CENG 235 ALGORİTMALARLA SAYISAL ÇÖZÜMLEME

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

- Hafta 12

12. Hafta Konular

- **Sayısal Türev:**

  --- Sonlu Farklar Yaklaşımı ile Yaklaşık Türev Hesaplama

  --- Lagrange İnterpolasyonu ile Yaklaşık Türev Hesaplama

Sayısal Türev

1-) Sonlu Farklar Yaklaşımı ile Yaklaşık Türev Hesabı:

x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

n. mertebeden bir Türevin Sonlu fark yaklaşımı için en az $(n+1)$ nokta gereklidir.

1. Mertebeden Adi Türevler için Sonlu Farklar Yaklaşımları:

Türev tanımını göz önüne alarak

- ileri fark yaklaşımı
- geri fark yaklaşımı
- merkezi fark yaklaşımı

ile türev formülleri elde edeceğiz.

$y=f(x)$ fonksiyonunun bir x_i noktasındaki

türevi :

--- x_{i+1}, x_{i+2}, ---- gibi noktalardaki fonksiyon değerleri

ile ileri fark yöntemiyle

--- x_{i-1}, x_{i-2}, ---- gibi noktalardaki fonksiyon

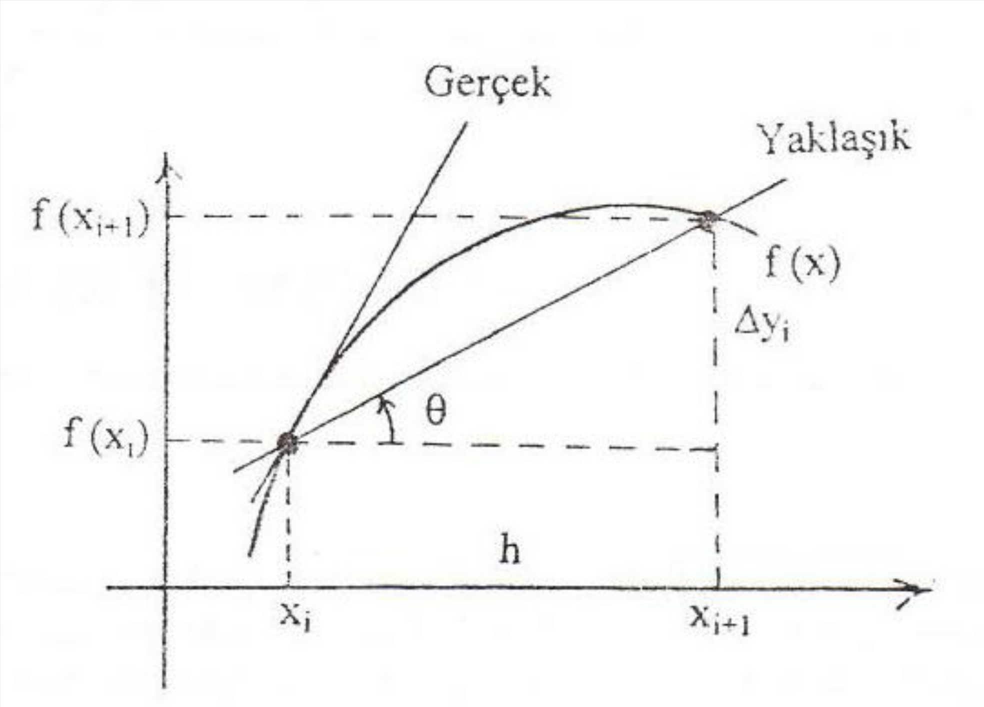
değerleri ile geri fark yöntemiyle

--- x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i-2}, x_{i+2}, ---- gibi nokta

