CENG 235 ALGORİTMALARLA SAYISAL ÇÖZÜMLEME

Prof. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

- Hafta 13

13. Hafta Konular

- **Sayısal İntegral:**

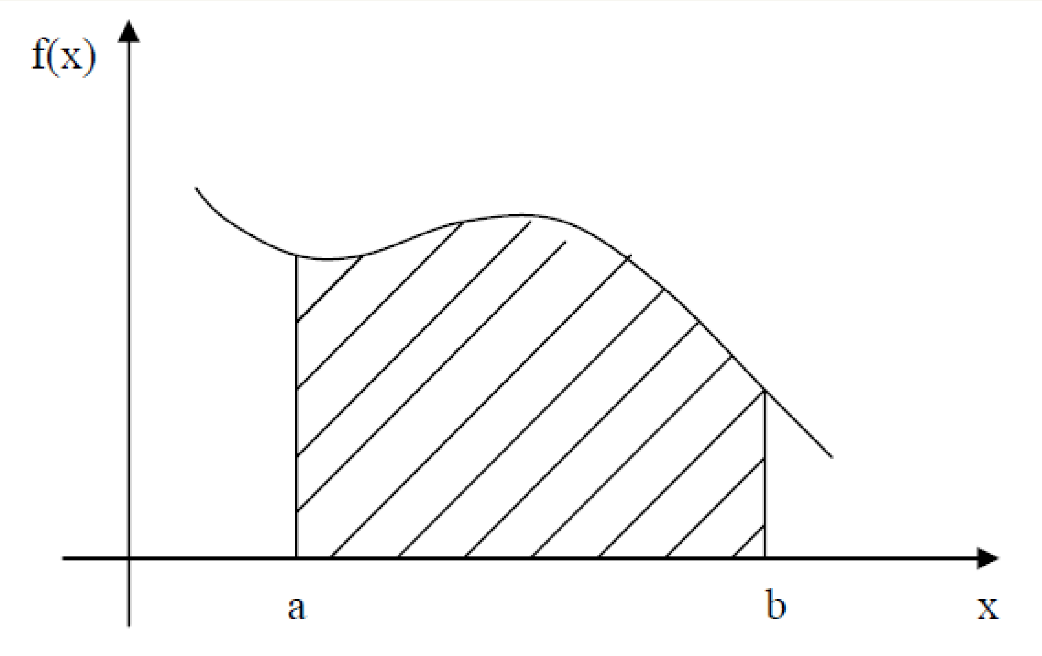
  --- Dikdörtgenler Yöntemi

  --- Yamuklar Yöntemi

  --- Simpson 1/3 Yöntemi

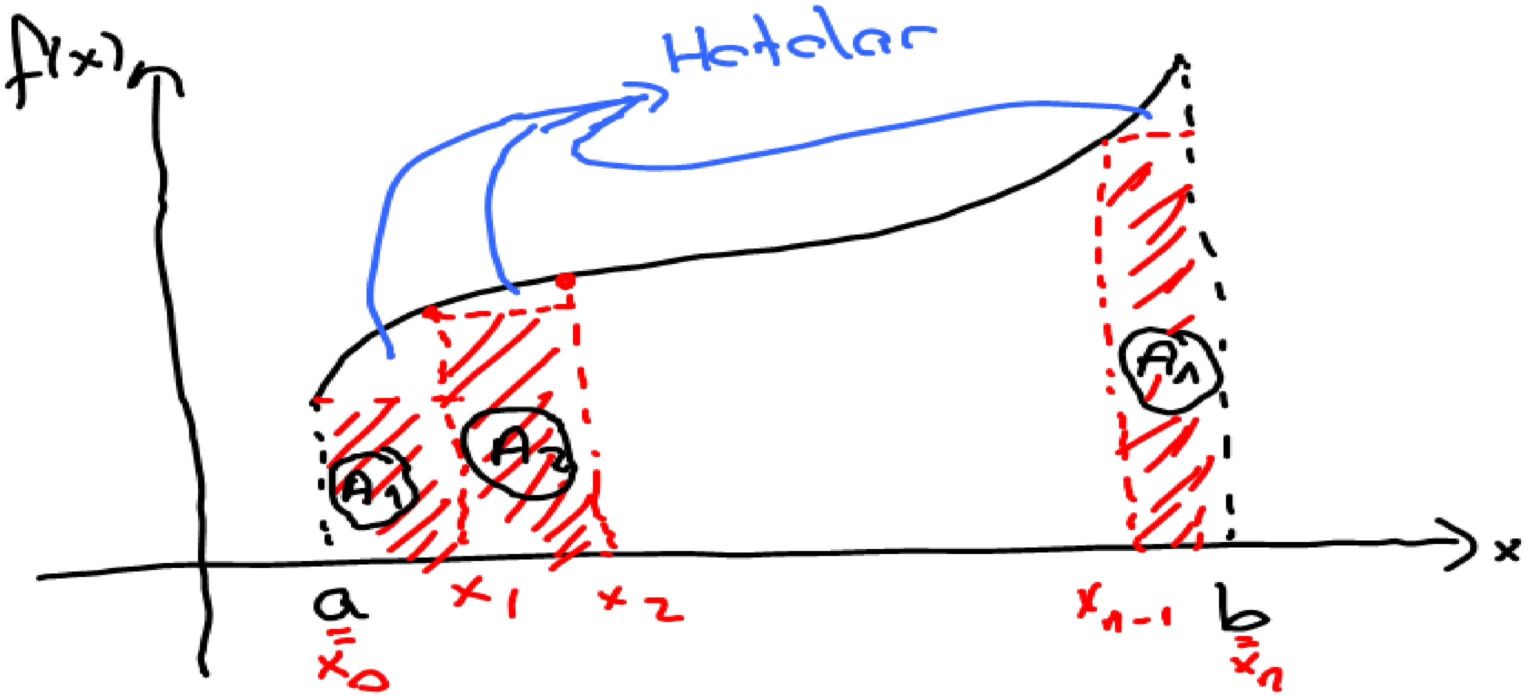
  --- Simpson 3/8 Yöntemi

Sayısal İntegral



$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

1-) Dikdörtgenler Yöntemi:



$$h = \frac{b-a}{n}$$ (Adım uzunluğu)

