GELSON IEZZI
SAMUEL HAZZAN

COMPLEMENTO PARA
O PROFESSOR

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR 4

SEQÜÊNCIAS MATRIZES
DETERMINANTES SISTEMAS

ATUAL
EDITORA

Copyright desta edição:
SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2006.
Av. Marquês de São Vicente, 1697 — Barra Funda
01139-904 — São Paulo — SP
Fone: (0xx11) 3613-3000
Fax: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268
www.editorasaraiva.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Fundamentos de matemática elementar : complemento para o professor. — São Paulo: Atual, 1993.

Conteúdo: v. 1. Conjuntos e funções / Gelson Iezzi, Carlos Murakami. — v. 2. Logaritmos / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Carlos Murakami. — v. 3. Trigonometria / Gelson Iezzi. — v. 4. Seqüências, matrizes, determinantes, sistemas / Gelson Iezzi, Samuel Hazzan. — v. 5. Combinatória, probabilidade / Samuel Hazzan. — v. 6. Complexos, polinômios, equações — v. 7. Geometria analítica / Gelson Iezzi. — v. 8. Limites, derivadas, noções de integral — Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Nilson José Machado. — v. 9. Geometria plana — v. 10. Geometria espacial : posição e métrica / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo.

1. Matemática (2.º grau) 2. Matemática (2.º grau) — Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) — Testes I. Iezzi, Gelson, 1939- II. Murakami, Carlos, 1943- III. Dolce, Osvaldo, 1938- IV. Hazzan, Samuel, 1946- V. Machado, Nilson José, 1947- VI. Pompeo, José Nicolau, 1945-

93-1795 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino de 2.º grau 510.7

Complemento para o Professor — Fundamentos de Matemática Elementar 4
Editora: Bárbara Ferreira Arena
Editor de campo: Valdir Montanari
Coordenadora editorial: Sandra Lucia Abrano
Chefe de preparação de texto e revisão: Noé Ribeiro
Coordenadora de revisão: Maria Luiza Xavier Souto
Revisores: Alice Kobayashi
Magna Reimberg Teobaldo
Maria Cecília Fernandes Vannucchi
Maria da Penha Faria
Vera Lúcia Pereira Della Rosa
Editor de arte: Zildo Braz
Chefe de arte: Glair Alonso Arruda
Assistentes de arte: Lu Bevilacqua Ghion
Ricardo Yorio
Rosi Meire Martins Ortega
Gerente de produção: Antonio Cabello Q. Filho
Coordenadora de produção: Silvia Regina E. Almeida
Produção gráfica: José Rogerio L. de Simone
Maurício T. de Moraes
Capa: Ettore Bottini
Foto de capa: Hilton Ribeiro
Consultora técnica: Irene Torrano Filisetti
Fotolito: Binhos/Priscor
Composição e arte-final: Paika Realizações Gráficas

Visite nosso *site*: www.atualeditora.com.br
Central de atendimento ao professor: (0xx11) 3613-3030

Impresso nas oficinas da
Gráfica Palas Athena

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 4, Seqüências/Matrizes/Determinantes/Sistemas, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos a sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos à professora Irene Torrano Filisetti a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

Sumário

Capítulo II – Progressão aritmética

8. $(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = (x-1+x+x+1)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (-1, 0, 1) \\ \text{ou} \\ x = 1 \Rightarrow (0, 1, 2) \\ \text{ou} \\ x = 2 \Rightarrow (1, 2, 3) \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} x - r + x + x + r = 18 \Rightarrow x = 6 \quad (1) \\ \dfrac{1}{x-r} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+r} = \dfrac{23}{30} \Rightarrow \dfrac{3x^2 - r^2}{x(x^2 - r^2)} = \dfrac{23}{30} \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$\frac{108 - r^2}{6(36 - r^2)} = \frac{23}{30} \Rightarrow r = \pm 4$$

Para $x = 6$ e $r = -4 \Rightarrow (10, 6, 2)$.
Para $x = 6$ e $r = 4 \Rightarrow (2, 6, 10)$.

10. $$\begin{cases} (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = (x - r + x + x + r)^2 \\ x - r + x = x + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - r^2 = 9x \\ x = 2r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \\ \text{ou} \\ r = 6 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow (6, 12, 18) \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} x - r + x + x + r = 3 \\ (x - r)^2 + x^2 + (x + r)^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \quad (1) \\ 3x^2 + 2r^2 = 11 \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), vem $r = \pm 2$.

Para $x = 1$ e $r = -2$, *temos* $(3, 1, -1)$.
Para $x = 1$ e $r = 2$, temos $(-1, 1, 3)$.

13. $$\begin{cases} (x - 3y) + (x - y) + (x + y) + (x + 3y) = -6 \\ (x - 3y)(x + 3y) = -54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 6 \\ x^2 - 9y^2 = -54 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3}{2} \text{ e } y = \pm\frac{5}{2} \Rightarrow \text{termos: } 6, 1, -4 \text{ e } -9.$$

14. $\begin{cases} (x-3y)(x+3y)=45 \\ (x-y)(x+y)=77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9y^2=45 \\ x^2-y^2=77 \end{cases} \Rightarrow y=\pm 2 \text{ e } x=\pm 9$

$y=-2$ rejeitado porque a P.A. deve ser crescente.
Para $x=9$ e $y=2$, vem: $(3, 7, 11, 15)$.
Para $x=-9$ e $y=2$, vem: $(-15, -11, -7, -3)$.

15. $\begin{cases} (x-3y)+(x-y)+(x+y)+(x+3y)=22 \\ (x-3y)^2+(x-y)^2+(x+y)^2+(x+3y)^2=166 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11}{2} \\ 2x^2+10y^2=83 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\pm\dfrac{3}{2}$

Para $x=\dfrac{11}{2}$ e $y=\dfrac{3}{2} \Rightarrow (1, 4, 7, 10)$.

Para $x=\dfrac{11}{2}$ e $y=\dfrac{-3}{2} \Rightarrow (10, 7, 4, 1)$.

20. Em toda P.A., cada termo, a partir do segundo, é média aritmética entre seu antecessor e seu sucessor.

Assim: P.A.$(a, b, c) \Rightarrow b=\dfrac{a+c}{2} \Rightarrow c=2b-a$.

21. $3x=\dfrac{2x+x^2}{2} \Rightarrow x=0$ ou $x=4$.

Então, $(0, 0, 0)$ rejeitada porque os termos devem ser distintos.
Assim: $(8, 12, 16)$.

22. $2x=\dfrac{x+1+x^2-5}{2} \Rightarrow x=4$ ou $x=-1$.

$x=-1$ rejeitado porque $2x$ é lado de um triângulo.
Portanto, temos: $(5, 8, 11)$ e, então, perímetro igual a 24.

23. lado $=x$, diagonal $=\sqrt{2}\,x$, área $=x^2 \Rightarrow (x, \sqrt{2}x, x^2)$.

Então: $\sqrt{2}\,x=\dfrac{x+x^2}{2} \Rightarrow x=0$ ou $x=2\sqrt{2}-1$.

$x=0$ rejeitado porque é lado do quadrado.
Então: $x=2\sqrt{2}-1$.

25. Por hipótese, $\dfrac{1}{y+z}-\dfrac{1}{x+y}=r \Rightarrow x-z=r(x+y)(y+z)$

e

$$\frac{1}{z+x}-\frac{1}{y+z}=r \Rightarrow r=\frac{y-x}{(x+z)(y+z)}$$

Então: $x^2-z^2=(x-z)(x+z)=r(x+y)(y+z)(x+z)=$

$$=\frac{y-x}{(x+z)(y+z)}\cdot(x+y)(y+z)(x+z)=$$
$$=(y-x)(x+y)=y^2-x^2$$

26. Por hipótese, $b-a=c-b=r$.

Então: $b^2(a+c)-a^2(b+c)=ab^2+b^2c-a^2b-a^2c=$
$=ab(b-a)+c(b^2-a^2)=ab(b-a)+c(b-a)(b+a)=$
$=ab(c-b)+c(c-b)(b+a)=$
$=abc-ab^2+c^2b+ac^2-b^2c-abc=$
$=ac^2+bc^2-ab^2-b^2c=$
$=c^2(a+b)-b^2(a+c)$

27. Por hipótese, $b-a=c-b$ (1) e $\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{c}$ (2).

De (2) vem $\dfrac{b-c}{bc}=\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{c}$ (3).

Utilizando (1) em (3), vem:

$\dfrac{a-b}{bc}=\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{c}$ e daí $\dfrac{a}{bc}-\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{c}$

então, $\dfrac{a}{bc}=\dfrac{1}{d} \Rightarrow ad=bc \Rightarrow ad=\dfrac{a+c}{2}\cdot c \Rightarrow 2ad=c(a+c)$

28. Fazendo $\alpha=x-3y$, $\beta=x-y$, $\gamma=x+y$ e $\delta=x+3y$, temos:

$(\delta+3\beta)(\delta-3\beta)+(\alpha+3\gamma)(\alpha-3\gamma)=4x(6y-2x)+4x(-6y-2x)=$
$=4x(-4x)=-16x^2$

$2(\alpha\delta-9\beta\gamma)=2(x^2-9y^2-9x^2+9y^2)=-16x^2$

então: $(\delta+3\beta)(\delta-3\beta)+(\alpha+3\gamma)(\alpha-3\gamma)=2(\alpha\delta-9\beta\gamma)$.

34. $a_2=a_1+r \Rightarrow a_1+2=24 \Rightarrow a_1=22$

$a_n=a_1+(n-1)r \Rightarrow 60=22+(n-1)\cdot 2 \Rightarrow n=20 \Rightarrow$ vigésimo termo ou a_{20}.

38. $\begin{cases} a_{12}+a_{21}=302 \\ a_{23}+a_{46}=446 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1+31r=302 \\ 2a_1+67r=446 \end{cases} \Rightarrow a_1=89 \text{ e } r=4$

P.A.$(89, 93, 97, \dots)$.

39. $(\underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{14}, 15, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ a_n}}{191}, 192)$

$a_n=a_1+(n-1)r \Rightarrow 191=15+(n-1)\cdot 2 \Rightarrow n=89$

40. $a_m+a_n=a_p+a_q \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1+(m-1)r+a_1+(n-1)r=a_1+(p-1)r+a_1+(q-1)r \Rightarrow$
$\Rightarrow (m-1)r+(n-1)r=(p-1)r+(q-1)r \Rightarrow$
$\Rightarrow m-1+n-1=p-1+q-1 \Rightarrow m+n=p+q$.

42. P.A.$_1$(5, 8, 11, ...)

$$\left.\begin{array}{l} n = 100 \\ r = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{100} = 5 + 99 \cdot 3 = 302$$

Então, P.A.$_1$(5, 8, 11, ..., 302).

P.A.$_2$(3, 7, 11, ...)

$$\left.\begin{array}{l} n = 100 \\ r = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{100} = 3 + 99 \cdot 4 = 399$$

Então, P.A.$_2$(3, 7, 11, ..., 399).

Como queremos os termos comuns às duas progressões, então $a_n \leqslant 302$.
Observamos que o primeiro termo comum é $a_1 = 11$ e o segundo termo comum é $a_2 = 23 \Rightarrow r = 12$.
Então: $a_1 + (n - 1)r \leqslant 302$

$$11 + (n - 1) \cdot 12 \leqslant 302 \Rightarrow n \leqslant 25{,}25 \Rightarrow n = 25.$$

43. $a_p = a + (p - 1)r \Rightarrow a = a_p - (p - 1)r$
Como $0 \leqslant a \leqslant 10$ e $a_p = 35$, vem:
$0 \leqslant 35 - (p - 1) \cdot 13 \leqslant 10 \Rightarrow 2{,}9 \leqslant p \leqslant 3{,}6 \Rightarrow p = 3.$
Então: $a_3 = a + 2r \Rightarrow 35 = a + 2 \cdot 13 \Rightarrow a = 9.$

44. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = (1, 3, 5, ..., a_n)$
$(f(a_1), f(a_2), f(a_3), ..., f(a_n)) = (f(1), f(3), f(5), ..., f(a_n)) = (4, 10, 16, ..., f(a_n))$

Sendo $f(x) = ax + b \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(1) = a + b = 4 \\ f(3) = 3a + b = 10 \end{array}\right. \Rightarrow a = 3$ e $b = 1$

Portanto: $f(2) = a \cdot 2 + b \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow f(2) = 7.$

45. Por hipótese $a_p - a_{p-1} = r$ e $a_{p-1} - a_{p-2} = r$ para todo $\frac{p}{2}$ natural, $3 \leqslant p \leqslant n$.

Então:

$$a_p^2 - a_{p-1}^2 = (a_p - a_{p-1})(a_p + a_{p-1}) = r(a_p + a_{p-1})$$
$$a_{p-1}^2 - a_{p-2}^2 = (a_{p-1} - a_{p-2})(a_{p-1} + a_{p-2}) = r(a_{p-1} + a_{p-2})$$

e daí vem:

$$(a_p^2 - a_{p-1}^2) - (a_{p-1}^2 - a_{p-2}^2) = r(a_p - a_{p-2}) = r \cdot 2r = 2r^2 \text{ (constante)}.$$

46. Por hipótese:

$x = a_m = a_1 + (m - 1)r$
$y = a_n = a_1 + (n - 1)r$
$z = a_p = a_1 + (p - 1)r$

então:

$(n - p)x + (p - m)y + (m - n)z =$
$= (n - p)[a_1 + (m - 1)r] + (p - m)[a_1 + (n - 1)r] + (m - n)[a_1 + (p - 1)r] =$

$= a_1(n - p + p - m + m - n) + r[(n - p)(m - 1) + (p - m)(n - 1) + (m - n)(p - 1)] =$
$= a_1 \cdot 0 + r \cdot 0 = 0.$

47. Demonstração pelo princípio da indução finita.
Para $n = 3$, temos:

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} = \frac{a_3 + a_1}{a_1a_2a_3} = \frac{2a_2}{a_1a_2a_3} = \frac{2}{a_1a_3} = \frac{3 - 1}{a_1a_3}$$

Suponhamos a tese válida para p termos iniciais, $p \geqslant 3$, ou seja:

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{p-1}a_p} = \frac{p - 1}{a_1a_p}$$

então, temos:

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{p-1}a_p} + \frac{1}{a_pa_{p+1}} = \frac{p - 1}{a_1a_p} + \frac{1}{a_pa_{p+1}} =$$
$$\frac{(p - 1)a_{p+1} + a_1}{a_1a_pa_{p+1}} = \frac{(p - 1)(a_p + r) + a_1}{a_1a_pa_{p+1}} = \frac{(p - 1)a_p + a_1 + (p - 1)r}{a_1a_pa_{p+1}} =$$
$$\frac{p \cdot a_p}{a_1a_pa_{p+1}} = \frac{p}{a_1a_{p+1}} = \frac{(p + 1) - 1}{a_1a_{p+1}}$$

e a tese está verificada para $p + 1$ termos iniciais.
Em conseqüência, a tese vale para todo n natural.

49. (12, __, __, ..., __, __, 34)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 34 \\ r = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 34 = 12 + (n - 1) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow n = 45 \text{ (incluindo os extremos)}$$

Então, devem ser interpolados 43 termos.

52. Múltiplos de 2 → (100, 102, ..., 1 000)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 100 \\ a_n = 1\,000 \\ r = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1\,000 = 100 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 451$$

Múltiplos de 3 → (102, ..., 999)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 102 \\ a_m = 999 \\ r = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 999 = 102 + (m - 1) \cdot 2 \Rightarrow m = 300$$

Múltiplos de 2 e 3, isto é, múltiplos de 6 → (102, ..., 996)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 102 \\ a_p = 996 \\ r = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 996 = 102 + (p - 1) \cdot 6 \Rightarrow p = 150$$

Assim, múltiplos de *2* ou *3* de *100* a *1 000* são no total:
$n + m - p = 451 + 300 - 150 = 601.$

53. Números de dois ou três algarismos: (10, 11, 12, ..., 998, 999)
$n = 999 - 10 + 1 = 990$
Números de dois ou três algarismos, divisíveis por *7*: (14, ..., 994)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 14 \\ a_p = 994 \\ r = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 994 = 14 + (p - 1)r \Rightarrow p = 141$$

Então, não são divisíveis por *7*: $n - p = 849$ números.

54. Total de inteiros de 1 000 a 10 000, $n = 9\,001$
Números divisíveis por 5: (1 000, ..., 10 000)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1\,000 \\ a_m = 10\,000 \\ r = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 10\,000 = 1\,000 + (m - 1) \cdot 5 \Rightarrow m = 1\,801$$

Números divisíveis por 7: (1 001, ..., 9 996)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1\,001 \\ a_p = 9\,996 \\ r = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 9\,996 = 1\,001 + (p - 1) \cdot 7 \Rightarrow p = 1\,286$$

Números divisíveis por 5 e 7: (1 015, ..., 9 975)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1\,015 \\ a_q = 9\,975 \\ r = 35 \end{array}\right\} \Rightarrow 9\,975 = 1\,015 + (q - 1) \cdot 35 \Rightarrow q = 257$$

Então, não são divisíveis nem por *5* nem por *7*:
$n - [m + p - q] = 9\,001 - [1\,801 + 1\,286 - 257] = 6\,171.$

56. $\underbrace{(1, \_\_, \_\_, \ldots, \_\_, n^2)}_{n}$

A P.A. tem $n + 2$ termos.

$$n^2 = 1 + (n + 2 - 1)r \Rightarrow \frac{n^2 - 1}{n + 1} = r \Rightarrow r = n - 1$$

62.
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{1 - n}{n} \\[2mm] a_2 = \dfrac{2 - n}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow r = a_2 - a_1 = \frac{2 - n - (1 - n)}{n} \Rightarrow r = \frac{1}{n}$$

Então: $a_n = \dfrac{1 - n}{n} + (n - 1) \cdot \dfrac{1}{n} \Rightarrow a_n = 0.$

Portanto, $S = \dfrac{\left(\dfrac{1 - n}{n} + 0\right) \cdot n}{2} \Rightarrow S = \dfrac{1 - n}{2}.$

67. $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = 10(a_1 + a_{20}) = -15 \Rightarrow a_1 + a_{20} = \dfrac{-3}{2}$

Como a_6 e a_{15} são termos eqüidistantes dos extremos, então:

$$a_6 + a_{15} = a_1 + a_{20} \Rightarrow a_6 + a_{15} = -\frac{3}{2}.$$

68. $r = 0{,}08a_1$
$a_{11} = 36 \Rightarrow a_1 + 10 \cdot 0{,}08a_1 = 36 \Rightarrow a_1 = 20$
Portanto, $r = 1{,}6$ e $a_{26} = 60$.

