

Lógica

aula 14: Raciocinando com regras

Lembre que, no final da aula passada, Ubiratan chegou às seguintes regras, que refletiam ideias que estavam por trás dos seus raciocínios:

R1: $X \rightarrow X ?$: "Sim, claro!"

- i.e., colocando uma mesma pergunta qualquer no lado esquerdo e no lado direito, nós sempre obtemos uma pergunta que tem a resposta "Sim, claro!"

R2: $X \rightarrow V ?$: "Sim, claro!"

- i.e., colocando uma pergunta "Sim, claro!" no lado direito, e uma pergunta qualquer no lado esquerdo, nós sempre obtemos uma pergunta que tem a resposta "Sim, claro!"

R3: $V \rightarrow X ? \equiv X ?$

- i.e., colocando uma pergunta "Sim, claro!" no lado esquerdo, e uma pergunta qualquer no lado direito, nós sempre obtemos uma pergunta que é a mesma coisa que a pergunta qualquer

Então, quando ele viu as regras assim tão arrumadinhas no papel, Ubiratan pensou assim.

1. *Eu acho que eu estou tendo uma intuição ...*

Quer dizer, essas regras todas aí que eu encontrei, servem para montar perguntas.

E desse jeito eu posso até montar perguntas bem complicadas.

Por exemplo, usando a regra R1, eu consigo montar a pergunta

$$((F \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F) ?$$

que eu já sei que tem a resposta "Sim, claro!".

E, usando a regra R2, eu posso montar a pergunta

$$F \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow F)) ?$$

que eu também já sei que tem a resposta "Sim, claro!".

E, usando a regra R3, eu posso montar a pergunta

$$(F \rightarrow F) \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F) ?$$

que eu já sei que é a mesma coisa que

$$(F \rightarrow F) \rightarrow F ?$$

que eu também já sei que é a mesma coisa que

$$F ?$$

que eu sei que tem resposta “Sei lá!”.

Há, há, essa foi engraçada.

2. *Mas, a minha intuição ainda não é essa ...*

A minha intuição é que eu posso pensar ao contrário.

Quer dizer, eu posso pensar que uma pergunta bem complicada pode ter sido montada com as regras R1, R2, R3.

E, se eu descobrir um jeito de montar essa pergunta com as regras, então eu já vou saber qual é a resposta da pergunta.

Legal!

Mas, então, eu posso pensar ao contrário de novo.

Quer dizer, eu posso pensar que ao invés de montar eu posso desmontar a pergunta ...

Isto é, desmontando a pergunta aos poucos, eu também posso descobrir as regras que podem ter sido utilizadas para montá-la.

E daí, eu vou descobrir também a resposta da pergunta.

Isso seria, como se fosse, uma demonstração por desmontação.

Deixa eu ver como isso funciona ...

3. *Eu posso começar com essa pergunta aqui*

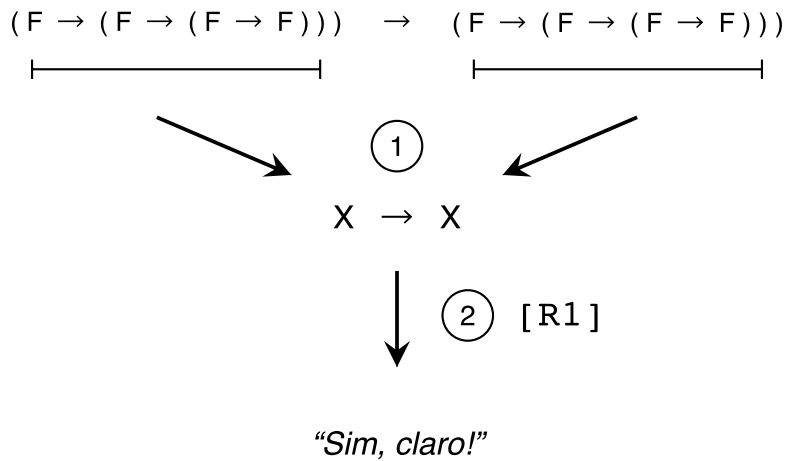
$$(F \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F))) \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F))) ?$$

E daí eu posso pensar assim:

(1) *Apesar do tamanho todo dessa pergunta, basta uma olhadinha rápida para ver que o lado esquerdo é igual ao lado direito.*

(2) *Mas, então, a regra R1 me diz que a sua resposta deve ser “Sim, claro!”.*

Depois que Ubiratan fez esse raciocínio, ele pegou um pedaço de papel, desenhou o seguinte esquema e pensou “*Hmm ...*”



E daí ele continuou.