[a, b] aralığı n parçaya bölünüyor.

$$\boxed{h = x_{i+1} - x_i}$$

$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ toplamı integralin yaklaşık

değerini verir. (Alt dikdörtgenler toplamı)

$$A_1 = (x_1 - x_0) \cdot y_0 = h \cdot y_0$$

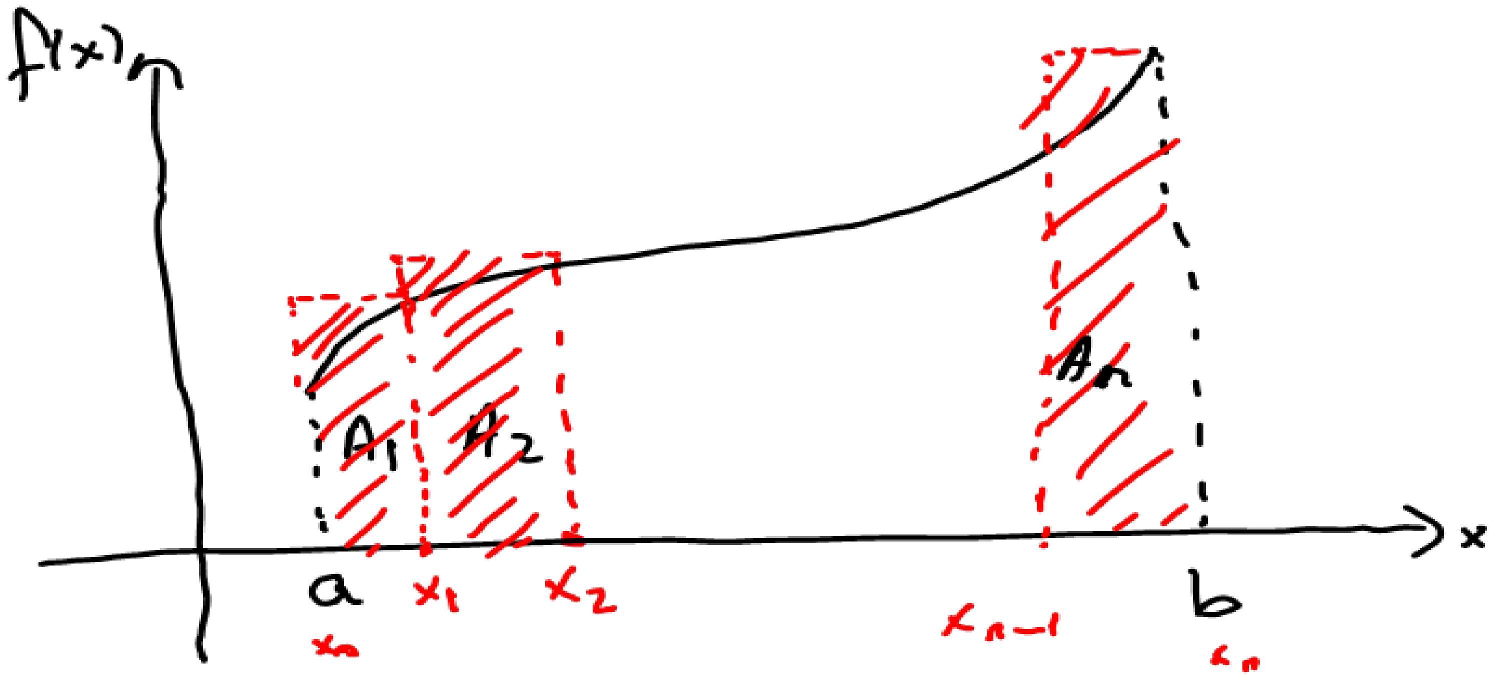
$$A_2 = (x_2 - x_1) \cdot y_1 = h \cdot y_1$$

$$\vdots$$

$$A_n = (x_n - x_{n-1}) \cdot y_{n-1} = h \cdot y_{n-1}$$

$$\underbrace{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}_{I_{DA}} = \int_a^b f(x)\,dx \cong h \cdot [y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}]$$

$$I_{DA} \cong h \cdot [y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}]$$



$$\underbrace{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}_{} = \int_a^b f(x)\,dx \cong h.[y_1 + y_2 + \cdots + y_n]$$

$$I_{Oü} \cong h.[y_1 + y_2 + \cdots + y_n]$$

(Üst dikdörtgenler toplamı)

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$I_{DA} < I < I_{Dü}$$

$\Rightarrow f(x)$, sıfırıncı dereceden polinom ile

yaklaşım var.

