Lógica

aula 18: As regras de Hilbert

Hilbert era um menino que, como o Ubiratan, tinha muita curiosidade sobre a lógica.

Ou, pelo menos, é assim que a gente imagina.

Porque ninguém se lembra do Hilbert quando ele era um menino.

Quando o Hilbert ficou mais velho, ele se tornou um lógico famoso.

E agora, todo mundo se lembra do Hilbert como um homem velho.

Mas, desde menino, Hilbert tinha muita curiosidade sobre a lógica.

Ou, pelo menos, a gente pode imaginar as coisas assim.

A gente imagina que, depois que o Hilbert morreu, as pessoas encontraram os seus cadernos de lógica, da época em que ele era um menino.

Todo mundo ficou muito curioso com essa descoberta, porque tinha umas coisas que o Hilbert tinha feito que ninguém entendia direito: *as suas famosas regras*.

Agora, o mistério iria finalmente ser resolvido.

As pessoas tiraram os cadernos do Hilbert do armário com o maior cuidado do mundo.

Mas, assim que elas abriram os cadernos houve uma grande decepção: os ratos haviam roído tudo ...

Quer dizer, quase tudo.

Só tinha sobrado a última folha do último caderno, que dizia assim

> *(. . .)*
>
> *Que legal!*
>
> *Mas, quer dizer então que, depois de todos esses dias, semanas e meses raciocinando, no final das contas eu chego nessas duas regrinhas*
>
> [H1] $p \to (q \to p)$
>
> [H2] $\big(p \to (q \to r)\big) \to \big((p \to q) \to (p \to r)\big)$
>
> *que eu uso aplicando o Modus Ponens.*

Era só isso, não havia sobrado mais nada.

Os ratos haviam roído tudo.

Talvez os ratos não gostassem de lógica ...

Ou talvez eles só não tivessem entendido a lógica das regras ...

Seja como for, os ratos haviam roído tudo.

Ou quase tudo.

E o resultado é que, até hoje, os lógicos do mundo inteiro ainda estão quebrando a cabeça para tentar entender o que vinha antes daquelas duas regrinhas ...

Liduína parou ali mesmo.

Ela não conseguiu ler mais nem uma linha da nota de aula.

Liduína, como Ubiratan, era uma aluna imaginária da turma de lógica.

Mas, ao contrário de Ubiratan, que gostava de ficar viajando na maionese, Liduína tinha um espírito prático e investigativo.

Ela não gostava de pensar em coisas que não existem.

E o que existia eram os cadernos de Hilbert.

Ou, pelo menos, a última folha do último caderno.

E havia um mistério ali: *daonde será que tinha vindo aquelas duas regrinhas?*

Ela enfiou na cabeça que iria resolver aquele mistério.

Liduína começou pensando assim.

1. *Pra eu descobrir daonde vieram as regras, primeiro eu preciso entender as regras.*

   E pra eu entender as regras, primeiro eu preciso aprender a usar as regras.

   E pra eu aprender a usar as regras, primeiro eu preciso entender o Modus Ponens.

   E pra eu entender o modus ponens, primeiro eu preciso aprender a usar o Modus Ponens.

   Certo, é aqui que eu vou começar então.

   O professor ensinou, outro dia, que o Modus Ponens é, como se fosse, uma regra para usar outras regras.

   Quer dizer, quando a gente tem uma regra

   $$\mathtt{A} \;\rightarrow\; \mathtt{B}$$

   e se pergunta: "Como é que eu uso essa regra?", a resposta é: "Use o Modus Ponens!".

   E o Modus Ponens diz: "Você pode usar essa regra quando você já tem o A".

   E ele também diz: "Quando você tem essa regra e também já tem o A, então você pode concluir o B".

   Legal!

O Modus Ponens funciona com qualquer regra.

Logo, ele também vai funcionar com as regras do Hilbert, claro!

Deixa eu tentar.

2. *A primeira regra do Hilbert é*

   `[H1]` $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

   E aqui eu me lembro que isso não é uma regra.

   Quer dizer, o professor fez a maior enrolada na sala de aula outro dia

   ```
   O que são as regras de Hilbert?
   Bom, as regras de Hilbert não são regras.
   Ou melhor, as regras de Hilbert são regras sim.
   Quer dizer, as regras de Hilbert são regras para construir regras.
   Era isso o que eu queria dizer ...
   ```

   Na hora eu achei engraçado.

