UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Campus Russas

RUS0300-Algoritmos em Grafos
Aula 04: Cobertura de Vértices/Emparelhamento

Professor Pablo Soares

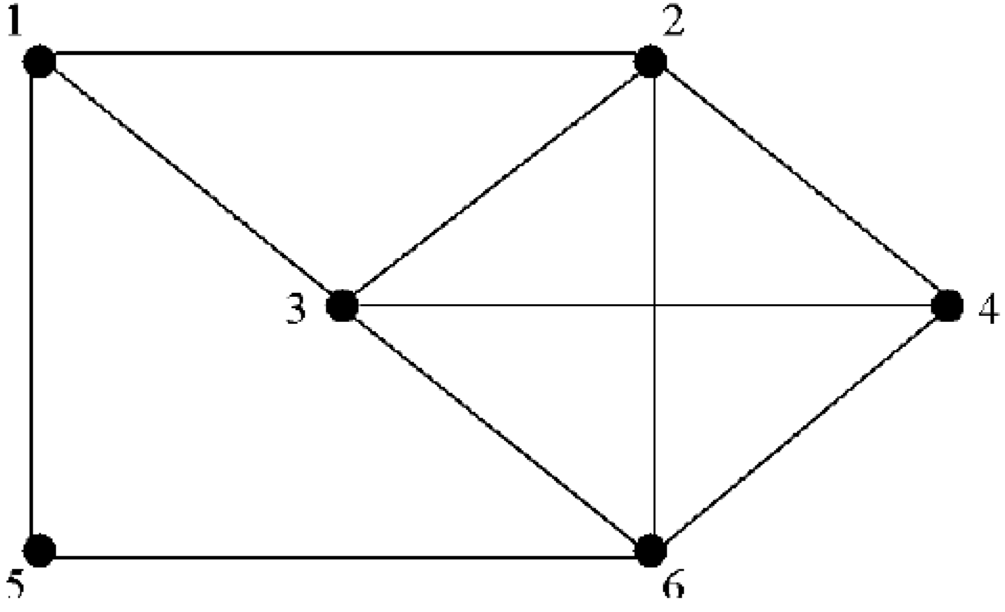
"Quem não luta pelo futuro que quer, tem que aceitar o futuro que vier"

Sumário

- Relacionamento *V*-*E*
  - Clique
    - Grafo
    - Dígrafo
  - Conjuntos Independentes
    - Grafo k-partido
- Cobertura de Vértices
- Conjunto Dominante
- Emparelhamento

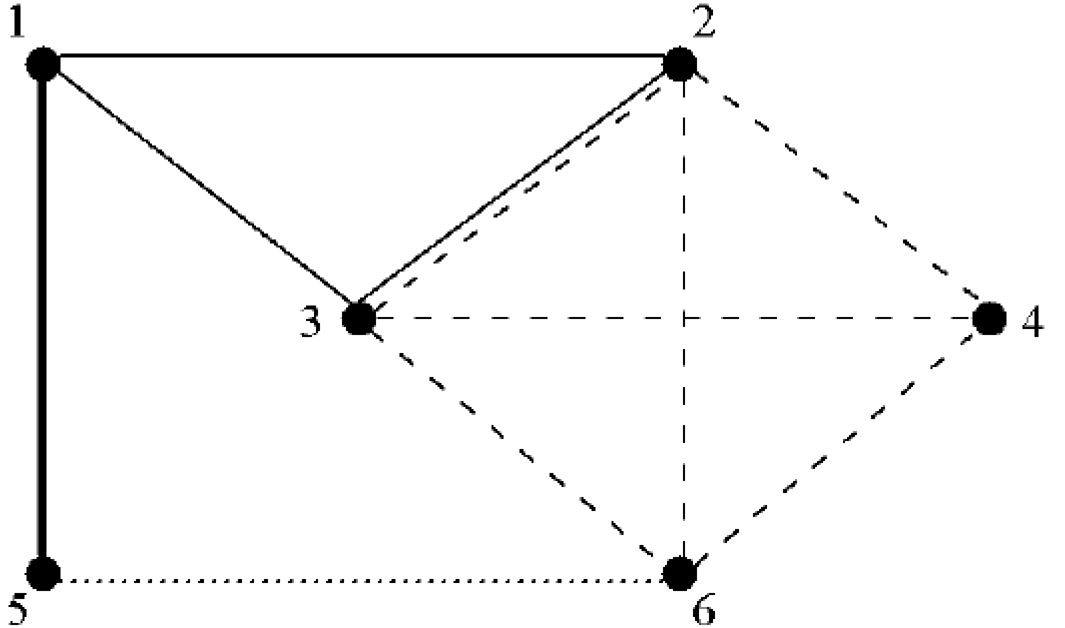
Clique

- Relacionamento vértice-vértice
- Subgrafo completo de um grafo *G*
  - Todos os vértices da clique são adjacentes entre si
  - Maximal & Máximo