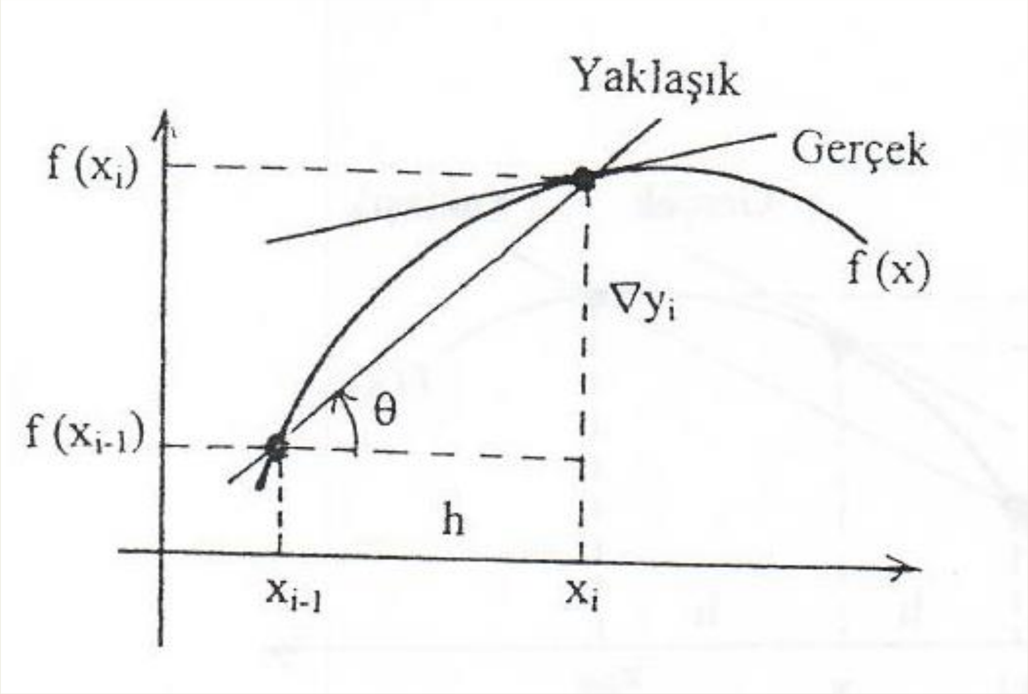
lardaki fonksiyon değerleri ile merkezi fark

yöntemi ile hesaplanacaktır.

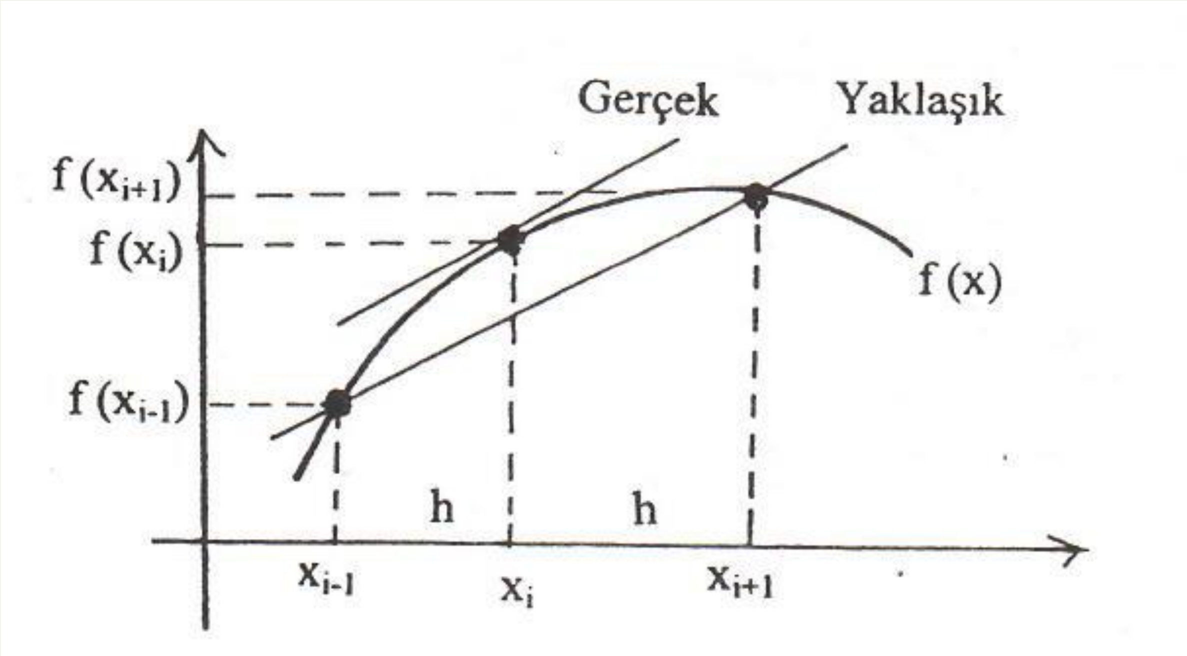
İleri Fark Yaklaşımı:



Geri Fark Yaklaşımı:



Merkezi Fark Yaklaşımı:



Taylor Seri Açılımından:

O → kesme hatası

$O(h)$ → h mertebeli kesme hatası

h → küçük bir değer ise

h^2 → daha küçük bir değerdir.

