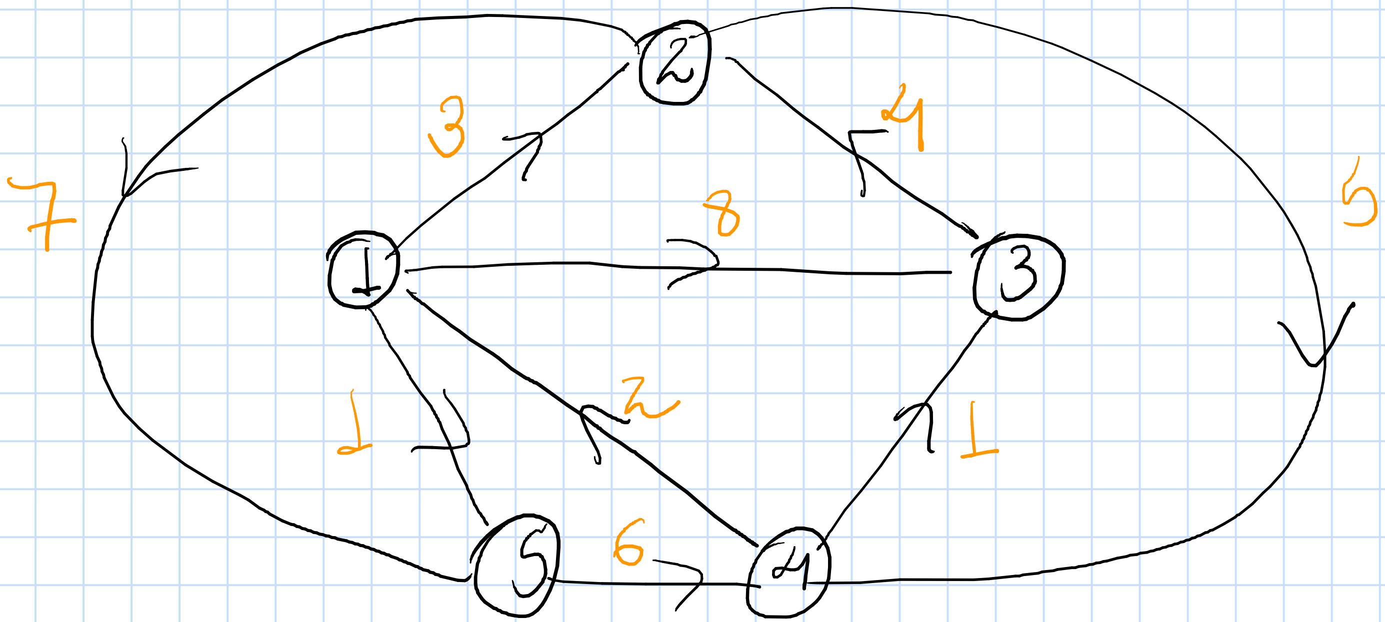
Caminhos mínimos entre todos os pares

de vértices do grafo

Dado um grafo direcionado $G = (V, E)$ e uma função de peso $w : E \to \mathbb{R}$:

- Se $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ é um (v_0, v_k)-caminho de G, o peso de p é definido como

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$



Peso do caminho mínimo de u para v:

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : (u,v)\text{-caminho } p\}, & \text{se existe caminho de } u \text{ p/ } v \\ \infty, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Caminho mínimo de u para v: qualquer caminho com peso $w(p) = \delta(u,v)$.

