CENG 235 ALGORİTMALARLA SAYISAL ÇÖZÜMLEME

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

- Hafta 7

7. Hafta Konular

- **Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri**

  DirektYöntemler (Analitik Yöntemler)

  --- Cramer Yöntemi

  --- Gauss Eliminasyon Yöntemi

  --- Gauss-Jordan Yöntemi

Lineer Denklem Sistemleri

n bilinmeyenli n denklemli bir lineer denklem sistemi aşağıdaki şekilde açık formda ifade edilir:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{gathered}
$$

Burada: $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ ‘ ler sistemin katsayılar olarak ifade edilir.

$x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}}$‘ ler bilinmeyenler olarak ifade edilir.

$b_1, b_2, \ldots, b_n$‘ ler sağ taraf sabitleri olarak ifade edilir.

n bilinmeyenli n denklemli bir lineer denklem sistemi aşağıdaki şekilde matris formda da ifade edilebilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Katsayılar Matrisi}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \text{bilinmeyenler Matrisi}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \text{sağ taraf Matrisi}$$

olmak üzere: $A.X = B$ şeklinde ifade edilir.

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

1-) DirektYöntemler (Analitik Yöntemler)

--- Cramer Yöntemi

--- Gauss Eliminasyon Yöntemi

--- Gauss-Jordan Yöntemi

2-) İteratif Yöntemler

--- Jacobi İterasyonu Yöntemi

--- Gauss-Sidel Yineleme Yöntemi

Lineer Denklem Sistemleri İçin Direkt Yöntemler

1-) Cramer Yöntemi:

Bu yöntemde, *n* tane bilinmeyen içeren

$$A.X=B$$

Lineer denklem sisteminin çözümü:

$$x_i = \frac{|D_i|}{|A|} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ifadesiyle hesaplanır.

Burada |Di|: A katsayılar matrisinde, i. Sütün yerine B matrisinin konulmasıyla elde edilen matrisin determinantıdır.

Yani, Cramer yöntemin bilinmeyenler iki matrisin determinantlarının oranı olarak elde edilir.

Cramer yönteminin uygulanabilmesi için $|A| \neq 0$ şartı sağlanmalıdır.

Eğer $|A| \neq 0$ ise, A.X=B sisteminin

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|D_2|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|D_n|}{|A|}$$

şeklinde bir tek çözümü vardır.

Örneğin aşağıdaki sistemin çözümünü Cramer yöntemi ile bulalım:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |D_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, |D_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|D_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|D_3|}{|A|}$$

elde edilir.

Örnek: Aşağıdaki sisteminin çözümünü Cramer metodunu kullanarak bulunuz.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases}$$

Çözüm: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}, |D_1| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 14 & 2 \end{vmatrix}, |D_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}$ olur.

Böylece:

$$x = \frac{|D_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 14 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{20}{10} = 2,$$

$$y = \frac{|D_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10}{10} = 1$$

elde edilir.

Örnek:

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 2$$
$$4x_1 + x_2 - x_3 = -5$$
$$6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17$$

şeklinde verilen lineer denklem sistemini Cramer yöntemi ile çözünüz

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & -1 \\ 17 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 6 & 17 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -5 \\ 6 & -2 & 17 \end{bmatrix}$$

Şeklindedir.

Buradan:

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|A|} = \frac{14}{28} = 0.5$$

$$x_2 = \frac{|D_2|}{|A|} = \frac{-112}{28} = -4$$

$$x_3 = \frac{|D_3|}{|A|} = \frac{84}{28} = 3$$

elde edilir.

C kodu:

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <locale.h>
float determinant(float M[3][3]);
void matrisyaz(float N[3][3]);

int main()
{   setlocale(LC_ALL,"Turkish");
    float A[3][3],B[3],tempA[3][3],detA,x[3]; int i,j,t,s;
    A[0][0]=2; A[0][1]=-1; A[0][2]=-1;   B[0]=2;
    A[1][0]=4; A[1][1]=1;  A[1][2]=-1;   B[1]=-5;
    A[2][0]=6; A[2][1]=-2; A[2][2]=2;    B[2]=17;

      printf("Katsayılar matrisi:");
      matrisyaz(A);
      printf("B sonuç matrisi:\n");
      for(i=0;i<3;i++)
       printf("%.3f\n",B[i]);
      printf("\n");
      detA=determinant(A);
```

