UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Campus Russas

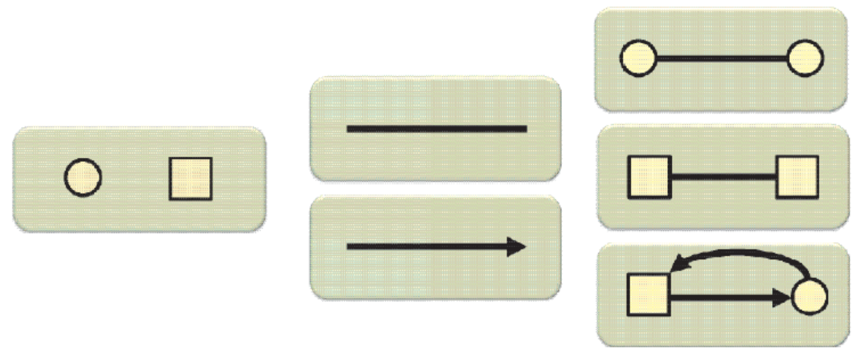
RUS0300-Algoritmos em Grafos
Aula 01: Conceitos Básicos

Professor Pablo Soares

"Quem não luta pelo futuro que quer, tem que aceitar o futuro que vier"

Introdução: Notação Básica

- Grafo (Composição)
  - Elementos
    - **Nós** ou **vértices**
  - Relações
    - **Arestas** ou **arcos**

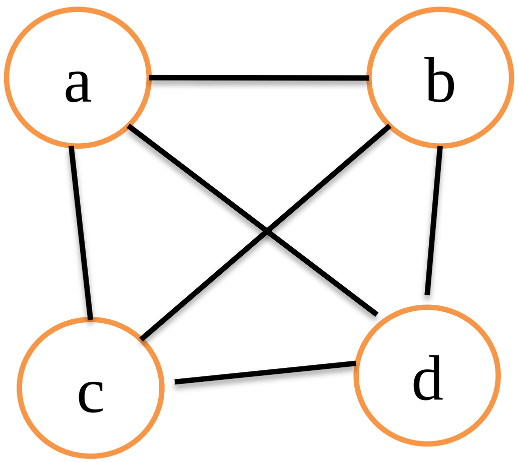


(1) Representação de vértices (2) Aresta e Arco (3) Ligações entre vértices

- Representação Matemática
  - ***G = (V, E)***
  - *V = {1,2, …, n}* *conjunto de vértices*
    - v_i , *i = 1, 2, …, n*
  - *E = {1,2, …, m}* *conjunto de arestas*
    - e_{ij} , (v_i , v_i)

Grafo Simples

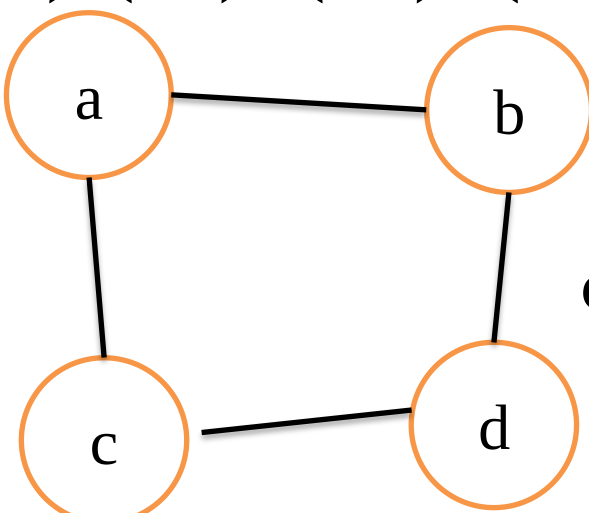
- **Grafo Simples**
  - Não possui laços e arestas paralelas
  - Para qualquer conjunto V, denotamos por V_p, o conjunto de todos os pares ordenados de elementos de V
  - $V = \{a,b,c,d\}$
  - $V_p = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d)\}$
  - Portanto, em um grafo simples $E \subseteq V_p$



G1

Grafo Simples

- **Grafo Simples**
  - Outro Exemplo, o grafo simples G_0 é denotado por
  - $G_0 = (V, E)$, onde
  - $V = \{a,b,c,d\}$
  - $E = \{(a,b), (a,c), (b,d), (c,d)\}$
  - Repare que E é um subconjunto de V_p
  - $V_p = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d)\}$



G0

Grafo Simples

- **Grafo Simples**
  - Se $|V| = n$, qual é a cardinalidade do conjunto $|V_p|$?
    - Lembrando que V_p são os pares não ordenados de V

$$|V_p| = \sum_{i=1}^{n-1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) - n$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] - n = \left[\frac{(n^2+n)}{2}\right] - n = \left[\frac{(n^2+n-2n)}{2}\right] = \frac{(n^2-n)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

  - Por que isso é importante?
    - Memória pode ser um fator limitador
    - Pode ser crítico em aplicações que utilizam grandes mapas
- Seja $|V| = n$, quantos **grafos simples** podem ser formados com exatamente n vértices?

