Testul 40

Subiectul I

1. Determinați primul termen al progresiei geometrice $b_1, b_2, 2, 4, 8, \ldots$.

2. Determinați imaginea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + x + 2$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{8^{2x}} = 4$.

4. Alegem, la întâmplare, un număr natural de trei cifre. Aflați care este probabilitatea ca produsul cifrelor sale să fie număr par.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2, 3)$ și dreapta d: $x - y + 5 = 0$. Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.

6. Un triunghi dreptunghic ABC are lungimile catetelor $AB = 12$ și $AC = 5$. Calculați lungimea medianei AM, cu $M \in BC$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$.

a) Arătați că $(1, 1, 1)$ este soluție a sistemului.

b) Arătați că sistemul are o infinitate de soluții în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

c) Determinați soluțiile $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cu proprietatea că $4x_0 + y_0 = z_0^2$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{ I_3 + aA \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\} \right\} \subset$ $\subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $I_3 \in G$.

b) Demonstrați că mulțimea G este stabilă față de operația de înmulțire a matricelor.

c) Admitem că $(G, \cdot)$ este monoid, unde „$\cdot$" este înmulțirea matricelor. Arătați că $(G, \cdot)$ este chiar grup.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2 \ln x$.

a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{2(x^2 - 1)}{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că singura soluție a ecuației $f(x) = 1$ este $x = 1$.

c) Comparați numerele $f'(e)$ și $f'(\pi)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2}{x}, & \text{dacă } x<1\\ 2\ln x-1, & \text{dacă } x\geq 1\end{cases}$.

a) Calculați $\int\dfrac{x^2-2}{x}dx$, $x\in(0,1)$.

b) Demonstrați că funcția f admite primitive.

c) Determinați o primitivă F a funcției f pe intervalul $(0,+\infty)$.

Testul 41

Subiectul I

1. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$, o progresie geometrică cu termeni strict pozitivi astfel încât $4b_2=b_4$. Determinați valoarea raportului $\dfrac{b_3+b_4}{b_2}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+a$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați a, știind că valoarea minimă a funcției f este $\dfrac{3}{4}$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+3)=2$.

4. Fie mulțimea $A=\{1, 3, 5, \ldots, 19, 21\}$. Aflați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii A.

5. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 2)$ și $B(4, 0)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin O și este perpendiculară pe AB.

6. Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC cu $AB=2$, $BC=5$ și aria egală cu 4. Calculați $\cos B$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^2=8A$.

b) Calculați rangul matricei A^{20}.

c) Arătați că, dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are proprietatea $AX=XA$, atunci există $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=aI_2+bB$.

2. Fie polinomul $f=X^3-X^2+X+a$, $f\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

a) Calculați $f(1)$.

a) Arătaţi că $B \in G$.

b) Arătaţi că, dacă $X \in G$, atunci există $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

c) Determinaţi matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ştiind că $X^2 - X = A$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y + xy$.

a) Arătaţi că legea „$*$" este asociativă.

b) Calculaţi $(-10) * (-9) * \ldots * (-1) * 0 * 1 * \ldots * 10$.

c) Determinaţi numerele reale a care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea „$*$".

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - 2x$.

a) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1, situat pe graficul funcţiei.

b) Arătaţi că f are un singur punct de extrem.

c) Demonstraţi că ecuaţia $e^x - 2x - 1 = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(1, 2)$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 2$.

a) Calculaţi $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$.

b) Determinaţi primitivele funcţiei $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{f(x)}{x+1}$.

c) Arătaţi că $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_{\frac{1}{t}}^{t} \dfrac{1}{f(x)} dx = \dfrac{3\pi}{4}$.

Testul 44

Subiectul I

1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_2 = 5$ şi $a_5 = 2$. Calculaţi suma primilor şase termeni.

2. Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie dintre dreapta de ecuaţie $2x + y - 1 = 0$ şi parabola de ecuaţie $y = x^2 + 3x + 1$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 (x^2 - 8x) = 2$.

4. Aflaţi câte submulţimi cu trei elemente ale mulţimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ conţin elementul 1.

5. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu laturile $AB = 3$, $BC = 4$. Calculaţi $\overline{AB} \cdot \overline{BD}$.