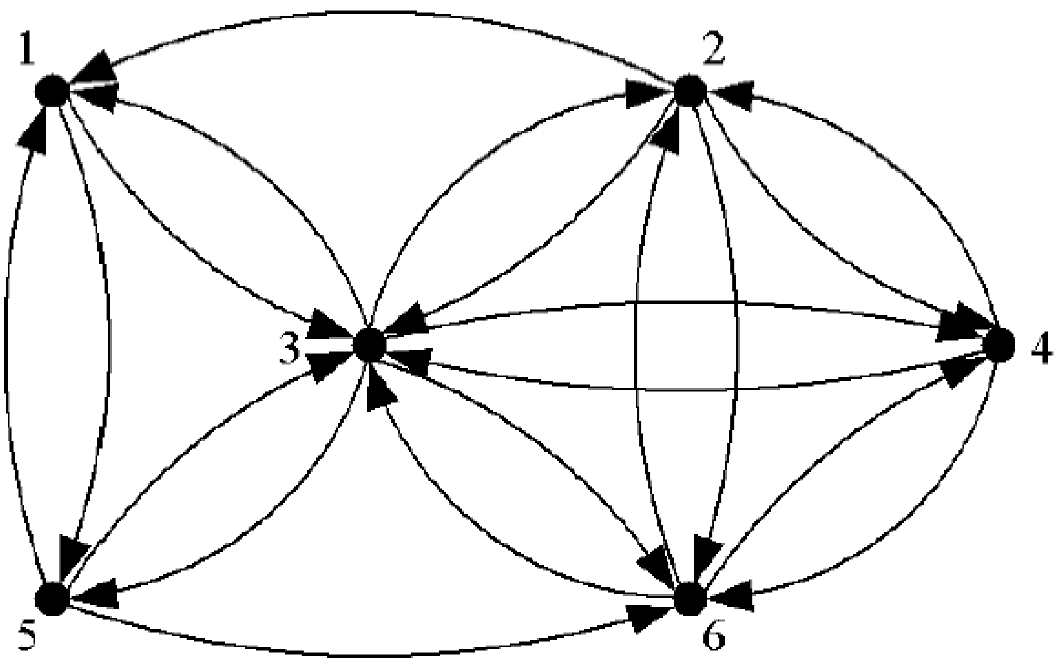
Clique

- {1, 5}, {5, 6}, {1, 2, 3} e {2, 3, 4, 6}
- {2, 3, 6} é uma clique, **mas não é maximal**
- {2, 3, 4, 6} é <u>maximal</u> e <u>máximo</u>
  - Obs: uma aresta é uma clique
  - Então... toda aresta é clique?



