} \quad \alpha \neq 0,\ \beta < 0 \Rightarrow \text{hipérbole}$$

457. $x^2 - 2xy - y^2 = 0$

Resolvendo em x, temos: $x^2 - 2yx - y^2 = 0$.

$\Delta = (-2y)^2 + 4y^2 = 8y^2$

$$x = \frac{2y \pm 2\sqrt{2}\,y}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\,y \\ \text{ou} \\ x = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\,y \end{cases}$$

A equação representa a reunião de duas retas.

458. $x^2 + 16y^2 + 2mxy - 1 = 0$

Comparando com a equação teórica, temos:

$A = 1, B = 16, C = 2m, D = E = 0, F = -1$.

$$\begin{cases} \alpha = -128 + 8m^2 \Rightarrow \alpha \neq 0 \text{ se } m \neq -4 \text{ e } m \neq 4 \\ \beta = 4AB - C^2 = 64 - 4m^2 \\ \gamma = A + B = 17 \end{cases}$$

Nessas condições, temos:

$m = -4$ ou $m = 4 \Rightarrow \alpha = 0$ e $\beta = 0 \Rightarrow$ duas retas

$-4 < m < 4 \Rightarrow \alpha \neq 0$ e $\beta > 0 \Rightarrow$ elipse

$m < -4$ ou $m > 4 \Rightarrow \alpha \neq 0$ e $\beta < 0 \Rightarrow$ hipérbole

459. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2c^2} + \frac{y^2}{b^2c^2} = 1 \Rightarrow$ elipse

460. $y - 2x^2 - 7x + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2x^2 + 7x - 8 \Rightarrow$ parábola

461. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4 + m} = 1\ (m \neq -4)$

A equação representa uma hipérbole se $4 + m < 0 \Rightarrow m < -4$.

462. $x^2 - y^2 + x + y = 0$

Fatorando, temos:

$(x + y)(x - y) + (x + y) = 0 \Rightarrow (x + y)(x - y + 1) = 0$

$$\begin{cases} x + y = 0 \Rightarrow m_1 = -1 \\ x - y + 1 = 0 \Rightarrow m_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{reunião se duas retas perpendiculares}$$

463. $x^2 - 6x + 8 = 0$

Fatorando, temos: $(x - 4)(x - 2) = 0$.

$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ (são duas retas paralelas ao eixo Oy)

464. $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$

Fatorando, vem:

$(x + y)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x + y - 1)(x + y + 1) = 0$

$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -1 \\ x + y + 1 = 0 \Rightarrow m_2 = -1 \end{cases}$ (são duas retas paralelas)

465. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

Resolvendo em x, temos:

$\left.\begin{array}{l} x^2 - 3yx + 2y^2 = 0 \\ \Delta = y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2y \text{ ou } x = y$

$(x - 2y)(x - y) = 0$ (reunião de duas retas concorrentes na origem do sistema)

466. $4x^2 - 9y^2 = 0$

$(2x - 3y)(2x + 3y) = 0$

(reunião de duas retas concorrentes na origem do sistema)

467. $y^2 = 2xy - x^2$

$x^2 - 2xy + y^2 = 0$

Fatorando, vem:

$(x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y$ (bissetriz dos quadrantes ímpares)

468. $x^2 + 2ayx + y^2 = 0$

$\Delta = 4a^2y^2 - 4y^2 = 4y^2(a^2 - 1)$

A equação representa a reunião de duas retas se Δ é quadrado perfeito.

Então, $a^2 - 1 > 0 \Rightarrow a < -1$ ou $a > 1$, ou seja, $|a| > 1$.

469. $f(x, y) = g(x, y) \Rightarrow f(x, y) - g(x, y) = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$, então a equação $f(x, y) = g(x, y)$ representa uma reta que contém em particular os pontos em que $f(x, y) = 0 = g(x, y)$, ou seja, os pontos de $A \cap B$.

470. $x^2 - 4x + y^2 + 4y + 11 = 0$

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) + 3 = 0$

$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = -3$

Esta igualdade é impossível, pois o 1º membro é maior ou igual a zero e o 2º membro é negativo, então a equação dada representa um conjunto vazio.

471. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$

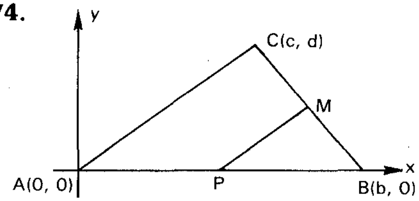
$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 0$

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 0$

então só o ponto $(1, 3)$ satisfaz a equação dada.

Apêndice — Demonstração de teoremas de Geometria Plana

474.