Grafo Simples

- Dizemos que ab <u>incide</u> em a e em b
- Dizemos que a e b são pontas da aresta
- Se ab é uma aresta, vamos dizer que a e b são vértices <u>vizinhos</u> ou <u>adjacentes</u>

- **<u>Grafo Complementar</u>**
  - Seja $G = (V, E)$
  - Seu complementar é denotado por $\overline{G} = (V, V_p \setminus E)$
  - **<u>Fazer exemplo</u>**

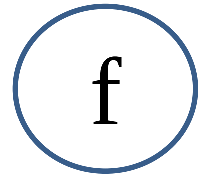
Grafo Simples Completo

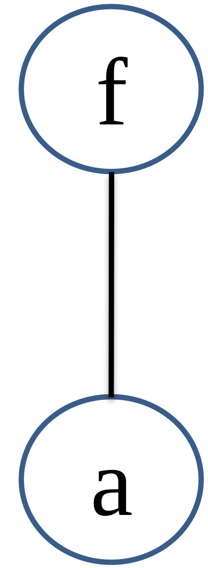
- **Um grafo**

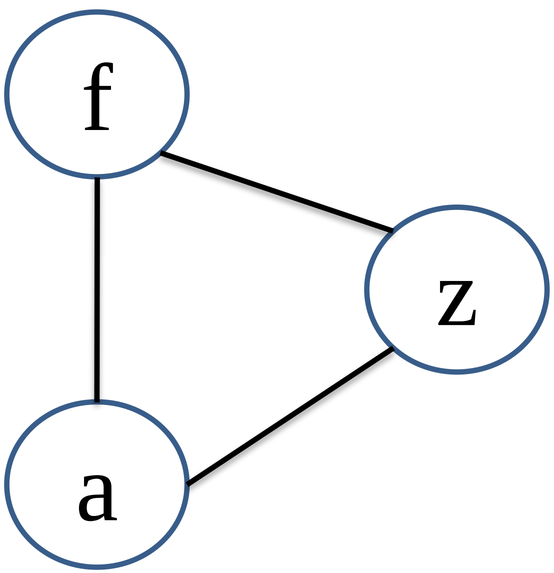
  $G = (V, E)$

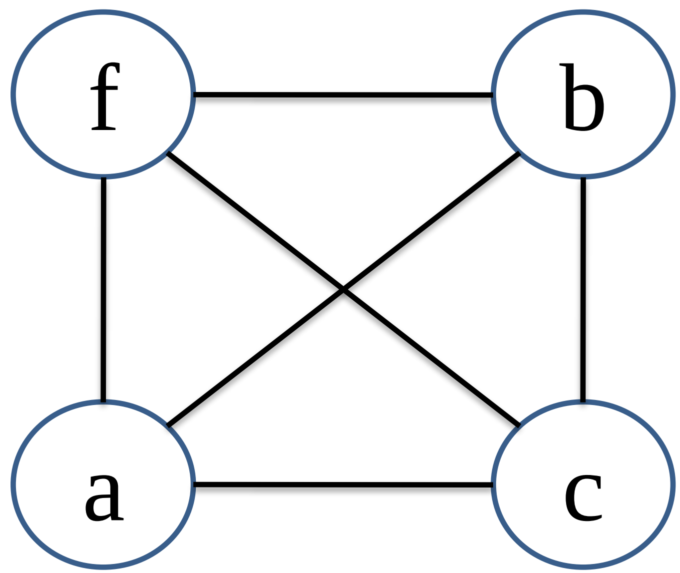
- É completo se e somente se