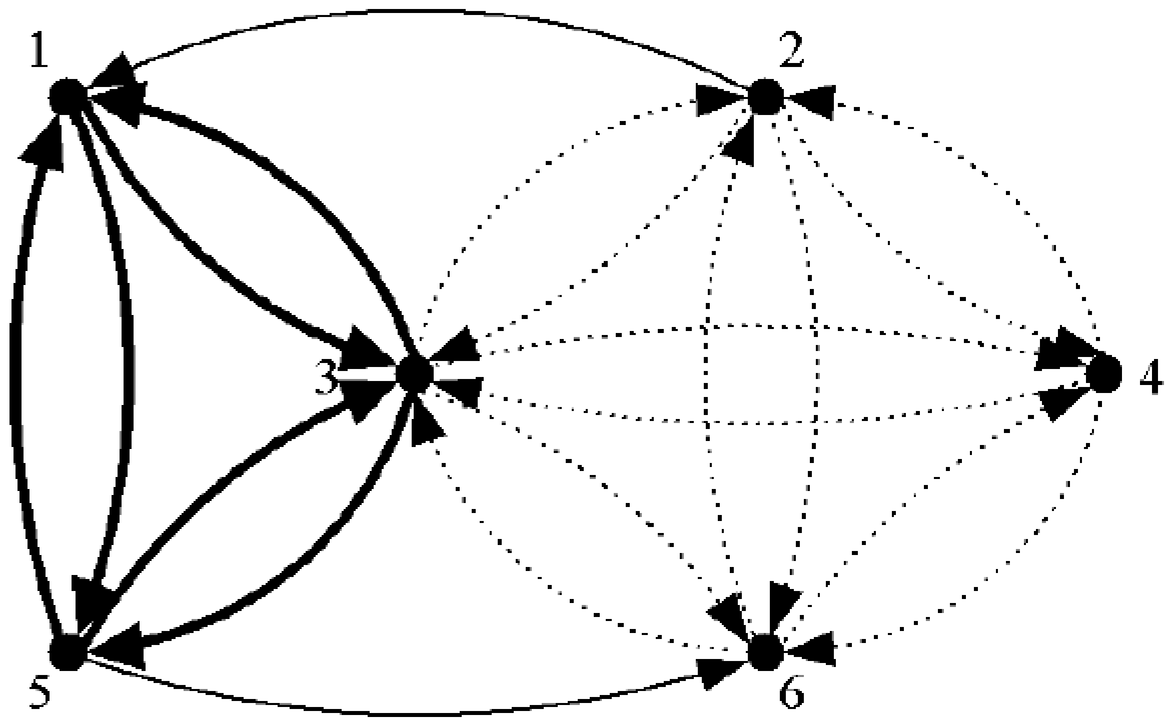
Clique

- Relacionamento vértice-vértice
- Subdígrafo <u>completo</u> de um dígrafo *D*
  - Para cada par de vértices *u* e *v*
    - (*u*, *v*) *e* (*v*, *u*)



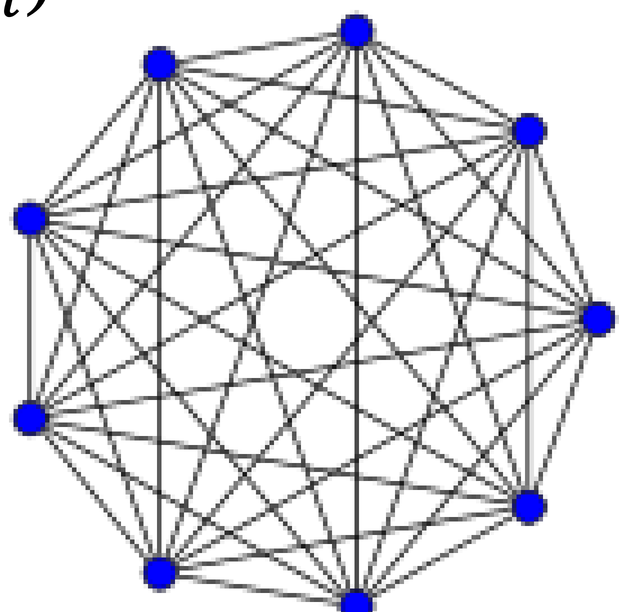
Clique

- {1, 3, 5} e {2, 3, 4, 6}
  - Obs: tamanhos 3 e 4
  - Apenas um arco não forma clique {5, 6} e {2, 1}



Clique

- O grafo pode possuir várias cliques
- O maior clique em G
  - Clique máximo e define o *número de clique* de G
  - $\omega(G) = r$, onde r é o maior inteiro tal que $K_r \subseteq G$
    - Logo, $\omega(K_n) = n$



