Lógica

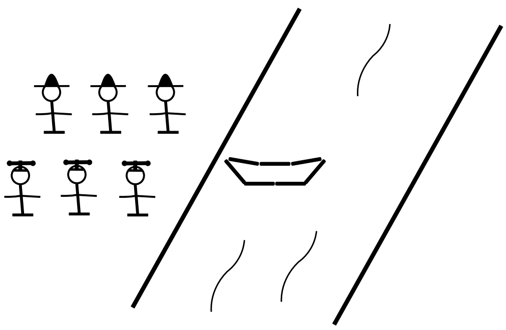
aula 04: Quebra-cabeças lógicos

1 Introdução

2 Canibais e missionários

> *Três canibais e três missionários desejam atravessar um rio utilizando uma canoa que tem capacidade para duas pessoas. Em circumstâncias normais, a situação não apresentaria maiores dificuldades. Mas, o nosso caso apresenta uma pequena peculiaridade: se em qualquer momento houver mais canibais do que missionários em uma das margens, os canibais perdem completamente o controle, devoram os missionários e voltam para a vida na selva ...*
>
> *Como é que o grupo pode atravessar o rio em segurança?*

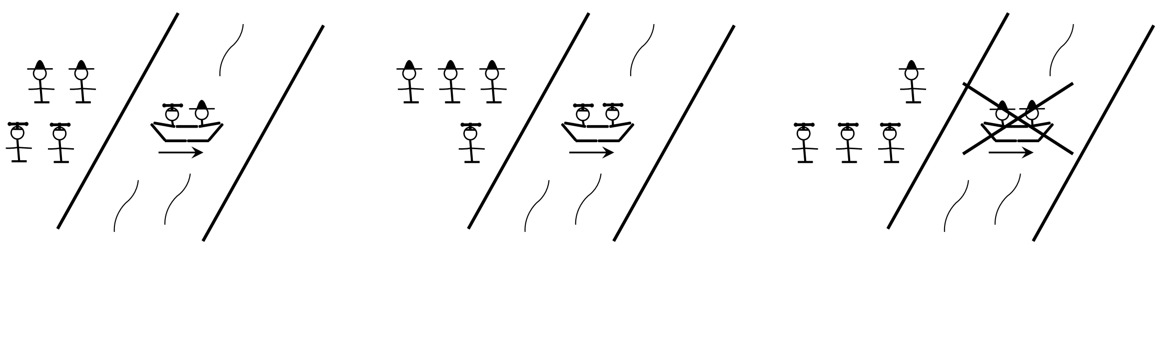
O primeiro passo para resolver um quebra-cabeça lógico consiste em visualizar a situação



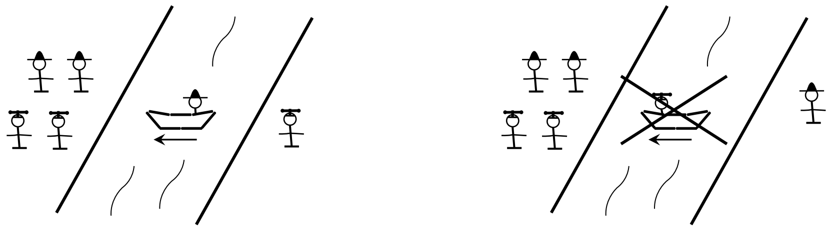
e tentar entender as regras do jogo (i.e., aquilo que você pode fazer e aquilo que você não pode fazer).

(Um quebra-cabeça lógico é basicamente um jogo de manipulação ...)

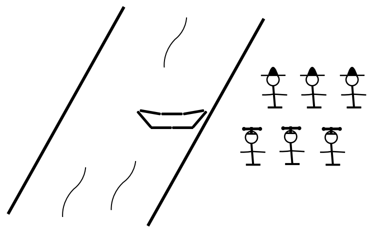
Nesse caso, é fácil ver que a primeira viagem da canoa pode levar 1 canibal e 1 missionário, ou 2 canibais, mas ela não pode levar 2 missionários.