Assim, $S_{26} = \dfrac{(20 + 60) \cdot 26}{2} \Rightarrow S_{26} = 1\,040.$

69. $S_{10} = \dfrac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 50 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 10$

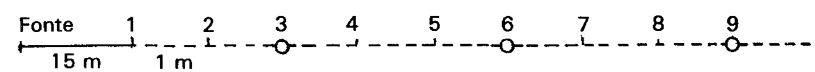
$S_{20} = \dfrac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 50 \Rightarrow a_1 + a_{20} = 5$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 + a_{10} = 10 \\ a_1 + a_{20} = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a_1 + 9r = 10 \\ 2a_1 + 19r = 5 \end{array}\right. \Rightarrow r = \frac{-1}{2} \text{ e } a_1 = \frac{29}{4}$$

Então: $a_{30} = \dfrac{29}{4} + 29\left(\dfrac{-1}{2}\right) \Rightarrow a_{30} = \dfrac{-29}{4}.$

Portanto, $S_{30} = \dfrac{\left(\dfrac{29}{4} - \dfrac{29}{4}\right) \cdot 30}{2} = 0.$

71.



1ª caminhada (ida e volta) $= 2(15 + 1 + 1) = 2 \cdot 17 = 34.$
2ª caminhada (ida e volta) $= 2(17 + 1 + 1 + 1) = 2 \cdot 20 = 40.$
Assim, à $P.A._1$ (3, 6, 9, ..., 60), que é o número de roseiras regadas a cada caminhada, corresponde a $P.A._2$ (34, 40, ...), que representa o percurso percorrido.

Considerando a $P.A._1$, vem: $\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_n = 60 \\ r = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 60 = 3 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 20$

Considerando a $P.A._2$, vem: $\left.\begin{array}{l} a_1 = 34 \\ n = 20 \\ r = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{20} = 34 + 19 \cdot 6 \Rightarrow a_{20} = 148$

Assim: $S_{20} = \dfrac{34 + 148}{2} \cdot 20 \Rightarrow S_{20} = 1\,820$ m.

73. $$\left.\begin{aligned} a_1 &= -5 \\ r &= 4 \\ a_n &= -5 + (n-1)\cdot 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1\,590 = \left(\frac{-5-5+4n-4}{2}\right)\cdot n \Rightarrow$$

$$2n^2 - 7n - 1\,590 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 30 \\ \text{ou} \\ n = \dfrac{-53}{2}\ \text{(rejeitado)} \end{cases}$$

Então, $S_n = 1\,590$ se $n = 30$.

74. $$\left.\begin{aligned} a_1 &= 13 \\ a_2 &= \frac{45}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = \frac{-7}{4}$$

$$a_n = 13 + (n-1)\left(\frac{-7}{4}\right) \Rightarrow a_n = \frac{59}{4} - \frac{7}{4}n$$

$$S_n = \left(\frac{13 + \frac{59}{4} - \frac{7}{4}n}{2}\right)\cdot n < 0 \Rightarrow -7n^2 + 111n < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7n^2 - 111n < 0 \Rightarrow \begin{cases} n < 0\ \text{(rejeitado)} \\ \text{ou} \\ n > \dfrac{111}{7} \Rightarrow n = 16\ \text{(valor mínimo)} \end{cases}$$

76. $$\begin{cases} \dfrac{(a_1 + a_{59})\cdot 59}{2} = 12 \\ \dfrac{(a_2 + a_{60})\cdot 59}{2} = 130 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 58r = \dfrac{24}{59} \\ 2a_1 + 60r = \dfrac{260}{59} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 2 \ \text{e}\ a_1 = \frac{-3\,410}{59}$$

78. (4, 7, 10, 13, ..., 517)

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ r &= 3 \\ a_n &= 517 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 517 = 4 + (n-1)\cdot 3 \Rightarrow n = 172$$

Então, *517* é termo de ordem par e cada P.A. extraída dessa tem *86* termos: P.A.$_i$ (4, 10, 16, ..., 514) e P.A.$_p$ (7, 13, ..., 517)

$$\left.\begin{aligned} S_{86i} &= \frac{(4 + 514)\cdot 86}{2} \\ S_{86p} &= \frac{(7 + 517)\cdot 86}{2} \end{aligned}\right\} \frac{S_{86i}}{S_{86p}} = \frac{518}{524} = \frac{259}{262}$$

81. $(14, 21, 28, \ldots, a_n)$, em que $a_n \leqslant 9\,999$

Então, $14 + (n-1)\cdot 7 \leqslant 9\,999 \Rightarrow n \leqslant 1\,427 \Rightarrow n = 1\,427$

Assim, $a_{1\,427} = 14 + 1\,426 \cdot 7 = 9\,996$.

$$S_{1\,427} = \frac{(14 + 9\,996)\cdot 1\,427}{2} \Rightarrow S_{1\,427} = 7\,142\,135$$

84. $$\left.\begin{aligned} f(1) &= 2\cdot 1 + 3 \Rightarrow f(1) = 5 \\ f(25) &= 2\cdot 25 + 3 \Rightarrow f(25) = 53 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{25} = \frac{(5 + 53)\cdot 25}{2} = 725$$

85. $$\sum_{x=5}^{n+5} 4(x-3) = An^2 + Bn + C$$

Para $n = 1$, vem: $\displaystyle\sum_{x=5}^{6} 4(x-3) = A + B + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4(5-3) + 4(6-3) = A + B + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A + B + C = 20 \quad (1)$$

Para $n = 2$, vem: $\displaystyle\sum_{x=5}^{7} 4(x-3) = 4A + 2B + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4(5-3) + 4(6-3) + 4(7-3) = 4A + 2B + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4A + 2B + C = 36 \quad (2)$$

Para $n = 3$, vem: $\displaystyle\sum_{x=5}^{8} 4(x-3) = 9A + 3B + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4(5-3) + 4(6-3) + 4(7-3) + 4(8-3) =$$
$$= 9A + 3B + C \Rightarrow 9A + 3B + C = 56 \quad (3)$$

$$\begin{cases} (1)\ A + B + C = 20 \\ (2)\ 4A + 2B + C = 36 \\ (3)\ 9A + 3B + C = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 20 \\ 2B + 3C = 44 \\ 6B + 8C = 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 20 \\ 2B + 3C = 44 \\ C = 8 \end{cases}$$

Então, $A + B = 20 - C = 20 - 8 = 12$.

86. $$S_m = S_n \Rightarrow \frac{[2a_1 + (m-1)r]m}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2a_1 m + (m-1)rm = 2a_1 n + (n-1)rn \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2a_1(m-n) = [n(n-1) - m(m-1)]r \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2a_1(m-n) = (n-m)(n+m-1)r \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2a_1 = -(n+m-1)r \quad (1) \end{aligned}$$

Sendo $a_{m+n} = a_1 + (m+n-1)r$, então:

$$S_{m+n} = \frac{[a_1 + a_1 + (m+n-1)r](m+n)}{2}$$

$$S_{m+n} = \frac{[2a_1 + (m+n-1)r](m+n)}{2} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$S_{m+n} = 0$.

87. $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1})$ é uma P.A. com número ímpar de termos. Então, o termo médio é média aritmética entre os extremos e essa relação também é válida entre os índices desses termos.

Assim: $\dfrac{2n+1+1}{2} = \dfrac{2n+2}{2} = n + 1$ (índice do termo médio).

Temos, ainda: $a_{2n+1} = a_1 + 2nr$ e $a_{2n} = a_1 + (2n-1)r$.

$$S_i = \frac{(a_1 + a_1 + 2nr)(2n+1)}{2} = (a_1 + nr)(2n+1)$$

$$S_p = \frac{(a_1 + r + a_1 + (2n-1)r)2n}{2} = 2(a_1 + nr) \cdot n$$

$$S_i - S_p = (a_1 + nr)(2n+1) - 2(a_1 + nr)n = (a_1 + nr)(2n + 1 - 2n) = a_1 + nr = a_{n+1} \text{ (termo médio)}$$

88. $(a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots, a_n, \ldots)$

$$a_p + a_n = a_1 + (p-1)r + a_1 + (n-1)r = a_1 + [a_1 + (p+n-2)r] \in \text{P.A.} \Rightarrow a_1 = Kr, K \in \mathbb{Z}$$

89. $a_{\frac{n}{3}} = 4 \Rightarrow a_{\frac{n}{3}} = a_1 + \left(\dfrac{n}{3} - 1\right) \cdot 1 = 4 \Rightarrow a_1 + \dfrac{(n-3)}{3} = 4$

Sabendo que $n = 3K$, então $a_1 + \dfrac{3(K-1)}{3} = 4 \Rightarrow a_1 = 5 - K$.

Então: $a_n = a_{3K} = 5 - K + 3K - 1 = 4 + 2K$.

Portanto, $S_{3K} = \dfrac{(5 - K + 4 + 2K)3K}{2} = 33 \Rightarrow$

$$\Rightarrow K^2 + 9K - 22 = 0 \Rightarrow \begin{cases} K = -11 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ K = 2 \Rightarrow a_1 = 3 \text{ e } n = 6 \end{cases}$$

Assim: P.A. (3, 4, 5, 6, 7, 8).

91. $\dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} = (n+1) \cdot \dfrac{a_n}{2}$

$a_1 \cdot n + a_n \cdot n = n \cdot a_n + a_n \Rightarrow a_1 n = a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_1(n-1) = (n-1)r \Rightarrow a_1 = r$

Capítulo III — Progressão geométrica

97. $(1 + x, 13 + x, 49 + x)$

$\dfrac{13+x}{1+x} = \dfrac{49+x}{13+x} \Rightarrow (13+x)^2 = (49+x)(1+x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 24x - 120 = 0 \Rightarrow x = 5$

Portanto, $(6, 18, 54) \Rightarrow q = 3$.

99. $\dfrac{\text{sen}(x+\pi)}{\text{sen } x} = q \Rightarrow q = \dfrac{-\text{sen } x}{\text{sen } x} = -1$

$\dfrac{\text{sen}(x+2\pi)}{\text{sen}(x+\pi)} = q \Rightarrow q = \dfrac{\text{sen } x}{-\text{sen } x} = -1$

A progressão geométrica é alternante, com $q = -1$.

101. P.G.: $\left(\dfrac{x}{q}, x, xq\right)$

$$\text{condições: } \begin{cases} \dfrac{x}{q} + x + xq = \dfrac{21}{8} & (1) \\ \dfrac{x^2}{q^2} + x^2 + x^2q^2 = \dfrac{189}{64} & (2) \end{cases}$$

Fazendo a diferença entre o quadrado de (1) e (2), temos:

$$\frac{2x^2}{q} + 2x^2q + 2x^2 = \left(\frac{21}{8}\right)^2 - \frac{189}{64} \Rightarrow 2x\left(\frac{x}{q} + x + xq\right) = \frac{63}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x \cdot \frac{21}{8} = \frac{63}{16} \Rightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Substituindo em (1), resulta:

$$\frac{3}{4q} + \frac{3}{4} + \frac{3q}{4} = \frac{21}{8} \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \text{ ou } q = 2$$

Os números procurados são: $\dfrac{3}{8}$, $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{3}{2}$.

102. $\begin{cases} a_1 + a_2 = 12 \\ a_3 + a_4 = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + xq = 12 \\ xq^2 + xq^3 = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1+q) = 12 & (1) \\ xq^2(1+q) = 300 & (2) \end{cases}$

Dividindo (2) por (1), membro a membro, vem:

$q^2 = 25 \Rightarrow q = \pm 5$

Para $q = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 10, 50, 250)$.

Para $q = -5 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 15, -75, 375)$.

103. $$\begin{cases} \dfrac{x}{q^2} + \dfrac{x}{q} + x + xq + xq^2 = \dfrac{121}{3} & (1) \\ \dfrac{x}{q^2} \cdot \dfrac{x}{q} \cdot x \cdot xq \cdot xq^2 = 243 & (2) \end{cases}$$

De (2) vem $x^5 = 243 \Rightarrow x = 3$.

Substituindo em (1), resulta:

$$\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 + q + q^2 = \frac{121}{9}.$$

E daí:

$$\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + \left(q + \frac{1}{q}\right) + 1 = \frac{121}{9}.$$

Fazendo $q + \frac{1}{q} = y$ e $q^2 + \frac{1}{q^2} = y^2 - 2$, resulta:

$$(y^2 - 2) + y + 1 = \frac{121}{9} \Rightarrow y^2 + y - \frac{130}{9} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y = -\frac{13}{3} \text{ ou } y = \frac{10}{3}\right) \Rightarrow \left(q = \frac{-13 \pm \sqrt{133}}{6} \text{ ou } q = 3 \text{ ou } q = \frac{1}{3}\right).$$

Como q é racional, os números são: $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27.

104. $\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = 182 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 546 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + xq^2 + xq^4 = 182 \\ xq + xq^3 + xq^5 = 546 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + q^2 + q^4) = 182 \quad (1) \\ xq(1 + q^2 + q^4) = 546 \quad (2) \end{cases}$

Dividindo (2) por (1), membro a membro, vem:

$q = \frac{546}{182} = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 6, 18, 54, 162, 486).$

105. $\begin{cases} b^2 = ac \quad (1) \\ 2c = b + d \Rightarrow d = 2c - b \quad (2) \\ a + d = 32 \Rightarrow a = 32 - d \quad (3) \\ b + c = 24 \Rightarrow c = 24 - b \quad (4) \end{cases}$

Substituindo (4) em (2), vem: $d = 48 - 3b$ (5).
Substituindo (5) em (3), vem: $a = -16 + 3b$ (6).
Substituindo (4) e (6) em (1), temos:
$b^2 = (-16 + 3b)(24 - b) \Rightarrow b^2 - 22b + 96 = 0 \Rightarrow b = 16$ ou $b = 6$

Para $b = 16$, vem: $a = 32$, $c = 8$ e $d = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \text{P.G. } (32, 16, 8) \\ \text{P.A. } (16, 8, 0) \end{cases}$

Para $b = 6$, vem: $a = 2$, $c = 18$ e $d = 30$ $\Rightarrow \begin{cases} \text{P.G. } (2, 6, 18) \\ \text{P.A. } (6, 18, 30) \end{cases}$

106. $x - r + x + x + r = 36 \Rightarrow x = 12$
P.A. $(12 - r, 12, 12 + r) \Rightarrow (12 - r, 12, 18 + r)$ é P.G.
Então: $12^2 = (12 - r)(18 + r) \Rightarrow r^2 + 6r - 72 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 6$ ou $r = -12$ (rejeitado porque a P.A. é crescente)
Então, os números são 6, 12 e 18.

107. Como x, y e z estão em P.G., nessa ordem, então $y^2 = xz$. Assim, vem:
$(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + 2xz - y^2 + z^2 = x^2 + 2y^2 - y^2 + z^2 =$
$= x^2 + y^2 + z^2.$

108. a, b, c e d estão em P.G. $\Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = bd \\ ad = bc \end{cases}$

Assim, temos:
$(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 = ac - 2ad + bd.$

109. (a, b, c) é P.A. $\Rightarrow 2b = a + c$
(a, b, c) é P.G. $\Rightarrow b^2 = ac$
Então, vem:
$(2b)^2 = (a + c)^2 \Rightarrow 4b^2 = a^2 + 2ac + c^2 \Rightarrow 4ac = a^2 + 2ac + c^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a - c)^2 = 0 \Rightarrow a = c.$
Como $2b = a + c$, então $2b = 2a \Rightarrow b = a$.

110. (a, b, c, d) é P.G. $\Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = bd \\ bc = ad \end{cases}$

$(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 =$
$= b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2bd + b^2 =$
$= a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 - 2ac - 2bc - 2bd =$
$= a^2 + 2ac + 2bd + d^2 - 2ac - 2bc - 2bd =$
$= (a - d)^2$

111. medidas dos lados: x, xq, xq^2
condição: $(xq^2)^2 = x^2 + (xq)^2$ (teorema de Pitágoras)
Então, temos:

$$x^2q^4 = x^2 + x^2q^2 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

112. medidas dos lados: x, xq e xq^2
condições: (1) $q > 1$ (P.G. crescente)
(2) $xq^2 < x + xq$ (condição para existência do triângulo)
De (2) vem:

$$q^2 < 1 + q \Rightarrow q^2 - q - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Fazendo a interseção, temos:

$$1 < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

113. medidas dos lados: $\frac{x}{q}$, x, xq

condições: (1) $\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 1\,728$

(2) $xq < x + \frac{x}{q}$

De (1) vem $x = 12$, que, substituído em (2), dá:
$q^2 - q - 12 < 0 \Rightarrow -3 < q < 4$.
Como q deve ser positivo e divisor de *12*, então temos:
$q = 1 \Rightarrow$ lados medindo *12, 12* e *12*
$q = 2 \Rightarrow$ lados medindo *6, 12* e *24*
$q = 3 \Rightarrow$ lados medindo *4, 12* e *36*
e, ainda, $q = 1{,}5 \Rightarrow$ lados medindo *8, 12, 18*.

114. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{sen} x}{2} \cdot \operatorname{tg} x \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x - \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

118. $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{6}}$

$a_4 = a_3 \cdot q = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}} = 1$

120. $a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow \frac{1}{2} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$

123. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$
$100 < 3^{n-1} < 1\,000 \Rightarrow 3^4 < 100 < 3^{n-1} < 1\,000 < 3^7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 < n - 1 < 7 \Rightarrow 5 < n < 8 \Rightarrow n \in \{6, 7\}$
Então existem *2* termos: a_6 e a_7.

124. $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 2 \cdot 3^9 \Rightarrow (a_{10})^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{8}} \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{8}}$
A igualdade dada é falsa.

125. taxa de crescimento = 3% a.a. $\Rightarrow q = 1{,}03$
$a_4 = 120\,000 \cdot (1{,}03)^3 = 131\,127$

126. taxa de crescimento = 10% a.a. $\Rightarrow q = 1{,}1$
Ao final de 4 anos, temos: $a_5 = 100\,000 \cdot (1{,}1)^4 = 146\,410$.

127. Vamos representar por a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 o volume de álcool existente na mistura após cada uma das operações realizadas. Temos:
$a_1 = 12 - 3 = 9$
$a_2 = 9 - \frac{9}{12} \cdot 3 = \frac{27}{4}$ (pois a quantidade de álcool nos *3 ℓ* retirados é de $\frac{9}{12}$ do total)
$a_3 = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} \cdot 3 = \frac{81}{16}$ (pois a quantidade de álcool nos *3 ℓ* retirados é de $\frac{\frac{27}{4}}{12}$ do total)

Pode-se notar, então, que $a_1, \ldots, a_5$ é uma P.G. com $a_1 = 9$ e $q = \frac{3}{4}$. Daí vem:

$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{729}{256} = 2{,}8476\ \ell$.

129. $a_1q + a_1q^3 + a_1q^5 = 10$ (1)
$a_1q^2 + a_1q^4 + a_1q^6 = 30$ (2)
Dividindo (2) por (1), temos:
$\frac{q^2(a_1 + a_1q^2 + a_1q^4)}{q(a_1 + a_1q^2 + a_1q^4)} = 3 \Rightarrow q = 3$.
Substituindo em (1), temos:
$3a_1 + 27a_1 + 243a_1 = 10 \Rightarrow a_1 = \frac{10}{273}$.

