

Pengantar Fisika Statistik
untuk Mahasiswa
(Dilengkapi contoh soal)

Dr.Eng. Mikrajuddin Abdullah, M.Si.

Program Studi Fisika- FMIPA
Institut Teknologi Bandung
2007

*Untuk istriku Ati,
dan
anak-anakku Nisa, Fathan, dan Ardi*

Kata Pengantar

Buku ini disusun untuk membantu mahasiswa memahami fisika statistik lebih mudah. Uraian diberikan serinci mungkin, tahap demi tahap, sehingga mahasiswa dapat mengikutinya dengan mudah. Mata kuliah Fisika Statistik sampai sekarang masih menjadi momok bagi sebagian besar mahasiswa. Ketidaktersediaan buku yang menjelaskan materi secara rinci tampaknya menjadi salah satu penyebab terjadinya “bottle neck” keterlambatan kelulusan mahasiswa akibat gagal dalam menyelesaikan mata kuliah tersebut.

Buku ini hanya membahas dasar-dasar Fisika Statistik untuk memberikan bekal yang memadai bagi mahasiswa untuk memahami fisika statistik lanjut. Masih banyak kekurangan yang muncul di sana-sini. Oleh karena kritik dan saran yang membangun dari pembaca sangat diharapkan untuk menyempurnakan isi buku ini.

Penulis sangat berterima kasih kepada rekan-rekan sesama dosen di Program Studi Fisika-FMIPA ITB atas dukungan yang sangat membantu penulis menyelesaikan buku ini. Terima kasih kepada para mahasiswa doktor di Program Studi Fisika (Imam Taufiq, Fourier Dzar Eljabbar Latief, dan Estevanus K. Huliselan) yang telah membantu mengumpulkan soal-soal yang sangat berguna untuk melengkapi isi buku ini. Terima kasih pula kepada para mahasiswa bimbingan penulis yang banyak membantu dalam banyak hal.

Bandung Juli 2007

Mikrajuddin Abdullah

Daftar Isi

Bab 1 Pendahuluan	1
Bab 2 Statistik Maxwell-Boltzmann	4
2.1 Konfigurasi penyusunan sistem klasik	4
2.2 Konfigurasi dengan probabilitas maksimum	13
2.3 Harga rata-rata	16
2.4 Benarkan peluang konfigurasi maksimum sangat besar	19
Bab 3 Ruang Fasa	22
3.1 Definisi ruang fasa	22
3.2 Elemen volum ruang fasa	23
3.3 Energi kinetik	24
3.4 N system dalam ruang fasa	25
3.5 Menghitung jumlah keadaan	27
3.6 Menentukan n_s	30
3.7 Volum elemen ruang fasa dinyatakan dalam momentum dan laju	31
Bab 4 Menentukan Parameter Statistik	33
4.1 Menentukan parameter β	33
4.2 Bagaimana ketergantungan β pada suhu?	37
4.3 Menentukan β dari energi rata-rata	40
4.4 Menentukan parameter α	43
Bab 5 Statistik Bose-Einstein	46
5.1. Sifat dasar boson	46

5.2 Konfigurasi boson	47
5.3 Konfigurasi maksimum	51
5.4 Parameter α untuk foton dan fonon	55
Bab 6 Statistik Fermi-Dirac	56
Bab 7 Rapat Keadaan Sistem Kuantum	64
7.1 Ketidakpastian Heisenberg	64
7.2 Koordinat spasial satu dimensi	65
7.3 Koordinat spasial dua dimensi	67
7.4 Koordinat spasial tiga dimensi	70
Bab 8 Beberapa Besaran Gas	74
8.1 Laju dengan peluang maksimum	74
8.2 Laju rata-rata	76
8.3 Laju root mean square	78
8.4 Distribusi partikel dalam besaran lain	80
Bab 9 Aplikasi Statistik Maxwell-Boltzmann	85
9.1 Pelebaran spectrum akibat efek Doppler	85
9.2 Atom magnetic dalam medan magnet	90
9.3 Dipol listrik	94
9.4 Momen magnetic dengan tiga arah orientasi	96
9.5 Momen magnetic dengan arah orientasi sembarang	97
9.6 Vibrasi kisi dalam kristal	102
9.7 Hopping	106
9.8 Persamaan difusi Einstein	112
9.9 Prinsip ekipartisi energi	114

Bab 10 Aplikasi Statistik Bose-Einstein	119
10.1 Radiasi benda hitam	119
10.2 Kapasitas kalor kristal	125
Bab 11 Aplikasi Distribusi Fermi Dirac	138
11.1 Fungsi distribusi Fermi-Dirac pada suhu 0 K	138
11.2 Distribusi Fermi-Dirac pada suhu $T > 0$ K	143
11.3 Integral yang mengandung fungsi Fermi-Dirac	143
11.4 Energi rata-rata electron	148
11.5 Kapitas kalor logam	151
11.6 Emisi termionik	154
Bab 12 Termodinamika Gas	159
12.1 Entropi	159
12.2 Fungsi partisi Boltzmann	161
12.3 Ungkapan energi dalam fungsi partisi	163
12.4 Energi bebas Helmholtz	164
12.5 Kapasitas kalor	165
12.6 Perhitungan fungsi partisi klasik	165
12.7 Entropi gas semiklasik	167
12.8 Fungsi partisi total	168
12.9 Fungsi partisi gas semiklasik	170
12.10 Transformasi dari penjumlahan ke integral	172
12.11 Suseptibilitas paramagnetic kuantum	174
12.12 Molekul diatomic	179
Bab 13 Ensembel Kanonik	190

13.1 Ensemble	190
13.2 Jenis ensemble	193
13.3 Probabilitas	195
13.4 Sifat-sifat termodinamika	195
13.5 Energi bebas Helmholtz	196
13.6 Ungkapan lain untuk entropy	199
13.7 Fungsi partisi total	200
13.8 Penerapan ensemble kanonik untuk gas tidak ideal	204
13.9 Persamaan keadaan	211
13.10 Fluktuasi energi	213
Bab 14 Soal dan Latihan Statistik Maxwell-Boltzmann	216
Bab 15 Soal dan Latihan Statistik Bose-Einstein	237
Bab 16 Soal dan Latihan Statistik Fermi-Dirac	266
Bab 17 Soal dan Latihan Entropi	292
Bab 18 Soal dan Latihan Gas Riil	322
Bab 19 Soal dan Latihan Sistem dengan Interaksi Lemah	340
Bab 20 Soal dan Latihan Ensemble Kanonik	376

Bab 1 Pendahuluan

Persoalan yang sering muncul pada kuliah fisika statistik di perguruan tinggi adalah ketidaktersediaan buku referensi bahasa Indonesia yang memadai. Buku terbitan luar negeri yang biasa digunakan sebagai referensi umumnya tidak membahas topik secara detail. Hal ini sering menyulitkan mahasiswa memahami mata kuliah tersebut. Beratus-tahun kuliah ini diajarkan oleh dosen pada mahasiswa-mahasiswa fisika, persoalan yang sama selalu muncul. Bahkan mata kuliah tersebut menjadi salah satu “bottle neck” yang memperlambat kelulusan mahasiswa.

Cara pemahaman fisika statistik berbeda dengan mata kuliah fisika lain seperti gelombang, termodinamik, dan mekanika. Dalam fisika statistik kita akan berangkat dari persoalan abstrak yang sebenarnya merupakan bahan kajian orang matematika seperti permutasi dan kombinasi. Fisika statistik dapat dipandang sebagai persoalan statistik matematik yang diberikan syarat batas fisis, sehingga persoalan matematika murni menjadi memiliki interpretasi fisis. Diperlukan abstraksi yang cukup tinggi untuk memahami persoalan tersebut. Dan tidak semua mahasiswa bisa melakukannya.

Sebenarnya ketika kita berhadapan dengan kumpulan partikel-partikel gas, partikel atomik atau sub atomik lainnya, kita tidak bisa menghindari dari statistik. Sebab, jumlah partikel yang kita kaji sangat besar, yaitu ordenya lebih dari 10^{20} partikel. Tiap partikel memiliki enam variabel untuk mendeskripsikan dengan lengkap keadaan geraknya, yaitu tiga koordinat ruang dan tiga komponen momentum. Sangat tidak mungkin menjelaskan dinamika partikel tersebut satu per satu dengan jumlah partikel yang luar biasa banyak, meskipun menggunakan semua komputer yang ada di dunia saat ini. Pendekatan yang diberikan oleh fisika statistik adalah melihat sifat rata-rata dari partikel-partikel tersebut tanpa kita harus melihat partikel secara individual.

Karena berangkat dari persoalan statistik matematis, mahasiswa sering mengalami kesulitan memulai memahami fisika statistik. Buku-buku yang tersedia sekarang kurang memberikan penjelasan yang mendetil sehingga tidak memberikan bantuan yang cukup berarti kepada para mahasiswa untuk memahami konsep-konsep tersebut. Dari tahun ke tahun mahasiswa tetap mengalami kesulitan memahami mata kuliah ini, karena cara analisis yang berbeda dengan mata kuliah fisika lainnya.

Tujuan penulisan buku ini adalah memberikan penjelasan yang lebih rinci kepada mahasiswa tentang penurunan persamaan-persamaan fisika statistik beserta beberapa aplikasinya. Rumus-rumus diturunkan secara lengkap dengan penjelasan yang rinci pula dengan harapan mahasiswa dapat memahami lebih jelas. Sampai saat ini kita kesulitan menemukan referensi yang memberikan penjelasan yang lebih rinci tentang penurunan persamaan-persamaan tersebut. Mahasiswa terpaksa harus melakukan usaha yang luar biasa untuk memahami konsep-konsep tersebut dan tidak jarang banyak yang apatis.

Karena materi buku ini hanya diperuntukkan bagi kuliah satu semester, maka hanya dasar-dasar statistik yang dapat menjadi modal awal bagi mahasiswa untuk mempelajari fisika statistik lanjut yang diberikan. Topik utama yang dibahas meliputi penurunan fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann, Bose-einstein, dan Fermi Dirac. Contoh aplikasi sederhana ke tiga macam statistik tersebut juga diberikan. Konsep ruang fasa dan kerapatan keadaan dalam ruang fasa klasik serta ruang fasa kuantum juga diberikan, karena keduanya digunakan untuk menghitung besaran-besaran termodinamika. Agar mahasiswa memiliki pemahaman awal tentang ensembel, maka salah satu jenis ensembel dibahas di sini, yaitu ensembel kanonik.

Pada langkah penurunan distribusi Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, dan Fermi-Dirac, modal statistik yang dibutuhkan hanya permutasi. Oleh karena itu topik yang membahas panjang lebar tentang permutasi dan kombinasi seperti yang dijumpai di kuliah-kuliah statistik yang bersifat matematis tidak diberikan di sini. Hal ini dimaksudkan untuk mengurangi beban mahasiswa sehingga mereka bisa lebih terfokus kepada aplikasi fisis dari statistik tersebut.

Sebelum masuk ke penurunan berbagai fungsi distribusi masi kita definisikan beberapa istilah yang digunakan dalam buku ini. Pertama kita mendefinsikan **sistem**. Terminologi sistem yang digunakan pada buku ini mengacu kepada partikel-partikel. Contohnya, jika kita membahas tentang gas maka sistem adalah atom atau molekul gas. Untuk gas monotonik, sistem adalah atom gas dan untuk gas diatomik maka atau yang mengandung atom lebih banyak maka sistem adalah molekul gas. Jika kita membahas tentang elektron dalam logam maka sistem adalah elektron-elektron tersebut. Jika kita bahas tentang radiasi benda hitam maka sistem adalah foton. Jika kita bahas getaran kisi maka sistem adalah fonon.

Istilah kedua yang akan kita gunakan adalah assembli. Assembli adalah kumpulah sistem-sistem. Jumlah sistem dalam assembli sangat banyak. Ordenya sekitar sama dengan orde bilangan Avogadro. Jumlah sistem yang sangat besar ini memungkinkan prediksi statistik untuk sifat assembli menjadi sangat akurat. Ingat, statistik makin teliti jika sampel yang dilibatkan makin banyak.

Bab 2 Statistik Maxwell-Boltzmann

Isi Bab Ini

Bab ini berisi perumusan statistik Maxwell-Boltzmann untuk assembli yang mengandung sistem (partikel) klasik. Contoh partikel klasik adalah atom atau molekul-molekul gas.

Tujuan Bab Ini

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami bagaimana proses membangun statistik Maxwell-Boltzmann dengan menggunakan prinsip statistik musrni yang digabungkan dengan prinsip kekekalan dalam fisika seperti kekekalan energi dan jumlah partikel.

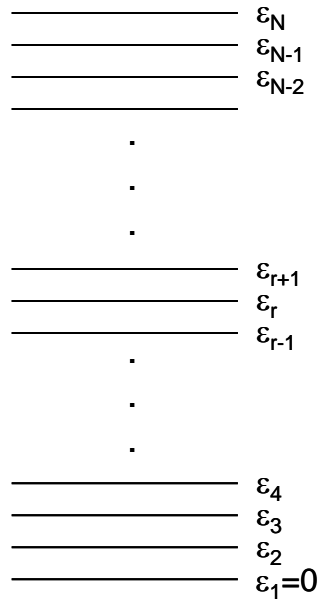
Apa Yang Perlu dikuasai Lebih Dahulu

Untuk memahami penurunan fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann mahasiswa perlu memahami prinsip permutasi untuk benda-benda yang dapat dibedakan, sifat yang ditunjukkan oleh sebuah besaran yang nilainya kekal (konstan), serta bagaimana mencari nilai maksimum dari sebuah fungsi.

2.1 Konfigurasi Penyusunan Sistem Klasik

Kita akan berangkat dari asumsi bahwa energi yang dimiliki sistem-sistem dalam assembli dianggap terdiri atas tingkat-tingkat energi. Tingkat-tingkat energi tersebut berada dalam rentangan dari nol sampai tak berhingga. Gambar 2.1 adalah ilustrasi tingkat-tingkat energi yang dimiliki assembli.

Untuk sistem klasik, seperti atom gas, perbedaan energi dua tingkat berdekatan mendekati nol, atau $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \rightarrow 0$. Perbedaan energi yang mendekati nol memiliki makna bahwa tingkat energi sistem klasik bersifat kontinu. Sistem menempati salah satu dari keadaan energi di atas. Dalam sistem klasik juga tidak ada batasan jumlah sistem yang dapat menempati satu keadaan energi. Satu keadaan energi dapat saja kosong, atau ditempati oleh satu sistem, oleh dua sistem, dan seterusnya. Bahkan semua sistem berada pada satu keadaan energi pun tidak dilarang.

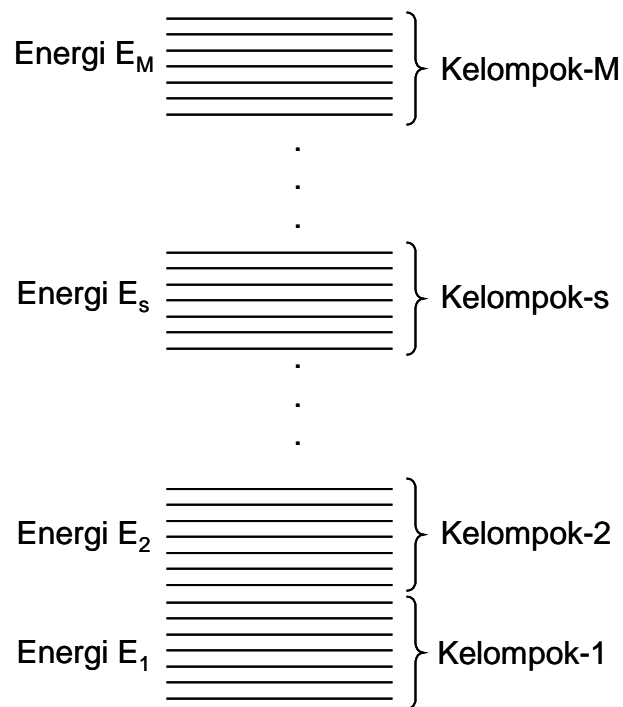


Gambar 2.1 Tingkat-tingkat energi yang dimiliki assembli

Agar sifat fisis dari assembli dapat ditentukan maka kita harus mengetahui bagaimana penyusunan sistem pada tingkat-tingkat energi yang ada serta probabilitas kemunculan masing-masing cara penyusunan tersebut. Pemahaman ini perlu karena nilai terukur dari besaran yang dimiliki assembli sama dengan perata-rataan besaran tersebut terhadap semua kemungkinan penyusunan sistem pada tingkat-tingkat energi yang ada.

Cara menghitung berbagai kemungkinan penyusunan sistem serta probabilitas kemunculannya menjadi mudah bila tingkat-tingkat energi yang dimiliki assembli dibagi atas beberapa kelompok, seperti diilustrasikan pada Gbr 2.2. Tiap kelompok memiliki jangkauan energi yang cukup kecil.

Kelompok pertama memiliki jangkauan energi	: 0 sampai $d\varepsilon$
Kelompok kedua memiliki jangkauan energi	: $d\varepsilon$ sampai $2d\varepsilon$
Kelompok ketiga memiliki jangkauan energi	: $2d\varepsilon$ sampai $3d\varepsilon$
.	.
.	.
.	.
Kelompok ke-s memiliki jangkauan energi	: $(s-1)d\varepsilon$ sampai $sd\varepsilon$



Satu kelompok energi mengandung sejumlah keadaan energi. Jumlah keadaan energi pada kelompok yang berbeda bisa sama dan bisa berbeda. Misalkan jumlah keadaan energi pada tiap-tiap kelompok tersebut sebagai berikut:

•

.

•

Jumlah keadaan pada kelompok ke-s : g_s

.
.
.

Jumlah keadaan pada kelompok ke-~~N~~ : ~~g_N~~

Energi keadaan yang berbeda dalam satu kelompok umumnya berbeda. Tetapi karena perbedaan energi keadaan yang berbeda dalam satu kelompok sangat kecil (mendekati nol) maka kita dapat mengasumsi bahwa energi dalam satu kelompok diwakili oleh satu nilai energi saja. Energi tersebut dianggap sebagai energi rata-rata keadaan dalam kelompok yang bersangkutan. Jadi,

Energi rata-rata kelompok pertama : E_1

Energi rata-rata kelompok kedua : E_2

Energi rata-rata kelompok ketiga : E_3

.
.
.

Energi rata-rata kelompok ke-s : E_s

.
.
.

Energi rata-rata kelompok ke-M : E_M

Misalkan pada konfigurasi tertentu tiap-tiap kelompok energi telah ditempati oleh sejumlah sistem sebagai berikut:

Jumlah sistem pada kelompok energi pertama : n_1

Jumlah sistem pada kelompok energi kedua : n_2

Jumlah sistem pada kelompok energi ketiga : n_3

.
 .
 .
 Jumlah sistem pada kelompok energi ke-s : n_s
 .
 .
 .
 Jumlah sistem pada kelompok energi ke-M : n_M

Jumlah total sistem dalam assembli adalah N . Karena N sistem tersebut terdistribusi pada semua kelompok energi maka terpenuhi

$$N = \sum_{s=1}^M n_s \quad (2.1)$$

Energi total assembli memenuhi

$$U = \sum_{s=1}^M n_s E_s \quad (2.2)$$

Untuk menentukan nilai dari besaran-besaran yang dimiliki assembli kita harus menentukan berapa probabilitas munculnya masing-masing konfigurasi dalam assembli. Tiap penyusunan sistem dalam assembli mempunyai peluang kemunculan yang persis sama. Dengan demikian, probabilitas kemunculan sebuah konfigurasi sebanding dengan jumlah penyusunan sistem yang dapat dilakukan untuk membangun konfigurasi tersebut.

Dengan demikian, mencari probabilitas kemunculan konfigurasi dengan kondisi

Ada n_1 sistem pada kelompok energi 1
 Ada n_2 sistem pada kelompok energi 2
 Ada n_3 sistem pada kelompok energi 3

.

.

.

Ada n_s sistem pada kelompok energi s

.

.

.

Ada n_M sistem pada kelompok energi M

ekivalen dengan mencari berapa cara penyusunan:

n_1 sistem pada g_1 keadaan energi di kelompok energi 1

n_2 sistem pada g_2 keadaan energi di kelompok energi 2

n_3 sistem pada g_3 keadaan energi di kelompok energi 3

.

.

.

n_s sistem pada g_s keadaan energi di kelompok energi s

.

.

.

n_M sistem pada g_M keadaan energi di kelompok energi M

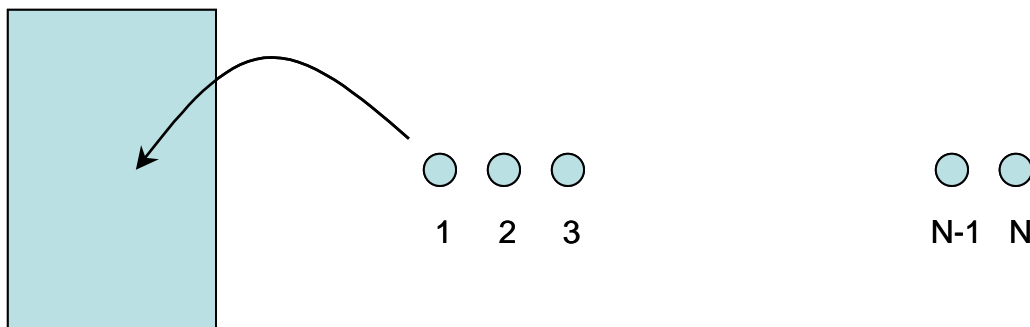
Selanjutnya kita akan menentukan jumlah cara penyusunan system-sistem yang tersebar pada tingkat-tingkat energi di atas. Untuk maksud tersebut, mari kita mulai dengan menganggap semua keadaan energi kosong (tidak di tempati sistem) dan di luar ada sejumlah N sistem yang akan diisi pada keadaan-keadaan tersebut. Di sini ada dua tahap proses yang terjadi, yaitu: proses I adalah membawa N buah sistem dari luar ke dalam assembli dan proses II adalah menyusun sistem pada kelompok-kelompok energi yang ada di dalam assembli.

Proses I: Membawa N Buah Sistem ke Dalam Assembli

Mari kita hitung jumlah cara yang dapat ditempuh pada tiap proses pertama yaitu membawa N buah sistem dari luar ke dalam assembli. Proses ini tidak bergantung pada konfigurasi assembli. Yang terpenting adalah bagaimana membawa masuk N buah sistem ke dalam assembli. Untuk menentukan jumlah cara tersebut, perhatikan tahap-tahap berikut ini.

- i) Ambil satu sistem dari daftar N buah sistem yang berada di luar assembli. Kita bebas memilih satu sistem ini dari N buah sistem yang ada tersebut. Jadi jumlah cara pemilihan sistem yang pertama kali dibawa masuk ke dalam assembli adalah N cara.
- ii) Setelah sistem pertama dimasukkan ke dalam assembli maka tersisa $N - 1$ sistem dalam daftar di luar. Ketika membawa masuk sistem kedua ke dalam assembli kita dapat memilih salah satu dari $N - 1$ buah sistem dalam daftar. Jumlah cara pemilihan sistem ini adalah $N - 1$ cara.
- iii) Begitu seterusnya.
- iv) Akhirnya, ketika sistem ke- N akan dimasukkan ke dalam assembli hanya ada satu sistem yang tersisa di luar. Tidak ada pilihan-pilihan yang mungkin sehingga jumlah cara memasukkan sistem ke- N ke dalam assembli adalah hanya 1 cara.
- v) Dengan demikian, jumlah total cara membawa masuk N buah sistem ke dalam assembli adalah

$$N \times (N - 1) \times (N - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = N!$$

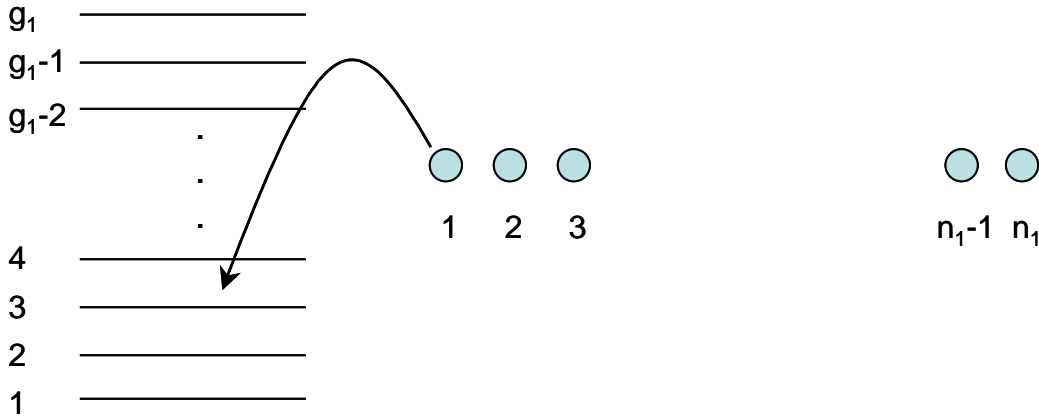


Gambar 2.3 Cara membawa N sistem di luar masuk ke dalam assembli

Proses II: Penyusunan Sistem di Dalam Kelompok-Kelompok Energi

Selanjutnya kita tinjau proses kedua. Tahapan yang ditempuh sebagai berikut.

i) Tinjau kelompok 1 yang mengandung g_1 keadaan dan ditempati oleh n_1 sistem. Sebagai ilustrasi lihat Gbr. 2.3



Gambar 2.3 Menentukan cara menyusun n_1 sistem pada g_1 keadaan

Ambil partikel pertama. Kita dapat menempatkan partikel ini entah di keadaan ke-1, keadaan ke-2, keadaan ke-3, dan seterusnya hingga keadaan ke- g_1 . Jadi jumlah cara menempatkan partikel pertama pada kelompok-1 yang memiliki g_1 keadaan adalah g_1 cara. Setelah partikel-1 ditempatkan, kita ambil partikel 2. Partikel ini pun dapat ditempatkan di keadaan ke-1, keadaan ke-2, keadaan ke-3, dan seterusnya hingga keadaan ke- g_1 . Dengan demikian, jumlah cara menempatkan partikel kedua juga g_1 cara. Hal yang sama juga berlaku bagi partikel ke-3, partikel ke-4, dan seterusnya, hingga partikel ke- n_1 . Akhirnya, jumlah cara menempatkan n_1 partikel pada g_1 buah keadaan adalah

$$g_1 \times g_1 \times g_1 \times \dots \times g_1 \text{ (} n_1 \text{ buah perkalian)} = g_1^{n_1}$$

Sejumlah $g_1^{n_1}$ cara di atas secara implisit mengandung makna bahwa urutan pemilihan partikel yang berbeda menghasilkan penyusunan yang berbeda pula. Padahal

tidak demikian. Urutan pemilihan yang berbeda dari sejumlah n_1 partikel yang ada tidak berpengaruh pada penyusunan asalkan jumlah partikel pada tiap bangku tetap jumlahnya. Urutan pemilihan sejumlah n_1 partikel menghasilkan $n_1!$ macam cara penyusunan. Dengan demikian, jumlah riil cara penyusunan n_1 partikel pada g_1 buah keadaan seharusnya adalah

$$\frac{g_1^{n_1}}{n_1!}$$

Penjelasan yang sama juga berlaku bagi n_2 buah partikel yang disusun pada g_2 keadaan. Jumlah cara penyusunan partikel tersebut adalah

$$\frac{g_2^{n_2}}{n_2!}$$

Secara umum jumlah cara menempatkan n_s partikel di dalam kelompok energi yang mengandung g_s keadaan adalah

$$\frac{g_s^{n_s}}{n_s!}$$

Akhirnya jumlah cara mendistribusikan secara bersama-sama n_1 sistem pada kelompok dengan g_1 keadaan, n_2 sistem pada kelompok dengan g_2 keadaan, .., n_s sistem pada g_s keadaan adalah

$$\frac{g_1^{n_1}}{n_1!} \times \frac{g_2^{n_2}}{n_2!} \times \frac{g_3^{n_3}}{n_3!} \times \dots \times \frac{g_M^{n_M}}{n_M!} = \prod_{s=1}^M \frac{g_s^{n_s}}{n_s!}$$

Dengan demikian, jumlah total cara menempatkan N buah sistem ke dalam konfigurasi

yang mengandung n_1 sistem pada kelompok dengan g_1 keadaan, n_2 sistem pada kelompok dengan g_2 keadaan, ..., n_s sistem pada kelompok dengan g_s keadaan adalah

$$W = N! \prod_{s=1}^M \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \quad (2.3)$$

Kita tinjau asembli yang terisolasi dari lingkungan. Tidak ada pertukaran partikel maupun energi antara asembli dan lingkungan. Dengan demikian, jumlah sistem N dan energi total U yang dimiliki asembli konstan. Akibatnya,

$$\delta N = \sum_{s=1}^M \delta n_s = 0 \quad (2.4)$$

$$\delta U = \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0 \quad (2.5)$$

2.2 Konfigurasi Dengan Probabilitas Maksimum

Sekarang kita mencari konfigurasi yang memiliki probabilitas kemunculan paling besar. Kita menganggap bahwa konfigurasi yang dibentuk oleh sistem-sistem dalam asembli yang menghasilkan besaran makroskopik adalah konfigurasi dengan probabilitas maksimum tersebut. Cara yang dilakukan adalah mencari kumpulan n_s sedemikian sehingga W maksimum. Tetapi karena W merupakan perkalian sejumlah faktor maka akan lebih mudah jika kita memaksimalkan $\ln W$. Karena jika $\ln W$ maksimum maka W pun maksimum. Kita peroleh

$$\begin{aligned} \ln W &= \ln N! + \ln \prod_{s=1}^M \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \\ &= \ln N! + \ln \left\{ \frac{g_1^{n_1}}{n_1!} \times \frac{g_2^{n_2}}{n_2!} \times \dots \times \frac{g_M^{n_M}}{n_M!} \right\} \\ &= \ln N! + \ln \left(\frac{g_1^{n_1}}{n_1!} \right) + \ln \left(\frac{g_2^{n_2}}{n_2!} \right) + \dots + \ln \left(\frac{g_M^{n_M}}{n_M!} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln N! + \sum_{s=1}^M \ln \left(\frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \right) \\
&= \ln N! + \sum_{s=1}^M \{ \ln g_s^{n_s} - \ln n_s! \} \\
&= \ln N! + \sum_{s=1}^M \{ n_s \ln g_s - \ln n_s! \} \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Karena baik N maupun n_s merupakan bilangan-bilangan yang sangat besar maka untuk mempermudah perhitungan kita dapat menggunakan pendekatan Stirling sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\ln N! &\cong N \ln N - N \\
\ln n_s &\cong n_s \ln n_s - n_s
\end{aligned}$$

sehingga kita dapatkan bentuk aproksimasi

$$\ln W \cong N \ln N - N + \sum_{s=1}^M \{ n_s \ln g_s - n_s \ln n_s + n_s \} \tag{2.7}$$

Dengan demikian, diferensial dari $\ln W$ menjadi

$$\begin{aligned}
\delta \ln W &\cong \delta N \ln N - \delta N + \delta \sum_{s=1}^M \{ n_s \ln g_s - n_s \ln n_s + n_s \} \\
&= 0 - 0 + \sum_{s=1}^M \{ \delta n_s \ln g_s + n_s \delta \ln g_s - \delta n_s \ln n_s - n_s \delta \ln n_s + \delta n_s \} \\
&= \sum_{s=1}^M \left\{ \delta n_s \ln g_s + n_s \times 0 - \delta n_s \ln n_s - n_s \left(\frac{1}{n_s} \delta n_s \right) + \delta n_s \right\} \\
&= \sum_{s=1}^M \{ \delta n_s \ln g_s - \delta n_s \ln n_s \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^M \{ \ln g_s - \ln n_s \} \delta n_s \\
&= \sum_{s=1}^M \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) \delta n_s
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Karena kita harus menerapkan syarat batas kekekalan energi dan jumlah partikel, maka solusi untuk n_s dicari dengan menerapkan perngali Langrange sebagai berikut

$$\delta \ln W + \alpha \delta N + \beta \delta U = 0 \tag{2.9}$$

Substitusi persamaan (2.4), (2.5), dan (2.8) ke dalam persamaan (2.9) diperoleh

$$\sum_{s=1}^M \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) \delta n_s + \alpha \sum_{s=1}^M \delta n_s + \beta \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{s=1}^M \left\{ \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) + \alpha + \beta E_s \right\} \delta n_s = 0 \tag{2.10}$$

Karena kondisi ini berlaku untuk nilai n_s berapapun maka harus terpenuhi

$$\ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) + \alpha + \beta E_s = 0$$

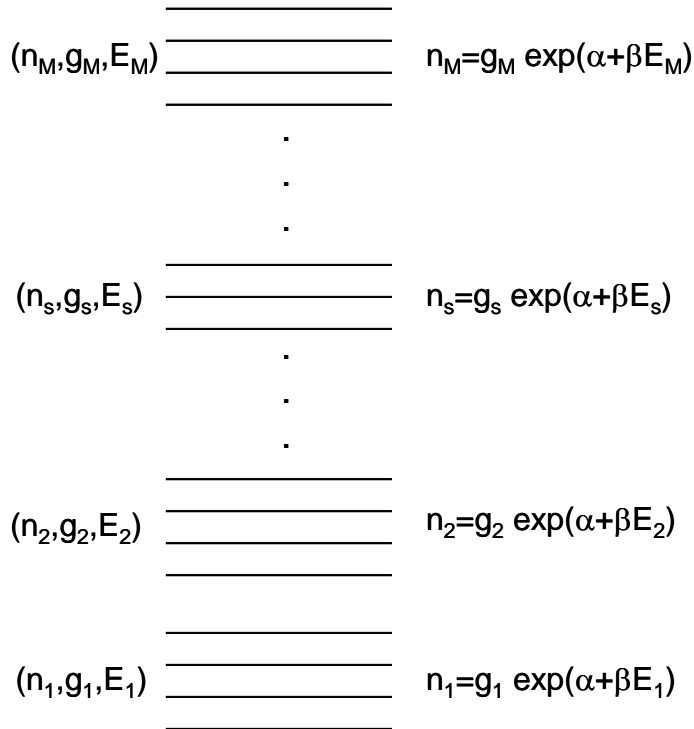
$$\ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) = -\alpha - \beta E_s$$

$$\frac{g_s}{n_s} = \exp(-\alpha - \beta E_s)$$

yang menghasilkan ungkapan untuk n_s sebagai

$$n_s = g_s \exp(\alpha + \beta E_s) \quad (2.11)$$

Jadi konfigurasi yang memiliki peluang kemunculan paling besar adalah yang memiliki jumlah sistem pada tiap kelompok energi yang memenuhi persamaan (2.11). Gambar 2.4 adalah ilustrasi yang mngambrakan jumlah partikel yang menempati berbagai kelompok energi.



Gambar 2.4 Jumlah partikel yang menempati tiap kelompok energi

2.3 Harga Rata-Rata

Banyak sekali konfigurasi yang diperbolehkan ketika menempatkan N sistem ke dalam M kelompok energi. Contoh konfigurasi tersebut adalah semua sistem menempati kelompok energi pertama sedangkan semua kelompok energi lainnya kosong, atau semua kelompok ditempati oleh sistem dalam jumlah yang sama banyak, dan sebagainya. Tiap konfigurasi memiliki peluang kemunculan yang berbeda-beda. Peluang kemunculan terbesar terjadi pada konfigurasi yang mengandung sistem pada tiap kelompok energi

yang memenuhi persamaan (2.11).

Misalkan X adalah salah satu sifat sebuah assembli. Nilai X yang kita ukur merupakan perata-rataan nilai X pada semua konfigurasi yang mungkin. Misalkan nilai X beserta peluang kemunculan konfigurasi dilukiskan pada Tabel 1.1.

Tabel 1.1 Nilai X beserta probabilitas kemunculannya

Konfigurasi ke-i	Nilai X	Probabilitas kemunculan
1	$X(\text{konfig-1})$	$P(\text{konfig-1})$
2	$X(\text{konfig-1})$	$P(\text{konfig-1})$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
t	$X(\text{konfig-t})$	$P(\text{konfig-t})$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
R	$X(\text{konfig-R})$	$P(\text{konfig-R})$

Perlu diperhatikan di sini bahwa jumlah konfigurasi yang mungkin tidak sama dengan jumlah sistem atau jumlah kelompok energi dalam assembli.

Nilai rata-rata X memenuhi hubungan

$$\begin{aligned}
 \langle X \rangle &= \frac{X(\text{konfig} - 1)P(\text{konfig} - 1) + X(\text{konfig} - 2)P(\text{konfig} - 2) + \dots + X(\text{konfig} - R)P(\text{konfig} - R)}{P(\text{konfig} - 1) + P(\text{konfig} - 2) + \dots + P(\text{konfig} - R)} \\
 &= \frac{\sum_{t=1}^R X(\text{konfig} - t)P(\text{konfig} - t)}{\sum_{t=1}^R P(\text{konfig} - t)} \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Perhitungan nilai $\langle X \rangle$ di atas sangat sulit. Namun apabila kita dapat menunjukkan bahwa salah satu konfigurasi yang mungkin, yaitu konfigurasi dengan probabilitas maksimum,

memiliki nilai yang jauh lebih besar daripada probabilitas konfigurasi-konfigurasi lainnya, maka perhitungan menjadi sangat sederhana.

Misalkan $P(konfig - t) = P_{maks}$ dan terpenuhi syarat-syarat berikut ini:

$$P(konfig - 1) \ll P_{maks}$$

$$P(konfig - 2) \ll P_{maks}$$

.

.

.

$$P(konfig - R) \ll P_{maks}$$

maka

$$\begin{aligned} & X(konfig - 1)P(konfig - 1) + X(konfig - 2)P(konfig - 2) + \dots + X(konfig - R)P(konfig - R) \\ & \cong X(konfig - maks)P_{maks} \end{aligned}$$

dan

$$P(konfig - 1) + P(konfig - 2) + \dots + P(konfig - R) \cong P_{maks}$$

Dengan demikian

$$\langle X \rangle \cong \frac{X(konfig - maks)P_{maks}}{P_{maks}} = X(konfig - maks) \quad (2.13)$$

Apa implikasi persamaan (2.13)? Implikasinya sangat besar, yaitu nilai rata-rata sifat assembli sama dengan nilai sifat tersebut pada konfigurasi dengan probabilitas terbesar. Kerumitan perata-eataan terhadap semua konfigurasi yang mungkin muncul telah direduksi secara drastik hanya dengan menghitung nilai pada konfigurasi maksimum. Ini adalah hasil yang luar biasa.

2.4 Benarkan peluang konfigurasi maksimum sangat besar

Yang menjadi pertanyaan kita adalah benarkah probabilitas dengan konfigurasi maksimum memiliki nilai yang sangat besar daripada konfigurasi lainnya. Jika ya, berarti kita dapat menggunakan persamaan (2.13) bahwa nilai rata-rata sifat assembly sama dengan nilai pada konfigurasi maksimum. Namun jika tidak maka penyederhanaan yang kita impikan tidak terwujud. Pada bagian ini kita akan perlihatkan bahwa probabilitas konfigurasi maksimum bebar-benar memiliki nilai yang jauh lebih besar daripada konfigurasi lainnya.

Mari kita uraikan $\ln W$ dengan deret Taylor di sekitar $\ln W_{maks}$

$$\ln W = \ln W_{maks} + \sum_{s=1}^M \frac{d \ln W}{dn_s} \bigg|_{n_{s,maks}} \delta n_s + \frac{1}{2} \sum_{s,q} \frac{\partial^2 \ln W}{\partial n_s \partial n_q} \bigg|_{n_{s,maks} n_{q,maks}} \delta n_s \delta n_q + \dots \quad (2.14)$$

Karena W hanya fungsi variable n_s saja maka

$$\frac{\partial^2 \ln W}{\partial n_s \partial n_q} = \delta_{s,q} \frac{d^2 \ln W}{dn_s^2} \quad (2.15)$$

Dengan $\delta_{s,q}$ adalah delta Kronecker. Dengan demikian kita dapatkan bentuk aproksimasi untuk $\ln W$

$$\begin{aligned} \ln W &= \ln W_{maks} + \sum_{s=1}^M \frac{d \ln W}{dn_s} \bigg|_{n_{s,maks}} \delta n_s + \frac{1}{2} \sum_{s,q} \delta_{s,q} \frac{d^2 \ln W}{dn_s^2} \bigg|_{n_{s,maks} n_{q,maks}} \delta n_s \delta n_q + \dots \\ &= \ln W_{maks} + \sum_{s=1}^M \frac{d \ln W}{dn_s} \bigg|_{n_{s,maks}} \delta n_s + \frac{1}{2} \sum_s \frac{d^2 \ln W}{dn_s^2} \bigg|_{n_{s,maks}} \delta n_s^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pada titik maksimum terpenuhi

$$\left. \sum_{s=1}^M \frac{d \ln W}{dn_s} \right]_{n_{s,maks}} \delta n_s = 0 \quad (2.17)$$

sehingga

$$\ln W = \ln W_{maks} + \frac{1}{2} \sum_s^M \frac{d^2 \ln W}{dn_s^2} \delta n_s^2 + \dots \quad (2.18)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.7) kita akan dapatkan

$$\begin{aligned} \frac{d \ln W}{dn_s} &= \sum_{s=1}^M (\ln g_s - \ln n_s) \\ \frac{d^2 \ln W}{dn_s dn_q} &= \sum_{s=1}^M \left(\frac{d \ln g_s}{dn_q} - \frac{d \ln n_s}{dn_q} \right) = \sum_{s=1}^M \left(0 - \frac{1}{n_s} \frac{dn_s}{dn_q} \right) = \sum_{s=1}^M \left(0 - \frac{1}{n_s} \delta_{s,q} \right) = -\frac{1}{n_q} \end{aligned}$$

atau

$$\frac{d^2 \ln W}{dn_s dn_s} = \frac{d^2 \ln W}{dn_s^2} = -\frac{1}{n_s} \quad (2.19)$$

Dengan demikian persamaan (2.18) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \ln W - \ln W_{maks} &= \frac{1}{2} \sum_s^M -\frac{1}{n_s} \delta n_s^2 + \dots \\ \ln \left(\frac{W}{W_{maks}} \right) &= -\frac{1}{2} \sum_s^M \left(\frac{\delta n_s}{n_s} \right)^2 n_s + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

Jika kita asumsikan bahwa untuk semua nilai s penyimpangan jumlah sistem pada tiap kelompok energi terhadap jumlah sistem dalam konfigurasi maksimum sama maka

$$\frac{\delta n_s}{n_s} \cong \xi \text{ sehingga diperoleh}$$

$$\ln\left(\frac{W}{W_{maks}}\right) = -\frac{1}{2} \sum_s^M \xi^2 n_s + \dots$$

$$\ln\left(\frac{W}{W_{maks}}\right) = -\frac{1}{2} \xi^2 \sum_s^M n_s = -\frac{1}{2} \xi^2 N$$

Atau

$$\frac{W}{W_{maks}} \cong \exp(-\xi^2 N / 2) \quad (2.21)$$

Sebagai ilustrasi, misalkan rasio deviasi jumlah system pada tiap-tiap kelompok energi terhadap jumlah pada konfigurasi maksimum adalah $\xi = 10^{-10}$. Ini adalah rasio penyimpangan yang sangat kecil. Jumlah sistem dalam suatu assembli seorde dengan bilangan Avogadro, atau $N \approx 10^{23}$. Dengan nilai ini maka

$$\frac{W}{W_{maks}} \cong \exp(-10^{-20} \times 10^{23} / 2) = \exp(-500) \approx 0$$

Jadi dengan rasio deviasi $\xi = 10^{-10}$ kali konfigurasi maksimum, probabilitas peluang konfigurasi tersebut hampir nol. Hal ini membuktikan bahwa nilai sifat assembli pada konfigurasi maksimum sama dengan nilai rata-rata sifat assembli.

Bab 3 Ruang Fasa

Isi Bab Ini

Bab ini berisi diskusi tentang ruang fasa, yaitu ruang yang mengandung koordinat posisi dan momentum. Keadaan gerak sebuah benda sebenarnya lebih lengkap dinyatakan dalam koordinat ruang fasa karena koordinat tersebut sekaligus memberikan informasi tentang posisi dan momentum partikel sekaligus.

Tujuan Bab Ini

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami apa itu ruang fasa, bagaimana mencari volume ruang fasa, dan menentukan kerapatan keadaan dalam ruang fasa. Mahasiswa juga mahir dalam melakukan transformasi kerapatan keadaan dari variabel momentum ke variabel energi.

Apa Yang Perlu dikuasai Lebih Dahulu

Tidak ada pengetahuan pendahuluan yang lebih khusus untuk memahami isi bab ini.

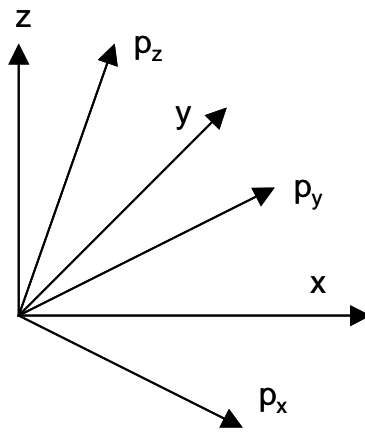
3.1 Definisi Ruang Fasa

Sebelum masuk lebih jauh untuk mencari besaran-besaran fisis suatu assemblie, mari kita diskusikan satu jenis ruang yang dinamakan ruang fasa. Ruang fasa adalah ruang yang dibentuk oleh ruang spasial dan ruang momentum atau ruang spasial dan ruang kecepatan. Kita perlu memahami ruang fasa karena sebenarnya keadaan sistem statistik yang telah dan akan kita bahas adalah keadaan sistem tersebut dalam ruang fasa.

Misalkan kita memiliki sebuah partikel. Posisi partikel dapat diterangkan dengan lengkap oleh tiga koordinat ruang, yaitu x , y , dan z . Tetapi posisi saja tidak lengkap mendeskripsikan dinamika partikel. Kita juga memerlukan informasi tentang kecepatan partikel tersebut. Kecepatan partikel dapat didefinisikan dengan lengkap oleh tiga koordinat kecepatan, yaitu v_x , v_y , dan v_z . Dengan demikian, dinamika sebuah partikel dapat dijelaskan secara lengkap oleh enam buah koordinat, yaitu tiga koordinat ruang: x ,

y, dan z, serta tiga koordinat kecepatan: v_x , v_y , dan v_z . Kita dapat menggabungkan enam koordinat tersebut dalam satu ungkapan, yaitu (x, y, z, v_x, v_y, v_z) .

Karena momentum merupakan perkalian massa dan kecepatan, yaitu $\vec{p} = m\vec{v}$ maka alternatif lain untuk mendeskripsikan dinamika partikel secara lengkap adalah memberikan tiga koordinat spasial dan tiga koordinat momentum. Dalam deskripsi ini, dinamika partikel dapat dijelaskan dengan lengkap jika tiga koordinat spasial dan tiga koordinat momentum dapat ditentukan. Keenam koordinat tersebut digabung dalam satu ungkapan (x, y, z, p_x, p_y, p_z) .



Gambar 3.1 Ilustrasi koordinat ruang fasa.

Ruang yang direpresentasikan oleh koordinat posisi saja disebut ruang spasial. Ruang yang diungkapkan oleh koordinat momentum saja disebut ruang momentum. Ruang yang direpresentasikan oleh gabungan koordinat ruang dan momentum disebut **ruang fasa**.

3.2 Elemen volum ruang fasa

Jika ruang fasa dibangun oleh ruang spasial tiga dimensi dan ruang momentum tiga dimensi maka:

Elemen volum ruang spasial adalah: $dV_s = dx dy dz$

Elemen volum ruang momentum adalah: $dV_p = dp_x dp_y dp_z$

Elemen volum ruang fasa menjadi: $d\Gamma = dV_s dV_p = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$

Jika ruang fasa dibangun oleh ruang spasial dua dimensi dan ruang momentum dua dimensi maka:

Elemen volum ruang spasial adalah: $dS_s = dx dy$

Elemen volum ruang momentum adalah: $dS_p = dp_x dp_y$

Elemen volum ruang fasa menjadi: $d\Gamma = dS_s dS_p = dx dy dp_x dp_y$

Jika ruang fasa dibangun oleh ruang spasial satu dimensi dan ruang momentum satu dimensi maka:

Elemen volum ruang spasial adalah: $dX_s = dx$

Elemen volum ruang momentum adalah: $dP_p = dp_x$

Elemen volum ruang fasa adalah: $d\Gamma = dX_s dP_p = dx dp_x$

Perhatikan bahwa yang dimaksud elemen volum pada penjelasan di atas bisa bermakna umum. Untuk kasus tiga dimensi, yang dimaksud elemen volum adalah elemen volum yang umumnya kita kenal. Untuk kasus dua dimensi, yang dimaksud elemen volum adalah elemen luas, sedangkan untuk kasus satu dimensi, yang dimaksud elemen volum adalah elemen panjang.

3.3 Energi Kinetik

Tinjau elemen kecil volum dalam ruang fasa yang dibatasi oleh koordinat-koordinat berikut ini:

Antara x sampai $x + dx$

Antara y sampai $y + dy$

Antara z sampai $z + dz$

Antara p_x sampai $p_x + dp_x$

Antara p_y sampai $p_y + dp_y$

Antara p_z sampai $p_z + dp_z$

Volum ruang fasa elemen tersebut adalah

$$d\Gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z \quad (3.1)$$

Di dalam elemen volum tersebut, komponen momentum partikel adalah p_x , p_y , dan p_z .

Dengan demikian, energi kinetik partikel yang berada dalam elemen volum tersebut adalah

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2m}([mv_x]^2 + [mv_y]^2 + [mv_z]^2) \\ &= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.4 N Sistem Dalam Ruang Fasa

Di atas kita bahas hanya satu sistem dalam ruang fasa. Bagaimana jika terdapat N sistem? Tiap sistem akan memiliki 6 koordinat fasa yang bebas yang terdiri dari 3 koordinat ruang dan 3 koordinat momentum.

Koordinat sistem pertama $(x_1, y_1, z_1, p_{1x}, p_{1y}, p_{1z})$

Koordinat system kedua $(x_2, y_2, z_2, p_{2x}, p_{2y}, p_{2z})$

.

.

.

dan seterusnya.

Jika system pertama berada pada elemen volum yang dibatasi oleh kordinat-koordinat berikut ini

Antara x_1 sampai $x_1 + dx_1$

Antara y_1 sampai $y_1 + dy_1$

Antara z_1 sampai $z_1 + dz_1$

Antara p_{1x} sampai $p_{1x} + dp_{1x}$

Antara p_{1y} sampai $p_{1y} + dp_{1y}$

Antara p_{1z} sampai $p_{1z} + dp_{1z}$

maka volum elemen ruang fasa yang menjadi lokasi sistem tersebut adalah

$$d\Gamma_1 = dx_1 dy_1 dz_1 dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z}$$

Dengan cara yang sama maka akan kita peroleh elemen volum ruang fasa yang ditempati sistem kedua adalah

$$d\Gamma_2 = dx_2 dy_2 dz_2 dp_{2x} dp_{2y} dp_{2z}$$

dan seterusnya. Dari hasil ini maka kita dapatkan elemen total ruang fasa yang ditempati oleh N buah sistem adalah

$$\begin{aligned} d\Gamma &= dx_1 dy_1 dz_1 dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z} dx_2 dy_2 dz_2 dp_{2x} dp_{2y} dp_{2z} \dots dx_N dy_N dz_N dp_{Nx} dp_{Ny} dp_{Nz} \\ &= \prod_{i=1}^N dx_i dy_i dz_i dp_{ix} dp_{iy} dp_{iz} \\ &= \prod_{i=1}^N d\Gamma_i \end{aligned} \tag{3.3}$$

Di dalam elemen ruang fase tersebut, energi masing-masing sistem adalah

$$E_1 = \frac{1}{2m} (p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2)$$

$$E_2 = \frac{1}{2m} (p_{2x}^2 + p_{2y}^2 + p_{2z}^2)$$

.

.

.

$$E_N = \frac{1}{2m} (p_{Nx}^2 + p_{Ny}^2 + p_{Nz}^2)$$

Dengan demikian energi total N system yang menempati ruang fasa dalam persamaan (3.3) adalah

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + \dots + E_N \\ &= \sum_{i=1}^N E_i \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.5 Menghitung Jumlah Keadaan

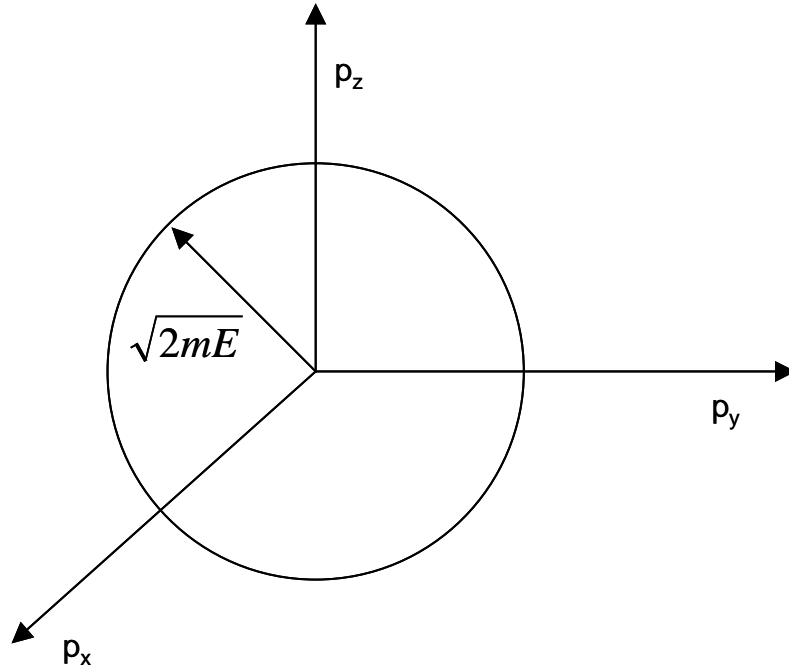
Pada penurunan fungsi distribusi kita sudah membagi energi atas kelompok-kelompok energi dari kelompok ke-1 hingga kelompok ke- M . Tinjau sebuah sistem dengan energi $E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$. Penulisan energi di atas dapat dibalik sebagai berikut

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = (\sqrt{2mE})^2 \quad (3.5)$$

Bandingkan persamaan (3.5) dengan persamaan untuk bola berikut ini

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 \quad (3.6)$$

Persamaan (3.5) dan (3.6) persis sama. Pada persamaan (3.5), yang berperan sebagai jari-jari adalah $\sqrt{2mE}$. Ini berarti, dalam koordinat momentum, nilai-nilai p_x , p_y , dan p_z yang memberikan E yang konstan adalah yang berada pada permukaan bola dengan jari-jari $\sqrt{2mE}$. Satu kulit bola mewakili satu nilai energi. Makin besar jari-jari bola maka makin besar energi yang dimiliki sistem yang berada pada kulit bola momentum tersebut.



Gambar 3.1 Bola pada ruang momentum. Jari-jari bola adalah $\sqrt{2mE}$

Jika kita bagi energi assempli atas kelompok-kelompok energi maka tiap kelompok akan diwakili oleh kulit bola dengan ketebalan tertentu. Mari kita ambil elemen volum pada kulit bola dengan jari-jari $\sqrt{2mE}$ dan ketebalan $d(\sqrt{2mE})$. Luas kulit bola tersebut adalah

$$S_p = 4\pi(\sqrt{2mE})^2 = 8\pi mE \quad (3.7)$$

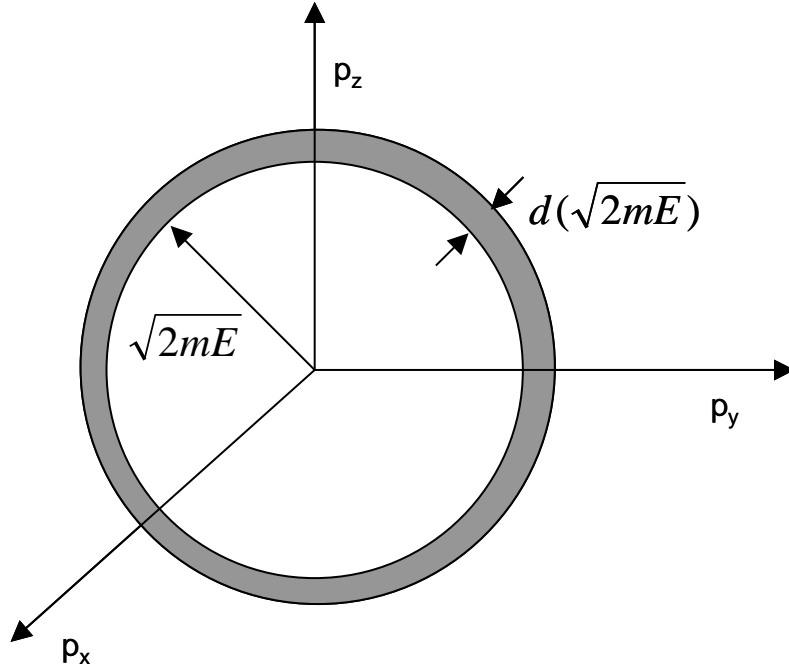
Tebal kulit bola adalah

$$d(\sqrt{2mE}) = \sqrt{2m} d(\sqrt{E}) = \sqrt{2m} \times \frac{1}{2} E^{-1/2} dE = \frac{\sqrt{2m}}{2} E^{-1/2} dE \quad (3.8)$$

Dengan demikian, volum kolit bola adalah

$$dV_p = S_p d(\sqrt{2mE})$$

$$= 8\pi m E \frac{\sqrt{2m}}{2} E^{-1/2} dE = 2\pi(2m)^{3/2} E^{1/2} dE \quad (3.9)$$



Gambar 3.2 Elemen volum dalam ruang momentum berupa kulit bola

Volum ruang fasa yang ditempati oleh sistem yang berada pada kulit bola momentum serta dalam elemen volum spasial $dV_s = dxdydz$ adalah

$$d\Gamma = dxdydz 2\pi(2m)^{3/2} E^{1/2} dE \quad (3.10)$$

Volum ruang fasa yang ditempati oleh sistem pada semua ruang spasial, tetapi tetap berada dalam kulit bola momentum diperoleh dengan mengintegrasikan persamaan (3.10) pada elemen ruang spasial. Hasilnya adalah

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_p &= \int dxdydz 2\pi(2m)^{3/2} E^{1/2} dE \\ &= 2\pi V(2m)^{3/2} E^{1/2} dE \end{aligned} \quad (3.11)$$

dengan $V = \int dx dy dz$ adalah volum total ruang spasial yang tidak lain merupakan volum assembli itu sendiri.

Kita belum mengetahui berapa kerapatan keadaan dalam ruang fasa. Untuk sementara kita menganggap kerapatan keadaan tersebut adalah B . Jumlah keadaan dalam elemen ruang fasa $\Delta\Gamma_p$ sama dengan volum ruang fasa dikali kerapatannya, yaitu

$$B\Delta\Gamma_p = 2\pi VB(2m)^{3/2} E^{1/2} dE \quad (3.12)$$

Jika kelompok-kelompok energi yang kita bangun di dalam assembli diwakili oleh kulit bola maka kita dapat menyamakan g_s dalam persamaan (2.11) dengan $B\Delta\Gamma_p$ pada persamaan (3.12). Akhirnya, kita dapatkan ungkapan untuk g_s sebagai

$$g_s = 2\pi VB(2m)^{3/2} E^{1/2} dE \quad (3.13)$$

3.6 Menentukan n_s

Setelah mengetahui bentuk g_s dalam fungsi kontinu yaitu yang tertuang dalam persamaan (3.13), selanjutnya kita akan menentukan n_s dalam bentuk kontinu juga. Dalam bentuk diskrit, hubungan antara n_s dan g_s adalah

$$n_s = g_s e^{\alpha + \beta E_s} \quad (2.11)$$

Pada persamaan di atas, n_s adalah jumlah sistem di dalam assembli. Sekarang kita mendefinisikan karapat sistem, yaitu jumlah sistem per satuan energi. Untuk kerapatan system kita gubakan symbol $n(E)$. Dengan demikian, jumlah sistem dalam kulit bola yang dibatasi oleh energi E dan $E + dE$ adalah $n(E)dE$. Dengan mengganti n_s dengan $n(E)dE$ dan g_s dengan persamaan (3.13) kita dapatkan hubungan antara jumlah sistem dan kerapatan keadaan dalam bentuk kontinu sebagai berikut

$$\begin{aligned}
n(E)dE &= 2\pi VB(2m)^{3/2} E^{1/2} dE \times e^{\alpha+\beta E} \\
&= 2\pi VB(2m)^{3/2} e^{\alpha+\beta E} E^{1/2} dE
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.7 Volum Elemen Ruang Fasa Dinyatakan Dalam Momentum dan Laju

Persamaan (3.11) menyatakan elemen volum ruang fasa dinyatakan dalam variabel energi. Kita juga dapat menyatakan elemen volum tersebut dalam variabel momentum atau laju. Kita mulai dari hubungan $E = p^2 / 2m$ sehingga

$$E^{1/2} = \left(\frac{1}{2m} \right)^{1/2} p \tag{3.15}$$

$$dE = \frac{1}{m} p dp \tag{3.16}$$

Substitusi persamaa (3.15) dan (3.16) ke dalam persamaan (3.11) diperoleh ungkapan elemen ruang fasa dinyatakan dalam momentum sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\Delta \Gamma_p &= 2\pi V(2m)^{3/2} \times \left(\frac{1}{2m} \right)^{1/2} p \times \frac{1}{m} p dp \\
&= 4\pi V p^2 dp
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Mengingat hubungan antara momentum dan laju $p = mv$ maka $dp = m dv$. Konsekuensinya, kita dapat menulis eleme ruang fasa dalam koordinat posisi sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
\Delta \Gamma_p &= 4\pi V(mv)^2 (m dv) \\
&= 4\pi V m^3 v^2 dv
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.16) maka kita dapatkan $g_s = B\Delta\Gamma_p = 4\pi BVm^3 v^2 dv$ dan kerapatan keadaan menjadi

$$\begin{aligned}
 n(v)dv &= g_s e^{\alpha + \beta E} \\
 &= 4\pi BVm^3 v^2 dv \times e^{\alpha + \beta(mv^2/2)} \\
 &= (4\pi BVm^3 e^\alpha) v^2 e^{-mv^2/2kT} dv
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Hasil yang kita peroleh di atas akan sering kita jumpai pada bab-bab berikutnya, khususnya saat melakukan transformasi dari penjumlahan diskrit ke integral kontinu.

Bab 4 Menentukan Parameter Statistik

Isi Bab Ini

Bab ini berisi penentuan parameter α dan β yang terdapat dalam fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann. Parameter-parameter tersebut telah diperkenalkan untuk menampung kekekalan energi dan jumlah partikel yang dimiliki assembli.

Tujuan Bab Ini

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami bagaimana menentukan parameter α dan β dalam fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann dan alasan-alasan yang digunakan dalam proses penentuan parameter-parameter tersebut.

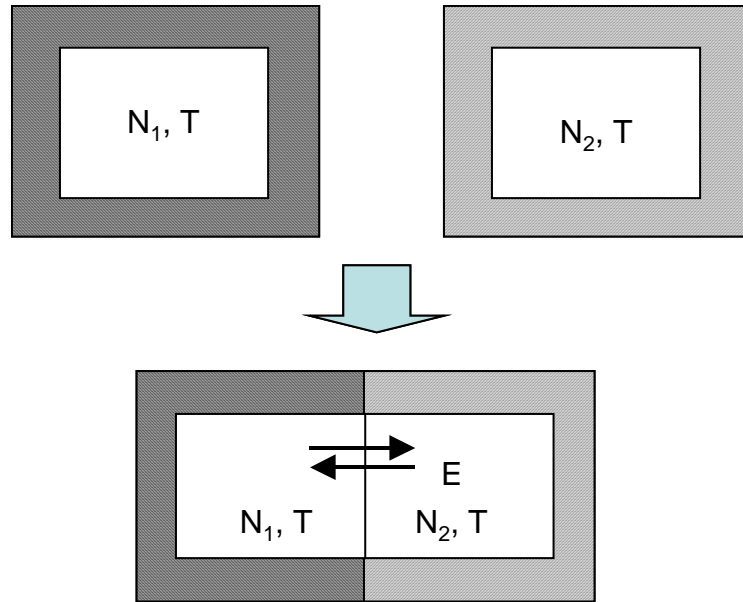
Apa Yang Perlu dikuasai Lebih Dahulu

Pemahaman tentang isi Bab 2 dan Bab 3 sangat penting untuk mengikuti penjelasan dalam bab ini. Juga pemahaman tentang konsep entropi yang dipelajari di termodinamika serta dasar prinsip ekipartisi energi yang dipelajari pada gas ideal juga sangat membantu dalam memahami isi bab ini.

4.1 Menentukan Parameter β

Ketika mencari konfigurasi dengan probabilitas terbesar, kita memperkenalkan dua pengali Lagrange, yaitu α dan β untuk mengakomodasi syarat batas bahwa jumlah sistem dan energi assembli harus konstan. Pertanyaan berikutnya adalah adakah makna fisis parameter-parameter tersebut? Inilah yang kita bahas sekarang.

Sudah kita tunjukkan bahwa jumlah sistem yang menempati kelompok energi dengan energi rata-rata E_s dan mengandung keadaan sebanyak g_s memenuhi persamaan (2.11) yaitu $n_s = g_s e^{\alpha + \beta E_s}$. Secara fisis kita meyakini bahwa tidak mungkin ada sistem yang memiliki energi tak berhingga. Oleh karena itu jika $E_s \rightarrow \infty$ maka haruslah $n_s \rightarrow 0$. Ini hanya mungkin terpenuhi jika parameter β bernilai negatif. Lalu, bergantung pada besaran apakah β ?



Gambar 4.1 Dua buah assembli terisolasi digabung setelah membuka masing-masing satu sisinya. Pada batas dua assembli diijinkan pertukaran energi tetapi tidak diijinkan pertukaran partikel

Setelah mengetahui bahwa nilai parameter β harus negatif mari kita mencari bentuk ekspresi dari parameter tersebut. Untuk mempermudah mari kita tinjau dua assembli terisolasi dan berada pada suhu yang sama T . Kesamaan suhu bermakna ke dua assembli berada dalam kesetimbangan termal. Assembli pertama memiliki N_1 sistem dan assembli kedua mengandung N_2 sistem. Kemudian salah satu sisi masing-masing assembli dilepas dan dua assembli dikontakkan pada sisi yang dilepas tersebut. Setelah dikontakkan dua assembli menjadi sebuah assembli baru yang tetap terisolasi dari lingkungan. Misalkan pada permukaan kontak dua assembli dipasang dinding sedemikian rupa sehingga tidak ada pertukaran sistem antara dua assembli namun pertukaran energi diperbolehkan. Akibatnya, sebelum dan sesudah dua assembli disatukan, jumlah partikel di assembli kiri maupun assembli kanan tidak berubah. Tetapi energi yang dimiliki masing-masing assembli awal bisa berubah (lihat Gbr. 4.1).

Karena assembli gabungan terisolasi dari lingkungan maka pertukaran energi antar dua assembli awal tidak mengubah energi total assembli gabungan. Dengan persyaratan di atas kita dapatkan beberapa konstrain berikut ini

$$N_1 = \sum_s n_{1s} = \text{konstan} \quad (4.1)$$

$$N_2 = \sum_s n_{2s} = \text{konstan} \quad (4.2)$$

$$U = U_1 + U_2 = \sum_s n_{1s} E_{1s} + \sum_s n_{2s} E_{2s} = \text{konstan} \quad (4.3)$$

Apabila kita nyatakan dalam bentuk diferensial, persamaan (4.1) sampai (4.3) berbentuk

$$\delta N_1 = \sum_s \delta n_{1s} = 0 \quad (4.4)$$

$$\delta N_2 = \sum_s \delta n_{2s} = 0 \quad (4.5)$$

$$\delta U = \sum_s E_{1s} \delta n_{1s} + \sum_s E_{2s} \delta n_{2s} = 0 \quad (4.6)$$

Sebelum ke dua assembli digabung maka jumlah penyusunan sistem pada keadaan-keadaan energi di masing-masing assembli memenuhi

$$W_1 = N_1! \prod_s \left(\frac{g_{1s}^{n_{1s}}}{n_{1s}!} \right) \quad (4.7)$$

$$W_2 = N_2! \prod_s \left(\frac{g_{2s}^{n_{2s}}}{n_{2s}!} \right) \quad (4.8)$$

Ketika dua assembli digabung maka probabilitas penyusunan sistem-sistem pada assembli gabungan tersebut merupakan perkalian probabilitas penyusunan pada masing-masing assembli awal, yaitu

$$W = W_1 W_2$$

atau bila diungkapkan dalam notasi logaritma menjadi

$$\ln W = \ln W_1 + \ln W_2 \quad (4.9)$$

Kita akan mencari konfigurasi dengan probabilitas maksimum dengan memperhatikan tiga konstrain pada persamaan (4.4) sampai (4.6). Ini menyaratkan pengenalan tiga pengali Langrange α_1 , α_2 , dan β . Syarat maksimum memenuhi persamaan

$$\delta \ln W + \alpha_1 \delta N_1 + \alpha_2 \delta N_2 + \beta \delta U = 0 \quad (4.10)$$

Dengan menggunakan persamaan (4.9) maka

$$\delta \ln W = \delta \ln W_1 + \delta \ln W_2 = \sum_s \frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} \delta n_{1s} + \sum_s \frac{\partial \ln W_2}{\partial n_{2s}} \delta n_{2s} \quad (4.11)$$

Substitusi persamaan (4.4), (4.5), (4.6), dan (4.11) ke dalam persamaan (4.10) diperoleh

$$\sum_s \frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} \delta n_{1s} + \sum_s \frac{\partial \ln W_2}{\partial n_{2s}} \delta n_{2s} + \alpha_1 \sum_s \delta n_{1s} + \alpha_2 \sum_s \delta n_{2s} + \beta \left[\sum_s E_{1s} \delta n_{1s} + \sum_s E_{2s} \delta n_{2s} \right] = 0$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_s \left[\frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} + \alpha_1 + \beta E_{1s} \right] \delta n_{1s} + \sum_s \left[\frac{\partial \ln W_2}{\partial n_{2s}} + \alpha_2 + \beta E_{2s} \right] \delta n_{2s} = 0 \quad (4.12)$$

Agar persamaan (4.12) selalu terpenuhi untuk variasi δn_{1s} dan δn_{2s} berapa pun maka suku dalam kurung pada harus nol, atau

$$\frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} + \alpha_1 + \beta E_{1s} = 0 \quad (4.13)$$

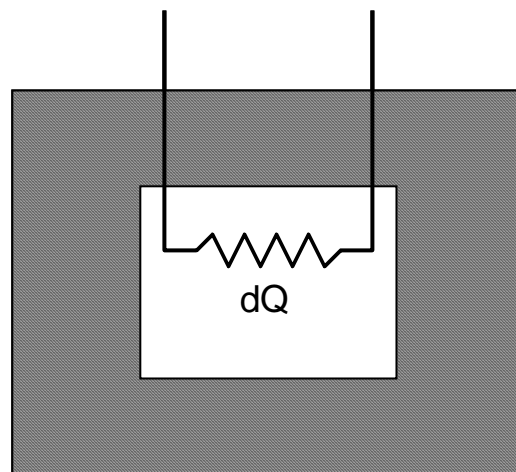
$$\frac{\partial \ln W_2}{\partial n_{2s}} + \alpha_2 + \beta E_{2s} = 0 \quad (4.14)$$

Persamaan (4.13) dan (4.14) mengandung β yang sama. Ini mengisyaratkan bahwa jika β merupakan fungsi parameter termodinamika maka parameter yang menentukan β haruslah yang tidak berubah sebelum dan sesudah dua assembli digabung. Parameter tersebut hanya suhu. Sebelum dan sesudah dua assembli digabung suhunya sama. Jadi kita simpulkan bahwa β hanya merupakan fungsi suhu, atau

$$\beta = \beta(T) \quad (4.15)$$

4.2 Bagaimana Kebergantungan β Pada Suhu?

Setelah kita mengetahui bahwa β merupakan fungsi suhu maka langkah selanjutnya adalah menentukan kebergantungan β terhadap suhu. Untuk maksud mari kita lihat assembli pada Gbr. 4.2 berikut ini. Di dalam assembli kita letakkan sebuah pemanas yang dapat mensuplai kalor ke dalam assembli.



Gambar 4.2 Kalor disuplai ke dalam assembli

Energi dalam yang dimiliki assembli adalah U . Jika ke dalam assembli diberikan tambahan kalor dQ maka kalor akan mengubah energi dalam assembli dan melakukan kerja pada assembli tersebut. Hubungan antara perubahan energi dalam, kalor yang diberikan dan kerja yang dilakukan memenuhi hukum II termodinamika, yaitu $dU = dQ + dW$. Dengan menggunakan definisi $dW = -pdV$ maka

$$dU = dQ - pdV \quad (4.16)$$

Karena ada kemungkinan volum assembli berubah ketika menyerap kalor maka tingkat energi dalam assembli juga mungkin berubah. Akibatnya, energi rata-rata sistem dalam satu kelompok energi, yaitu E_s , juga mungkin berubah sehingga secara umum terpenuhi $\delta E_s \neq 0$. Dengan demikian. Mengingat $U = \sum_s n_s E_s$ maka secara umum dalam bentuk diferensial dari U adalah

$$\delta U = \sum_s E_s \delta n_s + \sum_s n_s \delta E_s \quad (4.17)$$

Bagaimana hubungan persamaan (4.16) dan (4.17)? Masih ingat pelajaran fisika modern saat membahas partikel kuantum yang terperangkap dalam kotak (sumur potensial)? Di situ dibahas bahwa tingkat energi partikel dalam kotak bergantung pada ukuran kotak. Makin besar ukuran kotak maka tingkat-tingkat energi makin rapat dan menjadi kontinu ketika ukuran kotak menuju tak berhingga. Kelakuan serupa juga dapat diterapkan di sini. Ketika dalam assembli disuplai kalor, perubahan tingkat energi dalam assembli semata-mata disebabkan perubahan ukuran spasial assembli. Jadi, perubahan tingkat energi dalam assembli, yaitu δE_s merupakan kontribusi dari perubahan ukuran assembli. Dengan demikian, korelasi antara persamaan (4.16) dan (4.17) menjadi sebagai berikut:

Suku pertama pada persamaan (4.17) merupakan kontribusi dari pemberian kalor

Suku kedua dalam persamaan (4.17) merupakan kontribusi dari perubahan volum assembli.

Dengan demikian kita dapat mengambil kesimpulan berikut ini

$$\sum_s E_s \delta n_s = \delta Q \quad (4.18)$$

$$\sum_s n_s \delta E_s = -pdV \quad (4.19)$$

Jika kita menganggap bahwa dinding assembli sangat tegar sehingga tidak terjadi perubahan volum pada saat penyerapan kalor δQ maka

$$\delta U = \delta Q \quad (4.20)$$

Dengan demikian, syarat konfigurasi dengan probabilitas maksimum menjadi

$$\delta \ln W + \alpha \delta N + \beta \delta Q = 0 \quad (4.21)$$

Untuk assembli yang terisolasi, jumlah sistem tidak berubah sehingga $\delta N = 0$. Akibat dari pembatasan tersebut maka persamaan (4.21) menjadi $\delta \ln W + \beta \delta Q = 0$ atau

$$\delta \ln W = -\beta \delta Q \quad (4.22)$$

Ingat $\ln W$ merupakan sebuah fungsi sehingga $\delta \ln W$ merupakan diferensial sejati, yaitu merupakan selisih dua nilai berdekatan. Tetapi δQ bukan merupakan diferensial sejati. δQ tidak dapat dinyatakan sebagai selisih dua nilai dari suatu fungsi. Dengan demikian tampak bahwa ruas kiri dan kanan persamaan (4.22) tidak konsisten. Agar konsisten maka ruas kanan pun harus merupakan diferensial sejati. Dalam pelajaran termodinamika, sudah dibahas bahwa δQ bisa diubah menjadi diferensial sejati jika dibagi dengan suhu. Jadi, walaupun δQ bukan diferensial sejati tetapi $\delta Q/T$ merupakan

diferensial sejati. Di termodinamika dibahas bahwa $\delta Q/T$ merupakan sebuah besaran termodinamika yang bernama entropi. Dengan demikian, agar ruas kanan persamaan (4.22) menjadi diferensial sejati maka haruslah $\beta \propto 1/T$. Dan karena kita menunjukkan bahwa β berharga negatif, maka bentuk umum β sebagai fungsi suhu menjadi

$$\beta = -\frac{1}{kT} \quad (4.23)$$

dengan k sebuah konstanta. Nanti akan kita buktikan bahwa k tidak lain daripada konstanta Boltzmann.

4.3 Menentukan β dari Enenrgi Rata-Rata

Cara lain menentukan parameter β adalah menggunakan konsep energi rata-rata yang diturunkan menggunakan teori kinetik gas ideal. Satu atom atau molekul gas yang hanya melakukan gerak translasi dalam tiga arah koordinat ruang memiliki energi kinetik rata-rata

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT \quad (4.24)$$

dengan T suhu mutlak dan k konstanta Boltzmann. Kita bisa mendapatkan energi rata-rata tersebut dengan menggunakan kosep kerapatan keadaan yang telah kita pelajari pada bab terdahulu. Mari kita lakukan di sini.

Dalam Bab 3 kita sudah menurunkan jumlah partikel yang berada dalam jangkauan energi antara E sampai $E + dE$ adalah

$$n(E)dE = 2\pi VB(2m)^{3/2} e^{\alpha + \beta E} E^{1/2} dE$$

Energi rata-rata partikel dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}
\overline{E} &= \frac{\int_0^{\infty} E n(E) dE}{\int_0^{\infty} n(E) dE} \\
&= \frac{\int_0^{\infty} E \times 2\pi VB(2m)^{3/2} e^{\alpha+\beta E} E^{1/2} dE}{\int_0^{\infty} 2\pi VB(2m)^{3/2} e^{\alpha+\beta E} E^{1/2} dE} = \frac{2\pi VB(2m)^{3/2} e^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{3/2} dE}{2\pi VB(2m)^{3/2} e^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{1/2} dE} \\
&= \frac{\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{3/2} dE}{\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{1/2} dE} \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Mari kita selesaikan integral pada persamaan (4.25) dengan melihat pembilang terlebih dahulu. Untuk menyelesaikan integral tersebut kita misalkan

$$e^{\beta E} dE = dx \tag{4.26a}$$

$$E^{3/2} = y \tag{4.26b}$$

Dengan melakukan integral pada dua sisi persamaan (4.26) diperoleh

$$x = \frac{1}{\beta} e^{\beta E}$$

dan dengan melakukan diferensial pada persamaan (4.26b) diperoleh

$$dy = \frac{3}{2} E^{1/2} dE$$

Selanjuta kita menggunakan aturan rantai untuk integral $\int y dx = xy - \int x dy$. Dengan aturan ini maka kita dapat menulis bagian pembilang persamaan (4.25) sebagai

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{3/2} dE &= \left[\frac{1}{\beta} e^{\beta E} E^{3/2} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\beta} e^{\beta E} \right) \left(\frac{3}{2} E^{1/2} dE \right) \\
&= \left[\frac{1}{\beta} e^{\beta \times \infty} \infty^{3/2} - \frac{1}{\beta} e^{\beta \times 0} 0^{3/2} \right] - \frac{3}{2\beta} \int_0^{\infty} E^{1/2} e^{\beta E} dE
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Karena β negatif maka $e^{\beta \times \infty} \rightarrow 0$ dan menuju nol lebih cepat daripada membesarnya $\infty^{3/2}$ sehingga perkalian $e^{\beta \times \infty} \infty^{3/2} \rightarrow 0$. Dengan sifat ini maka suku pertama di sisi kanan persamaan (4.27) yaitu yang berada di dalam kurung siku nilainya nol dan integral pembilang di persamaan (4.25) menjadi

$$\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{3/2} dE = -\frac{3}{2\beta} \int_0^{\infty} E^{1/2} e^{\beta E} dE \tag{4.28}$$

Substitusi persamaan (4.28) ke dalam persamaan (4.25) didapatkan energi rata-rata system menjadi

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{3/2} dE}{\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{1/2} dE} = -\frac{3}{2\beta} \frac{\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{1/2} dE}{\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{1/2} dE} = -\frac{3}{2\beta}$$

Karena energi rata-rata ini harus sama dengan $3kT/2$ maka $-3/2\beta = 3kT/2$ sehingga diperoleh ungkapan untuk β

$$\beta = -\frac{1}{kT}$$

yang persis sama dengan persamaan (4.23). Hasil ini pun membuktikan bahwa k benar-benar merupakan konstanta Boltzmann karena berasal dari ungkapan energi rata-rata system.

4.4 Menentukan Parameter α

Setelah mengetahui ungkapan untuk g_s , kita siap menentukan parameter pengali Lagrange α . Kita mulai dari hubungan $n_s = g_s e^{\alpha + \beta E_s}$. Selanjutnya kita lakukan penjumlahan untuk semua s yang mungkin

$$\sum_s n_s = \sum_s g_s e^{\alpha + \beta E_s} = e^\alpha \sum_s g_s e^{\beta E_s}$$

Penjumlahan di ruas kiri adalah jumlah total sistem. Jadi

$$N = e^\alpha \sum_s g_s e^{\beta E_s} \quad (4.29)$$

Mari kita fokuskan pada suku penjumlahan di ruas kanan persamaan (4.29). Kita ganti g_s dengan bentuk kontinu yang diberikan oleh persamaan (3.13). Penjumlahan selanjutnya diganti dengan integral pada semua jangkaiaw energi yang mungkin, yaitu dari $E = 0$ sampai $E = \infty$. Bentuk integral yang dimaksud adalah

$$\begin{aligned} N &= e^\alpha \int_0^\infty 2\pi V B (2m)^{3/2} e^{\beta E} E^{1/2} dE \\ &= 2\pi V B (2m)^{3/2} e^\alpha \int_0^\infty e^{\beta E} E^{1/2} dE \end{aligned} \quad (4.30)$$

Untuk menyelesaikan integral (4.30) mari kita mendefinisikan $\beta E = -y$ sehingga

$$E = -\frac{y}{\beta}, \quad (4.31a)$$

$$dE = -\frac{1}{\beta} dy, \quad (4.31b)$$

dan

$$E^{1/2} = \left(-\frac{y}{\beta}\right)^{1/2} = \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{1/2} y^{1/2} \quad (4.31c)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (4.31a) sampai (4.31c) maka suku integral di ruas kanan persamaan (4.30) menjadi

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{1/2} dE &= \int_0^{\infty} e^{-y} \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{1/2} y^{1/2} \left(-\frac{1}{\beta}\right) dy \\ &= \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{1/2} dy = \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

di mana $\Gamma(x)$ adalah fungsi gamma. Dapat dibuktikan secara analitik (walaupun agak panjang) dan juga sudah ditabelkan bahwa $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ sehingga

$$\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{1/2} dE = \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (4.32)$$

Akhirnya, substitusi persamaan (4.32) ke dalam (4.30) diperoleh

$$N = 2\pi V B (2m)^{3/2} e^{\alpha} \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (4.33)$$

Karena kita sudah membuktikan $\beta = -1/kT$ maka

$$N = 2\pi V B (2m)^{3/2} e^{\alpha} (kT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= VB(2\pi mkT)^{3/2} e^{\alpha}$$

sehingga parameter α

$$e^{\alpha} = \frac{N}{VB(2\pi mkT)^{3/2}}$$

atau

$$\alpha = \ln \left[\frac{N}{VB(2\pi mkT)^{3/2}} \right] \quad (4.34)$$

Hingga saat ini kita sudah lengkap menentukan parameter-parameter fungsi distribusi klasik yang semula merupakan pengali Lagrange yang diperkenalkan untuk memperhitungkan jumlah partikel konstan dan energi total konstan.

Bab 5 Statistik Bose-Einstein

Isi Bab Ini

Bab ini berisi perumusan statistik Bose-Einstein untuk assembli boson, yaitu partikel kuantum dengan spin merupakan kelipatan bulat dari $h/2\pi$. Contoh partikel boson adalah foton, fonon, dan atom helium.

