aula 26: Negação II

João ficou pensando nas regras que ele havia descoberto.

$$\frac{X \quad \neg Y}{\neg(X \to Y)} \quad \frac{\neg X}{\neg(X \wedge Y)} \quad \frac{\neg Y}{\neg(X \wedge Y)} \quad \frac{\neg X \quad \neg Y}{\neg(X \vee Y)}$$

$$\frac{\neg(X \to Y)}{X \wedge \neg Y} \qquad \frac{\neg(X \wedge Y)}{\neg X \vee \neg Y} \qquad \frac{\neg(X \vee Y)}{\neg X \wedge \neg Y}$$

{José} Vejamos a regra

$$\frac{X \quad \neg Y}{\neg(X \to Y)}$$

exprime o fato de que, se tenho X e rejeito Y (o que exprimo com $\neg Y$) podemos concluir $\neg(X \to Y)$.

{Jo} Mas, por quê pensar assim? Que mal há em pensar $X \to Y$ quando penso X e $\neg Y$?

Após refletir um pouco, José chegou a uma conclusão.

{Jo} Já sei! O que aconteceria se eu aceitasse que $X \to Y$? Bem, isso me diz que de X eu posso obter Y

$$\frac{X \quad X \to Y}{Y}$$

concluindo Y. Mas eu estou rejeitando Y! Ou seja, $X \to Y$ é incompatível com X e $\neg Y$. Por isso concluo $\neg(X \to Y)$.

{Jo} Deixa eu ver a próxima regra

$$\frac{\neg X}{\neg(X \wedge Y)}$$

Então, imagine que eu rejeite X. Qual o problema em aceitar $X \wedge Y$? Essa parece mais fácil, pois, nesse caso eu teria X, que eu rejeito. Então $X \wedge Y$ é incompatível com $\neg X$. Logo concluo $\neg(X \wedge Y)$.

O caso da regra

$$\frac{\neg X}{\neg(X \wedge Y)}$$

é análogo.

{Jo} A próxima regra é mais interessante

$$\frac{\neg X \quad \neg Y}{\neg(X \vee Y)}$$

Suponha então que eu rejeito X e Y. Por que eu deveria concluir $\neg(X \vee Y)$? Bem, o que aconteceria se eu aceitasse $X \vee Y$? Aceitar isso é me comprometer com duas possibilidades. No primeiro caso, tenho X. Mais isso vai de encontro com o fato de que rejeito X. No outro, eu teria Y, mas isso é problemático com o fato de que eu rejeito Y. Ou seja, aceitar $X \vee Y$ é me comprometer com duas possíbilidades, ambas incompatíveis com $\neg X$ e $\neg Y$. Isso me parece um bom motivo para rejeitar $X \vee Y$.

José percebeu algo curioso.

{Jo} Essas regras todas serviram para eu saber se devo rejeitar algo. As outras são o contrário, isto é dado que eu rejeito, eu me comprometo com algumas coisas a partir disso. Vejamos

$$\frac{\neg(X \to Y)}{X \wedge \neg Y}$$

aqui acho que a justificativa para essa regra deve ser um pouco diferente.

Por que, em primeiro lugar, eu estou rejeitando $X \to Y$? Olhando para a primeira regra que examinei, eu rejeito $X \to Y$ quando tenho X e $\neg Y$, e por uma boa razão. Se eu quero ser cauteloso com aquilo que rejeito, uma boa opção seria rejeitar $X \to Y$ apenas quando tenho X e $\neg Y$. Portanto, $\neg(X \to Y)$ seria a própria expressão dessa situação de incompatibilidade. Mas, como $X \to Y$ pode nos levar a uma situação de incompatibilidade? Ora, $X \to Y$ me diz que eu posso passar de X para isso. Então, para usar isso, eu preciso de X[1]. E o que isso me dá é Y. Isso será problemático se eu tiver $\neg Y$. Assim, essa regra nos diz que $\neg(X \to Y)$ exprime as condições em que rejeitamos $X \to Y$.

