UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Prof. Dr. Narciso Gonçalves da Silva

http://paginapessoal.utfpr.edu.br/ngsilva

Probabilidade

DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA

Experimento Aleatório

Um experimento é dito aleatório quando satisfaz as seguintes condições:

- Pode ser repetido indefinidamente
- É possível descrever todos os resultados do experimento, sem predizer com certeza qual ocorrerá
- Obedece à regularidade estatística, ou seja, quando o experimento for repetido um grande número de vezes, surgirá uma configuração definida

Experimento Aleatório

Exemplos:

- Lançar um dado e observar a face superior
- Lançar duas moedas e verificar as faces que ocorrem
- Verificar o tempo de vida de uma lâmpada

Espaço Amostral

É o conjunto Ω de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório

Exemplo:

Considere o experimento aleatório sendo o lançamento de duas moedas não viciadas.

E = "duas moedas não viciadas são lançadas"

Seja cara = k e coroa = c

$\Omega = \{(k,k), (k,c), (c,k), (c,c)\}$

Tipos de Espaço Amostral

1) **Finito**: tem um número finito de elementos

Exemplo: Lançamento de um dado

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2) **Infinito enumerável ou contável**: tem um número infinito de elementos enumeráveis

Exemplo: Uma moeda é lançada sucessivas vezes até que ocorra uma coroa (c)

$\Omega = \{c, kc, kkc, kkkc, kkkkc, ...\}$

3) **Infinito não enumerável ou não contável**: tem um número infinito de elementos não enumeráveis

Exemplo: Observar o tempo de vida de uma lâmpada

$\Omega = \{x \,/\, x \in R, x \geq 0\}$

Evento

É qualquer subconjunto de um espaço amostral Ω

Sempre deve ser considerado o evento impossível (aquele que nunca ocorre) e o evento certo (que é próprio espaço amostral Ω)

Exemplo:

No lançamento de um dado não viciado, considere o evento A quando ocorre um número par:

E = “uma dado não viciado é lançado”

A = “ face par ocorre”

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

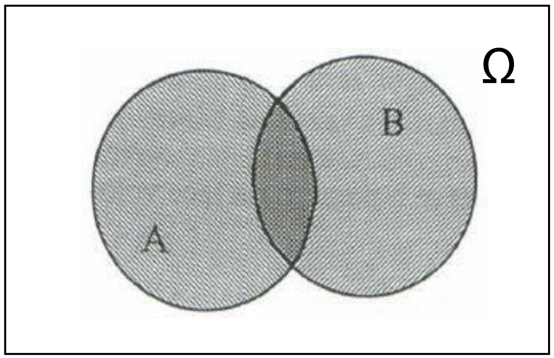
$A = \{2, 4, 6\}$

Operações com Eventos

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω

a) União

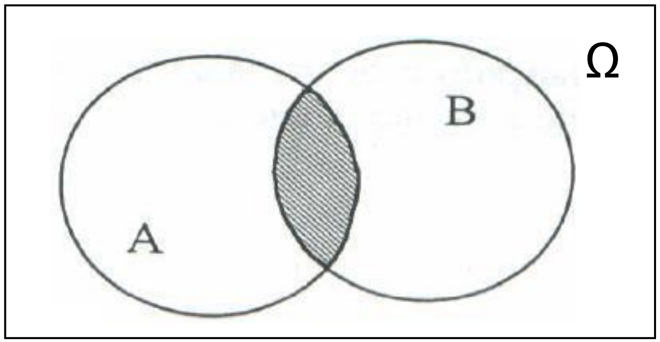
O evento $A \cup B$ ocorre quando ocorre somente o evento **A** ou ocorre somente o evento **B** ou ocorrem ambos os eventos **A** e **B**