Tujuan Bab Ini

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami bagaimana proses membangun statistik Bose-Einstein dengan menggunakan prinsip statistik murni yang digabungkan dengan prinsip kekekalan dalam fisika seperti kekekalan energi dan jumlah partikel.

Apa Yang Perlu dikuasai Lebih Dahulu

Untuk memahami penurunan fungsi distribusi Bose-Einstein mahasiswa perlu memahami prinsip permutasi untuk benda-benda yang tidak dapat dibedakan, sifat yang ditunjukkan oleh sebuah besaran yang nilainya kekal (konstan), serta bagaimana mencari nilai maksimum dari sebuah fungsi. Pemahaman tentang penurunan distribusi Maxwell-Boltzmann juga merupakan modal berharga untuk memahami penurunan distribusi Bose-Einstein secara lebih mudah.

5.1 Sifat Dasar Boson

Penyusunan partikel yang kita bahas pada bab sebelumnya berlaku untuk partikel dapat dibedakan. Partikel semacam ini dikenal dengan partikel klasik. Contoh partikel klasik adalah atom dan molekul gas. Dapat dibedakan di sini bukan berarti kita dapat melihat dengan mata telanjang bahwa jika ada dua partikel maka kita dapat membedakan mana partikel A dan mana partikel B. Dengan mata telanjang atau bahkan dengan mikroskop pun kita tidak dapat membedakan satu partikel dengan partikel lainnya. Dapat dibedakan di sini hanya dari sudut pandang teori (konsep). Jika ada dua partikel yang memiliki energi berbeda dipertukarkan maka kita menganggap akan mendapatkan penyusunan yang baru.

Kalau kita melangkah ke partikel sub atomik seperti proton dan elektron maka sifat dapat dibedakan hilang. Pertukaran dua partikel yang menempati tingkat energi berbeda tidak menghasilkan jenis penyusunan baru. Dikatakan partikel-partikel ini tidak terbedakan.

Sifat partikel sub atomik yang tidak dapat dibedakan dapat dipahami dari konsep gelombang partikel. Panjang gelombang de Broglie partikel-partikel tersebut memenuhi $\lambda = h/mv$ dengan m massa partikel dan v laju partikel. Karena m untuk partikel sub atomik sangat kecil maka panjang gelombang λ cukup besar. Panjang gelombang yang besar menyebabkan fungsi gelombang dua partikel yang berdekatan tumpang tindih (berimpitan). Kalau dua fungsi gelombang tumpang tindih maka kita tidak dapat lagi membedakan dua partikel yang memiliki fungsi-fungsi gelombang tersebut.

Kondisi sebaliknya dijumpai pada partikel klasik seperti molekul-molekul gas. Massa partikel sangat besar sehingga λ sangat kecil. Akibatnya tidak terjadi tumpang tindih fungsi gelombang partikel-partikel tersebut, sehingga secara prinsip partikel-partikel tersebut dapat dibedakan.

Akan kita lihat nanti bahwa pada suhu yang sangat tinggi partikel sub atomik berperilaku seperti partikel klasik. Pada suhu yang sangat tinggi kecepatan partikel sangat besar sehingga panjang gelombangnya sangat kecil. Akibatnya, tumpang tindih gelombang partikel-partikel menjadi hilang dan partikel menjadi terbedakan.

Sistem kuantum yang akan kita bahas ada dua macam yaitu boson dan fermion. Boson adalah sistem yang memiliki spin kelipatan bulat dari $h/2\pi$. Sistem ini tidak memenuhi prinsip eksklusi Pauli sehingga satu tingkat energi dapat ditempati oleh partikel dalam jumlah berapa pun. Sebaliknya, fermion memiliki spin yang merupakan kalipatan ganjil dari $1/2(h/2\pi)$. Sistem ini memenuhi prinsip eksklusi Pauli. Tidak ada dua partikel atau lebih yang memiliki keadaan yang sama.

5.2 Konfigurasi Boson

Mari kita mulai dengan menurunkan statistik untuk boson. Statistik ini dinamakan statistik Bose-Einstein. Agar dapat menentukan fungsi distribusi Bose-Einstein, kita terlebih dahulu harus menentukan konfigurasi dengan probabilitas paling besar. Konfigurasi ini memiliki probabilitas yang jauh lebih besar daripada konfigurasi-

konfigurasi lainnya sehingga hampir seluruh waktu sistem boson membentuk konfigurasi tersebut. Sifat rata-rata assembly dapat dianggap sama dengan sifat pada konfigurasi maksimum tersebut.

Kita tetap membagi tingkat energi sistem-sistem dalam assembly atas M kelompok sebagai berikut:

Kelompok-1 memiliki jumlah keadaan g_1 dan energi rata-rata E_1

Kelompok-2 memiliki jumlah keadaan g_2 dan energi rata-rata E_2

.

.

.

Kelompok- s memiliki jumlah keadaan g_s dan energi rata-rata E_s

.

.

.

Kelompok- M memiliki jumlah keadaan g_M dan energi rata-rata E_M

Kita akan menentukan berapa cara penyusunan yang dapat dilakukan jika:

Ada n_1 sistem di kelompok-1

Ada n_2 sistem di kelompok-2

.

.

.

Ada n_s sistem di kelompok- s

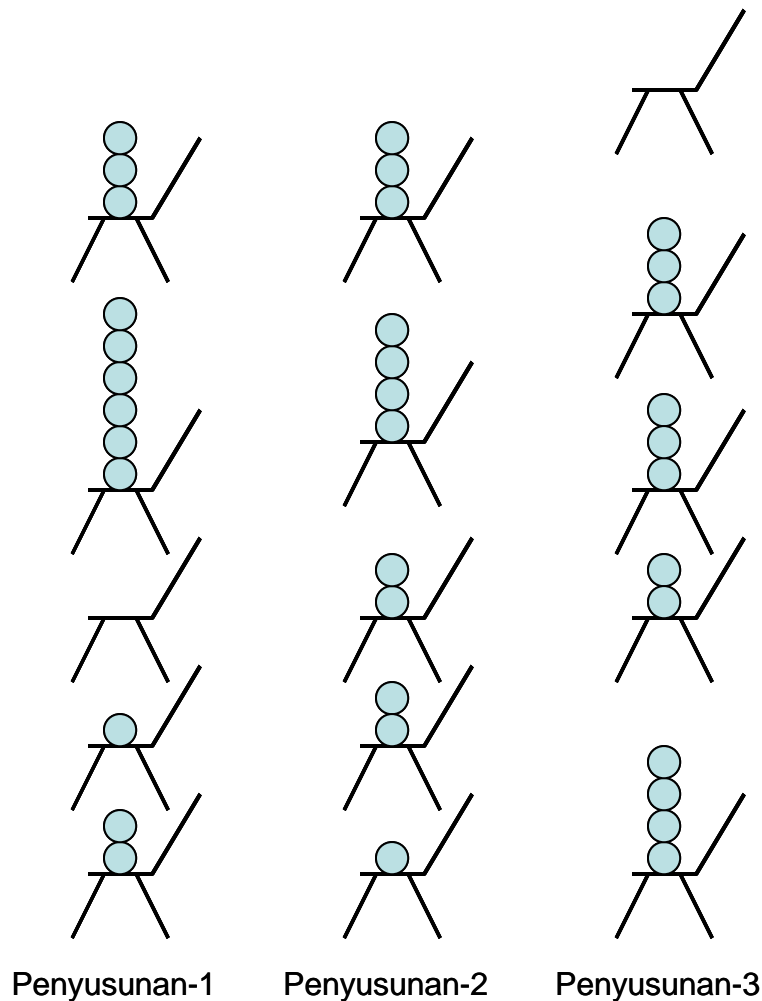
.

.

.

Ada n_M sistem di kelompok- M

Mari kita tinjau kelompok-1 di mana terdapat g_1 keadaan dan n_1 sistem. Mari kita analogikan satu keadaan sebagai sebuah kursi dan satu sistem dianalogikan sebagai sebuah benda yang akan diletakkan di kursi tersebut. Satu kursi dapat saja kosong atau menampung benda dalam jumlah berapa saja. Untuk menghitung jumlah penyusunan benda, kita dapat melakukannya sebagai berikut. Lihat Gbr. 5.1.



Gambar 5.1 Penyusunan benda dan kursi analog dengan penyusunan boson dalam tingkat-tingkat energi. Untuk merepresentasikan sistem boson, bagian paling bawah harus selalu kursi.

Dari Gbr 5.1, apa pun cara penyusunan yang kita lakukan, yang berada di ujung bawah selalu kursi karena benda harus disangga oleh kursi (sistem harus menempati tingkat

energi). Oleh karena itu, jika jumlah total kursi adalah g_1 maka jumlah total kursi yang dapat dipertukarkan hanya $g_1 - 1$ karena salah satu kursi harus tetap di ujung bawah. Bersama dengan partikel sebanyak n_1 , maka jumlah total benda yang dapat dipertukarkan dengan tetap memenuhi sifat boson adalah $(g_1 - 1) + n_1 = g_1 + n_1 - 1$. Akibatnya, jumlah cara penyusunan yang dapat dilakukan adalah $(g_1 + n_1 - 1)!$.

Karena sistem boson tidak dapat dibedakan satu dengan lainnya, maka pertukaran sesama partikel dan sesama kursi tidak menghasilkan penyusunan yang berbeda. Jumlah penyusunan sebanyak $(g_1 + n_1 - 1)!$ secara implisit memperhitungkan jumlah pertukaran antar partikel dan antar kursi. Jumlah pertukaran antar partikel adalah $n_1!$ dan jumlah pertukaran antar kursi adalah $g_1!$. Oleh karena itu, jumlah penyusunan yang berbeda untuk n_1 boson di dalam g_1 keadaan hanyalah

$$\frac{(g_1 + n_1 - 1)!}{n_1! g_1!} \quad (5.1)$$

Hal yang sama berlaku untuk kelompok-2 yang mengandung g_2 keadaan dengan populasi n_2 sistem. Jumlah cara penyusunan yang berbeda system-siste, ke dalam keadaan-keadaan tersebut adalah

$$\frac{(g_2 + n_2 - 1)!}{n_2! g_2!} \quad (5.2)$$

Terakhir hingga kempok energi ke-M, jumlah cara penysunan yang berbeda untuk n_M sistem dalam g_M keadaan adalah

$$\frac{(g_M + n_M - 1)!}{n_M! g_M!} \quad (5.3)$$

Akhirnya, jumlah total cara penyusunan yang berbeda secara bersamaan n_1 sistem di dalam g_1 keadaan, n_2 sistem di dalam g_2 , ..., n_M sistem dalam g_M keadaan adalah

$$\begin{aligned} & \frac{(g_1 + n_1 - 1)!}{n_1! g_1!} \times \frac{(g_2 + n_2 - 1)!}{n_2! g_2!} \times \dots \times \frac{(g_M + n_M - 1)!}{n_M! g_M!} \\ &= \prod_{s=1}^M \frac{(g_s + n_s - 1)!}{n_s! g_s!} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Kita harus juga memperhitungkan jumlah cara membawa N sistem dari luar untuk didistribusikan ke dalam tingkat-tingkat energi di atas. Jumlah cara pengambilan N system adalah $N!$ cara. Karena sistem tidak dapat dibedakan maka jumlah tersebut harus dibagi dengan $N!$, sehingga jumlah total cara membawa N sistem ke dalam tingkat-tingkat energi di dalam assembli adalah $N!/N! = 1$.

Akhirnya, kita dapatkan jumlah penyusunan sistem-sistem dalam aseembli boson adalah

$$W = \prod_{s=1}^M \frac{(g_s + n_s - 1)!}{n_s! g_s!} \quad (5.5)$$

5.3 Konfigurasi Maksimum

Selanjutnya kita akan menentukan konfigurasi dengan peluang kemunculan paling besar. Ambil logaritma ruas kiri dan kanan persamaan (5.5)

$$\begin{aligned} \ln W &= \ln \prod_{s=1}^M \frac{(g_s + n_s - 1)!}{n_s! g_s!} = \sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{(g_s + n_s - 1)!}{n_s! g_s!} \right] \\ &= \ln \sum_{s=1}^M \ln(g_s + n_s - 1)! - \ln n_s! - \ln g_s! \end{aligned} \quad (5.6)$$

Kemudian kita gunakan pendekatan Stirling untuk melakukan penyederhanaan sebagai berikut

$$\ln(g_s + n_s - 1)! \cong (g_s + n_s - 1) \ln(g_s + n_s - 1) - (g_s + n_s - 1)$$

$$\ln g_s! \cong g_s \ln g_s - g_s$$

$$\ln n_s! \cong n_s \ln n_s - n_s$$

Dengan pendekatan tersebut maka persamaan (5.6) menjadi

$$\begin{aligned} \ln W \cong \sum_{s=1}^M & [(g_s + n_s - 1) \ln(g_s + n_s - 1) - (g_s + n_s - 1) \\ & - g_s \ln g_s + g_s - n_s \ln n_s + n_s] \end{aligned} \quad (5.7)$$

Jumlah total sistem serta energi total assembli memenuhi $N = \sum_{s=1}^M n_s$ dan $U = \sum_{s=1}^M n_s E_s$. Untuk assembli yang terisolasi sehingga tidak ada pertukaran sistem maupun energi antara assembli dan lingkungan. Jumlah sistem maupun energi assembli konstant. Pembatasan ini dapat dinyatakan dalam bentuk diferensial berikut ini

$$\delta N = \sum_{s=1}^M \delta n_s = 0 \quad (5.8)$$

$$\delta U = \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0 \quad (5.9)$$

Konfigurasi dengan probabilitas maksimum diperoleh dengan memaksimumkan $\ln W$. Dengan memperhatikan konstrain pada persamaan (5.8) dan (5.9) maka konfigurasi dengan probabilitas maksimum memenuhi

$$\delta \ln W + \alpha \delta N + \beta \delta U = 0 \quad (5.10)$$

Selanjutnya dengan mengambil diferensial persamaan (5.7) kita peroleh

$$\begin{aligned}\delta \ln W \cong & \sum_{s=1}^M [\delta(g_s + n_s - 1) \ln(g_s + n_s - 1) - \delta(g_s + n_s - 1) \\ & - \delta g_s \ln g_s + \delta g_s - \delta n_s \ln n_s + \delta n_s] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Mari kita hitung suku per suku yang terkandung dalam persamaan (5.11).

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \delta(g_s + n_s - 1) \ln(g_s + n_s - 1) = \frac{\partial}{\partial n_s} (g_s + n_s - 1) \ln(g_s + n_s - 1) \delta n_s \\ & = \left[\ln(g_s + n_s - 1) + (g_s + n_s - 1) \times \frac{1}{(g_s + n_s - 1)} \right] \delta n_s = [\ln(g_s + n_s - 1) + 1] \delta n_s \\ \text{ii)} \quad & \delta(g_s + n_s - 1) = \frac{\partial}{\partial n_s} (g_s + n_s - 1) \delta n_s = \delta n_s \\ \text{iii)} \quad & \delta g_s \ln g_s = \frac{\partial}{\partial n_s} g_s \ln g_s \delta n_s = 0 \\ \text{iv)} \quad & \delta n_s \ln n_s = \frac{\partial}{\partial n_s} n_s \ln n_s \delta n_s = \left[\ln n_s + n_s \times \frac{1}{n_s} \right] \delta n_s = [\ln n_s + 1] \delta n_s \end{aligned}$$

Persamaan (5.11) selanjutnya menjadi

$$\begin{aligned}\delta \ln W \cong & \sum_{s=1}^M [\ln(g_s + n_s - 1) + 1] \delta n_s - \delta n_s - 0 + 0 - [\ln n_s + 1] \delta n_s + \delta n_s \\ & = \sum_{s=1}^M [\ln(g_s + n_s - 1) - \ln n_s] \delta n_s \\ & = \sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s + n_s - 1}{n_s} \right] \delta n_s \end{aligned} \quad (5.12)$$

Karena $g_s \gg 1$ dan $n_s \gg 1$ maka $g_s + n_s - 1 \cong g_s + n_s$ sehingga persamaan (5.12) dapat disederhanakan lebih lanjut menjadi

$$\delta \ln W = \sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s + n_s}{n_s} \right] \delta n_s \quad (5.13)$$

Substitusi persamaan (5.8), (5.9), dan (5.13) ke dalam persamaan (5.10) diperoleh

$$\sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s + n_s}{n_s} \right] \delta n_s + \alpha \sum_{s=1}^M \delta n_s + \beta \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0$$

atau

$$\sum_{s=1}^M \left\{ \ln \left[\frac{g_s + n_s}{n_s} \right] + \alpha + \beta E_s \right\} \delta n_s = 0 \quad (5.14)$$

Kesamaan di atas harus berlaku untuk semua variasi δn_s . Ini dijamin jika bagian di dalam kurung selalu nol, yaitu

$$\ln \left[\frac{g_s + n_s}{n_s} \right] + \alpha + \beta E_s = 0$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{g_s + n_s}{n_s} &= \exp(-\alpha - \beta E_s) \\ g_s + n_s &= n_s \exp(-\alpha - \beta E_s) \\ g_s &= n_s [\exp(-\alpha - \beta E_s) - 1] \end{aligned}$$

Dan akhirnya didapatkan ungkapan untuk jumlah populasi pada tiap-tiap tingkat energi sebagai berikut

$$n_s = \frac{g_s}{\exp(-\alpha - \beta E_s) - 1} \quad (5.15)$$

Ternyata untuk assembli boson, parameter β juga berbentuk $\beta = -1/kT$. Dengan demikian, bentuk lengkap fungsi distribusi Bose-Einstein untuk assembli boson adalah

$$n_s = \frac{g_s}{\exp(-\alpha + E_s / kT) - 1} \quad (5.16)$$

5.4 Parameter α Untuk Photon dan Phonon

Kita perhatikan untuk parameter α pada persamaan (5.16). Ada satu kekhususan untuk assembli foton (kuantisasi gelombang elektromagnetik) dan fonon (kuntisasi getaran atom dalam kristal) dan ini berimplikasi pada nilai parameter α . Dalam suatu kotak, foton bisa diserap atau diciptakan oleh atom-atom yang berada pada dinding kotak. Akibatnya, jumlah foton dalam satu assembli tidak harus tetap. Jumlah foton bisa bertambah, jika atom-atom di dinding memancarkan foton dan bisa berkurang jika atom-atom di dinding menyerap foton. Untuk sistem semacam ini pembatasan bahwa jumlah total sistem dalam assembli konstan sebenarnya tidak berlaku. Pada penurunan fungsi distribusi Bose-Einstein kita telah mengasumsikan bahwa jumlah sistem dalam assembli selalu tetap, yaitu $\delta N = 0$. Konstrain ini dimasukkan dalam persamaan dengan memperkenalkan faktor pengali Lagrange α . Oleh karena itu, agar konstrain ini tidak diberlakukan untuk assembli dengan jumlah sistem tidak tetap, seperti foton atau fonon maka nilai α harus diambil nol. Dengan nilai ini maka fungsi distribusi untuk sistem semacam ini menjadi

$$n_s = \frac{g_s}{\exp(E_s / kT) - 1} \quad (5.17)$$

Fungsi distrubusi yang diungkapkan oleh persamaan (5.17) akan kita pakai secara langsung ketika membahas sifat statistik foton dan fonon (getaran kisi). Aplikasi-aplikasi tersebut akan kita bahas dalam Bab 10.

Bab 6 Statistik Fermi-Dirac

Isi Bab Ini

Bab ini berisi perumusan statistik Fermi-Dirac untuk assembli fermion, yaitu partikel kuantum dengan spin merupakan kelipatan ganjil dari $h/4\pi$. Partikel ini memiliki satu sifat khas, yaitu memenuhi prinsip eksklusi Pauli. Berdasarkan prinsip ini maka tidak ada fermion yang boleh memiliki sekumpulan bilangan kuantum yang sama. Satu keadaan energi hanya boleh ditempati maksimum oleh dua fermion dengan syarat arah spin harus berlawanan. Contoh partikel fermion adalah elektron, proton, dan positron.

Tujuan Bab Ini

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami bagaimana proses membangun statistik Fermi-Dirac dengan menggunakan prinsip statistik murni yang digabungkan dengan prinsip kekekalan dalam fisika seperti kekekalan energi dan jumlah partikel.

Apa Yang Perlu dikuasai Lebih Dahulu

Untuk memahami penurunan fungsi distribusi Fermi-Dirac mahasiswa perlu memahami prinsip permutasi untuk benda-benda yang tidak dapat dibedakan, sifat yang ditunjukkan oleh sebuah besaran yang nilainya kekal (konstan), serta bagaimana mencari nilai maksimum dari sebuah fungsi. Pemahaman tentang penurunan distribusi Maxwell-Boltzmann serta Bose-Einstein juga merupakan modal berharga untuk memahami penurunan distribusi Fermi-Dirac secara lebih mudah.

6.1 Konfigurasi Fermion

Kita sudah menurunkan fungsi distribusi untuk sistem kuantum boson yang mempunyai sifat bahwa bilangan kuantum spin merupakan kelipatan bulat dari $h/2\pi$. Pada bagian ini kita akan menurunkan fungsi distribusi untuk sistem kuantum fermion dengan bilangan kuantum spin merupakan kelipatan ganjil dari $h/4\pi$. Salah satu sifat yang dimiliki fermion adalah terpenuhinya prinsip eksklusi Pauli. Tidak boleh lebih dari

satu fermion memiliki keadaan kuantum yang sama. Satu keadaan hanya boleh kosong atau hanya ditempati oleh satu fermion.

Konsekuensi dari prinsip eksklusi Pauli adalah jumlah fermion harus lebih sedikit atau sama dengan jumlah keadaan. Ini berbeda dengan sistem klasik atau boson di mana tidak ada pembatasan jumlah partikel yang menempati keadaan tertentu. Berapa pun jumlah keadaan yang tersedia, maka keadaan tersebut dapat menampung partikel klasik maupun boson yang jumlahnya berapa pun.

Untuk menurunkan fungsi distribusi Fermi-Dirac kita pun akan memulai dengan membagi keadaan-keadaan atas kelompok-kelompok sebagai berikut:

Kelompok-1 mengandung g_1 keadaan dengan energi rata-rata E_1

Kelompok-2 mengandung g_2 keadaan dengan energi rata-rata E_2

.

.

.

Kelompok-s mengandung g_s keadaan dengan energi rata-rata E_s

.

.

.

Kelompok-M mengandung g_M keadaan dengan energi rata-rata E_M

Jumlah sistem yang menempati masing-masing keadaan misalkan

n_1 sistem menempati keadaan-1

n_2 sistem menempati keadaan-2

.

.

.

n_s sistem menempati keadaan-s

.

.

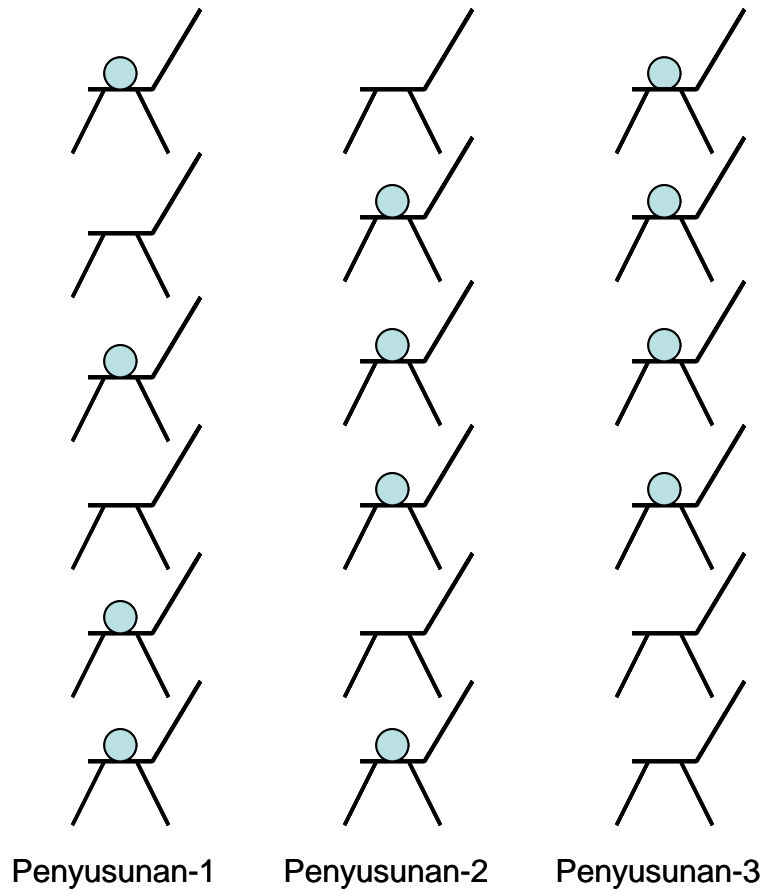
.

n_M sistem menempati keadaan-M

Karena satu keadaan maksimum menampung satu sistem maka harus terpenuhi $n_1 \leq g_1$,

$n_2 \leq g_2, \dots, n_s \leq g_s, \dots, n_M \leq g_M$.

Selanjutnya kita akan menentukan berapa cara menyusun n_1 sistem pada g_1 keadaan, n_2 sistem pada g_2 keadaan, ..., n_M sistem pada g_M keadaan. Tinjau kelompok-1. Di sini ada g_1 keadaan dan menampung n_1 sistem. Kembali kita menganalogikan keadaan sebagai kursi dan sistem sebagai benda yang akan ditempatkan pada kursi-kursi tersebut, seperti diilustrasikan pada Gbr. 6.1.



Gambar 6.1 Contoh penyusunan fermion analog dengan penyusunan kursi. Sebagian kursi ditempati benda (keadaan yang diisi fermion) dan sebagian kursi kosong (keadaan yang tidak ditempati fermion).

Untuk menentukan jumlah cara menempatkan benda pada kursi-kursi tersebut, kita tempelkan benda pada kursi-kursi tersebut. Pada satu kursi hanya boleh ditempelkan satu benda. Penempelan ini menjamin bahwa tidak boleh lebih dari satu benda berada pada satu kursi. Akibatnya kita dapatkan:

Ada n_1 buah kursi yang ditemplei benda

Ada $g_1 - n_1$ buah kursi yang kosong.

Kemudian kita melakukan permutasi semua kursi yang ada baik yang kosong maupun yang ditemplei benda. Karena benda sudah menempel pada kursi maka permutasi tidak memungkinkan munculnya satu kursi yang menampung lebih dari satu benda. Jumlah kursi yang dipermutasi adalah g_1 kursi sehingga menghasilkan jumlah permutasi sebanyak $g_1!$ cara. Tetapi, karena $(g_1 - n_1)$ buah kursi kosong tidak terbedakan dan n_1 buah kursi yang ditemplei benda juga tidak dapat dibedakan maka jumlah permutasi g_1 buah kursi harus dibagi dengan permutasi $(g_1 - n_1)$ buah kursi kosong dan n_1 buah kursi yang ditemplei benda untuk mendapatkan penyusunan yang berbeda. Jadi, jumlah penyusunan yang berbeda hanyalah

$$\frac{g_1!}{(g_1 - n_1)!n_1!} \quad (6.1)$$

Dengan cara yang sama kita dapatkan jumlah cara penyusunan n_2 sistem pada g_2 keadaan adalah

$$\frac{g_2!}{(g_2 - n_2)!n_2!} \quad (6.2)$$

Begitu seterusnya. Akhirnya, jumlah total cara penyusunan secara bersama-sama n_1 sistem pada g_1 keadaan, n_2 sistem pada g_2 keadaan, ..., n_M sistem pada g_M keadaan adalah

$$\begin{aligned}
& \frac{g_1!}{(g_1 - n_1)!n_1!} \times \frac{g_2!}{(g_2 - n_2)!n_2!} \times \dots \times \frac{g_M!}{(g_M - n_M)!n_M!} \\
&= \prod_{s=1}^M \frac{g_s!}{(g_s - n_s)!n_s!}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Selanjutnya kita perlu menentukan berapa cara membawa N sistem dari luar untuk didistribusikan ke dalam keadaan-keadaan di dalam assembli. Seperti yang kita bahas pada assembli boson, untuk partikel tidak terbedakan jumlah cara tersebut adalah $N!/N! = 1$. Akhirnya, jumlah cara penyusunan fermion untuk konfigurasi di atas adalah

$$W = \prod_{s=1}^M \frac{g_s!}{(g_s - n_s)!n_s!}$$

atau dalam notasi logaritma

$$\ln W = \sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s!}{(g_s - n_s)!n_s!} \right] \tag{6.4}$$

Jumlah total sistem dalam assembli dan energi total assembli masing-masing adalah $N = \sum_{s=1}^M n_s$ dan $U = \sum_{s=1}^M E_s n_s$. Untuk sistem terisolasi di mana tidak terjadi pertukaran partikel maupun energi antara assembli dan lingkungan maka jumlah partikel selalu konstan dan energi total juga konstan. Dengan demikian bentuk diferensial dari N dan U adalah

$$\delta N = \sum_{s=1}^M \delta n_s = 0 \tag{6.5}$$

$$\delta U = \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0 \tag{6.6}$$

Konfigurasi dengan probabilitas maksimum diperoleh dengan memaksimalkan W atau $\ln W$ dengan memperhatikan konstrain pada persamaan (6.5) dan (6.6). Sebelum kearah itu kita coba sederhanakan $\ln W$ pada persamaan (6.4).

$$\ln W = \sum_{s=1}^M \ln g_s! - \ln(g_s - n_s)! - \ln n_s!$$

Selanjutnya kita gunakan pendekatan Stirling untuk menyederhanakan faktorial, yaitu

$$\begin{aligned}\ln g_s! &\cong g_s \ln g_s - g_s \\ \ln(g_s - n_s)! &\cong (g_s - n_s) \ln(g_s - n_s) - (g_s - n_s) \\ \ln n_s! &\cong n_s \ln n_s - n_s\end{aligned}$$

Dengan demikian bentuk $\ln W$ dapat diaproksimasi sebagai berikut

$$\begin{aligned}\ln W &\cong \sum_{s=1}^M g_s \ln g_s - g_s - (g_s - n_s) \ln(g_s - n_s) + (g_s - n_s) - n_s \ln n_s + n_s \\ &= \sum_{s=1}^M g_s \ln g_s - (g_s - n_s) \ln(g_s - n_s) - n_s \ln n_s\end{aligned}\tag{6.7}$$

Selanjutnya, ambil diferensial ke dua ruas persamaan (6.7)

$$\delta \ln W = \sum_{s=1}^M \delta[g_s \ln g_s] - \delta[(g_s - n_s) \ln(g_s - n_s)] - \delta[n_s \ln n_s]\tag{6.8}$$

Mari kita hitung satu per satu suku dalam persamaan (6.8)

$$\text{i) } \delta[g_s \ln g_s] = \frac{\partial}{\partial n_s} [g_s \ln g_s] \delta n_s = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \quad \delta[(g_s - n_s) \ln(g_s - n_s)] &= \frac{\partial}{\partial n_s} [(g_s - n_s) \ln(g_s - n_s)] \delta n_s \\
&= \left[-\ln(g_s - n_s) + (g_s - n_s) \times \frac{1}{(g_s - n_s)} \times (-1) \right] \delta n_s = -[\ln(g_s - n_s) + 1] \delta n_s \\
\text{iii)} \quad \delta[n_s \ln n_s] &= \frac{\partial}{\partial n_s} [n_s \ln n_s] \delta n_s = \left[\ln n_s + n_s \times \frac{1}{n_s} \times 1 \right] \delta n_s = [\ln n_s + 1] \delta n_s
\end{aligned}$$

Dari hasil di atas maka bentuk $\delta \ln W$ dapat ditulis dalam bentuk lebih sederhana sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\delta \ln W &= \sum_{s=1}^M 0 + [\ln(g_s - n_s) + 1] \delta n_s - [\ln n_s + 1] \delta n_s \\
&= \sum_{s=1}^M [\ln(g_s - n_s) - \ln n_s] \delta n_s \\
&= \sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s - n_s}{n_s} \right] \delta n_s \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Konfigurasi dengan probabilitas maksimum diperoleh dengan mencari solusi untuk persamaan $\delta \ln W + \alpha \delta N + \beta \delta U = 0$, atau

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s - n_s}{n_s} \right] \delta n_s + \alpha \sum_{s=1}^M \delta n_s + \beta \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s &= 0 \\
\sum_{s=1}^M \left\{ \ln \left[\frac{g_s - n_s}{n_s} \right] + \alpha + \beta E_s \right\} \delta n_s &= 0 \tag{6.10}
\end{aligned}$$

Agar persamaan (6.10) selalu nol untuk variasi δn_s yang sembarang maka harus terpenuhi

$$\ln \left[\frac{g_s - n_s}{n_s} \right] + \alpha + \beta E_s = 0$$

$$\frac{g_s - n_s}{n_s} = \exp(-\alpha - \beta E_s)$$

yang memberikan ungkapan untuk n_s sebagai

$$n_s = \frac{g_s}{\exp(-\alpha - \beta E_s) + 1} \quad (6.11)$$

Berlaku juga pada fungsi distribusi fermion bahwa parameter β memenuhi $\beta = -1/kT$. Dengan parameter ini maka kita dapat menulis persamaan (6.11) secara lebih eksplisit sebagai

$$n_s = \frac{g_s}{\exp(-\alpha + E_s / kT) + 1} \quad (6.12)$$

Persamaan (6.12) merupakan bentuk umum fungsi distribusi Fermi-Dirac untuk fermion.

Bab 7 Rapat Keadaan Sistem Kuantum

Isi Bab Ini

Bab ini berisi diskusi tentang kerapatan keadaan system kuantum, yang meliputi boson dan fermion. Salah satu perbedaan dengan system klasik adalah terpenuhinya prinsip ketidakpastian Heisenberg pada system kuantum. Namun akan tampak bahwa, tidak ada perbedaan signifikan antara kerapatan keadaan sistem klasik dan sistem kuantum. Perbedaan hanya terletak pada keberadaan elemen ruang fasa minimal yang diijinkan bagi sistem kuantum.

Tujuan Bab Ini

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami bagaimana menurunkan kerapatan keadaan sistem kuantum dan bagaimana mendapatkan kerapatan keadaan tersebut dari kerapatan keadaan sistem klasik.

Apa Yang Perlu dikuasai Lebih Dahulu

Untuk memahami lebih baik tentang bab ini, mahasiswa diharapkan memahami terlebih dahulu isi Bab 3.

7.1 Ketidakpastian Heisenberg

Setelah membahas beberapa aplikasi statisti Maxwell-Boltzmann yang berlaku untuk partikel klasik, kita akan membahas beberapa aplikasi assembli kuantum yang diungkapkan oleh distribusi Bose-Einstein dan Fermi-Dirac. Namun, sebelum melangkah lebih jauh membahas beberapa aplikasi assembli kuantum tersebut, mari kita tentukan dahulu kerapatan keadaan. Kerapatan keadaan menjadi penting ketika kita akan menghitung besaran-besaran termodinamika assembli tersebut. Dan yang paling sering kita jumpai adalah ketika kita berpindah dari penjumlahan yang bersifat diskrit ke integral yang bersifat kontinu.

Karena merupakan partikel kuantum maka pada boson maupun fermion kita harus menerapkan prinsip-prinsip mekanika kuantum. Salah satu prinsip dasar mekanika kuantum adalah prinsip ketidakpastian Heisenberg yang dapat ditulis sebagai

$$\Delta p \Delta x \geq h \quad (7.1)$$

Prinsip ini menyatakan bahwa perkalian antara ketidakpastian momentum dan posisi tidak boleh lebih kecil dari konstanta Planck. Implikasinya adalah kita tidak mungkin mendefinisikan sebuah keadaan kuantum jika keadaan tersebut memuat ukuran momentum dan ukuran posisi sedemikian sehingga perkaliannya kurang dari h . Dengan perkataan lain, nilai terkecil dari perkalian Δp dan Δx yang bisa mendefinisikan sebuah keadaan adalah h . Dari hasil ini kita selanjutnya bisa menentukan berapa jumlah keadaan kuantum dalam ruang fase dengan volum tertentu. Kita akan membahas untuk ruang fase yang mengandung koordinat spasial satu, dua, dan tiga dimensi.

7.2 Koordinat Spasial Spasial Satu Dimensi

Misalkan kita memiliki assembli yang hanya boleh bergerak bebas dalam satu arah. Posisi partikel dalam assembli tersebut dinyatakan dengan koordinat x . Dengan demikian, momentum partikel hanya memiliki satu komponen saja, yaitu p_x . Elemen kecil ruang fase yang dimiliki sebuah partikel dalam assembli tersebut adalah $d\Gamma = dx dp_x$. Volum ruang fase untuk semua posisi yang mungkin diperoleh dengan melakukan integral $d\Gamma$ pada semua ruang spasial,

$$\Delta\Gamma_p = \int dx dp_x = L dp_x \quad (7.2)$$

Dalam satu dimensi, ukuran minimum ruang fase yang diijinkan oleh prinsip ketidakpastian Heisenberg adalah $\Delta\Gamma_{\min} = \Delta x \Delta p_x \cong h$. Oleh karena itu, jumlah keadaan yang terdapat dalam elemen ruang fase $\Delta\Gamma_p$ adalah

$$dN = \frac{\Delta\Gamma_p}{\Delta\Gamma_{\min}} = \frac{L}{h} dp_x \quad (7.3)$$

Jumlah keadaan persatuan volum assembli menjadi

$$\begin{aligned}
g(p_x)dp_x &= \frac{dN}{L} \\
&= \frac{1}{h} dp_x
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Kerapatan keadaan tersebut dapat juga diungkapkan dalam variable energi partikel dengan menggunakan hubungan $\varepsilon = p_x^2 / 2m$. Dengan hubungan ini kita dapatkan

$$p_x = \sqrt{2m} \sqrt{\varepsilon}$$

dan

$$dp_x = \sqrt{2m} \left(\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{7.5}$$

Substitusi persamaan (7.5) ke dalam persamaan (7.4) diperoleh ungkapan kerapatan keadaan per satuan volum sebagai berikut

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{m}{2}} \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon \tag{7.6}$$

Kerapatan keadaan tersebut dapat juga diungkapkan dalam variabel panjang gelombang partikel. Kita berangkat dari persamaan de Broglie $p_x = h / \lambda$. Dari persamaan ini kita dapat $dp_x = -h d\lambda / \lambda^2$. Substitusi dp_x ke dalam persamaan (7.5) dan hilangkan tanda negatif maka kita dapatkan

$$\begin{aligned}
g(\lambda)d\lambda &= \frac{1}{h} \frac{h}{\lambda^2} d\lambda \\
&= \frac{1}{\lambda^2} d\lambda
\end{aligned} \tag{7.7}$$

7.3 Koordinat Spasial Dua Dimensi

Sekarang kita berlanjut ke assembli dalam kotak dua dimensi dengan ukuran panjang searah sumbu x dan sumbu y masing-masing L_x dan L_y . Posisi partikel dalam assembli tersebut dinyatakan oleh koordinat x dan y saja. Akibatnya momentum partikel hanya memiliki dua komponen saja, yaitu p_x dan p_y . Elemen ruang fasa yang dibatasi koordinat x sampai $x + dx$, y sampai $y + dy$, momentum p_x sampai $p_x + dp_x$ dan p_y sampai $p_y + dp_y$ adalah $d\Gamma = dx dy dp_x dp_y$. Volum ruang fasa untuk semua posisi yang mungkin diperoleh dengan mengintegrasikan $d\Gamma$ pada semua variable spasial, yaitu

$$\Delta\Gamma_p = \int \int dx dy dp_x dp_y = L_x L_y dp_x dp_y \quad (7.8)$$

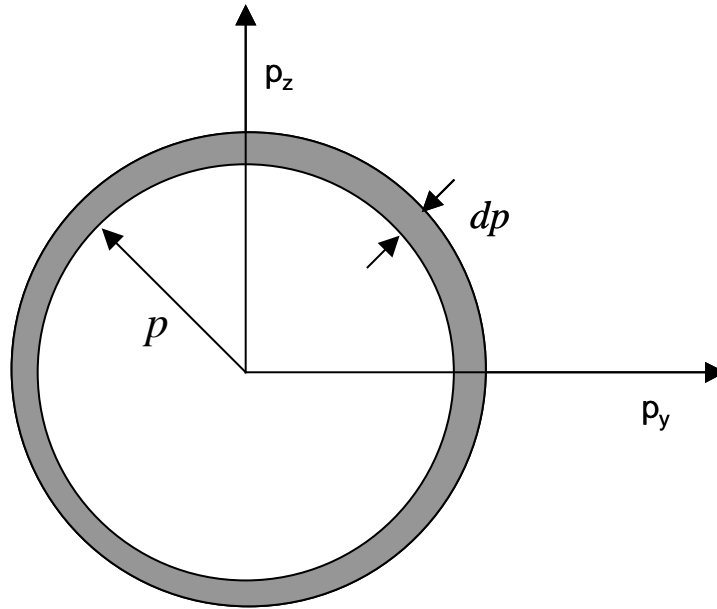
Dalam ruang dua dimensi, ukuran minimum ruang fasa yang diijinkan oleh prinsip ketidakpastian Heisenberg adalah $\Delta\Gamma_{\min} = \Delta x \Delta p_x \Delta y \Delta p_y \cong h \times h = h^2$. Dengan demikian, jumlah keadaan yang terdapat dalam elemen ruang fasa $\Delta\Gamma_p$ adalah

$$dN = \frac{\Delta\Gamma_p}{\Delta\Gamma_{\min}} = \frac{L_x L_y}{h^2} dp_x dp_y \quad (7.9)$$

Persaman (7.9) menyatakan jumlah keadaan dalam elemen momentum yang berada antara p_x sampai $p_x + dp_x$ dan antara p_y sampai $p_y + dp_y$. Jadi ruang momentum berbentuk persegi panjang dengan sisi-sisi dp_x dan dp_y . Cara lain adalah membuat elemen ruang momentum yang dibatasi oleh momentum total antara p sampai $p + dp$ di mana momentum total memenuhi

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 \quad (7.10)$$

Elemen ruang momentum tersebut akan berupa sebuah cincin dengan jari-jari p dan ketebalan dp seperti pada Gbr. 7.1



Gambar 7.1 Elemen ruang momentum berupa cincin dengan jari-jari p dan ketebalan dp

Keliling cincin tersebut adalah $K_p = 2\pi p$ sedangkan tebalnya adalah dp . Dengan demikian, luas cincin adalah

$$dS_p = K_p dp = 2\pi p dp \quad (7.11)$$

Dengan mengganti $dp_x dp_y$ pada persamaan (7.9) dengan dS_p pada persamaan (7.11) diperoleh

$$dN = \frac{L_x L_y}{h^2} 2\pi p dp \quad (7.12)$$

Kerapatan keadaan per satuan “volum dua dimensi (luas)” adalah

$$\begin{aligned}
 g(p)dp &= \frac{dN}{L_x L_y} \\
 &= \frac{1}{h^2} 2\pi p dp
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Kembali kita ingin menyatakan kerapatan keadaan dalam variable energi. Kita gunakan persamaan energi $\varepsilon = p^2 / 2m$ sehingga

$$p = \sqrt{2m} \sqrt{\varepsilon} \tag{7.14a}$$

$$dp = \sqrt{2m} \left(\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = \sqrt{\frac{m}{2}} \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon \tag{7.14b}$$

Substitusi persamaan (7.14a) dan (7.14b) ke dalam persamaan (7.13) diperoleh kerapatan keadaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 g(\varepsilon)d\varepsilon &= \frac{1}{h^2} 2\pi (\sqrt{2m} \sqrt{\varepsilon}) \left(\sqrt{\frac{m}{2}} \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon \right) \\
 &= \frac{1}{h^2} 2\pi m d\varepsilon
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Seperti sebelumnya, jumlah keadaan tersebut dapat diungkapkan dalam variable panjang gelombang dengan menggunakan persamaan de Broglie $p = h / \lambda$. Dari persamaan ini kita dapat $dp = -h d\lambda / \lambda^2$. Substitusi p dan dp ke dalam persamaan (7.13) dan hilangkan tanda negatif maka

$$\begin{aligned}
g(\lambda)d\lambda &= \frac{1}{h^2} 2\pi \frac{h}{\lambda} \left(\frac{hd\lambda}{\lambda^2} \right) \\
&= \frac{2\pi}{\lambda^3} d\lambda
\end{aligned} \tag{7.16}$$

7.4 Koordinat Spasial Tiga Dimensi

Sekarang kita berlanjut ke assembli dalam kotak tiga dimensi dengan ukuran panjang sisi searah sumbu x , sumbu y , dan sumbu z masing-masing L_x , L_y , dan L_z . Posisi partikel dalam assembli tersebut dinyatakan oleh koordinat x , y , dan z . Dengan demikian, momentum partikel terdiri dari tiga komponen, yaitu p_x , p_y , dan p_z . Elemen kecil ruang fasa di dalam assembli tersebut adalah $d\Gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$. Volum ruang fasa untuk semua posisi yang mungkin adalah

$$\Delta\Gamma_p = \iiint dx dy dz dp_x dp_y dp_z = L_x L_y L_z dp_x dp_y dp_z \tag{7.17}$$

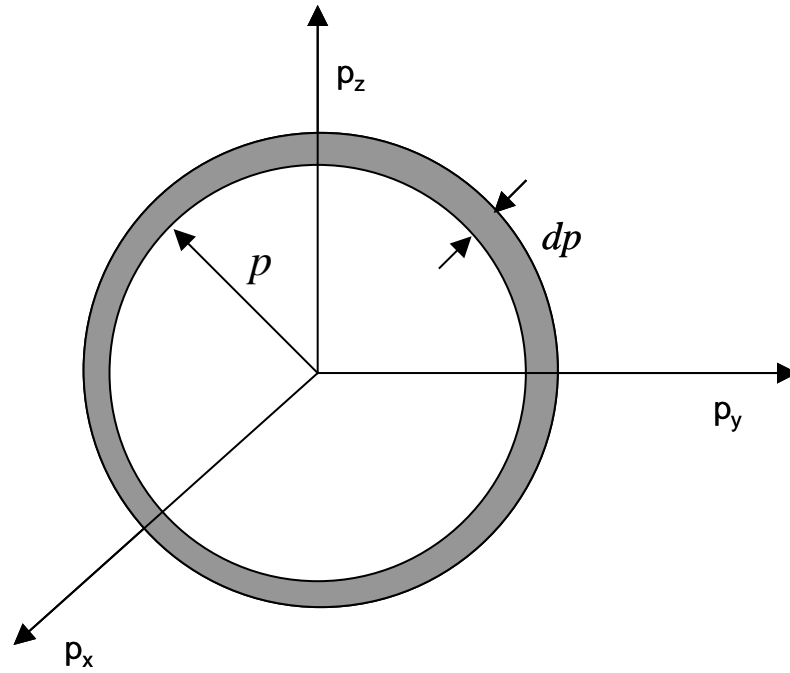
Dalam ruang tiga dimensi, ukuran minimum ruang fasa yang diijinkan oleh prinsip ketidakpastian Heisenberg adalah $\Delta\Gamma_{\min} = \Delta x \Delta p_x \Delta y \Delta p_y \Delta z \Delta p_z \cong h \times h \times h = h^3$. Akibatnya, jumlah keadaan yang terdapat dalam elemen ruang fase $\Delta\Gamma_p$ adalah

$$dN = \frac{\Delta\Gamma_p}{\Delta\Gamma_{\min}} = \frac{L_x L_y L_z}{h^3} dp_x dp_y dp_z \tag{7.18}$$

Persaman (7.18) menyatakan jumlah keadaan dalam elemen momentum yang berada antara p_x sampai $p_x + dp_x$, antara p_y sampai $p_y + dp_y$ dan antara p_z sampai $p_z + dp_z$. Jadi ruang momentum berbentuk balok dengan ukuran dp_x , dp_y , dan dp_z . Cara lain adalah membuat elemen ruang momentum yang dibatasi oleh momentum total antara p sampai $p + dp$ di mana momentum total memenuhi

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \tag{7.19}$$

Elemen ruang momentum tersebut akan berupa sebuah kulit bola dengan jari-jari p dan ketebalan dp seperti diilustrasikan pada Gbr. 7.2



Gambar 7.2 Elemen ruang momentum berupa kulit bola dengan jari-jari p dan ketebalan dp

Luas kulit bola tersebut adalah $S_p = 4\pi p^2$ dan ketebalannya adalah dp . Volum kulit bola menjadi

$$dV_p = S_p dp = 4\pi p^2 dp \quad (7.20)$$

Dengan mengganti $dp_x dp_y dp_z$ pada persamaan (7.18) dengan dV_p pada persamaan (7.20) diperoleh ungkapan lain jumlah keadaan

$$dN = \frac{L_x L_y L_z}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (7.21)$$

Kerapatan keadaan per satuan volum adalah

$$\begin{aligned} g(p)dp &= \frac{dN}{L_x L_y L_z} \\ &= \frac{1}{h^3} 4\pi p^2 dp \end{aligned} \quad (7.22)$$

Kembali kita ingin menyatakan kerapatan keadaan dalam variable energi. Kita gunakan persamaan energi $\varepsilon = p^2 / 2m$ sehingga

$$p = \sqrt{2m} \sqrt{\varepsilon} \quad (7.23a)$$

$$dp = \sqrt{2m} \left(\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = \sqrt{\frac{m}{2}} \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon \quad (7.23b)$$

Substitusi persamaan (7.23a) dan (7.23b) ke dalam persamaan (7.22) diperoleh kerapatan keadaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} g(\varepsilon)d\varepsilon &= \frac{1}{h^3} 4\pi (\sqrt{2m} \sqrt{\varepsilon})^2 \left(\sqrt{\frac{m}{2}} \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon \right) \\ &= \frac{1}{h^3} 4\pi \sqrt{2m}^3 \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \end{aligned} \quad (7.24)$$

Juga di sini kita akan menyatakan kerapatan keadaan dalam variable panjang gelombang dengan menggunakan persamaan de Broglie $p = h / \lambda$. Dari persamaan ini kita dapatkan $dp = -h d\lambda / \lambda^2$. Substitusi p dan dp ke dalam persamaan (7.22) dan hilangkan tanda negatif maka

$$\begin{aligned}
 g(\lambda)d\lambda &= \frac{1}{h^2} 4\pi \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{hd\lambda}{\lambda^2}\right) \\
 &= \frac{4\pi}{\lambda^4} d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{7.25}$$

Bergantung pada masalah yang kita hadapi, kita bias memilih fungsi kerapatan keadaan yang mana saja. Pilihan kita bergantung pada kemudahan dalam mencari solusi.

Bab 8 Beberapa Besaran Gas

Isi Bab Ini

Bab ini berisi diskusi tentang beberapa aplikasi distribusi Maxwell-Boltzmann untuk menentukan beberapa besaran yang dimiliki gas.

Tujuan Bab Ini

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami beberapa besaran gas yang diturunkan dari fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann.

Apa Yang Perlu dikuasai Lebih Dahulu

Untuk memahami lebih baik tentang bab ini, mahasiswa diharapkan memahami terlebih dahulu Bab 2, Bab 3, dan Bab 4.

8.1 Laju Dengan Peluang Maksimum

Pertama kita akan tentukan laju gas yang memiliki peluang maksimum. Fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann memprediksi bahwa pada suhu tertentu laju partikel gas tidak seragam. Laju partikel gas bervariasi dari nol sampai tak berhingga. Tetapi ada laju yang memiliki peluang kemunculan paling besar. Laju tersebut berkaitan dengan lokasi puncak distribusi Maxwell-Boltzmann bila dinyatakan dalam variabel laju. Gambar 8.1 adalah kurva kerapatan partikel gas sebanding dengan fungsi laju pada berbagai suhu.

Laju dengan peluang kemunculan paling besar tersebut ditentukan dengan memecahkan persamaan

$$\frac{dn(v)}{dv} = 0 \quad (8.1)$$

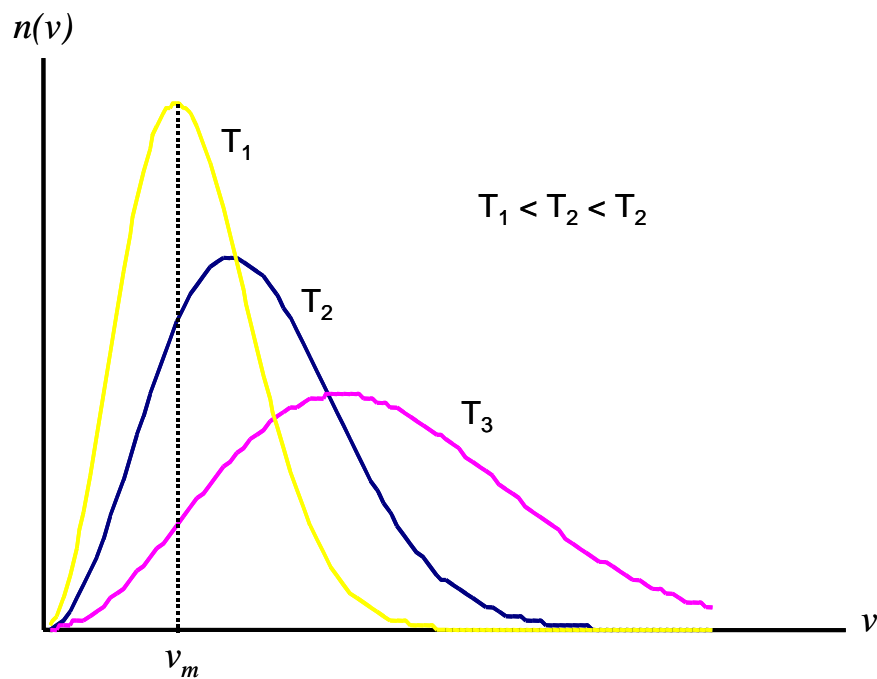
Dengan menggunakan $n(v)$ pada persamaan (3.17) maka distribusi partikel dalam variabel laju adalah

$$n(v)dv = (4\pi BVm^3 e^{\alpha}) v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

dan dengan menggunakan ungkapan e^a pada persamaan (4.34) kita dapatkan

$$n(v)dv = \left(4\pi BVm^3 \frac{N}{VB(2\pi mkT)^{3/2}} \right) v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

$$= \frac{4\pi Nm^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv \quad (8.2)$$



Gambar 8.1 Kerapatan partikel gas sebagai fungsi laju pada berbagai suhu.

Berdasarkan persamaan (8.2) kita simpulkan

$$n(v) = \frac{4\pi Nm^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} v^2 e^{-mv^2/2kT} \quad (8.3)$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{dn(v)}{dv} &= \frac{4\pi Nm^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} \left[2ve^{-mv^2/2kT} + v^2 \frac{d}{dv} e^{-mv^2/2kT} \right] \\
&= \frac{4\pi Nm^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} \left[2ve^{-mv^2/2kT} + v^2 \left(-\frac{2mv}{2kT} \right) e^{-mv^2/2kT} \right] \\
&= \frac{4\pi Nm^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} e^{-mv^2/2kT} \left[2v - \frac{mv^3}{kT} \right]
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Jika v_m adalah laju dengan peluang maksimum maka pada v_m tersebut $dn/dv = 0$. Ini dipenuhi jika

$$\left[2v_m - \frac{mv_m^3}{kT} \right] = 0$$

Yang memberikan solusi untuk laju dengan peluang maksimum

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \tag{8.5}$$

8.2 Laju Rata-Rata

Selanjutnya kita akan menentukan laju rata-rata molekul gas. Laju rata-rata didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{\int_0^\infty vn(v)dv}{\int_0^\infty n(v)dv} \\
&= \frac{4\pi Nm^{3/2}/(2\pi kT)^{3/2} \int_0^\infty ve^{-mv^2/2kT} v^2 dv}{4\pi Nm^{3/2}/(2\pi kT)^{3/2} \int_0^\infty ve^{-mv^2/2kT} v^2 dv}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} v^3 e^{-mv^2/2kT} dv}{\int_0^{\infty} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv} \quad (8.6)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (8.6) kita misalkan $x = mv^2/2kT$. Dengan permisalan ini maka

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} x^{1/2}$$

$$v^3 = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} x^{3/2}$$

$$dv = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \times \frac{1}{2} x^{-1/2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2kT}{m}} x^{-1/2} dx$$

Dengan demikian, integral pada pembilang di persamaan (8.6) dapat diganti dengan

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} x^{3/2} e^{-x} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2kT}{m}} x^{-1/2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \Gamma(2)$$

Jika parameter dalam fungsi gamma merupakan bilangan bulat maka $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Dengan demikian, pembilang dalam persamaan (8.6) bernilai

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \Gamma(2) = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \times 1! = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2$$

Selanjutnya kita lihat integral pada penyebut di persamaan (8.6). Dengan melakukan substitusi yang sama dengan di atas maka penyebut tersebut berubah menjadi

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \left(\frac{2kT}{m} \right) x e^{-x} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2kT}{m}} x^{-1/2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \times \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2}
 \end{aligned}$$

Akhirnya laju rata-rata menjadi

$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2}{\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \\
 &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \tag{8.7}
 \end{aligned}$$

8.3 Laju Root Mean Square

Laju root mean square atau disingkat rms adalah laju yang diperoleh dari perataan v^2 . Laju rms akan menentukan energi kinetik rata-rata atom atau molekul gas. Mari kita hitung dulu rata-rata dari v^2 .

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^{\infty} v^2 n(v) dv}{\int_0^{\infty} n(v) dv}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4\pi Nm^{3/2} / (2\pi kT)^{3/2} \int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2kT} v^2 dv}{4\pi Nm^{3/2} / (2\pi kT)^{3/2} \int_0^\infty v e^{-mv^2/2kT} v^2 dv} \\
&= \frac{\int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/2kT} dv}{\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2kT} dv} \tag{8.8}
\end{aligned}$$

Dengan melakukan substitusi serupa dengan yang kita lakukan pada sub bab 8.2 dalam mencari laju rata-rata, integral pada pembilang dapat diganti dengan

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 x^2 e^{-x} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2kT}{m}} x^{-1/2} dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \times \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\pi} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2}
\end{aligned}$$

Bagian penyebut persamaan (8.8) sama dengan bagian penyebut pada persamaan (8.6), dan hasil integralnya adalah

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2}$$

Dengan demikian, rata-rata kuadrat laju menjadi

$$\overline{v^2} = \frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2}} = \frac{3kT}{m} \quad (8.9)$$

Akar dari $\overline{v^2}$ merupakan laju rms, yaitu

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (8.10)$$

Laju rms menentukan energi kinetik rata-rata molekul. Hal ini dapat kita perlihatkan sebagai berikut. Energi kinetik molekul yang memiliki laju v memenuhi $K = mv^2 / 2$. Energi kinetik rata-rata adalah

$$\overline{K} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m \times \frac{2kT}{m} = \frac{3}{2} kT \quad (8.11)$$

8.4 Distribusi Partikel Dalam Besaran Lain

Persamaan (8.2) menyatakan jumlah partikel yang memiliki laju antara v sampai $v + dv$. Kadang kita perlu mencari jumlah partikel yang memiliki komponen laju v_x sampai $v_x + dv_x$ saja, berapa pun laju v_y dan v_z . Informasi ini diperlukan misalnya saat menentukan besaran-besaran yang berkaitan dengan partikel yang bergerak dalam satu arah saja, misalnya difusi partikel sepanjang batang. Untuk mendapatkan distribusi dalam fungsi komponen kecepatan kita lakukan penurunan ulang ungkapan kontinu dari g_s .

Kita tinjau elemen ruang fase yang berada antara koordinat-koordinat sebagai berikut

Antara x sampai $x + dx$

Antara y sampai $y + dy$

Antara z sampai $z + dz$

Antara p_x sampai $p_x + dp_x$

Antara p_y sampai $p_y + dp_y$

Antara p_z sampai $p_z + dp_z$

Volum elemen ruang fasa tersebut adalah $d\Gamma = dxdydzdp_x dp_y dp_z$. Dan karena $p_x = mv_x$, $p_y = mv_y$, dan $p_z = mv_z$ maka kita dapat menulis

$$d\Gamma = m^3 dxdydzdv_x dv_y dv_z \quad (8.12)$$

Apabila kita membatasi partikel hanya berada antara v_x sampai $v_x + dv_x$, antara v_y sampai $v_y + dv_y$, dan antara v_z sampai $v_z + dv_z$ saja, dan tidak membatasi nilai variable ruang maka volum ruang fasa diperoleh dengan melakukan integral $d\Gamma$ pada semua variable ruang dan hasilnya adalah

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{v_x, v_y, v_z} &= m^3 \int dxdydzdv_x dv_y dv_z \\ &= m^3 V dv_x dv_y dv_z \end{aligned} \quad (8.13)$$

Jika B adalah kerapatan keadaan maka kita dapat mengganti g_s dalam bentuk kontinu sebagai berikut

$$g_s \rightarrow B\Delta\Gamma_{v_x, v_y, v_z} = Bm^3 V dv_x dv_y dv_z \quad (8.14)$$

Karena n_s adalah jumlah sistem yang menempati keadaan g_s , maka bila kita mendefinisikan $n(v_x, v_y, v_z)$ sebagai bentuk kontinu untuk n_s melalui transformasi berikut ini,

$$n_s \rightarrow n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

Dengan menggunakan hubungan $n_s = g_s e^{\alpha + \beta E_s}$ dan mengganti n_s dan g_s dengan variable kontinunya maka didapat

$$n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = Bm^3 V dv_x dv_y dv_z \times e^{\alpha + \beta E} \quad (8.15)$$

Selanjutnya kita melakukan penggantian variable sebagai berikut

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$\beta = -\frac{1}{kT}$$

$$e^\alpha = \frac{N}{BV(2\pi mkT)^{3/2}}$$

Dengan penggantian variabel di atas maka persamaan (8.15) menjadi

$$\begin{aligned} n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z &= Bm^3 V dv_x dv_y dv_z \times \frac{N}{BV(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} \\ &= N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} dv_x dv_y dv_z \end{aligned} \quad (8.16)$$

Selanjutnya kita dapat menghitung jumlah molekul yang memiliki komponen kecepatan antara v_x sampai $v_x + dv_x$, berapa pun nilai v_y dan v_z dengan mengintegrasikan $n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$, pada semua nilai v_y dan v_z yang mungkin, yaitu dari $v_y = -\infty$ sampai $v_y = +\infty$, dan $v_z = -\infty$ sampai $v_z = +\infty$. Hasilnya adalah

$$\begin{aligned} n(v_x) dv_x &= \int_{v_y=-\infty}^{+\infty} \int_{v_z=-\infty}^{+\infty} n(v_x, v_y, v_z) dv_y dv_z \\ &= N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_y=-\infty}^{+\infty} \int_{v_z=-\infty}^{+\infty} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} dv_y dv_z \end{aligned}$$

$$= N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\int_{v_y=-\infty}^{+\infty} e^{-mv_y^2/2kT} dv_y \right) \left(\int_{v_z=-\infty}^{+\infty} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z \right) e^{-mv_x^2/2kT} dv_x$$

Kita tinjau integral berikut ini $\int_{v_y=-\infty}^{+\infty} e^{-mv_y^2/2kT} dv_y$. Kita lakukan transformasi variable sebagai berikut

$$\frac{mv_y^2}{2kT} = \eta^2$$

$$v_y = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \eta$$

$$dv_y = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} d\eta$$

Dengan transformasi tersebut maka integral yang ingin kita cari dapat ditulis

$$\begin{aligned} & \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} d\eta \\ &= \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \times \sqrt{\pi} \\ &= \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Dengan cara persis sama kita akan dapatkan

$$\int_{v_z=-\infty}^{+\infty} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z = \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{1/2}$$

Akhirnya

$$\begin{aligned}
n(v_x)dv_x &= N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \\
&= N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Persamaan (8.17) menyatakan kerapatan partikel yang memiliki komponen kecepatan arah sumbu x antara v_x sampai $v_x + dv_x$.

Bab 9 Aplikasi Statistik Maxwell-Boltzmann

Isi Bab Ini

Bab ini berisi contoh aplikasi statistik Maxwell-Boltzmann pada sejumlah assembli sederhana yang mengandung partikel klasik dan beberapa perbandingan ramalan menggunakan statistik ini dengan data pengamatan.

Tujuan Bab Ini

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami beberapa aplikasi statistik Maxwell-Boltzmann pada sejumlah assembli klasik dan perbandingan hasil ramalan tersebut dengan data pengamatan.

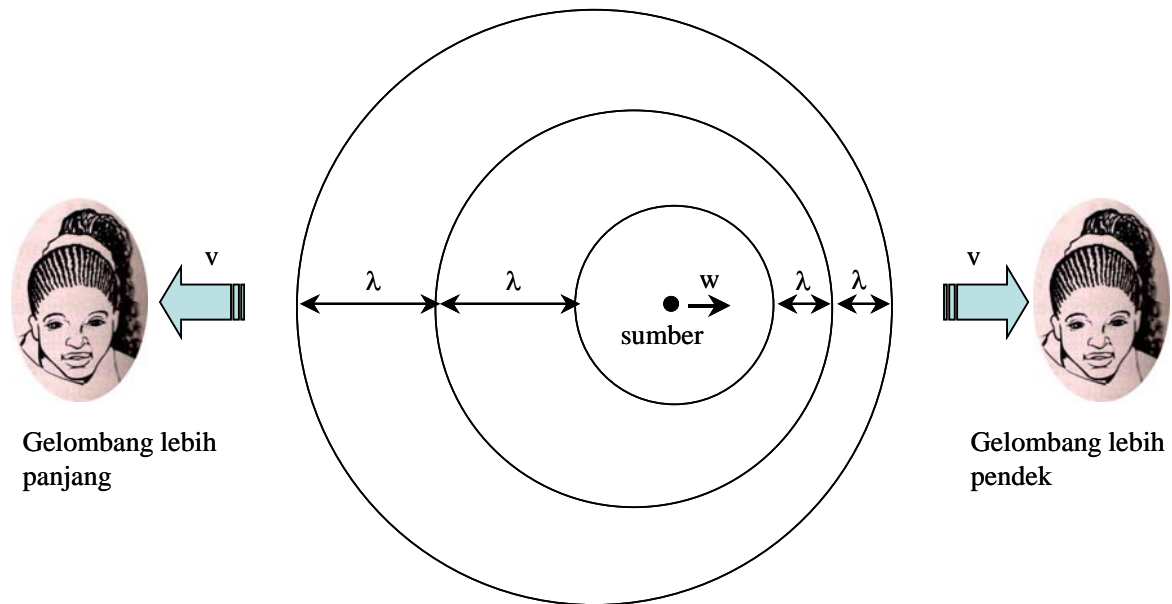
Apa Yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu

Untuk memahami aplikasi statistik Maxwell-Boltzmann mahasiswa perlu memahami prinsip dasar statistik Maxwell-Boltzmann, kerapatan keadaan klasik dan beberapa teknik integral.

9.1 Pelebaran Spectrum Akibat Efek Doppler

Setelah menurunkan beberapa jenis fungsi distribusi untuk system klasik maupun kuantum sekarang kita akan melihat beberapa aplikasi fungsi distribusi tersebut. Pada bab ini kita akan melihat beberapa aplikasi fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann. Pembahasan tersebut diharapkan akan memberikan petunjuk yang berarti kepada para mahasiswa dalam menerapkan fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann dalam beberapa bidang fisika.

Efek Doppler dijumpai pada gelombang bunyi maupun gelombang elektromagnetik. Salah satu pesan dari efek ini adalah jika sumber gelombang mendekati pengamat maka panjang gelombang yang diukur oleh pengamat lebih kecil daripada apabila sumber diam terhadap pengamat. Sebaliknya, jika sumber gelombang menjauhi pengamat maka panjang gelombang yang diukur pengamat lebih besar daripada apabila sumber diam terhadap pengamat. Peristiwa ini dapat dilustrasikan pada Gbr. 9.1



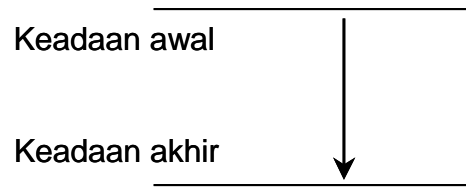
Gambar 9.1 Jika sumber mendekati pengamat maka panjang gelombang yang diukur pengamat lebih pendek daripada yang dikeluarkan sumber. Sebaliknya, jika sumber menjauhi pengamat maka panjang gelombang yang diukur pengamat lebih panjang daripada yang dikeluarkan sumber

Khusus untuk gelombang elektromagnetik, panjang gelombang yang diukur oleh pengamat yang diam yang dihasilkan oleh sumber bergerak dengan kecepatan v_x terhadap pengamat adalah

$$\lambda = \lambda_o \left(1 - \frac{v_x}{c} \right) \quad (9.1)$$

dengan λ panjang gelombang yang diukur pengamat, λ_o adalah panjang gelombang yang diukur jika sumber gelombang diam terhadap pengamat, dan c adalah kecepatan cahaya. Kita definisikan tanda kecepatan yaitu $v_x > 0$ jika sumber mendekati pengamat dan $v_x < 0$ jika sumber menjauhi pengamat. Dalam astronomi, efek Dopler digunakan untuk

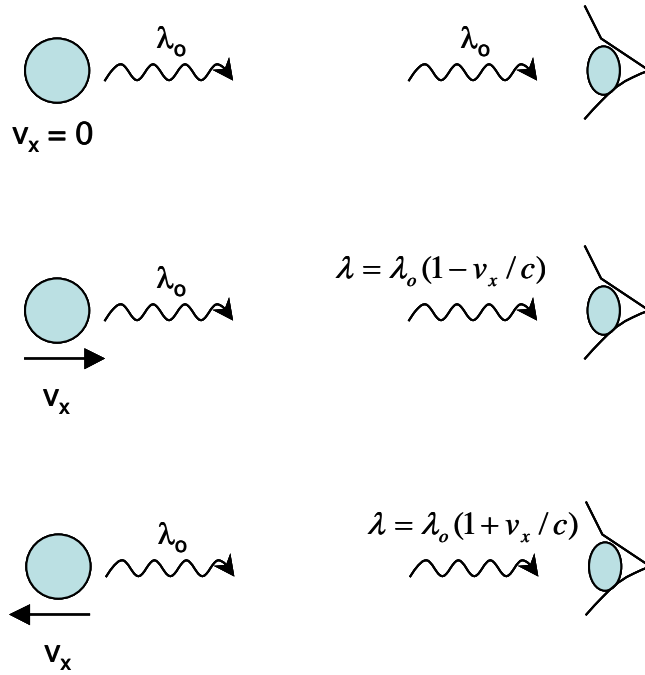
mengukur kecepatan bintang-bintang. Berdasarkan pergeseran panjang gelombang yang dipancarkan bintang-bintang tersebut maka kecepatan relatif bintang terhadap bumi dapat diprediksi menggunakan persamaan (9.2).



Gbr 9.2 Atom memancarkan gelombang elektromagnetik ketika terjadi transisi electron antar tingkat energi

Mari kita perhatikan sebuah atom yang memiliki dua tingkat energi (Gbr. 9.2). Atom tersebut memancarkan spektrum gelombang elektromagnetik dengan panjang gelombang tertentu, sebut saja λ_o , akibat transisi elektron antar tingkat energi atom tersebut. Jika atom dalam keadaan diam maka panjang gelombang yang kita ukur adalah λ_o , persis sama dengan panjang gelombang yang dipancarkan atom. Tetapi jika atom mendekati pengamat dengan laju v_x maka panjang gelombang yang diukur pengamat adalah $\lambda = \lambda_o(1 - v_x / c)$. Dan sebaliknya, jika atom menjauhi pengamat dengan laju v_x maka panjang gelombang yang diukur pengamat adalah $\lambda = \lambda_o(1 + v_x / c)$. Sebagai ilustrasi, lihat Gbr. 9.3

Jika ada sejumlah atom yang diam maka gelombang yang diukur pengamat merupakan jumlah gelombang yang dipancarkan oleh semua atom. Panjang gelombang yang diterima dari semua atom sama, yaitu λ_o . Yang dideteksi oleh pengamat hanyalah gelombang dengan panjang λ_o tetapi memiliki intensitas tinggi. Akan tetapi jika atom yang memancarkan gelombang bergerak secara acak maka komponen kecepatan ke arah pengamat, yaitu v_x juga acak. Akibatnya panjang gelombang yang diukur pengamat yang berasal dari satu atom berbeda dengan yang diukur dari atom lainnya. Pengamat akan mengukur gelombang yang memiliki panjang yang bervariasi dalam jangkauan tertentu. Ini berakibat pada pelebaran garis spektrum yang diamati.



Gambar 9.3 Pengamat menangkap panjang gelombang yang berbeda-beda bergantung pada gerak relative antara atom terhadap pengamat

Selanjutnya kita akan menentukan distribusi intensitas spektrum pada berbagai panjang gelombang. Kecepatan atom gas pemancar spektrum memenuhi fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann karena merupakan partikel klasik. Jumlah atom gas yang memiliki komponen kecepatan antara v_x sampai $v_x + dv_x$ adalah

$$n(v_x)dv_x = \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{mv_x^2}{2kT} \right] dv_x \quad (9.2)$$

Untuk mendapatkan fungsi distribusi intensitas maka kita harus mentransformasi variable kecepatan v_x ke dalam variable panjang gelombang λ dengan menggunakan persamaan Doppler (9.1). Apabila transformasi tersebut dilakukan maka $n(v_x)dv_x$ menjadi sebanding dengan $I(\lambda)d\lambda$, yang menyatakan intensitas gelombang yang memiliki panjang antara λ sampai $\lambda + d\lambda$. Dengan demikian kita peroleh

$$I(\lambda)d\lambda \propto \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{mv_x^2}{2kT} \right] dv_x \quad (9.3)$$

Dari persamaan (9.1) kita dapatkan

$$v_x = c \left(\frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda_o} \right) \quad (9.4a)$$

$$dv_x = -\frac{c}{\lambda_o} d\lambda \quad (9.4b)$$

Substitusi persamaan (9.4a) dan (9.4b) ke dalam persamaan (9.3) diperoleh

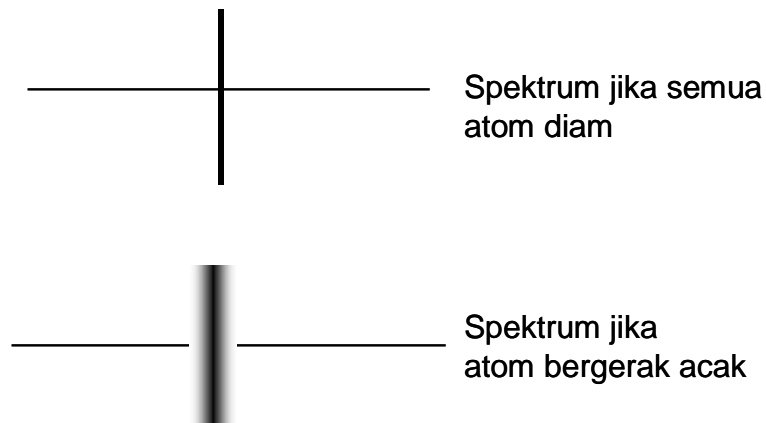
$$I(\lambda)d\lambda \propto \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{m \left(c \left[\frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda_o} \right] \right)^2}{2kT} \right] \left[-\frac{c}{\lambda_o} d\lambda \right]$$

$$\propto \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{1/2} \left[-\frac{c}{\lambda_o} \right] \exp \left[-\frac{mc^2}{2kT} \left(\frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda_o} \right)^2 \right] d\lambda$$

Yang selanjutnya bisa ditulis dalam bentuk lebih sederhana sebagai

$$I(\lambda)d\lambda = I(\lambda_o) \exp \left[-\frac{mc^2}{2kT} \left(\frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda_o} \right)^2 \right] d\lambda \quad (9.5)$$

dengan $I(\lambda_o)$ adalah intensitas ketika $\lambda = \lambda_o$. $I(\lambda_o)$ tidak bergantung pada panjang gelombang tetapi bergantung pada besaran lain seperti suhu gas dan massa atom gas. Gambar 9.4 adalah plot $I(\lambda)$ sebagai fungsi λ pada berbagai suhu gas. Tampak bahwa intensitas terdeteksi di sekitar λ_o dengan λ_o merupakan lokasi puncak intensitas. Jika suhu diperbesar maka spektrum makin lebar dan intensitasnya makin lemah. Ini disebabkan karena gerakan atom yang makin acak.



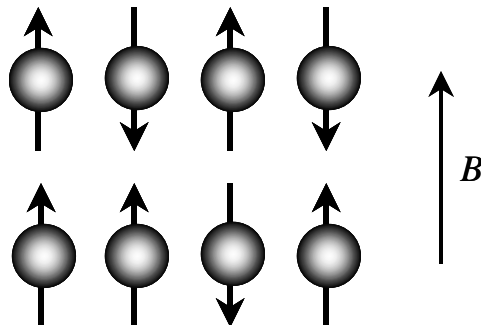
Gambar 9.4 Plot intensitas sebagai fungsi panjang gelombang pada berbagai suhu gas.

9.2 Atom Magnetik Dalam Medan Magnet

Selanjutnya kita akan bahas suatu assembli yang mengandung kumpulan atom yang memiliki momen magnet. Di dalam assembli tersebut kita berikan medan magnetic B . Untuk mempermudah kita assumisikan beberapa sifat berikut ini:

- i) Tidak ada interaksi antar atom. Interaksi hanya terjadi antara atom dengan medan magnet luar yang diberikan. Ini adalah penyederhanaan yang cukup drastik karena sebenarnya antara momen magnetic ada interaksi.
- ii) Momen magnetik atom hanya bisa mengambil salah satu dari dua arah orientasi, yaitu searah medan magnet atau berlawanan arah medan magnet.

Ilustrasi dari asumsi tersebut tampak pada Gbr. 9.4



Gambar 9.4 Dalam medan magnet, momen magnetik atom hanya dapat mengambil salah satu dari dua arah orientasi: searah atau berlawanan arah medan magnet.

Kita akan menentukan berapa momen magnetik total yang dihasilkan oleh kumpulan atom-atom tersebut. Kita mulai dengan menghitung energi yang dimiliki masing-masing atom akibat interaksi momen magnetik dengan magnet luar. Interaksi antara momen magnetik $\vec{\mu}$ dengan medan magnet luar \vec{B} memberikan tambahan energi pada atom sebesar

$$\begin{aligned} U &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \\ &= -\mu B \cos \theta \end{aligned} \quad (9.6)$$

Dengan θ adalah sudut antara momen magnetik dan medan magnet. Karena hanya ada dua arah orientasi momen magnetik yang diijinkan, yaitu searah medan magnet ($\theta = 0$) dan berlawanan dengan arah medan magnet ($\theta = \pi$), maka tambahan energi atom dengan momen magnetik searah medan magnet adalah

$$U_{\uparrow} = -\mu B \quad (9.7)$$

dan tambahan energi atom dengan momen magnetik berlawanan arah medan magnet adalah

$$U_{\downarrow} = \mu B \quad (9.8)$$

Probabilitas mendapatkan atom dengan arah momen searah medan magnet sebanding dengan $n(U_{\uparrow})$ dan probabilitas menemukan atom dengan arah momen berlawanan dengan arah medan magnet sebanding dengan $n(U_{\downarrow})$. Dengan demikian, kita dapat menulis

$$P_{\uparrow} = K n(U_{\uparrow}) \quad (9.9a)$$

$$P_{\downarrow} = K n(U_{\downarrow}) \quad (9.9b)$$

di mana K adalah faktor penormalisasi. Karena jumlah total probabilitas harus satu maka $P_{\uparrow} + P_{\downarrow} = 1$ yang memberikan ungkapan untuk factor normalisasi sebagai berikut

$$K = \frac{1}{n(U_{\uparrow}) + n(U_{\downarrow})} \quad (9.10)$$

Dengan demikian persamaan (9.9a) dan (9.9b) dapat ditulis menjadi

$$P_{\uparrow} = \frac{n(U_{\uparrow})}{n(U_{\uparrow}) + n(U_{\downarrow})} \quad (9.11a)$$

$$P_{\downarrow} = \frac{n(U_{\downarrow})}{n(U_{\uparrow}) + n(U_{\downarrow})} \quad (9.11b)$$

Atom merupakan partikel klasik yang memenuhi fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann. Oleh karena itu probabilitas masing-masing arah orientasi memenuhi

$$n(U_{\uparrow}) \propto \exp\left[-\frac{U_{\uparrow}}{kT}\right] = \exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] \quad (9.12a)$$

$$n(U_{\downarrow}) \propto \exp\left[-\frac{U_{\downarrow}}{kT}\right] = \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right] \quad (9.12b)$$

Substitusi persamaan (9.12a) dan (9.12b) ke dalam persamaan (9.11) kita dapatkan bentuk eksplisit dari probabilitas sebagai berikut

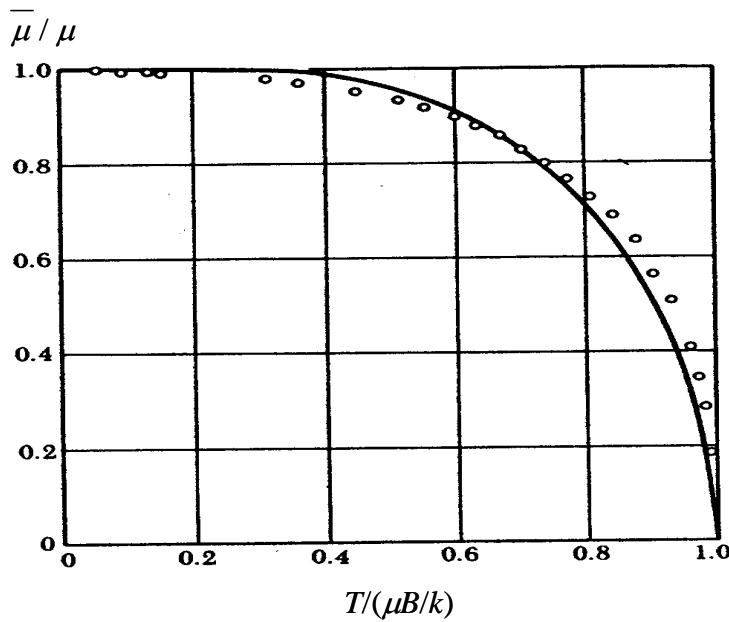
$$P_{\uparrow} = \frac{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]} \quad (9.13a)$$

$$P_{\downarrow} = \frac{\exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]} \quad (9.13b)$$

Selanjutnya kita menghitung momen magnetik rata-rata atom. Karena hanya ada dua arah orientasi yang diijinkan maka momen magnetik rata-rata atom dapat dihitung dengan persamaan sederhana

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= +\mu P_{\uparrow} - \mu P_{\downarrow} \\ &= +\mu \frac{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]} - \mu \frac{\exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]} \\ &= \mu \frac{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] - \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]} = \mu \frac{\left(\frac{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] - \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]}{2} \right)}{\frac{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]}{2}} = \mu \frac{\sinh\left[\frac{\mu B}{kT}\right]}{\cosh\left[\frac{\mu B}{kT}\right]} \\ &= \mu \tanh\left[\frac{\mu B}{kT}\right] \end{aligned} \quad (9.14)$$

Gambar 9.5 adalah plot $\bar{\mu}$ sebagai fungsi suhu. Tampak bahwa jika $T \rightarrow 0$ maka $\bar{\mu} \rightarrow \mu$. Artinya bahwa pada suhu tersebut momen magnetik rata-rata mengambil arah yang sama. Ini terjadi karena pada suhu yang mendekati nol, getaran termal atom-atom menjadi sangat kecil. Interaksi dengan medan magnet luar dapat memaksa atom-atom mengambil arah orientasi yang sama.



Gambar 9.5 Momen gamnetik rata-rata atom sebagai fungsi suhu.

Sebaliknya, pada suhu $T \rightarrow \infty$ maka $\bar{\mu} \rightarrow 0$. Ini akibat getaran atom-atom yang sangat intensif sehingga medan magnet luar yang diberikan tidak sanggup mengarahkan momen-momen magnet. Energi termal electron jauh melampaui energi interaksi dengan medan magnet. Arah momen magnet atom-atom menjadi acak. Akibatnya, jumlah momen magnet yang searah medan menjadi sama dengan yang berlawanan arah medan. Juga tampak bahwa untuk suhu yang sama, $\bar{\mu}$ makin besar jika medan makin besar. Ini disebabkan penggunaan medan yang besar akan memberikan paksaan yang lebih besar kepada atom-atom untuk menyearahkan momen magnetiknya.