   Mas agora eu tou começando a entender.

   Hmm ...

   Como é que o Hilbert foi pensar nisso?

   Mas, deixa essa pergunta pra lá, eu ainda tou aprendendo a usar as regras.

   Depois eu penso nisso.

   Então, `H1` *é uma regra para construir regras.*

   Quer dizer, se eu trocar p *e* q *por* A*, por exemplo, então eu construo a regra*

   $$\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$$

   hi, hi, hi

   Isso aqui é igual a uma daquelas perguntas que o Ubiratan me mostrou outro dia.

   Só que o Ubiratan usava o `F` *ao invés do* `A`*, e chamava as coisas de pergunta enquanto o Hilbert chama de regra.*

   Hmm ...

   Então isso quer dizer que o Ubiratan já andou por aqui ...

   Esse Ubiratan ...

3. *Mas deixa eu continuar aprendendo as regras do Hilbert.*

   O Hilbert dizia que a gente aplica essas regras usando o Modus Ponens.

   Só que o Modus Ponens diz que pra eu usar a regra

   $$\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$$

eu preciso já ter o `A`*.*

Só que eu ainda não tenho o `A`*.*

E, segundo o Ubiratan, eu nunca na vida vou ter o `A`*, ou o* `F` *dele.*

Quer dizer, isso se eu estivesse dentro do quarto do ET.

Mas isso são as maluquices do Ubiratan ...

Deixa eu voltar para as regras do Hilbert.

Então, eu não tenho o `A` *que o Modus Ponens me diz que eu preciso ter para poder aplicar a regra*

$$\mathtt{A} \;\rightarrow\; (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$$

Mas isso significa que eu não posso aplicar a regra.

E agora, o que eu faço?

4. *Já sei!*

Eu posso construir outra regra.

Porque o Hilbert tem uma regra pra gente construir regras.

Mas, que regra eu construo agora?

São tantas regras possíveis ...

Mas, sejamos práticas!

O meu negócio aqui não é ficar inventando regras.

Eu tou querendo usar o Modus Ponens.

Pra usar o Modus Ponens, do lado esquerdo tem que ter uma coisa que eu já tenho.

Ora, a única coisa que eu tenho é

$$\mathtt{A} \;\rightarrow\; (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$$

Então vai ter que ser isso mesmo que vai estar do lado esquerdo.

Quer dizer, o p vai ser isso.

Mas, e o q?

Como é que eu escolho o q?

Bom, o q pode ser qualquer coisa.

Hmm ...

Será que o Hilbert chamou essa parte de q porque ela pode ser qualquer coisa?

Sei lá!

Mas, se eu posso escolher qualquer coisa, então eu vou escolher uma coisa bem simples

$$\mathtt{q} \;=\; \mathtt{A}$$

E daí, usando a regra H1*, a coisa fica assim*

$$\big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big) \;\;\to\;\; \Big(\mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)\Big)$$

Agora, como eu já tenho

$$\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})$$

eu posso usar o Modus Ponens para obter

$$\mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)$$

Hmm ...

Mas isso é outra das perguntas do Ubiratan ...

Será que?

5. *Bom, mas agora eu já percebi um padrão.*

   Quer dizer, começando com

$$\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})$$

e usando H1 *e depois Modus Ponens, eu acabei chegando em*

$$\mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)$$

Mas então, isso significa que começando com

$$\mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)$$

e usando H1 *e depois Modus Ponens, eu vou conseguir chegar em*

$$\mathtt{A} \;\to\; \Big(\mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)\Big)$$

Deixa eu ver.

A ideia é que, uma vez que eu tenho

$$\mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)$$

eu posso construir uma regra que tenha isso do lado esquerdo.

Usando H1 *com* $\mathtt{q} = \mathtt{A}$*, eu obtenho uma regra dessa*

$$\Big(\mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)\Big) \;\;\to\;\; \Bigg(\mathtt{A} \;\to\; \Big(\mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)\Big)\Bigg)$$

Daí, usando o Modus Ponens, porque eu já tenho o lado esquerdo, eu chego em

$$\mathtt{A} \;\to\; \Big(\mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)\Big)$$

Funciona!