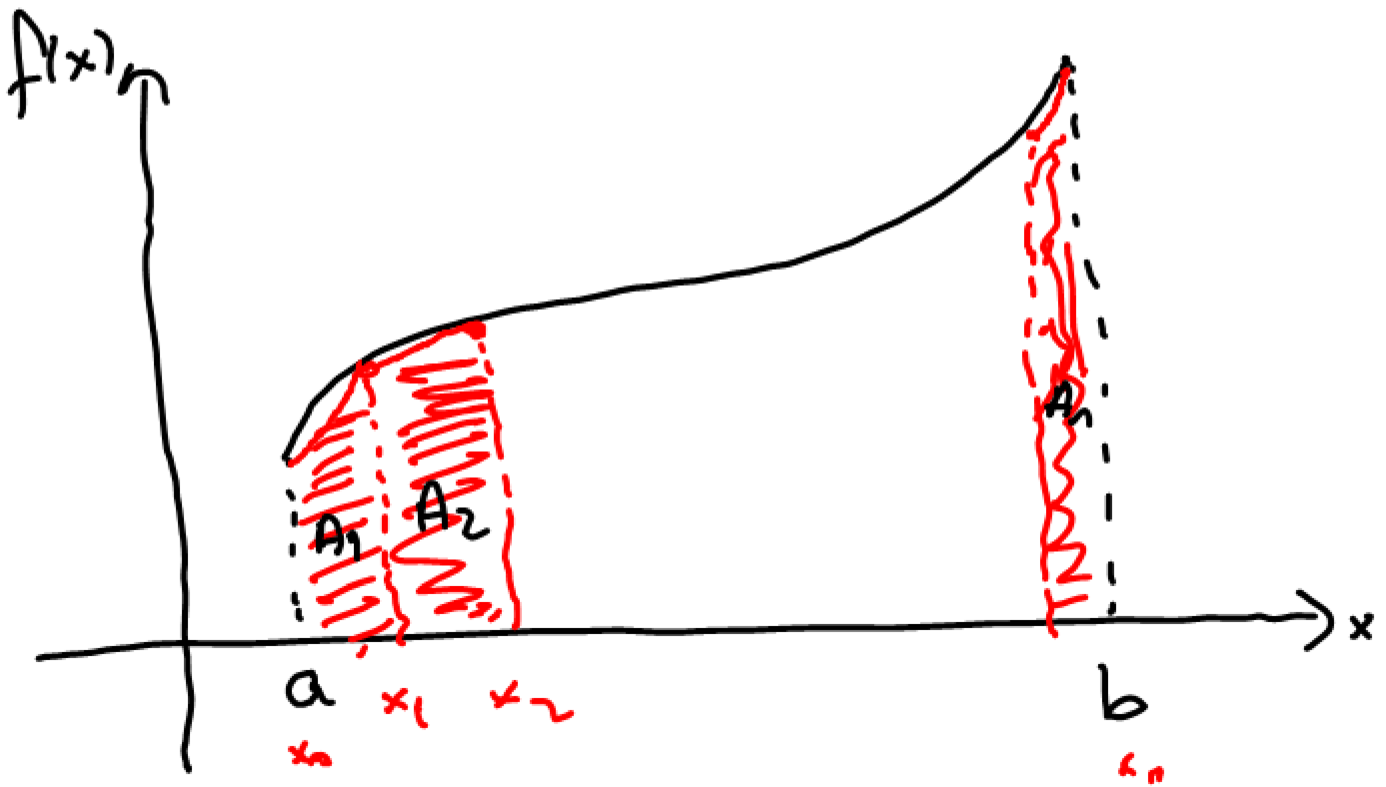
$$A_1 = \int_{x_0}^{x_1} y_0 \, dx = y_0 \cdot h$$

$$A_2 = \int_{x_1}^{x_2} y_1 \, dx = y_1 \cdot h$$

$$\vdots$$

Kesme hatasını azaltmak için nokta sayısı arttırılır, fakat bu durumda yuvarlama hatası artar ve hesaplama süresi artar.

2-) Yamuklar Yöntemi:



$h = \frac{b-a}{n}$

Bu yöntemin temelinde f(x), birinci dereceden polinom ile yaklaşım yapar. (doğrusal yaklaşım)

Yöntemin kesme hatası $O(h^2)$ 'dir.

(h^2 mertebelidir.)

$$A_1 = \int_{x_0}^{x_1} \left[y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} (x - x_0) \right] dx$$

$$A_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$A_2 = \frac{h}{2}(y_1 + y_2)$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2.(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\right]$$

$$\cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2.(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}))\right]$$

Örnek: $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = ?$ $n = 10$ alınız. 6 ondalık kullanınız.

i) Dikdörtgenler yöntemi ile

ii) Yamuk yöntemi ile hesaplayınız.

Gerçek değer $\Rightarrow I_G = \ln x \Big|_1^2$

$$= \ln 2 - \ln 1$$

$$= 0.693147$$

$h = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10} = 0.1$ (adım uzunlukları)

$x_0 = 1$ $\quad$ $y_0 = f(x_0) = 1$

$x_1 = 1.1$ $\quad$ $y_1 = f(x_1) = 0.909091$

$x_2 = 1.2$ $\quad$ $y_2 = f(x_2) = 0.833333$

$x_3 = 1.3$ $\quad$ $y_3 = f(x_3) = 0.769231$

$x_4 = 1.4$ $\quad$ $y_4 = f(x_4) = 0.714286$

$x_5 = 1.5$ $\quad$ $y_5 = f(x_5) = 0.666667$

$x_6 = 1.6$ $\quad$ $y_6 = f(x_6) = 0.625$

$x_7 = 1.7$ $\quad$ $y_7 = f(x_7) = 0.588235$

$x_8 = 1.8$ $\quad$ $y_8 = f(x_8) = 0.555556$

$x_9 = 1.9$ $\quad$ $y_9 = f(x_9) = 0.526316$

$x_{10} = 2$ $\quad$ $y_{10} = f(x_{10}) = 0.5$

$$I_{DA} = h.\left[y_0 + y_1 + --- + y_9\right] = 0.718771$$

$$I_{DÜ} = h.\left[y_1 + y_2 + --- + y_{10}\right] = 0.668771$$

$$I_Y = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_{10} + 2.(y_1 + y_2 + --- + y_9)\right] = 0.653771$$