6. Arătaţi că $\sin\dfrac{x}{4} + \cos\dfrac{x}{4} = \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi - x}{4}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Calculați determinantul matricei A.

b) Arătați că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = aA$.

c) Arătați că matricea $I_3 + A$ este inversabilă și $(I_3 + A)^{-1} = I_3 - \frac{1}{6}A$.

2. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$.

a) Determinați rădăcinile polinomului f pentru $a = -3$ și $b = 1$.

b) Determinați a și b știind că o rădăcină a polinomului f este egală cu i.

c) Aflați pentru ce valori reale a și b rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale polinomului f sunt în progresie aritmetică și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{e^x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}$.

b) Arătați că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 1]$.

c) Demonstrați că $x \leq e^{x-1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \right)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Testul 45

Subiectul I

1. Determinați partea reală a numărului $z = \dfrac{4-2i}{3+i}$.

2. Determinați funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ știind că este tangentă axei Ox în punctul $A(2, 0)$ și intersectează axa Oy în punctul $B(0, 4)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(5+\sqrt{5}) + \log_5(5-\sqrt{5}) - 2\log_5 x = 1$.

4. Aflați câte numere naturale mai mici sau egale cu 2000 au suma cifrelor 2.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 1)$, $B(-3, 2)$ și $C(1, -6)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

6. Calculați $\sin\dfrac{11\pi}{12}\cos\dfrac{23\pi}{12}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ a & 3 & 3 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $\det(A) = 3(a^2 - 1)$.

b) Demonstrați că $\text{rang}(A) \geq 2$, pentru orice număr real a.

c) Pentru $a = 1$, arătați că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $AX = B$.

2. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + X + 1, f \in \mathbb{R}[X]$.

a) Pentru $a = 1$, determinați rădăcinile polinomului f.

b) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f, calculați $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$.

c) Determinați valorile lui $a \in \mathbb{Z}$ pentru care polinomul are cel puțin o rădăcină întreagă.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + e^{1-x}$.

a) Calculați $f'(x), x \in [0, 1]$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

c) Demonstrați că $2\sqrt{e} \le f(x) \le 1 + e$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

2. Fie funcția $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

c) Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t)dt$.

Testul 46

Subiectul I

1. Arătați că numărul $z = \left(\frac{1}{3-2i} - \frac{1}{3+2i}\right)^2$ este real.

2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 3x + 1, g(x) = x - 2$. Calculați $(f \circ g)(1)$.

3. Rezolvați ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = \sqrt{2^x}$.

4. Aflați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 3, 5, 9, \ldots, 99\}$, acesta să se dividă cu 3, dar nu cu 9.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 2)$, $B(-1, 4)$, $C(5, 4)$. Determinați coordonatele punctului M astfel încât $\overline{AM} = 3\overline{AB} - 2\overline{AC}$.

6. Determinați $x \in [0, \pi]$ pentru care $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA, a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $\det X(-2)$.

b) Arătați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$, pentru orice numere reale a și b.

c) Determinați matricele $S = X(-2) + X(-1) + X(0) + X(1)$ și $P = X(-2)X(-1) \cdot X(0)X(1)$.

2. Fie G mulțimea polinoamelor de grad trei cu coeficienți în $\mathbb{Z}_3$.

a) Aflați numărul elementelor mulțimii G.

b) Determinați rădăcinile, din $\mathbb{Z}_3$, ale polinomului $f = X^3 + X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$.

c) Arătați că polinomul $g = X^3 + X^2 + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

b) Arătați că $\ln x \le \frac{x^2 - 1}{2}$, pentru orice $x > 0$.

c) Determinați valorile lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $f(x) = m$ să admită două rădăcini reale distincte.

2. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1} + x$.

a) Determinați mulțimea primitivelor funcției g: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+1) - f(x)$.

b) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 0, x = 1$.

c) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției h: $[1, 2] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)$ în jurul axei Ox.

Testul 47

Subiectul I

1. Determinați suma primilor șase termeni ai progresiei geometrice cu termeni reali $(b_n)_{n \ge 1}$, știind că $b_2 = 6$ și $b_5 = 48$.

2. Determinați imaginea intervalului $[-1, 2]$ prin funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x - 3$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+3} - 3 \cdot 2^{x+2} + 4 = 0$.