Além disso, no primeiro caso, na viagem de volta, a canoa pode trazer o missionário para a margem esquerda, mas não o canibal



A seguir, uma vez que as regras estão claras, é útil visualizar a situação final ou objetivo



A questão agora é descobrir como é que nós podemos transformar a situação inicial na situação final, obedecendo as regras do jogo.

E aqui, não há muita alternativa senão experimentar e ver o que pode dar certo.

Por uma questá de conveniência, ao invés de manipular as figuras, nós vamos manipular a seguinte notação:

`(3C,3M)<(0,0)`

`3 canibais, 3 missionários e a canoa no lado esquerdo`

`(1C,1M)>(2C,2M)`

`1 canibal e 1 missionário no lado esquerdo, a canoa e os demais no lado direito`

Nós já vimos que existem duas possibilidades para o primeiro movimento

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \texttt{(2C,2M)>(1C,1M)} \\
\texttt{(3C,3M)<(0,0)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \texttt{(1C,3M)>(2C,0)}
\end{tikzcd}$$

No primeiro caso, é o missionário quem deve trazer a canoa de volta, e no segundo caso é um canibal

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \texttt{(2C,2M)>(1C,1M)} \arrow[dr] & \\
\texttt{(3C,3M)<(0,0)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \texttt{(2C,3M)<(1C,0)} \\
 & \texttt{(1C,3M)>(2C,0)} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

A seguir, é preciso cuidado pois se a canoa levar 1 canibal e 1 missionário haverá uma violação da regra do lado direito, e se a canoa levar 2 missionários haverá uma violação da regra do lado esquerdo.

Portanto, existe apenas uma opção de movimento nesse ponto

```
(2C,3M)<(1C,0)    ⟶    (0,3M)>(3C,0)
```

que, por sua vez, também tem apenas uma continuação possível

```
(0,3M)>(3C,0)    ⟶    (1C,3M)<(2C,0)
```

O próximo passo também é forçado: levar 2 missionários para o lado direito, pois qualquer outra opção leva a uma violação das regras

```
(1C,3M)<(2C,0)    ⟶    (1C,1M)>(2C,2M)
```

Até aqui tudo bem, nós estamos fazendo progresso.

Mas agora nós temos um problema: se um canibal trouxer a canoa de volta, nós teremos uma violação da regra no lado esquerdo, e se um missionário trouxer a canoa de volta, nós teremos uma violação da regra no lado direito.

A solução consiste em fazer a canoa voltar com 1 canibal e 1 missionário

```
(1C,1M)>(2C,2M)    ⟶    (2C,2M)<(1C,1M)
```

e aqui parece que nós estamos andando para trás ...

Felizmente, isso é apenas um atraso momentâneo, pois em mais 5 passos o problema é resolvido:

```
(2C,2M)<(1C,1M)    ⟶    (2C,0)>(1C,3M)    ⟶    (3C,0)<(0,3M)
                   ⟶    (1C,0)>(2C,3M)    ⟶    (2C,0)<(1C,3M)
                   ⟶    (0,0)>(3C,3M)
```

Legal!

Mas, onde é que está a lógica aqui?

3 Raciocínio lógico

Bom, existe lógica acontecendo no sentido de que isso é um jogo baseado em regras.

Mas, o lado mais interessante da lógica só aparece quando nós tentamos ver a coisa em alto nível ...

Por exemplo, note que em um certo momento nós alcançamos a seguinte configuração

$$(\texttt{1C}, \texttt{1M}) > (\texttt{2C}, \texttt{2M})$$

onde 2 canibais e 2 missionários conseguiram passar para o outro lado.

Isso pode nos levar a pensar que a solução para o problema com 3 canibais e 3 missionários contém em seu interior uma solução para o problema com 2 canibais e 2 missionários.

Mas, infelizmente, isso não é verdade ...

