Lógica

2a avaliação remota: Raciocínio lógico

1. **Raciocinando com as regras R1, R2 e R3 do Ubiratan**

   Consider as duas perguntas abaixo:

   $$\Big(\big((\mathtt{F} \to \mathtt{F}) \ \to \ \mathtt{F} \big) \ \to \ \mathtt{F} \Big) \ \to \ \mathtt{F}\ ?$$

   $$\mathtt{F} \ \to \ \Big(\mathtt{F} \ \to \ \Big(\mathtt{F} \ \to \ \big((\mathtt{F} \to \mathtt{F}) \ \to \ \mathtt{F} \big) \Big) \Big)\ ?$$

   Uma delas tem resposta *"Sim, claro!"* e a outra tem resposta *"Sei, lá!"*.

   Determine a resposta de cada pergunta, e apresente raciocínios completos baseados nas regras R1, R2, R3, para justificar a sua resposta.

   Observações:

   - Você não deve raciocinar a partir da intuição.
   - E você também não deve utilizar fatos conhecidos para construir o seu argumento.
   - Você deve mencionar explicitamente cada uso das regras R1, R2, R3 no seu argumento.
   - E você pode utilizar as estratégias de uso das regras R1, R2, R3.

2. **Raciocinando com as regras H1, H2 e MP do Hilbert**

   Apresente um raciocínio completo (i.e., um raciocínio que só utiliza as regras de construção H1, H2 e o Modus Ponens) para demonstrar que a seguinte regra pode ser construída no jogo lógico de Hilbert

   $$(\mathtt{C} \to \mathtt{B}) \ \to \ \big(\mathtt{C} \ \to \ (\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \big)$$

   Dica: raciocine em alto nível primeiro, usando regras e transformações conhecidas, e depois faça a engenharia reversa do seu raciocínio.

3. **Raciocinando sobre transformações**

   Imagine que nós queremos transformar essa regra

   $$\big(\mathtt{A} \ \to \ (\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \big) \ \to \ \mathtt{D}$$

   nessa regra aqui

   $$\big((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \ \to \ \mathtt{C} \big) \ \to \ \mathtt{D}$$

Note que isso corresponde a uma aplicação da operação de associatividade no lado esquerdo da regra

$$\underbrace{\big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{B} \to \mathtt{C})\big)}_{*} \;\to\; \mathtt{D} \qquad \xRightarrow{\text{Assoc 3.0}} \qquad \underbrace{\big((\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \;\to\; \mathtt{C}\big)}_{*} \;\to\; \mathtt{D}$$

Mas, lembre que essa é a direção em que a associatividade não vale (veja o exercício 2 da lista 20).

No entanto, se você examinar a solução do exercício 1 da lista 20b (i.e., os exercícios adicionais 20), você vai ver que é possível construir a regra que está por trás da transformação `Assoc 3.0`.

a) Explique intuitivamente porque nós podemos aplicar a associatividade na direção contrária no lado esquerdo de uma regra.

b) Apresente a construção da regra que está por trás da transformação `Assoc 3.0`

4. **Raciocinando com a disjunção**

O jogo lógico de Hilbert também possui as seguintes 3 regras para a disjunção:

$$[\mathtt{H6}] \quad \mathtt{p} \;\to\; (\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$$

$$[\mathtt{H7}] \quad \mathtt{q} \;\to\; (\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$$

$$[\mathtt{H8}] \quad (\mathtt{p} \to \mathtt{r}) \;\to\; \Big((\mathtt{q} \to \mathtt{r}) \;\to\; \big((\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \to \mathtt{r}\big)\Big)$$

Mostre como essas regras podem ser usadas para construir a regra

$$\big(\mathtt{B} \,\vee\, \mathtt{A}\big) \;\to\; \big(\mathtt{A} \,\vee\, \mathtt{B}\big)$$

Dica: olha aqui

$$(\mathtt{p} \to \mathtt{r}) \;\to\; \Big((\mathtt{q} \to \mathtt{r}) \;\to\; \underbrace{\big((\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \to \mathtt{r}\big)}_{*}\Big)$$