9.3 Dipol Listrik

Fenomena yang mirip dengan atom magnetik dijumpai pula pada assembli momen dipol listrik. Misalkan kita memiliki sejumlah atom atau molekul sejenis yang masing-masing memiliki momen dipol \vec{p} . Di dalam assembli tersebut kita berikan medan listrik E . Kita ingin mencari berapa momen dipol rata-rata yang dimiliki atom/molekul. Untuk kemudahan kita juga mengansumsikan beberapa sifat berikut ini:

- i) Tidak ada interaksi antara sesama dipol. Interaksi hanya terjadi antara dipol dengan medan listrik luar.
- ii) Tiap dipol hanya boleh mengambil salah satu dari dua arah orientasi, yaitu searah medan listrik dan berlawanan arah dengan arah medan listrik.

Energi interaksi antara dipol dengan medan listrik adalah

$$\begin{aligned}
 U &= -\vec{p} \cdot \vec{E} \\
 &= -pE \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{9.15}$$

dengan θ adalah sudut antara momen dipol dengan medan listrik. Jika dipol searah medan maka energi interaksinya adalah

$$U_{\uparrow} = -pE \tag{9.16a}$$

dan jika berlawanan medan maka energi interkasinya adalah

$$U_{\downarrow} = pE \tag{9.16b}$$

Tampak bahwa bentuk ungkapan energi ini sama persis dengan yang kita jumpai pada atom magnetik yang telah kita bahas di sub Bab 9.1. Dengan demikian, pencarian momen dipol total persis sama dengan saat kita mencari momen magnetik total, hanya dengan mengganti variable-variabel yang ekuivalen sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 p &\leftrightarrow \mu \\
 E &\leftrightarrow B
 \end{aligned}$$

Dengan melakukan penggantian tersebut akhirnya kita dapatkan momen dipol rata-rata atom menjadi

$$\bar{p} = p \tanh \left[\frac{pE}{kT} \right] \quad (9.17)$$

9.4 Momen Magnetic Dengan Tiga Arah Orientasi

Kita sudah membahas momen magnetic rata-rata jika hanya ada dua orientasi yang diijinkan, yaitu searah dan berlawanan dengan arah medan magnet. Sekarang kita sedikit perluas asumsi kita dengan menganggap bahwa ada tiga arah orientasi momen magnetik yang diijinkan, yaitu searah medan magnet, tegak lurus medan magnet, dan berlawanan arah medan magnet.

Dari persamaan energi interaksi antara momen magnetic dan medan magnet $U = -\mu B \cos \theta$ kita dapatkan bahwa:

- i) Untuk momen yang searah medan, energi interaksinya adalah $U_{\uparrow} = -\mu B$
- ii) Untuk momen yang tegak lurus medan, energi interaksinya adalah $U_{\rightarrow} = -\mu B \cos(\pi/2) = 0$
- iii) Untuk momen yang tegak lurus medan, energi interaksinya adalah $U_{\downarrow} = \mu B$

Probabilitas untuk mendapatkan momen magnetic pada berbagai arah tersebut sebagai berikut:

- i) Untuk momen yang searah medan

$$P_{\uparrow} = \frac{e^{-U_{\uparrow}/kT}}{e^{-U_{\uparrow}/kT} + e^{-U_{\rightarrow}/kT} + e^{-U_{\downarrow}/kT}} = \frac{e^{\mu B/kT}}{e^{\mu B/kT} + 1 + e^{-\mu B/kT}} \quad (9.18A)$$

- ii) Untuk yang tegak lurus medan

$$P_{\rightarrow} = \frac{e^{-U_{\rightarrow}/kT}}{e^{-U_{\uparrow}/kT} + e^{-U_{\rightarrow}/kT} + e^{-U_{\downarrow}/kT}} = \frac{1}{e^{\mu B/kT} + 1 + e^{-\mu B/kT}} \quad (9.18b)$$

- iii) Untuk yang berlawanan dengan arah medan

$$P_{\rightarrow} = \frac{e^{-U_{\downarrow}/kT}}{e^{-U_{\uparrow}/kT} + e^{-U_{\rightarrow}/kT} + e^{-U_{\downarrow}/kT}} = \frac{e^{-\mu B/kT}}{e^{\mu B/kT} + 1 + e^{-\mu B/kT}} \quad (9.18c)$$

Momen magnetic yang searah medan memberikan kontribusi momen magnetik $+\mu$, yang tegak lurus medan memberi kontribusi momen magnetik 0, dan yang berlawanan dengan arah medan memberi kontribusi momen magnetik $-\mu$. Dengan demikian, momen magnetik rata-rata adalah

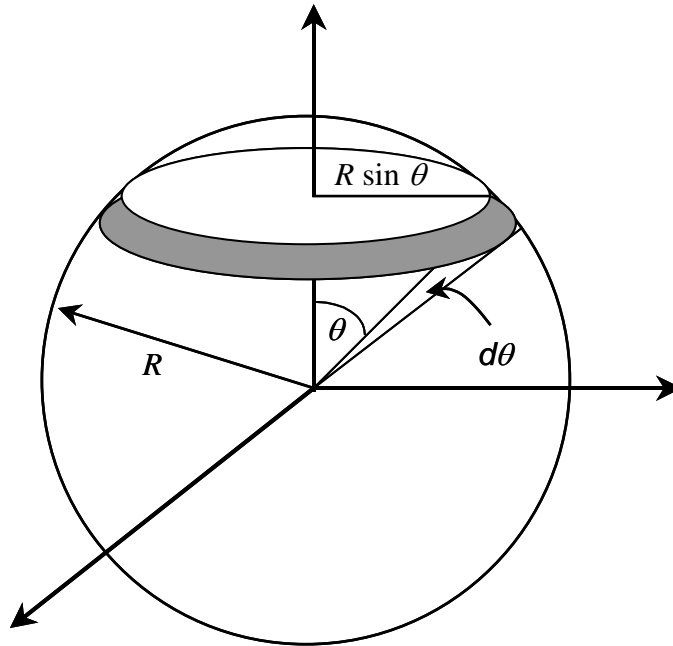
$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= +\mu \times P_{\uparrow} + 0 \times P_{\rightarrow} - \mu \times P_{\downarrow} \\ &= \mu \frac{e^{\mu B/kT}}{e^{\mu B/kT} + 1 + e^{-\mu B/kT}} - \mu \frac{e^{-\mu B/kT}}{e^{\mu B/kT} + 1 + e^{-\mu B/kT}} \\ &= \mu \frac{e^{\mu B/kT} - e^{-\mu B/kT}}{e^{\mu B/kT} + 1 + e^{-\mu B/kT}} = \mu \frac{\frac{e^{\mu B/kT} - e^{-\mu B/kT}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{e^{\mu B/kT} + e^{-\mu B/kT}}{2}} \\ &= \mu \frac{\sinh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)}{\frac{1}{2} + \cosh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)} \end{aligned} \quad (9.19)$$

9.5 Momen Magnetic Dengan Arah Orientasi Sembarang

Sekarang kita melangkah ke kasus yang lebih umum di mana arah orientasi momen magnetik bisa sembarang, bukan diskrit seperti yang kita bahas sebelumnya. Tentu saja pembahasan akan sedikit lebih rumit. Tetapi mari kita bahas perlahan-lahan. Sebagai ilustrasi, lihat Gbr. 9.7.

Mari kita melihat momen magnetik yang membentuk arah antara sudut θ sampai $\theta + d\theta$ terhadap arah medan magnet. Arah medan magnet dipilih sejajar sumbu z . Momen magnetik dengan arah orientasi demikian memiliki energi interaksi

$U(\theta) = -\mu B \cos \theta$. Kita akan menentukan berapa peluang momen magnetic tersebut berada pada sudut demikian. Ini ditentukan oleh dua faktor, yaitu faktor Maxwell-Boltzmann, dan kerapatan keadaan. Coba kalian iris kulit bola yang dibatasi oleh sudut θ sampai $\theta + d\theta$ dan hitung luas irisan tersebut. Irisan tersebut berbentuk lingkaran dengan lebar tertentu.



Gambar 9.7 Menentukan rapat keadaan yang dibatasi oleh sudut antara θ sampai $\theta + d\theta$

Misalkan jari-jari bola adalah R . Jari-jari irisan adalah $r = R \sin \theta$. Dengan demikian, keliling irisan tersebut adalah

$$K = 2\pi r = 2\pi R \sin \theta \quad (9.20)$$

Keliling bola sendiri adalah $2\pi R$. Keliling ini mencakup sudut sebesar 2π , sedangkan irisan sendiri hanya mencakup sudut sebesar $d\theta$. Dengan menggunakan perbandingan sudut maka kita dapat menghitung tebal irisan sebagai berikut

$$ds = \frac{d\theta}{2\pi} \times 2\pi R = R d\theta \quad (9.21)$$

Akhirnya kita dapatkan luas irisan adalah

$$\begin{aligned} dS &= K ds \\ &= (2\pi R \sin \theta) R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (9.22)$$

Luas keseluruhan kulit bola sendiri adalah $S = 4\pi R^2$. Dengan demikian, kerapatan keadaan pada posisi sudut θ sampai $\theta + d\theta$ adalah

$$\begin{aligned} g(\theta) d\theta &= \frac{dS}{S} = \frac{2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{4\pi R^2} \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (9.23)$$

Probabilitas mendapatkan atom dengan arah orientasi momen magnetik antara θ sampai $\theta + d\theta$ adalah

$$P(\theta) d\theta \propto e^{-U(\theta)/kT} g(\theta) d\theta$$

atau

$$P(\theta) d\theta = C e^{-U(\theta)/kT} g(\theta) d\theta \quad (9.24)$$

dengan C adalah faktor penormalisasi. Karena probabilitas mendapatkan atom pada semua orientasi adalah 1 maka

$$\int_0^\pi P(\theta) d\theta = 1$$

atau

$$\int_0^\pi C e^{-U(\theta)/kT} g(\theta) d\theta = 1$$

yang akhinra memberikan ungkapan untuk faktor penormalisasi

$$C = \frac{1}{\int_0^\pi e^{-U(\theta)/kT} g(\theta) d\theta} \quad (9.25)$$

Ketika momen magnetik membentuk sudut θ maka komponen momen yang searah medan magnet hanya $\mu \cos \theta$. Dengan demikian, momen magnetic rata-rata menjadi

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \int_0^\pi (\mu \cos \theta) P(\theta) d\theta \\ &= \frac{\int_0^\pi (\mu \cos \theta) e^{-U(\theta)/kT} g(\theta) d\theta}{\int_0^\pi e^{-U(\theta)/kT} g(\theta) d\theta} \\ &= \mu \frac{\int_0^\pi \cos \theta e^{\mu B \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\mu B \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta} \end{aligned} \quad (9.26)$$

Untuk menyelesaikan intergral (9.26) mari kita misalkan $x = \mu B \cos \theta / kT$. Dengan permisalan ini maka

$$\cos \theta = \frac{kT}{\mu B} x \quad (9.27a)$$

$$\sin \theta d\theta = -\frac{kT}{\mu B} dx \quad (9.27b)$$

Selanjutnya kita menentukan batas integral untuk x . Jika $\theta = 0$ maka $x = \frac{\mu B}{kT}$ dan jika $\theta = \pi$ maka $x = -\mu B / kT$. Substitusi persamaan (9.27a) dan (9.27b) ke dalam persamaan (9.26) kita peroleh

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \mu \frac{\int_{-\mu B / kT}^{\mu B / kT} \left(\frac{kT}{\mu B} x \right) e^x \left(-\frac{kT}{\mu B} dx \right)}{\int_{-\mu B / kT}^{\mu B / kT} e^x \left(-\frac{kT}{\mu B} dx \right)} \\ &= \left(\frac{kT}{B} \right) \frac{\int_{-\mu B / kT}^{\mu B / kT} x e^x dx}{\int_{-\mu B / kT}^{\mu B / kT} e^x dx} = \left(\frac{kT}{B} \right) \left(\frac{-\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} - \alpha e^{\alpha} + e^{\alpha}}{e^{-\alpha} - e^{\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (9.28)$$

dengan $\alpha = \mu B / kT$. Kita sederhanakan lebih lanjut persamaan (9.28) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \left(\frac{kT}{B} \right) \frac{-\alpha(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) + (e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{-(e^{\alpha} - e^{-\alpha})} \\ &= \left(\frac{kT\alpha}{B} \right) \left(\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= \mu \left(\frac{(e^{\alpha} + e^{-\alpha})/2}{(e^{\alpha} - e^{-\alpha})/2} - \frac{1}{\alpha} \right) = \mu \left(\frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= \mu \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (9.29)$$

Dengan memperkenalkan fungsi Langevin,

$$L(\alpha) = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \quad (9.30)$$

maka momen magnetic rata-rata dapat ditulis dalam bentuk lebih singkat sebagai berikut

$$\bar{\mu} = \mu L\left(\frac{\mu B}{kT}\right) \quad (9.31)$$

9.6 Vibrasi Kisi Dalam Kristal

Atom-atom dalam kristal selalu bervibrasi. Atom-atom tersebut dapat dipandang sebagai kumpulan osilator harmonik sejenis. Kita akan mencari energi rata-rata getaran atom dalam kristal. Kita menganggap bahwa tidak ada interaksi antara satu atom dengan atom lainnya. Tiap atom dipandang sebagai osilator harmonik bebas.

Menurut mekanika kuantum, atom-atom yang bergetar tidak dapat memiliki energi sembarang. Energi yang dimiliki osilator tersebut bersifat diskrit yang memenuhi

$$\varepsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega \quad (9.32)$$

dengan $\hbar = h/2\pi$, ω adalah frekuensi karakteristik osilasi, dan n adalah bilangan kuantum osilasi dengan nilai $0, 1, 2, \dots, \infty$.

Kita berkeinginan mencari energi rata-rata getaran atom dengan ansumsi bahwa distribusi osilator yang memiliki energi tertentu memenuhi distribusi Maxwell-Boltzmann. Dengan demikian, peluang sebuah osilator memiliki energi $\varepsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ adalah $P_n \propto e^{-\varepsilon_n/kT}$ atau

$$P_n = C e^{-\varepsilon_n/kT} \quad (9.33)$$

dengan C adalah konstanta normalisasi. Peluang mendapatkan osilator pada semua tingkat energi adalah satu. Peluang tersebut adalah penjumlahan semua P_n dari $n = 0$ hingga $n = \infty$, atau $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$. Penjumlahan tersebut menghasilkan nilai factor normalisasi dalam bentuk

$$C = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n / kT}} \quad (9.34)$$

Ungkapan lengkap untuk probabilitas menemukan osilator pada keadaan dengan bilangan kuantum n adalah

$$P_n = \frac{e^{-\varepsilon_n / kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n / kT}} \quad (9.35)$$

Setelah mendapatkan ungkapan untuk peluang mendapatkan osilator pada berbagai tingkat energi maka kita dapat menghitung energi rata-rata osilator sebagai berikut

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n P_n \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\varepsilon_n / kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n / kT}} \end{aligned} \quad (9.36)$$

Untuk mencari bentuk penjumlahan di atas mari kita ganti $-1/kT$ dengan β . Penggantian tersebut menyebabkan kita dapat menulis persamaan 89.36) sebagai

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^N \varepsilon_n e^{\beta \varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^N e^{\beta \varepsilon_n}} \quad (9.37)$$

Mari kita misalkan

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta \varepsilon_n} \quad (9.38)$$

Jika kita diferensialkan Z terhadap β , kita peroleh

$$\frac{dZ}{d\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\beta} e^{\beta \varepsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\varepsilon_n} \quad (9.39)$$

Dengan demikian, kita dapat menulis energi rata-rata osilator sebagai

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta} \\ &= \frac{d}{d\beta} \ln Z \end{aligned} \quad (9.40)$$

Persamaan (9.40) menginformasikan pada kita bahwa untuk mencari energi rata-rata osilator, kita dapat memulai dengan mencari Z seperti yang didefinisikan dalam persamaan (9.38). Sekarang marilah kita mencari Z tersebut.

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta \varepsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta(n+1/2)\hbar\omega} \\ &= e^{\beta\hbar\omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\beta\hbar\omega} \end{aligned} \quad (9.41)$$

Kalian ingat jumlah suatu deret geometri berikut ini bukan? Jika $|x| < 1$ maka berlaku

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (9.42)$$

Dengan membandingkan persamaan (9.41) dan persamaan (9.42) kita identifikasi bahwa x pada persamaan (9.42) ekuivalen dengan $e^{\beta\hbar\omega}$ pada persamaan (9.41). Dengan demikian kita dapat menulis

$$Z = e^{\beta\hbar\omega/2} \left(\frac{1}{1 - e^{\beta\hbar\omega}} \right) \quad (9.43)$$

Selanjuta kita dapat memperoleh persamaan-persamaan berikut ini,

$$\begin{aligned} \ln Z &= \frac{\beta\hbar\omega}{2} - \ln(1 - e^{\beta\hbar\omega}) \\ \frac{d}{d\beta} \ln Z &= \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{1}{(1 - e^{\beta\hbar\omega})} \times (-\hbar\omega e^{\beta\hbar\omega}) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega e^{\beta\hbar\omega}}{1 - e^{\beta\hbar\omega}} \end{aligned}$$

Dengan demikian, energi rata-rata osilator menjadi

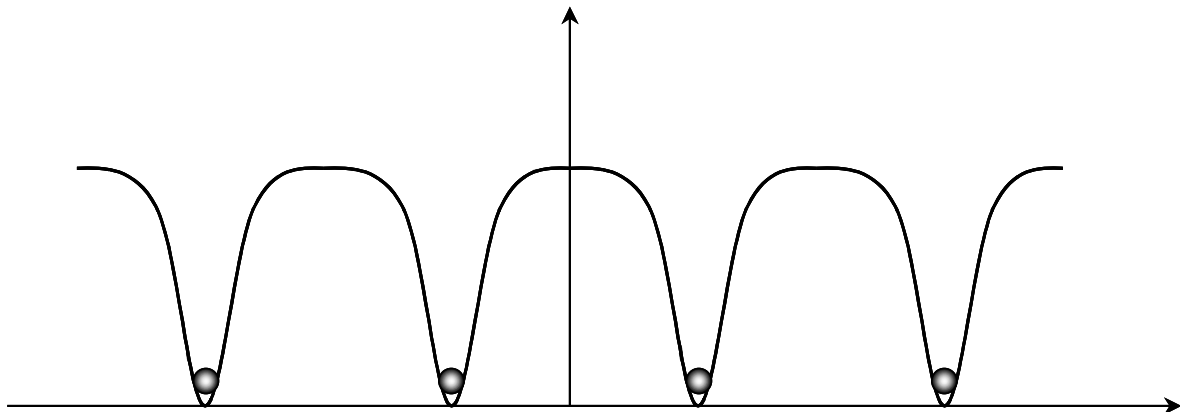
$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{d}{d\beta} \ln Z = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega e^{\beta\hbar\omega}}{1 - e^{\beta\hbar\omega}} \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{-\beta\hbar\omega} - 1} \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \end{aligned} \quad (9.44)$$

Tampak dari persamaan (9.44), jika $T \rightarrow 0$ maka $e^{\hbar\omega/kT} \rightarrow \infty$. Dengan sifat ini maka $\bar{\varepsilon} \rightarrow \frac{\hbar\omega}{2}$. Energi $\bar{\varepsilon} \rightarrow \frac{\hbar\omega}{2}$ disebut energi titik nol.

9.7 Hopping

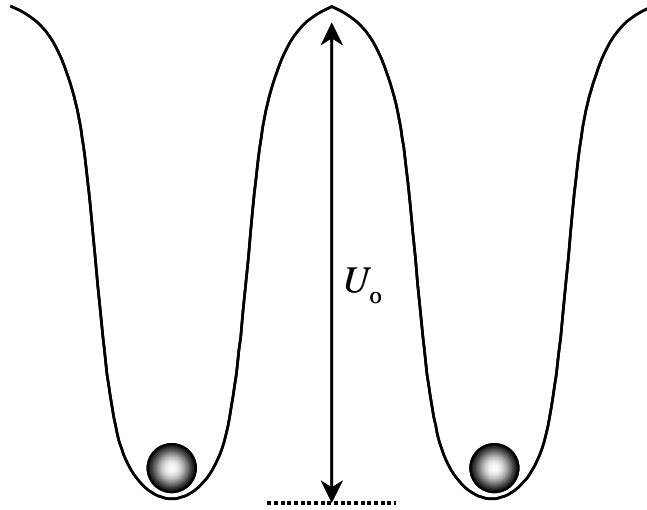
Sekarang kita akan tinjau konduktivitas suatu material ionik. Ion-ion dalam material semacam ini menempati posisi yang tetap. Ion-ion tersebut tidak dapat bergerak bebas seperti pada atom zat cair atau gas. Tetapi, ketika material tersebut ditempatkan di antara dua elektroda dan diberi beda potensial maka ada arus yang mengalir dalam material. Bagaimana menjelaskan fenomena ini? Mari kita bahas.

Karena ion-ion berada pada lokasi yang tetap dan sulit bergerak maka kita dapat menganggap bahwa masing-masing ion terkurung dalam lembah potensial seperti dilustrasikan pada Gbr. 9.8 ini.



Gambar Gbr. 9.8 Ion-ion dalam material ionic dapat dianggap terkutung dalam lembah potensial

Tinggi bukit potensial mencerminkan energi ikat yang dimiliki ion-ion. Makin tinggi bukit potensial maka makin kuat ion-ion terikat pada tempatnya. Namun, meskipun ion terikat pada posisi tempat masing-masing, ion-ion masih memiliki peluang untuk berpindah ke lokasi lain dengan cara meloncati bukit potensial. Peristiwa ini disebut **hopping**.



Gambar 9.9 Dua ion bertetangga dalam material ionik

Untuk menjelaskan fenomena hopping, mari kita lihat dua ion bertetangga seperti yang diilustrasikan pada Gbr 9.9. Tinggi bukit potensial adalah U_o . Ion dapat meloncati bukit potensial jika memiliki energi qU_o , dengan q muatan efektif ion. Berdasarkan statistik Maxwell-Boltzmann, peluang ion memiliki energi qU_o adalah

$$P = Ce^{-qU_o/kT} \quad (9.45)$$

dengan C adalah faktor penormalisasi.

Ion kiri dan kanan melihat bukit potensial yang sama tingginya. Peluang ion kiri meloncat ke kanan adalah

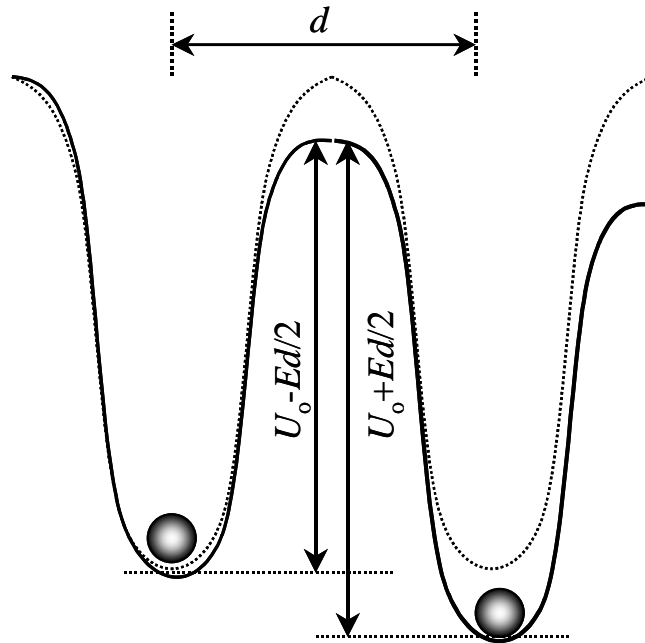
$$P_+ = Ce^{-qU_o/kT} \quad (9.46a)$$

dan peluang ion kanan meloncat ke kiri adalah

$$P_- = Ce^{-qU_o/kT} \quad (9.46b)$$

Karena ke dua peluang tersebut sama maka secara total tidak ada loncatan ion netto ke kiri maupun ke kanan. Akibatnya, tidak ada arus dalam bahan.

Sekarang pada material kita beri medan listrik E ke arah kanan. Pemberian medan ini menyebabkan potensial pada tiap titik dalam material mengalami perubahan. Titik yang berada pada posisi x mengalami perubahan potensial sebesar $V(x) = -E x$. Akibatnya adanya medan tersebut, tinggi bukit potensial yang diamati dua ion menjadi berbeda seperti diilustrasikan pada Gbr. 9.10



Gambar 9.10 Bukit potensial mengalami distorsi ketika diberi medan listrik

Jika dimisalkan jarak dua ion berdekatan adalah d maka kita dapatkan hasil berikut ini:

i) Potensial pada posisi ion sebelah kiri menjadi

$$U_1 = V(x) = -E x \quad (9.47)$$

ii) Potensial pada posisi ion sebelah kanan menjadi

$$U_2 = V(x + d) = -E(x + d) = -E x - E d \quad (9.48)$$

iii) Tinggi bukit potensial menjadi

$$U_b(x) = U_o - V\left(x + \frac{d}{2}\right) = U_o - E\left(x + d/2\right) = U_o - Ex - Ed/2 \quad (9.49)$$

iv) Tinggi bukit potensial terhadap posisi ion kiri adalah

$$\Delta U_1 = U_b - U_1 = \left(U_o - Ex - \frac{Ed}{2}\right) - (-Ex) = U_o - \frac{Ed}{2} \quad (9.50)$$

iv) Tinggi bukit potensial terhadap posisi ion kanan adalah

$$\Delta U_2 = U_b - U_2 = \left(U_o - Ex - \frac{Ed}{2}\right) - (-Ex - Ed) = U_o + \frac{Ed}{2} \quad (9.51)$$

Berdasarkan potensial-potensial di atas maka kita dapatkan hasil lanjut berikut ini:

i) Probabilitas ion kiri meloncat ke kanan adalah

$$P_+ = Ce^{-q\Delta U_1 / kT} = Ce^{-q(U_o - Ed/2) / kT} \quad (9.52)$$

ii) Probabilitas ion kanan meloncat ke kiri adalah

$$P_- = Ce^{-q\Delta U_2 / kT} = Ce^{-q(U_o + Ed/2) / kT} \quad (9.53)$$

iii) Selisih probabilitas ion meloncat dari kiri ke kanan adalah

$$\begin{aligned} \Delta P &= P_+ - P_- \\ &= Ce^{-qU_o / kT} \left(e^{qEd / 2kT} - e^{-qEd / 2kT} \right) \\ &= Ce^{-(qU_o + qEd/2) / kT} \left(e^{qEd / kT} - 1 \right) \end{aligned} \quad (9.54)$$

Jika dianggap bukit potensial sangat tinggi sehingga $|qU_o| \gg |qEd/2|$ maka kita dapat mengaproksimasi $qU_o + qEd/2 \cong qU_o$. Dengan aproksimasi ini maka persamaan (9.54) menjadi

$$\Delta P \cong C e^{-qU_o/kT} (e^{qEd/kT} - 1) \quad (9.55)$$

Kerapatan arus yang mengalir di dalam material sebanding dengan selisih probabilitas di atas, atau $J \propto \Delta P$, sehingga bisa kita tulis

$$J(T, E) = J_o e^{-qU_o/kT} (e^{qEd/kT} - 1) \quad (9.56)$$

Jika medan yang diterapkan tidak terlalu besar, yaitu jika terpenuhi $qEd \ll kT$ maka aproksimasi $e^{qEd/kT} \approx 1 + qEd/kT$ dapat kita lakukan. Dengan aproksimasi tersebut maka persamaan (9.56) dapat disederhanakan menjadi

$$J(T, E) \approx J_o e^{-qU_o/kT} \frac{qEd}{kT} \quad (9.57)$$

Kita ingat pelajaran tentang arus listrik bahwa ada hubungan antara kerapatan arus dan medan, yaitu

$$J = \sigma E \quad (9.58)$$

dengan σ disebut konduktivitas listrik. Dengan membandingkan persamaan (9.57) dan (9.58) kita dapatkan ungkapan konduktivitas listrik pada medan rendah untuk material ionik sebagai

$$\sigma \approx J_o e^{-qU_o/kT} \frac{qd}{kT}$$

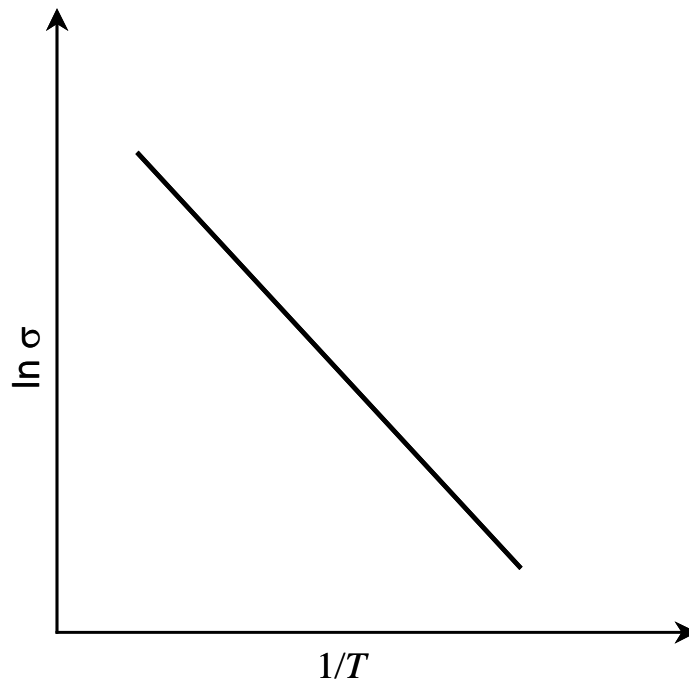
$$= \frac{\sigma_o}{T} e^{-E_a / kT} \quad (9.59)$$

Dengan $\sigma_o = J_o qd / k$ dan $E_a = qU_o$. Besaran E_a dikenal dengan nama energi aktivasi.

Dalam eksperimen, biasanya konduktivitas ditampilkan dalam grafik konduktivitas skala logaritmik terhadap kebalikan suhu. Jika kita ambil logaritma dua sisi persamaan (9.59) maka kita dapatkan

$$\ln \sigma = \ln \sigma_o + \ln \left(\frac{1}{T} \right) - \frac{E_a}{k} \left(\frac{1}{T} \right) \quad (9.60)$$

Gambar 9.11 adalah bentuk kurva $\ln \sigma$ sebagai fungsi $1/T$. Bentuk kurva semacam ini sering dijumpai dalam eksperimen. Kemiringan kurva adalah $-E_a / k$ sekaligus menentukan energi aktivasi.



Gambar 9.11 Bentuk kurva konduktivitas dalam skala logaritma terhadap $1/T$

9.8 Persamaan Difusi Einstein

Selanjutnya kita meninjau difusi ion di bawah pengaruh medan listrik. Peristiwa ini sering dimanfaatkan dalam proses elektroforesis di mana medan listrik digunakan untuk menggerakkan partikel-partikel bermuatan dalam zat cair.

Mari kita lihat sebuah assembli yang mengandung sejumlah ion. Kita anggap tidak ada interaksi antar ion. Interaksi hanya terjadi antara ion dan medan listrik yang diterapkan. Misalkan muatan semua ion sama, yaitu q . Misalkan pula arah medan listrik sejajar sumbu x . Difusi yang akan kita bahas hanya difusi dalam arah sejajar sumbu x . Kita menganggap kuat medan listrik sama pada tiap titik dalam bahan. Gaya yang dialami ion yang berada pada posisi x adalah $F = qE$ sehingga Energi potensial yang dimiliki ion yang berada pada posisi x adalah

$$U(x) = -qEx \quad (9.61)$$

Karena ion merupakan partikel klasik maka distribusi Maxwell-Boltzmann digunakan sehingga konsentrasi ion pada posisi x memenuhi

$$n(x) = Ce^{-U(x)/kT} = Ce^{qEx/kT} \quad (9.62)$$

di mana C merupakan konstanta normalisasi

Dari kuliah tentang arus listrik kita sudah mempelajari hubungan antara kecepatan ion dengan kuat medan yang diterapkan, yaitu

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \quad (9.63)$$

dengan μ adalah mobilitas listrik. Untuk kasus satu dimensi maka kita bisa sederhanakan menjadi $v = \mu E$. Kerapatan arus pada posisi x yang diakibatkan oleh medan listrik adalah

$$J_e(x) = vn(x) = \mu En(x) \quad (9.64)$$

Di samping itu, karena terjadi ketidakhomogenan distribusi ion maka terjadi juga pergerakan ion akibat ketidakhomogenan itu. Gerakan ion akibat fenomena ini disebut difusi. Kerapatan arus difusi memenuhi

$$\vec{J}_d = -D\vec{\nabla}n \quad (9.65)$$

dengan D disebut konstanta difusi dan $\vec{\nabla} = \hat{i}\partial/\partial x + \hat{j}\partial/\partial y + \hat{k}\partial/\partial z$. Tanda minus pada persamaan (9.65) menginformasikan bahwa arah aliran ion akibat difusi berlawanan dengan arah gradient kerapatan ion. Artinya ion mengalir dari lokasi dengan kerapatan tinggi ke lokasi dengan kerapatan rendah. Lebih khusus lagi, untuk kasus satu dimensi, kerapatan arus difusi dapat ditulis

$$J_d(x) = -D \frac{dn(x)}{dx} \quad (9.66)$$

Dengan menggunakan persamaan (9.62) kita dapatkan

$$\frac{dn(x)}{dx} = C \frac{qE}{kT} e^{qEx/kT} = \frac{qE}{kT} n(x)$$

Substitusi hasil di atas ke dalam persamaan (9.66) diperoleh,

$$J_d(x) = -D \frac{qE}{kT} n(x) \quad (9.67)$$

Jika bahan tidak dihubungkan dengan rangkaian luar maka tidak ada arus total yang mengalir dalam bahan. Dengan demikian arus akibat medan listrik dan akibat difusi harus saling meniadakan, atau

$$J_e + J_d = 0$$

$$\mu E n(x) - D \frac{qE}{kT} n(x) = 0$$

Yang memberikan mobilitas ion sebagai

$$\mu = \frac{qD}{kT} \quad (9.68)$$

Persamaan (9.68) dikenal dengan persamaan difusi Einstein.

9.9 Prinsip Ekipartisi Energi

Prinsip ekipartisi energi menyatakan bahwa tiap derajat kebebasan yang memiliki energi fungsi dalam ungkapan fungsi kuadratik dari variable derajat kebebasan memberikan kontribusi energi rata-rata kepada partikel sebesar $kT/2$. Contohnya, sebuah partikel yang bergerak bebas sepanjang garis lurus. Partikel tersebut hanya memiliki satu derajat kebebasan, yaitu momentum dalam satu arah. Energi partikel merupakan fungsi kuadratik dari momentum. Dengan demikian energi rata-rata yang disumbangkan oleh momentum tersebut adalah $kT/2$. Jika partikel tersebut hanya dapat bergerak dalam satu garis lurus di bawah pengaruh gaya pegas maka, partikel tersebut memiliki dua derajat kebebasan, yaitu posisi dan momentum. Derajat kebebasan posisi memberikan energi dalam bentuk kuadratik (persamaan Hooke) dan derajad kebebasan momentum juga memberikan energi dalam bentuk kuadratik. Apabila dirata-ratakan maka derajat kebebasan posisi dan momentum masing-masing menyumbang $kT/2$ sehingga energi rata-rata partikel adalah $2 \times (kT/2) = kT$. Pada bagian ini kita akan membuktikan prinsip ini secara umum untuk derajat kebebasan yang sembarang.

Misalkan suatu partikel memiliki f derajat kebebasan. Energi total partikel diungkapkan dalam bentuk umum

$$E = A\xi^2 + B\eta^2 + C\psi^2 + \dots, \quad (9.69)$$

Di mana penjumlahan mengandung f suku. A , B , C , dan seterusnya adalah konstanta dan ξ , η , ψ , dan seterusnya adalah variable yang berkaitan dengan derajat kebebasan. Variable-variabel tersebut boleh posisi, momentum, sudut, atau apa saja.

Dengan menganggap bahwa partikel tersebut memenuhi fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann maka energi rata-rata satu partikel adalah

$$\bar{E} = \frac{\sum E e^{-E/kT}}{\sum e^{-E/kT}} \quad (9.70)$$

Untuk memudahkan penyelesaian persamaan (9.70) mari untuk sementara kita kembali mendefinisikan $\beta = -1/kT$ dan $Z = \sum e^{\beta E}$ maka

$$\frac{dZ}{d\beta} = \sum E e^{\beta E} \quad (9.71)$$

Dengan demikian, energi rata-rata partikel dapat ditulis menjadi

$$\bar{E} = \frac{dZ/d\beta}{Z} = \frac{d}{d\beta} \ln Z \quad (9.72)$$

Selanjutnya kita fokuskan pada pencarian Z .

$$\begin{aligned} Z &= \sum \exp[\beta(A\xi^2 + B\eta^2 + C\psi^2 + \dots)] \\ &= \sum \exp[\beta A \xi^2] \exp[\beta B \eta^2] \exp[\beta C \psi^2] \dots \\ &= \sum \exp[\beta A \xi^2] \sum \exp[\beta B \eta^2] \sum \exp[\beta C \psi^2] \dots \end{aligned} \quad (9.73)$$

Penyelesaian penjumlahan di atas hampir tidak mungkin dilakukan. Namun penyelesaian dapat dilakukan dengan mengganti penjumlahan dengan integral terhadap variable-variabel yang merepresentasikan derajat kebebasan. Kita lakukan penggantian sebagai berikut

$$\sum \exp[\beta A \xi^2] = \int_0^\infty \exp[\beta A \xi^2] (g_1 d\xi) \quad (9.74)$$

Pada persamaan (9.74) g_1 adalah kerapatan keadaan yang berkaitan dengan variable ξ . Dengan demikian persamaan (9.73) dapat ditulis menjadi

$$Z = (g_1 g_2 g_3 \dots) \int_0^\infty \exp[\beta A \xi^2] d\xi \int_0^\infty \exp[\beta B \eta^2] d\eta \int_0^\infty \exp[\beta C \psi^2] d\psi \dots \quad (9.75)$$

Mari kita selesaikan integral pertama, yaitu $\int_0^\infty \exp[\beta A \xi^2] d\xi$. Untuk kemudahan kita misalkan $\beta A \xi^2 = -x^2$. Ingat, suku kanan juga negative karena β negatif. Dengan permisalan tersebut maka

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{-\beta A}} x$$

$$d\xi = \frac{1}{\sqrt{-\beta A}} dx$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp[\beta A \xi^2] d\xi &= \int_0^\infty \exp[-x^2] \frac{1}{\sqrt{-\beta A}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\beta A}} \int_0^\infty \exp[-x^2] dx = \frac{1}{\sqrt{-\beta A}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \end{aligned} \quad (9.76a)$$

Dengan cara persis sama kita akan dapatkan

$$\int_0^{\infty} \exp[\beta B \eta^2] d\eta = \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{4B}} \quad (9.76b)$$

$$\int_0^{\infty} \exp[\beta C \psi^2] d\psi = \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{4C}} \quad (9.76c)$$

dan seterusnya. Akhirnya kita dapatkan ungkapan untuk Z sebagai berikut

$$\begin{aligned} Z &= (g_1 g_2 g_3 \dots) \left(\frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{4B}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{4C}} \right) \dots \\ &= \frac{1}{(-\beta)^{f/2}} \left\{ (g_1 g_2 g_3 \dots) \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \sqrt{\frac{\pi}{4B}} \sqrt{\frac{\pi}{4C}} \dots \right\} \\ \ln Z &= \ln \frac{1}{(-\beta)^{f/2}} + \ln \left\{ (g_1 g_2 g_3 \dots) \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \sqrt{\frac{\pi}{4B}} \sqrt{\frac{\pi}{4C}} \dots \right\} \\ &= -\frac{f}{2} \ln(-\beta) + \ln \left\{ (g_1 g_2 g_3 \dots) \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \sqrt{\frac{\pi}{4B}} \sqrt{\frac{\pi}{4C}} \dots \right\} \quad (9.77) \end{aligned}$$

Dengan hasil di atas maka persamaan (9.72) selanjutnya menjadi

$$\bar{E} = \frac{d}{d\beta} \ln Z = -\frac{f}{2} \frac{d}{d\beta} \ln(-\beta) - \frac{d}{d\theta} \ln \left\{ (g_1 g_2 g_3 \dots) \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \sqrt{\frac{\pi}{4B}} \sqrt{\frac{\pi}{4C}} \dots \right\} \quad (9.78)$$

Semua suku di ruas paling kanan persamaan (9.78) tidak mengandung β sehingga diferensial terhadap β nol. Jadi kita hanya dapatkan

$$\begin{aligned} \bar{E} &= -\frac{f}{2} \frac{d}{d\beta} \ln(-\beta) \\ &= -\frac{f}{2\beta} = -\frac{f}{2(-1/kT)} = \frac{f}{2} kT \end{aligned}$$

$$= f \left(\frac{1}{2} kT \right) \quad (9.79)$$

Karena partikel yang kita bahas memiliki f derajat kebebasan maka kita simpulkan bahwa tiap derajat kebebasan menyumbang energi sebesar $kT/2$. Jadi kita telah membuktikan prinsip ekipartisi energi.

Bab 10 Aplikasi Statistik Bose-Einstein

Isi Bab Ini

Bab ini berisi contoh aplikasi statistik Bose-Einstein pada sejumlah assembli sederhana yang mengandung boson dan beberapa perbandingan ramalan menggunakan statistik ini dengan data pengamatan.

Tujuan Bab Ini

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami beberapa aplikasi statistik Bose-Einstein pada sejumlah assembli boson dan perbandingan hasil ramalan tersebut dengan data pengamatan.

Apa Yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu

Untuk memahami aplikasi statistik Bose-Einstein mahasiswa perlu memahami prinsip dasar statistik Bose-Einstein, kerapatan keadaan kuantum dan beberapa teknik integral.

10.1 Radiasi Benda Hitam

Setelah mempelajari beberapa aplikasi statistik Maxwell-Boltzmann pada bab sebelumnya, pada bab ini kita akan mempelajari beberapa aplikasi statistik Bose-Einstein. Statistik ini diterapkan pada assembli boson, yaitu partikel kuantum dengan spin yang merupakan kelipatan bulat dari $h/2\pi$. Contoh boson adalah foton, fonon, dan atom helium.

Mari kita awali dengan membahas satu topik yang sangat populer dalam fisika yaitu radiasi benda hitam. Tori tentang radiasi benda hitam menandai awal lahirnya mekanika kuantum dan fisika modern. Benda hitam merupakan penyerap sekaligus pemancar kalor terbaik sekaligus pemancar kalor terbaik. Benda hitam dapat dianalogikan sebagai kotak yang berisi gas foton. Jumlah foton dalam kotak tidak selalu konstan. Ada kalanya foton diserap oleh atom-atom yang berada di dinding kotak dan

sebaliknya atom-atom di dinding kotak dapat memancarkan foton ke dalam ruang kotak. Karena jumlah foton yang tidak konstan ini maka factor Bose-Einstein untuk gas foton adalah $1/(e^{E/kT} - 1)$, yang diperoleh dengan menggunakan $\alpha = 0$.

Foton adalah kuantum gelombang elektromagnetik. Eksistensi foton direpresentasikan oleh keberadaan gelombang berdiri dalam kotak. Kerapatan keadaan gelombang berdiri dalam kotak tiga dimensi telah kita turunkan dalam Bab 7, yang terungkap dalam persamaan (7.25) yaitu $4\pi d\lambda / \lambda^4$. Karena gelombang elektromagnetik memiliki dua kemungkinan arah osilasi (polarisasi) yang saling bebas, maka kerapatan keadaan foton dalam kotak merupakan dua kali kerapatan gelombang stasioner, yaitu

$$g(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \quad (10.1)$$

Dengan demikian, jumlah foton dengan panjang gelombang antara λ sampai $\lambda + d\lambda$ adalah

$$n(\lambda)d\lambda = \frac{g(\lambda)d\lambda}{e^{E/kT} - 1} \quad (10.2)$$

Karena energi satu foton adalah $E = hc / \lambda$ maka energi foton yang memiliki panjang gelombang antara λ sampai $\lambda + d\lambda$ adalah

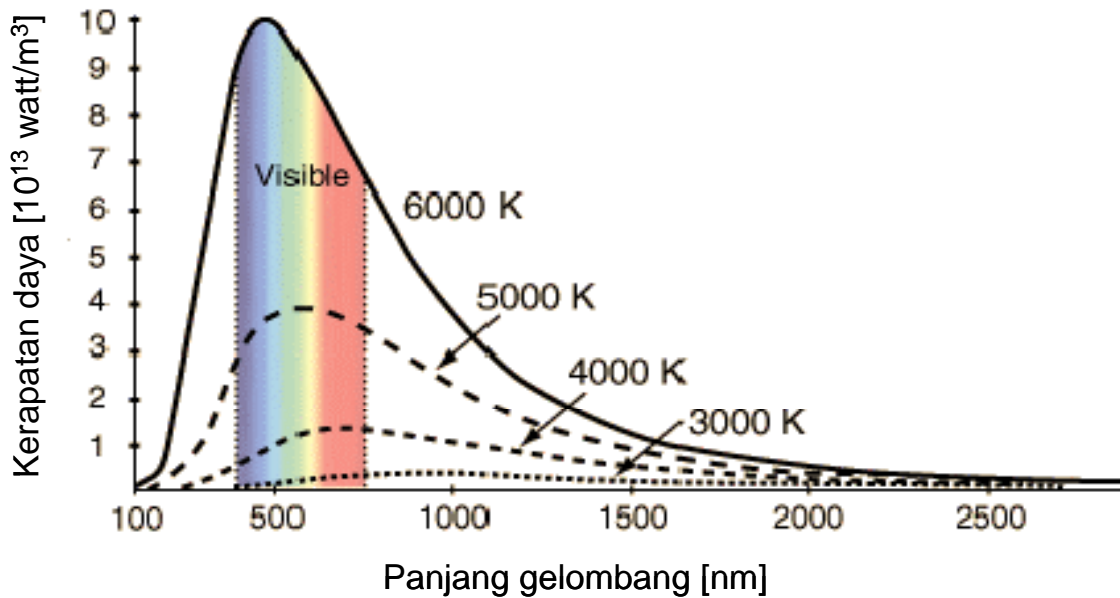
$$\begin{aligned} E(\lambda)d\lambda &= \frac{hc}{\lambda} n(\lambda)d\lambda \\ &= \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \end{aligned} \quad (10.3)$$

Hukum Pergeseran Wien

Gambar 10.1 adalah plot $E(\lambda)$ sebagai fungsi λ pada berbagai suhu. Tampak bahwa $E(\lambda)$ mula-mula naik, kemudian turun setelah mencapai nilai maksimum pada

panjang gelombang λ_m . Berapakah λ_m ? Kita dapat menentukan λ_m dengan mendiferensial $E(\lambda)$ terhadap λ dan menyamakan λ dengan λ_m , atau

$$\left. \frac{dE(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_m} = 0 \quad (10.4)$$



Gambar 10.1 Spektrum radiasi benda hitam pada berbagai suhu

Berdasarkan persamaan (10.3) maka

$$E(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc / \lambda kT} - 1} \quad (10.5)$$

Untuk memudahkan diferensiasi persamaan (10.5) persamaan di atas kita misalkan $x = \lambda kT / hc$. Dengan permisalan tersebut maka kita dapat menulis

$$E(\lambda) = 8\pi hc \left(\frac{kT}{hc} \right)^5 \frac{1}{x^5 (e^{1/x} - 1)} \quad (10.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{dE(\lambda)}{dx} \frac{dx}{d\lambda} = \frac{kT}{hc} \frac{dE(\lambda)}{dx} \\ &= \left(\frac{kT}{hc} \right) 8\pi hc \left(\frac{kT}{hc} \right)^5 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^5 (e^{1/x} - 1)} \right) \end{aligned} \quad (10.7)$$

Agar terpenuhi $dE/d\lambda = 0$ maka pada persamaan (10.7) harus terpenuhi

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^5 (e^{1/x} - 1)} \right) = 0 \quad (10.8)$$

Jika kalian lakukan diferensiasi secara seksama akan dapatkan hubungan berikut ini.

$$(1 - 5x)e^{1/x} - 5 = 0 \quad (10.9)$$

Nilai x pada persamaan (10.9) dapat diselesaikan dengan berbagai cara. Jika kita menggunakan instruksi Mathematica (Wolfram Research), maka solusi untuk x yang memenuhi persamaan (10.9) adalah 0,194197. Dengan demikian, λ_m memenuhi hubungan

$$\frac{\lambda_m kT}{hc} = 0,194197$$

atau

$$\lambda_m T = 0,194197 \frac{hc}{k} \quad (10.10)$$

Dengan menggunakan nilai konstanta $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K, $h = 6,625 \times 10^{-34}$ J s, dan $c = 3 \times 10^8$ m/s maka kita peroleh

$$\lambda_m T = 2,8 \times 10^{-3} \text{ m K} \quad (10.11)$$

Persamaan (10.11) tidak lain daripada ungkapan hukum pergeseran Wien. Hukum ini menjelaskan hubungan antara suhu benda dengan gelombang dengan intensitas maksimum yang dipancarkan benda tersebut. Makin tinggi suhu benda maka makin pendek gelombang yang dipancarkan benda tersebut, atau warna benda bergeser ke arah biru. Ketika pandai besi memanaskan logam maka warna logam berubah secara terus menerus dari semula merah, kuning, hijau dan selanjutnya ke biru-biruan. Ini akibat suhu benda yang semakin tinggi.

Hukum pergeseran Wien telah dipakai untuk memperkirakan suhu benda berdasarkan spectrum elektromagnetik yang dipancarkannya. Energi yang dipancarkan benda diukur pada berbagai panjang gelombang. Kemudian intensitas tersebut diplot terhadap panjang gelombang sehingga diperoleh panjang gelombang yang memiliki intensitas terbesar. Panjang gelombang ini selanjutnya diterapkan pada hukum pergeseran Wien guna memprediksi suhu benda. Para astronom memperkirakan suhu bintang-bintang berdasarkan spektrum energi yang dipancarkan oleh bintang-bintang tersebut.

Persamaan Stefan-Boltzmann

Sebuah benda hitam memancarkan gelombang elektromagnetik pada semua jangkauan frekuensi dari nol sampai tak berhingga. Hanya intensitas gelombang yang dipancarkan berbeda-beda. Ketika panjang gelombang menuju nol, intensitas yang dipancarkan menuju nol. Juga ketika panjang gelombang menuju tak berhingga, intensitas yang dipancarkan juga menuju tak berhingga. Intensitas gelombang yang dipancarkan mencapai maksimum pada saat $\lambda = \lambda_m$. Sekarang kita akan menghitung energi total yang dipancarkan oleh benda hitam. Energi total tersebut diperoleh dengan mengintegrasikan persamaan (10.3) dari panjang gelombang nol sampai tak berhingga, yaitu

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^{\infty} E(\lambda) d\lambda \\
&= 8\pi hc \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1}
\end{aligned} \tag{10.12}$$

Untuk menyelesaikan integral (10.12) mari kita misalkan $y = hc / \lambda kT$. Dengan permisalan tersebut maka diperoleh ungkapan-ungkapan berikut ini

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} &= \frac{kT}{hc} y \\
\frac{1}{\lambda^5} &= \left(\frac{kT}{hc} \right)^5 y^5 \\
\lambda &= \frac{hc}{kT} \frac{1}{y} \\
d\lambda &= -\frac{hc}{kT} \frac{1}{y^2} dy
\end{aligned}$$

Sekarang kita tentukan syarat batas yang berlaku bagi y . Saat $\lambda = 0$ maka $y = \infty$ dan saat $\lambda = \infty$ maka $y = 0$. Dengan demikian, dalam variable y integral (10.12) menjadi

$$\begin{aligned}
E &= 8\pi hc \int_{\infty}^0 \left(\frac{kT}{hc} \right)^5 y^5 \frac{(-hc / kTy^2) dy}{e^y - 1} \\
&= 8\pi hc \left(\frac{kT}{hc} \right)^5 \left(\frac{hc}{kT} \right) \int_{\infty}^0 -\frac{y^3 dy}{e^y - 1} \\
&= 8\pi hc \left(\frac{kT}{hc} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{y^3 dy}{e^y - 1}
\end{aligned} \tag{10.13}$$

Persamaan (10.13) merupakan kerapatan energi foton di dalam kotak. Hubungan antara kerapatan energi yang diradasi dengan energi foton dalam kotak adalah

$$\begin{aligned}
E_{rad} &= \frac{c}{4} E \\
&= 2\pi\hbar c^2 \left(\frac{kT}{hc} \right)^4 \int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^y - 1} \\
&= \left[2\pi\hbar c^2 \left(\frac{k}{hc} \right)^4 \int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^y - 1} \right] T^4
\end{aligned} \tag{10.14}$$

Persamaan (10.14) sangat mirip dengan persamaan Stefan-Boltzman tentang energi yang diradiasi benda hitam, yaitu $E_{rad} = \sigma T^4$ dengan σ konstanta Stefan-Boltzmann. Jadi, pada persamaan (10.14) kita dapat menyamakan

$$\sigma = 2\pi\hbar c^2 \left(\frac{k}{hc} \right)^4 \int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^y - 1} \tag{10.15}$$

Dengan menggunakan instruksi Mathematica sederhana kita dapatkan

$$\int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^y - 1} = 6,49394$$

Selanjutnya, dengan memasukkan nilai konstanta-konstanta lain $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K, $h = 6,625 \times 10^{-34}$ J s, dan $c = 3 \times 10^8$ m/s kita dapatkan nilai konstanta Stefan-Boltzmann

$$\sigma = 5,65 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$$

10.2 Kapasitas Kalor Kristal

Dalam kristal atom-atom bervibrasi. Jika diselesaikan dengan mekanika kuantum maka energi vibrasi atom-atom dalam kristal terkuantisasi. Kuantisasi getaran atom tersebut disebut fonon. Energi fonon dengan bilangan kuantum n adalah $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$. Karena jumlah fonon tidak konstan maka fungsi distribusi untuk

fonon diperoleh dengan mengambil $\alpha = 0$. Fungsi distribusi tersebut persis sama dengan fungsi distribusi untuk foton.

Karena frekuensi fonon umumnya merupakan fungsi bilangan gelombang, κ , maka secara umum energi total yang dimiliki fonon dalam kristal dapat ditulis

$$U = \sum_{\kappa} \frac{\hbar \omega(\kappa)}{\exp[\hbar \omega(\kappa) / kT] - 1} \quad (10.16)$$

Jika fonon memiliki sejumlah polarisasi dan polarisasi ke- p memiliki frekuensi $\omega_p(\kappa)$, maka energi total fonon setelah memperhitungkan polarisasi tersebut adalah

$$U = \sum_p \sum_{\kappa} \frac{\hbar \omega_p(\kappa)}{\exp[\hbar \omega_p(\kappa) / kT] - 1} \quad (10.17)$$

Penjumlahan terhadap κ dilakukan dengan asumsi bahwa κ adalah integer. Tetapi jika κ adalah variabel kontinu maka penjumlahan terhadap κ dapat diganti dengan integral dengan melakukan transformasi berikut ini

$$\sum_{\kappa} \rightarrow \int g_p(\kappa) d\kappa \quad (10.18)$$

Tetapi, karena ω merupakan fungsi κ maka kita dapat mengubah integral terhadap κ menjadi integral terhadap ω dengan melakukan transformasi

$$\sum_{\kappa} \rightarrow \int g_p(\kappa) d\kappa \rightarrow \int g_p(\omega) d\omega \quad (10.19)$$

Akhirnya kita dapat menulis ulang persamaan (10.17) menjadi

$$U = \sum_p \int g_p(\omega) \frac{\hbar \omega}{\exp[\hbar \omega / k_B T] - 1} d\omega \quad (10.20)$$

Dari definisi energi dalam dalam persamaan (10.20) maka kita dapat menentukan kapasitas panas yang didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 C_v &= \frac{dU}{dT} \\
 &= \frac{d}{dT} \sum_p \int g_p(\omega) \frac{\hbar\omega}{\exp[\hbar\omega/kT]-1} d\omega \\
 &= \sum_p \int g_p(\omega) \frac{d}{dT} \left\{ \frac{1}{\exp[\hbar\omega/kT]-1} \right\} \hbar\omega d\omega
 \end{aligned} \tag{10.21}$$

Untuk menyederhanakan persamaan (10.21) mari kita lihat suku diferensial dalam persamaan tersebut. Untuk mempermudah kita misalkan $y = \hbar\omega/kT$. Dengan permisalan tersebut maka

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dT} &= \frac{d}{dy} \frac{dy}{dT} = -\frac{\hbar\omega}{kT^2} \frac{d}{dy} \\
 \frac{d}{dT} \left\{ \frac{1}{\exp[\hbar\omega/kT]-1} \right\} &= \frac{d}{dT} \left\{ \frac{1}{e^y-1} \right\} = -\frac{\hbar\omega}{kT^2} \frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{e^y-1} \right\} \\
 &= -\frac{\hbar\omega}{kT^2} \left\{ \frac{-e^y}{(e^y-1)^2} \right\} = \frac{\hbar\omega}{kT^2} \frac{e^y}{(e^y-1)^2} \\
 &= \frac{\hbar\omega}{kT^2} \frac{\exp[\hbar\omega/kT]}{(\exp[\hbar\omega/kT]-1)^2}
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, kapasitas kalor dapat ditulis

$$\begin{aligned}
 C_v &= \sum_p \int g_p(\omega) \left\{ \frac{\hbar\omega}{kT^2} \frac{\exp[\hbar\omega/kT]}{(\exp[\hbar\omega/kT]-1)^2} \right\} \hbar\omega d\omega \\
 &= \frac{\hbar^2}{kT^2} \sum_p \int g_p(\omega) \frac{\exp[\hbar\omega/kT]}{(\exp[\hbar\omega/kT]-1)^2} \omega^2 d\omega
 \end{aligned} \tag{10.22}$$

Model Enstein

Untuk mencari kapasitas kalor kristal, Einstein mengusulkan model bahwa semua phonon beresilasi dengan frekuensi karakteristik yang sama, ω_o . Dengan asumsi ini maka dapat kita tulis

$$g_p(\omega) = N\delta(\omega - \omega_o) \quad (10.23)$$

di mana $\delta(\omega - \omega_o)$ merupakan fungsi delta Dirac. Dengan model ini kita dapatkan kapasitas kalor kristal untuk satu macam polarisasi saja sebesar

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{\hbar^2}{kT^2} \int g(\omega) \frac{\exp[\hbar\omega/kT]}{(\exp[\hbar\omega/kT] - 1)^2} \omega^2 d\omega \\ &= \frac{\hbar^2}{kT^2} \int N\delta(\omega - \omega_o) \frac{\exp[\hbar\omega/kT]}{(\exp[\hbar\omega/kT] - 1)^2} \omega^2 d\omega \\ &= \frac{N\hbar^2}{kT^2} \frac{\exp[\hbar\omega_o/kT]}{(\exp[\hbar\omega_o/kT] - 1)^2} \omega_o^2 \end{aligned} \quad (10.24)$$

Untuk kristal 3 dimensi, terdapat tiga arah polarisasi fonon yang mungkin (arah sumbu x, y, dan z). Dengan menganggap bahwa ke tiga polarisasi tersebut memberikan sumbangan energi yang sama besar maka kapasitas kalor total menjadi tiga kali dari yang tampak dalam persamaan (10.24), yaitu menjadi

$$C_v = \frac{3N\hbar^2}{kT^2} \frac{\exp[\hbar\omega_o/kT]}{(\exp[\hbar\omega_o/kT] - 1)^2} \omega_o^2 \quad (10.25)$$

Sekarang kita tinjau kasus-kasus khusus, yaitu ketika $T \rightarrow 0$ dan $T \rightarrow \infty$. Dalam kondisi $T \rightarrow 0$ maka $\exp[\hbar\omega_o/kT] \gg 1$ sehingga $\exp[\hbar\omega_o/kT] - 1 \rightarrow \exp[\hbar\omega_o/kT]$. Akibatnya

$$\begin{aligned}
C_v &\approx \frac{3N\hbar^2}{kT^2} \frac{\exp[\hbar\omega_o/kT]}{(\exp[\hbar\omega_o/kT])^2} \omega_o^2 \\
&= \frac{3N\hbar^2 \omega_o^2}{kT^2} e^{-\hbar\omega_o/kT}
\end{aligned} \tag{10.26}$$

Perhatikan suku pembilang dan penyebut pada persamaan (10.26). Jika $T \rightarrow 0$ maka suku penyebut $T^2 \rightarrow 0$ dan suku pembilang $\exp[-\hbar\omega_o/kT] \rightarrow 0$. Tetapi suku pembilang menuju nol jauh lebih cepat daripada suku penyebut. Dengan demikian $C_v \rightarrow 0$ jika $T \rightarrow 0$.

Untuk kasus sebaliknya, yaitu $T \rightarrow \infty$ maka $\hbar\omega_o/kT \rightarrow 0$ kita dapat mengaproksimasi

$$\exp[\hbar\omega_o/kT] \approx 1 + \frac{\hbar\omega_o}{kT}$$

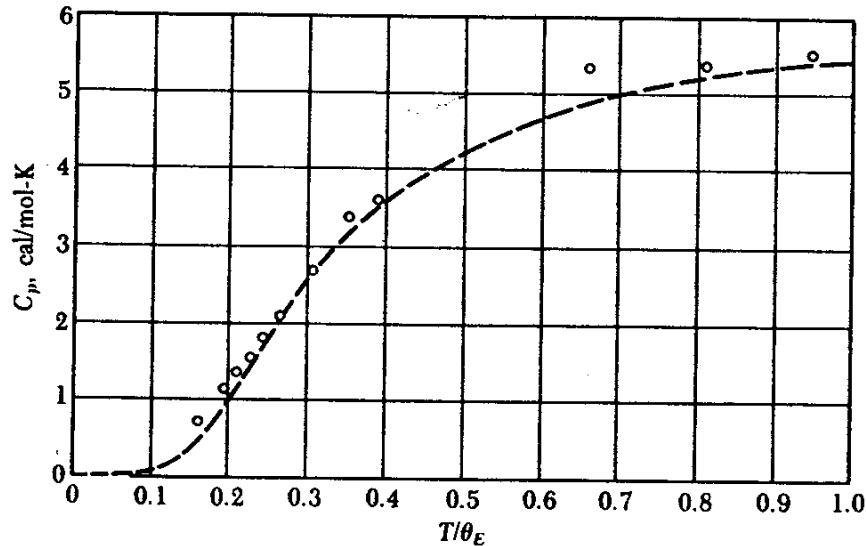
Dengan aproksimasi ini maka persamaan (10.25) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
C_v &\approx \frac{3N\hbar^2}{kT^2} \frac{1 + \hbar\omega_o/kT}{(1 + \hbar\omega_o/kT - 1)^2} \omega_o^2 \\
&\approx \frac{3N\hbar^2}{kT^2} \left(\frac{kT}{\hbar\omega_o} \right)^2 \omega_o^2 \\
&= 3Nk = 3(nN_A)k \\
&= 3n(N_A k) = 3nR
\end{aligned} \tag{10.27}$$

dengan N_A bilangan Avogadro, n jumlah mol dan $R = N_A k_B$ konstanta gas umum. Hasil ini persis sama dengan teori klasik dari Dulong-Petit bahwa kapasitas kalor per satuan mol semua padatan adalah konstan, yaitu $3R$.

Gambar 10.2 adalah perbandingan hasil pengamatan kapasitas kalor intan (simbol) dan prediksi dengan model Einstein. Terdapat kesesuaian yang baik antara prediksi model tersebut dengan pengamatan, khususnya nilai kapasitas kalor yang

menuju nol jika suhu menuju nol dan nilai kapasitas kalor menuju konstanta Dulong-Petit pada suhu tinggi.



Gambar 10.2 Kapasitas panas intan yang diperoleh dari pengamatan (simbol) dan prediksi menggunakan model kapasitas panas Einstein (kurva)

Model Einstein dapat menjelaskan dengan baik kebergantungan kapasitas panas terhadap suhu. Sesuai dengan pengamatan eksperimen bahwa pada suhu menuju nol kapasitas panas menuju nol dan pada suhu sangat tinggi kapasitas panas menuju nilai yang diramalkan Dulong-Petit. Akan tetapi, masih ada sedikit penyimpangan antara data eksperimen dengan ramalan Einstein. Pada suhu yang menuju nol, hasil eksperimen memperlihatkan bahwa kapasitas panas berubah sebagai fungsi kubik (pangkat tiga) dari suhu, bukan seperti pada persamaan (10.26). Oleh karena itu perlu penyempurnaan pada model Einstein untuk mendapatkan hasil yang persis sama dengan eksperimen.

Model Debeye

Salah satu masalah yang muncul dalam model Einstein adalah asumsi bahwa semua fonon bervibrasi dengan frekuensi yang sama. Tidak ada justifikasi untuk asumsi

ini. Asumsi ini digunakan semata-mata karena kemudahan mendapatkan solusi. Oleh karena ini hasil yang lebih tepat diharapkan muncul jika dianggap frekuensi fonon tidak seragam. Asumsi ini digunakan oleh Debye untuk membangun teori kapasitas panas yang lebih teliti. Namun, sebelum masuk ke teori Debye kita akan terlebih dahulu membahas kerapatan keadaan untuk kisi dalam usaha mencari ekspresi yang tepat untuk $g(\omega)$.

Frekuensi getaran kisi dalam kristal secara umum tidak konstan, tetapi bergantung pada bilangan gelombang. Persamaan yang menyatakan kebergantungan frekuensi dengan bilangan gelombang dinamakan persamaan dispersi, $\omega = \omega(\kappa)$. Dari persamaan dispersi tersebut dapat diturunkan persamaan kerapatan keadaan (dibahas di kuliah zat padat) sebagai berikut

$$g(\omega) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\kappa^2}{d\omega/d\kappa} \quad (10.28)$$

Kebergantungan ω terhadap κ kadang sangat kompleks. Sebagai contoh, untuk kristal satu dimensi, kita peroleh persamaan dispersi $\omega = \sqrt{(2C/m)(1 - \cos \kappa a)}$, dengan m massa atom, C konstanta pegas getaran kisi, dan a jarak antar atom dalam kisi (periodisitas). Namun, jika κ sangat kecil, atau panjang gelombang yang besar ($\kappa = 2\pi/\lambda$), kita dapatkan sebuah persamaan aproksimasi

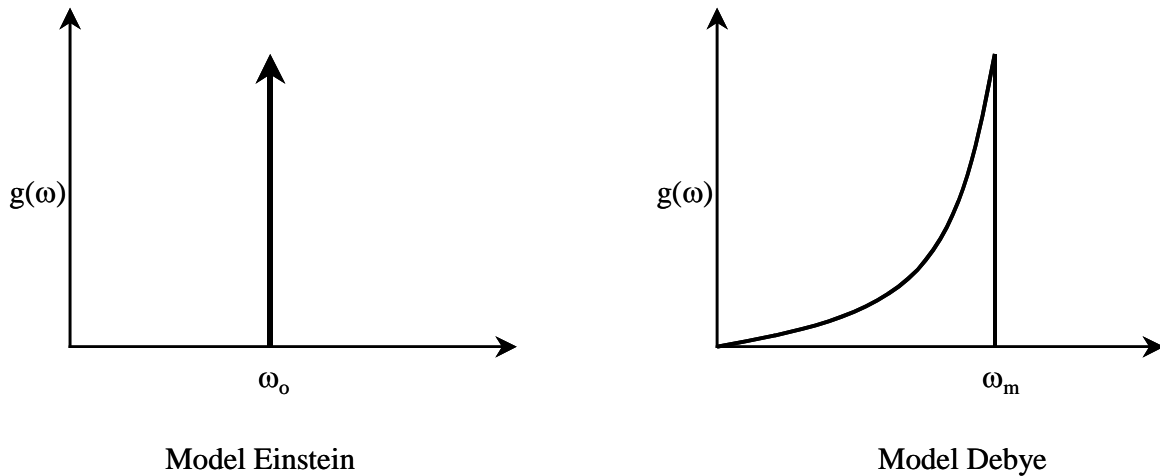
$$\omega = v_g \kappa \quad (10.29)$$

dengan v_g disebut kecepatan grup. Dalam membangun model kapasitas panas, Debye mengambil asumsi sebagai berikut:

- i) Frekuensi getaran kisi memenuhi persamaan dispersi $\omega = v_g \kappa$
- ii) Ada sebuah frekuensi maksimum, ω_m , yang boleh dimiliki fonon dalam kristal sehingga tidak ada fonon yang memiliki frekuensi di atas ω_m .

Dari persamaan dispersi (10.29) kita dapatkan bahwa untuk $\omega \leq \omega_m$, $\kappa = \omega / v_g$ dan $\frac{d\omega}{d\kappa} = v_g$ sehingga kerapatan keadaan pada persamaan (10.28) menjadi $g(\omega) = V\omega^2 / 2\pi v_g^3$. Akhirnya jika digabung dengan asumsi kedua tentang adanya frekuensi maksimum getaran fonon diperoleh ungkapan umum untuk kerapatan keadaan sebagai berikut

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{V}{2\pi v_g^3} \omega^2, & \omega \leq \omega_m \\ 0 & \omega > \omega_m \end{cases} \quad (10.30)$$



Gambar 10.3 kurva kerapatan keadaan sebagai fungsi pada model Einstein dan Debye

Perbedaan kurva kerapatan keadaan sebagai fungsi pada model Einstein dan Debye diperlihatkan pada Gbr. 10.3. Berapa nilai ω_m pada model Debye? Untuk menentukan ω_m kita kembali kepada definisi bahwa $g(\omega)$ adalah jumlah keadaan per satuan frekuensi. Karena frekuensi maksimum fonon adalah ω_m maka integral $g(\omega)$ dari frekuensi 0 sampai ω_m memberikan jumlah total keadaan yang dimiliki fonon, dan itu sama dengan jumlah atom, N . Jadi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\omega_m} g(\omega) d\omega &= N \\
\int_0^{\omega_m} \frac{V}{2\pi v_g^3} \omega^2 d\omega &= N \\
\frac{V}{2\pi v_g^3} \int_0^{\omega_m} \omega^2 d\omega &= N \\
\frac{V}{2\pi v_g^3} \frac{\omega_m^3}{3} &= N
\end{aligned}$$

yang memberikan ungkapan untuk frekuensi maksimum

$$\omega_m^3 = \frac{6\pi v_g^3 N}{V} \quad (10.31)$$

Untuk kemudahan mari kita definisikan suhu Debye, Θ_D , berdasarkan hubungan berikut ini

$$k_B \Theta_D = \hbar \omega_m \quad (10.32)$$

Dengan definsi di atas kita dapatkan

$$\Theta_D = \frac{\hbar v_g}{k_B} \left(\frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{1/3} \quad (10.33)$$

Kita asumsikan bahwa kapasitas kalor kisi yang dihasilka oleh tiap polarisasi fonon sama besarnya. Karena terdapat tiga polarisasi getaran yang mungkin maka penjumlahan terhadap indeks p dalam persamaan (10.22) menghasilkan tiga kali nilai per polarisasi. Akibatnya, tanda sumasi dapat diganti dengan nilai tiga dan kita peroleh kapasitas panas yang disumbangkan oleh semua polarisasi menjadi

$$\begin{aligned}
C_v &= 3 \frac{\hbar^2}{kT^2} \int_0^\infty g(\omega) \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \omega^2 d\omega \\
&= \frac{3\hbar^2}{kT^2} \int_0^{\omega_m} g(\omega) \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \omega^2 d\omega + \frac{3\hbar^2}{kT^2} \int_{\omega_m}^\infty g(\omega) \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \omega^2 d\omega \\
&= \frac{3\hbar^2}{kT^2} \int_0^{\omega_m} \left(\frac{V}{2\pi v_g^3} \omega^2 \right) \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \omega^2 d\omega + \frac{\hbar^2}{kT^2} \int_{\omega_m}^\infty (0) \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \omega^2 d\omega \\
&= \frac{3\hbar^2 V}{2\pi v_g^3 kT^2} \int_0^{\omega_m} \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \omega^4 d\omega \tag{10.34}
\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan integral pada persamaan (10.34) kita misalkan $x = \hbar\omega/kT$. Dengan permisalan tersebut maka

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{kT}{\hbar} x \\
d\omega &= \frac{kT}{\hbar} dx
\end{aligned}$$

Selanjutnya, syarat batas untuk x ditentukan sebagai berikut. Jika $\omega = 0$ maka $x = 0$ dan jika $\omega = \omega_m$ maka $x = \hbar\omega_m/kT = k\Theta_D/kT = \Theta_D/T$. Dengan demikian, bentuk integral untuk kapasitas panas menjadi

$$\begin{aligned}
C_v &= \frac{3\hbar^2 V}{2\pi v_g^3 kT^2} \int_0^{\Theta_D/T} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \left(\frac{kT}{\hbar} x \right)^4 \frac{kT}{\hbar} dx \\
&= \frac{3Vk^4 T^3}{2\pi v_g^3 \hbar^3} \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \tag{10.35}
\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi Θ_D pada persamaan (10.33) maka kita dapat menulis $\Theta_D^3 = 6\pi^2 N \hbar^3 v_g^3 / k^3 V$ atau $V k^4 T^3 / 2\pi v_g^3 \hbar^3 = 3Nk(T/\Theta_D)^3$. Substitusi hubungan ini ke

dapat persamaan (10.35) kita peroleh ungkapan kapasitas kalor dalam bentuk yang lebih sederhana sebagai berikut

$$C_v = 9Nk \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad (10.36)$$

Selanjutnya kita tinjau beberapa kasus khusus yaitu ketika $T \rightarrow 0$ dan $T \rightarrow \infty$.
Jika $T \rightarrow 0$ maka $\Theta_D/T \rightarrow \infty$ sehingga

$$C_v \approx 9Nk \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad (10.37)$$

Bagian integral tidak bergantung lagi pada T dan hasil integral adalah sebuah bilangan. Jika kalian menggunakan program Mathematica, akan diperoleh hasil integral pada persamaan (10.37) adalah

$$\int_0^\infty \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{15} \quad (10.38)$$

Dengan demikian, untuk $T \rightarrow 0$ diperoleh

$$\begin{aligned} C_v &\approx \frac{9\pi^2 Nk}{15} \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \\ &= AT^3 \end{aligned} \quad (10.39)$$

dengan

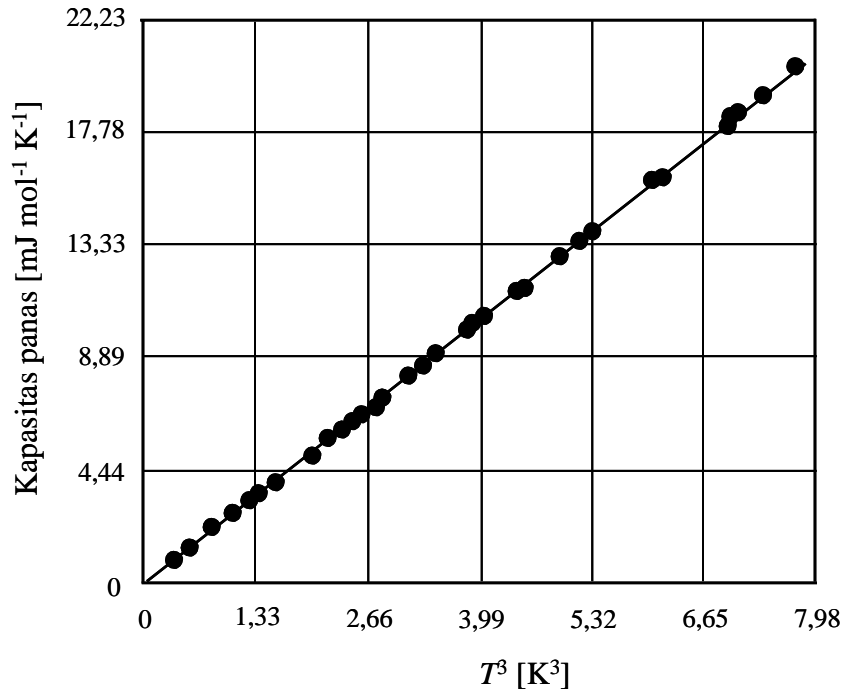
$$A \approx \frac{9\pi^2 Nk}{15\Theta_D^3} \quad (10.40)$$

Persamaan (10.40) sangat sesuai dengan hasil eksperimen.

Sebaliknya, untuk $T \rightarrow \infty$ maka penyebut pada persamaan (10.36) dapat diaproksimasi $e^x - 1 \approx x$ dan pada pembilang dapat diaproksimasi $e^x \approx 1$ sehingga

$$\begin{aligned}
 C_v &\approx 9Nk \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4}{(x)^2} dx \\
 &= 9Nk \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} x^2 dx = 9Nk \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \frac{1}{3} \left(\frac{\Theta_D}{T} \right)^3 \\
 &= 3Nk
 \end{aligned} \tag{10.41}$$

yang juga persis sama dengan ramalan Dulong-Petit.



Gambar 10.4 Kapasitas kalor argon padat diukur pada suhu jauh di bawah suhu Debye. Garis adalah hasil perhitungan menggunakan teori Debye (Kittel, hlm 125).

Gambar 10.4 adalah hasil pengukuran kapasitas panas argon padat (titik-titik) beserta kurva yang diperoleh menggunakan model Debye. Tampak bahwa ramalan Debye tentang kebergantungan kapasitas kalor pada pangkat tiga suhu sangat sesuai dengan hasil pengamatan.

Bab 11 Aplikasi Distribusi Fermi Dirac

Isi Bab Ini

Bab ini berisi contoh aplikasi statistik Fermi-Dirac pada sejumlah assembli sederhana yang mengandung fermion dan beberapa perbandingan ramalan menggunakan statistik ini dengan data pengamatan.

Tujuan Bab Ini

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami beberapa aplikasi statistik Fermi-Dirac pada sejumlah assembli fermion dan perbandingan hasil ramalan tersebut dengan data pengamatan.

Apa Yang Perlu dikuasai Lebih Dahulu

Untuk memahami aplikasi statistik Fermi-Dirac mahasiswa perlu memahami prinsip dasar statistik Fermi-Dirac, kerapatan keadaan kuantum dan beberapa teknik integral.

11.1 Fungsi Distribusi Fermi Dirac Pada Suhu 0 K

Dalam Bab 9 dan 10 kita sudah membahas sejumlah aplikasi statistik Maxwell-Boltzmann dan Bose-Einstein masing-masing untuk assembli klasik dan assembli boson. Kita mendapatkan beberapa prediksi statistik tersebut bersesuaian dengan hasil pengamatan. Pada bab ini kita akan rampungkan pembahasan tentang aplikasi statistik dengan memprediksi beberapa sifat fermion menggunakan statistik Fermi-Dirac.

Ada satu cirri yang menarik dari fungsi distribusi Fermi-Dirac yang tidak dijumpai pada distribusi Maxwell-Boltzmann atau Bose-Einstein. Pada suhu 0 K, fungsi distribusi Fermi-Dirac tiba-tiba dikontinu pada energi tertentu (energi maksimum). Semua fermion terkumpul pada tingkat energi di bawah energi maksimum tersebut dengan kerapatan yang persis sama. Tiap keadaan energi diisi oleh dua fermion dengan arah spin berlawanan. Di atas energi batas tersebut tidak ditemukan satu fermion pun. Artinya di atas energi tersebut, keadaan energi kosong. Sifat ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Kita dapat menulis ulang fungsi distribusi Fermi Dirac

$$f(E) = \frac{1}{e^{-\alpha - \beta E} + 1}$$

dalam bentuk yang lebih mudah, yaitu

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left[\frac{(E - E_F)}{kT}\right] + 1} \quad (11.1)$$

Pada penulisan persamaan (11.1) kita telah mengganti $\beta = -1/kT$ dan telah mendefinisikan $E_F = \alpha kT$. Parameter E_F dikenal dengan energi Fermi. Tampak dari bentuk $f(E)$ bahwa $E = E_F$ maka $f(E) = 1/2$, berapa pun suhu assembli. Dengan demikian kita dapat mendefinisikan bahwa energi Fermi sama dengan energi ketika fungsi distribusi memiliki nilai tepat setengah.

