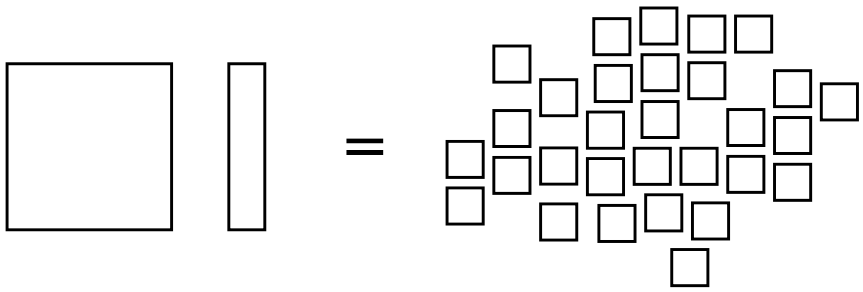
Aula 9: Complicando para simplificar

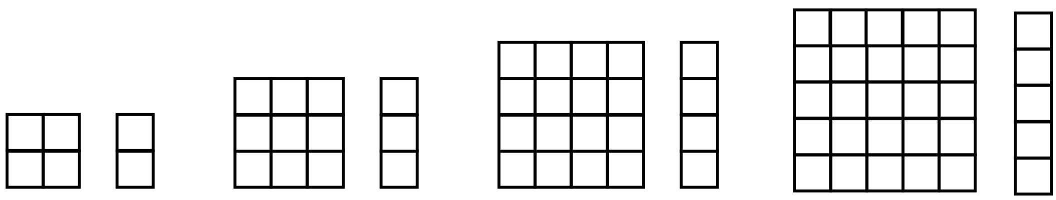
Exemplo 1

Imagine que você queira dividir dois pedaços de terra em trinta terrenos quadrados iguais. Os dois pedaços de terra são retangulares mas um deles é quadrado. Além disso, no pedaço que não é quadrado, os terrenos formarão uma fila, um do lado do outro, enquanto que no pedaço quadrado, eles formam uma grade. Também queremos que o maior lado do pedaço de terra que não é quadrado seja do mesmo tamanho do lado do pedaço quadrado. Quantos terrenos devem ser colocados em cada pedaço de terra?

Uma primeira tentativa de resolver esse problema é tentar imaginar essa situação.



Isso já nos dá uma maneira de tentar resolver, por exemplo, testando algumas possibilidades:



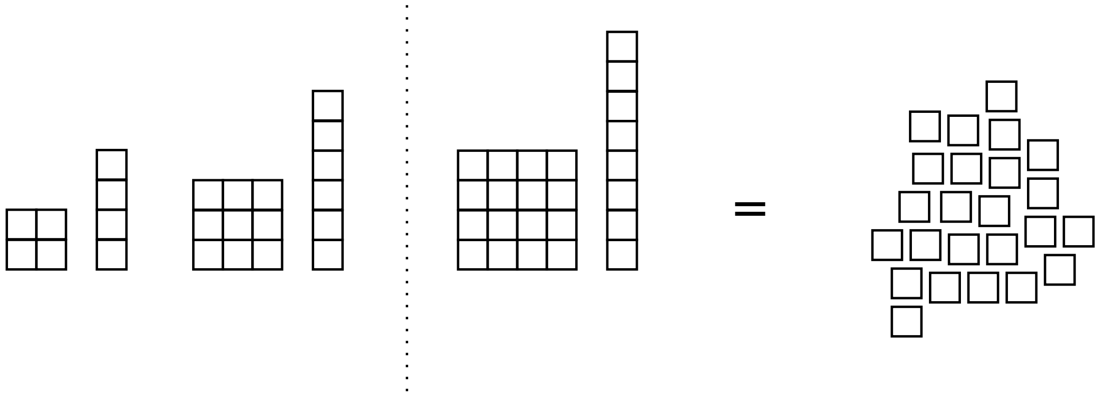
E assim, até que conseguimos uma solução. (Será que você consequiria resolver sem os desenhos? Nem papel ou caneta?)

E dessa forma, podemos até resolver algumas variações do problema.

Suponha que quiséssemos agora dividir dois pedaços de terra, um quadrado e outro retangular, mas não quadrado, cujo maior lado tem duas vezes o lado do quadrado. Tudo isso deve ser dividido em vinte e quatro terrenos quadrados iguais.

