

# Lógica

## aula 13: Raciocinando sem saber nada

Ubiratan, um aluno imaginário da turma de Lógica, ficou muito curioso quando ouviu, algumas aulas atrás, que a lógica permite descobrir coisas sobre o mundo que a gente nunca viu antes.

Querendo tirar essa ideia à prova, ele começou a pensar da seguinte maneira:

*Imagina que eu fui capturado por um ET.*

*E que o ET me colocou num quarto fechado que não tem nada dentro.*

*Eu acordei lá dentro, e não sei nada sobre a situação.*

*Mas será que eu consigo descobrir alguma coisa só usando lógica?*

1. *Bom, eu posso começar perguntando se eu estou em Fortaleza:*

$F \text{ ?}$

*Mas, claro, como eu não tenho a menor ideia daonde eu tou, tudo o que eu posso responder é: “Sei lá!”*

2. *Tá bom, mas essa outra pergunta eu acho que consigo responder:*

- *“Supondo que eu sei que eu estou em Fortaleza, será que eu posso concluir que eu estou em Fortaleza?”*

$F \rightarrow F \text{ ?}$

*A resposta é: “Sim, claro!”*

*Porque se eu sei que eu estou em Fortaleza, então eu sei que eu estou em Fortaleza.*

3. *Legal, agora eu já sei alguma coisa.*

*E, sabendo disso, eu posso tentar responder a primeira pergunta de novo*

$(F \rightarrow F) \rightarrow F \text{ ?}$

*Quer dizer, sabendo que  $F \rightarrow F$  é verdade (que é uma coisa que eu já sei), será que eu posso concluir que eu estou em Fortaleza?*

*Hmm, dessa vez a pergunta é mais difícil.*

*Mas, peraí.*

*Eu não tenho a menor ideia daonde eu tou.*

*E é bem provável que eu esteja muito longe de Fortaleza — em outro planeta ...*

*Mas, mesmo assim eu sei que  $F \rightarrow F$  é verdade.*

*Quer dizer, é possível estar bem longe de Fortaleza e saber que  $F \rightarrow F$  é verdade.*

*Logo, saber que  $F \rightarrow F$  é verdade não garante que o sujeito está em Fortaleza.*

*Legal!*

*Mas, então, isso significa que se eu me perguntar*

$$(F \rightarrow F) \rightarrow F ?$$

*eu só posso responder: “Sei lá!”*

Tendo ficado satisfeito com o seu raciocínio, Ubiratan resolveu fazer a pergunta ao contrário.

4. *Agora, supondo que eu estou em Fortaleza, será que eu posso concluir que  $F \rightarrow F$  é verdade?*

$$F \rightarrow (F \rightarrow F) ?$$

*Ah, mas essa é fácil!*

*Agora pouco eu descobri que  $F \rightarrow F$  era verdade sem saber nada.*

*Isso significa que eu posso descobrir que  $F \rightarrow F$  é verdade em qualquer lugar — apenas raciocinando logicamente.*

*Mas, então, eu poderia descobrir que  $F \rightarrow F$  é verdade mesmo que eu estivesse em Fortaleza.*

*E isso significa que a resposta dessa pergunta é: “Sim, claro!”*

Nesse ponto, Ubiratan resolveu organizar as coisas que ele tinha descoberto

pergunta	resposta
$F ?$	<i>Sei lá!</i>
$F \rightarrow F ?$	<i>Sim, claro!</i>
$(F \rightarrow F) \rightarrow F ?$	<i>Sei lá!</i>
$F \rightarrow (F \rightarrow F) ?$	<i>Sim, claro!</i>

E daí ele continuou a fazer as suas perguntas.

5. *O que será que eu posso dizer sobre isso:*

$$(F \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow F) ?$$

*Bom, eu posso raciocinar sobre essa pergunta de duas maneiras.*

- a. *Por um lado, isso aqui é a mesma situação que a pergunta 2.*

*Quer dizer, se eu assumo que eu sei uma coisa, então eu posso concluir essa coisa.*

*Portanto, a resposta aqui deve ser: “Sim, claro!”*

b. Por outro lado, isso aqui é a mesma situação que a pergunta 4.

Quer dizer, se alguém me pergunta uma coisa que eu já respondi antes com “Sim, claro!” (i.e., raciocinando logicamente), então eu vou continuar respondendo “Sim, claro!” não importa aonde eu esteja ou o que eu venha a saber.

Portanto, a resposta aqui deve ser: “Sim, claro!”

Daí, examinando o primeiro raciocínio, Ubiratan descobriu uma coisa engraçada.

6. Há, há, há

Agora eu já sei um monte de coisa!

