

Lógica

lista de exercícios 18 - solução

1. A estratégia de H1

Na aula de hoje, nós vimos que a regra H1 pode ser usada para

- colocar coisas na frente das coisas que a gente já tem ...

Utilize essa ideia para mostrar como se pode construir as seguintes regras:

a) $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)))$

uma solução curta:

Observe que o lado direito da regra é uma coisa que se pode construir com H1

$$A \rightarrow \underbrace{((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)))}_*$$

Logo, nós podemos iniciar a construção por aí, e depois nós colocamos o $A \rightarrow$ na frente

$$\begin{aligned} &\xRightarrow{H1} (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \\ &\xRightarrow{H1} ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)))) \\ &\xRightarrow{MP} A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))) \end{aligned}$$

Observando que os dois últimos passos do argumento correspondem a uma aplicação da estratégia

- colocar coisas na frente das coisas que a gente já tem ...

nós podemos simplificar a apresentação do argumento da seguinte maneira

$$\begin{aligned} &\xRightarrow{H1} (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \\ &\xRightarrow{R2} A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))) \end{aligned}$$

onde R2 é a regra de raciocínio que implementa a estratégia de H1.

uma solução longa:

Observe que o lado direito do lado direito do lado direito da regra é uma coisa que nós sabemos construir (isso foi um dos exemplos dessa aula)

$$A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow \underbrace{(A \rightarrow A)}_*))$$

Logo, nós podemos iniciar a construção por aí, e depois nós aplicamos R2 várias vezes

$$\stackrel{\dots}{\Rightarrow} A \rightarrow A$$

$$\stackrel{R2}{\Rightarrow} A \rightarrow (A \rightarrow A)$$

$$\stackrel{R2}{\Rightarrow} (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))$$

$$\stackrel{R2}{\Rightarrow} A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)))$$

◇

$$b) A \rightarrow \left((A \rightarrow A) \rightarrow \left((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))) \right) \right)$$

Dica: o importante aqui é ver o padrão de construção das regras.

Você deve mostrar cada aplicação da regra H1 e cada aplicação de Modus Ponens em separado, em um argumento passo a passo.

2. Raciocínios alternativos

De quantas maneiras diferentes você consegue construir a regra

$$(A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))$$

no jogo lógico de Hilbert?

Dica: existem ao menos 3 maneiras, mas pode haver mais ...

construção #1:

$$\stackrel{H1}{\Rightarrow} (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))$$

construção #2:

$$\stackrel{H1}{\Rightarrow} A \rightarrow (A \rightarrow A)$$

$$\stackrel{R2}{\Rightarrow} (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))$$

construção #3:

$$\stackrel{H2}{\Rightarrow} \left(A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \right) \rightarrow \left((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \right)$$

$$\stackrel{H1}{\Rightarrow} A \rightarrow (A \rightarrow A) \quad \stackrel{R2}{\Rightarrow} A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))$$

$$\stackrel{MP}{\Rightarrow} (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))$$

◇

3. A pergunta problemática de Ubiratan (DESAFIO)

Você consegue descobrir como construir a regra

$$((A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow A$$

no jogo lógico de Hilbert?

Solução:

Lembrando da construção de $A \rightarrow A$, nós poderíamos pensar em utilizar a regra H2.

Nesse caso, a regra que queremos apareceria como o lado direito do lado direito de alguma coisa construída com H2.

E isso já nós permite advinhar quem é p e r :

$$\underbrace{((A \rightarrow A) \rightarrow A)}_p \rightarrow \underbrace{A}_r$$

Deixando o q para advinhar depois, a construção com H2 seria a seguinte

$$\begin{aligned} \xRightarrow{H2} & \left(\underbrace{((A \rightarrow A) \rightarrow A)}_p \rightarrow (q \rightarrow \underbrace{A}_r) \right) \\ & \rightarrow \left(\left(\underbrace{((A \rightarrow A) \rightarrow A)}_p \rightarrow q \right) \rightarrow \left(\underbrace{((A \rightarrow A) \rightarrow A)}_p \rightarrow \underbrace{A}_r \right) \right) \end{aligned}$$

Agora, a ideia é escolher o q de modo que 2 aplicações de Modus Ponens nos dêem a regra que queremos.

O nosso palpite é $q = A \rightarrow A$.

Com esse q , o lado esquerdo da construção acima é o seguinte

$$\xRightarrow{H2} ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$$

e nós observamos que isso é uma coisa que pode ser construída com a regra R1.

Portanto, uma primeira aplicação de Modus Ponens já nos dá o lado direito da construção acima.

A seguir, nós precisamos construir o lado esquerdo desse lado direito

$$((A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$$

Mas isso pode ser feito com um raciocínio semelhante ao que fizemos na solução longa da primeira questão

$$\xRightarrow{\dots} A \rightarrow A \xRightarrow{R2} ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$$

◇