

Processos Estocásticos

Primeira Lista de Exercícios

12 de junho de 2013

1 Quantos códigos de quatro letras podem ser construídos usando-se as letras a, b, c, d, e, f se:

- nenhuma letra puder ser repetida?
- qualquer letra puder ser repetida qualquer número de vezes?

a. Como o exercício pede “códigos” sabemos então que a ordem das letras importa. Logo, temos um arranjo de 6 letras tomadas 4 a 4:

$$A(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360 \quad .$$

b. Como as letras podem ser repetidas temos sempre 6 opções em cada posição. Logo, pelo princípio fundamental da contagem:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1,296 \quad .$$

2 Ao se retirar quatro cartas de um baralho de 52 cartas, em sequência, ao acaso e sem reposição, qual é a probabilidade de se obter uma quadra (quatro cartas de mesmo número, uma de cada naipe)?

Note que a primeira carta obtida não influencia na probabilidade, ela apenas define qual é o número que se deve obter nas demais cartas. Para as retiradas seguintes, temos que tanto o número de possibilidades para a quadra quanto o número total de cartas diminui a cada nova carta obtida (retirada sem reposição). Assim, a probabilidade de uma quadra é dada por:

$$\frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} = \frac{6}{124,950} = 0.000048 \quad .$$

3 Qual é a probabilidade de se obter três caras e duas coroas em cinco lançamentos de uma moeda?

Como são feitos cinco lançamentos de uma moeda e cada lançamento possui dois possíveis resultados, temos que o espaço amostral possui 32 elementos:

$$|\Omega| = 2^5 = 32 \quad .$$

Uma vez que não há preocupação com a ordem de ocorrência de caras e coroas (somente a quantidade), temos uma combinação de 3 caras em 5 lançamentos (ou de 2 coroas em 5 – porque essa escolha não faz diferença?). Logo, tomando A como o evento de se obter 3 caras e 2 coroas, sabemos que $|A| = \binom{5}{3}$. Portanto, temos que:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} \quad .$$

4 Seja um lote com 20 peças, sendo 5 defeituosas. Escolha 4 peças do lote aleatoriamente (uma amostra aleatória de quatro peças). Qual é a probabilidade de se obter exatamente duas peças defeituosas na amostra?

Sabemos que o total de possíveis amostras é uma combinação de 20 peças tomadas 4 a 4, isto é $\binom{20}{4}$. Além disso, existem $\binom{5}{2}$ possíveis combinações para as peças defeituosas e $\binom{15}{2}$ combinações para as peças boas na amostra. Logo:

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{25 \cdot 105}{4752} \approx 0.537 \quad .$$

- 5 Numa turma com n alunos, qual é a probabilidade de haver alguma coincidência de aniversário? Calcule a probabilidade para $n = 30$.

A forma mais simples de se resolver esse problema é calcular a probabilidade do evento complementar, isto é, de não haver coincidências de aniversários. Nesse caso temos um arranjo de n datas ao longo dos 365 dias do ano. Além disso, o número total de possibilidades para as datas de aniversário é de 365 vezes n . Logo:

$$1 - \frac{A(365, n)}{365^n} \approx 0.7063 \quad .$$

- 6 Considere que a probabilidade de ocorrer k erros ortográficos em uma página web é dada por

$$p(k) = \frac{1}{e \cdot k!} \quad (e \approx 2.7183)$$

Tomando-se uma página qualquer, calcule a probabilidade de:

- não ocorrer erro;
- ocorrerem mais do que dois erros.

- a. Basta substituir $k = 0$ na fórmula:

$$p(0) = \frac{1}{e \cdot 0!} = \frac{1}{e} \quad .$$

- b. Basta calcular a probabilidade para $k = 0, 1, 2$ e tomar o complemento:

$$1 - (p(0) + p(1) + p(2)) = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} - \frac{1}{2e} = 1 - \frac{5}{2e} \quad .$$

- 7 Um aluno realiza um teste de múltipla escolha com cinco questões, cada uma com quatro alternativas de resposta. Se o aluno escolhe as alternativas aleatoriamente, qual é a probabilidade dele responder corretamente a todas as cinco perguntas?