```
for(i=0;i<3;i++)
   { for(t=0;t<3;t++)
        {  for(s=0;s<3;s++)
           {  tempA[t][s]=A[t][s]; }
         }

        for(j=0;j<3;j++)
           { tempA[j][i]= B[j]; }

      x[i]=determinant(tempA)/detA;
      printf("%d. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:",i+1);
      matrisyaz(tempA);
   }

  printf("Sonuclar\n");
   for(i=0;i<3;i++)
       printf("x[%d]=%.3f\n",i+1,x[i]);

 getch ();
 return 0;
}
```

```
float determinant(float M[3][3])
{ float det,m1,m2,m3;
   m1=M[0][0]*(M[1][1]*M[2][2]-M[1][2]*M[2][1]);
   m2=M[0][1]*(M[1][0]*M[2][2]-M[1][2]*M[2][0]);
   m3=M[0][2]*(M[1][0]*M[2][1]-M[1][1]*M[2][0]);
   det=m1+(-1)*m2+m3;
   return det;
}

void matrisyaz(float N[3][3])
 {
     int i,j;
      for(i=0;i<3;i++)
      {
          printf("\n");
          for(j=0;j<3;j++)
            printf("%.3f\t",N[i][j]);
      }
      printf("\n\n");

  }
```

Ekran Çıktısı:

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 2$$
$$4x_1 + x_2 - x_3 = -5$$
$$6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17$$

```
Katsayılar matrisi:
2,000   -1,000  -1,000
4,000   1,000   -1,000
6,000   -2,000  2,000

B sonuç matrisi:
2,000
-5,000
17,000

1. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:
2,000   -1,000  -1,000
-5,000  1,000   -1,000
17,000  -2,000  2,000

2. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:
2,000   2,000   -1,000
4,000   -5,000  -1,000
6,000   17,000  2,000

3. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:
2,000   -1,000  2,000
4,000   1,000   -5,000
6,000   -2,000  17,000

Sonuclar
x[1]=0,500
x[2]=-4,000
x[3]=3,000
```

Örnek:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$
$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 40$$

şeklinde verilen lineer denklem sistemini Cramer yöntemi ile çözünüz

Çözüm: Verilen sistem için C kodu çalıştırıldığında aşağıdaki ekran çıktısı elde edilir.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$
$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 40$$

```
Katsayılar matrisi:
1,000   1,000   1,000
2,000   -3,000  4,000
3,000   4,000   5,000

B sonuç matrisi:
9,000
13,000
40,000

1. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:
9,000   1,000   1,000
13,000  -3,000  4,000
40,000  4,000   5,000

2. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:
1,000   9,000   1,000
2,000   13,000  4,000
3,000   40,000  5,000

3. sütun elemanları ile B matrisinin elemanları yer değiştirdi:
1,000   1,000   9,000
2,000   -3,000  13,000
3,000   4,000   40,000