Hal yang menarik muncul ketika assembli 0 K. Dalam suhu tersebut:

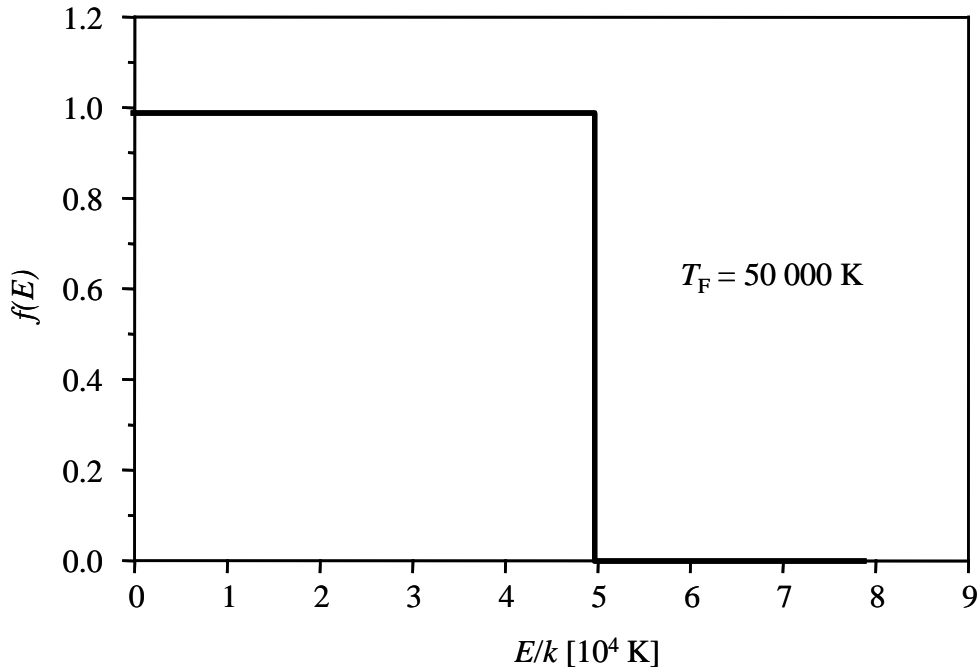
i) Jika $E > E_F$ maka $(E - E_F)/kT = (E - E_F)/0 = \infty$ sehingga

$$f(E > E_F, T = 0) = \frac{1}{e^{\infty} + 1} = 0 \quad (11.2)$$

ii) Jika $E < E_F$ maka $(E - E_F)/kT = -(E_F - E)/0 = -\infty$ sehingga

$$f(E < E_F, T = 0) = \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1 \quad (11.3)$$

Ini berarti pada $T = 0$, fungsi distribusi Fermi-Dirac berharga 1 untuk semua energi di bawah energi Fermi dan nol untuk semua energi di atas energi Fermi. Jika digambar, maka bentuk fungsi distribusi tersebut pada $T = 0$ tampak pada Gbr. 11.1



Gambar 11.1 Fungsi distribusi Fermi-Dirac Pada Suhu 0 K

11.2 Energi Fermi

Pertanyaan berikutnya adalah bagaimana kebergantungan energi Fermi terhadap besaran-besaran lain yang dimiliki assembl. Mari kita tentukan. Jumlah total fermion dapat dihitung dengan integral

$$\begin{aligned}
 N &= V \int_0^{\infty} n(E) dE \\
 &= V \int_0^{\infty} g(E) f(E) dE
 \end{aligned} \tag{11.4}$$

Jumlah fermion tersebut dapat dihitung dengan mudah pada suhu 0 K karena fungsi distribusi fermi-diract memiliki bentuk yang sederhana. Jika perhitungan dilakukan pada $T = 0$ maka

$$\begin{aligned}
N &= V \int_0^{E_F} g(E) f(E) dE + V \int_{E_F}^{\infty} g(E) f(E) dE \\
&= V \int_0^{E_F} g(E) \times 1 \times dE + V \int_{E_F}^{\infty} g(E) \times 0 \times dE \\
&= V \int_0^{E_F} g(E) dE
\end{aligned} \tag{11.5}$$

Dalam Bab 7 kita sudah mendapatkan ungkapan untuk kerapatan keadaan per satuan volum, yaitu

$$g(E) = \frac{1}{h^3} 4\pi \sqrt{2m}^{3/2} E^{1/2} \tag{11.6}$$

Khusus untuk elektron, karena satu keadaan dapat ditempati dua fermion dengan spin yang berlawanan, maka rapat keadan untuk fermion sama dengan dua kali nilai persamaan (11.6). Dengan demikian persamaan (11.5) dapat menulis menjadi

$$\begin{aligned}
N &= V \int_0^{E_F} 2 \times \frac{1}{h^3} 4\pi \sqrt{2m}^{3/2} E^{1/2} dE \\
&= \frac{V}{h^3} 8\pi \sqrt{2m}^{3/2} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE \\
&= \frac{V}{h^3} 8\pi \sqrt{2m}^{3/2} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2}
\end{aligned} \tag{11.7}$$

Kita dapat menyederhanakan persamaan (11.7) lebih lanjut menjadi

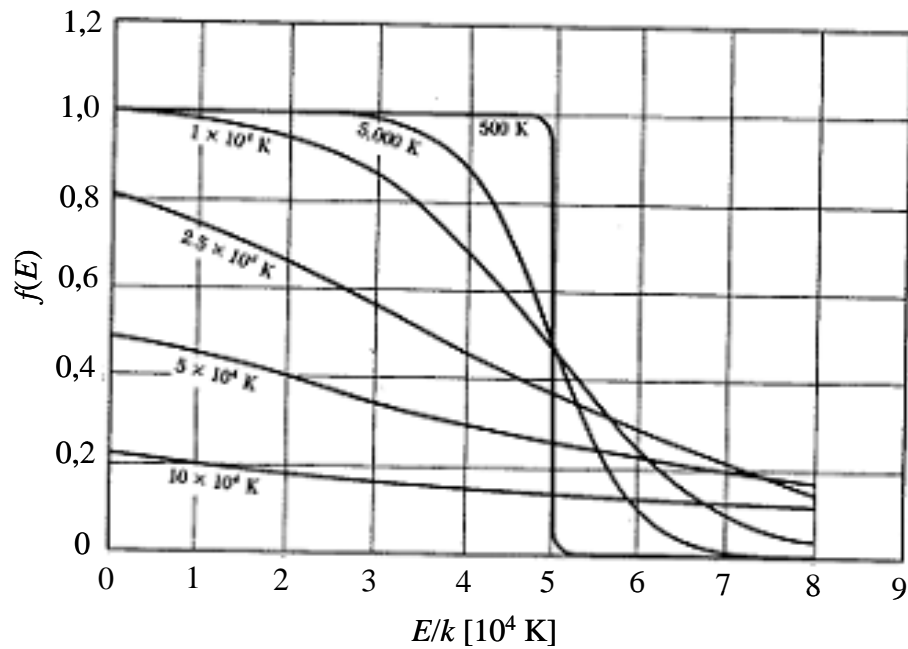
$$\frac{3N}{8\pi V} = \left(\frac{2m}{h^2} E_F \right)^{3/2}$$

Dan akhirnya diperoleh ungkapan untuk energi Fermi pada suhu 0 K sebagai berikut

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \quad (11.8)$$

Selanjuta kita dapat mendefinisikan suhu Fermi melalui hubungan $kT_F = E_F$ maka diperoleh ungkapan untuk suhu Fermi pada suhu 0 K sebagai

$$\begin{aligned} T_F &= \frac{E_F}{k} \\ &= \frac{h^2}{2mk} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (11.9)$$



Gambar 11.2 Bentuk fungsi distribusi Fermi-Dirac pada berbagai suhu. Pada perhitungan digunakan $T_F = 50\,000\text{ K}$

11.3 Distribusi Fermi Dirac Pada Suhu $T > 0$ K

Jika $T > 0$ maka sudah mulai ada fermion yang memiliki energi di atas energi Fermi. Sebagai konsekuensinya, jumlah fermion yang memiliki energi di bawah energi fermi mulai berkurang. Tetapi belum ada fermion yang memiliki energi jauh di atas energi fermi dan belum ada elektron yang memiliki energi jauh di bawah energi fermi meninggalkan tempat semula. Akibatnya terjadi distorsi fungsi Fermi-Dirac hanya di sekitar energi fermi saja. Distorsi tersebut hanya berada pada daerah yang ordenya sekitar kT di sekitar energi fermi. Gambar 11.2 adalah bentuk fungsi distribusi Fermi-Dirac pada berbagai suhu.

11.4 Integral Yang Mengandung Fungsi Fermi-Dirac.

Kita selanjutnya akan sering berhadapan dengan integral yang mengandung fungsi distribusi Fermi-Dirac. Misalkan saat menghitung energi rata-rata fermion, kita mengintegrasikan energi dikali kerapatan keadaan dikali fungsi Fermi-Dirac. Khusus untuk suhu di atas 0 K, integral yang melibatkan fungsi Fermi-Dirac sulit dilakukan. Suatu pendekatan perlu ditempuh untuk mendapatkan hasil integral secara analitik. Memang, dengan menggunakan software yang sesuai, seperti Mathematica, kendala tersebut dapat diatasi dengan mudah. Tetapi ketika ingin mendapatkan ungkapan secara analitik sederhana, mau tidak mau kita mesti memecahkan integral tersebut dengan aproksimasi yang reasonable.

Pada bagian ini kita akan mencari bentuk umum integral yang berupa perkalian fungsi Fermi-Dirac dengan fungsi sembarang. Bentuk umum tersebut dapat diperoleh berkat beberapa kekhasan dari sifat fungsi Fermi-Dirac. Mari kita pecahkan integral bentuk umum berikut ini

$$I = \int_0^{\infty} \varphi(E) f(E) dE \quad (11.10)$$

Di mana $\varphi(E)$ sembarang fungsi dari E . Kita selanjutnya mendefinisikan fungsi berikut ini

$$\Psi(E) = \int_0^E \varphi(E) dE \quad (11.11)$$

Dari definisi tersebut kita mendapatkan

$$d\Psi = \varphi(E) dE \quad (11.12)$$

Dengan menggunakan persamaan (11.12) maka persamaan (11.10) dapat ditulis

$$I = \int_0^\infty f(E) d\Psi \quad (11.13)$$

Selanjutnya kita menggunakan dalil rantai untuk menguraikan integral (11.13). Dalil tersebut berbentuk $\int u dv = uv - \int v du$. Dengan dalil ini maka persamaan (11.13) menjadi

$$\begin{aligned} I &= [f(E)\Psi(E)]_0^\infty - \int_0^\infty \Psi \frac{df}{dE} dE \\ &= [f(\infty)\Psi(\infty) - f(0)\Psi(0)] - \int_0^\infty \Psi \frac{df}{dE} dE \end{aligned} \quad (11.14)$$

Tetapi, berdasarkan definisi fungsi Fermi Dirac kita akan dapatkan $f(\infty) = 0$ dan $f(0) = 1$. Selanjutnya berdasarkan definisi Ψ pada persamaan (11.11) kita dapatkan

$$\Psi(\infty) = \int_0^\infty \varphi(E) dE, \text{ dan } \Psi(0) = \int_0^0 \varphi(E) dE = 0. \text{ Dengan demikian persamaan (11.14)}$$

menjadi

$$I = \left[0 \times \int_0^\infty \varphi(E) dE - 1 \times 0 \right] - \int_0^\infty \Psi \frac{df}{dE} dE$$

$$= - \int_0^{\infty} \Psi \frac{df}{dE} dE \quad (11.15)$$

Selanjutnya kita uraikan $\Psi(E)$ dalam deret Taylor di sekitar E_F hingga suku ketiga, yaitu

$$\Psi(E) = \Psi(E_F) + \left. \frac{d\Psi}{dE} \right|_{E_F} (E - E_F) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\Psi}{dE^2} \right|_{E_F} (E - E_F)^2 \quad (11.16)$$

Berdasarkan definisi $\Psi(E)$ dalam persamaan (11.11) maka kita dapatkan

$$\Psi(E_F) = \int_0^{E_F} \varphi(E) dE \quad (11.17)$$

$$\frac{d\Psi}{dE} = \varphi(E) \text{ sehingga } \left. \frac{d\Psi}{dE} \right|_{E_F} = \varphi(E_F) \quad (11.18)$$

$$\frac{d^2\Psi}{dE^2} = \frac{d\varphi}{dE} \text{ sehingga } \left. \frac{d^2\Psi}{dE^2} \right|_{E_F} = \left. \frac{d\varphi}{dE} \right|_{E_F} \quad (11.19)$$

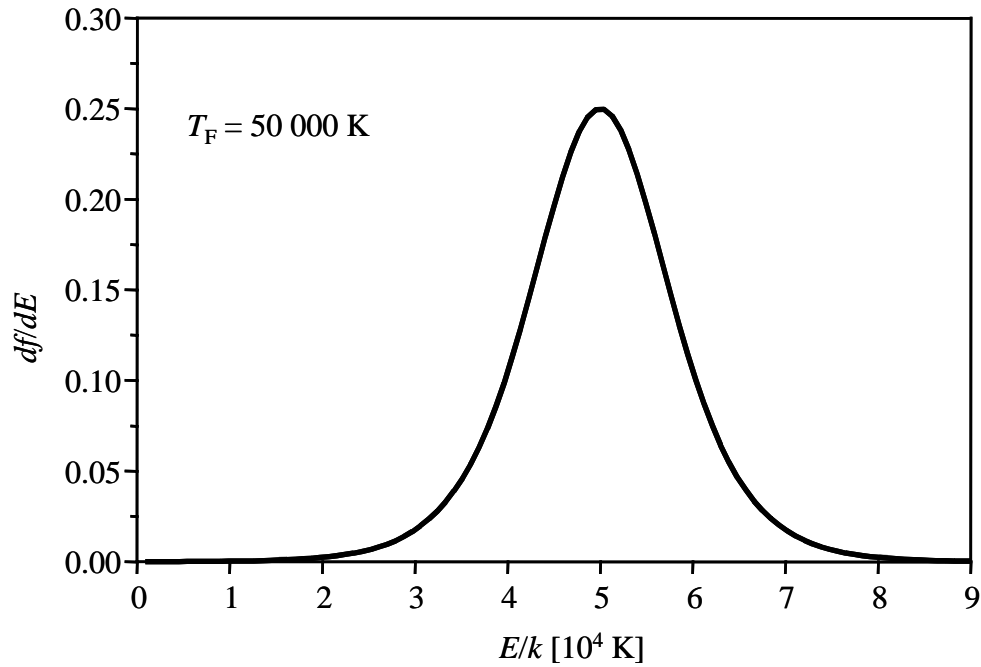
Dengan demikian, persamaan (11.16) menjadi

$$\Psi(E) = \int_0^{E_F} \varphi(E) dE + \varphi(E_F)(E - E_F) + \frac{1}{2} \left. \frac{d\varphi}{dE} \right|_{E_F} (E - E_F)^2 \quad (11.20)$$

Dan persamaan (11.15) dapat diaproksimasi sebagai

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{E_F} \varphi(E) dE + \varphi(E_F)(E - E_F) + \frac{1}{2} \left. \frac{d\varphi}{dE} \right|_{E_F} (E - E_F)^2 \right\} \frac{df}{dE} dE \\ &= - \int_0^{E_F} \varphi(E) dE \int_0^{\infty} \frac{df}{dE} dE - \varphi(E_F) \int_0^{\infty} (E - E_F) \frac{df}{dE} dE - \frac{1}{2} \left. \frac{d\varphi}{dE} \right|_{E_F} \int_0^{\infty} (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{E_F} \varphi(E) dE [f(\infty) - f(0)] - \varphi(E_F) \int_0^{\infty} (E - E_F) \frac{df}{dE} dE - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \bigg|_{E_F} \int_0^{\infty} (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \\
&= - \int_0^{E_F} \varphi(E) dE [0 - 1] - \varphi(E_F) \int_0^{\infty} (E - E_F) \frac{df}{dE} dE - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \bigg|_{E_F} \int_0^{\infty} (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \\
&= \int_0^{E_F} \varphi(E) dE - \varphi(E_F) \int_0^{\infty} (E - E_F) \frac{df}{dE} dE - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \bigg|_{E_F} \int_0^{\infty} (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \quad (11.21)
\end{aligned}$$



Gambar 11.3 Kurva turunan fungsi Fermi-Dirac pada suhu 5 000 K.

Perhatikan integral suku kedua di ruas kanan persamaan (11.21). Fungsi df/dE merupakan fungsi genap di sekitar E_F , seperti diperlihatkan pada Gbr. 11.3. Fungsi $(E - E_F)$ sendiri merupakan fungsi ganjil di sekitar E_F . Dengan demikian, perkalian $(E - E_F) \frac{df}{dE}$ merupakan fungsi ganjil di sekitar E_F sehingga integral perkalian tersebut dalam daerah dari E yang jauh lebih kecil dari E_F sampai E yang jauh lebih besar dari E_F hasilnya nol. Dengan demikian kita peroleh

$$I = \int_0^{E_F} \varphi(E) dE - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \Big|_{E_F} \int_0^{\infty} (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \quad (11.22)$$

Selanjutnya, dari fungsi distribusi Fermi-Dirac kita akan dapatkan

$$\frac{df}{dE} = \frac{\exp[E - E_F] / kT}{(\exp[E - E_F] / kT + 1)^2} \frac{1}{kT} \quad (11.23)$$

Untuk menyelesaikan integral di ruas kanan persamaan (11.22) mari kita definsikan $x = (E - E_F) / kT$. Dengan definsi tersebut maka

$$\begin{aligned} \frac{df}{dE} &= - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \frac{1}{kT} \\ (E - E_F)^2 &= (kT)^2 x^2 \\ dE &= kT dx \end{aligned}$$

Selanjutnya kita tentukan syarat batas untuk x . Jika $E = 0$ maka $x = -E_F / kT$ dan jika $E = \infty$ maka $x = \infty$. Akhirnya persamaan (11.22) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{E_F} \varphi(E) dE - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \Big|_{E_F} \int_{E_F - E_F / kT}^{\infty} (kT)^2 x^2 \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} \frac{1}{kT} kT dx \\ &= \int_0^{E_F} \varphi(E) dE + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \Big|_{E_F} (kT)^2 \int_{-E_F / kT}^{\infty} x^2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx \end{aligned} \quad (11.24)$$

Untuk T sekitar suhu kamar maka berlaku $E_F \gg kT$ sehingga $E_F / kT \rightarrow \infty$. Dengan demikian

$$I \approx \int_0^{E_F} \varphi(E) dE + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \Big|_{E_F} (kT)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx \quad (11.25)$$

Dengan menggunakan Mathematica, kita dapat menentukan dengan mudah bahwa integral di ruas kanan memiliki hasil $\pi^2/3$. Jadi

$$\begin{aligned} I &\approx \int_0^{E_F} \varphi(E) dE + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dE} \Big|_{E_F} (kT)^2 \frac{\pi^2}{3} \\ &= \int_0^{E_F} \varphi(E) dE + \frac{d\varphi}{dE} \Big|_{E_F} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6} \end{aligned} \quad (11.26)$$

Persamaan (11.26) adalah bentuk umum yang akan kita gunakan untuk mencari integral yang melibatkan fungsi Fermi-Dirac.

11.5 Energi Rata-Rata Elektron

Selanjutnya mari kita aplikasikan bentuk ungkapan persamaan (11.26) untuk mencari beberapa besaran yang dimiliki fermion. Pertama kita akan menghitung energi rata-rata elektron. Energi rata-rata memenuhi

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E g(E) f(E) dE}{\int_0^{\infty} g(E) f(E) dE} \quad (11.27)$$

Kerapatan keadaan elektron (karena memiliki dua arah spin) memenuhi

$$g(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E^{1/2}$$

Lihat bagian pembilang pada persamaan (11.27). Tampak di sini bahwa

$$\varphi(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E^{3/2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dE} &= \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{3}{2} E^{1/2} = \frac{12\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \\ \int_0^{E_F} \varphi(E) dE &= \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \int_0^{E_F} E^{3/2} dE \\ &= \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5} E_F^{5/2}\end{aligned}$$

Dengan demikian

$$pembilang = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5} E_F^{5/2} + \frac{12\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E_F^{1/2} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6} \quad (11.28)$$

Karena umumnya $kT \ll E_F$ maka suku kedua jauh lebih kecil daripada suku pertama sehingga kita dapat mengaproksimasi

$$pembilang \approx \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5} E_F^{5/2} \quad (11.29)$$

Selanjutnya kita lihat penyebut pada persamaan (11.27). Tampak di sini bahwa

$$\begin{aligned}\varphi(E) &= \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \\ \frac{d\varphi}{dE} &= \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{1}{2} E^{-1/2} = \frac{4\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E^{-1/2} \\ \int_0^{E_F} \varphi(E) dE &= \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE \\ &= \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2}\end{aligned}$$

Dengan demikian kita dapatkan

$$\text{penyebut} = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2} + \frac{4\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E_F^{-1/2} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6} \quad (11.30)$$

Karena umumnya $kT \ll E_F$ maka suku kedua jauh lebih kecil daripada suku pertama sehingga maka kita dapat mengaproksimasi

$$\text{penyebut} \approx \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2} \quad (11.31)$$

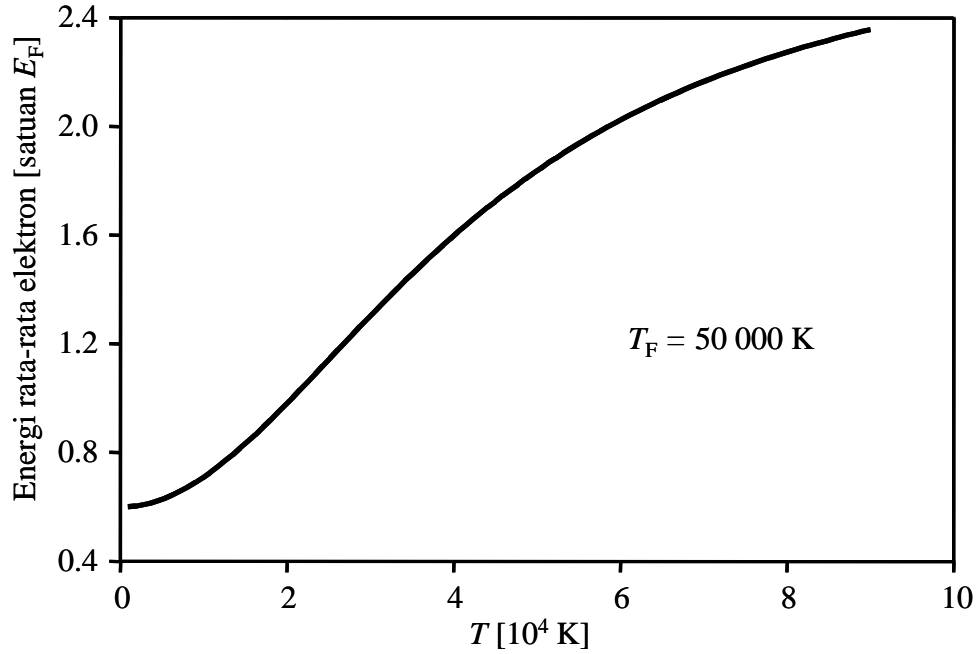
Dengan demikian energi rata-rata menjadi

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\text{pembilang}}{\text{penyebut}} \\ &= \frac{\frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5} E_F^{5/2}}{\frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2}} \\ &= \frac{3}{5} E_F \end{aligned} \quad (11.32)$$

Namun, jika kita mengambil sampai orde dua, maka energi rata-rata diperoleh dari persamaan (11.28) dan (11.30) yaitu

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5} E_F^{5/2} + \frac{12\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E_F^{1/2} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6}}{\frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2} + \frac{4\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E_F^{-1/2} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6}} \\ &= \frac{3}{5} E_F \left[\frac{1 + \frac{15}{24} \pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2}{1 + \frac{3}{24} \pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2} \right] \end{aligned} \quad (11.33)$$

Gambar 11.4 adalah energi rata-rata elektron sebagai fungsi suhu. Tampak bahwa energi rata-rata makin bertambah dengan bertambahnya suhu. Ini diakibatkan makin banyaknya elektron yang menempati tingkat energi di atas energi fermi.



Gambar 11.4 Energi rata-rata elektron sebagai fungsi suhu. Pada perhitungan digunakan suhu fermi 50 000 K.

11.5 kapasitas Kalor Logam

Jika terdapat N elektron dalam assembli maka energi total semua elektron pada sembarang suhu dapat diperoleh dari persamaan (11.33)

$$\begin{aligned}
 U &= N \bar{E} \\
 &= \frac{3}{5} N E_F \left[\frac{1 + \frac{15}{24} \pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2}{1 + \frac{3}{24} \pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2} \right] \quad (11.34)
 \end{aligned}$$

Jika suhu sangat kecil dibandingkan dengan suhu Fermi maka $kT \ll E_F$ sehingga persamaan (11.34) dapat diaproksimasi sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{3}{5}NE_F \left[1 + \frac{15}{24}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{3}{24}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right]^{-1} \\
 &\approx \frac{3}{5}NE_F \left[1 + \frac{15}{24}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{3}{24}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{11.35}$$

di mana kita telah menggunakan aturan binomial $(1+x)^{-1} \approx 1-x$ untuk suku kedua. Karena $kT \ll E_F$ kita dapat mempertahankan perkalian hanya sampai suku yang mengandung T^2 . Dengan asumsi ini maka persamaan (11.35) dapat diaproksimasi lebih lanjut menjadi

$$\begin{aligned}
 U &\approx \frac{3}{5}NE_F \left[1 + \frac{15}{24}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 - \frac{3}{24}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{3}{5}NE_F \left[1 + \frac{1}{2}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{11.36}$$

Akhirnya kita dapatkan kapasitas panas elektronik, yaitu kapasitas panas yang diperoleh dari sumbangan energi elektron adalah

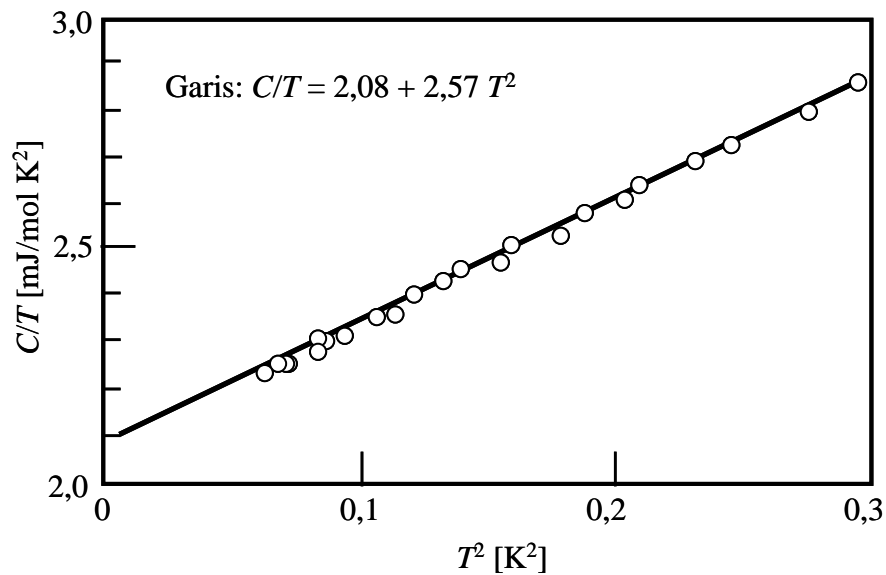
$$\begin{aligned}
 C_e &= \frac{dU}{dT} \\
 &= \frac{3\pi^2 Nk^2}{5E_F} T \\
 &= \gamma T
 \end{aligned} \tag{11.37}$$

dengan $\gamma = 3\pi^2 Nk^2 / 5E_F$. Tampak dari persamaan (11.37) bahwa kapasitas kalor elektronik berubah secara linier terhadap suhu.

Jika kita memiliki logam maka kita memiliki sekaligus assembli fonon (getaran atom) serta assembli fermion (elektron bebas). Akibatnya, kapasitas kalor logam mendapat kontribusi dari dua macam assembli tersebut. Dengan demikian, pada suhu di bawah suhu Debye dan di bawah suhu Fermi maka kapasitas panas logam memenuhi persamaan umum

$$C = \gamma T + AT^3 \quad (11.38)$$

Suku pertama disumbangkan oleh elektron (persamaan (11.37)) dan suku kedua disumbangkan oleh fonon (persamaan (10.39)).



Gambar 11.5 Ketergantungan C/T terhadap T^2 untuk logam kalium

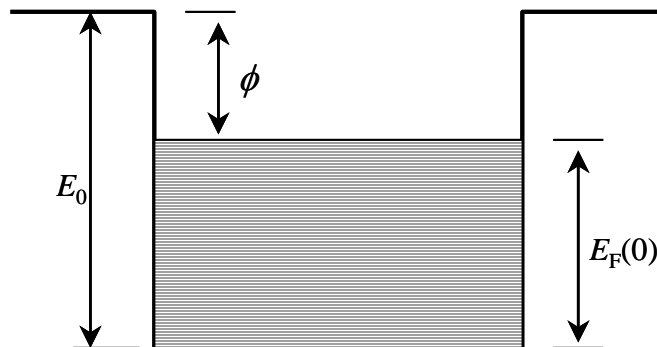
Persamaan (11.38) sudah dikonfirmasi secara eksperimen. Gambar 11.5 adalah kapasitas panas kalium yang diperoleh dari pengukuran dinyatakan dalam C/T sebagai fungsi T^2 . Berdasarkan persamaan (11.38) C/T bergantung secara linier terhadap T^2 . Tampak kesesuaian yang baik antara data eksperimen dan ramalan teoretik. Perpotongan

kurva dengan sumbu tegak (sumbu C/T) memberikan nilai γ . Berdasarkan persamaan (11.37) maka dari nilai γ kita dapat menentukan energi Fermi. Kemiringan kurva memberikan nilai A . Berdasarkan persamaan (10.39) maka dari nilai A kita dapat menentukan suhu Debye.

11.6 Emisi Termionik

Pada suhu yang cukup tinggi elektron dapat keluar dari permukaan logam. Pada suhu tersebut sebagian elektron memiliki energi yang sangat besar yang sanggup melewati potensial penghalang di dinding logam. Filamen di dalam tabung sinar katoda dipanaskan agar elektron keluar dari logam filamen. Elektron yang keluar kemudian ditarik dengan medan listrik yang cukup besar sehingga menumbuk material luminisens pada layar untuk menghasilkan spot bercahaya. Pertanyaan selanjutnya adalah bagaimana ketergantungan arus elektron yang keluar meninggalkan permukaan logam terhadap suhu? Ini yang akan kita kaji sekarang.

Kita mulai dengan asumsi bahwa logam merupakan sumur potensial dengan ketinggian dinding E_0 . Sebagai ilustrasi, lihat Gbr. 11.6. Elektron menempati tingkat-tingkat energi dalam sumur potensial tersebut. Pada suhu $T = 0$, energi maksimum yang dimiliki elektron adalah $E_F(0)$.



Gambar 11.6 Elektron dalam logam dapat dipandang terperangkap dalam sumur potensial dengan ketinggian dinding E_0 .

Elektron yang sedang bergerak ke arah permukaan logam akan meninggalkan logam jika energi kinetik dalam arah tersebut melebihi E_o . Misalkan elektron sedang bergerak ke arah x . Elektron akan lepas dari permukaan logam tersebut jika terpenuhi

$$\frac{1}{2}mv_x^2 > E_o \quad (11.39)$$

Jumlah elektron per satuan volum yang memiliki komponen kecepatan arah x antara v_x sampai $v_x + dv_x$ adalah

$$n_x(v_x)dv_x = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(v_x, v_y, v_z) dv_y dv_z \right\} dv_x \quad (11.40)$$

Untuk elektron, satu tingkat energi dapat ditempati oleh dua elektron dengan arah spin berlawanan. Sehingga kita kerapatan elektron dapat ditulis

$$\begin{aligned} n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z &= f(E) \frac{2d\Gamma}{h^3} \\ &= \frac{2m^3}{h^3} f(E) dv_x dv_y dv_z \\ &= \frac{2m^3}{h^3} \frac{dv_x dv_y dv_z}{e^{(E-E_F)kT} + 1} \end{aligned} \quad (11.41)$$

Karena kita tertarik pada elektron yang meninggalkan permukaan logam maka fokus perhatian kita adalah pada elektron yang memiliki energi cukup jauh di atas energi Fermi. Dengan pembatasan ini maka kita dapat mengaproksimasi $(E - E_F) \gg kT$ sehingga

$$\frac{1}{e^{(E-E_F)kT} + 1} \approx \frac{1}{e^{(E-E_F)kT}} = e^{E_F kT} e^{-E/kT}$$

dan persamaan (11.41) menjadi

$$n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \approx \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F / kT} e^{-E / kT} dv_x dv_y dv_z \quad (11.42)$$

Substitusi persamaan (11.42) ke dalam persamaan (11.40) kita peroleh

$$\begin{aligned} n_x(v_x) dv_x &\approx \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F / kT} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-E / kT} dv_y dv_z \right\} dv_x \\ &= \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F / kT} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) / 2kT} dv_y dv_z \right\} dv_x \\ &= \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F / kT} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_y^2 / 2kT} dv_y \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_z^2 / 2kT} dv_z \right\} e^{-mv_x^2 / 2kT} dv_x \end{aligned} \quad (11.43)$$

Persamaan (11.43) dapat diselesaikan dengan menggunakan hubungan umum

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\pi / \lambda}$. Dengan menggunakan hubungan ini maka persamaan (11.43) menjadi

$$\begin{aligned} n_x(v_x) dv_x &= \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F / kT} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{m / 2kT}} \right\} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{m / 2kT}} \right\} e^{-mv_x^2 / 2kT} dv_x \\ &= \frac{4\pi m^2 kT}{h^3} e^{E_F / kT} e^{-mv_x^2 / 2kT} dv_x \end{aligned} \quad (11.44)$$

Jumlah elektron yang meninggalkan permukaan logam tiap satuan luas permukaan tiap satuan waktu dengan jangkauan kecepatan antara v_x sampai $v_x + dv_x$ adalah

$$v_x n_x(v_x) dv_x$$

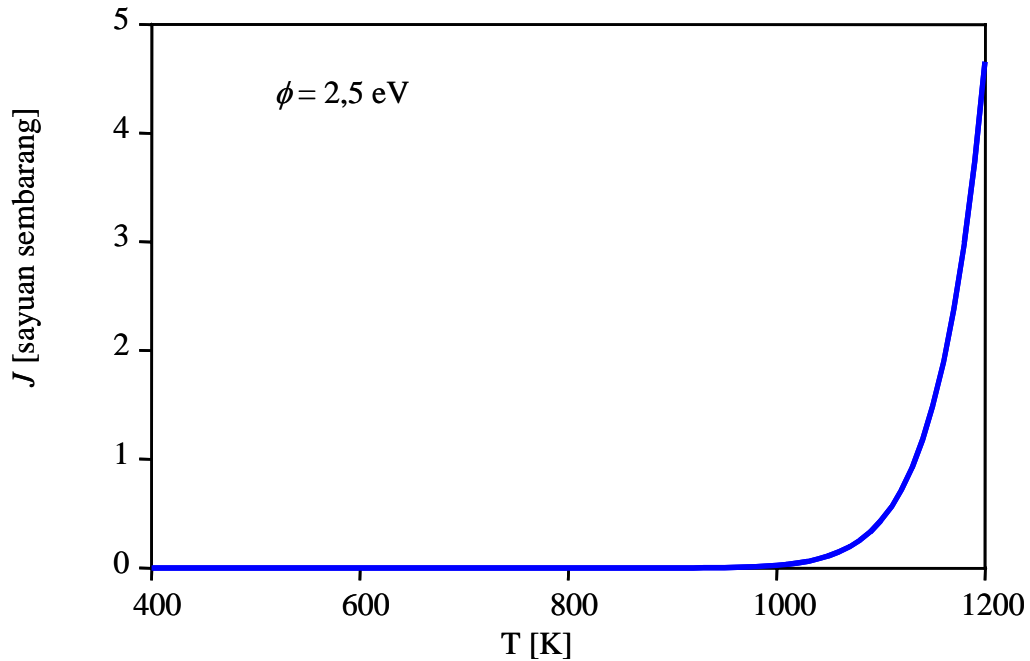
asalkan terpenuhi $\frac{1}{2}mv_x^2 > E_o$. Jika q adalah muatan elektron maka rapat arus yang dihasilkan adalah

$$J = \int_{mv_x^2=E_o}^{\infty} qv_x n_x(v_x) dv_x$$

$$= q \frac{4\pi m^2 kT}{h^3} e^{E_F/kT} \int_{mv_x^2/2=E_o}^{\infty} v_x e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \quad (11.45)$$

Untuk menyelesaikan integral (11.45) mari kita misalkan $y = mv_x^2/2kT$. Dengan permisalan ini maka

$$v_x dv_x = \frac{kT}{m} dy \quad (11.46)$$



Gambar 11.7 Rapat arus termionik sebagai fungsi suhu. Pada perhitungan digunakan $\phi = 2,5 \text{ eV}$.

Selanjutnya kita tentukan syarat batas untuk y . Syarat batas bawah $mv_x^2/2 = E_o$ ekivalen dengan $y = E_o/kT$. Syarat batas $v_x = \infty$ ekivalen dengan $y = \infty$. Dengan demikian persamaan (11.45) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 J &= q \frac{4\pi m^2 kT}{h^3} e^{E_F/kT} \int_{E_o/kT}^{\infty} e^{-y} \frac{kT}{m} dy \\
 &= q \frac{4\pi m k^2 T^2}{h^3} e^{E_F/kT} \int_{E_o/kT}^{\infty} e^{-y} dy \\
 &= q \frac{4\pi m k^2 T^2}{h^3} e^{E_F/kT} e^{-E_o/kT} \\
 &= q \frac{4\pi m k^2 T^2}{h^3} e^{-(E_o - E_F)/kT} \\
 &= AT^2 e^{-\phi/kT}
 \end{aligned} \tag{11.47}$$

dengan A konstanta dan $\phi = E_o - E_F$ merupakan tinggi dinding potensial. Gambar 11.7 adalah contoh kebergantungan kerapatan arus termionik terhadap suhu. Pada perhitungan digunakan $\phi = 2,5$ eV.

Bab 12 Termodinamika Gas

Isi Bab Ini

Bab ini berisi diskusi tentang beberapa sifat termodinamika gas yang diperoleh dari perumusan fisika statistik. Pada fokus pembahasan pada gas maka akan ditekankan pada penggunaan distribusi Maxwell-Boltzmann. Di sini akan diperkenalkan fungsi partisi yang merupakan jembatan penghubung antara statistik dan termodinamika.

Tujuan Bab Ini

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami fungsi partisi dan bagaimana cara mendapatkan fungsi partisi tersebut serta menggunakan fungsi partisi untuk menurunkan besaran-besaran termodinamika gas.

Apa Yang Perlu dikuasai Lebih Dahulu

Untuk memahami lebih baik tentang bab ini, mahasiswa diharapkan memahami terlebih dahulu Bab 2, Bab 3, dan Bab 4, Bab 8, dan Bab 9. Pemahaman kembali materi kuliah termodinamika juga sangat membantu.

12.1 Entropi

Kita sudah membahas tiga macam statistik masing-masing untuk partikel klasik (seperti gas), boson, dan fermion. Besaran makroskopik yang sudah kita tentukan dari statistik-statistik tersebut baru terbatas pada energi dan kapasitas kalor. Pada bagian ini kita akan masuk lebih jauh dengan mencari hubungan antara statistik dengan besaran-besaran termodinamika yang lain. Akan tampak bahwa perumusan statistik benar-benar dapat menjelaskan sifat termodinamika ketika dibawa ke kondisi makroskopik.

Pertama-tama mari kita definisikan sebuah besaran termodinamika yang bernama entropi secara statistik. Secara termodinamika, entropi telah didefinisikan melalui hubungan

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (12.1)$$

Dengan dS adalah perubahan entropi, dQ adalah sejumlah kecil kalor yang diterima assembli, dan T adalah suhu assembli. Dari entropi tersebut kita dapat menurunkan sejumlah besaran termodinamika yang lain. Pertanyaan sekarang adalah bagaimana merumuskan entropi secara statistik? Mari kita bahas di bab ini. Kita sekarang fokuskan perhatian pada statistik Maxwell-Boltzmann karena assembli yang akan kita bahas lebih terfokus ke assembli gas.

Pada perumusan statistik Maxwell-Boltzmann kita sudah menganggap bahwa partikel gas dapat dibedakan satu dengan lainnya. Dengan asumsi ini maka probabilitas penyusunan N buah partikel gas pada tingkat-tingkat energi memenuhi

$$W = N! \prod_s \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \quad (12.2)$$

Pertanyaan yang patut diajukan di sini adalah apakah benar satu partikel gas dapat dibedakan dari partikel gas yang lain jika partikel-partikel tersebut merupakan molekul gas yang sama dari isotop yang sama pula? Pernyataan tersebut mungkin meragukan. Oleh karena itu, perhitungan probabilitas di atas terlalu besar dari yang seharusnya, yaitu apabila dianggap satu partikel tidak dapat dibedakan dari partikel lain. Jumlah cara menukar N buah partikel jika partikel tersebut dapat dibedakan adalah $N!$. Dengan demikian, jika dianggap bahwa partikel-partikel gas dalam assembli tidak dapat dibedakan maka probabilitas penyusunan partikel-partikel yang diungkapkan dalam persamaan (12.2) harus dibagi $N!$ menjadi

$$W = \prod_s \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \quad (12.3)$$

Sudah kita bahas pada Bab 2 bahwa konfigurasi penyusunan yang memberikan probabilitas maksimum terneuhi jika $n_s = g_s e^{\alpha + \beta \epsilon_s}$. Pada keadaan ini kita peroleh W_{maks} . Secara statistik entropi didefinisikan sebagai

$$S = k \ln W_{maks} \quad (12.4)$$

Berdasarkan persamaan (12.3) maka $\ln W = \sum_s [n_s \ln g_s - \ln n_s!]$. Kemudian kita melakukan penyederhanaan dengan menggunakan aturan stirling untuk logaritma faktorial dan diperoleh

$$\begin{aligned} \ln W &\approx \sum_s [n_s \ln g_s - n_s \ln n_s + n_s] \\ &= \sum_s \left[n_s \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) + n_s \right] \end{aligned} \quad (12.5)$$

Apabila menggunakan n_s dalam konfigurasi maksimum maka kita peroleh W_{maks} yang apabila dinyatakan dalam skala logaritma diperoleh bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned} \ln W_{maks} &= \sum_s [n_s (-\alpha - \beta \varepsilon_s) + n_s] \\ &= -\alpha \sum_s n_s - \beta \sum_s \varepsilon_s n_s + \sum_s n_s \\ &= -\alpha N - \beta E + N \end{aligned} \quad (12.6)$$

Dengan mengganti $\beta = -1/kT$ maka berdasarkan persamaan (12.4) kita dapatkan entropi

$$\begin{aligned} S &= k \left[-\alpha N + \frac{E}{kT} + N \right] \\ &= \frac{E}{T} - k\alpha N + kN \end{aligned} \quad (12.7)$$

12.2 Fungsi Partisi Boltzmann

Salah satu besaran yang sangat penting didefinisikan adalah fungsi partisi. Besaran ini tidak dapat diukur secara fisis tetapi merupakan jembatan penghubung antara statistik dan termodinamika (lihat Gbr 12.1 sebagai ilustrasi). Fungsi partisi untuk asembli yang memenuhi statistik Maxwell-Boltzmann didefinisikan sebagai

$$Z = \sum_s g_s e^{-E_s / kT} \quad (12.8)$$

Pejumlahan di atas dilakukan untuk semua pita energi. Pita energi ke- s mengandung sejumlah g_s keadaan. Jika kita lupa pita-pita energi dan menggunakan tingkat-tingkat energi secara individual maka fungsi partisi (12.8) dapat ditulis menjadi

$$Z = \sum_i e^{-E_i / kT} \quad (12.9)$$



Gambar 12.1 Fungsi partisi merupakan jembatan penghubung antara statistik dan termodinamika

Dalam konfigurasi maksimum kita memiliki hubungan $n_s = g_s e^{\alpha + \beta E_s}$. Dari hubungan ini kita dapatkan $g_s e^{-E_s / kT} = g_s e^{\beta E_s} = n_s e^{-\alpha}$. Dengan demikian, persamaan fungsi partisi (12.8) dapat juga ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} Z &= \sum_s n_s e^{-\alpha} \\ &= e^{-\alpha} \sum_s n_s \\ &= e^{-\alpha} N \end{aligned}$$

atau

$$\alpha = -\ln \frac{Z}{N} \quad (12.10)$$

Dengan memasukkan α di atas ke dalam entropi yang diungkapkan oleh persamaan (12.7) kita dapatkan ungkapan lain untuk entropi, yaitu

$$S = \frac{E}{T} kN \ln \left(\frac{Z}{N} \right) + kN \quad (12.11)$$

12.3 Ungkapan Energi Dalam Fungsi Partisi

Kita sepenuhnya ingin menggunakan fungsi partisi sebagai jembatan antara statistik dan termodinamika. Dengan demikian, semua besaran termodinamika sedapat mungkin dinyatakan dalam fungsi partisi. Sekarang kita akan melihat hubungan antara energi sistem dengan fungsi partisi. Kita berangkat dari definisi

$$\begin{aligned} E &= \sum_s n_s E_s \\ &= \sum_s E_s g_s e^{\alpha + \beta E_s} \\ &= \sum_s g_s \frac{d}{d\beta} (e^{\alpha + \beta E_s}) \\ &= \frac{d}{d\beta} \sum_s g_s e^{\alpha + \beta E_s} \\ &= e^\alpha \frac{d}{d\beta} \sum_s g_s e^{\beta E_s} \\ &= e^\alpha \frac{d}{d\beta} Z \end{aligned} \quad (12.12)$$

Dengan menggunakan α yang didefinisikan pada persamaan (12.10) maka kita dapat menulis persamaan (12.12) sebagai

$$\begin{aligned}
E &= \frac{N}{Z} \frac{d}{d\beta} Z \\
&= N \frac{d}{d\beta} \ln Z
\end{aligned} \tag{12.13}$$

Selanjutnya bila kita ingin menyatakan dalam variabel suhu dengan menggunakan hubungan $\beta = -1/kT$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\beta} &= \frac{dT}{d\beta} \frac{d}{dT} = \frac{1}{k\beta^2} \frac{d}{dT} = \frac{1}{k(1/kT)^2} \frac{d}{dT} \\
&= kT^2 \frac{d}{dT}
\end{aligned} \tag{12.14}$$

Substitusi (12.14) ke dalam (12.13) diperoleh ungkapan energi sebagai berikut

$$E = NkT^2 \frac{d}{dT} \ln Z \tag{12.15}$$

12.4 Energi Bebas Helmholtz

Energi bebas Helmholtz didefinisikan sebagai

$$F = E - TS \tag{2.16}$$

Dengan menggunakan bentuk entropi pada persamaan (12.11) kita dapat menulis

$$\begin{aligned}
F &= E - T \left(\frac{E}{T} + kN \ln \frac{Z}{N} + kN \right) \\
&= -NkT \ln \frac{Z}{N} - NkT \\
&= -NkT \ln Z + NkT \ln N - NkT \\
&= -NkT \ln Z + kT(N \ln N - N)
\end{aligned} \tag{12.17}$$

Dengan pendekatan Stirling kita dapatkan $\ln N! \approx N \ln N - N$. Dengan demikian kita dapat menulis bentuk aproksimasi untuk energi bebas Helmholtz sebagai

$$\begin{aligned}
 F &\approx -NkT \ln Z + kT \ln N! \\
 &= -kT \ln Z^N + kT \ln N! \\
 &= -kT \ln \left(\frac{Z^N}{N!} \right)
 \end{aligned} \tag{12.18}$$

12.5 Kapasitas Kalor

Kapasitas kalor pada volum tetap dapat diturunkan dari energi sistem, yaitu

$$C_v = \frac{dE}{dT} \tag{12.19}$$

Selanjutnya dengan menggunakan ungkapan energi dalam fungsi partisi pada persamaan (12.15) kita dapatkan

$$\begin{aligned}
 C_v &= \frac{d}{dT} \left(NkT^2 \frac{d}{dT} \ln Z \right) \\
 &= 2NkT \frac{d}{dT} \ln Z + NkT^2 \frac{d^2}{dT^2} \ln Z \\
 &= Nk \left(2T \frac{d}{dT} \ln Z + T^2 \frac{d^2}{dT^2} \ln Z \right)
 \end{aligned} \tag{12.20}$$

12.6 Perhitungan Fungsi Partisi Klasik

Telah kita turunkan persamaan rapat keadaan sebagai berikut

$$g(E)dE = BV2\pi(2m)^{3/2} E^{1/2} dE$$

Bentuk penjumlahan dalam fungsi partisi seperti yang tampak pada persamaan (12.15) dapat dinyatakan dalam bentuk integral dengan terlebih dahulu melakukan transformasi sebagai berikut

$$g_s \rightarrow g(E)dE$$

$$\sum_s \rightarrow \int_0^\infty$$

Dengan transformasi tersebut maka kita mendapatkan bentuk integral untuk persamaan (12.15) sebagai berikut

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^\infty e^{-E/kT} g(E)dE \\ &= BV2\pi(2m)^{3/2} \int_0^\infty e^{-E/kT} E^{1/2} dE \\ &= BV2\pi(2m)^{3/2} (kT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= BV(2m\pi kT)^{3/2} \end{aligned} \quad (12.21)$$

Dengan menggunakan persamaan (12.21) kita dapatkan bberapa hasil berikut ini

$$\ln Z = \ln \{BV(2m\pi kT)^{3/2}\} = \ln \{BV(2m\pi k)^{3/2}\} + \frac{3}{2} \ln T \quad (12.22)$$

Dengan menggunakan persamaan (12.22) ke dalam persamaan (12.15) kita dapatkan ungkapan untuk energi gas sebagai berikut

$$\begin{aligned} E &= NkT^2 \frac{d}{dT} \left[\ln \{BV(2m\pi k)^{3/2}\} + \frac{3}{2} \ln T \right] \\ &= NkT^2 \left[0 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{T} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} NkT \quad (12.23)$$

Persamaan (12.23) persis sama dengan yang diperoleh menggunakan prinsip ekipartisi energi. Gas memiliki tiga derajat kebebasan energi, yang disumbangkan oleh tiga komonen momentum. Dengan demikian energi rata-rata tiap molekul adalah $3kT/2$. Karena terdapat N molekul maka energi total gas memenuhi persamaan (12.23).

Dengan menggunakan fungsi partisi pada persamaan (12.21) maka entropi pada persamaan (12.11) menjadi

$$\begin{aligned} S &= \frac{3NkT/2}{T} + kN \ln \left\{ \frac{BV(2m\pi kT)^{3/2}}{N} \right\} + kN \\ &= \frac{5}{2} kN + kN \ln \left\{ \frac{BV(2m\pi kT)^{3/2}}{N} \right\} \end{aligned} \quad (12.24)$$

12.7 Entropi Gas Semiklasik

Pada ungkapan kerapatan keadaan yang tampak pada persamaan (3.13) kita temui parameter B yang belum diketahui nilainya. Parameter B menyatakan kerapatan keadaan dalam ruang fasa. Berdasarkan ketidakpastian Heisenberg, yaitu $\Delta p_x \Delta x \approx h$ maka volum terkecil ruang fasa yang dapat mengandung sebuah keadaan adalah

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_{\min} &= \Delta p_x \Delta x \Delta p_y \Delta y \Delta p_z \Delta z \\ &\approx h \times h \times h = h^3 \end{aligned}$$

Volum ruang fasa minimum ini mengandung hanya satu keadaan. Oleh karena itu, kerapatan keadaan dalam ruang fase adalah

$$B = \frac{1}{\Delta \Gamma_{\min}} = \frac{1}{h^3} \quad (12.25)$$

Pengenalan konsep kuantum dalam menentukan kerapatan keadaan untuk gas klasik melahirkan apa yang disebut formulasi semiklasik dari gas. Dalam formulasi ini maka ungkapan kerapatan keadaan yang memiliki energi antara E sampai $E + dE$ menjadi

$$g(E)dE = \frac{V2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} dE \quad (12.26)$$

Dan entropi gas menjadi pada persamaan (12.24) menjadi

$$\begin{aligned} S &= \frac{5}{2} kN + kN \ln \left\{ \frac{V(2m\pi kT)^{3/2}}{Nh^3} \right\} \\ &= NK \left[\frac{5}{2} + \ln \left\{ \frac{V(2m\pi kT)^{3/2}}{Nh^3} \right\} \right] \end{aligned} \quad (12.27)$$

Ungkapan entropi pada persamaan (12.27) dikenal dengan persamaan *Sackur-Tetrode* untuk entropi.

12.8 Fungsi Partisi Total

Selama ini pembahasan kita difokuskan pada gas yang tidak berstruktur. Pada gas semacam ini partikel hanya memiliki energi kinetik translasi. Untuk gas yang berstruktur seperti molekul maka energi yang dimiliki gas bukan hanya kinetik translasi, tetapi juga kinetik lainnya seperti vibrasi dan rotasi. Sebagai ilustrasi di sini kita akan kita bahas gas yang memiliki tiga macam energi kinetik, yaitu energi kinetik translasi, rotasi, dan vibrasi. Kita anggap gas tidak memiliki energi potensial.

Untuk menentukan fungsi partisi total mari kita mulai dengan memisalkan

- i) Keadaan translasi ke- i memiliki energi E_{1i}
- ii) Keadaan rotasi ke- j memiliki energi E_{2j}
- iii) Keadaan vibrasi ke- ℓ memiliki energi $E_{3\ell}$

Energi total gas pada keadaan translasi ke- i , rotasi ke- j dan vibrasi ke- ℓ adalah

$$E(i, j, \ell) = E_{1i} + E_{2j} + E_{3\ell} \quad (12.28)$$

Dengan bentuk energi (12.28) maka fungsi partisi total gas menjadi

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{ij\ell} \exp \left[-\frac{E(i, j, \ell)}{kT} \right] \\ &= \sum_{ij\ell} e^{-E_{1i}/kT} e^{-E_{2j}/kT} e^{-E_{3\ell}/kT} \end{aligned} \quad (12.29)$$

Jika penjumlahan pada persamaan (12.29) diuraikan atas suku-suku maka tiap suku mengandung faktor perkalian $e^{-E_{1i}/kT} e^{-E_{2j}/kT} e^{-E_{3\ell}/kT}$ untuk semua kombinasi nilai i , j , dan ℓ . Dengan adanya kombinasi seperti itu maka kita dapat melakukan penyederhanaan seperti berikut ini.

Lihat perkalian berikut ini

$$\begin{aligned} \sum_i x_i \sum_j x_j \sum_\ell x_\ell &= (x_1 + x_2 + x_3 + \dots)(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)(z_1 + z_2 + z_3 + \dots) \\ &= x_1 y_1 z_1 + x_1 y_1 z_2 + x_1 y_1 z_3 + \dots + x_i y_j z_\ell + \dots \end{aligned} \quad (12.30)$$

Pada hasil perkalian kita dapatkan penjumlahan yang tiap sukunya mengandung perkalian $x_i y_j z_\ell$ untuk semua kombinasi nilai i , j , dan ℓ . Penjumlahan suku-suku yang tiap sukunya mengandung perkalian $x_i y_j z_\ell$ untuk semua kombinasi nilai i , j , dan ℓ dapat dijumpai pada penjumlahan lipat tiga berikut ini.

$$\sum_{ij\ell} x_i x_j x_\ell = x_1 y_1 z_1 + x_1 y_1 z_2 + x_1 y_1 z_3 + \dots + x_i y_j z_\ell + \dots \quad (12.31)$$

Berdasarkan persamaan (12.30) dan (12.31) kita simpulkan

$$\sum_{ij\ell} x_i x_j x_\ell = \sum_i x_i \sum_j x_j \sum_\ell x_\ell \quad (12.32)$$

Dengan sifat pada persamaan (12.32) maka kita dapat menulis fungsi partisi (12.29) menjadi menjadi

$$\begin{aligned} Z &= \sum_i e^{-E_{1i}/kT} \sum_j e^{-E_{2j}/kT} \sum_\ell e^{-E_{3\ell}/kT} \\ &= Z_1 Z_2 Z_3 \end{aligned} \quad (12.33)$$

di mana

$$Z_1 = \sum_i e^{-E_{1i}/kT} \quad (12.34a)$$

$$Z_2 = \sum_j e^{-E_{2j}/kT} \quad (12.34b)$$

$$Z_3 = \sum_\ell e^{-E_{3\ell}/kT} \quad (12.34c)$$

Persamaan (12.33) dapat diperluas ke sistem yang mengandung m jenis energi. Fungsi partisi assembli tersebut menjadi

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{ij\ell\dots q} \exp \left[-\frac{E_{1i} + E_{2j} + E_{3\ell} + \dots + E_{mq}}{kT} \right] \\ &= \sum_i e^{-E_{1i}/kT} \sum_j e^{-E_{2j}/kT} \sum_\ell e^{-E_{3\ell}/kT} \dots \sum_q e^{-E_{mq}/kT} \\ &= Z_1 Z_2 Z_3 \dots Z_m \end{aligned} \quad (12.35)$$

12.9 Fungsi Partisi Gas Semiklasik

Gas semiklasik memiliki sifat bahwa partikel-partikel gas tidak dapat dibedakan satu dengan lainnya. Misalkan assembli gas klasik mengandung N partikel. Misalkan

pada konfigurasi tertentu, yaitu konfigurasi (i, j, ℓ, \dots, r) energi tiap-tiap partikel sebagai berikut:

Energi partikel pertama: E_{1i}

Energi partikel kedua: E_{2j}

Energi partikel ketiga: $E_{3\ell}$

.

.

.

Energi partikel ke- N : E_{Nr}

Energi total ssstem dalam konfigurasi ini adalah

$$E(i, j, \ell, \dots, r) = E_{1i} + E_{2j} + E_{3\ell} + \dots + E_{Nr} \quad (12.36)$$

Dengan demikian, faktor Maxwell-Boltzmann adalah

$$\exp\left[\frac{E(i, j, \ell, \dots, r)}{kT}\right] = \exp\left[\frac{E_{1i} + E_{2j} + E_{3\ell} + \dots + E_{Nr}}{kT}\right]$$

Dan fungsi partisi total system gas tersebut menjadi

$$Z_t = \sum_{\substack{\text{semua konfigurasi} \\ \text{yang mungkin}}} \exp\left[\frac{E_{1i} + E_{2j} + E_{3\ell} + \dots + E_{Nr}}{kT}\right] \quad (12.37)$$

Sebelum menentukan penjumlahan pada persamaan (12.37), mari kita lihat perkalian dari deret-deret berikut ini

$$\Omega = \sum_i e^{-E_{1i}/kT} \sum_j e^{-E_{2j}/kT} \sum_{\ell} e^{-E_{3\ell}/kT} \dots \sum_r e^{-E_{Nr}/kT} \quad (12.38)$$

Ada sejumlah suku pada perkalian deret di atas yang sebenarnya hanya pertukaran indeks partikel. Tetapi dengan anggapan partikel tidak dapat dibedakan, pertukaran tersebut sebenarnya tidak menghasilkan konfigurasi baru. Pada ungkapan semiklasik, suku yang mengandung pertukaran indeks partikel tidak diperhitungkan. Jika ada N partikel maka ada sebanyak $N!$ kemunculan konfigurasi yang sebenarnya hanya menukarkan indeks partikel. Oleh karena itu jumlah suku pada perkalian deret persamaan (12.38) lebih banyak $N!$ kali dibandingkan dengan jumlah suku pada persamaan (12.37). Dengan demikian, penjumlahan pada semua konfigurasi pada persamaan (12.37) dapat diganti dengan

$$Z_t = \frac{1}{N!} \sum_i e^{-E_{1i}/kT} \sum_j e^{-E_{2j}/kT} \sum_\ell e^{-E_{3\ell}/kT} \dots \sum_r e^{-E_{Nr}/kT} \quad (12.39)$$

Karena partikel tidak dapat dibedakan maka tiap deret pada sisi kanan menghasilkan Z . Karena ada N buah deret yang dikalikan sedangkan nilai semua deret sama, yaitu Z maka kita dapatkan

$$Z_t = \frac{Z^N}{N!} \quad (12.40)$$

Persamaan (12.40) merupakan ungkapan fungsi partisi gas semiklasik.

12.10 Transformasi Dari Penjumlahan ke Integral

Fungsi partisi dapat dihitung dengan mudah menggunakan metode integral dibandingkan dengan metode penjumlahan diskrit. Untuk menghitung fungsi partisi dengan metode integral mari kita mulai dengan menulis kerapatan keadaan per satuan energi dalam model semi klasik, yaitu

$$g(E)dE = \frac{1}{h^3} dp_x dx dp_y dy dp_z dz \quad (12.41)$$

Dengan fungsi kerapatan di atas maka fungsi partisi dapat ditransformasi sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_i e^{-E_i / kT} \\
 &= \int e^{-E / kT} \frac{dp_x dx dp_y dy dp_z dz}{h^3} \quad (12.42)
 \end{aligned}$$

Fungsi partisi total pada persamaan (12.40) selanjutnya dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 Z_t &= \frac{1}{N!} Z_1 Z_2 \dots Z_N \\
 &= \frac{1}{N!} \int e^{-E_1 / kT} \frac{dp_{x1} dx_1 dp_{y1} dy_1 dp_{z1} dz_1}{h^3} \int e^{-E_2 / kT} \frac{dp_{x2} dx_2 dp_{y2} dy_2 dp_{z2} dz_2}{h^3} \dots \times \\
 &\quad \int e^{-E_N / kT} \frac{dp_{xN} dx_N dp_{yN} dy_N dp_{zN} dz_N}{h^3} \\
 &= \frac{1}{N! h^{3N}} \int e^{-(E_1 + E_2 + \dots + E_N) / kT} dp_{x1} dx_1 dp_{y1} dy_1 dp_{z1} dz_1 \dots dp_{xN} dx_N dp_{yN} dy_N dp_{zN} dz_N \\
 &= \frac{1}{N! h^{3N}} \int e^{-E / kT} dp_{x1} dx_1 dp_{y1} dy_1 dp_{z1} dz_1 \dots dp_{xN} dx_N dp_{yN} dy_N dp_{zN} dz_N \quad (12.43)
 \end{aligned}$$

dengan $E = E_1 + E_2 + \dots + E_N$. Misalkan energi sistem bukan merupakan fungsi posisi. Energi semacam ini dipenuhi oleh energi kinetik baik translasi, vibrasi, maupun rotasi. Dalam kasus demikian maka integral terhadap posisi dapat dipisahkan dari integral terhadap momentum. Integral terhadap momentum bekerja pada energi yang muncul dalam faktor Maxwell-Boltzmann sedangkan integral terhadap posisi tidak bekerja pada energi. Dengan demikian persamaan (12.43) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 Z_t &= \frac{1}{N! h^{3N}} \int e^{-E / kT} dp_{x1} dp_{y1} dp_{z1} dp_{x2} dp_{y2} dp_{z2} \dots dp_{xN} dp_{yN} dp_{zN} \\
 &\quad \times \int dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2 \dots dx_N dy_N dz_N \\
 &= \frac{1}{N! h^{3N}} \int e^{-E / kT} dp_{x1} dp_{y1} dp_{z1} dp_{x2} dp_{y2} dp_{z2} \dots dp_{xN} dp_{yN} dp_{zN}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int dx_1 dy_1 dz_1 \int dx_2 dy_2 dz_2 \dots \int dx_N dy_N dz_N \\
& = \frac{1}{N! h^{3N}} \int e^{-E/kT} dp_{x1} dp_{y1} dp_{z1} dp_{x2} dp_{y2} dp_{z2} \dots dp_{xN} dp_{yN} dp_{zN} \times V \times V \times \dots \times V \\
& = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \int e^{-E/kT} dp_{x1} dp_{y1} dp_{z1} dp_{x2} dp_{y2} dp_{z2} \dots dp_{xN} dp_{yN} dp_{zN} \quad (12.44)
\end{aligned}$$

12.11 Suseptibilitas Paramagnetik Kuantum

Dalam mekanika kuantum, momentum sudut atom atau molekul terkuantisasi dan direpresentasikan oleh bilangan kuantum j yang merupakan bilangan bulat: 0, 1, 2, Untuk setiap bilangan kuantum j terdapat sejumlah bilangan kuantum magnetik yang menyertainya, m_j . Berdasarkan aturan mekanika kuantum, nilai-nilai m_j yang diperbolehkan untuk tiap nilai j adalah

$$m_j = -j, -(j-1), -(j-2), \dots, -1, 0, 1, \dots, (j-2), (j-1), j \quad (12.45)$$

Jadi, tiap satu nilai j terdapat sebanyak $(2j+1)$ buah nilai m_j yang diperbolehkan.

Jika atom atau molekul ditempatkan dalam medan magnetik B maka energi potensial magnetik yang dimilikinya adalah

$$U = -\mu_{||} B \quad (12.46)$$

dengan $\mu_{||}$ adalah komponen momen magnetik yang sejajar dengan medan magnetik yang memenuhi

$$\mu_{||} = m_j g \mu_B \quad (12.47)$$

dengan g disebut faktor-g Lande dan μ_B disebut magneton Bohr. Untuk satu nilai j saja atau sebanyak $(2j+1)$ buah nilai m_j . Dengan demikian fungsi partisi molekul tersebut adalah

$$\begin{aligned}
Z_j &= \sum_{m_j=-j}^{+j} e^{-U/kT} \\
&= \sum_{m_j=-j}^{+j} e^{m_j g \mu_B B / kT} \\
&= \sum_{m_j=-j}^{+j} e^{m_j x}
\end{aligned} \tag{12.48}$$

dengan $x = g \mu_B B / kT$.

Sekarang kita tinjau kasus khusus di mana medan magnetik tidak terlalu kuat. Dalam kondisi ini maka $g \mu_B B \ll kT$ atau $x \ll 1$ sehingga kita dapat melakukan aproksimasi sebagai berikut

$$e^{m_j x} \approx 1 + m_j x + \frac{1}{2} (m_j x)^2 \tag{12.49}$$

Substitusi persamaan (12.49) ke dalam persamaan (12.48) diperoleh

$$\begin{aligned}
Z_j &\approx \sum_{m_j=-j}^j 1 + m_j x + \frac{1}{2} (m_j x)^2 \\
&= \sum_{m_j=-j}^j 1 + x \sum_{m_j=-j}^j m_j + \frac{1}{2} x^2 \sum_{m_j=-j}^j m_j^2
\end{aligned} \tag{12.50}$$

Kita lihat nilai penjumlahan masing-masing deret pada persamaan (12.50). Jumlah suku penjumlahan sama dengan jumlah banyak nilai yang dimiliki m_j , yaitu $(2j+1)$ suku. Jadi

$$\sum_{m_j=-j}^j 1 = (2j+1) \tag{12.51}$$

$$\sum_{m_j=-j}^j m_j = -j - (j-1) - (j-2) - \dots - 1 + 0 + 1 + \dots + (j-2) + (j-1) + j = 0 \quad (12.52)$$

Untuk mencari $\sum_{m_j=-j}^j m_j^2$, mari kita lihat penjumlahan berikut ini

$$\begin{aligned} \sum_{m_j=-j}^j m_j^3 &= [-j]^3 + [-(j-1)]^3 + [-(j-2)]^3 + \dots + (-1) \\ &\quad + 0 + 1 + \dots + (j-2)^3 + (j-1)^3 + j^3 \end{aligned} \quad (12.53a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m_j=-j}^j [m_j + 1]^3 &= [-j+1]^3 + [-(j-1)+1]^3 + \dots + (-1) \\ &\quad + 0 + 1 + \dots + (j)^3 + (j+1)^3 \\ &= [-(j-1)]^3 + [-(j-2)]^3 + \dots + (-1) \\ &\quad + 0 + 1 + \dots + (j-2)^3 + (j-1)^3 + j^3 + (j+1)^3 \end{aligned} \quad (12.53b)$$

Dengan demikian pengurangan deret (12.53b) dan (12.53a) memberikan

$$\begin{aligned} \sum_{m_j=-j}^j [m_j + 1]^3 - \sum_{m_j=-j}^j m_j^3 &= (j+1)^3 - [-j]^3 \\ \sum_{m_j=-j}^j \{[m_j + 1]^3 - m_j^3\} &= (j+1)^3 + j^3 \\ \sum_{m_j=-j}^j \{[m_j^3 + 3m_j^2 + 3m_j + 1] - m_j^3\} &= (j+1)^3 + j^3 \\ \sum_{m_j=-j}^j 3m_j^2 + 3m_j + 1 &= (j+1)^3 + j^3 \\ 3 \sum_{m_j=-j}^j m_j^2 + 3 \sum_{m_j=-j}^j m_j + \sum_{m_j=-j}^j 1 &= (j+1)^3 + j^3 \\ 3 \sum_{m_j=-j}^j m_j^2 + 3 \times 0 + (2j+1) &= (j+1)^3 + j^3 \end{aligned}$$

atau

$$\sum_{m_j=-j}^j m_j^2 = \frac{(j+1)^3 + j^3 - (2j+1)}{3}$$

$$\sum_{m_j=-j}^j m_j^2 = \frac{2j^3 + 3j^2 + j}{3} = \frac{j(2j+1)(j+1)}{3} \quad (12.54)$$

Substitusi (12.51), (12.52) dan (12.54) ke dalam persamaan (12.50) kita peroleh

$$Z_j \approx (2j+1) + \frac{j(2j+1)(j+1)}{3} \frac{x^2}{2}$$

$$= (2j+1) + \frac{j(2j+1)(j+1)}{6} \left(\frac{g\mu_B B}{kT} \right)^2 \quad (12.55)$$

Berdasarkan fungsi partisi pada persamaan (12.55) maka kita dapat menentukan energi magnetik dengan menggunakan persamaan $E = NkT^2 \frac{1}{Z_j} \frac{\partial Z_j}{\partial T}$. Mengingat

$$\frac{\partial}{\partial T} = -\frac{g\mu_B B}{kT^2} \frac{\partial}{\partial x} \text{ maka}$$

$$\frac{\partial Z_j}{\partial T} = -\frac{g\mu_B B}{kT^2} \frac{\partial Z_j}{\partial x} = -\frac{g\mu_B B}{kT^2} \frac{j(2j+1)(j+1)}{3} x$$

$$= -\frac{g\mu_B B}{kT^2} \frac{j(2j+1)(j+1)}{3} \left(\frac{g\mu_B B}{kT} \right)$$

$$= -\frac{g^2 \mu_B^2 B^2}{k^2 T^3} \frac{j(2j+1)(j+1)}{3}$$

sehingga energi magnetik adalah

$$\begin{aligned}
E &= NkT^2 \frac{1}{Z_j} \frac{\partial Z_j}{\partial T} \\
&= NkT^2 \frac{1}{Z_j} \left[-\frac{g^2 \mu_B^2 B^2}{k^2 T^3} \frac{j(2j+1)(j+1)}{3} \right] \\
&= -\frac{Ng^2 \mu_B^2 B^2}{3kT} \frac{j(2j+1)(j+1)}{Z_j} \\
&= -\frac{Ng^2 \mu_B^2 B^2}{3kT} \frac{j(2j+1)(j+1)}{(2j+1) + \frac{j(2j+1)(j+1)}{6} \left(\frac{g\mu_B B}{kT} \right)^2} \\
&= -\frac{Ng^2 \mu_B^2 B^2}{3kT} \frac{j(j+1)}{1 + \frac{j(j+1)}{6} \left(\frac{g\mu_B B}{kT} \right)^2} \tag{12.56}
\end{aligned}$$

Dalam kondisi $g\mu_B B \ll kT$ bagian penyebut pada persamaan (12.56) dapat didekati dengan

$$1 + \frac{j(j+1)}{6} \left(\frac{g\mu_B B}{kT} \right)^2 \approx 1$$

sehingga

$$E \approx -\frac{Ng^2 \mu_B^2 B^2}{3kT} j(j+1) \tag{12.57}$$

Selanjutnya jika M adalah momen magnet rata-rata dalam arah medan maka energi magnetik dapat ditulis

$$E = -MB \tag{12.58}$$

Dengan membandingkan persamaan (12.57) dan (12.58) kita dapatkan persamaan untuk momen magnetik rata-rata

$$M = \frac{Ng^2\mu_B^2B}{3kT} j(j+1) \quad (12.59)$$

Magnetisasi yang didefinisikan sebagai momen dipol per satuan volum adalah

$$\begin{aligned} m &= \frac{M}{V} \\ &= \frac{(N/V)g^2\mu_B^2B}{3kT} j(j+1) \\ &= \frac{ng^2\mu_B^2B}{3kT} j(j+1) \end{aligned} \quad (12.60)$$

dengan $n = N/V$ adalah kerapatan partikel. Akhirnya kita dapatkan suseptibilitas paramagnetik menjadi

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{m}{B} \\ &= \frac{ng^2\mu_B^2}{3kT} j(j+1) \end{aligned} \quad (12.61)$$

12.12 Molekul Diatomik

Ungkapan fungsi partisi sangat ditentukan oleh bentuk-bentuk energi serta keadaan-keadaan yang dimiliki molekul. Sebagai contoh, untuk molekul diatomik, sejumlah energi yang mungkin dimiliki adalah energi translasi, energi rotasi, energi vibrasi antar dua atom sepanjang sumbu molekul, energi gerakan elektron di sekitar inti, dan energi spin inti. Apabila dihitung dengan metode kuantum maka tingkat energi rotasi, vibrasi, gerak elektron, dan spin inti terkuantisasi. Hanya energi translasi yang dapat dijelaskan secara klasik.

Dengan adanya lima macam energi tersebut maka fungsi partisi dibentuk oleh lima fungsi partisi dari masing-masing keadaan. Fungsi partisi total dapat ditulis

$$Z = Z_{tr} Z_r Z_v Z_e Z_n \quad (12.62)$$

dengan

Z_{tr} adalah fungsi partisi translasi

Z_r adalah fungsi partisi rotasi

Z_v adalah fungsi partisi vibrasi

Z_e adalah fungsi partisi elektronik

Z_n adalah fungsi partisi spin inti

Fungsi partisi yang sudah kita bahas selama ini sebenarnya adalah fungsi partisi translasi. Dengan demikian, tanpa perlu perhitungan ulang kita dapatkan

$$Z_{tr} = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \quad (12.63)$$

Sekarang kita tentukan fungsi partisi rotasi. Jika I adalah momen inersia molekul maka dengan memecahkan persamaan Schrodinger kita peroleh tingkat-tingkat energi rotasi memenuhi

$$E_j = j(j+1) \frac{h^2}{8\pi^2 I} \quad (12.64)$$

dengan j adalah bilangan kuantum momentum sudut total yang merupakan bilangan bulat positif. Untuk tiap nilai j ada sejumlah arah momentum sudut yang diijinkan. Arah tersebut dinyatakan oleh bilangan kuantum m_j . Nilai m_j yang diijinkan adalah

$$m_j = -j, -(j-1), -(j-2), \dots, -1, 0, 1, \dots, (j-2), (j-1), j$$

Jumlah kemungkinan nilai yang dimiliki m_j tersebut adalah $(2j+1)$ buah. Jadi, untuk satu nilai energi rotasi terdapat sebanyak $(2j+1)$ keadaan yang diperbolehkan. Dengan demikian, dari ungkapan umum untuk fungsi partisi $Z = \sum_s g_s e^{-E_s/kT}$ maka untuk gerak rotasi kita transformasi

$$g_s \rightarrow (2j+1)$$

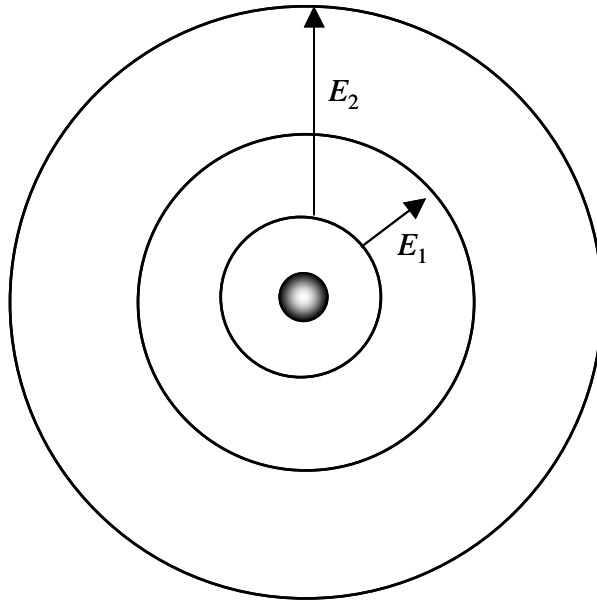
$$E_s \rightarrow E_j = j(j+1) \frac{h^2}{8\pi^2 I}$$

Dengan demikian fungsi partisi rotasi dapat ditulis menjadi

$$Z_r = \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)h^2/8\pi^2 IkT} \quad (12.65)$$

Selanjutnya kita tentukan fungsi partisi vibrasi atom. Tingkat energi vibrasi atom memenuhi persamaan $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$, dengan $n = 0, 1, 2, \dots$ dikenal dengan bilangan kuantum vibrasi. Untuk satu nilai n hanya satu keadaan yang mungkin (tidak ada degenerasi). Dengan demikian, fungsi partisi vibrasi dapat ditulis

$$\begin{aligned} Z_v &= \sum_{n=0} e^{-E_n/kT} \\ &= \sum_{n=0} e^{-(n+1/2)\hbar\omega/kT} = e^{-\hbar\omega/2kT} \sum_{n=0} e^{-n\hbar\omega/kT} = e^{-\hbar\omega/2kT} \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega/kT}} \\ &= \frac{e^{-\hbar\omega/2kT}}{1 - e^{-\hbar\omega/kT}} \end{aligned} \quad (12.66)$$



Gambar 12.2 Elektron diilustrasikan bergerak pada orbit molekuler dengan energi diskrit. Beda energi antara tingkat yang berdekatan cukup besar.

Untuk menentukan fungsi partisi elektronik mari kita lihat idealisasi seperti pada Gbr. 12.2. Sebagai ilustrasi kita misalkan elektron-elektron dalam molekul bergerak pada orbit-orbit dengan energi yang terkuantisasi. Misalkan mula-mula elektron berada pada keadaan dasar. Misalkan energi yang diperlukan untuk memintahkan elektron:

Dari keadaan dasar ke keadaan eksitasi pertama adalah E_1

Dari keadaan dasar ke keadaan eksitasi kedua adalah E_2

Dari keadaan dasar ke keadaan eksitasi ketiga adalah E_3

dan seterusnya

Misalkan pula kerapatan keadaan masing-masing keadaan eksitasi sebagai berikut

Kerapatan ekadaan eksitasi pertama adalah g_1

Kerapatan ekadaan eksitasi kedua adalah g_2

Kerapatan ekadaan eksitasi ketiga adalah g_3

dan seterusnya

Maka fungsi partisi $Z = \sum_s g_s e^{-E_s/kT}$ dapat ditulis menjadi

$$Z_e = g_o + g_1 e^{-E_1/kT} + g_2 e^{-E_2/kT} + \dots \quad (12.67)$$

Sekarang kita lakukan penyederhanaan sebagai berikut. Selisih tingkat energi dalam molekul ordenya dalam elektronvolt. Selisih tingkat energi keadaan dasar ke keadaan eksitasi pertama jauh lebih kecil daripada selisih tingkat energi eksitasi lain ke keadaan dasar. Tetapi pada suhu sekitar suhu kamar, energi termal kT ordenya seperseratus elektronvolt. Dengan demikian nilai E_i/kT umunya sangat besar yang berakibat nilai $e^{-E_i/kT}$ sangat kecil. Nilainya tersebut makin kecil lagi untuk tingkat eksitasi yang lebih besar. Dengan demikian, sebagai langkah penyederhanaan kita dapat melakukan aproksimasi sebagai berikut

$$Z_e \approx g_o + g_1 e^{-E_1/kT} \quad (12.68)$$

Terakhir, fungsi partisi spin inti hampir tidak bergantung pada suhu. Suhu operasional biasa sekitar suhu kamar tidak mampu memberikan pengaruh yang berarti pada inti atom. Dengan hasil di atas maka fungsi partisi total dapat didekati dengan

$$Z = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \left\{ \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)\hbar^2/8\pi^2 IkT} \right\} \\ \times \left\{ \frac{e^{-\hbar\omega/2kT}}{1 - e^{-\hbar\omega/kT}} \right\} \{g_o + g_1 e^{-E_1/kT}\} Z_n \quad (12.69)$$

Energi molkul menjadi

$$E = NkT^2 \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T} = NkT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$$

$$\begin{aligned}
&= NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)h^2 / 8\pi^2 IkT} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\hbar\omega / 2kT}}{1 - e^{-\hbar\omega / kT}} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \{g_o + g_1 e^{-E_1 / kT}\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln Z_n \right] \quad (12.70)
\end{aligned}$$

Karena Z_n hampir tidak bergantung pada suhu maka persamaan (12.70) dapat disederhanakan lebih lanjut menjadi

$$\begin{aligned}
E \cong NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)h^2 / 8\pi^2 IkT} \right\} \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\hbar\omega / 2kT}}{1 - e^{-\hbar\omega / kT}} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \{g_o + g_1 e^{-E_1 / kT}\} \right] \quad (12.71)
\end{aligned}$$

Sekarang kita definisikan suhu-suhu sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\Theta_r &= \frac{h^2}{8\pi^2 Ik} \\
\Theta_v &= \frac{\hbar\omega}{k} \\
\Theta_e &= \frac{E_1}{k}
\end{aligned}$$

Dengan definisi di atas kita dapat menulis persamaan (12.71) menjadi

$$\begin{aligned}
E \cong NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)\Theta_r / T} \right\} \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\Theta_v / 2T}}{1 - e^{-\Theta_v / T}} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \{g_o + g_1 e^{-\Theta_e / T}\} \right] \quad (12.72)
\end{aligned}$$

Untuk semua molekul berlaku $\Theta_r \ll \Theta_v \ll \Theta_e$. Sebagai ilustrasi, untuk molekul hidrogen $\Theta_r = 85,5$ K, $\Theta_v = 6140$ K, dan $\Theta_e = 118000$ K. Sekarang kita tinjau nilai energi pada berbagai jangkauan suhu. Pada kasus di mana $T \ll \Theta_r$ maka $\Theta_r/T \rightarrow \infty$. Karena $\Theta_r \ll \Theta_v \ll \Theta_e$ maka didapat pula $\Theta_v/T \rightarrow \infty$ dan $\Theta_e/T \rightarrow \infty$. Dengan demikian kita dapat emngaproksimasi

$$\begin{aligned}
 E &\approx NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)\infty} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\infty}}{1-e^{-\infty}} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \{g_o + g_1 e^{-\infty}\} \right] \\
 &= NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + 0 + 0 + 0 \right] = \frac{3}{2} NkT
 \end{aligned} \tag{12.73}$$

Berdasarkan persamaan energi kita dapat menentukan kapasitas kalor menjadi

$$\begin{aligned}
 C_v &= \frac{dE}{dT} \\
 &= \frac{3}{2} Nk
 \end{aligned} \tag{12.74}$$

Sekarang kita tinjau suhu pada jangkauan $\Theta_r \ll T \ll \Theta_v$. Pada jangkauan ini maka $\Theta_v/T \rightarrow \infty$ dan $\Theta_e/T \rightarrow \infty$ sehingga kita dapat mengaproksimasi

$$\begin{aligned}
 E &\approx NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)\Theta_r/T} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\infty}}{1-e^{-\infty}} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \{g_o + g_1 e^{-\infty}\} \right] \\
 &= NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)\Theta_r/T} \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{12.75}$$

Sebagai pendekatan, kita ganti penjumlahan terhadap j dengan integral terhadap j sebagai berikut

$$\sum_j (2j+1)e^{-j(j+1)\Theta_r/T} = \int_0^\infty (2j+1)e^{-j(j+1)\Theta_r/T} dj \quad (12.75)$$

Tetapi kita dapat menulis

$$j(j+1) = j^2 + j = j^2 + j + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$2j+1 = 2\left(j + \frac{1}{2}\right)$$

$$dj = d\left(j + \frac{1}{2}\right)$$

Dengan demikian persamaan (12.75) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (2j+1)e^{-j(j+1)\Theta_r/T} dj &= \int_0^\infty 2\left(j + \frac{1}{2}\right)e^{-[(j+1/2)^2 - 1/4]\Theta_r/T} d(j+1/2) \\ &= 2e^{\Theta_r/4T} \int_0^\infty \left(j + \frac{1}{2}\right)e^{-(j+1/2)^2\Theta_r/T} d(j+1/2) \end{aligned} \quad (12.76)$$

untuk menyelesaikan integral (12.76) mari kita misalkan $j + 1/2 = y$. Dengan permisalan ini maka

$$\begin{aligned} 2e^{\Theta_r/4T} \int_0^\infty \left(j + \frac{1}{2}\right)e^{-(j+1/2)^2\Theta_r/T} d(j+1/2) &= 2e^{\Theta_r/4T} \int_0^\infty xe^{-x^2\Theta_r/T} dx \\ &= e^{\Theta_r/4T} \int_0^\infty \frac{T}{\Theta_r} e^{-y} dy = e^{\Theta_r/4T} \frac{T}{\Theta_r} \int_0^\infty e^{-y} dy \\ &= e^{\Theta_r/4T} \frac{T}{\Theta_r} \end{aligned}$$

Akhirnya kita dapatkan energi pada jangkauan suhu $\Theta_r \ll T \ll \Theta_v$,

$$E \approx NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ e^{\Theta_r/4T} \frac{T}{\Theta_r} \right\} \right] \quad (12.77)$$

Karena $\Theta_r \ll T \ll \Theta_v$ maka $\Theta_r/4T \rightarrow 0$ dan $e^{\Theta_r/4T} \rightarrow 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} E &\approx NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{T}{\Theta_r} \right\} \right] \\ &= NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln T - \frac{\partial}{\partial T} \ln \Theta_r \right] = NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{1}{T} - 0 \right] \\ &= \frac{5}{2} NkT \end{aligned} \quad (12.78)$$

Kapasitas panas pada jangkauan suu ini adalah

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{dE}{dT} \\ &= \frac{5}{2} Nk \end{aligned} \quad (12.79)$$

Sekarang kita tinjau suhu pada jangkauan $T \gg \Theta_v$. Pada jangkauan ini maka hanya $\Theta_e/T \rightarrow \infty$ yang terpenuhi sehingga kita dapat mengaproksimasi

$$\begin{aligned} E &\cong NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)\Theta_r/T} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\Theta_v/2T}}{1 - e^{-\Theta_v/T}} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \{ g_o + g_1 e^{-\infty} \} \right] \end{aligned}$$

$$\approx NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ e^{\Theta_r/4T} \frac{T}{\Theta_r} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\Theta_v/2T}}{1 - e^{-\Theta_v/T}} \right\} \right] \quad (12.80)$$

Karena $T \gg \Theta_v$ maka $\Theta_v/T \rightarrow 0$ dan $\Theta_r/T \rightarrow 0$ sehingga

$$e^{-\Theta_r/4T} \approx 1$$

$$e^{-\Theta_v/2T} \approx 1$$

$$1 - e^{-\Theta_v/T} \approx 1 - (1 - \Theta_v/T) = \Theta_v/T$$

Dengan demikian, energi assembli pada persamaan (12.80) menjadi

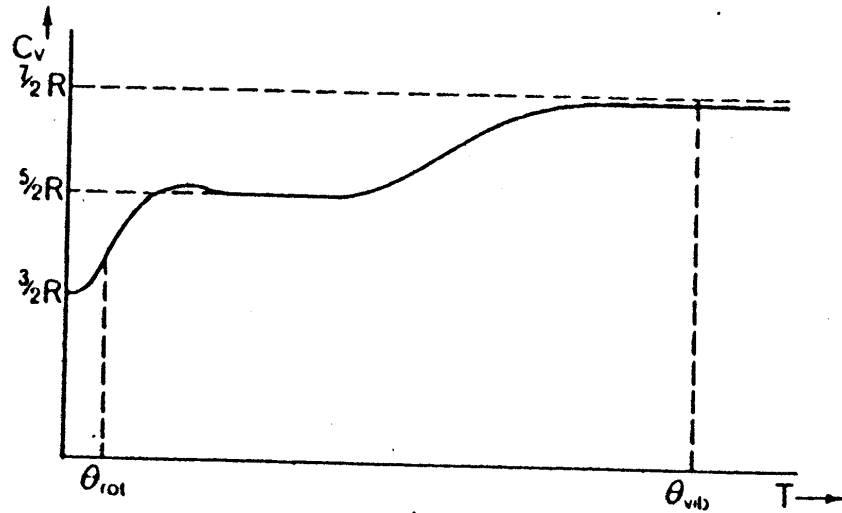
$$\begin{aligned} E &\approx NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{T}{\Theta_r} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{T}{\Theta_v} \right\} \right] \\ &= NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \right] \\ &= \frac{7}{2} NkT \end{aligned} \quad (12.81)$$

Kapasitas panas pada jangkauan suhu tersebut adalah

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{dE}{dT} \\ &= \frac{7}{2} Nk \end{aligned} \quad (12.82)$$

Dari hasil ini tampak bahwa kapasitas panas gas mengalami perubahan ketika suhu diubah dari sangat rendah ke sangat tinggi. Suhu sangat rendah dan sangat tinggi tersebut sangat relatif dan bergantung pada jenis gas. Sebagai contoh, untuk gas hidrogen suhu sangat rendah adalah suhu di bawah 85,5 K dan sangat tinggi adalah di atas 6 000 K.