Examinando o trecho da solução que leva até a configuração $(\texttt{1C}, \texttt{1M}) > (\texttt{2C}, \texttt{2M})$

$$\begin{array}{ccccc}
\ldots & \longrightarrow & \texttt{(2C,3M)<(1C,0)} & \longrightarrow & \texttt{(0,3M)>(3C,0)} \\
 & \longrightarrow & \texttt{(1C,3M)<(2C,0)} & \longrightarrow & \texttt{(1C,1M)>(2C,2M)}
\end{array}$$

nós vemos que ele envolve a passagem de 3 canibais para o lado direito, o que não é possível no problema com 2 canibais e 2 missionários.

Mas, isso não significa que o problema com 2 canibais e 2 missionários não tenha solução.

Por exemplo,

$$\begin{array}{ccccc}
\texttt{(2C,2M)<(0,0)} & \longrightarrow & \texttt{(0,2M)>(2C,0)} & \longrightarrow & \texttt{(1C,2M)<(1C,0)} \\
 & \longrightarrow & \texttt{(1C,0)>(1C,2M)} & \longrightarrow & \texttt{(2C,0)<(0,2M)} \\
 & \longrightarrow & \texttt{(0,0)>(2C,2M)} & &
\end{array}$$

Por outro lado, essa sequência de movimentos não pode fazer parte de uma solução para o problema com 3 canibais e 3 missionários ...

(Porque?)

Da mesma forma, a solução que encontramos para o problema com 3 canibais e 3 missionários não pode ser o início de uma solução para o problema com 4 canibais e 4 missionários ...

(Porque?)

Isto é, se quisermos agora resolver o problema com 4 canibais e 4 missionários é preciso recomeçar do zero.

Mas, não é bem assim ...

Examinando com atenção a solução para o problema com 3 canibais e 3 missionários, nós podemos identificar o que parece ser uma estratégia

- primeiro, nós passamos todos os canibais para o lado direito

```
(3C,3M)<(0,0)   ⟶   . . .   ⟶   (0,3M)>(3C,0)
```

- depois, a situação se inverte

```
(0,3M)>(3C,0)   ⟶   . . .   ⟶   (3C,0)<(0,3M)
```

- e, finalmente, a partir desse ponto é possível completar a solução

```
(3C,0)<(0,3M)   ⟶   . . .   ⟶   (0,0)>(3C,3M)
```

É interessante observar que a mesma estratégia também foi usada para resolver o problema com 2 canibais e 2 missionários.

Ou seja, nós aprendemos alguma coisa com a solução desses dois problemas.

E agora nós podemos tentar utilizar essa ideia para resolver o problema de tamanho 4.

Isto é, para tentar resolver o problema com 4 canibais e 4 missionários, nós começamos com o seguinte subproblema:

```
(4C,4M)<(0,0)   ⟶   ?   ⟶   (0,4M)>(4C,0)
```

Na verdade, isso é uma tarefa bem fácil

```
(4C,4M)<(0,0)   ⟶   (2C,4M)>(2C,0)   ⟶   (3C,4M)<(1C,0)
                ⟶   (1C,4M)>(3C,0)   ⟶   (2C,4M)<(2C,0)
                ⟶   (0,4M)>(4C,0)
```

Isto é, utilizando apenas os canibais, cada viagem de ida e volta leva um canibal para a margem direita.

De fato, a mesma ideia pode ser utilizada para resolver o terceiro subproblema.

```
(4C,0)<(0,4M)   ⟶   ?   ⟶   (0,0)>(4C,4M)
```

Portanto, tudo o que é preciso fazer agora é resolver o seguinte subproblema

$$\texttt{(0,4M)>(4C,0)} \quad \longrightarrow \quad ? \quad \longrightarrow \quad \texttt{(4C,0)<(0,4M)}$$

A primeira observação é que trazer apenas 1 canibal de volta para o lado esquerdo não ajuda muito ...

(Porque?)

