Lógica

exercícios adicionais 19

1. **Raciocinando com a conjunção**

   A última folha do último caderno de Hilbert também tinha 3 regrinhas para raciocinar com a conjunção:

   $$\texttt{[H3]}\quad \mathtt{p} \to \big(\mathtt{q} \to (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\big) \qquad \texttt{[H4]}\quad (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \to \mathtt{p} \qquad \texttt{[H5]}\quad (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \to \mathtt{q}$$

   Você consegue utilizar essas regras para construir:

   a) $\mathtt{A} \to \big(\mathtt{B} \to (\mathtt{B} \wedge \mathtt{A})\big)$ b) $(\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) \to (\mathtt{B} \wedge \mathtt{A})$

   solução (a):

   Nessa aula 19, nós vimos um raciocínio que permite inverter a ordem das duas primeiras partes de uma regra

   $$\underbrace{\mathtt{X} \to (\mathtt{Y}}_{*} \to \mathtt{Z}) \quad \overset{\texttt{Inv}}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\mathtt{Y} \to (\mathtt{X}}_{*} \to \mathtt{Z})$$

   Utilizando esse raciocínio aqui, nós chegamos à seguinte solução

   $$\overset{\texttt{H3}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{B} \to \big(\mathtt{A} \to (\mathtt{B} \wedge \mathtt{A})\big)$$
   $$\overset{\texttt{Inv}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{A} \to \big(\mathtt{B} \to (\mathtt{B} \wedge \mathtt{A})\big)$$

   ◇

2. **Circularidade**

   Você consegue construir essa regra:

   $$(\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to \Big((\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \to \big((\mathtt{C} \to \mathtt{A}) \to (\mathtt{B} \to \mathtt{A})\big)\Big)$$

   solução:

   Intuitivamente, as 3 primeiras partes estão dizendo que A, B *e* C *são a mesma coisa*

   $$\underbrace{(\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to \Big((\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \to \big((\mathtt{C} \to \mathtt{A})}_{*} \to (\mathtt{B} \to \mathtt{A})\big)\Big)$$

   E, para construir a regra, basta observar que a parte de dentro é a regra da transitividade

   $$(\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to \Big(\underbrace{(\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \to \big((\mathtt{C} \to \mathtt{A}) \to (\mathtt{B} \to \mathtt{A})\big)}_{*}\Big)$$

   ◇

3. **Outra versão do Modus Ponens**

   Nós vimos na aula 18 que a regra Modus Ponens nos permite usar a regra

$$\mathtt{A} \to \mathtt{B}$$

   para conseguir

$$\mathtt{B}$$

   caso nós já tenhamos $\mathtt{A}$.

   Agora suponha que você tem a regra

$$\mathtt{B} \to (\mathtt{A} \to \mathtt{C})$$

   E suponha que você já tenha $\mathtt{A}$.

   Você consegue construir $\mathtt{B} \to \mathtt{C}$ a partir dessa situação?

   Como?