Lógica

aula 17: Raciocinando com símbolos

Ubiratan já estava ficando até besta com tanta coisa que tinha aprendido

Ele estava pensando em criar um canal na internet para se amostrar com o seu conhecimento lógico.

Ia contar a história do ET, e falar sobre como tinha chegado nas ideias que ele teve.

Ele ia organizar as apresentações em episódios (e temporadas), e para isso ele resolveu fazer uma revisão de tudo o que ele tinha feito.

O começo de tudo foram as 4 primeiras perguntas que ele conseguiu responder

pergunta	$\operatorname{resposta}$
F ?	Sei lá!
$\mathtt{F} \to \mathtt{F}$?	$Sim,\ claro!$
$(F \to F) \to F$?	Sei lá!
$F \rightarrow (F \rightarrow F)$?	$Sim, \ claro!$

Depois vinha a parte onde ele examinou perguntas mais complicadas, e percebeu os padrões repetitivos que estavam por trás dos seus raciocínios.

Foi isso que acabou levando ele até as 3 regras

$$[R1]$$
 % \rightarrow % : "Sim, claro!"

$$[\mathbf{R2}]$$
 X \rightarrow V $:$ "Sim, claro!"

$$[\mathbf{R3}] \quad V \rightarrow X? \equiv X?$$

Finalmente, quando ele colocou essas regras em prática para raciocinar sobre perguntas bem complicadas, ele percebeu que havia, como se fosse, um jeito certo de usar as regras.

Ele descreveu esse jeito na forma de 3 estratégias

- ⇒ A estratégia de R1: o que é óbvio, é óbvio
 - Quer dizer, se os dois lados da pergunta são iguais, então a resposta sempre é "Sim, claro!", e eu nem preciso me preocupar com o que está escrito.
- ⇒ A estratégia de R2: indo direto ao ponto
 - Quer dizer, se o lado direito da pergunta é "Sim, claro!", então eu não preciso nem olhar para o lado esquerdo.

- ⇒ A estratégia de R3: comendo pelas beiradas ...
 - Quer dizer, quando tudo o mais dá errado, eu sempre posso ir tentando simplificar as coisas.

Ubiratan já estava a ponto de começar a gravar os seus vídeos, quando ele sentiu que devia analisar ao menos uma outra pergunta.

1. Deixa eu fazer só mais essa

$$((F \to F) \to F) \to F$$
?

Essa pergunta nem é tão complicada assim, e num instante eu acabo ...

- (1) A regra R1 não se aplica a essa pergunta.
- (2) Então, eu uso a estratégia de R2, que me diz para olhar primeiro para o lado direito da pergunta

F?

Mas, esse lado direito não tem resposta "Sim, claro!", e daí eu não posso aplicar a regra R2.

(3) Só me resta, então, aplicar a estratégia de R3, para ver se eu consigo simplificar a pergunta, descartando o lado esquerdo.

Para isso, eu preciso ver se o lado esquerdo tem resposta "Sim, claro!"

$$(F \rightarrow F) \rightarrow F$$
?

Vejamos.

(4) Aqui, eu não consigo aplicar R1.

E a estratégia de R2 também não funciona, porque o lado direito (do lado esquerdo)

F?

não tem resposta "Sim, claro!".

Só me resta, de novo, aplicar a estratégia de R3, para ver se eu consigo descartar o lado esquerdo (do lado esquerdo)

$$F \rightarrow F$$
?

(5) Aqui, finalmente, eu consigo aplicar a regra R1 para ver que isso tem resposta "Sim, claro!".

E isso me leva de volta para o passo (3), pois agora a regra R3 me diz que

$$(F \rightarrow F) \rightarrow F$$
?

é a mesma coisa que

F?

Mas, isso tem resposta "Sei lá!".

E isso significa que eu não posso aplicar a regra R3 na pergunta original, como eu queria.

 $Cacilda \dots$

As minhas estratégias falharam ...

Nessa hora, Ubiratan ficou bem triste.

