



UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
Campus Russas

RUS0300-Algoritmos em Grafos

Aula 06: Grafos Planares

Professor Pablo Soares

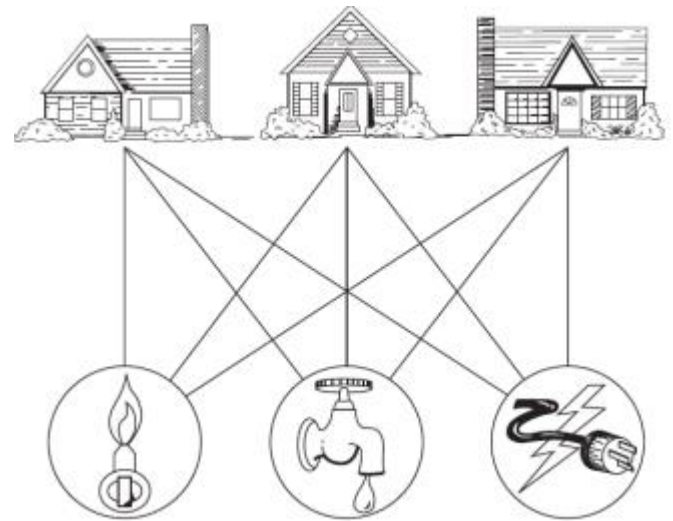
“Como o tecido do universo é o mais perfeito e fruto do trabalho do mais sábio Criador, nada acontece no universo sem que alguma lei de máximo e mínimo apareça.”

Sumário

- Um primeiro exemplo
- Grafo Planar
 - Definição
 - Exemplos
- Fórmula de Euler
 - Teorema (Equação)
 - Corolário (Inequação)
- Aplicações

Um primeiro exemplo

- Considere o problema de conectar três casas a cada uma de três infraestruturas (gás, água, energia) como mostrado na figura abaixo. É possível fazer essas ligações sem que elas se cruzem?



$K_{3,3}$

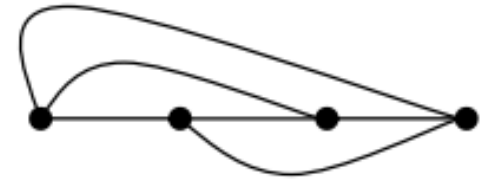
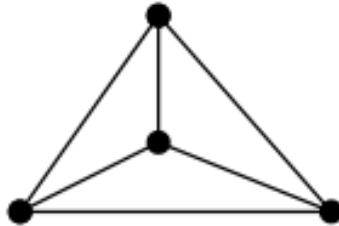
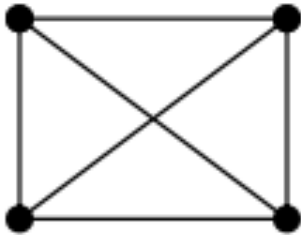
Um primeiro exemplo

Dado um grafo G , é possível encontrar uma representação gráfica para o grafo tal que não haja cruzamento de arestas?