4. *Deixa eu ver o que eu consigo fazer com essa pergunta aqui*

$$(F \rightarrow F) \rightarrow \left(((F \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F) \right)$$

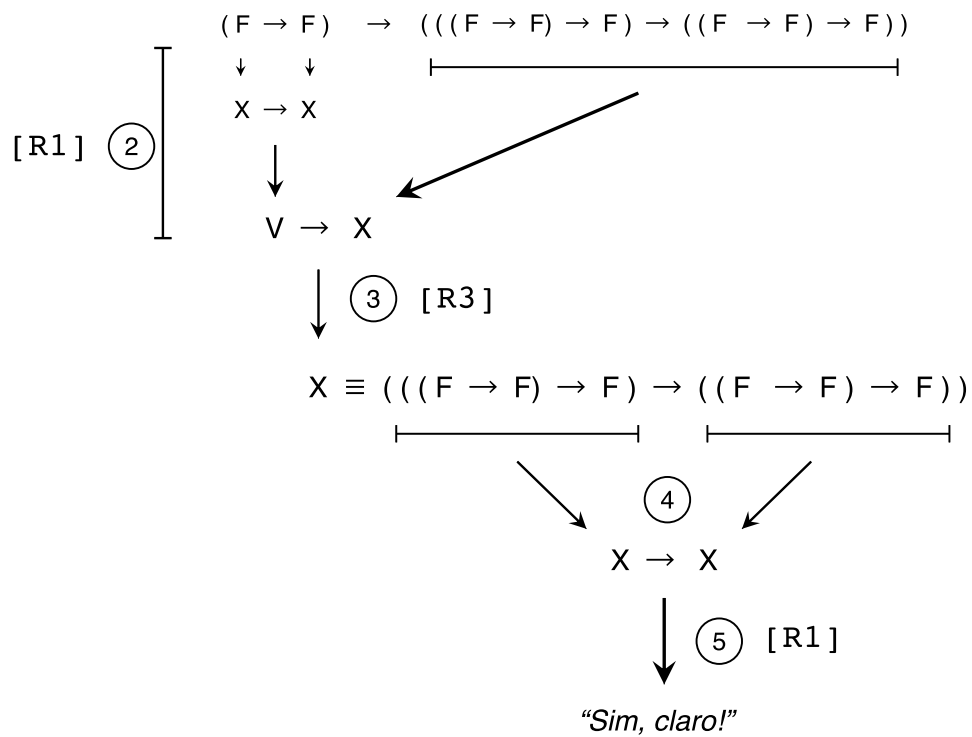
- (1) *Dessa vez, eu não consigo aplicar a regra R1.*
- (2) *Mas, olhando para o lado esquerdo, nós observamos que isso é uma pergunta bem conhecida, com a resposta "Sim, claro!"*
- (3) *Logo, a regra R3 me diz que essa pergunta é basicamente a mesma coisa que o seu lado direito*

$$((F \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F)$$

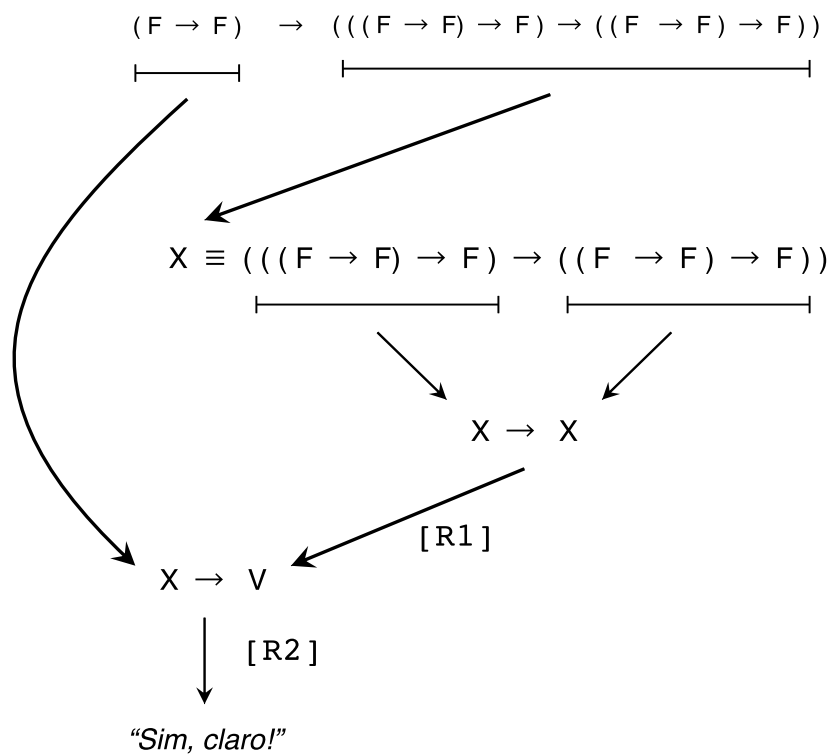
- (4) *Mas, olhando para isso, eu vejo imediatamente que os dois lados da pergunta são iguais.*
- (5) *Logo, a regra R1 me diz que a sua resposta é "Sim, claro!"*