4. Determinați termenul care nu depinde de x din dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^9$, unde $x > 0$.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2, -1)$ și dreapta d cu ecuația $ax + (a+1)y - 1 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea lui a pentru care punctul A aparține dreptei d.

6. Calculați $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x - ay - z = 2 \\ 2x - y - 2z = -1 \\ bx + 2y + z = 1 \end{cases}$, $x, y, z, a, b \in \mathbb{R}$ și matricea

$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ b & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det A = (2a-1)(b+1)$.
b) Determinați soluția (x, y, z) a sistemului pentru $a = 1$, $b = -2$.
c) Pentru $a = -7$, $b = -1$, arătați că sistemul are o infinitate de soluții.

2. Fie polinomul $f = X^4 - 4X^3 + X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât f să se dividă cu polinomul $X^2 - 4X + 3$.
b) Pentru $a = 8$, $b = -6$, determinați rădăcinile polinomului f.
c) Pentru $b = 2$, determinați a astfel încât $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 1$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+2)e^{-|x|}$.

a) Calculați $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
b) Arătați că f nu este derivabilă în $x = 0$.
c) Determinați punctele de extrem local ale funcției f.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^n \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $I_1 = 2\ln 2 - \ln 3$.
b) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton.
c) Calculați $\lim\limits_{n \to +\infty} n(\ln 2 - I_n)$.

Testul 48

Subiectul I

1. Arătați că numărul $a = 6(\log_8 4 - \log_4 2)$ este natural.
2. Arătați că vârful parabolei $y = x^2 - 2x - 3$ este situat în cadranul IV.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x}$.
4. Aflați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ și au o cifră egală cu 3.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$ și $C(3, 0)$. Găsiți coordonatele punctului A', simetricul lui A față de mijlocul segmentului BC.

6. Fie triunghiul ABC în care $AB = 2$, $AC = 3$ și $m(\sphericalangle BAC) = 120°$. Calculați aria triunghiului.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 0 & m & 1 \\ m & -2 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $A(m) + A(-m) = 2A(0)$, pentru orice număr real m.

b) Calculați determinantul matricei $A(1)$.

c) Aflați pentru ce valori reale ale lui m, matricea $A(m)$ este inversabilă.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy + 3x - y$.

a) Rezolvați ecuația $(x+1) * x = 9$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că legea „$*$" nu este asociativă.

c) Determinați două numere $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, astfel încât $a * b \in \mathbb{Z}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - \text{arctg}\, x$.

a) Determinați ecuația asimptotei la graficul lui f spre $+\infty$.

b) Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^3}$.

c) Arătați că funcția f este bijectivă.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$

a) Arătați că f are primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Determinați primitiva F a funcției f care se anulează în $x = 0$.

c) Calculați $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Testul 49

Subiectul I

1. Calculați $[\sqrt[3]{9}] - 3\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

2. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2^x$ este inversabilă, cu inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calculați $g(1)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_x(2x+4)=\log_x(x^2+1)$.

4. Aflați al șaptelea termen din dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$, $x>0$.

5. Fie triunghiul ABC, cu $AB=6$, $m(\sphericalangle A)=60^\circ$ și $m(\sphericalangle B)=45^\circ$. Aflați perimetrul triunghiului ABC.

6. Aflați $x\in[0,2\pi]$ pentru care $\cos 2x+\sin^2 x=\dfrac{1}{2}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$, $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $A^2=2A-I_2$.

b) Găsiți inversa matricei A.

c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ având proprietatea că $AX=B$, unde $B=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -6 & -5\end{pmatrix}$.

2. Fie polinomul $f=X^5-2X^4+4X^2-3$, $f\in\mathbb{R}[X]$.

a) Arătați că f se divide cu polinomul $g=X-1$.

b) Determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul $h=X^2-2X+2$.

c) Arătați că numărul $f(1+i)+f(1-i)$ este real.

Subiectul al III-lea

1. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+ax+b$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(1-x)}$.

b) Pentru $a=-3$ și $b=3$, determinați extremele locale ale funcției f.

c) Determinați a și b astfel încât funcția f să aibă un minim egal cu 1 în $x=1$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-\dfrac{1}{x}$ și $g(x)=(x-1)e^x-\ln x+1$.

a) Arătați că g este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_1^e f(x)dx$.

c) Arătați că $\int_1^e f(x)g(x)dx=\dfrac{1}{2}(g^2(e)-g^2(1))$.

