aula 28: Conjunção e Disjunção II

Joé avançou bastante no uso das regras da conjunção e da disjunção. Mas ainda tinha sensação de poderia extrair mais daquilo.

1. *Vamos começar os trabalhos! Vou começar com essa aqui*

$$((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$$

Mas, pera aí, ontem eu provei algo parecido

$$\Longrightarrow (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$$

será que isso me ajuda?

Tá, eu vejo que tem uma conjunção do lado esquerdo. As regras do Hilbert me dizem sobre isso que

$$\xRightarrow{\texttt{H4}} ((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to B)$$

Posso usar isso com a transformação transitividade `Trans.` *para obter*

$$\xRightarrow{\texttt{Trans.}} ((A \to B) \wedge (A \to C)) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$$

Agora, das regras do Hilbert,

$$\xRightarrow{\texttt{H5}} ((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to C)$$

Ah, agora posso usar a `modus ponens 2.0`*, vai dar certo*

$$\xRightarrow{\texttt{MP 2.0}} ((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$$

2. *Curioso. Olhando para esse exemplo de cima, eu usei uma regra com o seguinte formato*

$$p \to (q \to r)$$

que foi a regra de ontem, para mostrar uma coisa com esse formato

$$(p \wedge q) \to r$$

Ou seja, eu agrupei os dois da esquerda com uma conjunção.

Será que dá pra mostrar isso:

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r) \ ?$$

Eu sei que

$$\xRightarrow{\texttt{H4}} (p \wedge q) \to p$$

E tem um p ali na frente da regra que queremos construir. Vamos ver o que sai dalí. Acho que dá para encaixar na forma da regra da transitividade

$$\xRightarrow{\texttt{Trans.}} ((p \wedge q) \to p) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to (q \to r)))$$

Agora posso fazer o modus ponens

$$\xRightarrow{\texttt{MP}} (p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to (q \to r))$$

Mas também temos `H5`*:*

$$\xRightarrow{\texttt{H5}} (p \wedge q) \to q)$$

Vixe! Não dá para usar `modus ponens 2.0`*, mas daria certo uma espécie de* `modus ponens 3.0`*! Essa* `modus ponens 3.0` *seria assim. Se eu construo*

$$\Longrightarrow x \to (y \to z)$$

$$\Longrightarrow x \to (y \to (z \to w))$$

então posso construir

$$\Longrightarrow x \to (y \to w)$$

Se eu usar distributividade `2.0` *na segunda, tenho*

$$\xRightarrow{\texttt{Dist}} (x \to ((y \to z) \to (y \to w))$$

Agora é só usar `MP 2.0`*!*

$$\xRightarrow{\texttt{MP 2.0}} x \to (y \to z)$$

Pronto, consegui construir transformação `MP 3.0`*.*

Agora eu posso voltar para o problema anterior. Agora ficou fácil. Eu tinha parado na seguinte situação:

$$\xRightarrow{\texttt{MP}} (p \to (q \to r)) \to ((p \land q) \to (q \to r))$$

$$\xRightarrow{\texttt{H5}} (p \land q) \to q$$

Ainda não está no formato da `MP 3.0`*. Vou usar a regra* `R2` *nessa última*

$$\xRightarrow{\texttt{H5}} (p \to (q \to r)) \to ((p \land q) \to q)$$

Agora dá para usar a `MP 3.0`

$$\xRightarrow{\texttt{MP 3.0}} (p \to (q \to r)) \to ((p \land q) \to r)$$

Tcharam! Consegui! Vou chamar essa regra de `J2`*. Já tenho duas!*

3. Muito interessante essa regra. Ela diz que posso agrupar os dois da esquerda de uma implicação aninhada para formar uma implicação só usando uma conjunção.

Mas, peraí. Se eu tiver algo dessa forma

$$\Longrightarrow p \to (q \to (r \to s)))$$

Bem, podemos então usar modus ponens junto com `J2` *e obter*

$$\Longrightarrow (p \land q) \to (r \to s)$$

Mas agora eu posso repetir isso e obter

$$\Longrightarrow ((p \land q) \land r) \to s$$

Ou seja, se tivermos uma sequência qualquer

$$(p_1 \to (p_2 \to (p_3 \to \ldots (p_n \to q) \ldots)))$$

podemos usar `J2` *$n - 1$ vezes e obter*

$$(\ldots (p_1 \land (p_2 \land (p_3 \land (\ldots p_n) \to q$$

Massa! Tá começando a ficar interessante.

4. Ok, mas, voltando à J2*, será que o contrário também vale*

$$((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r)) \ ?$$

Deixa eu pensar em uma regra para usar... Engraçado, né? A gente constroi essas regras e elas ajudam a gente a construir outras regras de maneira mais fácil. Aí a gente vai construindo mais regras que ajuda a gente a construir ainda mais regras. Chega uma hora que tem tanta regra que a gente não sabe qual escolher. Vou testar umas aqui, então, e ver o que acontece. Vou tentar a da Liduína L1 *com o lado esquerdo dessa que quero construir*

$$\xRightarrow{\texttt{L1}} ((p \wedge q) \to r) \to ((q \to (p \wedge q)) \to (q \to r))$$

Bom, assim apareceu $(q \to r)$ *que também aparece no que eu quero constuir.*

Humm... olhando ali para o lado esquerdo, parece que dá para usar L1 *para colocar o* p *na frente de* $(q \to r)$

$$\xRightarrow{\texttt{L1}} ((q \to (p \wedge q)) \to (q \to r)) \\ \to ((p \to (q \to (p \wedge q))) \to (p \to (q \to r)))$$

Essa ficou grande. Mas pelo menos está mais perto do que eu procuro. Melhor ainda, dá para fazer modus ponens com aquela lá de cima

$$\xRightarrow{\texttt{MP}} ((p \wedge q) \to r) \to ((p \to (q \to (p \wedge q))) \to (p \to (q \to r)))$$

E aquela parte ali do meio é H3!

$$\xRightarrow{\texttt{H3}} p \to (q \to (p \wedge q))$$

E R3 *me diz que*

$$\xRightarrow{\texttt{R3}} ((p \to (q \to (p \wedge q))) \to (p \to (q \to r))) \to (p \to (q \to r))$$

Usando transitividade com a segunda de cima

$$\xRightarrow{\texttt{Trans.}} ((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r))$$

Que é o que eu queria. Ufa! Adivinha como vai se chamar essa regra? Eu te batizo... J3*!*

$$\xRightarrow{\texttt{J3}} ((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r))$$