Quando Ubiratan terminou o raciocínio e examinou o que tinha feito, ele percebeu que no passo (2) do argumento havia uma aplicação da regra R1 escondida.

Então, ele desenhou o esquema do raciocínio assim:



Após construir o esquema e observar o que estava acontecendo do lado direito, Ubiratan descobriu que havia uma outra maneira de chegar na resposta.



E quando ele viu isso, ele escreveu um outro argumento.

5. Então, eu também posso raciocinar assim

- (1) Deixa eu ignorar por um momento o lado esquerdo da pergunta, e me concentrar no lado direito.
- (2) Examinando o lado direito da pergunta, eu consigo ver rapidamente que os dois lados são iguais.
- (3) Logo, pela regra R1, o lado direito é V (i.e., tem a resposta “Sim, claro!”).
- (4) Mas, se isso é o caso, então a pergunta inteira tem a forma

$$X \rightarrow V?$$

- (5) Logo, pela regra R2, a resposta da nossa pergunta é “Sim, claro!”.

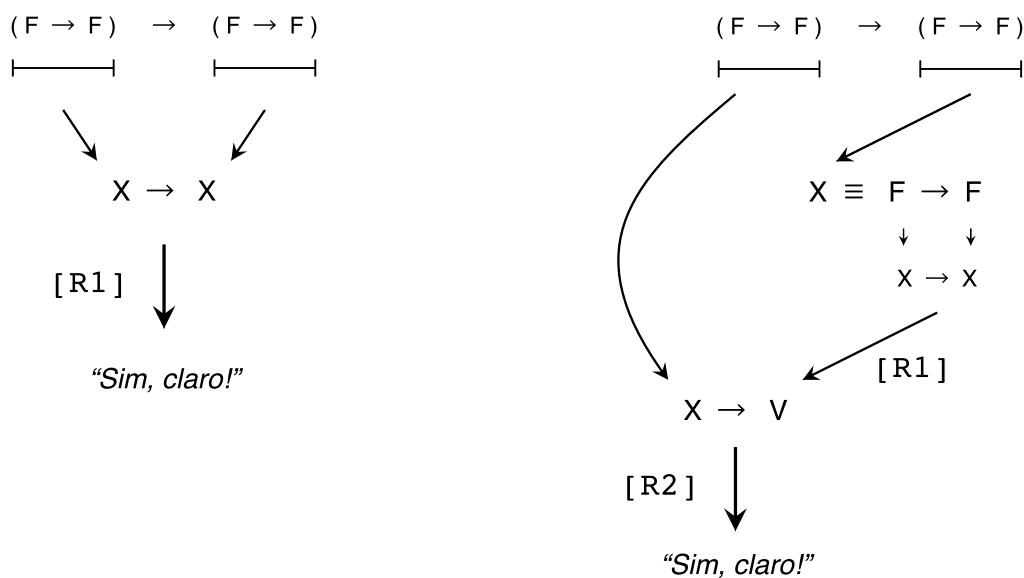
E eu acho que aprendi duas coisas com esse exemplo.

Eu aprendi que é possível chegar na resposta de uma pergunta analisando apenas uma parte dela (i.e., o lado direito, nesse caso).