1) P é ponto médio de AB:

$$P\left(\frac{b}{2}, 0\right).$$

M é ponto médio de BC:

$$M\left(\frac{b + c}{2}, \frac{d}{2}\right).$$

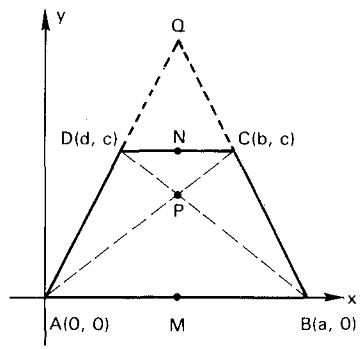
2) Vamos determinar o coeficiente angular de cada uma das retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{PM}$:

$$\left.\begin{array}{l} m_{\overleftrightarrow{AC}} = \dfrac{d}{c} \\ m_{\overleftrightarrow{PM}} = \dfrac{\dfrac{d}{2}}{\dfrac{b + c}{2} - \dfrac{b}{2}} = \dfrac{d}{c} \end{array}\right| \quad m_{\overleftrightarrow{AC}} = m_{\overleftrightarrow{PM}} \Rightarrow \overleftrightarrow{PM} \,//\, \overleftrightarrow{AC}$$

3) Calculemos a medida dos lados AC e PM:

$$\left.\begin{array}{l} d_{AC} = \sqrt{c^2 + d^2} \\ d_{PM} = \sqrt{\left(\dfrac{b}{2} - \dfrac{b + c}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-d}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{c^2 + d^2}}{2} \end{array}\right\} \quad d_{PM} = \frac{1}{2} d_{AC}$$

475.



1) Determinemos os pontos M e N médios das bases:

$$M = \left(\frac{a}{2}, 0\right) \text{ e } N = \left(\frac{b + d}{2}, c\right).$$

2) Determinemos o ponto P, interseção das diagonais AC e BD.

A equação da reta $\overleftrightarrow{AC}$ é $cx - by = 0$ e a equação da reta $\overleftrightarrow{BD}$ é $cx + (a - d)y - ac = 0$. Resolvendo o sistema formado por essas duas equações, temos

$$P = \left(\frac{ab}{a + b - d}, \frac{ac}{a + b - d}\right).$$

3) Determinemos o ponto Q, interseção dos lados AD e BC.
A equação da reta $\overleftrightarrow{AD}$ é $cx - dy = 0$ e a equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é $cx + (a - b)y - ac = 0$. Resolvendo o sistema formado por essas duas equações, temos $Q = \left(\dfrac{ad}{a + d - b}, \dfrac{ac}{a + d - b}\right)$.

4) A equação da reta $\overleftrightarrow{MN}$ é $2cx + (a - b - d)y - ac = 0$.
Provemos que P e Q estão na reta $\overleftrightarrow{MN}$:

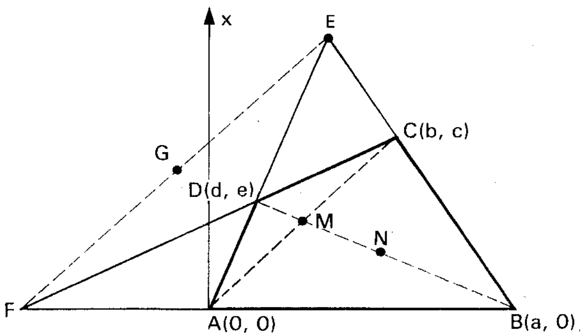
$$2cx_P + (a - b - d)y_P - ac = 2\cdot\frac{abc}{a + b - d} + (a - b - d)\cdot\frac{ac}{a + b - d} - ac =$$

$$= \frac{1}{a + b - d}\cdot[2abc + (a - b - d)ac - (a + b - d)ac] = 0$$

$$2cx_Q + (a - b - d)y_Q - ac = 2\frac{acd}{a + d - b} + (a - b - d)\frac{ac}{a + d - b} - ac =$$

$$= \frac{1}{a + d - b}\cdot[2acd + (a - b - d)ac - (a + d - b)ac] = 0.$$

476.



1) Determinemos os pontos M e N médios das diagonais:
$M = \left(\dfrac{b}{2}, \dfrac{c}{2}\right)$ e $N = \left(\dfrac{a + d}{2}, \dfrac{e}{2}\right)$.

2) Determinemos o ponto E, interseção das retas que contêm os lados AD e BC:
equação de $\overleftrightarrow{AD}$: $ex - dy = 0$
equação de $\overleftrightarrow{BC}$: $cx + (a - b)y - ac = 0$
solução do sistema: $E = \left(\dfrac{acd}{ae - be + cd}, \dfrac{ace}{ae - be + cd}\right)$

3) Determinemos o ponto F, interseção das retas que contêm os lados AB e CD:
equação de $\overleftrightarrow{AB}$: $y = 0$
equação de $\overleftrightarrow{CD}$: $(c - e)x + (d - b)y + (be - cd) = 0$
solução do sistema: $F = \left(\dfrac{be - cd}{e - c}, 0\right)$