Sedangkan untuk gas klor, suhu sangat rendah hampir tidak ada karena harus jauh di bawah 0,35 K dan suhu sangat tinggi adalah jauh di atas 815 K.



Gambar 12.3 Kapasitas panas gas diatomik pada daerah jangkauan suhu yang sangat lebar

Gambar 12.3 adalah ilustrasi kurva kapasitas kalor pada berbagai suhu. Terjadi perubahan kapasitas panas secara tangga di sekitar suhu Θ_r , Θ_v , dan Θ_e . Besar perubahan pada tiap step adalah $\Delta C_v = Nk$.

Bab 13 Ensemble Kanonik

Isi Bab Ini

Bab ini berisi diskusi tentang ensemble dan dikhususkan pada ensemble kanonik. Selama ini statistik yang kita bahas hanya dibatasi pada statistik sebuah assembly yang memiliki syarat batas bahwa jumlah partikel dan energi konstan. Kita memperlonggar persyaratan ini dengan memperkenalkan konsep ensemble. Pada bagian ini kita akan bahas ensemble kanonik di mana persyaratan energi assembly yang constant tidak diterapkan. Kita hanya menerapkan persyaratan bahwa jumlah partikel yang dimiliki assembly konstan.

Tujuan Bab Ini

Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami konsep ensemble, khususnya ensemble yang dibentuk oleh assembly-assembly klasik yang memenuhi statistik Maxwell-Boltzmann. Pembahasan difokuskan pada ensemble kanonik di mana energi assembly tidak constant. Kemudian menggunakan konsep tersebut untuk menurunkan parameter termodinamika gas klasik.

Apa Yang Perlu dikuasai Lebih Dahulu

Untuk memahami lebih baik tentang bab ini, mahasiswa diharapkan memahami terlebih dahulu Bab 2, Bab 3, dan Bab 4, Bab 8, dan Bab 9 dan Bab 12. Pemahaman kembali materi kuliah termodinamika juga sangat membantu.

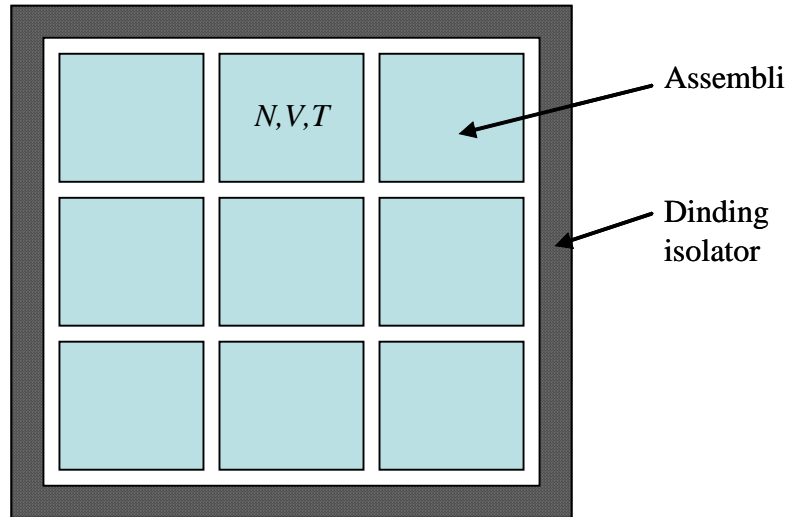
13.1 Ensemble

Pembahasan yang banyak kita lakukan pada bab-bab terdahulu telah dibatasi pada assembli partikel yang dicirikan oleh suhu, energi, dan jumlah system yang tetap. Antar sistem dalam assembli tidak ada interaksi, kecuali tumbukan antar sistem tersebut. Walaupun cukup sederhana, model ini telah berhasil memprediksi dengan baik besaran-besaran fisis yang ditemui dalam termodinamika seperti energi, entropi, energi bebas, dan kapasitas kalor. Namun demikian, keberhasilan model terdahulu masih menyisakan beberapa persoalan yang perlu dijawab. Salah satu masalah yang tidak dapat dijelaskan dengan model tersebut adalah adanya fluktuasi energi dalam assembli. Ada beberapa fenomena dalam gas yang perlu dijelaskan dengan konsep fluktuasi energi tersebut. Fluktuasi energi muncul akibatnya adanya perubahan energi dan keberadaan perubahan energi tidak diijinkan dalam model sebelumnya. Model-model terdahulu meletakkan dasar asumsi bahwa energi dianggap konstan. Oleh karena itu kita perlu memperluas model statistik yang kita bahas sebelumnya sehingga dapat sedikit keluar dari beberapa pembatasan pada model terdahulu.

Sebelum masuk ke model statistik yang diperluas mari kita diskusikan suatu istilah yang disebut *ensemble*. Kita sudah bahas bahwa kumpulan partikel atau system membentuk assembli. Statistik yang kita bahas selama ini sebenarnya adalah kelakuan partikel dalam sebuah assembli saja. Dan assembli tersebut memiliki batasan bahwa suhu, energi, dan jumlah partikel di dalamnya konstan serta tidak ada interaksi antar partikel.

Pada sebuah assembli terdapat sejumlah besar konfigurasi penyusunan partikel yang diijinkan. Energi assembli dibagi atas pita-pita energi. Pita energi ke- s memiliki energi E_s , kerapatan keadaan g_s dan jumlah populasi n_s . Jumlah cara penyusunan partikel dalam konfigurasi tersebut adalah

$$W = N! \prod_s \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \quad (13.1)$$



Gambar 13.1 Sebuah ensemble disusun oleh sejumlah assembli

Komponen dari sebuah assembli adalah partikel-partikel. Sekarang kita ingin membuat sebuah *super assembli* yang komponennya bukan partikel melainkan assembli-assembli. Kita membuat *super assembli* sehingga memiliki sifat-sifat berikut ini:

- i) Suhu *super assembli* konstant.
- ii) *Super assembli* disekat dari lingkungan sehingga tidak ada pertukaran energi dan partikel antara *super assembli* dengan lingkungan. Dengan demikian energi maupun jumlah partikel dalam *super assembli* konstant. Tetapi antar assembli yang menjadi komponen *super assembli* tersebut bisa saja terjadi pertukaran energi atau partikel.
- iii) Karena satu assembli bisa memiliki sejumlah besar konfigurasi yang mungkin maka jumlah assembli yang menyusun sebuah *super assembli* harus sedemikian rupa sehingga semua konfigurasi yang mungkin dimiliki sebuah assembli memiliki

assembli representatif di dalam *super assembli* tersebut. Sebagai contoh jika jumlah partikel dalam sebuah assembli ada 100 buah. Jika dianggap jumlah konfigurasi penyusunan partikel dalam assembli tersebut ada 100 000 macam konfigurasi maka jumlah assembli yang menyusun *super assembli* ada 100 000 buah sehingga setiap konfigurasi assembli memiliki assembli wakil dalam *super assembli*.

Super assembli dengan sifat di atas dinamakan **ensembel**. Secara skematik, ensembel dapat diilustrasikan pada Gbr 13.1.

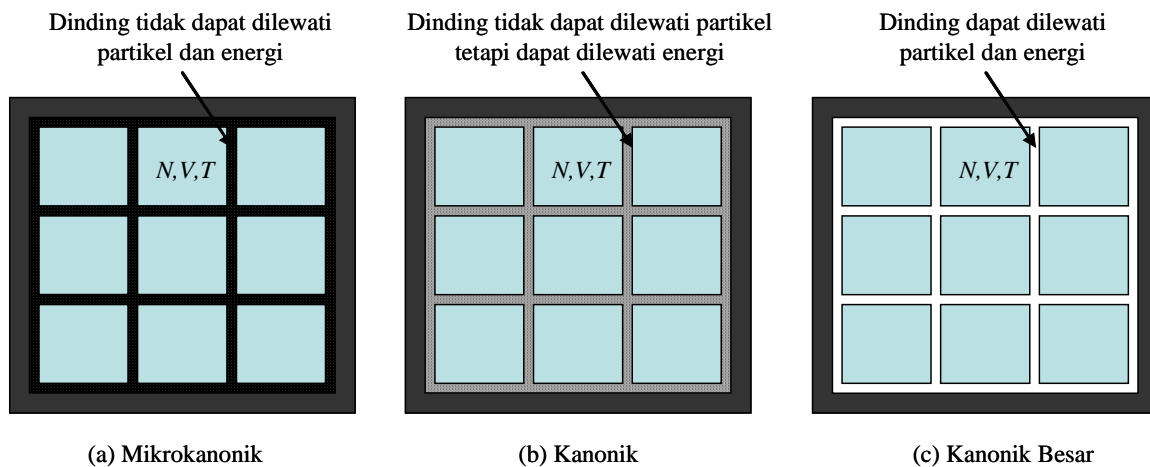
13.2 Jenis Ensembel

Assembli yang sudah kita bahas pada bab-bab terdahulu dapat juga dipandang sebagai sebuah ensembel. Kita bagi assembli tersebut atas assembli-assembli yang lebih kecil sehingga assembli besar dapat dipandang sebagai sebuah ensembel. Tetapi ensembel yang dibentuk memiliki sifat yang lebih terbatas lagi. Karena tidak ada fluktuasi energi maka tidak ada pertukaran energi antar assembli-assembli kecil yang dibuat. Juga tidak ada pertukaran partikel antar assembli. Ensembel dengan sifat yang sangat terbatas tersebut dinamakan *ensembel mikrokkanonik*.

Jika batasan untuk ensembel kita perlonggar sehingga diijinkan untuk terjadinya pertukaran energi antar assembli yang membangun ensembel tetapi tidak diijinkan terjadinya pertukaran partikel antar assembli maka ensembel tersebut dinamakan *ensembel kanonik*. Jika pembatasan ensemble diperlonggar lagi sehingga di samping pertukaran energi antar assembli juga diijinkan pertukaran partikel antar assembli maka ensembel yang kita bangun dinamakan ensembel *kanonik besar* (grand canonic).

Pada ensembel mikronanonik kita dapat memandang tiap assembli elemen

ensemble tersebut disekat oleh dinding isolator. Dinding tersebut tidak dapat ditembus oleh energi atau maupun partikel. Pada ensemble kanonik, kita dapat memandang tiap assembly disekat oleh dinding konduktif panas seperti logam sehingga energi dapat menembus dinding tersebut tetapi partikel tidak dapat melewatinya. Dan pada ensemble kanonik besar kita dapat menganggap antar assembly-assembly disekat oleh dinding permeable, yaitu dinding yang dapat dilewati energi maupun partikel. Ilustrasi ke tiga ensemble tersebut tampak ada Gbr 13.2



Gambar 13.2 (a) Assebli-assebli dalam ensemble mikrokkanonik dibatasi oleh dinding isolator, (b) assebli-assebli dalam ensemble kanonik dibatasi oleh dinding konduktif panas, dan (b) assebli-assebli dalam ensemble kanonik bear dibatasi oleh dinding permeabel

Setelah mendefinisikan ensemble, mari pada bab ini kita bahas ensemble jenis kedua yaitu ensemble kanonik. Ensemble mikrokkanonik tidak perlu dibahas lagi karena semua bab sebelumnya pada dasarnya membahas ensemble mikrokkanonik.

12.3 Probabilitas

Tinjau assembli ke- i yang merupakan salah satu elemen dari ensemble kanonik yang akan kita bahas. Misalkan energi assembli tersebut adalah E_i . Probabilitas kemunculan assembli tersebut dapat ditulis

$$p_i \propto e^{-E_i / kT} \quad \text{atau} \quad p_i = C e^{-E_i / kT} \quad (13.2)$$

dengan C adalah konstanta normalisasi yang bergantung pada suhu. Karena harus terpenuhi $\sum_i p_i = 1$ maka

$$\sum_i C e^{-E_i / kT} = C \sum_i e^{-E_i / kT} = 1$$

yang memberikan bentuk ungkapan untuk C sebagai berikut

$$C = \frac{1}{\sum_i e^{-E_i / kT}} = \frac{1}{Z} \quad (13.3)$$

Berdasarkan persamaan (13.2) dan (13.3) kita dapatkan ungkapan lengkap untuk p_i sebagai berikut

$$p_i = \frac{e^{-E_i / kT}}{Z} \quad (13.4)$$

13.4 Sifat-Sifat Termodinamika

Berikutnya mari kita bahas besaran-besaran termodinamika dari sudut pandang ensemble kanonik. Pertama kita menghitung energi yang dimiliki assemblasi dalam ensemble tersebut. Energi rata-rata assemblasi memenuhi

$$\begin{aligned}
 E &= \sum_i E_i p_i \\
 &= \frac{1}{Z} \sum_i E_i e^{-E_i/kT} = \frac{1}{Z} \sum_i E_i e^{\beta E_i} = \frac{1}{Z} \sum_i \frac{\partial}{\partial \beta} e^{\beta E_i} \\
 &= \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_i e^{\beta E_i} = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} Z \\
 &= \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z
 \end{aligned} \tag{13.5}$$

Karena $\beta = -1/kT$ maka $T = -1/k\beta$ sehingga

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{1}{k\beta^2} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{1}{k(-1/kT)^2} \frac{\partial}{\partial T} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \tag{13.6}$$

Dengan demikian energi assemblasi pada persamaan (13.5) dapat ditulis menjadi

$$E = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z \tag{13.7}$$

13.5 Energi Bebas Helmholtz

Telah kita definisikan pada bab terdahulu bahwa energi bebas Helmholtz memenuhi $F = E - TS$. Dengan melakukan diferensial pada dua ruas kita dapatkan

$$dF = dE - TdS - SdT \tag{13.8}$$

Mari kita melihat hukum I termodinamika, yang juga merupakan hukum kekekalan energi,

$$\begin{aligned}dE &= dQ + dW \\ &= dQ - pdV\end{aligned}\tag{13.9}$$

Di sini kita mendefinisikan $dW = -pdV$. Untuk proses yang reversibel maka berlaku

$$dQ = TdS\tag{13.10}$$

Substitusi (13.10) ke dalam (13.9) diperoleh

$$dE = TdS - pdV\tag{13.11}$$

Selanjutnya kita substitusi persamaan (13.11) ke dalam persamaan (13.9) sehingga diperoleh bentuk diferensial dari energi bebas sebagai berikut

$$\begin{aligned}dF &= (TdS - pdV) - TdS - SdT \\ &= -pdV - SdT\end{aligned}\tag{13.12}$$

Jika F dinyatakan dalam fungsi V dan T maka diferensial dari F memenuhi bentuk umum

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T dV + \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V dT \quad (13.13)$$

Apabila kita bandingkan bentuk persamaan (13.12) dan (13.13) maka kita simpulkan

$$-p = \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad (13.14)$$

$$-S = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad (13.15)$$

Substitusi S dari persamaan (13.15) ke dalam ungkapan energi Helmholtz $F = E - TS$ maka kita dapat menulis

$$\begin{aligned} F &= E + T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) \\ -\frac{E}{T^2} &= -\frac{F}{T^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) \\ -\frac{E}{T^2} &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) \end{aligned} \quad (13.16)$$

Masukkan ungkapan E dari persamaan (13.7) ke dalam persamaan (13.16) didapat

$$-k \frac{\partial}{\partial T} \ln Z = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right)$$

yang akhirnya memberikan ungkapan sederhana untuk energi bebas Helmholtz berupa

$$F = -kT \ln Z \quad (13.17)$$

Dari persamaan (13.15) dan (13.17) kita dapat menulis bentuk ungkapan untuk entropy

sebagai

$$\begin{aligned}
 S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \\
 &= k \ln Z + kT \frac{\partial}{\partial T} \ln Z
 \end{aligned} \tag{13.18}$$

13.6 Ungkapan lain untuk entropi

Dari ungkapan energi bebas Helmholtz $F = E - TS$ kita dapat menulis

$$S = \frac{E - F}{T} \tag{13.19}$$

Kita selanjutnya menggunakan definisi awal untuk energi, yaitu $E = \sum_i p_i E_i$.

Mengingat F adalah besaran tanpa indeks dan mengingat kesamaan $\sum_i p_i = 1$ maka

kita dapat menulis

$$F = F \sum_i p_i = \sum_i p_i F \tag{13.20}$$

Substitusi $E = \sum_i p_i E_i$ dan persamaan (13.20) ke dalam persamaan (13.19) diperoleh

$$S = \frac{\sum_i p_i E_i - \sum_i p_i F}{T} = \frac{\sum_i p_i (E_i - F)}{T} = \sum_i p_i \frac{(E_i - F)}{T} \tag{13.21}$$

Dari persamaan (13.7) kita dapat menulis

$$Z = e^{-F/kT} \quad (13.22)$$

Substitusi persamaan (13.22) ke dalam persamaan (13.4) kita peroleh

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{e^{-E_i/kT}}{e^{-F/kT}} \\ &= e^{(F-E_i)/kT} \end{aligned}$$

atau

$$\ln p_i = -\frac{E_i - F}{kT} \quad (13.23)$$

Substitusi persamaan (13.23) ke dalam persamaan (13.21) diperoleh ungkapan lain untuk entropi, yaitu

$$\begin{aligned} S &= \sum_i p_i (-k \ln p_i) \\ &= -k \sum_i p_i \ln p_i \end{aligned} \quad (13.24)$$

13.7 Fungsi Partisi Total

Sekarang kita menghitung fungsi partisi total. Untuk maksud tersebut kita tinjau sebuah assembli, sebut saja assembli ke- i , yang merupakan komponen dari ensembel kanonik. Misalkan jumlah partikel dalam assembli tersebut adalah N dan partikel-partikel penyusun assembli dapat dibedakan (partikel klasik). Jumlah partikel

dalam assembli tersebut memenuhi

$$N = \sum_s n_s \quad (13.25)$$

dan energi yang dimiliki assembli adalah

$$E_i = \sum_s n_s E_s \quad (13.26)$$

Untuk assembli kanonik, N selalu tetap tetapi E_i tidak selalu tetap. Jumlah cara penyusunan partikel-partikel dalam assembli tersebut adalah

$$W_i = N! \prod_s \frac{g_s^{n_s}}{n_s!}$$

sehingga fungsi partisi menjadi

$$Z = \sum_i W_i e^{-E_i / kT} \quad (13.27)$$

di mana indeks i bergerak pada semua konfigurasi yang bisa dimiliki assembli.

Penjumlahan terhadap semua konfigurasi yang mungkin ekivalen dengan penjumlahan pada semua kombinasi n_s yang mungkin yang kita nyatakan dengan symbol $\{n_s\}$. Jadi kita dapat menulis

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\{n_s\}} W_{\{n_s\}} e^{-E_{\{n_s\}} / kT} \\
&= \sum_{\{n_s\}} \left\{ N! \prod_s \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \right\} \exp \left[- \frac{\sum_s n_s E_s}{kT} \right] \\
&= \sum_{\{n_s\}} \left\{ N! \prod_s \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \right\} \left\{ \prod_s \exp \left[- \frac{n_s E_s}{kT} \right] \right\} \\
&= \sum_{\{n_s\}} \left\{ N! \prod_s \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \right\} \left\{ \prod_s \left[e^{-E_s / kT} \right]^{n_s} \right\} \\
&= \sum_{\{n_s\}} \left\{ N! \prod_s \frac{\left(g_s e^{-E_s / kT} \right)^{n_s}}{n_s!} \right\} \tag{13.28}
\end{aligned}$$

Untuk mencari hasil penjumlahan pada persamaan (13.28), mari kita tinjau kasus berikut ini

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2)^2 &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2x_2^0 + 2x_1^1x_2^1 + x_1^0x_2^2 \\
&= \frac{2!}{2!0!} x_1^2x_2^0 + \frac{2!}{(2-1)!1!} x_1^{2-1}x_2^1 + \frac{2!}{(2-2)!2!} x_1^{2-2}x_2^2 \\
\\
(x_1 + x_2)^3 &= x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = x_1^3x_2^0 + 3x_1^2x_2^1 + 3x_1^1x_2^2 + x_1^0x_2^3 \\
&= \frac{3!}{3!0!} x_1^3x_2^0 + \frac{3!}{(3-1)!1!} x_1^{3-1}x_2^1 + \frac{3!}{(3-2)!2!} x_1^{3-2}x_2^2 + \frac{3!}{(3-3)!3!} x_1^{3-3}x_2^3
\end{aligned}$$

Dengan melihat pola di atas maka secara umum dapat kita tulis

$$(x_1 + x_2)^N = \frac{N!}{N!0!} x_1^N x_2^0 + \frac{N!}{(N-1)!1!} x_1^{N-1} x_2^1 + \dots + \frac{N!}{(N-n)!n!} x_1^{3-n} x_2^n + \dots$$

$$= \sum_n \frac{N!}{(N-n)!n!} x_1^{3-n} x_2^n \quad (13.29)$$

Dengan cara serupa pun akan kita dapatkan bentuk penjumlahan yang sama untuk penjumlahan tiga variable, yaitu

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)^N &= \sum_{n_1+n_2+n_3=N} \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \\ &= N! \sum_{\{n_s\}} \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \frac{x_2^{n_2}}{n_2!} \frac{x_3^{n_3}}{n_3!} \end{aligned} \quad (13.30)$$

Dan hasil ini bisa diperumum lagi untuk penjumlahan banyak suku, yaitu

$$\begin{aligned} \left(\sum_s x_s \right)^N &= N! \sum_{\{n_s\}} \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \frac{x_2^{n_2}}{n_2!} \frac{x_3^{n_3}}{n_3!} \dots \frac{x_s^{n_s}}{n_s!} \dots \\ &= N! \sum_{\{n_s\}} \prod_s \left(\frac{x_s^{n_s}}{n_s!} \right) \end{aligned} \quad (13.31)$$

Dengan membandingkan persamaan (13.28) dengan persamaan (13.31) maka kita simpulkan bahwa pada persamaan (13.31), x_s tidak lain daripada $g_s e^{-E_s / kT}$. Dengan kesamaan ini maka kita simpulkan bahwa fungsi partisi pada persamaan (13.28) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} Z &= \left(\sum_s g_s e^{-E_s / kT} \right)^N \\ &= Z^N \end{aligned} \quad (13.32)$$

Untuk sistem semiklasik di mana partikel dianggap tidak dapat dibedakan maka jumlah cara penyusunan partikel-partikel adalah

$$W_i = \prod_s \frac{g_s^{n_s}}{n_s!}$$

Dengan melakukan langkah yang sama maka kita sampai pada kesimpulan bentuk fungsi partisi system semiklasik adalah

$$Z_{tot} = \frac{Z^N}{N!} \quad (13.33)$$

13.8 Penerapan ensemble kanonik untuk gas tidak ideal

Hingga saat ini gas yang kita bahas adalah gas ideal. Tidak ada interaksi antar partikel gas. Dengan menggunakan konsep ensemble kanonik, kita diperbolehkan untuk memperkenalkan interaksi antar partikel gas dalam assembly. Misalkan energi yang dimiliki partikel gas hanya energi kinetik maka fungsi partisi hanya mengandung energi tersebut. Namun jika ada interaksi antar partikel gas maka fungsi partisi dibangun dari energi total berikut ini

$$E = \frac{1}{2m} \sum_j (p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2) + \sum_j \sum_{\ell > j} U_{j\ell} \quad (13.34)$$

Pada penjumlahan $U_{j\ell}$ kita mensyaratkan $\ell > j$ untuk menghindari perhitungan ganda. Suku dengan $\ell = j$ juga tidak disertakan karena tidak ada interaksi antara

partikel dengan dirinya sendiri.

Kita akan menghitung fungsi partisi dengan metode integral. Untuk maksud tersebut kita harus menggunakan kerapatan keadaan untuk mengganti tanda penjumlahan menjadi tanda integral. Untuk system semi kuantum, kerapatan keadaan adalah $d\Gamma_{6N}/h^{3N}$ dengan $d\Gamma_{6N} = \prod_j dx_j dy_j dz_j dp_{xj} dp_{yj} dp_{zj}$. Fungsi partisi menjadi

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}} \int \exp \left[- \frac{\sum_j (p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2)/2m + \sum_j \sum_{\ell > j} U_{j\ell}}{kT} \right] \prod_j dx_j dy_j dz_j dp_{xj} dp_{yj} dp_{zj} \quad (13.35)$$

Mari kita fokuskan pada bagian integral persamaan (13.35)

$$\begin{aligned} & \int \exp \left[- \frac{\sum_j (p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2)/2m + \sum_j \sum_{\ell > j} U_{j\ell}}{kT} \right] \prod_j dx_j dy_j dz_j dp_{xj} dp_{yj} dp_{zj} \\ &= \int \exp \left[- \frac{\sum_j (p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2)}{2mkT} \right] \prod_j dp_{xj} dp_{yj} dp_{zj} \int \exp \left[- \frac{\sum_j \sum_{\ell > j} U_{j\ell}}{kT} \right] \prod_j dx_j dy_j dz_j \\ &= I_N \int \exp \left[- \frac{\sum_j p_{xj}^2}{2mkT} \right] \exp \left[- \frac{\sum_j p_{yj}^2}{2mkT} \right] \exp \left[- \frac{\sum_j p_{zj}^2}{2mkT} \right] \prod_j dp_{xj} dp_{yj} dp_{zj} \quad (13.36) \end{aligned}$$

di mana kita telah mendefinisikan

$$I_N = \int \exp \left[- \frac{\sum_j \sum_{\ell > j} U_{j\ell}}{kT} \right] \prod_j dx_j dy_j dz_j \quad (13.37)$$

Persamaan (13.36) dapat ditulis secara lebih sederhana dalam bentuk perkalian berikut ini

$$\begin{aligned} I_N &= \int \prod_j \exp \left[- \frac{p_{xj}^2}{2mkT} \right] \prod_j \exp \left[- \frac{p_{yj}^2}{2mkT} \right] \prod_j \exp \left[- \frac{p_{zj}^2}{2mkT} \right] \prod_j dp_{xj} dp_{yj} dp_{zj} \\ &= I_N \int \prod_j \exp \left[- \frac{p_{xj}^2}{2mkT} \right] dp_{xj} \int \prod_j \exp \left[- \frac{p_{yj}^2}{2mkT} \right] dp_{yj} \int \prod_j \exp \left[- \frac{p_{zj}^2}{2mkT} \right] dp_{zj} \\ &= I_N \prod_j \left(\int e^{-p_{xj}^2 / 2mkT} dp_{xj} \right) \prod_j \left(\int e^{-p_{yj}^2 / 2mkT} dp_{yj} \right) \prod_j \left(\int e^{-p_{zj}^2 / 2mkT} dp_{zj} \right) \end{aligned} \quad (13.38)$$

Dengan menggunakan hasil yang sudah kita pelajari sebelumnya yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\pi / \lambda} \quad \text{maka kita dapat menulis}$$

$$e^{-p_{xj}^2 / 2mkT} dp_{xj} = \int e^{-p_{yj}^2 / 2mkT} dp_{yj} = \int e^{-p_{zj}^2 / 2mkT} dp_{zj} = \sqrt{2\pi mkT} \quad (13.39)$$

Karena ada N buah perkalian dalam tanda \prod_j maka persamaan (13.38) memberikan

hasil sebagai berikut

$$I_N \prod_j (\sqrt{2\pi mkT}) \prod_j (\sqrt{2\pi mkT}) \prod_j (\sqrt{2\pi mkT})$$

$$\begin{aligned}
&= I_N \left(\sqrt{2\pi mkT} \right)^{N/2} \left(\sqrt{2\pi mkT} \right)^{N/2} \left(\sqrt{2\pi mkT} \right)^{N/2} \\
&= \left(\sqrt{2\pi mkT} \right)^{3N/2} I_N
\end{aligned} \tag{13.40}$$

Substitusi persamaan (13.40) ke dalam persamaan (13.35) didapatkan ungkapan untuk fungsi partisi menjadi

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \left(\sqrt{2\pi mkT} \right)^{3N/2} I_N \tag{13.41}$$

Untuk mencari I_N mari kita lakukan prosedur berikut ini. Kita tulis

$$e^{-U_{j\ell}/kT} = 1 + f(r_{j\ell}) \tag{13.42}$$

Dengan penulisan tersebut maka

$$\begin{aligned}
e^{-\sum_j \sum_{\ell > j} U_{j\ell}/kT} &= \prod_j \prod_{\ell > j} e^{-U_{j\ell}/kT} \\
&= \prod_j \prod_{\ell > j} [1 + f(r_{j\ell})]
\end{aligned} \tag{13.43}$$

Jika terpenuhi kondisi $|f(r_{j\ell})| \ll 1$ maka kita dapat melakukan aproksimasi

$$\prod_j \prod_{\ell > j} [1 + f(r_{j\ell})] \approx 1 + \sum_j \sum_{\ell > j} f(r_{j\ell}) \tag{13.44}$$

Dengan melakukan substitusi persamaan (13.43) dan (13.44) ke dalam persamaan

(13.37) kita dapatkan bentuk aproksimasi untuk I_N sebagai berikut

$$\begin{aligned}
I_N &\approx \int \left\{ 1 + \sum_j \sum_{\ell > j} f(r_{j\ell}) \right\} \prod_j dx_j dy_j dz_j \\
&= \int \prod_j dx_j dy_j dz_j + \int \sum_j \sum_{\ell > j} f(r_{j\ell}) \prod_j dx_j dy_j dz_j \\
&= \prod_j \int dx_j dy_j dz_j + \sum_j \sum_{\ell > j} \int f(r_{j\ell}) \prod_j dx_j dy_j dz_j
\end{aligned} \tag{13.45}$$

Mengingat integral $\int dx_j dy_j dz_j = V$ dan \prod_j mengandung N buah suku perkalian

maka persamaan (13.45) memberikan hasil

$$I_N = V^N + \sum_j \sum_{\ell > j} \int f(r_{j\ell}) \prod_j dx_j dy_j dz_j \tag{13.46}$$

jarak antar partikel memenuhi $r_{j\ell} = \sqrt{(x_\ell - x_j)^2 + (y_\ell - y_j)^2 + (z_\ell - z_j)^2}$.

Dengan demikian, $f(r_{j\ell})$ hanya mengandung enam variable, yaitu x_ℓ , y_ℓ , z_ℓ , x_j , y_j , dan z_j . Oleh karena itu, dalam perkalian elemen diferensial $\prod_j dx_j dy_j dz_j$, hanya

enam elemen diferensial saja yang bekerja pada $f(r_{j\ell})$ sedangkan sebanyak $3N - 6$

buah elemen lainnya tidak bekerja pada $f(r_{j\ell})$. Dengan sifat demikian kita dapat

menulis

$$\begin{aligned}
I_N &= V^N + \sum_j \sum_{\ell > j} \int \prod_{\substack{k \neq j \\ k \neq \ell}} dx_k dy_k dz_k \int f(r_{j\ell}) dx_j dy_j dz_j dx_\ell dy_\ell dz_\ell \\
&= V^N + \sum_j \sum_{\ell > j} V^{N-2} \int f(r_{j\ell}) dx_j dy_j dz_j dx_\ell dy_\ell dz_\ell
\end{aligned}$$

$$= V^N + V^{N-2} \sum_j \sum_{\ell > j} \int f(r_{j\ell}) dx_j dy_j dz_j dx_\ell dy_\ell dz_\ell \quad (13.47)$$

Ingat, setelah kita melakukan integral maka $\int f(r_{j\ell}) dx_j dy_j dz_j dx_\ell dy_\ell dz_\ell$ tidak lagi mengandung indeks j maupun ℓ karena variable tersebut habis diintegral. Akibatnya, penjumlahan pada ruas kanan menjadi penjumlahan dari suku-suku yang nilainya sama, di mana nilai masing-masing suku tersebut adalah $\int f(r_{j\ell}) dx_j dy_j dz_j dx_\ell dy_\ell dz_\ell$. Hasil dari penjumlahan tersebut sama dengan nilai suku kali banyak suku penjumlahan. Banyaknya suku penjumlahan adalah $N(N-1)/2$. Dengan demikian kita dapat menulis

$$I_N = V^N + V^{N-2} \frac{N(N-1)}{2} \int f(r_{j\ell}) dx_j dy_j dz_j dx_\ell dy_\ell dz_\ell \quad (13.48)$$

Untuk menyelesaikan integral dalam persamaan (13.48), kita perkenalkan variabel relatif $r = r_{j\ell}$. Dengan memperkenalkan variabel relatif ini maka kita dapat melakukan transformasi berikut ini

$$\begin{aligned} \int f(r_{j\ell}) dx_j dy_j dz_j dx_\ell dy_\ell dz_\ell &= \int f(r) d^3\vec{r} dx_\ell dy_\ell dz_\ell \\ &= \int dx_\ell dy_\ell dz_\ell \int f(r) d^3\vec{r} = V \int f(r) d^3\vec{r} \\ &= aV \end{aligned} \quad (13.49)$$

di mana $d^3\vec{r}$ adalah elemen volum dalam ruang relatif dan $a = \int f(r) d^3\vec{r}$. Akhirnya kita dapatkan

$$\begin{aligned}
I_N &= V^N + V^{N-2} \frac{N(N-1)}{2} aV \\
&= V^N + \frac{N(N-1)a}{2} V^{N-1}
\end{aligned} \tag{13.50}$$

Misalnya energi interaksi antar partikel sangat kecil sehingga berlaku $|U_{j\ell}/kT| \ll 1$. Dengan asumsi ini maka kita dapat menulis

$$e^{-U_{j\ell}/kT} \approx 1 - \frac{U_{j\ell}}{kT} \tag{13.51}$$

Dengan membandingkan persamaan (13.42) dan aproksimasi (13.51) kita simpulkan

$$f(r_{j\ell}) = -U_{j\ell}/kT \tag{13.52}$$

sehingga

$$a = \int [-U(r)/kT] d^3\vec{r} = (1/kT) \int -U(r) d^3\vec{r} = a'/kT. \tag{13.53}$$

Substitusi persamaan (13.53) ke dalam persamaan (13.50) diperoleh

$$I_N = V^N + \frac{N(N-1)a'}{2kT} V^{N-1} \tag{15.54}$$

Dengan menggunakan persamaan (13.41) dan persamaan (13.54) maka energi bebas Helmholtz dapat ditulis

$$\begin{aligned}
F &= -kT \ln Z \\
&= -kT \left\{ \ln \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{N! h^{3N}} + \ln I_N \right\} \quad (13.55)
\end{aligned}$$

13.9 Persamaan Keadaan

Untuk gas ideal kita sudah memiliki persamaan keadaan yang sederhana, yaitu $pV = NkT$. Sekarang kita ingin mencari persamaan keadaan untuk gas yang tidak ideal yang dibahas di atas. Kita mulai dengan menentukan tekanan gas dengan memasukkan F pada persamaan (13.55) ke dalam persamaan (13.14). Dari ungkapan energi bebas hanya I_N yang mengandung besaran volum. Oleh karena itu kita dapat menulis

$$\begin{aligned}
p &= - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \\
&= kT \left(\frac{\partial}{\partial V} \ln I_N \right)_T \\
&= kT \frac{1}{I_N} \left(\frac{\partial I_N}{\partial V} \right)_T \\
&= kT \left(\frac{NV^{N-1} + N(N-1)^2 V^{N-2} a' / 2kT}{V^N + N(N-1)V^{N-1} a' / 2kT} \right) \\
&= \frac{NkT}{V} \left(\frac{V^{N-1} + (N-1)^2 V^{N-2} a' / 2kT}{V^{N-1} + N(N-1)V^{N-2} a' / 2kT} \right) \\
&= \frac{NkT}{V} \left(\frac{1 + (N-1)^2 a' / 2kTV}{1 + N(N-1)a' / 2kTV} \right) \\
&\approx \frac{NkT}{V} \left(1 + (N-1)^2 a' / 2kTV \right) \left(1 - N(N-1)a' / 2kTV \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{NkT}{V} \left(1 + (N-1)^2 a' / 2kTV - N(N-1)a' / 2kTV \right) \\
&\approx \frac{NkT}{V} \left(1 - \frac{(N-1)a'}{2kTV} \right) = \frac{NkT}{V} - \frac{N(N-1)a'}{2V^2} \\
&= \frac{NkT}{V} - \frac{a''}{V^2}
\end{aligned} \tag{13.56}$$

Persamaan (13.56) dapat direorganisasi menjadi

$$\begin{aligned}
\left(p + \frac{a''}{V^2} \right) &= \frac{NkT}{V} \\
\left(p + \frac{a''}{V^2} \right) V &= NkT
\end{aligned} \tag{13.57}$$

Persamaan (13.57) sangat mirip dengan persamaan van der Waals. Persamaan van der Waals yang lengkap dapat diperoleh dengan melakukan koreksi pada volum yaitu mengurangi volum total dengan jumlah volum yang dimiliki molekul-molekul gas. Misalkan volum total semua molekul gas adalah b . Persamaan van der Waals dapat diperoleh dengan mengganti V dengan $V - b$ yaitu

$$\left(p + \frac{a''}{(V-b)^2} \right) (V-b) = NkT \tag{13.58}$$

Dengan menganggap bahwa b sangat kecil dibandingkan dengan V maka kita dapat mengabaikan b terhadap b pada penyebut persamaan (13.58). Sedangkan pada pembilang, b kita pertahankan karena walaupun nilainya lebih kecil dari b tetapi tetap memberi perubahan nilai yang signifikan pada persamaan. Dengan demikian kita diperoleh

$$\left(p + \frac{a''}{V^2}\right)(V - b) = NkT \quad (13.59)$$

Persamaan (13.59) merupakan persamaan van der Waals yang selama ini kita kenal.

13.10 Fluktuasi Energi

Seperti sudah kita singgung sebelumnya, karena ensemble kanonik memungkinkan pertukaran energi antar assembly penyusunnya, maka dapat terjadi fluktuasi energi yang dimiliki oleh masing-masing assembly. Di sini kita turunkan fluktuasi energi assembly dalam ensemble kanonik.

Fluktuasi energi assembly ke- i terhadap energi rata-ratanya dapat dituliskan

$$\delta E = E_i - E \quad (13.60)$$

Kita kuadratkan dua ruas persamaan (13.60) dan diperoleh

$$\delta E^2 = (E_i - E)^2 = E_i^2 - 2E_i E + E^2 \quad (13.61)$$

Kita selanjutnya melakukan perata-rataan ke dua ruas persamaan (13.61), yaitu

$$\begin{aligned} \overline{\delta E^2} &= \overline{E_i^2 - 2E_i E + E^2} = \overline{E_i^2} - 2\overline{E_i E} + \overline{E^2} = \overline{E_i^2} - 2\overline{E}E + E^2 \\ &= \overline{E_i^2} - E^2 \end{aligned} \quad (13.62)$$

Dalam mencari persamaan (13.62) kita telah menggunakan kesamaan $\overline{E_i} = E$ dan mengingat E konstan maka $\overline{E^2} = E^2$.

Sebelumnya kita sudah mendapatkan hubungan antara energi dan fungsi partisi, yaitu

$$E = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \quad (13.63)$$

Sekarang kita akan mencari ungkapan untuk $\overline{E_i^2}$.

$$\begin{aligned} \overline{E_i^2} &= \sum_i E_i^2 p_i = \sum_i E_i^2 \frac{1}{Z} e^{-E_i / kT} = \frac{1}{Z} \sum_i E_i^2 e^{-E_i / kT} = \frac{1}{Z} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} e^{-E_i / kT} \\ &= \frac{1}{Z} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \sum_i e^{-E_i / kT} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \end{aligned} \quad (13.64)$$

Substitusi (13.63) dan (13.64) ke dalam persamaan (13.62) diperoleh

$$\overline{\delta E^2} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 \quad (13.65)$$

Jika kita diferensialkan E pada persamaan (13.63) terhadap β kita dapatkan

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 \quad (13.66)$$

Dengan membandingkan persamaan (13.55) dan (13.66) kita simpulkan

$$\begin{aligned}\overline{\delta E^2} &= \frac{\partial E}{\partial \beta} = kT^2 \frac{\partial E}{\partial T} \\ &= kT^2 C_v\end{aligned}\tag{13.67}$$

Tampak dari persamaan (13.67) bahwa besarnya fluktuasi energi bergantung pada kapasitas kalor yang dimiliki assembli. Makin besar kapasitas kalor maka makin besar fluktuasi energi yang terjadi. Fluktuasi energi juga naik secara kuadratik terhadap suhu.

Bab 14 Soal dan Penyelesaian

Statistik Maxwell-Boltzmann

1. Soal :

- a. Jelaskan perbedaan antara statistik Maxwell-Boltzmann dengan statistik lainnya. Bagaimana hubungan statistik-statistik tersebut dengan keterbedaan dari partikel-partikel identik?
- b. Jelaskan mengapa perbedaan antara tipe-tipe statistik tersebut menjadi tak penting pada suhu tinggi. Seberapa tinggikah yang dikategorikan suhu tinggi tersebut?.

Solusi :

- a. Statistik Maxwell-Boltzmann berlaku untuk sistem terlokalisasi, partikel-partikel saling terbedakan dan jumlah partikel yang dapat mengisi satu keadaan tidak dibatasi. Jumlah rata-rata partikel yang mengisi tingkat energi ε_l memenuhi bentuk umum

$$a_l = w_l \exp(-\alpha - \beta \varepsilon_l)$$

dengan w_l adalah degenerasi dari tingkat energi ke- l .

Statistik Fermi-Dirac berlaku untuk sistem yang terdiri atas fermion, partikel-partikel tak dapat terbedakan dan memenuhi prinsip larangan Pauli. Satu keadaan hanya dapat diisi maksimal dua partikel dengan arah spin berlawanan. Jumlah rata-rata partikel yang mengisi tingkat energi ε_l adalah

$$a_l = \frac{w_l}{e^{(\alpha + \beta \varepsilon_l)} + 1}$$

Statistik Bose-Einstein berlaku untuk sistem yang terdiri atas boson, partikel-partikel tak dapat terbedakan. Satu keadaan kuantum dapat diisi oleh partikel dalam jumlah berapa pun. Jumlah rata-rata partikel yang mengisi tingkat energi ε_l adalah

$$a_l = \frac{w_l}{e^{(\alpha + \beta \epsilon_l)} - 1}$$

- b. Dari jawaban sebelumnya, pada $e^\alpha \gg 1$, atau $e^{-\alpha} \ll 1$, fungsi statistik Bose-Einstein dan Fermi-Dirac menjadi

$$\frac{w_l}{e^{(\alpha + \beta \epsilon_l)} \pm 1} \approx \frac{w_l}{e^{(\alpha + \beta \epsilon_l)}} = w_l e^{-(\alpha + \beta \epsilon_l)}$$

Dengan demikian pada kondisi tersebut ke tiga tipe statistik tersebut menjadi sama.

Mengingat $e^{-\alpha} = n \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2}$, dengan n adalah kerapatan partikel maka kondisi di

di atas terpenuhi pada $T \gg \frac{n^{1/2} h^2}{2\pi m k}$. Dengan demikian, perbedaan antara ketiga tipe statistik tersebut menjadi tak penting pada limit temperatur tinggi di atas.

2. Soal :

Jelaskan mengapa, statistik Maxwell-Boltzmann tepat digunakan untuk kedua sistem di bawah ini :

- Gas He⁴ dalam suhu ruang dan tekanan standar (STP)
- Elektron dan hole semikonduktor Ge pada STP (band-gap ≈ 1 eV)

Solusi :

- Gas He⁴ termasuk boson sehingga memenuhi statistik Bose-Einstein. Namun pada keadaan STP kita dapat mempergunakan statistik Maxwell-Boltzmann karena terpenuhi $e^{-\alpha} \ll 1$. Mari kita cek

$$e^{-\alpha} = n \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{1/2}$$

Kita menggunakan persamaan gas ideal $pV = NkT$, atau $n = N/V = p/kT$. Dengan demikian

$$e^{-\alpha} = n \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{1/2} = \frac{p}{kT} \left(\frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{1/2}$$

Pada STP maka $T \approx 300$ K, $P = 1$ atm $\approx 10^5$ Pa. Dengan memasukkan nilai tersebut dan massa atom helium maka diperoleh $e^{-\alpha} \approx 3 \times 10^{-6} \ll 1$

b. Elektron dan hole adalah fermion sehingga memenuhi fungsi distribusi Fermi-Dirac $1/[e^{(\varepsilon-\mu)/kT} + 1]$. Dalam semikonduktor, parameter μ disebut tingkat energi fermi. Untuk kebanyakan semikonduktor, lebar celah pita energi di atas 1 eV dan lokasi energi Fermi sekitar tengah-tengah celah pita energi. Dengan demikian $(\varepsilon - \mu) \approx 0,5$ eV. Pada STP nilai energi termal $kT \approx 0,025$ eV. Dengan demikian $(\varepsilon - \mu)/kT \approx 0,5/0,025 = 20$ sehingga $e^{(\varepsilon-\mu)/kT} \gg 1$ atau fungsi distribusi Fermi-Dirac untuk elektron dan hole dalam semikonduktor dapat diaprokasiasi dengan $1/e^{(\varepsilon-\mu)/kT} = e^{(\mu-\varepsilon)/kT}$ yang merupakan fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann.

3. Soal :

Tunjukkan bahwa $\lambda = \exp(\mu/kT) = nV_Q$ untuk gas ideal adalah valid untuk $\lambda \ll 1$; μ adalah potensial kimia, n adalah densitas gas, dan $V_Q = (h^2/2\pi m k T)^{3/2}$ adalah volum kuantum.

Solusi :

Dengan pendekatan $\lambda \ll 1$, statistik Fermi-Dirac dan Bose-Einstein akan menjadi statistik Maxwell-Boltzmann :

$$\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} \pm 1} \rightarrow e^{\mu/kT} \cdot e^{-\varepsilon/kT}$$

Densitas keadaan dari sebuah gas ideal (dengan tidak menyertakan keadaan spin) adalah :

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$$

sehingga

$$n = \int_0^{\infty} D(\varepsilon) d\varepsilon \cdot e^{\mu/kT} \cdot e^{-\varepsilon/kT}$$

$$= \lambda \cdot \left(\frac{mkT}{2\pi h} \right)^{3/2} = \frac{\lambda}{V_Q}$$

Yang menunjukkan bahwa $\lambda = nV_Q$

4. Soal :

Sebuah bejana kubik dengan sisi 20 cm berisi gas diatomik H_2 pada temperatur 300 K. Setiap molekul H_2 terdiri atas dua atom hidrogen dengan massa masing-masing $1,66 \times 10^{-24}$ g, terpisah sejarak $\pm 10^{-8}$ cm. Gas tersebut diasumsikan bersifat seperti gas ideal. Abaikan derajat kebebasan vibrasi.

- Hitunglah kecepatan rata-rata dari molekul-molekul tersebut.
- Hitunglah kecepatan rotasi rata-rata dari molekul tersebut terhadap sebuah sumbu yang tegak lurus terhadap garis yang menghubungkan kedua buah atom (anggap setiap atom sebagai titik massa).
- Hitunglah kapasitas panas C_v dan C_p .

Solusi :

- Jumlah derajat kebebasan dalam sistem ini adalah 3. Maka

$$\frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} M \overline{v^2}$$

$$\text{sehingga } \overline{v} \approx \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{M}} \approx 2 \times 10^3 \text{ m/s}$$

- Jumlah derajat kebebasan rotasi adalah 2. Maka:

$$\frac{1}{2} I \overline{\omega^2} = \frac{2}{2} kT \text{ dengan } I = m \cdot \left(\frac{r}{2} \right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{2} mr^2 \text{ adalah momen inersia dari molekul}$$

H_2 , m adalah massa atom H, dan r adalah jarak antara kedua atom hidrogen tersebut.

$$\text{Maka diperoleh : } \overline{\omega} \approx \sqrt{\overline{\omega^2}} \approx 3,2 \times 10^{13} / s$$

- Kapasitas panas molar :

$$C_v = \frac{5}{2} R = 21 J / mol \cdot K$$

$$C_p = \frac{7}{2} R = 29 J / mol \cdot K$$

5. Soal :

Carilah rapat probabilitas $\rho(E)$ untuk energi E dari sebuah atom tunggal dalam gas monoatomik klasik tak-berinteraksi yang berada dalam kesetimbangan termal.

Solusi :

Ketika jumlah atom dari gas tersebut sangat besar, keadaan sistem dapat direpresentasikan dalam sebuah fungsi distribusi kontinu. Ketika sistem mencapai kesetimbangan termal, probabilitas sebuah atom memiliki energi E sebanding dengan $\exp(-E/kT)$, dimana $E = p^2/2m$, dengan p adalah momentum dari atom. Maka probabilitas dari atom berada pada \mathbf{p} dan $\mathbf{p}+d\mathbf{p}$ adalah :

$$A \exp(-p^2/2mkT) d^3 p$$

Dari

$$A \int \exp(-p^2/2mkT) d^3 p = 1$$

Diperoleh

$$A = (2\pi mkT)^{-3/2}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \int A \exp(-p^2/2mkT) d^3 p &= \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} \int_0^\infty E^{1/2} e^{-E/kT} dE \\ &\equiv \int_0^\infty \rho(E) dE \end{aligned}$$

Yang menghasilkan

$$\rho(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT}$$

6. Soal :

Misalkan energi dari sebuah partikel dapat direpresentasikan dalam bentuk $E(z) = az^2$ dengan z adalah kordinat, atau momentum, dan dapat memiliki nilai dari $-\infty$ sampai ∞ .

- Tunjukkanlah bahwa energi rata-rata tiap partikel untuk sistem di atas yang memenuhi statistik Boltzmann adalah $\overline{E} = kT / 2$
- Sebutkan prinsip ekipartisi energi, dan jelaskan pula hubungannya dengan perhitungan di atas.

Solusi :

- Dari statistik Boltzmann, fungsi distribusinya adalah (z dapat berupa posisi maupun momentum) :

$$f(z) \propto \exp\left(-\frac{E(z)}{kT}\right)$$

Sehingga energi rata-rata partikelnya adalah

$$\overline{E} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)E(z)dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{E(z)}{kT}\right)E(z)dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{E(z)}{kT}\right)dz}$$

dengan memasukkan $E(z) = az^2$ dari persamaan di atas, maka diperoleh $\overline{E} = kT / 2$

- Prinsip ekipartisi energi : Untuk sistem partikel klasik dalam keadaan kesetimbangan termal pada temperatur T , energi rata-rata dari masing-masing derajat kebebasan dari sebuah partikel setara dengan $\frac{1}{2} kT$.

Dalam persoalan di atas, sistem hanya memiliki 1 derajat kebebasan, maka energi rata-ratanya adalah $\frac{1}{2} kT$.

7. Soal :

Sebuah sistem yang memiliki 2 tingkat energi E_0 dan E_1 memiliki N buah partikel. Partikel-partikel tersebut menempati tingkat energi menurut hukum sitribusi klasik.

- Turunkan ungkapan energi rata-rata tiap partikel.
- Hitunglah energi rata-rata tiap partikel terhadap temperatur pada saat $T \rightarrow 0$ dan $T \rightarrow \infty$

Solusi :

- Energi rata-rata sebuah partikel adalah :

$$u = \frac{E_0 e^{-\beta E_0} + E_1 e^{-\beta E_1}}{e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1}}$$

Dengan mengambil asumsi $E_1 > E_0 > 0$ dan menentukan $\Delta E = E_1 - E_0$, maka diperoleh

$$u = \frac{E_0 + E_1 e^{-\beta \Delta E}}{1 + e^{-\beta \Delta E}}$$

- Ketika $T \rightarrow 0$, maka $\beta = 1/kT \rightarrow \infty$, diperoleh

$$u \approx (E_0 + E_1 e^{-\beta \Delta E})(1 - e^{-\beta \Delta E}) = E_0 + \Delta E e^{-\beta \Delta E}$$

Ketika $T \rightarrow \infty$, maka $\beta = 1/kT \rightarrow 0$, diperoleh

$$u \approx \frac{1}{2}(E_0 + E_1 - \beta E_1 \Delta E)(1 + \frac{1}{2} \beta \Delta E) \approx \frac{1}{2}(E_0 + E_1) - \frac{\beta}{4}(\Delta E)^2$$

8. Soal :

Untuk sebuah sistem klasik yang memiliki 2 tingkat energi E_0 dan E_1 memiliki N buah partikel,

- Turunkan ungkapan kapasitas panas spesifik dari sistem N partikel.
- Hitunglah kapasitas panas pada limit $T \rightarrow 0$ dan $T \rightarrow \infty$

Solusi :

- Kapasitas panas spesifik per mol adalah

$$C = N_A \frac{\partial u}{\partial T} = N_A \frac{\partial u}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial T} = R \left(\frac{\Delta E}{kT} \right)^2 \frac{e^{-\Delta E/kT}}{(1 + e^{-\Delta E/kT})^2}$$

b. Ketika $T \rightarrow 0$ diperoleh

$$C \approx R \left(\frac{\Delta E}{kT} \right)^2 e^{-\Delta E/kT}$$

Ketika $T \rightarrow \infty$ diperoleh

$$C \approx \frac{R}{4} \left(\frac{\Delta E}{kT} \right)^2$$

9. Soal :

Tiga energi terendah dari sebuah molekul adalah $E_1 = 0$, $E_2 = \varepsilon$, $E_3 = 10\varepsilon$. Tunjukkanlah bahwa untuk temperatur yang cukup rendah, hanya terdapat 2 tingkat energi yang dapat terisi (E_1 dan E_2). Tentukan seberapa rendah temperatur yang dimaksud.

Solusi :

Misalnya sistem memiliki partikel sebanyak N buah, maka menurut statistik Boltzmann,

$$N_1 + N_2 + N_3 = N$$

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\varepsilon/kT},$$

$$\frac{N_3}{N_1} = e^{-10\varepsilon/kT},$$

maka

$$N_3 = \frac{N}{1 + e^{9\varepsilon/kT} + e^{10\varepsilon/kT}}$$

Pada saat $N_3 < 1$, tak ada pengisian pada tingkat energi N_3 , yaitu pada saat $T < T_c$, hanya E_1 dan E_2 yang terisi, maka hubungan

$$\frac{N}{1 + e^{9\varepsilon/kT} + e^{10\varepsilon/kT}} = 1$$

terpenuhi. Jika $N \gg 1$, diperoleh

$$T_c \approx \frac{10\varepsilon}{k \ln N}$$

10. Soal :

Untuk kasus sebuah sistem yang memiliki tiga energi terendah dari sebuah molekulnya adalah $E_1 = 0$, $E_2 = \varepsilon$, $E_3 = 10\varepsilon$, carilah energi rata-rata E dari molekul pada temperatur T . Cari ungkapan C_v sebagai fungsi dari T pada temperatur tinggi dan temperatur rendah.

Solusi :

Energi rata-rata dari molekul tersebut adalah

$$E = \frac{\varepsilon(e^{-\varepsilon/kT} + e^{-10\varepsilon/kT})}{1 + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-10\varepsilon/kT}}$$

Sedangkan kapasitas panas spesifiknya adalah :

$$C_v = N_A \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{R\varepsilon^2(e^{-\beta\varepsilon} + 100e^{-10\beta\varepsilon} + 81e^{-11\beta\varepsilon})}{(1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-10\beta\varepsilon})^2} \beta^2$$

Dengan $\beta = 1/kT$ dan N_A adalah bilangan Avogadro.

Untuk temperatur tinggi, $kT \gg \varepsilon$,

$$C_v \approx \frac{182}{9} R \left(\frac{\varepsilon}{kT} \right)^2 \propto \frac{1}{T^2}$$

Untuk temperatur rendah, $kT \ll \varepsilon$,

$$C_v \approx R\varepsilon^2 \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{(kT)^2}$$

11. Soal :

Sebuah sistem dua kisi berbeda masing-masing terisi oleh atom dengan spin yang terorientasi sedemikian rupa sehingga energinya dapat bernilai $\varepsilon = 1, 0, -1$ dengan

probabilitas yang sama. Atom-atom tersebut tak saling berinteraksi. Hitunglah harga rata-rata ensemble \overline{U} dan $\overline{U^2}$ untuk energi sistem U diasumsikan berasal dari spin saja.

Solusi :

Untuk atom tunggal, ungkapan berikut ini terpenuhi :

$$\overline{\varepsilon} = -\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{1 + e^{\beta} + e^{-\beta}}$$

$$\overline{\varepsilon^2} = -\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{1 + e^{\beta} + e^{-\beta}}$$

Dan untuk sistemnya,

$$\overline{U} = \overline{\varepsilon_1} + \overline{\varepsilon_2} = -2 \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{1 + e^{\beta} + e^{-\beta}},$$

$$\overline{U^2} = \overline{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} = \overline{\varepsilon_1^2} + \overline{\varepsilon_2^2} + 2\overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

Karena $\overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \overline{\varepsilon_1} \cdot \overline{\varepsilon_2}$, maka

$$\overline{U^2} = \frac{2[\exp(2\beta) + \exp(-2\beta)] + \exp \beta + \exp(-\beta)}{[1 + \exp \beta + \exp(-\beta)]^2}$$

12. Soal :

Hitung temperatur dari sebuah sistem yang terisi 6.0×10^{22} atom gas helium pada tekanan atmosfer.

Solusi :

Dengan menggunakan persamaan keadaan gas ideal, diperoleh

$$T = pV / nk = 241 K$$

13. Soal :

Hitunglah temperatur sebuah sistem partikel yang terisi tingkat-tingkat partikel tunggal dan memenuhi statistik Maxwell-Boltzmann yang mengalami kontak termal dengan reservoir panas pada temperatur T . Distribusi populasi dalam tingkat-tingkat energi non-degenerate ditunjukkan dalam tabel di bawah.

Energi (eV)	Populasi
30.1×10^{-3}	3.1%
21.5×10^{-3}	8.5%
12.9×10^{-3}	23%
4.3×10^{-3}	63%

Solusi :

Distribusi populasi diberikan oleh ungkapan :

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp((\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / kT)$$

Sehingga

$$T = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{k} \frac{1}{\ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$$

Dengan menggunakan nilai n_1 dan n_2 yang telah diberikan, diperoleh nilai-nilai T berikut:

99.2; 99.5; 99.0; 99.5; 100.2; 98.8 K

Harga rata-rata T adalah $T = 99.4$ K.

14. Soal :

Dalam sebuah eksperimen kriogenis, panas disalurkan ke sampel pada laju konstan 0.01 watt. Entropi dari sampel tersebut bertambah seiring waktu seperti yang ditunjukkan dalam tabel di bawah. Hitung temperatur sampel pada $t = 500$ s.

Waktu (sec)	100	200	300	400	500	600	700
Entropi (J/K)	2.30	2.65	2.85	3.00	3.11	3.20	3.28

Solusi :

Laju rata-rata pengambilan panas adalah $q = \frac{\partial Q}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial t}$, menghasilkan

$$T = \frac{q}{\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)}$$

Nilai $\frac{\partial S}{\partial t}$ diperkirakan dengan menggunakan integral tengah pada $t = 500$ s, diperoleh

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left(\frac{3.20 - 3.00}{600 - 400} \right) = 1.0 \times 10^{-3} \text{ J/sec.K}$$

Sehingga, nilai $T = 10$ K.

15. Soal :

Turunkan ungkapan kapasitas panas vibrasi dari gas diatomik sebagai fungsi dari temperatur. (Gunakan $\hbar\omega_0 / k = \theta$). Lakukan dengan menggunakan ungkapan fungsi partisi vibrasi, mengevaluasi dan menggunakan hasilnya untuk menghitung nilai C_{vib} .

Solusi :

Tingkat energi vibrasi untuk gas diatomik adalah :

$$\varepsilon_v = \hbar\omega_0(v + 1/2), v = 0, 1, 2, \dots$$

Fungsi partisinya adalah :

$$Z_{vib} = \sum_{v=0}^{\infty} \exp[-\beta\hbar\omega_0(v + 1/2)] = \left(\frac{e^{-x/2}}{1 - e^{-x}} \right) \text{ dengan } x = \beta\hbar\omega_0$$

Energi bebas untuk 1 mol gas tersebut adalah :

$$F = -N_A kT \ln Z_{vib} = \frac{N_A}{2} \hbar\omega_0 + \frac{N_A}{\beta} \ln[1 - \exp(-\beta\hbar\omega_0)]$$

Energi dalam dari sistem ini adalah :

$$U = F - T \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{N_A}{2} \hbar\omega_0 + \frac{N_A \hbar\omega_0}{\exp(\beta\hbar\omega_0) - 1}$$

Sehingga dapat diturunkan ungkapan kapasitas panas vibrasi :

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{x^2 e^x}{(x-1)^2}, \quad x = \frac{\hbar \omega_0}{kT} = \frac{\theta}{T}$$

16. Soal :

Tentukan limit temperatur C_{vib} untuk kasus gas diatomik.

Solusi :

Dari persoalan sebelumnya, telah diturunkan ungkapan kapasitas panas vibrasi, yaitu :

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = R \frac{x^2 e^x}{(x-1)^2}, \quad x = \frac{\hbar \omega_0}{kT} = \frac{\theta}{T}$$

Limit temperatur tinggi $T \gg \theta$, atau $x \ll 1$, maka didapat :

$$C_v \approx R$$

Limit temperatur rendah $T \ll \theta$, atau $x \gg 1$, maka didapat :

$$C_v \approx R(\theta/T)^2 \exp(-\theta/T)$$

17. Soal :

Osilator harmonik kuantum 1 dimensi (dengan tingkat energi dasar = $\hbar \omega / 2$) berada dalam kesetimbangan termal dengan reservoir panas pada temperatur T.

- Carilah nilai energi rata-rata sebagai fungsi T.
- Carilah nilai akar kuadrat rata-rata dari fluktuasi energinya.
- Bagaimana nilai-nilai keduanya pada limit $kT \gg \hbar \omega$ dan $kT \ll \hbar \omega$

Solusi :

Diketahui fungsi partisi sistem tersebut adalah :

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{-E_n}{kT}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar \omega}{kT}\right] = \frac{2}{\sinh\left(\frac{\hbar \omega}{2kT}\right)}$$

- Energi rata-ratanya adalah :

$$\langle E \rangle = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln z = \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$$

b. Akar kuadrat rata-rata dari fluktuasi energinya adalah :

$$\Delta E = T \sqrt{k \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}} = \frac{\hbar\omega}{2 \sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)}$$

c. Pada limit $kT \gg \hbar\omega$:

$$\langle E \rangle \rightarrow \frac{\hbar\omega}{2}, \Delta E \rightarrow \hbar\omega \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$$

Pada limit $kT \ll \hbar\omega$:

$$\langle E \rangle \rightarrow kT, \Delta E \rightarrow kT$$

18. Soal :

Perhatikan sebuah sistem N_0 osilator kuantum tak berinteraksi 1D dalam kesetimbangan termal pada temperatur T . Tingkat energi dari sebuah osilator diketahui berupa :

$$E_m = (m + \frac{1}{2})\gamma / V, \text{ dengan } m = 0, 1, 2, \dots; \gamma \text{ adalah konstanta, } V \text{ adalah volume 1D}$$

a. Tentukan U dan C_v sebagai fungsi T .

b. Sketsa $U(T)$ dan $C_v(T)$.

Solusi :

Fungsi partisi sistem ini adalah :

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta(m + \frac{1}{2})\gamma}{V}\right) = \frac{\exp\left(-\beta\gamma/2V\right)}{1 - \exp\left(-\beta\gamma/V\right)} = \frac{1}{2} \operatorname{csch}\left(\beta\gamma/2V\right)$$

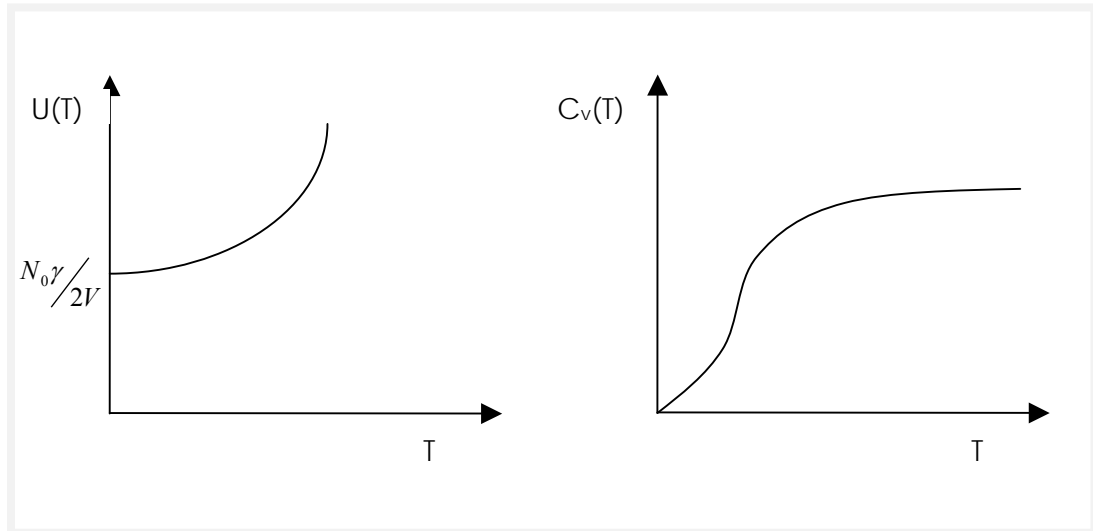
a. Energi dalam sistem ini adalah

$$\begin{aligned} U &= -N_0 \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z = \frac{N_0\gamma}{2V} \coth\left(\beta\gamma/2V\right) \\ &= \frac{N_0\gamma}{2V} \coth\left(\gamma/2VkT\right) \end{aligned}$$

Kapasitas panas spesifik pada volum konstan adalah :

$$c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = N_0 k \left(\gamma / 2V k T \right)^2 \operatorname{csch}^2 \left(\gamma / 2V k T \right)$$

b. Sketsa $U(T)$ dan $C_v(T)$.



19. Soal :

Energi kinetik rata-rata dari atom-atom Hidrogen dalam sebuah atmosfer bintang (diasumsikan berada dalam kesetimbangan termal) adalah 1,0 eV.

- Berapa temperatur atmosfer tersebut dalam K
- Berapa rasio jumlah atom pada keadaan tereksitasi kedua ($n=3$) terhadap jumlah pada keadaan dasar.

Solusi :

- Temperatur atmosfer bintang tersebut :

$$T = \frac{2\varepsilon}{3k} = \frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}} = 7.7 \times 10^3 \text{ K}$$

- Tingkat energi untuk atom Hidrogen adalah :

$$E_n = \left(\frac{-13.6}{n^2} \right) \text{ eV}$$

Dengan menggunakan distribusi Boltzmann, diperoleh :

$$\frac{N_3}{N_1} = \exp\left(\frac{E_1 - E_3}{kT}\right)$$

Dengan memasukkan nilai-nilai berikut :

$$E_1 = \left(\frac{-13.6}{1^2}\right) \text{ eV}, E_3 = \left(\frac{-13.6}{3^2}\right) \text{ eV}, \text{ dan } kT = (2/3) \text{ eV}$$

Maka didapat nilai : $N_3 / N_1 \approx 1.33 \times 10^{-8}$

20. Soal :

Sebuah gas monoatomik terdiri atas atom-atom dengan dua tingkat energi dalam: keadaan dasar dengan degenerasi g_1 dan keadaan tereksitasi rendah dengan degenerasi g_2 pada energi E di atas keadaan dasar. Carilah kapasitas panas spesifik dari gas tersebut.

Solusi :

Berdasarkan distribusi Boltzmann, energi rata-rata dari atom-atom tersebut adalah:

$$\varepsilon = \frac{3}{2}kT + E_0 + \frac{g_2 E e^{-E/kT}}{g_1 + g_2 e^{-E/kT}}$$

dengan E_0 adalah energi disosiasi keadaan dasar (keadaan dasar dipilih sebagai titik nol energi), maka

$$\begin{aligned} c_v &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = \frac{3}{2}k + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{g_2 E e^{-E/kT}}{g_1 + g_2 e^{-E/kT}} \right) \\ &= \frac{3}{2}k + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{g_2 E}{g_2 + g_1 e^{E/kT}} \right) \\ &= \frac{3}{2}k + \frac{g_1 g_2 E^2 e^{E/kT}}{kT^2 (g_2 + g_1 e^{E/kT})^2} \end{aligned}$$

Soal Latihan

1. Jelaskan metode eksperimen yang dapat digunakan untuk melakukan validasi untuk distribusi Maxwell-Boltzmann.
2. Sebuah kolom silindris berisikan gas pada temperatur tertentu (T) berputar terhadap sumbu dengan kecepatan anguler yang konstan. Turunkan ungkapan fungsi distribusi kesetimbangan sistem ini.
3. Misalkan sebuah sistem terdiri dari N partikel yang tidak saling berinteraksi ($N \gg 1$), dimana energi setiap partikel diasumsikan dua dan hanya memiliki dua nilai yaitu 0 dan E ($E > 0$). Jumlah hunian energi pada tingkat 0 dan E adalah n_0 dan n_1 . Energi total sistem tersebut adalah U .
 - a) Carilah entropi sistem tersebut.
 - b) Carilah temperatur sebagai fungsi dari U . Pada rentang berapa nilai n_0 sama dengan $T < 0$?
 - c) Ketika sebuah sistem temperatur negatif mengalami kontak panas dengan sistem temperatur positif, dari arah manakah panasnya mengalir? Mengapa?
4. Pada sebuah medan magnet terdapat paramagnet ideal dengan entropi $S = S_0 - CU^2$, dengan U adalah energi sistem spin dan C adalah konstanta dengan parameter mekanik sistem yang tetap.
 - a) Tentukan Energi U sistem spin tersebut sebagai fungsi dari T , dengan menggunakan definisi fundamental temperatur.
 - b) Gambarkan grafik U vs T untuk semua nilai T ($-\infty < T < \infty$).
 - c) Jelaskan secara singkat pengertian fisis mengapa temperatur negatif termasuk bagian dari hasil yang didapat.

5. Sebuah material terdiri dari n partikel yang saling tidak tergantung dan berada dalam pengaruh medan magnetik eksternal lemah H . Setiap partikel memiliki momen magnetik $m\mu$ selama berada dalam medan magnetik tersebut, dimana $m = J, J-1, \dots, -J+1, -J, J$ merupakan bilangan bulat, dan μ adalah konstanta. Sistem tersebut berada dalam temperatur T .
 - a) Carilah fungsi partisi sistem tersebut.
 - b) Hitung nilai rata-rata magnetisasi M material tersebut.
 - c) Carilah asimtot M untuk T yang bernilai sangat besar.

6. Misalkan terdapat gas yang terdiri dari atom-atom spin- $\frac{1}{2}$ dengan kerapatan n atom per volume satuan. Setiap atom memiliki momen magnetik intrinsik μ dan interaksi antar atom dapat diabaikan. Asumsikan bahwa sistem tersebut mematuhi aturan statistik klasik.
 - a) Berapakah peluang menemukan atom dengan μ parallel terhadap medan magnetik H pada temperatur mutlak T ?
 - b) Berapakah peluang menemukan atom dengan μ anti parallel terhadap medan magnetik H pada temperatur mutlak T ?

7. Sebuah sistem paramagnetik terdiri dari dipole magnet N . Setiap dipole memiliki momen magnetik μ yang mematuhi aturan klasik. Jika sistem tersebut pada temperatur berhingga T berada pada medan magnetik uniform H , tentukan:
 - a) Induksi magnetik sistem tersebut.
 - b) Kapasitas panas pada H konstan

8. Misalkan didalam medan magnetik terdapat kisi-kisi kaku dari spin- $\frac{1}{2}$ atom yang dapat dibedakan. Spin tersebut memiliki dua buah keadaan (state) dengan energi $-\mu_0 H$ dan

$+\mu_0 H$ untuk spin up (\uparrow) dan spin down (\downarrow), dan berhubungan dengan \mathbf{H} . Sistem tersebut berada pada temperatur T .

- a) Tentukan fungsi partisi kanonik z untuk sistem tersebut.
- b) Tentukan total momen magnetik $M = \mu_0(N_+ - N_-)$ sistem tersebut
- c) Tentukan entropi sistem tersebut.

9. Gas monoatomik ideal dimasukkan ke dalam silinder dengan jari-jari a dan tinggi L . Silinder tersebut berotasi dengan kecepatan angular ω disekitar aksis simentrinya dan gas ideal tersebut berada dalam keadaan ekuilibrium pada temperatur T pada sistem koordinat yang berotasi dengan silinder tersebut. Asumsikan bahwa atom-atom gas tersebut memiliki massa m , tidak memiliki tingkat kebebasan internal, dan mematuhi aturan statistic klasik.

- a) Tentukan Hamiltonian pada sistem koordinat yang berotasi tersebut
- b) Tentukan fungsi partisi sistem tersebut
- c) Tentukan jumlah kerapatan rata-rata partikel sebagai fungsi dari r .

10. Sebutkan hukum distribusi energi Maxwell-Boltzman. Definisikan syarat-syaratnya. Jelaskan dimana penerapan yang salah dari hukum tersebut.

11. Misalkan atmosfer bumi terdiri dari nitrogen murni pada kesetimbangan termodinamika dengan temperatur 300 K. Hitung ketinggian di atas permukaan laut dimana kerapatan atmosfer tersebut $1\frac{1}{2}$ kali kerapatan atmosfer pada permukaan laut.

12. Misakan sebuah sistem partikel tunggal memiliki dua tingkat orbital yang keduanya memiliki energi yang sama. Ketika dua orbital tersebut tidak terisi, energi sistemnya adalah nol. Ketika salah satu orbital terisi oleh satu partikel, energinya adalah ϵ .

Misalkan energi sistem jauh lebih tinggi (tak hingga) ketika kedua orbital tersebut terisi. Tunjukkan bahwa jumlah rata-rata ensembel partikel dalam tingkat tersebut adalah:

$$\langle N \rangle = \frac{2}{2 + e^{(\epsilon - \mu)/\tau}}$$

13. Tuliskan ekspresi sederhana untuk bagian internal dari fungsi partisi atom Hidrogen terisolasi yang berada dalam interaksi lemah dengan sebuah reservoir pada temperatur T. Apakah ekspresi tersebut divergen untuk $T = 0$ dan untuk $T \neq 0$?

14. Sebuah inti ${}^7\text{N}_{14}$ memiliki spin inti $I=1$. Asumsikan bahwa molekul diatomic N_2 dapat berotasi tetapi tidak dapat bervibrasi pada temperatur biasa dan gerakan elektroniknya diabaikan. Temukan jumlah ortho molekul dan para molekul pada sebuah sample gas nitrogen (ortho= keadaan spin simetri, para = keadaan spin anti simetri). Serta jelaskan apa yang terjadi dengan jumlah molekul tersebut apabila temperatur direndahkan hingga mendekati nol mutlak?

15. Molekul Hidrogen biasa ditemukan dalam dua bentuk, orthohidrogen (spin inti parallel) dan parahidrogen (spin inti anti parallel).
 - a) Setelah berada dalam kesetimbangan pada temperatur “tinggi”, tentukan fraksi gas H_2 yang parahidrogen (asumsikan bahwa setiap variasi Hidrogen kebanyakan berada pada keadaan energi terendah).
 - b) Pada temperatur rendah hampir semua molekul orthohidrogen berubah menjadi parahidrogen. Jelaskan mengapa energi yang dilepaskan oleh setiap molekul yang berubah jauh lebih besar dibandingkan perubahan energi pada flip spin inti.

16. Turunkan ungkapan persamaan keadaan sebuah sistem sistem N_0 osilator kuantum tak berinteraksi 1D dalam kesetimbangan termal pada temperatur T. Tingkat energi dari sebuah osilator diketahui berupa : $E_m = (m + \frac{1}{2})\hbar\omega$, dengan $m = 0, 1, 2, \dots$;

17. Sebuah sistem gas yang terdiri dari atom-atom spin- $\frac{1}{2}$ dengan kerapatan n atom per volume satuan mematuhi aturan statistik klasik. Setiap atom memiliki momen magnetik intrinsik μ dan interaksi antar atom dapat diabaikan.
- Carilah rata-rata magnetisasi gas tersebut baik yang berada pada limit temperatur tinggi dan limit temperatur rendah.
 - Tentukan suseptibilitas magnetik χ dalam μ .
18. Turunkan ungkapan kapasitas panas spesifik $C(T)$ dari sebuah sistem yang berupa molekul heteronuklir diatomik memiliki momen inersia I (hanya gerak rotasi yang diperhitungkan).
19. Perkirakan probabilitas sebuah perangko (massa = 0.1 g) yang berada di atas meja pada temperatur kamar (300 K) akan terbang secara spontan setinggi 10^{-8} cm di atas meja tersebut.
- Hint:** Jangan bayangkan hanya ada 1 perangko, tapi sejumlah takhingga perangko yang tak saling berinteraksi ditempatkan saling bersebelahan. Berikan alasan bahwa kumpulan perangko tersebut mematuhi distribusi Maxwell-Boltzmann.
20. Berapa bagian dari gas H_2 pada permukaan laut pada temperatur 300 K dapat lepas dari medan gravitasi bumi? Mengapa masih terdapat gas H_2 pada atmosfer di atas permukaan laut?

Bab 15 Soal dan Penyelesaian

Statistik Bose-Einstein

1. Soal :

Sistem N boson identik tak berspin dengan massa m berada dalam kotak dengan volume $V = L^3$ pada temperatur $T > 0$. Tuliskan ekspresi umum jumlah partikel $n(\varepsilon)$ yang memiliki energi antara ε dan $\varepsilon + d\varepsilon$ dalam fungsi massa, energi, temperatur, potensial kimia, volume dan besaran lain yang relevan. Tunjukkan pula bahwa pada limit ketika jarak rata-rata d antar partikel sangat besar dibandingkan panjang gelombang de Broglie, distribusinya menjadi sama dengan distribusi Boltzmann.

Solusi :

Jumlah partikel dinyatakan sebagai

$$n(\varepsilon) = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} d\varepsilon$$

Kemudian, karena

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \cdot \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} d\varepsilon \\ &= V \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\mu}{kT}} \end{aligned}$$

maka

$$e^{-\frac{\mu}{kT}} = \frac{V}{N} \cdot \frac{1}{\lambda^3} = \left(\frac{d}{\lambda} \right)^3$$

Dengan $\lambda = h / \sqrt{2\pi mkT}$ adalah panjang gelombang de Broglie dari gerakan termal dari partikel, dan $d = \sqrt[3]{V/N}$. Dengan demikian pendekatan $d \gg \lambda$ setara dengan pendekatan $\exp(-\mu/kT) \gg 1$.

2. Soal :

Untuk 2 partikel dengan 3 level energi dengan masing – masing degenerasi adalah 1, tentukanlah konfigurasi fungsi partisi Z untuk statistik statistik Bose Einstein.

2ε	
ε	
0	

Solusi :

Statistik Bose Einstein

2ε			*		*	**
ε		*		**	*	
0	**	*	*			
Total Energi	0	1ε	2ε	2ε	3ε	4ε

$$Z = e^{-0/kT} + e^{-\varepsilon/kT} + 2e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT} + e^{-4\varepsilon/kT}$$

3. Soal :

Dengan menggunakan ekspresi simbolik pada Matlab, carilah ekspresi untuk F , S , E , C_v untuk kasus soal no.2 di atas, dan tentukan plot antara C_v terhadap T .

Solusi :

Karena jumlah partikel ditentukan dan jumlah energi tidak ditentukan, diasumsikan bahwa yang ditinjau adalah sistem dalam ensemble kanonik. Dalam ensemble kanonik, berlaku

$$p_i = p(0)e^{-E_i/kT}$$

yang menyatakan probabilitas suatu *assembly* berada dalam keadaan (state) *i*. Fungsi partisi total dinyatakan sebagai:

$$Z = \sum_i e^{-E_i/kT}$$

Dengan $F = -kT^2 \ln Z$

dan

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

serta

$$F = E - TS$$

sehingga

$$E = -T^2 \left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T} \right)_V$$

diperoleh

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = -T \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right\}$$

Dengan $Z = e^{-0/kT} + e^{-\varepsilon/kT} + 2e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT} + e^{-4\varepsilon/kT}$, menggunakan ekspresi simbolik pada Matlab, diperoleh hasil berikut :

```
syms k T Eps
F=-k*T*log(0*exp(-0*Eps/(k*T))+1*exp(-1*Eps/(k*T))+1*exp(-2*Eps/(k*T))+1*exp(-3*Eps/(k*T))+0*exp(-4*Eps/(k*T)))
Q=F/T
Energi=-T^2*diff(Q,T)
Cv=diff(Energi,T)
```

```
>> pretty(F)
```

$$-k T \log\left(1 + \exp\left(-\frac{\text{Eps}}{k T}\right) + 2 \exp\left(-2 \frac{\text{Eps}}{k T}\right) + \exp\left(-3 \frac{\text{Eps}}{k T}\right) + \exp\left(-4 \frac{\text{Eps}}{k T}\right)\right)$$

```
>> pretty(Energi)
```

$$\frac{2 T k}{\sqrt{k T}} \left| \frac{\text{Eps} \exp\left(-\frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} + 4 \frac{\text{Eps} \exp\left(-2 \frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} + 3 \frac{\text{Eps} \exp\left(-3 \frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} \right|$$

$$+ 4 \frac{\text{Eps} \exp\left(-4 \frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} \left| \frac{\text{Eps} \exp\left(-\frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} \right|$$

$$1 + \exp\left(-\frac{\text{Eps}}{k T}\right) + 2 \exp\left(-2 \frac{\text{Eps}}{k T}\right) + \exp\left(-3 \frac{\text{Eps}}{k T}\right) + \exp\left(-4 \frac{\text{Eps}}{k T}\right)$$

```
>> pretty(Cv)
```

$$\frac{2 T k}{\sqrt{k T}} \left| \frac{\text{Eps} \exp\left(-\frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} + 4 \frac{\text{Eps} \exp\left(-2 \frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} + 3 \frac{\text{Eps} \exp\left(-3 \frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} \right|$$

$$+ 4 \frac{\text{Eps} \exp\left(-4 \frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} \left| \frac{\text{Eps} \exp\left(-\frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} \right| + \frac{\text{Eps} \exp\left(-\frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} + \frac{\text{Eps} \exp\left(-2 \frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} + \frac{\text{Eps} \exp\left(-3 \frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T} + \frac{\text{Eps} \exp\left(-4 \frac{\text{Eps}}{k T}\right)}{k T}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k^2 T^2}{\sqrt{k^3 T^3}} \frac{Eps^2 \exp(-2 \frac{Eps}{k T})}{k^3 T^3} + 8 \frac{Eps^2 \exp(-2 \frac{Eps}{k T})}{k^2 T^4} - 6 \frac{Eps^3 \exp(-3 \frac{Eps}{k T})}{k^3 T^3} \\
& + 9 \frac{Eps^2 \exp(-3 \frac{Eps}{k T})}{k^2 T^4} - 8 \frac{Eps^3 \exp(-4 \frac{Eps}{k T})}{k^3 T^3} + 16 \frac{Eps^2 \exp(-4 \frac{Eps}{k T})}{k^2 T^4} \Big/ (\%1) \\
& - T^2 k \sqrt{\frac{Eps^2 \exp(-2 \frac{Eps}{k T})}{k^2 T^2}} + 4 \frac{Eps^2 \exp(-2 \frac{Eps}{k T})}{k^2 T^2} + 3 \frac{Eps^3 \exp(-3 \frac{Eps}{k T})}{k^3 T^3} \\
& + 4 \frac{Eps^2 \exp(-4 \frac{Eps}{k T})}{k^2 T^2} \Big/ \%1 \\
& \%1 := 1 + \exp(-\frac{Eps}{k T}) + 2 \exp(-2 \frac{Eps}{k T}) + \exp(-3 \frac{Eps}{k T}) + \exp(-4 \frac{Eps}{k T})
\end{aligned}$$

4. Soal :

Tentukanlah U dan (PV) sistem Boson dalam ensemble Grand Kanonik !