Mutlak Hatalar

$$e_{DA} = |I_{DA} - I_6| = 0.025624$$

$$e_{DÜ} = |I_{DÜ} - I_6| = 0.024376$$

$$e_{Y} = |I_{Y} - I_6| = 0.000624$$

Yüzde Bağıl Hata

$$\varepsilon_{DA} = \frac{e_{DA} \times 100}{|I_G|} = 3.696794$$

$$\varepsilon_{DÜ} = \frac{e_{DÜ} \times 100}{|I_G|} = 3.516681$$

$$\varepsilon_{Y} = \frac{e_{Y} \times 100}{|I_G|} = 0.090056$$

Yamuk Yöntemi, diğerlerine göre daha iyi.

C Kodu:

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
double Fonksiyon(double z)
{return 1/z;}

double Fonk_Int(double z)
{return log(z);}

double alt(double B[ ],double hh,int x)
{ int j; double IA=0;
  for(j=0;j<=x-2;j++)
     {IA=IA+B[j];}
   IA=hh*IA;
  return IA;
}
```

```
double ust(double B[ ],double hh,int x)
{ int j; double IU=0;
  for(j=1;j<=x-1;j++)
    {IU=IU+B[j];}
  IU=hh*IU;
  return IU;
}

double yamuk(double B[ ],double hh,int x)
{ int j; double IY=0;
  for(j=1;j<=x-2;j++)
     {IY=IY+2*B[j];}
  IY=IY+B[0]+B[x-1];
  IY=(hh/2)*IY;
  return IY;
}
```

```
int main()
{
   double a=1,b=2,h,i,gercek_deger,mutlak_hata1,mutlak_hata2,mutlak_hata3,Y[11];
   int n=10,j=0;
   h=(b-a)/n;
   i=a;
     while (i<=b)
     {printf("F(%.2lf)= %lf\n",i,Fonksiyon(i));
        Y[j]=Fonksiyon(i);
         i=i+h;
         j++;}

gercek_deger=Fonk_Int(b)-Fonk_Int(a);
printf("Integralin gercek degeri= %lf\n",gercek_deger);

double IDA=alt(Y,h,n+1);
    printf("Alt dikdortgenler toplami= %lf\n",IDA);

 double IDU=ust(Y,h,n+1);
    printf("Ust dikdortgenler toplami= %lf\n",IDU);

double IDY=yamuk(Y,h,n+1);
    printf("Yamuklar toplami= %lf\n",IDY);
```

```
    mutlak_hata1 = fabs(gercek_deger-IDA);
    mutlak_hata2 = fabs(gercek_deger-IDU);
    mutlak_hata3 = fabs(gercek_deger-IDY);
    printf("\n");
    printf("mutlak_hata_Alt_diktorgen=%lf\n",mutlak_hata1);
    printf("mutlak_hata_Ust_dikdortgen=%lf\n",mutlak_hata2);
    printf("mutlak_hata_Yamuk=%lf\n",mutlak_hata3);
    printf("\n");
    printf("yuzde_bagil_hata_Alt_diktorgen=%lf\n",(mutlak_hata1/fabs(gercek_deger))*100);
    printf("yuzde_bagil_hata_Ust_dikdortgen=%lf\n",(mutlak_hata2/fabs(gercek_deger))*100);
    printf("yuzde_bagil_hata_Yamuk=%lf\n",(mutlak_hata3/fabs(gercek_deger))*100);

    getch ();
    return 0;
}
```

Ekran Çıktısı:

```
F(1.00)= 1.000000
F(1.10)= 0.909091
F(1.20)= 0.833333
F(1.30)= 0.769231
F(1.40)= 0.714286
F(1.50)= 0.666667
F(1.60)= 0.625000
F(1.70)= 0.588235
F(1.80)= 0.555556
F(1.90)= 0.526316
F(2.00)= 0.500000
Integralin gercek degeri= 0.693147
Alt dikdortgenler toplami= 0.718771
Ust dikdortgenler toplami= 0.668771
Yamuklar toplami= 0.693771

mutlak_hata_Alt_diktorgen=0.025624
mutlak_hata_Ust_dikdortgen=0.024376
mutlak_hata_Yamuk=0.000624

yuzde_bagil_hata_Alt_diktorgen=3.696794
yuzde_bagil_hata_Ust_dikdortgen=3.516681
yuzde_bagil_hata_Yamuk=0.090056

--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Örnek: $I = \int_0^6 \frac{1}{1+x^2}$ integralini

$n=6$ alarak Dikdörtgenler yöntemi ve Yamuk yöntemi ile 6 ondalık ile hesaplayınız.

Gerçek değer: $I = \arctan x \Big|_0^6$

$= \arctan 6 - \arctan 0$

$= 1.405648$

$h = \frac{6-0}{6} = 1$ elde edilir.

