Lógica

aula 02: Vendo a verdade

1 Introdução

Na aula passada, nós vimos a história da lógica.

Nós vimos que a lógica aparece para dar conta das complicações dos jogos de linguagem.

E que a linguagem aparece para dar conta das complicações dos jogos de manipulação.

Nós também vimos que os jogos de manipulação são jogos de montar e desmontar coisas.

E que os jogos de montar e desmontar palavras e frases têm o nome de raciocínio.

Os jogos de manipulação se desenrolam no mundo concreto das coisas.

E os jogos de linguagem se desenrolam no mundo do pensamento (onde qualquer coisa vale).

A lógica chega, então, para botar ordem nas coisas, por meio de suas regras.

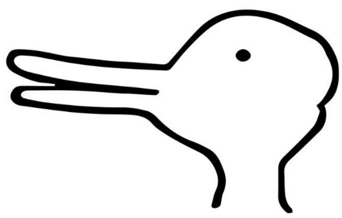
```
* Jogos de manipulação - (montar e desmontar) - [realidade concreta]

* Jogos de linguagem   -     (raciocínio)     -    [pensamento]

* Lógica - [Regras]
```

Na aula de hoje, nós vamos começar o nosso estudo da lógica.

Mas, ao invés de começar com a lógica propriamente dita, nós vamos começar com os jogos de manipulação matemáticos (que foi também o lugar onde a lógica começou ...).

2 Vendo a verdade

A verdade é algo que se pode ver.



Bom, ao menos em alguns casos ...

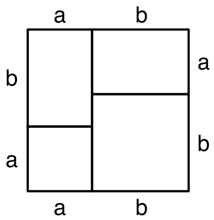
Considere a equação

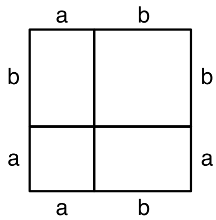
$$(a\ +\ b)^2 \quad = \quad a^2\ + 2ab\, b^2$$

É possíver verificar que essa equação é válida fazendo as contas

$$(a\ +\ b)^2 \quad = \quad (a\ +\ b)\cdot(a\ +\ b) \quad = \quad aa\ +\ ab\ +\ ba\ +\ bb \quad = \quad \ldots$$

Mas, também é possíver *ver* que esse fato é verdade, de duas maneiras diferentes





Você consegue ver?

É preciso alguma expicação?

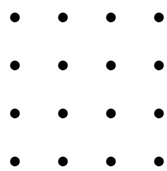
Vejamos outros exemplos.

Exemplo 1: Quadrados, triângulos e quadrados

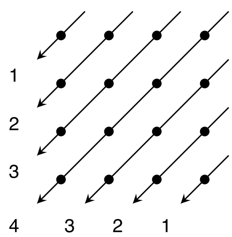
É fácil ver que

$$\begin{aligned} 4^2 \quad = \quad 4 \times 4 \quad = \quad 4\ +\ 4\ +\ 4\ +\ 4 \quad = \quad & 1\ +\ 1\ +\ 1\ +\ 1 \\ & +1\ +\ 1\ +\ 1\ +\ 1 \\ & +1\ +\ 1\ +\ 1\ +\ 1 \\ & +1\ +\ 1\ +\ 1\ +\ 1 \end{aligned}$$

Essa última expressão é claramente um quadrado



Agora, olhando para o quadrado pela diagonal



Nós descobrimos um fato interessante:

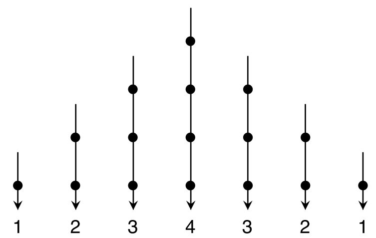
$$4^2 \quad = \quad 1 \; + \; 2 \; + \; 3 \; + \; 4 \; + \; 3 \; + \; 2 \; + \; 1$$

que vale para qualquer quadrado

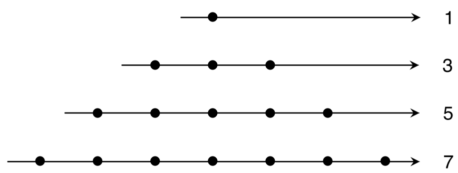
$$n^2 \quad = \quad 1 \; + \; 2 \; + \; \dots \; + \; (n-1) \; + \; n \; + \; (n-1) \; + \; \dots \; + \; 2 \; + \; 1$$

(Porque?)

