

Lógica

aula 05: Quebra-cabeças lógicos

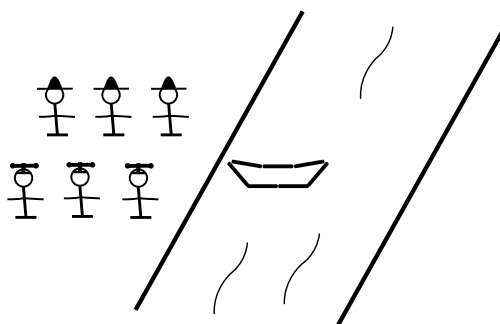
1 Introdução

2 Canibais e missionários

Três canibais e três missionários desejam atravessar um rio utilizando uma canoa que tem capacidade para duas pessoas. Em circunstâncias normais, a situação não apresentaria maiores dificuldades. Mas, o nosso caso apresenta uma pequena peculiaridade: se em qualquer momento houver mais canibais do que missionários em uma das margens, os canibais perdem completamente o controle, devoram os missionários e voltam para a vida na selva ...

Como é que o grupo pode atravessar o rio em segurança?

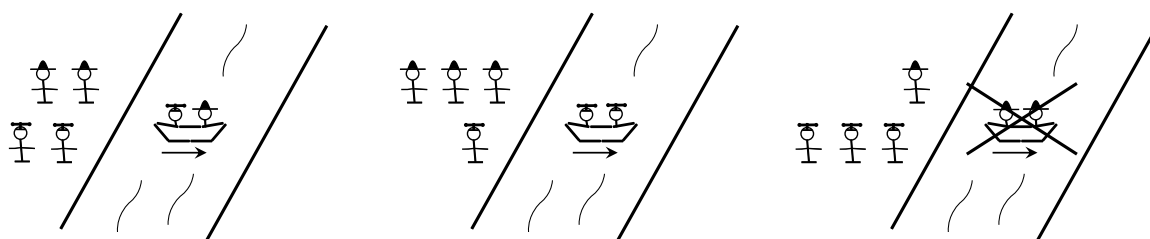
O primeiro passo para resolver um quebra-cabeça lógico consiste em visualizar a situação



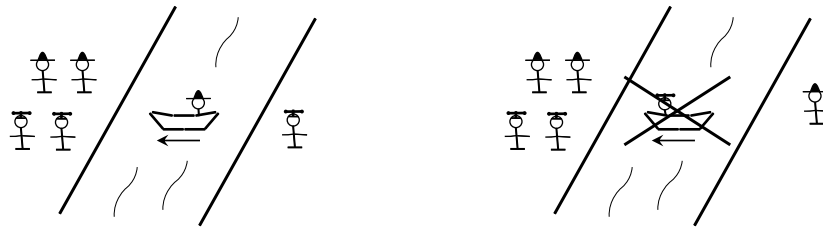
e tentar entender as regras do jogo (i.e., aquilo que você pode fazer e aquilo que você não pode fazer).

(Um quebra-cabeça lógico é basicamente um jogo de manipulação ...)

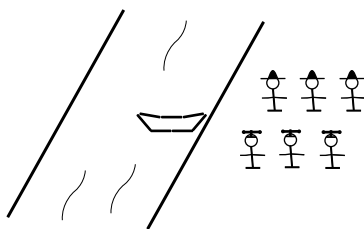
Nesse caso, é fácil ver que a primeira viagem da canoa pode levar 1 canibal e 1 missionário, ou 2 canibais, mas ela não pode levar 2 missionários.



Além disso, no primeiro caso, na viagem de volta, a canoa pode trazer o missionário para a margem esquerda, mas não o canibal



A seguir, uma vez que as regras estão claras, é útil visualizar a situação final ou objetivo



A questão agora é descobrir como é que nós podemos transformar a situação inicial na situação final, obedecendo as regras do jogo.

E aqui, não há muita alternativa senão experimentar e ver o que pode dar certo.

