Distribuições Discretas
Modelo de Poisson e Hipergeométrico

Rosineide da Paz

Introdução

Modelos Probabilísticos Discretos

- Os modelos probabilísticos discretos são dados por distribuições de probabilidades de variáveis aleatórias discretas.
- Frequentemente nos referimos a essas distribuições como "distribuições discretas de probabilidades".
- Existem muitos modelos probabilísticos discretos (ou modelo para variáveis aleatórias discretas).
- Aqui serão tratados os modelos **hipergeométrico** e o **de Poisson**.

Modelo Hipergeométrico

- Suponha que em um dia de produção de determinado produto 20 peças são fabricadas em um setor,
- das quais 5 não satisfazem os requerimetos dos consumidores.
- Suponha que duas peças são retiradas **sem reposição** dessa produção.
- Sejam A e B os eventos: a primeira e a segunda peças são não conformes, respectivamente.
- Foi visto que,

$$P(B|A) = 4/19 = 0,21 \text{ e}$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = 20/380 + 75/380 = 0,25$$

Modelo Hipergeométrico

- No exemplo anterior, pode ser visto que o conhecimento de que a primeira peça é não conforme
- torna menos provável que a segunda seja não conforme.
- Seja a variável aleatória definida como:

> X:"*Nº* de peças não conforme na amostra".

- Obtenha:

$$P(X = 0)$$

$$P(X = 1)$$

$$P(X = 2)$$

Modelo Hipergeométrico

Essa distribuição é adequada quando consideramos extrações casuais feitas sem reposição de uma população dividida segundo dois atributos.

- Suponha n objetos extraídos de forma aleatória de uma população de tamanho N, em que r objetos são do tipo 1 e N-r objetos são do tipo 2.
- Se as retiradas são feitas **com reposição**, a v.a.

  Y:"N^o de objetos do tipo 1 na amostra" $\sim$ Binomial(n,p=r/N)

- Se as retiradas são feitas **sem reposição**,

  Y tem distribuição Geométrica com parâmetro (N,n,r),

  cuja f.p. é dada a seguir.

A f.p. da distribuição geométrica é dada por

$$p(y) = \begin{cases} \frac{\binom{r}{y}\binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}, & \text{se} \quad y = 1, 2, \cdots, M, \\ 0, & \text{se} \quad y \neq 1, 2, \cdots, M. \end{cases} \qquad \text{em que } M = \min\{r, n\},$$

Aqui, tem-se que:

- N é o total de elementos na população;
- n é o tamanho da amostras extraída de forma aleatória sem reposição;
- r é o número de elementos na população que são do tipo 1;
- Y é a v.a. que conta o número de elementos do tipo 1 na amostra.

Notação: $Y \sim \text{Geométrica}(N, n, r)$.

Obs: se N é indeterminado (muito grande), assumimos independência e usamos a Distribuição Binomial.

Esperança e Variância da Hipergeométrica

Se X é uma variável aleatória hipergeométrica:

- $E(X) = np$ em que $p = \frac{r}{N}$;
- $Var(X) = np(1-p)(\frac{N-n}{N-1})$.

Modelo Hipergeométrico

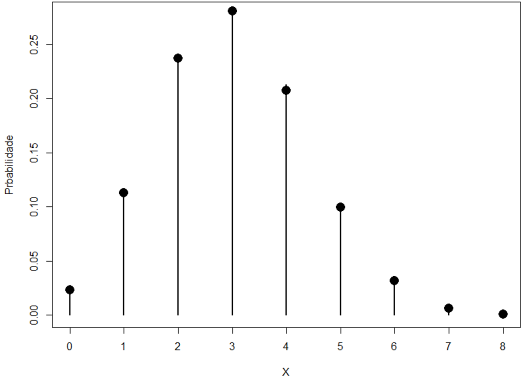

Figure 1: Modelo hipergeométrico com N=100, r=30 e n=10.

Exemplo

Em problemas de controle de qualidade, suponha que num lote de $N = 100$ peças, $r = 10$ sejam defeituosas. Escolhendo $n = 5$ peças sem reposição.

1. Qual a probabilidade de não se obter peças defeituosas?
2. Qual a probabilidade de se obter no máximo uma com defeito?
3. E se as peças forem retiradas com reposição, como ficam essas probabilidades?

Modelo Poisson

Considere situações em que se avalia o número de ocorrências de um tipo de evento por unidade de tempo, de comprimento, de área, ou de volume.