İleri fark yaklaşımı: $f_i' = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$

$$O(h) \cong -\frac{h}{2} f''(\varepsilon)$$

Geri fark yaklaşımı: $f_i' = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$

$$O(h) \cong \frac{h}{2} f''(\varepsilon)$$

Merkezi fark yaklaşımı: $f_i' = \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$

$$O(h^2) \cong -\frac{h^2}{6} f'''(\varepsilon)$$

$$x_{i-1} < \varepsilon < x_{i+1}$$

x_i ve x_{i+1} noktaları için Taylor Serisi Açılımı:

$$f(x_i+h) = f(x_{i+1}) = f_{i+1} =$$

$$f_i + h\cdot f_i' + \frac{h^2}{2}\cdot f_i'' + \frac{h^3}{3!}\cdot f_i''' + \cdots$$

$$f_{i+1} - f_i - \frac{h^2}{2} f'' - \cdots = h\cdot f_i'$$

Böylece:

$$\underbrace{f_i' = \frac{f_{i+1}-f_i}{h}}_{\text{ileri fark türev formülü}} - \underbrace{\frac{h}{2} f_i'' - \cdots}_{O(h) \cong -\frac{h}{2} f_i''(\xi)}$$

$$f_i' = \frac{\Delta f_i}{h}$$ ileri fark operatörü

$$f_i' = \frac{\nabla f_i}{h}$$ geri fark operatörü

şeklindedir.

--- h küçüldükçe kesme hatası azalır.

--- h çok küçük olursa yuvarlama hataları artar.

--- h, ne çok küçük ne de çok büyük alınmalıdır.

Örnek:

x	Sinx	x	Sinx
0.800	0.71736	0.901	0.78395
0.850	0.75128	0.902	0.78457
0.880	0.77074	0.905	0.78643
0.890	0.77707	0.910	0.78950
0.895	0.78021	0.920	0.79560
0.898	0.78208	0.950	0.81342
0.899	0.78290	1.000	0.84147
0.900	0.78333		

$f'(0.9)$? (Merkezi Fark ile)

Gerçek değer

$f'(0.9) = \cos(0.9) = 0.62161$

Merkezi Fark Yaklaşımı:

$$f'(0.9) \cong \frac{f(0.9+h) - f(0.9-h)}{2h}$$

h	Yaklaşık değer	Hata	
0.001	0.62500	0.00339	artar
0.002	0.62250	0.00089	
0.005	0.62200	0.00039	
0.010	0.62150	0.00011	En uygun h
0.020	0.62150	0.00011	
0.050	0.62140	0.00021	artar
0.1	0.62055	0.00106	

$h = 0.01$ için Merkezi Fark Yaklaşımı:

$$f'(0.9) = \frac{f(0.91) - f(0.89)}{2.(0.01)}$$

$$= \frac{0.78950 - 0.77707}{0.02}$$

$$= 0.62150$$

$$\text{Hata} = |0.62161 - 0.62150| = 0.00011$$

İleri Fark Yaklaşımı:

$$f'(0.9) \cong \frac{f(0.91) - f(0.9)}{0.01} = 0.61700$$

$$Hata = |0.62161 - 0.617001| = 0.00461$$

Geri Fark Yaklaşımı:

$$f'(0.9) \cong \frac{f(0.9) - f(0.89)}{0.01} = 0.62600$$

$$Hata = |0.62161 - 0.62600| = 0.00439$$

Örnek! $h = 0.1$ ve $f(x) = e^{2x}$ için

iki nokta kullanarak ileri fark, geri fark,

merkezi fark yaklaşımı ile $f'(0.2)$

değerini, mutlak hataları bulunuz.

(3 ondalık kullanınız.)