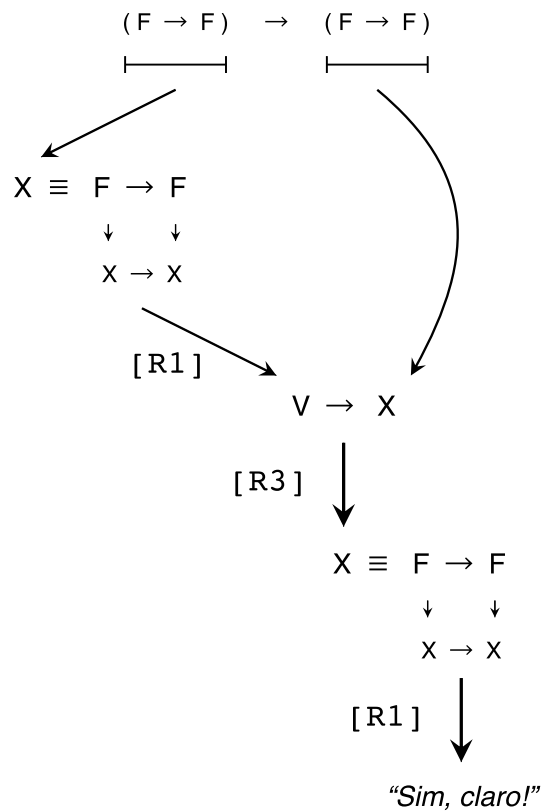
E eu aprendi que posso raciocinar tanto em um processo dedutivo passo a passo, onde eu vou escrevendo as coisas que eu vou descobrindo, como também direto por meio do esquema, onde eu consigo ver melhor a estrutura de alto nível das coisas.

Ubiratan também descobriu, mas não se deu conta disso, que também podia chegar na mesma resposta por meio de raciocínios diferentes (i.e., utilizando regras diferentes).

Nós já tínhamos visto isso na aula passada, quando ele estava raciocinando sobre a sua pergunta 5:



E agora, com base no exemplo que nós acabamos de ver, nós encontramos mais uma maneira de raciocinar sobre essa pergunta



Depois de alguns instantes, Ubiratan viu isso também.

E daí, com os 3 raciocínio sobre $(F \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow F)$ na sua frente, ele fez mais uma descoberta interessante.

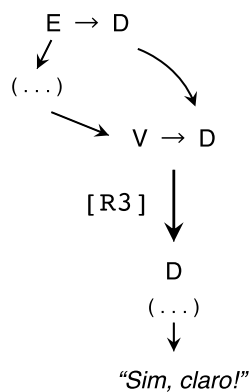
6. *O que é que tá acontecendo aqui?*

Bom, o primeiro raciocínio é o mais simples de todos, isso é fácil de ver.

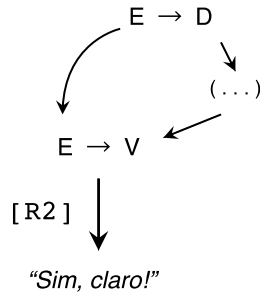
Mas, ele só se aplica aos casos triviais onde os dois lados da pergunta são iguais.

O mais interessante é que o segundo raciocínio é mais simples que o terceiro.

Quer dizer, ao invés de ter um trabalhão para reduzir o lado esquerdo para V , e depois verificar que o lado direito é "Sim, claro!"



O segundo raciocínio examina direto o lado direito da pergunta, verifica que ele tem resposta “Sim, claro!”, e daí aplica R2 para concluir o argumento



Mas isso quer dizer, então, que eu sempre devia raciocinar da seguinte maneira

- Eu sempre começo analisando o lado direito da pergunta
- Caso ele tenha resposta “Sim, claro!”, então eu não preciso fazer mais nada.
- Caso contrário, eu vou adiante e analiso o lado esquerdo da pergunta.

he he he, eu acho que descobri mais uma regra ...

Sim, Ubiratan descobriu uma nova regra.

Na verdade, uma regra (ou estratégia) para a aplicação das regras R1, R2, R3.

E então, ele resolveu colocar imediatamente a sua estratégia em prática.