131. $a = a_p$
$b = a_q = a_p \cdot Q^{q-p}$
$c = a_r = a_p \cdot Q^{r-p}$
Então: $a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q} = \frac{a^q}{a^r} \cdot \frac{b^r}{b^p} \cdot \frac{c^p}{c^q} =$

$= \frac{a_p^q}{a_p^r} \cdot \frac{a_p^r \cdot Q^{(q-p)r}}{a_p^p \cdot Q^{(q-p)p}} \cdot \frac{a_p^p \cdot Q^{(r-p)p}}{a_p^q \cdot Q^{(r-p)q}} =$

$= Q^{(q-p)(r-p)} \cdot Q^{(r-p)(p-q)} = Q^{(r-p)(q-p+p-q)} = Q^0 = 1$

132. $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots = q$, então:

$$\frac{\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1}} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{q} \quad e \quad \frac{\frac{1}{a_3}}{\frac{1}{a_2}} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{q} \quad e \quad \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_{n-1}}} = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{q}$$

provando que $\left(\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_3}, \ldots\right)$ também é P.G.

133. $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots = q$, então:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = q^2, \quad \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} \cdot \frac{a_4}{a_3} = q^2, \text{ etc.}$$

provando que $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ também é P.G.

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} = q^2, \quad \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_6}{a_5} \cdot \frac{a_5}{a_4} = q^2, \text{ etc.}$$

provando que $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ também é P.G.

135. P.G.: (3, __, __, −24, __, __)

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = -24 \\ a_1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow -24 = 3 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = -8 \Rightarrow q = -2$$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 3 \cdot (-2)^5 = -96$$

136. $a_1 = 78\,125$, $a_n = 128$ e $q = \dfrac{2}{5}$, então:

$$128 = 78\,125 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{2^7}{5^7} \Rightarrow n - 1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

então devem ser interpolados *6* meios geométricos.

137. $a_1 = 1\,458$, $a_n = 2$ e $q < \dfrac{1}{3}$, então:

$$2 = 1\,458 \cdot q^{n-1} \Rightarrow q = \left(\frac{2}{1\,458}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{1}{3^6}\right)^{\frac{1}{n-1}} = 3^{-\frac{6}{n-1}}$$

$$q < \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{-\frac{6}{n-1}} < 3^{-1} \Rightarrow \frac{6}{n-1} > 1 \Rightarrow n - 1 < 6 \Rightarrow n < 7$$

Como a P.G. deve ter no máximo *6* termos, então o número de meios a interpolar é no máximo *4*.

138. P.G. (a, x, y, b) $\Rightarrow \begin{cases} xy = ab & (1) \\ x^2 = ay & (2) \\ y^2 = xb & (3) \end{cases}$

De (1), vem: $y = \dfrac{ab}{x}$, que substituído em (2) implica:

$$x^2 = a \cdot \frac{ab}{x} \Rightarrow x^3 = a^2b \Rightarrow x = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}.$$

Analogamente, $x = \dfrac{ab}{y} \Rightarrow y^2 = \dfrac{ab}{y} \cdot b \Rightarrow y^3 = ab^2 \Rightarrow y = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}.$

140. a) $S = \log_2 a + \log_2 2a + \log_2 4a + \ldots + \log_2 2^n a =$

$= \log_2 [a \cdot 2a \cdot 4a \cdot \ldots \cdot 2^n a]$

O logaritmando é uma P.G., tal que $a_1 = a$, $q = 2$ e o número de termos é $n + 1$.

Para calcular esse produto, temos:

$$P = a^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

$$\text{E, então, } S = \log_2 \left[a^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\right] = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) \log_2 a.$$

b) Sendo $S = n + 1$, então:

$$n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) \log_2 a \Rightarrow 1 = \frac{n}{2} + \log_2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{n}{2} = \log_2 a \Rightarrow a = 2^{1 - \frac{n}{2}}.$$

141. $\begin{cases} \log_a b = 4 & (1) \\ \log_q b = 2 & (2) \\ \log_c b = \dfrac{1}{100} & (3) \\ c = a^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} & (4) \end{cases}$

De (3), vem: $b = c^{\frac{1}{100}}$ (5)

Substituindo (4) em (5), temos: $b = a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}}$ (6)

Substituindo (6) em (1), vem:

$$\log_a \left(a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}}\right) = 4 \Rightarrow a^4 = a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}} \Rightarrow a = q^{\frac{n(n-1)}{2(400-n)}} \quad (7)$$

Substituindo (6) em (2), vem:

$$\log_q\left(a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}}\right) = 2 \Rightarrow q^2 = a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}} \Rightarrow a = q^{\frac{400-n(n-1)}{2n}} \quad ⑧$$

Comparando ⑦ e ⑧, temos:

$$q^{\frac{n(n-1)}{2(400-n)}} = q^{\frac{400-n(n-1)}{2n}} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{400-n} = \frac{400-n(n-1)}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400n^2 = 400^2 \Rightarrow n^2 = 400 \Rightarrow n = 20$$

143. $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1} \cdot a_{2n} = (a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}) \cdot (a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1})$

$$a_{2n} = 2^n \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \rightarrow a_2 = 2^2 = 4 \\ n = 2 \rightarrow a_4 = 2^4 = 16 \\ n = 3 \rightarrow a_6 = 2^6 = 64 \end{cases}$$

Então, a seqüência dos termos de ordem par é *4, 16, 64, ...*, em que $a_2 = 4$ e $q = 4$.

$$a_{2n-1} = (-3)^{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \rightarrow a_1 = (-3)^1 = -3 \\ n = 2 \rightarrow a_3 = (-3)^3 = -27 \\ n = 3 \rightarrow a_5 = (-3)^5 = -243 \end{cases}$$

Então, a seqüência dos termos de ordem ímpar é -3, -27, -243, ..., em que $a_1 = -3$ e $q = 9$.

Entre os *55* termos iniciais há *28* termos ímpares e *27* termos pares.

Assim:

$$P_{28} = (-3)^{28} \cdot (9)^{\frac{28 \cdot 27}{2}} = (-3)^{28} \cdot (9)^{378} = 3^{784}$$

$$P_{27} = 4^{27} \cdot 4^{\frac{27 \cdot 26}{2}} = 4^{27} \cdot 4^{351} = 4^{378} = 2^{756}$$

Assim: $P_{55} = P_{28} \cdot P_{27} = 3^{784} \cdot 2^{756}$.

146. $\begin{cases} a_2 + a_4 = 10 \\ a_1 + a_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1q + a_1q^3 = 10 \\ a_1 + a_1q^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1q(1 + q^2) = 10 & ① \\ a_1(1 + q^2) = 5 & ② \end{cases}$

Dividindo ① por ②, membro a membro, vem:

$q = 2 \Rightarrow a_1 = 1$ e, portanto, $a_4 = 1 \cdot 2^3 \Rightarrow a_4 = 8$.

147. (base *b*, altura *h*, área *a*)

$$\begin{cases} \text{por hipótese: } \dfrac{h}{b} = 8 \Rightarrow h = 8b \quad ① \\ \text{propriedade dos termos da P.G.: } h^2 = ba \quad ② \\ \text{área do triângulo: } a = \dfrac{b \cdot h}{2} \quad ③ \end{cases}$$

Substituindo ③ em ②, temos: $h^2 = \dfrac{b^2h}{2} \Rightarrow h = \dfrac{b^2}{2}$.

Considerando ①, vem: $\dfrac{b^2}{2} = 8b \Rightarrow b = 16$.

148. $S_3 = \dfrac{3(q^3 - 1)}{q - 1} = 21 \Rightarrow \dfrac{(q - 1)(q^2 + q + 1)}{q - 1} = 7 \Rightarrow q^2 + q - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q = -3$ ou $q = 2$

$S_4 = \dfrac{3(q^4 - 1)}{q - 1} = 45 \Rightarrow \dfrac{(q^2 + 1)(q + 1)(q - 1)}{q - 1} = 15 \Rightarrow$

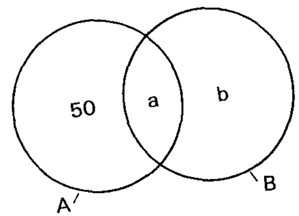
$\Rightarrow (q^2 + 1)(q + 1) = 15$

Verifica-se que $q = -3$ não satisfaz esta última condição.

Então, $q = 2$.

Portanto: $S_5 = \dfrac{3(2^5 - 1)}{2 - 1} = 93$.

149.



$50 + a + b = 62 \Rightarrow a = 12 - b$ ①

P.G. $(50, a, b) \Rightarrow a^2 = 50b$ ②

Resolvendo o sistema formado por ① e ②, temos:

$$a = 12 - b \Rightarrow a^2 = 144 - 24b + b^2 = 50b$$

$$b^2 - 74b + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 72 \text{ (rejeitado porque é maior que } n(A \cup B)) \\ \text{ou} \\ b = 2 \Rightarrow a = 10. \end{cases}$$

Então: P.G. $(50, 10, 2)$ e $n(A \cap B) = 10$.

150. (x, y, z) é P.A. $\Rightarrow$ ($x = y - r$ e $z = y + r$)

Por hipótese, $x + y + z = 15 \Rightarrow y - r + y + y + r = 15 \Rightarrow y = 5$

e daí $x = 5 - r$ e $z = 5 + r$.

$(x, y + 1, z + 5)$ é P.G. $\Rightarrow$ $(5 - r, 6, 10 + r)$ é P.G.

Então: $6^2 = (5 - r)(10 + r) \Rightarrow r = 2$ ou $r = -7$.

Para $r = 2$, $x = 3$, $y = 5$ e $z = 7 \Rightarrow 3z = 21$.

Para $r = 7$, $x = 12$ (rejeitado porque $12 > 10$).

151. P.A. $(a, a + r, a + 2r, \ldots) \Rightarrow S_3 = 3(a + r)$

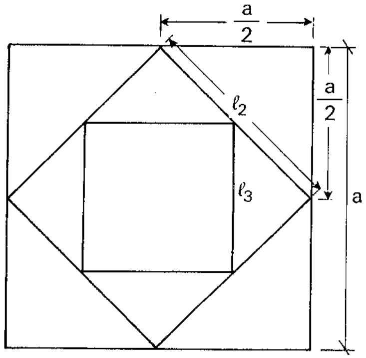
P.G. $\left(a, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}r, S_3, \ldots\right) \Rightarrow \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 = a \cdot S_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{4r^2}{3} = 3a(a + r) \Rightarrow$

$\Rightarrow 9a^2 + 9ra - 4r^2 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{r}{3}$ ou $a = \dfrac{-4}{3}r \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{a}{r} = \dfrac{1}{3}$ ou $\dfrac{a}{r} = \dfrac{-4}{3}$

153.



ℓ_2 é lado de Q_2

$$\ell_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ℓ_3 é lado de Q_3

$$\ell_3^2 = \left(\frac{\ell_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_2}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell_3 = \frac{a}{2}$$

Então, considerando os lados, temos:

$$\text{P.G.}\left(a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \ldots, a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Considerando as áreas, vem:

$$\text{P.G.}\left(a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \ldots\right), \text{ em que } \quad a_1 = a^2 \text{ e } q = \frac{1}{2}.$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a^2(2^n - 1)}{2^{n-1}}$$

155. $\sum\limits_{i=3}^{n} 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^n$ é a soma dos elementos de uma P.G. em que $a_1 = 2^3$, $q = 2$ e o último termo é 2^n. Essa P.G. tem $n - 2$ termos, então:

$$\sum_{i=3}^{n} 2^i = \frac{2^3(2^{n-2} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 8 = 4\,088.$$

Daí resulta $2^{n+1} = 4\,096 = 2^{12}$ e $n = 11$.

157. $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $S_{2n} = \dfrac{a_1(q^{2n} - 1)}{q - 1}$ e $S_{3n} = \dfrac{a_1(q^{3n} - 1)}{q - 1}$

$$S_n^2 + S_{2n}^2 = \frac{a_1^2}{(q-1)^2} \cdot [(q^n - 1)^2 + (q^{2n} - 1)^2] =$$

$$= \frac{a_1^2}{(q-1)^2} \cdot (q^{4n} - q^{2n} - 2q^n + 2)$$

$$S_n(S_{2n} + S_{3n}) = \frac{a_1}{q-1}(q^n - 1) \cdot \left[\frac{a_1}{q-1} \cdot (q^{2n} - 1 + q^{3n} - 1)\right] =$$

$$= \frac{a_1^2}{(q-1)^2}(q^n - 1)(q^{3n} + q^{2n} - 2) = \frac{a_1^2}{(q-1)^2} \cdot (q^{4n} - q^{2n} - 2q^n + 2)$$

então:

$$S_n^2 + S_{2n}^2 = S_n(S_{2n} + S_{3n}).$$

158. $S_1 = \dfrac{a_{10}q - a_1}{q - 1} = 3\,069$ ①

$S_2 = \dfrac{a_{11}q - a_2}{q - 1} = 6\,138$ ②

Dividindo ② por ①, membro a membro, vem:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{a_{11}q - a_2}{a_{10}q - a_1} = \frac{6\,138}{3\,069} = 2 \Rightarrow \frac{a_1q^{11} - a_1q}{a_1q^{10} - a_1} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1q(q^{10} - 1)}{a_1(q^{10} - 1)} = 2 \Rightarrow q = 2$$

Substituindo $q = 2$ em ①, vem $a = 3 \Rightarrow$ P.G. $(3, 6, 18, \ldots, 3\,072)$.

159. Seja P.G. $(a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1})$ de razão q e seja

P.G. $\left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{aq}, \dfrac{1}{aq^2}, \ldots, \dfrac{1}{aq^{n-1}}\right)$ de razão $\dfrac{1}{q}$.

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S^n = \frac{a^n(q^n - 1)^n}{(q - 1)^n}$$

$$S' = \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{q^n} - 1\right)}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{q^n - 1}{aq^{n-1}(q - 1)} \Rightarrow (S')^n = \frac{(q^n - 1)^n}{a^nq^{n(n-1)}(q - 1)^n}$$

$$\left(\frac{S}{S'}\right)^n = \frac{\dfrac{a^n(q^n - 1)^n}{(q - 1)^n}}{\dfrac{(q^n - 1)^n}{a^nq^{n(n-1)}(q - 1)^n}} = \frac{a^n(q^n - 1)^n}{(q - 1)^n} \cdot \frac{a^nq^{n(n-1)}(q - 1)^n}{(q^n - 1)^n} = a^{2n}q^{n(n-1)} = P^2$$

161. $S = 1 + 2 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{25} + \ldots + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 2\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + \ldots =$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \ldots\right)}_{S_1} + \underbrace{\left(2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \ldots + 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + \ldots\right)}_{S_2}$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$S_2 = 2\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots + \left(\frac{1}{5}\right)^n + \ldots\right) = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

165. $S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

$$S_{1\,000} = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{1\,000} - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3\left(\frac{1 - 3^{1\,000}}{3^{1\,000}}\right)}{-2} = \frac{3(3^{1\,000} - 1)}{2 \cdot 3^{1\,000}} =$$

$$= \frac{3^{1\,000} - 1}{2 \cdot 3^{999}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{999}$$

Então, $S_{1\,000} = S - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{999}$, ou seja, $S = S_{1\,000} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{999}$, isto é, comete-se um erro de $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{999}$ para mais.

166. $1 + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{8} + \dfrac{5}{16} + \ldots$

Podemos decompor cada parcela, a partir da segunda, em uma soma de frações.

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
\frac{2}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\
\frac{3}{4} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\\
\frac{4}{8} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\\
\frac{5}{16} &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Verificamos que cada coluna forma uma nova série infinita.

1ª coluna: $a_1 = 1$ e $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S_1 = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2$

2ª coluna: $a_1 = \dfrac{1}{2}$ e $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S_2 = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1$

3ª coluna: $a_1 = \dfrac{1}{4}$ e $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S_3 = \dfrac{\dfrac{1}{4}}{1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

4ª coluna: $a_1 = \dfrac{1}{8}$ e $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S_4 = \dfrac{\dfrac{1}{8}}{1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}$

e assim por diante.

As somas S_1, S_2, S_3, S_4, ..., por sua vez, formam uma P.G. infinita de primeiro termo *2* e razão $\dfrac{1}{2}$, então:

$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \ldots = \dfrac{2}{1 - \dfrac{1}{2}} = 4.$

167. $a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow a_1 = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}$

$a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 3} \Rightarrow a_2 = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$

$\Rightarrow q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$S = \dfrac{\dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3}{2}$

168. $2 + \dfrac{4}{m} + \dfrac{8}{m^2} + \ldots = \dfrac{14}{5}$

$2\left(1 + \dfrac{2}{m} + \dfrac{4}{m^2} + \ldots\right) = \dfrac{14}{5}$

Sendo $S = 1 + \dfrac{2}{m} + \dfrac{4}{m^2} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{m}} = \dfrac{m}{m - 2}$, temos:

$2\left(\dfrac{m}{m - 2}\right) = \dfrac{14}{5} \Rightarrow m = 7.$

169. $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

$xS = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$

então, $S - xS = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1 - x}$

e daí vem: $(1 - x) \cdot S = \dfrac{1}{1 - x} \Rightarrow S = \dfrac{1}{(1 - x)^2}.$

171. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{3^{n+1}} + \ldots =$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots}_{S_1} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots}_{S_2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \\[2ex] S_2 = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 + S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

172. $S = 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^{2n-2}} + \dots =$

$$= (2 - 1) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{64}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{2^n}{2^{2n-2}} - \frac{1}{2^{2n-2}}\right) + \dots =$$

$$= \left(2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{2^n}{2^{2n-2}} + \dots\right) -$$

$$-\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^{2n-2}} + \dots\right) =$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

173. a) $0{,}417417\dots = \frac{417}{1\,000} + \frac{417}{1\,000\,000} + \dots =$

$$= \frac{\frac{417}{1\,000}}{1 - \frac{1}{1\,000}} = \frac{\frac{417}{1\,000}}{\frac{999}{1\,000}} = \frac{417}{999} = \frac{139}{333}$$

b) $5{,}121212\dots = 5 + \frac{12}{100} + \frac{12}{10\,000} + \dots =$

$$= 5 + \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 5 + \frac{\frac{12}{100}}{\frac{99}{100}} = 5 + \frac{12}{99} = 5 + \frac{4}{33} = \frac{169}{33}$$

c) $0{,}17090909\dots = \frac{1}{100}(17{,}090909\dots) =$

$$= \frac{1}{100}\left[17 + \frac{9}{100} + \frac{9}{10\,000} + \dots\right] = \frac{1}{100}\left[17 + \frac{1}{11}\right] = \frac{47}{275}$$

d) $9{,}3858585\dots = \frac{1}{10}[93{,}858585\dots] =$

$$= \frac{1}{10}\left[93 + \frac{85}{100} + \frac{85}{10\,000} + \dots\right] = \frac{1}{10}\left[93 + \frac{85}{99}\right] = \frac{4\,646}{495}$$

176. $a_1 + a_3 + a_5 + \dots = 20$ (razão: q^2)
$a_2 + a_4 + a_6 + \dots = 10$ (razão: q^2)

$S_i = \dfrac{a_1}{1 - q^2} = 20$ e $S_p = \dfrac{a_2}{1 - q^2} = 10$, de onde vem:

$\dfrac{S_p}{S_i} = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$, isto é, $q = \dfrac{1}{2}$.

