CENG 235 ALGORİTMALARLA SAYISAL ÇÖZÜMLEME

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

- Hafta 11

11. Hafta Konular

- **İnterpolasyon Yöntemleri:**

--- Newton Bölünmüş Fark yaklaşımı ile İnterpolasyon

**** Newton Polinomları**

*** Bölünmüş Fark Yaklaşımı**

*** İleri Fark Yaklaşımı**

*** Geri Fark Yaklaşımı**

İnterpolasyon nedir?

---- Herhangi bir deneyin sonuçları veya farklı çalışmalar ile elde edilmiş doğru bilinen değerleri kullanarak verilen aralıkta bilinmeyen noktaların değerlerini yaklaşık olarak belirleme işlemi interpolasyon olarak ifade edilir.

--- İnterpolasyon işleminde, bilinmeyen değerler bilinen değerlerin aralığında bir noktada ise bilinen noktalar kullanarak bilinmeyen değerler bulunabilir.

--- Eğer değeri bulunmak istenen nokta bilinen noktaların aralığının dışında bir yerde ise eğri uydurma işlemleri ile bilinmeyen değerler bulunabilir. Bu işlem ekstrapolasyon olarak ifade edilir.

--- İnterpolasyon işleminde çok yaygın olarak kullanılan noktalara polinom uydurarak sonuca gidilmektedir.

--- Eğer bilinen nokta sayısı iki ise bunları bir doğru ile birleştirerek ara değerleri aramak gerekir. Bilinen nokta sayısı arttıkça polinomun derecesi artacaktır. n adet nokta için (n-1). dereceden bir polinom uydurmak bütün mevcut noktaları sağlayacaktır.

--- İnterpolasyon yöntemi olarak kullanabileceğimiz literatürde birçok yöntem vardır. Öncelikle, Taylor Serisi ile İnterpolasyon Yöntemi ile Polinom elde etmeyi ele alacağız. Daha sonra ise Langrange İnterpolasyon yöntemini daha sonra da sonlu farklar ile interpolasyon yöntemini ele alacağız.

Weierstrass Yaklaşım Teoremi:

n. dereceden bir polinom ($a_n \neq 0$);

$$P_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$$

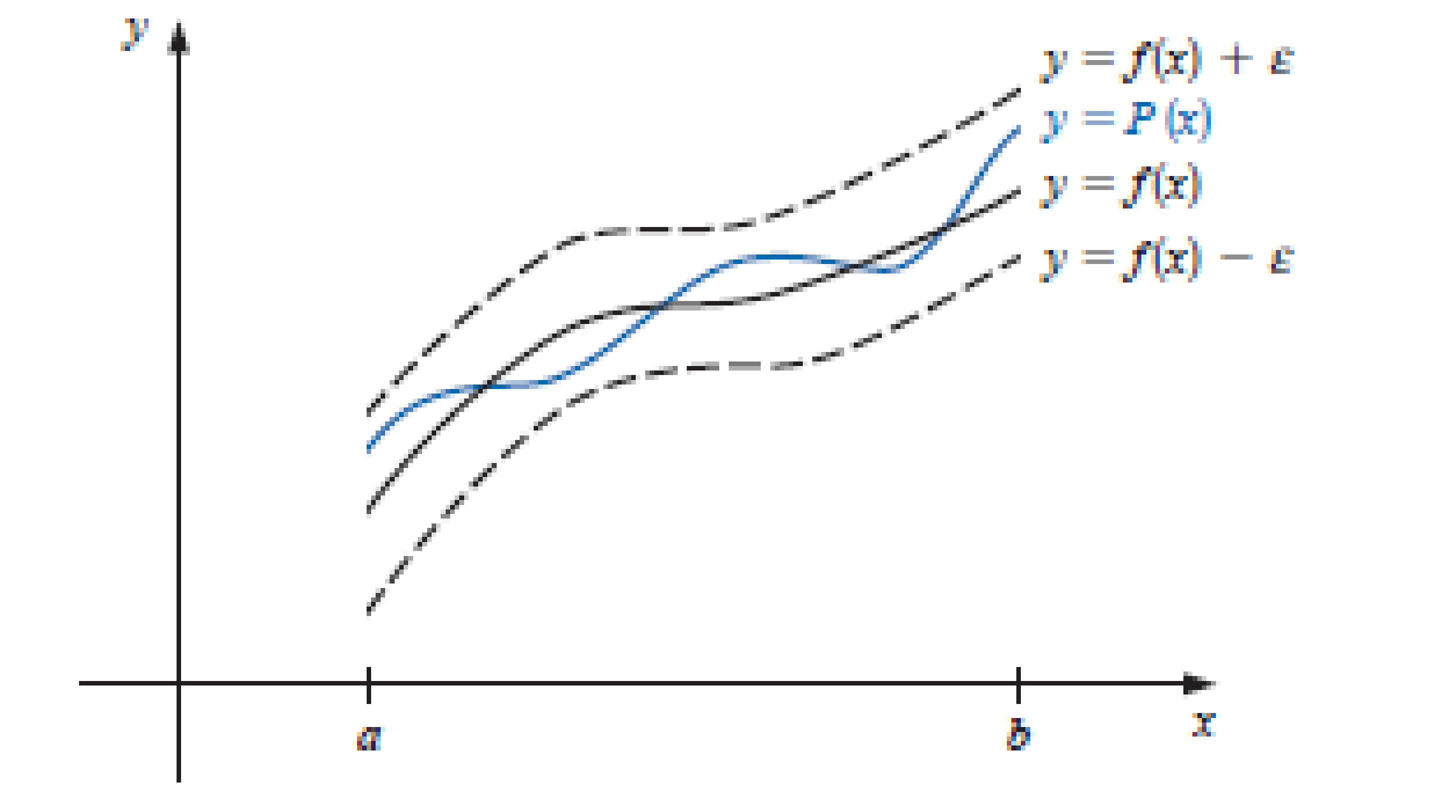
şeklinde gösterilsin. Burada $a_0, a_1, \ldots, a_n$ değerleri polinomun reel katsayılar ve $n \geq 0$, negatif olmayan bir tamsayı olsun.