Por uma questão de conveniência, ao invés de manipular as figuras, nós vamos manipular a seguinte notação:

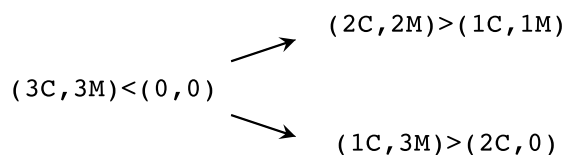
$$(3C, 3M) < (0, 0)$$

3 canibais, 3 missionários
e a canoa no lado esquerdo

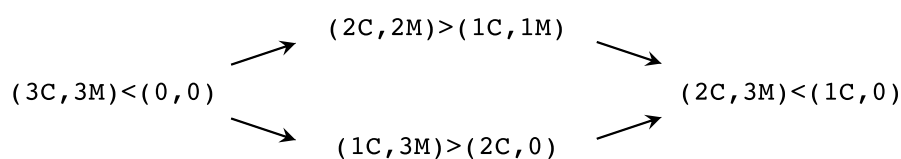
$$(1C, 1M) > (2C, 2M)$$

1 canibal e 1 missionário
no lado esquerdo, a canoa e
os demais no lado direito

Nós já vimos que existem duas possibilidades para o primeiro movimento



No primeiro caso, é o missionário quem deve trazer a canoa de volta, e no segundo caso é um canibal



A seguir, é preciso cuidado pois se a canoa levar 1 canibal e 1 missionário haverá uma violação da regra do lado direito, e se a canoa levar 2 missionários haverá uma violação da regra do lado esquerdo.

Portanto, existe apenas uma opção de movimento nesse ponto

$$(2C, 3M) < (1C, 0) \longrightarrow (0, 3M) > (3C, 0)$$

que, por sua vez, também tem apenas uma continuação possível

$$(0, 3M) > (3C, 0) \longrightarrow (1C, 3M) < (2C, 0)$$

O próximo passo também é forçado: levar 2 missionários para o lado direito, pois qualquer outra opção leva a uma violação das regras

$$(1C, 3M) < (2C, 0) \longrightarrow (1C, 1M) > (2C, 2M)$$

Até aqui tudo bem, nós estamos fazendo progresso.

Mas agora nós temos um problema: se um canibal trazer a canoa de volta, nós teremos uma violação da regra no lado esquerdo, e se um missionário trazer a canoa de volta, nós teremos uma violação da regra no lado direito.

A solução consiste em fazer a canoa voltar com 1 canibal e 1 missionário

$$(1C, 1M) > (2C, 2M) \longrightarrow (2C, 2M) < (1C, 1M)$$

e aqui parece que nós estamos andando para trás ...

Felizmente, isso é apenas um atraso momentâneo, pois em mais 5 passos o problema é resolvido:

$$\begin{array}{ccccc} (2C, 2M) < (1C, 1M) & \longrightarrow & (2C, 0) > (1C, 3M) & \longrightarrow & (3C, 0) < (0, 3M) \\ & & \longrightarrow & (1C, 0) > (2C, 3M) & \longrightarrow & (2C, 0) < (1C, 3M) \\ & & \longrightarrow & (0, 0) > (3C, 3M) & & \end{array}$$

Legal!

Mas, onde é que está a lógica aqui?

3 Raciocínio lógico

Bom, existe lógica acontecendo no sentido de que isso é um jogo baseado em regras.

Mas, o lado mais interessante da lógica só aparece quando nós tentamos ver a coisa em alto nível ...

Por exemplo, note que em um certo momento nós alcançamos a seguinte configuração

$$(1C, 1M) > (2C, 2M)$$

onde 2 canibais e 2 missionários conseguiram passar para o outro lado.

Isso pode nos levar a pensar que a solução para o problema com 3 canibais e 3 missionários contém em seu interior uma solução para o problema com 2 canibais e 2 missionários.