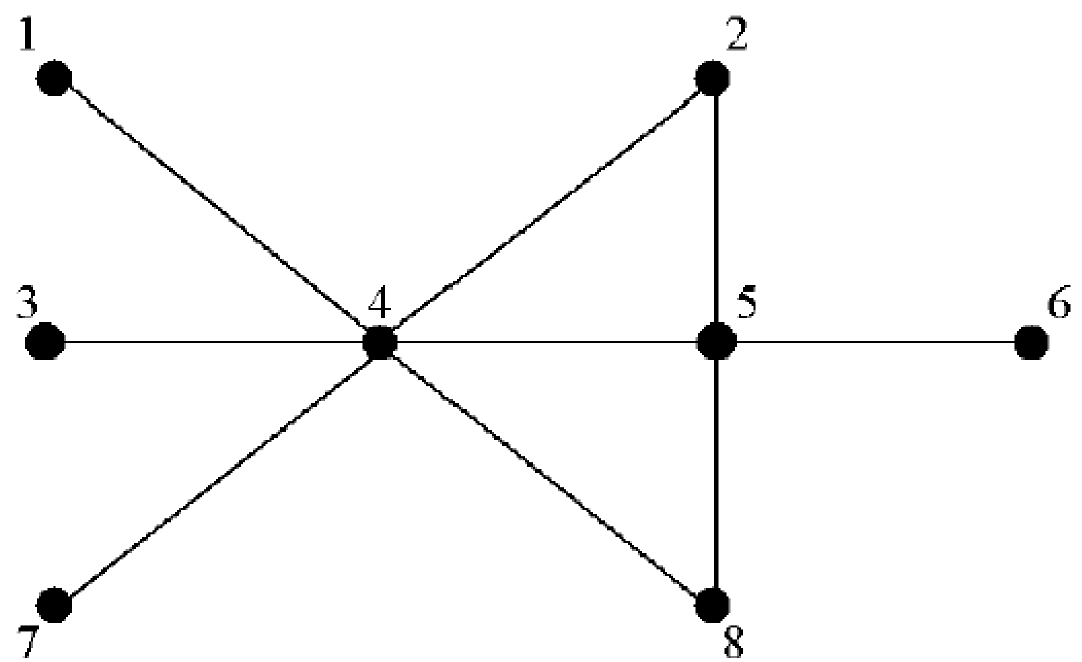
Conjunto Independente

Relacionamento vértice-vértice

- Conjunto de vértices que não são adjacentes entre si
  - Associado aos subgrafos totalmente desconexos
  - Oposto ao clique
- Um (dí)grafo *G* pode possuir vários conjuntos independentes
  - Tamanhos diferentes → Cardinalidade do conjunto
- **O maior**
  - *Conjunto independente máximo*
    - *Número de independência* $\alpha(G) = r$, onde r é o maior inteiro tal que $\overline{K}_r \subseteq G$
    - $\alpha(K_n) = 1$
    - $\alpha(\overline{K}_n) = n$
    - $\omega(K_n) = n$
    - $\omega(\overline{K}_n) = 1$

Conjunto Independente

- {1, 2, 3, 6, 7, 8}, {1, 3, 5, 7} e {4, 6}
- {1, 3, 7} é um conjunto independente, **mas não é maximal**
- $\alpha(G) = 6$



Clique-Conjunto Independente

- Existe uma relação íntima entre conjuntos independentes e cliques
- **Clique**
  - Subgrafo completo, que no complemento se torna um subgrafo totalmente desconexo, i.e...
  - **Conjunto independente**
- A presença de vários conjuntos independentes
  - *grafo k-partido*