Substituindo $q = \frac{1}{2}$ em S_i, vem: $a_1 = 15$.

178. a) $a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow \dfrac{2(a^2+1)^2}{5a} = \dfrac{25a^2}{4(a^2+1)} \cdot q^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow q^3 = \frac{8(a^2+1)^3}{125a^3} \Rightarrow q = \frac{2(a^2+1)}{5a}$$

A P.G. é decrescente $\Leftrightarrow$ se $a > 0,\ 0 < q < 1$

Então, $0 < \dfrac{2(a^2+1)}{5a} < 1 \Rightarrow 0 < 2(a^2+1) < 5a$ (I) (II)

(I) $2(a^2+1) > 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$

(II) $2(a^2+1) < 5a \Rightarrow 2a^2 - 5a + 2 < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} < a < 2$

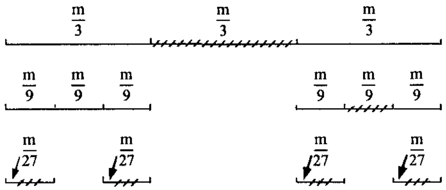
(I) $\cap$ (II) $\Rightarrow \dfrac{1}{2} < a < 2$

b) $q = a - \dfrac{1}{5} = \dfrac{2(a^2+1)}{5a} \Rightarrow 3a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \dfrac{-2}{3} \text{ (rejeitado)} \end{cases}$

Para $a = 1 \Rightarrow q = \dfrac{4}{5}$ e $a_1 = \dfrac{25}{8}$.

Então: $S = \dfrac{\frac{25}{8}}{1 - \frac{4}{5}} \Rightarrow S = \dfrac{125}{8}$.

179.



retirado $\frac{m}{3}$

retirado $2 \cdot \frac{m}{9}$

retirado $4 \cdot \frac{m}{27}$

$\left(\frac{m}{3}, \frac{2m}{9}, \frac{4m}{27}, \ldots\right)$ é P.G. em que $a_1 = \frac{m}{3}$ e $q = \frac{2}{3}$.

$$S = \frac{\frac{m}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow S = m.$$

180. $\ell_1 = 3 \Rightarrow p_1 = 9$

$\ell_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{9}{2}$

$\ell_3 = \frac{3}{4} \Rightarrow p_3 = \frac{9}{4}$

etc.

A seqüência dos perímetros $\left(9, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \ldots\right)$ é P.G. em que $a_1 = 9$ e $q = \frac{1}{2}$, então $S = \frac{9}{1 - \frac{1}{2}} = 18.$

181. Os perímetros $p, \frac{p}{2}, \frac{p}{4}, \ldots$ formam uma P.G. em que $a_1 = p$ e $q = \frac{1}{2}$, então

$$S = \frac{p}{1 - \frac{1}{2}} = 2p.$$

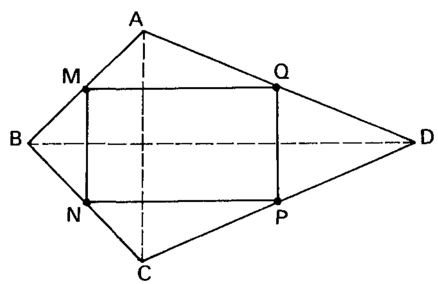
182. Seja *ABCD* um quadrilátero qualquer e seja *MNPQ* o quadrilátero que tem vértices nos pontos médios dos lados de *ABCD*. Temos:

$A_{AMQ} + A_{CNP} =$

$= \frac{1}{4} \cdot A_{ABD} + \frac{1}{4} \cdot A_{BCD} = \frac{1}{4} \cdot A$

$A_{BNM} + A_{DPQ} =$

$= \frac{1}{4} \cdot A_{ABC} + \frac{1}{4} \cdot A_{ACD} = \frac{1}{4} \cdot A.$



Então a soma das áreas dos triângulos *AMQ, CNP, BMN* e *DPQ* é $\frac{A}{2}$; portanto, a área de *MNPQ* é $\frac{A}{2}$, em que *A* é a área de *ABCD*.

Concluímos, dessa forma, que as áreas dos quadriláteros construídos conforme descrição do enunciado formam a P.G.: $\left(A, \frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \ldots\right)$ cuja soma é

$$S = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}} = 2A.$$

183. As áreas dos círculos formam a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão $\frac{1}{2}$. Determinemos a seqüência $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$ dos diâmetros dessas circunferências.

$d_1 = d \Rightarrow a_1 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{8} \Rightarrow d_2^2 = \frac{d^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_2 = \frac{d}{\sqrt{2}}$

$d_2 = \frac{d}{\sqrt{2}} \Rightarrow a_2 = \pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{8} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{\pi d^2}{16} \Rightarrow d_3^2 = \frac{d^2}{4} \Rightarrow$

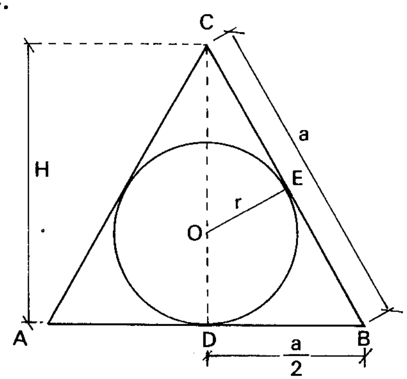
$\Rightarrow d_3 = \frac{d}{2}$

etc.

Os diâmetros formam a P.G.: $\left(d, \frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{2}, \ldots\right)$ cuja soma é A_0A_n, então

$$A_0A_n = \frac{d}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = d(2 + \sqrt{2}).$$

184.



I) $\Delta BDC \sim \Delta OEC \Rightarrow \frac{BD}{OE} = \frac{BC}{OC} \Rightarrow$

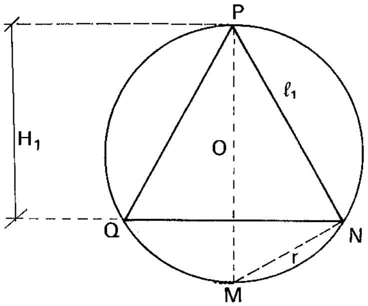
$\Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{a}{H - r}$ ①

Por Pitágoras, no ΔCDB, vem:

$H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ②

De ① e ②, temos: $\frac{a}{2r} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2} - r} \Rightarrow$

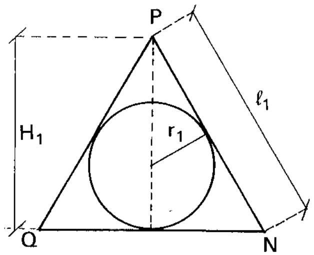
$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ③



II) Por Pitágoras, no ΔMNP, vem:

$$(PM)^2 = (PN)^2 + (MN)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2r)^2 = \ell_1^2 + r^2 \Rightarrow \ell_1 = \frac{a}{2} \quad ④$$



III) Por analogia à parte (I), vem:

$$H_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4} \quad ⑤ \quad \text{e} \quad r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{12} \quad ⑥$$

IV) lados dos triângulos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{por hipótese, } a_1 = a \\ \text{de ④, } a_2 = \dfrac{a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{P.G.} \left(a, \frac{a}{2}, \ldots\right);\ q_{\triangle} = \frac{1}{2}$$

raios das circunferências:

$$\left.\begin{array}{l} \text{de ②, } r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \\ \text{de ⑥, } r_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{P.G.} \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{12}, \ldots\right);\ q_{\circ} = \frac{1}{2}$$

áreas dos triângulos:

$$\text{por hipótese e de ②} : A_1 = \frac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{de ④ e de ⑤} : A_2 = \frac{\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$$

Portanto: $\text{P.G.} \left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}, \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}, \ldots\right);\ q_{\blacktriangle} = \dfrac{1}{4}$

áreas dos círculos:

$$\text{de ③} : \alpha_1 = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}$$

$$\text{de ⑥} : \alpha_2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{48}$$

Portanto: $\text{P.G.} \left(\dfrac{\pi a^2}{12}, \dfrac{\pi a^2}{48}, \ldots\right);\ q_{\bullet} = \dfrac{1}{4}.$

Assim:

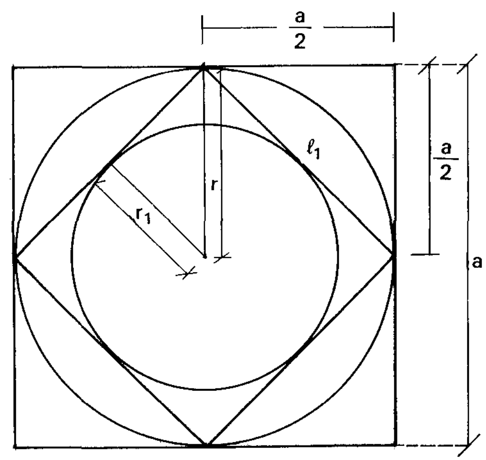
a) $S_{\triangle} = \dfrac{a}{1 - \dfrac{1}{2}} \Rightarrow S_{\triangle} = 2a$

b) $S_{\circ} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{1 - \dfrac{1}{2}} \Rightarrow S_{\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

c) $S_{\blacktriangle} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \dfrac{1}{4}} \Rightarrow S_{\blacktriangle} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$

d) $S_{\bullet} = \dfrac{\dfrac{\pi a^2}{12}}{1 - \dfrac{1}{4}} \Rightarrow S_{\bullet} = \dfrac{\pi a^2}{9}$

185. a) $\ell_1^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$



1º quadrado: lado $= a \Rightarrow p_1 = 4a$

2º quadrado: lado $= \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow p_2 = \dfrac{4a}{\sqrt{2}}$

P.G. $\left(4a, \dfrac{4a}{\sqrt{2}}, \dots\right)$; $q_{\square} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$S_{\square} = \frac{4a}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}\,a\,(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \Rightarrow S_{\square} = 4a(2+\sqrt{2})$$

b) 1º círculo: $r = \dfrac{a}{2} \Rightarrow C = 2\pi r \Rightarrow C = \pi a$

2º círculo: $r_1 = \dfrac{\ell_1}{2} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow C_1 = \dfrac{\pi a}{\sqrt{2}}$

P.G. $\left(\pi a, \dfrac{\pi a}{\sqrt{2}}, \dots\right)$; $q_{\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$S_{\circ} = \frac{\pi a}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi a\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \Rightarrow S_{\circ} = \pi a(2+\sqrt{2})$$

c) 1º quadrado: lado $= a \Rightarrow$ área $= a^2$

2º quadrado: lado $= \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ área $= \dfrac{a^2}{2}$

P.G. $\left(a^2, \dfrac{a^2}{2}, \dots\right)$; $q_{\blacksquare} = \dfrac{1}{2}$

$$S_{\blacksquare} = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\blacksquare} = 2a^2$$

d) 1º círculo: raio $= \dfrac{a}{2} \Rightarrow$ área $= \dfrac{\pi a^2}{4}$

2º círculo: raio $= \dfrac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$ área $= \dfrac{\pi a^2}{8}$

P.G. $\left(\dfrac{\pi a^2}{4}, \dfrac{\pi a^2}{8}, \dots\right)$; $q_{\bullet} = \dfrac{1}{2}$

$$S_{\bullet} = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\bullet} = \frac{\pi a^2}{2}$$

Capítulo IV — Matrizes

189. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

1) $+/A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{p \times 1}$

2) $+\not/A = [\ 1 \quad 1 \quad 1 \ \dots \ 1\ ]_{1 \times p}$

Assim: $+/(+\not/A) = +/[\ 1 \quad 1 \quad 1 \ \dots \ 1\ ] = [p]$

191. $\left.\begin{array}{l} x^2 = x \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ 2x = x \Rightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$

$y = 3$

$z = 4$

$\left.\begin{array}{l} 5 = 5t \Rightarrow t = 1 \\ t^2 = t \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 1$

195. $\left.\begin{array}{l} c_{21} = a_{21} + b_{21} = 3 + 9 = 12 \\ c_{22} = a_{22} + b_{22} = 4 + 10 = 14 \\ c_{23} = a_{23} + b_{23} = 5 + 11 = 16 \end{array}\right\} c_{21} + c_{22} + c_{23} = 12 + 14 + 16 = 42$

196. $\alpha + 2 = 3 \Rightarrow \alpha = 1$

$1 + \beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$

$1 + 0 = \gamma \Rightarrow \gamma = 1$

$2 + (-1) = \delta \Rightarrow \delta = 1$

197. $\begin{cases} y^3 - y - 1 = 5 \quad (1) \\ y^2 + 2y + 2 = 10 \Rightarrow y^2 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -4) \end{cases}$

Substituindo $y = 2$ em (1): $8 - 2 - 6 = 0$. (V)

Substituindo $y = -4$ em (1): $-64 + 4 - 6 = 0$. (F)

Portanto, $y = 2$.

$\begin{cases} 3x + x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = -3) \\ 4x + x^2 + 2 = -1 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$

Substituindo $x = 0$ em (2): $0 + 0 + 3 = 0$. (F)

Substituindo $x = -3$ em (2): $9 - 12 + 3 = 0$. (V)

Portanto: $x = -3$.

201. $|a_{11} - b_{11}| = |1 - 5| = |-4| = 4$
$|a_{12} - b_{12}| = |2 - 7| = |-5| = 5$
$|a_{21} - b_{21}| = |3 - 6| = |-3| = 3$
$|a_{22} - b_{22}| = |4 - 8| = |-4| = 4$
$d(A;\ B) = 5$

204. a) $2X + A = 3B + C$
$2X = 3B + C - A$

$$X = \frac{1}{2}(3B + C - A) \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 6 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

b) $X + A = \frac{1}{2}(B - C)$

$$X = \frac{1}{2}(B - C) - A \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-15}{2} \\ -1 & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}$$

c) $3X + A = B - X$
$3X + X = B - A$
$4X = B - A$

$$X = \frac{1}{4}(B - A) \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \end{bmatrix}$$

d) $\frac{1}{2}(X - A - B) = \frac{1}{3}(X - C)$
$3(X - A - B) = 2(X - C)$
$3X - 3A - 3B = 2X - 2C$

$$X = 3A + 3B - 2C \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 14 & 27 \end{bmatrix}$$

205. $\frac{X - A}{2} = \frac{B + X}{3} + C \Rightarrow 3(X - A) = 2(B + X) + 6C \Rightarrow$
$\Rightarrow 3X - 2X = 3A + 2B + 6C \Rightarrow X = 3A + 2B + 6C$
então, $X = \begin{bmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{bmatrix}$

207. $\begin{cases} X + Y = A \ (1) \\ X - Y = B \ (2) \end{cases}$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2X = A + B = [3 \quad 5 \quad 12] \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 6 \end{bmatrix}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2Y = A - B = [-1 \quad 3 \quad 2] \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

208. $\begin{cases} 2X + 3Y = A + B \\ 3X + 4Y = A - B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6X + 9Y = 3A + 3B \ (1) \\ 6X + 8Y = 2A - 2B \ (2) \end{cases}$

$$(1) - (2) \Rightarrow Y = A + 5B = \begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$(1) \ 6X = 3A + 3B - 9Y = \begin{bmatrix} -90 \\ -228 \\ -54 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -15 \\ -38 \\ -9 \end{bmatrix}$$

210. $c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} + a_{24} \cdot b_{43} + a_{25} \cdot b_{53} + a_{26} \cdot b_{63} + a_{27} \cdot b_{73} =$
$= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot 5 + (-4) \cdot 6 + (-5) \cdot 7 =$
$= 1 + 0 - 3 - 8 - 15 - 24 - 35 = -84$

215. a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 56 \end{bmatrix}$

b) $\left.\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$

219. Como $(AB)_{3 \times 3}$ e $A_{3 \times 3}$, então $B_{3 \times 3}$.

$$AB = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ax & b & 2c \\ 3a & by & 5c \\ 2a & 3b & cz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix}$$

Então, temos:

$$\left.\begin{matrix} ax = 2 \\ 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \\ 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} b = 3 \\ by = 12 \\ 3b = 9 \Rightarrow b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \\ 5c = 25 \Rightarrow c = 5 \\ cz = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 4$$

221. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 1 + 2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x + y & 2x \end{bmatrix}$

Como $AB = BA$, então:

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 + 2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x + y & 2x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ x + y = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

225. A e B são comutáveis significa dizer que $AB = BA$.

a) $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 =$
$= A^2 + AB + AB + B^2 =$
$= A^2 + 2AB + B^2$

b) $(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2 =$
$= A^2 - AB - AB + B^2 =$
$= A^2 - 2AB + B^2$

c) $(A + B)^3 = (A + B)^2(A + B) = (A^2 + 2AB + B^2)(A + B) =$
$= A^3 + A^2B + 2ABA + 2AB^2 + B^2A + B^3 =$
$= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3 =$
$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

d) Analogamente.

e) Por indução:

I) Vale para $k = 1$: $(AB)^1 = A^1 \cdot B^1 = AB$

II) Suponhamos válido para $n = k$: $(AB)^k = A^k \cdot B^k$

III) Vamos provar que vale para $n = k + 1$:
$(AB)^{k+1} = (AB)^k(AB)^1 = A^kB^k \cdot AB = A^k \cdot A \cdot B^k \cdot B = A^{k+1}B^{k+1}$

226. a) $(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

b) $(A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 17 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 19 \\ 5 & 85 \end{bmatrix}$

c) $A^2 - 2I_2A + I_2^2 = (A - I_2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$

d) $A^3 - I_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 55 & 189 \\ 42 & 55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} 54 & 189 \\ 42 & 54 \end{bmatrix}$

228. Fazendo $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\text{então: } \begin{cases} a^2 + bc = 1 & (1) \\ bc + d^2 = 1 & (2) \\ ab + bd = 0 & (3) \\ ac + cd = 0 & (4) \end{cases}$$

De (3) vem: $b(a + d) = 0$; então, temos:

1ª possibilidade: $a + d = 0$
Neste caso, $d = -a = \pm\sqrt{1 - bc}$, e para satisfazer (3) e (4) servem quaisquer b e c, $bc \leq 1$.

