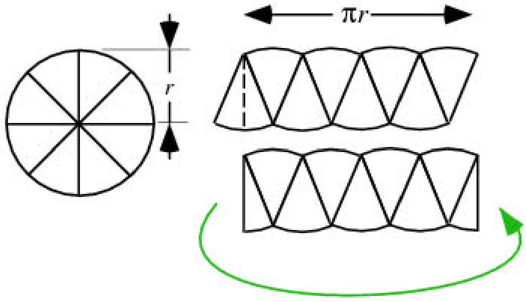
Lógica

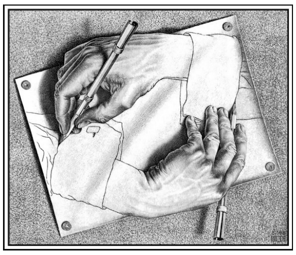
aula 03: Construindo a verdade (e a falsidade)

1 Introdução

A verdade é algo que se pode construir



E a falsidade também ...



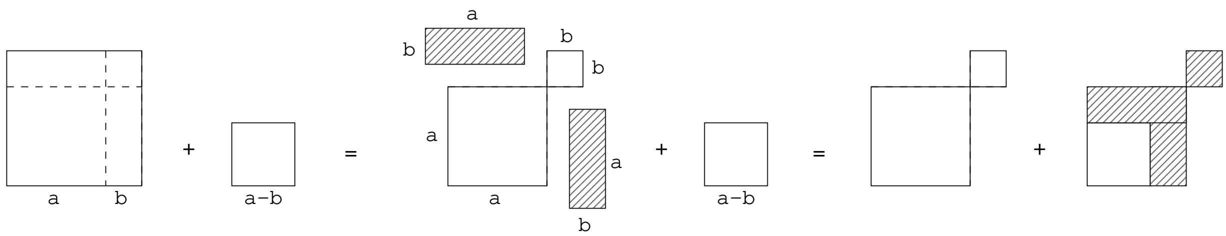
2 Construindo a verdade

Considere a equação

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

É trivial verificar a validade dessa equação fazendo as contas.

Mas, também é possível "ver" como o lado esquerdo é transformado no lado direito

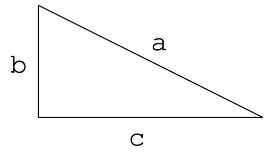


(Você consegue reproduzir esse raciocínio fazendo as contas?)

Vejamos outros exemplos.

Exemplo 1: Teorema de Pitágoras

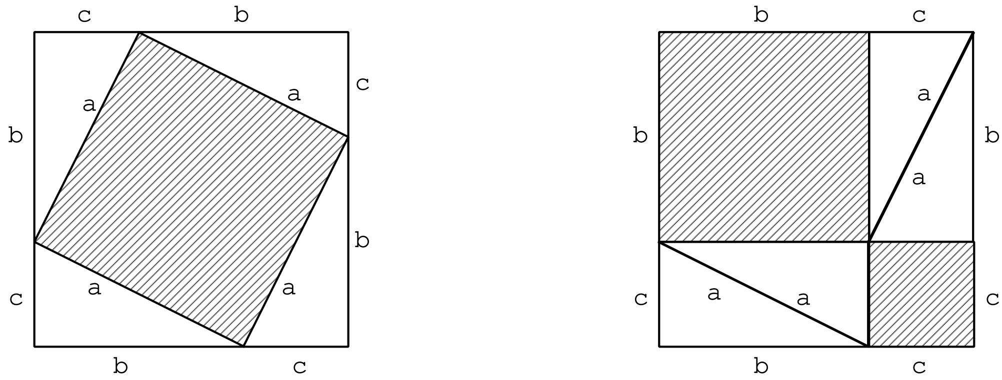
O exemplo mais famoso (e mais antigo) de construção de uma verdade matemática é o Teorema de Pitágoras.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

De fato, existem muitas maneiras de demonstrar a verdade dessa equação.