{Jo} A outra regra foi

$$\frac{\neg(X \wedge Y)}{\neg X \vee \neg Y}$$

Do mesmo modo, que razões eu teria para rejeitar $X \wedge Y$? Basta que eu esteja rejeitando um dos dois. Assim, se eu quiser rejeitar $X \wedge Y$ apenas quando eu tiver

[1]Note que se eu rejeito X, então a regra $X \to Y$ não pode ser de fato usada, por isso, aceitá-la não tem problema, e por isso não temos necessidade de rejeitá-la.

boas razões para isso, ao me comprometer com $\neg(X \wedge Y)$ eu estaria também me comprometendo com $\neg X \vee \neg Y$.

{Jo} A última regra também é parecida

$$\frac{\neg(X \vee Y)}{\neg X \wedge \neg Y}$$

A questão de fundo é por quê rejeitar $X \vee Y$? Se eu quiser bons motivos para isso, uma possibilidade é me limitar aos casos em que $X \vee Y$ seria problemático pois me levaria a uma situação de incompatibilidade com meus compromissos atuais. Para isso, ambas as possibilidades, X e Y, deveriam nos levar a uma situaçã de incompatibilidade. Mas isso seria motivo para, em primeiro lugar, rejeitar tanto X quanto Y. Portanto, se adotamos a postura de rejeitar algo apenas com boas razões para isso, então ao se comprometer com $\neg(X \vee Y)$ nós deveríamos nos comprometer com essas razões. Ou seja, passamos a usar $\neg(X \vee Y)$ como a expressão das condições em que $X \vee Y$ é rejeitado, ou seja $\neg X \wedge \neg Y$.

Nesse ponto, José já tinha esquecido da viagem e ficou tentando descobrir novas regras.

{Jo} Se eu tenho $X \to Y$ e rejeito Y, exprimindo essa rejeição com $\neg Y$, o que posso concluir com sobre X. Bem, será que X é compatível com essa situação? Se eu aceito X, posso raciocinar assim

$$\frac{X \quad X \to Y}{Y}$$

concluindo Y. Mas, se estou rejeitando Y, não devo aceitar algo que me faria concluir Y. Portanto, X me leva a uma situação de incompatibilidade com a minha posição atual. Por isso devo rejeitá-lo.

$$\frac{X \to Y \quad \neg Y}{\neg X}$$

{Jo} E se eu tenho $X \vee Y$ e rejeito Y? Essa parece fácil. Se eu aceito $X \vee Y$, estou me comprometendo com alguma dessas possibilidades. Se eu rejeito uma, só me resta outra

$$\frac{X \vee Y \quad \neg Y}{X}$$

José então percebeu algo.

{Jo} Todas essas regras me dizem como eu obtenho uma coisa a partir de outra. Se eu sei uma coisa, eu concluo outra. Será que eu consigo descobrir algo sem saber nada?

Ele viu que essas regras não poderiam ajudá-lo com isso, mas talvez pudesse fazer o mesmo que ele fez quando chegou até elas.

{Jo} Tentando entender essas regras eu várias vezes chegava em uma situação de confito, em que, se eu aceitava algo, concluiria que eu já estava disposto a rejeitar. No fundo, era essa situação que eu queria evitar. De fato, não parece fazer sentido aceitar algo e rejeitar ao mesmo tempo. Ou seja

$$\neg(X \wedge \neg X)$$

{Jo} Ótimo, já sei algo que não depende de nada. E se eu aplicar minhas regras sobre isso?

$$\frac{\neg(X \wedge \neg X)}{\neg X \vee \neg\neg X}$$

{Jo} Já sei duas coisas.

$$\neg(X \wedge \neg X) \quad , \quad \neg X \vee \neg\neg X$$

Mas, nesse caso, se tiver X, o caso em que $\neg X$ deveria ser descartado, logo

$$\frac{X}{\neg\neg X}$$

Humm... E o contrário? Se eu tenho $\neg\neg X$? Estranho, parece que isso me diz para rejeitar $\neg X$, mas isso já é uma rejeição! Minha linha de raciocínio era que eu só rejeito com boas razões, quais seriam as boas razões para rejeitar $\neg X$?