Portanto, nós começamos com o seguinte movimento

$$\texttt{(0,4M)>(4C,0)} \quad \longrightarrow \quad \texttt{(2C,4M)<(2C,0)}$$

A seguir, o único movimento razoável consiste em levar 2 missionários para o lado direito

$$\texttt{(2C,4M)<(2C,0)} \quad \longrightarrow \quad \texttt{(2C,2M)>(2C,2M)}$$

e parece que nós estamos fazendo progresso ...

A configuração atual

$$(\texttt{2C}, \texttt{2M}) > (\texttt{2C}, \texttt{2M})$$

é análoga àquela que vimos no problema de tamaho 3, onde foi preciso trazer trazer 1 canibal e 1 missionário de volta para a margem esquerda

$$\texttt{(2C,2M)>(2C,2M)} \quad \longrightarrow \quad \texttt{(3C,3M)<(1C,1M)}$$

O problema é que não há como seguir adiante a partir desse ponto ...

Isto é, o único movimento possível a partir dessa situação é levar 1 canibal e 1 missionário para a margem direita, mas isso nos trás de volta para a configuração

$$(\texttt{2C}, \texttt{2M}) > (\texttt{2C}, \texttt{2M})$$

Em outras palavras, a nossa estratégia de solução quase deu certo, mas no final ela falhou ...

De fato, examinando todas as possibilidades de movimento do jogo, é possível verificar que o problema com 4 canibais e 4 missionários não tem solução.

E, o que é mais triste, nós ainda não conseguimos ver a parte mais interessante da lógica funcionando ...

4 Um problema onde a lógica funciona

Examinando mais uma vez a solução do problema dos 3 canibais e 3 missionários, nós observamos que praticamente todos os seus movimentos são forçados.

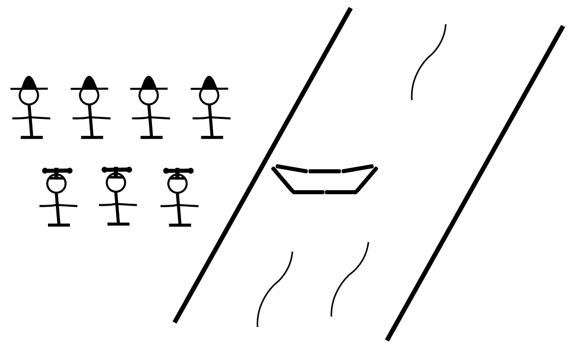
Isso reflete o fato de que o problema tem restrições demais.

É por isso que o problema de tamanho 4 (ou mais) não tem solução.

E também é por isso que o lado mais interessante da lógica não está aparecendo ...

Para que a lógica funcione, é preciso ter um pouco mais de espaço ...

Considere o problema com 3 canibais e 4 missionários



Como usual, existem duas maneiras de começar

$$
\begin{array}{ccc}
 & \nearrow & \texttt{(2C,3M)>(1C,1M)} \\
\texttt{(3C,4M)<(0,0)} & & \\
 & \searrow & \texttt{(1C,4M)>(2C,0)}
\end{array}
$$

A seguir, cada configuração pode evoluir da seguinte maneira

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \nearrow & \texttt{(1C,4M)>(2C,0)} & \searrow & \\
\texttt{(3C,4M)<(0,0)} & & & & \texttt{(2C,4M)<(1C,0)} \\
 & \searrow & \texttt{(2C,3M)>(1C,1M)} & \nearrow & \\
 & & & \searrow & \texttt{(3C,3M)<(0,1M)}
\end{array}
$$

Na configuração de cima, se levarmos a seguir 2 canibais para a margem direita, nós completamos a primeira etapa da nossa estratégia de solução.

$$\texttt{(2C,4M)<(1C,0)} \longrightarrow \texttt{(0,4M)>(3C,0)}$$

E dessa vez não é difícil verificar que todas as etapas da estratégia podem ser resolvidas.