Testul 50

Subiectul I

1. Calculați $\sqrt[3]{64} + \log_2 0,25$.

2. Fie z_1 și z_2 rădăcinile complexe ale ecuației $z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0$. Calculați $|z_1| + |z_2|$.

3. Determinați soluțiile din $[0, 2\pi]$ ale ecuației $\sin 2x = 2\cos^2 x$.

4. Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și mulțimea M a funcțiilor $f : A \to A$. Aflați probabilitatea ca, alegând o funcție f din M, aceasta să fie injectivă.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 3)$, $B(3, -4)$, $C(1, 7)$. Aflați lungimea segmentului OG, G fiind centrul de greutate al triunghiului ABC.

6. Calculați $\sin^2 110° + \sin^2 200°$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$ și $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Rezolvați ecuația $\det A(m) = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $A^{-1}(-1) = \frac{1}{2} A(0)$.

c) Determinați $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $A(-1) \cdot X = B$.

2. Se consideră sistemul de ecuații $(S) = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + yz + zx = -4 \end{cases}$, $x, y, z \in \mathbb{R}^*$.

a) Rezolvați ecuația $t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $xyz = -4$, unde (x, y, z) este soluție a sistemului (S).

c) Câte soluții are sistemul (S)?

Subiectul al III-lea

1. Fie $m \in \mathbb{R}$ și funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{m - \ln x}{x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{\ln x - m - 1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

b) Demonstrați că funcția f are un singur punct de extrem local.

c) Determinați valorile lui m astfel încât $f(x) \geq -1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcţiile $f, F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ şi $F(x) = \int_0^x |f(t)|\,dt$.

a) Demonstraţi că $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{-x}{e^x}$ este o primitivă a funcţiei f.

b) Arătaţi că $F(1) = \frac{1}{e}$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Testul 51

Subiectul I

1. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 2 \cdot 3^{n-2}$ este o progresie geometrică.

2. Se ... Determinaţi a şi b, dacă

Testul 40

I. 1. $\frac{1}{2}$. **2.** $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$. **3.** $S = \{1\}$. **4.** $P = \frac{31}{36}$. **5.** $x + y - 5 = 0$. **6.** $\frac{13}{2}$. **II. 1.** b) $S = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; c) $(0, 0, 0)$ şi $(5, 5, 5)$. **2.** b) Cum $A^2 = -4A$, avem: $(I_3 + aA)(I_3 + bA) = I_3 + (a + b - 4ab)A$, iar $a + b - 4ab = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1 - 4a)(1 - 4b) \neq \frac{1}{4}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$; c) Inversa matricei $I_3 + aA$ este $I_3 + \frac{a}{4a-1} \cdot A$, unde numitorul fracţiei $\frac{a}{4a-1}$ este nenul pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$ şi $\frac{a}{4a-1} \neq \frac{1}{4}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$. **III. 1.** b) Funcţia f este strict descrescătoare pe $(0, 1)$, strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ şi $f(1) = 1$, de unde rezultă cerinţa problemei; c) $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2} > 0$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$, deci funcţia f' este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$. Deducem că $f'(e) < f'(\pi)$. **2.** a) $\frac{x^2}{2} - 2 \ln x + \mathscr{C}, x \in (0, 1)$; b) Evident, f este continuă pe $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Cum $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1) = -1$, rezultă că f este continuă pe $(0, +\infty)$, deci admite primitive; c) O primitivă a funcţiei f are forma $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2 \ln x + \mathscr{C}_1, x \in (0, 1)$ şi $F(x) = x(2 \ln x - 3) + \mathscr{C}_2, x \in [1, +\infty)$. Cum F este, în mod necesar, continuă în 1, obţinem că $\frac{1}{2} + \mathscr{C}_1 = -3 + \mathscr{C}_2$, deci $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C}_1 + \frac{7}{2}$. Se verifică uşor că, pentru $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C}_1 + \frac{7}{2}$, funcţia F este derivabilă pe $(0, +\infty)$, şi $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

