

# 6. INTEGRAL

## 6. 1 Integral Tak Tentu

$F(x)$  disebut **suatu anti turunan** dari  $f(x)$  pada interval  $I$  bila

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Contoh

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$  dan  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$  adalah anti turunan dari

$f(x) = x^2$  karena  $F'(x) = f(x)$ .

Anti turunan dari suatu fungsi tidak tunggal, tapi perbedaannya berupa suatu bilangan konstan.

Anti turunan disebut juga Integral Tak tentu.

Notasi :

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

## 6.2 Sifat-sifat integral tak tentu

A. Sifat yang diperoleh langsung dari turunan

$$1. \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$$

$$2. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$3. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$4. \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$5. \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

## B. Sifat Kelinieran

$$\int [a f(x) + b g(x)] dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

## C. Integral dengan substitusi

Misal  $u = g(x)$ ,  $du = g'(x)dx$ , dan  $F$  suatu anti turunan dari  $f$ , maka

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Contoh : Hitung  $\int \sin(2x + 1) dx$

Misal  $u = 2x + 1 \rightarrow du = 2 dx \rightarrow dx = \frac{1}{2} du$  sehingga

$$\begin{aligned} \int \sin(2x + 1) dx &= \frac{1}{2} \int \sin u du \\ &= -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos(2x + 1) + C \end{aligned}$$

Setelah dilakukan substitusi  $u = g(x)$ , Integran (fungsi yang diintegrasikan) hanya fungsi dari  $u$

Contoh : Hitung  $\int (x^3 + 1)^{10} x^5 dx$

Jawab : Misal  $u = x^3 + 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$   
Maka

Integran  
fungsi dr  
 $u$  dan  $x$

$$\int (x^3 + 1)^{10} x^5 dx = \int u^{10} x^5 \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int u^{10} x^3 du$$

Ctt :  $x^3$  Tidak bisa di keluarkan dari integral, karena bukan suatu konstanta

substitusi  $x^3$  dengan menggunakan hubungan  $u = x^3 + 1 \rightarrow x^3 = u - 1$   
sehingga

$$\begin{aligned} \int (x^3 + 1)^{10} x^5 dx &= \frac{1}{3} \int u^{10} (u - 1) du = \frac{1}{3} \int u^{11} - u^{10} du = \frac{1}{36} u^{12} - \frac{1}{33} u^{11} + C \\ &= \frac{1}{36} (x^3 + 1)^{12} - \frac{1}{33} (x^3 + 1)^{11} + C \end{aligned}$$

Contoh : Hitung  $\int (2x + 5)^{2013} dx$

Misal  $u = 2x + 5 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \rightarrow dx = \frac{du}{2}$

Maka

$$\int (2x + 5)^{2013} dx = \int u^{2013} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{2013} du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2014} u^{2014} + c$$

$$= \frac{1}{4028} (2x + 5)^{2014} + c$$

Contoh : Hitung  $\int x(3x^2 + 5)^{2006} dx$

Misal  $u = 3x^2 + 5 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x \rightarrow xdx = \frac{du}{6}$

Maka

$$\int x(3x^2 + 5)^{2006} dx = \int u^{2006} \frac{du}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \int u^{2006} du$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2007} u^{2007} + c$$

$$= \frac{1}{12042} (3x^2 + 5)^{2007} + c$$

Contoh : Hitung  $\int \cos \frac{1}{2} x dx$

Misal  $u = \frac{1}{2} x \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \rightarrow dx = 2 du$

Maka

$$\begin{aligned} \int \cos \frac{1}{2} x dx &= \int \cos u \cdot 2 du \\ &= 2 \int \cos u du \\ &= 2 \sin u + c \\ &= 2 \sin \frac{1}{2} x + c \end{aligned}$$



## Soal Latihan

A. Untuk soal 1-5 carilah anti turunan  $F(x) + C$  bila

1.  $f(x) = 3x^2 + 10x + 5$

2.  $f(x) = x^2(20x^7 - 7x^5 + 6)$

3.  $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^7}$

4.  $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2}$

5.  $f(x) = x^{-3/4}$

Selesaikan integral tak tentu berikut

6.  $\int (x^2 - 4)^3 2x \, dx$

12.  $\int (2x^2 + 25)^5 x^3 \, dx$

7.  $\int (x^2 - 3x + 2)^2 (2x - 3) \, dx$

8.  $\int 3x \sqrt{3x^2 + 7} \, dx$

9.  $\int (5x^2 + 1) \sqrt{5x^3 + 3x - 2} \, dx$

10.  $\int \frac{3y}{\sqrt{2y^2 + 5}} \, dy$

11.  $\int (\cos^4 2x)(-2 \sin 2x) \, dx$