Lógica

lista de exercícios 19

1. **Raciocínios completos**

   Apresente raciocínios completos (i.e., começando com as regras H1 e H2, e só aplicando Modus Ponens), para construir as seguintes regras

   a) $\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{B} \to \mathtt{B})$

   b) $\mathtt{A} \;\to\; \Big(\big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{B})\big) \;\to\; \mathtt{B}\Big)$

   solução (a):

   Uma ideia simples para construir raciocínios completos consiste em fazer primeiro o raciocínio com construções e transformações conhecidas, e depois fazer a engenharia reversa do argumento.

   Vejamos.

   Na aula 18 nós vimos como construir regras da forma $\mathtt{X} \to \mathtt{X}$.

   Logo, nós começamos o argumento por aqui:

   $$\overset{(18)}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{B} \;\to\; \mathtt{B}$$

   E, uma vez que nós temos isso, basta aplicar R2 *para chegar na a regra que queremos*

   $$\overset{\mathtt{R2}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{B} \;\to\; \mathtt{B}\big)$$

   Legal.

   Agora, nós começamos a engenharia reversa escrevendo o raciocínio que constrói $\mathtt{B} \to \mathtt{B}$

   $$\overset{\mathtt{H2}}{\Longrightarrow} \quad \Big(\mathtt{B} \;\to\; \big((\mathtt{B} \to \mathtt{B}) \;\to\; \mathtt{B}\big)\Big) \;\to\; \Big(\big(\mathtt{B} \to (\mathtt{B} \to \mathtt{B})\big) \;\to\; (\mathtt{B} \to \mathtt{B})\Big)$$

   $$\overset{\mathtt{H1}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{B} \;\to\; \big((\mathtt{B} \to \mathtt{B}) \;\to\; \mathtt{B}\big)$$

   $$\overset{\mathtt{MP}}{\Longrightarrow} \quad \big(\mathtt{B} \to (\mathtt{B} \to \mathtt{B})\big) \;\to\; (\mathtt{B} \to \mathtt{B})$$

   $$\overset{\mathtt{H1}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{B} \;\to\; (\mathtt{B} \to \mathtt{B})$$

   $$\overset{\mathtt{MP}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{B} \to \mathtt{B}$$

   (tudo o que nós fizemos aqui foi copiar o raciocínio da aula 18, trocando o A *por* B*)*

   E para finalizar, nós lembramos que R2 *é só o truque de raciocínio de* H1*: colocar alguma coisa na frente de uma coisa que a gente já tem*

   $$\overset{\mathtt{H1}}{\Longrightarrow} \quad (\mathtt{B} \to \mathtt{B}) \;\to\; \big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{B} \to \mathtt{B})\big)$$

   $$\overset{\mathtt{MP}}{\Longrightarrow} \quad \mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{B} \to \mathtt{B})$$

   ◇

2. **Duas regras compridas**

Considere a regra abaixo

$$\texttt{(A} \to \texttt{B)} \;\to\; \Big(\texttt{(B} \to \texttt{A)} \;\to\; \big(\texttt{(A} \to \texttt{C)} \;\to\; \texttt{(B} \to \texttt{C)}\big)\Big)$$

a) Explique porque essa regra faz sentido intuitivamente.

b) Apresente uma construção para essa regra.

c) Repita o exercício para a seguinte regra

$$\texttt{(A} \to \texttt{B)} \;\to\; \Big(\texttt{(B} \to \texttt{A)} \;\to\; \big(\texttt{(B} \to \texttt{C)} \;\to\; \texttt{(A} \to \texttt{C)}\big)\Big)$$

solução (a,b):

Intuitivamente a regra faz sentido, porque as duas primeiras partes estão basicamente dizendo que `A` *e* `B` *são a mesma coisa*

$$\underbrace{\texttt{(A} \to \texttt{B)} \;\to\; \Big(\texttt{(B} \to \texttt{A)}}_{*} \;\to\; \big(\texttt{(A} \to \texttt{C)} \;\to\; \texttt{(B} \to \texttt{C)}\big)\Big)$$

E daí, é bem fácil ver que nessa situação

$$\texttt{(A} \to \texttt{C)} \;\to\; \texttt{(B} \to \texttt{C)}$$

Legal!

A seguir, a construção da regra é mais fácil ainda, uma vez que a gente observa que a parte de dentro é a regra da transitividade

$$\texttt{(A} \to \texttt{B)} \;\to\; \Big(\underbrace{\texttt{(B} \to \texttt{A)} \;\to\; \big(\texttt{(A} \to \texttt{C)} \;\to\; \texttt{(B} \to \texttt{C)}\big)}_{*}\Big)$$

Quer dizer, nessa aula 19 nós vimos um argumento para a construção da regra de transitividade

$$\stackrel{\texttt{(19)}}{\Longrightarrow} \quad \texttt{(B} \to \texttt{A)} \;\to\; \big(\texttt{(A} \to \texttt{C)} \;\to\; \texttt{(B} \to \texttt{C)}\big)$$

E, uma vez que nós temos essa regra, basta aplicar `R2` *para obter o resultado desejado*

$$\stackrel{\texttt{R2}}{\Longrightarrow} \quad \texttt{(A} \to \texttt{B)} \;\to\; \Big(\texttt{(B} \to \texttt{A)} \;\to\; \big(\texttt{(A} \to \texttt{C)} \;\to\; \texttt{(B} \to \texttt{C)}\big)\Big)$$

◇

3. **Redundância lógica**

Na vídeo aula, nós argumentamos que a regra abaixo fazia sentido

$$\big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\big) \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})$$

porque intuitivamente as duas regras abaixo são a mesma coisa

$$\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \qquad\qquad \mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}$$

Quer dizer, assumir que você sabe `A` em uma situação onde você já assume que sabe `A` não deveria fazer diferença.

Mas, se isso é verdade, então essas duas regras também deveriam ser a mesma coisa

$$\mathtt{A} \ \rightarrow \ \big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\big) \qquad\qquad \mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}$$

Para demonstrar esse fato, basta mostrar que uma pode ser transformada na outra, e vice-versa.

E, para fazer isso, você deve

a) Apresentar uma construção para a regra

$$\Big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ \big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\big)\Big) \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})$$

b) Apresentar uma construção para a regra

$$(\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B}) \ \rightarrow \ \Big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ \big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\big)\Big)$$

solução (a):

Começando com a regra

$$\big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\big) \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})$$

Nós aplicamos a regra `R2` *para obter*

$$\stackrel{\mathtt{R2}}{\Longrightarrow} \quad \Big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ \big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\big)\Big) \ \rightarrow \ \Big(\big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\big) \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\Big)$$

Em seguida nós aplicamos `Dist`

$$\stackrel{\mathtt{Dist}}{\Longrightarrow} \quad \bigg(\Big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ \big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\big)\Big) \ \rightarrow \ \big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\big)\bigg)$$
$$\rightarrow \ \bigg(\Big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ \big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\big)\Big) \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\bigg)$$

O próximo passo é aplicar `L1` *na regra original, para obter o lado esquerdo*

$$\stackrel{\mathtt{L1}}{\Longrightarrow} \quad \Big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ \big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\big)\Big) \ \rightarrow \ \big(\mathtt{A} \ \rightarrow \ (\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{B})\big)$$

Finalmente, uma aplicação de Modus Ponens nos dá o resultado desejado

$$\overset{\texttt{MP}}{\Longrightarrow} \quad \Big(\texttt{A} \;\to\; \big(\texttt{A} \;\to\; (\texttt{A} \to \texttt{B})\big)\Big) \;\to\; (\texttt{A} \to \texttt{B})$$