E isso significa que eu consigo colocar

$$\mathtt{A} \;\to$$

na frente da regra quantas vezes eu quiser.

Legal!

6. *Mas, eu só tou colocando*

$$\mathtt{A} \;\to$$

na frente da regra porque eu escolhi usar $\mathtt{q} = \mathtt{A}$.

Quer dizer, se eu escolher outra coisa, então é outra coisa que vai ficar aparecendo.

Deixa eu ver.

Logo no início, quando eu tenho

$$\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})$$

eu posso construir a regra usando $\mathtt{H1}$ *com* $\mathtt{q} = \mathtt{A} \to \mathtt{A}$, *e daí eu obtenho*

$$\big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big) \;\;\to\;\; \Big(\big(\mathtt{A} \to \mathtt{A}\big) \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)\Big)$$

Daí, usando Modus Ponens, eu chego em

$$\big(\mathtt{A} \to \mathtt{A}\big) \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)$$

Legal!

Depois, repetindo o mesmo truque, eu obtenho

$$\big(\mathtt{A} \to \mathtt{A}\big) \;\;\to\;\; \Big(\big(\mathtt{A} \to \mathtt{A}\big) \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)\Big)$$

e assim por diante ...

Mas, ainda tinha uma coisa que estava incomodando a Liduína.

7. *Puxa vida!*

   O Ubiratan tinha perguntas bem pequenininhas como

$$\texttt{F} \to \texttt{F}\,?$$

   Mas as minhas regras só estão crescendo ...

   Quer dizer, a regra H1 *só faz aumentar as coisas.*

   E o pior é que, quando eu olho para a regra H2

$$\texttt{[H2]} \quad \big(p \to (q \to r)\big) \to \big((p \to q) \to (p \to r)\big)$$

   parece que as coisas vão aumentar mais ainda ...

   Como será que o Hilbert tinha pensado que a gente tinha que fazer pra fazer as coisas encolherem?

   Hmm ...

   Será que eu tou escolhendo o q *errado?*

   Quer dizer, e se eu usasse um outro q*?*

   Daí, eu ia obter uma coisa assim:

$$\texttt{q} \to \big(\texttt{A} \to (\texttt{A} \to \texttt{A})\big)$$

   O problema é que isso, não importa quem é o q*, só me permite chegar aqui*

$$\texttt{A} \to (\texttt{A} \to \texttt{A})$$

   E daqui eu só saio se tiver o A*.*

   Que é uma coisa que eu nunca vou ter na vida, segundo o Ubiratan ...

   Hmm ...

   Então vai ter que ser usando a regra H2 *mesmo ...*

   Mas como?

8. *Deixa eu olhar para a regra* H2 *de novo*

$$\texttt{[H2]} \quad \big(p \to (q \to r)\big) \to \big((p \to q) \to (p \to r)\big)$$

   Hmm ...

   Para eu poder usar uma regra construída com H2*, eu preciso ter a coisa do lado esquerdo.*

   Mas eu tenho!

   Quer dizer,

$$\texttt{A} \to (\texttt{A} \to \texttt{A})$$

tem o formato da coisa que aparece no lado esquerdo da regra H2.

Se eu usar isso como o lado esquerdo, então $\mathtt{p} = \mathtt{A}$, $\mathtt{q} = \mathtt{A}$ *e* $\mathtt{r} = \mathtt{A}$, *e daí a regra fica*

$$\big(\mathtt{A} \;\rightarrow\; (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})\big) \;\;\rightarrow\;\; \big(\,(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}) \;\rightarrow\; (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})\,\big)$$

E agora, usando o Modus Ponens, porque eu já tenho o lado esquerdo, eu chego em

$$(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}) \;\rightarrow\; (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$$

O que é legal, porque isso é uma coisa que eu ainda não tinha.

Mas, isso não resolve o meu problema.

Porque daqui eu só saio se tiver $\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}$.

E isso é uma coisa que eu não tenho.

Mas, mesmo que eu tivesse eu não ia usar.

