

Lógica para curiosos

aula 06: Raciocinando sobre verdadeiro e falso

1 Introdução

Na aula passada, nós aprendemos mais um pouquinho sobre lógica.

Isto é, depois de termos ganhado alguma ideia sobre o que é a lógica, o que é uma regra, e o que é a verdade, nós fomos apresentados à noção de *argumento*.

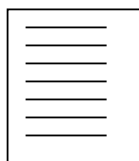
Mas, o que é um argumento?

Bom, em certo sentido, um argumento é um caminho ou uma prova.

Isto é, aquilo que nos permite ver uma verdade (ou uma conexão).

Os argumentos, no entanto, tem uma peculiaridade: eles são construídos como uma sequência de afirmações (ao invés, por exemplo, de uma sequência de transformações de um objeto).

Nós poderíamos dizer, então, que um argumento é como um *programa*



De fato, ambos nos dão uma resposta no final.

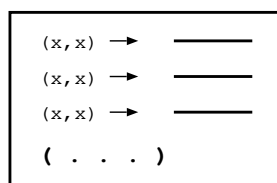
A diferença é que, no caso do programa, a resposta em geral é um valor que é calculado ao longo dos vários passos, enquanto que, no caso do argumento, a resposta é uma conexão (ou uma verdade) que decorre como consequência dos vários passos.

Em outras palavras, enquanto o programa produz uma informação, o argumento produz um entendimento.

Mas, essa não é uma diferença tão grande assim ...

Outra observação interessante é que as linhas (ou afirmações) de um argumento podem ser vistas como instruções (ou regras) que são executadas passo a passo.

Recordando a aula passada, nós observamos que as linhas de um argumento tem, tipicamente, todas o mesmo formato



Isto é, todas elas são instruções da forma

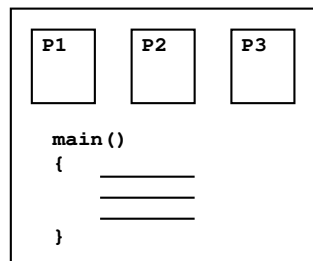
Porque (tal e tal coisa) são o caso,
nós podemos concluir essa outra coisa

E isso nos permite ver que o argumento vai estabelecendo, pouco a pouco, diversas conexões entre as coisas que sabemos, até nós levar à conclusão final.

(Da mesma forma que um programa vai modificando , pouco a pouco, os valores armazenados em memória, até produzir o resultado final.)

Finalmente, existe mais uma semelhança interessante entre argumentos e programas.

Quando um programa começa a ficar complicado, é comum que ele seja reorganizado na forma de uma coleção de pequenos programinhas (ou subrotinas), que são chamadas a partir do programa principal.



Da mesma maneira, quando nós examinamos um argumento complicado, é comum encontrarmos pequenas porções aqui e ali que produzem conclusões parciais que são utilizadas mais tarde em linhas da forma

Por causa das conclusões (tais e tais) que obtivemos acima,
nós podemos concluir essa outra coisa

Em alguns casos, essas pequenas porções de argumento podem ser apresentadas em separado, para facilitar o entendimento.

(Como nos livros de matemática, onde os argumentos são todos organizados em coleções de lemas, teoremas, corolários, etc.)

E aqui nós chegamos à nossa última ideia.

Da mesma maneira que uma rotina pode ser vista como uma nova instrução de alto nível que é utilizada no programa principal, as pequenas porções de argumento constroem novas regras de alto nível

*O raciocínio lógico é a atividade do pensamento onde nós construímos regras
que mais adiante vão guiar o desenrolar do próprio pensamento.*

2 Raciocinando sobre verdadeiro e falso

Três suspeitos fazem as seguintes declarações:

João: *Não fui eu!*

Abraão: *Não fui eu!*

Sebastião: *Foi o Abraão.*

Você sabe que apenas uma dessas declarações é verdadeira.

Quem é o culpado?

A novidade desse problema é que nós não podemos confiar em todas as informações dadas.

Por exemplo, Abraão e Sebastião não podem ambos estar falando a verdade.

Por outro lado, nós temos a informação adicional de que apenas uma das declarações é verdadeira, e é isso que nos permite resolver o problema.

Vejamos.

(1) Abraão e Sebastião dizem coisas opostas.

Logo, um deles está falando a verdade e o outro está mentindo.