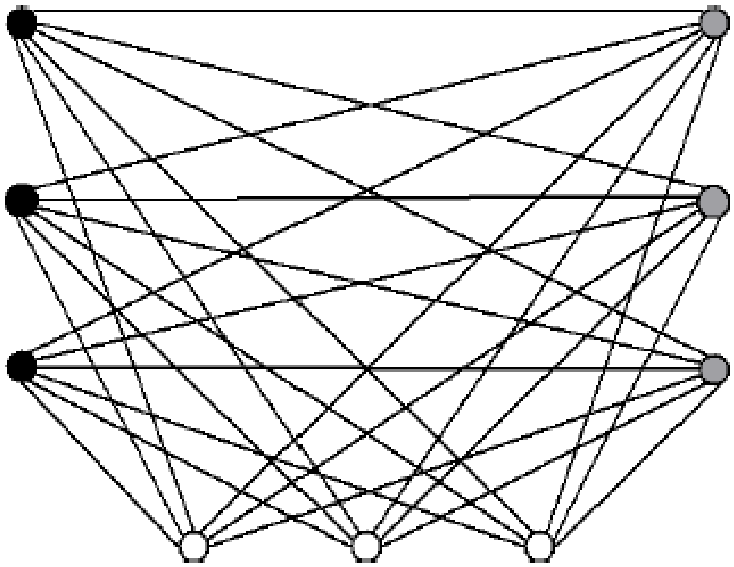
Grafo *k*-partido

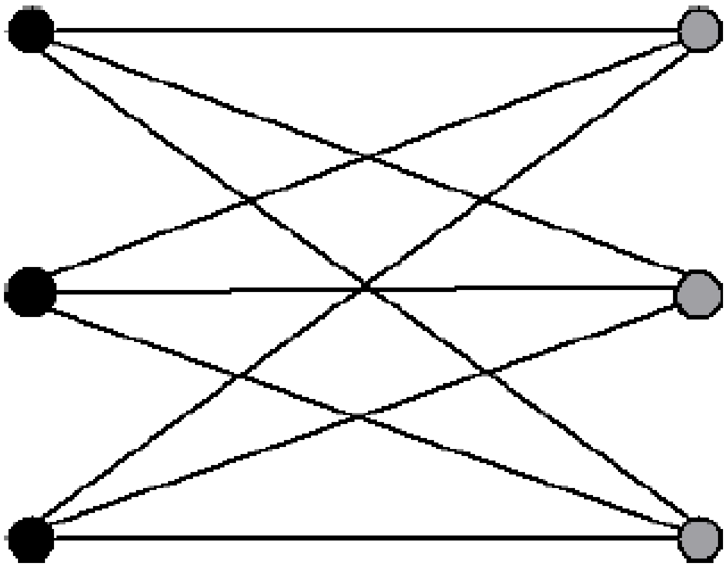
for possível particionar o conjunto de vértices em k conjuntos não vazios $V_1, V_2, \ldots, V_k$, de forma que eles sejam disjuntos dois a dois, i.e., $V_i \cap V_j = \emptyset$, para $i \neq j$, e a união dos elementos destes conjuntos seja o conjunto de vértices original, ou seja, $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k = V$.

cada aresta $a \in A$, tem extremidades em conjuntos distintos, i.e., se $a = \{v, u\}$, então $v \in V_i$ e $u \in V_j$, onde $i \neq j$, ou seja, os vértices de cada conjunto não são adjacentes entre si.

k é o menor inteiro que ainda garante os critérios anteriores, caso contrário qualquer grafo com n vértices seria um grafo n partido.