Quer dizer, se eu tivesse $\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}$, *então eu podia usar a regra*

$$(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}) \;\rightarrow\; (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$$

para obter $\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}$.

Mas, se eu já tivesse o $\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}$, *pra que eu teria esse trabalho todo para conseguir o* $\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}$ *de novo?*

Nesse ponto, uma ideia apareceu na cabeça de Liduína.

9. *Hmm ...*

   Eu acho que eu tou tendo uma intuição ...

   E se, ao invés de chegar em

$$(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}) \;\rightarrow\; (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$$

   eu chegasse em uma coisa assim

$$\mathtt{X} \;\rightarrow\; (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$$

   onde X *é uma coisa que eu já tenho?*

   Bom, então eu ia conseguir usar o Modus Ponens para obter

$$\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}$$

   que é o que eu quero

Vejamos.

A coisa mais simples que eu tenho é

$$\mathtt{A} \;\rightarrow\; (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$$

Então eu vou tentar com isso.

Quer dizer, assumindo que $\mathtt{X} = \mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$*, eu vejo que eu preciso chegar em*

$$\big(\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})\big) \;\rightarrow\; (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$$

Eu ia conseguir chegar aqui, se isso fosse o lado direito de `H2`

$$(p \rightarrow q) \;\rightarrow\; (p \rightarrow r)$$

E, para isso, é preciso ter $\mathtt{p} = \mathtt{A}$*,* $\mathtt{q} = (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$ *e* $\mathtt{r} = \mathtt{A}$*.*

Mas, nesse caso, o lado esquerdo de `H2` *fica assim:*

$$\mathtt{A} \;\rightarrow\; \big((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}) \rightarrow \mathtt{A}\big)$$

Mas, então, pra poder usar o Modus Ponens, eu vou precisar desse troço.

E agora, como é que eu consigo essa coisa?

Hmm ...

Já sei!

O `q` *da regra* `H1` *significa "qualquer coisa".*

O Hilbert não disse isso, mas a gente pode advinhar.

Então, se o `q` *é qualquer coisa, ele pode muito bem ser* $\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}$*.*

E daí, fazendo $\mathtt{P} = \mathtt{A}$*, a regra* `H1` *me dá*

$$\mathtt{A} \;\rightarrow\; \big((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}) \rightarrow \mathtt{A}\big)$$

que é exatamente o que eu preciso.

hi hi hi

Liduína estava rindo de satisfação dessa vez.

Ela estava começando a entender as regras do Hilbert.

Quer dizer, primeiro ela aprendeu a usar e entendeu o Modus Ponens.

E agora ela estava aprendendo a usar e entendendo as regras do Hilbert.

O que ela estava entendendo é que as regras do Hilbert fazem você andar (ou raciocinar) para trás.

Por exemplo, Liduína queria obter a regra

$$\mathtt{A} \;\to\; \mathtt{A} \tag{1}$$

porque isso era uma das perguntas que Ubiratan já tinha.

Daí, brincando com as regras, ele descobriu que conseguia chegar em

$$(\mathtt{A} \to \mathtt{A}) \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})$$

Isso não era bem o que ela queria, mas ela pensou que se ela conseguisse chegar em

$$\big(\mathtt{A} \to (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big) \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})$$

então ela teria a sua regra com mais um Modus Ponens.

Agora, o objetivo de Liduína era chegar em

$$\big(\mathtt{A} \to (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big) \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A}) \tag{2}$$

Daí, ela viu que chegaria nisso (usando `H2` e `MP`) se ela tivesse

$$\mathtt{A} \;\to\; \big((\mathtt{A} \to \mathtt{A}) \to \mathtt{A})\big) \tag{3}$$

E, finalmente, ela viu que isso era uma coisa que ela podia construir com a regra `H1`.

Abaixo nós temos o esquema desse raciocínio

`< Figura: esquema do raciocínio para trás >`

Olhando para o esquema, Liduína entendeu que tudo vinha das regras de construção `H1` e `H2`, por meio da aplicação sucessiva de Modus Ponens.

Era como um quebra-cabeças.

Só que ao contrário.

Quer dizer, ao invés de começar com peças pequenas para montar uma figura grande, a gente começava com figuras grandes e desmontava (usando Modens Ponens) para chegar nas peças pequenas.