Grafo Planar

- Exemplo K_4

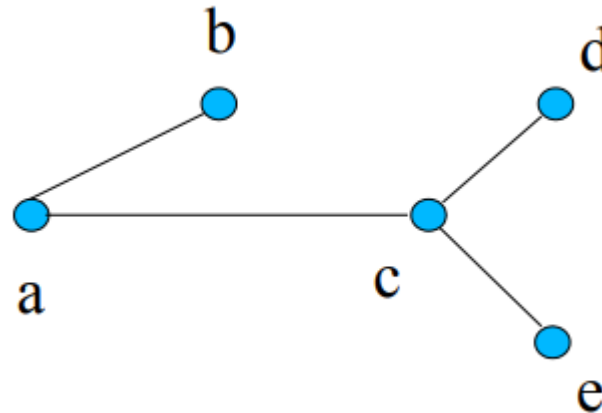
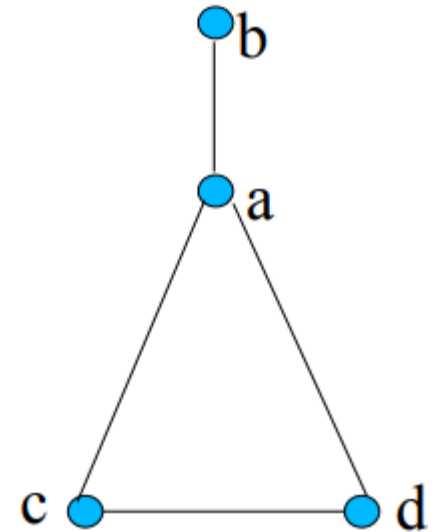
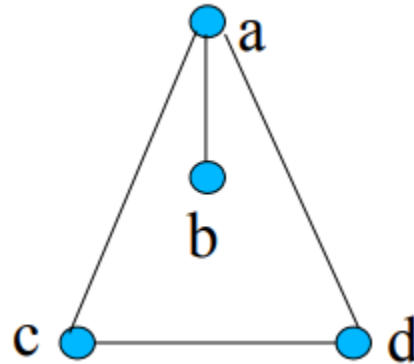
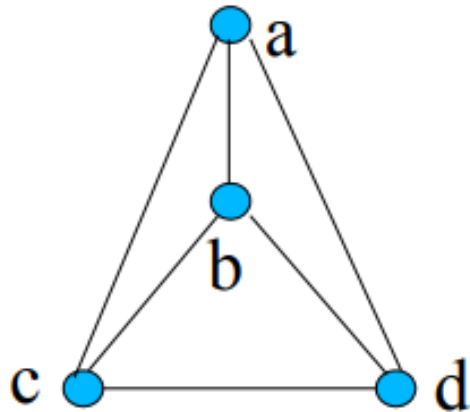


- Definição Grafo Planar

- Se puder ser representado graficamente no **plano** de tal forma que não haja **cruzamento** de suas arestas.
 - Caso contrário o grafo é dito **não-planar**.
- Grafo plano \rightarrow representação planar de um grafo planar
- Grafo Planar: Divide o plano em várias regiões
 - Uma delas é a região externa

Grafo Planar

- Exemplo K_4



4 regiões:

R1: ac,cb,ba

R2: ab, bd,da

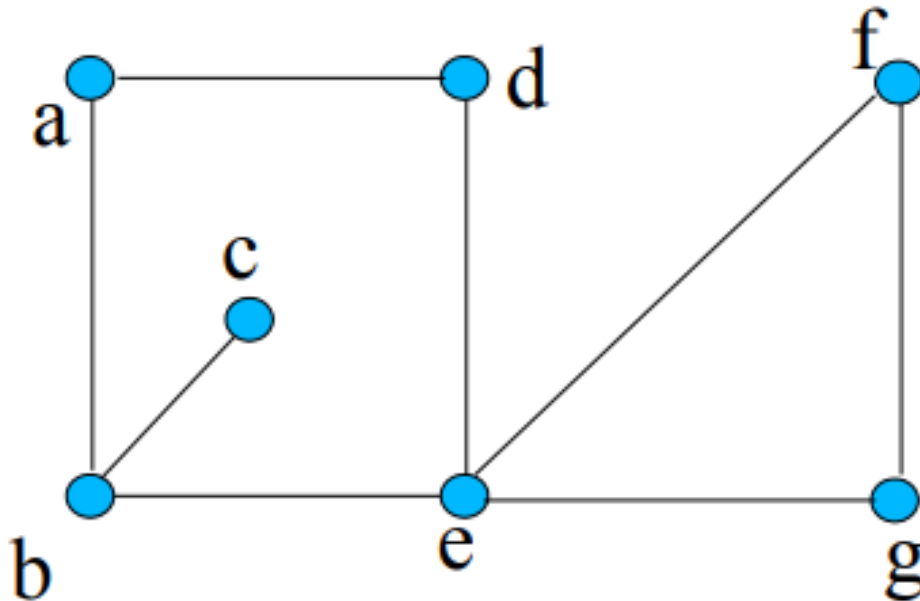
R3: bc, cd, db

R4: ac, cd,da (externa)

Fórmula de Euler

Teorema: Seja G um grafo planar simples com e arestas e v vértices. Seja r o número de regiões na representação planar de G .