Grafo *k*-partido



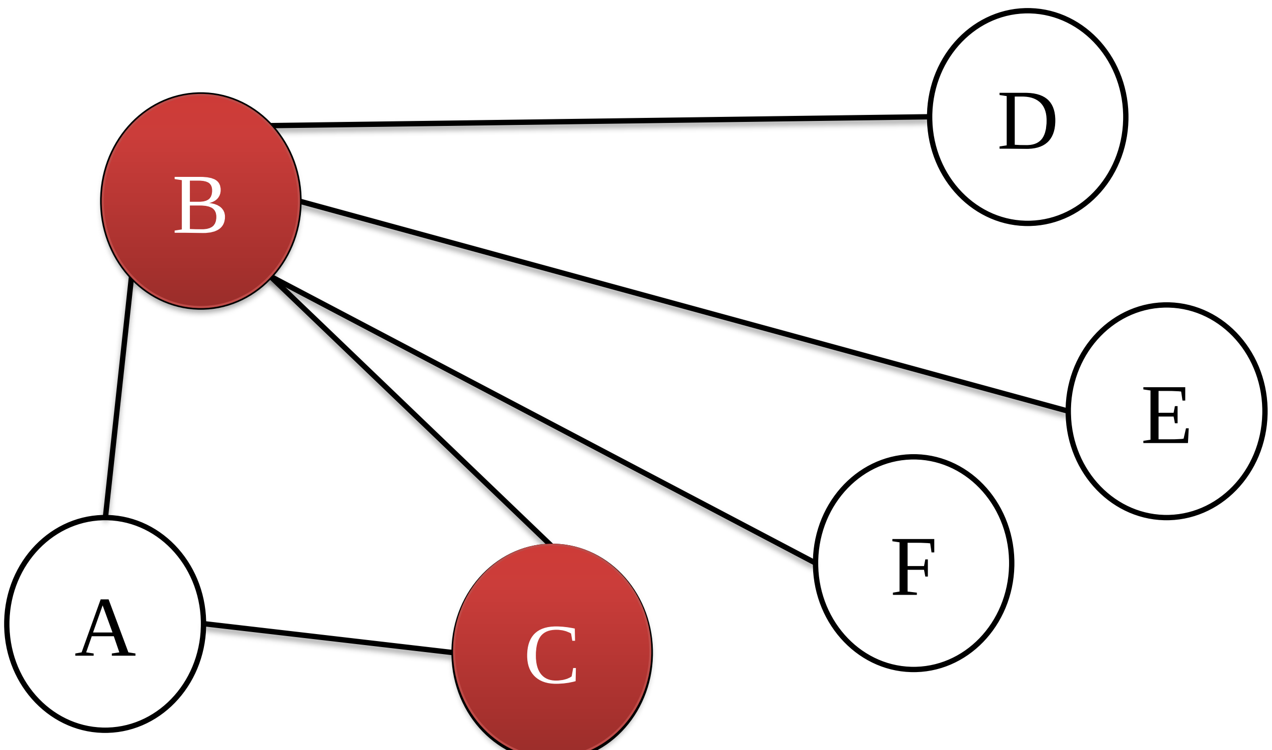


Cobertura de Vértices

- Relacionamento vértice-aresta
- Vértice cobre uma aresta
  - Se for ponto extremo
- Dado um grafo $G = (V, E)$
  - V cobre todas as arestas
  - O interessante é... Qual o menor conjunto de vértices que cobre todas as arestas?
- É um subconjunto S dos vértices de G, $S \subseteq V$, que cobrem todas as arestas de V, ou seja, todas as arestas são incidentes a pelo menos um vértices de S

Cobertura de Vértices

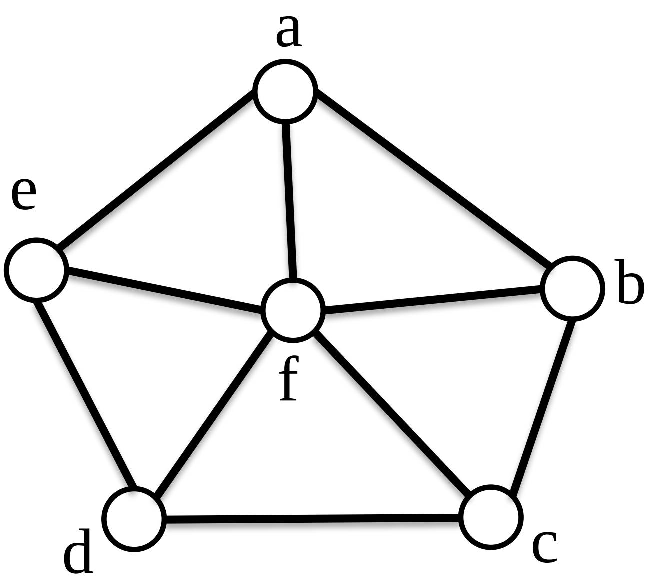
- *Cobertura mínima de vértices*[**minimal** e **mínimo**]
  - *número de cobertura de vértices*, $\beta(G)$
- Relação direta entre **cobertura de vértices** e **conjunto independentes**



Cobertura de Vértices

- **Teorema:** Dado um grafo $G = (V, E)$, um conjunto $S \subseteq V$ é um conjunto independente maximal de G se e somente se $V - S$ é uma cobertura minimal de vértices.
- **Corolário:** Dado um grafo $G = (V, E)$,