  $|E| = |\ V_p|$









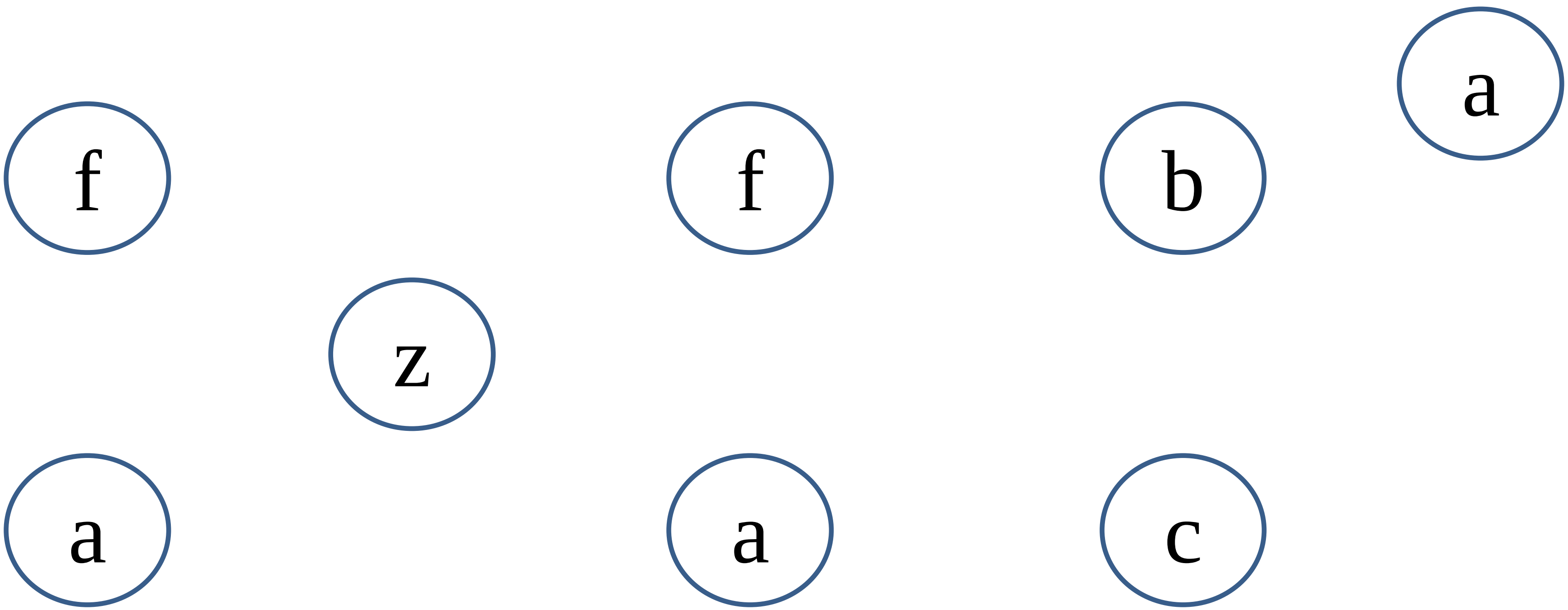
Grafo Simples Vazio

- **Um grafo**

  $G = (V, E)$

- É vazio se e somente se

  $|E| = 0, E = \{\ \}$



Grafo Simples

- **A expressão**

$$G = K_n$$

- é uma abreviação para dizer que G é simples e completo com *n* vértices

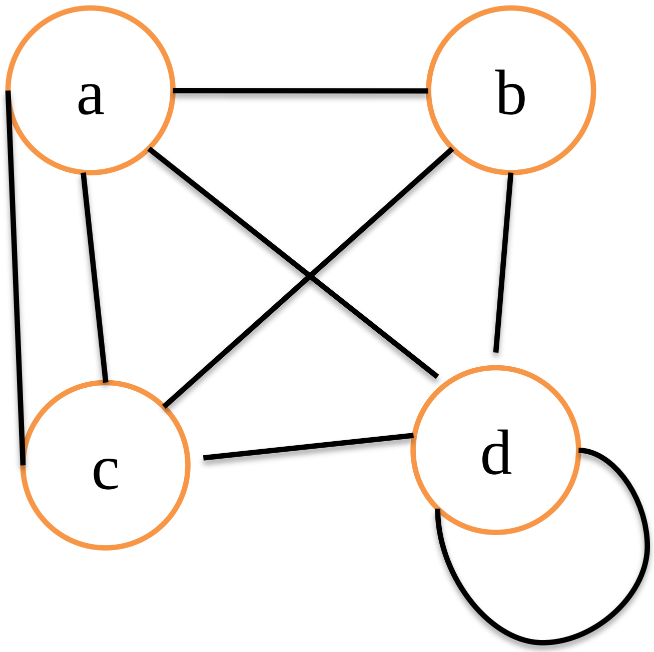
- **Já a expressão**

$$G = \overline{K}_n$$

- é uma abreviação para dizer que G é vazio com *n* vértices

Grafo não orientados

- Grafo com laços e arestas paralelas

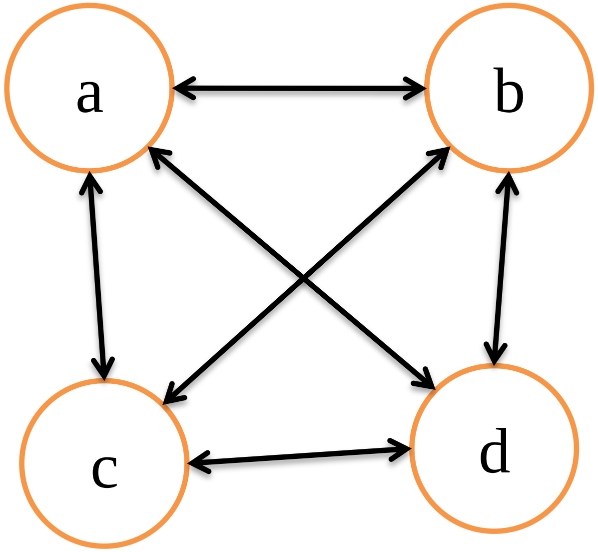


- Aplicações
  - Fluxo em redes
    - Dois canais de envios de informação