(2) Mas, se o que Sebastião diz é verdade,
então João também está dizendo a verdade.

(3) Ora, nós já sabemos que apenas uma das declarações é verdadeira.
Portanto, é Abraão quem diz a verdade.

(4) Finalmente, se Abraão diz a verdade então João está mentindo
e isso significa que é ele o culpado.

A seguir, nós vamos ver mais exemplos de raciocínios sobre verdadeiro e falso.

Exemplo 1: Quatro suspeitos

Quatro suspeitos fazem as seguintes declarações:

Pardal: *Foi o Rolinha.*

Rolinha: *Foi o Pardal.*

Cotovia: *O Rolinha está dizendo a verdade.*

Pica-pau: *O Cotovia não está mentindo.*

Dentre essas declarações, três são falsas.

Quem é o culpado?

Nós podemos raciocinar da seguinte maneira:

- (1) Cotovia não pode estar falando a verdade, porque senão Rolinha estaria dizendo a verdade também, o que não pode ser (pois apenas um diz a verdade).
Logo, Cotovia está mentindo.
- (2) Mas, se Cotovia está mentindo, então Rolinha também está mentindo.
E agora nós já podemos concluir que não Pardal não é o culpado.
- (3) Por outro lado, se Cotovia está mentindo, então Pica-pau também está mentindo.
- (4) Agora, nós já sabemos que Cotovia, Rolinha e Pica-pau estão mentindo.
Mas isso significa que é Pardal quem está dizendo a verdade.
- (5) Ora, se Pardal diz a verdade, então o culpado é Rolinha.

◇

Exemplo 2: Sensatos, sarcásticos and sacanas

Em uma ilha existe 3 tipos de pessoa:

- os sensatos, que sempre dizem a verdade
- os sarcásticos, que sempre mentem
- os sacanas, que mentem ou falam a verdade quando tem vontade

Três pessoas se aproximam de você com vestindo azul, vermelho e verde.

Você sabe que um deles é sensato, outro é sarcástico, e outro é sacana (mas não sabe quem é quem).

Você pergunta: “Quem de vocês é o sacana?”

Eles respondem

Azul: O sacana está de vermelho.

Vermelho: Não, o sacana está de verde.

Verde: Não, o sacana está mesmo de vermelho.

Quem é quem?

Solução:

- (1) Note que Azul e Verde dizem a mesma coisa.
Logo, eles não podem ser o sensato e o sarcástico.
Isto é, um deles deve ser o sacana.
- (2) Agora, se Azul ou Verde é o sacana,
então ambos estão mentindo.
E isso significa que Vermelho deve ser o sensato.
- (3) Mas, se vermelho é o sensato, então o que ele diz é verdade.
E isso significa que Verde é o sacana.

◇

Exemplo 3: O curinga

Três cartas estão sobre uma mesa com a face voltada para baixo: uma delas é uma carta vermelha, outra é uma carta preta, e a outra é o curinga.

No verso das cartas alguém escreveu:



Além disso, você sabe que

- *A frase escrita na carta vermelha é verdadeira*
- *A frase escrita na carta preta é falsa*
- *A frase escrita no curinga pode ser verdadeira ou falsa*

Quem é o curinga?

- (1) Note que as cartas 1 e 3 dizem a mesma coisa.
Isso significa que ambas dizem a verdade ou ambas dizem algo falso.
Isto é, não é possível que uma diga a verdade e outra diga uma falsidade.
Logo, não é possível que uma seja a carta vermelha e a outra a carta preta.
E isso significa que uma delas deve ser o curinga!
- (2) Agora, se a carta 1 é o curinga então a carta 3 está mentindo,
e logo ela deve ser a carta vermelha.
Mas, se a carta 1 é o curinga então a carta 2 também está mentindo,
e deveria ser ela a carta vermelha.
Mas, só existe uma carta vermelha.
Portanto, a carta 1 não pode ser o curinga!
- (3) A conclusão imediata a partir de (1) e (2) é que a carta 3 é o curinga.
E nós também podemos deduzir que a carta 1 é preta,
e que a carta 2 é vermelha.

◇

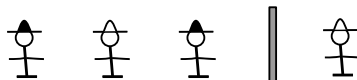
3 Mais exemplos

A seguir, nós temos mais exemplos de raciocínio sobre verdadeiro e falso.

Exemplo 1: O problema do chapéu

Quatro homens estão e fila, todos eles olhando para frente, e o primeiro deles se encontra atrás de uma parede.