2ª possibilidade: $b = 0$ e $a + d \neq 0$
Neste caso, o sistema fica:
(1) $a^2 = 1$, (2) $d^2 = 1$, (4) $c(a + d) = 0$
cuja solução é ($a = d = 1$ e $c = 0$) ou ($a = d = -1$ e $c = 0$).
Assim:

$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ou

$X = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - bc} & b \\ c & -\sqrt{1 - bc} \end{bmatrix}$ ou $X = \begin{bmatrix} -\sqrt{1 - bc} & b \\ c & \sqrt{1 - bc} \end{bmatrix}$

229. Fazendo $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então:

$$\begin{cases} a^2 + bc = a & (1) \\ ab + bd = b & (2) \\ ac + cd = c & (3) \\ bc + d^2 = d & (4) \end{cases}$$

De (2) vem: $b(a + d) = b$; então, temos:

1ª possibilidade: $a + d = 1$ e b qualquer
Neste caso, temos:

(1) $a^2 - a + bc = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4bc}}{2}$, com $bc \leq \dfrac{1}{4}$

④ $d^2 - d + bc = 0 \Rightarrow d = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - bc}}{2}$

Como $a + d = 1$, os sinais tomados diante do radical $\sqrt{1 - bc}$ devem ser opostos.
Note-se que para ③ o valor de c é qualquer.

2ª possibilidade: $b = 0$ e $a + d \neq 1$
Neste caso, o sistema fica:
① $a^2 = a$, ③ $c(a + d) = c$, ④ $d^2 = d$
cuja solução é ($a = c = d = 0$) ou ($a = 1 = d$ e $c = 0$).
Portanto:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$X = \begin{bmatrix} \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4bc}}{2} & b \\ c & \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4bc}}{2} \end{bmatrix} \text{ ou } X = \begin{bmatrix} \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4bc}}{2} & b \\ c & \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4bc}}{2} \end{bmatrix}$$

232. $\begin{bmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 7 & z \\ 5 & -4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow (x = 2,\ y = 5 \text{ e } z = -4)$

233. $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1 - z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x & -y \\ 4 & 0 & -2z \\ -2 & z - 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x = 4,\ y = -2 \text{ e } z = -1)$

234. Para todo $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ temos:
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}$.

237. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 + 2x & -1 + 2y \\ 2 + 4x & -1 + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\left.\begin{matrix} 2 + 2x = 1 \\ 2 + 4x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{-1}{2}$

$\left.\begin{matrix} -1 + 2y = 0 \\ -1 + 4y = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$ e, então, $x + y = 0$.

238. $A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x & 3 - x \end{bmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x & 3 - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 - x & 1 - x \\ x - x^2 & 2x - x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

então:
$2 - x = 1 \Rightarrow x = 1$
$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$
$x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$
$2x - x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$
portanto, $x = 1$.

239. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A + A^{-1})^3 = (2A)^3 = 8A^3 =$

$= 8A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

244. $B = PAP^{-1} \Rightarrow BP = PAP^{-1}P \Rightarrow BP = PA \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} a & 10 \\ 75 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 2a + 30 & -a + 50 \\ 150 + 3b & -75 + 5b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} 2a + 30 = 78 \\ -a + 50 = 26 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 24 \\ \left.\begin{matrix} 150 + 3b = 117 \\ -75 + 5b = -130 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = -11 \end{cases}$

246. a) $AX = B$
$A^{-1}AX = A^{-1}B$
$I_nX = A^{-1}B$
$X = A^{-1}B$

b) $AXB = I_n$
$A^{-1}AXB = A^{-1}I_n$
$I_nXB = A^{-1}$
$XBB^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
$XI_n = A^{-1}B^{-1}$
$X = A^{-1}B^{-1}$

c) $(AX)^{-1} = B$
$AX = B^{-1}$
$A^{-1}AX = A^{-1}B^{-1}$
$I_nX = A^{-1}B^{-1}$
$X = A^{-1}B^{-1}$

d) $BAX = A$
$B^{-1}BAX = B^{-1}A$
$I_nAX = B^{-1}A$
$AX = B^{-1}A$
$A^{-1}AX = A^{-1}B^{-1}A$
$I_nX = A^{-1}B^{-1}A$
$X = A^{-1}B^{-1}A$

e) $(AX)^t = B$
$[(AX)^t]^t = B^t$
$AX = B^t$
$A^{-1}AX = A^{-1}B^t$
$I_nX = A^{-1}B^t$
$X = A^{-1}B^t$

f) $(A + X)^t = B$
$[(A + X)^t]^t = B^t$
$A + X = B^t$
$X = B^t - A$

247. $(XA)^{-1} = B \Rightarrow XA = B^{-1} \Rightarrow XAA^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Rightarrow X = B^{-1}A^{-1}$

Determinemos A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + 4c = 1 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{11} \text{ e } c = \frac{2}{11}$$

$$\begin{cases} 3b + 4d = 0 \\ -2b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{-4}{11} \text{ e } d = \frac{3}{11}$$

Então, $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Determinemos B^{-1}:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5e - 2g = 1 \\ 3g = 0 \end{cases} \Rightarrow g = 0 \text{ e } e = \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} 5f - 2h = 0 \\ 3h = 1 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{1}{3} \text{ e } f = \frac{2}{15}$$

Então, $B^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

$$X = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{165}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

250. Devemos provar que $D = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ é a matriz inversa de ABC, isto é, que $D(ABC) = (ABC)D = I_n$.

1º) $D(ABC) = (C^{-1}B^{-1}A^{-1})(ABC) = C^{-1}B^{-1}(A^{-1}A)BC = C^{-1}B^{-1}I_nBC = C^{-1}(B^{-1}B)C = C^{-1}I_nC = C^{-1}C = I_n$

2º) $(ABC)D = (ABC)(C^{-1}B^{-1}A^{-1}) = AB(CC^{-1})B^{-1}A^{-1} = ABI_nB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

251. Seja $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ uma matriz inversível.

Determinemos A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{d}{ad - bc} \text{ e } z = \frac{-c}{ad - bc}$$

$$\begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-b}{ad - bc} \text{ e } t = \frac{a}{ad - bc}$$

então: $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ e $(A^{-1})^t = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Determinemos $(A^t)^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ap + cr = 1 \\ bp + dr = 0 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{d}{ad - bc} \text{ e } r = \frac{-b}{ad - bc}$$

$$\begin{cases} aq + cs = 0 \\ bq + ds = 1 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{-c}{ad - bc} \text{ e } s = \frac{a}{ad - bc}$$

então: $(A^t)^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

e daí $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Capítulo V — Determinantes

253. a) $\begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \text{sen } y & \cos y \end{vmatrix} = \text{sen } x \cos y + \text{sen } y \cos x = \text{sen } (x + y)$

b) $\begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \cos x & \text{sen } x \end{vmatrix} = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

c) $\begin{vmatrix} 2 \text{ sen } x & 3 \cos x \\ 1 - 2 \cos x & 3 \text{ sen } x + 2 \end{vmatrix} = 2 \text{ sen } x(3 \text{ sen } x + 2) - 3 \cos x(1 - 2 \cos x) =$

$= 6 \text{ sen}^2 x + 4 \text{ sen } x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x =$

$= 6 + 4 \text{ sen } x - 3 \cos x$

254. a) $\begin{vmatrix} \log a & \log b \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \log a - \frac{1}{2} \log b = \log \sqrt[4]{a} - \log \sqrt{b} =$

$= \log \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}} = \log \sqrt[4]{\frac{a}{b^2}}$

b) $\begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^4 - m \\ m & m^3 - 1 \end{vmatrix} = 2m^2(m^3 - 1) - m(2m^4 - m) =$

$= 2m^5 - 2m^2 - 2m^5 + m^2 = -m^2$

255. $a_{ij} = j - i^2 \Rightarrow a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{21} = -3, a_{22} = -2$

e, então, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 3$

256. a) $\begin{vmatrix} 2x & 3x+2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \left(x = 2 \text{ ou } x = \frac{-1}{2}\right)$

b) $\begin{vmatrix} 2x & x-2 \\ 4x+5 & 3x-1 \end{vmatrix} = 11 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \left(x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -1\right)$

257. $\begin{vmatrix} x^2 & -1 \\ -1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (duas raízes reais distintas)

258. $\left.\begin{matrix} x = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow x = ad - bc \\ y = \det \begin{bmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{bmatrix} \Rightarrow y = -6(ad - bc) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = -6$

261. $D = \begin{vmatrix} 2 & \log_5 5 & \log_5 5 \\ 5 & \log_5 125 & \log_5 25 \\ 8 & \log_3 27 & \log_3 243 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

262. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = m - 1$

$D' = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 5 & 5 & m+4 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow D' = 5(m-1) \Rightarrow D' = 5D$

264. $D_1 = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x & x+1 & 2x \end{vmatrix} = -8x - 1$

$D_2 = \begin{vmatrix} 3x & 2x \\ 4 & -x \end{vmatrix} = -3x^2 - 8x$

$D_1 = D_2 \Rightarrow -8x - 1 = -3x^2 - 8x \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}$

265. $\begin{vmatrix} 0 & 3^x & 1 \\ 0 & 3^x & 2 \\ 4 & 3^x & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3^x = 0 \Rightarrow S = \varnothing$

266. $\begin{vmatrix} -\text{sen } x & -8 & -5 \\ 0 & -\text{sen } x & \text{cotg } x \\ 0 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{sen}^2 x = 0 \ (1) \\ \text{ou} \\ \cos x = 0 \ (2) \end{matrix}\right.$

(1) $\text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow x = \pi$

(2) $\cos x = 0 \Rightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}\right)$

Então, o menor valor x tal que $0 < x < 2\pi$ é $x = \frac{\pi}{2}$.

267. $\det A = \begin{vmatrix} \text{sen}^2 x & \text{sen}^2 x & 0 \\ \cos^2 x & \cos^2 y & \text{sen}^2 y \\ r^2 & 0 & r^2 \end{vmatrix} =$

$= r^2 \text{ sen}^2 x \cos^2 y + r^2 \text{ sen}^2 x \text{ sen}^2 y - r^2 \text{ sen}^2 x \cos^2 x =$
$= r^2 \text{ sen}^2 x (\cos^2 y + \text{sen}^2 y - \cos^2 x) = r^2 \text{ sen}^2 x (1 - \cos^2 x) =$
$= r^2 \text{ sen}^2 x \text{ sen}^2 x = r^2 \text{ sen}^4 x$

268. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = xy = 15$ (1)

traço de $A = x + y + 1 = 9$ (2)

De (1) e (2), vem: $\begin{cases} xy = 15 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x = 5 \text{ ou } x = 3)$

Para $x = 5, y = 3$ e para $x = 3, y = 5$.

278. $D = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{5+1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 0 & b & 0 & x \\ 0 & d & x & e \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & h & i & j \end{vmatrix} =$

$= x \cdot (-1)^{4+1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} b & 0 & x \\ d & x & e \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -x^2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 0 & x \\ x & e \end{vmatrix} =$

$= -x^3 \cdot (-x^2) = x^5$

Sendo $D < -32 \Rightarrow x^5 < -32 \Rightarrow x^5 < (-2)^5 \Rightarrow x < -2$.

280. $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 11 \\ 5 & 24 & 13 \\ 7 & 36 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 \cdot 1 & 11 \\ 5 & 12 \cdot 2 & 13 \\ 7 & 12 \cdot 3 & 17 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 5 & 2 & 13 \\ 7 & 3 & 17 \end{vmatrix}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \\ 10 & 5 & 9 & 13 \\ 14 & 7 & -3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3\cdot 1 & 11 \\ 1\cdot 4 & 2\cdot 4 & 3\cdot 4 & 2\cdot 4 \\ 10 & 5 & 3\cdot 3 & 13 \\ 14 & 7 & 3\cdot(-1) & 15 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 3 & 13 \\ 14 & 7 & -1 & 15 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 11 & 15 \\ 5 & 13 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5\cdot 1 \\ 3 & 11 & 5\cdot 3 \\ 5 & 13 & 5\cdot 5 \end{vmatrix} = 5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 11 & 3 \\ 5 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 = 0$$

281. *A* é uma matriz quadrada de ordem *4*.
Então, $\det(2A) = 2^4 \cdot \det A \Rightarrow \det(2A) = 16(-6) = -96$
Como $\det(2A) = x - 97$, então $x - 97 = -96 \Rightarrow x = 1$.

282. Se $\det Q \neq 0$, então Q é inversível, ou seja, existe Q^{-1} tal que $Q^{-1}Q = I_4 = QQ^{-1}$ e daí:

$$Q^3 + 2Q^2 = 0 \Rightarrow Q^3Q^{-1} + 2Q^2Q^{-1} = 0\cdot Q^{-1} \Rightarrow Q^2 + 2Q = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q^2Q^{-1} + 2QQ^{-1} = 0\cdot Q^{-1} \Rightarrow Q + 2I_4 = 0 \Rightarrow Q = -2I_4$$

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det Q = 16$$

284. $$D' = \begin{vmatrix} 8x & -2x^2 & 2x^3 & -2x^4 \\ 4y & -y^2 & y^3 & -y^4 \\ 4z & -z^2 & z^3 & -z^4 \\ 4t & -t^2 & t^3 & -t^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\cdot 2\cdot x & 2\cdot(-1)\cdot x^2 & 2\cdot x^3 & 2\cdot(-1)\cdot x^4 \\ 4\cdot y & (-1)\cdot y^2 & y^3 & (-1)\cdot y^4 \\ 4\cdot z & (-1)\cdot z^2 & z^3 & (-1)\cdot z^4 \\ 4\cdot t & (-1)\cdot t^2 & t^3 & (-1)\cdot t^4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(-1)(-1)\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ y & y^2 & y^3 & y^4 \\ z & z^2 & z^3 & z^4 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \end{vmatrix} = 8\cdot D$$

286. Multiplicamos a 1ª linha por *x*, a 2ª por *y* e a 3ª por *z*.

$$\begin{vmatrix} zy & x & 1 \\ xz & y & 1 \\ xy & z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} xyz & x^2 & x \\ xyz & y^2 & y \\ xyz & z^2 & z \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$$

289. $$\begin{vmatrix} a & b+2c & c \\ x & y+2z & z \\ m & n+2p & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & 2c & c \\ x & 2z & z \\ m & 2p & p \end{vmatrix}}_{*} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

* 2ª coluna = 2 · 3ª coluna e, então, o determinante é igual a zero.

291. $$\begin{vmatrix} \cos 2a & \cos^2 a & \text{sen}^2\, a \\ \cos 2b & \cos^2 b & \text{sen}^2\, b \\ \cos 2c & \cos^2 c & \text{sen}^2\, c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 a - \text{sen}^2\, a & \cos^2 a & \text{sen}^2\, a \\ \cos^2 b - \text{sen}^2\, b & \cos^2 b & \text{sen}^2\, b \\ \cos^2 c - \text{sen}^2\, c & \cos^2 c & \text{sen}^2\, c \end{vmatrix} = 0$$

porque 1ª coluna = 2ª coluna + (−1) · 3ª coluna, isto é, a 1ª coluna é combinação linear das outras duas.

292. Seja $M = \begin{bmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{bmatrix}$

Pelo teorema de Jacobi, podemos adicionar, à 1ª linha, a 2ª e 3ª linhas, obtendo:

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{bmatrix}$$, tal que $\det M = \det M'$.

Mas $\det M' = 0$ porque a 1ª linha é nula. Então, $\det M = 0$.

295. Vamos somar à 3ª coluna uma combinação linear das duas outras, a saber, 1ª × 100 + 2ª × 10:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & (0 + 1\cdot 100 + 3\cdot 10) \\ 1 & 1 & (7 + 1\cdot 100 + 1\cdot 10) \\ 1 & 5 & (6 + 1\cdot 100 + 5\cdot 10) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 130 \\ 1 & 1 & 117 \\ 1 & 5 & 156 \end{vmatrix} =$$

$$= 13\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

296. Somando à 1ª coluna as outras três colunas, temos:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & a & a \\ 1 & a & x & a \\ 1 & a & a & x \end{vmatrix}$$

297. $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ y & y & y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ y & y & y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + y \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= (x - y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (x - y) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b - a & c - a \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - y) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} b - a & c - a \\ b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - y)(b - a)(c - a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b + a & c + a \end{vmatrix} = (x - y)(b - a)(c - a)(c - b)$$

298. $\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$

$$= \begin{vmatrix} a + b + c & a + b + c & a + b + c \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} =$$

$$= (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a + b + c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a + b + c) \end{vmatrix} =$$

$$= (a + b + c)(a + b + c)^2 = (a + b + c)^3$$

(1) (2.ª linha + 3.ª linha) + 1.ª linha

(2) 2.ª coluna − 1.ª coluna e 3.ª coluna − 1.ª coluna

299. $\begin{vmatrix} (b + c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a + c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$

$$\underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} (b + c)^2 - a^2 & b^2 - (a + c)^2 & 0 \\ a^2 & (a + c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (b + c + a)(b + c - a) & (b + a + c)(b - a - c) & 0 \\ a^2 & (a + c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a + b + c) \cdot \begin{vmatrix} b + c - a & b - a - c & 0 \\ a^2 & (a + c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix}$$

Justificativa:

(1) 1.ª linha − 2.ª linha

300. Para todo $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$D = \begin{vmatrix} \cos 0 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$\underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} \cos 0 & (\cos 0 + \cos a + \cos 2a) & \cos 2a \\ \cos a & (\cos a + \cos 2a + \cos 3a) & \cos 3a \\ \cos 2a & (\cos 2a + \cos 3a + \cos 4a) & \cos 4a \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} \cos 0 & (\cos a + 2 \cdot \cos^2 a) & \cos 2a \\ \cos a & (\cos 2a + 2 \cdot \cos 2a \cdot \cos a) & \cos 3a \\ \cos 2a & (\cos 3a + 2 \cdot \cos 3a \cdot \cos a) & \cos 4a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos 0 & \cos a\,(1 + 2 \cdot \cos a) & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a\,(1 + 2 \cdot \cos a) & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a\,(1 + 2 \cdot \cos a) & \cos 4a \end{vmatrix} =$$

$$= (1 + 2 \cos a) \cdot \begin{vmatrix} \cos 0 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix} = (1 + 2 \cdot \cos a) \cdot D$$

então, para todo $a \in \mathbb{R}$, temos:
$D = D + 2D \cdot \cos a \Rightarrow D \cdot \cos a = 0$ e isso exige $D = 0$.

Justificativas:

(1) 2.ª coluna + (1.ª coluna + 3.ª coluna)

(2) $\cos 2a + \cos 0 = 2 \cdot \cos^2 a, \forall a$
$\cos 3a + \cos a = 2 \cdot \cos 2a \cdot \cos a, \forall a$
$\cos 4a + \cos 2a = 2 \cdot \cos 3a \cdot \cos a, \forall a$
pois $\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \dfrac{p + q}{2} \cdot \cos \dfrac{p - q}{2}$

301. $\begin{vmatrix} \cos(x+a) & \text{sen}(x+a) & 1 \\ \cos(x+b) & \text{sen}(x+b) & 1 \\ \cos(x+c) & \text{sen}(x+c) & 1 \end{vmatrix} =$

$$\underset{①}{=} \begin{vmatrix} \cos(x+b) & \text{sen}(x+b) \\ \cos(x+c) & \text{sen}(x+c) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \text{sen}(x+a) \\ \cos(x+c) & \text{sen}(x+c) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \text{sen}(x+a) \\ \cos(x+b) & \text{sen}(x+b) \end{vmatrix} =$$

$= \text{sen}(x + c - x - b) - \text{sen}(x + c - x - a) + \text{sen}(x + b - x - a) =$
$= \text{sen}(c - b) + \text{sen}(a - c) + \text{sen}(b - a)$
que independe de x.