Testul 41

I. 1. 6. **2.** $a = 3$. **3.** $x \in \{-1, 1\}$. **4.** $C_{11}^2 = 55$. **5.** $y = x$. **6.** $\frac{3}{5}$. **II. 1.** b) $A^{20} = 8^{19}A$, rang (A^{20}) = rang $(A) = 1$; c) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Din condiţia $AX = XA$ rezultă că $X = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3y}{4} & x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ \frac{3y}{4} & y \end{pmatrix} = xI_2 + \frac{y}{4}B = aI_2 + bB$, unde $a = x$ şi $b = \frac{y}{4}$. **2.** a) $1 + a$; b) $1, -i, i$;

c) Deoarece $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1 < 0$, rezultă că f are două rădăcini complexe, conjugate şi o rădăcină reală. **III. 1.** a) $+\infty$; b) 1; c) Dacă $f(x) \geq 0 = f(-1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci, conform teoremei lui Fermat, rezultă că $f'(-1) = 0$, deci $(a^{x+1} + xa^{x+1} \ln a)|_{x=-1} = 0$, de unde obţinem $a = e$. Se arată apoi că $xe^{x+1} + 1 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. **2.** b) $A = \int_0^2 |f(x)|\,dx = -\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \ln\frac{5}{4} - 2\text{arctg } 2 + \pi$; c) $2\ln 2 - 2$.

Testul 42

I. 1. 2. **2.** $y_V - x_V = 0$. **3.** $x \in \{-1, 0\}$. **4.** 0,07. **5.** $C_1(3+\sqrt{3}, \sqrt{3})$ şi $C_2(3-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

II. 1. a) $\det(A(a, b, c)) = abc - a - b - c + 2$; c) $x = 0$. **2.** a) -1; b) $a = \frac{5}{3}$; c) Deoarece $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$, rezultă că cel puţin una dintre rădăcinile lui f este din $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. **III. 1.** a) $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; b) $x = e$ (punct de minim); c) Deoarece $0 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < e$ şi f este strict descrescătoare pe $(0, e)$, rezultă că $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3})$, deci $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$. **2.** b) $\int_0^1 f(x)F^2(x)dx = \int_0^1 F'(x)F^2(x)dx = \frac{1}{3}F^3(x)\Big|_0^1 = \frac{(e+5)^3 - 8}{3}$; c) $\int_0^1 (xf(x) + F(x))dx = \int_0^1 (xF'(x) + F(x))dx = \int_0^1 (xF(x))'dx = xF(x)\Big|_0^1 = F(1)$.

Testul 43

I. 1. $\frac{8}{9}$. **2.** $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. **3.** $x = 1$. **4.** În total sunt 5^3 numere, dintre care 3^3 conţin numai cifre impare. Sunt 98 de numere care au cel puţin o cifră pară. **5.** $2x + y - 4 = 0$. **6.** $\frac{8}{3}$.

II. 1. c) Observăm că $X^3 - X^2 = AX$ şi $X^3 - X^2 = XA$, deci $AX = XA$. Aşadar, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Avem $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sau $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** b) -1; c) $a = 0$ sau $a = -2$. **III. 1.** a) $y = (e-2)x$; b) $A(\ln 2, 2 - 2\ln 2)$ este punct de minim; c) Considerăm funcţia $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x - 2x - 1$. Cum g este continuă şi $g(1) \cdot g(2) < 0$, rezultă că există $x_0 \in (1, 2)$ astfel încât $g(x_0) = 0$. **2.** a) $\frac{7}{6}$; b) $G(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 5\ln(x+1) + \mathcal{C}$; c) $\int_{\frac{1}{t}}^{t} \frac{1}{f(x)}dx = \text{arctg}(t-1) - \text{arctg}\left(\frac{1}{t} - 1\right)$.