Operações com Eventos

b) Intersecção

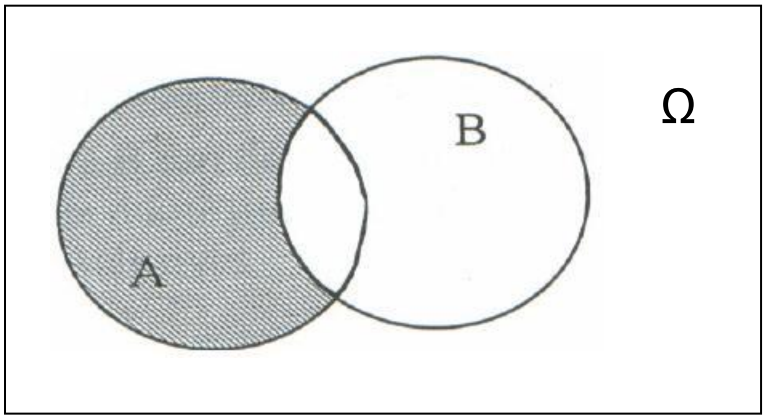
O evento **A** $\cap$ **B** ocorre quando ambos os eventos **A** e **B** ocorrem



Operações com Eventos

c) Diferença

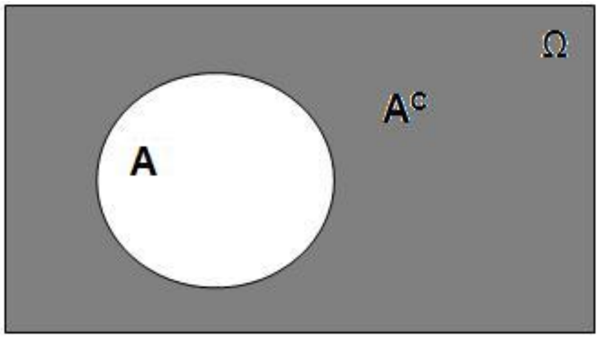
O evento **A – B** ocorre quando ocorre o evento A mas não ocorre o evento **B**



Operações com Eventos

d) Complementar

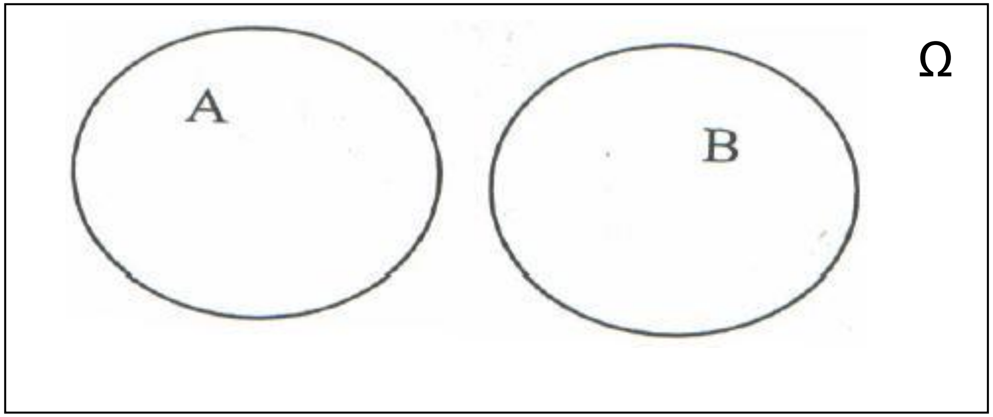
O evento $\mathbf{A}^c$ ocorre quando o evento **A** não ocorre



Operações com Eventos

e) Mutuamente Excludentes

Dois eventos **A** e **B** são ditos mutuamente excludentes (exclusivos ou disjuntos) quando não podem ocorrer simultaneamente. Isto é, se a interseção deles for o conjunto vazio



Operações com Eventos

Exemplos:

1) Sendo os eventos A = {1, 3, 4, 7, 8}, B = {1, 2, 5, 6, 7, 9}

e Ω = N, determinar:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - B$

d) $B - A$

e) $A^c \cap B$

Operações com Eventos

Exemplos:

2) Numa pesquisa, das pessoas entrevistadas, 120 assistem a emissora A, 150 assistem a emissora B, 40 assistem as duas emissoras e 120 não assistem nenhuma das emissoras. Quantas pessoas foram entrevistadas?