302. $\begin{vmatrix} a^2 & a^2+4a+4 & a^2+8a+16 \\ a^2+4a+4 & a^2+8a+16 & a^2+12a+36 \\ a^2+8a+16 & a^2+12a+36 & a^2+16a+64 \end{vmatrix} \underset{①}{=}$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 4a+4 & 4a+12 \\ a^2+4a+4 & 4a+12 & 4a+20 \\ a^2+8a+16 & 4a+20 & 4a+28 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 4(a+1) & 4(a+3) \\ a^2+4a+4 & 4(a+3) & 4(a+5) \\ a^2+8a+16 & 4(a+5) & 4(a+7) \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a+1 & a+3 \\ a^2+4a+4 & a+3 & a+5 \\ a^2+8a+16 & a+5 & a+7 \end{vmatrix} \underset{②}{=}$$

$$= 2^4 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a+1 & a+3 \\ 4(a+1) & 2 & 2 \\ 4(a+3) & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2^4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a+1 & a+3 \\ 2(a+1) & 1 & 1 \\ 2(a+3) & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{③}{=}$$

$$= 2^6 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a+1 & a+3 \\ 2(a+1) & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2^6 \cdot 2^2 \cdot \begin{vmatrix} a+1 & a+3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2^8 \cdot (a + 1 - a - 3) = 2^8 \cdot (-2) = -2^9$$

Justificativas:

① 3ª coluna − 2ª coluna
2ª coluna − 1ª coluna
② 3ª linha − 2ª linha
2ª linha − 1ª linha
③ 3ª linha − 2ª linha

303. $u^2 - 2u + 1 = 0 \Rightarrow u = 1$
Como $u = x^4$, então $x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

304. $A \cdot A^{-1} = I_3 \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det A^{-1} = -\frac{1}{2}$$

305. $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B) = (\det A) \cdot [\det(2A)] = (\det A)(2^3 \cdot \det A) =$
$= 2^3 \cdot (\det A)^2 = \det C^{-1} \Rightarrow (\det A)^2 = \dfrac{1}{2^3} \cdot \dfrac{1}{32} \Rightarrow$
$\Rightarrow (\det A)^2 = \dfrac{1}{2^8} \Rightarrow |\det A| = \dfrac{1}{16}$

306. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

307. $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & a & b & b \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & a & a & b \\ 1 & a & a & a \end{vmatrix} =$

$$= a \cdot \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ a-b & a-b & 0 \\ a-b & a-b & a-b \end{vmatrix} = a(a-b)^3$$

308. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 4 & 5 \\ x & x & x & 6 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 & 5 \\ 1 & x & x & 6 \\ 1 & x & x & x \end{vmatrix} =$

$$= x \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ x-1 & x-2 & 3 \\ x-1 & x-2 & x-3 \end{vmatrix} = x(x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & x-2 & 3 \\ 1 & x-2 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= x(x-1) \cdot \begin{vmatrix} x-4 & 1 \\ x-4 & x-5 \end{vmatrix} = x(x-1)(x-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} =$$

$$= x(x-1)(x-4)(x-6) = 0$$

então, $S = \{0, 1, 4, 6\}$.

311. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 \\ 1 & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^3 & r^4 & r^5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r-1 & r^2-1 & r^3-1 \\ r^2-1 & r^3-1 & r^4-1 \\ r^3-1 & r^4-1 & r^5-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (r-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & r+1 & r^2+r+1 \\ r+1 & r^2+r+1 & (r+1)(r^2+1) \\ r^2+r+1 & (r+1)(r^2+1) & r^4+r^3+r^2+r+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (r+1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -r & -r(r+1) \\ -r(r+1) & -r(r+1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

pois no último determinante a 2ª linha é proporcional à 1ª.

313. $$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \; -1 = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)^3 \cdot \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^3 \cdot \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$+ \quad +$$

$$= (x-a)^3 \cdot (x+3a) = 0 \Rightarrow x = a \text{ ou } x = -3a \Rightarrow S = \{a, -3a\}$$

314. $$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -x & y & a & b \\ -x & -y & z & c \\ -x & -y & -z & t \end{vmatrix} = xy \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & z & t \\ -1 & 1 & a & b \\ -1 & -1 & z & c \\ -1 & -1 & -z & t \end{vmatrix} = xy \cdot \begin{vmatrix} 2 & a+z & b+t \\ 0 & 2z & c+t \\ 0 & 0 & 2t \end{vmatrix} =$$

$$= xy \cdot 2 \cdot 2z \cdot 2t = 8xyzt$$

315. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & . & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & . & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & a_2 & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & . & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

316. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{sen } x & \text{sen } y & \text{sen } z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{sen } y - \text{sen } x & \text{sen } z - \text{sen } x \\ \cos y - \cos x & \cos z - \cos x \end{vmatrix} =$$

$$= (\text{sen } y - \text{sen } x)(\cos z - \cos x) - (\text{sen } z - \text{sen } x)(\cos y - \cos x) =$$
$$= (\text{sen } y \cdot \cos z - \text{sen } z \cdot \cos y) + (\text{sen } x \cdot \cos y - \text{sen } y \cdot \cos x) +$$
$$+ (\text{sen } z \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos z) =$$
$$= \text{sen } (y-z) + \text{sen } (x-y) + \text{sen } (z-x).$$

317. $$\begin{vmatrix} 1 & \text{sen } a & \cos a \\ 1 & \text{sen } b & \cos b \\ 1 & \text{sen } c & \cos c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{sen } b - \text{sen } a & \cos b - \cos a \\ \text{sen } c - \text{sen } a & \cos c - \cos a \end{vmatrix} =$$

$$= (\text{sen } b - \text{sen } a)(\cos c - \cos a) - (\text{sen } c - \text{sen } a)(\cos b - \cos a) =$$
$$= \left(2 \text{ sen } \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{b+a}{2}\right)\left(-2 \text{ sen } \frac{c+a}{2} \cdot \text{sen } \frac{c-a}{2}\right) -$$
$$- \left(2 \text{ sen } \frac{c-a}{2} \cdot \cos \frac{c+a}{2}\right)\left(-2 \text{ sen } \frac{b+a}{2} \cdot \text{sen } \frac{b-a}{2}\right) =$$
$$= 4 \cdot \text{sen } \frac{b-a}{2} \cdot \text{sen } \frac{c-a}{2} \cdot \left(\text{sen } \frac{b+a}{2} \cdot \cos \frac{c+a}{2} - \text{sen } \frac{c+a}{2} \cdot \cos \frac{b+a}{2}\right) =$$
$$= 4 \cdot \text{sen } \frac{b-a}{2} \cdot \text{sen } \frac{c-a}{2} \cdot \text{sen } \frac{b-c}{2} =$$
$$= 4 \cdot \text{sen } \frac{b-c}{2} \cdot \text{sen } \frac{a-c}{2} \cdot \text{sen } \frac{a-b}{2}$$

318. $$\begin{vmatrix} 1 & \cos 2a & \text{sen } a \\ 1 & \cos 2b & \text{sen } b \\ 1 & \cos 2c & \text{sen } c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a & \text{sen } a \\ 1 & 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 b & \text{sen } b \\ 1 & 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 c & \text{sen } c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2(\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b) & \text{sen } b - \text{sen } a \\ 2(\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 c) & \text{sen } c - \text{sen } a \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (\text{sen } a - \text{sen } b) \cdot (\text{sen } a - \text{sen } c) \cdot \begin{vmatrix} \text{sen } a + \text{sen } b & -1 \\ \text{sen } a + \text{sen } c & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (\text{sen } a - \text{sen } b)(\text{sen } a - \text{sen } c)(\text{sen } c - \text{sen } b)$$

319. $$D = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 & S_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix} =$$

$$= S_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 & S_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix} =$$

$$= S_1 \cdot \begin{vmatrix} S_2 - S_1 & S_2 - S_1 & \dots & S_2 - S_1 & S_2 - S_1 \\ S_2 - S_1 & S_3 - S_1 & \dots & S_3 - S_1 & S_3 - S_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_2 - S_1 & S_3 - S_1 & \dots & S_{n-1} - S_1 & S_{n-1} - S_1 \\ S_2 - S_1 & S_3 - S_1 & \dots & S_{n-1} - S_1 & S_n - S_1 \end{vmatrix} =$$

$$= S_1 \cdot (S_2 - S_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & S_2 - S_1 & \dots & S_2 - S_1 & S_2 - S_1 \\ 1 & S_3 - S_1 & \dots & S_3 - S_1 & S_3 - S_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & S_3 - S_1 & \dots & S_{n-1} - S_1 & S_{n-1} - S_1 \\ 1 & S_3 - S_1 & \dots & S_{n-1} - S_1 & S_n - S_1 \end{vmatrix}$$

e, assim por diante, chegamos a:

$D = S_1 \cdot (S_2 - S_1)(S_3 - S_2)(S_4 - S_3) \dots (S_{n-1} - S_{n-2})(S_n - S_{n-1}) =$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n = n!$

323. $P(x) = (1 - x)(2 - x)(3 - x)(2 - 1)(3 - 1)(3 - 2)$ se anula para $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$.

325. $(\log 70 - \log 7)(\log 700 - \log 7)(\log 7\,000 - \log 7)(\log 700 - \log 70) \cdot$
$\cdot (\log 7\,000 - \log 70)(\log 7\,000 - \log 700) =$

$= \log \dfrac{70}{7} \cdot \log \dfrac{700}{7} \cdot \log \dfrac{7\,000}{7} \cdot \log \dfrac{700}{70} \cdot \log \dfrac{7\,000}{70} \cdot \log \dfrac{7\,000}{700} =$

$= \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 1\,000 \cdot \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 10 =$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

327. $(2 - 1)(x - 1)(-5 - 1)(x - 2)(-5 - 2)(-5 - x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(-5 - x) = 0 \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -5)$

$S = \{-5, 1, 2\}$

328. $$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se desenvolvemos *det M* pela última linha, obtemos:

$$\det M = (-1)^{n+1} \cdot r_1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Reiterando o processo até eliminarmos o último determinante (de ordem *2*), achamos: det M =

$= (-1)^{n+1} \cdot r_1 \cdot (-1)^n \cdot r_2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot r_3 \dots (-1)^{3+1} \cdot c_{n-2} \cdot (-1) \cdot b_{n-1} \cdot a_n =$

$= (-1)^S r_1 r_2 r_3 \dots c_{n-2} \cdot b_{n-1} \cdot a_n \cdot (-1)$

em que S é a soma dos termos da P.A. $(n + 1, n, n - 1, \dots, 4)$ que tem $n - 2$ termos; portanto:

$$S = \frac{(n - 2)(n + 1 + 4)}{2} = \frac{(n - 2)(n + 5)}{2}.$$

Como n é múltiplo de 4, S é ímpar e então:

$\det M = (-1)^{S+1} \cdot r_1 r_2 r_3 \dots a_n$ é positivo.

329. O cálculo do determinante de uma matriz M é feito utilizando operações de multiplicação e de adição com os elementos de M.

Se os elementos de M são inteiros, então o resultado dessas operações também é inteiro.

330. Vamos usar as propriedades dos determinantes e a relação de Stifel:

$$\binom{n}{p} - \binom{n-1}{p} = \binom{n-1}{p-1} \text{ ou } \binom{n}{p} - \binom{n-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}$$

para calcular o determinante D:

$$D \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} \binom{p+1}{1} - \binom{p}{1} & \binom{p+2}{2} - \binom{p+1}{2} & \binom{p+3}{3} - \binom{p+2}{3} \\ \binom{p+2}{1} - \binom{p+1}{1} & \binom{p+3}{2} - \binom{p+2}{2} & \binom{p+4}{3} - \binom{p+3}{3} \\ \binom{p+3}{1} - \binom{p+2}{1} & \binom{p+4}{2} - \binom{p+3}{2} & \binom{p+5}{3} - \binom{p+4}{3} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(2)}{=}\begin{vmatrix} \binom{p}{0} & \binom{p+1}{1} & \binom{p+2}{2} \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+2}{1} & \binom{p+3}{2} \\ \binom{p+2}{0} & \binom{p+3}{1} & \binom{p+4}{2} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(3)}{=}\begin{vmatrix} \binom{p}{0} & \binom{p+1}{1}-\binom{p}{0} & \binom{p+2}{2}-\binom{p+1}{1} \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+2}{1}-\binom{p+1}{0} & \binom{p+3}{3}-\binom{p+2}{1} \\ \binom{p+2}{0} & \binom{p+3}{1}-\binom{p+2}{0} & \binom{p+4}{3}-\binom{p+3}{1} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(4)}{=}\begin{vmatrix} \binom{p}{0} & \binom{p}{1} & \binom{p+1}{2} \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+1}{1} & \binom{p+2}{2} \\ \binom{p+2}{0} & \binom{p+2}{1} & \binom{p+3}{2} \end{vmatrix} \underset{(5)}{=} \begin{vmatrix} 1 & p & \binom{p+1}{2} \\ 1 & p+1 & \binom{p+2}{2} \\ 1 & p+2 & \binom{p+3}{2} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(6)}{=}\begin{vmatrix} 1 & p & \binom{p+1}{2} \\ 0 & 1 & \binom{p+2}{2}-\binom{p+1}{2} \\ 0 & 1 & \binom{p+3}{2}-\binom{p+2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(7)}{=}\begin{vmatrix} 1 & \binom{p+1}{1} \\ 1 & \binom{p+2}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p+1 \\ 1 & p+2 \end{vmatrix} = 1$$

Justificativas:

(1) 4ª l − 3ª l, 3ª l − 2ª l, 2ª l − 1ª l

(2) Stifel

(3) 3ª c − 2ª c, 2ª c − 1ª c

(4) Stifel

(5) $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{1} = n$

(6) 3ª l − 2ª l, 2ª l − 1ª l

(7) Stifel

331. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & c & d & a \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & a & b & c \end{vmatrix} =$

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & c & d & a \\ 1 & d & a & b \\ 1 & a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & c-b & d-c & a-d \\ 0 & d-c & a-d & b-a \\ 0 & a-d & b-a & c-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} (a-b+c-d) & d-c & a-d \\ -(a-b+c-d) & a-d & b-a \\ (a-b+c-d) & b-a & c-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & a-d \\ -1 & a-d & a-b \\ 1 & b-a & c-b \end{vmatrix} =$$

$$= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & a-d \\ 1 & d-a & a-b \\ 1 & b-a & c-b \end{vmatrix} =$$

$$= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & a-d \\ 0 & c-a & -(b-d) \\ 0 & b-d & c-a \end{vmatrix} =$$

$$= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} c-a & -(b-d) \\ b-d & c-a \end{vmatrix} =$$

$$= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)[(c-a)^2+(b-d)^2] =$$
$$= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)[(a-c)^2+(b-d)^2]$$

332. Seja $M = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz simétrica.
Os complementos algébricos de dois elementos situados simetricamente em relação à diagonal principal são:
$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$ e $A_{ji} = (-1)^{j+i} \cdot D_{ji}$.
Como $D_{ij} = D_{ji}$, por se tratarem de determinantes de matrizes transpostas, então $A_{ij} = A_{ji}$.

333. Chamemos de a_i o primeiro termo e de q_i a razão da P.G. colocada na linha i da matriz M. Temos:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_1q_1 & a_1q_1^2 & \dots & a_1q_1^{n-1} \\ a_2 & a_2q_2 & a_2q_2^2 & \dots & a_2q_2^{n-1} \\ a_3 & a_3q_3 & a_3q_3^2 & \dots & a_3q_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_nq_n & a_nq_n^2 & \dots & a_nq_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\det M = (a_1a_2a_3 \dots a_n) \begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \dots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \dots & q_2^{n-1} \\ 1 & q_3 & q_3^2 & \dots & q_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q_n & q_n^2 & \dots & q_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1a_2a_3 \dots a_n)(q_2 - q_1)(q_3 - q_1)\dots(q_n - q_{n-1})$$

então:

$$\det M = 0 \iff (\exists i,j \mid q_i = q_j).$$

334. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -2 & -2 & -2 & -2 & \dots & n-4 \end{vmatrix} =$$

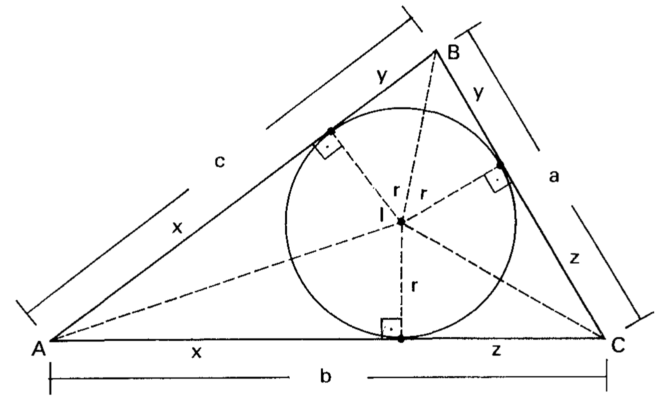
$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & \dots & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -2 & -2 & -2 & \dots & n-4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(n-2)!$$

335. Temos que provar a identidade:

$$(b - c) \cdot \text{cotg}\,\frac{A}{2} + (c - a) \cdot \text{cotg}\,\frac{B}{2} + (a - b) \cdot \text{cotg}\,\frac{C}{2} = 0.$$

Consideremos a circunferência inscrita no triângulo ABC (figura a seguir). Seu centro I é o ponto de interseção das bissetrizes internas, então:



$$\begin{cases} \text{cotg}\,\dfrac{A}{2} = \dfrac{x}{r} \\ \text{cotg}\,\dfrac{B}{2} = \dfrac{y}{r} \\ \text{cotg}\,\dfrac{C}{2} = \dfrac{z}{r} \end{cases}$$

e daí

$$\begin{cases} a = y + z = r \cdot \left(\text{cotg}\,\dfrac{B}{2} + \text{cotg}\,\dfrac{C}{2}\right) \\ b = x + z = r \cdot \left(\text{cotg}\,\dfrac{A}{2} + \text{cotg}\,\dfrac{C}{2}\right) \\ c = x + y = r \cdot \left(\text{cotg}\,\dfrac{A}{2} + \text{cotg}\,\dfrac{B}{2}\right) \end{cases}$$

Calculando cada cotangente nesse sistema, vem:

$$\text{cotg}\,\frac{A}{2} = \frac{(a + b + c) - 2a}{2r} = \frac{p - a}{r}, \ \text{cotg}\,\frac{B}{2} = \frac{p - b}{r},$$

$$\text{cotg}\,\frac{C}{2} = \frac{p - c}{r}$$

em que $a + b + c = 2p$.

