Lógica

2a avaliação remota: segunda chamada

1. **Raciocinando com as regras R1, R2 e R3 do Ubiratan**

   Consider as duas perguntas abaixo:

   $$\Big(\big(\mathtt{F} \to (\mathtt{F} \to \mathtt{F})\big) \;\to\; (\mathtt{F} \to \mathtt{F})\Big) \;\to\; \mathtt{F}\,?$$

   $$\Big((\mathtt{F} \to \mathtt{F}) \;\to\; \big((\mathtt{F} \to \mathtt{F}) \to \mathtt{F}\big)\Big) \;\to\; \mathtt{F}\,?$$

   Uma delas tem resposta *"Sim, claro!"* e a outra tem resposta *"Sei, lá!"*.

   Determine a resposta de cada pergunta, e apresente raciocínios completos baseados nas regras R1, R2, R3, para justificar a sua resposta.

   Observações:

   - Você não deve raciocinar a partir da intuição.
   - E você também não deve utilizar fatos conhecidos para construir o seu argumento.
   - Você deve mencionar explicitamente cada uso das regras R1, R2, R3 no seu argumento.
   - E você pode utilizar as estratégias de uso das regras R1, R2, R3.

2. **Raciocinando com as regras H1, H2 e MP do Hilbert**

   Apresente um raciocínio completo (i.e., um raciocínio que só utiliza as regras de construção H1, H2 e o Modus Ponens) para demonstrar que a seguinte regra pode ser construída no jogo lógico de Hilbert

   $$(\mathtt{C} \to \mathtt{A}) \;\to\; \big(\mathtt{C} \;\to\; (\mathtt{A} \to \mathtt{A})\big)$$

   Dica: raciocine em alto nível primeiro, usando regras e transformações conhecidas, e depois faça a engenharia reversa do seu raciocínio.

3. **Raciocinando sobre transformações**

   Considere a seguinte transformação

   $$(\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \;\to\; \mathtt{C} \qquad \stackrel{\mathtt{3E}}{\Longrightarrow} \qquad \mathtt{B} \;\to\; \mathtt{C}$$

   que elimina o lado esquerdo do lado esquerdo de uma regra.

a) Mostre como essa transformação pode ser implementada a partir das transformações básicas que nós vimos nas aulas (`Dist`, `Inv`, `L1`, `R2`, `R3`, etc.)

   Isto é, comece com o lado esquerdo e raciocine com transformações para obter o lado direito.

b) Mas, a transformação `3E` não vale na direção contrária.

   Quer dizer, nós não podemos transformar $\mathtt{B} \to \mathtt{C}$ para obter $(\mathtt{A} \to \mathtt{B}) \to \mathtt{C}$.

   Por outro lado, quando o fragmento $\mathtt{B} \to \mathtt{C}$ aparece no lado esquerdo de uma regra essa transformação pode ser feita.

   Por exemplo, nós podemos transformar

$$(\mathtt{B} \to \mathtt{C}) \;\to\; \mathtt{D}$$

   em

$$\big(\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{B} \to \mathtt{C})\big) \;\to\; \mathtt{D}$$

   Mostre como essa transformação pode ser feita.

   Dica: Examine a solução do exercício 1 da lista 20b (i.e., os exercícios adicionais 20), e raciocine de maneira análoga.

4. **Raciocinando com a conjunção**

O jogo lógico de Hilbert também possui as seguintes 3 regras para a conjunção:

$$\texttt{[H3]} \quad (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \;\to\; \mathtt{p}$$

$$\texttt{[H4]} \quad (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \;\to\; \mathtt{q}$$

$$\texttt{[H5]} \quad \mathtt{p} \;\to\; \Big(\mathtt{q} \;\to\; (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\Big)$$

Mostre como essas regras podem ser usadas para transformar

$$\mathtt{A} \;\to\; (\mathtt{B} \to \mathtt{C})$$

em

$$(\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}) \;\to\; \mathtt{C}$$

Dica: Coloque a coisa certa na frente da primeira regra, faça a distribuição, use `H?` e depois Modus Ponens.

Repita essa operação outra vez, e você chegará no resultado desejado.