Seja X uma v.a. que pode assumir qualquer valor em $0, 1, 2, \cdots$. Então, X segue uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$ se sua f.p. é dada por:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, 2, \cdots \\ 0, & \text{se } x \neq 0, 1, 2, \cdots . \end{cases}$$

Temos ainda que:

$$E(X) = Var(X) = \lambda$$

Notação: $X \sim Poisson(\lambda)$

Aproximação da Binomial pela Poisson

A distribuição Binomial pode ser aproximada pela distribuição de Poisson.

Se $X \sim Bin(n, p)$ e n é grande, o valor esperado $E(X) = n \cdot p \approx \lambda$. Neste caso, é possível mostrar que

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \approx \quad \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Temos que, λ é uma taxa de ocorrência.

Exemplo

Considere novamente o exemplo

Y: "N^o de parafusos com defeito em uma amostra de 10 parafusos"

em que

$$p = P(sucesso) = P(\text{parafuso com defeito em uma retirada}) = 0,01$$

A variável aleatória de Poisson conta o número de "sucesso" em um intervalo qualquer (tempo, espaço etc).

Variáveis aleatórias que podem ser aproximada pela Poisson

1. O número de erros de impressão em uma página (ou em um grupo de páginas de um livro);
2. O número de pessoas em uma comunidade que vivem mais de 100 anos;
3. O número de telefone discados incorretamente em um dia;
4. o número de falhas de um computador em um dia de operação;
5. O número de partículas a descarregar por um material radioativo em um período de tempo fixo;

Modelo Poisson

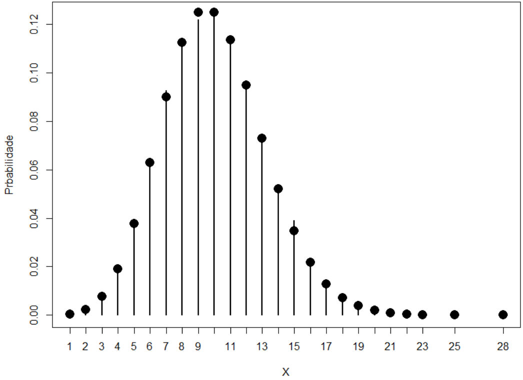

Figure 2: Grafico das probabilidades do modelo Poisson com $\lambda = 10$.

Exemplo:

A taxa de infecção por uma determinada doença infecciosa em um certo estado é de 1 por 100.000 habitantes cada mês.

(a) Determine a probabilidade de que em uma cidade de 400.000 habitantes, deste estado, ocorram 3 infecções ou mais em um dado mês, por essa doença.

(b) Qual é a probabilidade de que em pelo menos 2 meses durante o ano ocorram 3 infecções ou mais?

Exercícios (todas as respostas devem ser justificadas):

1. (Morettin Pg. 123 adaptado) O CRH de uma firma entrevista 150 candidatos a emprego por hora. Qual a probabilidade de entrevistar:
   a) no máximo 4 candidatos em 3 minutos?
   b) exatamente 3 candidatos em 4 minutos?
2. (Morettin Pg. 122 adaptado) De acordo com a Divisão de Estatística Vital do Departamento de Saúde dos Estados Unidos, a média anual de afogamentos acidentais neste país é de 3 por 100.000 indivíduos. Determinar a probabilidade de que em uma cidade com 300.000 habitantes se verifiquem:
   a) Nenhum afogamento.
   b) No máximo 2 afogamentos.
   c) Pelo menos um afogamento.

Exercícios

3 (Bussab p. 157): Num certo tipo de fabricação de fita magnética ocorrem cortes a uma taxa de 1 por 2000 pés. Qual é a probabilidade de um rolo com 2000 pés de fita magnética tenha:

a) nenhum corte;
b) no máximo 2 cortes e
d) pelo menos 2 cortes?

Exercícios

4 (Montgomery P. 65 adaptado) Cartões de circuito integrado são verificados em um teste funcional depois de serem preenchidos com chips semicondutores. Um lote contém 140 cartões, e 20 são selecionados sem reposição para o teste funcional.

(a) Se 20 cartões forem defeituosos, qual é a probabilidade de no mínimo um cartão defeituoso estar na amostra?

(b) Responda o item (a) usando a distribuição binomial e compare com o resultado obtido em (a) pela hipergeométrica.