Temos, então:

$$(b - c) \cdot \text{cotg}\,\frac{A}{2} + (c - a) \cdot \text{cotg}\,\frac{B}{2} + (a - b) \cdot \text{cotg}\,\frac{C}{2} =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot [(b - c)(p - a) + (c - a)(p - b) + (a - b)(p - c)] =$$

$$= \frac{1}{r}[p(b - c + c - a + a - b) + a(c - b) + b(a - c) + c(b - a)] = 0$$

336. $6 \cdot$ (6 determinantes de 5ª ordem) $=$
$= 6 \cdot 5 \cdot$ (5 determinantes de 4ª ordem) $=$
$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot$ (4 determinantes de 3ª ordem) $=$
$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot$ (3 determinantes de 2ª ordem) $=$
$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot$ (2 termos) $= 6! = 720$ termos

337. $$\begin{vmatrix} \dfrac{m!}{(m-2)!} & \dfrac{m!}{(m-1)!} & 1 \\ \dfrac{m!}{2!(m-2)!} & m & 6 \\ m(m-1) & \dfrac{m!}{(m-1)!} & 0 \end{vmatrix} = -10\,m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} m(m-1) & m & 1 \\ \dfrac{m(m-1)}{2} & m & 6 \\ m(m-1) & m & 0 \end{vmatrix} = -10\,m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2(m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{1}{2} & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10\,m \Rightarrow m(m-1)\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{11}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m(m-1)}{-2} = -10 \Rightarrow m^2 - m - 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ \quad \text{ou} \\ m = -4 \text{ (rejeitado)} \end{cases}$$

338. Seja M uma matriz anti-simétrica de ordem $2n - 1$ (ímpar). Por ser anti-simétrica, $M = -M^t$.
Então:
$\det M = \det(-M^t) = (-1)^{2n-1} \cdot \det M^t = -\det M^t = -\det M$
e daí
$2 \cdot \det M = 0$
portanto:
$\det M = 0$.

Capítulo VI — Sistemas lineares

357. Admitindo que $-3t - 1 \neq 0,\ z - 2t \neq 0,\ t - y \neq 0$ e $2z - y \neq 0$, temos:

$$\frac{x + 2y}{-3t - 1} = 1 \Rightarrow x + 2y + 3t = -1$$

$$\frac{2x - y}{z - 2t} = 1 \Rightarrow 2x - y - z + 2t = 0$$
$$\frac{x - 2z}{t - y} = 2 \Rightarrow x + 2y - 2z - 2t = 0$$
$$\frac{3t - 1}{2z - y} = 2 \Rightarrow 2y - 4z + 3t = 1$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3t = -1 \\ 2x - y - z + 2t = 0 \\ x + 2y - 2z - 2t = 0 \\ 2y - 4z + 3t = 1 \end{cases} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 124 \text{ e}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -36 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{-36}{124} = \frac{-9}{31}$$

358. Fazendo $\dfrac{1}{x} = x'$, $\dfrac{1}{y} = y'$ e $\dfrac{1}{z} = z'$, temos:

$$\begin{cases} 2x' - y' - z' = -1 \\ x' + y' + z' = 0 \\ 3x' - 2y' + z' = 4 \end{cases} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_{x'} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x' = \frac{D_{x'}}{D} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3} \Rightarrow x = -3$$

$$D_{y'} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -14 \Rightarrow y' = \frac{D_{y'}}{D} = \frac{-14}{9} \Rightarrow y = \frac{-9}{14}$$

$$D_{z'} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 17 \Rightarrow z' = \frac{D_{z'}}{D} = \frac{17}{9} \Rightarrow z = \frac{9}{17}$$

$$S = \left\{\left(-3, \frac{-9}{14}, \frac{9}{17}\right)\right\}.$$

360. $$D = \begin{vmatrix} \text{sen } a & -\cos a \\ \cos a & \text{sen } a \end{vmatrix} = \text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -\cos 2a & -\cos a \\ \text{sen } 2a & \text{sen } a \end{vmatrix} = -\text{sen } a \cdot \cos 2a + \text{sen } 2a \cdot \cos a =$$

$$= \text{sen}(2a - a) = \text{sen } a$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \text{sen } a & -\cos 2a \\ \cos a & \text{sen } 2a \end{vmatrix} = \text{sen } a \cdot \text{sen } 2a + \cos a \cdot \cos 2a =$$

$$= \cos(2a - a) = \cos a$$

Assim: $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{D_x}{D} \Rightarrow x = \text{sen } a \\ y = \dfrac{D_y}{D} \Rightarrow y = \cos a \end{array}\right\} \Rightarrow S = \{(\text{sen } a, \cos a)\}$

361. $D = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ a+1 & 2b \end{vmatrix} = b(a-3)$

$$\left.\begin{array}{l} D_x = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 5 & 2b \end{vmatrix} = -3b \Rightarrow x = \dfrac{D_x}{D} \Rightarrow x = \dfrac{3}{3-a} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} D_y = \begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ a+1 & 5 \end{vmatrix} = 2(2a-3) \Rightarrow y = \dfrac{D_y}{D} \Rightarrow y = \dfrac{2(2a-3)}{b(a-3)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y = 2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 1$$

362. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$D_x = \begin{vmatrix} 28-z & 1 \\ 32 & -1 \end{vmatrix} = z - 60 \Rightarrow x = \dfrac{z-60}{-3}$

Como $x > 0$ e $z > 0$, vem: $0 < z < 60$ (1)

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 28-z \\ 2 & 32 \end{vmatrix} = 2z - 24 \Rightarrow y = \dfrac{2z-24}{-3} \Rightarrow z = \dfrac{3y-24}{-2}$ (2)

De (1) e (2), vem: $0 < \dfrac{3y-24}{-3} < 60 \Rightarrow 0 < y < 8$ (3)

Mas $2x - y = 32 \Rightarrow y = 2x - 32$ (4)

De (3) e (4) vem: $0 < 2x - 32 < 8 \Rightarrow 16 < x < 20$

Então, as condições são: $16 < x < 20$, $0 < y < 8$ e $0 < z < 60$.

367. $\begin{cases} x + y = 3 & (-3)\ (-2) \\ 3x - 2y = -1 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ -5y = -10 \\ -5y = -10 \end{cases}$

A 2.ª e 3.ª linhas do sistema são a mesma equação e, então, podemos suprimir uma delas:

$\begin{cases} x + y = 3 \\ 5y = 10 \Rightarrow y = 2 \text{ e, portanto, } x = 3 - y \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

$S = \{(1, 2)\}$, sistema possível determinado.

368. b) $\begin{cases} -x + y - 2z \qquad\quad = 1 & (2)\ (1) \\ 2x - y \qquad + 3t = 2 \\ x - 2y + z - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - 2z \qquad\quad = 1 \\ y - 4z + 3t = 4 & (1) \\ -y - z - 2t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - 2z \qquad\quad = 1 & \text{(I)} \\ y - 4z + 3t = 4 & \text{(II)} \\ -5z + t = 5 & \text{(III)} \end{cases}$

Em (III), fazendo $z = \alpha$, vem: $-5\alpha + t = 5 \Rightarrow t = 5 + 5\alpha$.

Em (II), substituindo z e t, temos:
$y - 4\alpha + 3(5 + 5\alpha) = 4 \Rightarrow y = -11 - 11\alpha$

Em (I), substituindo y e z, temos:
$-x + (-11 - 11\alpha) - 2\alpha = 1 \Rightarrow x = -12 - 13\alpha$
O sistema é possível e indeterminado:
$S = \{(-12 - 13\alpha, -11 - 11\alpha, \alpha, 5 + 5\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

c) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 & (-3)\ (-5) \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -4y - 2z = -2 & (-3) \\ -12y - 6z = -20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -4y - 2z = -2 \\ 0 + 0 = -14 \text{ (falso)} \end{cases}$

O sistema é impossível. Então, $S = \varnothing$.

375. $\begin{cases} (2a-1)^2x + (4a^2-1)y = (2a+1)^2 & \left(\dfrac{-(2a+1)}{2a-1}\right) \\ (4a^2-1)x + (2a+1)y = (4a^2-1) \end{cases} \xrightarrow{\text{se } a \neq \frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a-1)^2x + (4a^2-1)y = (2a+1)^2 \\ (2a+1)(-2a)y = \dfrac{(-8a)(2a+1)}{2a-1} \end{cases} \xrightarrow{a \neq 0 \text{ e } a \neq -\frac{1}{2}} y = \dfrac{4}{2a-1}$

Portanto, se $a \neq \dfrac{1}{2}$, $a \neq 0$ e $a \neq -\dfrac{1}{2}$, o sistema é possível e determinado.

Analisando as outras possibilidades, temos:

1) Se $a = \dfrac{1}{2}$, o sistema é impossível, porque na primeira equação teremos $0x + 0y = 4$, que é falso.

2) Se $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (sistema possível indeterminado)

3) Se $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 0x = 0 \end{cases}$ (sistema possível indeterminado)

376. $\begin{cases} x + y = a \\ a^2x + y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ (1 - a^2)y = a(1 - a^2) \end{cases}$

1) Se $1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$, então $0y = 0$, sistema possível indeterminado.
2) Se $a \neq 1$ e $a \neq -1$, $y = a$ e $x = 0$, sistema possível determinado.
3) Não há valores para a que tornem o sistema impossível.

377. $\begin{cases} mx + y = 1 - m \\ x + my = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my = 0 \\ mx + y = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my = 0 \\ (1 - m^2)y = 1 - m \end{cases}$

Se $1 - m^2 \neq 0$, ou seja, $m \neq 1$ e $m \neq -1$, então o sistema é possível e determinado e $S = \left\{\left(-\frac{m}{m+1}, \frac{1}{m+1}\right)\right\}$.

Se $m = 1$, o sistema fica $\begin{cases} x + y = 0 \\ 0y = 0 \end{cases}$, então o sistema é possível e indeterminado e $S = \{(-\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Se $m = -1$, o sistema fica $\begin{cases} x - y = 0 \\ 0y = -2 \end{cases}$, então o sistema é impossível e $S = \varnothing$.

378. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + ay = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ (a - 6)y = (b - 3) \end{cases}$

1) Se $a - 6 = 0$ e $b - 3 = 0$, isto é, se $a = 6$ e $b = 0$, $0y = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ sistema possível indeterminado.
2) Se $a = 6$ e $b \neq 3$, temos $0y = b - 3$, sistema impossível.
3) Se $a \neq 6$, $\forall b \in \mathbb{R}$, sistema possível determinado.

379. $\begin{cases} x + 2y = b \\ 2ax + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = b \\ (3 - 4a)y = 1 - 2ab \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = b \\ (4a - 3)y = 2ab - 1 \end{cases}$

1) Se $4a - 3 = 0$ e $2ab - 1 = 0$, isto é, se $a = \frac{3}{4}$ e $b = \frac{1}{2a} = \frac{2}{3}$, sistema possível indeterminado.
Fazendo $y = \alpha$, então $x = \frac{2}{3} - 2\alpha \Rightarrow S = \left\{\left(\frac{2}{3} - 2\alpha, \alpha\right)\right\}$.

2) Se $a \neq \frac{3}{4}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, sistema possível determinado.

Então, $y = \frac{2ab - 1}{4a - 3} \Rightarrow x = \frac{2 - 3b}{4a - 3} \Rightarrow S = \left\{\left(\frac{2 - 3b}{4a - 3}, \frac{2ab - 1}{4a - 3}\right)\right\}$.

3) Se $a = \frac{3}{4}$ e $b \neq \frac{2}{3}$, sistema impossível.

380. $\begin{cases} x + my - (m + 1)z = 1 \\ mx + 4y + (m - 1)z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my - (m + 1)z = 1 \\ (4 - m^2)y + (m^2 + 2m - 1)z = 3 - m \end{cases}$

Como o número de equações é menor que o número de incógnitas, o sistema é possível e indeterminado, $\forall m$, $m \in \mathbb{R}$.

381. $\begin{cases} x + y = 2 \\ mx + y = 1 \\ x - y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ (-m + 1)y = -2m + 1 \\ -2y = -2 + m \end{cases}$

Na 3ª equação, se $m = 0$, vem $y = 1$.

Então, temos $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$; sistema possível determinado e $S = \{(1, 1)\}$.

Na 2ª equação, se $-m + 1 = 0$, isto é, se $m = 1$, temos:

$\begin{cases} x + y = 2 \\ -2y = -2 + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow$ sistema possível determinado

e $S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Se $m \neq 0$ e $m \neq 1$, o sistema é indeterminado.

382. $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ (-bp + aq)y = -cp + ad \end{cases}$

O sistema é indeterminado se $-bp + aq = 0$ e $-cp + ad = 0$.

Então, vem: $\begin{cases} -bp + aq = 0 \\ -cp + ad = 0 \Rightarrow p = \frac{ad}{c} \end{cases}$

Substituindo $p = \frac{ad}{c}$ na 1ª equação, vem: $q = \frac{bd}{c}$.

383. Resolvendo o sistema
$\begin{cases} x - y = m \\ x + y = 2 \end{cases}$
encontramos $x = \frac{m + 2}{2}$ e $y = \frac{2 - m}{2}$, que, substituídos na equação $mx + y = 2$, conduzem à equação $m^2 + m - 2 = 0$, que é satisfeita se $m \in \{1, -2\}$.

Conclusão:

$m = 1 \Rightarrow$ sistema possível determinado, com $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$

$m = -2 \Rightarrow$ sistema possível determinado, com $x = 0$ e $y = 2$

$m \neq 1$ e $m \neq -2 \Rightarrow$ sistema impossível

384. $\begin{cases} 6x + ay = 12 \quad \left(-\frac{2}{3}\right) \\ 4x + 4y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + ay = 12 \\ \left(4 - \dfrac{2a}{3}\right)y = b - 8 \end{cases}$

O sistema será indeterminado somente se $4 - \dfrac{2a}{3} = 0$ e $b - 8 = 0$, ou seja, se $a = 6$ e $b = 8$.

394. $\begin{cases} mx - y + mz = m \\ 2x + mz = 3 \\ mx + my = 2 \end{cases} \Rightarrow D = m^2(1 - m)$

1) Se $D \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \text{e} \\ m \neq 1 \end{cases}$ (sistema possível determinado)

$$D_x = \begin{vmatrix} m & -1 & m \\ 3 & 0 & m \\ 2 & m & 0 \end{vmatrix} = -m(m - 1)(m - 2) \Rightarrow x = \frac{m - 2}{m}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m & m \\ 2 & 3 & m \\ m & 2 & 0 \end{vmatrix} = m(m - 4)(m - 1) \Rightarrow y = \frac{4 - m}{m}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} m & -1 & m \\ 2 & 0 & 3 \\ m & m & 2 \end{vmatrix} = -(m - 1)(m + 4) \Rightarrow z = \frac{m + 4}{m^2}$$

$$S = \left\{\left(\frac{m - 2}{m}, \frac{4 - m}{m}, \frac{m + 4}{m^2}\right)\right\}$$

2) Se $m = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0x - y + 0z = 0 \\ 2x + 0z = 3 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases} \Rightarrow$ sistema impossível

3) Se $m = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \quad (-2)\,(-1) \\ 2x + z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{(z = \alpha)} y = \dfrac{\alpha + 1}{2}$ e, então, $x = \dfrac{3 - \alpha}{2}$

sistema possível indeterminado $\Rightarrow S = \left\{\left(\dfrac{3 - \alpha}{2}, \dfrac{\alpha + 1}{2}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

395. $D = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & -1 & m \\ 1 & -m & 1 \end{vmatrix} = (m + 1)(m - 1)$

1) Se $D \neq 0$, então $m \neq 1$ e $m \neq -1 \Rightarrow$ sistema possível determinado.

$$D_x = \begin{vmatrix} m & m & m \\ 0 & -1 & m \\ m & -m & 1 \end{vmatrix} = m(2m - 1)(m - 1) \Rightarrow x = \frac{m(2m - 1)}{m + 1}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 0 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m(m - 1) \Rightarrow y = \frac{m}{m + 1}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -m & m \end{vmatrix} = -2m^2 \Rightarrow z = \frac{2m^2}{1 - m^2}$$

$$S = \left\{\left(\frac{m(2m - 1)}{m + 1}, \frac{m}{m + 1}, \frac{2m^2}{1 - m^2}\right)\right\}.$$

2) Se $D = 0$, suponhamos $m = 1$:

$\begin{cases} x + y + z = 1 \quad (-1) \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2y = -1 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ sistema indeterminado

3) Se $D = 0$, seja $m = -1$:

$\begin{cases} x - y - z = -1 \quad (-1) \\ x - y - z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = -1 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \text{ (falso)} \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ sistema indeterminado

397. $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \quad (-2)\,(-3) \\ 2x + 5y + az = 0 \\ 3x + 7y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -y + (a - 4)z = 0 \quad (-2) \\ -2y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -y + (a - 4)z = 0 \\ (-2a + 3)z = 0 \end{cases}$ então, sistema possível indeterminado

$\Leftrightarrow -2a + 3 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2}$

398. $D = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 4x \qquad - 2z = 2 \\ \quad - 4y + 3z = 1 \\ -3x + 2y \qquad = 3 - k \end{cases} \sim \begin{cases} 4x - 2y \qquad = 2 \\ \quad - 4y + 3z = 1 \\ \quad 2y - \dfrac{3}{2}z = \dfrac{9}{2} - k \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 4x - 2y \qquad = 2 \\ \quad - 4y + 3z = 1 \\ \qquad\qquad 0z = 5 - k \end{cases}$$

Conclusão: Temos sistema possível indeterminado somente se $5 - k = 0$, ou seja, se $k = 5$.

399. $\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 4x + 10y + 2z = 5 \\ 6x + 15y - z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 8z = 3 \\ 8z = k - 3 \end{cases}$

O sistema tem solução (é possível) se $k - 3 = 3$, ou seja, $k = 6$.
Resolvendo o sistema, vem:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 8z = 3 \Rightarrow z = \dfrac{3}{8} \end{cases}$$

Fazendo $y = \alpha$, na 1ª equação, temos:

$$2x + 5\alpha - \frac{9}{8} = 1 \Rightarrow x = \frac{17 - 40\alpha}{16}.$$

$$S = \left\{\left(\frac{17 - 40\alpha}{16}, \alpha, \frac{3}{8}\right), \forall \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

401. $D = \begin{vmatrix} 1 & m & m-1 \\ m-1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 2m^3 - 6m^2 + 6m = 2m(m^2 - 3m + 3)$

$D = 0 \Leftrightarrow m = 0$, considerando que $m^2 - 3m + 3 > 0, \forall m, m \in \mathbb{R}$.
Portanto, $\forall m, m \in \mathbb{R}^*$, $D \neq 0$ e o sistema é determinado.

402. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -m \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10m + 6$

$D \neq 0$ (sistema determinado) $\Leftrightarrow m \neq \dfrac{3}{5}$

Então, será indeterminado se $m = \dfrac{3}{5}$.

$$\begin{cases} x + 2y - \dfrac{3}{5}z = -1 \\ 3x - y + z = 4 \\ -2x + 4y - 2z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - \dfrac{3}{5}z = -1 \\ -7y + \dfrac{14}{5}z = 7 \\ 8y - \dfrac{16}{5}z = k - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - \dfrac{3}{5}z = -1 \\ -y + \dfrac{2}{5}z = 1 \\ 0z = k + 6 \end{cases}$$

O sistema será indeterminado se $k + 6 = 0 \Rightarrow k = -6$.

Então, $m = \dfrac{3}{5}$ e $k = -6$.

403. $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -a \\ a & -a & 6 \end{vmatrix} = (a + 6)(a - 3)$

1) sistema possível determinado $\Leftrightarrow D \neq 0 \Rightarrow a \neq -6$ e $a \neq 3$

2) Se $a = -6$:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -6 \\ -x + 2y + 6z = b \\ -6x + 6y + 6z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 6z = -b \\ 2x - y + 3z = -6 \\ 3x - 3y - 3z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 6z = -b \\ 3y + 15z = 2b - 6 \\ 3y + 15z = 3b - 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema possível indeterminado} \Leftrightarrow 2b - 6 = 3b - 1 \Rightarrow b = -5$$

E, então, sistema impossível se $a = -6$ e $b \neq -5$.

3) Se $a = 3$:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ -x + 2y - 3z = b \\ 3x - 3y + 6z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = -b \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 3x - 3y + 6z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = -b \\ 3y - 3z = 2b + 3 \\ 3y - 3z = 3b + 2 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema possível indeterminado} \Leftrightarrow 2b + 3 = 3b + 2 \Rightarrow b = 1$$

E, então, sistema impossível se $a = 3$ e $b \neq 1$.

404. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

Então, o sistema é compatível e determinado, quaisquer que sejam *a, b* e *c* reais.

408. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \lambda x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5 \text{ e } \lambda_2 = -1$

e, portanto, $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$.

409. $\begin{cases} x + 5y = \lambda x \\ 2x - y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 5y = 0 \quad \left(\dfrac{-2}{1-\lambda}\right) \\ 2x - (1+\lambda)y = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{(\lambda \neq 1)}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 5y = 0 \\ \dfrac{\lambda^2 - 11}{1-\lambda}y = 0 \Rightarrow \text{ sistema possível indeterminado } \Leftrightarrow \end{cases}$

$\lambda^2 - 11 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{11}$

415. a) $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 2m$

$6 - 2m = 0 \Rightarrow m = 3$ e, então, $\begin{cases} m \neq 3, \text{ sistema determinado} \\ m = 3, \text{ sistema indeterminado} \end{cases}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 5 \\ m^2 & 9 & 25 \end{vmatrix} = (3 - m)(5 - m)(5 - 3) = 2(m - 3)(m - 5)$

Se $m \neq 3$ e $m \neq 5$, sistema determinado.
Se $m = 3$ e $m = 5$, sistema indeterminado.

416. $\begin{cases} kx + ky + z = 0 \\ x + ky + kz = 0 \\ kx + y + kz = 0 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & k & k \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = 2k^3 - 3k^2 + 1 = (k - 1)(k - 1)(2k + 1)$

Portanto, para $k \neq 1$ e $k \neq \dfrac{-1}{2}$, sistema determinado e para $k = 1$ ou $k = \dfrac{-1}{2}$, sistema indeterminado.

417. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2m & 3 \\ 2 & 6 & -4m \end{vmatrix} = 8m^2 + 20m + 12$

$D = 0 \Rightarrow 8m^2 + 20m + 12 = 0 \Rightarrow m = -1$ ou $m = \dfrac{-3}{2}$

1) Se $m \neq -1$ e $m \neq \dfrac{-3}{2}$, sistema determinado.

2) Se $m = -1$:

$\begin{cases} x + y + z = 0 \quad (-4)\ (-2) \\ 4x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 6y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \xrightarrow{(z = \alpha)} y = \dfrac{-\alpha}{2} \end{cases}$

e, então, $x = \dfrac{-\alpha}{2}$.

Portanto, $S = \left\{\left(\dfrac{-\alpha}{2}, \dfrac{-\alpha}{2}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

3) Se $m = \dfrac{-3}{2}$:

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = 0 \\ 2x + 6y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \quad (-4)\ (-1) \\ 4x + 3y + 3z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \xrightarrow{(z = \alpha)} y = -\alpha \end{cases}$

e, então, $x = 0$.
Portanto, $S = \{(0, -\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

419. $\begin{cases} kx + 2y + z = 0 \\ -2kx - y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ -2k & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 9k + 14 \Rightarrow 9k + 14 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{-14}{9}$

$\begin{cases} \dfrac{-14}{9}x + 2y + z = 0 \\ \dfrac{28}{9}x - y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \quad (7)\ (-14) \\ -14x + 18y + 9z = 0 \\ 28x - 9y + 27z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ \quad\ \ 3y + 5z = 0 \xrightarrow{z=\alpha} y = \dfrac{-5\alpha}{3} \\ \quad\ \ 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

e, então, $x = \dfrac{-3\alpha}{2}$.

$S = \left\{\left(\dfrac{-3\alpha}{2}, \dfrac{-5\alpha}{3}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

423. $D = \begin{vmatrix} -(m+1)^3 & (-m-1)^2 & (-m-1) & 1 \\ -(m+2)^3 & (-m-2)^2 & (-m-2) & 1 \\ (m+1)^3 & (m+1)^2 & (m+1) & 1 \\ (m^2+1)^3 & (m^2+1)^2 & (m^2+1) & 1 \end{vmatrix}$

Considerando que $-(m+1)^3 = (-m-1)^3$ e $-(m+2)^3 = (-m-2)^3$, então D é determinante de Vandermonde.

$D = [(-m-2) - (-m-1)] \cdot [(m+1) - (-m-1)] \cdot [(m+1) - (-m-2)] \cdot$
$\cdot [(m^2+1) - (-m-1)] \cdot [(m^2+1) - (-m-2)] \cdot [(m^2+1) - (m+1)] \Rightarrow$
$\Rightarrow D = [-1] \cdot [2m+2] \cdot [2m+3] \cdot [m^2+m+2] \cdot [m^2+m+3] \cdot [m^2-m]$

$$D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1 \\ \text{ou} \\ 2m + 3 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{-3}{2} \\ \text{ou} \\ m^2 - m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } m = 1 \end{cases}$$

porque $m^2 + m + 2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ e $m^2 + m + 3 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Portanto, $m \in \left\{-\dfrac{3}{2}, -1, 0, 1\right\}$.

428. $D = \begin{vmatrix} (\text{sen}\,\alpha - 1) & 2 & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & 3\,\text{sen}\,\alpha & 4 \\ 3 & 7\,\text{sen}\,\alpha & 6 \end{vmatrix} = 0$

$D = \text{sen}^2\,\alpha - 10\,\text{sen}\,\alpha - 24 = 0$

Então, $\text{sen}\,\alpha = 12$ ou $\text{sen}\,\alpha = -2$.

Ambas as soluções rejeitadas porque $-1 \leqslant \text{sen}\,\alpha \leqslant 1$ e, portanto, não existem valores α que satisfaçam a condição do problema.

430. b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ \leftarrow \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

característica = 3

431. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A característica é *2*, porque a 3ª linha é igual à soma das duas primeiras.

433. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \quad -a \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & (a-1) & -(a-1) & (a-1) \\ 0 & -(a-1) & -(a+1)(a-1) & a(a-1) \end{bmatrix}$

Se $a \neq 1$, $\rho = 3$.

Se $a = 1$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\rho = 1$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & a-2 & a^2-4 & a^3-8 \end{bmatrix}$

Se $a \neq 2$, $\rho = 3$.
Se $a = 2$, $\rho = 2$.

Ou, ainda:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & a-2 & a^2-4 & a^3-8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ \leftarrow \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & a-3 & a^2-9 & a^3-27 \end{bmatrix}$

Se $a \neq 3$, $\rho = 3$.
Se $a = 3$, $\rho = 2$.

Em síntese: $\begin{cases} \text{Se } a \neq 2 \text{ e } a \neq 3,\ \rho = 3. \\ \text{Se } a = 2 \text{ ou } a = 3,\ \rho = 2. \end{cases}$

438. a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -8 \end{array}\right]$$

$\rho(A) = \rho(B) = 3 = n \Rightarrow$ sistema possível determinado

Portanto: $-6z = -8 \Rightarrow z = \dfrac{4}{3}$

$$y - z = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{3}$$

$$x + y + 2z = 3 \Rightarrow x = 1$$

$S = \left\{\left(1, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)\right\}.$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < 3 \Rightarrow$ sistema possível indeterminado

Fazendo $z = \alpha$, vem:

$$-y + 3\alpha = 0 \Rightarrow y = 3\alpha - 1$$

$$-x - y + z = 0 \Rightarrow x = 1 - 2\alpha$$

$S = \{(1 - 2\alpha, 3\alpha - 1, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}.$

439. a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & 0 \end{array}\right]$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < 4 \Rightarrow$ sistema possível indeterminado.

b) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$

$\rho(A) \neq \rho(B) \Rightarrow$ sistema impossível

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right]$

$\rho(A) = \rho(B) = 3 = n \Rightarrow$ sistema possível determinado

d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < n \Rightarrow$ sistema possível indeterminado.

e) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < 3 \Rightarrow$ sistema possível indeterminado

f) $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

$\rho(A) \neq \rho(B) \Rightarrow$ sistema impossível

440. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & a^2 \\ 2 & 2 & (3 - a) & b^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2 - 1 & 0 & a^2 - 1 \\ 0 & 0 & 1 - a & b^2 - 2 \end{bmatrix}$

Para $a \neq 1$, temos $\rho(A) = \rho(B) = 3$ e sistema possível determinado.

Para $a = 1$ e $b = \pm\sqrt{2}$, temos $\rho(A) = \rho(B) = 1$ e sistema possível indeterminado, com dupla indeterminação.

Para $a = 1$ e $b \neq \sqrt{2}$ e $b \neq -\sqrt{2}$, temos $\rho(A) = \rho(B) = 2$ e sistema possível indeterminado, com indeterminação simples.

442. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b + c + d & a + c + d & a + b + d & a + b + c \\ bc + bd + cd & ac + ad + cd & ab + ad + bd & ab + ac + bc \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} a - b & a - c & a - d \\ (a - b)(c + d) & (a - c)(b + d) & (a - d)(b + c) \\ (a - b)cd & (a - c)bd & (a - d)bc \end{vmatrix} =$$

$$= (a - b)(a - c)(a - d) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c + d & b + d & b + c \\ cd & bd & bc \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d) \cdot \begin{vmatrix} b-c & b-d \\ (b-c)d & (b-d)c \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ b+c+d & a+c+d & 0 & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & 0 & ab+ac+bc \\ bcd & acd & B & abc \end{vmatrix} =$$

$$= -B \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & ab+ac+bc \end{vmatrix} =$$

$$= -B \cdot \begin{vmatrix} a-b & a-d \\ (a-b)(c+d) & (a-d)(b+c) \end{vmatrix} = -B(a-b)(a-d)(b-d)$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-B}{(a-c)(b-c)(c-d)}$$

443. O segundo sistema deve ter uma única solução ($x = 1$ e $y = 1$). Notemos que $(1, 1)$ é solução do segundo sistema, qualquer que seja a. Para que não exista outra solução, a condição é $D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, ou seja, $a \neq 1$.

444. $\begin{cases} 2^{x+y+z} = 2^3 \\ 3^{x+z} = 3^{9+2y} \\ 5^{3+x} = 5^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 9 \\ x \qquad - z = -3 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right]$$

Então: $-2z = -8 \Rightarrow z = 4$

$-3y = 6 \Rightarrow y = -2$

$x + y + z = 3 \Rightarrow x = 1$

$S = \{(1, -2, 4)\}$.

445. $D = \begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B \\ -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 - \cos^2 C & -\cos A - \cos B \cdot \cos C \\ -\cos A - \cos B \cdot \cos C & 1 - \cos^2 B \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - \cos^2 C)(1 - \cos^2 B) - (\cos A + \cos B \cdot \cos C)^2 =$$
$$= 1 - \cos^2 B - \cos^2 C - \cos^2 A - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$$

pois para ângulos de um triângulo vale a relação
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$
(conforme se prova no volume 3 desta coleção).

Sendo $D = 0$, o sistema linear homogêneo dado é indeterminado. Fazendo $z = \alpha$, temos:

$$\begin{cases} x - y \cdot \cos C = \alpha \cdot \cos B \\ -x \cdot \cos C + y = \alpha \cdot \cos A \end{cases}$$

em que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\cos C \\ -\cos C & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 C = \text{sen}^2\, C$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha \cdot \cos B & -\cos C \\ \alpha \cdot \cos A & 1 \end{vmatrix} = \alpha \cdot (\cos B + \cos A \cdot \cos C)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \cdot \cos B \\ -\cos C & \alpha \cdot \cos A \end{vmatrix} = \alpha \cdot (\cos A + \cos B \cdot \cos C)$$

e daí:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\alpha(\cos B + \cos A \cdot \cos C)}{\text{sen}^2\, C}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{\alpha(\cos A + \cos B \cdot \cos C)}{\text{sen}^2\, C}$$

446. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - y + z = 0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

Então: $-4z = -2 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$

$-2y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$x = 1 - y - z \Rightarrow x = 0$

Então, $S = \varnothing$, porque $\log_3 x$ deve ter $x > 0$.

447. Vamos atribuir à variável a três valores distintos: a_1, a_2 e a_3.

$$\begin{cases} x + a_1 y = 1 - a_1^2 \\ x + a_2 y = 1 - a_2^2 \\ x + a_3 y = 1 - a_3^2 \end{cases}$$

Tomando duas a duas, temos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 1 & a_2 & (1-a_2^2)\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 0 & a_2 - a_1 & a_1^2 - a_2^2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 0 & 1 & -(a_1+a_2)\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{((1 + a_1a_2); -(a_1 + a_2))\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 1 & a_3 & (1-a_3^2)\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 0 & 1 & -(a_1+a_3)\end{array}\right] \Rightarrow S = \{((1 + a_1a_3); -(a_1 + a_3))\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_2 & (1-a_2^2) \\ 1 & a_3 & (1-a_3^2)\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_2 & (1-a_2^2) \\ 0 & 1 & -(a_2+a_3)\end{array}\right] \Rightarrow S = \{((1 + a_2a_3); -(a_2 + a_3))\}$$

Verifica-se que as retas encontram-se duas a duas.
Tomando as três retas:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & 1-a_1^2 \\ 1 & a_2 & 1-a_2^2 \\ 1 & a_3 & 1-a_3^2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 0 & (a_2 - a_1) & (a_1^2 - a_2^2) \\ 0 & (a_3 - a_1) & (a_1^2 - a_3^2)\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & 1-a_1^2 \\ 0 & 1 & -(a_1+a_2) \\ 0 & 1 & -(a_1+a_3)\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a_1 & 1-a_1^2 \\ 0 & 1 & -(a_1+a_2) \\ 0 & 0 & a_2 - a_3\end{array}\right]$$

em que se verifica que $\rho(A) \neq \rho(B)$, o que significa que o sistema é impossível, ou seja, as três retas não têm um ponto em comum.

448. Chamemos de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$ os valores de x que anulam $P(x)$. Calculemos os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $P(x)$. Temos:

$$\begin{cases} \alpha_1^n a_0 + \alpha_1^{n-1} a_1 + \ldots + \alpha_1 a_{n-1} + a_n = 0 \\ \alpha_2^n a_0 + \alpha_2^{n-1} a_1 + \ldots + \alpha_2 a_{n-1} + a_n = 0 \\ \alpha_3^n a_0 + \alpha_3^{n-1} a_1 + \ldots + \alpha_3 a_{n-1} + a_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n+1}^n a_0 + \alpha_{n+1}^{n-1} a_1 + \ldots + \alpha_{n+1} a_{n-1} + a_n = 0 \end{cases}$$

O determinante D desse sistema é um determinante de Vandermonde cujos elementos característicos são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$, então:
$D = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1) \ldots (\alpha_n - \alpha_{n-1})$
$D \neq 0$ (pois $\alpha_i \neq \alpha_j, \forall i \forall j$).
Logo, o sistema só admite a solução trivial $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$; portanto, $P(x) \equiv 0$.

449. Fazendo $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, temos:
$P(1 - x) = a(1 - x)^4 + b(1 - x)^3 + c(1 - x)^2 + d(1 - x) + e =$
$= ax^4 - (4a + b)x^3 + (6a + 3b + c)x^2 - (4a + 3b + 2c + d)x +$
$+ (a + b + c + d + e)$.
Impondo $P(x) \equiv P(1 - x)$, vem:

$$\begin{cases} 4a + b = -b \\ 6a + 3b + c = c \\ 4a + 3b + 2c + d = -d \\ a + b + c + d + e = e \end{cases} \sim \begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 6a + 3b = 0 \\ 4a + 3b + 2c + 2d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \text{equivalentes} \sim$$

$$\sim \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 4a + 3b + 2c + 2d = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ b + 2c + 2d = 0 \\ 2b + 4c + 4d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ b + 2c + 2d = 0 \end{cases}$$

E daí temos $a = c + d$, $b = -(2c + 2d)$, sendo c, d, e quaisquer. Então:
$P(x) = (c + d)x^4 - (2c + 2d)x^3 + cx^2 + dx + e$
Fazendo $c + d = a$, temos:
$P(x) = ax^4 - 2ax^3 + cx^2 + (a - c)x + e$.

450. O sistema admite a solução trivial se, e somente se, o determinante dos coeficientes for diferente de zero.

$$D = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & k_2 - k_3 & k_1 - k_3 \\ k_2 - k_1 & k_2 + k_3 & k_3 - k_1 \\ k_1 - k_2 & k_3 - k_2 & k_3 + k_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$D = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & k_2 + k_3 & k_1 + k_3 \\ 0 & 2k_3 & 2k_3 \\ 2k_1 & 0 & 2k_1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{(1ª linha + 2ª linha + 3ª linha)} \\ \leftarrow \text{(2ª linha + 3ª linha)} \\ \leftarrow \text{(1ª linha + 3ª linha)} \end{array}$$

$$D = 4k_1k_3 \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & k_2 + k_3 & k_1 + k_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$D = 8k_1k_2k_3$
Então, $D \neq 0 \iff k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ e $k_3 \neq 0$.