$f(x)\,'in,$ $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayalım.

Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $P(x)$ polinomu vardır ki,

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

ifadesi $[a, b]$ aralığındaki her x için geçerlidir.


y
$y = f(x) + \varepsilon$
$y = P(x)$
$y = f(x)$
$y = f(x) - \varepsilon$
a
b
x

Newton İnterpolasyon Yöntemleri

- Farzedelim ki $(n+1)$ tane nokta veri seti verilsin.

$$(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$f(x) \cong P_n(x)$ olmak üzere $P_n(x)$

Newton yaklaşım polinomu:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+ \dots a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

şeklindedir.

$i=0$ için:

$$f_0 = P_n(x_0) = a_0$$

$i=1$ için:

$$f_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1.(x_1 - x_0)$$

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$i=2$ için

$$f_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$a_2 = \frac{\left[\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right] - \left[\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right]}{(x_2 - x_0)}$$

$i=3,4,---,n$ için $a_3, a_4, ---, a_n$ değerleri bulunur.

Bölünmüş fark tablosu için aşağıdaki notasyon kullanılır:

$$f[x_k] = f_k$$

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{k+1}, \ldots, x_{i+1}] - f[x_k, \ldots, x_i]}{x_{i+1} - x_k}$$

a_i katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$a_0 = f_0 = f[x_0]$$

$$a_1 = f_1 = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{\left[\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right] - \left[\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right]}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

$$\vdots$$

$$a_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

$a_1 \rightarrow$ 1. bölünmüş fark

$a_2 \rightarrow$ 2. bölünmüş fark

$\vdots \qquad \vdots$

Böylece, newton polinomu:

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$\vdots$$
$$+ f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

şeklindedir.

NOT: Bölünmüş fark yönteminde noktaların eşit aralıklı olması gerekli değildir.

- Eğer, x_i'lerin aralarındaki fark eşitse;

i) ileri fark ii) Geri fark

yaklaşımları kullanılabilir.

i) Newton İleri Fark Yaklaşımı:

$f(x) \cong P_n(x)$ olduğunu biliyoruz.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \cdots a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$i = 0$ için:

$$P_n(x_0) = y_0 = a_0$$

$$P_n(x_1) = y_1 \Rightarrow y_1 = a_0 + (x_1 - x_0).a_1 \quad \overbrace{[x_{k+1} - x_k]}^{h}$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

$\Delta \rightarrow$ ileri fark operatörü

$i=1$ için

$$P_1(x_2)=y_2 \Rightarrow y_2=a_0+(x_2-x_0).a_1+(x_2-x_1)(x_2-x_0).a_2$$

$$2h^2 a_2 = y_2-y_0-2h\left(\frac{\Delta y_0}{h}\right)$$

$$= y_2-2y_1+y_0=\Delta^2 y_0$$

Böylece, $a_2=\dfrac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$ elde edilir.