$$\beta(G) = |V| - \alpha(G)$$



conjuntos independentes

I = {f}

II = {b, e}

Cobertura de Vértices

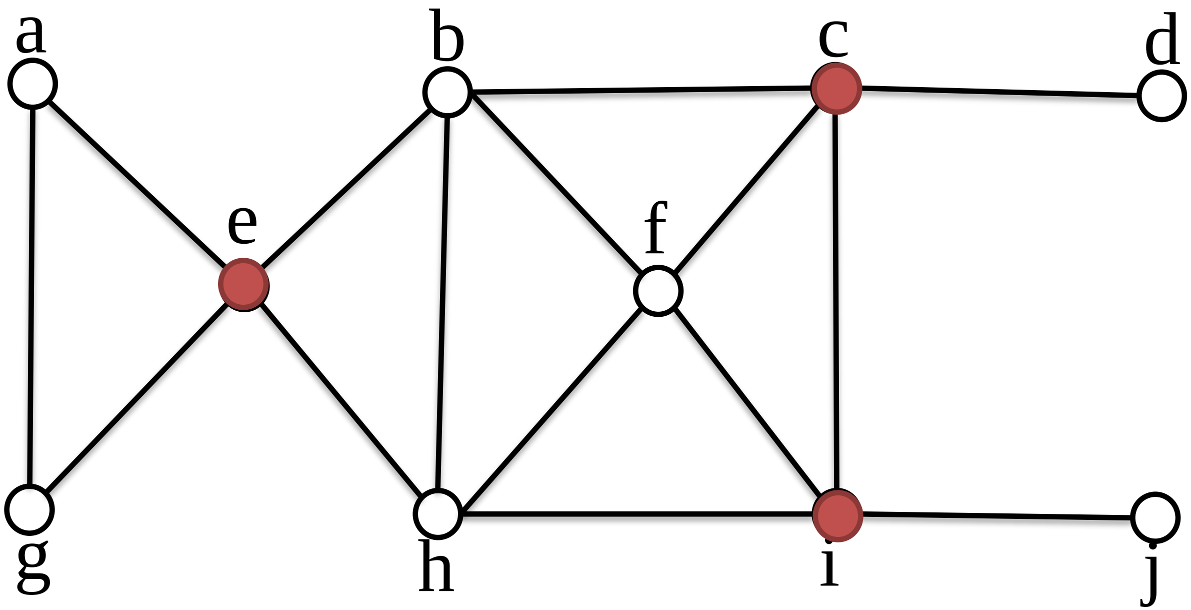
- **Aplicações**

Conjunto Dominante

- Relacionamento vértice-vértice
- Subconjunto de vértices que <u>*cobrem*</u> (<u>*dominam*</u>) todos os outros vértices que não participam do conjunto
  - Dominância é definida pela adjacência entre os vértices
    - Qualquer vértices v de G
      - Domina a si próprio e seus vizinhos[$N(v)$]
- Dado um grafo $G = (V, E)$, um conjunto $S \subseteq V$ é um conjunto dominante, tal que todo $v \in V - S$ *é dominado por pelo menos um vértice em S*
  - $N(v) \cap S \neq \phi, \forall v \in (V - S)$

Conjunto Dominante

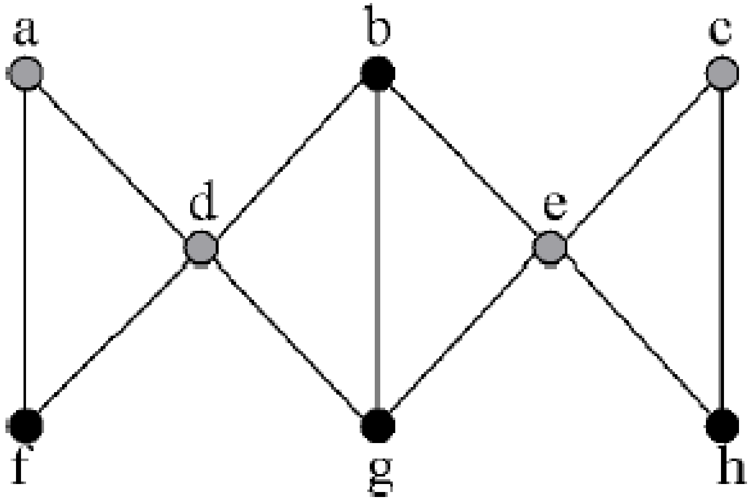
- O tamanho do <u>menor</u> conjunto
  - *Número de dominância* $\rightarrow \gamma(G)$

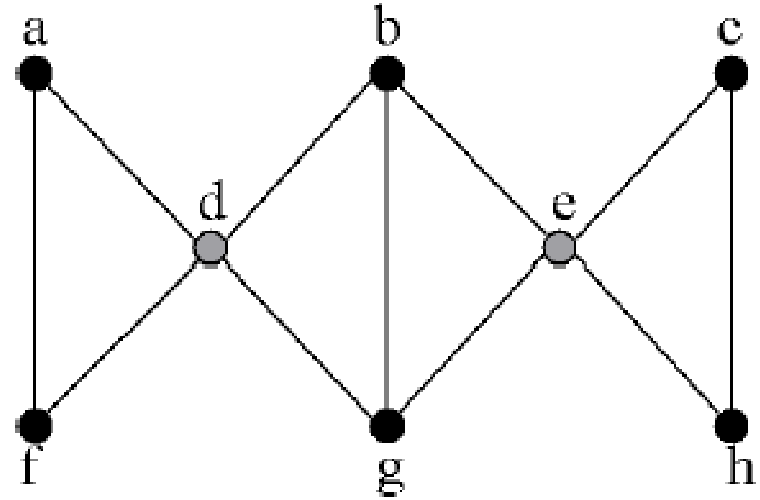


  - S ={e, c, i} e $V - S$ ={a, b, d, f, g, h, j}
  - Arestas não cobertas {a, g} e {b, h}