Testul 44

I. 1. 21. **2.** $A(0, 1)$; $B(-5, 11)$. **3.** $x \in \{-1, 9\}$. **4.** Submulțimile căutate au forma $\{1\} \cup X$, unde X este o submulțime cu două elemente a mulțimii $\{2, 3, 4, 5, 6\}$; X poate fi aleasă în $C_5^2 = 10$ moduri. **5.** $\overline{AB} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot (-\overline{BA} + \overline{AD}) = -\overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AD} = -9$. **6.** $\sqrt{2}\cos\frac{\pi - x}{4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{4}\right)$. **II. 1.** a) 0; b) $a = 5$; c) $(I_3 + A)\left(I_3 - \frac{1}{6}A\right) = I_3$ și de aici rezultă concluzia. **2.** a) -1; $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$. b) $a = 1$, $b = -3$; c) Din $2x_2 = x_1 + x_3$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ rezultă $x_2 = 1$, deci $f(1) = 0$ și $a + b = 2$. Apoi, din $11 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 9 - 2a$, rezultă $a = -1$. **III. 1.** a) e; c) f are un maxim absolut egal cu $\frac{1}{e}$ în $x = 1$. Rezultă că $f(x) \le \frac{1}{e}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **2.** a) $\ln 2$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 f(x)dx = \ln 2$.

Testul 45

I. 1. 1. **2.** $f(x) = x^2 - 4x + 4$. **3.** 2. **4.** 10. **5.** $x - y - 1 = 0$. **6.** $\frac{1}{4}$. **II. 1.** b) Pentru $a \ne 1$, $\text{rang}(A) = 3$, iar pentru $a = 1$ sau $a = -1$, $\text{rang}(A) = 2$; c) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **2.** a) -1; i; $-i$; b) $a + 3$; c) Rădăcină întreagă poate fi -1 sau 1. Rezultă $a = 1$ sau $a = -3$. **III. 1.** a) $f'(x) = e^x - e^{1-x}$, $x \in [0, 1]$; c) $\min f = 2\sqrt{e}$; $\max f = 1 + e$. **2.** a) Dacă F este primitivă a funcției f, atunci $F'(x) = f(x) > 0$; b) $\frac{16\pi}{3}$; c) 1.

Testul 46

I. 1. $z = \frac{-16}{169} \in \mathbb{R}$. **2.** 6. **3.** $x = 2$. **4.** A are 50 de elemente, 17 divizibile cu 3 și 6 divizibile cu 9. Probabilitatea cerută este egală cu $\frac{11}{50}$. **5.** $3\overline{AB} - 2\overline{AC} = 3(-4\vec{i} + 2\vec{j}) - 2(2\vec{i} + 2\vec{j}) = -16\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow M(-13, 4)$. **6.** Ecuația este echivalentă cu $2\cos^2 x - 1 = \cos x$, $x \in [0, \pi]$. Rezultă $x = 0$ sau $x = \frac{2\pi}{3}$. **II. 1.** a) -1; c) $S = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. **2.** a) Există $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ polinoame; b) $f(\hat{0}) = \hat{2}$, $f(\hat{1}) = \hat{1}$, $f(\hat{2}) = \hat{0}$; $\hat{2}$ este singura rădăcină a polinomului f; c) g nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_3$ și grad $g = 3$, deci este ireductibil. **III. 1.** a) f este strict descrescătoare pe $(0, 1]$ și strict crescătoare pe $[1, +\infty)$; b) $\min f = \frac{1}{2}$, deci $f(x) \geq \frac{1}{2}$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$ și de aici rezultă concluzia problemei; c) $m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **2.** a) $\ln(x + 2) - \ln(x + 1) + x + \mathcal{C}$; b) $\frac{1}{2} + \ln 2$; c) $\pi\left(\frac{9}{2} - 2\ln\frac{3}{2}\right)$.

Testul 47

I. 1. 189. **2.** $[-4, 0]$. **3.** $x \in \{-1, 0\}$. **4.** $T_7 = 2^6 \cdot C_9^6$. **5.** $a = 2$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **II. 1.** b) Sistemul este compatibil determinat cu soluția $(-8, -5, -5)$; c) Sistemul este compatibil nedeterminat cu soluția $\left(\alpha - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \alpha\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **2.** a) $a = 8$, $b = -6$; b) 1; 3; $\pm\sqrt{2}$. c) $a = -2$. **III. 1.** a) -1; b) $f_s'(0) = 3$; $f_d'(0) = -1$; c) $A\left(-3, -\frac{1}{e^3}\right)$ este punct de minim, iar $B(0, 2)$ este punct de maxim. **2.** a) $I_n = \ln\frac{2n+2}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$; b) $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton crescător; c) 1.