As respostas dadas para as questões são independentes entre si, isto é, o fato do aluno ter acertado ou errado um questão não influencia o resultado das demais. A probabilidade de se acertar uma questão ao acaso é $\frac{1}{4}$, logo:

$$\frac{1}{4^5} = \frac{1}{1024} \quad .$$

- 8 Uma rede de computadores é composta por um servidor e cinco clientes (A, B, C, D e E). Registros anteriores indicam que do total de pedidos de consulta, cerca de 10% vêm do cliente A, 15% do cliente B, 15% de C, 40% de D e 20% de E. Se o pedido não for feito de forma adequada, a consulta apresentará erro. Usualmente, ocorrem os seguintes percentuais de pedidos inadequados: 1% do cliente A, 2% do cliente B, 0.5% de C, 2% de D e 8% de E.

- a. Qual a probabilidade do sistema apresentar erro?
- b. Qual é a probabilidade de uma consulta ter originado do cliente E, sabendo-se que esta apresentou erro?

a. Seja R o evento de ocorrer um erro. Para calcular $P(R)$ basta usar o teorema da probabilidade total:

$$P(R) = P(A) \cdot P(R|A) + P(B) \cdot P(R|B) + P(C) \cdot P(R|C) + P(D) \cdot P(R|D) + P(E) \cdot P(R|E) = 0.02875 \quad .$$

b. Basta usar o teorema de Bayes e o resultado do item a):

$$P(E|R) = \frac{P(E) \cdot P(R|E)}{P(R)} = \frac{0.2 \cdot 0.08}{0.02875} \approx 0.5565 \quad .$$

- 9** Uma mensagem m é enviada entre dois *hosts* A e B . Entre esses *hosts* a comunicação é feita por dois comutadores C_1 e C_2 . Assumindo que a probabilidade de C_1 estar funcionando é de 0.9 e de C_2 é de 0.8, qual a probabilidade do comutador C_2 não estar funcionando, dado que a mensagem m não atingiu o seu destino? Dica: $P[m \text{ não chegar dado que } C_2 \text{ não funciona}] = 1$.

Sejam os eventos:

- C_i – o comutador i ($i = 1, 2$) está funcionando;
- $\overline{C_i}$ – o comutador i ($i = 1, 2$) não está funcionando; e
- \overline{M} – a mensagem m não chegou ao destino.

Busca-se então a probabilidade

$$P(\overline{C_2}|\overline{M}) = \frac{P(\overline{C_2}) \cdot P(\overline{M}|\overline{C_2})}{P(\overline{M})} = \frac{P(\overline{C_2})}{P(\overline{C_1} \cup \overline{C_2})} = \frac{0.2}{0.1 + 0.2} = \frac{2}{3} \quad .$$

- 10** Sejam E , F e G três eventos. Encontre expressões para os casos onde:

- a. somente F ocorre;
- b. ambos E e F ocorrem mas G não ocorre;
- c. pelo menos um evento ocorre;
- d. pelo menos dois eventos ocorrem;
- e. todos os três eventos ocorrem;
- f. nenhum evento ocorre;
- g. no máximo um evento ocorre;
- h. no máximo dois eventos ocorrem.