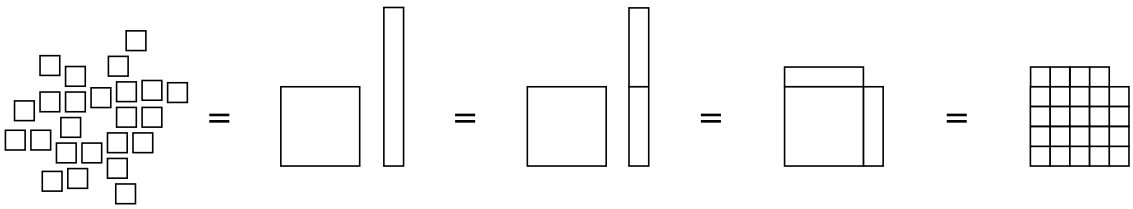
(Tentem fazer.)

Podemos fazer assim



<figura: 3>

ou assim



Ainda assim, está fácil, não é?

E se ao invés de vinte e quatro terrenos quiséssemos divir em vinte e dois terrenos iguais?

E se fossem quatro pedaços retangulares não quadrados?

Agora, imaginem que quiséssemos dividir trezentos e vinte e sete pedaços de terra quadrados e cento e vinte e dois pedaços retangulares, mas não quadrados, em dezesseis mil oitocentos e setenta e sete terrenos quadrados iguais?

As nossas estratégias acima começam a se mostrar pouco eficientes (impossíveis?) quando as quantidades envolvidas começam a aumentar, não acham?

Bem, ao invés de trabalhar com desenhos, já faz um tempo que as pessoas inventaram outras formas de lidar com esses problemas.

<figura 5, com expressões algébricas e sistema decimal>

$$327x^2 + 122x = 16.877$$

E já foi descoberta uma forma de expressar de maneira sucinta a solução de qualquer variante desse problema.

$$ax^2 + bx = c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

Exemplo 2

Bárbara tem caixas de três tamanhos: pequenas, médias e grandes.

Ela coloca primeiramente onze caixas grandes sobre uma mesa.

A seguir, ela deixa algumas dessas caixas vazias, e em cada uma das outras ela coloca oito caixas médias.

Finalmente, ela deixa algumas dessas caixas médias vazias, e em cada uma das outras ela coloca oito caixas pequenas (vazias).

Você sabe que existem cento e duas caixas vazias no total.

Quantas caixas estão sobre a mesa?

Existem três tamanhos de caixas, a saber, pequenas, médias e grandes. Uma maneira de respondermos a questão seria somar a quantidade de caixas de cada tipo. Acontece que, como em todo bom enígma, essas informações não estão diretamente disponíveis.

Uma primeira tentativa, então, seria descobrir a quantidade de caixas de cada tipo. Note que o enunciado do problema nos informa que a quantidade de caixas grandes é onze. Em seguida, somos informados que algumas dessas caixas serão usadas para armazenar caixas médias, mais precisamente, algumas caixas grandes armazenarão, cada, oito caixas médias. Isso nos dá uma informação valiosa. A quantidade de caixas médias é igual a oito vezes a quantidade de caixas grandes usadas. Aqui surge a primeira dificuldade: o enunciado não nos informa a quantidade de caixas grandes usadas para armazenar caixas médias! À primeira vista, pode parecer que essa informação é inútil. Mas não é bem assim. Se, posteriormente conseguirmos descobrir quantas caixas grandes foram usadas, então conseguiremos usar essa informacão para descobrir quantas caixas médias foram usadas.

Um pouco mais a diante, o enunciado nos informa que algumas das caixas médias serão usadas para armazenar caixas pequenas, a exemplo do que aconteceu com as grandes em relação às médias. Do mesmo modo, cada uma das caixas médias usadas armazenará oito caixas pequenas.

Como não sabemos quantas caixas foram usadas para armazenar caixas menores, pode ser que no final, algumas estejam vazias. De fato, no final das contas, nos diz o enunciado, há cento e duas caixas vazias. Precisamos saber quantas caixas estão sobre a mesa ao todo.