Como ele ainda não tinha falado nada com ninguém, ele cancelou a sua conta na internet, e colocou os planos do canal de lado.

Mas, como Ubiratan era um sujeito muito curioso, no dia seguinte ele já estava pensando na pergunta de novo.

2. Deixa eu ver o que está acontecendo aqui ...

$$((F \to F) \to F) \to F$$
?

 $Hmm \dots$

Não é que as estratégias falharam ...

Quer dizer, elas falharam, isso não tem a menor dúvida.

Mas é que a razão do problema é mais profunda.

Quer dizer, nenhuma das regras R1, R2, R3 se aplica a essa pergunta.

A regra

$$[\mathbf{R}1]$$
 X $ightarrow$ X : "Sim, claro!"

não se aplica porque o lado esquerdo e o lado direito da pergunta não são iguais.

A regra

$$[\mathbf{R2}]$$
 X $ightarrow$ V : "Sim, claro!"

não se aplica porque o lado direito da pergunta não tem resposta "Sim, claro!". E a regra

$$[\mathbf{R3}]$$
 V \rightarrow X? \equiv X?

não se aplica porque o lado esquerdo da pergunta não tem resposta "Sim, claro!".

 $Hmm \dots$

Então deve ter uma outra regra que eu ainda não descobri ...

E, para descobrir que regra é essa, eu vou ter que voltar para aquela conversa fiada da aula 15.

Deixa eu ver.

3. A pergunta que eu tenho é a seguinte

$$\underbrace{((F \to F) \to F)}_{\text{(1)}} \to \underbrace{F}_{\text{(2)}}?$$

Quer dizer, eu estou assumindo que eu sei uma coisa (o lado esquerdo (1)), e estou perguntando se, com isso que eu sei, eu consigo descobrir a resposta de uma outra coisa (o lado direito (2)).

A pergunta mais simples desse tipo é

$$F \rightarrow F$$
?

E, observando que o lado esquerdo é igual ao lado direito, eu concluo que a resposta da pergunta é "Sim, claro!".

Mas, passando assim tão rápido para a conclusão, eu acabo não percebendo tudo o que está acontecendo aqui.

E é assim que eu termino com um conjunto de regras incompleto.

Então, eu vou tentar pensar de novo sobre a pergunta, só que de um jeito diferente, dessa vez.

4. O que está em jogo aqui?

$$F \rightarrow F$$
?

Bom, o que está em jogo é que em ambos os lados eu tenho uma pergunta

$$\texttt{F}\,?\,\to\,\texttt{F}\,?$$

E, vendo as coisas assim, fica mais fácil perceber o que está acontecendo.

Quer dizer, a pergunta do lado esquerdo da seta (\rightarrow) eu tou assumindo que eu sei a resposta.

E a pergunta do lado direito da seta, eu ainda tou na dúvida se eu sei ou não sei responder.

Eu podia escrever essa dúvida desse jeito

$$(F? \rightarrow F?)?$$

para deixar as coisas mais claras ainda.

Quer dizer, eu tenho uma pergunta sobre duas perguntas.

Sendo que a primeira eu sei (ou assumo) que eu sei a resposta.

E a segunda eu ainda não sei se eu sei a resposta.

Hmm, entendi.

Agora, nesse caso em que as duas perguntas são a mesma pergunta, é óbvio que eu sei responder a segunda pergunta.

E daí eu digo

$$(F? \rightarrow F?)? : Sim, claro!$$

Ou, como eu dizia antes

$$F \rightarrow F$$
? : Sim, claro!

Hmm, entendi.

Acho que agora eu posso pensar de novo sobre aquela pergunta problemática ...

5. Deixa eu ver

$$((F \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow F?$$

Se eu entendi direito, isso aqui na verdade é assim

$$\left(\left(\left(\mathtt{F} \to \mathtt{F}\right) \to \mathtt{F}\right)? \to \mathtt{F}?\right)$$

Quer dizer, eu tou na dúvida se eu saberia responder a pergunta

F?

em uma situação onde eu já sei a resposta da pergunta

$$(F \rightarrow F) \rightarrow F$$
?

