Bab 2

DETERMINAN MATRIKS

Determinan suatu matriks adalah suatu fungsi skalar dengan domain matriks bujur sangkar. Dengan kata lain, determinan merupakan pemetaan dengan domain berupa matriks bujur sangkar, sementara kodomain berupa suatu nilai skalar. Determinan suatu matriks sering digunakan dalam menganalisa suatu matriks, seperti : untuk memeriksa keberadaan invers matriks, menentukan solusi sistem persamaan linear dengan aturan cramer, pemeriksaan basis suatu ruang vektor dan lain-lain. Pada bab ini akan dijelaskan tentang penentuan nilai determinan suatu matriks dengan menggunakan definisi (permutasi), operasi baris elementer dan ekspansi kofaktor. Selain itu, akan dijelaskan hubungan determinan dengan invers matriks
Misalkan :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \; \dots \; a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; \dots \; a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \; \dots \; a_{nn} \end{pmatrix}$$

maka notasi determinan dari matriks A ditulis :

det (A) atau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \; \dots \; a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; \dots \; a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \; \dots \; a_{nn} \end{vmatrix}$ atau $|A|$.

2.1 Permutasi dan Definisi Determinan Matriks

Permutasi merupakan cabang ilmu kombinatorik, pada kurikulum SMA pun telah diperkenalkan definisi permutasi. Permutasi merupakan susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan.

Contoh 2.1 :

Permutasi dari {1, 2, 3} adalah
(1,2,3), (1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)

Selanjutnya diperkenalkan definisi **invers** dalam permutasi, yaitu jika bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil dalam urutan permutasi. Misalkan dalam suatu permutasi tertulis (2, 1, 3) maka dalam urutan bilangan tersebut, bilangan yang lebih kecil dari 2 hanya bilangan 1 sehingga nilai inversnya adalah 1. Sementara itu, setelah bilangan 1 hanaya ada bilangan 3, tidak ada bilangan yang lebih kecil dari 1 sehingga inversnya adalah nol. Jumlah invers dalam permutasi tersebut adalah 1 + 0 = 1. Selanjutnya, jumlah invers pada suatu permutasi akan didefinisikan sebagai berikut :

- Permutasi genap yaitu jumlah invers adalah bilangan genap
- Permutasi ganjil yaitu jumlah invers adalah bilangan ganjil

Agar lebih jelas, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 2.2 :

Jumlah invers pada permutasi dari {1, 2, 3}
(1,2,3) → 0 + 0 = 0 → permutasi genap
(1,3,2) → 0 + 1 = 1 → permutasi ganjil
(2,1,3) → 1 + 0 = 1 → permutasi ganjil
(2,3,1) → 1 + 1 = 2 → permutasi genap
(3,1,2) → 2 + 0 = 2 → permutasi genap
(3,2,1) → 2 + 1 = 3 → permutasi ganjil

Misalkan A_{nxn}, **hasil kali elementer** matriks A adalah hasil kali n buah unsur A tanpa ada pengambilan unsur dari baris maupun kolom yang sama. Selanjutnya hasil kali elementer tersebut diberi tanda positif (+) atau negatif (–), sehingga dinamakan **hasil kali elementer bertanda**. Pemberian tanda tersebut sangat bergantung pada jenis permutasi yang terbentuk (ganjil atau genap), jika **permutasi genap** maka tanda yang digunakan adalah **positif (+)**, sedangkan jika **permutasi ganjil** maka tanda yang digunakan adalah **negatif (–)**. Sementara itu, permutasi genap atau ganjil bergantung pada indeks **indeks kolom** unsur matriks A, yang akan membentuk suatu himpunan permutasi.