Vamos listar todas essas informações a fim de organizar melhor nossas ideias:

- há onze caixas grandes;
- há caixas grandes, médias e pequenas e, de cada tipo, algumas estão cheias e outras não;
- a quantidade de caixas médias, cheias e vazias, é oito vezes a quantidade de caixas grandes cheias;
- analogamente, a quantidade de caixas pequenas é oito vezes a quantidade de caixas médias cheias;
- a quantidade de caixas grandes vazias mais a quantdade de caixas médias vazias mais a quantidade de caixas pequenas (que são todas vazias) é cento e dois.

Embora não esteja explicitamente apresentado no enunciado, podemos concluir que:

- a quantidade de caixas grandes cheias é igual a onze menos a quantidade de caixas grandes vazias;
- portanto, a quantidade de caixas médias é igual a oitenta e oito menos oito vezes a quantidade de caixas grandes vazias;
- do mesmo modo, a quantidade de caixas médias cheias é igual à quantidade total de caixas médias menos a quantidade de caixas médias vazias;
- logo a quantidade de caixas pequenas é igual à oito vezes a quantidade de caixas médias menos oito vezes a quantidade de caixas médias vazias;
- mas, portanto, a quantidade de caixa pequenas é igual a setecentos e quatro menos sessenta e quatro vezes a quantidade de caixas grandes vazias menos oito vezes a quantidade de caixas médias vazias...

Como vocês podem ver, quando começamos a lidar com vários números e quantidades que não sabemos ao certo quais são, as coisas começam a ficar complicadas.

Esse não é um problema novo. Há muito tempo os matemáticos já se depararam com esse mesmo problema. Desde muito tempo as pessoas estão interessadasa em descobrir o valor de certas quantidades dadas os valores de outras, como, por exemplo, quantos camelos camelos devem ser dados a cada um dos dois filhos de um sheik sabendo que seu desejo era de que o mais velho ficasse com os três melhores camêlos mais dobro da quantidade dada ao mais jovem, sabendo que o sheik possuia trinta e três camelos?

Os problemas e mesmo o conhecimento matemático eram apresentados utilizando a própria linguagem que as pessoas falavam. Não haviam símbolos especiais adicionados à linguagem que fossem usado para expressar os conceitos matemáticos como os números. Por exemplo, o Teorema de Pitágoras é apresentado da seguinte forma nos Elementos de Euclides (com algumas adaptações):

"A área do quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma das áreas dos quadrados sobre cada um dos outros dois lados"

bem diferente famosa equação apresentada da seguinte forma:

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

onde h é o tamanho da hipotenusa e c_1 e c_2 o tamanhos do dois catetos.

À medida que a matemática foi evoluindo e que cálculos cada vez mais complexos se faziam necessários, a ferramenta usada para fazer matemática também foi sendo aperfeiçoada para facilitar seu uso. Assim, foi surgindo uma série de símbolismos para expressar de maneira mais succinta e efetiva o conhecimento matemático, além de permitir tirar conclusões de forma mais fácil, culminando na notação algébrica e nos sistemas numéricos como conhecemos hoje.

Voltando ao nosso problema, nós também chegamos ao ponto em que ficou difícil lidar com tantas quantidades desconhecidas, exprimir operações aritméticas com números grandes e ainda tirar conclusões a partir disso. Felizmente, nós já dispomos hoje de sistemas numéricos e símbolos simples para exprimir números e operações entre eles. Também já dispomos da ideia de utilizar símbolos específicos para simbolizar as quantidades, desconhecidas ou não. Vejamos como podemos então traduzir a informação apresentada no problema para a linguagem da álgebra moderna. Inicialmente, escolheremos símbolos para as quantidades envolvidas, podemos pensar nesses símbolos como abreviações das expressões usadas para descrever essas quantidades. Assim, constituimos a seguinte legenda:

G : quantidade de caixas grandes

M : quantidade de caixas médias

P : quantidade de caixas pequenas

GV : quantidade de caixas grandes vazias

GC : quantidade de caixas grandes cheias

MV : quantidade de caixas grandes vazias

MC : quantidade de caixas grandes cheias

PV : quantidade de caixas grandes vazias

PC : quantidade de caixas grandes cheias

Agora, vamos traduzir as informações do enunciado em equações na notação algébrica:

- (1) $G = 11$
- (2.1) $G = GV + GC$
- (2.2) $M = MV + MC$
- (2.3) $P = PV + PC$
- (3) $M = 8 \cdot GC$
- (4) $P = 8 \cdot MC$
- (5) $GV + MV + PV = 102$
- (6)$PC = 0$