Solusi :

Bentuk umum Grand Partition Function adalah

$$Z = \sum_{\{i\}} W_i \exp \left[\beta \left(\mu \sum_k n_k - \sum_k n_k E_k \right) \right] \quad (1)$$

dengan W_i adalah fungsi bobot yang berkaitan dengan fungsi distribusinya. Iterasi i berkaitan dengan jumlah partikel, $\sum_k n_k = N_i$ (jumlah partikel). Persamaan (1) dapat ditulis ulang dalam bentuk (tanpa memperhitungkan faktor degenerasi)

$$Z = \sum_{\{n_k\}} \prod_k \exp[\beta(\mu - E_k)n_k] \quad (2)$$

dan untuk sistem boson (tanpa memperhitungkan faktor degenerasi) didapatkan

$$\begin{aligned} Z &= \prod_k (1 + e^{\beta(\mu - E_k)} + e^{2\beta(\mu - E_k)} + \dots) \\ &= \prod_k \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - E_k)}} \end{aligned} \quad (3)$$

Pada sistem tersebut, berlaku jumlah partikel merupakan jumlah rata – rata partikel untuk konfigurasi yang mungkin, yaitu

$$\begin{aligned} N &= \sum_k \langle n_k \rangle \\ N &= \sum_k \frac{1}{e^{-\beta(\mu - E_k)} - 1} \end{aligned} \quad (4)$$

sehingga, dengan memandang rapat keadaan disekitar energi E adalah $D(E)$, jumlah partikel rata – rata dapat juga dituliskan sebagai

$$N = \int_0^{\infty} D(E) \frac{1}{e^{-\beta(\mu-E)} - 1} dE \quad (5)$$

Persamaan ini mengabaikan keadaan $E = 0$ yang dalam keadaan kuantum haruslah mempunyai bobot juga. Untuk mengakomodasinya, persamaan (5) akan berubah menjadi

$$N = \int_0^{\infty} D(E) \frac{1}{e^{-\beta(\mu-E)} - 1} dE + \frac{1}{V} \frac{e^{\beta\mu}}{1 + e^{\beta\mu}} \quad (6)$$

Suku tambahan itu akan mempunyai nilai N_0 (jumlah partikel yang berada dalam keadaan dasar $E = 0$).

Dengan $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} R^2$, sehingga $D(E) = \frac{\partial \sum E}{\partial E} = \frac{2V\pi}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2}$, persamaan (6) dapat dituliskan sebagai

$$N - N_0 = V 2\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} E^{1/2} \frac{1}{e^{-\beta(\mu-E)} - 1} dE \quad (7)$$

Dengan memisalkan $x = \beta E$ sehingga $dE = \beta^{-1} dx$ dan $E^{1/2} = x^{1/2} \beta^{-1/2}$, persamaan (7) dapat ditulis ulang sebagai

$$\begin{aligned} \bar{N} &= V 2\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \beta^{-3/2} \int_0^{\infty} x^{1/2} \frac{1}{z^{-1} e^x - 1} dx \\ \bar{N} &= V 2\pi \left(\frac{2m}{\beta h^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} x^{1/2} \frac{z e^{-x}}{1 - z e^{-x}} dx \end{aligned} \quad (8)$$

Mengingat relasi $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} x^l$, sehingga $\frac{x}{1-x} = \sum_{l=1}^{\infty} x^l$, maka bagian integrand persamaan (8), dapat dituliskan sebagai

$$G_{3/2}(z) = \int_0^{\infty} x^{1/2} \sum_{l=1}^{\infty} (z e^{-x})^l dx \quad (9)$$

yang bila diekspansikan akan memberikan

$$G_{3/2}(z) = \int_0^x x^{1/2} z e^{-x} dx + \int_0^\infty x^{1/2} z^2 e^{-2x} dx + \int_0^\infty x^{1/2} z^3 e^{-3x} dx$$

$$G_{3/2}(z) = \left[z \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{z^2}{2^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{z^3}{3^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \dots \right] \quad (10)$$

sehingga persamaan (8) dapat dituliskan sebagai

$$\bar{N} = V 2\pi \left(\frac{2m}{\beta h^2} \right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) g_{3/2}(z) \quad (11)$$

dengan $g_{3/2}(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} G_{3/2}(z)$. Persamaan ini dapat ditulis ulang dengan memberikan

nilai $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ dan diperoleh rata – rata partikel sebagai

$$\bar{N} = V \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2} \right)^{3/2} g_{3/2}(z) \quad (12)$$

dan dengan menerapkan panjang gelombang termal $\lambda = \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2} \right)^{-1/2}$, diperoleh

$$\bar{N} = \frac{V}{\lambda^{3/2}} g_{3/2}(z) \quad (13)$$

Nilai (pV) dapat diperoleh dengan menerapkan $pV = -\beta^{-1} \ln Z$, sehingga diperoleh

$$pV = -k_B T \ln \left(\prod_k \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - E_k)}} \right)$$

$$pV = -k_B T \left[\sum_k \ln \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - E_k)}} \right] \quad (14)$$

yang dapat diubah dalam bentuk kontinu menjadi

$$\begin{aligned}\frac{pV}{k_B T} &= -\int_0^\infty D(E) \ln \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - E)}} dE \\ \frac{pV}{k_B T} &= -V 2\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty E^{1/2} \ln \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - E)}} dE\end{aligned}\tag{15}$$

Persamaan (15) mengasumsikan bahwa partikel dengan $E = 0$ tidak disertakan mengingat batas – batas integral yang dipakai. Untuk mengikutkannya, persamaan (15) dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{pV}{k_B T} = -V 2\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty E^{1/2} \ln \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - E)}} dE - \frac{1}{V} \ln \frac{1}{1 - e^{\beta\mu}}\tag{16}$$

Dengan menerapkan $z = e^{\beta\mu}$ dan $x = e^{\beta E}$ kembali, dapat dituliskan

$$\frac{p}{k_B T} = -2\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \beta^{-3/2} \int_0^\infty x^{1/2} \ln \frac{1}{1 - ze^{-x}} dx - \frac{1}{V} \ln \frac{1}{1 - z}$$

Suku terakhir mempunyai kontribusi yang sangat kecil. Dalam kasus terburuk, untuk N buah partikel, akan terdapat paling banyak $\Theta(N^{-1} \ln N)$ keadaan yang memenuhinya dan untuk $N \rightarrow \infty$, akan paling banyak bernilai 1. Suku tersebut akan diabaikan. Persamaan (16) akan kembali ke bentuk persamaan (15) dan ditulis ulang menjadi

$$\frac{p}{k_B T} = 2\pi \left(\frac{2m}{\beta h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty x^{1/2} \ln(1 - ze^{-x}) dx\tag{17}$$

yang dapat diekspansi dengan $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ menjadi

$$\begin{aligned}\frac{p}{k_B T} &= 2\pi \left(\frac{2m}{\beta h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty x^{1/2} \left(z e^{-x} + \frac{z^2 e^{-2x}}{2} + \frac{z^3 e^{-3x}}{3} + \dots \right) dx \\ \frac{p}{k_B T} &= 2\pi \left(\frac{2m}{\beta h^2} \right)^{3/2} \left\{ \int_0^\infty x^{1/2} z e^{-x} dx + \int_0^\infty x^{1/2} \frac{z^2 e^{-2x}}{2} dx + \int_0^\infty x^{1/2} \frac{z^3 e^{-3x}}{3} dx + \dots \right\}\end{aligned}\quad (18)$$

Persamaan (18) akan mempunyai nilai

$$\frac{p}{k_B T} = 2\pi \left(\frac{2m}{\beta h^2} \right)^{3/2} \left\{ \sum_l \frac{z^l \Gamma(3/2)}{l^{5/2}} \right\} \quad (19)$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{p}{k_B T} = 2\pi \left(\frac{2m}{\beta h^2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ \sum_l \frac{z^l}{l^{5/2}} \right\} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \quad (20)$$

Nilai energi dapat diperoleh dengan $U = - \left\{ \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right\}_{z,V}$, atau $U = \left\{ \frac{\partial (pV\beta^{-1})}{\partial \beta} \right\}_{z,V}$ akan memberikan

$$\begin{aligned}U &= -V \left\{ \frac{\partial \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}}{\partial \beta} \right\}_{z,V} = -V \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\lambda^3 \lambda^{-3/2}} \right) g_{5/2} \right\} = V \left\{ \frac{3\beta^{1/2}}{2\lambda^3} g_{5/2}(z) \right\} \\ U &= V \left\{ \frac{3\beta^{-1}}{2\lambda^3} g_{5/2}(z) \right\}\end{aligned}\quad (21)$$

sehingga diperoleh

$$p = \frac{2}{3} \frac{U}{V} \quad (22)$$

5. Soal :

Hitunglah perbedaan orde 1 untuk nilai rata-rata energi antara sistem N partikel non-identik tak berspin dengan sistem N partikel boson identik tak berspin pada $d \ll \lambda$. Kedua sistem ini berada dalam kotak dengan volume $V=L^3$ dan massa partikel m .

Solusi :

Aproksimasi orde pertama diberikan oleh

$$\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1} \approx e^{-(\varepsilon-\mu)/kT} (1 + e^{-(\varepsilon-\mu)/kT})$$

energi rata-ratanya adalah

$$\begin{aligned} \bar{E} = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} & \left[\int_0^\infty \varepsilon \sqrt{\varepsilon} e^{\mu/kT} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon \right. \\ & \left. + \int_0^\infty \varepsilon \sqrt{\varepsilon} e^{2\mu/kT} e^{-2\varepsilon/kT} d\varepsilon \right] = \frac{3}{2} NkT \left(1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\lambda^3}{d^3} \right) \end{aligned}$$

6. Soal :

Pertimbangkan sebuah sistem mekanika-kuantum dari gas boson yang tak berinteraksi dan spin-nol, dengan massa masing-masing partikel adalah m dan bebas bergerak dalam ruang dengan volume V . Tentukan energi dan kapasitas panas di daerah temperatur rendah. Jelaskan mengapa pada temperatur rendah, potensial kimia perlu dibuat sama dengan nol.

Solusi :

Distribusi Bose yang dinyatakan oleh $\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1}$

mengharuskan nilai $\mu \leq 0$. Secara umum,

$$n = \int \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1} \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$$

Pada saat temperatur turun, potensial kimia turun terus hingga mencapai nilai 0, yang mana

$$n = \int \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$$

Kondensasi Bose terjadi pada saat temperatur terus menurun secara kontinu dengan $\mu = 0$. Dengan demikian, pada limit temperatur yang sangat rendah, sistem Bose dapat dikatakan memiliki $\mu = 0$. Jumlah partikel pada keadaan tak terkondensasi tak kekal. Densitas energi u dan kapasitas panas spesifik c diperoleh sbb :

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon \\ &= \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} (kT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \\ c &= \frac{\partial u}{\partial T} = 5\pi k \left(\frac{2mkT}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

7. Soal :

Cari ekspresi energi untuk sistem mekanika-kuantum dari gas foton ($m=0$). Tunjukkan bahwa energinya berbanding lurus dengan T^4 .

Solusi :

Untuk gas foton, maka $\mu = 0$ terpenuhi pada setiap temperatur, dan $\varepsilon = \hbar\omega$. Rapat keadaannya adalah $\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$, dan densitas energinya adalah.

$$u = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

8. Soal :

Sebuah gas yang terdiri dari N partikel Bose tak berspin bermassa m berada dalam ruang tertutup dengan volume V dan pada temperatur T . Carilah ekspresi untuk densitas keadaan partikel-tunggal $D(\varepsilon)$ sebagai fungsi energi partikel tunggal ε . Sketsakan hasilnya. Tuliskan pula ekspresi untuk rata-rata angka pengisian keadaan partikel tunggal, \bar{n}_ε , sebagai fungsi ε , T , dan potensial kimia $\mu(T)$. Gambarkan pula fungsi ini dalam sketsa tersebut, dan indikasikan di mana letak $\varepsilon = \mu$.

Solusi :

Dari pernyataan $\varepsilon = p^2 / 2m$ dan

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp$$

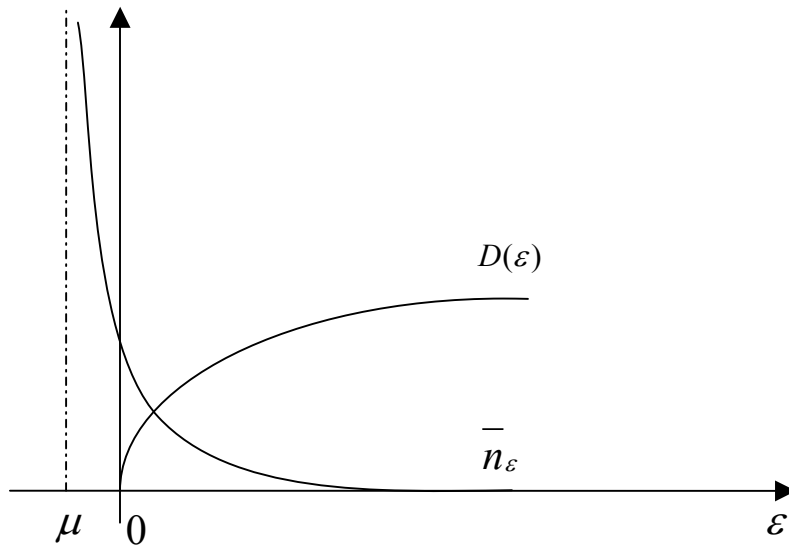
diperoleh

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon.$$

dan ekspresi untuk rata-rata angka pengisian keadaan partikel tunggal adalah

$$\bar{n}_\varepsilon = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/kT} - 1} \quad (\mu \leq 0)$$

Sketsa hasilnya :



9. Soal :

Untuk kasus yang sama dengan no.8, tuliskan ekspresi integral yang menentukan secara eksplisit nilai $\mu(T)$.

Solusi :

Dengan $\varepsilon = p^2 / 2m$, maka

$$N = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty p^2 \bar{n}_\varepsilon dp$$

$$= \frac{2\pi(2m)^{3/2} V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1}$$

atau

$$N/V = \frac{2\pi}{\hbar^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty x^{1/2} \frac{dx}{e^{(x-x_\mu)} - 1}$$

Di mana $x_\mu = \mu/kT \leq 0$. Nilai N/V tak berubah pada saat T menurun nilainya, namun $\mu(T)$ berkurang terus hingga mendekati nol.

10. Soal :

Dari hasil yang diperoleh dari soal no.9, perkirakan $\mu(T)$ untuk $T < T_c$. Deskripsikan nilai $\bar{n}(\varepsilon, T)$ untuk $T < T_c$.

Solusi :

Untuk boson, berlaku $\mu < 0$. Pada saat $T \leq T_c, \mu \approx 0$

Pada saat yang sama, berlaku

$$\bar{n}_{\varepsilon>0} = \frac{1}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

dan

$$\begin{aligned} \bar{n}_{\varepsilon=0} &= n \left[1 - \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} (kT)^{5/2} \int_0^\infty x^{1/2} \frac{dx}{e^x - 1} \right] \\ &= n \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] \end{aligned}$$

11. Soal :

Cari ekspresi untuk temperatur transisi Bose-Einstein T_c untuk gas yang terdiri dari N partikel Bose tak berspin bermassa m berada dalam ruang tertutup dengan volume V dan pada temperatur T .

Solusi :

Gunakan n sebagai densitas dan T_c sebagai temperatur kritis. Perhatikan bahwa pada temperatur T_c potensial kimia mendekati nol dan jumlah partikel pada keadaan dasar juga masih mendekati nol, sehingga

$$n = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

$$= \frac{2\pi}{h^3} (2mkT_c)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1}$$

di mana integral

$$A = \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1} = 1,306\sqrt{\pi}$$

sehingga

$$T_c = \frac{h^2}{2mk} \left(\frac{n}{2\pi A} \right)^{2/3}$$

12. Soal :

Pertimbangkan sebuah sistem gas boson yang identik, tak berinteraksi, dan non-relativistik. Jelaskan apakah efek kondensasi Bose-Einstein dapat diterapkan dalam kasus gas dua dimensi maupun gas satu dimensi.

Solusi :

Kondensasi Bose-Einstein terjadi pada saat $\mu = 0$.

Untuk kasus gas dua dimensi, berlaku

$$N = \frac{2\pi mA}{h^2} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1}$$

$$= \frac{2\pi mA}{h^2} \int_0^\infty \left(\sum_{l=1}^\infty e^{-l(\varepsilon-\mu)/kT} \right) d\varepsilon$$

$$= \frac{2\pi mA}{h^2} kT \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l} e^{l\mu/kT}$$

Jika $\mu = 0$, maka persamaan di atas divergen. Maka $\mu \neq 0$ dan kondensasi Bose-Einstein tak terjadi pada gas dua dimensi.

Untuk kasus gas satu dimensi, berlaku

$$N = \frac{\sqrt{2mL}}{2h} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon} (e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1)}$$

Jika $\mu = 0$, maka bagian integral pada persamaan di atas divergen. Maka sekali lagi $\mu \neq 0$ dan kondensasi Bose-Einstein tak terjadi pada gas satu dimensi.

13. Soal :

Pertimbangkan sebuah gas foton yang dibatasi dalam volume V dan dalam kesetimbangan pada temperatur T . Foton tersebut merupakan partikel tak bermassa, sehingga $\varepsilon = pc$.

- Tentukan potensial kimia dari gas. Jelaskan.
- Tentukan bagaimana jumlah foton pada volume tersebut bergantung pada temperatur.

Solusi :

- Potensial kimia dari gas foton adalah nol. Karena jumlah foton tidak kekal pada sebuah nilai temperatur dan volume yang diberikan, jumlah rata-rata foton ditentukan oleh

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = 0$$

maka

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = 0$$

- Rapat keadaan dari sistem ini adalah

$$\left(\frac{8\pi V p^2}{h^3} \right) dp$$

atau

$$\left(\frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3} \right) d\omega$$

Sehingga jumlah fotonnya adalah

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \int \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega \\ &= \frac{V}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^3 \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1} d\alpha \\ \bar{N} &\propto T^3\end{aligned}$$

14. Soal :

Tunjukkan bahwa untuk gas foton berlaku $p = U/3V$

Solusi :

Rapat keadaan dinyatakan oleh $D(\varepsilon) = \alpha V \varepsilon^2 d\varepsilon$, dengan α adalah konstanta.

Dengan

$$\ln \Xi = - \int D(\varepsilon) \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon}) d\varepsilon$$

$$p = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \ln \Xi$$

$$= - \frac{\alpha}{\beta} \int \varepsilon^2 \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon}) d\varepsilon$$

diperoleh

$$\begin{aligned}p &= - \frac{1}{3V} \int_0^\infty V \alpha \varepsilon^2 \frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \\ &= U/3V\end{aligned}$$

15. Soal :

Dengan menggunakan hukum I dan II termodinamika, serta hubungan $p = U/3V$, carilah ketergantungan densitas energi terhadap temperatur pada gas foton.

Solusi :

Untuk radiasi termal, berlaku

$$U(T, V) = u(T)V$$

Dengan menggunakan hubungan termodinamika berikut :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

Dari pernyataan tersebut diperoleh

$$u = \frac{T}{3} \frac{\partial u}{\partial T} - \frac{u}{3}$$

atau

$$u = \gamma T^4, \text{ dengan } \gamma \text{ adalah konstan}$$

16. Soal :

- Tunjukkan bahwa jumlah foton dalam keadaan setimbang pada temperatur T pada sebuah rongga dengan volume V adalah $N = V(kT / hc)^3$ dikali sebuah konstanta numerik.
- Gunakan hasil ini untuk mendapatkan ekspresi kualitatif dari kapasitas panas dari gas foton pada volume konstan.

Solusi :

- Rapat keadaan foton dinyatakan oleh

$$dg = \frac{V}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \varepsilon^2 d\varepsilon$$

sehingga

$$N = \int \frac{V}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \varepsilon^2 \frac{1}{e^{\beta \varepsilon} - 1} d\varepsilon$$

$$= V \cdot \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^2 \cdot \alpha$$

dengan

$$\beta = \frac{1}{kT}, \quad \alpha = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{e^\lambda - 1} d\lambda$$

b. Rapat energinya adalah

$$u = \int \frac{V}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \varepsilon^2 \frac{\varepsilon}{e^{\beta \varepsilon} - 1} d\varepsilon$$

$$= kTV \cdot \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \cdot \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^3}{e^\lambda - 1} d\lambda$$

Sehingga dari pernyataan $C_V = \frac{\partial u}{\partial T}$, diperoleh $C_V \propto T^3$

17. Soal :

Alam semesta kita dilingkupi oleh radiasi benda hitam 3 K. Dalam pandangan sederhana, radiasi ini timbul dari ekspansi adiabatik dari banyak awan foton yang diproduksi pada saat ‘big-bang’.

- Mengapa ekspansinya sekarang bersifat adiabatik, bukan, misalnya, isothermal?
- Jika dalam 10^{10} tahun berikutnya alam semesta mengembang sebanyak faktor dua, apa yang terjadi dengan temperatur dari radiasi benda hitam tersebut?

Solusi :

- Awan foton merupakan sistem terisolasi, sehingga ekspansinya bersifat adiabatik.
- Rapat energi dari radiasi benda hitam adalah $u = \alpha T^4$, sehingga energi totalnya adalah $E \propto VT^4$. Dari persamaan $TdS = dE + pdV$, berlaku

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \propto VT^3$$

Dengan demikian $S = VT^3 \cdot \text{konstanta}$

Untuk ekspansi adiabatik reversibel, entropi S tetap, tak berubah. Dengan demikian, ketika volume V berubah menjadi dua kali lipat, T akan berkurang dengan faktor $(2)^{-1/3}$ sehingga setelah 10^{10} tahun, temperaturnya akan menjadi

$$T = \frac{3K}{2^{1/3}}$$

18. Soal :

Untuk kasus pada soal no. 16, Tuliskan integral yang menentukan seberapa besar nilai energi per meter kubik yang berada dalam awan radiasi ini. Perkirakan hasilnya dalam orde joule per meter kubik.

Solusi :

Radiasi benda hitam mematuhi statistika Bose-Einstein, maka

$$\frac{E}{V} = 2 \int \frac{d^3 p}{h^3} pc \frac{1}{e^{\beta pc} - 1} = \frac{8\pi c}{h^3} \frac{1}{(\beta c)^4} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}$$

Dengan faktor 2 menyatakan jumlah polarisasi per keadaan. Dengan demikian,

$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi^5}{15} \frac{(kT)^4}{(hc)^3} = 10^{-14} \text{ J/m}^3$$

19. Soal :

Alam semesta kita dilingkupi oleh radiasi benda hitam (foton) pada temperatur $T = 3 \text{ K}$. Radiasi ini diduga merupakan peninggalan dari perkembangan awal 'big-bang'. Tuliskan ekspresi jumlah densitas N secara analitik sebagai fungsi T dan konstanta universal. Beberapa koefisien numerik sebaiknya dibiarkan dalam bentuk integral tak berdimensi saja.

Solusi :

Distribusi Bose diberikan oleh :

$$n(k) = 1 / (e^{\beta \varepsilon(k)} - 1)$$

Jumlah total foton adalah :

$$N = 2 \cdot V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta \hbar c k / 2\pi} - 1}$$

dengan $\varepsilon(k) = \hbar c k$ untuk foton, dan $\beta = \frac{1}{\kappa_B T}$. Faktor dua timbul karena adanya polarisasi dua arah. Sehingga :

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \cdot I$$

dengan

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty dx \cdot x^2 e^{-nx} = 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \approx 2.4 \end{aligned}$$

20. Soal :

Anggap alam semesta kita merupakan rongga sferis dengan radius 10^{28} cm dan dilingkupi oleh dinding yang tak-tembus. Jika temperatur dalam rongga adalah 3 K, tentukan jumlah foton yang ada di alam semesta dan energi yang dikandung oleh foton-foton tersebut.

Solusi :

Jumlah foton yang ada dalam frekuensi angular dari ω sampai $\omega + d\omega$ adalah

$$dN = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

Jumlah total foton adalah :

$$\begin{aligned}
N &= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega / 2\pi} - 1} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{1}{(\beta \hbar)^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \\
&= \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \cdot 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \approx \frac{2 \times 1.2}{\pi^2} \cdot V \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \\
&= \frac{2.4}{\pi^2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (10^{28})^3 \cdot \left(\frac{1.38 \times 10^{-16} \times 3}{1.05 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10}} \right)^3 \\
&\approx 2.5 \times 10^{87}
\end{aligned}$$

Dengan total energinya adalah

$$\begin{aligned}
E &= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} = \frac{\pi^2 k^4}{15 (\hbar c)^3} V T^4 \\
&\approx 2.6 \times 10^{72} \text{ erg}
\end{aligned}$$

Soal Latihan

1. Tunjukkan bahwa kompresibilitas isothermal κ_T dan kompresibilitas adiabatik κ_S dari gas ideal Bose diberikan oleh :

$$\kappa_T = \frac{1}{nkT} \frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)}, \kappa_S = \frac{3}{5nkT} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{5/2}(z)}$$

dengan $n(=N/V)$ adalah densitas partikel dalam gas.

2. Tunjukkan bahwa pada gas ideal Bose berlaku :

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_P = \frac{5}{2T} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

3. Dengan menggunakan hubungan

$$C_P - C_V = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = TV \kappa_T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2$$

dan

$$C_P / C_V = \kappa_T / \kappa_S$$

buktikan bahwa

$$\gamma \equiv C_P / C_V = \frac{5}{3} \frac{g_{5/2}(z) g_{1/2}(z)}{\{g_{3/2}(z)\}^2}$$

4. Hitunglah $(\partial^2 P / \partial T^2)_V, (\partial^2 \mu / \partial T^2)_V, (\partial^2 \mu / \partial T^2)_P$, untuk gas ideal Bose, dan ujilah apakah hasilnya sesuai dengan hubungan-hubungan termodinamika berikut :

$$C_V = VT \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V - NT \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \right)_V$$

dan

$$C_P = -NT \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \right)_P$$

5. Kecepatan suara dalam fluida diberikan oleh $w = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_S}$ dengan ρ adalah densitas fluida. Tunjukkan bahwa untuk gas ideal Bose berlaku :

$$w^2 = \frac{5kT}{3m} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} = \frac{5}{9} \langle u^2 \rangle \text{ dengan } \langle u^2 \rangle \text{ adalah kuadrat rata-rata kecepatan partikel dalam gas.}$$

6. Tunjukkan bahwa untuk gas ideal Bose berlaku

$$\langle u \rangle \left\langle \frac{1}{u} \right\rangle = \frac{4}{\pi} \frac{g_1(z)g_2(z)}{\{g_{3/2}(z)\}^2}$$

dengan u adalah kecepatan partikel. Tinjau untuk keadaan dimana $z \rightarrow 0$ dan $z \rightarrow 1$.

7. Tunjukkan bahwa energi rata-rata tiap foton dalam radiasi benda hitam rongga sangat dekat dengan nilai $2,7kT$.
8. Matahari dapat dianggap sebagai benda hitam pada temperatur 5800 K, dengan diameter $1,4 \times 10^9$ m berjarak $1,5 \times 10^{11}$ m dari bumi.
- Hitung intensitas radian total dari sinar matahari pada permukaan bumi.
 - Seberapa besar tekanan yang dilakukan pada permukaan yang menyerap sempurna yang ditempatkan normal terhadap sinar matahari?

- c) Jika sebuah satelit dianggap memiliki permukaan yang menyerap sempurna, dan menghadap normal terhadap sinar matahari, berapakah temperatur ekuivalen yang diterima?
9. Gunakan persamaan tekanan kinetik gas umum $P = \frac{1}{3} n \langle pu \rangle$ pada gas roton dan ujilah bahwa hasil yang diperoleh akan cocok dengan hubungan Boltzmann $P = nkT$.

10. Pertimbangkan sebuah gas ideal Bose dalam medan gravitasi uniform. Tunjukkan bahwa fenomena kondensasi Bose-Einstein yang terjadi pada temperatur T_C diberikan oleh

$$T_C \approx T_C^0 \left[1 + \frac{8}{9} \frac{1}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{\pi mgL}{kT_C^0} \right)^{1/2} \right]$$

dengan L adalah tinggi kontainer dan $mgL \approx kT_C^0$.

11. Untuk kasus gas ideal Bose dalam medan gravitasi uniform. Tunjukkan bahwa pada fenomena kondensasi Bose-Einstein, berlaku :

$$(\Delta C_V)_{T=T_C} \approx -\frac{9}{8\pi} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) Nk \left(\frac{\pi mgL}{kT_C^0} \right)^{1/2}$$

12. Pertimbangkan gas ideal Bose dalam ensemble grand kanonik. Pelajari fluktuasi jumlah partikel N dan energi total E . Jelaskan apa yang terjadi ketika g tersebut terdegenerasi tinggi.

13. Pertimbangkan gas ideal Bose yang dibatasi oleh luas A 2-D. Tuliskan ungkapan jumlah partikel pada keadaan tereksitasi, N_e , dan jumlah partikel pada keadaan dasar, N_0 , dalam fungsi z , T dan A , dan tunjukkan bahwa sistem tersebut tak memenuhi kondensasi Bose-Einstein kecuali pada $T \rightarrow 0$ K.

14. Untuk kasus yang sama dengan no.13, tunjukkanlah bahwa jika A dan N tetap, N_e , dan N_0 , dalam orde N , maka kondensasi terjadi pada

$$T \propto \frac{h^2}{mkl^2} \frac{1}{\ln N}$$

dengan $l \left[\sim \sqrt{(A/N)} \right]$ adalah jarak rata-rata antarpartikel dalam sistem.

15. Pertimbangkan kasus gas ideal Bose n -dimensi yang spektrum energi partikel-tunggalnya diberikan oleh $\varepsilon \propto p^s$ dengan s adalah sembarang bilangan positif. Jelaskan ketergantungan kondensasi Bose-Einstein terhadap n dan s . Jelaskan sifat-sifat termodinamika sistem tersebut, yaitu :

$$P = \frac{s}{n} \frac{U}{V}, \quad C_V(T \rightarrow \infty) = \frac{n}{s} Nk, \quad \text{dan} \quad C_P(T \rightarrow \infty) = \left(\frac{n}{s} + 1 \right) Nk$$

16. Fungsi partisi kanonik radiasi benda hitam dapat ditulis oleh :

$$Q(V, T) = \prod_{\omega} Q_1(\omega, T)$$

sehingga

$$\ln Q(V, T) = \sum_{\omega} \ln Q_1(\omega, T) \approx \int_0^{\infty} \ln Q_1(\omega, T) g(\omega) d\omega$$

dengan Q_1 adalah fungsi partisi osilator-tunggal dan $g(\omega)$ densitas keadaan. Dengan menggunakan informasi tersebut, hitung energi Helmholtz, P dan U/V dari sistem tersebut.

17. Tunjukkan bahwa entropi tiap foton pada radiasi benda hitam tak bergantung pada temperatur, dan dalam dimensi spasial d diberikan oleh:

$$S = (d+1) \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-d-1}}{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-d}}$$

18. Tabel di bawah menunjukkan beberapa nilai hasil eksperimen T terhadap kapasitas panas He^4 cair. Nilai-nilai tersebut diperoleh pada kurva tekanan uap dari Helium cair.

Temperatur (K)	Kapasitas Panas (joule/g-deg)
0.60	0.0051
0.65	0.0068
0.70	0.0098
0.75	0.0146
0.80	0.0222
0.85	0.0343
0.90	0.0510
0.95	0.0743
1.00	0.1042

(a) Tunjukkan bahwa sifat kapasitas panas pada temperatur yang sangat rendah merupakan karakteristik gas fonon.

(b) Hitung kecepatan suara di dalam Helium cair pada temperatur rendah.

19. Tunjukkan bahwa persamaan keadaan gas ideal Bose dalam fasa gas dapat dituliskan dalam bentuk ekspansi virial berikut :

$$\frac{Pv}{kT} = 1 - \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\lambda^3}{v} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{9\sqrt{3}} \right) \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2 - \dots$$

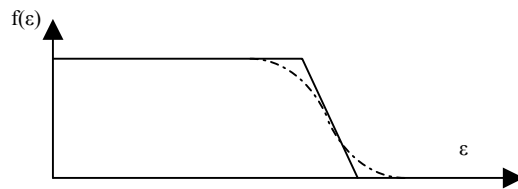
20. Tunjukkan dalam kasus gas Bose tak-ideal dalam fasa gas, persamaan keadaannya dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{Pv}{kT} = 1 + \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{2a}{\lambda} \right) \left(\frac{\lambda^3}{v} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \right) \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2 - \dots$$

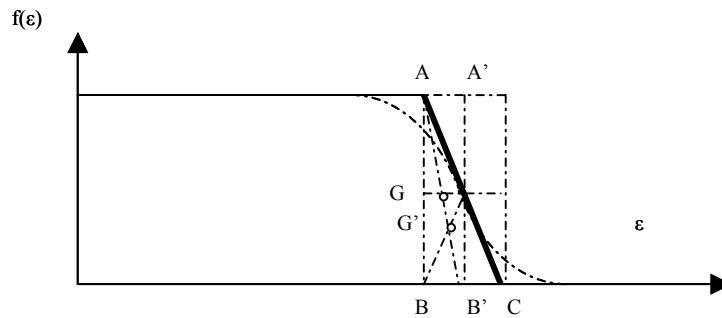
Bab 16 Soal dan Penyelesaian

Statistik Fermi-Dirac

1. Pada temperatur tertentu, distribusi Fermi $f(\epsilon)$ dapat dinyatakan dalam aproksimasi kasar sebagai garis putus-putus sebagaimana tampak pada gambar. Berikan penjelasan sederhana mengenai munculnya kapasitas panas linear yang muncul dari aproksimasi ini.



Solusi :



$D(\epsilon)f(\epsilon)$ ditunjukkan dengan garis putus-putus pada gambar. Jika digunakan aproksimasi tersebut pada soal, $D(\epsilon)f(\epsilon)$ merupakan garis tebal pada gambar. Beda ΔE antara energi internal pada temperatur T kelvin dan 0 kelvin bersesuaian dengan beda antara *center of gravity* G' dari segitiga ABC dan *center of gravity* G dari segiempat AA'B'B terhadap sumbu ϵ . Dengan menuliskan $BC = 2\alpha kT$, dengan α adalah tetapan yang berorde satu, dapat dituliskan koordinat untuk G dan G' sebagai berikut :

$$G : OB + \frac{1}{2} BB' = OB + \frac{1}{2} akT$$

$$G' : OB + \frac{1}{3} BC = OB + \frac{2}{3} akT$$

Sehingga dapat diperoleh

$$\Delta E = akTD \times \frac{1}{6} akT = \frac{1}{6} \alpha^2 D(kT)^2$$

Dengan $akTD$ berarti jumlah elektron yang terkandung pada daerah AA'B'B. Jika dipilih AC sebagai tangen dari kurva distribusi Fermi, maka diperoleh $2akT = 1/|f'(\mu)| = 4 kT$. Sehingga diperoleh

$$C = \frac{d\Delta E}{dT} = \frac{4}{3} Dk^2 T$$

2. Ditinjau suatu semikonduktor intrinsik yang mempunyai celah energi (*energy gap*) selebar E_G , dengan densitas elektron konduksi n dan densitas *hole* p . Tunjukkan bahwa hubungan berikut dipenuhi :

$$n = p = 2 \left(\frac{2\pi(m_e m_h)^{1/2} kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-E_G / 2kT}$$

Tunjukkan pula bahwa potensial Fermi dari sistem elektron dapat dinyatakan dengan :

$$\mu = \frac{1}{2} E_G + \frac{3}{4} kT \log \frac{m_h}{m_e}$$

jika elektron konduksi dan *hole* diasumsikan berkelakuan sebagai partikel bebas dengan massa efektif masing-masing m_e dan m_h . Awal nilai energi diambil pada bagian atas pita yang terisi dengan asumsi $E_G \gg kT$. Hitung nilai n ($= p$) untuk kasus : $E_G = 0,7$ eV, $T = 300$ K, $m_h = m_e = m$.

Solusi :

Jumlah total elektron diberikan oleh :

$$N = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} + \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} + 1} \quad (1)$$

Dengan ε_i merupakan level energi pada pita konduksi dan ε_j merupakan level energi pada pita terisi. Pada kasus semikonduktor intrinsik jumlah total *state* elektron sama dengan N , yakni $\sum_j 1 = N$. Sehingga dapat dituliskan :

$$\sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} = \sum_j \left(1 - \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} + 1} \right) = \sum_j \frac{1}{e^{\beta(-\varepsilon_j - \mu)} + 1} \quad (2)$$

Persamaan ini menunjukkan kesamaan jumlah elektron konduksi dan jumlah *hole* dalam pita yang terisi, yakni

$$n = p. \quad (3)$$

ε_i dan ε_j dapat dituliskan sebagai

$$\varepsilon_i = E_G + \mathbf{p}^2/2m_e, \quad \varepsilon_j = -\mathbf{p}^2/2m_h \quad (4)$$

dengan \mathbf{p} adalah momentum partikel dan n dan p ditunjukkan oleh

$$n = \frac{2}{h^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{e^{\beta(E_G - \mu + \mathbf{p}^2/2m_e)} + 1}, \quad (5)$$

$$p = \frac{2}{h^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{e^{\beta(\mu + \mathbf{p}^2/2m_h)} + 1}. \quad (6)$$

Pada 0 K, baik n maupun p sama dengan nol. Pada temperatur yang tidak sangat tinggi, hubungan $E_G - \mu \gg kT$, dan $\mu \gg kT$ masih berlaku dan nilai n dan p dapat dianggap kecil. Dengan demikian dapat diasumsikan sifat non-degenerasi baik pada elektron konduksi maupun *hole*. Sehingga dapat diperoleh

$$n \sim \frac{2}{h^3} \int e^{-\beta(E_G - \mu + \mathbf{p}^2/2m_e)} d\mathbf{p} = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(E_G - \mu)/kT}, \quad (6)$$

$$p \sim \frac{2}{h^3} \int e^{-\beta(\mu + \mathbf{p}^2/2m_h)} d\mathbf{p} = 2 \left(\frac{2\pi m_h kT}{h^2} \right) e^{-\mu/kT}. \quad (7)$$

Dari persamaan (7), (8) dan (3) dapat ditentukan $e^{\mu/kT}$ yakni,

$$e^{\mu/kT} = \left(\frac{m_h}{m_e} \right)^{3/4} e^{E_G/2kT} \quad (9)$$

Dari (7) dan (8) dapat dituliskan

$$n = p = 2 \left[\frac{2\pi(m_e m_h)^{1/2} kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-E_G/2kT} \quad (10)$$

Dari (9) dapat diperoleh

$$\mu = \frac{1}{2} E_G + \frac{3}{4} kT \log \frac{m_h}{m_e} \quad (11)$$

Potensial Fermi yang ditentukan persamaan (11) sangat dekat dengan pertengahan celah energi jika nilai $\log(m_h/m_e)$ berorde satu dan temperatur berada di bawah nilai E_G/k . Untuk $E_G = 0,7$ eV,

E_G/k bernilai $0,81 \times 10^4$ K. Karenanya pada temperatur biasa hubungan $E_G/k \gg T$, $E_G - \mu \gg kT$, dan $\mu \gg kT$ dipenuhi. Dengan nilai $T = 300$ K dan $m_e = m_h = m$, diperoleh

$$n = p = 4,83 \times 10^{15} \times (300)^{3/2} e^{-0,41 \times 10^4 / 300} \sim 1,6 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}.$$

3. Ditinjau semikonduktor tipe- n yang level donor-nya berada E_D dibawah dasar dari pita konduksi. Misal N_D , n_D dan n adalah berturut-turut jumlah donor, jumlah elektron pada level donor dan jumlah elektron konduksi masing-masing per satuan volume. Turunkan hubungan

$$\frac{n(N_D - n_D)}{n_D} = \frac{1}{2} N_e e^{-E_D / kT}$$

dan tafsirkan arti fisisnya. Di sini diasumsikan bahwa level donor tidak dapat dihuni oleh dua elektron pada saat bersamaan, sistem elektron *non-degenerate*, dan $N_e = 2(2\pi m^* kT/h^2)^{3/2}$, dengan m^* adalah massa elektron konduksi.

Solusi:

Ditinjau sampel satu satuan volume. Energi bebas elektron F pada level donor ditunjukkan oleh persamaan

$$F = -n_D E_D - kT \log \left(\frac{N_D!}{n_D! (N_D - n_D)!} \cdot 2^{n_D} \right) \quad (1)$$

$$= -n_D E_D - kT \left(n_D \log 2 - n_D \log \frac{n_D}{N_D} - (N_D - n_D) \log \frac{N_D - n_D}{N_D} \right) \quad (2)$$

bilangan dalam logaritma pada suku kedua persamaan (1) berarti jumlah total konfigurasi elektron n_D (spin + ataupun -) yang terdistribusi pada level donor N_D . Pada persamaan (2) faktor ini disederhanakan dengan menggunakan rumus Strling. Potensial kimia elektron μ pada level donor diberikan oleh persamaan

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial n_D} = -E_D - kT \left(\log 2 - \log \frac{n_D}{N_D - n_D} \right), \quad (3)$$

Sehingga

$$\frac{n_D}{N_D - n_D} = 2 \cdot e^{(E_D + \mu) / kT} \quad (4)$$

Atau

$$n_D = \frac{N_D}{\frac{1}{2} e^{-(E_D + \mu)/kT} + 1}. \quad (5)$$

Sementara itu jumlah elektron konduksi n diberikan oleh persamaan

$$n = \frac{2}{h^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{e^{-(\varepsilon - \mu)/kT} + 1}, \text{ dengan } (\varepsilon = \mathbf{p}^2/2m^*) \quad (6)$$

Dimana faktor 2 muncul karena degenerasi spin. Dengan asumsi degenerasi lemah, persamaan (6) dapat dituliskan sebagai

$$n = \frac{2}{h^3} \int e^{-(\varepsilon - \mu)/kT} d\mathbf{p} = 2 \left(\frac{2\pi m^* kT}{h^2} \right)^{3/2} \cdot e^{\mu/kT} = N_e e^{\mu/kT}. \quad (7)$$

Dengan mengeliminasi μ pada persamaan (4) dan (7), diperoleh,

$$\frac{n(N_D - n_D)}{n_D} = \frac{1}{2} N_e e^{-E_D/kT}. \quad (8)$$

Prinsip dari alur pemikiran di atas tidak lain adalah penentuan kesetimbangan reaksi pada persamaan berikut



D berarti donor dengan elektronnya, D^+ donor terionisasi dan e adalah elektron konduksi. Jika digunakan notasi $[D] = n_D$, $[D^+] = N_D - n_D$ dan $[e] = n$, maka persamaan (8) berbentuk hukum aksi massa

$$\frac{[D^+][e]}{[D]} = K(T) \quad (10)$$

4. Suatu elektron dalam medan magnet \mathbf{H} punya energi $\pm \mu_B \mathbf{H}$ sesuai dengan keadaan momen magnet spin paralel atau anti paralel terhadap medan. Hitung suseptibilitas paramagnetik spin dari sistem elektron bebas pada 0 K dengan degenerasi penuh.

Solusi :

Energi elektron dapat dituliskan sebagai berikut

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \pm \mu_B \mathbf{H} \quad (1)$$

Dengan tanda \pm berkaitan dengan dua arah momen magnet spin. Pada 0 K elektron menduduki level energi hingga potensial Fermi μ_0 . Karenanya energi kinetik elektron $\mathbf{p}^2/2m$ dengan spin +

bernilai antara 0 hingga $\mu_0 - \mu_B \mathbf{H}$ dan yang spin – bernilai dari 0 hingga $\mu_0 + \mu_B \mathbf{H}$. Jumlahnya diberikan oleh persamaan

$$N_+ = \frac{4\pi V}{3h^3} \cdot p_+^3, \quad \frac{1}{2m} p_+^2 = \mu_0 - \mu_B \mathbf{H} \quad (2)$$

$$N_- = \frac{4\pi V}{3h^3} \cdot p_-^3, \quad \frac{1}{2m} p_-^2 = \mu_0 + \mu_B \mathbf{H} \quad (3)$$

Momen magnet total diberikan oleh

$$M = -\mu_B (N_+ - N_-) = -\frac{4\pi V}{3h^3} \mu_B (p_+^3 - p_-^3) \quad (4)$$

$$= \mu_B \frac{4\pi V}{3h^3} [\{2m(\mu_0 + \mu_B H)\}^{3/2} - \{2m(\mu_0 - \mu_B H)\}^{3/2}] \quad (5)$$

Dengan mengasumsikan bahwa $\mu_0 \gg \mu_B \mathbf{H}$, dapat diperoleh

$$M = 3\mathbf{H} \mu_B^2 \frac{4\pi V}{3h^3} (2m\mu_0)^{3/2} / \mu_0 + \dots = \frac{3}{2} \frac{\mu_B^2 N}{\mu_0} \mathbf{H} + \dots, \quad (6)$$

Dengan $N = 2.4\pi V (2m\mu_0)^{3/2} / 3h^2$. akhirnya diperoleh

$$\chi = \frac{3}{2} n \mu_B^2 / \mu_0 = \frac{3}{2} n \mu_B^2 / kT_0.$$

5. Misal suatu besaran fisika I dari suatu sistem elektron dinyatakan dengan suatu integral yang mengandung distribusi Fermi $f(\varepsilon)$

$$I = \int_0^\infty g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \equiv \int_0^\infty \psi(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (g = \psi D)$$

Dengan D adalah *density of states*. Turunkan rumus-rumus berikut ini jika degenerasi cukup kuat :

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_\mu = \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T g'(\mu_0) + O(T^3),$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \mu} \right)_T = g(\mu_0) + O(T^2),$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_N = \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T \psi'(\mu_0) D(\mu_0) + O(T^3).$$

Solusi :

$$\begin{aligned}
f(\varepsilon) &= \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}, \quad (\beta=1/kT) \\
\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\mu &= \frac{\varepsilon - \mu}{kT^2} \frac{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}{[e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1]^2} = -\frac{\varepsilon - \mu}{T} f'(\varepsilon), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_T = -f'(\varepsilon). \\
\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_\mu &= -\frac{1}{T} \int_0^\infty (\varepsilon - \mu) g(\varepsilon) f'(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{6} \pi^2 k^2 T \left[\frac{d^2}{d\varepsilon^2} (\varepsilon - \mu) g \right]_{\varepsilon=\mu} + \dots \\
&= \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T g'(\mu) + O(T^3), \tag{1}
\end{aligned}$$

Dan

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \mu}\right)_T = -\int_0^\infty g(\varepsilon) f'(\varepsilon) d\varepsilon = g(\mu) + O(T^2). \tag{2}$$

Untuk $g = D$, maka $I = N$. Dari hubungan

$$dN = \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T d\mu + \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu dT = 0$$

Dapat diperoleh

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_N = -\frac{1}{3} \pi^2 k^2 T \frac{D'(\mu)}{D(\mu)} + O(T^3). \tag{3}$$

Berdasarkan persamaan (3) dapat dilihat g' dan g pada persamaan (1) dan (2), μ dapat diganti dengan nilai μ_0 pada 0 K. Dapat pula diperoleh hubungan

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_N &= \left(\frac{\partial I}{\partial \mu}\right)_T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_N + \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_\mu \\
&= -g(\mu) \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T \frac{D'(\mu)}{D(\mu)} + \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T g'(\mu) + O(T^3) \\
&= \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T \psi'(\mu_0) D(\mu_0) + O(T^3).
\end{aligned}$$

6. Di dalam logam dianggap ada elektron yang dapat berpindah secara bebas. *Atomic heat* dari kristal Na (volume atom $24 \text{ cm}^3/\text{mol}$) sama dengan $4,5R$ jika diasumsikan adanya satu elektron bebas per atom dan berlaku ekipartisi energi sebagaimana berlaku dalam statistik klasik. Tunjukkan rincian logikanya dan jelaskan mengapa *atomic heat* logam biasanya mengikuti hukum Dulong-Petit dan mengapa kontribusi dari elektron bebas tampak hampir nol, berlawanan dengan kesimpulan sebelumnya.

Solusi:

Sistem elektron bebas yang dianggap sebagai gas ideal klasik punya kapasitas panas molar pada volume konstan (C_V) sama dengan $3/2R$ sebagai akibat diberlakukannya ekipartisi energi pada derajat kebebasan translasinya. Di lain pihak vibrasi kisi kristal logam menyumbang $3R$ terhadap nilai C_V , karena dipunyai $3N_0 - 6 \approx 3N_0$ derajat kebebasan per mol (N_0 = bilangan Avogadro) dan dapat diperlakukan sebagai sistem $3N_0$ osilator harmonik yang mengikuti statistik klasik. Dengan menjumlahkan kedua jenis tersebut dapat diperoleh $4,5 R$ sebagai kapasitas panas atom logam.

Jika sistem elektron dianggap sebagai gas Fermi yang terdegenerasi, elektron menempati pita konduksi hingga level pada orde potensial Fermi $\mu_0 = kT_0$ ($\gg kT$). Energi termal yang berorde kT tidak dapat mengeksitasi elektron pada level yang lebih rendah ke level yang lebih tinggi yang kosong, karena adanya larangan Pauli. Hanya elektron di dekat potensial Fermi dapat menyerap energi termal kT dan berpindah ke level lebih tinggi yang kosong, karena distribusi Fermi terdegenerasi turun secara tajam dari 1 ke 0 dalam selang energi selebar kT disekitar potensial Fermi. Akibatnya elektron yang dapat dieksitasi secara termal berorde $N \times T/T_0$, dan sumbangannya pada kapasitas panas atom berorde $3/2 R \times T/T_0$ dan dapat diabaikan ketika $T \ll T_0$. Dengan asumsi *density of state* berbentuk

$$D(\varepsilon) = 2 \frac{4\pi V}{h^3} p^2 \frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{8\pi V}{h^3} (2m^3 \varepsilon)^{1/2}$$

Dapat diperoleh nilai estimasi untuk μ_0 sebagai berikut

$$\mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N_0}{\pi V_A} \right)^{2/3} = 4,166 \times 10^{-11} V_A^{-2/3} \text{ erg.} \quad (1)$$

Dengan V_A merujuk pada volume atom. Untuk Na $V_A = 24 \text{ cm}^3$ dan $\mu_0 = 5,0 \times 10^{-12} \text{ erg}$ ($= 3,0 \text{ eV}$), $T_0 = \mu_0/k = 3,6 \times 10^4 \text{ K}$. Sesuai dengan hubungan $T \ll T_0$ hal ini dipenuhi dengan baik pada temperatur biasa.

7. Ditinjau suseptibilitas paramagnetik spin dari gas elektron bebas. Jelaskan makna fisis beda kualitatif antara nilai suseptibilitas tersebut pada kasus degenerasi kuat dan degenerasi lemah. Jelaskan pula makna dari rasio antar kedua nilai tersebut.

Solusi :

Pada kasus *non-degenerate*, susptibilitas magnetik spin diberikan oleh persamaan

$$\chi_{\infty} = n\mu_B^2 / kT, \quad (1)$$

Sedangkan untuk kasus *degenerate*

$$\chi_{\infty} = \frac{3}{2} n\mu_B^2 / kT_0. \quad (2)$$

Rasio antara keduanya

$$\frac{\chi_0}{\chi_{\infty}} = \frac{3}{2} \frac{T}{T_0} \quad (3)$$

Dapat dianggap sebagai bilangan yang mewakili rasio antara jumlah elektron yang dapat menerima energi termal terhadap jumlah total elektron yang terdiri atas gas Fermi yang sangat terdegenerasi. Dengan kata lain jika diasumsikan bahwa $n' = n \times 3/2 (T/T_0)$, elektron dapat diperlakukan secara klasik (tidak ada degenerasi) dan punya suseptibilitas magnet sebagaimana persamaan (1), maka akan diperoleh hasil sebagaimana persamaan (2). Penyebab kelakuan ini tidak lain adalah prinsip Pauli, sebuah elektron yang punya energi ε tidak dapat menyerap kuantum eksitasi termal jika keadaan dengan energi $\varepsilon + kT$ telah terisi. Namun, elektron yang menduduki daerah energi selebar kT disekitar potensial Fermi dapat dieksitasi secara bebas.

8. Buatlah estimasi nilai kapasitas panas elektron dan suseptibilitas paramagnetik spin (per satuan massa) dari Li dan Na. Asumsikan bahwa elektron valensi kedua logam tersebut dapat dianggap sebagai elektron bebas dan gunakan $0,534 \text{ g/cm}^3$ dan $0,97 \text{ g/cm}^3$ sebagai densitas masing-masing dari Li dan Na.

Solusi :

Rumus untuk gas Fermi ideal dapat digunakan pada kasus ini

$$C_V = N\pi^2 k^2 T / 2\mu_0$$

$$\chi_s = 3N\mu_B^2 / 2\mu_0$$

$$\mu_0 = \frac{h^2}{2m} (3N / 8\pi V)^{2/3}$$

Dengan N adalah jumlah elektron per satuan massa. Jika densitas adalah ρ , berat molekul M , jumlah elektron valensi z dan bilangan Avogadro N_0 , dapat dituliskan $N = zN_0/M$ dan $N/V = \rho N$, sehingga

$$C_V = \frac{4}{3^{2/3}} \pi^{8/3} \frac{k^2 m N_0^{1/3}}{h^2} \rho^{-2/3} \frac{z^{1/3}}{M^{2/3}} T = 0,3248 \times 10^{-4} \frac{z^{1/3}}{\rho^{2/3} M^{1/3}} T \text{ cal/g.deg}$$

$$\chi_s = 4.3^{1/3} \pi^{2/3} \frac{\mu_B^2}{h^2} \rho^{-2/3} \frac{z^{1/3}}{M^{1/3}} = 1,864^6 \times 10^{-6} \frac{z^{1/3}}{\rho^{2/3} M^{1/3}} \text{ cgs.emu/g}$$

Jika diambil nilai $z = 1$, $\rho = 0,534 \text{ g cm}^{-3}$, $M = 7$ untuk Li

$z = 1$, $\rho = 0,97 \text{ g cm}^{-3}$, $M = 23$ untuk Na, diperoleh

Li : $C_V = 0,2579 \times 10^{-4} T \text{ cal/g.deg}$, $\chi_s = 1,4808 \times 10^{-6} \text{ cgs.emu/g}$.

Na : $C_V = 0,1166 \times 10^{-4} T \text{ cal/g.deg}$, $\chi_s = 0,6691 \times 10^{-6} \text{ cgs.emu/g}$.

9. Tunjukkan bahwa persamaan keadaan gas Fermi ideal dapat dituliskan sebagai

$$pV = 2/3 U$$

dan turunkan rumus untuk kompresibilitas jika degenerasi kuat. Estimasi kompresibilitas kristal Na. Asumsikan bahwa kristal Na punya satu elektron bebas per atom dan gunakan nilai berikut : berat atom = 23, densitas = $0,97 \text{ g/cm}^3$.

Solusi :

Dengan menggunakan fungsi grand partisi Ξ dapat dituliskan

$$pV = kT \log \Xi = kT \int_0^\infty D(\varepsilon) d\varepsilon \log(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)}), \quad (1)$$

Dengan $D(\varepsilon)$ untuk elektron bebas diberikan oleh

$$D(\varepsilon) = C \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{2}{3} C \mu_0^{3/2} = N, \quad \mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3}. \quad (2)$$

Melalui integrasi parsial dapat diperoleh

$$\begin{aligned} pV &= \left(\frac{3}{2} NkT / \mu_0^{3/2} \right) \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \log(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)}), \\ &= \left(\frac{3}{2} NkT / \mu_0^{3/2} \right) \left(\left[\frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \log(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)}) \right]_0^\infty + \frac{2}{3} \beta \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} d\varepsilon / (e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1) \right) \end{aligned}$$

$$= \left(N / \mu_0^{3/2} \right) \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} d\varepsilon f(\varepsilon) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{3} E \quad (3)$$

Pada kasus yang sangat terdegenerasi, E diberikan oleh persamaan

$$E = \frac{3}{5} N \mu_0 \left(1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 - \frac{\pi^4}{16} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^4 + \dots \right), \quad (4)$$

Sehingga dapat dituliskan

$$p = \frac{2}{5} \frac{\mu_0}{v} + \frac{\pi^2}{6} \frac{k^2 T^3}{\mu_0 v} + \dots, \quad (5)$$

Dan kompresibilitas κ diberikan oleh persamaan

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{v(\partial p / \partial v)_T} \\ &= \left(\frac{2}{3} \frac{\mu_0}{v} + \frac{\pi^2 k^2 T^2}{18 \mu_0 v} + \dots \right)^{-1} = \frac{3}{2} \frac{v}{\mu_0} \left(1 - \frac{\pi^2}{18} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right), \end{aligned} \quad (6)$$

Pada 0 K diperoleh

$$\kappa_0 = \frac{3}{2} \frac{v}{\mu_0} = \frac{3}{2} \frac{V_A}{N_0} / \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N_0}{8\pi V_A} \right)^{2/3} = 0,597 V_A^{5/2} \times 10^{-13} \text{ cm}^2 / \text{dyne}$$

Untuk $V_A = 23/0,97 \text{ cm}^3$, diperoleh nilai $\kappa_0 = 11,7 \times 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{dyne}$.

10. Ditinjau sampel logam yang mengandung N atom dan diasumsikan bahwa pita energi logam ini yang dapat menampung $2N$ elektron dihuni oleh $2N-N'$ elektron. Tunjukkan bahwa kontribusi elektron-elektron tersebut terhadap sifat termal logam ekuivalen dengan gas elektron yang level energinya adalah $-\varepsilon_i$ dan potensial kimianya adalah $-\mu$, dimana ε_i dan μ adalah level energi dan potensial kimia sistem elektron.

Solusi :

Sifat termal gas elektron yang terdiri atas $2N-N'$ elektron yang menduduki pita energi tersebut di atas ditentukan oleh energi bebas Helmholtz

$$F = (2N - N')\mu - kT \sum_i \log(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}), \quad (1)$$

$$2N - N' = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_i \log(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}) \right]. \quad (2)$$

Persamaan tersebut dapat diubah menjadi bentuk

$$\begin{aligned} F &= (2N - N')\mu - kT \sum_i \log(1 + e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}) - \sum_i (\mu - \varepsilon_i) \\ &= \sum_i \varepsilon_i - N'\mu - kT \sum_i \log(1 + e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}) - \sum_i (\mu - \varepsilon_i), \end{aligned} \quad (3)$$

Dan

$$2N - N' = \sum_i \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}} = \sum_i \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}} \right) = 2N - \sum_i \frac{1}{1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}}, \quad (4)$$

Atau

$$N' = \sum_i \frac{1}{1 + e^{\beta(-\varepsilon_i - (-\mu))}}, \quad (5)$$

Suku $\sum_i \varepsilon_i$ pada persamaan (3) merupakan konstanta dan tidak berhubungan dengan sifat termal dan dapat dihilangkan dengan mengubah nilai energi nol. Persamaan (3) dan (5) tidak lain adalah persamaan yang menentukan energi bebas Helmholtz dari sistem elektron yang mempunyai energi $-\varepsilon_i$ dengan potensial kimia $-\mu$.

11. Jika ditinjau spin elektron, sebuah elektron pada level donor dapat memiliki dua keadaan. Namun, interaksi Coulomb antar elektron mencegah level donor untuk menampung dua buah elektron pada saat bersamaan. Tentukan suseptibilitas magnetik spin sistem elektron pada level donor dengan asumsi tersebut.

Solusi :

Fungsi grand partisi untuk elektron yang terdistribusi pada N_D donor ditunjukkan oleh

$$\begin{aligned} \Xi &= \left[1 + \lambda \left(e^{(E_D - \mu_B \mathbf{H})/kT} + e^{(E_D + \mu_B \mathbf{H})/kT} \right) \right]^{N_D} \\ &= \left[1 + 2\lambda e^{E_D/kT} \cosh \frac{\mu_B \mathbf{H}}{kT} \right]^{N_D} \end{aligned} \quad (1)$$

Tiga suku dalam kurung adalah keadaan kosong, keadaan yang terisi elektron dengan spin positif dan keadaan dengan spin negatif. $\lambda = \exp(\mu/kT)$ merupakan aktivitas absolut elektron. Titik mula potensial kimia μ , yang juga titik awal energi, diambil pada dasar pita konduksi. Karenannya

energi elektron pada level donor adalah $-E_D + \mu_B \mathbf{H}$ atau $-E_D - \mu_B \mathbf{H}$ bergantung pada apakah spin elektronnya positif atau negatif. Dari persamaan (1) dapat dituliskan

$$M = kT \frac{\partial \log \Xi}{\partial \mathbf{H}} = N_D \mu_B \frac{2\lambda e^{E_D/kT} \sinh(\mu_B \mathbf{H} / kT)}{1 + 2\lambda e^{E_D/kT} \cosh(\mu_B \mathbf{H} / kT)}. \quad (2)$$

Untuk H kecil dapat diperoleh besaran per satuan volume,

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{N_D \mu_B^2}{kT} \frac{1}{\frac{1}{2} e^{-(E_D + \mu)/kT} + 1} = \frac{n_D \mu_B^2}{kT}. \quad (3)$$

Ini berarti bahwa n_D elektron dalam level donor mengarahkan spinnya pada medan magnet secara independen.

12. Tentukan potensial kimia dan kapasitas panas gas Fermi ideal (spin $1/2$) relativistik yang sangat *degenerate*.

Solusi :

Dengan menuliskan $\varepsilon = cp$, maka dapat diturunkan hubungan sebagai berikut

$$\frac{N}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}, \quad (1)$$

$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon p^2 dp}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} = \frac{8\pi}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3 d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}. \quad (2)$$

Untuk kasus yang terdegenerasi kuat, dengan $g(\varepsilon) = \varepsilon^s$, dapat dituliskan

$$\int_0^\infty \varepsilon^s f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\mu^{s+1}}{s+1} + \frac{(\pi kT)^2}{6} s \mu^{s-1} + \frac{7(\pi kT)^4}{360} s(s-1)(s-2) \mu^{s-3} + \dots \quad (3)$$

Untuk $s = 2$ dan 3 diperoleh,

$$\frac{N}{V} = \frac{8\pi \mu^3}{3h^3 c^3} \left(1 + \left(\frac{\pi kT}{\mu} \right)^2 \right), \quad (4)$$

$$\frac{E}{V} = \frac{2\pi \mu^4}{h^3 c^3} \left(1 + 2 \left(\frac{\pi kT}{\mu} \right)^2 + \frac{7}{15} \left(\frac{\pi kT}{\mu} \right)^4 \right). \quad (5)$$

Dari persamaan (4) dapat diperoleh

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right), \quad \mu_0 = hc \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3}, \quad \left(n = \frac{N}{V} \right). \quad (6)$$

Jika disubstitusikan ke dalam persamaan (5), dapat diperoleh

$$\frac{E}{V} = \frac{2\pi\mu_0^4}{h^3 c^3} \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right), \text{ sehingga } \frac{E}{N} = \frac{3}{4} \mu_0 \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right), \quad (7)$$

Dan untuk kapasitas panas pada volume tetap

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V,N} = Nk \frac{\pi^2 k^2 T}{\mu_0} + \dots = N \frac{2\pi^{7/3} k^2 T}{3^{1/3} h c n^{1/3}} + \dots \quad (8)$$

Suku pertama CV menunjukkan kebergantungan terhadap suhu sama dengan kasus non-relativistik, tetapi dengan koefisiennya menjadi

$$\frac{(3n)^{1/3}}{2\pi} \frac{h}{mc}$$

Terhadap kasus yang non-relativistik, artinya menjadi sangat lebih besar.

13. Hitung potensial Fermi μ dan energi internal E dari gas Fermi ideal yang terdiri atas partikel berspin $\frac{1}{2}$ hingga suku orde T^4 , untuk kasus degenerasi cukup tinggi.

Solusi :

Density of state $D(\varepsilon)$ untuk partikel bebas dalam kotak bervolume V adalah

$$\begin{aligned} D(\varepsilon) &= \frac{2V}{h^3} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^\varepsilon 4\pi p^2 dp, \quad (p^2 = 2m\varepsilon) \\ &= 2.2\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

Dengan faktor 2 muncul karena degenerasi spin. Pada 0 K keadaan energi sepenuhnya terisi hingga level $\varepsilon = \mu_0$ yang ditentukan dengan hubungan

$$\int_0^{\mu_0} D(\varepsilon) d\varepsilon = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^{\mu_0} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{8\pi}{3} V \left(\frac{2m}{h^2} \mu_0 \right)^{3/2} = N, \quad (2)$$

Atau

$$\mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3},$$

Dengan N adalah jumlah total partikel. Sehingga dapat diperoleh

$$D(\varepsilon) = \frac{3}{2} N \varepsilon^{1/2} / \mu_0^{3/2}. \quad (3)$$

Pada temperatur *finite*, diperoleh

$$\int_0^\infty f(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3}{2} N \mu_0^{-3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} f(\varepsilon) d\varepsilon = N. \quad (4)$$

Menggunakan rumusan untuk kasus terdegenerasi, dengan $g(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2}$, dapat diperoleh

$$E = \frac{3}{5} N \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{3/2} \mu \left(1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 - \frac{7\pi^4}{384} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^4 + \dots \right), \quad (5)$$

Sehingga bahwa

$$E = \frac{3}{5} N \mu_0 \left(1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 - \frac{\pi^4}{16} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^4 + \dots \right). \quad (6)$$

14. Tunjukkan bahwa kapasitas panas C_V dari gas Fermi ideal pada temperatur yang cukup rendah dapat dituliskan sebagai berikut

$$C_V = \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T D(\mu_0)$$

Di sini $D(\varepsilon)$ *density of state* untuk satu partikel.

Solusi :

Pada 0 K, dapat dituliskan persamaan

$$\int_0^{\mu_0} D(\varepsilon) d\varepsilon = N. \quad (1)$$

Pada T kelvin, dapat dituliskan persamaan

$$\int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = N. \quad (2)$$

Dari rumusan untuk kasus *degenerate* dapat dituliskan

$$N = \int_0^\mu D(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 D'(\mu) + \dots \quad (3)$$

Dengan mengurangkan (1) dari (3) diperoleh

$$\int_{\mu_0}^{\mu} D(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 D'(\mu) + \dots = 0. \quad (4)$$

Pada temperatur yang cukup rendah, dapat diharapkan $\mu - \mu_0 \ll \mu_0$, μ sehingga dapat dilakukan aproksimasi untuk persamaan (4)

$$(\mu - \mu_0) D(\mu_0) + \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 D'(\mu_0) + \dots = 0.$$

Sehingga dapat diperoleh

$$\mu = \mu_0 - \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 \left(\frac{d}{d\varepsilon} \log D(\varepsilon) \right)_{\varepsilon=\mu_0} \quad (5)$$

Di lain pihak dapat pula diperoleh hubungan

$$E = \int_0^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\mu} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 \left(\frac{d}{d\varepsilon} \varepsilon D(\varepsilon) \right)_{\varepsilon=\mu} + \dots \quad (6)$$

Selanjutnya dapat pula digunakan aproksimasi

$$\int_0^{\mu} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\mu_0} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon + (\mu - \mu_0) \mu_0 D(\mu_0) = \int_0^{\mu_0} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 \mu_0 D'(\mu_0).$$

Sehingga akhirnya didapat

$$E = \int_0^{\mu_0} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{6} \pi^2 (kT)^2 D(\mu_0), \quad (7)$$

Dan diperoleh

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T D(\mu_0).$$

Jika digunakan hubungan $D(\varepsilon) = \frac{8\pi V}{h^3} (2m^3 \varepsilon)^{1/2}$, dan $D(\mu_0) = 3N/2 \mu_0$ dapat diperoleh

$$C_V = \frac{1}{2} \pi^2 N k \frac{T}{T_0} \quad (T_0 = \mu_0/k) \quad (8)$$

15. Misal *density of state* elektron pada suatu sampel dianggap konstan D untuk $\varepsilon > 0$ ($D = 0$ untuk $\varepsilon < 0$) dan jumlah total elektron sama dengan N .
 - (i). Hitung potensial Fermi μ_0 pada 0 K.
 - (ii). Turunkan kondisi bahwa sistem *non-degenerate*.
 - (iii). Tunjukkan bahwa kapasitas panas sebanding dengan T jika sistem sangat terdegenerasi.

Solusi :

(i). Pada 0 K level energi dihuni elektron hingga $\varepsilon = \mu_0$. Karenanya

$$D \mu_0 = N, \text{ sehingga } \mu_0 = N/D. \quad (1)$$

(ii). Potensial kimia ditentukan oleh hubungan

$$N = D \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}. \quad (2)$$

Kondisi yang menjamin tidak ada degenerasi adalah

$$e^{-\beta\mu} \gg 1. \quad (3)$$

Ketika hal tersebut dipenuhi, maka dari persamaan (2)

$$\frac{N}{D} = \int_0^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} d\varepsilon = \frac{e^{\beta\mu}}{\beta}.$$

Sekarang kondisi (3) ekivalen dengan

$$N/DkT \ll 1. \quad (4)$$

Ini berarti bahwa jumlah total elektron N sangat kecil dibandingkan dengan jumlah elektron yang dapat ditampung dalam daerah energi selebar kT . Yang berarti bahwa kondisi yang dibutuhkan adalah

$$N \ll DkT = \text{jumlah state dalam interval energi } kT.$$

(iii). Untuk $\beta\mu \gg 1$, dari persamaan (2) diperoleh

$$\begin{aligned} N &= D \left[\int_0^{\mu} d\varepsilon - \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right) d\varepsilon + \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right] \\ &= D \left(\mu - \int_0^{\mu} \left(\frac{d\varepsilon}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right) + \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right) \\ &= D \left(\mu - \int_0^{\infty} \frac{dy}{e^{\beta y} + 1} + \int_0^{\infty} \frac{dy}{e^{\beta y} + 1} \right) = D\mu \end{aligned} \quad (6)$$

Energi internal diberikan oleh

$$E = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon D d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

$$\begin{aligned}
&= D \left(\int_0^\mu \varepsilon d\varepsilon - \int_0^\mu \left(\frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right) - \int_\mu^\infty \frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \right) \\
&= D \left(\frac{1}{2} \mu^2 + 2(kT)^2 \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1} \right) \\
&= \frac{1}{2} D \mu^2 + \frac{1}{6} \pi^2 D (kT)^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Suku pertama persamaan (7) tidak bergantung pada temperatur sebagaimana terdapat pada persamaan (6). Pada temperatur rendah dapat diperoleh

$$\frac{dE}{dT} = \frac{1}{3} \pi^2 D k^2 T. \tag{8}$$

16. Suatu gas ideal yang terdiri atas N buah fermion berspin-1/2 dikungkung dalam wadah bervolume V . Hitung limit temperatur nol untuk (a). Potensial kimia, (b). Rata-rata energi per partikel (c) tekanan, (d). Suseptibilitas spin Pauli. Tunjukkan bahwa dalam satuan Gaussian suseptibilitas dapat dituliskan sebagai $3\mu_B^2 N / 2\mu(0)V$, dengan $\mu(0)$ adalah potensial kimia pada temperatur nol. Diasumsikan tiap Fermion punya interaksi dengan medan magnet luar dalam bentuk $2\mu_0 H S_z$, dengan μ_B adalah magneton Bohr dan S_z adalah komponen- z spin.

Solusi :

Karena spin Fermion $\frac{1}{2}$, maka komponen z -nya punya dua arah yang mungkin terhadap medan magnet (*up*) dan (*down*), yang bersesuaian dengan energi $\pm \mu_B H$. Sehingga energi partikel adalah

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B H.$$

Pada $T = 0$ K, partikel dianggap menempati semua level energi di bawah energi Fermi $\mu(0)$. Karenanya energi kinetik partikel berspin negatif terdistribusi diantara 0 dan $\mu(0) - \mu_B H$, dan yang berspin positif terdistribusi di antara 0 dan $\mu(0) + \mu_B H$, jumlahnya adalah

$$\begin{aligned}
N_- &= \frac{4\pi V}{3h^3} p_-^3, & \left(\frac{1}{2m} p_-^2 = \mu(0) + \mu_B H \right) \\
N_+ &= \frac{4\pi V}{3h^3} p_+^3, & \left(\frac{1}{2m} p_+^2 = \mu(0) - \mu_B H \right)
\end{aligned}$$

(a). Jumlah total partikel adalah

$$N = N_+ + N_- = \frac{4\pi V (2m)^{3/2}}{3h^3} \left\{ [\mu(0) - \mu_B H]^{3/2} + [\mu(0) + \mu_B H]^{3/2} \right\}$$

Dengan $H = 0$, dapat diperoleh potensial kimia

$$\mu(0) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

(b). Untuk partikel dengan komponen-z spin $1/2$ dan $-1/2$, momentum Ferminya adalah

$$p_+ = \{2m[\mu(0) - \mu_B H]\}^{1/2},$$

$$p_- = \{2m[\mu(0) + \mu_B H]\}^{1/2},$$

Energi total yang bersesuaian adalah

$$E_+ = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_+} \left(\frac{p^2}{2m} + \mu_B H \right) p^2 dp$$

$$= \frac{4\pi V}{h^3} \left[\frac{p_+^5}{10m} + \frac{\mu_B H}{3} p_+^3 \right],$$

$$E_- = \frac{4\pi V}{h^3} \left[\frac{p_-^5}{10m} - \frac{\mu_B H}{3} p_-^3 \right],$$

Sehingga energi rata-rata per partikel adalah

$$\frac{E}{N} = \frac{E_+ + E_-}{N} = \frac{4\pi V}{h^3 N} \left[\frac{1}{10m} (p_+^5 + p_-^5) + \frac{\mu_B H}{3} (p_+^3 - p_-^3) \right]$$

Untuk $\mu(0) \gg \mu_B H$,

$$\frac{E}{N} \approx \frac{3}{5} \mu(0) \left[1 - \frac{5}{2} \left(\frac{\mu_B H}{\mu_0} \right)^2 \right].$$

(c). Tekanannya adalah

$$p = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = - \frac{\partial E}{\partial \mu(0)} \cdot \frac{\partial \mu(0)}{\partial V} = \frac{2N}{5V} \mu(0) = \frac{2}{5} n \mu(0).$$

(d). Untuk $\mu(0) \gg \mu_B H$, magnetisasinya adalah

$$M = \mu_B (N_- - N_+) / V = \frac{3\mu_B^2 N}{2\mu(0)V} H = \chi H.$$

Sehingga $\chi = \frac{3\mu_B^2 N}{2\mu(0)V}$.

17. Ditinjau model gas Fermi dari inti atom. Kecuali karena prinsip Pauli, nukleon dalam inti yang berat diasumsikan bergerak secara independen dalam bola yang sesuai dengan volume inti V . Partikel tersebut dianggap merupakan gas Fermi yang sepenuhnya terdegenerasi. Ambil $A = N$ (jumlah neutron) + Z (jumlah proton), asumsikan $N = Z$, dan hitung energi kinetik per nukleon, E_{kin}/A dengan model ini. Volume nukleus diberikan oleh $V = \frac{4\pi}{3} R_0^3 A$, $R_0 \approx 1,4 \times 10^{-13} \text{ cm}$.

Solusi :

Dalam ruang momentum,

$$dn = \frac{4V}{h^3} 4\pi p^2 dp$$

Dengan n adalah kerapatan jumlah neutron.

Jumlah neutron total adalah

$$A = \int dn = 16\pi V \int_0^{p_F} \frac{p^2}{h^3} dp$$

Dengan p_F adalah momentum Fermi.

Energi kinetik total neutron adalah

$$E_{kin} = \int \frac{p^2}{2m} dn = \frac{16\pi V}{5h^3} \frac{p_F^5}{2m}$$

Volume V dapat dinyatakan dalam dua cara

$$V = \frac{4\pi}{3} R_0^3 A = \frac{3(2\pi)^3}{16\pi} p_F^{-3} A, \quad (\text{dengan } \hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1)$$

Memberikan nilai $p_F = R_0^{-1} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \frac{1}{m R_0^2} \approx 16 \text{ MeV}$.

18. Bintang bajang putih (*white dwarf*) dianggap terdiri atas sistem gas elektron terdegenerasi pada temperatur seragam jauh di bawah temperatur Fermi. Sistem ini stabil terhadap keruntuhan gravitasi sepanjang elektronnya tak-relativistik.

(a). Hitung kerapatan elektron dimana momentum Fermi sepersepuluh massa diam elektron $\times c$.

(b). Hitung tekanan gas elektron terdegenerasi di bawah kondisi ini.

Solusi :

$$(a). N = \frac{2V}{h^3} \int \int_{p \leq p_F} dp, \quad \text{dengan } n = \frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{p_F}{h} \right)^3. \quad \text{dan } p_F = \frac{m_e c}{10},$$

Diperoleh

$$n = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{m_e c}{10h} \right)^3 = 5,8 \times 10^{23} / m^3.$$

(b). Untuk gas Fermi yang sangat terdegenerasi (di bawah aproksimasi valensi nol) diperoleh

$$\bar{E} = \frac{3}{5} N \mu_0,$$

Dan

$$p = \frac{2}{3} \frac{\bar{E}}{V} = \frac{2}{5} n \mu_0 = \frac{2}{5} n \cdot \frac{p_F^2}{2m} = 9,5 \times 10^{16} N / m^2.$$

19. Ditinjau suatu gas terdegenerasi yang terdiri atas N buah elektron tak-berinteraksi dalam volume V ($T = 0$ K).

(a). Tentukan persamaan yang menghubungkan tekanan, energi dan volume gas ini untuk kasus relativistik ekstrem. (abaikan massa elektron).

(b). Untuk gas real elektron (misal bermassa m) tentukanlah kondisi pada N dan V agar hasil pada jawaban soal (a) valid.

Solusi :

Energi gas elektron terdegenerasi tak-berinteraksi adalah

$$E = 8\pi V \int_0^{p_F} \frac{\varepsilon p^2}{h^3} dp,$$

Dengan ε adalah energi elektron tunggal, dan p_F adalah momentum Fermi

$$p_F = (3N / 8\pi V)^{1/3} h.$$

(a). Untuk kasus relativistik ekstrem, $\varepsilon = cp$, sehingga energinya adalah

$$E = \frac{2\pi c V}{h^3} p_F^4,$$

Dan tekanan $p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{T=0} = \frac{1}{3} \frac{E}{V}$, yang memberikan persamaan keadaan

$$pV = \frac{1}{3} E.$$

(b). Untuk elektron real,

$$\varepsilon = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \approx pc \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{p} \right)^2 \right],$$

Dengan p adalah momentumnya memberikan hasil

$$E \approx 2\pi c V \left[p_F^4 + (mcp_F)^2 \right] / h^3.$$

Hasil pada soal (a) dapat dianggap valid jika $p_F \gg mc$, atau

$$\frac{N}{V} \gg \frac{8\pi}{3} \left(\frac{mc}{h} \right)^3.$$

Baik $N \rightarrow \infty$ atau $V \rightarrow 0$ akan memenuhi kondisi tersebut.

20. Ditinjau gas Fermi pada temperatur rendah $kT \ll \mu(0)$ dengan $\mu(0)$ adalah potensial kimia pada $T = 0$. Berikan argumentasi kualitatif nilai eksponen yang dominan pada suku yang bergantung pada temperatur, untuk besaran berikut ; (a). Energi, (b). Kapasitas panas, (c). Entropi, (d). energi bebas helmholtz (e). Potensial kimia. Nilai nol pada skala energi terletak di orbital terendah.

Solusi :

Pada temperatur yang rendah, hanya partikel yang energinya terletak dalam ketebalan $\sim kT$ dekat permukaan Fermi yang tereksitasi secara termal. Energi partikel yang demikian berorde kT .

(a). $E = E(0) + \alpha kT$, dengan α adalah konstanta kesebandingan. Sehingga $E - E(0) \propto kT^2$.

(b). $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \propto T$

(c). Dari $dS = \frac{C_V}{T} dT$, dapat diperoleh $S = \int_0^T \frac{C_V}{T} dT \propto T$.

(d). Dari $F = E - TS$, dapat diperoleh $F - F(0) \propto T^2$.

(e). Dari $\mu = (F + pV)/N$ dan $p = 2E/3V$, dengan N adalah jumlah partikel total, diperoleh $\mu - \mu(0) \propto T^2$.

Soal Latihan

1. Energi Fermi dari elektron konduksi dalam logam lithium adalah 4,7 eV diukur dari bagian dasar pita konduksi, berapa fraksi elektron tersebut yang tereksitasi termal pada temperatur 300 K ? Buat perkiraan kasar kapasitas panas 1 mol elektron tersebut pada 10 K.
2. Berapa rasio energi Fermi gas yang terdegenerasi sepenuhnya dari elektron-elektron yang tak saling berinteraksi terhadap gas yang sama dari neutron-neutron yang tak saling berinteraksi dengan volume yang sama? Mengapa hal ini penting dalam pembentukan sebuah bintang neutron? (rasio massa neutron terhadap elektron diambil sebesar 2000).
3. Suatu gas terdiri atas tiga atom dengan akses terhadap tiga keadaan kuantum yang berbeda dengan energi yang sama. Berapa banyak keadaan-mikro (*microstate*) yang berbeda yang dapat dibentuk dari level-level kuantum tersebut untuk kasus gas Fermi-Dirac, dimana atomnya terbedakan tapi hanya diperbolehkan satu atom dalam tiap *state*.
4. Untuk suatu gas elektron bebas berdimensi- d , hitung kompresibilitas termal pada temperatur nol $\kappa T(0)$. Nyatakan dalam jumlah rata-rata partikel per satuan volume $n = \langle N \rangle / V$ dan energi Fermi ϵ_F .
5. Tunjukkan bahwa kapasitas panas C_V dari gas Fermi ideal pada temperatur yang cukup rendah dapat dituliskan sebagai berikut

$$C_V = \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T D(\mu_0)$$

6. Untuk logam Na ada sekitar $2,6 \times 10^{22}$ elektron konduksi/cm³, yang berkelakuan seperti gas elektron bebas. (a) hitung nilai estimasi energi fermi dalam Na. (b). Berikan nilai aproksimasi kapasitas panas elektron dalam Na pada temperatur kamar.
7. Turunkan rumus untuk energi kinetik maksimum elektron dalam gas Fermi tak-berinteraksi yang terdiri atas N buah elektron dalam volume V pada temperatur nol.
8. Model elektron bebas untuk elektron konduksi dalam logam tampaknya naif tetapi serinkali berhasil. Diantara hal yang menarik adalah, model ini memberikan perhitungan yang masuk akal untuk kompresibilitas logam-logam tertentu. Misal diberikan kerapatan jumlah n dan energi Fermi ε dari suatu gas Fermi tak-berinteraksi pada temperatur nol mutlak $T = 0$ K. Tentukan kompresibilitas termal

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T,$$

Dengan V adalah volume dan p adalah tekanan.

9. Untuk gas Fermi-Dirac dapat didefinisikan temperatur T_0 dimana potensial kimia gas nol ($z=1$). Nyatakan T_0 dalam temperatur Fermi T_F .
10. Tunjukkan bahwa untuk gas Fermi ideal berlaku

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p = -\frac{5}{2T} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)},$$

11. Tunjukkan bahwa kompresibilitas termal κ_T dan kompresibilitas adiabatik κ_S dari suatu gas ideal Fermi adalah

$$\kappa_T = \frac{1}{nkT} \frac{f_{1/2}(z)}{f_{3/2}(z)}, \quad \kappa_S = \frac{1}{5nkT} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{5/2}(z)},$$

Dengan $n = N/V$ adalah kerapatan partikel gas.