Misalkan, perkalian unsur matriks $a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$ akan diberi tanda negatif (–), karena himpunan permutasi yang terbentuk dari indeks kolom adalah {2, 1, 3}. Dari permutasi tersebut jumlah invers yang diperoleh adalah 1 + 0 = 1, sehingga tanda dari hasilkali elementer unsur tersebut adalah negatif (–), yaitu $-a_{12}a_{21}a_{33}$. Selanjutnya, **determinan suatu matriks A_{nxn}** adalah **hasil penjumlahan seluruh hasilkali elementer bertanda** matriks A tersebut. Agar memperoleh pemahaman yang lebih jelas, perhatikan contoh dibawah ini.

Contoh 2.3 :

Misakan A merupakan matriks 3x 3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Maka ada 6 (3!) hasil kali elementer dari matriks A, yaitu:

$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$, $a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$, $a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$,

$a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$, $a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$, $a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$

Hasil kali elementer bertanda

$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$

$-\ a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$

$-\ a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$

$a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$
$a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$
$-\, a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$

Jadi, determinan matriks A adalah :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}\, a_{31}$$

Contoh 2.4 :

Tentukan determinan matriks

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\det(B) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &= (3)(1)(1) + (2)(0)(-2) + (-1)(1)(-2) - (-1)(1)(-2) \\ &\quad - (3)(0)(-2) - (2)(1)(1) \\ &= 3 + 0 + 2 - 2 - 0 - 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.2 Menghitung Determinan dengan OBE

Saat masih di bangku SMA, telah diajarkan dalam menentukan determinan suatu matriks. Perhatikan beberapa contoh penentuan determinan matriks berikut ini :

- $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$
- $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15$

- $det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 45$
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24$

Secara sederhana, determinan suatu matriks merupakan hasil kali setiap unsur diagonal pada suatu matriks segitiga (atas atau bawah). Tetapi dalam kenyataannya, tak semua matriks berbentuk segitiga, sehingga kita dapat menentukan tak semudah diatas. Dalam menentukan determinan suatu matriks. Dengan menggunakan operasi baris elementer (OBE), kita akan mencoba merubah suatu matriks bujur sangkar (secara umum) menjadi suatu matriks segi tiga. Secara sederhana, gambaran proses yang dilakuakn adlah sebagai berikut :

Matriks bujur sangkar ~ OBE ~ matriks segitiga.

Alasan inilah yang mengharuskan kita mengetahui pengaruh operasi baris elementer terhadap determinan suatu matriks. Berikut ini adalah **pengaruh OBE** pada nilai determinan suatu matriks, yaitu :

1) Jika matriks B berasal dari matriks A dengan satu kali pertukaran baris maka :

   Det (B) = - Det (A)

Contoh 2.5 :

Diketahui bahwa

Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ maka $|A| = 3$

Sementara itu, misalkan $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Perhatikan bahwa B merupakan matriks yang berasal dari A dengan menukarkan baris pertama dan baris ke-2.
Jelas bahwa det (B) = –1 – 2 = – 3 = – | A |

2) Jika B berasal dari A dengan perkalian sebuah baris dengan konstanta tak nol *k* maka Det (B) = k . Det (A)

Contoh 2.6 :

Misalkan,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Jelas bahwa $\left| A \right| = 3$.

Perhatikan bahwa matriks B berasal dari matriks A dengan perkalian dengan 2 pada baris kedua, maka

$$|B| = \quad 4 - (-2) \quad = 6$$

Terlihat bahwa :

$$|\, B \,| = -6 = 2.(-3) = 2.det(A).$$

3) Jika matriks B berasal dari matriks A dengan perkalian sebua baris dengan konstanta tak nol k lalu dijumlahkan pada baris lain maka Det (B) = Det (A)

Contoh 2.7 :

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$,

jelas bahwa $\left| A \right| = -12$.

Perhatikan :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -12 \end{vmatrix}$$

OBE pada matriks tersebut adalah $-2b_1 + b_2$

= -12

Terlihat bahwa determinan matriks hasil OBE adalah sama dengan determinan matriks asal sebelum di OBE.