Matematiksel tümevarım ile :

$$a_k=\frac{\Delta^k y_0}{k!\cdot h^k}, k=0,1,---,n.$$

elde edilir.

İleri Fark Yaklaşımında Newton Polinomu:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!\cdot h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

- Elde edilen polinom, Newton ileri fark polinomu olarak ifade edilir.

ii) Newton Geri Fark Yaklaşımı

$f(x) \cong P_n(x)$ olduğunu biliyoruz.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \cdots a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$i=0$ için:

$$a_0 = y_n$$

$i=1$ için:

$$a_1 = \frac{1}{h}(y_n - y_{n-1}) = \frac{1}{h}\nabla y_n$$

geri fark operatörü

$i = 2$ için:

$$a_2 = \frac{1}{h^2}\left(y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}\right) = \frac{1}{2h^2}\nabla^2 y_n$$

⋮ $\downarrow$ Tümevarım ile elde edilir.

$i = n$ için:

$$a_n = \frac{1}{n!\cdot h^n}\nabla^n y_n$$

Böylece,

Newton Geri fark interpolasyon formülü;

$$P_n(x) = y_n + \frac{\nabla y_n}{1!\cdot h}(x-x_n) + \frac{\nabla^2 y_n}{2!\cdot h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1})$$

$$+ \frac{\nabla^3 y_n}{3!\cdot h^3}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{\nabla^n y_n}{n!\cdot h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1)$$

şeklinde elde edilir.

Örnekler

Tablo oluşturma

1) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ fonksiyonu için $h=1$ alarak $[0,4]$ kapalı aralığındaki

- ileri fark
- geri fark
- bölünmüş fark

tablolarını oluşturunuz.

İleri Fark:

x_i	$f(x_i)=y_i$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	$\boxed{-1}$	$\boxed{2-(-1)=3}$	$\boxed{5-3=2}$	$\boxed{2-2=0}$	$\boxed{0-0=0}$
1	2	$7-2=5$	$7-5=2$	$2-2=0$	
2	7	$14-7=7$	$9-7=2$		
3	14	$23-14=9$			
4	23				

polinomda kullanılacak değerler

Geri Fark:

x_i	$y_i = f(x_i)$	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
0	-1				
1	2	3			
2	7	5	2		
3	14	7	2	0	
4	23	9	2	0	0

polinomda kullanılacak değerler.

Bölünmüş Fark Tablosu:

x_i	y_i	1. mertebe B.F.	2. mertebe B.F.	3. mertebe B.F.	4. mertebe B.F.
0	-1	$\frac{2-(-1)}{1-0}=3$	$\frac{5-3}{2-0}=1$	$\frac{1-1}{3-0}=0$	$\frac{0-0}{4-0}=0$
1	2	$\frac{7-2}{2-1}=5$	$\frac{7-5}{3-1}=1$	$\frac{1-1}{4-1}=0$	
2	7	$\frac{14-7}{3-2}=7$	$\frac{9-7}{4-2}=1$		
3	14	$\frac{23-14}{4-3}=9$			
4	23				

ileri fark:

2

x	0	1	2	3
y	1	6	5	-4

veri setini kullanarak ileri fark Newton yaklaşımı ile interpolasyon polinomu $P_3(x)$'i elde ediniz. polinomunun $x=1.5$ deki değerini bulunuz.

$P_3(x) = ?$ $P_3(1.5) = ?$

x_i'ler arasındaki uzunluk $h = 1$.