Agora, fica fácil tirar uma série de conclusões apenas realizando manipulações algébricas:

- (7) $GC = G - GV$
- (8) $M = 8 \cdot (G - GV) = 8 \cdot (11 - GV) = 88 - 8 \cdot GV$

- (9) $MC = M - MV)$

- (10) $P = 8 \cdot (M - MV)$

- (11) $P = 8 \cdot ((88 - 8 \cdot GV) - MV) = 704 - 64 \cdot GV - 8 \cdot MV$

- (12) $P = PV$

O que também é interessante é que, usando essa notação, podemos também escrever o que desejamos saber:

$$G + M + P$$

Com isso, reduzimos a solução do problema a uma série de manipulações algébricas.

Como dissemos no início da solução, se conseguíssemos descobrir os valores de G, M e P, então o problema estaria resolvido. Para isso, o que teríamos que fazer é realizar as manipulações algébricas possíveis a fim de encontrarmos as equações que explicitariam o valores exatos dessas incógnitas. No entanto, essa tarefa se mostra muito difícil, na medida em que diversas manipulações são possíveis e na prática (tentem!) mesmo após muitas tentativas não conseguimos encontrar esses valores.

Ao invés de atacar esse objetivo específico, vamos tentar usar as informações das quais dispomos de maneira mais despretenciosa para ver o que acontece. De (5) e (12) obtemos:

$$(13)\ P = 102 - MV - GV.$$

De (11) e (13) temos

$$(14)\ MV = 86 - 9GV$$

e de (14) e novamente (11), temos

$$(15)\ P = 16 + 8GV.$$

Nesse momento, ao inspecionar as equações de temos até agora, nós verificamos que temos equações para G, M e P, muito embora essas equações não nos permitam descobrir quem são M e P. Mas, como estamos interssados em $G+M+P$, podemos utilizar essas equações para obter uma outra envolvento a expressão na qual estamos interessados. De (1), (8) e (15), temos

$$G + M + P = 11 + (88 - 8 \cdot GV) + (16 + 8 \cdot GV) = 115.$$

Exemplo 3

"Isn't it strange that no two of us are the same age?", remarked Hope, the youngest female, to Bob who was not her brother. "Yes", added Art, "and no pair of siblings is more than two years apart."

Can you match brothers (Art, Bob, Carl, Don) and sisters (Eileen, Fran, Grace, Hope) and find their ages, with the help of the following additional information:

(1) *Carl is 2 years older than Hope's brother*

(2) *Don's sister and Bob are two years apart*

(3) *Eileen is older than Grace*

(4) *Don is 3 years older than Hope's brother*

(5) *Fran's brother and Don are 4 years apart, as are Fran and Carl*

(6) *Art is younger than his sister*

(7) *Fran is 27*

Assume that each of (Art, Bob, Carl and Don) has exactly one sister in (Eileen, Fran, Grace, Hope) and vice-versa.

Mais uma vez temos um enigma que envolve números e isso pode ser um indício de que utilizar uma notação algébrica pode nos ajudar a realizar os passos que nos levarão à solução.

Nesse problema, precisamos descobrir a relação de parentesco entre oito pessoas utilizando a informação a respeito de suas idades. Nós introduziremos variáveis a, b, c, d, e, f, g, h para as idades das oito pessoas. Inicialmente, nos é informado que todos os oitos tem idades diferentes. Essa informação pode ser representada por inequações do tipo

$$(P1)\ a \neq b, a \neq c, \ldots, g \neq f.$$

Note também que algumas informações são dadas a respeito do irmão ou irmã de alguém. Como cada pessoa tem exatamente um irmão ou irmã, introduzirems uma notação funcional. Dessa forma, $S(a)$, $S(b)$, $S(c)$ e $S(d)$ são as idades das irmãs de Art, Bob, Carl e Don, e $B(e)$, $B(f)$, $B(g)$ e $B(h)$ são as idades dos irmão de Eileen, Fran, Grace e Hope.

Quando utilizamos essa notação, podemos traduzir certas informações sobre o problema em termos de equações entre as variáveis. Por exemplo o fato de que Bob não é o irmão de Hope pode ser expresso como

$$(P2)\ b \neq B(h).$$

Vamos então prosseguir com o processo de traduzir toda a informação fornecida pelo problema na nossa linguagem algebrizada. O fato de que Hope é a mais jovem das mulheres pode ser expresso pelas seguintes fórmulas

$$(P3)\ h < e, h < f, h < g$$

Note aqui o uso do símbolo $<$ para exprimir a relação de "menor que".