Cada homem tem um chapéu na cabeça, mas eles não sabem a sua cor. Tudo o que eles sabem é que 2 chapéus são brancos e 2 chapéus são pretos.



Suponha que as cores dos chapéus são como ilustrado na figura.

Quais deles conseguem descobrir a cor do seu próprio chapéu?

Exemplo 2: Três suspeitos

Um cavalo, um burro e uma vaca foram roubados, e 3 suspeitos fazem as seguintes declarações:

Juca: O Pinduca roubou o cavalo.

Pituca: O Pinduca roubou o burro.

Pinduca: Não é verdade! Eu não roubei nem o cavalo nem o burro.

Você sabe que

- *De fato, cada um deles roubou um dos animais.*
- *Aquele que roubou a vaca está mentindo.*
- *Aquele que roubou o cavalo está falando a verdade.*

Quem roubou cada animal?

Exemplo 3: Dias da semana

Asheley, Britney, Charles, David, Erika, Frank, and Gusti are having an argument about which day of the week it is.

They speak as follows:

Ashley: The day after tomorrow is Wednesday.

Britney: No, it is Wednesday today.

Charles: You are both wrong; it is Wednesday tomorrow.

David: Nonsense. Today is neither Monday, Tuesday, nor Wednesday.

Erika: *I'm quite sure Yesterday was Thursday.*

Frank: *No, tomorrow is Thursday.*

Gusti: *All I know is that yesterday was not Saturday.*

If only one of the remarks is true, what day of the week is it?

Exemplo 4: (. . .)

(. . .)

◇

Exemplo 5: Sensatos, sarcásticos e sacanas 2

Na mesma ilha dos sensatos, sarcásticos e sacanas ...

Três pessoas se aproximam de você com vestindo azul, vermelho e verde.

Você sabe que um deles é sensato, outro é sarcástico, e outro é sacana (mas não sabe quem é quem).

Eles dizem o seguinte:

Azul: Eu sou sensato.

Vermelho: Ele está dizendo a verdade.

Verde: E eu sou sacana.

Quem é quem?

Exercícios

1. Aniversários

Dois irmãos sempre dizem a verdade, com apenas uma exceção: cada um deles mente sobre o dia do seu aniversário no dia do seu aniversário.

Se você pergunta a eles no dia 31 de dezembro qual é o dia do seu aniversário, um deles diz “ontem”, e o outro diz “amanhã”.

Se você repete a pergunta no dia seguinte, ambos dão a mesma resposta.

Qual é o dia do aniversário de cada um?

2. Verdadeiro ou falso?

Exatamente uma das afirmações abaixo é falsa.

A: *A afirmação D é verdadeira.*

B: *A afirmação A é falsa.*

C: *A afirmação B é falsa.*

D: *A afirmação C é verdadeira.*

Você consegue descobrir qual é?

3. Mais um problema do chapéu

Três pessoas sabem que tem um chapéu vermelho ou um chapéu azul na cabeça.

Eles devem levantar a mão se vêem um chapéu vermelho na cabeça de alguém.

Aquele que advinha a cor do seu próprio chapéu ganha o jogo.

Todos levantam a mão.

Após alguns momentos, onde todos olham um para o outro sem adivinhar, um deles diz “vermelho” e ganha o jogo.

Como é que essa pessoa adivinhou a cor do seu próprio chapéu, e qual é a cor dos chapéus das outras duas?

4. Quatro suspeitos

Quatro suspeitos fazem as seguintes declarações:

Alemão: *Não fui eu.*

Cabeção: *Foi sim, o Alemão está mentindo.*

Maneta: *Não, não, é o Cabeção quem está mentindo.*

Zacarias: *Na verdade, foi o Cabeção.*

Você sabe que apenas uma dessas declarações é verdadeira.

Quem é o culpado?

5. Qual é a resposta?

Aqui estão três respostas:

A. resposta A

B. respostas A ou B

C. respostas B ou C

Sabendo que apenas uma das respostas é correta, você consegue descobrir que resposta é essa?

6. Quem estudou?

O professor Quindim perguntou a seus 5 alunos quem havia estudado matemática ontem.

Eles responderam:

Juquinha: ninguém estudou ontem.

Zequinha: um de nós estudou ontem.

Chiquinha: dois de nós estudaram ontem.