Resposta: 350 pessoas

3) Sejam A, B e C eventos de um espaço amostral Ω. Exprimir os eventos abaixo utilizando as operações de união, intersecção e complementar.

a) Somente o evento B ocorre.

Resposta: $A^c \cap B \cap C^c$

b) Pelo menos um evento ocorre.

Resposta: $A \cup B \cup C$

c) Os três eventos ocorrem.

Resposta: $A \cap B \cap C$

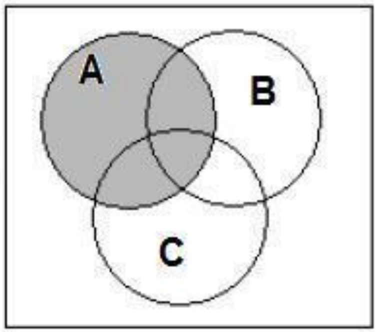
d) Exatamente dois eventos ocorrem.

Resposta: $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$

Exemplos:

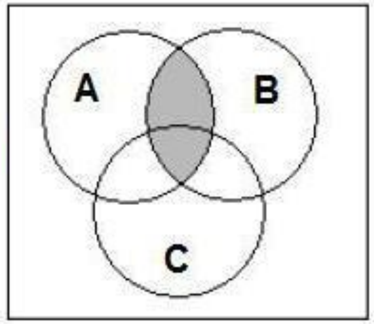
4) Exprimir os eventos hachurados nos diagramas abaixo utilizando as operações de união, intersecção e complementar.

a)



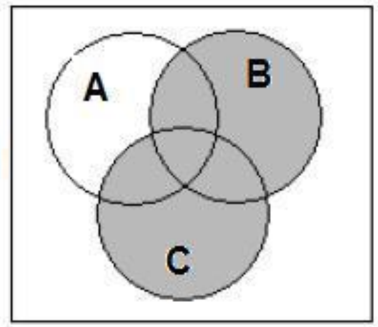
Ocorre o evento A

b)



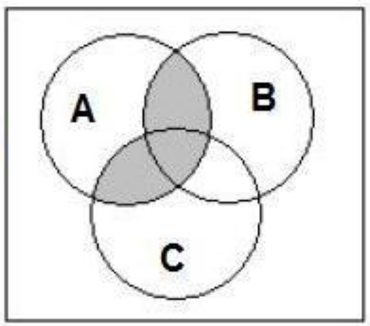
Ocorre o evento A ∩ B

c)



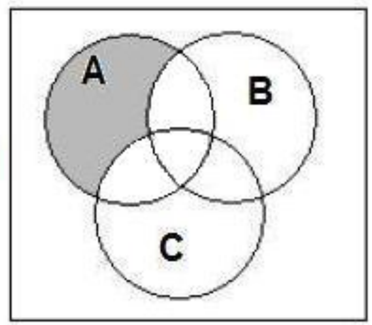
Ocorre o evento B U C

d)



Ocorre o evento (A ∩ B) U (A ∩ C)

e)



Ocorre o evento ($A \cap B^c \cap C^c$)