Bom, vamos ver.

Essa pergunta que eu assumo que eu já sei a resposta, eu já pensei sobre ela antes. E, quando eu pensei sobre ela, eu vi que a regra R3 me diz que ela é a mesma pergunta que

F ?

(porque o lado esquerdo dela é "Sim, claro!")

Mas, se eu já sei, ou assumo que eu sei, a resposta da pergunta

$$(F \rightarrow F) \rightarrow F$$
?

então, isso é a mesma coisa que assumir que eu sei a resposta de

F?

E, assumindo que eu sei a resposta de

F?

eu não posso mais estar na dúvida se eu sei responder

F?

Quer dizer, agora eu consegui ver que

$$\Big(\left(\left(F \to F \right) \to F \right)? \to F? \Big)? : \mathit{Sim, claro!}$$

Entendi!

Ubiratan não tinha só encontrado e entendido a resposta para a pergunta

$$((F \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow F?$$

Ele tinha encontrado, e estava começando a entender, uma nova regra de raciocínio.

Ou melhor, uma nova estratégia para o uso da regra R3.

6. Acho que eu tou começando a entender como a coisa funciona ...

Quando eu assumo que eu sei uma coisa, eu não assumo que eu sei só essa coisa.

Quer dizer, quando eu assumo que eu sei uma coisa, na prática eu assumo que eu sei qualquer coisa que é a mesma coisa que essa coisa.

he he he, tá ficando complicado ...

Deixa eu dizer de outro jeito.

Suponha que eu tenho essa dúvida

$$(X? \rightarrow Y?)?$$

Nessa dúvida eu tou assumindo que eu sei responder

X?

Agora suponha que, usando a regra R3, eu descubro que

$$X? \equiv Z?$$

Quer dizer, eu sei que X? e Z? são a mesma coisa.

Mas, se eu assumo que sei responder

X?

e eu sei que X? e Z? são a mesma coisa, então eu também tou assumindo que eu sei responder

Z?

 $Hmm \dots$

Num certo sentido, então, é como se a minha dúvida fosse

$$(\{X?,Z?\} \rightarrow Y?)?$$

 $Hmm \dots$

Ou então, talvez eu pudesse dizer que as dúvidas

$$(X? \rightarrow Y?)?$$
 e $(Z? \rightarrow Y?)?$

são, na verdade, a mesma dúvida.

Porque eu sei que X? e Z? são a mesma coisa.

 $Hmm \dots$

Isso significa, então, que eu posso transformar uma dúvida em outra dúvida.

Foi assim que eu descobri a resposta de

$$((F \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow F?$$

Quer dizer, mudando aquilo que eu tou assumindo para outra coisa que é a mesma coisa.

 $Mas, hmm \dots$

Ainda tem mais uma coisa ...

7. Deixa eu ver

$$(X? \rightarrow Y?)?$$

Nessa dúvida eu to na dúvida se eu sei responder Y?, assumindo que sei responder X?.

Agora, suponha que, usando a regra R3, eu descubro que

$$Y? \equiv W?$$

Quer dizer, eu sei que Y? e W? são a mesma coisa.

Mas, se eu estou na dúvida se eu se responder

Y?

e eu sei que Y? e W? são a mesma coisa, então eu também tou na dúvida se eu sei responder

W ?

 $Hmm \dots$

Num certo sentido, então, é como se a minha dúvida fosse

$$(X? \rightarrow \{Y?, W?\})$$
?

 $Hmm \dots$

Ou então, talvez eu pudesse dizer que as dúvidas

$$(X? \rightarrow Y?)?$$
 e $(X? \rightarrow W?)?$

são, na verdade, a mesma dúvida.

Porque eu sei que Y? e W? são a mesma coisa.

 $Hmm \dots$

Isso significa que eu tenho um outro jeito de transformar uma dúvida em outra dúvida.

E provavelmente tem perguntas que eu vou descobrir a resposta desse jeito.

Quer dizer, mudando aquilo que eu tou perguntando para outra coisa que é a mesma coisa.