Mas, infelizmente, isso não é verdade ...

Examinando o trecho da solução que leva até a configuração $(1C, 1M) > (2C, 2M)$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \longrightarrow & (2C, 3M) < (1C, 0) & \longrightarrow & (0, 3M) > (3C, 0) \\ & & & \longrightarrow & (1C, 3M) < (2C, 0) & \longrightarrow & (1C, 1M) > (2C, 2M) \end{array}$$

nós vemos que ele envolve a passagem de 3 canibais para o lado direito, o que não é possível no problema com 2 canibais e 2 missionários.

Mas, isso não significa que o problema com 2 canibais e 2 missionários não tenha solução.

Por exemplo,

$$\begin{array}{ccccc} (2C, 2M) < (0, 0) & \longrightarrow & (0, 2M) > (2C, 0) & \longrightarrow & (1C, 2M) < (1C, 0) \\ & \longrightarrow & (1C, 0) > (1C, 2M) & \longrightarrow & (2C, 0) < (0, 2M) \\ & \longrightarrow & (0, 0) > (2C, 2M) & & \end{array}$$

Por outro lado, essa sequência de movimentos não pode fazer parte de uma solução para o problema com 3 canibais e 3 missionários ...

(Porque?)

Da mesma forma, a solução que encontramos para o problema com 3 canibais e 3 missionários não pode ser o início de uma solução para o problema com 4 canibais e 4 missionários ...

(Porque?)

Isto é, se quisermos agora resolver o problema com 4 canibais e 4 missionários é preciso recomençar do zero.

Mas, não é bem assim ...

Examinando com atenção a solução para o problema com 3 canibais e 3 missionários, nós podemos identificar o que parece ser uma estratégia

- primeiro, nós passamos todos os canibais para o lado direito

$$(3C, 3M) < (0, 0) \longrightarrow \dots \longrightarrow (0, 3M) > (3C, 0)$$

- depois, a situação se inverte

$$(0, 3M) > (3C, 0) \longrightarrow \dots \longrightarrow (3C, 0) < (0, 3M)$$

- e, finalmente, a partir desse ponto é possível completar a solução

$$(3C, 0) < (0, 3M) \longrightarrow \dots \longrightarrow (0, 0) > (3C, 3M)$$

É interessante observar que a mesma estratégia também foi usada para resolver o problema com 2 canibais e 2 missionários.

Ou seja, nós aprendemos alguma coisa com a solução desses dois problemas.

E agora nós podemos tentar utilizar essa ideia para resolver o problema de tamanho 4.

Isto é, para tentar resolver o problema com 4 canibais e 4 missionários, nós começamos com o seguinte subproblema:

$$(4C, 4M) < (0, 0) \longrightarrow ? \longrightarrow (0, 4M) > (4C, 0)$$

Na verdade, isso é uma tarefa bem fácil

$$\begin{array}{llll} (4C, 4M) < (0, 0) & \longrightarrow & (2C, 4M) > (2C, 0) & \longrightarrow & (3C, 4M) < (1C, 0) \\ & \longrightarrow & (1C, 4M) > (3C, 0) & \longrightarrow & (2C, 4M) < (2C, 0) \\ & \longrightarrow & (0, 4M) > (4C, 0) & & \end{array}$$

Isto é, utilizando apenas os canibais, cada viagem de ida e volta leva um canibal para a margem direita.

De fato, a mesma ideia pode ser utilizada para resolver o terceiro subproblema.

$$(4C, 0) < (0, 4M) \longrightarrow ? \longrightarrow (0, 0) > (4C, 4M)$$

Portanto, tudo o que é preciso fazer agora é resolver o seguinte subproblema

$$(0, 4M) > (4C, 0) \longrightarrow ? \longrightarrow (4C, 0) < (0, 4M)$$

A primeira observação é que trazer apenas 1 canibal de volta para o lado esquerdo não ajuda muito ...

(Porque?)