Propriedades das operações com evento

a) Idempotentes: $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$

b) Comutativas: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$

c) Associativas: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

d) Distributivas: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

e) Identidades: $A \cup \phi = A$ e $A \cap \phi = \phi$

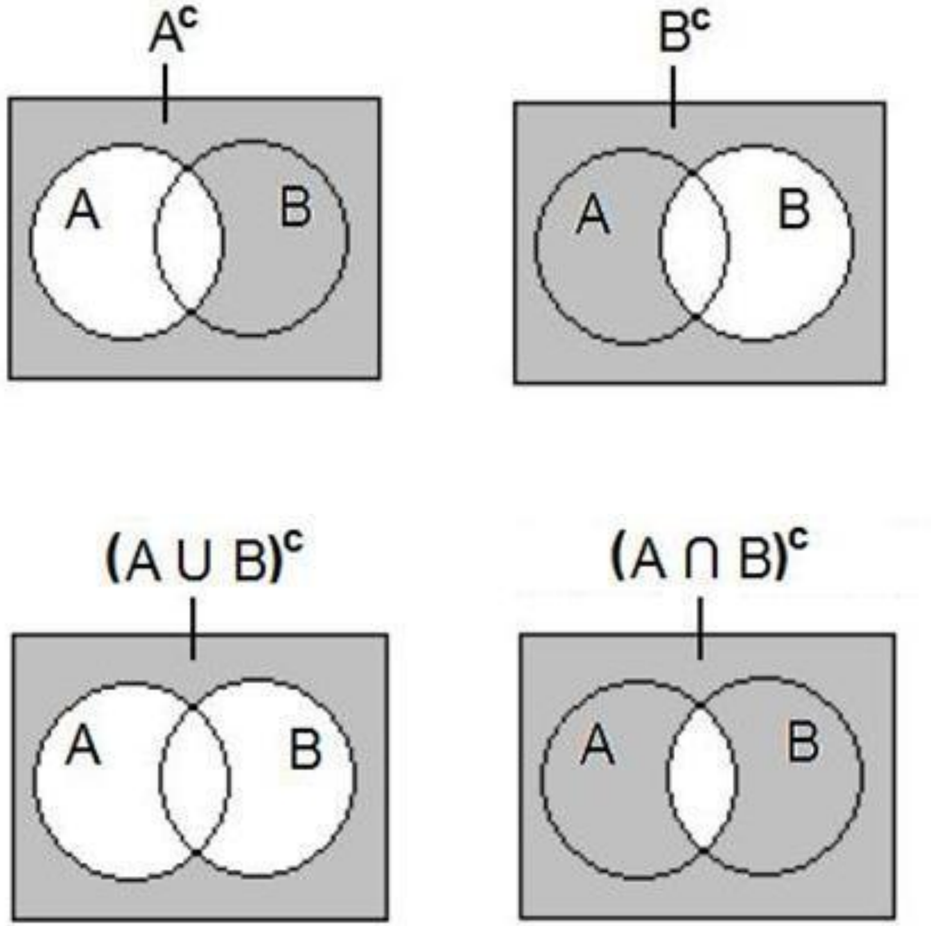
$A \cup \Omega = \Omega$ e $A \cap \Omega = A$

f) Complementar: $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \phi$

$(A^c)^c = A$ e $\Omega^c = \phi$ e $\phi^c = \Omega$

Propriedades das operações com evento

g) Lei de Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



Partição de um Espaço Amostral

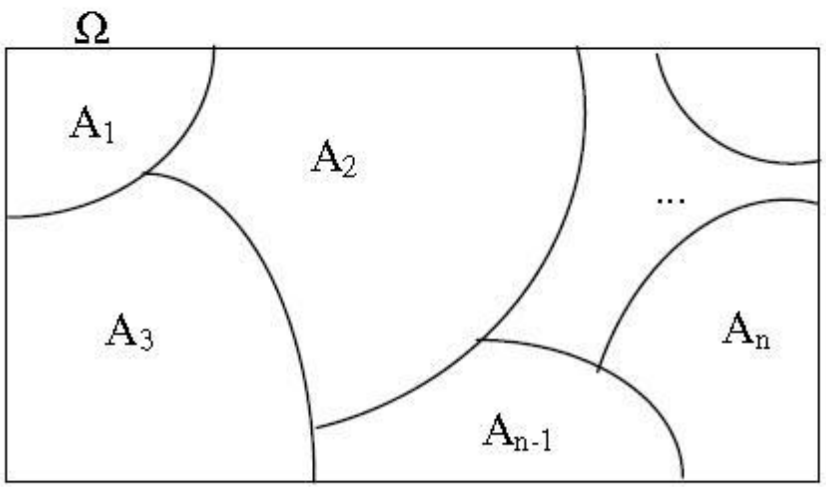
Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma *partição* do espaço amostral Ω se:

i) $A_i \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$ (A_i e A_j são eventos mutuamente excludentes)

iii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Uma partição de um espaço amostral Ω é uma coleção de subconjuntos não-vazios e mutuamente excludentes de Ω, cujas uniões são iguais a Ω



Definições de Probabilidade

1) Definição Frequentista (Richard von Mises, 1883-1953)

Se em N realizações de um experimento aleatório, o evento A ocorre n_A vezes, então a frequência relativa de A nas N realizações é:

$$f_r = \frac{n_A}{N}$$

E a probabilidade de ocorrência do evento A é:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N}$$

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

2) Definição Clássica (Atribuída à Laplace)

Seja um espaço amostral finito Ω, formado por eventos equiprováveis. Sendo A um evento de Ω, então a probabilidade de ocorrência de A é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \ , \quad \text{com } 0 \leq P(A) \leq 1,$$

Onde:

n(A) é o número de elementos do evento A

n(Ω) é o número de elementos do espaço amostral Ω

Exemplo:

Qual a probabilidade de sair pelo menos uma cara em dois lançamentos consecutivos de uma moeda não viciada?

Solução:

cara = k e coroa = c

$\Omega = \{k_1k_2, k_1c_2, c_1k_2, c_1c_2\}$

A = "sair pelo menos uma cara"

$A = \{k_1k_2, k_1c_2, c_1k_2\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4} = 75\%$$

3) Definição Axiomática da Probabilidade

Considere os eventos A e B associados ao espaço amostral Ω.

1º) $0 \leq P(A) \leq 1$

2º) $P(\Omega) = 1$

3º) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Teoremas da Probabilidade

1º) Se ϕ é um conjunto vazio, então $P(\phi) = 0$.

Demonstração:

Tem-se: $\phi \cup \Omega = \Omega$

Como $\phi \cap \Omega = \phi$, então ϕ e Ω são mutuamente excludentes.

Aplicando o 3º axioma:

$$P(\phi \cup \Omega) = P(\phi) + P(\Omega) = P(\Omega)$$

$$P(\phi) = 0$$

Exemplo:

A probabilidade de ocorrer face 2 e 3 no lançamento de um dado não viciado é $P(\phi) = 0$, enquanto que a probabilidade de ocorrer face 2 ou 3 é $1/6 + 1/6 = 1/3$.

2º) Se A^c é o evento complementar do evento A, então $P(A^c) = 1 – P(A)$.

Demonstração:

$A^c \cup A = \Omega$

$P(A^c \cup A) = P(\Omega)$

$A^c \cap A = \phi$, então A^c e A são mutuamente excludentes.

Aplicando o 3º axioma:

$P(A^c) + P(A) = P(\Omega)$

$P(A^c) = P(\Omega) – P(A)$

$P(A^c) = 1 – P(A)$

Exemplo:

Uma urna contém 4 bolas verdes, 3 bolas brancas e 8 bolas amarelas. Uma bola é retirada aleatoriamente. Determinar a probabilidade de que a bola retirada:

a) Não ser amarela

b) Não ser verde e nem amarela

Solução: V = "a bola retirada é verde" P(V) = 4/15 = 26,67%

B = "a bola retirada é branca" P(B) = 3/15 = 20,00%

A = "a bola retirada é amarela" P(A) = 8/15 = 53,33%

a) A^c = "a bola retirada não é amarela"