A demonstração mais conhecida é provavelmente a seguinte

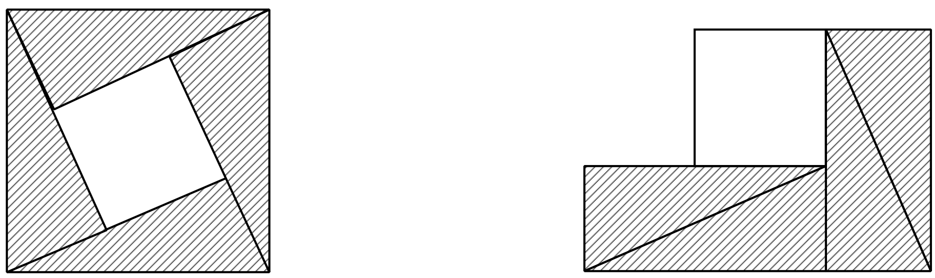


Note que nenhuma das duas figuras isoladamente demonstra o teorema.

E mesmo as duas figuras juntas também não.

O teorema só fica provado quando você mostra que a primeira figura pode ser transformada na segunda figura, mudando os triângulos de posição.

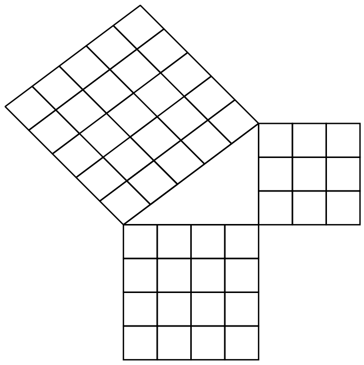
Agora considere essa daqui



É bem fácil ver que é possível transformar uma figura na outra mudando os polígonos de lugar.

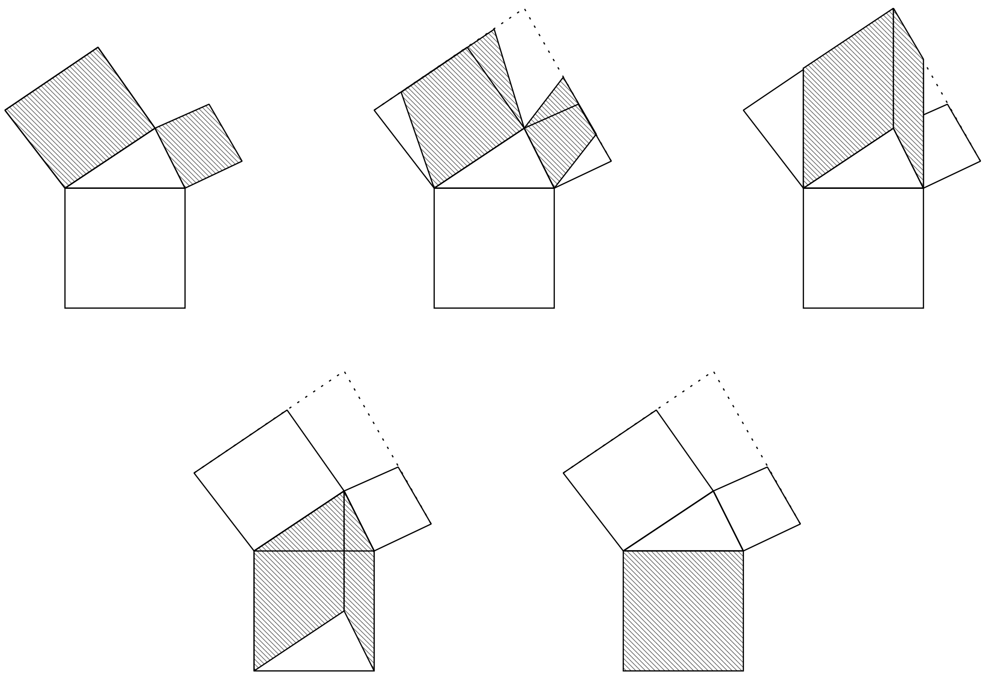
Mas, porque isso nos dá mais uma demonstração do teorema de Pitágoras?

A próxima demonstração só funciona para o triângulo retângulo com lados 3,4,5.

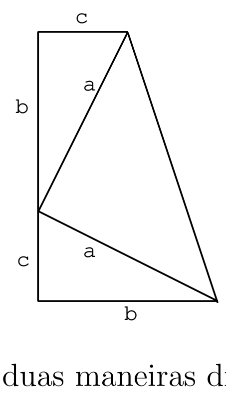


(Basta contar os quadradinhos ...)