Sonuclar
x[1]=1,000
x[2]=3,000
x[3]=5,000
```

--- Bu yöntemde, her biri ($n \times n$) tipinde ($n + 1$) tane matrisin hesaplanması gerektiğinden işlem sayısı fazla olmaktadır.

--- Algoritmik olarak büyük matrislerin determinantlarını hesaplamak için farklı cebirsel yöntemler kullanılmaktadır.

Çalışma Sorusu:

($n \times n$) tipinde bir matrisin determinantını hesaplayan C kodunu yazınız.

2-) Gauss Eleminasyon Yöntemi:

n bilinmeyenli ve m lineer denklemden oluşan sistemi direkt olarak çözmek için farklı iki metod:

--- Gauss Eleminasyon Yöntemi

--- Gauss-Jordan Yöntemi

Yöntemler birbirine benzer, Gauss-Jordan Yönteminde Gauss Eliminasyon yönteminden sonra bazı farklı işlemler uygulanır.

---Bu metotlar kullanılırken lineer denklem sisteminin ilaveli katsayılar matrisi ele alınır.

---İlaveli katsayılar matrisine bazı elementer satır işlemleri uygulanarak, lineer sistemine denk olan yeni bir matris elde edilir.
(Yeni elde edilen sistem orjinal olan lineer denlem sistemi ile aynı çözüme sahip olmaktadır!)

--- Burada önemli olan nokta, lineer denklem sisteminin sonuçta çok daha kolay çözülebilir olmasıdır.

Örnek olarak aşağıdaki sistemi ele alalım.

$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$x_2 + x_3 = 2$$
$$x_3 = -1$$

Çözüm:

$$x_3 = -1$$
$$x_2 = 2 - x_3 = 2 + 1 = 3$$
$$x_1 = 3 - 2x_2 = 3 - 6 = -3$$

biçimindedir.

İlaveli katsayılar matrisi aşağıdaki şekildedir.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Gauss Eliminasyon Yönteminde amaç verilen bir lineer denklem sistemini yukarıdaki şekilde bir sisteme indirgemektir.

Elementer satır (sütun) işlemleri

--- Herhangi iki satır (veya sütun)’ın yer değiştirmesi

--- Bir satır (veya sütun)’ın sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılması

--- Bir satır (veya sütun)’ın bir katının diğer bir satıra (veya sütuna) eklenmesi

şeklindedir.

Satırca Eşelon Form – Satırca İndirgenmiş Eşelon Form

--- Yalnızca sıfırlardan oluşan tüm satırlar en altta olmalıdır.

--- Sıfırdan farklı bir satırın baştaki katsayısı (pivot olarak da adlandırılır), her zaman tam olarak üstündeki satırın önde gelen katsayısının sağındadır. Pivot elemanlarının solundaki tüm elemanlar sıfır olmak zorundadır.

--- Özel olarak bazı kaynaklarda pivot elemanlarının 1 olduğu söylenir.

(pivot elemanlarını 1 yapmak zor değildir!)

--- Satırca indirgenmiş eşelon formda eşelon forma ek olarak tüm pivot elemanlarının 1 olması ve sütündeki diğer elemanların sıfır olması istenir.

Eşelon Form

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Satırca İndirgenmiş Eşelon Form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eşelon form birden fazla olabilir, satırca indirgenmiş eşelon form tekdir!

Örnek 1:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

sistemi verilsin. Bu sistemin ilaveli katsayılar matrisi

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

biçimindedir.
İlk önce bu matris satırca eşelon biçimine dönüştürelim.

--- 1.satırın (-2) katını 2.satıra ve (-3) katını 3.satıra eklersek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$$

matrisi elde edilir.

--- 2.satırın (-6/5) katını 3.satıra eklersek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

matrisi elde edilir. Matris satırca eşelon forma indirgenmiştir.

--- 2.satırın (-1/5) katını ve 3.satırın (-1/4) katı alındığında matris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

matrisi elde edilir. Her satırın sıfırdan farklı ilk elemanı 1’ dir.
Matris satırca eşelon formdadır.

Böylece soruda verilen lineer denklem sistemine denk aşağıdaki sistem elde edilmiştir.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$x_2 + x_3 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Böylece, çözüm:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$$

elde edilir.

Bu yöntemle elde edilen çözüm Gauss Eliminasyon ile elde edilmiştir denir.

Gauss Eliminasyonu iki kısımdan oluşur:

--- İleriye doğru Eliminasyon.

--- Geriye doğru yerleştirme.

--- Satırca elementer işlemler yapılarak eşelon forma indirgeme İleriye doğru eliminasyon olarak ifade edilir.

--- Eşelon forma indirgendikten sonra son denklemden başlayıp, çözümleri teker teker geriye doğru yerine koyarak elde etmeye de Geriye doğru yerleştirme adımı denir.

C kodu:

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
#include<locale.h>
#define   BOYUT   3
void matrisyaz(float N[BOYUT][BOYUT+1]);
int main()
{     float A[BOYUT][BOYUT+1], X[BOYUT], f, t;
      int i,j,k,n;
      setlocale(LC_ALL,"Turkish");
      printf("Bilinmeyen sayısını giriniz: ");
      scanf("%d", &n);

     A[0][0]=1;  A[0][1]=2;  A[0][2]=3;  A[0][3]=9;
     A[1][0]=2;  A[1][1]=-1; A[1][2]=1;  A[1][3]=8;
     A[2][0]=3;  A[2][1]=0;  A[2][2]=-1;  A[2][3]=3;
   printf("Genişletilmiş katsayılar matrisi:");
   matrisyaz(A);
   printf("\n\n");
```

```
// Aşağıda ileriye doğru eliminasyon yapılır.

for (k=0;k <n-1;k++)
        for(i=k+1;i<n;i++)
        {
            f=A[i][k]/A[k][k];
            for(j=k;j<n+1;j++)
            {
                A[i][j]=A[i][j]-f*A[k][j];
            }
        }
        printf("İlaveli Katsayılar matrisinin Echelon Formu:");
        matrisyaz(A);
        printf("\n");
```