12. Untuk gas ideal Fermi, tinjaulah $(\partial^2 P / \partial T^2)_V$, $(\partial^2 \mu / \partial T^2)_V$ dan $(\partial^2 \mu / \partial T^2)_p$ dan ujilah apakah hasilnya memenuhi hubungan termodinamika

$$C_V = VT \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V - NT \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \right)_V \quad \text{dan} \quad C_P = -NT \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \right)_P.$$

13. Tunjukkan bahwa kecepatan suara w dalam suatu gas ideal Fermi diberikan oleh persamaan sebagai berikut

$$w^2 = \frac{5kT}{3m} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} = \frac{5}{9} (u^2).$$

Dengan (u^2) adalah kuadrat rata-rata kecepatan partikel dalam gas. Tinjaulah w dalam limit $z \rightarrow \infty$ dan bandingkan dengan kecepatan Fermi u_F .

14. Hitung estimasi numerik energi Fermi (dalam eV) dan temperatur Fermi (dalam kelvin) untuk sistem berikut :

- (i). Elektron konduksi dalam perak, timbal dan aluminium.
- (ii). Nukleon dalam inti atom berat semisal ${}_{80}\text{Hg}^{200}$.

15. Dengan menggunakan suku lain *Sommerfeld lemma*, tunjukkan bahwa dalam aproksimasi kedua potensial kimia gas Fermi pada temperatur rendah diberikan oleh

$$\mu \approx \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 - \frac{\pi^4}{80} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^4 \right].$$

16. Ditinjau gas Fermi ideal dalam kotak bervolume V dalam ruang berdimensi n (dengan spektrum energi $\varepsilon \propto p^s$). Tunjukkan untuk sistem ini berlaku

$$(i). PV = \frac{s}{n} U.$$

$$(ii). \frac{C_V}{Nk} = \frac{n}{s} \left(\frac{n}{s} + 1 \right) \frac{f_{(n/s)+1}(z)}{f_{n/s}(z)} - \left(\frac{n}{s} \right)^2 \frac{f_{n/s}(z)}{f_{(n/s)-1}(z)}.$$

17. Tunjukkan bahwa dalam kasus dua dimensi kapasitas panas $C_V(N, T)$ gas Fermi ideal sama dengan kapasitas panas gas Bose ideal untuk semua N dan T .

18. Telaahlah paramagnetisme Pauli dari gas ideal fermion dengan momen magnetik intrinsik μ^* dan spin $J\hbar (J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$ dan turunkan pernyataan untuk suseptibilitas gas pada temperatur rendah dan pada temperatur tinggi.
19. Hitung fraksi elektron konduksi dalam tungsten ($\varepsilon_F = 9,0$ eV) pada 3000K yang energi kinetiknya $\varepsilon = \mu^2/2$ lebih besar dari $W = 13,5$ eV.
20. Tunjukkan bahwa kapasitas panas suatu gas Fermi relativistik dapat dituliskan sebagai

$$\frac{C_V}{Nk} = \pi^2 \frac{(x^2 + 1)^{1/2}}{x^2} \frac{kT}{mc^2}, \quad \left(x = \frac{p_F}{mc} \right).$$

Bab 17 Soal dan Penyelesaian

Entropi

1. Misal p_s adalah probabilitas sistem berada pada state s dengan energi E_s . Tunjukkan bahwa, jika entropi didefinisikan sebagai

$$S = -k \sum_s p_s \log p_s ,$$

Maka nilai p_s yang membuat S maksimum dibawah kondisi bahwa energi rata-rata sistem adalah E , sesuai dengan distribusi kanonik.

Solusi :

Mencari nilai S maksimum di bawah kondisi

$$\sum_s p_s = 1, \quad (1) \quad \text{dan} \quad \sum_s E_s p_s = E = \text{konstan} \quad (2)$$

Harus digunakan metode pengali Lagrange : kalikan (1) dan (2) masing-masing dengan konstanta λ dan κ dan tambahkan keduanya kepada S . Kemudian dengan menganggap semua p_s saling bebas, dimaksimumkan nilai $S + \kappa E + \lambda$.

$$\begin{aligned} \delta(S + \kappa E + \lambda) &= \delta \sum_s (-k p_s \log p_s + \kappa E_s p_s + \lambda p_s) \\ &= \sum_s \left(-k \log p_s - k + \kappa E_s + \lambda \right) \delta p_s + \frac{1}{2} \sum_s \left(-\frac{k}{p_s} \right) (\delta p_s)^2 + \dots \end{aligned}$$

Dengan membuat koefisien δp_s sama dengan nol diperoleh

$$p_s = \exp \left(\frac{\kappa}{k} E_s + \frac{\lambda}{k} - 1 \right).$$

Karena nilai tersebut positif, maka koefisien $(\delta p_s)^2$ adalah negatif dan selalu diperoleh

maksimum. Ditentukan λ dan κ sedemikian hingga memenuhi (1) dan (2). Karena secara umum E_s tidak mempunyai nilai batas atas, maka $\kappa < 0$ agar $\sum p_s$ dan $\sum E_s p_s$ konvergen.

Dengan menuliskan $\kappa/k = -\beta$ ($\beta > 0$), dari (1) dapat diperoleh

$$1 = \sum_s p_s = e^{\lambda/k-1} \sum_s e^{-\beta E_s} \equiv e^{\lambda/k-1} Z(\beta).$$

Dengan demikian diperoleh

$$p_s = \frac{e^{-\beta E_s}}{Z(\beta)}.$$

2. Bandingkan penurunan entropi pada otak orang yang sedang membaca buku dengan kenaikan entropi akibat pencahayaan (dengan bola lampu listrik).

Solusi :

Perubahan entropi yang muncul dari asimilasi sejumlah ΔI informasi (diukur dalam bit) adalah

$$\Delta S = -\frac{k}{\log_2 e} \Delta I.$$

Sebuah buku yang hanya menggunakan abjad latin dan tanda baca membutuhkan sekitar 2^5 karakter yang berbeda, sehingga dibutuhkan 5 bit untuk mewakili tiap karakter. Sehingga kandungan informasi sebuah buku 400 halaman dengan 50 baris tiap halamannya dan 70 karakter di tiap baris adalah $\Delta I = 5 \times 70 \times 50 \times 400 = 7 \times 10^6$ bit. Maka $\Delta S_{otak} \sim -10^{-16} \text{ JK}^{-1}$. Di lain pihak bola lampu listrik yang memancarkan daya P misalnya 100 W ke sekitarnya pada temperatur $T = 300 \text{ K}$ menyebabkan peningkatan entropi sebesar

$$\Delta S_{lampu} \sim \frac{Pt}{T} \sim 0,3t \text{ JK}^{-1}$$

Dengan t adalah waktu yang diperlukan untuk membaca. Dengan demikian diperoleh

$$\frac{\Delta S_{otak}}{\Delta S_{lampu}} \sim -\frac{10^{-19}}{t^*}$$

Dengan t^* adalah waktu diukur dalam satuan jam.

3. (a). Sejumlah air awalnya pada 10°C dihubungkan dengan reservoir panas pada temperatur 90°C . Berapa perubahan entropi keseluruhan sistem ketika air mencapai temperatur reservoir? Nyatakan jawaban dalam kapasitas panas air C , dengan asumsi C tidak bergantung temperatur. (b). Berapa perubahan entropi keseluruhan sistem jika digunakan dua reservoir untuk memanaskan air, pertama dari 10°C ke 50°C kemudian dari 50°C ke 90°C . (c). Mungkinkah secara prinsip, air dapat dipanaskan dari temperatur awal T_i ke temperatur akhir T_f tanpa mengubah entropi global?

Solusi :

(a). Perubahan entropi air dapat ditentukan dengan membayangkan suatu proses reversibel dimana temperatur naik secara infinitesimal. Pada tiap langkah infinitesimal perubahan entropinya adalah

$$dS_w = \frac{dQ_{rev}}{T} = C \frac{dT}{T}$$

Memberikan perubahan entropi total

$$\Delta S_w = C \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = C \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

Reservoir panas berada pada temperatur tetap, maka perubahan entropinya hanyalah

$$\Delta S_r = -\frac{\Delta Q}{T_f} = -C \frac{T_f - T_i}{T_i}$$

Dengan $\Delta Q = C(T_f - T_i)$ adalah jumlah total panas yang mengalir keluar reservoir ke dalam air. Dengan nilai $T_f = 363,15$ K dan $T_i = 283,15$ K diperoleh

$$\Delta S_{total} = \Delta S_w + \Delta S_r \approx 0,0285 C.$$

(b). Sekarang proses dilakukan dalam dua tahap dengan temperatur antara misalnya adalah $T_1 = 323,15$ K. Perubahan entropi air adalah

$$\Delta S_w = C \ln\left(\frac{T_1}{T_i}\right) + C \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) = C \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

Dengan memasukkan perubahan entropi kedua reservoir diperoleh

$$\Delta S_{total} = \Delta S_w + \Delta S_{r1} + \Delta S_{r2} \cong 0,0149C.$$

(c). Jelas bahwa perubahan entropi akan lebih kecil jika proses dilakukan dalam dua tahap. Jika air dihubungkan secara berturut-turut dengan N buah reservoir air pada temperatur $T_n = T_i + (n/N)(T_f - T_i)$. Perubahan entropi air akan sebesar $\Delta S_w = C \ln(T_f/T_i)$, tidak bergantung pada N . Perubahan entropi reservoir adalah

$$\Delta S_r = -C \sum_{n=1}^N \frac{T_n - T_{n-1}}{T_n} = -C \sum_{n=1}^N \frac{(T_f - T_i)/N}{T_i + (n/N)(T_f - T_i)}.$$

Pada limit infinitesimal, $N \rightarrow \infty$, jumlahan menjadi integral :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta S_r) = -C \int_0^{T_f - T_i} \frac{dx}{T_i + x} = -C \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = -\Delta S_w.$$

Sehingga perubahan entropi nol. Hal ini merupakan proses reversibel fiktif, dalam proses yang reversibel perubahan entropi nol. Diasumsikan bahwa reservoir sudah tersedia dan tidak diperhitungkan perubahan entropi yang terjadi untuk membuat reservoir pada temperatur tertentu.

4. Tentukan entropi $S(E, V, N)$ gas ideal yang terdiri atas N partikel monatomik klasik dengan energi total tetap E yang terkurung dalam kotak berdimensi- d dengan volume V .

Solusi :

Gas tersebut merupakan sistem yang tertutup, dan terisolasi secara termal yang merupakan ensemble kanonik. Entropinya didefinisikan sebagai $S = k \ln \Omega$ dengan Ω merupakan jumlah keadaan mikro dengan energi tetap E . Koordinat q_i dan momentum p_i ($i = 1, 2, \dots, dN$) partikel klasik dapat dianggap kontinu sehingga perlu penanganan khusus. Didefinisikan $\Omega(E, V, N; \Delta E)$ sebagai volume kulit bola dalam ruang fasa pada daerah energi sempit antara E dan $E + \Delta E$. Definisi entropi menjadi

$$S(E, V, N; \Delta E) = k \ln \left(\frac{\Omega(E, V, N; \Delta E)}{h^{dN} N!} \right).$$

Pada pernyataan ini h adalah konstanta sembarang dengan dimensi (panjang x momentum) dan dimasukkan agar argumen dalam logaritma menjadi tak-berdimensi. (biasanya diidentifikasi sebagai tetapan Planck, untuk membandingkannya dengan gas kuantum). Karena ΔE kecil, maka $\Omega(E, V, N; \Delta E) = \Delta E \Sigma(E, V, N)$ dengan $\Sigma(E, V, N)$ adalah luas permukaan dengan energi konstan. faktor $N!$ Adalah faktor koreksi perhitungan Boltzman untuk koreksi *double counting*.

Untuk menghitung $\Omega(E, V, N; \Delta E)$ dinyatakan $\Omega = \Delta E \partial \nu / \partial E$ dengan ν adalah volume dalam ruang fasa dengan energi sama atau kurang dari E . Hamiltonian sistem untuk partikel bermassa m adalah

$$H = \sum_{i=1}^{dN} \frac{p_i^2}{2m}$$

sehingga

$$\nu(E, V, N) = \int_{H \leq E} \prod_{i=1}^{dN} dp_i dq_i = \nu^N \int_{\sum p^2 < 2mE} d^{dN} p$$

Faktor ν^N muncul dari hasil integrasi pada koordinat. Integral momentum adalah volume dari bola berdimensi dN dengan jari-jari $R = \sqrt{2mE}$. Sehingga diperoleh

$$\nu(E, V, N) = \frac{V^N (2\pi m E)^{dN/2}}{(dN/2) \Gamma(dN/2)}$$

Sehingga entropi dapat dituliskan sebagai

$$S(E, V, N; \Delta E) = k \left(N \ln \left(\frac{V (2\pi m E)^{d/2}}{h^d} \right) - \ln \left[\Gamma \left(\frac{dN}{2} \right) \right] - \ln(N!) + \ln \left(\frac{\Delta E}{E} \right) \right).$$

Untuk N yang besar dapat dilakukan aproksimasi Stirling $\ln(N!) \approx N \ln N - N$ sehingga diperoleh

$$S(E, V, N) \approx Nk \left(\ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m E}{dN h^2} \right)^{d/2} \right] + \frac{d+2}{2} \right).$$

5. Ditinjau gas ideal yang terdiri atas N buah partikel kuantum monatomik dengan energi total tetap E berada dalam hiperkubus berdimensi- d dengan sisi L . Untuk kasus E jauh lebih besar daripada energi *ground state*, tentukan entropi $S(E, V, N)$ dan bandingkan hasilnya dengan kasus gas klasik.

Solusi :

Sebuah partikel bebas yang terperangkap dalam kotak hiperkubus punya fungsi eigen energi

$$\psi_k(x) = \left(\frac{2}{L} \right)^{d/2} \prod_{i=1}^d \sin(k_i x_i)$$

Agar fungsi gelombang nol baik pada $x_i = 0$ maupun $x_i = L$, komponen-komponen vektor gelombangnya harus dibatasi nilainya $k_i = n_i\pi/L$, dengan n_i adalah bilangan bulat positif. Energi keadaan ini adalah $E_n = \hbar^2 k^2/2m = (\pi^2 \hbar^2/2mL^2) \sum_i n_i^2$. fungsi eigen energi untuk sistem N partikel adalah jumlahan dari produk N buah fungsi partikel tunggal. Energi totalnya adalah

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2 |k_i|^2}{2m} = \sum_{j=1}^{dN} \frac{\hbar^2}{2m} k_j^2 = \varepsilon \sum_{j=1}^{dN} n_j^2$$

Dengan $\varepsilon = \pi^2 \hbar^2/2mL^2$. Entropinya adalah $S(E, V, N) = k \ln[\Omega(E, V, N)]$, dengan $\Omega(E, V, N)$ jumlah *state* yang berbeda dengan energi E . Untuk $\varepsilon/E \ll 1$, maka E dapat diperlakukan sebagai variabel kontinu dan jika E jauh lebih besar daripada energi *ground state*, maka banyak *state* yang tersedia.

Untuk ruang integer $\{n_j\}$ berdimensi dN dapat dibagi dalam sel-sel satu satuan yang masing-masing mengandung satu *state*. Jika diperbolehkan adanya sedikit ketidakpastian dalam E , maka jumlah *state* dengan energi ini dapat didekati dengan baik sebagai jumlah sel yang berpotongan dengan bola berjari-jari $\sqrt{E/\varepsilon}$ atau dengan luasan bola ini yaitu $2\pi^{dN/2} (E/\varepsilon)^{dN/2-1} / \Gamma(dN/2)$. Yang akan dihitung hanya bagian bola yang punya nilai n_j positif saja yang merupakan fraksi $1/2^{dN}$ dari keseluruhan bola dan juga harus dibagi dengan $N!$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \Omega(E, V, N) &= \frac{2\pi^{dN/2}}{2^{dN} N! \Gamma(dN/2)} \left(\frac{E}{\varepsilon} \right)^{dN/2-1} \\ &= \frac{V^N}{N! \Gamma(dN/2)} \left(\frac{2\pi m E}{h^2} \right)^{dN/2} \frac{2\varepsilon}{E} \end{aligned}$$

Dengan $V = L^d$. Berbeda dengan permukaan energi pada ruang fase pada kasus klasik,

permukaan di sini tidak berdimensi. Untuk partikel dengan spin s , akan ada tambahan faktor $(2s+1)N$ sesuai dengan jumlah konfigurasi spin yang berbeda. Entropi untuk gas dengan partikel berspin 0 adalah

$$S(E, V, N) = k \left(N \ln \left[V \left(\frac{2\pi m E}{h^2} \right)^{d/2} \right] - \ln \left[\Gamma \left(\frac{dN}{2} \right) \right] - \ln(N!) + \ln \left(\frac{2\epsilon}{E} \right) \right)$$

6. Untuk kumpulan N buah osilator harmonik kuantum 3-dimensi dengan frekuensi ω dan energi total E , hitung entropi S .

Solusi :

Untuk memecahkan masalah ini dengan menggunakan ensemble mikrokanonik, harus dihitung semua keadaan yang mungkin pada sistem untuk total energi tetap. Energi dari sistem ini adalah

$$E = \sum_{i=1}^{3N} E_i = \sum_{i=1}^{3N} (n_i + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$

Dengan n_i adalah jumlah kuantum energi pada osilator ke- i ($n_i = 0, 1, \dots, \infty$). Dapat dituliskan hal tersebut sebagai

$$\sum_{i=1}^{3N} n_i = \frac{E}{\hbar \omega} - \frac{3N}{2} \equiv M.$$

Jumlah *state* yang mungkin adalah jumlah set dari bilangan bulat non-negatif $\{n_i\}$ yang ditambahkan hingga menjadi M . Masalah ini dapat diselesaikan dengan menganggap osilator $3N$ sebagai kotak-kotak yang di dalamnya dapat ditempatkan M buah bola yang tak terbedakan yang mewakili kuantum energi. Untuk menghitung banyaknya cara yang mungkin, kotak-kotak (osilator) diperlakukan sebagai terbedakan dan dapat disusun

dalam satu baris yang dipisahkan oleh $3N-1$ buah dinding. Jika bola dan dinding terbedakan semua, jumlah total cara untuk $M + 3N-1$ buah partikel adalah $(M + 3N-1)!$ Karena bolanya terbedakan satu sama lain dan juga dindingnya, maka dibagi dengan $M!$ Untuk permutasi bola dan $(3N-1)!$ Untuk permutasi dinding. Dengan demikian jumlah keadaan yang berbeda adalah

$$\Omega(E, N) = \frac{(M + 3N - 1)!}{M!(3N - 1)!} = \frac{(E / \hbar \omega + 3N / 2 - 1)!}{(E / \hbar \omega - 3N / 2)!(3N - 1)!}$$

Entropinya adalah $S(E, N) = k \ln[\Omega(E, N)]$, pada limit termodinamika $E, N \rightarrow \infty$ dengan E/N tetap. Dengan menggunakan aproksimasi Stirling diperoleh

$$S(E, N) \approx Nk \left[\left(\frac{E}{N\hbar\omega} + \frac{3}{2} \right) \ln \left(\frac{E}{N\hbar\omega} + \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{E}{N\hbar\omega} - \frac{3}{2} \right) \ln \left(\frac{E}{N\hbar\omega} - \frac{3}{2} \right) \right].$$

7. Tinjaulah suatu sistem partikel identik terbedakan yang masing-masing mempunyai dua keadaan dengan energi ε dan $-\varepsilon$. Gunakan ensemble mikrokanonik untuk menghitung entropi rata-rata per partikel sebagai fungsi energi rata-rata per partikel pada limit sistem yang sangat besar.

Solusi :

Ensemble mikrokanonik mendeskripsikan sistem terisolasi dengan jumlah partikel tetap N dan energi total tetap E . Jumlah partikel n_+ dan n_- masing-masing dengan energi ε dan $-\varepsilon$ dikendala oleh dua hubungan $E = n_+ \varepsilon - n_- \varepsilon$ dan $N = n_+ + n_-$. Didefinisikan besaran $x = E/N \varepsilon$ (proporsional dengan energi per partikel) dapat dituliskan bahwa $n_+ = N(1+x)/2$ dan $n_- = N(1-x)/2$. Fungsi partisi-nya adalah jumlah mikrostata yang konsisten dengan kendala tersebut dan sama dengan jumlah cara memilih n_+ partikel dari N , yakni

$$\Omega(E, N) = \binom{N}{n_+} = \frac{N!}{n_+! n_-!}.$$

Interpretasi ytermodinamika dari ensembel ini diperoleh melalui definisi entropi $S_M(E, N) = k \ln[\Omega(E, N)]$. Pada limit N yang sangat besar dapat digunakan aproksimasi Stirling $\ln N! \approx N \ln N - N$ untuk memperoleh entropi per partikel sebagai

$$s = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{S_M}{N} \right) = k \left[\ln 2 - \frac{1}{2} (1+x) \ln(1+x) - \frac{1}{2} (1-x) \ln(1-x) \right].$$

8. Tinjaulah suatu sistem partikel identik terbedakan yang masing-masing mempunyai dua keadaan dengan energi ε dan $-\varepsilon$. Gunakan ensembel kanonik untuk menghitung entropi rata-rata per partikel sebagai fungsi energi rata-rata per partikel pada limit sistem yang sangat besar.

Solusi :

Ensembel kanonik mendeskripsikan sistem dengan jumlah partikel yang konstan dan kontak dengan *heat bath* pada temperatur tetap. Fungsi partisinya adalah

$$Z(T, N) = \sum_{n_+=0}^N \binom{N}{n_+} e^{-\beta \varepsilon n_+} + e^{\beta \varepsilon (N-n_+)} = (e^{-\beta \varepsilon} + e^{\beta \varepsilon})^N$$

Interpretasi termodinamikanya melalui energi bebas Helmholtz $F(T, N) = -kT \ln[Z(T, N)]$. Entropi dalam ensembel ini diperoleh dari hubungan termodinamika $F = U - TS$, dengan energi internal diidentifikasi sebagai nilai rerata

$$U_C = \langle E \rangle_C = - \left(\frac{\partial (\ln Z)}{\partial \beta} \right)_N = -N \varepsilon \tanh(\beta \varepsilon).$$

Energi rata-rata per partikel diidentifikasi sebagai U_C/N dan parameter $x = U_C/N \varepsilon = -\tanh(\beta \varepsilon)$. Untuk mendapatkan entropi sebagai fungsi x , harus diselesaikan dahulu

hubungan temperatur dalam x :

$$\beta\epsilon = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x)]$$

Sehingga dapat diperoleh

$$U_C = N \epsilon x$$

$$F_C = -kT \ln Z = -NkT \left[\ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x) \right]$$

$$S_C = \frac{U_C - F_C}{T} = Nk \left[\ln 2 - \frac{1}{2} (1+x) \ln(1+x) - \frac{1}{2} (1-x) \ln(1-x) \right]$$

Entropi per partikel adalah $s = S_C/N$.

9. Tinjaulah suatu sistem partikel identik terbedakan yang masing-masing mempunyai dua keadaan dengan energi ϵ dan $-\epsilon$. Gunakan ensemble *grand* kanonik untuk menghitung entropi rata-rata per partikel sebagai fungsi energi rata-rata per partikel pada limit sistem yang sangat besar.

Solusi :

Ensemble grand kanonik mendeskripsikan sistem dalam keadaan ekilibrium dengan reservoir, dan dapat bertukar energi dan partikel. Reservoir dicirikan dengan temperatur tertentu yakni $T = 1/k\beta$ dan potensial kimia μ atau fugasitas $z = e^{\beta\mu}$. Fungsi partisinya adalah

$$Z(T, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z(T, N) = \frac{1}{1 - z(e^{\beta\epsilon} + e^{-\beta\epsilon})}$$

Interpretasi termodinamikanya melalui grand potensial $\Omega_G(T, \mu) = kT \ln[Z(T, \mu)]$. Entropi diperoleh melalui hubungan termodinamika $\Omega = TS - U + \mu N$, dengan jumlah partikel dan energi internal diidentifikasi sebagai nilai rata-rata

$$N_G = \langle N \rangle_G = z \left(\frac{\partial (\ln Z)}{\partial z} \right)_\beta = \frac{z(e^{\beta\epsilon} + e^{-\beta\epsilon})}{1 - z(e^{\beta\epsilon} + e^{-\beta\epsilon})}$$

$$U_G = \langle E \rangle_G = - \left(\frac{\partial (\ln Z)}{\partial \beta} \right)_z = -\epsilon \frac{z(e^{\beta\epsilon} - e^{-\beta\epsilon})}{1 - z(e^{\beta\epsilon} + e^{-\beta\epsilon})} = -N_G \epsilon \tanh(\beta\epsilon).$$

Fungsi-fungsi termodinamika akan dinyatakan dalam $x = U_G/N_G\epsilon = -\tanh(\beta\epsilon)$ dan N_G , sehingga perlu dilakukan penyesuaian

$$\beta\epsilon = \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x)]$$

$$\beta\mu = \ln \left(\frac{N_G}{N_G + 1} \right) - \ln 2 + \frac{1}{2} [\ln(1+x) + \ln(1-x)].$$

Dan dapat diperoleh

$$U_G = N_G \epsilon x$$

$$\Omega_G = kT \ln Z = kT \ln(N_G + 1)$$

$$S_G = \frac{1}{T} (\Omega_G + N_G \mu - \mu N_G)$$

$$= kN_G \left[\frac{\ln(N_G + 1)}{N_G} + \ln \left(1 + \frac{1}{N_G} \right) + \ln 2 - \frac{1}{2} (1+x) \ln(1+x) - \frac{1}{2} (1-x) \ln(1-x) \right].$$

Pada limit N_G sangat besar, diperoleh entropi per partikel

$$s = \lim_{N_G \rightarrow \infty} \left(\frac{S_G}{N_G} \right) = k \left[\ln 2 - \frac{1}{2} (1+x) \ln(1+x) - \frac{1}{2} (1-x) \ln(1-x) \right]$$

10. Dengan menggunakan ensemble mikrokanonik, hitunglah energi bebas Helmholtz $F(T, N)$ sebagai fungsi temperatur untuk sistem N buah partikel identik terbedakan, masing-masing punya dua level energi. Tinjaulah limit $T \rightarrow 0$ untuk energi dan entropinya.

Solusi :

Misal tiap partikel punya energi $\pm\varepsilon$ dan n_+ partikel punya energi $+\varepsilon$. Jumlah partikel dengan energi $-\varepsilon$ adalah $n_-=N-n_+$ dan jika energi total adalah E , maka $n_{\pm} = (N \pm E/\varepsilon)/2$. Jumlah mikrostata dengan energi E adalah jumlah cara partikel n_+ (atau n_-) dapat dipilih dari N , yakni

$$\Omega(E, N) = \binom{N}{n_+} = \frac{N!}{n_+!(N-n_+)!}.$$

Bentuk kompak entropi dapat diperoleh pada limit termodinamika, dalam hal ini diambil N , n_+ dan n_- sangat besar. Dengan menggunakan aproksimasi Stirling dan hubungan di bawah ini

$$x = \frac{n_+}{N} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E}{N\varepsilon} \right)$$

Dapat diperoleh

$$S(E, N) = k \ln \Omega \approx -Nk[x \ln x + (1-x) \ln(1-x)]$$

Temperatur diberikan oleh persamaan

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_N = \frac{1}{2N\varepsilon} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_N = \frac{k}{2\varepsilon} \ln \left(\frac{1-x}{x} \right)$$

Dari hubungan tersebut dapat diperoleh

$$x = (e^{2\varepsilon/kT} + 1)^{-1} \qquad E(T, N) = -N\varepsilon \tanh \left(\frac{\varepsilon}{kT} \right)$$

Fungsi energi bebas Helmholtz

$$F(T, N) = E(T, N) - TS(T, N) = -N\varepsilon - NkT \ln(1 + e^{-2\varepsilon/kT}).$$

Pada limit $T \rightarrow 0$ diperoleh bahwa $x \rightarrow 0$, sehingga $n_+(0, N) = 0$, $n_-(0, N) = N$, $E(0, N) = -N\varepsilon$ dan $S(0, N) = 0$. Semua partikel berada energi terendahnya dan entropi nol karena hanya ada satu keadaan dengan energi minimum. Karena x harus bernilai diantara nol

dan satu, S tidak mungkin negatif, maka $S = 0$ adalah nilai minimumnya.

11. Hitung volume dalam ruang fasa yang ditempati oleh gas klasik ultrarelativistik 3-dimensi yang terdiri atas N buah partikel dan berenergi tetap E . Tentukan entropinya.

Solusi :

Diperbolehkan adanya ketidakpastian kecil ΔE pada energi gas. Volume ruang fasa yang ditempati oleh gas diberikan oleh $\Omega(E, V, N; \Delta E) = \Delta E \partial \nu(E, V, N) / \partial E$, dengan ν adalah volume daerah D yang energinya kurang dari atau sama dengan E . Untuk partikel yang sangat relativistik, energi diamnya dapat diabaikan, sehingga energi total gas adalah

$$H = c \sum_{i=1}^N p_i$$

Dengan $p_i = |\mathbf{p}_i|$, sehingga D adalah daerah $\sum_i p_i \leq E/c$ dan

$$\nu = \int_D \prod_{i=1}^N d^3 q_i d^3 p_i$$

Karena posisi dan arah momentum partikel tidak dikendala, maka dapat dituliskan untuk tiap partikel $\int d^3 q d^3 p = 4\pi V \int p^2 dp$, sehingga

$$\nu = (4\pi V)^N \int \prod_{i=1}^N \int p_i^2 dp_i \equiv (4\pi V)^N I_N(E).$$

Untuk mengevaluasi integral $I_N(E)$, jika momentum satu partikel tetap pada nilai tertentu p , maka integral untuk partikel sisanya adalah $I_{N-1}(E-pc)$. Karenanya dapat dituliskan

$$I_N(E) = \int_0^{E/c} dp p^2 I_{N-1}(E - pc).$$

Analisis dimensional menunjukkan bahwa $I_N(E) = C_N(E/c)^{3N}$, dan dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan di atas menghasilkan hubungan rekursif untuk C_N :

$$\begin{aligned} C_N &= \left(\frac{c}{E}\right)^{3N} \int_0^{E/c} dp p^2 C_{N-1} \left(\frac{E}{c} - p\right)^{3N-3} \\ &= \int_0^1 dx x^2 (1-x)^{3N-3} C_{N-1} \\ &= \frac{2(3N-3)!}{(3N)!} C_{N-1}. \end{aligned}$$

Dapat diperoleh $C_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ dan solusi untuk hubungan rekursif tersebut adalah

$C_N = 2^N/(3N)!$, menghasilkan

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{(3N)!} \left(\frac{8\pi V E^3}{c^3}\right)^N \\ \Omega &= \frac{1}{(3N-1)!} \left(\frac{8\pi V E^3}{c^3}\right)^N \frac{\Delta E}{E}. \end{aligned}$$

Ketika N besar dapat digunakan aproksimasi Stirling untuk mendapatkan entropi :

$$S(E, V, N) = k \ln \left(\frac{\Omega}{h^{3N} N!} \right) \approx Nk \left[\ln \left(\frac{8\pi V E^3}{27 h^3 c^3 N^4} \right) + 4 \right].$$

12. Untuk kumpulan N buah osilator harmonik dengan frekuensi ω dan energi total E , hitunglah entropinya, S .

Solusi :

Hamiltonian himpunan N buah osilator harmonik klasik adalah

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_i^2 \right).$$

Volume dalam ruang fasa

$$\nu(E, N) = \int_{H < E} \prod_{i=1}^{3N} dp_i dq_i$$

Dilakukan substitusi

$$p_i = \sqrt{2m} x_i, \quad i = 1, \dots, 3N.$$

$$q_i = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} x_{3N+i}, \quad i = 1, \dots, 3N.$$

Dalam variabel tersebut, kendala energi dapat dituliskan sebagai $E = \sum_{i=1}^{6N} x_i^2$, dan volumenya adalah

$$\nu(E, N) = \left(\frac{2}{\omega} \right)^{3N} \int_D \prod_{i=1}^{6N} dx_i = \left(\frac{2}{\omega} \right)^{3N} \frac{\pi^{3N}}{3N\Gamma(3N)} E^{3N}.$$

Dengan D adalah daerah dimana kendala dipenuhi, dan sisa integral adalah volume bola $6N$ dimensi dengan radius $R = \sqrt{E}$. Untuk menghitung entropi diperlukan volume $\Omega(E, N; \Delta E)$ kulit energi setebal ΔE , yaitu

$$\Omega(E, N; \Delta E) = \Delta E \frac{\partial \nu(E, N)}{\partial E} = \left(\frac{2}{\omega} \right)^{3N} \frac{\pi^{3N}}{\Gamma(3N)} E^{3N} \frac{\Delta E}{E}.$$

Untuk N besar, aproksimasi Stirling menghasilkan entropi :

$$S(E, N) = k \ln \left(\frac{\Omega}{h^{3N}} \right) \approx 3Nk \left[\ln \left(\frac{2\pi E}{3h\omega N} \right) + 1 \right].$$

Dalam memperoleh persamaan di atas osilator dianggap dapat dibedakan sehingga tidak dimasukkan faktor $1/N!$.

13. Tentukan bentuk persamaan untuk tekanan P , densitas energi u dan densitas entropi s per satuan volume dari radiasi benda hitam dalam rongga berdimensi- d pada temperatur T .

Solusi :

Fungsi partisi grand kanonik untuk foton adalah

$$Z = (T, V) = \sum_{\{n_i\}} e^{-\beta \epsilon_i n_i} = \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_i n_i} = \prod_i (1 - e^{-\beta \epsilon_i})^{-1}$$

Dengan i adalah label keadaan partikel-tunggal berenergi ϵ_i . Foton punya potensial kimia nol karena jumlah foton dalam rongga tidak kekal dan tidak dapat muncul dalam densitas probabilitas ekilibrium. Karena level energi foton dalam rongga berukuran makroskopik sangat berdekatan, dapat dituliskan :

$$\ln[Z(T, V)] = - \sum_i \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_i}) = - \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) \ln(1 - e^{-\beta \epsilon})$$

Dengan $g(\epsilon)$ adalah jumlah keadaan per satuan interval energi. Dengan asumsi bahwa fungsi gelombang foton nol pada dinding rongga hyperkubik bersisi L , momentum yang dibolehkan adalah $\mathbf{p} = (\pi\hbar/L)\mathbf{n}$ dengan \mathbf{n} adalah vektor bilangan bulat positif. Karena energi foton adalah $|\mathbf{p}|c$, jumlah keadaan dengan energi kurang dari atau sama dengan ϵ adalah $(d-1)(1/2^d)$ dikalikan dengan volume bola berdimensi- d dengan radius $L\epsilon/\pi\hbar c$, dimana faktor $d-1$ memungkinkan keadaan polarisasi. Sehingga didapat

$$g(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{d-1}{2^{d-1}} \frac{\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} \left(\frac{L\epsilon}{\pi\hbar c} \right)^d \right] = \frac{(d-1)V\epsilon^{d-1}}{2^{d-1}\Gamma(d/2)(\hbar c\sqrt{\pi})^d} \equiv adV\epsilon^{d-1}$$

Dan

$$\ln[Z(T, V)] = -a_d V \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{d-1} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon}) = a_d V I_d (kT)^d$$

Dengan

$$I_d = - \int_0^{\infty} dx x^{d-1} \ln(1 - e^{-x}).$$

Besaran-besaran termodinamikanya adalah

$$P = \left(\frac{kT}{V} \right) \ln Z = a_d I_d (kT)^{d+1}$$

$$u = - \frac{1}{V} \frac{\partial(\ln Z)}{\partial \beta} = d a_d I_d (kT)^{d+1}$$

$$s = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial(PV)}{\partial T} \right)_V = (d+1) a_d I_d k (kT)^d$$

14. Berikan argumentasi umum mengapa dan pada kondisi bagaimana entropi dari sistem terisolasi A akan tetap konstan atau naik. Untuk mudahnya anggap bahwa A dapat dibagi menjadi sub sistem B dan C yang berhubungan secara lemah, tapi tetap dalam kesetimbangan termal internal.

Solusi :

Anggap bahwa temperatur kedua sub sistem masing-masing adalah T_B dan T_C , dan $T_B \geq T_C$. Sesuai dengan definisi entropi, jika ada pertukaran energi kecil $\Delta E > 0$ antara keduanya (B dan C), maka

$$\Delta S_B = - \frac{\Delta E}{T_B}, \quad \Delta S_C = \frac{\Delta E}{T_C},$$

$$\Delta S = \Delta S_B + \Delta S_C = \frac{(T_B - T_C)}{T_B T_C} \Delta E \geq 0.$$

Jika $T_B > T_C$, maka tidak ada kesetimbangan termal antara sub sistem, dan $\Delta S > 0$. Jika

$T_B = T_C$, maka kedua sub sistem berada dalam kesetimbangan termal, maka $\Delta S = 0$.

15. Tuliskan definisi statistik entropi dan apa makna fisisnya. Tinjau suatu sistem dua level yang terdiri atas $N = n_1 + n_2$ partikel yang terdistribusi diantara dua keadaan eigen 1 dan 2 dengan energi eigen E_1 dan E_2 . Sistem berhubungan dengan reservoir panas pada temperatur T . Jika suatu emisi kuantum tunggal ke dalam reservoir terjadi, populasi berubah $n_2 \rightarrow n_2 - 1$ dan $n_1 \rightarrow n_1 + 1$. Untuk $n_1 \gg 1$ dan $n_2 \gg 1$, tentukan perubahan entropi untuk : (a). Sistem dua level (b). Reservoir (c). Turunkan hubungan Boltzman untuk rasio n_1/n_2 .

Solusi :

$S = k \ln \Omega$, dengan Ω adalah jumlah keadaan mikro sistem. Secara fisis entropi adalah ukuran disorder dari sistem.

- (a). Perubahan entropi sistem dua level adalah

$$\Delta S_1 = k \ln \frac{N!}{(n_2 - 1)!(n_1 + 1)!} - k \ln \frac{N!}{n_1!n_2!} = k \ln \frac{n_2}{n_1 + 1} \approx k \ln \frac{n_2}{n_1}.$$

- (b). Perubahan entropi reservoir adalah

$$\Delta S_2 = \frac{E_2 - E_1}{T}$$

- (c). Dari $\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$, dapat diperoleh

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right)$$

16. Dalam teori ledakan besar (*Big Bang*) alam semesta, energi radiasi yang awalnya terkungkung dalam ruang kecil mengalami ekspansi secara adiabatik secara simetri bola.

Radiasi mengalami pendinginan ketika berekspansi. Turunkan hubungan antara temperatur T dan jari-jari R dari volume bola radiasi, murni berdasarkan pertimbangan termodinamika.

Solusi :

Eksplansinya dapat dianggap sebagai proses kuasi statik. Sehingga

$$dU = TdS - pdV$$

Dengan menggunakan syarat adiabatik $dS = 0$ dan persamaan untuk tekanan radiasi $p = U/3V$, dapat diperoleh

$$dU/U = -dV/3V$$

Sehingga $U \propto V^{-1/3}$. Kerapatan energi radiasi benda hitam adalah $u = U/V = aT^4$ dengan a adalah konstanta. Sehingga dapat dituliskan

$$T^4 \propto V^{-4/3} \propto R^{-4}, \text{ maka } T \propto R^{-1}$$

Atau dengan kata lain $RT = \text{konstan}$.

17. Satu kilogram air dipanaskan dengan resistor dari 20 °C ke 99 °C pada tekanan konstan (1 atm). Buatlah estimasi untuk :
- (i). Perubahan energi internal air
 - (ii). Perubahan entropi air
 - (iii). Faktor peningkatan jumlah keadaan kuantum yang dapat diakses.

Solusi :

- (i). Perubahan energi internal air adalah

$$\Delta U = Mc\Delta T = 1000 \times 1 \times 79 = 7,9 \times 10^4 \text{ kalori}.$$

(ii). Perubahan entropinya adalah

$$\Delta S = \int \frac{Mc}{T} dT = Mc \ln \frac{T_2}{T_1} = 239 \text{ kalori} / K.$$

(iii). Dari hubungan Boltzmann $S = k \ln \Omega$ dapat dituliskan

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \exp\left(\frac{\Delta S}{k}\right) = \exp(7 \times 10^{25}).$$

18. Jika sebuah pita karet diregangkan secara adiabatik, temperaturnya akan naik.. Jika pita karet diregangkan secara isothermal, apakah entropinya akan naik atau turun, atau tetap?

Solusi :

Diasumsikan bahwa jika pita karet diregangkan sebesar dx , usaha yang dilakukan pada karet adalah

$$dW = kx dx,$$

Dengan k adalah koefisien elastisitas yang lebih besar dari nol. Dari rumus $dF = -SdT + kx dx$, dapat diperoleh hubungan Maxwell

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T = -\left(k \frac{\partial x}{\partial T}\right)_x = 0.$$

Dengan demikian entropi pita karet tetap sama jika diregangkan secara isothermal.

19. Sebuah wadah bervolume V mengandung N buah molekul gas ideal yang dijaga pada temperatur tetap T dan tekanan P_I . Energi sebuah molekul dapat dituliskan sebagai berikut

$$E_k(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \varepsilon_k,$$

Dengan ε_k menunjukkan level energi bersesuaian dengan keadaan internal molekul gas.

(a). Tinjau energi bebas $F = -kT \ln Z$, dengan Z adalah fungsi partisi dan k adalah tetapan Boltzmann.

(b). Jika ada wadah lain yang bertemperatur sama T , mengandung jumlah molekul yang sama dari gas jenis yang sama dengan tekanan P_2 . Nyatakan entropi total kedua gas dalam P_1, P_2, T , dan N .

Solusi :

(a). Fungsi partisi partikel tunggalnya adalah

$$z = \frac{V}{h^3} \sum_k \iiint e^{-E_k / kT} dp$$

$$= V \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} z_0.$$

Dengan $z_0 = \sum_n \exp(-\varepsilon_n / kT)$ merujuk pada level energi internal. Dengan memperhitungkan sifat *indistinguishable* partikel, fungsi partisi sistem N buah partikel adalah

$$Z = \frac{z^N}{N!} = \frac{VN}{N!} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3N/2} z_0^N$$

Sehingga

$$F = -kT \ln Z$$

$$= -kT \left(N \ln V + N \ln z_0 + \frac{3N}{2} \ln \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right) - \ln N! \right)$$

$$(b). \quad S = k \left(\ln Z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \right) \\ = Nk \left(\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right) + \frac{5}{2} + \ln z_0 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z_0 \right).$$

Jadi

$$S_1 = Nk \left(\frac{V_1}{N} + \frac{3}{2} \ln \left[\frac{2\pi mkT}{h^2} \right] + \frac{5}{2} + S_o \right) \\ S_2 = Nk \left(\frac{V_2}{N} + \frac{3}{2} \ln \left[\frac{2\pi mkT}{h^2} \right] + \frac{5}{2} + S_o \right)$$

$$\text{Dengan } S_o = \ln z_0 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z_0.$$

Total entropinya adalah

$$S = S_1 + S_2 \\ = 2Nk \left(\frac{\sqrt{V_1 V_2}}{N} + \frac{3}{2} \ln \left[\frac{2\pi mkT}{h^2} \right] + \frac{5}{2} + S_o \right)$$

20. suatu gas ideal yang terdiri atas N buah atom tak berspin menempati volume V pada temperatur T . Tiap atom hanya punya dua level energi yang dipisahkan dengan energi sebesar Δ . Tentukan potensial kimia, energi bebas dan entropi sistem.

Solusi :

Gas ideal klasik memenuhi kondisi non-degenerasi. Fungsi partisi sub sistem adalah

$$z = \exp(-\beta \varepsilon_1) + \exp(-\beta \varepsilon_2), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \Delta, \text{ sehingga fungsi partisi sistemnya adalah}$$

$$Z = [z]^N = \left(e^{-\beta \varepsilon_1} + e^{-\beta \varepsilon_2} \right)^N.$$

Energi bebasnya adalah

$$F = -kT \ln Z = -NkT \ln(e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}).$$

Potensial kimianya adalah

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = -kT \ln(e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}).$$

Tekanannya adalah

$$p = kT \frac{\partial}{\partial V} \ln Z = -N \frac{\frac{\partial \epsilon_1}{\partial V} e^{-\beta\epsilon_1} + \frac{\partial \epsilon_2}{\partial V} e^{-\beta\epsilon_2}}{e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}}.$$

Entropinya adalah

$$S = Nk \left(\ln z - \beta \frac{\partial \ln z}{\partial \beta} \right) - k \ln N! = Nk \left[1 + \ln \left(\frac{e^{-\beta\epsilon_1} + e^{-\beta\epsilon_2}}{N} \right) \right]$$

B. SOAL

1. Asumsikan bahwa entropi S bergantung pada $\Omega(E)$ di dalam kulit bola energi : $S = f(\Omega)$.
Tunjukkan bahwa dari sifat penjumlahan S dan perkalian Ω dapat diperoleh : $S =$ konstanta $\times \log \Omega$.
2. Untuk gas ideal klasik dalam wadah bervolume V , hitung energi bebas dan entropi dengan menggunakan ensemble kanonik.
3. Tinjaulah suatu rantai satu dimensi yang terdiri atas $n \gg 1$ segmen. Misal panjang tiap segmen adalah a jika dimensi panjang dari segmen sejajar dengan panjang rantai dan nol jika dimensi panjang segmen tegak lurus panjang rantai. Tiap segmen punya dua keadaan, arah horisontal dan arah vertikal dan tiap arah tidak terdegenerasi. Jarak antar ujung rantai adalah nx . Tentukan entropi sebagai fungsi x .
4. Ditinjau suatu sistem yang berada pada temperatur 300 K dan ditambahkan panas (*heat*) ke dalamnya. (a). Berapa perubahan entropi yang terjadi? (b). Dengan faktor berapakah

jumlah *state* yang dapat diakses meningkat?

5. Untuk sembarang sistem, besaran-besaran berikut ini saling berkaitan : jumlah derajat kebebasan N_V , perubahan entropi ΔS , rasio energi termal akhir terhadap energi termal awal E_f/E_i , rasio jumlah *state* akhir terhadap jumlah *state* awal Ω_f/Ω_i . Di bawah ini ada tabel, dimana tiap baris horisontal mewakili proses tertentu pada suatu sistem. Dapatkan anda isi bilangan-bilangan yang belum dituliskan?

N_V	ΔS (J/K)	E_f/E_i	Ω_f/Ω_i
10^{24}	1		
	2	1,01	
		1,03	$10^{10^{23}}$
10^{23}		1,02	

6. (a). Berapakah perubahan entropi lautan Atlantik ($T = 280$ K, $V = 0,36 \times 10^9$ km³) jika ditambahkan kuantitas panas sebesar 0,1 joule?
- (b). Berapakah perubahan entropinya untuk kasus secangkir air 280 K?
- (c). Dengan faktor berapakah peningkatan jumlah *state* yang mungkin dimiliki kedua sistem tersebut masing-masing?
7. Suatu sistem 1024 partikel dengan $\mu = -0,2$ eV pada temperatur kamar (295 K). Tentukan faktor peningkatan jumlah *state* yang dapat diakses pada kasus-kasus berikut ini.
- (a). Jumlah partikel naik 0,01% tanpa penambahan energi ke dalam sistem atau kerja kepada sistem. (partikel tambahan punya energi total nol $u_0 + \varepsilon_{\text{termal}} = 0$, dan volume sistem tidak berubah).

- (b). Ditambahkan satu partikel tak berenergi ke dalam sistem.
8. Sebuah bola karet melakukan kontak dengan reservoir panas yang temperaturnya tetap konstan pada 300 K (dengan demikian dapat diasumsikan energi internal konstan). Pada tekanan 1,001 atm volumenya menyusut 10^{-10} m^3 .
- (a). Berapa perubahan entropinya?
- (b). Dengan faktor berapakah peningkatan jumlah *state* yang dapat diakses?
- (c). Ulangi perhitungan untuk kasus temperatur 20 °C, tekanan $1,02 \times 10^5 \text{ Pa}$, dan reduksi volume 10^{-10} m^3 .
9. Sebuah magnet yang kontak dengan reservoir panas dengan temperatur tetap 300 K, punya momen magnet $\mu_z = 10^{-3} \text{ J/T}$ dan diletakkan dalam medan magnet luar berarah sepanjang sumbu z dengan kuat medan $B_z = 0,1 \text{ T}$. Medan magnet luar dinaikkan 1% dan momen magnet induksi juga naik 1%.
- (a). Berapa perubahan entropinya?
- (b). Berapa faktor perubahan jumlah *state* yang dapat diakses?
10. Untuk air dalam fase cair, peningkatan tekanan yang besar hanya akan mengubah volume sedikit. Secara khusus tekanan dan volume dihubungkan dalam persamaan $p = A[1+B(1-V/V_0)]$, dengan A , B , dan V_0 adalah konstanta.
- Tunjukkan bahwa entropi air bergantung pada volume. (asumsikan bahwa E , V , dan N adalah variabel bebas, dengan E sebanding dengan T).
11. Ditinjau reservoir dengan temperatur, tekanan dan potensial kimia masing-masing T , p

dan μ . Awalnya entropinya adalah S_0 , kemudian suatu sistem kecil berinteraksi dengan reservoir dan memindahkan energi, volume dan partikel sebesar ΔE , ΔV , dan ΔN . Tentukan besaran di bawah ini dalam parameter S_0 , T , p , μ , ΔE , ΔV , dan ΔN :

- (a). Entropi reservoir yang baru S_R .
- (b). Jumlah *state* reservoir yang dapat diakses sekarang.

12. Untuk sistem tertentu, energi tiap *state* s dinyatakan oleh

$$E_s = kT[(C_s + (3/2)N \ln(\beta/\beta_0) - N \ln(V/V_0)],$$

Dengan β_0 dan V_0 adalah konstanta tetap dan C_s adalah konstanta yang nilainya tergantung pada *state*. Hitung entropi rata-rata sistem.

13. (a). Berapa perubahan total entropi jika 1 mol gas hidrogen pada tekanan $p_1 = 1$ atm dicampur secara adiabatik dengan 3 mol hidrogen pada tekanan $p_2 = 3$ atm pada temperatur yang sama?
- (b). Berapa perubahan total entropi jika keadaan yang sama dengan (a) diberlakukan dengan gas yang bertekanan 3 atm bukan hidrogen, tetapi helium?
14. Buatlah sket diagram entropi-temperatur dari runtutan perubahan kuasistatik berikut untuk 1 mol He^4 :
- (a). He awalnya berupa cairan pada tekanan 1 atm dengan titik didih normal 4,2 K, kemudian berupa sepenuhnya menjadi uap pada temperatur dan tekanan yang sama.
 - (b). Uap kemudian naik temperaturnya menjadi 10 K pada tekanan 1 atm.
 - (c). Gas pada 10 K dan tekanan 1 atm kemudian ditekan secara isothermal hingga 100 atm.

(d). He kemudian melakukan ekspansi reversibel secara adiabatik hingga tekanan 1 atm.

He kemudian mencapai temperatur 4,2 K dan membentuk campuran cairan dan uap pada titik didih normal.

Hitung perubahan entropi He^4 pada tiap tahapan dengan kalor laten penguapan He^4 adalah 93 J mole^{-1} pada 4,2 K, kapasitas panas molar gas He^4 pada tekanan konstan adalah $5R/2$ dan uap serta gas He^4 dapat diperlakukan sebagai gas ideal. (tetapan gas $R = 8,3 \text{ J K}^{-1}\text{mol}^{-1}$).

15. Suatu zat padat isolator yang terdiri atas atom-atom identik dengan keadaan energi yang diperbolehkan adalah satu level *non-degenerate* pada ε_1 dan dua level *degenerate* pada energi yang lebih tinggi ε_2 . Tuliskan fungsi partisi zat padat tersebut. Berapa nilai batas entropi 1 mol zat padat tersebut pada temperatur tinggi dan temperatur rendah?
16. Suatu gas mulia padat punya sifat-sifat sebagai berikut : temperatur karakteristik kisinya sekitar 80 K dan inti atomnya punya spin $\frac{1}{2}$. Level-level energi spin intinya dalam medan magnet nol terpisah selebar 10^{-11} eV . Buatlah estimasi entropi dan kapasitas panasnya untuk 1 mol zat tersebut pada 1 K.
17. Suatu benda akan didinginkan menggunakan mesin Carnot yang bekerja berkebalikan sebagai refrigerator. *Heat bath* pada temperatur tetap T_l (temperatur kamar) berlaku sebagai penyerap panas (*heat sink*) dimana semua panas mesin dikumpulkan. Kerja W dilakukan kepada mesin untuk mengekstrak panas dari benda yang akan didinginkan. Semua proses bersifat reversibel ideal tanpa adanya kerja atau kalor lain masuk atau keluar. Perubahan entropi benda dari T_l menuju temperatur akhir adalah ΔS dan

perubahan energi internalnya adalah ΔU . Tunjukkan bahwa kerja W yang dibutuhkan (minimum) adalah $\Delta U - T_f \Delta S$. Benda yang didinginkan bisa berupa suatu massa gas dan pada keadaan akhir, jika temperatur memungkinkan dapat saja berupa cairan.

18. Satu mol gas sempurna dengan $C_v = 3R/2$ (tidak bergantung pada temperatur) diambil dari temperatur 100 K dan tekanan 10^5 Pa ke 400 K dan 8×10^5 Pa melewati 2 jalur yang berbeda. (1). Dengan volume konstan mulai dari 100 K ke 400 K dan kemudian secara isothermal ke tekanan akhir. (2) mulai dari tekanan konstan dari 100 K ke 400 K kemudian secara isothermal ke volume akhir. Hitung kalor yang diserap atau dilepaskan pada tiap langkah jumlah aljabar untuk tiap jalur. Bandingkan hal tersebut dengan perubahan entropi dan tunjukkan bahwa perubahan entropi sama untuk kedua jalur perubahan tersebut. ($\ln 2 = 0,693$).
19. Satu kilogram air pada 20°C diubah menjadi es pada -10°C pada tekanan 1 atm. Kapasitas panas air pada tekanan konstan adalah $4200 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$ dan kapasitas panas es adalah $2100 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$, sedangkan kalor lebur es pada 0°C adalah $3,36 \times 10^5 \text{ JKkg}^{-1}$. Berapa total perubahan entropi sistem air-es?
20. (a). Satu mol oksigen pada 300 K melakukan ekspansi dari silinder bervolume 5 liter ke silinder kosong dengan volume yang sama (disebut ekspansi bebas). Ketika temperatur oksigen kembali seragam menjadi 300 K, berapa perubahan entropi oksigen (diasumsikan dapat diperlakukan sebagai gas ideal)? (b). Jika perubahan volume dari 5 liter menjadi 10 liter terjadi reversibel dan isothermal, berapa perubahan entropi oksigen? Berapa perubahan entropi *heat bath* yang digunakan untuk mempertahankan temperatur

konstan?

Bab 18 Soal dan Penyelesaian

Gas Riil

1. Pada sistem gas real yang mengikuti Persamaan Van Der Waals

$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = nRT$, tentukanlah harga – harga kritis pada Critical Point :

$$V_c = 3b, \quad P_c = \frac{a}{27b^2} \quad \text{dan} \quad nRT_c = \frac{8a}{27b}$$

Solusi :

Persamaan keadaan Van Der Waals

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = nRT \quad (1)$$

Bentuk persamaan ini mempunyai nilai – nilai kritis T_c, P_c dan V_c . Pada daerah sekitar titik kritis berlaku $V_1 = V_2 = V_3 = V_c$ untuk P dan T yang diketahui, sehingga dapat dibentuk persamaan

$$(V - V_c)^3 = 0 \quad (2)$$

atau dapat dituliskan

$$V^3 - 3V_c V^2 + 3V_c^2 V - V_c^3 = 0 \quad (3)$$

Persamaan (3) ini setara dengan persamaan (1) yaitu

$(P_c + \frac{a}{V^2})(V - b) = nRT_c$ yang dapat dinyatakan dengan

$$VP_c - bP_c + \frac{a}{V} - \frac{ab}{V^2} = nRT_c$$

$$V^3 P_c - bP_c V^2 + aV - ab = nRT_c V^2$$

$$V^3 - bV^2 + \frac{aV}{P_c} - \frac{ab}{P_c} = \frac{nRT_c V^2}{P_c} \quad (4)$$

sehingga dapat ditulis dalam bentuk

$$V^3 - (b + \frac{nRT_c}{P_c})V^2 + \frac{a}{P_c}V - \frac{ab}{P_c} = 0. \quad (5)$$

Perbandingan persamaan (4) dan (6) memberikan 3 persamaan simultan, yaitu

$$3V_c = b + \frac{nRT_c}{P_c} \quad (6.a)$$

$$3V_c^2 = \frac{a}{P_c} \quad (6.b)$$

$$V_c^3 = \frac{ab}{P_c} \quad (6.c)$$

Substitusi (6.b) pada (6.c) menghasilkan

$$\frac{1}{3}V_c(3V_c^2) = \frac{ab}{P_c}$$

$$\frac{1}{3}V_c \frac{a}{P_c} = \frac{ab}{P_c}$$

$$V_c = 3b \quad (7.a)$$

Dengan memasukkan (7.a) ke (6.b)

$$3(3b)^2 = \frac{a}{P_c}$$

$$P_c = \frac{a}{27b^2} \quad (7.b)$$

Substitusi (7.a) dan (7.b) pada (6.a)

$$3(3b) = b + \frac{nRT_c}{\frac{a}{27b^2}}$$

$$9b = b + \frac{nRT_c 27b^2}{a}$$

$$8b = \frac{nRT_c 27b^2}{a}$$

sehingga

$$nRT_c = \frac{8a}{27b} \quad (7.c)$$

Persamaan (7.a),(7.b),(7.c) merupakan harga – harga kritis pada daerah *critical point*.

2. Molekul gas hydrogen memiliki dua derajat kebebasan rotasi yaitu dalam bentuk ortho- and para hydrogen

- a. Dua electron H₂ para hydrogen dalam bentuk keadaan antisimetris. Momentum

angular orbital memiliki harga genap adalah $E_p = \frac{\hbar^2}{2I} L(L+1)$, dimana $L =$

0,2,4,... Tuliskan fungsi partisi rorasi untuk single para-hydrogen

- b. Dalam ortho-hydrogen, memiliki keadaan degenerasi kelipatan 3, adalah

$E_0 = \frac{\hbar^2}{2I} L(L+1)$, dimana $L = 1,3,5,..$ Tuliskan fungsi partisi rorasi untuk

single ortho-hydrogen

Solusi :

$$\mathbf{a.} \quad Z_p = \sum_{L=0,2,4,\dots} (2L+1) e^{-\frac{\beta \hbar^2}{2I} L(L+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_n + 1) e^{-\frac{\beta \hbar^2}{2I} 2n(2n+1)}$$

$$\mathbf{b.} \quad Z_p = \sum_{L=1,3,5,\dots} 3(2L+1) e^{-\frac{\beta \hbar^2}{2I} L(L+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_n + 3) e^{-\frac{\beta \hbar^2}{2I} (2n+1)(2n+2)}$$

3. Suatu bahan mengalami ekspansi adiabatik, terutama bagaimana variasi perubahan tekanan terhadap volume.

a. Tunjukkan bahwa :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -\frac{C_p}{C_v V \kappa_T}$$

b. Dengan menggunakan hasil point a, tunjukkan untuk gas ideal dalam kondisi

adiabatik ekspansi pV^γ adalah konstanta, dimana $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

Solusi :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S &= -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S} \\ \text{a.} \quad &= -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_V} \end{aligned}$$

kalikan pembagi dan penyebut dengan $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$;

$$\begin{aligned} &= -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p} \\ &= -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p}{-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V} \end{aligned}$$

Dengan mengingat definisi ;

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \quad ; \quad C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Maka ;

$$= - \frac{\left(\frac{C_p}{T} \right)}{(-\alpha V)(-\kappa_T V) \left(\frac{1}{\alpha V} \right) \left(\frac{C_V}{T} \right)}$$

Maka diperoleh ;

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S = - \frac{C_p}{C_V V \kappa_T}$$

4. Menurut persamaan gas real $\frac{PV}{nRT} = 1 + \frac{nB}{V}$, Tentukan ungkapan untuk $\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$

Solusi :

Bila diketahui persamaan gas real $\frac{PV}{nRT} = 1 + \frac{nB}{V} \Rightarrow P = \frac{nRT}{V} \left(1 + \frac{nB}{V} \right)$ atau

$$P = \frac{nRT}{V} + \frac{n^2 RTB}{V^2} = nRTV^{-1} + n^2 RTBV^{-2}$$

Maka ;

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -nRTV^{-2} - 2n^2 RTBV^{-3}$$

$$= -\frac{nRT}{V^2} - \frac{2n^2 RTB}{V^3}$$

$$= -\frac{nRT}{V^2} \left(1 + \frac{2nB}{V} \right)$$

5. Tentukan ungkapan bagi $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$ berdasarkan persamaan gas real pada soal no. 12.

Solusi :

$$\frac{PV}{nRT} = 1 + \frac{nB}{V} \Rightarrow T = \frac{PV}{nR} \left(\frac{V+nB}{V} \right) \text{ atau } T = \frac{PV^2}{nR} (V+nB)^{-1}$$

maka ;

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P &= \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{PV^2}{nR} (V+nB)^{-1} \right] \\ &= \frac{2PV}{nR} (V+nB)^{-1} - \frac{PV^2}{nR} (V+nB)^{-2} \\ &= \frac{2PV}{nR} \left(\frac{1}{V+nB} \right) - \frac{PV^2}{nR} \left[\frac{1}{(V+nB)^2} \right] \\ &= \frac{PV}{nR} \left(\frac{1}{V+nB} \right) \left[2 - \frac{V}{(V+nB)} \right] \end{aligned}$$

6. Perubahan entalpi (H) pada tekanan tetap dapat ditulis dalam bentuk persamaan $dH = nC_p dT$ dimana C_p adalah kapasitas panas sistem pada tekanan konstan dan bergantung pada temperatur menurut persamaan $C_p = a + bT$. Tentukan ekspresi dari ΔH dari temperatur awal T_i ke temperatur akhir T_f .

Solusi :

$$\begin{aligned} dH &= nC_p dT \text{ atau } dH = n(a + bT) dT \\ &= na dT + nbT dT \end{aligned}$$

$$\int_{H_i}^{H_f} dH = n \int_{T_i}^{T_f} a dT + n \int_{T_i}^{T_f} bT dT$$

Dengan mengingat ;

$$\int_a^b T^n dT = \frac{1}{n+1} T^{n+1} \Big|_a^b \text{ untuk } n \neq -1,$$

Maka ;

$$\Delta H = na(T_f - T_i) + \frac{nb}{2}(T_f^2 - T_i^2)$$

7. Dengan menggunakan persamaan $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$. Berdasarkan persamaan gas van der Waals untuk gas real, tunjukkan bahwa untuk gas real $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \neq 0$

Solusi :

Untuk persamaan gas van der Waals :

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2} \text{ atau } \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{(V - nb)}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T &= T\left(\frac{nR}{(V - nb)}\right)_V - \left[\frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}\right] \\ &= \frac{an^2}{V^2} \end{aligned}$$

Jadi, untuk gas real berdasarkan persamaan gas van der Waals $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \neq 0$

8. Koefisien gas Joule-Thompson berdasarkan eksperiment adalah $\mu_{J-T} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$. Jika $\mu_{J-T} < 0$ adalah kondisi dibawah entalpi. Apakah ada pengaruh temperatur pada gas? Jelaskan !

Solusi :

Aapabila gas pada kondisi $\mu_{J-T} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H < 0$, maka terjadi pengurangan dP atau sebaliknya jika $dP < 0$ maka $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H < 0$. Maka dapat disimpulkan bahwa pada kasus ini ada pengaruh temperatur terhadap gas dan supaya $\mu_{J-T} > 0$ maka dT harus positif.

9. Persamaan gas real $\frac{PV}{nRT} = 1 + \frac{nb}{V}$, Tujukan bahwa untuk gas van der Waals

$$\beta = \frac{kR}{V_m - b}, \text{ jika diketahui bahwa } \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{\beta}{k}$$

Solusi :

$$\frac{PV}{nRT} = 1 + \frac{nb}{V} \quad \text{atau} \quad P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

Jika $V_m = \frac{V}{n}$ maka ;

$$P = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$$

Sehingga ;

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_H = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{\beta}{k} = \frac{R}{V_m - b} \quad \text{atau}$$

$$\beta = \frac{kR}{V_m - b}$$

10. Critical Phenomena (Fenomena kritis) pada sistem gas-liquid ditentukan oleh parameter keteraturan (order parameter). Pada *critical point* gas-liquid, order parameter ini adalah perbedaan volume (Volume Difference = V) fase – fase yang *coexist* yang cenderung bernilai 0 pada *critical point*. Tentukanlah *critical exponent* δ sistem Van Der Waals !

Solusi :

Critical Exponent δ sistem Van Der Waals didefinisikan sebagai :

$$V \propto P^{1/\delta} \tag{1}$$

Pernyataan di atas mempunyai makna bahwa V mempunyai bagian singular proporsional dengan P dalam orde $1/\delta$. Dengan kata lain, hendak ditinjau

relasi $V_c(P)$ dalam keadaan $V \neq 0$. Pernyataan (1) tersebut dapat dituliskan ulang sebagai

$$P \propto V^\delta. \quad (2)$$

Dengan demikian δ ditentukan oleh orde $P(V-V_c)$ minimal yang tidak singular.

Persamaan keadaan sistem Van Der Waals dinyatakan oleh

$$(V - Nb)\left(P + \frac{N^2 a}{V^2}\right) = Nk_B T, \quad (3)$$

yang dapat dibentuk menjadi

$$\begin{aligned} P &= \frac{Nk_B T}{(V - Nb)} - \frac{N^2 a}{V^2} \\ &= Nk_B T(V - Nb)^{-1} - N^2 a V^{-2} \end{aligned} \quad (4)$$

Persamaan (4) diselesaikan dengan proses ekspansi Taylor untuk mendapatkan relasi yang didefinisikan oleh persamaan (2) menjadi

$$P(V_c) = P(V - V_c) + P'(V)(V - V_c) + P''(V)(V - V_c)^2 + P'''(V)(V - V_c)^3 + \dots$$

Dengan $\rho = \frac{1}{V}$, persamaan (4) dapat dibentuk

$$P = Nk_B T(\rho^{-1} - Nb)^{-1} - N^2 a \rho^2 \quad (5)$$

yang diturunkan orde 1, 2, 3 berturut – turut adalah

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = Nk_B T \rho^{-2} (\rho^{-1} - Nb) - 2N^2 a \rho \quad (6.a)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} = -2Nk_B T \rho^{-3} (\rho^{-1} - Nb)^{-2} + 2Nk_B T \rho^{-4} (\rho^{-1} - Nb)^{-3} - 2N^2 a$$

(6.b)

$$\frac{\partial^3 P}{\partial \rho^3} = 6Nk_B T \rho^{-4} (\rho^{-1} - Nb)^{-2} + 12Nk_B T \rho^{-5} (\rho^{-1} - Nb)^{-3} - 4Nk_B T \rho^{-6} (\rho^{-1} - Nb)^{-4}$$

(6.c)

Dapat diperoleh juga

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial V} &= -V^{-2} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial V^2} &= 2V^{-3} \\ \frac{\partial^3 \rho}{\partial V^3} &= -6V^{-4}\end{aligned}\tag{7.a, 7.b, 7.c}$$

Dengan memanfaatkan (6.a, 6.b, 6.c) dan (7.a, 7.b, 7.c), dapat diperoleh

$$P'(V - V_c) = \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_{V=V_c} = Nk_B T(V - Nb)^{-2} - 2N^2 a V^{-3} \Big|_{V=V_c}$$

yang singular karena faktor V^{-3} pada suku ke-2,

$$P''(V - V_c) = \left. \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right|_{V=V_c} = -4Nk_B T(V - Nb)^{-2} - 4Nk_B T V(V - Nb)^{-3} - 2N^2 a V^{-3} \Big|_{V=V_c}$$

yang juga singular pada suku ke-3, dan

$$P'''(V - V_c) = \left. \frac{\partial^3 P}{\partial V^3} \right|_{V=V_c} = 36Nk_B T(V - Nb)^{-2} + 72Nk_B T V(V - Nb)^{-3} + 24Nk_B T V^2(V - Nb)^{-4} \Big|_{V=V_c}$$

yang ternyata tidak lagi singular.

Hasil di atas menunjukkan bahwa suku deret Taylor yang merupakan ekspansi

$P(V)$ tidak singular setelah orde ke-3. Maka dapat dikatakan bahwa *critical exponent* untuk orde parameter sistem gas-liquid ini adalah $\delta = 3$

Soal 11 dan 12

Asumsi bahwa persamaan gas real dapat ditulis $P(V_m - b(T)) = RT$ dengan

$$b(T), \frac{db(T)}{dT}, P \text{ dan } V_m$$

11. Tunjukkan bahwa $\beta = \left(\frac{1}{V_m} \right) \left(\frac{ndb(T)}{dT} + \frac{nR}{P} \right)$

Solusi :

Diketahui bahwa $P(V_m - b(T)) = RT$ atau

$$P \left(\frac{V}{n} - b(T) \right) = RT \Rightarrow \frac{V}{n} = \frac{RT}{P} + b(T) \text{ atau } V = nb(T) + \frac{nRT}{P}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{1}{V} \right) \frac{\partial}{\partial T} \left(nb(T) + \frac{nRT}{P} \right) = \left(\frac{1}{V} \right) \left(\frac{ndb(T)}{dT} + \frac{nR}{P} \right) \\ &= \left(\frac{1}{V_m} \right) \left(\frac{ndb(T)}{dT} + \frac{nR}{P} \right) \end{aligned}$$

12. Tunjukkan bahwa $\kappa = \left(\frac{RT}{V_m P^2} \right)$

Solusi :

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\left(\frac{1}{V} \right) \frac{\partial}{\partial P} \left(nb(T) + \frac{nRT}{P} \right) = -\left(\frac{1}{V} \right) \left(-\frac{nR}{P^2} \right) \\ &= \left(\frac{RT}{V_m P^2} \right) \end{aligned}$$

13. Persamaan keadaan gas van der Waals $(v-b)(P + \frac{a}{v^2}) = k_B T$ dimana v adalah volume per partikel $v = \frac{V}{N}$ dengan a dan b adalah konstanta. Tunjukkan bahwa panas spesifik

$$C_P - C_V = \frac{Nk}{1 - \frac{2a}{kTv^3}(v-b)^2}$$

Solusi :

Berdasarkan persamaan termodinamika $T ds$,

$$T dS = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV + T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV + C_V dT$$

$$T dS = T \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP + T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP + C_P dT$$

Dari kedua persamaan diatas maka selisih kedua persamaan diatas menjadi ;

$$(C_P - C_V) dT = T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV$$

Jika volume V konstan maka ;

$$(C_P - C_V) dT = T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP \text{ atau dapat ditulis kembali menjadi ;}$$

$$(C_P - C_V) = T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = NT \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

Jika diketahui bahwa $(v-b)(P + \frac{a}{v^2}) = k_B T$, maka ;

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{k}{v-b}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = \frac{k}{P - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3}} = \frac{k}{P + \frac{a}{v^2} - \frac{2a}{v^3}(v-b)}$$

Maka

$$\begin{aligned} (C_P - C_V) &= NT \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \\ &= \frac{Nk^2 T}{\left(P + \frac{a}{v^2} \right)(v-b) - \frac{2a}{v^3}(v-b)^2} \\ &= \frac{Nk \quad kT}{kT - \frac{2a}{v^3}(v-b)^2} \\ &= \frac{Nk}{1 - \frac{2a}{v^3}(v-b)^2} \end{aligned}$$

Soal Nomor 14 - 16

Partikel-partikel gas real encer dalam volume V berinteraksi dengan fungsi potensial sebagai

berikut :

$$U(r) = \begin{cases} 0, & \text{jika } r > 0 \\ \infty, & \text{jika } r < a, \text{ dengan } r \text{ adalah jarak antar partikel.} \end{cases}$$

Persamaan keadaan gas tersebut dapat dituliskan dengan bantuan ensemble Kanonik besar sebagai berikut :


$$\frac{P}{kT} = \sum_m \frac{b_m}{\lambda^3} z^m$$

dengan λ adalah panjang gelombang termal, z : fugacity dan b_m adalah integral cluster- m .









14. Gambarkan grafik cluster- m yang akan berkontribusi untuk $m = 1, 2$ dan 3 , lengkap dengan labelnya.




Solusi :


$$(1 + f_{12})(1 + f_{13})(1 + f_{23}) = 1 + (f_{12} + f_{13} + f_{23}) + (f_{12}f_{13} + f_{12}f_{23} + f_{13}f_{23}) + (f_{12}f_{13}f_{23}),$$

Gugus 1 ; 

Gugus 2 ;  1•  2•,  1•  3•,  1•  3•

Gugus 3 :  1•  2•,  2•  3•,  3•  1• dan  1•  2•

 3•  1•  2•

 3•

15. Tuliskan rumus b_m tersebut dan hitunglah b_1 dan b_2 untuk kasus ini.

Solusi :

$$Z = \sum_{\{m_l\}} \prod_{l=1}^N \frac{1}{m_l} \left(\frac{v}{\lambda^3} b_l \right)^{m_l}, \quad b_m = \frac{1}{l \lambda^{3l-3} V}$$

(Jumlah semua gugus l yang mungkin) dan konstrain/kendala : $\sum_l m_l l = N$

Persamaan $\frac{PV}{kT}$ diperoleh dari hubungan dengan Fungsi partisi grand Kanonik :

$$Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} Z^N Z(N,V,T) = \sum_{\{m_l\}} \prod_{l=1}^N \frac{Z^{m_l l}}{m_l!} \left(\frac{v}{\lambda^3} b_l \right)^{m_l}$$

$$Z_G = \sum_{m_1} \frac{Z^{m_1 1}}{m_1!} \left(\frac{v}{\lambda^3} b_1 \right)^{m_1} \times \sum_{m_2} \frac{Z^{m_2 2}}{m_2!} \left(\frac{v}{\lambda^3} b_2 \right)^{m_2} \times \sum_{m_3} \frac{Z^{m_3 3}}{m_3!} \left(\frac{v}{\lambda^3} b_3 \right)^{m_3} \times \dots$$

Diketahui bahwa : $\sum_n \frac{X^n}{n!} = e^x$

$$Z_G = \prod_{l=1}^{\infty} \exp \left(\frac{Z^l v}{\lambda^3} b_l \right),$$

untuk kasus gas real $\frac{PV}{kT} = \ln Z_G$ dan $\langle N \rangle = Z \frac{\partial}{\partial Z} \ln Z_G$, maka ;

$$\ln Z_G = \ln \prod_{l=1}^{\infty} \exp \left(\frac{Z^l v}{\lambda^3} b_l \right) = \sum_l \left(\frac{Z^l v}{\lambda^3} b_l \right) \text{ dan}$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} \ln Z_G = \sum_l \left(\frac{l Z^{l-1} v}{\lambda^3} b_l \right),$$

sehingga ;

$$\frac{PV}{kT} = \ln Z_G = \sum_l \left(\frac{Z^l v}{\lambda^3} b_l \right), \text{ dan } \langle N \rangle = \sum_l \left(\frac{l Z^l v}{\lambda^3} b_l \right)$$

Gunakan deret kuasa : $Z = \sum_{m=1}^{\infty} a_m n^m = a_1 n^1 + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \dots$

Dimana ; $n = \frac{N}{V} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{l}{\lambda^3} Z^l b_l \right)$

$$n = \frac{1}{\lambda^3} Z b_1 + \frac{2}{\lambda^3} Z^2 b_2 + \frac{3}{\lambda^3} Z^3 b_3 + \dots$$

$$= \frac{1}{\lambda^3} \{ Z b_1 + 2 Z^2 b_2 + 3 Z^3 b_3 + \dots \}$$

$$n = \frac{1}{\lambda^3} [(a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \dots) b_1 + 2 (a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \dots)^2 b_2 +$$

$$3 (a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \dots)^3 b_3 + \dots]$$

$$n = \frac{1}{\lambda^3} [a_1 b_1 n + (a_2 b_1 + 2 a_1^2 b_2) n^2 + (a_3 b_1 + 4 a_1 a_2 b_2 + 3 a_1^3 b_3) n^3 + \dots],$$

Untuk, $b_1 = 1$, koefisien $n = 1$, maka ; $a_1 = \lambda^3$,

$$\text{koefisien } n^2 = 0 \rightarrow a_2 b_1 + 2 a_1^2 b_2 = 0$$

$$a_2 = -2\lambda^6 b_2 \text{ dan}$$

$$a_3 = \lambda^9 (8 b_2^2 - 3 b_3), \text{ jadi}$$

$$Z = \lambda^3 n - 2\lambda^6 b_2 n^2 + \lambda^9 (8 b_2^2 - 3 b_3) n^3 + \dots$$

Selanjutnya :

$$\frac{PV}{kT} = \sum_{l=1} \left(\frac{Z^l V}{\lambda^3} b_l \right) \rightarrow \frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} (Z^l b_l) = \frac{1}{\lambda^3} (Z b_1 + Z^2 b_2 + Z^3 b_3 + \dots)$$

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} [(a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \dots) b_1 + (a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \dots)^2 b_2 +$$

$$(a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \dots)^3 b_3 + \dots]$$

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} [a_1 b_1 n + (a_2 b_1 + a_1^2 b_2) n^2 + (a_3 b_1 + 2 a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3) n^3 + \dots],$$

$$a_1 = \lambda^3, \quad a_2 = -2\lambda^6 b_2 \quad \text{dan} \quad a_3 = \lambda^9 (8 b_2^2 - 3 b_3)$$

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} [\lambda^3 n - \lambda^6 b_2 n^2 + \lambda^9 (4 b_2^2 - 2 b_3) n^3 + \dots] = [n - \lambda^3 b_2 n^2 + \lambda^6 (4 b_2^2 - 2 b_3) n^3 + \dots]$$

atau

$$\frac{P}{nkT} = 1 - \lambda^3 b_2 n + \lambda^6 (4 b_2^2 - 2 b_3) n^2 + \dots,$$

Maka diperoleh ; $A_1 = 1$, $A_2 = -b_2$ dan $A_3 = 4 b_2^2 - 2 b_3$

16. Persamaan keadaan gas riil dapat juga dinyatakan sebagai uraian deret virial sbb :

$$\frac{P}{nkT} = A_1 + A_2 n + A_3 n^2 + \dots$$

dengan $n = N/V$. Turunkanlah ungkapan bagi A_1 , A_2 dan A_3 dalam b_m .

$$b_1 = \frac{1}{l \lambda^0 V} [\bullet] = \frac{1}{V} \int d^3 r_1 = \frac{1}{V} V = 1,$$

$$b_2 = \frac{1}{2\lambda^3 V} [3(1 \bullet \bullet 2)],$$

$$b_2 = \frac{3}{2\lambda^3 V} \left[\int d^3 r_1 d^3 r_2 f_{12} \right] = \frac{3}{2\lambda^3} \int 4\pi r^2 f(r) dr = \frac{6\pi}{\lambda^3} \int r^2 (e^{-u(r)/kT} - 1) dr$$

$$= \frac{6\pi}{\lambda^3} \left[\int_0^a r^2 (e^{-\infty} - 1) dr + \int_a^\infty r^2 (e^0 - 1) dr \right]$$

$$= \frac{6\pi}{\lambda^3} \left[\int_0^a -r^2 dr \right] = -\frac{6\pi}{\lambda^3} \frac{1}{3} a^3 = -\frac{2\pi}{\lambda^3} a^3$$

$$b_3 = \frac{1}{6\lambda^6 V} [3(1 \bullet \bullet \bullet + 3 \bullet \bullet \bullet)],$$

Soal Latihan

1. Tunjukkan rasio (pV/RT) pada kritikal point untuk gas dimana persamaan keadaanya (Persamaan Dieterici's) $p(V-b) = RT \exp(-a/RTV)$ dan tunjukkan jawaban secara numerik.
2. Satu mol gas gas senantiasa menaati persamaan gas van der Waals. Jika molar energi internal $u = cT - a/V$ (V adalah molar volume dan a adalah konstanta persamaan keadaan dan c adalah konstanta. Tentukanlah molar kapasitas panas C_v dan C_p
3. Persamaan gas van der Waals adalah $P = \frac{RT}{(V-b)} - \frac{a}{V^2}$, tentukanlah koefisien ekspansi termal α
4. Dengan menggunakan persamaan gas real van der Waals, tunjukkan molar kapasitas panas pada volume konstan adalah hanya fungsi dari temperatur
5. Tunjukkan dengan menggunakan persamaan gas real van der Waals perbedaan molar

kapasitas panas pada tekanan tetap dan volume tetap.

6. Tentukan koefisien Joule-Thomson $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ berdasarkan persamaan gas real van der Waals.

7. Dengan menggunakan persamaan gas real van der Waals buktikan bahwa $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = \frac{a}{V^2}$

8. Suatu sistem memiliki energi total $U(S, V, N) = \alpha N \exp\left(\frac{\beta S^2}{V^2}\right)$ dengan α dan β adalah konstanta sedangkan S , V dan N masing-masing entropi, volume dan jumlah partikel. Tentukanlah potensial kimia μ sebagai fungsi dari temperatur dan tekanan.

9. Persamaan Sackur-Tetrode $S(U, V, N) = Nk \left[\ln \left(\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m U}{3Nh^2} \right)^{3/2} \right) + \frac{5}{2} \right]$ merupakan gambaran dari persamaan entropi gas ideal monoatomik. Jelaskan mengapa kondisi ini tidak berlaku untuk gas real ?

10. Persamaan gas ideal van der Waals $(V - Nb)(P + \frac{N^2 a}{V^2}) = Nk_B T$ dengan temperatur Boyle T_{Boyle} . Ketika temperatur ini dihilangkan pada koefisien virial suku kedua, gas ideal akan sama dengan gas real di sekitar T_{Boyle} . Dengan menggunakan kritikal temperatur dari persamaan gas van der Waals, tentukan harga T_{Boyle}

11. Dengan menggunakan hubungan termodinamika buktikan untuk elektron gas

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{NT} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_{NT} \quad \text{dengan } n = N/V$$

12. Soal Nomor 13-16 Untuk kasus kristikal eksponen ;

Berdasarkan persamaan gas van der Waals tentukan ;

13. Kritikal point α

14. Kritikal point β

15. Kritikal point γ

17. Tunjukan entropy $S(E, V, N)$ dari gas real dengan N partikel klasik monoatomik

dengan energi total E tetap yang beradada dalam kotak d-dimensi dengan volume V.

Berikan kesimpulan dari persamaan keadaan gas ini dengan asumsi N adalah sangat banyak

18. Gas real dengan N partikel dengan energi total E tetap Yang berada dalam kotak hiperkubik d – dimensi dengan panjang sisi L. Dengan mengasumsikan bahwa E sangat besar dibandingkan dengan ground state energy, Tentukan probailitas ditemukannya partikel dengan momentum p dalam gas ini ?

19. Suatu kotak mengandung gas ideal klasik dengan volume V tetap dan dinding kotak menyerap N_0 bagian. Tiap-tiap bagian dapat menyerap sampai dua partikel dengan energi tiap-tiap serapan $-\varepsilon$. Jumlah partikel N adalah tetap dan lebih besar dari $2N_0$. Gunakan ensemble grand kanonik untuk menunjukkan persamaan keadaan gas dan tentukan jumlah rata-rata penyerapan partikel dengan batas $T \rightarrow 0$ dan $T \rightarrow \infty$

20. Suatu gas A dengan N partikel bermasa m, jika permukaan area A dalam bentuk 2 dimensi gas ideal pada temperatur T di permukaan area. Energi serapan partikel

$$\varepsilon = \frac{|p|^2}{2m} - \varepsilon_0 \quad \text{dimana} \quad p = (p_x, p_y) \quad \text{dan} \quad \varepsilon_0 \quad \text{energi ikat permukaan per partikel.}$$

Dengan menggunakan aproksimasi dan asumsi bahwa partikel tak dapat dibedakan.

Tentukan potensial kimia μ serapan gas.