$y_0 = f(0) = 1$

$y_1 = f(1) = 0.5$

$y_2 = f(2) = 0.2$

$y_3 = f(3) = 0.1$

$y_4 = f(4) = 0.058824$

$y_5 = f(5) = 0.038461$

$y_6 = f(6) = 0.027027$

Alt dikdörtgenler toplamı:

$$I_{DA} = h.[y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5]$$

$$= 1.897285$$

Üst dikdörtgenler toplamı:

$$I_{DÜ} = h.[y_1 + y_2 + --- + y_6]$$

$$= 0.924312$$

Yamuklar toplamı:

$$I_Y = \frac{h}{2}.[y_0 + y_6 + 2.(y_1 + y_2 + --- + y_5)]$$

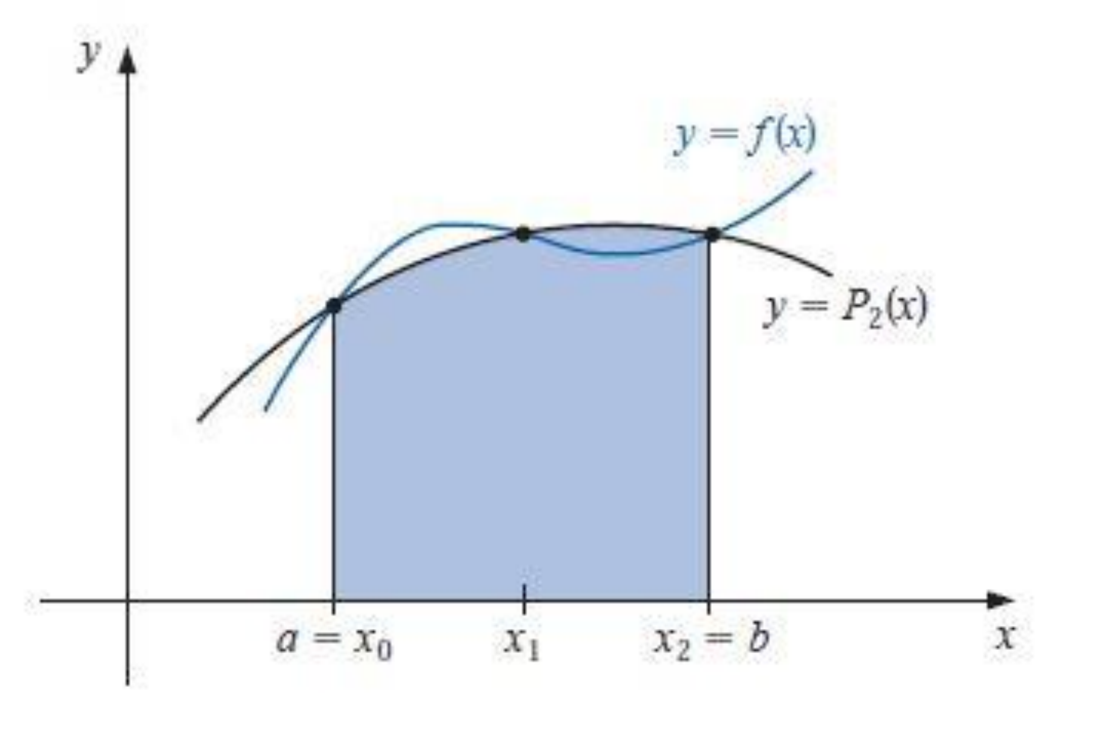
$$= 1.410799$$

Program Çalıştırıldığında Ekran Çıktısı:

```
F(0.00)= 1.000000
F(1.00)= 0.500000
F(2.00)= 0.200000
F(3.00)= 0.100000
F(4.00)= 0.058824
F(5.00)= 0.038462
F(6.00)= 0.027027
Integralin gercek degeri= 1.405648
Alt dikdortgenler toplami= 1.897285
Ust dikdortgenler toplami= 0.924312
Yamuklar toplami= 1.410799

mutlak_hata_Alt_diktorgen=0.491637
mutlak_hata_Ust_dikdortgen=0.481336
mutlak_hata_Yamuk=0.005151

yuzde_bagil_hata_Alt_diktorgen=34.975865
yuzde_bagil_hata_Ust_dikdortgen=34.242974
yuzde_bagil_hata_Yamuk=0.366445


--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

3-) Simpson 1/3 Yöntemi:

$f(x)$ fonksiyonuna 3 noktadan geçen bir parabol ile yaklaşılır.



3 nokta için yaklaşık integral değeri:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

3 noktadan geçen Lagrange interpolasyon formülünü yazalım.

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}.(y_0) + \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}.(y_1)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)}.(y_2)$$

$$\int_{x_0=a}^{x_2=b} f(x)\,dx = y_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,dx + y_1 . \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,dx$$

$$+ y_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,dx$$

Her x noktası için:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + t.h \\ dx &= h\,dt \end{aligned}}$$

$x_0 = x_0 + th \quad t = 0$

$x_2 = x_0 + th \quad t = \frac{x_2 - x_0}{h}$

$t = \frac{x_0 + 2h - x_0}{h} = 2$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = (y_0).h \int_0^2 \frac{(x_0 + th - x_0 - h)(x_0 + th - x_0 - 2h)}{(x_0 - x_0 - h)(x_0 - x_0 - 2h)}\,dt$$

$$+ (y_1).h \cdot \int_0^2 \frac{(x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - 2h)}{(x_0 + h - x_0)(x_0 + h - x_0 - 2h)}\,dt$$

$$+ (y_2).h \int_0^2 \frac{(x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)}{(x_0 + 2h - x_0)(x_0 + 2h - x_0 - h)}\,dt$$

$$= (y_0).h \int_0^2 \frac{h.(t-1).h(t-2)}{(-h)(-2h)} dt + (y_1).h \int_0^2 \frac{t.h.h.(t-2)}{h.(-h)}.dt$$

$$+ (y_2).h \int_0^2 \frac{t.h.\ h.(t-1)}{2h.h} dt$$

$$= y_0 \cdot \frac{h}{2} \int_0^2 (t-1)(t-2)\, dt - y_1 \cdot h \int_0^2 t.(t-2)\, dt$$

$$+ y_2 \cdot \frac{h}{2} \int_0^2 t.(t-1)\, dt$$

$$= y_0 \cdot \frac{h}{2}\int_0^2 (t^2 - 3t + 2)\,dt - y_1 \cdot h \int_0^2 (t^2 - 2t)\,dt$$

$$+ y_2 \cdot \frac{h}{2}\int_0^2 (t^2 - t)\,dt$$

$$= y_0 \cdot \frac{h}{2}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \Big|_0^2\right]$$

$$- y_1 \cdot h \left[\frac{t^3}{3} - t^2 \Big|_0^2\right]$$

$$+ y_2 \cdot \frac{h}{2}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \Big|_0^2\right]$$

$$= y_0 \cdot \frac{h}{2}\left[\frac{8}{3} - 6 + 4\right] - y_1 \cdot h\left[\frac{8}{3} - 4\right]$$

$$+ y_2 \cdot \frac{h}{2}\left[\frac{8}{3} - 2\right]$$