Em seguida, Art diz que nenhum par de irmão tem diferença de idade de mais de dois anos. Como não sabemos quem é o mais velho, se o irmão ou a irmã, então utilizaremos mais notação para exprimir esse fato de maneira sucinta:

$$(P4)\ |a - S(a)| \leq 2, |b - S(b)| \leq 2, \ldots, |h - B(h)| \leq 2$$

As demais informações tomam a seguinte forma:

(1) $c = B(h) + 2$

(2) $|S(d) - b| = 2$

(3) $g < e$

(4) $d = B(h) + 3$

(5) $|B(f) - d| = 4, \quad |f - c| = 4$

(6) $a < S(a)$

(7) $f = 27$

De (1) e (4) temos $c \neq B(h)$ e $d \neq B(h)$, respectivamente. Juntamente com $(P2)$, temos

$$(8)\ B(h) = a$$

De (5) temos que

$$(9)\ d \neq B(f)$$

De (5) e (P4) temos

$$(10)\ c \neq B(f)$$

De (8), e como cada pessoa tem exatamente um irmão ou irmã, temos

$$(11)\ a \neq B(e), a \neq B(f), a \neq B(g),$$

que juntamente com (9) e (10) nos dá

$$(12)\ B(f) = b$$

De (8) e (4) temos

$$(13)\ d = a + 3$$

E de (8) e (1) temos

$$(14)\ c = a + 2$$

que juntamente com (13) nos informa que

$$(15)\ d = c + 1$$

Até este ponto, já fomos capazes de descobrir bastante coisa. Por exemplo, já descobrimos que o irmão da Hope é Art e que o irmão da Fran é o Bob. Portanto, basta agora descobrirmos as idades de cada um e quem são os irmãos e irmãs de Carl, Don, Eileen e Grace. Olhado para as informações que obtemos, podemo ver que algumas delas falam sobre alguns desses. Por exemplo, (5) nos fala sobre as idades de Fran e Carl. Como a idade de Fran é sabida (7), podemos tentat obter alguma informação importante de (5). Nesse caso, temos duas opções:

$$(C1)\ f - c = 4$$

ou

$$(C2)\ c - f = 4$$

Vamos supor (15) é o caso. Então, de (7) temos

$$(C1.16)\ c = 31$$

De (15) e (C1.16)

$$(C1.17)\ d = 32$$

De (C1.16) e (14)

$$(C1.18)\ a = 29$$

Como as diferenças de idade entre irmãos é no máximo 2 (P4) e a irmã de Art (Hope) é mais velha que ele (6), Hope deve ter 30 ou 31 anos. Como todos tem idades diferentes (P1), e Carl tem 31 anos (C1.16), então

$$h = 30.$$

Mas isso contradiz o fato de que hope é a mais nova (P3), já que Fran tem 27 (7)! Isso nos leva à conclusão de que nossa suposição inicia está equivocada.

Com isso, e supondo que o problema é solucionável, podemos concluir que (C2) é o caso, o que, junto com (7) nos dá

$$(C2.16)\ c = 23$$

Juntamente com (15)

$$(C2.17)\ d = 24$$

De (C2.16) e (14)

$$(C2.18)\ a = 21$$

Como a irmã de Art (Hope) é mais velha e no máximo 2 anos mais velha, temos

$$(C2.19)\ h = S(a) = 22$$

já que todos tem idades de diferentes de Carl e Don tem 23 e 24 anos, respectivamente.

Por esses mesmos motivos (P1 e P4), sabemos que a irmã de Carl tem 25 e a irmã de Don tem 26

$$(C2.20)\ S(c) = 25$$

$$(C2.21)\ S(d) = 26$$

Mas ainda não sabemos quem elas são (Grace ou Eileen). No entanto, (3) nos diz que Eileen é mais velha que Grace. Logo

$$(C2.22)\ S(c) = g = 25$$

$$(C2.23)\ S(d) = e = 26$$

Agora só falta descobrir a idade da Fran (Bob).

De (5) e (P4), temos

$$b = 28$$

Resumindo, temos a seguinte resposta: