Lógica

lista de exercícios 20

1. **O contrário da distributividade**

   Como já sabemos, a operação de distributividade é a seguinte

   $$\big(\mathtt{p} \;\rightarrow\; (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r})\big) \;\;\rightarrow\;\; \big((\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}) \;\rightarrow\; (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r})\big)$$

   Mas, e o contrário da distributividade, o que é?

   Bom, nós poderíamos pensar nisso

   $$\big((\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}) \;\rightarrow\; (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r})\big) \;\;\rightarrow\;\; \big(\mathtt{p} \;\rightarrow\; (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r})\big)$$

   ou nisso

   $$(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}) \;\;\rightarrow\;\; \Big((\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r}) \;\rightarrow\; \big(\mathtt{p} \;\rightarrow\; (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r})\big)\Big)$$

   A boa notícia é que essas duas regras podem ser construídas.

   E a sua tarefa nesse exercício é realizar as duas construções.

2. **A regra da associatividade**

   Examinando as duas regras do exercício anterior

   $$\big(\underbrace{(p \rightarrow q)}_{\mathtt{A}} \rightarrow \underbrace{(p \rightarrow r)}_{\mathtt{B}}\big) \rightarrow \underbrace{\big(p \;\rightarrow\; (q \rightarrow r)\big)}_{\mathtt{C}} \qquad\qquad \underbrace{(p \rightarrow q)}_{\mathtt{A}} \rightarrow \Big(\underbrace{(p \rightarrow r)}_{\mathtt{B}} \rightarrow \underbrace{\big(p \;\rightarrow\; (q \rightarrow r)\big)}_{\mathtt{C}}\Big)$$

   nós observamos que elas são compostas das mesmas partes, organizadas de maneiras diferentes.

   Nessa hora, a gente poderia pensar que essas duas coisas são a mesma coisa

   $$\mathtt{A} \;\rightarrow\; \big(\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C}\big) \qquad\qquad \big(\mathtt{A} \;\rightarrow\; \mathtt{B}\big) \;\rightarrow\; \mathtt{C}$$

   no sentido de que a gente sempre poderia transformar uma delas na outra e vice-versa.

   Mas, isso só seria verdade se a gente pudesse construir as seguintes regras

   $$\Big(\mathtt{A} \;\rightarrow\; \big(\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C}\big)\Big) \;\;\rightarrow\;\; \Big(\big(\mathtt{A} \;\rightarrow\; \mathtt{B}\big) \;\rightarrow\; \mathtt{C}\Big)$$

   e

   $$\Big(\big(\mathtt{A} \;\rightarrow\; \mathtt{B}\big) \;\rightarrow\; \mathtt{C}\Big) \;\;\rightarrow\;\; \Big(\mathtt{A} \;\rightarrow\; \big(\mathtt{B} \rightarrow \mathtt{C}\big)\Big)$$

   Uma dessas regras pode ser construída, mas a outra não.

a) Descubra qual dessas regras pode ser construída e qual não pode.

(Aqui você pode raciocinar intuitivamente, se quiser, ou usar qualquer outro método que você conheça. Mas, você também pode tentar realizar a construção.)

b) Apresente a construção da regra que se pode construir.

c) Chame a transformação associada a essa regra de $\xRightarrow{\texttt{Assoc}}$ (i.e., a operação de associatividade), e mostre como ela pode ser transformada na transformação mais geral $\xRightarrow{\texttt{Assoc 2.0}}$.

solução (a):

Uma maneira de simples de descobrir a regra que não pode ser construída é examinar casos particulares.

Por exemplo, imagine que $\texttt{A} = \texttt{B} = \texttt{C}$.

Nesse caso, as duas regras ficam assim:

$$\Big(\texttt{A} \;\to\; (\texttt{A} \to \texttt{A})\Big) \quad\to\quad \Big((\texttt{A} \;\to\; \texttt{A}) \;\to\; \texttt{A}\Big)$$

e

$$\Big((\texttt{A} \;\to\; \texttt{A}) \;\to\; \texttt{A}\Big) \quad\to\quad \Big(\texttt{A} \;\to\; (\texttt{A} \to \texttt{A})\Big)$$

Não é difícil ver que a segunda regra acima pode ser construída.

Mas a primeira não pode.

Para ver isso, basta ver o que acontece quando nós aplicamos R3 *duas vezes a essa regra*

$$\Big(\texttt{A} \;\to\; (\texttt{A} \to \texttt{A})\Big) \quad\to\quad \Big((\texttt{A} \;\to\; \texttt{A}) \;\to\; \texttt{A}\Big)$$

$$\xRightarrow{\texttt{R3}} \quad (\texttt{A} \;\to\; \texttt{A}) \;\to\; \texttt{A}$$

$$\xRightarrow{\texttt{R3}} \quad \texttt{A}$$

Quer dizer, se a gente pudesse construir essa regra, então a gente poderia construir A.

