Algoritmos gulosos

↳ Problemas de otimização: existe formas mais simples de resolver alguns

* Fazem em cada passo a melhor escolha local, na esperança que leve ao ótimo global.

↳ Subestrutura ótima

- Mais fáceis de entender e implementar
- Temos que provar!!!

Problema da Mochila

- n itens
- cada item tem $\begin{cases} \text{peso } p_i \\ \text{valor } v_i \end{cases}$
- Mochila com capacidade C kilos

Objetivo: Maximizar o valor carregado na mochila (itens inteiros)

Ideia 1: Seleciona itens em ordem decrescente de valor.

$C = 10$ $\quad \{\overset{p}{(10}, \overset{v}{10)}, \overset{p}{(5}, \overset{v}{6)}, \overset{p}{(5}, \overset{v}{6)}\}$

Solução: (10, 10)

valor: 10

Solução ótima: $\{(5, 6), (5, 6)\}$

valor: 12

Ideia 2: Seleciona itens em ordem crescente de peso.

$C = 10$

$$\{(\overset{p}{10}, \overset{v}{20}), (\overset{p}{5}, \overset{v}{6}), (\overset{p}{5}, \overset{v}{6})\}$$

Solução da Ideia 2: $\{(5, 6), (5, 6)\}$

valor total: 12

Solução ótima: $\{(10, 20)\}$

valor: 20

Problema da Mochila (fracionário)

- n itens
- cada item tem $\begin{cases} \text{peso } p_i \\ \text{valor } v_i \end{cases}$
- Mochila com capacidade C kilos

Objetivo: Maximizar o valor carregado na mochila (itens inteiros ou pedaços de itens)

Ideia 3: Selecionar itens de acordo com a razão $\frac{\text{peso}}{\text{valor}}$ de maneira crescente.

Teorema: O algoritmo da Ideia 3 encontra uma solução ótima para o problema da mochila fracionária. Suposição: todos os itens possuem razão $\frac{\text{peso}}{\text{valor}}$ diferentes.

Prova: Vamos representar uma solução como

sol: $[e_1, e_2, \dots, e_n]$, onde e_i indica a quantidade (peso) selecionada do i-ésimo objeto.

Solução da ideia 3: Ordenar de forma crescente por $\frac{\text{peso}}{\text{valor}}$.

$$S = [p_1, p_2, \dots, p_{j-1}, e_j, 0, 0, \dots, 0]$$

Ideia da prova: mostrar que qualquer solução diferente da encontrada pelo algoritmo pode ser melhorada.

Seja S' qualquer redução satisfazendo:

(i) $S'[k] < S[k]$

(ii) $S'[m] > S[m]$

Ideia: Construir S'' a partir de S', reduzindo o peso do m-ésimo item e aumentar o peso do k-ésimo

Seja $x = \min\{S'[m], p_k - S'[k]\}$

$$S''[i] = \begin{cases} S'[i], & i \neq k, m \\ S'[k] + x, & i = k \\ S'[m] - x, & i = m \end{cases}$$

Calcular Valor(S'') − Valor(S')

$$\sum_{i=1}^{n} S''[i] \cdot \frac{v_i}{p_i} - \sum_{i=1}^{n} S'[i] \frac{v_i}{p_i} =$$

$$\left(S''[k] \frac{v_k}{p_k} + S''[m] \frac{v_m}{p_m} \right) - \left(S'[k] \frac{v_k}{p_k} + S'[m] \frac{v_m}{p_m} \right)$$

$$\left(\cancel{S'[k]} + x\right) \frac{v_k}{p_k} + \left(\cancel{S'[m]} - x\right) \frac{v_m}{p_m} - \cancel{S'[k] \frac{v_k}{p_k}} - \cancel{S'[m] \frac{v_m}{p_m}}$$

$$= \underset{>0}{x} \left(\underbrace{\frac{v_k}{p_k} - \frac{v_m}{p_m}}_{>0} \right) > 0 \qquad \frac{p_k}{v_k} < \frac{p_m}{v_m}$$