Böylece:

$$P_3(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{h^3 \cdot 3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

İleri Fark Tablosu

x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1			
		5		
1	6		-6	
		-1		-2
2	5		-8	
		-9		
3	-4			

x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1 (y_0)	5 (Δy_0)	-6 ($\Delta^2 y_0$)	-2 ($\Delta^3 y_0$)
1	6	-1	-8	
2	5	-9		
3	-4			

$$P_3(x) = 1 + \frac{5}{1!\cdot 1}(x-0) + \frac{(-6)}{2!\cdot 1^2}(x-0)(x-1)$$

$$+ \frac{(-2)}{3!\cdot 1^3}(x-0)\cdot(x-1)(x-2)$$

$x^3 - 3x^2 + 2x$

$$P_3(x) = 1 + 5.x - 3(x^2 - x) - \frac{1}{3}(x)(x^2 - 3x + 2)$$

$$= 1 + 5x - 3x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x$$

$$\boxed{P_3(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{22}{3}x + 1}$$

$$P_3(1.5) \cong 6.375$$

2. yol

$$P_3(1.5) = 1 + 5(1.5) - 3.(1.5)(1.5-1)$$
$$- \frac{1}{3}(1.5)(1.5-1)(1.5-2)$$

Buradan da $P_3(1.5) = 6.375$ elde edilir.

C kodu:

```c
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <locale.h>
#include <math.h>

int fakt(int a)
{ int i,faktoriyel=1;
  for (i=1;i<=a;i++)
   faktoriyel=faktoriyel*i;
return faktoriyel;
}
```

```
int main()
{  setlocale(LC_ALL,"Turkish");
    int m,n,i,j;
    printf("Kaç adet nokta olduğunu giriniz--->");
    scanf("%d",&n);
    float X[n], Y[n][n],s,bx,h;
    printf("Yaklasik degerini bulmak istediğiniz x değerini giriniz--->");
    scanf("%f",&bx);

   for(i=0;i<n;i++)
     {  printf("%d. noktadaki x değerini giriniz: ",i+1);
         scanf("%f",&X[i]);
         printf("%d. noktadaki y değerini giriniz: ",i+1);
         scanf("%f",&Y[i][0]);
      }

       for(i=1;i<n;i++)
        { for(j=0;j<n-i;j++)
           {Y[j][i]=(Y[j+1][i-1]-Y[j][i-1]);}
        }
```

```
printf("\nİleri Farklar Tablosu\n");
printf("        xi       yi=f(xi)");

   for(i=0;i<n-1;i++)
     { printf("     %d.İleri F.",i+1);}
   printf("\n");

   for(i=0;i<n;i++)
    { printf("     %5.1f",X[i]);
        for(j=0;j<n-i;j++)
          {printf("%15f",Y[i][j]);}
       printf("\n");
     }
```

```
 h=X[1]-X[0];
printf("\nP(x)=(%f)\n      +",Y[0][0]);
for(i=1;i<n;i++)
{ printf("((%f)/((%d) *     (%f)))*",Y[0][i],fakt(i),pow(h,i));
    for(j=n;j>(n-i);j--)
        { printf("(x-(%.1f))",X[n-j]);}
      if (i!=(n-1))printf("\n      +");
}
s=Y[0][0];
h=X[1]-X[0];
for(i=1;i<n;i++)
{float carp=1;
  for(j=0;j<i;j++)
    {carp=carp*(bx-X[j]);}
   s=s+(carp*(Y[0][i]/(pow(h,i)*fakt(i))));
 }
printf("\n\nSonuc: P(%.2f)=%f",bx,s);
getch();
return 0;
}
```

Ekran Çıktısı:

```
Kaç adet nokta olduğunu giriniz--->4
Yaklasik degerini bulmak istediğiniz x değerini giriniz--->1,5
1. noktadaki x değerini giriniz: 0
1. noktadaki y değerini giriniz: 1
2. noktadaki x değerini giriniz: 1
2. noktadaki y değerini giriniz: 6
3. noktadaki x değerini giriniz: 2
3. noktadaki y değerini giriniz: 5
4. noktadaki x değerini giriniz: 3
4. noktadaki y değerini giriniz: -4

İleri Farklar Tablosu
         xi        yi=f(xi)     1.İleri F.     2.İleri F.     3.İleri F.
        0,0        1,000000      5,000000      -6,000000      -2,000000
        1,0        6,000000     -1,000000      -8,000000
        2,0        5,000000     -9,000000
        3,0       -4,000000

P(x)=(1,000000)
      +((5,000000)/((1) * (1,000000)))*(x-(0,0))
      +((-6,000000)/((2) * (1,000000)))*(x-(0,0))(x-(1,0))
      +((-2,000000)/((6) * (1,000000)))*(x-(0,0))(x-(1,0))(x-(2,0))

Sonuc: P(1,50)=6,375000
--------------------------------
```

3

x	0	0.4	0.8
y	-2	-4	6

veri setini kullanarak ileri fark yaklaşımı ile Newton polinomu $P_2(x)$'i elde ediniz. interpolasyon polinomunun $x=0.1$ deki değerini bulunuz.