$f(0.1) = 1.221$ | $f(0.2) = 1.492$ | $f(0.3) = 1.822$

$f(x) = e^{2x}$ $\quad f'(0.2) = 2.984$

$f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$

ileri fark: $f'(0.2) = \dfrac{f(0.3) - f(0.2)}{0.1} = 3.303$

geri fark: $f'(0.2) = \dfrac{f(0.2) - f(0.1)}{0.1} = 2.704$

Merkezi fark: $f'(0.2) = \dfrac{f(0.3) - f(0.1)}{2*(0.1)} = 3.004$

Mutlak Hata:

ileri fark: $|3.303 - 2.984| = 0.319$

geri fark: $|2.704 - 2.984| = 0.280$

merkezi fark: $|3.004 - 2.984| = 0.020$

C Kodu:

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

double Fonksiyon(double z){
        return exp(2*z);}

double FT(double z){
        return 2*exp(2*z);}

int main()
{  double x,h,gercek_deger,mutlak_hata1,mutlak_hata2,mutlak_hata3,i;
   printf("h degerini giriniz: ");
   scanf("%lf",&h);
   printf("Birinci Turevi alinacak istediginiz x degeri giriniz: ");
   scanf("%lf",&x);
```

```
for(i=x-h;i<= x+h;i=i+h)
printf("f(%.3lf)= %.3lf\n",i,Fonksiyon(i));
gercek_deger=FT(x);
double birinciTurev_ileri=(Fonksiyon(x+h)-Fonksiyon(x))/(h);
double birinciTurev_geri=(Fonksiyon(x)-Fonksiyon(x-h))/(h);
double birinciTurev_merkezi=(Fonksiyon(x+h)-Fonksiyon(x-h))/(2*h);

mutlak_hata1 = fabs(gercek_deger-birinciTurev_ileri);
mutlak_hata2 = fabs(gercek_deger-birinciTurev_geri);
mutlak_hata3 = fabs(gercek_deger-birinciTurev_merkezi);

printf("gercek deger=%.3lf (birinci turev)\n",gercek_deger);
printf("Birinci Turev=%.3lf (ileri fark)\n",birinciTurev_ileri);
printf("Birinci Turev=%.3lf (geri fark) \n",birinciTurev_geri);
printf("Birinci Turev=%.3lf (merkezi fark)\n",birinciTurev_merkezi);

printf("mutlak_hata_ileri=%.3lf\n",mutlak_hata1);
printf("mutlak_hata_geri=%.3lf\n",mutlak_hata2);
printf("mutlak_hata_merkezi=%.3lf\n",mutlak_hata3);
getch ();
return 0;
}
```

Ekran Çıktısı:

```
h degerini giriniz: 0.1
Birinci Turevi alinacak istediginiz x degeri giriniz: 0.2
f(0.100)= 1.221
f(0.200)= 1.492
f(0.300)= 1.822
gercek deger=2.984 (birinci turev)
Birinci Turev=3.303 (ileri fark)
Birinci Turev=2.704 (geri fark)
Birinci Turev=3.004 (merkezi fark)
mutlak_hata_ileri=0.319
mutlak_hata_geri=0.279
mutlak_hata_merkezi=0.020
```

--Nokta Sayısı Arttıkça Doğruluk Artar.

Üç Nokta Formülleri:

İleri Fark Yaklaşımı:

$$f_i' = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h} + O(h^2)$$

$$O(h^2) \cong \frac{h^2}{3} f'''(\varepsilon)$$

Geri Fark Yaklaşımı:

$$f_i' = \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h} + O(h^2)$$

$$O(h^2) \cong \frac{h^2}{3} f'''(\varepsilon)$$

Geri Fark Yaklaşımı İspatı:

$x_i \,,\, x_{i-1} \,,\, x_{i-2}$ (3 nokta)

$$-4 \,/\; f(x_i - h) = f_{i-1} = f_i - h f_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' - \frac{h^3}{3!} f_i''' + \dots$$

$$f(x_i - 2h) = f_{i-2} = f_i - 2h \cdot f_i' + \frac{(2h)^2}{2!} f_i'' - \frac{(2h)^3}{3!} f_i''' + \dots$$

$+$

$$-4 f_{i-1} + f_{i-2} = -3 f_i + 2h f_i' - \frac{2}{3} h^3 f_i''' + \dots$$

(Amaç, 1. terimden sonraki ilk terimi yok etmektir, yani 2. terimi)

$$2h f_i' = 3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2} + \frac{2}{3}h^3 f''' + \dots$$

$$f_i' = \frac{3f_i - 4\cdot f_{i-1} + f_{i-2}}{2h} + \underbrace{\frac{2}{3}h^3 f''' + \dots}_{O(h^2)}$$

Geri fark yaklaşımı ile 3 nokta için türev formülü

Örnek! $h = 0.01$ ve $f(x) = \sin x$ için üç noktalı kullanarak ileri fark çözümünü ile $f'(0.9)$ değerini bulunuz.

$$f'(0.9) \cong \frac{-f(0.92) + 4 \cdot f(0.91) - 3f(0.9)}{2 \cdot (0.01)}$$

$$\cong 0.62050$$

$$\text{Hata} = |0.62161 - 0.62050| = 0.00111$$

Dört Nokta Formülleri:

İleri fark Yaklaşımı:

$$f_i' = \frac{2f_{i+3} - 9f_{i+2} + 18f_{i+1} - 11f_i}{6h} + O(h^3)$$

$$O(h^3) \cong -\frac{h^3}{4} f^{(iv)}(\xi)$$

Geri fark Yaklaşımı:

$$f_i' = \frac{11f_i - 18f_{i-1} + 9f_{i-2} - 2f_{i-3}}{6h} + O(h^3)$$

$$O(h^3) \cong \frac{h^3}{4} f^{(iv)}(\xi)$$

Merkezi Fark Yaklaşımı:

$$f_i' = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h} + O(h^4)$$

$$O(h^4) \cong \frac{h^4}{30} f^{(4)}(\xi)$$

2. Mertebeden Adi Türevler için Sonlu Farklar Yaklaşımları:

2. türev için en az 3 nokta gereklidir.
Taylor seri açılımı ile aşağıdaki formüller elde edilir.

İleri Fark Yak.: $$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h)$$

$$O(h) \cong -h f'''(\varepsilon)$$

Geri Fark Yak.: $$f_i'' = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} + O(h)$$

$$O(h) \cong h f'''(\varepsilon)$$

Merkezi Fark Yak. : $f_i'' = \dfrac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$

$$O(h^2) \cong \frac{-h^2}{12} f^{(IV)}(\varepsilon)$$

Merkezi Fark İspatı:

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' + \frac{h^3}{3!} f_i''' + \frac{h^4}{4!} f_i^{(IV)} + \cdots$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2!} f_i'' - \frac{h^3}{3!} f_i''' + \frac{h^4}{4!} f_i^{(IV)} + \cdots$$

Taraf tarafa toplandığında:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i'' + \frac{h^4}{12} f_i^{(iv)} + \cdots$$

$$f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i - \frac{h^4}{12} f_i^{(iv)} + \cdots = h^2 f_i''$$

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$O(h^2) \cong \frac{-h^2}{12} f^{(iv)}(\xi)$$