A seguir, olhando para a nova equação por cima, nós vemos que ela é um triângulo



Mas nós também podemos olhar para esse triângulo de lado



E, fazendo isso, nós descobrimos mais um fato interessante

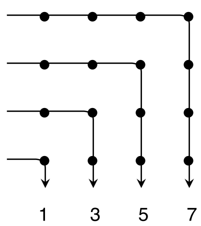
$$4^2 \quad = \quad 1 \; + \; 3 \; + \; 5 \; + \; 7$$

que também vale para qualquer quadrado

$$n^2 \quad = \quad 1 \; + \; 3 \; + \; \dots \; + \; 5 \; + \; (2n-1)$$

(Porque?)

Finalmente, de volta para o quadrado, nós descobrimos que, olhando para ele de um jeito um pouco mais complicado, nós também conseguimos ver a mesma expressão.



◇

Exemplo 2:

Considere a inequação

$$x \;+\; \frac{1}{x} \quad\geq\quad 2$$

Ela é válida para todo $x > 0$.

Mas, como é que nós podemos ver isso?

Bom, quando $x \geq 2$ ela é claramente verdadeira.

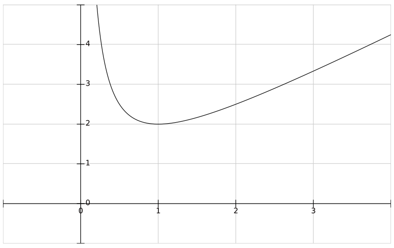
E para $x \leq 1/2$ também

Outro caso fácil é $x = 1$, pois

$$1 \;+\; \frac{1}{1} \quad=\quad 2 \quad\geq\quad 2$$

Mas, e nos outros casos?

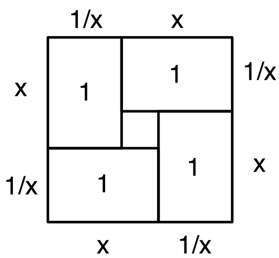
Alguém pode pensar em desenhar o gráfico da função $1 + 1/x$



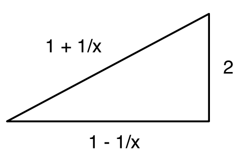
E agora nós podemos ver claramente que o gráfico está sempre acima de 2.

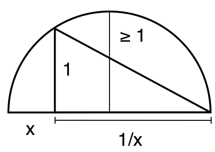
Mas, não há nada na figura que nos garanta que esse é realmente o gráfico de $1 + 1/x$ ...

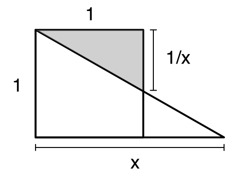
A figura abaixo oferece uma solução elegante para a nossa questão



E abaixo nós temos outras três soluções







Mas, cada uma delas precisa ser acompanhada de um pequeno argumento ...

(Qual, em cada caso?)

◇

Exemplo 3: Números de Fibonacci

Todos conhecem a sequência de Fibonacci

$$\begin{array}{ccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & \ldots \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 1 & 21 & \ldots \end{array}$$

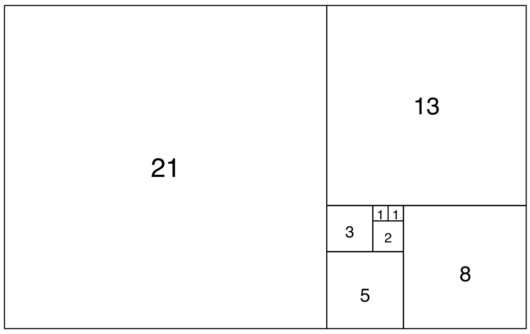
que é produzida pela regra

$$F_n \quad = \quad F_{n-1} \; + \; F_{n-2}$$

Mas, nem todo mundo conhece a curiosa equação

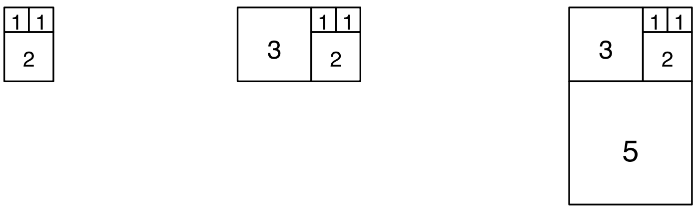
$$F_{n+1} \;\times\; F_n \quad = \quad F_1^2 \;+\; F_2^2 \;+\; F_3^2 \;+\; \ldots \;+\; F_n^2$$

cuja validade pode se ver na seguinte figura



Como é que alguém descobre uma coisa dessas?

Montando?