$$= y_0 \cdot \frac{h}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} + y_1 \cdot h \cdot \frac{4}{3} + y_2 \cdot \frac{h}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3}$$

$$= \frac{h}{3}\left[\underset{\substack{\downarrow \\ f(x_0)}}{y_0} + 4\underset{\substack{\downarrow \\ f(x_1)}}{y_1} + \underset{\substack{\downarrow \\ f(x_2)}}{y_2}\right]$$

Sonuç olarak $[a,b]$ aralığı çift sayıda parçaya bölündüğünde

x_0'dan x_{2M}'e kadar yaklaşık integral değeri

parça sayısı

$$\int_{x_0}^{x_{2M}} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3} \sum_{k=1}^{M} \left[f(x_{2k-2}) + 4 f(x_{2k-1}) + f(x_{2k}) \right]$$

$n=4$ parçaya ayırdığımızda $2m=4$
$m=2$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{2}\left[f(x_{2k-2}) + 4.f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right]$$

$$\cong \frac{h}{3}.\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right]$$

$n=6$ parçaya ayırdığımızda

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}.\left[f_0 + f_6 + 2(f_2 + f_4) + 4(f_1 + f_3 + f_5)\right]$$

Tek indislerin toplamının 4 katı

çift indislerin toplamının 2 katı

Örnek: $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ integralinin doğrunu

$n=10$ parçaya ayırarak ve 6 ondalık kullanarak

1/3 Simpson yöntemi ile bulunuz.

$$h = \frac{2-1}{10} = 0.1$$

Gerçek değer = 0.693147

$x_0 = 1$ $\quad y_0 = f(x_0) = 1$

$x_1 = 1.1$ $\quad y_1 = f(x_1) = 0.909091$

$x_2 = 1.2$ $\quad y_2 = f(x_2) = 0.833333$

$x_3 = 1.3$ $\quad y_3 = f(x_3) = 0.769231$

$x_4 = 1.4$ $\quad y_4 = f(x_4) = 0.714286$

$x_5 = 1.5$ $\quad y_5 = f(x_5) = 0.666667$

$x_6 = 1.6$ $\quad y_6 = f(x_6) = 0.625$

$x_7 = 1.7$ $\quad y_7 = f(x_7) = 0.588235$

$x_8 = 1.8$ $\quad y_8 = f(x_8) = 0.555556$

$x_9 = 1.9$ $\quad y_9 = f(x_9) = 0.526316$

$x_{10} = 2$ $\quad y_{10} = f(x_{10}) = 0.5$

$2m=10 \quad m=5$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \cong \frac{h}{3} \cdot \sum_{k=1}^{5} \left[f(x_{2k-2}) + 4 \cdot f(x_{2k-1}) + 2\, f(x_{2k}) \right]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \cong \frac{0.1}{3} \left[y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4 \cdot (y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) \right]$$

$$\cong 0.69315$$

Mutlak Hata = 0.000007

yüzde bağıl Hata = 0.000440

Simpson 1/3 yöntemi dikdörtgenler ve yamuk yöntemine göre daha hassas sonuç verir.

C Kodu:

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

double Fonksiyon(double z)
{return 1/z;}

double Fonk_Int(double z)
{return log(z);}

double sim13(double B[ ],double hh,int x)
{ int j; double IS=B[0]+B[x-1];
 for(j=1;j<=x-2;j=j+2)
    {IS=IS+4*B[j];}

 for(j=2;j<=x-3;j=j+2)
    {IS=IS+2*B[j];}

 IS=(hh/3)*IS;
 return IS;
}
```

```
int main()
{
   double a=1,b=2,h,i,gercek_deger,mutlak_hata,Y[11];
   int n=10,j=0;
   h=(b-a)/n;
   i=a;
    while (i<=b)
   {printf("F(%.2lf)= %lf\n",i,Fonksiyon(i));
       Y[j]=Fonksiyon(i);
        i=i+h;
        j++;
     }

    gercek_deger=Fonk_Int(b)-Fonk_Int(a);
    printf("Integralin gercek degeri= %lf\n",gercek_deger);
```

```
double IDS13=sim13(Y,h,n+1);
    printf("Simphson (1/3) yontemi= %lf\n",IDS13);

   mutlak_hata  = fabs(gercek_deger-IDS13);
   printf("\n");
   printf("mutlak_hata_Simphson (1/3) yontemi=%lf\n",mutlak_hata);
   printf("\n");
   printf("yuzde_bagil_hata_Simphson (1/3) yontemi=%lf\n",(mutlak_hata/fabs(gercek_deger))*100);

   getch ();
   return 0;
}
```