$$f_i'' \cong \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \longrightarrow \text{ileri Fark}$$

$$f_i'' \cong \frac{\nabla^2 f_i}{h^2} \longrightarrow \text{Geri Fark}$$

$$f_i'' \cong \frac{\delta^2 f_i}{h^2} \longrightarrow \text{Merkezi Fark}$$

$$(x_{i-1} < \xi < x_{i+1})$$

Dört Nokta Formülleri:

İleri fark yaklaşımı:

$$f_i'' = \frac{-f_{i+3} + 4f_{i+2} - 5f_{i+1} + 2f_i}{h^2} + O(h^2)$$

$$O(h^2) \cong \frac{11}{12} h^2 f^{(iv)}(\xi)$$

Geri fark yaklaşımı:

$$f_i'' = \frac{2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}}{h^2} + O(h^2)$$

$$O(h^2) \cong \frac{11}{12} h^2 f^{(iv)}(\xi)$$

5 Nokta Formülleri: (Merkezi Fark)

$$f_i'' = \frac{-f_{i+2} + 16 f_{i+1} - 30 f_i + 16 f_{i-1} - f_{i-2}}{12 h^2} + O(h^4)$$

$$O(h^4) \cong \frac{h^4}{90} f^{(vi)}(\xi)$$

3. Mertebeden Adi Türevler için Sonlu Farklar Yaklaşımları:

En az 4 nokta gereklidir.

İleri fark yaklaşımı:

$$f_i''' = \frac{f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i}{h^3} + O(h)$$

$$O(h) \cong -\frac{3}{2} h f^{(iv)}(\xi)$$

Geri fark yaklaşımı:

$$f_i''' = \frac{f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}}{h^3} + O(h)$$

$$O(h) \cong \frac{3}{2} h f^{(iv)}(\xi)$$

Merkezi Fark Yaklaşımı:

$$f_i''' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} + O(h^2)$$

$$O(h^2) \cong -\frac{h^2}{4} f^{(v)}(\varepsilon)$$

Yani:

$$f_i''' \cong \frac{\Delta^3 f_i}{h^3} \longrightarrow \text{ileri fark}$$

$$f_i''' \cong \frac{\nabla^3 f_i}{h^3} \longrightarrow \text{Geri fark}$$

$$f_i''' \cong \frac{\delta^3 f_i}{h^3} \longrightarrow \text{Merkezi fark}$$

Örnek! $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x + 3$

x: 0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25 ve 0.30 noktalarına karşılık gelen $f(x)$ değerlerini bulunuz.

$f''(0.15)$ değerini tüm sonlu fark yaklaşımları ile hesaplayıp yapılan mutlak hataları ve yüzde bağıl hatası ifade ediniz. (5 ondalık kullanınız.)

Çözüm:

$f(0) = 3$

$f(0.05) = 3.09017$

$f(0.10) = 3.16110$

$f(0.15) = 3.21388$

$f(0.20) = 3.24960$

$f(0.25) = 3.26953$

$f(0.30) = 3.27510$

İleri Fark Yaklaşımı:

$$f_i'' \cong \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2}$$

$$f''(0.15) \cong \frac{f(0.25) - 2 \cdot f(0.20) + f(0.15)}{(0.05)^2}$$

$$= \frac{3.26953 - 2 \cdot (3.24960) + 3.21388}{0.0025}$$

$$= -6.31500$$

Mutlak Hata $= |-6.31500 + 6.83000|$

$$= 0.51500$$

Yüzde Bağıl Hata $= \dfrac{0.51500}{|-6.83000|} \times 100$

$$= 7.54026$$

Geri Fark Yaklaşımı:

$$f''_i \cong \frac{\nabla^2 f_i}{h^2} = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2}$$

$$f''(0.15) = \frac{f(0.15) - 2.f(0.10) + f(0.05)}{(0.05)^2}$$

$$= \frac{3.21388 - 2.(3.16110) + 3.09019}{0.0025}$$

$$= -7.27500$$

Mutlak Hata $= |-7.27500 + 6.830001|$

$$= 0.44500$$

Yüzde Bağıl Hata $= \frac{0.44500}{|-6.830001|} \times 100$

$$= 6.51537$$

Merkezi Fark Yöntemi:

$$f_i'' \cong \frac{\delta^2 f_i}{h^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$= \frac{f(0.20) - 2.f(0.15) + f(0.10)}{(0.05)^2}$$

$$= \frac{3.24960 - 2.(3.21388) + 3.16110}{0.0025}$$

$$= -6.82500$$

Mutlak Hata $= |-6.82500 + 6.830001|$

$$= 0.0050$$

Yüzde Bağıl Hata $= \frac{0.0050}{|-6.830001|} \times 100$

$$= 0.07321$$

C Kodu:

```c
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

double Fonksiyon(double z){
	return pow(z,4)+pow(z,3)-4*pow(z,2)+2*z+3;
}

double FT(double z){
	return 4*pow(z,3)+3*pow(z,2)-8*z+2;
}

double FTT(double z){
	return 12*pow(z,2)+6*z-8;
}
```

```
int main( )
{ double x,h,gercek_deger,mutlak_hata1,mutlak_hata2,mutlak_hata3,i;
  for(i=0;i<=0.30;i=i+0.05)
   printf("F(%.2lf)= %.5lf\n",i,Fonksiyon(i));
  printf("Ikinci Turevi alinacak istediginiz x degeri giriniz: ");
  scanf("%lf",&x);
  printf("h degerini giriniz: ");
  scanf("%lf",&h);
  gercek_deger=FTT(x);
  double ikinciTurev_ileri=(Fonksiyon(x+2*h)-2*Fonksiyon(x+h)+Fonksiyon(x))/(h*h);
  double ikinciTurev_geri=(Fonksiyon(x)-2*Fonksiyon(x-h)+Fonksiyon(x-2*h))/(h*h);
  double ikinciTurev_merkezi=(Fonksiyon(x+h)-2*Fonksiyon(x)+Fonksiyon(x-h))/(h*h);

  mutlak_hata1 = fabs(gercek_deger-ikinciTurev_ileri);
  mutlak_hata2 = fabs(gercek_deger-ikinciTurev_geri);
  mutlak_hata3 = fabs(gercek_deger-ikinciTurev_merkezi);
```