Portanto, nós começamos com o seguinte movimento

$$(0, 4M) > (4C, 0) \longrightarrow (2C, 4M) < (2C, 0)$$

A seguir, o único movimento razoável consiste em levar 2 missionários para o lado direito

$$(2C, 4M) < (2C, 0) \longrightarrow (2C, 2M) > (2C, 2M)$$

e parece que nós estamos fazendo progresso ...

A configuração atual

$$(2C, 2M) > (2C, 2M)$$

é análoga àquela que vimos no problema de tamanho 3, onde foi preciso trazer trazer 1 canibal e 1 missionário de volta para a margem esquerda

$$(2C, 2M) > (2C, 2M) \longrightarrow (3C, 3M) < (1C, 1M)$$

O problema é que não há como seguir adiante a partir desse ponto ...

Isto é, o único movimento possível a partir dessa situação é levar 1 canibal e 1 missionário para a margem direita, mas isso nos trás de volta para a configuração

$$(2C, 2M) > (2C, 2M)$$

Em outras palavras, a nossa estratégia de solução quase deu certo, mas no final ela falhou ...

De fato, examinando todas as possibilidades de movimento do jogo, é possível verificar que o problema com 4 canibais e 4 missionários não tem solução.

E, o que é mais triste, nós ainda não conseguimos ver a parte mais interessante da lógica funcionando ...

4 Um problema onde a lógica funciona

Examinando mais uma vez a solução do problema dos 3 canibais e 3 missionários, nós observamos que praticamente todos os seus movimentos são forçados.

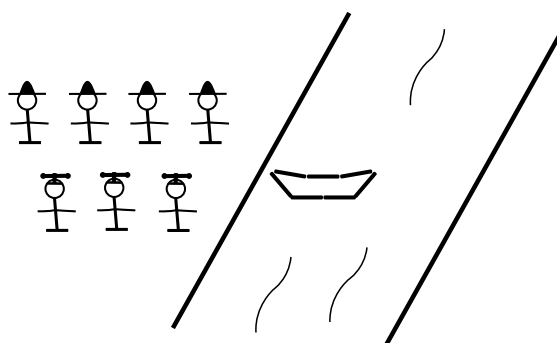
Isso reflete o fato de que o problema tem restrições demais.

É por isso que o problema de tamanho 4 (ou mais) não tem solução.

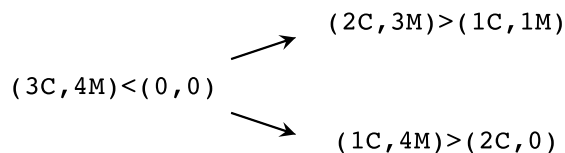
E também é por isso que o lado mais interessante da lógica não está aparecendo ...

Para que a lógica funcione, é preciso ter um pouco mais de espaço ...

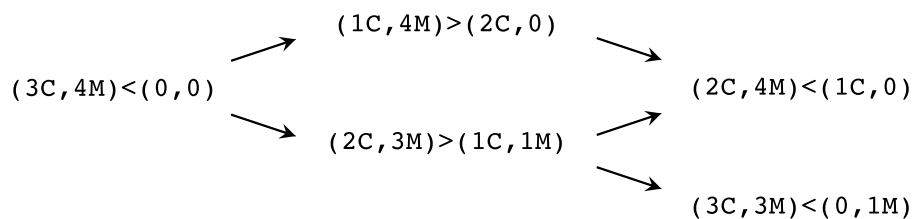
Considere o problema com 3 canibais e 4 missionários



Como usual, existem duas maneiras de começar



A seguir, cada configuração pode evoluir da seguinte maneira



Na configuração de cima, se levarmos a seguir 2 canibais para a margem direita, nós completamos a primeira etapa da nossa estratégia de solução.

$$(2C, 4M) < (1C, 0) \longrightarrow (0, 4M) > (3C, 0)$$

E dessa vez não é difícil verificar que todas as etapas da estratégia podem ser resolvidas.