Ekran Çıktısı:

```
F(1.00)= 1.000000
F(1.10)= 0.909091
F(1.20)= 0.833333
F(1.30)= 0.769231
F(1.40)= 0.714286
F(1.50)= 0.666667
F(1.60)= 0.625000
F(1.70)= 0.588235
F(1.80)= 0.555556
F(1.90)= 0.526316
F(2.00)= 0.500000
Integralin gercek degeri= 0.693147
Simphson (1/3) yontemi= 0.693150

mutlak_hata_Simphson (1/3) yontemi=0.000003

yuzde_bagil_hata_Simphson (1/3) yontemi=0.000440


--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Örnek: $I = \int_0^6 \frac{1}{1+x^2}$ integralini

$n=6$ alarak Simphson 1/3 yöntemi ile bulunuz. Mutlak hata ve yüzde bağıl hata değerlerini elde ediniz.

Gerçek değer: $I = \arctan x \Big|_0^6$

$= \arctan 6 - \arctan 0$

$= 1.405648$

$h = \frac{6-0}{6} = 1$ elde edilir.

$$y_0 = f(0) = 1$$

$$y_1 = f(1) = 0.5$$

$$y_2 = f(2) = 0.2$$

$$y_3 = f(3) = 0.1$$

$$y_4 = f(4) = 0.058824$$

$$y_5 = f(5) = 0.038461$$

$$y_6 = f(6) = 0.027027$$

$$2m=6 \quad m=3$$

$$\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2} \cong \frac{h}{3} \cdot \sum_{k=1}^{3} \left[f(x_{2k-2}) + 4.f(x_{2k-1}) + 2 f(x_{2k}) \right]$$

$$\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2} \cong \frac{1}{3} \left[y_0 + y_6 + 2(y_2+y_4) + 4.(y_1+y_3+y_5) \right]$$

$$\cong 1.366173$$

Mutlak Hata $= |1.405648 - 1.366173| = 0.039474$

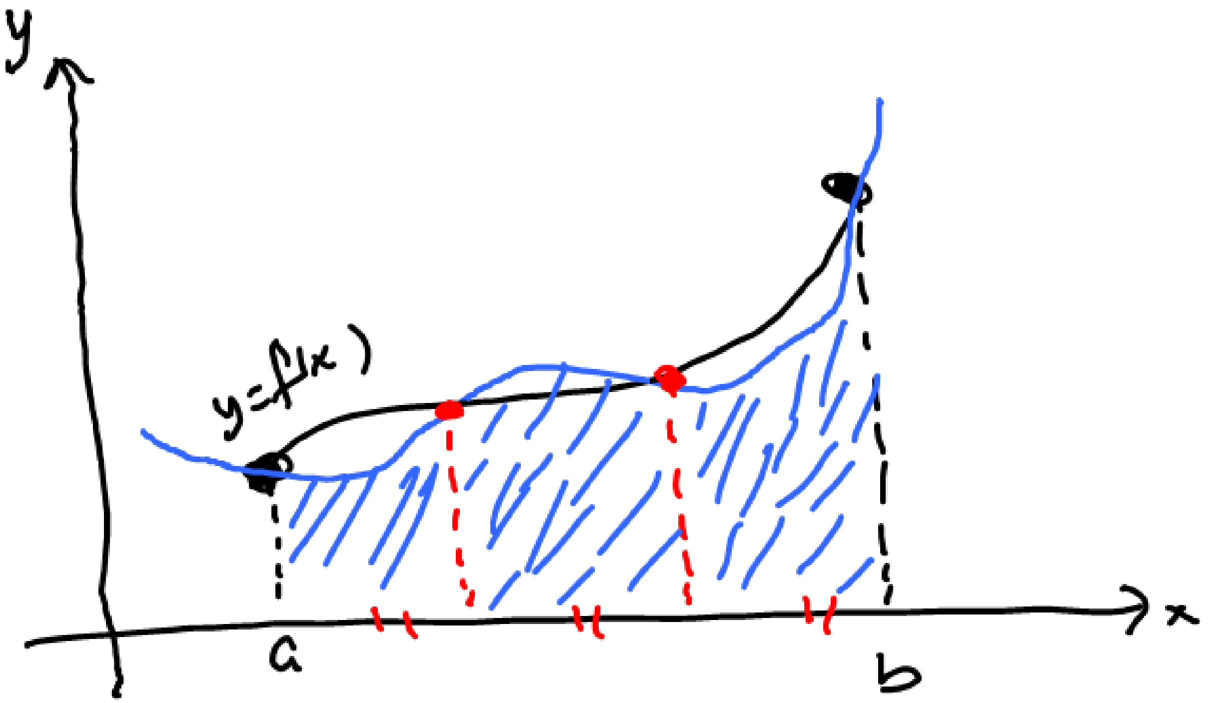
Yüzde bağıl hata $= \dfrac{0.039474 \times 100}{1.405648} = \% \, 2.808260$

Program Çalıştırıldığında Ekran Çıktısı:

```
F(0.00)= 1.000000
F(1.00)= 0.500000
F(2.00)= 0.200000
F(3.00)= 0.100000
F(4.00)= 0.058824
F(5.00)= 0.038462
F(6.00)= 0.027027
Integralin gercek degeri= 1.405648
Simphson (1/3) yontemi= 1.366173

mutlak_hata_Simphson (1/3) yontemi=0.039474

yuzde_bagil_hata_Simphson (1/3) yontemi=2.808260


--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

4-) Simpson 3/8 Yöntemi:

$f(x)$ fonksiyonuna 4 noktadan geçen 3. dereceden bir fonksiyon ile yaklaşır.



$[a, b] \rightarrow 3$ eşit parçaya ayrılır.