Mas, nós também podemos considerar a configuração de baixo

$$(\mathtt{3C}, \mathtt{3M}) < (\mathtt{0}, \mathtt{1M})$$

O único movimento possível a partir dessa configuração é

$$\texttt{(3C,3M)<(0,1M)} \quad \longrightarrow \quad \texttt{(2C,2M)>(1C,2M)}$$

E, trazendo um missionário de volta para o lado esquerdo, nós obtemos

$$\texttt{(2C,2M)>(1C,2M)} \quad \longrightarrow \quad \texttt{(2C,3M)<(1C,1M)}$$

Para ver o que está acontecendo de interessante aqui, é conveniente visualizar o caminho completo até esse ponto

$$\begin{array}{ccccc} \texttt{(3C,4M)<(0,0)} & \longrightarrow & \texttt{(2C,3M)>(1C,1M)} & \longrightarrow & \texttt{(3C,3M)<(0,1M)} \\ & & \texttt{(2C,2M)>(1C,2M)} & \longrightarrow & \texttt{(2C,3M)<(1C,1M)} \end{array}$$

Note que, no início

- havia 1 missionário a mais no lado esquerdo
- havia a mesma quantidade de canibais e missionários no lado direito
- e a canoa estava do lado esquerdo

E, após a sequência de quatro passos acima, as mesmas condições continuam valendo.

Essa observação nos dá a ideia de que a sequência de 4 passos pode ser vista como uma "rotina" que leva 1 canibal e 1 missionário para o lado direito do rio, e que pode ser repetida outra vez.

Se isso for verdade, com 3 repetições o problema fica praticamente resolvido

$$\begin{array}{ccccc} \texttt{(3C,4M)<(0,0)} & \longrightarrow & \texttt{(2C,3M)>(1C,1M)} & \longrightarrow & \texttt{(3C,3M)<(0,1M)} \\ & & \texttt{(2C,2M)>(1C,2M)} & \longrightarrow & \texttt{(2C,3M)<(1C,1M)} \end{array}$$

De fato, não é difícil verificar que esse caminho não envolve nenhuma violação das regras.

E aqui nós temos um exemplo interessante de funcionamento da lógica.

Exercícios

1. **O lobo, o carneiro e a alface**

   Um dia, um fazendeiro foi ao mercado e comprou um lobo, um carneiro e uma alface.

   No caminho para casa, o fazendeiro chegou à margem de um rio onde havia uma canoa.

   Mas, na travessia do rio, o agricultor podea levar apenas a si mesmo e uma única de suas compras — o lobo, o carneiro, ou a alface.

   Se fossem deixados sozinhos em uma mesma margem, o lobo comeria o carneiro e o carneiro comeria a alface.

   Como é que o fazendeiro pode chegar em casa com todas as suas coisas?

2. **Ponte suspensa**

   Quatro pessoas precisam atravessar uma ponte suspensa no meio da noite.

   É muito perigoso atravessar a ponte no escuro, mas eles possuem apenas uma lanterna.

   Além disso, a ponte não parece aguentar mais do que duas pessoas de cada vez.

   As pessoas levam tempos diferentes para atravessar a ponte: 1 min, 2 min, 7 min e 10 min.

   Qual o menor tempo necessário para que todas as pessoas possam alcançar o outro lado?

3. **Canibais e missionários** (OPCIONAL)

   Suponha que o problema é modificado, de modo que agora a canoa possa levar 3 pessoas.

   a) Você consegue resolver o problema com 5 canibais e 5 missionários?

   b) Você consegue resolver o problema com 5 canibais e 5 missionários?

4. **Problemas de família** (DIFÍCIL)

   De um lado do rio estão a mãe e duas filhas, o pai e dois filhos, a governanta e o cachorro.

   Existe uma canoa com capacidade para duas pessoas (ou uma pessoa e o cachorro), mas apenas os adultos são capazes de manobrá-la.

   As dificuldades da situação são:

   - *o pai não pode ser deixado com nenhuma das duas filhas quando a mãe não está lá*
   - *a mãe não pode ser deixada com nenhum dos dois filhos quando o pai não está lá*
   - *e, na ausência da governanta, o cachorro morde quem estiver por perto*

   Como é que a família pode atravessar o rio sem haver confusão?