 $Hmm \dots$

Agora Ubiratan já tinha entendido tudo que tinha para entender.

Quer dizer, agora ele tinha uma nova estratégia para a aplicação da regra R3:

- ⇒ A estratégia de R3: comendo pelas beiradas, e pelo meio também ...
 - Quer dizer, eu sempre posso simplificar uma pergunta trocando uma parte dela por outra coisa que é a mesma coisa que essa parte.

Quando Ubiratan escreveu a sua nova estratégia no papel, ele não se conteve e quis colocá-la imediatamente à prova.

7. Essa pergunta aqui

$$F \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F)$$
?

tem cara que precisa da nova estratégia para responder.

- (1) De fato, isso é outro exemplo onde
 - o lado esquerdo e o lado direito são diferentes, e daí eu não posso aplicar R1
 - nem o lado esquerdo e nem o lado direito são "Sim, claro!", e daí eu não posso aplicar R2 ou R3 diretamente.
- (2) A solução, então, é usar a nova estratégia de R3.

 Quer dizer, tentar simplificar o lados esquerdo ou o lado direito.
- (3) Bom, o lado esquerdo já é o mais simples possível. Então, eu só posso simplificar o lado direito:

$$(F \rightarrow F) \rightarrow F$$
?

Mas, isso aqui eu já tou careca de saber que é a mesma coisa que

F?

(4) Então, a minha dúvida é a mesma coisa que

$$F \rightarrow F$$
?

E isso aqui eu também já sei que tem resposta "Sim, claro!".

A coisa funciona!

8. Deixa eu ver esse outro exemplo

$$\Big(\big((F \to F) \to F\big) \to F\Big) \ \to \ \Big(\,\big((F \to F) \to F\big) \ \to \ \big(\big(F \to (F \to F)\big) \to F\big)\,\Big)\,?$$

Essa pergunta parece bem complicada, mas eu vou raciocinar por partes.

(1) Olhando para o lado esquerdo, eu reconheço a minha pergunta problemática.

$$((F \to F) \to F) \to F$$
?

E eu lembro que respondi ela quando eu descobri que ela era a mesma coisa que

$$F \rightarrow F$$
?

Então, a minha perqunta original é a mesma coisa que

$$(F \to F) \to ((F \to F) \to F) \to ((F \to F) \to F)$$
?

Legal.

Mas, daí eu já sei que

$$F \rightarrow F$$
? : Sim, claro!

Então, pela regra R3, eu posso descartar o lado esquerdo para ficar só com

$$((F \to F) \to F) \to ((F \to (F \to F)) \to F)$$
?

(2) Hmm, agora eu posso olhar o lado esquerdo de novo

$$(F \rightarrow F) \rightarrow F$$
?

Observando que o lado esquerdo (do lado esquerdo) é

$$F \rightarrow F$$
?

outra vez, eu aplico a regra R3 outra vez, para descobrir que o lado esquerdo é a mesma coisa que

De modo que a minha pergunta agora é

$$F \rightarrow ((F \rightarrow (F \rightarrow F)) \rightarrow F)$$
?

(3) Como o lado esquerdo já foi simplificado, agora é a hora de olhar para o lado direito

$$(F \to (F \to F)) \to F$$
?

E para fazer isso, eu olho para o lado esquerdo (do lado direito)

$$F \rightarrow (F \rightarrow F)$$
?

Aqui, como o lado direito é $F \rightarrow F$?, a regra R2 me diz que

$$F \to (F \to F)$$
 : Sim, claro!

Mas, se isso é "Sim, claro!", então a regra R3 me diz que o lado direito da minha pergunta pode ser simplificado para

F?

De modo que a minha pergunta agora é

$$\mathtt{F} \, \rightarrow \, \mathtt{F} \, ?$$

e eu vejo que ela tem resposta "Sim, claro!".

Quando Ubiratan terminou de escrever o seu argumento no papel, ele examinou rapidamente o que tinha feito e viu que ele podia fazer as coisas de maneira mais simples.

