Lógica

prova 3: Raciocínio lógico (parte síncrona)

1. **Raciocinando com as regras R1, R2 e R3 do Ubiratan**

   Consider as duas perguntas abaixo:

$$\Big(((\mathtt{F} \to \mathtt{F}) \to \mathtt{F}) \to \mathtt{F}\Big) \to \mathtt{F}\,?$$

$$\mathtt{F} \to \Big(\mathtt{F} \to \Big(\mathtt{F} \to ((\mathtt{F} \to \mathtt{F}) \to \mathtt{F})\Big)\Big)\,?$$

   Uma delas tem resposta *"Sim, claro!"* e a outra tem resposta *"Sei, lá!"*.

   Determine a resposta de cada pergunta, e apresente raciocínios completos baseados nas regras R1, R2, R3, para justificar a sua resposta.

   Observações:

   - Você não deve raciocinar a partir da intuição.
   - E você também não deve utilizar fatos conhecidos para construir o seu argumento.
   - Você deve mencionar explicitamente cada uso das regras R1, R2, R3 no seu argumento.
   - E você pode utilizar as estratégias de uso das regras R1, R2, R3.

   solução:

   Começando com a primeira pergunta, nós observamos que o lado esquerdo do lado esquerdo do lado esquerdo

$$\Big((\underbrace{(\mathtt{F} \to \mathtt{F})}_{*} \to \mathtt{F}) \to \mathtt{F}\Big) \to \mathtt{F}\,?$$

   é uma pergunta com resposta "Sim, claro!" (pela regra R1).

   Logo, nós podemos aplicar a regra R3 para descartar essa parte do lado esquerdo do lado esquerdo, o que nos deixa com isso

$$\Big(\mathtt{F} \to \mathtt{F}\Big) \to \mathtt{F}\,?$$

   Aqui, nós observamos que o lado esquerdo

$$\underbrace{\Big(\mathtt{F} \to \mathtt{F}\Big)}_{*} \to \mathtt{F}\,?$$

   é uma pergunta com resposta "Sim, claro!" (pela regra R1).

Logo, nós podemos aplicar novamente a regra R3 *para descartar essa parte da regra, o que nos deixa com*

$$\texttt{F}\,?$$

que tem resposta "Sei, lá!".

Legal.

Então, a próxima pergunta deve ter resposta "Sim, claro!".

Vejamos.

O lado esquerdo do lado direito do lado direito do lado direito

$$\texttt{F} \;\rightarrow\; \Big(\texttt{F} \;\rightarrow\; \Big(\texttt{F} \;\rightarrow\; \big(\underbrace{(\texttt{F} \rightarrow \texttt{F})}_{*} \;\rightarrow\; \texttt{F}\big)\Big)\Big)\,?$$

é uma pergunta com resposta "Sim, claro!" (pela regra R1*).*

Logo, nós podemos aplicar a regra R3 *para descartar essa parte do lado direito do lado direito do lado direito, o que nos deixa com isso*

$$\texttt{F} \;\rightarrow\; \Big(\texttt{F} \;\rightarrow\; \Big(\texttt{F} \;\rightarrow\; \texttt{F}\Big)\Big)\,?$$

Aqui nós observamos que o lado direito do lado direito

$$\texttt{F} \;\rightarrow\; \Big(\texttt{F} \;\rightarrow\; \underbrace{\Big(\texttt{F} \;\rightarrow\; \texttt{F}\Big)}_{*}\Big)\,?$$

é uma pergunta com resposta "Sim, claro!" (pela regra R1*).*

Logo, nós podemos aplicar a regra R2 *para concluir que o lado direito é uma pergunta com resposta "Sim, claro!"*

$$\texttt{F} \;\rightarrow\; \texttt{V}\,?$$

E, nesse ponto, nós aplicamos a regra R2 *mais uma vez para concluir que a pergunta tem resposta "Sim, claro!".*

◇

2. **Raciocinando com as regras H1, H2 e MP do Hilbert**

Apresente um raciocínio completo (i.e., um raciocínio que só utiliza as regras de construção H1, H2 e o Modus Ponens) para demonstrar que a seguinte regra pode ser construída no jogo lógico de Hilbert

$$(\texttt{C} \rightarrow \texttt{B}) \;\rightarrow\; \big(\texttt{C} \;\rightarrow\; (\texttt{A} \rightarrow \texttt{B})\big)$$

Dica: raciocine em alto nível primeiro, usando regras e transformações conhecidas, e depois faça a engenharia reversa do seu raciocínio.

solução:

Observendo que o $\mathtt{C}$ *aparece na frente dos dois lados da regra, nós podemos imaginar que a regra é o resultado de uma distribuição, a partir disso aqui*

$$\mathtt{C} \;\to\; \big(\mathtt{B} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{B})\big)$$

Mas agora é fácil, porque a parte de dentro dessa regra pode ser construída com $\mathtt{H1}$

$$\stackrel{\mathtt{H1}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{B} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{B})$$

E depois é só aplicar $\mathtt{R2}$ *para colocar o* $\mathtt{C}$ *na frente*

$$\stackrel{\mathtt{R2}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{C} \;\to\; \big(\mathtt{B} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{B})\big)$$

Pronto, nós já temos todos os passos do raciocínio em alto nível, e agora é só fazer a engenharia reversa.

A aplicação inicial de $\mathtt{Dist}$ *corresponde ao seguinte uso de* $\mathtt{H2}$

$$\stackrel{\mathtt{H2}}{\Longrightarrow} \quad \Big(\mathtt{C} \;\to\; \big(\mathtt{B} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{B})\big)\Big) \;\to\; \Big((\mathtt{C} \to \mathtt{B}) \;\to\; \big(\mathtt{C} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{B})\big)\Big)$$

Abaixo, nós temos o argumento que constrói o lado esquerdo dessa regra

$$\stackrel{\mathtt{H1}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{B} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{B})$$

$$\stackrel{\mathtt{H1}}{\Longrightarrow} \quad \big(\mathtt{B} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{B})\big) \;\to\; \Big(\mathtt{C} \;\to\; \big(\mathtt{B} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{B})\big)\Big)$$

$$\stackrel{\mathtt{MP}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{C} \;\to\; \big(\mathtt{B} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{B})\big)$$

Finalmente, nós completamos o raciocínio aplicando Modus Ponens mais uma vez, na regra que foi construída com $\mathtt{H2}$

$$\stackrel{\mathtt{MP}}{\Longrightarrow} \quad (\mathtt{C} \to \mathtt{B}) \;\to\; \big(\mathtt{C} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{B})\big)$$

$\diamond$

3. Raciocinando sobre transformações

Imagine que nós queremos transformar essa regra

$$\big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{B} \to \mathtt{C})\big) \;\to\; \mathtt{D}$$

nessa regra aqui

$$\big((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \;\to\; \mathtt{C}\big) \;\to\; \mathtt{D}$$

Note que isso corresponde a uma aplicação da operação de associatividade no lado esquerdo da regra

$$\underbrace{\big(\texttt{A} \rightarrow (\texttt{B} \rightarrow \texttt{C})\big)}_{*} \rightarrow \texttt{D} \quad \xRightarrow{\texttt{Assoc 3.0}} \quad \underbrace{\big((\texttt{A} \rightarrow \texttt{B}) \rightarrow \texttt{C}\big)}_{*} \rightarrow \texttt{D}$$

Mas, lembre que essa é a direção em que a associatividade não vale (veja o exercício 2 da lista 20).

No entanto, se você examinar a solução do exercício 1 da lista 20b (i.e., os exercícios adicionais 20), você vai ver que é possível construir a regra que está por trás da transformação `Assoc 3.0`.

a) Explique intuitivamente porque nós podemos aplicar a associatividade na direção contrária no lado esquerdo de uma regra.

b) Apresente a construção da regra que está por trás da transformação `Assoc 3.0`

solução (a):

Uma explicação possível é que isso corresponde a uma operação de transitividade.

Quer dizer, nós sabemos que a seguinte regra pode ser construída (exercício 2 da lista 20)

$$\underbrace{\big((\texttt{A} \rightarrow \texttt{B}) \rightarrow \texttt{C}\big)}_{\texttt{X}} \rightarrow \underbrace{\big(\texttt{A} \rightarrow (\texttt{B} \rightarrow \texttt{C})\big)}_{\texttt{Y}}$$

E o esquema da transformação assume que nós já temos a regra

$$\underbrace{\big(\texttt{A} \rightarrow (\texttt{B} \rightarrow \texttt{C})\big)}_{\texttt{Y}} \rightarrow \underbrace{\texttt{D}}_{\texttt{Z}}$$

