Lógica

lista de exercícios 20

1. **O contrário da distributividade**

   Como já sabemos, a operação de distributividade é a seguinte

$$\big(\mathtt{p} \;\to\; (\mathtt{q} \to \mathtt{r})\big) \;\;\to\;\; \big((\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \;\to\; (\mathtt{p} \to \mathtt{r})\big)$$

   Mas, e o contrário da distributividade, o que é?

   Bom, nós poderíamos pensar nisso

$$\big((\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \;\to\; (\mathtt{p} \to \mathtt{r})\big) \;\;\to\;\; \big(\mathtt{p} \;\to\; (\mathtt{q} \to \mathtt{r})\big)$$

   ou nisso

$$(\mathtt{p} \to \mathtt{q}) \;\;\to\;\; \Big((\mathtt{p} \to \mathtt{r}) \;\to\; \big(\mathtt{p} \;\to\; (\mathtt{q} \to \mathtt{r})\big)\Big)$$

   A boa notícia é que essas duas regras podem ser construídas.

   E a sua tarefa nesse exercício é realizar as duas construções.

2. **Associatividade**

   Examinando as duas regras do exercício anterior

$$\big(\underbrace{(p \to q)}_{\mathtt{A}} \to \underbrace{(p \to r)}_{\mathtt{B}}\big) \to \underbrace{\big(p \;\to\; (q \to r)\big)}_{\mathtt{C}} \qquad\qquad \underbrace{(p \to q)}_{\mathtt{A}} \to \Big(\underbrace{(p \to r)}_{\mathtt{B}} \to \underbrace{\big(p \;\to\; (q \to r)\big)}_{\mathtt{C}}\Big)$$

   nós observamos que elas são compostas das mesmas partes, organizadas de maneiras diferentes.

   Nessa hora, a poderia pensar que essas duas coisas são a mesma coisa

$$\mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{B} \;\to \mathtt{C}\,\big) \qquad\qquad \big(\mathtt{A} \;\to\; \mathtt{B}\big) \;\to\; \mathtt{C}$$

   no sentido de que a gente sempre poderia transformar uma delas na outra e vice-versa.

   Mas, isso só seria verdade se a gente pudesse construir as seguintes regras

$$\Big(\mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{B} \;\to \mathtt{C}\,\big)\Big) \quad\to\quad \Big(\big(\mathtt{A} \;\to\; \mathtt{B}\big) \;\to\; \mathtt{C}\Big)$$

   e

$$\Big(\big(\mathtt{A} \;\to\; \mathtt{B}\big) \;\to\; \mathtt{C}\Big) \quad\to\quad \Big(\mathtt{A} \;\to\; \big(\mathtt{B} \;\to \mathtt{C}\,\big)\Big)$$

   Uma dessas regras pode ser construída, mas a outra não.

a) Descubra qual dessas regras pode ser construída e qual não pode.

(Aqui você pode raciocinar intuitivamente, se quiser, ou usar qualquer outro método que você conheça. Mas, você também pode tentar realizar a construção.)

b) Apresente a construção da regra que se pode construir.

c) Chame a transformação associada a essa regra de $\xRightarrow{\texttt{Assoc}}$ (i.e., a operação de associatividade), e mostre como ela pode ser transformada na transformação mais geral $\xRightarrow{\texttt{Assoc 2.0}}$.

3. **Transitividade 2.0**

Você consegue construir essa regra de transitividade de 3 passos:

$$(\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \;\to\; \Big((\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \;\to\; \big((\mathtt{C} \to \mathtt{D}) \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{D})\big)\Big)$$