9. Peraí ...

No passo (3) do argumento eu mostrei que o lado direito do lado direito

$$(F \to (F \to F)) \to F$$
?

é a mesma coisa que

Mas, isso significa então que, no passo (2), se eu tivesse ido para o lado direito ao invés do esquerdo, eu teria reduzido

$$((F \to F) \to F) \to ((F \to (F \to F)) \to F)$$
?

(i.e., o lado direito da pergunta original) para

$$((F \to F) \to F) \to F$$
?

Mas isso é a minha famosa pergunta problemática!

E eu já sei que ela tem resposta "Sim, claro!".

Assim que Ubiratan terminou de escrever isso, ele deu uma risadinha e pensou ...

10. Peraí, de novo ...

No passo (1) do argumento eu observei que o lado esquerdo da pergunta era justamente a minha pergunta problemática

$$((F \to F) \to F) \to F$$
?

Mas, isso significa que, no passo (1), se eu tivesse ido para o lado direito ao invés do esquerdo, e fizesse o que eu acabei de fazer, então eu teria reduzido o lado direito para

$$((F \to F) \to F) \to F$$
?

que é a minha pergunta problemática.

Nessa hora, eu estaria com a pergunta

$$\Big(\big((F \to F) \to F\big) \ \to \ F\Big) \ \to \ \Big(\big((F \to F) \to F\big) \ \to \ F\Big) \ ?$$

e a história acabava aqui, com a aplicação da regra R1.

Vixe!

Ubiratan estava descobrindo agora que uma coisa difícil podia ficar fácil, dependendo de como a gente olha para ela.

E quis tirar essa última ideia à prova também.

11. Agora, deixa eu ver aquele exemplo que me deu o maior trabalhão no outro dia

$$\Big(F \to \big(F \to (F \to F)\big)\Big) \ \to \ \Big(\big(F \to (F \to F)\big) \ \to \ \big((F \to F) \to F\big)\Big) \ ?$$

 $Hmm \dots$

Qual o melhor lado para começar?

 $Hmm \dots$

 \acute{E} difícil ver isso antes de começar a raciocinar ...

Então, vamos lá.

(1) Olhando para o lado esquerdo

$$F \rightarrow (F \rightarrow (F \rightarrow F))$$

eu vejo que isso é um caso típico de aplicação da estratégia de R2.

Quer dizer, o lado direito, do lado direito é

$$F \rightarrow F$$
?

que tem resposta "Sim, claro!".

Logo, a coisa toda tem resposta "Sim, claro!" (pela estratégia de R2).

E, logo, pela regra R3, eu posso descartar o lado esquerdo, ficando só com isso

$$(F \to (F \to F)) \to ((F \to F) \to F)$$
?

(2) Olhando para o lado esquerdo da parte que sobrou

$$F \rightarrow (F \rightarrow F)$$

eu vejo de novo um

$$F \rightarrow F$$
?

no lado direito.

Logo, de novo, pela estratégia de R2 a coisa toda é "Sim, claro!" outra vez.

E, pela regra de R3, outro pedaço da pergunta é descartado.

(3) Agora, eu só tou com isso

$$(F \rightarrow F) \rightarrow F$$
?

E já vejo o

$$F \rightarrow F$$
?

de novo, ali do lado esquerdo ...

Descartando ele, pela regra R3, eu chego finalmente em

F?

e descubro que a resposta é "Sei, lá!".

 $Hmm \dots$

Então era só isso ...

Parecia tão difícil no outro dia ...

E agora, Ubiratan estava bem pertinho de descobrir o jeito de olhar para as coisas que deixava tudo facinho facinho ...

12. Hmm ...

Eu acho que eu tou tendo uma intuição ...

Quer dizer, parece que o truque é procurar pelo

$$F \rightarrow F$$
?

 $Hmm \dots$

 $Como\ ele\ tem\ resposta\ "Sim,\ claro!",\ ele\ \'e\ um\ pedacinho\ V\ dentro\ de\ uma\ coisa\ maior.$

E daí essa coisa maior só pode ser duas coisas:

$$X \rightarrow V$$
 ou $V \rightarrow X$

No primeiro caso, a coisa toda vira V (pela regra R2).