Mas, a gente não pode construir A *(porque isso tem resposta "Sei lá!").*

Logo, a gente não pode construir a regra.

solução (b):

Raciocínio via transformações:

$$(\texttt{A} \to \texttt{B}) \;\to\; \texttt{C}$$

$$\xRightarrow{\texttt{L1}} \quad \Big(\texttt{B} \;\to\; (\texttt{A} \to \texttt{B})\Big) \;\to\; (\texttt{B} \to \texttt{C})$$

$$\overset{\texttt{L1}}{\Longrightarrow} \quad \Big(\texttt{A} \to (\texttt{B} \to (\texttt{A} \to \texttt{B}))\Big) \to \big(\texttt{A} \to (\texttt{B} \to \texttt{C})\big)$$

$$\overset{\texttt{H1}}{\Longrightarrow} \quad \texttt{B} \to (\texttt{A} \to \texttt{B}) \quad \overset{\texttt{R2}}{\Longrightarrow} \quad \texttt{A} \to \big(\texttt{B} \to (\texttt{A} \to \texttt{B})\big)$$

$$\overset{\texttt{MP}}{\Longrightarrow} \quad \texttt{A} \to (\texttt{B} \to \texttt{C})$$

Agora, a gente usa o resultado obtido na aula de hoje.

Quer dizer, o fato de que se a gente tem a transformação então é possível construir a regra.

E isso nos dá a construção que queremos

$$\Big((\texttt{A} \to \texttt{B}) \to \texttt{C}\Big) \to \Big(\texttt{A} \to (\texttt{B} \to \texttt{C})\Big)$$

solução (c):

Faz sentido chamar a transformação

$$(\texttt{A} \to \texttt{B}) \to \texttt{C} \qquad \Rightarrow \qquad \texttt{A} \to (\texttt{B} \to \texttt{C})$$

de associatividade (à direita), pois o par de parênteses foi movido para a direita.

Nesse sentido, a versão 2.0 da associatividade (à direita) seria algo assim

$$\Big((\texttt{A} \to \texttt{B}) \to \texttt{C}\Big) \to \texttt{D} \quad \xrightarrow{\textsf{Assoc 2.0}} \quad \texttt{A} \to \Big(\texttt{B} \to (\texttt{C} \to \texttt{D})\Big)$$

E nós vamos deixar a sua construção como exercício.

*(*Dica: *basta mostrar como transformar o lado esquerdo no lado direito, de maneira análoga ao que foi feito no ítem (b).)*

$\diamond$

3. **Transitividade 2.0**

Veja se você consegue construir essa regra de transitividade de 3 passos:

$$(\texttt{A} \to \texttt{B}) \to \Big((\texttt{B} \to \texttt{C}) \to \big((\texttt{C} \to \texttt{D}) \to (\texttt{A} \to \texttt{D})\big)\Big)$$

solução:

Uma ideia é construir a seguinte regra com duas transitividades de 2 passos

$$\underbrace{(\texttt{A} \to \texttt{B}) \to \Big((\texttt{B} \to \texttt{C}) \to (\texttt{A} \to \texttt{C})}_{*}\overbrace{\to \big((\texttt{C} \to \texttt{D}) \to (\texttt{A} \to \texttt{D})\big)}^{*}\Big)$$

Para construir essa regra, basta começar com a transitividade mais interna

$$(\mathtt{A} \to \mathtt{C}) \;\to\; \big((\mathtt{C} \to \mathtt{D}) \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{D})\big)$$

E depois colocar os outros dois termos na frente, usando a regra `R2`*.*

Daí, uma vez que nós temos a regra, nós aplicamos `Dist` *do lado direito*

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\mathtt{Dist}} \quad & (\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \\ \to \quad & \Big(\big((\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{C})\big) \;\to\; \big((\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \;\to\; \big((\mathtt{C} \to \mathtt{D}) \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{D})\big)\big)\Big) \end{aligned}$$

E depois aplicamos `Dist` *outra vez*

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\mathtt{Dist}} \quad & \Big((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \;\to\; \big((\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{C})\big)\Big) \\ \to \quad & \Big((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \;\to\; \big((\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \;\to\; \big((\mathtt{C} \to \mathtt{D}) \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{D})\big)\big)\Big) \end{aligned}$$

Agora, basta colocar essa versão da regra da transitividade no jogo

$$(\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \;\to\; \big((\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{C})\big)$$

E daí aplicar Modus Ponens para chegar no resultado desejado

$$\xRightarrow{\mathtt{MP}} \quad (\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \;\to\; \big((\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \;\to\; \big((\mathtt{C} \to \mathtt{D}) \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{D})\big)\big)$$

$\diamond$