

Construção e Análise de Algoritmos

lista de exercícios 20

Nota: Nem todos os exercícios dessa lista envolvem estratégias de aproximação (i.e., em alguns casos você poderá conseguir soluções exatas).

Além disso, em vários casos, não é preciso muita inteligência para alcançar o fator de aproximação indicado — mas, você pode tentar usar a sua inteligência para obter um fator de aproximação melhor do que o indicado.

1. Potências de 2

O problema da partição de conjuntos fica mais fácil quando nós assumimos que todos os números são potências de 2?

- a) Apresente um algoritmo para essa versão do problema, assumindo que os números são todos distintos.
- b) Apresente um algoritmo para essa versão do problema, assumindo que podem haver números repetidos. Mais especificamente, assuma que pode haver uma quantidade arbitrária de cópias de cada número.
- c) Analise a qualidade das soluções produzidas pelos algoritmos dos itens (a) e (b).

2. Arranjo linear

Considere um grafo direcionado G com n vértices.

O problema consiste em arranjar os vértices do grafo em uma sequência linear

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$$

de modo que o número de arestas da forma

$$v_i \longrightarrow v_{i+k}$$

(i.e., arestas apontando para a direita) seja o maior possível.

Apresente um algoritmo eficiente para o problema com fator de aproximação 2.

Isto é, você deve argumentar que o número de arestas apontando para a direita na solução ótima é no máximo 2 vezes maior do que o número de arestas apontando para a direita na sua solução.

3. A festa

Alice quer dar uma festa e precisa decidir quem ela vai convidar.

Ela faz uma lista das n pessoas que ela conhece, e uma outra lista com os pares de pessoas que se conhecem.

Ela imagina que a festa seria mais divertida se todos os convidados:

- conhecessem ao menos outros 5 convidados da festa
- não conhecessem ao menos outros 5 convidados da festa

Por outro lado, ela gostaria de convidar o maior número possível de pessoas para a festa.

- a) Apresente um algoritmo eficiente para esse problema.
- b) Argumente que o seu algoritmo encontra uma solução ótima para o problema.
- c) Estime a complexidade do seu algoritmo em termos dos comprimentos n, m das listas de Alice.

4. Partição de grafos

Considere um grafo G com pesos associados às arestas.

Suponha que nós queremos particionar os vértices de G em dois subconjuntos A e B de modo que a soma dos pesos das arestas que cruzam a partição seja a maior possível.

Mais precisamente, defina

$$P(A, B) = \sum_{\substack{(u, v) \in G \\ u \in A, v \in B}} \text{peso}(u, v)$$

O objetivo do problema consiste em encontrar uma partição A, B cujo valor $P(A, B)$ é o maior possível.

- a) Apresente um algoritmo para esse problema com fator de aproximação $1/2$.

Isto é, você deve argumentar que a solução S encontrada pelo seu algoritmo satisfaz a seguinte condição

$$P(S) \geq \frac{1}{2} \cdot P(S_{ot})$$

onde S_{ot} é uma solução ótima para o problema.

- b) Generalize o seu algoritmo para o caso em que os vértices do grafo são particionados em 3 subconjuntos A, B, C .

Qual o fator de aproximação do seu algoritmo nesse caso?