Usando a notação compacta para representar interseção, isto é, $AB = A \cap B$, temos:

- a. $F(\overline{E \cup G}) = F \overline{E} \overline{G}$
- b. $EF \overline{G}$
- c. $E \cup F \cup G$

- d. $EF \cup EG \cup FG$
- e. EFG
- f. $(\overline{E \cup F \cup G}) = \overline{E} \overline{F} \overline{G}$
- g. $\overline{EF} \overline{EG} \overline{FG}$
- h. (\overline{EFG})

- 11** Um jogador usa o seguinte sistema em Las Vegas. Ele aposta \$1 de que sairá um número vermelho na roleta. Se ele ganhar, ele para de jogar. Se ele perder então ele faz a mesma aposta uma segunda vez mas dessa vez apostando \$2 e, independentemente do resultado, para de jogar. Assumindo que ele tem uma probabilidade de $1/2$ de vencer cada aposta, qual a probabilidade dele sair como vencedor? Porque esse sistema não é usado por todos os jogadores?

Seja V o evento sair vermelho na roleta. Como a roleta é bicolor, temos então que $P(V_i) = 1/2 = P(\overline{V}_i)$, onde $i = 1, 2$ indica a primeira ou segunda aposta. A probabilidade do jogador sair vencedor pode ser calculada então por

$$P(V_1) + P(\overline{V}_1) \cdot P(V_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} .$$

Onde a soma acima é justificada pelo fato de o jogador vencer na primeira ou na segunda aposta serem eventos mutuamente exclusivos. A multiplicação no segundo termo pode ser realizada pois cada resultado da roleta é independente dos demais.

Essa estratégia de jogo não é boa porque se o jogador ganhar ele fica somente com \$1, enquanto que se ele perder o prejuízo é de \$3.

- 12** O jogo de dados *craps* é jogado da seguinte forma. O jogador arremessa dois dados e se a soma for 7 ou 11 então ele ganha. Se a soma for 2, 3 ou 12, ele perde. Se a soma for qualquer outro valor, então ele continua lançando os dados até ele obter o mesmo número de novo (e nesse caso ele vence) ou até sair 7 (e nesse caso ele perde). Calcule a probabilidade do jogador vencer.

A tabela a seguir mostra as probabilidades de se vencer para cada uma das possibilidades, onde $P(n)$ é a probabilidade de se obter a soma n na rolagem dos dois dados. Para os casos onde a vitória (W) ou a derrota (L) não ocorrem na primeira rodada, a probabilidade de que a soma n será obtida antes de sair 7 é dada por

$$P(W|n) = \frac{P(n)}{P(7) + P(n)} = \frac{P(n)}{1/6 + P(n)} .$$

| n | $P(n)$ | W/L | $P(W n)$ |
|-----|--------|-------|----------|
| 2 | $1/36$ | L | 0 |
| 3 | $2/36$ | L | 0 |
| 4 | $3/36$ | | $3/9$ |
| 5 | $4/36$ | | $4/10$ |
| 6 | $5/36$ | | $5/11$ |
| 7 | $6/36$ | W | 1 |
| 8 | $5/36$ | | $5/11$ |
| 9 | $4/36$ | | $4/10$ |
| 10 | $3/36$ | | $3/9$ |
| 11 | $2/36$ | W | 1 |
| 12 | $1/36$ | L | 0 |

Pelo teorema da probabilidade total podemos obter a probabilidade de vencer como

$$P(W) = \sum_{n=2}^{12} P(n) \cdot P(W|n) \quad .$$

Finalmente, substituindo os valores da tabela, tem-se

$$P(W) = \frac{244}{495} \approx 0.492929 \quad .$$

13 Suponha que $P(E) = 0.6$. O que você pode dizer sobre $P(E|F)$ quando:

- a. E e F são mutuamente exclusivos?
- b. $E \subset F$?
- c. $F \subset E$?

- a. Se E e F são mutuamente exclusivos então E não pode ocorrer quando F ocorre, logo $P(E|F) = 0$. Formalmente, temos

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(\emptyset)}{P(F)} = 0 \quad .$$

- b. Se $E \subset F$ então $E \cap F = E$. Além disso, como $P(F) \leq 1$, temos que

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E)}{P(F)} \geq P(E) = 0.6 \quad .$$

- c. Se $F \subset E$ então $E \cap F = F$. Logo

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1 \quad .$$