Contoh 2.8 :

Tentukan determinan matriks berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\det(A) = |A|$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad b_1 \leftrightarrow b_2$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad -2b_1 + b_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} \qquad b_2 \leftrightarrow b_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad 3b_2 + b_3$$

$= \ 4$ (hasil perkalian unsur diagonalnya)

2.3 Menghitung Determinan dengan ekspansi kofaktor

Misalkan sebuah matriks bujur sangkar berukuran n x n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sebelum memaparkan penentuan determinan dengan menggunakan operasi baris elementer, perhatikan beberapa definisi berikut :

(i) Mij disebut **Minor- *ij*** yaitu determinan matriks A dengan menghilangkan baris ke_i dan kolom ke-j matriks A.

Contoh 2.9 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ maka } M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(ii) Cij Matrik dinamakan **kofaktor - *ij*** yaitu $(-1)^{i+j}$ M*ij*

Contoh 2.10 :

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$C_{21} = (-1)^3 .2 = -2$

Secara umum, cara menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i :

  det (A) = $a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}$

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j :

  det (A) = $a_{ij}\ C_{1j} + a_{2j}\ C_{2j} + \ldots + a_{nj}\ C_{jn}$

Contoh 2.11 :

Hitunglah determinan matrik berikut ini :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Misalkan, kita akan menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang
baris ke-3

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} c_{3j}$$

$$= a_{31}\ C_{31} + a_{32}\ C_{32} + \ldots + a_{3n}\ C_{3n}$$

$$= 0 + 1\,(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 + 6$$

$$= 4$$

Menghitung det (A) dengan ekspansi kopaktor sepanjang kolom ke-3 :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i3} c_{i3}$$

$$= 0 + 1\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 + 6$$

$$= 4$$

Contoh 2.12 :

Tentukan determinan matriks berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

a. Menghitung determinan dengan OBE :

$$\det\ (A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1(-1)(-1)$$

$$= 1$$

b. Menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor.
Berikut ini adalah menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama

$$\text{Det (A)} = 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) + 0 + 2$$

$$= 1$$

Misalkan *A* merupakan suatu matriks bujur sangkar *n* x *n* dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}, maka matriks :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n2} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

dinamakan **matriks kofaktor** A. Transpos dari matriks ini dinamakan **adjoin** *A*, dengan notasi *adj*(A).

Dengan menggunakan matriks adjoin ini, kita dapat menentukan invers dari suatu matriks. Jadi, misalkan *A* merupakan suatu matriks yang mempunyai invers maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Dengan demikian, ada hubungan bahwa suatu matriks bujur sangkar *A* mempunyai invers *jika dan hanya jika* det (A) ≠ 0.

Beberapa sifat determinan matriks adalah :

1. Jika A adalah sembarang matriks kuadrat, maka *det* (A) = *det* (A^t)
2. Jika A dan B merupakan matriks kuadrat berukuran sama, maka :

   det (A) *det* (B) = *det* (AB)
3. Jika A mempunyai invers maka :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Latihan Bab 2

1. Tentukan determinan matriks berikut dengan menggunakan OBE dan ekspansi kofaktor (membandingkan kedua metode) :

   a. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   b. $Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2. Diketahui :

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Tunjukan bahwa : *det* (A) *det* (B) = *det* (AB)

3. Diketahui :

   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 4 \end{pmatrix}$$

   Tentukan k jika *det* (D) = 29

4. Diketahui $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = t$, untuk suatu *a, b, c, d, e, f, g, h, i, t* ∈ Riil.

   Gunakan sifat, tentukan det $\left(3 \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d-a & e-b & f-c \\ g+2a & h+2b & i+2c \end{pmatrix} \right)$

5. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

   Jika $B = A^{-1}$ dan A^t merupakan matriks transpose dari A, dengan menggunakan beberapa sifat determinan, tentukan nilai $x = \dfrac{\det\left(2A^2\right) - \det(5B)}{\det\left(A^t B\right)}$