FUNGSI TRANSENDEN

Fungsi Logaritma Asli (ln)

- Turunan Fungsi Logaritma asli dinyatakan sebagai :

$$D_x[\ln x] = \frac{1}{x}$$

- Secara umum, jika *u* = *u*(*x*) maka

$$D_x[\ln u] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Contoh : Diberikan $f(x) = \ln(\sin(4x + 2))$

maka $f'(x) = \frac{1}{\sin(4x+2)} D_x(\sin(4x+2)) = 4\cot(4x+2)$

Jika $y = \ln|x|, x \neq 0$

$$= \begin{cases} \ln x, \; x > 0 \\ \ln(-x), \; x < 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$\longrightarrow \quad y = \ln(-x) \rightarrow y' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

Jadi, $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} \quad , x \neq 0.$

Sifat-sifat ln :

1. ln 1 = 0
2. ln(*ab*) = ln *a* + ln *b*
3. ln(*a/b*)=ln(*a*) – ln(*b*)
4. $\ln a^r = r \ln a$

Fungsi Eksponen Asli

- Karena $D_x[\ln x] = \dfrac{1}{x} > 0 \;\; \text{untuk} \;\; x > 0,$ maka fungsi logaritma asli mempunyai invers. Invers dari fungsi logaritma asli disebut **fungsi eksponen asli,** notasi **exp**. Jadi berlaku hubungan

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y$$

- Dari sini didapat : y = exp(ln y) dan x =ln(exp(x))

Dari hubungan

$$y = e^x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \ln y$$

$$\Downarrow$$

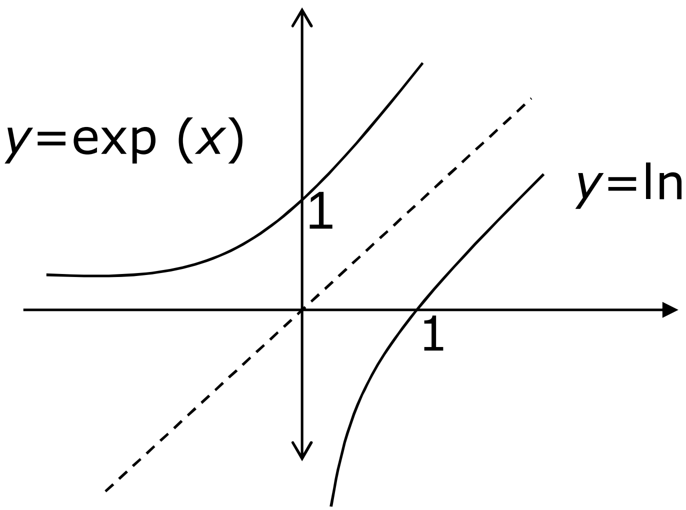
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = y = e^x \quad \Leftarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

Jadi, $D_x(e^x) = e^x$

Secara umum $D_x(e^{u(x)}) = e^u.u'$

Grafik fungsi eksponen asli

Karena fungsi ekponen asli merupakan invers dari fungsi logaritma asli maka grafik fungsi eksponen asli diperoleh dengan cara mencerminkan grafik fungsi logaritma asli terhadap garis y=x



Contoh

$$D_x(e^{3x\ln x}) = e^{3x\ln x}.D_x(3x\ln x) \quad = e^{3x\ln x}(3\ln x + 3).$$

Soal latihan

A. Tentukan y' dari

1. $y = e^{2\sec x}$
2. $y = x^5 e^{-3\ln x}$
3. $y = \tan e^{\sqrt{x}}$
4. $y^2 e^{2x} + xy^3 = 1$
5. $e^y = \ln(x^3 + 3y)$
6. $y = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$
7. $y = \ln\left(\cos\left(3x\right)\right)$
8. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$
9. $y = \ln\left(\sin x\right)$
10. $y = \sin(\ln(2x + 1))$

Fungsi Eksponen Umum

Fungsi $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ disebut fungsi eksponen umum

Untuk $a > 0$, $a \neq 1$ dan $x \in$ ***R***, didefinisikan $a^x = e^{x \ln a}$

Turunan Fungsi eksponen umum

$$D_x(a^x) = D_x(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

Jika $u = u(x)$, maka

$$D_x(a^u) = D_x(e^{u \ln a}) = e^{u \ln a} \ln a . u' = a^u (\ln a)(u')$$

Sifat–sifat fungsi eksponen umum

Untuk a > 0, b > 0, x, y bilangan riil berlaku

1. $a^x a^y = a^{x+y}$

2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3. $(a^x)^y = a^{xy}$

4. $(ab)^x = a^x b^x$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Contoh

1. Hitung turunan pertama dari

$$f(x) = 3^{2x+1} + 2^{\sin 2x}$$

Jawab :

$$f'(x) = 2.3^{2x+1} \ln 3 + 2^{\sin 2x} \ln 2 . \cos 2x . 2$$

Fungsi Logaritma Umum

Karena fungsi eksponen umum monoton murni maka ada Inversnya. Invers dari fungsi eksponen umum disebut fungsi Logaritma Umum (logaritma dengan bilangan pokok *a*), notasi ${}^{a}\log x$, sehingga berlaku :

$$y = {}^{a}\log x \Leftrightarrow x = a^{y}, a > 0, \text{ dan } a \neq 1$$

Dari hubungan ini, didapat

$$\ln x = \ln a^{y} = y \ln a \Rightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow {}^{a}\log x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Sehingga $D_x({}^{a}\log x) = D_x\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{x \ln a}$