$f(x)$ fonksiyonuna 4 noktadan geçen 3. dereceden bir fonksiyon ile yaklaşır.

Simpson 1/3 kuralına benzer şekilde Langrange İnterpolasyon kullanılarak aşağıdaki formül elde edilir:

$$I = \int_{x_0}^{x_3} f(x) d_x \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3\,f(x_1) + 3\,f(x_2) + f(x_3)]$$

Formülü genelleştirdiğimizde:

$$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3\,f(x_1) + 3\,f(x_2) + f(x_3)]$$

$$+\frac{3h}{8}[f(x_3) + 3\,f(x_4) + 3\,f(x_5) + f(x_6)] + \ldots\ldots$$

$$+\frac{3h}{8}[f(x_{n-3}) + 3\,f(x_{n-2}) + 3\,f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$I \cong \frac{3h}{8}\Big[f(x_0) + f(x_n) + 3.\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5) + \dots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})\right] + 2.\left[f(x_3) + f(x_6) + \dots + f(x_{n-3})\right] \Big]$$

Sonuç olarak:

$$I \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + f(x_n) + \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} \left[f(x_{3i-2}) + f(x_{3i-1})\right] + \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} f(x_{3i}) \right]$$

Bölünen parça sayısı (n), 3'ün katı olmalıdır…

Örnek: $I = \int_0^6 \frac{1}{1+x^2}$ integralini

$n=6$ alarak Simphson 3/8 yöntemi ile bulunuz. Mutlak hata ve yüzde bağıl hata değerlerini elde ediniz.

Gerçek değer: $I = \arctan x \Big|_0^6$

$= \arctan 6 - \arctan 0$

$= 1.405648$

$h = \frac{6-0}{6} = 1$ elde edilir.

$y_0 = f(0) = 1$

$y_1 = f(1) = 0.5$

$y_2 = f(2) = 0.2$

$y_3 = f(3) = 0.1$

$y_4 = f(4) = 0,058824$

$y_5 = f(5) = 0.038462$

$y_6 = f(6) = 0.027027$

$$\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2} \cong \frac{3h}{8}\left[y_0 + y_6 + 3\left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5\right) + 2\cdot\left(y_3\right)\right]$$

$$\cong 1.357081$$

Mutlak Hata $= |1.405648 - 1.357081| = 0.048567$

(e_s)

Yüzde Bağıl Hata $= \dfrac{0.048567 \times 100}{1.405648} = \% \, 3.455120$

(ε_s)

C Kodu:

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

double Fonksiyon(double z)
{return 1/(1+pow(z,2));}

double Fonk_Int(double z)
{return atan(z);}

double sim38(double B[ ],double hh,int x)
{ int j; double IS=B[0]+B[x-1];
 for(j=1;j<=x-3;j=j+3)
    {IS=IS+3*B[j];}
for(j=2;j<=x-2;j=j+3)
    {IS=IS+3*B[j];}
 for(j=3;j<=x-4;j=j+3)
    {IS=IS+2*B[j];}

 IS=((3*hh)/8)*IS;
 return IS;
}
```

```
int main()
{double a=0,b=6,h,i,gercek_deger,mutlak_hata,Y[7];
   int n=6,j=0;
   h=(b-a)/n;
   i=a;
   while (i<=b)
   {printf("F(%.2lf)= %lf\n",i,Fonksiyon(i));
        Y[j]=Fonksiyon(i);
        i=i+h;
        j++;}
    gercek_deger=Fonk_Int(b)-Fonk_Int(a);
    printf("Integralin gercek degeri= %lf\n",gercek_deger);

    double IDS38=sim38(Y,h,n+1);
    printf("Simphson (3/8) yontemi= %lf\n",IDS38);

   mutlak_hata  = fabs(gercek_deger-IDS38);
   printf("\n");
   printf("mutlak_hata_Simphson (3/8) yontemi=%lf\n",mutlak_hata);
   printf("\n");
   printf("yuzde_bagil_hata_Simphson (3/8) yontemi=%lf\n",(mutlak_hata/fabs(gercek_deger))*100);
   getch ();
   return 0;
}
```

Ekran Çıktısı:

```
F(0.00)= 1.000000
F(1.00)= 0.500000
F(2.00)= 0.200000
F(3.00)= 0.100000
F(4.00)= 0.058824
F(5.00)= 0.038462
F(6.00)= 0.027027
Integralin gercek degeri= 1.405648
Simphson (3/8) yontemi= 1.357081

mutlak_hata_Simphson (3/8) yontemi=0.048567

yuzde_bagil_hata_Simphson (3/8) yontemi=3.455120

--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```

Çalışma Sorusu: $I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ integralini

$n = 6$ parçaya ayırarak:

i) Simpson 1/3 yöntemi ile

ii) Simpson 3/8 yöntemi ile

bulunuz.

Gerçek değer : $I \cong 1.464101$

Simpson 1/3 : $I \cong 1.464208$

Simpson 3/8 : $I \cong 1.4643144$

Kaynaklar

- Numerical Analysis, Richard L. Burden, Brooks/Cole Cengage Learning, Boston., 2009.
- Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, 2nd Edition, John H. Mathews, Prentice Hall International Edition, 1992.
- Nümerik Analiz, (Numerical Analysis, D. Kincaid, W. Cheney, 3rd ed.(2002)), Nuri Özalp, Elif Demirci, Gazi Kitabevi Yayınları, 2012.
- Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları, İrfan Karagöz, Nobel Yayıncılık, 2011.
- Sayısal Çözümleme, Recep Tapramaz, Literatür yayıncılık, 2002.
- Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri, Eyüp Sabri Türker, Engin Can, II. Baskı, Değişim Yayınları.