aula 28, complemento: Conjunção e Disjunção II

Joé se deu conta de que, embora tivesse investigado bastante o "E" e o "OU", não havia misturado muito os dois. Então, decidiu corrigir isso.

Como será que essas coisas funcionam juntas? Só tem um jeito de saber!

1. $(A \vee (B \wedge C)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

Essa fórmula tem um $\vee$ *no lado esquerdo. A regra* `H8` *tem, lá no final, uma parte que tem essa forma: um* $\vee$ *implicando alguma coisa. Essa fórmula é um pouco grande, vamos por partes. A* `H8` *é assim:*

$$\xRightarrow{\texttt{H8}} (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$$

A ideia é fazer

$$(A \vee (B \wedge C)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) = (p \vee q) \rightarrow r$$

então temos

$$p = A, \quad q = (B \wedge C), \quad r = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

substituindo no formato de `H8`*, temos*

$$\begin{aligned}\xRightarrow{\texttt{H8}} (A \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))) \rightarrow \\ (((B \wedge C) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))) \rightarrow \\ ((A \vee (B \wedge C)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))))\end{aligned}$$

O que eu quero está ali na última linha. Então, bastaria eu conseguir as fórmulas que estão nas outras duas linhas anteriores. Aí é só aplicar `modus ponens` *duas vezes. Vamos começar pelo começo. Será que dá para construir*

$$A \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \ ?$$

Não é tão difícil. Primeiro, podemos notar que

$$\xRightarrow{\texttt{H6}} A \rightarrow (A \vee B)$$

$$\xRightarrow{\texttt{H6}} A \rightarrow (A \vee C)$$

Agora é só usar a transformação `J1`

$$\xRightarrow{\texttt{J1}} A \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

Já dá pra aplicar o primeiro `modus ponens`

$$\xRightarrow{\texttt{MP}} ((B \wedge C) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))) \to$$
$$((A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))$$

Agora vou tentar construir

$$((B \wedge C) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))$$

Eu sei que

$$\Longrightarrow B \to (A \vee B)$$

$$\Longrightarrow C \to (A \vee C)$$

Se usar `Monot.` *com a segunda, consigo*

$$\xRightarrow{\texttt{Monot.}} (B \wedge C) \to (A \vee C)$$

Com `Monot.` *e a comutatividade da conjunção, consigo transformar a primeira em*

$$\Longrightarrow (B \wedge C) \to (A \vee B)$$

Agora é só usar `J1`

$$\xRightarrow{\texttt{J1}} (B \wedge C) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

Pronto! Agora é `modus ponens` *outra vez com aquela regra láááá de cima, obtendo*

$$\xRightarrow{\texttt{MP}} (A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$