Mas, com um pouquinho de criatividade, é possível transformar essa demonstração em uma prova geral.



Finalmente, a demonstração a seguir mostra que a validade do teorema de Pitágoras também é algo que se pode ver



(Dica: calcule a área de figura de duas maneiras diferentes ...)

◇

Exemplo 2: Soma infinita

Quando nós escrevemos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

não parece ter nada de interessante acontecendo aqui.

Mas, trocando os termos de lugar

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

e observando que $1/6 = 1/2 \cdot 1/3$, nós chegamos a

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

Agora, nós podemos ver que

(1) a equação nos dá uma expressão para calcular $1/3$ (uma regra)

(2) o próprio $1/3$ aparece no lado direito da equação

Substituindo o termo $1/3$ no lado direito pela expressão dada pela regra, nós obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

A seguir, como o termo $1/3$ voltou a aparecer no lado direito, nós podemos fazer a substituição de novo

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

E agora não é difícil ver que

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \ldots$$

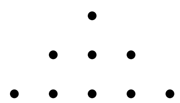
$\diamond$

Exemplo 3: Cubos, quadrados, triângulos e trapézios

Nós vimos na aula passada o seguinte fato sobre quadrados:

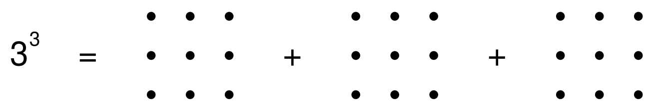
$$3^2 \quad = \quad 1 \;+\; 3 \;+\; 5$$

Isto é, um quadrado é uma soma de números ímpares, ou um triângulo

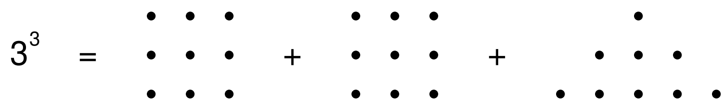


Mas, o que nós podemos dizer sobre os cubos?

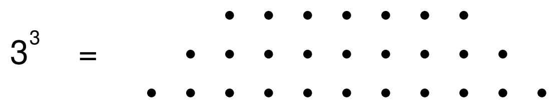
Bom, é fácil ver que um cubo é uma soma de quadrados



Mas, um quadrado também é um triângulo



Logo, um cubo é um trapézio



ou uma soma de números ímpares

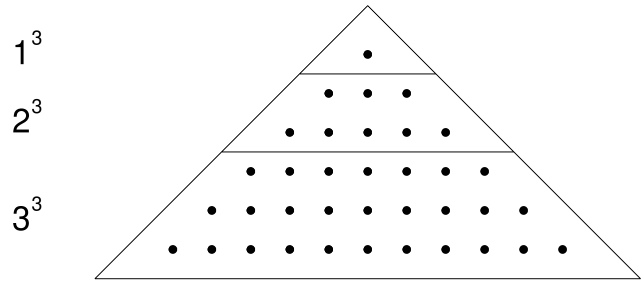
$$3^3 \quad = \quad 7 \;+\; 9 \;+\; 11$$

As coisas começam a ficar mais interessante quando nós observamos que

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ 2^3 &= 3 + 5 \\ 3^3 &= 7 + 9 + 11 \end{aligned}$$

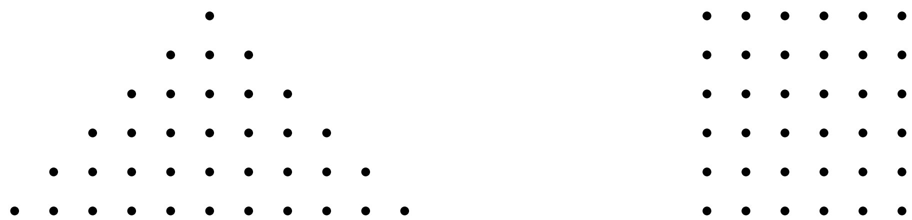
a sequência de ímpares de cada cubo começa onde a sequência do cubo anterior parou.

Isso significa que os trapézios podem ser empilhados.



Ou seja, um cubo também é um triângulo!