Grafo Orientados

- **Grafo Orientado**
  - Para qualquer conjunto V, denotamos por V_p o conjunto de todos os pares ordenados de V;
  - $V = \{a,b,c,d\}$
  - $V_p = \{(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (a,d), (d,a), (b,c), (c,b), (b,d), (d,b), (c,d), (d,c)\}$

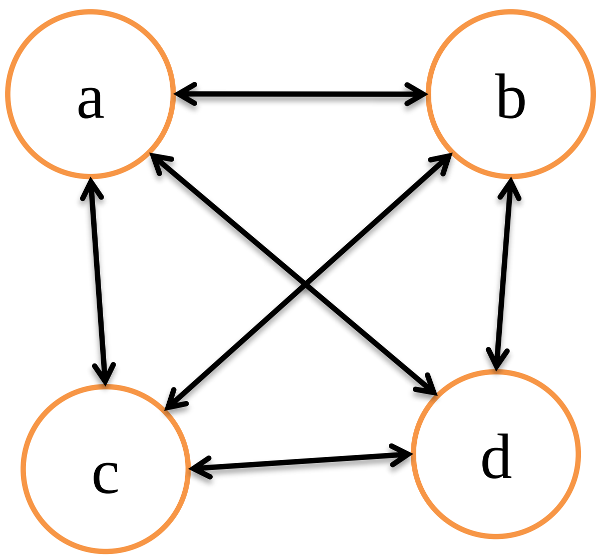
$$E \subseteq V_p$$



Grafo Orientados

- **Grafo Orientado**
  - Em um grafo orientado, se $|V| = n$, $|V_p| = ?$
    - Lembrando que V_p são os pares ordenados de V

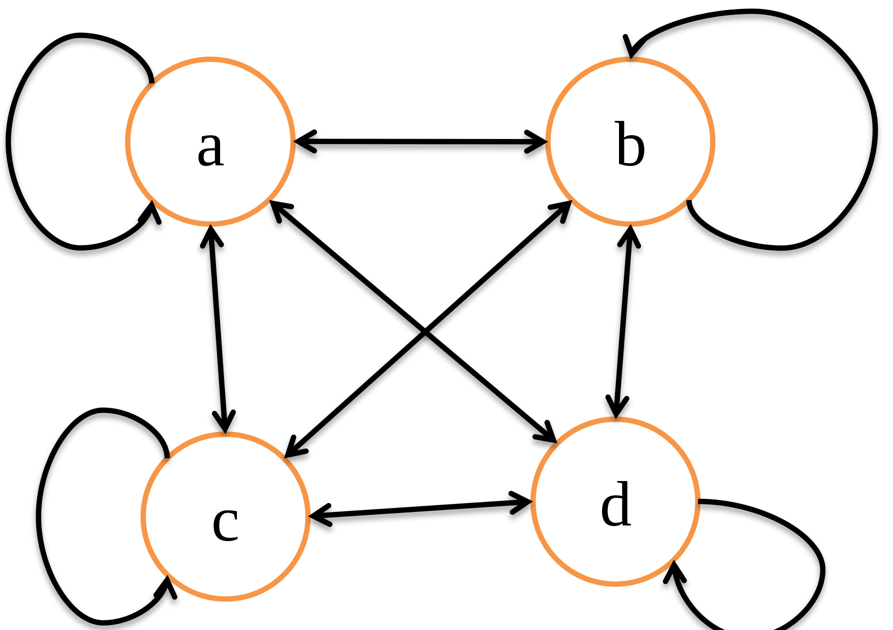
$$|V_p| = \sum_{i=1}^{n} n-1 = n(n-1) = n^2 - n$$