Logo, por transitivdade nós podemos ter

$$\underbrace{\big((\texttt{A} \rightarrow \texttt{B}) \rightarrow \texttt{C}\big)}_{\texttt{X}} \rightarrow \underbrace{\texttt{D}}_{\texttt{Z}}$$

solução (b):

Como vimos no exercício 2 da lista 20, é possível construir a regra

$$\big((\texttt{A} \rightarrow \texttt{B}) \rightarrow \texttt{C}\big) \rightarrow \big(\texttt{A} \rightarrow (\texttt{B} \rightarrow \texttt{C})\big)$$

Nós vamos deixar isso de lado por um momento, para ser utilizado mais adiante.

Começando com o lado esquerdo da transformação

$$\big(\texttt{A} \rightarrow (\texttt{B} \rightarrow \texttt{C})\big) \rightarrow \texttt{D}$$

Nós aplicamos a regra R2 *para colocar* $((\texttt{A} \rightarrow \texttt{B}) \rightarrow \texttt{C}$ *na frente da regra*

$$\overset{\texttt{R2}}{\Longrightarrow} \quad \big((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to \mathtt{C}\big) \;\to\; \Big(\big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{B} \to \mathtt{C})\big) \;\to\; \mathtt{D}\Big)$$

Em seguida nós aplicamos Dist

$$\overset{\texttt{Dist}}{\Longrightarrow} \quad \Big(\big((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to \mathtt{C}\big) \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{B} \to \mathtt{C})\big)\Big) \;\to\; \Big(\big((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \;\to\; \mathtt{C})\big) \;\to\; \mathtt{D}\Big)$$

Finalmente, nós aplicamos Modus Ponens (porque o lado esquerdo é a regra que nós tínhamos no início), para obter

$$\overset{\texttt{Dist}}{\Longrightarrow} \quad \big((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \;\to\; \mathtt{C})\big) \;\to\; \mathtt{D}$$

E isso completa a transformação.

$\diamond$

4. **Raciocinando com a disjunção**

O jogo lógico de Hilbert também possui as seguintes 3 regras para a disjunção:

[H6] $\mathtt{p} \;\to\; (\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$

[H7] $\mathtt{q} \;\to\; (\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$

[H8] $(\mathtt{p} \to \mathtt{r}) \;\to\; \Big((\mathtt{q} \to \mathtt{r}) \;\to\; \big((\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \to \mathtt{r}\big)\Big)$

Mostre como essas regras podem ser usadas para construir a regra

$$\big(\mathtt{B} \;\vee\; \mathtt{A}\big) \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\vee\; \mathtt{B}\big)$$

Dica: olha aqui

$$(\mathtt{p} \to \mathtt{r}) \;\to\; \Big((\mathtt{q} \to \mathtt{r}) \;\to\; \underbrace{\big((\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \to \mathtt{r}\big)}_{*}\Big)$$

solução:

Seguindo a dica, a ideia é que o fragmento

$$(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \to \mathtt{r}$$

da regra H8 *vai corresponder à regra que nós queremos construir*

$$\big(\mathtt{B} \;\vee\; \mathtt{A}\big) \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\vee\; \mathtt{B}\big)$$

Isso significa que

$$\mathtt{p} \;=\; \mathtt{B} \qquad\qquad \mathtt{q} \;=\; \mathtt{A} \qquad\qquad \mathtt{r} \;=\; (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})$$

E isso nos dá a seguinte regra construída com H8

$$\big(\mathtt{B} \to (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})\big) \;\to\; \Big(\big(\mathtt{A} \to (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})\big) \;\to\; \big((\mathtt{B} \vee \mathtt{A}) \;\to\; (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})\big)\Big)$$

Uma vez que nós temos essa regra, nós podemos realizar o seguinte raciocínio

$$\overset{\mathtt{H7}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{B} \;\to\; (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})$$

$$\overset{\mathtt{MP}}{\Longrightarrow} \quad \big(\mathtt{A} \to (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})\big) \;\to\; \big((\mathtt{B} \vee \mathtt{A}) \;\to\; (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})\big)$$

$$\overset{\mathtt{H6}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})$$

$$\overset{\mathtt{MP}}{\Longrightarrow} \quad (\mathtt{B} \vee \mathtt{A}) \;\to\; (\mathtt{A} \vee \mathtt{B})$$

O que nos dá o resultado desejado.

$\diamond$