$P(A^c) = 1 – P(A) = 1 – 8/15 = 7/15 = 46{,}67\% = P(V \cup B)$

b) $V^c \cap A^c$ = "a bola retirada não é verde e nem amarela"

Da lei de Morgan: $V^c \cap A^c = (V \cup A)^c$

$P[(V \cup A)^c] = 1 – P(V \cup A)$. Como V e A são mutuamente excludente:

$P[(V \cup A)^c] = 1 – [P(V) + P(A)] = 1 – 4/15 – 8/15 = 3/15 = 20{,}00\% = P(B)$

3º) Teorema da Soma

Se A e B são dois eventos quaisquer, ou seja, podem ser mutuamente excludentes ou não, então:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demonstração:

Se $A \cap B \neq \phi$, então A e $(A^c \cap B)$ são mutuamente excludentes e $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$, logo:

$P[(A \cup (A^c \cap B)] = P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$ (1)

Considerando que B é a união dos eventos mutuamente excludentes $(B \cap A)$ e $(B \cap A^c)$, então:

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$

$P(B \cap A^c) = P(B) - P(B \cap A)$ (2)

Substituindo (2) em (1), tem-se:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemplo:

Dois dados não viciados foram lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de ocorrer pelo menos uma face 5.

Solução: A = "ocorrer face 5 no dado 1"
B = "ocorrer face 5 no dado 2"
A U B = "ocorrer pelo menos uma face 5"

Dado 1	Dado 2					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	**(1,5)**	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	**(2,5)**	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	**(3,5)**	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	**(4,5)**	(4,6)
5	**(5,1)**	**(5,2)**	**(5,3)**	**(5,4)**	**(5,5)**	**(5,6)**
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	**(6,5)**	(6,6)

$n(\Omega) = 36$

$n(A) = 6$

$n(B) = 6$

$n(A \cap B) = 1$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 6/36 + 6/36 - 1/36 = 11/36 = 30{,}56\%$

4º) Se A, B e C são eventos quaisquer, ou seja, podem ser mutuamente excludentes ou não, então:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

5º) Se A - B é a diferença entre os eventos quaisquer A e B, então, $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Demonstração:

$A = (A – B) \cup (A \cap B)$

Como $(A – B)$ e $(A \cap B)$ são mutuamente excludentes, então aplicando o 3º axioma:

$P(A) = P[(A – B) \cup (A \cap B)] = P(A – B) + P(A \cap B)$. Logo:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Exemplo:

Prove que $P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] = P(A) + P(B) - 2.P(A \cap B)$

Solução:

$A \cap B^c = A - B$ e $A^c \cap B = B - A$

Como $A \cap B^c$ e $A^c \cap B$ são mutuamente excludentes:

$P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$

Sabe-se que: $P(A \cap B^c) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ e

$P(A^c \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$

sendo $A \cap B = B \cap A$

Então: $P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] = P(A) + P(B) - 2.P(A \cap B)$

Considere o experimento aleatório E = “um dado honesto é lançado e a face é observada” e os eventos A = “ocorre face 3” e B = “ocorre face ímpar”

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{3\}$

$B = \{1, 3, 5\}$

- Qual a probabilidade do evento A ocorreu?

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

- Qual a probabilidade do evento B ocorreu?

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- Qual a probabilidade do evento A ocorrer sabendo que o evento B já ocorreu?

$$P(A/B) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

Probabilidade Condicional

Definição:

Sejam A e B dois eventos quaisquer de uma espaço amostral Ω, com P(B) > 0. A probabilidade de A ocorrer, na hipótese de B já ter ocorrido, denotado por P(A/B), é dada por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

No exemplo anterior:

E = “um dado honesto é lançado e a face é observada”

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = “ocorre face 3” = {3}

B = “ocorre face ímpar” = {1, 3, 5}

A ∩ B = {3}

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Regra do Produto

Da probabilidade condicional tem-se:

$P(A \cap B) = P(A/B).P(B)$

Dois eventos A e B são ditos independentes se a probabilidade de ocorrência de um evento não interfere na probabilidade de ocorrência do outro evento, ou seja:

- $P(A/B) = P(A)$
- $P(B/A) = P(B)$

Logo: $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A).P(B)$

Exemplos:

1) Num lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Duas peças são retiradas, uma a uma sem reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam não defeituosas?