Mas, um triângulo é um quadrado



E nós acabamos de descobrir que

$$1^3 \;+\; 2^3 \;+\; 3^3 \quad = \quad \big(1 \;+\; 2 \;+\; 3\big)^2$$

De fato, isso vale para qualquer soma de cubos

$$1^3 \;+\; 2^3 \;+\; 2^3 \;+\; \ldots \;+\; n^3 \quad = \quad \big(1 \;+\; 2 \;+\; 3 \;+\; \ldots \;+\; n\big)^2$$

A mesma coisa também pode ser vista da seguinte maneira

$$
\begin{array}{lclcl}
1^3 & = & 1 \times 1^2 & = & 1\,(1) \\
2^3 & = & 2 \times 2^2 & = & 2\,(1+2+1) \\
3^3 & = & 3 \times 3^2 & = & 3\,(1+2+3+2+1) \\
4^3 & = & 4 \times 4^2 & = & 4\,(1+2+3+4+3+2+1) \\
5^3 & = & 5 \times 5^2 & = & 5\,(1+2+3+4+5+4+3+2+1)
\end{array}
$$

$$5\,(1+2+3+4+5)$$
$$4\,(1+2+3+4+5)$$
$$3\,(1+2+3+4+5)$$
$$2\,(1+2+3+4+5)$$
$$1\,(1+2+3+4+5)$$

◇

3 Construindo a falsidade

Os jogos de manipulação as vezes nos levam a resultados estranhos

$$1 \quad = \quad \sqrt{1} \quad = \quad \sqrt{-1 \times -1} \quad = \quad \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \quad = \quad \left(\sqrt{-1}\right)^2 \quad = \quad -1$$

(onde está o erro?)

Vejamos outros exemplos.

Exemplo 1: $1 + 1 = 1$

$$\begin{aligned}
x &= y \\
x^2 &= xy \\
x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\
\frac{x^2 - y^2}{x - y} &= \frac{xy - y^2}{x - y} \\
x + y &= y \\
y + y &= y \\
1 + 1 &= 1
\end{aligned}$$

Aqui o erro é fácil de ver ...

◇

Exemplo 2: $4 = 5$

$$\begin{aligned}
-20 &= -20 \\
16 - 16 - 20 &= 25 - 25 - 20 \\
16 - 36 &= 25 - 45 \\
16 - 36 + \tfrac{81}{4} &= 25 - 45 + \tfrac{81}{4} \\
\left(4 - \tfrac{9}{2}\right)^2 &= \left(5 - \tfrac{9}{2}\right)^2 \\
4 - \tfrac{9}{2} &= 5 - \tfrac{9}{2} \\
4 &= 5
\end{aligned}$$

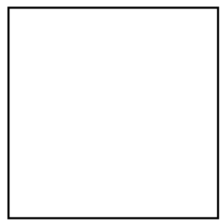
Mas, e aqui? onde está o erro?

◇

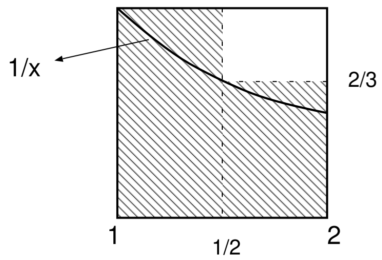
Exemplo 3: $\ln 2$

Nesse exemplo, nós vamos ver primeiro um resultado verdadeiro.

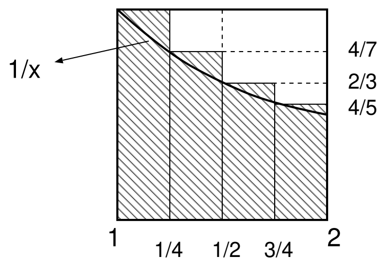
Começando com o quadrado de lado 1



removendo 1/2 e adicionando 1/3, nós obtemos

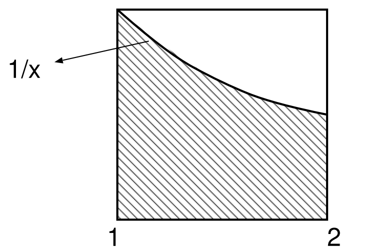


A seguir, removendo 1/4, adicionando 1/5, removendo 1/6 e adicionando 1/7, nós obtemos



Continuando dessa maneira, o recorte se aproxima cada vez mais do gráfico da função $y = 1/x$.