Bab 19 Soal dan Penyelesaian

Sistem dengan Interaksi Lemah

1. Jelaskan apa yang dimaksud dengan ensemble kanonik ?

Solusi :

Ensemble kanonik adalah sistem dengan banyak partikel pada tiap sistem adalah sama dan merupakan bilangan konstan dan temperatur tiap sistem (bukan energi) adalah sama dan merupakan bilangan konstan. Dengan kata lain sistem yang mempunyai nilai N (banyak partikel) dengan volum (V) dan temperatur (T) yang tetap. Kondisi ini memperbolehkan kemungkinan adanya pertukaran energi antara sistem dan sebuah ensemble dan juga interaksi antar partikel dalam sebuah sistem.

2. Sebuah sistem dengan dua partikel (**A** dan **B**) yang dapat dibedakan. Masing-masing partikel mempunyai dua keadaan nilai eigen energi $\varepsilon_1 = 0$ dan $\varepsilon_2 = \varepsilon$.
 - a. Tuliskan fungsi partisi sistem
 - b. Tuliskan fungsi partisi salah satu partikel
 - c. Tuliskan fungsi partisi *noninteracting particles*
 - d. Tuliskan probability sistem untuk keadaan yang mungkin
 - e. Energi rata-rata sistem
 - f. Energi bebas per partikel
 - g. Entropi per partikel

Solusi :

Keadaan Mikro ε	I	II	III	VI
1		(R)	(A)	(A) (R)
0	(A) (R)	(A)	(R)	
$\sum \varepsilon$	0	1		

a. Fungsi Partisi

$$Z(T, N = 2) = \sum_{i=1}^4 e^{-\beta \varepsilon_i} = e^{-\beta \cdot 0} + 2e^{-\beta \varepsilon} + e^{-2\beta \varepsilon}$$

$$= 1 + 2e^{-\beta \varepsilon} + e^{-2\beta \varepsilon}$$

b. Fungsi partisi salah satu partikel

$$Z(T, N = 1) = \sum_{i=1}^2 e^{-\beta \varepsilon_i} = e^{-\beta \cdot 0} + e^{-\beta \varepsilon}$$

$$= 1 + e^{-\beta \varepsilon}$$

c. Tuliskan fungsi partisi *noninteracting particles*

$$Z(T, N = 2) = Z(T, N = 1)^2$$

d. Probability sistem untuk keadaan yang mungkin

$$p_1 = \frac{1}{Z(T, 1)} = \frac{1}{1 + e^{-\beta \varepsilon}} \text{ dan}$$

$$p_2 = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{Z(T,1)} = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}}$$

e. **Energi rata-rata sistem**

$$u = \langle E \rangle = \sum_{i=1}^2 p_i \varepsilon_i = \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}}$$

f. **Energi bebas per partikel**

$$f = -kT \ln [Z(T,1)] = -kT \ln [1+e^{-\beta\varepsilon}]$$

g. **Entropi per partikel**

$$s = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_V = k \ln(1+e^{-\beta\varepsilon}) + k \frac{\beta\varepsilon}{1+e^{-\beta\varepsilon}}$$

3. Sebuah sistem dengan dua partikel (**A** dan **B**) yang **dapat dibedakan** dan masing-masing partikel mempunyai tiga keadaan nilai eigen energi $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$ dan $\varepsilon_3 = 2\varepsilon$. Gambarkan keadaan yang mungkin dan tuliskan fungsi partisinya serta fungsi energi bebasnya.

Solusi :

Kead. Mikro ε	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
2				(R)	(A)		(R)	(A)	(A) (R)
1		(R)	(A)			(A) (R)	(A)	(R)	

0	$\textcircled{\text{A}} \textcircled{\text{B}}$	$\textcircled{\text{A}}$	$\textcircled{\text{B}}$	$\textcircled{\text{A}}$	$\textcircled{\text{B}}$				
$\sum \varepsilon$	0	1	2	3	4				

Fungsi Partisi

$$Z = \sum_{i=1}^5 e^{-\beta \varepsilon_i} = e^{-\beta (0)} + 2e^{-\beta \varepsilon} + 2e^{-2\beta \varepsilon} + e^{-2\beta \varepsilon} + 2e^{-3\beta \varepsilon} + e^{-4\beta \varepsilon}$$

$$= 1 + 2e^{-\beta \varepsilon} + 3e^{-2\beta \varepsilon} + 2e^{-3\beta \varepsilon} + e^{-4\beta \varepsilon}$$

Jika $\beta = -\frac{1}{kT}$, maka

$$Z = 1 + 2e^{\varepsilon/kT} + 3e^{2\varepsilon/kT} + 2e^{3\varepsilon/kT} + e^{4\varepsilon/kT}$$

Fungsi Helmholtz

$$F = -kT \ln Z$$

$$= -kT \ln (1 + 2e^{\varepsilon/kT} + 3e^{2\varepsilon/kT} + 2e^{3\varepsilon/kT} + e^{4\varepsilon/kT})$$

4. Sebuah sistem dengan dua partikel (**A** dan **B**) yang **tak dapat dibedakan** dan masing-masing partikel mempunyai tiga keadaan nilai eigen energi $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$ dan $\varepsilon_3 = 2\varepsilon$. Gambarkan keadaan yang mungkin dan tuliskan fungsi partisinya serta fungsi energi bebasnya.

Solusi :

Keadaan Mikro ε	I	II	III	IV	V	VI
2				●	●	● ●
1		●	● ●		●	
0	● ●	●		●		
$\sum \varepsilon$	0	1	2		3	4

Fungsi Partisi

$$Z = \sum_{i=1}^5 e^{-\beta \varepsilon} = e^{-\beta (0)} + e^{-\beta \varepsilon} + 2e^{-2\beta \varepsilon} + e^{-3\beta \varepsilon} + e^{-4\beta \varepsilon}$$

$$= 1 + e^{-\beta \varepsilon} + 2e^{-2\beta \varepsilon} + e^{-3\beta \varepsilon} + e^{-4\beta \varepsilon}$$

Jika $\beta = -\frac{1}{kT}$, maka

$$Z = 1 + e^{\varepsilon/kT} + 2e^{2\varepsilon/kT} + e^{3\varepsilon/kT} + e^{4\varepsilon/kT}$$

Fungsi Helmholtz

$$F = -kT \ln Z$$

$$= -kT \ln (1 + e^{\varepsilon/kT} + 2e^{2\varepsilon/kT} + e^{3\varepsilon/kT} + e^{4\varepsilon/kT})$$

5. Tunjukkan bahwa dalam ensemble kanonik, fluktuasi energi sebesar $\Delta E = \sqrt{kT^2 C_V}$.

Solusi :

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}$$

Diketahui bahwa ;

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad \text{atau} \quad E = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

Maka ;

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \quad \text{dan} \quad \langle E \rangle^2 = \left(-\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

Maka ;

$$(\Delta E)^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \left[\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right]^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z \right] = -\frac{\partial E}{\partial \beta}$$

Diketahui bahwa ;

$$\beta = -\frac{1}{k_B T} \quad \text{dan} \quad C_V = \frac{\partial E}{\partial T}$$

Maka ;

$$(\Delta E)^2 = -\frac{\partial E}{\partial \beta} = k_B T^2 \frac{\partial E}{\partial T}$$

$$(\Delta E)^2 = k_B T^2 C_V \text{ atau } \Delta E = \sqrt{k_B T^2 C_V}$$

6. Tunjukkan bahwa dalam ensemble kanonik, fluktuasi energi relatif sebesar $\frac{\Delta E}{E} \sim \frac{1}{N}$.

Solusi :

Diketahui bahwa fluktuasi energi dalam ensemble kanonik adalah $\Delta E = \sqrt{k_B T^2 C_V}$,

Maka ;
$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\sqrt{k_B T^2 C_V}}{E}$$

Jika sistem sangat besar maka diambil $N \rightarrow \infty$ dan $V \rightarrow \infty$, maka $\frac{N}{V}$ adalah konstan dan jika C_V dan E adalah variabel ekstensive maka $C_V \sim N$, jadi ;

$$\frac{\Delta E}{E} \sim \frac{1}{N}$$

7. Dengan menggunakan ensemble kanonik, tuliskan sifat-sifat termodinamika kuantum osilator harmonik 1 dimensi dalam kesetimbangan dengan temperatur ruang T yang memiliki tingkat energi $\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

Solusi :

Fungsi Partisi ensemble Kanonik :

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta E)$$

Dimana ; $\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), maka

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[-\beta \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \text{ atau}$$

$$Z = e^{-\beta \hbar \omega / 2} (1 + e^{-\beta \hbar \omega} + e^{-2\beta \hbar \omega} + \dots),$$

Diketahui bahwa deret geometri ;

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}, \text{ dimana } x = e^{-\beta \hbar \omega}, \text{ maka ;}$$

Fungsi partisinya menjadi ;

$$Z = \frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}$$

Fungsi hemholtznya :

$$\begin{aligned} F &= -kT \ln Z = -kT \ln \left(\frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \right) \\ &= -kT \left[-\frac{1}{2} \beta \hbar \omega - \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \hbar \omega + kT \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \end{aligned}$$

Entropi ;

$$\begin{aligned} S &= - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) = - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2} \hbar \omega + kT \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right) \\ &= k \left[\frac{\beta \hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} - \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right] \end{aligned}$$

Energi internal osilator :

$$\begin{aligned} E &= - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \text{ atau } E = kT^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z \right) \\ &= \hbar \omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right] \end{aligned}$$

8. Energi osilator harmonik 1 dimensi dengan status keadaan n adalah $\epsilon_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$,

dengan h : tetapan Planck, F : frekuensi, $n = 1, 2, 3, \dots$ dst. Misalkan kita memiliki sebuah sistem yang terdiri dari N buah osilator harmonik 3 dimensi identik yang tak terbedakan dan bisa dianggap tak saling berinteraksi.

- Tuliskan fungsi partisi kanonik untuk sistem tsb dan sederhanakan sehingga diperoleh bentuk analitik (closed form).
- Tuliskan juga aproksimasi bagi fungsi partisi tersebut untuk T tinggi ($T \gg hf/k$) dan T terendah ($T \ll hf/k$).

Solusi :

a. $\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}) hf$, dengan $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$Z = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \exp\left(-\beta\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)hf\right)$$

$$= e^{-\frac{3}{2}\beta hf} \sum_{n_x}^{\infty} \left(e^{-\beta hf}\right)^{n_x} \sum_{n_y}^{\infty} \left(e^{-\beta hf}\right)^{n_y} \sum_{n_z}^{\infty} \left(e^{-\beta hf}\right)^{n_z}$$

Nilai untuk $\sum_n^{\infty} \left(e^{-\beta hf}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta hf}}$, maka ;

$$Z = e^{-\frac{3}{2}\beta hf} \left[\frac{1}{\left(1 - e^{-\beta hf}\right)^3} \right] = \frac{1}{\left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}}\right)^3} = \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}}\right)^{-3},$$

Untuk N partikel dalam 3-D, diperoleh ;

$$Z_N = \frac{1}{N!} (Z)^N = \frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}}\right)^{-3N}$$

b. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$, dan $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots$,

maka :

$$e^{\frac{\beta hf}{2}} = 1 + \frac{\beta hf}{2} + \dots \quad \text{dan} \quad e^{-\frac{\beta hf}{2}} = 1 - \frac{\beta hf}{2} + \dots,$$

T tinggi ($T \rightarrow \infty$) atau β rendah ($\beta \rightarrow 0$) :

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} Z_N &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{N!} (Z)^N = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)^{-3N} \\ &= \frac{1}{N!} \left[\left(1 + \frac{\beta hf}{2} \right) - \left(1 - \frac{\beta hf}{2} \right) \right]^{-3N} \\ &= \frac{1}{N!} (\beta hf)^{-3N} = \frac{1}{N!} \left(\frac{kT}{hf} \right)^{3N} \end{aligned}$$

T rendah ($T \rightarrow 0$) atau β tinggi ($\beta \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} Z_N &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{N!} (Z)^N = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)^{-3N} \\ &= \frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} \right)^{-3N} = \frac{1}{N!} \left(e^{\frac{3Nhf}{2kT}} \right) \end{aligned}$$

9. Berdasarkan soal nomor 2, hitunglah ;

- Energi rata-rata sistem tersebut.
- Hitung juga aprokmasi nilai eigen energi tsb untuk T tinggi dan T rendah.
- Kapasitas panas pada volume tetap.

- d. Hitung juga aprokmasi kapasitas panas tsb untuk T tinggi dan T rendah.
e. Turunkan juga ungkapan bagi entropi.

Solusi :

a. Energi rata-rata

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N \\
 &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left[\frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)^{-3N} \right] = 3N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left[\frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right) \right] \\
 &= 3N \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \frac{1}{N!} + \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right) \right] \\
 &= 3N \left[\frac{\left(\frac{\beta hf}{2} + e^{\frac{\beta hf}{2}} \right)}{\left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)} \right] \left(\frac{hf}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta hf}{2} \right)
 \end{aligned}$$

b. Aprokmasi nilai eigen energi tsb untuk T tinggi dan T rendah.

T tinggi ($T \rightarrow \infty$) atau β rendah ($\beta \rightarrow 0$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow 0} \langle E \rangle &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \\
&= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \left(\frac{\left(e^{\frac{\beta hf}{2}} + e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)}{\left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)} \right) \\
&= \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \frac{1}{\left(\frac{\beta hf}{2} \right)} = \left(\frac{3N}{\beta} \right) = 3NkT
\end{aligned}$$

T rendah ($T \rightarrow 0$) atau β tinggi ($\beta \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow \infty} \langle E \rangle &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \\
&= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \left(\frac{\left(e^{\frac{\beta hf}{2}} + e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)}{\left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)} \right) \\
&= \left(\frac{3Nhf}{2} \right)
\end{aligned}$$

c. Kapasitas panas pada volume tetap

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = \frac{\partial}{\partial T} \langle E \rangle = \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \beta} \langle E \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{kT^2} \right) \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \coth \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \right] \\
&= \left(-\frac{1}{kT^2} \right) \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \left(\frac{hf}{2} \right) \left[-\operatorname{csc} h^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \right] \\
&= 3Nk \left(\frac{hf}{2kT} \right)^2 \operatorname{csc} h^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \\
&= 3Nk \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 \operatorname{csc} h^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \\
&=
\end{aligned}$$

d. Aprokmasi kapasitas panas untuk T tinggi dan T rendah.

T tinggi ($T \rightarrow \infty$) atau β rendah ($\beta \rightarrow 0$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow 0} C_V &= \lim_{\beta \rightarrow 0} 3Nk \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 \operatorname{csc} h^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \\
&= 3Nk \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right)} \\
&= 3Nk = 3R
\end{aligned}$$

T rendah ($T \rightarrow 0$) atau β tinggi ($\beta \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow \infty} C_V &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} 3Nk \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 \csc h^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \\
&= 3Nk \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right)} \text{ atau} \\
&= 3Nk \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 \left[\frac{1}{e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}}} \right]^2 \\
&= 3Nk \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 e^{-\frac{\beta hf}{2}} \text{ atau} \\
&= 3Nk \left(\frac{hf}{2kT} \right)^2 e^{-\frac{hf}{2kT}}
\end{aligned}$$

e. Entropi

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$$

dimana ;

$$F = -kT \ln Z_N, \text{ dan } Z_N = \frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)^{-3N}$$

Maka ;

$$S = k \frac{\partial}{\partial T} (T \ln Z_N) = k \left(\ln Z_N + T \frac{\partial}{\partial T} \ln Z_N \right)$$

Diketahui bahwa ;

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N = - \frac{\partial T}{\partial \beta} \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z_N \right) \\
&= \frac{1}{k\beta^2} \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z_N \right) = kT^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z_N \right)
\end{aligned}$$

Maka ;

$$\frac{\partial}{\partial T} \ln Z_N = \frac{\langle E \rangle}{kT^2}$$

Jadi ;

$$\begin{aligned} S &= \left(k \ln Z_N + kT \frac{\partial}{\partial T} \ln Z_N \right) = k \ln Z_N + \frac{\langle E \rangle}{T} \\ &= k \ln \left[\frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta h f}{2}} - e^{-\frac{\beta h f}{2}} \right)^{-3N} \right] + \left(\frac{3N h f}{2T} \right) \coth \left(\frac{\beta h f}{2} \right) \end{aligned}$$

10. Suatu sistem osilator harmonik 1 dimensi yang memiliki hamiltonian

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \frac{p_i^2}{m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \quad \text{dengan temperatur ruang } T. \text{ Tentukanlah :}$$

- Fungsi partisi kanonik
- Energi bebas Hemholtz
- Potensial kimia
- Entropy
- Energi

Solusi :

a. Fungsi partisi kanonik

Fungsi partisi ensemble kanonik dalam ruang fasa adalah :

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \int d^{3N} q d^{3N} p \exp(-\beta H(q, p))$$

Maka ;

Fungsi partisi sistem ini adalah :

$$\begin{aligned}
Z(T, V, 1) &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\beta \left(\frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2 \right) \right\} dp dq \\
&= \frac{1}{h} \left(\frac{2\pi}{\beta m \omega^2} \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{1/2} \\
&= \frac{2\pi}{\beta \omega} \\
&= \frac{1}{\beta \hbar \omega}
\end{aligned}$$

Dengan $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

b. Energi bebas Hemholtz

$$Z(t, V, N) = Z(T, V, 1)^N$$

$$\begin{aligned}
F(T, V, N) &= -kT \ln Z(T, V, 1)^N \\
&= NkT \ln \left(\frac{1}{\beta \hbar \omega} \right) \\
&= NkT \ln \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right)
\end{aligned}$$

c. Potensial kimia

$$\begin{aligned}
\mu(T, V, N)_{V,T} &= \frac{\partial F(T, V, N)}{\partial N} = NkT \ln \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right) \\
&= kT \ln \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right)
\end{aligned}$$

d. Entropi

$$\begin{aligned}
S &= k \ln Z(T, V, N) + kT \left(\frac{\partial \ln Z(T, V, N)}{\partial T} \right)_{N, V} \\
&= Nk \ln \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right) + Nk \\
&= Nk \left[\ln \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right) + 1 \right]
\end{aligned}$$

e. Energi

$$\begin{aligned}
E &= kT^2 \left(\frac{\partial \ln Z(T, V, N)}{\partial T} \right)_{N, V} \\
&= kT^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right)^N \right) \\
&= NkT
\end{aligned}$$

11. Tuliskan persamaan Schrodinger untuk gas ideal monoatomik satu dimensi serta tuliskan fungsi partisi kanonik dan Fungsi Helmholtznya

Solusi :

Partikel dalam Sumur Potensial (1-D)

I	II	III
$V = \infty$	$V = 0$	$V = \infty$
$\psi_I = 0$	•	$\psi_{III} = 0$
0	L	

$$\text{Syarat Batas : } V(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } 0 < x < L \rightarrow \psi \text{ ada} \\ \infty & \text{untuk } x \leq 0 \text{ atau } x \geq L \rightarrow \psi = 0 \end{cases}$$

Persamaan Shrodinger : $H \psi(x) = E \psi(x)$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi(x) = E \psi(x), \quad V(x) = 0 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$$

$$\text{dimana ; } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \rightarrow \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + k^2 = 0$$

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + k^2 \psi(x) = 0 \rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) \psi(x) = 0 \rightarrow \left(\frac{d}{dx} + ik \right) \left(\frac{d}{dx} - ik \right) \psi(x) = 0$$

$$\psi(x) = \psi_0 e^{ikx} + \psi_1 e^{-ikx} \quad \text{atau} \quad \psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

dengan syarat batas : $\psi(x=0) = B = 0$ dan $\psi(x=L) = A \sin(kL) = 0, A \neq 0,$

$$\sin(kL) = 0 \rightarrow kL = n\pi \rightarrow k = \frac{n\pi}{L}, \text{ dimana nilai } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right),$$

Jadi ;

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \rightarrow \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n\pi^2}{L^2} \quad \text{atau}$$

$$E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

- Fungsi Partisi ensambel Kanonik :

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta E)$$

Dimana ; $E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$, maka

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\beta \left(\frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}\right)\right)$$

Jika dimisalkan ; $c = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$, maka ;

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta cn^2)$$

dimana :

$$\sum_{n_x=1}^{\infty} e^{-\beta cn^2} = \int_1^{\infty} e^{-\beta cn^2} dn = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta c}}, \text{ maka}$$

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta cn^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2mL^2 \pi}{\beta \pi^2 \hbar^2}\right)}$$

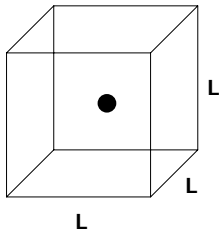
- Fungsi Helmholtz :

$$F = -kT \ln Z = -kT \ln \left[\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2mL^2 \pi}{\beta \pi^2 \hbar^2}\right)} \right]$$

12. Tuliskan persamaan Schrodinger untuk gas ideal monoatomik dalam kotak kubus bervolume V (dengan sisi L) serta tuliskan fungsi partisi kanonik dan Fungsi

Helmholtznya

Solusi :



$$\text{Syarat Batas : } V(x,y,z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L, 0 < y < L \text{ dan } 0 < z < L ; \psi \neq 0 \\ \infty & \text{diluar kotak} ; \psi = 0 \end{cases}$$

Persamaan Shcrodinger : $H \psi(x) = E \psi(x)$, untuk 1 partikel dalam kotak

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] + V(x) \right) \psi = E \psi, V(x,y,z) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \psi(x,y,z) = E \psi(x,y,z),$$

Karena syarat batas separabel dalam koordinat kartesius, maka ;

$$\psi(x,y,z) = \psi(x) \psi(y) \psi(z)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \psi(x) \psi(y) \psi(z) = E \psi(x) \psi(y) \psi(z)$$

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{\psi(y)} \frac{d^2 \psi(y)}{dy^2} + \frac{1}{\psi(z)} \frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$$

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{\psi(y)} \frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + \frac{1}{\psi(z)} \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + k^2 = 0$$

$$- k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k^2 = 0,$$

Maka ;

$$- k_x^2 = \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \quad ; \quad - k_y^2 = \frac{1}{\psi(y)} \frac{d^2\psi(y)}{dy^2} \quad \text{dan} \quad - k_z^2 = \frac{1}{\psi(z)} \frac{d^2\psi(z)}{dz^2}$$

Untuk ; $- k_x^2 = \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k_x^2 \psi(x) = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_x^2 \right) \psi(x) = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ik_x \right) \left(\frac{d}{dx} - ik_x \right) \psi(x) = 0$$

$$\psi(x) = \psi_0 e^{ik_x x} + \psi_1 e^{-ik_x x} \text{ atau}$$

$$\psi(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)$$

Dengan syarat batas $0 \leq x \leq L$, maka ;

$$\psi(x=0) = B = 0 \text{ dan}$$

$$\psi(x=L) = A \sin(k_x L) = 0 ; \quad A \neq 0$$

$$\sin(k_x L) = 0$$

$$k_x L = n_x \pi \quad \text{atau} \quad k_x = \frac{n_x \pi}{L},$$

maka ; $k_y = \frac{n_y \pi}{L}$ dan $k_z = \frac{n_z \pi}{L}$

$$\psi(x,y,z) = \psi(x) \psi(y) \psi(z)$$

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sin\left(\frac{n_x\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z\pi}{L}\right),$$

Jadi ;

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \left(\frac{n_x\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{L}\right)^2 \text{ atau}$$

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) ; \quad \text{dimana nilai } n_x, n_y, n_z = 1, 2,$$

3, \dots

- **Fungsi Partisi ensambel Kanonik :**

$$Z = \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} \exp(-\beta E)$$

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2),$$

$$\text{dimisalkan ; } c = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \rightarrow E_{n_x, n_y, n_z} = c(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$Z = \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} \exp(-\beta c(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2))$$

$$= \left(\sum_{n_x=1}^{\infty} e^{-\beta c n_x^2} \right) \left(\sum_{n_y=1}^{\infty} e^{-\beta c n_y^2} \right) \left(\sum_{n_z=1}^{\infty} e^{-\beta c n_z^2} \right), \text{ dimana :}$$

$$\left(\sum_{n_x=1}^{\infty} e^{-\beta c n^2} \right) = \int_1^{\infty} e^{-\beta c n^2} dn = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta c}}, \text{ maka}$$

$$Z = \left(\sum_{n_x=1}^{\infty} e^{-\beta c n^2} \right)^3 = \frac{1}{8} \sqrt{\left(\frac{\pi}{\beta c} \right)^3} = \frac{1}{8} \sqrt{\left(\frac{2mL^2 \pi}{\beta \pi^2 \hbar^2} \right)^3}$$

$$Z = \frac{1}{8} \sqrt{\left(\frac{2mL^2\pi}{\beta\pi^2\hbar^2} \right)^3}$$

• **Fungsi Helmholtz :**

$$F = -kT \ln Z = -kT \ln \left[\frac{1}{8} \sqrt{\left(\frac{2mL^2\pi}{\beta\pi^2\hbar^2} \right)^3} \right]$$

13. Dalam gas ideal energi sistem tanpa interaksi antar molekul adalah

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}, \text{ tentukanlah :}$$

- Energi bebas Helmholtz
- Potensial kimia
- Entropi

Solusi :

Fungsi partisi dalam gas ideal adalah :

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \left(\int d^3q \right)^N \left(\int d^3p e^{-\beta/2m \sum_{i=1}^N p_i^2} \right) \text{ atau}$$

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} (Z(T, V, 1))^N = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \right)^N$$

Diketahui bahwa rerata panjang gelombang de Broglie partikel gas pada temperatur tertentu adalah :

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi mkT}},$$

maka fungsi partisi dapat ditulis kembali menjadi ;

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N$$

a. Energi bebas Hemholtz

$$\begin{aligned} F &= -kT \ln Z = -kT \ln \left[\frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^2} (2\pi mkT)^{3/2} \right)^N \right] \\ &= NkT \left[\ln \left(\frac{Nh^3}{V (2\pi mkT)^{3/2}} \right) - 1 \right] \text{ atau} \\ &= NkT \left[\ln \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

b. Potensial kimia

$$\begin{aligned} \mu &= \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V, T} = kT \ln(Z) \\ &= kT \left[\ln \left(\frac{Nh^3}{V (2\pi mkT)^{3/2}} \right) \right] \\ &= kT \left[\ln \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) \right] \end{aligned}$$

c. Entropi

$$\begin{aligned} S &= - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, T} = kN \ln(Z) \\ &= kT \left[- \ln \left(\frac{Nh^3}{V (2\pi mkT)^{3/2}} + \frac{5}{2} \right) \right] \\ &= Nk \left[\ln \left(\frac{V}{N\lambda^3} + \frac{5}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

14. Dengan menggunakan ensemble kanonik, tentukan kecepatan distribusi partikel dalam gas ideal.

Solusi :

Probabilitas satu partikel dalam ruang fasa dengan momentum \mathbf{p} dan koordinat \mathbf{q} adalah :

$$\rho(q, p) = \frac{1}{Z(T, V, 1)} \exp\{-\beta H(q, p)\}$$

Dengan ; $Z(T, V, 1) = \left(\frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \right)$ dan $\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi mkT}}$, maka ;

$$\begin{aligned} \rho(q, p) &= \frac{1}{\left(\frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \right)} \exp\{-\beta H(q, p)\} \\ &= \frac{\lambda^3}{V} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \end{aligned}$$

Probabilitas ditemukan satu partikel dengan momentum antara p dan $p+dp$, dan koordinat q dan $q+dq$ adalah ;

$$\frac{1}{h^3} \rho(q, p) d^3 q d^3 p$$

Dimana ; h^3 adalah volume ruang fasa, maka ;

Kecepatan distribusi untuk semua posisi adalah ;

$$\begin{aligned} f(v) d^3 v &= \frac{m^3}{h^3} d^3 v \int d^3 q \frac{\lambda^3}{V} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} d^3 v \end{aligned}$$

15. Dengan menggunakan koordinat polar dan ensemble kanonik, tentukan kecepatan

rata-rata kecepatan partikel dalam gas ideal.

Solusi :

Distribusi kecepatan dalam koordinat polar adalah :

$$\begin{aligned} f(v)dv &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} 4\pi v^2 dv \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv \end{aligned}$$

Probabilitas kecepatan yang cocok untuk distribusi kecepatan maksimal, jika ;

$$\left(\frac{df(v)}{dv}\right)_{v_0} = 0$$

Maka ;

$$\begin{aligned} -\frac{m}{2kT} v_0^3 + v_0 &= 0 \text{ atau} \\ v_0 &= \sqrt{\frac{2kT}{m}} \end{aligned}$$

Kecepatan rata-rata adalah :

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_0^\infty v f(v) dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \frac{1}{2} \int_0^\infty y e^{-y} dy \end{aligned}$$

Dimana ;

$$y = \left(\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

Jika $\int_0^\infty y e^{-y} dy = \Gamma(2) = 1$, maka ;

$$\begin{aligned}\langle v \rangle &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}\end{aligned}$$

16. Dengan menggunakan koordinat polar dan ensemble kanonik, tentukan energi kinetik gas ideal.

Solusi :

Diketahui bahwa, Kecepatan rata-rata adalah :

$$\begin{aligned}\langle v \rangle &= \int_0^{\infty} v f(v) dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y e^{-y} dy\end{aligned}$$

Maka kuadrat kecepatan rata-rata adalah ;

$$\begin{aligned}\langle v^2 \rangle &= \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^{3/2} e^{-y} dy\end{aligned}$$

Jika ; $\int_0^{\infty} y^{3/2} e^{-y} dy = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \sqrt{\pi}$, maka ;

$$\begin{aligned}\langle v^2 \rangle &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \frac{1}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{3kT}{m}\end{aligned}$$

Jadi, energi kinetik sebesar ;

$$\begin{aligned}\langle E_{kinetik} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{1}{2}m \left(\frac{3kT}{m} \right) \\ &= \frac{3}{2}kT\end{aligned}$$

17. Gas ideal dengan N partikel dalam kesetimbangan termodinamika dengan resevoir panas pada temperatur T. Jika diketahui bahwa probabilitas ensemble kanonik adalah $dw = A \exp\left(\frac{-\varepsilon}{kT}\right) d\Gamma$ dengan Γ adalah volume ruang fasa sebesar $\Gamma = A_N V^N \varepsilon^{3N/2}$. Tentukanlah probabilitas $dw(E)$ pada sistem tersebut dengan E adalah energi pada interval dE

Solusi :

Diketahui bahwa ;

$$dw = A \exp\left(\frac{-\varepsilon}{kT}\right) d\Gamma \text{ dan } \Gamma = A_N V^N \varepsilon^{3N/2}, \text{ maka ;}$$

$$\begin{aligned}d\Gamma &= A_N V^N \frac{3N}{2} \frac{\varepsilon^{3N/2}}{\varepsilon} d\varepsilon \\ &= A_N V^N \frac{3N}{2} \varepsilon^{3N/2-1} d\varepsilon\end{aligned}$$

Dengan mengintegalkan dan sampakan persamaan sama dengan 1, maka nilai konstanta dapat diperoleh :

$$const \int_0^{\infty} \varepsilon^{3N/2-1} \exp\left(\frac{-\varepsilon}{kT}\right) d\varepsilon = 1$$

Misalkan ;

$$t = \frac{-\varepsilon}{kT} \text{ dan } z = \frac{3N}{2}, \text{ maka}$$

Dengan menggunakan fungsi Gamma, diperoleh ;

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z)$$

Maka diperoleh :

$$dw(E) = \frac{1}{kT^{3N/2} \Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)} \cdot \varepsilon^{3N/2-1} \exp\left(\frac{-\varepsilon}{kT}\right)$$

18. Menurut persamaan Barometric aproksimasi pertama untuk tekanan atmosfer di puncak akan mereduksi 1/3 tekanan udara. Gengan asumsi bahwa temperatur udara adalah uniform dan masa molar udara adalah M, buktikan bahwa $\frac{1}{3} = e^{\left(\frac{-mgz}{kT}\right)}$

Solusi ;

Dengan mengasumsikan keadaan energi pada ketinggian z sebesar $U(z) = mgz$, maka kosentrasi kolom udara berdasarkan ensemble kanonik adalah ;

$$n(z) = n_0 e^{\frac{-mgz}{kT}} \text{ dengan } n_0 = \text{kosentrasi}$$

Dengan menggunakan persamaan gas ideal yang berhubungan dengan kosentrasi dan tekanan ;

$$PV = NkT \Rightarrow P = \frac{N}{V} kT$$

Jika $\frac{N}{V} kT \sim n$, maka ;

$$\frac{1}{3} = \frac{P(z)}{P(0)} = \frac{n(z)}{n_0} = \frac{n_0 e^{\frac{-mgz}{kT}}}{n_0} = e^{\frac{-mgz}{kT}}$$

19. Suatu sistem dengan gas centrifugal yang berradius R yang digunakan untuk memisahkan campuran gas dari luar. Pemisahan antara dua jenis gas dengan massa

m_1 dan m_2 . Jika rotasi sentrifugal dengan konstanta kecepatan angular adalah ω . Dengan menggunakan ensemble kanonik, tentukan koefisien pemisahan q yang besarnya ;

$$q = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2} \right)_{r=R}}{\left(\frac{n_1}{n_2} \right)_{r=0}}$$

Dimana, n_1 dan n_2 adalah konsentrasi yang berhubungan dengan jenis gas.

Solusi :

Energi rotasi partikel dalam sistem sentrifugal dengan jarak r dari pusat rotasi adalah :

$$U(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

Distribusi kanonik adalah merupakan fungsi dari radius, sebesar ;

$$\begin{aligned} n(r) &= n_0 e^{\frac{U(r)}{kT}} \\ &= n_0 e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}} \end{aligned}$$

Dimana n_0 menggambarkan kondisi normalisasi $r \rightarrow 0$, maka hubungan dengan koefisien separasi adalah :

$$q = \frac{\left(n_{01} e^{-\frac{m_1 \omega^2 R^2}{2kT}} \right)}{\left(\frac{n_{01}}{n_{02}} \right)} \Rightarrow \exp \left(\frac{(m_1 - m_2) \omega^2 R^2}{2kT} \right)$$

20. Dalam sistem magnetik model Ising $d=1$, dengan kondisi syarat batas dan tanpa medan magnetik, fungsi partisi kanonik adalah ;

$$Z(\beta, N) = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N = \pm 1} \exp\left(\beta J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}\right)$$

- Buktikanlah $Z(\beta, N) = [2 \cosh(\beta J)]^N$
- Tentukanlah fungsi energi per spin dalam β dan J
- Tentukanlah kapasitas panas per spin dalam β dan J

Solusi :

a. Buktikanlah $Z(\beta, N) = [2 \cosh(\beta J)]^N$

$$\begin{aligned} Z(\beta, N) &= \sum_{s_1 = \pm 1, s_2 = \pm 1, \dots} \exp\left(\beta J \sum_i \eta_i\right) \\ &= \sum_{s_1 = \pm 1, s_2 = \pm 1, \dots} \prod_i \exp(\beta J \eta_i) \\ &= \prod_i \sum_{\eta_i = \pm 1} \exp(\beta J \eta_i) \\ &= \prod_i (e^{\beta J} + e^{-\beta J}) \\ &= \prod_i 2 \cosh(\beta J) \\ &= [2 \cosh(\beta J)]^N \end{aligned}$$

b. Tentukanlah fungsi energi per spin dalam β dan J

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left([2 \cosh(\beta J)]^N \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} N \ln(2 \cosh(\beta J)) \\ &= -NJ \left(\frac{2 \sinh(\beta J)}{2 \cosh(\beta J)} \right) \\ &= -NJ \tanh(\beta J) \end{aligned}$$

c. Tentukanlah kapasitas panas per spin dalam β dan J

$$\begin{aligned} C &= \frac{\partial}{\partial T} \langle E \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \langle E \rangle \frac{\partial \beta}{\partial T} \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-NJ \tanh(\beta J) \right) \left(-\frac{1}{kT^2} \right) \\ &= -NJ^2 \left[1 - \tanh^2(\beta J) \right] \\ &= \frac{NJ^2}{kT^2} \left[1 - \tanh^2(\beta J) \right] \\ &= Nk\beta^2 J^2 \left[1 - \tanh^2(\beta J) \right] \end{aligned}$$

A. 20 Soal Tanpa Jawaban

1. Dengan menggunakan energi bebas Hemholtz $F(N, V, T)$ dari system termodinamika, buktikan bahwa ;

$$N \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V, T} + V \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{N, T} = F$$

2. Buktikan bahwa $C_p - C_v = -k \frac{\left[\frac{\partial}{\partial T} \left\{ T \left(\frac{\partial}{\partial V} \ln Z \right)_T \right\} \right]_V^2}{\left(\frac{\partial^2}{\partial V^2} \ln Z \right)_T} > 0$

3. Perhatikan bahwa untuk gas ideal ;

$$\frac{S}{Nk} = \ln \left(\frac{Z_1}{N} \right) + T \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z_1 \right)_p$$

4. Energi osilator harmonik 1 dimensi dengan status keadaan n adalah $\epsilon_n = (n + \frac{1}{2})h\nu$, dengan h : tetapan Planck, ν : frekuensi, $n = 1, 2, 3, \dots$ dst. Misalkan kita memiliki sebuah sistem yang terdiri dari N buah osilator harmonik 2 dimensi identik yang tak terbedakan dan bisa dianggap tak saling berinteraksi.

c. Tuliskan fungsi partisi kanonik untuk sistem tsb dan sederhanakan sehingga

diperoleh bentuk analitik (closed form).

- d. Tuliskan juga aproksimasi bagi fungsi partisi tersebut untuk T tinggi ($T \gg h\nu/k$) dan T terendah ($T \ll h\nu/k$).

5. Berdasarkan soal nomor 5, hitunglah ;

- Energi rata-rata sistem tersebut.
- Hitung juga aproksimasi nilai eigen energi tsb untuk T tinggi dan T rendah.
- Kapasitas panas pada volume tetap.
- Hitung juga aproksimasi kapasitas panas tsb untuk T tinggi dan T rendah.
- Turunkan juga ungkapan bagi entropi.

6. N partikel gas ideal monoatomik hipotetik 2 dimensi terletak dalam kotak (rectangle) berukuran $L_x = L_y = L$ memiliki temperatur T . Massa tiap partikel m dan luas kotak $= L^2$. Perlakukan sistem sebagai kumpulan partikel identik (tak bisa dibedakan) dan tak saling berinteraksi.

- Tuliskan hamiltonian 1 partikel saja dan selesaikan untuk mencari status eigen dan energi yang terkait.
- Tuliskan hamiltonian total sistem tersebut (N partikel) dan tuliskanlah fungsi eigen sistem (tanpa memperhatikan simetri) serta energinya.
- Tuliskan fungsi kanonik sistem tersebut.

7. Perlihatkan untuk fungsi partisi $Z_N(V, T) = \frac{1}{N!} \left\{ 8\pi V \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \right\}^N$ untuk gas

monoatomik dengan hubungan antara energi dan momentum sebesar $\varepsilon = pc$, dengan c adalah kecepatan cahaya.

8. Buktikan untuk kasus $3N$ partikel yang bergerak dalam ruang 1 dimensi, memiliki fungsi partisi sebesar :

$$Z_{3N}(L, T) = \frac{1}{(3N)!} \left[2L \left(\frac{kT}{hc} \right) \right]^{3N}$$

9. Suatu sisten martikel identik yang memiliki 2 keadaan energi yaitu $\pm \varepsilon$. Gunakan ensemble kanonik dan tentukan entropi rata-rata per partikel dan fungsi energi rata-rata per partikel.

10. Tentukan fungsi korelasi $\langle s_1 s_{n+1} \rangle$ untuk sistem magnetik dimana $n = 0, 1, 2, \dots$ dengan fungsi partisi kanonik adalah ;

$$Z(\beta, N) = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N = \pm 1} \exp \left(\beta J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} + 1 \right)$$

11. Berdasarkan soal nomor 12, tunjukan bahwa fluktuasi rata-rata magnetisasi sebesar ;

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^N \delta s_i \right)^2 \right\rangle = N \frac{1}{1 - \tanh(\beta J)}$$

12. Perlihatkan bahwa untuk material magnetik, kapasitas panas dengan konstanta medan H dan magnetisasi M memiliki hubungan ;

$$C_H - C_M = -T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_M \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H$$

13. Buktikan bahwa untuk bahan paramagnetik mematuhi hukum Curie

$$C_H - C_M = \frac{CH^2}{T^2}$$

14. Suatu sistem magnetik spin $\frac{1}{2}$ memiliki energi $E = -\mu B_s = \mu B_s$ dengan $s = \pm 1$, dengan menggunakan ensemble kanonik, tentukanlah magnetisasi dan isothermal suseptibilitasnya.

15. Suatu sistem dengan Hamiltonian $H = \varepsilon \sum_{i=1}^N n_i$ yang memiliki probabilitas keadaan mikro $\mu \equiv \{n_i\}$. Tentukanlah fungsi partisi dan energi bebas Helmholtznya.
16. Berdasarkan jawaban nomor 14, tentukanlah entropi dan energi internalnya.
17. Keadaan makro gas ideal kanonik $M \equiv (T, V, N)$ dengan $H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}$ dan keadaan mikro $\mu \equiv \{\vec{p}_i, \vec{q}_i\}$. Tentukanlah fungsi partisi dan energi bebas Helmholtznya.
18. Berdasarkan jawaban nomor 15, tentukanlah entropi dan potensial kimianya
19. Suatu sistem magnetik dengan medan internal \vec{B} dan Hamiltonian H . Jika spin adalah $\frac{1}{2}$ dengan keadaan mikro N spin digambarkan dengan variabel Ising $\{\sigma = \pm 1\}$ dan $M = \mu_0 \sum_{i=1}^N \sigma_i$ dengan μ_0 momen magnet mikroskopik. Jika tidak ada interaksi antar spin ($H=0$), tentukanlah probabilitas keadaan mikro dan fungsi partisi Gibbs-nya.
20. Berdasarkan soal nomor 18, tentukanlah magnetisasi rata-rata dan suseptibilitasnya.

Bab 20 Soal dan Penyelesaian

Ensembel Kanonik

1. Jelaskan apa yang dimaksud dengan ensemble kanonik ?

Solusi :

Ensembel kanonik adalah sistem dengan banyak partikel pada tiap sistem adalah sama dan merupakan bilangan konstan dan temperatur tiap sistem (bukan energi) adalah sama dan merupakan bilangan konstan. Dengan kata lain sistem yang mempunyai nilai N (banyak partikel) dengan volum (V) dan temperatur (T) yang tetap. Kondisi ini memperbolehkan kemungkinan adanya pertukaran energi antara sistem dan sebuah ensembel dan juga interaksi antar partikel dalam sebuah sistem.

2. Sebuah sistem dengan dua partikel (**A** dan **B**) yang dapat dibedakan. Masing-masing partikel mempunyai dua keadaan nilai eigen energi $\varepsilon_1 = 0$ dan $\varepsilon_2 = \varepsilon$.
 - a. Tuliskan fungsi partisi sistem
 - b. Tuliskan fungsi partisi salah satu partikel
 - c. Tuliskan fungsi partisi *noninteracting particles*
 - d. Tuliskan probability sistem untuk keadaan yang mungkin
 - e. Energi rata-rata sistem
 - f. Energi bebas per partikel
 - g. Entropi per partikel

Solusi :

Keadaan Mikro ε	I	II	III	VI
1		(R)	(A)	(A) (R)
0	(A) (R)	(A)	(R)	
$\sum \varepsilon$	0	1		

a. Fungsi Partisi

$$Z(T, N = 2) = \sum_{i=1}^4 e^{-\beta \varepsilon_i} = e^{-\beta \cdot 0} + 2e^{-\beta \varepsilon} + e^{-2\beta \varepsilon}$$

$$= 1 + 2e^{-\beta \varepsilon} + e^{-2\beta \varepsilon}$$

b. Fungsi partisi salah satu partikel

$$Z(T, N = 1) = \sum_{i=1}^2 e^{-\beta \varepsilon_i} = e^{-\beta \cdot 0} + e^{-\beta \varepsilon}$$

$$= 1 + e^{-\beta \varepsilon}$$

c. Tuliskan fungsi partisi *noninteracting particles*

$$Z(T, N = 2) = Z(T, N = 1)^2$$

d. Probability sistem untuk keadaan yang mungkin

$$p_1 = \frac{1}{Z(T, 1)} = \frac{1}{1 + e^{-\beta \varepsilon}} \text{ dan}$$

$$p_2 = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{Z(T,1)} = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}}$$

e. Energi rata-rata sistem

$$u = \langle E \rangle = \sum_{i=1}^2 p_i \varepsilon_i = \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}}$$

f. Energi bebas per partikel

$$f = -kT \ln [Z(T,1)] = -kT \ln [1+e^{-\beta\varepsilon}]$$

g. Entropi per partikel

$$s = -\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_V = k \ln(1+e^{-\beta\varepsilon}) + k \frac{\beta\varepsilon}{1+e^{-\beta\varepsilon}}$$

3. Sebuah sistem dengan dua partikel (**A** dan **B**) yang **dapat dibedakan** dan masing-masing partikel mempunyai tiga keadaan nilai eigen energi $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$ dan $\varepsilon_3 = 2\varepsilon$. Gambarkan keadaan yang mungkin dan tuliskan fungsi partisinya serta fungsi energi bebasnya.

Solusi :

Kead. Mikro ε	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
2				(R)	(A)		(R)	(A)	(A) (R)
1		(R)	(A)			(A) (R)	(A)	(R)	

0	$\textcircled{\text{A}} \textcircled{\text{B}}$	$\textcircled{\text{A}}$	$\textcircled{\text{B}}$	$\textcircled{\text{A}}$	$\textcircled{\text{B}}$				
$\sum \varepsilon$	0	1	2		3		4		

Fungsi Partisi

$$Z = \sum_{i=1}^5 e^{-\beta \varepsilon_i} = e^{-\beta (0)} + 2e^{-\beta \varepsilon} + 2e^{-2\beta \varepsilon} + e^{-2\beta \varepsilon} + 2e^{-3\beta \varepsilon} + e^{-4\beta \varepsilon}$$

$$= 1 + 2e^{-\beta \varepsilon} + 3e^{-2\beta \varepsilon} + 2e^{-3\beta \varepsilon} + e^{-4\beta \varepsilon}$$

Jika $\beta = -\frac{1}{kT}$, maka

$$Z = 1 + 2e^{\varepsilon/kT} + 3e^{2\varepsilon/kT} + 2e^{3\varepsilon/kT} + e^{4\varepsilon/kT}$$

Fungsi Helmholtz

$$F = -kT \ln Z$$

$$= -kT \ln (1 + 2e^{\varepsilon/kT} + 3e^{2\varepsilon/kT} + 2e^{3\varepsilon/kT} + e^{4\varepsilon/kT})$$

4. Sebuah sistem dengan dua partikel (**A** dan **B**) yang **tak dapat dibedakan** dan masing-masing partikel mempunyai tiga keadaan nilai eigen energi $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$ dan $\varepsilon_3 = 2\varepsilon$. Gambarkan keadaan yang mungkin dan tuliskan fungsi partisinya serta fungsi energi bebasnya.

Solusi :

Keadaan Mikro ε	I	II	III	IV	V	VI
2				●	●	● ●
1		●	● ●		●	
0	● ●	●		●		
$\sum \varepsilon$	0	1	2		3	4

Fungsi Partisi

$$Z = \sum_{i=1}^5 e^{-\beta \varepsilon} = e^{-\beta (0)} + e^{-\beta \varepsilon} + 2e^{-2\beta \varepsilon} + e^{-3\beta \varepsilon} + e^{-4\beta \varepsilon}$$

$$= 1 + e^{-\beta \varepsilon} + 2e^{-2\beta \varepsilon} + e^{-3\beta \varepsilon} + e^{-4\beta \varepsilon}$$

Jika $\beta = -\frac{1}{kT}$, maka

$$Z = 1 + e^{\varepsilon/kT} + 2e^{2\varepsilon/kT} + e^{3\varepsilon/kT} + e^{4\varepsilon/kT}$$

Fungsi Helmholtz

$$F = -kT \ln Z$$

$$= -kT \ln (1 + e^{\varepsilon/kT} + 2e^{2\varepsilon/kT} + e^{3\varepsilon/kT} + e^{4\varepsilon/kT})$$

5. Tunjukkan bahwa dalam ensemble kanonik, fluktuasi energi sebesar $\Delta E = \sqrt{kT^2 C_V}$.

Solusi :

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}$$

Diketahui bahwa ;

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad \text{atau} \quad E = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

Maka ;

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \quad \text{dan} \quad \langle E \rangle^2 = \left(-\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2$$

Maka ;

$$(\Delta E)^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} Z - \left[\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} Z \right]^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z \right] = -\frac{\partial E}{\partial \beta}$$

Diketahui bahwa ;

$$\beta = -\frac{1}{k_B T} \quad \text{dan} \quad C_V = \frac{\partial E}{\partial T}$$

Maka ;

$$(\Delta E)^2 = -\frac{\partial E}{\partial \beta} = k_B T^2 \frac{\partial E}{\partial T}$$

$$(\Delta E)^2 = k_B T^2 C_V \text{ atau } \Delta E = \sqrt{k_B T^2 C_V}$$

6. Tunjukkan bahwa dalam ensemble kanonik, fluktuasi energi relatif sebesar $\frac{\Delta E}{E} \sim \frac{1}{N}$.

Solusi :

Diketahui bahwa fluktuasi energi dalam ensemble kanonik adalah $\Delta E = \sqrt{k_B T^2 C_V}$,

Maka ;
$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\sqrt{k_B T^2 C_V}}{E}$$

Jika sistem sangat besar maka diambil $N \rightarrow \infty$ dan $V \rightarrow \infty$, maka $\frac{N}{V}$ adalah konstan dan jika C_V dan E adalah variabel ekstensive maka $C_V \sim N$, jadi ;

$$\frac{\Delta E}{E} \sim \frac{1}{N}$$

7. Dengan menggunakan ensemble kanonik, tuliskan sifat-sifat termodinamika kuantum osilator harmonik 1 dimensi dalam kesetimbangan dengan temperatur ruang T yang memiliki tingkat energi $\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

Solusi :

Fungsi Partisi ensemble Kanonik :

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta E)$$

Dimana ; $\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), maka

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[-\beta \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \text{ atau}$$

$$Z = e^{-\beta \hbar \omega / 2} (1 + e^{-\beta \hbar \omega} + e^{-2\beta \hbar \omega} + \dots),$$

Diketahui bahwa deret geometri ;

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}, \text{ dimana } x = e^{-\beta \hbar \omega}, \text{ maka ;}$$

Fungsi partisinya menjadi ;

$$Z = \frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}$$

Fungsi hemholtznya :

$$\begin{aligned} F &= -kT \ln Z = -kT \ln \left(\frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \right) \\ &= -kT \left[-\frac{1}{2} \beta \hbar \omega - \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \hbar \omega + kT \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \end{aligned}$$

Entropi ;

$$\begin{aligned} S &= - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) = - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2} \hbar \omega + kT \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right) \\ &= k \left[\frac{\beta \hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} - \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right] \end{aligned}$$

Energi internal osilator :

$$\begin{aligned} E &= - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \text{ atau } E = kT^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z \right) \\ &= \hbar \omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right] \end{aligned}$$

8. Energi osilator harmonik 1 dimensi dengan status keadaan n adalah $\epsilon_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$,

dengan h : tetapan Planck, F : frekuensi, $n = 1, 2, 3, \dots$ dst. Misalkan kita memiliki sebuah sistem yang terdiri dari N buah osilator harmonik 3 dimensi identik yang tak terbedakan dan bisa dianggap tak saling berinteraksi.

- Tuliskan fungsi partisi kanonik untuk sistem tsb dan sederhanakan sehingga diperoleh bentuk analitik (closed form).
- Tuliskan juga aproksimasi bagi fungsi partisi tersebut untuk T tinggi ($T \gg hf/k$) dan T terendah ($T \ll hf/k$).

Solusi :

a. $\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}) hf$, dengan $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$Z = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \exp\left(-\beta\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)hf\right)$$

$$= e^{-\frac{3}{2}\beta hf} \sum_{n_x}^{\infty} \left(e^{-\beta hf}\right)^{n_x} \sum_{n_y}^{\infty} \left(e^{-\beta hf}\right)^{n_y} \sum_{n_z}^{\infty} \left(e^{-\beta hf}\right)^{n_z}$$

Nilai untuk $\sum_n^{\infty} \left(e^{-\beta hf}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta hf}}$, maka ;

$$Z = e^{-\frac{3}{2}\beta hf} \left[\frac{1}{\left(1 - e^{-\beta hf}\right)^3} \right] = \frac{1}{\left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}}\right)^3} = \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}}\right)^{-3},$$

Untuk N partikel dalam 3-D, diperoleh ;

$$Z_N = \frac{1}{N!} (Z)^N = \frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}}\right)^{-3N}$$

b. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$, dan $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots$,

maka :

$$e^{\frac{\beta hf}{2}} = 1 + \frac{\beta hf}{2} + \dots \quad \text{dan} \quad e^{-\frac{\beta hf}{2}} = 1 - \frac{\beta hf}{2} + \dots,$$

T tinggi ($T \rightarrow \infty$) atau β rendah ($\beta \rightarrow 0$) :

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} Z_N &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{N!} (Z)^N = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)^{-3N} \\ &= \frac{1}{N!} \left[\left(1 + \frac{\beta hf}{2} \right) - \left(1 - \frac{\beta hf}{2} \right) \right]^{-3N} \\ &= \frac{1}{N!} (\beta hf)^{-3N} = \frac{1}{N!} \left(\frac{kT}{hf} \right)^{3N} \end{aligned}$$

T rendah ($T \rightarrow 0$) atau β tinggi ($\beta \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} Z_N &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{N!} (Z)^N = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)^{-3N} \\ &= \frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} \right)^{-3N} = \frac{1}{N!} \left(e^{\frac{3Nhf}{2kT}} \right) \end{aligned}$$

9. Berdasarkan soal nomor 2, hitunglah ;

- Energi rata-rata sistem tersebut.
- Hitung juga aprokmasi nilai eigen energi tsb untuk T tinggi dan T rendah.
- Kapasitas panas pada volume tetap.

- d. Hitung juga aprokmasi kapasitas panas tsb untuk T tinggi dan T rendah.
e. Turunkan juga ungkapan bagi entropi.

Solusi :

a. Energi rata-rata

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N \\
 &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left[\frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)^{-3N} \right] = 3N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left[\frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right) \right] \\
 &= 3N \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \frac{1}{N!} + \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right) \right] \\
 &= 3N \left[\frac{\left(\frac{\beta hf}{2} + e^{\frac{\beta hf}{2}} \right)}{\left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)} \right] \left(\frac{hf}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta hf}{2} \right)
 \end{aligned}$$

b. Aprokmasi nilai eigen energi tsb untuk T tinggi dan T rendah.

T tinggi ($T \rightarrow \infty$) atau β rendah ($\beta \rightarrow 0$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow 0} \langle E \rangle &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \\
&= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \left(\frac{\left(e^{\frac{\beta hf}{2}} + e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)}{\left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)} \right) \\
&= \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \frac{1}{\left(\frac{\beta hf}{2} \right)} = \left(\frac{3N}{\beta} \right) = 3NkT
\end{aligned}$$

T rendah ($T \rightarrow 0$) atau β tinggi ($\beta \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow \infty} \langle E \rangle &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \\
&= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \left(\frac{\left(e^{\frac{\beta hf}{2}} + e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)}{\left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)} \right) \\
&= \left(\frac{3Nhf}{2} \right)
\end{aligned}$$

c. Kapasitas panas pada volume tetap

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = \frac{\partial}{\partial T} \langle E \rangle = \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \beta} \langle E \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{kT^2} \right) \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \coth \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \right] \\
&= \left(-\frac{1}{kT^2} \right) \left(\frac{3Nhf}{2} \right) \left(\frac{hf}{2} \right) \left[-\operatorname{csc} h^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \right] \\
&= 3Nk \left(\frac{hf}{2kT} \right)^2 \operatorname{csc} h^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \\
&= 3Nk \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 \operatorname{csc} h^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \\
&=
\end{aligned}$$

d. Aprokmasi kapasitas panas untuk T tinggi dan T rendah.

T tinggi ($T \rightarrow \infty$) atau β rendah ($\beta \rightarrow 0$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow 0} C_V &= \lim_{\beta \rightarrow 0} 3Nk \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 \operatorname{csc} h^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \\
&= 3Nk \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right)} \\
&= 3Nk = 3R
\end{aligned}$$

T rendah ($T \rightarrow 0$) atau β tinggi ($\beta \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow \infty} C_V &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} 3Nk \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 \csc h^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right) \\
&= 3Nk \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{\beta hf}{2} \right)} \text{ atau} \\
&= 3Nk \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 \left[\frac{1}{e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}}} \right]^2 \\
&= 3Nk \left(\frac{\beta hf}{2} \right)^2 e^{-\frac{\beta hf}{2}} \text{ atau} \\
&= 3Nk \left(\frac{hf}{2kT} \right)^2 e^{-\frac{hf}{2kT}}
\end{aligned}$$

e. Entropi

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$$

dimana ;

$$F = -kT \ln Z_N, \text{ dan } Z_N = \frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta hf}{2}} - e^{-\frac{\beta hf}{2}} \right)^{-3N}$$

Maka ;

$$S = k \frac{\partial}{\partial T} (T \ln Z_N) = k \left(\ln Z_N + T \frac{\partial}{\partial T} \ln Z_N \right)$$

Diketahui bahwa ;

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N = - \frac{\partial T}{\partial \beta} \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z_N \right) \\
&= \frac{1}{k\beta^2} \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z_N \right) = kT^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z_N \right)
\end{aligned}$$

Maka ;

$$\frac{\partial}{\partial T} \ln Z_N = \frac{\langle E \rangle}{kT^2}$$

Jadi ;

$$\begin{aligned} S &= \left(k \ln Z_N + kT \frac{\partial}{\partial T} \ln Z_N \right) = k \ln Z_N + \frac{\langle E \rangle}{T} \\ &= k \ln \left[\frac{1}{N!} \left(e^{\frac{\beta h f}{2}} - e^{-\frac{\beta h f}{2}} \right)^{-3N} \right] + \left(\frac{3N h f}{2T} \right) \coth \left(\frac{\beta h f}{2} \right) \end{aligned}$$

10. Suatu sistem osilator harmonik 1 dimensi yang memiliki hamiltonian

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \frac{p_i^2}{m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \quad \text{dengan temperatur ruang } T. \text{ Tentukanlah :}$$

- Fungsi partisi kanonik
- Energi bebas Hemholtz
- Potensial kimia
- Entropy
- Energi

Solusi :

a. Fungsi partisi kanonik

Fungsi partisi ensemble kanonik dalam ruang fasa adalah :

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \int d^{3N} q d^{3N} p \exp(-\beta H(q, p))$$

Maka ;

Fungsi partisi sistem ini adalah :

$$\begin{aligned}
Z(T, V, 1) &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\beta \left(\frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2 \right) \right\} dp dq \\
&= \frac{1}{h} \left(\frac{2\pi}{\beta m \omega^2} \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{1/2} \\
&= \frac{2\pi}{\beta \hbar \omega} \\
&= \frac{1}{\beta \hbar \omega}
\end{aligned}$$

Dengan $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

b. Energi bebas Hemholtz

$$Z(t, V, N) = Z(T, V, 1)^N$$

$$\begin{aligned}
F(T, V, N) &= -kT \ln Z(T, V, 1)^N \\
&= NkT \ln \left(\frac{1}{\beta \hbar \omega} \right) \\
&= NkT \ln \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right)
\end{aligned}$$

c. Potensial kimia

$$\begin{aligned}
\mu(T, V, N)_{V, T} &= \frac{\partial F(T, V, N)}{\partial N} = NkT \ln \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right) \\
&= kT \ln \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right)
\end{aligned}$$

d. Entropi

$$\begin{aligned}
S &= k \ln Z(T, V, N) + kT \left(\frac{\partial \ln Z(T, V, N)}{\partial T} \right)_{N, V} \\
&= Nk \ln \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right) + Nk \\
&= Nk \left[\ln \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right) + 1 \right]
\end{aligned}$$

e. Energi

$$\begin{aligned}
E &= kT^2 \left(\frac{\partial \ln Z(T, V, N)}{\partial T} \right)_{N, V} \\
&= kT^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right)^N \right) \\
&= NkT
\end{aligned}$$

11. Tuliskan persamaan Schrodinger untuk gas ideal monoatomik satu dimensi serta tuliskan fungsi partisi kanonik dan Fungsi Helmholtznya

Solusi :

Partikel dalam Sumur Potensial (1-D)

I	II	III
$V = \infty$	$V = 0$	$V = \infty$
$\psi_I = 0$	•	$\psi_{III} = 0$
0	L	

Syarat Batas : $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } 0 < x < L \\ \infty & \text{untuk } x \leq 0 \text{ atau } x \geq L \end{cases} \rightarrow \psi \text{ ada}$
 $\rightarrow \psi = 0$

Persamaan Shrodinger : $H \psi(x) = E \psi(x)$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi(x) = E \psi(x), \quad V(x) = 0 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$$

$$\text{dimana ; } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \rightarrow \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + k^2 = 0$$

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + k^2 \psi(x) = 0 \rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) \psi(x) = 0 \rightarrow \left(\frac{d}{dx} + ik \right) \left(\frac{d}{dx} - ik \right) \psi(x) = 0$$

$$\psi(x) = \psi_0 e^{ikx} + \psi_1 e^{-ikx} \quad \text{atau} \quad \psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

dengan syarat batas : $\psi(x=0) = B = 0$ dan $\psi(x=L) = A \sin(kL) = 0, A \neq 0,$

$$\sin(kL) = 0 \rightarrow kL = n\pi \rightarrow k = \frac{n\pi}{L}, \text{ dimana nilai } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right),$$

Jadi ;

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \rightarrow \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n\pi^2}{L^2} \quad \text{atau}$$

$$E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

- Fungsi Partisi ensambel Kanonik :

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta E)$$

Dimana ; $E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$, maka

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\beta \left(\frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}\right)\right)$$

Jika dimisalkan ; $c = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$, maka ;

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta cn^2)$$

dimana :

$$\sum_{n_x=1}^{\infty} e^{-\beta cn^2} = \int_1^{\infty} e^{-\beta cn^2} dn = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta c}}, \text{ maka}$$

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta cn^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2mL^2 \pi}{\beta \pi^2 \hbar^2}\right)}$$

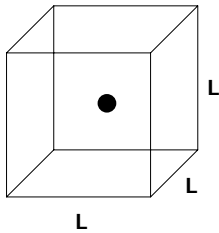
- Fungsi Helmholtz :

$$F = -kT \ln Z = -kT \ln \left[\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2mL^2 \pi}{\beta \pi^2 \hbar^2}\right)} \right]$$

12. Tuliskan persamaan Schrodinger untuk gas ideal monoatomik dalam kotak kubus bervolume V (dengan sisi L) serta tuliskan fungsi partisi kanonik dan Fungsi

Helmholtznya

Solusi :



$$\text{Syarat Batas : } V(x,y,z) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L, 0 < y < L \text{ dan } 0 < z < L ; \psi \neq 0 \\ \infty & \text{diluar kotak} \end{cases} ; \psi = 0$$

Persamaan Shcrodinger : $H \psi(x) = E \psi(x)$, untuk 1 partikel dalam kotak

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] + V(x) \right) \psi = E \psi, V(x,y,z) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \psi(x,y,z) = E \psi(x,y,z),$$

Karena syarat batas separabel dalam koordinat kartesius, maka ;

$$\psi(x,y,z) = \psi(x) \psi(y) \psi(z)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] \psi(x) \psi(y) \psi(z) = E \psi(x) \psi(y) \psi(z)$$

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{\psi(y)} \frac{d^2 \psi(y)}{dy^2} + \frac{1}{\psi(z)} \frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$$

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{\psi(y)} \frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + \frac{1}{\psi(z)} \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + k^2 = 0$$

$$- k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k^2 = 0,$$

Maka ;

$$- k_x^2 = \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \quad ; \quad - k_y^2 = \frac{1}{\psi(y)} \frac{d^2\psi(y)}{dy^2} \quad \text{dan} \quad - k_z^2 = \frac{1}{\psi(z)} \frac{d^2\psi(z)}{dz^2}$$

Untuk ; $- k_x^2 = \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k_x^2 \psi(x) = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_x^2 \right) \psi(x) = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ik_x \right) \left(\frac{d}{dx} - ik_x \right) \psi(x) = 0$$

$$\psi(x) = \psi_0 e^{ik_x x} + \psi_1 e^{-ik_x x} \text{ atau}$$

$$\psi(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)$$

Dengan syarat batas $0 \leq x \leq L$, maka ;

$$\psi(x=0) = B = 0 \text{ dan}$$

$$\psi(x=L) = A \sin(k_x L) = 0 ; \quad A \neq 0$$

$$\sin(k_x L) = 0$$

$$k_x L = n_x \pi \quad \text{atau} \quad k_x = \frac{n_x \pi}{L},$$

maka ; $k_y = \frac{n_y \pi}{L}$ dan $k_z = \frac{n_z \pi}{L}$

$$\psi(x,y,z) = \psi(x) \psi(y) \psi(z)$$

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sin\left(\frac{n_x\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z\pi}{L}\right),$$

Jadi ;

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \left(\frac{n_x\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{L}\right)^2 \text{ atau}$$

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) ; \quad \text{dimana nilai } n_x, n_y, n_z = 1, 2,$$

3, \dots

- **Fungsi Partisi ensambel Kanonik :**

$$Z = \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} \exp(-\beta E)$$

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2),$$

$$\text{dimisalkan ; } c = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \rightarrow E_{n_x, n_y, n_z} = c(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$Z = \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} \exp(-\beta c(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2))$$

$$= \left(\sum_{n_x=1}^{\infty} e^{-\beta c n_x^2} \right) \left(\sum_{n_y=1}^{\infty} e^{-\beta c n_y^2} \right) \left(\sum_{n_z=1}^{\infty} e^{-\beta c n_z^2} \right), \text{ dimana :}$$

$$\left(\sum_{n_x=1}^{\infty} e^{-\beta c n^2} \right) = \int_1^{\infty} e^{-\beta c n^2} dn = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta c}}, \text{ maka}$$

$$Z = \left(\sum_{n_x=1}^{\infty} e^{-\beta c n^2} \right)^3 = \frac{1}{8} \sqrt{\left(\frac{\pi}{\beta c} \right)^3} = \frac{1}{8} \sqrt{\left(\frac{2mL^2 \pi}{\beta \pi^2 \hbar^2} \right)^3}$$

$$Z = \frac{1}{8} \sqrt{\left(\frac{2mL^2\pi}{\beta\pi^2\hbar^2} \right)^3}$$

• **Fungsi Helmholtz :**

$$F = -kT \ln Z = -kT \ln \left[\frac{1}{8} \sqrt{\left(\frac{2mL^2\pi}{\beta\pi^2\hbar^2} \right)^3} \right]$$

13. Dalam gas ideal energi sistem tanpa interaksi antar molekul adalah

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}, \text{ tentukanlah :}$$

- Energi bebas Helmholtz
- Potensial kimia
- Entropi

Solusi :

Fungsi partisi dalam gas ideal adalah :

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \left(\int d^3q \right)^N \left(\int d^3p e^{-\beta/2m \sum_{i=1}^N p_i^2} \right) \text{ atau}$$

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} (Z(T, V, 1))^N = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \right)^N$$

Diketahui bahwa rerata panjang gelombang de Broglie partikel gas pada temperatur tertentu adalah :

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi mkT}},$$

maka fungsi partisi dapat ditulis kembali menjadi ;

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N$$

a. Energi bebas Hemholtz

$$\begin{aligned} F &= -kT \ln Z = -kT \ln \left[\frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^2} (2\pi mkT)^{3/2} \right)^N \right] \\ &= NkT \left[\ln \left(\frac{Nh^3}{V(2\pi mkT)^{3/2}} \right) - 1 \right] \text{ atau} \\ &= NkT \left[\ln \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

b. Potensial kimia

$$\begin{aligned} \mu &= \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V,T} = kT \ln(Z) \\ &= kT \left[\ln \left(\frac{Nh^3}{V(2\pi mkT)^{3/2}} \right) \right] \\ &= kT \left[\ln \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) \right] \end{aligned}$$

c. Entropi

$$\begin{aligned} S &= - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,T} = kN \ln(Z) \\ &= kT \left[- \ln \left(\frac{Nh^3}{V(2\pi mkT)^{3/2}} + \frac{5}{2} \right) \right] \\ &= Nk \left[\ln \left(\frac{V}{N\lambda^3} + \frac{5}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

14. Dengan menggunakan ensemble kanonik, tentukan kecepatan distribusi partikel dalam gas ideal.

Solusi :

Probabilitas satu partikel dalam ruang fasa dengan momentum \mathbf{p} dan koordinat \mathbf{q} adalah :

$$\rho(q, p) = \frac{1}{Z(T, V, 1)} \exp\{-\beta H(q, p)\}$$

Dengan ; $Z(T, V, 1) = \left(\frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \right)$ dan $\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi mkT}}$, maka ;

$$\begin{aligned} \rho(q, p) &= \frac{1}{\left(\frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \right)} \exp\{-\beta H(q, p)\} \\ &= \frac{\lambda^3}{V} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \end{aligned}$$

Probabilitas ditemukan satu partikel dengan momentum antara p dan $p+dp$, dan koordinat q dan $q+dq$ adalah ;

$$\frac{1}{h^3} \rho(q, p) d^3 q d^3 p$$

Dimana ; h^3 adalah volume ruang fasa, maka ;

Kecepatan distribusi untuk semua posisi adalah ;

$$\begin{aligned} f(v) d^3 v &= \frac{m^3}{h^3} d^3 v \int d^3 q \frac{\lambda^3}{V} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} d^3 v \end{aligned}$$

15. Dengan menggunakan koordinat polar dan ensemble kanonik, tentukan kecepatan

rata-rata kecepatan partikel dalam gas ideal.

Solusi :

Distribusi kecepatan dalam koordinat polar adalah :

$$\begin{aligned} f(v)dv &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} 4\pi v^2 dv \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv \end{aligned}$$

Probabilitas kecepatan yang cocok untuk distribusi kecepatan maksimal, jika ;

$$\left(\frac{df(v)}{dv} \right)_{v_0} = 0$$

Maka ;

$$\begin{aligned} -\frac{m}{2kT} v_0^3 + v_0 &= 0 \text{ atau} \\ v_0 &= \sqrt{\frac{2kT}{m}} \end{aligned}$$

Kecepatan rata-rata adalah :

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_0^\infty v f(v) dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^\infty y e^{-y} dy \end{aligned}$$

Dimana ;

$$y = \left(\frac{mv^2}{2kT} \right),$$

Jika $\int_0^\infty y e^{-y} dy = \Gamma(2) = 1$, maka ;

$$\begin{aligned}\langle v \rangle &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}\end{aligned}$$

16. Dengan menggunakan koordinat polar dan ensemble kanonik, tentukan energi kinetik gas ideal.

Solusi :

Diketahui bahwa, Kecepatan rata-rata adalah :

$$\begin{aligned}\langle v \rangle &= \int_0^{\infty} v f(v) dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y e^{-y} dy\end{aligned}$$

Maka kuadrat kecepatan rata-rata adalah ;

$$\begin{aligned}\langle v^2 \rangle &= \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^{3/2} e^{-y} dy\end{aligned}$$

Jika ; $\int_0^{\infty} y^{3/2} e^{-y} dy = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \sqrt{\pi}$, maka ;

$$\begin{aligned}\langle v^2 \rangle &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \frac{1}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{3kT}{m}\end{aligned}$$

Jadi, energi kinetik sebesar ;

$$\begin{aligned}\langle E_{kinetik} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{1}{2}m \left(\frac{3kT}{m} \right) \\ &= \frac{3}{2}kT\end{aligned}$$

17. Gas ideal dengan N partikel dalam kesetimbangan termodinamika dengan resevoir panas pada temperatur T. Jika diketahui bahwa probabilitas ensembel kanonik adalah $dw = A \exp\left(\frac{-\varepsilon}{kT}\right) d\Gamma$ dengan Γ adalah volume ruang fasa sebesar $\Gamma = A_N V^N \varepsilon^{3N/2}$. Tentukanlah probabilitas $dw(E)$ pada sistem tersebut dengan E adalah energi pada interval dE

Solusi :

Diketahui bahwa ;

$$dw = A \exp\left(\frac{-\varepsilon}{kT}\right) d\Gamma \text{ dan } \Gamma = A_N V^N \varepsilon^{3N/2}, \text{ maka ;}$$

$$\begin{aligned}d\Gamma &= A_N V^N \frac{3N}{2} \frac{\varepsilon^{3N/2}}{\varepsilon} d\varepsilon \\ &= A_N V^N \frac{3N}{2} \varepsilon^{3N/2-1} d\varepsilon\end{aligned}$$

Dengan mengintegalkan dan sampakan persamaan sama dengan 1, maka nilai konstanta dapat diperoleh :

$$const \int_0^{\infty} \varepsilon^{3N/2-1} \exp\left(\frac{-\varepsilon}{kT}\right) d\varepsilon = 1$$

Misalkan ;

$$t = \frac{-\varepsilon}{kT} \text{ dan } z = \frac{3N}{2}, \text{ maka}$$

Dengan menggunakan fungsi Gamma, diperoleh ;

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z)$$

Maka diperoleh :

$$dw(E) = \frac{1}{kT^{3N/2} \Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)} \cdot \varepsilon^{3N/2-1} \exp\left(\frac{-\varepsilon}{kT}\right)$$

18. Menurut persamaan Barometric aproksimasi pertama untuk tekanan atmosfer di puncak akan mereduksi 1/3 tekanan udara. Gengan asumsi bahwa temperatur udara adalah uniform dan masa molar udara adalah M, buktikan bahwa $\frac{1}{3} = e^{\left(\frac{-mgz}{kT}\right)}$

Solusi ;

Dengan mengasumsikan keadaan energi pada ketinggian z sebesar $U(z) = mgz$, maka kosentrasi kolom udara berdasarkan ensemble kanonik adalah ;

$$n(z) = n_0 e^{\frac{-mgz}{kT}} \text{ dengan } n_0 = \text{kosentrasi}$$

Dengan menggunakan persamaan gas ideal yang berhubungan dengan kosentrasi dan tekanan ;

$$PV = NkT \Rightarrow P = \frac{N}{V} kT$$

Jika $\frac{N}{V} kT \sim n$, maka ;

$$\frac{1}{3} = \frac{P(z)}{P(0)} = \frac{n(z)}{n_0} = \frac{n_0 e^{\frac{-mgz}{kT}}}{n_0} = e^{\frac{-mgz}{kT}}$$

19. Suatu sistem dengan gas centrifugal yang berradius R yang digunakan untuk memisahkan campuran gas dari luar. Pemisahan antara dua jenis gas dengan massa

m_1 dan m_2 . Jika rotasi sentrifugal dengan konstanta kecepatan angular adalah ω . Dengan menggunakan ensemble kanonik, tentukan koefisien pemisahan q yang besarnya ;

$$q = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2} \right)_{r=R}}{\left(\frac{n_1}{n_2} \right)_{r=0}}$$

Dimana, n_1 dan n_2 adalah konsentrasi yang berhubungan dengan jenis gas.

Solusi :

Energi rotasi partikel dalam sistem sentrifugal dengan jarak r dari pusat rotasi adalah :

$$U(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

Distribusi kanonik adalah merupakan fungsi dari radius, sebesar ;

$$\begin{aligned} n(r) &= n_0 e^{\frac{U(r)}{kT}} \\ &= n_0 e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}} \end{aligned}$$

Dimana n_0 menggambarkan kondisi normalisasi $r \rightarrow 0$, maka hubungan dengan koefisien separasi adalah :

$$q = \frac{\left(n_{01} e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}} \right)}{\left(\frac{n_{01}}{n_{02}} \right)} \Rightarrow \exp \left(\frac{(m_1 - m_2) \omega^2 R^2}{2kT} \right)$$

20. Dalam sistem magnetik model Ising $d=1$, dengan kondisi syarat batas dan tanpa medan magnetik, fungsi partisi kanonik adalah ;

$$Z(\beta, N) = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N = \pm 1} \exp\left(\beta J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}\right)$$

- Buktikanlah $Z(\beta, N) = [2 \cosh(\beta J)]^N$
- Tentukanlah fungsi energi per spin dalam β dan J
- Tentukanlah kapasitas panas per spin dalam β dan J

Solusi :

a. Buktikanlah $Z(\beta, N) = [2 \cosh(\beta J)]^N$

$$\begin{aligned} Z(\beta, N) &= \sum_{s_1 = \pm 1, s_2 = \pm 1, \dots} \exp\left(\beta J \sum_i \eta_i\right) \\ &= \sum_{s_1 = \pm 1, s_2 = \pm 1, \dots} \prod_i \exp(\beta J \eta_i) \\ &= \prod_i \sum_{\eta_i = \pm 1} \exp(\beta J \eta_i) \\ &= \prod_i (e^{\beta J} + e^{-\beta J}) \\ &= \prod_i 2 \cosh(\beta J) \\ &= [2 \cosh(\beta J)]^N \end{aligned}$$

b. Tentukanlah fungsi energi per spin dalam β dan J

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left([2 \cosh(\beta J)]^N \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} N \ln(2 \cosh(\beta J)) \\ &= -NJ \left(\frac{2 \sinh(\beta J)}{2 \cosh(\beta J)} \right) \\ &= -NJ \tanh(\beta J) \end{aligned}$$

c. Tentukanlah kapasitas panas per spin dalam β dan J

$$\begin{aligned} C &= \frac{\partial}{\partial T} \langle E \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \langle E \rangle \frac{\partial \beta}{\partial T} \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-NJ \tanh(\beta J) \right) \left(-\frac{1}{kT^2} \right) \\ &= -NJ^2 \left[1 - \tanh^2(\beta J) \right] \\ &= \frac{NJ^2}{kT^2} \left[1 - \tanh^2(\beta J) \right] \\ &= Nk\beta^2 J^2 \left[1 - \tanh^2(\beta J) \right] \end{aligned}$$

A. 20 Soal Tanpa Jawaban

1. Dengan menggunakan energi bebas Hemholtz $F(N, V, T)$ dari system termodinamika, buktikan bahwa ;

$$N \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V, T} + V \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{N, T} = F$$

2. Buktikan bahwa $C_p - C_v = -k \frac{\left[\frac{\partial}{\partial T} \left\{ T \left(\frac{\partial}{\partial V} \ln Z \right)_T \right\} \right]_V^2}{\left(\frac{\partial^2}{\partial V^2} \ln Z \right)_T} > 0$

3. Perhatikan bahwa untuk gas ideal ;

$$\frac{S}{Nk} = \ln \left(\frac{Z_1}{N} \right) + T \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z_1 \right)_p$$

4. Energi osilator harmonik 1 dimensi dengan status keadaan n adalah $\epsilon_n = (n + \frac{1}{2})h\nu$, dengan h : tetapan Planck, ν : frekuensi, $n = 1, 2, 3, \dots$ dst. Misalkan kita memiliki sebuah sistem yang terdiri dari N buah osilator harmonik 2 dimensi identik yang tak terbedakan dan bisa dianggap tak saling berinteraksi.

c. Tuliskan fungsi partisi kanonik untuk sistem tsb dan sederhanakan sehingga

diperoleh bentuk analitik (closed form).

- d. Tuliskan juga aproksimasi bagi fungsi partisi tersebut untuk T tinggi ($T \gg h\nu/k$) dan T terendah ($T \ll h\nu/k$).

5. Berdasarkan soal nomor 5, hitunglah ;

- Energi rata-rata sistem tersebut.
- Hitung juga aproksimasi nilai eigen energi tsb untuk T tinggi dan T rendah.
- Kapasitas panas pada volume tetap.
- Hitung juga aproksimasi kapasitas panas tsb untuk T tinggi dan T rendah.
- Turunkan juga ungkapan bagi entropi.

6. N partikel gas ideal monoatomik hipotetik 2 dimensi terletak dalam kotak (rectangle) berukuran $L_x = L_y = L$ memiliki temperatur T . Massa tiap partikel m dan luas kotak $= L^2$. Perlakukan sistem sebagai kumpulan partikel identik (tak bisa dibedakan) dan tak saling berinteraksi.

- Tuliskan hamiltonian 1 partikel saja dan selesaikan untuk mencari status eigen dan energi yang terkait.
- Tuliskan hamiltonian total sistem tersebut (N partikel) dan tuliskanlah fungsi eigen sistem (tanpa memperhatikan simetri) serta energinya.
- Tuliskan fungsi kanonik sistem tersebut.

7. Perlihatkan untuk fungsi partisi $Z_N(V, T) = \frac{1}{N!} \left\{ 8\pi V \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \right\}^N$ untuk gas

monoatomik dengan hubungan antara energi dan momentum sebesar $\varepsilon = pc$, dengan c adalah kecepatan cahaya.

8. Buktikan untuk kasus $3N$ partikel yang bergerak dalam ruang 1 dimensi, memiliki fungsi partisi sebesar :

$$Z_{3N}(L, T) = \frac{1}{(3N)!} \left[2L \left(\frac{kT}{hc} \right) \right]^{3N}$$

9. Suatu sisten martikel identik yang memiliki 2 keadaan energi yaitu $\pm \varepsilon$. Gunakan ensembel kanonik dan tentukan entropi rata-rata per partikel dan fungsi energi rata-rata per partikel.

10. Tentukan fungsi korelasi $\langle s_1 s_{n+1} \rangle$ untuk sistem magnetik dimana $n = 0, 1, 2, \dots$ dengan fungsi partisi kanonik adalah ;

$$Z(\beta, N) = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N = \pm 1} \exp \left(\beta J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} \right)$$

11. Berdasarkan soal nomor 12, tunjukan bahwa fluktuasi rata-rata magnetisasi sebesar ;

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^N \delta s_i \right)^2 \right\rangle = N \frac{1}{1 - \tanh(\beta J)}$$

12. Perlihatkan bahwa untuk material magnetik, kapasitas panas dengan konstanta medan H dan magnetisasi M memiliki hubungan ;

$$C_H - C_M = -T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_M \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H$$

13. Buktikan bahwa untuk bahan paramagnetik mematuhi hukum Curie

$$C_H - C_M = \frac{CH^2}{T^2}$$

14. Suatu sistem magnetik spin $\frac{1}{2}$ memiliki energi $E = -\mu B_s = \mu B_s$ dengan $s = \pm 1$, dengan menggunakan ensembel kanonik, tentukanlah magnetisasi dan isothermal suseptibilitasnya.

15. Suatu sistem dengan Hamiltonian $H = \varepsilon \sum_{i=1}^N n_i$ yang memiliki probabilitas keadaan mikro $\mu \equiv \{n_i\}$. Tentukanlah fungsi partisi dan energi bebas Helmholtznya.
16. Berdasarkan jawaban nomor 14, tentukanlah entropi dan energi internalnya.
17. Keadaan makro gas ideal kanonik $M \equiv (T, V, N)$ dengan $H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}$ dan keadaan mikro $\mu \equiv \{\vec{p}_i, \vec{q}_i\}$. Tentukanlah fungsi partisi dan energi bebas Helmholtznya.
18. Berdasarkan jawaban nomor 15, tentukanlah entropi dan potensial kimianya
19. Suatu sistem magnetik dengan medan internal \vec{B} dan Hamiltonian H . Jika spin adalah $\frac{1}{2}$ dengan keadaan mikro N spin digambarkan dengan variabel Ising $\{\sigma = \pm 1\}$ dan $M = \mu_0 \sum_{i=1}^N \sigma_i$ dengan μ_0 momen magnet mikroskopik. Jika tidak ada interaksi antar spin ($H=0$), tentukanlah probabilitas keadaan mikro dan fungsi partisi Gibbs-nya.
20. Berdasarkan soal nomor 18, tentukanlah magnetisasi rata-rata dan suseptibilitasnya.

Daftar Pustaka

Pointon, A. J., *An Introduction to Statistical Physics for Students*, London: Longman (1967)

Zeemansky, M. W. and R. H. Dittman, *Kalor dan Termodinamika*, Bandung: Penerbit ITB (1986)

Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics* 7th ed., New York: John Wilry & Sons (1996)