$P_2(x) = ?$ $\qquad$ $P_2(0.1) = ?$

$h=0.4$ (ileri fark uygulanır.)

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h \cdot 1!}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$= -2 + \frac{\Delta y_0}{0.4}(x - 0) + \frac{\Delta^2 y_0}{(0.4)^2 \cdot 2!}(x - 0)(x - 0.4)$$

? ?

İleri Fark Tablosu:

x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$
0	-2	-2 Δy_0	12 $\Delta^2 y_0$
0.4	-4	10	
0.8	6		

$$P_2(x) = -2 + \frac{(-2)}{0.4}(x) + \frac{12}{(0.4)^2 \cdot 2}(x)(x-0.4)$$

$$P_2(x) = -2 - 5x + (37.5)(x^2 - 0.4x)$$

$$P_2(x) = (37.5)x^2 - 20x - 2$$

$$P_2(0.1) = 0.375 - 4 = \boxed{-3.625}$$

Program Çalıştırıldığında Ekran Çıktısı:

```
Kaç adet nokta olduğunu giriniz--->3
Yaklasik degerini bulmak istediğiniz x değerini giriniz--->0,1
1. noktadaki x değerini giriniz: 0
1. noktadaki y değerini giriniz: -2
2. noktadaki x değerini giriniz: 0,4
2. noktadaki y değerini giriniz: -4
3. noktadaki x değerini giriniz: 0,8
3. noktadaki y değerini giriniz: 6

İleri Farklar Tablosu
        xi        yi=f(xi)     1.İleri F.     2.İleri F.
       0,0       -2,000000      -2,000000      12,000000
       0,4       -4,000000      10,000000
       0,8        6,000000

P(x)=(-2,000000)
      +((-2,000000)/((1) * (0,400000)))*(x-(0,0))
      +((12,000000)/((2) * (0,160000)))*(x-(0,0))(x-(0,4))

Sonuc: P(0,10)=-3,625000
--------------------------------
```

Geri Fark:

4)

x	2	4	6	8
y	5	7	11	20

veri setini kullanarak geri fark Newton yaklaşımı ile interpolasyon polinomu $P_3(x)$'i elde ediniz. polinomunun $x=5$ deki değerini bulunuz.

$P_3(x) = ?$ $P_3(5) = ?$

$h=2$ (Geri fark yaklaşımı uygularız.)

$$P_3(x) = y_3 + \frac{\nabla y_3}{h^1 \cdot 1!}(x-x_3) + \frac{\nabla^2 y_3}{h^2 \cdot 2!}(x-x_3)(x-x_2)$$

$$+ \frac{\nabla^3 y_3}{h^3 \cdot 3!}(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)$$

Geri Fark Tablosu:

x_i	y_i	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
x_0	y_0			
		∇y_1		
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$	
		∇y_2		
x_2	y_2			$\nabla^3 y_3$
		∇y_3	$\nabla^2 y_3$	
x_3	y_3			

x_i	y_i	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
2	5			
		2		
4	7		2	
		4		3
6	11		5	
		9		
8	20			

y_3 $\quad \nabla y_3$ $\quad \nabla^2 y_3$ $\quad \nabla^3 y_3$

$$P_3(x) = 20 + \frac{9}{2^1 \cdot 1!}(x-8) + \frac{5}{2^2 \cdot 2!}(x-8)(x-6)$$

$$+ \frac{3}{2^3 \cdot 3!}(x-8)(x-6)(x-4)$$

$$P_3(x) = 20 + \frac{9}{2}(x-8) + \frac{5}{8}(x-8)(x-6)$$

$$+ \frac{1}{16}(x-8)(x-6)(x-4)$$

$$P_3(5) = 20 + \frac{9}{2}(-3) + \frac{5}{3}(-3)(-1)$$

$$+ \frac{1}{16}(-3)(-1)(1)$$

$$= 20 - \frac{27}{2} + 5 + \frac{3}{16} \cong 8.5625$$

Geri fark yaklaşımı ile Newton İnterpolasyon Formülünün C kodu çalışma sorusu olarak bırakılmıştır…