Quer dizer, usando qualquer pergunta que eu fiz até aqui, eu posso montar uma outra pergunta que tem resposta “Sim, claro!”

$$\begin{aligned} F &\rightarrow F ? \\ (F \rightarrow F) &\rightarrow (F \rightarrow F) ? \\ ((F \rightarrow F) \rightarrow F) &\rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F) ? \end{aligned}$$

etc.

Em outras palavras, eu descobri uma regra para montar perguntas que sempre tem a resposta “Sim, claro!”.

Depois, Ubiratan percebeu que podia fazer a mesma coisa com o segundo raciocínio.

7. Entendi!

Eu também posso montar perguntas com resposta “Sim, claro!” colocando uma pergunta com resposta “Sim, claro!” no lado direito e qualquer coisa do lado esquerdo

$$\begin{aligned} F &\rightarrow (F \rightarrow F) ? \\ F &\rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow (F \rightarrow F)) \\ ((F \rightarrow F) \rightarrow F) &\rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F)) ? \end{aligned}$$

E agora eu já tenho duas regras para montar perguntas que sempre tem a resposta “Sim, claro!”.

As coisas estavam começando a ficar realmente interessantes.

No começo, Ubiratan estava raciocinando para descobrir a resposta de certas perguntas.

E agora, ele estava raciocinando para descobrir regras que permitiam montar perguntas que tinham uma certa resposta.

Quando Ubiratan se deu conta disso, ele descobriu uma nova regra.

8. *Peraí!*

*Eu tou começando a entender esse negócio ...*

*A primeira regra que eu descobri veio da pergunta 2 — mas eu só percebi isso na pergunta 5.*

*E a segunda regra que eu descobri veio da pergunta 4 — o que eu também só percebi na pergunta 5.*

*Mas, então, deve ter alguma regra para eu descobrir com a pergunta 3.*

*Deixa eu ver o que tá acontecendo aqui*

$$(F \rightarrow F) \rightarrow F ?$$

*Bom, a pergunta é sobre se eu estou em Fortaleza ou não.*

*E eu estou assumindo que eu sei que  $F \rightarrow F$  é verdade.*

*Ora, mas eu não preciso assumir isso!*

*Quer dizer, eu consigo descobrir isso raciocinando logicamente.*

*Se algum dia alguém me perguntar alguma coisa e eu precisar saber que  $F \rightarrow F$  é verdade, então eu sempre posso fazer o raciocínio outra vez e descobrir que  $F \rightarrow F$  é verdade de novo.*

*Em outras palavras, assumir uma coisa que tem resposta “Sim, claro” (i.e., que pode ser concluída raciocinando logicamente) não me ajuda em nada.*

*E isso significa que a pergunta*

$$(F \rightarrow F) \rightarrow F ?$$

*é basicamente a mesma pergunta que*

$$F ?$$

*E assim, ela tem a mesma resposta: “Sei lá!”.*

*Hmm, entendi!*

*Isso me dá uma regra para montar perguntas que tem a resposta “Sei lá!”*

$$( \text{ "Sim, claro!" } \rightarrow \text{ "Sei lá!" } ) = \text{ "Sei lá!" }$$

*Quer dizer,*

- se eu colocar uma pergunta “Sei lá!” no lado direito
- e colocar uma pergunta “Sim, claro!” no lado esquerdo
- então, o resultado é uma pergunta “Sei lá!”

*Mas, pensando melhor, a regra é um pouco mais geral*

$$( \text{ "Sim, claro!" } \rightarrow \text{ < qq coisa > } ) = \text{ < qq coisa > }$$

*Quer dizer,*

- *se eu colocar uma pergunta qualquer no lado direito*
- *e colocar uma pergunta "Sim, claro!" no lado esquerdo*
- *então, o resultado é uma pergunta que tem a mesma resposta que a pergunta qualquer no lado direito*

Nesse ponto, Ubiratan resolveu organizar as suas ideias outra vez.

E descobriu que as suas regras podiam ser escritas de uma maneira mais simples.

Quer dizer, utilizando a letra V para indicar uma pergunta que tem a resposta "Sim, claro!", e a letra X para indicar uma pergunta qualquer, as regras podiam ser escritas da seguinte maneira

R1:  $X \rightarrow X : \text{ "Sim, claro!" }$

- i.e., colocando uma mesma pergunta qualquer no lado esquerdo e no lado direito, nós sempre obtemos uma pergunta que tem a resposta "Sim, claro!"

R2:  $X \rightarrow V : \text{ "Sim, claro!" }$

- i.e., colocando uma pergunta "Sim, claro!" no lado direito, e uma pergunta qualquer no lado esquerdo, nós sempre obtemos uma pergunta que tem a resposta "Sim, claro!"

R3:  $V \rightarrow X : \text{ a mesma resposta que X }$

- i.e., colocando uma pergunta "Sim, claro!" no lado esquerdo, e uma pergunta qualquer no lado direito, nós sempre obtemos uma pergunta que tem a mesma resposta que a pergunta qualquer