7. Essa pergunta aqui parece bem complicada

$$\left(F \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F)) \right) \rightarrow \left(((F \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F)) \right) ?$$

(1) Mas, examinando o lado direito da pergunta

$$D_1 \equiv ((F \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F)) ?$$

(2) E o lado direito do lado direito

$$D_2 \equiv F \rightarrow (F \rightarrow F) ?$$

(3) E o lado direito do lado direito do lado direito

$$D_3 \equiv F \rightarrow F ?$$

(4) Eu encontro uma oportunidade para aplicar a regra R1

$$D_3 \equiv F \rightarrow F : \text{Sim, claro!} \quad [R1]$$

(5) *Daí, eu volto para o passo (2), e encontro a oportunidade de aplicar a regra R2*

$$D_2 \equiv F \rightarrow (F \rightarrow F) ? \equiv F \rightarrow V : \text{Sim, claro!} \quad [R2]$$

(6) *E depois, eu volto para o passo (1), e encontro outra oportunidade de aplicar a regra R2*

$$\begin{aligned} D_1 &\equiv ((F \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F)) ? \\ &\equiv ((F \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow V : \text{Sim, claro!} \quad [R2] \end{aligned}$$

(7) *Finalmente, agora que eu descobri que o lado direito da pergunta tem resposta “Sim, claro!”, eu posso aplicar a regra R2 uma última vez para concluir o argumento*

$$\begin{aligned} &((F \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F))) \rightarrow (((F \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F)))) ? \\ &\equiv (F \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F))) \rightarrow V : \text{Sim, claro!} \quad [R2] \end{aligned}$$

Caramba!

Não é que a coisa funciona mesmo ...

8. *Deixa eu fazer mais um ...*

$$((F \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F))) \rightarrow ((F \rightarrow (F \rightarrow F)) \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F))) ?$$

(1) *Examinando o lado direito da pergunta*

$$D_1 \equiv (F \rightarrow (F \rightarrow F)) \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F) ?$$

(2) *E o lado direito do lado direito*

$$D_2 \equiv (F \rightarrow F) \rightarrow F ?$$

(3) *E o lado direito do lado direito do lado direito*

$$D_3 \equiv F ?$$

(4) *Eu cheguei dessa vez a uma pergunta que tem resposta “Sei lá!”.*

Isso significa que eu não tenho a oportunidade de aplicar a regra R2.

(5) *E daí só me resta olhar para o lado esquerdo da pergunta*

$$E_1 \equiv F \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F)) ?$$

A ideia é ver se isso tem resposta “Sim, claro!”, para poder aplicar a regra R3.

(6) *Para fazer isso, eu uso de novo a minha estratégia.*

Quer dizer, eu olho para o lado direito do lado esquerdo

$$D'_2 \equiv F \rightarrow (F \rightarrow F) ?$$

(7) *E para o lado direito do lado direito do lado esquerdo*

$$D'_3 \equiv F \rightarrow F ?$$

(8) *Aqui, finalmente, eu tenho a oportunidade de aplicar a regra R1*

$$D'_3 \equiv F \rightarrow F : \textit{Sim, claro!} \quad [R1]$$

(9) *Daí, eu volto para o passo (6), e encontro a oportunidade de aplicar a regra R2*

$$D'_2 \equiv F \rightarrow (F \rightarrow F) ? \equiv F \rightarrow V : \textit{Sim, claro!} \quad [R2]$$

(10) *E daí, eu volto para o passo (5), e encontro outra oportunidade de aplicar R2*

$$E_1 \equiv F \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F)) ? \equiv F \rightarrow V : \textit{Sim, claro!} \quad [R2]$$

(11) *Mas, isso significa que a minha pergunta original tinha a forma*

$$V \rightarrow X ?$$

(12) *Logo, eu posso aplicar a regra R3 para reduzir a pergunta ao seu lado direito*

$$D_1 \equiv (F \rightarrow (F \rightarrow F)) \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F) ?$$

E agora, eu preciso analisar o lado direito outra vez.

(13) *Mas, lembrando do que aconteceu nos passos (1)-(4), eu já sei que a estratégia de aplicar R2 não vai dar em nada.*

(14) *Então, eu vou olhar direto para o lado esquerdo do lado direito*

$$E'_2 \equiv F \rightarrow (F \rightarrow F) ?$$

E daí eu posso pensar assim

- o lado direito disso aqui é $F \rightarrow F$?
- aplicando a regra R1 eu descubro que isso é V
- e então eu volto um passo atrás e aplico R2 para descobrir que $E'_2 \equiv V$

(15) *Legal.*

Agora, voltando para o passo (12), eu vejo que D_1 tem a forma

$$V \rightarrow X?$$

(16) *Logo, eu posso aplicar a regra R3 para reduzir a pergunta mais uma vez*

$$D_2 \equiv (F \rightarrow F) \rightarrow F?$$

(17) *Aqui eu já consigo ver o que está acontecendo.*

Quer dizer, se eu for para o lado direito não vai dar certo, porque $F?$ tem resposta “Sei lá!” e daí eu não vou conseguir aplicar R2.