Bölünmüş Farklar

6

x	1	-1	2
y	0	-3	4

veri setini kullanarak bölünmüş fark yaklaşımı ile Newton interpolasyon polinomu $P_2(x)$'i elde ediniz. polinomunun $x=0$ daki değerini bulunuz.

$P_2(x) = ?$ $\qquad$ $P_2(0) = ?$

$$h_1 = -1-1 = -2$$
$$h_2 = 2-(-1) = 3$$
eşit değil!

Sadece bölünmüş fark yaklaşımı yapılabilir.

Bölünmüş Fark Tablosu:

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
x_0	y_0		
		$f[x_0, x_1]$	
x_1	y_1		$f[x_0, x_1, x_2]$
		$f[x_1, x_2]$	
x_2	y_2		

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	0		
		$\frac{-3-0}{-1-1} = \frac{3}{2}$	
-1	-3		$\frac{\frac{7}{3} - \frac{3}{2}}{2-1} = \frac{5}{6}$
		$\frac{4-(-3)}{2-(-1)} = \frac{7}{3}$	
2	4		

$P_2(x)$, bölünmüş fark Newton Polinomu

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$P_2(x) = 0 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{5}{6}(x-1)(x+1)$$

$$= \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{5}{6}(x^2-1)$$

$$P_2(x) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{14}{6}$$

$$P_2(0) = -\frac{14}{6} = -2.333$$

C kodu:

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <locale.h>

int main()
{   setlocale(LC_ALL,"Turkish");
    int m,n,i,j;
    printf("Kaç adet nokta olduğunu giriniz--->");
    scanf("%d",&n);
    float X[n], Y[n][n],s,bx;
    printf("Yaklasik degerini bulmak istediğiniz x değerini giriniz--->");
    scanf("%f",&bx);
    for(i=0;i<n;i++)
      { printf("%d. noktadaki x değerini giriniz: ",i+1);
        scanf("%f",&X[i]);
        printf("%d. noktadaki y değerini giriniz: ",i+1);
        scanf("%f",&Y[i][0]);
      }
```

```
for(i=1;i<n;i++)
  { for(j=0;j<n-i;j++)
      {Y[j][i]=(Y[j+1][i-1]-Y[j][i-1])/(X[i+j]-X[j]);}
   }
  printf("\nBölünmüş Farklar Tablosu\n");
  printf("        xi       -yi=f(xi)");

     for(i=0;i<n-1;i++)
       { printf("     %d.Böl.Fark ",i+1);}
     printf("\n");

     for(i=0;i<n;i++)
      { printf("     %5.1f",X[i]);
          for(j=0;j<n-i;j++)
            {printf("%15f",Y[i][j]);}
           printf("\n");
        }
```

```
 printf("\nP(x)=");
    for(i=0;i<n;i++)
    { printf("(%f)",Y[0][i]);
        for(j=n;j>(n-i);j--)
            { printf("(x-(%.0f))",X[n-j]);}
        if (i!=(n-1))printf("\n     +");
     }

s=Y[0][0];
    for(i=1;i<n;i++)
     {float carp=1;
         for(j=0;j<i;j++)
           {carp=carp*(bx-X[j]);}
         s=s+(carp*Y[0][i]);
      }

    printf("\n\nSonuc: P(%f)=%f",bx,s);
    getch();
    return 0;
}
```

Ekran Çıktısı:

```
Kaç adet nokta olduğunu giriniz--->3
Yaklasik degerini bulmak istediğiniz x değerini giriniz--->0
1. noktadaki x değerini giriniz: 1
1. noktadaki y değerini giriniz: 0
2. noktadaki x değerini giriniz: -1
2. noktadaki y değerini giriniz: -3
3. noktadaki x değerini giriniz: 2
3. noktadaki y değerini giriniz: 4