Grafo Orientados

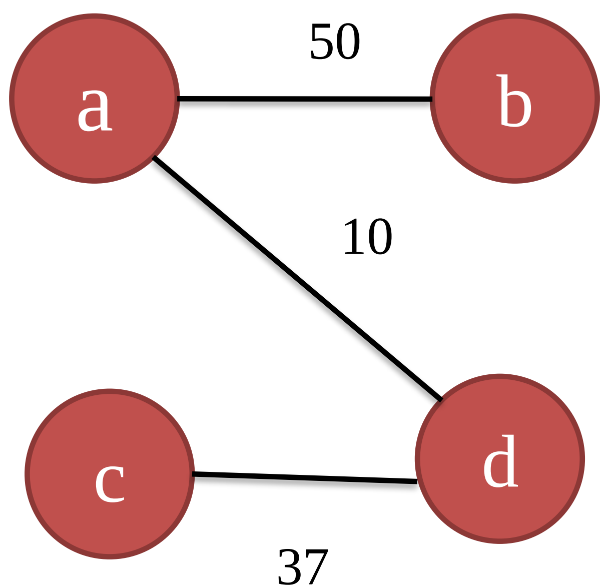
- **Grafo Orientado com aresta "laço"**

$$|V_p| = \sum_{i=1}^{n} n = n(n) = n^2$$



Grafo Valorados

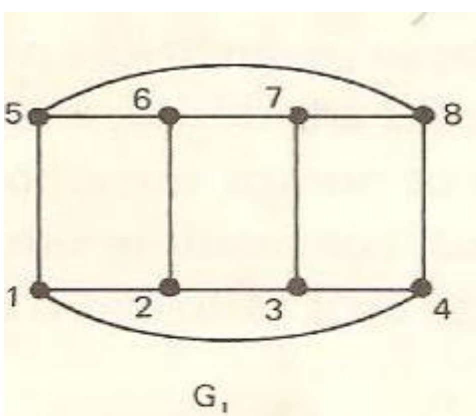
- São utilizados rótulos também nas arestas
  - Representam algum custo
    - Distância entre cidades
    - Tempo necessário
    - Em Redes,tempo de ida e volta (RTT – *round-trip time*)
- Podem ser orientados e não orientados

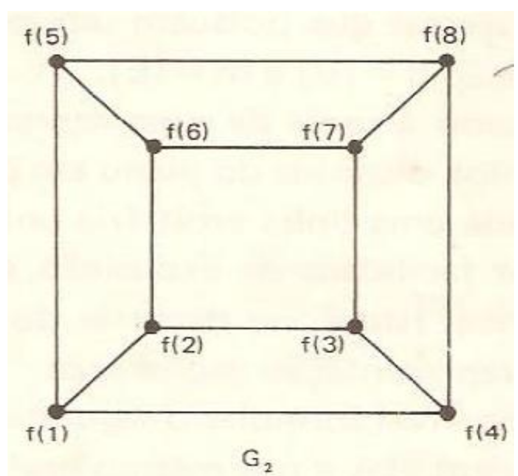


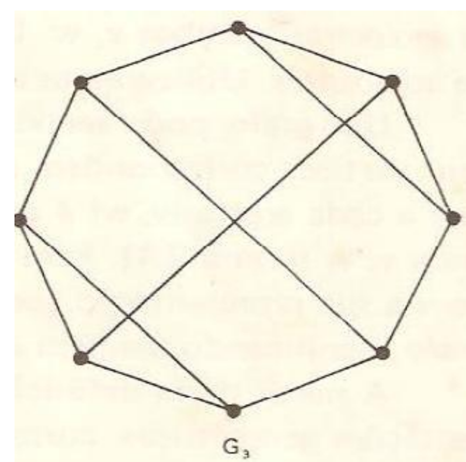
Isomorfismos de Grafos

- Dadas duas representação geométricas, correspondem elas a um mesmo grafo?
- Dados $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$,
  - $|\ V_1\ | = |\ V_2| = \text{n}$
  - Existe $f : V_1 \rightarrow V_2$

$$\left(i, j\right) \in E_1 \Leftrightarrow \left(f(i), f(j)\right) \in E_2 \forall i, j \in V_1$$