E no segundo caso, o V é descartado (pela regra R3).

Mais então, no primeiro caso, eu tenho outro V, e a coisa continua.

E no segundo caso, eu vou procurar outro $F \to F$?.

 $Hmm \dots$

Eu acho que é só isso.

Parece a maior besteira ...

Mas, deixa eu experimentar essa maneira de fazer as coisas no exemplo anterior.

13. A perqunta é a sequinte

$$\Big(F \to \big(F \to (F \to F)\big)\Big) \ \to \ \Big(\big(F \to (F \to F)\big) \ \to \ \big((F \to F) \to F\big)\Big) \ ?$$

E eu posso pensar assim

(1) Tem um F → F? bem lá dentro do lado esquerdo.
E eu começo trocando ele por V

$$\Big(\mathtt{F} \to \big(\mathtt{F} \to \mathtt{V} \big) \Big) \ \to \ \Big(\big(\mathtt{F} \to (\mathtt{F} \to \mathtt{F}) \big) \ \to \ \big((\mathtt{F} \to \mathtt{F}) \to \mathtt{F} \big) \Big) \ ?$$

(2) Daí, agora, lá dentro tem um

$$F \rightarrow V$$
?

o que, pela regra R2, é a mesma coisa que V.

E isso deixa a minha pergunta assim

$$(F \to V) \to ((F \to (F \to F)) \to ((F \to F) \to F))$$
?

(3) O lado esquerdo inteiro, agora, é

$$F \rightarrow V$$
?

o que, pela regra R2, é a mesma coisa que V.

E isso deixa a minha pergunta assim

$$V \rightarrow ((F \rightarrow (F \rightarrow F)) \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F))$$
?

(4) Nesse ponto, eu uso a regra R3 para jogar o lado esquerdo fora

$$(F \to (F \to F)) \to ((F \to F) \to F)$$
?

(5) E agora eu começo tudo de novo, procurando um $F \to F$?.

Tem um $F \to F$? dentro do lado esquerdo.

E eu continuo trocando ele por V

$$(F \to V) \to ((F \to F) \to F)$$
?

(6) Daí, o lado esquerdo agora é

$$F \rightarrow V$$
?

o que, pela regra R2, é a mesma coisa que V.

E isso deixa a minha pergunta assim

$$V \rightarrow ((F \rightarrow F) \rightarrow F)$$
?

(7) Nesse ponto, eu uso a regra R3 para jogar o lado esquerdo fora

$$(F \rightarrow F) \rightarrow F$$
?

(8) E daí eu começo tudo de novo.

Tem um $F \to F$? do lado esquerdo.

E eu troco ele por V

$$V \rightarrow F$$
?

(9) Nesse ponto, eu uso a regra R3 para jogar o lado esquerdo fora

F?

(10) E aqui eu descubro que a resposta é "Sei, lá!".

hm...

Algumas pessoas, quando descobrem esse tipo de coisa, ficam profundamente satisfeitas.

Mas, Ubiratan ficou profundamente decepcionado ...

No final das contas, todo o seu raciocínio lógico se resumia a

- ullet uma regrinha para trocar $F \to F$ por V
- \bullet uma regrinha para trocar $X \to V$ por V
- uma regrinha para descartar o lado esquerdo, quando ele é igual a V

Mas, o pior não era nem isso ...

O pior é que ele viu que, não importa o quão complicada era a pergunta com que ele começa, no final ela sempre era reduzida para

$$F$$
? ou $F \rightarrow F$?

Quer dizer, ele viu que qualquer pergunta complicada era, no final das contas, a mesma coisa que

$$F$$
? ou $F \to F$?

E isso significava que, o tempo todo, as perguntas que ele estava fazendo eram a maior besteira ...

E daí ele pensou

 $\begin{tabular}{ll} \it Mas isso \'e bem feito mesmo! \\ \it \'E para eu aprender a ser mais humilde ... \end{tabular}$