   Solução:

   A = "primeira peça é não defeituosa" => P(A) = 8/12

   B = "segunda peça é não defeituosa" => P(B/A) = 7/11

   $P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = 8/12.7/11 = 14/33 = 42,42\%$

   Ou, utilizando a definição clássica de probabilidade:

   N = "duas peças retiradas são não defeituosas"

$$n(\Omega) = C_{12}^{2} = \frac{12!}{(12-2)!2!} = 66 \qquad n(N) = C_{8}^{2} = \frac{8!}{(8-2)!2!} = 28$$

$$P(A \cap B) = \frac{C_{8}^{2}}{C_{12}^{2}} = \frac{28}{66} = 42,42\%$$

Exemplos:

2) Considere no exemplo anterior que os eventos A e B são independentes, ou seja, existe reposição da primeira peça após verificar se é ou não defeituosa.

   Solução:

   A = “primeira peça é não defeituosa” => P(A) = 8/12

   B = “segunda peça é não defeituosa” => P(B) = 8/12

   $P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = 8/12.8/12 = 4/9 = 44,44\%$

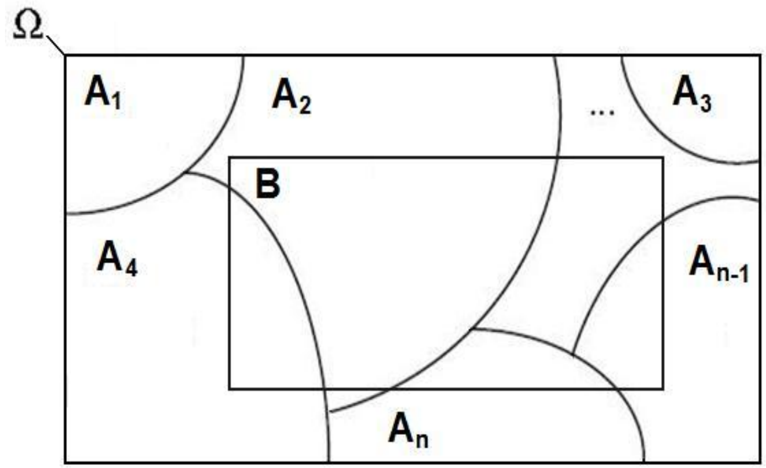
   Ou, utilizando a definição clássica de probabilidade:

   N = “duas peças retiradas com reposição são não defeituosas”

$$n(\Omega) = 12.12 = 144 \qquad n(N) = 8.8 = 64$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(N)}{n(\Omega)} = \frac{64}{144} = 44,44\%$$

Teorema da Probabilidade Total



Definição:

Considere A_1, A_2, A_3 ... A_n uma partição do espaço amostral Ω e B um evento qualquer de Ω. A probabilidade do evento B ocorrer é dada por:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

Tem-se: $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)]$$

Aplicando o 3º axioma para eventos mutuamente excludentes:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

Aplicando a regra do produto:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \ldots + P(A_n).P(B/A_n)$$

Em aplicações prática, as probabilidades dos eventos da partição de Ω são conhecidas ou podem ser calculadas, por isso, $P(A_i)$ são chamadas de probabilidades *à priori* dos eventos A_i.

Teorema da Probabilidade Total

Exemplo: **(MAGALHÃES e LIMA, 2010, pag. 58)**

Um fabricante de sorvete recebe 20% do todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de uma fazenda F_2 e 50% de uma fazenda F_3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas e observou que 20% do leite produzido na fazenda F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente. Na fábrica de sorvete os leites são armazenados dentro de um refrigerador sem identificação das fazendas. Qual a probabilidade de que uma amostra de leite retirada do refrigerador esteja adulterada?