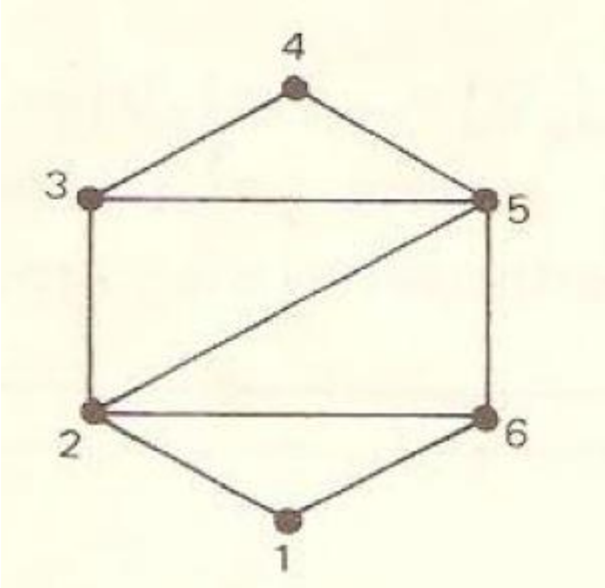






Grau de um Vértice

- $G_1 = (V_1, E_1)$, o conjunto de vizinhos de um vértice v de G é denotado por $N(v)$
- O grau de um vértice $d(v) = | N(v) |$
  - Um vértice de grau zero é isolado



$$\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V\}$$

$$\Delta(G) := \max\{d(v) \mid v \in V\}$$

Grafo k-regular

- Todos os vértices com grau k
- *Desenhar um grafo 3-Regular....*

Grau de um Vértice

- O número *d(G)* representa a média do grau de G

$$d(G) := \frac{1}{|V|}\sum_{v\in V} d(v)$$

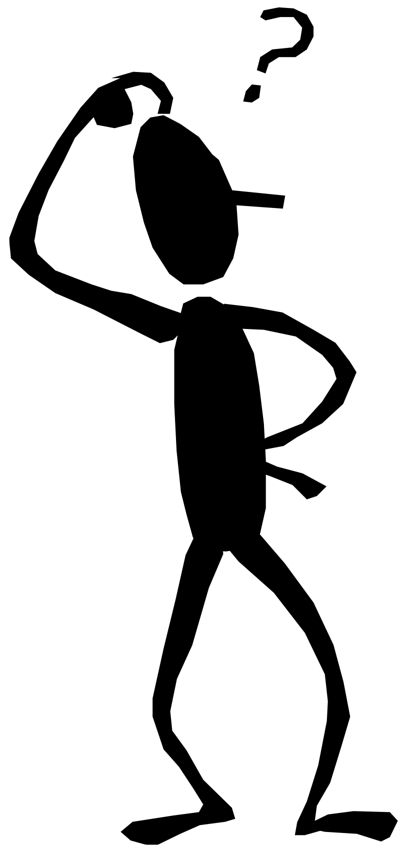
$$\delta(G) \le d(G) \le \Delta(G)$$

$$\varepsilon(G) := \frac{|E|}{|V|}$$

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G) \times |V|$$

- **Desafio:**
  - Construir um grafo com n vértices, tal que, se o grafo possuir vértices de grau ímpar, a quantidade de vértices de grau ímpar tem que ser ímpar.
- **Proposição:**
  - O número de vértices de grau ímpar de um grafo é sempre par
- **Prova**
  - **É inteiro** $|E| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d(v)$
  - **É par** $\sum_{v\in V} d(v)$

Fim/ Dúvidas?



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Campus Russas

RUS0300-Algoritmos em Grafos
Aula 01: Conceitos Básicos

Professor Pablo Soares

2019.1

"Quem não luta pelo futuro que quer, tem que aceitar o futuro que vier"