$$r = e - v + 2$$



Fórmula de Euler

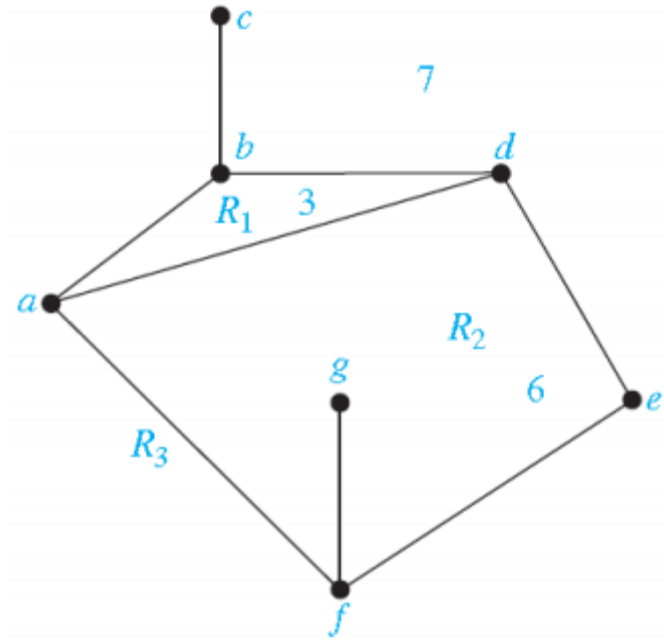
Exemplo: Seja um grafo simples conexo e planar com 20 vértices, cada um com grau 3. Em quantas regiões o plano é dividido em uma representação planar desse grafo?

$$r = 12$$

Inequação a partir da Fórmula de Euler

Grau de uma região ($\deg(R)$): número de arestas no limite de uma região.

OBS: Toda aresta que tem um vértice de grau 1 contribui com dois para o grau da região.

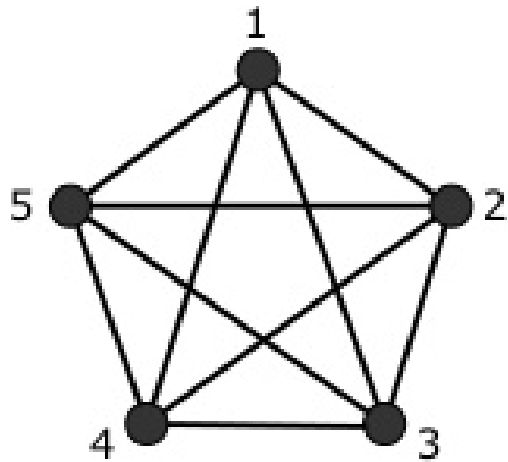


Corolário: Se G é um grafo simples conexo e planar com e arestas e v vértices, sendo $v \geq 3 \rightarrow e \leq 3v - 6$.

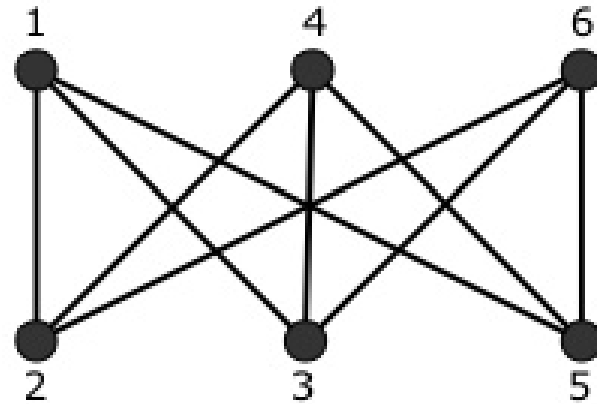
$$2e = \sum_R \deg(R) \geq 3r \Rightarrow r \leq \frac{2e}{3}$$

Grafo Planar

- Grafos particulares em planaridade



K_5 não é planar



$K_{3,3}$ não é planar

- Teorema de Kuratowski

- Qualquer grafo não pode ser planar

- se contém um destes grafos como subgrafo
- se obtido através destes pela simples adição de vértices às arestas

Aplicações





UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
Campus Russas

RUS0300-Algoritmos em Grafos

Aula 06: Grafos Planares

Professor Pablo Soares

2019.2

“Como o tecido do universo é o mais perfeito e fruto do trabalho do mais sábio Criador, nada acontece no universo sem que alguma lei de máximo e mínimo apareça.”