Liduína achou a analogia engraçada.

E pensou que Hilbert devia ser meio doido mesmo, que nem o Ubiratan ...

10. *Mas, deixa de papo furado, porque eu ainda preciso entender daonde vieram as regras do Hilbert.*

Eu ainda tou meio longe de entender, eu acho.

Mas uma coisa eu já consigo ver.

Quer dizer, esse mesmo raciocínio que eu fiz para conseguir a regra

$$\mathtt{A} \;\rightarrow\; \mathtt{A}$$

eu também posso fazer para conseguir a regra

$$(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}) \;\rightarrow\; (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$$

e a regra

$$\big((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}) \rightarrow \mathtt{A}\big) \;\rightarrow\; \big((\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}) \rightarrow \mathtt{A}\big)$$

e por aí vai ...

Isto é, eu posso fazer esse raciocínio para conseguir qualquer regra que tenha a mesma coisa dos dois lados

$$\mathtt{X} \;\rightarrow\; \mathtt{X}$$

Hmm ...

Pra conferir isso, eu vou fazer o raciocínio de novo.

(1) *Usando a regra* $\mathtt{H1}$ *com* $\mathtt{p} = \mathtt{X}$ *e* $\mathtt{q}$ *sendo qualquer coisa, eu construo*

$$\mathtt{X} \;\rightarrow\; (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{X})$$

(2) *Daí, eu uso a regra* $\mathtt{H2}$ *para construir*

$$\big(\mathtt{X} \;\rightarrow\; (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{X})\big) \;\;\rightarrow\;\; \big((\mathtt{X} \rightarrow \mathtt{q}) \;\rightarrow\; (\mathtt{X} \rightarrow \mathtt{X})\big)$$

e depois eu uso o Modus Ponens com essas duas coisas, para obter

$$(\mathtt{X} \rightarrow \mathtt{q}) \;\rightarrow\; (\mathtt{X} \rightarrow \mathtt{X})$$

(3) *Agora, como o* $\mathtt{q}$ *é qualquer coisa, eu posso escolher ele de modo que*

$$\mathtt{X} \;\rightarrow\; \mathtt{q}$$

seja uma coisa que eu já tenho (ou já sei como construir).

A escolha óbvia é $\texttt{q} = (\texttt{X} \to \texttt{X})$, *porque isso me dá*

$$\texttt{X} \to \texttt{q} \quad = \quad \texttt{X} \to (\texttt{X} \to \texttt{X})$$

que é uma coisa fácil, fácil de construir com a regra `H1`.

(4) *Agora, é só aplicar Modus Ponens para obter*

$$\texttt{X} \to \texttt{X}$$

que é aquilo que eu queria.

Deu certo!

E isso significa que eu consigo construir qualquer regra que tenha a mesma coisa dos dois lados.

Mas, peraí ...

11. *Carácoles!*

Isso é a regra `R1` *do Ubiratan!!*

[R1] $\texttt{X} \to \texttt{X}$? : *"Sim, claro!"*

Hmm ...

O Hilbert e o Ubiratan são os dois meio doidos ...

E, pelo visto, eles tão fazendo a mesma coisa ...

Só que a doidice deles é uma ao contrário da outra ...

Quer dizer, aonde um começa é aonde o outro termina ...

E aonde um termina é aonde o outro começa ...

Mas, os dois tem a mesma intuição lógica ...

Com certeza!

Mas ninguém sabe qual era a intuição do Hilbert ...

O rato roeu o caderno dele ...

Mas, eu posso pedir para olhar o caderno do Ubiratan ...

Hmm ...

Agora eu tenho um plano!

O plano de Liduína era simples.

Primeiro ela queria ver se era possível obter as outras regras do Ubiratan utilizando as regras do Hilbert.

Isso seria uma indicação de que eles estavam realmente fazendo a mesma coisa.

Daí, se isso desse certo, ela iria utilizar as intuições do Ubiratan para tentar chegar nas regras do Hilbert.

A ideia parecia boa.

E ela resolveu colocar a primeira parte do plano em prática já.

12. *Deixa eu ver.*

    Eu já consegui a regra

    $$\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}$$

    que é a mesma coisa que a pergunta

    $$\mathtt{F} \rightarrow \mathtt{F}\,?$$

    do Ubiratan.