// Aşağıda geriye doğru yerleştirme işlemi yapılır.

```
X[n-1]=A[n-1][n]/A[n-1][n-1];

for(i=n-2;i>=0;i--)
{
        t=0;
        for(j=i+1;j<n;j++)
        {
                t+=A[i][j]*X[j];
        }
        X[i]=(A[i][n]-t)/A[i][i];
}

printf("Sonuçlar: \n");
for(i=0;i<n;i++)
{
      printf("X[%d]=%f\n",i+1,X[i]);
}
    getch();
    return(0);
}
```

// Aşağıda matris yazdırma fonksiyonu tanımlanmıştır.

```
void matrisyaz(float N[BOYUT][BOYUT+1])
 { int i,j;
      for(i=0;i<BOYUT;i++)
      {
          printf("\n");
          for(j=0;j<BOYUT+1;j++)
            printf("%.3f\t",N[i][j]);
      }
      printf("\n");
 }
```

Çözüm: Verilen sistem için C kodu çalıştırıldığında aşağıdaki ekran çıktısı elde edilir.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 8$$
$$3x_1 - x_3 = 3$$

```
Bilinmeyen sayısını giriniz: 3
Genişletilmiş katsayılar matrisi:
1,000   2,000   3,000   9,000
2,000   -1,000  1,000   8,000
3,000   0,000   -1,000  3,000


İlaveli Katsayılar matrisinin Echelon Formu:
1,000   2,000   3,000   9,000
0,000   -5,000  -5,000  -10,000
0,000   0,000   -4,000  -12,000

Sonuçlar:
X[1]=2,000000
X[2]=-1,000000
X[3]=3,000000

--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Örnek 2:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$
$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 40$$

sistemi verilsin. Bu sistemi Gauss Eliminasyon yöntemi ile çözünüz.

Sistemin ilaveli katsayılar matrisi:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 4 & 13 \\ 3 & 4 & 5 & 40 \end{array}\right)$$

Gerekli elementer satır işlemleri yapıldığında satırca eşelon form aşağıdaki şekildedir:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2.4 & 12 \end{array}\right)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$
$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 40$$

```
Bilinmeyen sayısını giriniz: 3
Genişletilmiş katsayılar matrisi:
1,000   1,000   1,000   9,000
2,000   -3,000  4,000   13,000
3,000   4,000   5,000   40,000


İlaveli Katsayılar matrisinin Echelon Formu:
1,000   1,000   1,000   9,000
0,000   -5,000  2,000   -5,000
0,000   0,000   2,400   12,000

Sonuçlar:
X[1]=1,000000
X[2]=3,000000
X[3]=5,000000

--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

3-) Gauss-Jordan Yöntemi:

--- Bu yöntemde Gauss Eliminasyon yöntemine ek olarak (A| B) İlaveli katsayılar matrisinin sol tarafının birim matris olması gereklidir.

--- Böylece en sağ sütündeki değerler sistemin çözümü olacaktır.

Örnek 1: Aşağıdaki lineer denklem sistemini Gauss- Jordan yöntemi ile çözünüz.

$$2x_1 + x_2 = 8$$
$$x_1 + 3x_2 = 9$$

Çözüm:

--- İlaveli Katsayılar Matrisi: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{array}\right]$

--- 1. satır ile 2. satırı yer değiştir: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 8 \end{array}\right]$

--- 1. satırın (-2) katını 2. satıra ekle: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -10 \end{array}\right]$

--- 2. satırı (-1/5) ile çarp: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

--- 2. satırın (-3) katını 1. satıra ekle: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

$\Rightarrow$

Böylece:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 2$$

elde edilir.

Örnek 2: Gauss Eliminasyonundaki ilk örneği ele alalım.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 8$$
$$3x_1 - x_3 = 3$$

Bu sistemin ilaveli katsayılar matrisi:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

En son elde edilen eşelon formu:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

En son elde edilen eşelon forma aşağıdaki elementer satır işlemlerini uygulayalım.

--- 2.satırın (-2) katını 1.satıra ekleyelim:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

--- 3.satırın (-1) katını 2.satıra ve 3.satırın (-1) katını 1.satıra ekleyelim:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

--- Böylece sol taraf birim matris olur. Sağ tarafta sistemin çözümü olur.

Yani:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$$

elde edilir.