Mas, nós também podemos considerar a configuração de baixo

$$(3C, 3M) < (0, 1M)$$

O único movimento possível a partir dessa configuração é

$$(3C, 3M) < (0, 1M) \longrightarrow (2C, 2M) > (1C, 2M)$$

E, trazendo um missionário de volta para o lado esquerdo, nós obtemos

$$(2C, 2M) > (1C, 2M) \longrightarrow (2C, 3M) < (1C, 1M)$$

Para ver o que está acontecendo de interessante aqui, é conveniente visualizar o caminho completo até esse ponto

$$\begin{array}{ccccc} (3C, 4M) < (0, 0) & \longrightarrow & (2C, 3M) > (1C, 1M) & \longrightarrow & (3C, 3M) < (0, 1M) \\ & & (2C, 2M) > (1C, 2M) & \longrightarrow & (2C, 3M) < (1C, 1M) \end{array}$$

Note que, no início

- havia 1 missionário a mais no lado esquerdo
- havia a mesma quantidade de canibais e missionários no lado direito
- e a canoa estava do lado esquerdo

E, após a sequência de quatro passos acima, as mesmas condições continuam valendo.

Essa observação nos dá a ideia de que a sequência de 4 passos pode ser vista como uma “rotina” que leva 1 canibal e 1 missionário para o lado direito do rio, e que pode ser repetida outra vez.

Se isso for verdade, com 3 repetições o problema fica praticamente resolvido

$$\begin{array}{ccccc} (3C, 4M) < (0, 0) & \longrightarrow & (2C, 3M) > (1C, 1M) & \longrightarrow & (3C, 3M) < (0, 1M) \\ & & (2C, 2M) > (1C, 2M) & \longrightarrow & (2C, 3M) < (1C, 1M) \end{array}$$

De fato, não é difícil verificar que esse caminho não envolve nenhuma violação das regras.

E aqui nós temos um exemplo interessante de funcionamento da lógica.

Exercícios

1. O lobo, o carneiro e a alface

Um dia, um fazendeiro foi ao mercado e comprou um lobo, um carneiro e uma alface. No caminho para casa, o fazendeiro chegou à margem de um rio onde havia uma canoa. Mas, na travessia do rio, o agricultor podea levar apenas a si mesmo e uma única de suas compras — o lobo, o carneiro, ou a alface. Se fossem deixados sozinhos em uma mesma margem, o lobo comeria o carneiro e o carneiro comeria a alface. Como é que o fazendeiro pode chegar em casa com todas as suas coisas?

2. Ponte suspensa

Quatro pessoas precisam atravessar uma ponte suspensa no meio da noite. É muito perigoso atravessar a ponte no escuro, mas eles possuem apenas uma lanterna. Além disso, a ponte não parece aguentar mais do que duas pessoas de cada vez. As pessoas levam tempos diferentes para atravessar a ponte: 1 min, 2 min, 7 min e 10 min. Qual o menor tempo necessário para que todas as pessoas possam alcançar o outro lado?

3. Canibais e missionários (OPCIONAL)

Suponha que o problema é modificado, de modo que agora a canoa possa levar 3 pessoas.

- Você consegue resolver o problema com 5 canibais e 5 missionários?
- Você consegue resolver o problema com 5 canibais e 5 missionários?

4. Problemas de família (DIFÍCIL)

De um lado do rio estão a mãe e duas filhas, o pai e dois filhos, a governanta e o cachorro. Existe uma canoa com capacidade para duas pessoas (ou uma pessoa e o cachorro), mas apenas os adultos são capazes de manobrá-la.

As dificuldades da situação são:

- o pai não pode ser deixado com nenhuma das duas filhas quando a mãe não está lá
- a mãe não pode ser deixada com nenhum dos dois filhos quando o pai não está lá
- e, na ausência da governanta, o cachorro morde quem estiver por perto

Como é que a família pode atravessar o rio sem haver confusão?