    E o Ubiratan chegou na regra R2 *dele*

    [R2] $\mathtt{X} \rightarrow \mathtt{V}\,?$: *"Sim, claro!"*

    *quando ele percebeu que assumir que você sabe qualquer coisa (*X*) não ajuda nem atrapalha você a concluir uma coisa que tem resposta "Sim, claro!" (*V*), raciocinando logicamente.*

    Por exemplo, ele coloca $(\mathtt{F} \rightarrow \mathtt{F}) \rightarrow \mathtt{F}$ *na frente de* $\mathtt{F} \rightarrow \mathtt{F}$ *para montar*

    $$\big((\mathtt{F} \rightarrow \mathtt{F}) \rightarrow \mathtt{F}\big) \rightarrow (\mathtt{F} \rightarrow \mathtt{F})$$

    e conclui que isso tem resposta "Sim, claro!", pela regra R2.

    Legal.

    Mas, eu também consigo colocar coisas na frente das regras que eu já tenho.

    Era isso que eu tava fazendo agora pouco (nos pontos 5 e 6).

    Por exemplo, como eu já tenho

    $$\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}$$

    *eu posso colocar qualquer coisa (*q*) na frente disso usando primeiro a regra* H1*, para construir*

    $$(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}) \rightarrow \big(\mathtt{q} \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})\big)$$

    e depois aplicando o Modus Ponens (porque eu já tenho $\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}$*), para obter*

    $$\mathtt{q} \rightarrow (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A})$$

    Mas, isso não funciona só com o $\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{A}$*, claro!*

    Isso funciona com qualquer coisa que eu já construí.

Se eu usar a letra T *para representar uma coisa qualquer que eu já construí, então primeiro eu uso* H1 *assim*

$$\mathtt{T} \rightarrow (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{T})$$

e depois eu aplico o Modus Ponens (porque eu já construí o T*) para obter*

$$\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{T}$$

Hmm ...

13. *Agora eu tou entendendo ...*

Isso aqui é a regra R2 *do Ubiratan*

$$\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{T}$$

Só que ele escreve assim

[R2] X → V ? : *"Sim, claro!"*

e depois ele lê a regra dele assim:

- *"Se eu colocar qualquer coisa (*X*) na frente de uma pergunta que tem resposta "Sim, claro!" (*V*), então eu obtenho uma outra pergunta que também tem resposta "Sim, claro!"."*

Só que eu leio o que eu fiz assim

- *"Se eu colocar qualquer coisa (*q*) na frente de uma regra que eu consigo construir (*T*), então eu obtenho uma outra regra que eu também consigo construir."*

Quer dizer, as perguntas que tem resposta "Sim, claro!"no jogo lógico do Ubiratan, são as regras que eu consigo construir no jogo lógico do Hilbert!

Hmm ...

E as coisas que eu não consigo construir devem ser as perguntas que tem resposta "Sei, lá!".

Hi, hi, hi ...

Eles estão fazendo a mesma coisa mesmo!

Só que de um jeito diferente ...

14. *Agora deixa eu ver a regra* R3 *do Ubiratan*

[R3] V → X ? ≡ X ?

Quer dizer, a regra R3 *está dizendo que*

$$\texttt{V} \rightarrow \texttt{X}\,? \qquad e \qquad \texttt{X}\,?$$

são basicamente a mesma coisa.

Ou ainda, a regra diz que assumir que você sabe uma coisa que tem resposta "Sim, claro!" não faz a menor diferença, quando você está raciocinando sobre X ?.

No jogo lógico de Hilbert, isso corresponderia a dizer que tentar construir

$$\texttt{T} \rightarrow \texttt{q} \qquad e \qquad \texttt{q}$$

é a mesma coisa.

E isso faz sentido, porque

- *se eu consigo construir*

  $$\texttt{T} \rightarrow \texttt{q}$$

  então depois eu posso construir T *e aplicar Modus Ponens, para obter*

  $$\texttt{q}$$

- *e se eu consigo construir*

  $$\texttt{q}$$

  então depois eu posso colocar T *na frente e obter*

  $$\texttt{T} \rightarrow \texttt{q}$$

Legal!