4) Determinemos o ponto G, médio de EF:

$$x_G = \frac{1}{2}(x_E + x_F) = \frac{2bcde - ac^2d + abe^2 - b^2e^2 - c^2d^2}{2(ae - be + cd)(e - c)}$$

$$y_G = \frac{1}{2}(y_E + y_F) = \frac{ace}{2(ae - be + cd)}$$

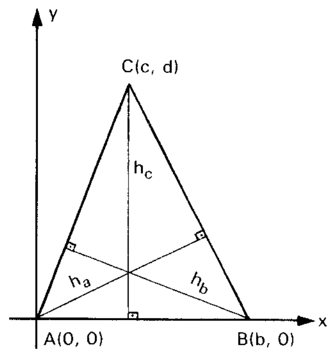
5) A equação da reta $\overleftrightarrow{MN}$ é $2(c - e)x + 2(a + d - b)y + (be - ac - cd) = 0$.
Provemos que G está em MN:

$$2(c - e)\cdot x_G + 2(a + d - b)\cdot y_G + (be - ac - cd) =$$

$$= \frac{-2bcde + ac^2d - abe^2 + b^2e^2 + c^2d^2}{ae - be + cd} + \frac{ace\,(a + d - b)}{ae - be + cd} +$$

$$+ \frac{(be - ac - cd)(ae - be + cd)}{ae - be + cd} = 0.$$

477.



1 Determinemos $h_a \perp BC$:

$$m_{\overleftrightarrow{BC}} = \frac{d}{c - b} \Rightarrow m_{h_a} = \frac{b - c}{d}$$

$$A(0, 0) \in h_a \Rightarrow y - 0 = \frac{b - c}{d}(x - 0)$$

$$(h_a)\ y = \frac{b - c}{d}x.$$

2 Determinemos $h_b \perp AC$:

$$m_{\overleftrightarrow{AC}} = \frac{d}{c} \Rightarrow m_{h_b} = \frac{-c}{d}$$

$$B(b, 0) \in h_b \Rightarrow y - 0 = \frac{-c}{d}(x - b) \Rightarrow (h_b)\ y = \frac{-c}{d}x + \frac{bc}{d}.$$

3 Determinemos $h_c \perp AB$:
h_c é uma reta por $C(c, d)$, perpendicular a Ox.
Então, $h_c = c$.

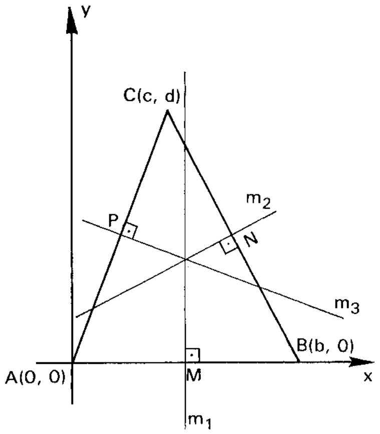
4 Determinemos $h_a \cap h_b \cap h_c$:

$$\begin{cases} y = \dfrac{b - c}{d}x & (1) \\ y = \dfrac{-c}{d}x + \dfrac{bc}{d} & (2) \\ x = c & (3) \end{cases}$$

Substituindo (3) em (1), vem: $y = \dfrac{c(b - c)}{d}$, que satisfaz (2).

Portanto: $I\left(c, \dfrac{c(b - c)}{d}\right)$ é o ponto comum das três alturas.

478.



1) Determinemos a mediatriz $m_1 \perp \overleftrightarrow{AB}$ em M, médio de AB:

$M\left(\dfrac{b}{2},\ 0\right)$; m_1 é reta perpendicular ao eixo Ox, por M: $(m_1)\ x = \dfrac{b}{2}$.

2) Determinemos a mediatriz $m_2 \perp \overleftrightarrow{BC}$ em N, médio de BC:

$N\left(\dfrac{b+c}{2},\ \dfrac{d}{2}\right)$; $m_{\overleftrightarrow{BC}} = \dfrac{d}{c-b} \Rightarrow$

$m_{m_2} = \dfrac{b-c}{d}$

$$(m_2)\ y - \frac{d}{2} = \frac{b-c}{d}\left(x - \frac{b+c}{2}\right) \Rightarrow (m_2)\ y = \frac{b-c}{d}x - \frac{b^2 - c^2 + d^2}{2d}$$

3) Determinemos a mediatriz $m_3 \perp \overleftrightarrow{AC}$ em P, médio de AC:

$P\left(\dfrac{c}{2},\ \dfrac{d}{2}\right)$

$m_{\overleftrightarrow{AC}} = \dfrac{d}{c} \Rightarrow m_{m_3} = \dfrac{-c}{d}$

$$(m_3)\ y - \frac{d}{2} = \frac{-c}{d}\left(x - \frac{c}{2}\right) \Rightarrow (m_3)\ y = \frac{-c}{d}x + \frac{c^2 + d^2}{2d}$$

4) Determinemos $m_1 \cap m_2 \cap m_3$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{b}{2} & (1) \\ y = \dfrac{b-c}{d}x - \dfrac{b^2 - c^2 + d^2}{2d} & (2) \\ y = \dfrac{-c}{d}x + \dfrac{c^2 + d^2}{2d} & (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (3), obtemos $y = \dfrac{c^2 + d^2 - bc}{2d}$, que satisfaz (2).

Portanto, $I\left(\dfrac{b}{2},\ \dfrac{c^2 + d^2 - bc}{2d}\right)$ é ponto comum às mediatrizes do triângulo.

Impresso nas oficinas da