Solução:

Denotando por B = “o leite está adulterado”, deseja-se então P(B).

A probabilidade de que o leite (**adulterado ou não**) é procedente da fazenda:

- F_1: $P(F_1) = 0{,}20$
- F_2: $P(F_2) = 0{,}30$
- F_3: $P(F_3) = 0{,}50$

A probabilidade de que o leite **está adulterado** e que é procedente da fazenda:

- F_1: $P(B/F_1) = 0{,}20$
- F_2: $P(B/F_2) = 0{,}05$
- F_3: $P(B/F_3) = 0{,}02$

Logo: $P(B) = P(F_1).P(B/F_1) + P(F_2).P(B/F_2) + P(F_3).P(B/F_3)$

$P(B) = 0{,}20.0{,}20 + 0{,}30.0{,}05 + 0{,}50.0{,}02 = 0{,}065 = 6{,}5\%$

Definição:

Considere A_1, A_2, A_3 ... A_n uma partição do espaço amostral Ω e B um evento qualquer de Ω.

Do teorema da probabilidade total tem-se: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$

Onde $P(A_i)$ são as probabilidade *à priori* dos eventos A_i.

Vamos supor agora que o evento B tenha ocorrido e desejamos determinar a probabilidade *à posteriori* do evento A_i, ou seja, $P(A_i/B)$.

Por definição, tem-se: $P(A_i/B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$

Aplicando a regra do produto e o teorema da probabilidade total:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)}$$

Exemplo 1:

Considerando o exemplo anterior do fabricante de sorvete, sabendo que a amostra está adulterada, determinar a probabilidade de que o leite tenha sido fornecido pela fazenda F_2.

Solução:

Deseja-se então $P(F_2/B)$.

Por definição:

$$P(F_2/B) = \frac{P(F_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(F_2).P(B/F_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(F_i).P(B/F_i)}$$

$$P(F_2/B) = \frac{0{,}30.0{,}05}{0{,}065} = 0{,}2308 = 23{,}08\%$$

Exemplo 2:

Determinadas peças são produzidas em três fábricas F_1, F_2, e F_3, sendo que a fábrica 1 e 2 produzem a mesma proporção de peças e a fábrica 3 produz o dobro das peças que cada uma das outras duas fábricas produzem. Sabe-se também, que 2% das peças produzidas pela fábrica 1 são defeituosas e que a proporção para as fábricas 2 e 3 são 3% e 4%, respectivamente. Qual a probabilidade de que uma peça defeituosa tenha origem da fábrica 2?

Solução:

Sendo x a proporção de peças produzidas pelas fábricas 1 e 2, tem-se: $x + x + 2x = 1$. Logo $x = 25\%$. Denotando por A = “a peça é defeituosa”, deseja-se então $P(F_2/A)$.

A probabilidade de que a peça (defeituosa ou não) é de procedência da fábrica:

F_1: $P(F_1) = 0{,}25$; F_2: $P(F_2) = 0{,}25$; F_3: $P(F_3) = 0{,}50$

A probabilidade de que a peça é defeituosa e de procedência da fábrica:

F_1: $P(A/F_1) = 0{,}02$; F_2: $P(A/F_2) = 0{,}03$; F_3: $P(A/F_3) = 0{,}04$

Logo: $P(A) = P(F_1).P(A/F_1) + P(F_2).P(A/F_2) + P(F_3).P(A/F_3) = 0{,}0325 = 3{,}25\%$

Portantο:
$$P(F_2/A) = \frac{P(F_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(F_2).P(A/F_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i).P(A/F_i)} = \frac{0{,}25.0{,}03}{0{,}0325} = 23{,}08\%$$