Mariquinha: três de nós estudaram ontem.

Francisquinha: quatro de nós estudaram ontem.

Você sabe que aqueles que estudaram estão dizendo a verdade, e que aqueles que não estudaram estão mentindo.

Quem estudou ontem?

Apêndice

Exemplo 1: O problema do chapéu (solução)

- (1) Em um primeiro momento, apenas o último homem da fila tem a chance de adivinhar a cor do seu próprio chapéu: o primeiro e o segundo não vêem ninguém à sua frente, e o terceiro vê apenas uma pessoa.

Mas o último homem não pode dizer nada: como ele vê um chapéu branco e um chapéu preto à sua frente, o seu próprio chapéu pode ser tanto branco como preto e não há como adivinhar qual dessas opções é o caso.

- (2) O terceiro homem, no entanto, ao perceber que o último está indeciso, descobre a cor do seu próprio chapéu: Branco!

Ele raciocina da seguinte maneira:

- Se o último homem não disse nada, então é porque ele está vendo um chapéu branco e um chapéu preto à sua frente.
- Ora, mas o chapéu preto é exatamente esse que eu também estou vendo.
- Logo o meu próprio chapéu deve ser branco.

- (3) Uma vez que o terceiro anuncia a cor do seu chapéu, o segundo homem também é capaz de adivinhar a cor do seu: Preto!

Ele raciocina da seguinte maneira:

- O último homem não disse nada em um primeiro momento porque via um chapéu branco e um chapéu preto à sua frente.
- E agora eu fiquei sabendo que o terceiro tem um chapéu branco.
- Logo, eu posso concluir que o meu próprio chapéu deve ser preto.

- (4) Finalmente, após todos esses acontecimentos, o primeiro e o último homens da fila continuam sem saber a cor dos seus próprios chapéus ...

(porque?)

◇

Exemplo 2: Três suspeitos (solução)

Nós podemos raciocinar da seguinte maneira:

- (1) Juca e Pituca não podem estar ambos falando a verdade, e portanto ao menos um deles está mentindo (possivelmente ambos).
- (2) Pinduca não pode estar dizendo a verdade, porque
- Quem diz a verdade é aquele que roubou o cavalo.
 - E essa pessoa, portanto, não pode dizer que não roubou o cavalo.

- (3) Se Pinduca não roubou o cavalo, então Juca não está falando a verdade.
- (4) Nós acabamos de descobrir que Juca e Pinduca estão mentindo.
Mas, alguém deve estar dizendo a verdade (pois alguém roubou o cavalo).
Portanto, Pituca deve estar falando a verdade, e foi ele quem roubou o cavalo.
- (5) Além disso, se Pituca está dizendo a verdade, então quem roubou o burro foi mesmo Pinduca.
- (6) Finalmente, só nos resta concluir que Juca roubou a vaca.

◇

Exemplo 3: Dias da semana (solução)

Para resolver esse problema é conveniente reformular as declarações de modo que todos afirmem alguma coisa a respeito do dia de hoje:

- (A) Today is Monday.
- (B) Today is Wednesday.
- (C) Today is Tuesday.
- (D) Today is neither Monday, nor Tuesday, nor Wednesday.
- (E) Today is Friday.
- (F) Today is Wednesday.
- (G) Today is not Sunday.

A seguir, nós podemos fazer as seguintes deduções:

- (1) Nós sabemos que apenas um deles está dizendo a verdade, mas (B) e (F) estão dizendo a mesma coisa.
Logo, podemos concluir que ambos estão mentindo, e que hoje não é quarta-feira.
- (2) A seguir, note que se (E) diz é verdade, então o que (D) diz também é verdade, e nós teríamos novamente duas declarações verdadeiras, o que não pode ser.
Logo, nós concluímos que (F) está mentindo, e que hoje não é sexta-feira.
- (3) Um raciocínio análogo envolvendo (A) e (G) permite concluir que hoje não é segunda-feira.
- (4) E um raciocínio análogo envolvendo (C) e (G) permite concluir que hoje não é terça-feira.
- (5) A seguir, nós observamos que (1), (3) e (4) implicam que (D) está falando a verdade.
- (6) Mas, nós ainda não sabemos que dia é hoje, e portanto (G) também poderia estar dizendo a verdade.
- (7) Como apenas um diz a verdade, (G) deve estar mentindo, e daí nós concluímos que hoje é de fato domingo.