C kodu:

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
#include<locale.h>
#define  BOYUT  3

void matrisyaz(float N[BOYUT][BOYUT+1]);

int main()
{
    float A[BOYUT][BOYUT+1], X[BOYUT], f, t;
     int i,j,k,n;
     setlocale(LC_ALL,"Turkish");

    A[0][0]=1;  A[0][1]=2;  A[0][2]=3;  A[0][3]=9;
    A[1][0]=2;  A[1][1]=-1; A[1][2]=1;  A[1][3]=8;
    A[2][0]=3;  A[2][1]=0;  A[2][2]=-1;  A[2][3]=3;
    printf("Genişletilmiş katsayılar matrisi:");
    matrisyaz(A);
    printf("\n\n");
```

// Eşelon forma indirgeme yapılıyor.

```
for (k=0;k <BOYUT-1;k++)
        for(i=k+1;i<BOYUT;i++)
        {
            f=A[i][k]/A[k][k];
            for(j=k;j<BOYUT+1;j++)
            {
                 A[i][j]=A[i][j]-f*A[k][j];
            }
        }
         printf("İlaveli Katsayılar matrisinin Echelon Formu:");
         matrisyaz(A);
        printf("\n");
```

// Eşelon formun ilk elemanları 1 yapılıyor.

```
for(i=0;i<BOYUT;i++)
   {for(j=0;j<BOYUT;j++)
       { if(i==j) { f=1/A[i][j];
                            for(k=0;k<BOYUT+1;k++)
                                    A[i][k]=A[i][k]*f;
                              }
       }

   }
printf("İlaveli Katsayılar matrisinin Echelon Formu ilk elemanlar 1:");
matrisyaz(A);
printf("\n");
```

// Satırca indirgenmiş Eşelon form için katsayılar matrisi birim matrise dönüştürülüyor.

```
for (k=BOYUT-1;k >0 ;k--)
    for(i=k-1;i>=0;i--)
    {
        f=A[i][k]/A[k][k];
        for(j=0;j<BOYUT+1;j++)
        {
            A[i][j]=A[i][j]-f*A[k][j];
        }
    }
     printf("İlaveli Katsayılar matrisinin Satırca İndirgenmiş Echelon Formu:");
     matrisyaz(A);
     printf("\n");
```

```
// Sonuçlar yazdırılıyor.
    printf("Sonuçlar: \n");
    for(i=0;i<BOYUT;i++)
    {
          printf("X[%d]=%f\n",i+1,A[i][BOYUT]);
    }
         getch();
         return(0);
} //main fonksiyonu sonlandı.


void matrisyaz(float N[BOYUT][BOYUT+1])
 { int i,j;
       for(i=0;i<BOYUT;i++)
       {
           printf("\n");
           for(j=0;j<BOYUT+1;j++)
             printf("%.3f\t",N[i][j]);
       }
       printf("\n");
  }
```

Çözüm: Verilen sistem için C kodu çalıştırıldığında aşağıdaki ekran çıktısı elde edilir.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$
$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 40$$

```
Genişletilmiş katsayılar matrisi:
1,000   2,000   3,000   9,000
2,000   -1,000  1,000   8,000
3,000   0,000   -1,000  3,000


İlaveli Katsayılar matrisinin Echelon Formu:
1,000   2,000   3,000   9,000
0,000   -5,000  -5,000  -10,000
0,000   0,000   -4,000  -12,000

İlaveli Katsayılar matrisinin Echelon Formu ilk elemanlar 1:
1,000   2,000   3,000   9,000
-0,000  1,000   1,000   2,000
-0,000  -0,000  1,000   3,000

İlaveli Katsayılar matrisinin Satırca İndirgenmiş Echelon Formu:
1,000   0,000   0,000   2,000
0,000   1,000   0,000   -1,000
-0,000  -0,000  1,000   3,000

Sonuçlar:
X[1]=2,000000
X[2]=-1,000000
X[3]=3,000000

--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Kaynaklar

- Numerical Analysis, Richard L. Burden, Brooks/Cole Cengage Learning, Boston., 2009.
- Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, 2nd Edition, John H. Mathews, Prentice Hall International Edition, 1992.
- Nümerik Analiz, (Numerical Analysis, D. Kincaid, W. Cheney, 3rd ed.(2002)), Nuri Özalp, Elif Demirci, Gazi Kitabevi Yayınları, 2012.
- Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları, İrfan Karagöz, Nobel Yayıncılık, 2011.
- Sayısal Çözümleme, Recep Tapramaz, Literatür yayıncılık, 2002.
- Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri, Eyüp Sabri Türker, Engin Can, II. Baskı, Değişim Yayınları.