Jika *u*=*u*(*x*), maka $D_x({}^{a}\log u) = D_x\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{u'}{u \ln a}$

Contoh Tentukan turunan pertama dari

1. $f(x) = {}^{3}\log(x^2+1)$

2. $f(x) = {}^{4}\log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Jawab :

1. $f(x) = {}^{3}\log(x^2+1) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln 3}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}\,\dfrac{1}{\ln 3}$

2. $f(x) = {}^{4}\log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \dfrac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\ln 4}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \dfrac{1}{\ln 4}\,\dfrac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}\,Dx\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

$$= \frac{1}{\ln 4}\,\frac{x-1}{x+1}\,\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{\ln 4}\,\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$$

Soal Latihan

A. Tentukan y' dari

1. $y = 3^{2x^4 - 4x}$

2. $y = {}^{10}\log\left(x^2 + 9\right)$

3. $x\ {}^{3}\log(xy) + y = 2$

Penggunaan fungsi logaritma dan eksponen asli

a. Menghitung turunan fungsi berpangkat fungsi

Diketahui $f(x) = (g(x))^{h(x)}$, $f'(x) = ?$

$$\ln(f(x)) = h(x)\ln(g(x))$$

$$D_x(\ln(f(x))) = D_x(h(x)\ln(g(x)))$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x)\ \ln(g(x)) + \frac{h(x)}{g(x)}g'(x)$$

$$f'(x) = \left(h'(x)\ \ln(g(x)) + \frac{h(x)}{g(x)}g'(x) \right)\ f(x)$$

Contoh

Tentukan turunan fungsi $f(x) = (\sin x)^{4x}$

Jawab

Ubah bentuk fungsi pangkat fungsi menjadi perkalian fungsi dengan menggunakan fungsi logaritma asli

$$\ln f(x) = \ln(\sin x)^{4x} = 4x \ln(\sin(x))$$

Turunkan kedua ruas

$$D_x(\ln f(x)) = D_x(4x \ln(\sin(x)))$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 4\ln(\sin(x)) + \frac{4x}{\sin x}\cos x = 4\ln(\sin(x)) + 4x\cot x$$

$$f'(x) = (4\ln(\sin(x)) + 4x\cot x)(\sin x)^{4x}$$

b. Menghitung limit fungsi berpangkat fungsi

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = ?$$

Untuk kasus

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$

(ii) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$

(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

Penyelesaian :

Tulis $\lim_{x\to a}(f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[\exp(\ln f(x)^{g(x)})] \quad = \lim_{x\to a} \exp\left[g(x)\ln f(x)\right]$

Karena fungsi eksponen kontinu, maka

$$\lim_{x\to a} \exp\left[g(x)\ln(f(x)\right] = \exp\left[\lim_{x\to a} g(x)\ln\ f(x)\right]$$

Contoh Hitung

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ b. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3+1\right)^{1/\ln x}$

Jawab

a. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^x) = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x\right)$ (bentuk $0.\infty$)

Rubah ke bentuk ∞/∞ lalu gunakan dalil L'hopital

$$= \exp \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \exp \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \exp(\lim_{x\to 0^+} - x) = \exp(0) = 1$$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \left((1+x)^{1/x} \right) = \exp\left[\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right]$

Gunakan dalil L'hopital

$$= \exp \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = \exp 1 = e$$

sehingga

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

c. $$\lim_{x\to\infty} \left(x^3+1\right)^{1/\ln x} = \exp\left[\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \ln(x^3+1)\right] \qquad = \exp\left[\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3+1)}{\ln x}\right]$$

Gunakan dalil L'hopital

$$= \exp\left[\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3+1}}{1/x}\right]. \qquad = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x^3+1}\right) \quad = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(3)}{x^3(1+\frac{1}{x^3})}\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{(3)}{(1+\frac{1}{x^3})}\right) \qquad = \exp(3) = e^3.$$

D. Hitung limit berikut :

1. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\cos\frac{2}{x}\right]^{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{2x}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^x+5^x\right)^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)^{x}$

10. $\lim\limits_{x\to -2^-}(x+2)^{\ln(x+2)}$

E. Hitung y' :

11. $y=(\ln x)^{\cos x}$

12. $y=\left(3^x+5^x\right)^{\frac{1}{x}}$

13. $y=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}$

14. $y=\left(\ln(\cos x)\right)^{x}$