Conjunto Dominante

- Relação: para qualquer G que não possua vértice isolado
  - $\gamma(G) \leq \beta(G)$
- Grafo <u>estrela</u> $\gamma = \beta$
- Grafo completo
  - $\gamma(K_n) = 1$
  - $\beta(K_n) = n - 1$

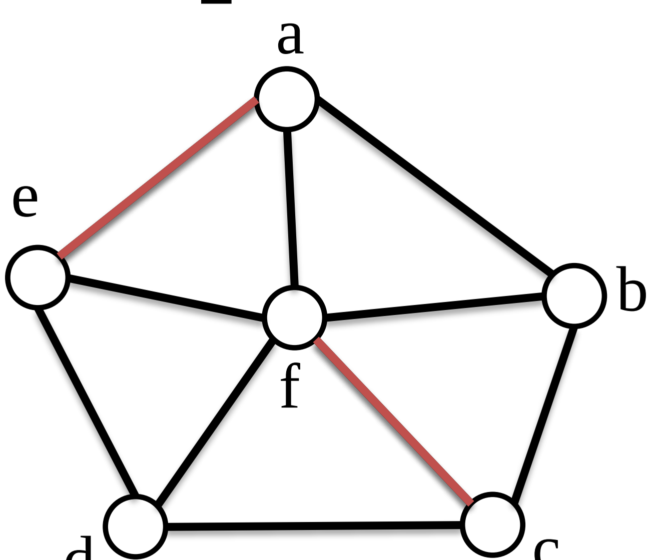


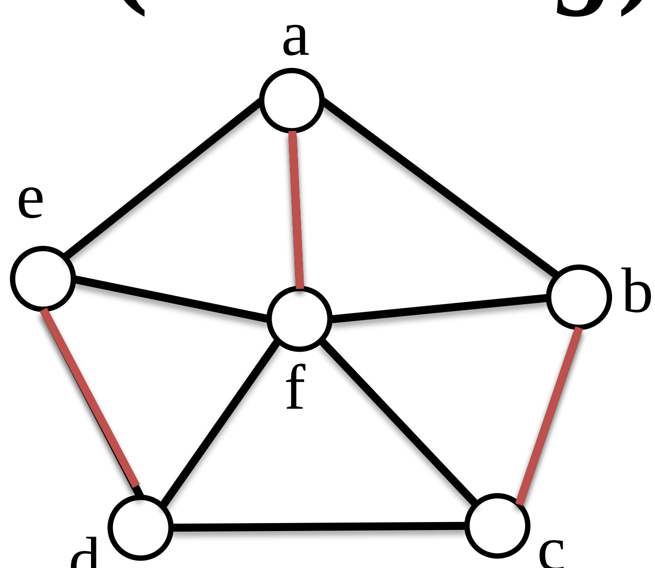


Emparelhamento(*Matching*)

- Relacionamento aresta-aresta
- É um subconjunto de arestas, $M \subseteq E$, que não correspondem a laços e não compartilham vértices entre si
  - Encontrar o maior conjunto de arestas não adjacentes entre si (Maximal e Máximo)
  - Tamanho do maior $|M|$: $\alpha'(G)$
  - Dizemos que $v \in V$ é saturado quando uma aresta de M incide em v
  - *Emparelhamento perfeito*
    - Satura todos os vértices do grafo

Emparelhamento(*Matching*)





- Como saber se o emparelhamento é máximo?
  - Se for perfeito já era....
  - Caminho de aumento (extremidades não saturadas)
    - Caminho alternante
- Teorema: (Berge, 1957). Um <u>emparelhamento</u> *M* em um grafo G é máximo se e somente se *M* não possui caminhos de aumento.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Campus Russas

RUS0300-Algoritmos em Grafos
Aula 04: Cobertura de Vértices/Emparelhamento

Professor Pablo Soares

2019.1

"Quem não luta pelo futuro que quer, tem que aceitar o futuro que vier"