Bölünmüş Farklar Tablosu
        xi        -yi=f(xi)     1.Böl.Fark      2.Böl.Fark
       1,0        0,000000       1,500000        0,833333
      -1,0       -3,000000       2,333333
       2,0        4,000000

P(x)=(0,000000)
     +(1,500000)(x-(1))
     +(0,833333)(x-(1))(x-(-1))

Sonuc: P(0,000000)=-2,333333
--------------------------------
```

7

x	0	1	2	5
y	2	3	12	147

yaklaşımı ile

veri setini kullanarak bölünmüş fark Newton interpolasyon polinomu $P_3(x)$'i elde ediniz. İnterpolasyon polinomunun $x=4$ deki değerini bulunuz.

$P_3(x) = ?$ $\qquad$ $P_3(4) = ?$

h'lar eşit değil. Sadece bölünmüş fark!

x_i	y_i	1. mertebe B.F	2. mertebe B.F.	3. mertebe B.F.
0	2			
		$\frac{3-2}{1-0}=1$		
1	3		$\frac{9-1}{2-0}=4$	
		$\frac{12-3}{2-1}=9$		$\frac{9-4}{5-0}=1$
2	12		$\frac{45-9}{5-1}=9$	
		$\frac{147-12}{5-2}=45$		
5	147			

$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0)$$
$$+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$P_3(x) = 2 + 1.(x-0) + 4.(x-0)(x-1)$$

$$+ \; 1.(x-0)\underbrace{(x-1)(x-2)}_{x^2-3x+2}$$

$$P_3(x) = 2 + x + 4.(x^2 - x) + x.(x^2 - 3x + 2)$$

$$= 2 + x + 4x^2 - 4x + x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$P_3(x) = x^3 + x^2 - x + 2$$

$$P_3(4) = 64 + 16 - 4 + 2$$

$$P_3(4) = 78 \; .$$

Program Çalıştırıldığında Ekran Çıktısı:

```
Kaç adet nokta olduğunu giriniz--->4
Yaklasik degerini bulmak istediğiniz x değerini giriniz--->4
1. noktadaki x değerini giriniz: 0
1. noktadaki y değerini giriniz: 2
2. noktadaki x değerini giriniz: 1
2. noktadaki y değerini giriniz: 3
3. noktadaki x değerini giriniz: 2
3. noktadaki y değerini giriniz: 12
4. noktadaki x değerini giriniz: 5
4. noktadaki y değerini giriniz: 147

Bölünmüş Farklar Tablosu
       xi         -yi=f(xi)      1.Böl.Fark       2.Böl.Fark       3.Böl.Fark
      0,0          2,000000       1,000000        4,000000        1,000000
      1,0          3,000000       9,000000        9,000000
      2,0         12,000000      45,000000
      5,0        147,000000

P(x)=(2,000000)
     +(1,000000)(x-(0))
     +(4,000000)(x-(0))(x-(1))
     +(1,000000)(x-(0))(x-(1))(x-(2))

Sonuc: P(4,000000)=78,000000
--------------------------------
```

Çalışma Sorusu:

İleri fark ve geri fark yaklaşımlarını kullanarak $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $x_i = 0.2(i+1)$, $i = 0,1,2,3$, noktalarındaki ileri fark ve geri fark Newton interpolasyon polinomlarını bulunuz.

Yanıt:

İleri fark polinomu:

$$P_3(x) = 0.0795056 \cdot x^3 - 0.554404 \cdot x^2 + 0.015353 \cdot x + 0.998536$$

Geri fark polinomu:

$$P_3(x) = 0.0795056x^3 - 0.554404x^2 + 0.0153524x + 0.998537$$

Kaynaklar

- Numerical Analysis, Richard L. Burden, Brooks/Cole Cengage Learning, Boston., 2009.
- Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, 2nd Edition, John H. Mathews, Prentice Hall International Edition, 1992.
- Nümerik Analiz, (Numerical Analysis, D. Kincaid, W. Cheney, 3rd ed.(2002)), Nuri Özalp, Elif Demirci, Gazi Kitabevi Yayınları, 2012.
- Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları, İrfan Karagöz, Nobel Yayıncılık, 2011.
- Sayısal Çözümleme, Recep Tapramaz, Literatür yayıncılık, 2002.
- Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri, Eyüp Sabri Türker, Engin Can, II. Baskı, Değişim Yayınları.