$\ldots$

Ou desmontando?

$$\begin{aligned} F_{n+1} \;\times\; F_n \quad &= \quad \big(F_n \;+\; F_{n-1}\big) \;\times\; F_n \\ &= \quad F_n \;\times\; F_{n-1} \;+\; F_n^2 \\ &= \quad \big(F_{n-1} \;+\; F_{n-2}\big) \;\times\; F_{n-1} \;+\; F_n^2 \\ &= \quad F_{n-1} \;\times\; F_{n-2} \;+\; F_{n-1}^2 \;+\; F_n^2 \\ &= \quad \ldots \end{aligned}$$

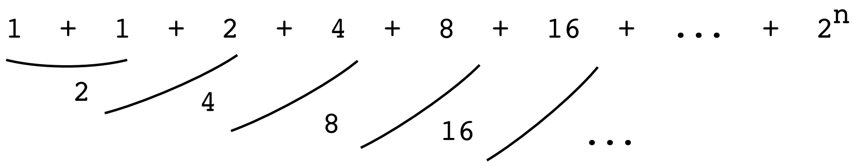
◇

3 Algumas verdades infinitas (que se pode ver)

Existe uma maneira fácil de se calcular a soma

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots + 2^n$$

Veja o que acontece quando nós adicionamos 1 a esse somatório



É fácil ver que essa soma vale 2^{n+1}.

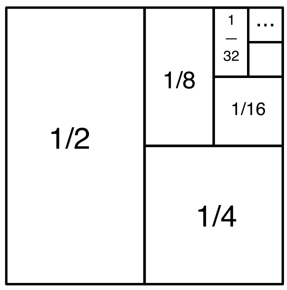
E daí nós descobrimos que a primeira soma vale $2^{n+1} - 1$.

Agora, suponha que, ao invés de dobrar cada termo para obter o próximo, nós tomamos a metade, e continuamos até o infinito

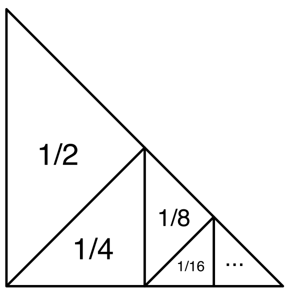
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$$

Quanto vale isso?

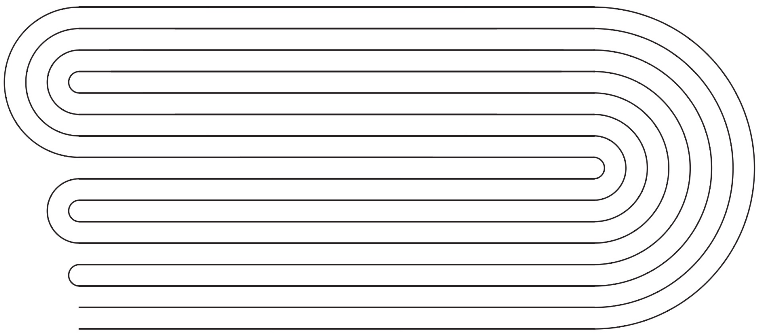
Essa figura nos dá a resposta



Abaixo nós temos outra maneira de ver a mesma coisa



E abaixo nós temos mais uma



$$1 + 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n.$$

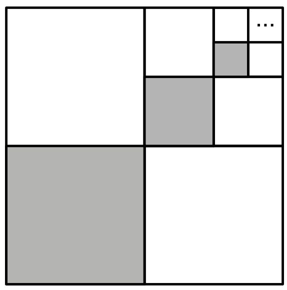
(Você consegue ver?)

Vejamos outros exemplos.

Exemplo 4: Considere o somatório

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots$$

e a figura

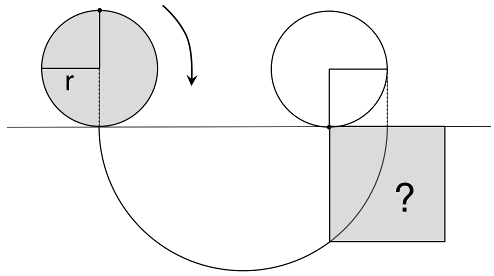


Quanto vale a soma?

$\diamond$

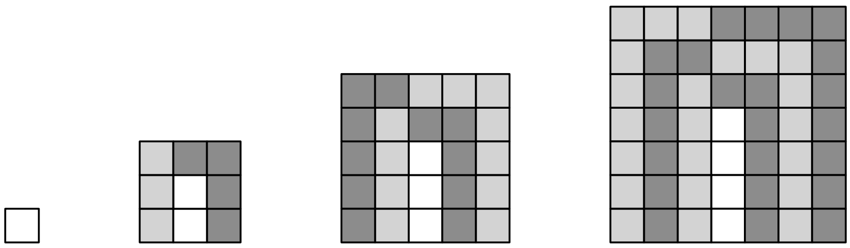
Exercícios

1. **Quadratura do círculo**



Qual é a área do quadrado?

2. **Outra decomposição do quadrado**



O que você pode ver nessa figura?

3. . . .

4. . . .

5. . . .

6. . . .

7. . . .