```
    printf("gercek deger=%.5lf (ikinci turev)\n",gercek_deger);
    printf("Ikinci Turev=%.5lf (ileri fark)\n",ikinciTurev_ileri);
    printf("Ikinci Turev=%.5lf (geri fark) \n",ikinciTurev_geri);
    printf("Ikinci Turev=%.5lf (merkezi fark)\n",ikinciTurev_merkezi);

    printf("mutlak_hata_ileri=%.5lf\n",mutlak_hata1);
    printf("mutlak_hata_geri=%.5lf\n",mutlak_hata2);
    printf("mutlak_hata_merkezi=%.5lf\n",mutlak_hata3);

    printf("yuzde_bagil_hata_ileri=%.5lf\n",(mutlak_hata1/fabs(gercek_deger))*100);
    printf("yuzde_bagil_hata_geri=%.5lf\n",(mutlak_hata2/fabs(gercek_deger))*100);
    printf("yuzde_bagil_hata_merkezi=%.5lf\n",(mutlak_hata3/fabs(gercek_deger))*100);

    getch ();
    return 0;
}
```

Ekran Çıktısı:

```
F(0.00)= 3.00000
F(0.05)= 3.09013
F(0.10)= 3.16110
F(0.15)= 3.21388
F(0.20)= 3.24960
F(0.25)= 3.26953
F(0.30)= 3.27510
Ikinci Turevi alinacak istediginiz x degeri giriniz: 0.15
h degerini giriniz: 0.05
gercek deger=-6.83000 (ikinci turev)
Ikinci Turev=-6.31500 (ileri fark)
Ikinci Turev=-7.27500 (geri fark)
Ikinci Turev=-6.82500 (merkezi fark)
mutlak_hata_ileri=0.51500
mutlak_hata_geri=0.44500
mutlak_hata_merkezi=0.00500
yuzde_bagil_hata_ileri=7.54026
yuzde_bagil_hata_geri=6.51537
yuzde_bagil_hata_merkezi=0.07321
```

Ödev: ileri fark, geri fark, merkezi fark türev formüllerini kullanarak $f(x)=e^{-x^2}$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki yaklaşık türevini $h=0.1$ ve $h=0.2$ adım uzunlukları için hesaplayınız.

Gerçek türev hesabını yaparak herbir türev yaklaşımı için mutlak hataları elde ediniz.

2-) Lagrange İnterpolasyonu ile Yaklaşık Türev Hesaplama

Eşit aralıklı olmayan (n+1) tane ayrık noktadan geçen n. dereceden polinom, Lagrange interpolasyon formülüne göre:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right] f(x_i) + E$$

veya

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \cdot f(x_i) + E$$

şeklinde hesaplanır.

Böylece, 1. türev

$$P_n'(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i'(x) + E'$$

şeklinde hesaplanır.

- Benzer şekilde ikinci, üçüncü ve daha yüksek mertebeden türevler hesaplanabilir.

Örn)

x_i:	2	5	6
y_i:	5	26	37

veri seti veriliyor. $y(4)$ değeri nedir?

$$y(x) = P_2(x) = \frac{(x-5)(x-6)}{(2-5)(2-6)} \cdot 5 + \frac{(x-2)(x-6)}{(5-2)(5-6)} \cdot 26$$

$$+ \frac{(x-2)(x-5)}{(6-2)(6-5)} \cdot 37$$

$$= \frac{5}{12} \cdot (x^2 - 11x + 30) - \frac{6}{3}(x^2 - 8x + 12)$$

$$+ \frac{37}{4}(x^2 - 7x + 10)$$

$$= x^2 + 1$$

$$P_2'(x) = 2x \Rightarrow \boxed{P_2'(4) = 8}$$

Noktalar Eşit Aralıklı ise: x_0 noktasındaki

3 noktadan geçen polinomun 1. türevi:

için aşağıdaki formül elde edilir.

x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2

$$f(t) = \frac{(t-x_1)(t-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot f_0 + \frac{(t-x_0)(t-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \cdot f_1$$

$$+ \frac{(t-x_0)(t-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \cdot f_2$$

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(t-x_2)+(t-x_1)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)}\cdot f_0 + \frac{(t-x_2)+(t-x_0)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)}\cdot f_1$$

$$+ \frac{(t-x_1)+(t-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\cdot f_2$$

$t = x_0$ alınırsa

$$f'(x_0) = \frac{(x_0-x_2)+(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\cdot f_0 + \frac{(x_0-x_2)+(x_0-x_0)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)}\cdot f_1$$

$$+ \frac{(x_0-x_1)+(x_0-x_0)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)}\cdot f_2$$

$$f'(x_0) = \frac{(-2h)+(-h)}{(-h).(-2h)}.f_0 + \frac{(-2h)+0}{(h).(-h)}.f_1 + \frac{(-h)+0}{(h).(2h)}.f_2$$

$$f'(x_0) = \frac{-3h}{2h^2}.f_0 + \frac{2h}{h^2}.f_1 - \frac{h}{2h^2}.f_2$$

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-3f_0 + 4f_1 - f_2\right]}$$

formülü elde edilir.

ileri fark yaklaşımı ile 3 nokta türev yaklaşımı:

$$f_i' \cong \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h}$$

şeklindedir.

Lagrange polinomu yardımıyla:

$$f'(x_0) \cong \frac{1}{2h}\left[-3f_0 + 4f_1 - f_2\right]$$

Örn)

x_i	0	1	2
f_i	0	8	18

Veri seti veriliyor. $P_2'(0) = ?$

$$f'(x_0) \cong \frac{1}{2h}\left[-3f_0 + 4f_1 - f_2\right]$$

$h=1$

$$f'(0) \cong \frac{1}{2}\left[-3.0 + 4.8 - 18\right]$$

$$\cong \frac{1}{2}\left[32-18\right] = \frac{14}{2} = 7$$

Benzer şekilde aşağıdaki formüller elde edilir.

(x_0, f_0), (x_1, f_1) ve (x_2, f_2) noktaları için 2. türev $f''(x_0)$ formülü:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \cdot \left[f_0 - 2f_1 + f_2 \right]$$

(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2) ve (x_3, f_3) noktaları için 1. türev $f'(x_0)$ formülü:

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h} \left[-11 f_0 + 18 f_1 - 9 f_2 + 2 f_3 \right]$$

-- (x_0,f_0), (x_1,f_1), (x_2,f_2) ve (x_3,f_3) noktaları

için 2. türev $f''(x_0)$ formülü:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3\right]$$

-- (x_0,f_0), (x_1,f_1), (x_2,f_2), (x_3,f_3) ve (x_4,f_4) noktaları

için 3. türev $f'''(x_0)$ formülü:

$$f'''(x_0) = \frac{1}{2h^3}\cdot\left[-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4\right]$$

Örnek:

x_i	f_i
0	1
2	19
4	85
6	228

(4 noktada)

$$f'(0) = \frac{1}{6 \cdot 2} \cdot \left[-11 \cdot 1 + 18 \cdot 19 - 9 \cdot 85 + 2 \cdot 228 \right]$$

$$= \frac{11}{6}$$

Örnek!

x_i	f_i
0	0
1	8
2	18

ise $f'\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(t-x_2)+(t-x_1)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)}.f_0 + \frac{(t-x_2)+(t-x_0)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2)}.f_1$$

$$+ \frac{(t-x_1)+(t-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.f_2$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)+\left(\frac{1}{2}-1\right)}{(-1)\cdot(-2)}\cdot 0 + \frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right)}{(1)\cdot(-1)}\cdot 8$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right)}{(2)\cdot(1)}\cdot 18$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{\frac{-3+1}{2}}{-1}\cdot 8 + \frac{\frac{-1+1}{2}}{2}\cdot 18$$

$$= 0 + 8 + 0 = 8$$

Kaynaklar

- Numerical Analysis, Richard L. Burden, Brooks/Cole Cengage Learning, Boston., 2009.
- Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, 2nd Edition, John H. Mathews, Prentice Hall International Edition, 1992.
- Nümerik Analiz, (Numerical Analysis, D. Kincaid, W. Cheney, 3rd ed.(2002)), Nuri Özalp, Elif Demirci, Gazi Kitabevi Yayınları, 2012.
- Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları, İrfan Karagöz, Nobel Yayıncılık, 2011.
- Sayısal Çözümleme, Recep Tapramaz, Literatür yayıncılık, 2002.
- Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri, Eyüp Sabri Türker, Engin Can, II. Baskı, Değişim Yayınları.