Testul 48

I. 1. $a = 1 \in \mathbb{N}$. **2.** $V(1, -4) \in$ cadran IV. **3.** $x = 0$. **4.** 36. **5.** $A'(0,1)$. **6.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **II. 1.** b) $\det A(1) = 0$; c) $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **2.** a) $x = -3$ sau $x = 1$; b) De exemplu, $(0 * 1) * 2 \neq 0 * (1 * 2)$; c) Spre exemplu, $a * b = 0 \Rightarrow 2ab + 3a - b = 0 \Rightarrow a = \frac{b}{2b+3}$. Putem considera $b = \sqrt{2}$, $a = 3\sqrt{2} - 4$. **III. 1.** a) $y = x - \frac{\pi}{2}$; b) $\frac{1}{3}$. c) Funcția f este strict crescătoare, deci injectivă. Deoarece $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, f este și surjectivă. **2.** a) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$; b) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 1-(x+1)e^{-x}, & x < 0 \\ 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}), & x \geq 0 \end{cases}$; c) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = F(1) - F(-1) = 1 - \frac{\pi}{2}$.

Testul 49

I. 1. 0. **2.** $f(0) = 1$, deci $g(1) = 0$. **3.** $x = 3$. **4.** $2^6 C_{10}^6$. **5.** $a = 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}$, $b = 6\sqrt{3} - 6$, $c = 6$. **6.** $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$. **II. 1.** b) $A^{-1} = 2I_2 - A$; c) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** b) $r = 4X - 3$; c) $f = (X^2 - 2X + 2)c + 4X - 3$. Cum $1 + i$ și $1 - i$ sunt rădăcinile ecuației $x^2 - 2x + 2 = 0$ rezultă că $f(1+i)+f(1-i)=4(1+i)-3+4(1-i)-3=2 \in \mathbb{R}$. **III. 1.** a) -1; b) $A(-1, 5)$ este punct de maxim, iar $B(1, 1)$ este punct de minim; c) Din $f(1)$ și $f'(1)=0$ rezultă că $a=-3$, $b=3$. **2.** a) $g'(x)=f(x)$; b) $\int_1^e f(x)dx = g(x)\Big|_1^e = g(e)-g(1)$; c) $\int_1^e f(x)g(x)dx = \int_1^e g'(x)g(x)dx = = \frac{1}{2}g^2(x)\Big|_1^e$.

Testul 50

I. 1. 2. **2.** 4. **3.** $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$. **4.** M are 4^4 funcții, dintre care $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ funcții sunt injective. Probabilitatea cerută este $\frac{3}{32}$. **5.** $G(1, 2)$ și $OG=\sqrt{5}$. **6.** 1. **II. 1.** a) $\det(A(m)) = m^3 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1$ sau $m=-2$; b) $A(-1)\cdot A(0) = 2I_3$ și de aici rezultă concluzia; c) $X = = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. **2.** a) $t=1$, $t=-2$ sau $t=2$; c) x, y, z sunt soluțiile ecuației $t^3-t^2-4t+4=0$. Sistemul (S) are soluția $(1, -2, 2)$ și toate permutările acesteia, deci 6 soluții. **III. 1.** b) Punctul $A\left(e^{m+1}, \frac{-1}{e^{m+1}}\right)$ este punct de minim; c) Observăm că $f(x) \geq -1$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$ dacă și numai dacă minimul absolut al funcției f este mai mare sau egal cu -1. Avem $-\frac{1}{e^{m+1}} \geq -1 \Leftrightarrow e^{m+1} \geq \geq 1 \Leftrightarrow m \in [-1, +\infty)$. **2.** a) $g'(x)=f(x)$, $\forall\, x \in [0, +\infty)$; b) $F(1) = \int_0^1 \left|\frac{t-1}{e^t}\right| dt = \int_0^1 \frac{1-t}{e^t}dt = = \frac{t}{e^t}\Big|_0^1 = \frac{1}{e}$. c) Pentru $x>1$, avem $F(x) = \int_0^1 \frac{1-t}{e^t}dt + \int_1^x \frac{t-1}{e^t}dt = \frac{1}{e} - \frac{t}{e^t}\Big|_1^x = \frac{2}{e} - \frac{x}{e^x}$ și $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{2}{e}$.