Por outro lado, se eu for para o lado esquerdo, daí eu aplico R1, volto um passo atrás e aplico R3, e isso reduz a pergunta ainda mais uma vez para

$$D_3 \equiv F?$$

(18) *Finalmente, depois de todo esse raciocínio, eu descobri que a minha pergunta original é a mesma coisa que*

$$D_3 \equiv F?$$

e isso significa que a sua resposta é “Sei lá!”.

Ufa!!

Ubiratan estava aprendendo muita coisa com a experiência imaginária de raciocínio lógico.

Mas, talvez, a coisa mais importante que ele aprendeu foi a seguinte.

Ele aprendeu que o raciocínio lógico sempre levava ele a se meter nas maiores complicações.

Mas, ele também aprendeu que, se ele conseguia sair da confusão sozinho (não importa muito como), sempre havia alguma coisa ali para ele aprender.

Quer dizer, era nessa hora que ele acabava descobrindo as regras.

E que, depois que ele tinha a regra, aquilo que era complicado parecia simples de novo.

Além disso, ele sabia que a regra sempre aparecia quando ele percebia um padrão repetitivo naquilo que ele estava fazendo.

E ele também sabia que, para poder ver o padrão com clareza, era preciso olhar para as coisas em alto nível — por exemplo, utilizando os esquemas de raciocínio.

Quando Ubiratan se deu conta de tudo isso, ele ficou feliz de lembrar que tinha acabado de

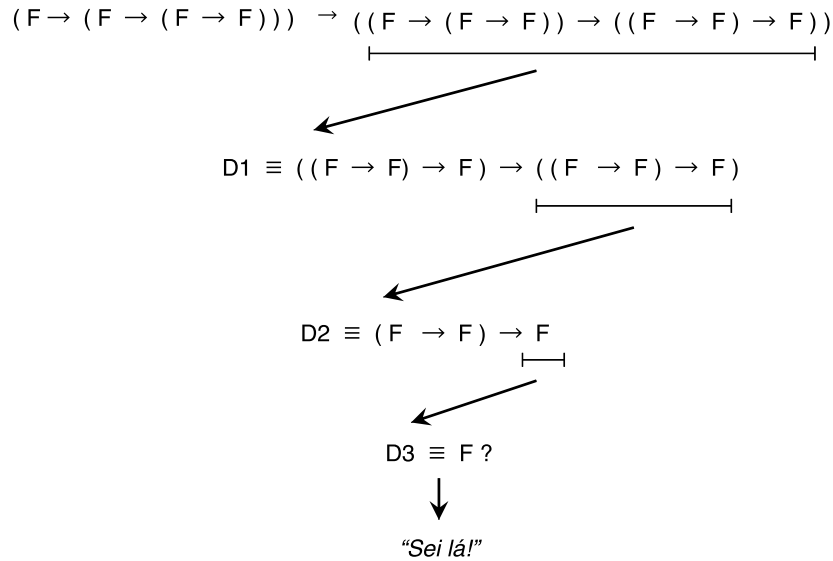
construir um argumento bem complicado.

Quer dizer, isso era o sinal de que havia mais alguma coisa para aprender ali ...

Então, Ubiratan começou a raciocinar da seguinte maneira.

