

1.

$$1.1. (C \vee B) \rightarrow (B \vee C)$$

$$(1) H6 \rightarrow B \rightarrow (B \vee C), \quad p=B, q=C$$

$$(2) H7 \rightarrow C \rightarrow (B \vee C), \quad p=B, q=C$$

$$H8 \rightarrow (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)), \quad p=C, r=(B \vee C) \text{ e } q=B$$

$$\Rightarrow (C \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow (B \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((C \vee B) \rightarrow (B \vee C))$$

MP com H7 (2)

$$\Rightarrow (B \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((C \vee B) \rightarrow (B \vee C))$$

MP com H6 (1)

$$\Rightarrow \underline{(C \vee B) \rightarrow (B \vee C)}$$

$$1.2. (A \wedge (B \wedge C)) \rightarrow B$$

$$(1) H4 \rightarrow (B \wedge C) \rightarrow B, \quad p=B, q=C$$

$$(2) H5 \rightarrow (A \wedge (B \wedge C)) \rightarrow (B \wedge C), \quad p=A, q=(B \wedge C)$$

$$\text{trans. } (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

trans. (2) e (1),

$$\Rightarrow \underbrace{(A \wedge (B \wedge C)) \rightarrow (B \wedge C)}_{\text{MP H5 (2)}} \rightarrow \underbrace{(B \wedge C) \rightarrow B}_{\text{MP H4 (1)}} \rightarrow (A \wedge (B \wedge C)) \rightarrow B$$

Usando transitividade com (H5) e (H4): $\underline{(A \wedge (B \wedge C)) \rightarrow B}$

2.

2.1 - $(C \rightarrow (B \rightarrow (A \vee (B \wedge C))))$

J3: $\underbrace{((C \wedge B) \rightarrow (A \vee (B \wedge C)))}_{\text{o que preciso provar}} \rightarrow \underbrace{(C \rightarrow (B \rightarrow (A \vee (B \wedge C))))}_{\text{o que quero}}, \begin{matrix} r = A \vee (B \wedge C) \\ q = B \\ p = C \end{matrix}$

H7: $(B \wedge C) \rightarrow (A \vee (B \wedge C))$, com $p = A$ e $q = (B \wedge C)$

H3: $C \rightarrow (B \rightarrow (B \wedge C))$ *

J2: $C \rightarrow (B \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow ((C \wedge B) \rightarrow (B \wedge C))$

H3 + MP e J2 fica: $((C \wedge B) \rightarrow (B \wedge C))$ □

Usando transitividade em □ + H7

□ $\Rightarrow (C \wedge B) \rightarrow (B \wedge C) \quad \left. \begin{matrix} (B \wedge C) \rightarrow (A \vee (B \wedge C)) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{transitividade} \\ \Rightarrow \end{matrix} (C \wedge B) \rightarrow (A \vee (B \wedge C))$ ★

Voltando a J3 lá em cima, podemos usar ★ e Modus Ponens

Nessa parte: $(C \wedge B) \rightarrow (A \vee (B \wedge C)) \rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow (A \vee (B \wedge C))))$

★ + MP $\Rightarrow (C \rightarrow (B \rightarrow (A \vee (B \wedge C))))$

J1: $(C \wedge B) \rightarrow B \rightarrow ((C \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow ((C \wedge B) \rightarrow (B \wedge C))$

H4: $(C \wedge B) \rightarrow B$

H5: $(C \wedge B) \rightarrow C$

Utilizando J1 + (H4 + MP) + (H5 + MP)
obtemos a comutatividade: $(C \wedge B) \rightarrow (B \wedge C)$

Instanciação

$p = C \wedge B$

$q = B$

$r = C$

$$2.2. (A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow D))) \rightarrow (A \rightarrow ((B \wedge C) \rightarrow D))$$

$$J2: (P \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((P \wedge q) \rightarrow r), p=A, q=B, r=(C \rightarrow D)$$

$$\Rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow D))) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow D))$$

$$J2 \Rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow ((B \wedge C) \rightarrow D), p=B, q=C, r=D$$

1.2. adicionando A.

$$\Rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow D))) \rightarrow (A \rightarrow ((B \wedge C) \rightarrow D))$$

3.

(4.)

$$1. (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

$$H8 \Rightarrow p = B, q = C, r = ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

$$\underbrace{(B \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))}_{(1)} \rightarrow \underbrace{(C \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))}_{(2)} \rightarrow \underbrace{((B \vee C) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))}_{(3)}$$

$$H5, \text{ com } p = A, q = (B \vee C)$$

$$H5 \rightarrow (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow (B \vee C) (*)$$

transitividade

Só preciso construir (1) e (2) e usar MP, em seguida usar transitividade com (*) e 3.

$$B \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \quad (1) \quad // \text{ construir } (1)$$

$$H6 \text{ com } p = (A \wedge B) \text{ e } q = (A \wedge C) :$$

$$(A \wedge B) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \quad \square$$

$$H1: (B \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$$

H1; $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ e R2 p/ tirar o A e fica só com $B \rightarrow A$, agora posso usar MP

$$H1 \text{ fica com } : ((B \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$$

$$\Rightarrow B \rightarrow B$$

MP

$$\Rightarrow B \rightarrow (A \wedge B) \quad \square \square$$

p q q r

$$\text{trans} \rightarrow \square \square + \square = B \rightarrow (A \wedge B) \text{ e } (A \wedge B) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

obtenho $(B \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$ consegui e agora posso

usar MP já em uma (1)

$$C \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \quad // \text{ construir o } (CZ)$$

$$(A \wedge C) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \vee C)) \quad \square$$

SL:

$$(C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow (A \wedge C)))$$

H1: $A \rightarrow C \rightarrow A$ e R2 pr tirar o A da frente e ficar só com $C \rightarrow A$

$$MP \rightarrow (C \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow (A \wedge C))$$

$$\Rightarrow C \rightarrow C$$

$$MP \Rightarrow (C \rightarrow (A \wedge C)) \quad \square \square$$

trans. $\square \square + \square$

$$\Rightarrow (C \rightarrow (A \wedge C)) \quad \text{e} \quad (A \wedge C) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \vee C))$$

$$\text{trans} \quad \underline{C \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \vee C))} \quad \text{com isso posso MP de um âmba}$$

$$\text{e obtenho } (B \vee C) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

e agora posso usar transitividade com *

$$\begin{matrix} p \\ (A \wedge (B \vee C)) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} q \\ (B \vee C) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} q \\ (B \vee C) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} r \\ ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \end{matrix}$$

trans $p \rightarrow r$

$$\boxed{(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))}$$