- Pesos negativos

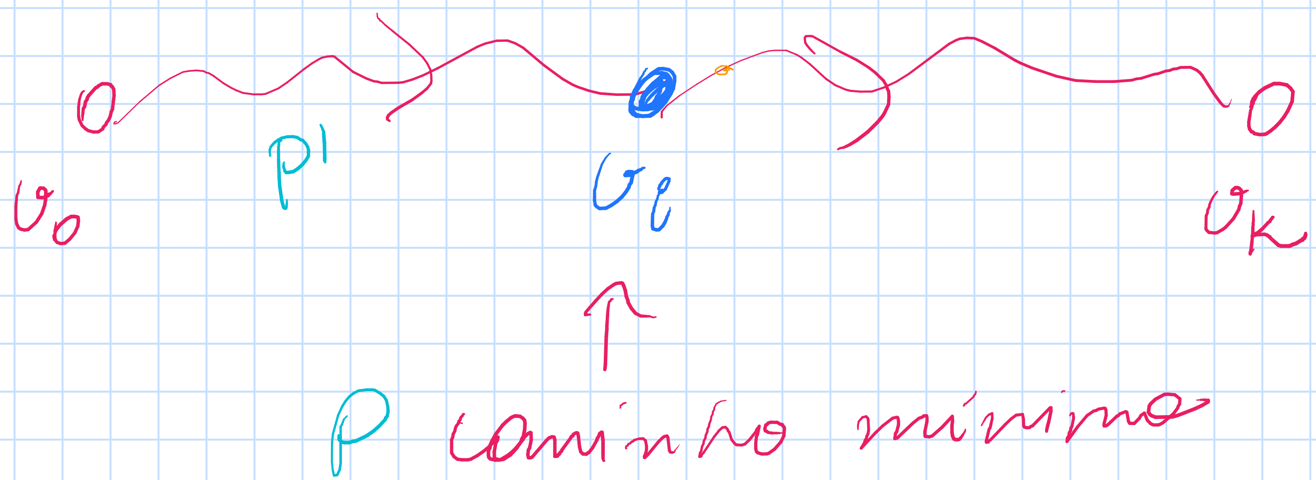
- Não possui ciclos negativos

- Aplicações?

Subestrutura ótima de um caminho mínimo

Lema: Dados $G=(V,E)$ e $w: E \to \mathbb{R}$, se $p=\langle v_0,\dots,v_k\rangle$ é um (v_0,v_k)-caminho mínimo, então o subcaminho de p, $p'=\langle v_0,v_i\rangle$ é um caminho mínimo de v_0 a v_i, $\forall i$ t.q. $0 \le i \le k$.

p' é caminho mínimo.



Caminhos mínimos entre todos os pares

↳ Encontrar, $\forall u, v \in V$, um caminho mínimo de u para v.

Ideia do algoritmo de Floyd-Warshall:

↳ Suponha que k é o maior índice no menor caminho de i a j. Então o subcaminho de i a k é um caminho mínimo em que o índice do maior vértice $\leq k-1$.

Recursão:

- Assumimos que os vértices são numerados com $1, 2, \ldots, |V|$

- $w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \text{peso de } (i,j) & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \in E \\ \infty & \text{se } i \neq j \text{ e } (i,j) \notin E \end{cases}$

- Matriz de valores:

$D^k = (d_{ij}^{(k)})$: d_{ij}^{k} contém o peso do menor caminho de i a j utilizando unicamente subconj. de vértices de $\{1, \ldots, k\}$

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{se } k = 0 \\ \min \left\{ d_{ij}^{(k-1)}, \; d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right\} & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

- Matriz de predecessores:

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \text{NULL} & \text{se } i = j \text{ ou } w_{ij} = \infty \\ i & \text{se } i \neq j \text{ e } w_{ij} < \infty \end{cases}$$

$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)} & \text{se } d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{c.c.} \end{cases}$$

Floyd-Warshall (G)

Inicializar D^0 e Π^0

Para $k \leftarrow 1$ até n

Para $i \leftarrow 1$ até n

Para $j \leftarrow 1$ até n

Se $d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$

$d_{ij}^{(k)} \leftarrow d_{ij}^{(k-1)}$

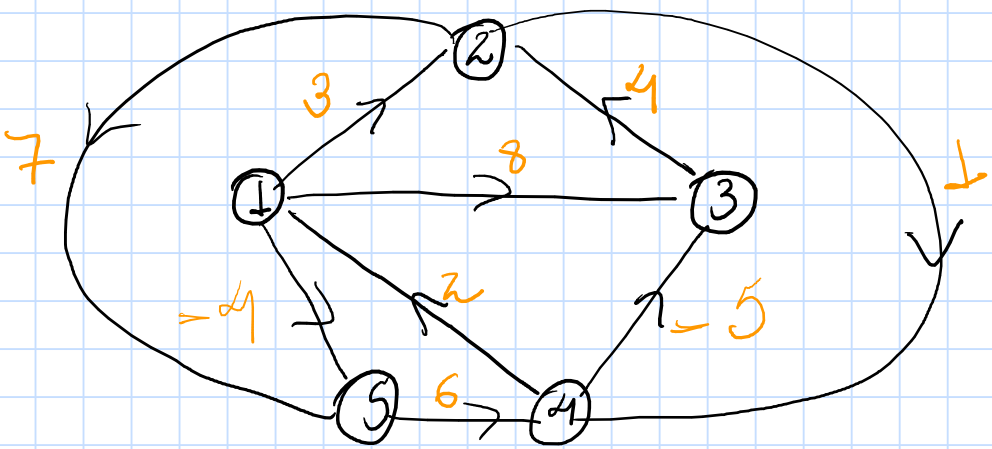
$\pi_{ij}^{(k)} \leftarrow \pi_{ij}^{(k-1)}$

Senão

$d_{ij}^{(k)} \leftarrow d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$

$\pi_{ij}^{(k)} \leftarrow \pi_{kj}^{(k-1)}$

Retorna D^n, Π^n



1
2
3
4
5
3
4
8
1
7
2
-4
-5
6

Imprime_caminhos_minimos (π, i, j)

Se $i = j$

Imprime i

Senão Se $\pi_{ij} = NULL$

Imprime "Não existe caminho de" i "para" j.

Senão Imprime_caminhos_minimos(π, i, π_{ij})

Imprime j