E, no limite, nós temos



Por outro lado, é um fato conhecido que

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \quad = \quad \ln 2$$

Ou seja, nós acabamos de descobrir que

$$\ln 2 \quad = \quad 1 \; - \; \frac{1}{2} \; + \; \frac{1}{3} \; - \; \frac{1}{4} \; + \; \frac{1}{5} \; - \; \frac{1}{6} \; + \; \frac{1}{7} \; - \; \ldots$$

Mas, se isso é verdade, então

$$\frac{\ln 2}{2} \quad = \quad \frac{1}{2} \; - \; \frac{1}{4} \; + \; \frac{1}{6} \; - \; \frac{1}{8} \; + \; \frac{1}{10} \; - \; \frac{1}{12} \; + \; \frac{1}{14} \; - \; \ldots$$

E isso significa que

$$\begin{aligned} \ln 2 \; + \; \tfrac{\ln 2}{2} \quad = \quad & 1 \; - \; \tfrac{1}{2} \; + \; \tfrac{1}{3} \; - \; \tfrac{1}{4} \; + \; \tfrac{1}{5} \; - \; \tfrac{1}{6} \; + \; \tfrac{1}{7} \; - \; \ldots \\ & + \; \tfrac{1}{2} \; - \; \tfrac{1}{4} \; + \; \tfrac{1}{6} \; - \; \tfrac{1}{8} \; + \; \tfrac{1}{10} \; - \; \tfrac{1}{12} \; + \; \tfrac{1}{14} \; - \; \ldots \end{aligned}$$

Cancelando os termos opostos, e separando as frações com denominadores pares e ímpares, nós obtemos

$$\begin{aligned} \tfrac{3\ln 2}{2} \quad &= \quad \Big(1 \; + \; \tfrac{1}{3} \; + \; \tfrac{1}{5} \; + \; \ldots\Big) \; - \; 2 \cdot \Big(\tfrac{1}{4} \; + \; \tfrac{1}{8} \; + \; \tfrac{1}{12} \; + \; \ldots\Big) \\ &= \quad \Big(1 \; + \; \tfrac{1}{3} \; + \; \tfrac{1}{5} \; + \; \ldots\Big) \; - \; \Big(\tfrac{1}{2} \; + \; \tfrac{1}{4} \; + \; \tfrac{1}{6} \; + \; \ldots\Big) \\ &= \quad 1 \; - \; \tfrac{1}{2} \; + \; \tfrac{1}{3} \; - \; \tfrac{1}{4} \; + \; \tfrac{1}{5} \; - \; \tfrac{1}{6} \; + \; \tfrac{1}{7} \; - \; \ldots \\ &= \quad \ln 2 \end{aligned}$$

(O que está acontecendo aqui?)

$\diamond$

Exercícios

1. **Círculos e triângulos**

   Na Introdução nós vimos que transformando um círculo em um retângulo é fácil ver que a sua área é πr^2.

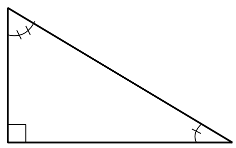
   Mas, um círculo também pode ser transformado em um triângulo

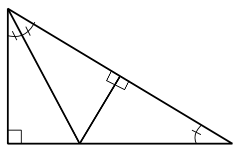
   Você consegue explicar como se obtém a área do círculo a partir dessa figura?

2. **Triângulos, triângulos, triângulos, ...**

   Considere um triângulo retângulo onde um dos ângulos internos tem o dobro do tamanho do outro.

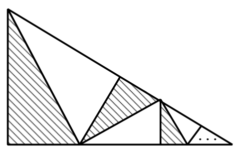
   

   Então, bisectando o ângulo maior, e traçando uma perpendicular a partir do ponto de contato com o cateto oposto até a hipotenusa

   nós obtemos 3 triângulos menores congruentes ao triângulo original.

   E agora nós temos uma regra que pode ser aplicada de novo, de novo e de novo.

   O que essa figura lhe diz a respeito da soma

   $$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots$$

3. Você consegue fazer uma outra construção com triângulos retângulos para obter o valor da soma

   $$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots$$