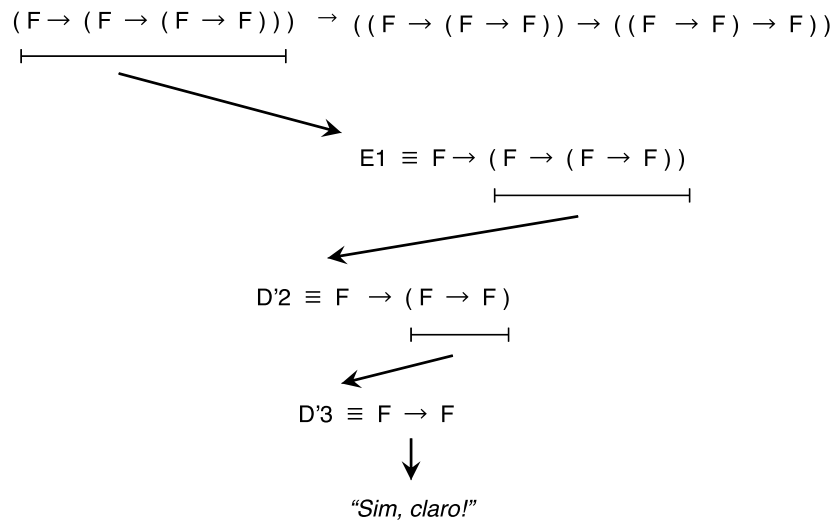
9. *Deixa eu ver o que eu tava fazendo.*

Eu comecei tentando aplicar a estratégia da regra R2 (indo sempre para o lado direito), nos passos (1)-(4)



Mas isso não deu certo.

10. *Depois, eu analisei o lado esquerdo da pergunta*

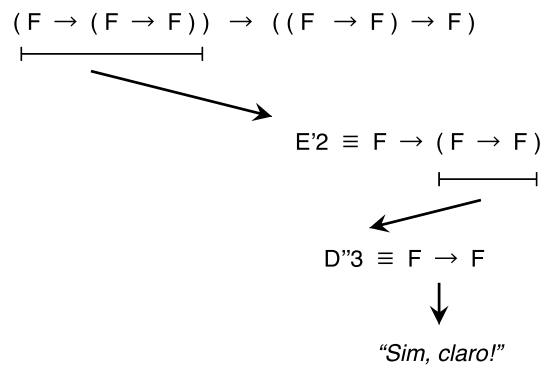


E isso deu certo!

Quer dizer, por meio da estratégia de R2, eu consegui descobrir que o lado esquerdo tem resposta "Sim, claro!" (nos passos (5)-(10) do argumento).

E daí, pela aplicação da regra R3, eu descartei o lado esquerdo (passos (10)-(12)).

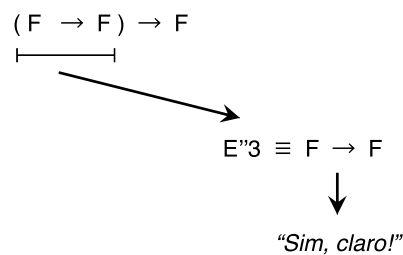
11. Quando só sobrou o lado direito, eu analisei o seu lado esquerdo.



E isso deu certo outra vez.

Dessa maneira, eu apliquei a regra R3 mais uma vez, para descartar agora o lado esquerdo do lado esquerdo (passos (14)-16)).

12. E quando sobrou só o lado direito do lado direito, só de bater o olho eu já vi que ia dar para aplicar a regra R3 outra vez



13. Quer dizer, a estratégia da regra R2 falhou, logo no início.

E daí eu encontrei uma maneira de chegar até a resposta aplicando sucessivamente a regra R3, eliminando um pedaço no lado esquerdo da pergunta de cada vez.

Mas, então, eu acho que agora eu tenho uma outra estratégia de raciocínio

- Quando a análise do lado direito da pergunta falha,
- Eu posso ir olhando para o seu lado esquerdo,
- E, enquanto o lado esquerdo for "Sim, claro!", eu posso ir reduzindo a pergunta para uma pergunta mais simples.

De fato, Ubiratan havia encontrado mais uma regra.

Ou, mais uma estratégia para a aplicação das regras R1, R2, R3.

E daí, ele resolveu mais uma vez organizar as suas ideias.

Quer dizer, ele viu que tinha uma estratégia de raciocínio para o uso de cada uma das regras:

⇒ A estratégia de R1: **o que é óbvio, é óbvio**

- Quer dizer, se eu estou assumindo que eu sei aquilo que eu estou perguntando, então a resposta sempre é “*Sim, claro!*”.

⇒ A estratégia de R2: **indo direto ao ponto**

- Quer dizer, se o lado direito da pergunta é “*Sim, claro!*”, então eu não preciso nem olhar para o lado esquerdo.

⇒ A estratégia de R3: **comendo pelas beiradas ...**

- Quer dizer, quando tudo o mais dá errado, eu posso ir tentando simplificar as coisas.