# Bab 3

# SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang sistem persamaan linear (SPL) dan cara menentukan solusinya. SPL banyak digunakan untuk memodelkan beberapa masalah real, misalnya: masalah rangkaian listrik, jaringan komputer, model ekonomi, dan lain-lain. Pembahasabn SPL dan solusinya dalam buku ini merupakan langkah awal untuk memberikan landasan yang kuat dalam mempelajari bab-bab selanjutnya, antara lain : menentukan kernel dan jangkauan dari suatu matriks transformasi, basis ruang eigen, dan masalah solusi sistem persamaan diferensial pada bagian akhir buku ini.

## 3.1 PENDAHULUAN

Secara intuitif, persamaan linear adalah persamaan dimana peubahnya tidak memuat eksponensial, trigonometri (seperti *sin*, *cos*, dll.), perkalian, pembagian dengan peubah lain atau dirinya sendiri. Jadi, sistem persamaan linear merupakan sekumpulan pesamaan linear yang memuat sejumlah hingga peubah bebas yang saling terkait.

Bentuk umum sistem persamaan linear :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + & \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + & \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + & \dots + a_{mn}\, x_n = b_m \end{array} \tag{3.1}$$

dimana :

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{in} \in R : koofisien$$

$x_1, x_2, ..., x_n$ : *peubah*

$b_1, b_2, ..., b_m \in R$ : konstanta

Sistem persamaan linear di atas dapat ditulis dengan perkalian matriks, yaitu :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

atau

$$AX = B$$

dimana :

$A$ dinamakan matriks koefisien
$X$ dinamakan matriks peubah
$B$ dinamakan matriks konstanta

**Contoh 3.1 :**

Tuliskan sistem persamaan linear berikut dalam bentuk perkalian matriks

$$2x - y + 3z = 0$$
$$4p + 2q - z = 2$$

**Jawab :**

maka sistem persamaan linear dalam bentuk perkalian matriks berikut:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ p \\ q \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## 3.2 SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Misalkan, $S = \left\{ s_1, s_2, \ \ldots \ , s_n \middle| s_1, s_2, \ \ldots \ , s_n \middle| \in \mathrm{R} \right\}$ disubstitusikan pada sistem persamaan linear (3.1), sehingga

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$$

dan sistem persamaan linear tersebut bernilai benar, maka *S* dinamakan **solusi** bagi sistem persamaan linear tersebut. Suatu sistem persamaan linear belum tentu punya solusi, keberadaan solusi ini sangat tergantung dari sistem persamaan linear itu sendiri.

**Contoh 3.2 :**

Perhatikan sistem persamaan berikut :

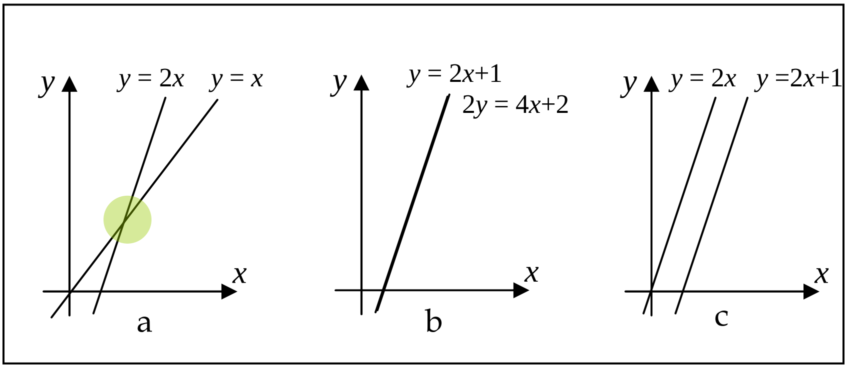
3 x – y = 5
x + 3 y = 5

Misalkan kita mempunyai himpunan *S* = { 2, 1 } maka *S* merupakan **solusi** sistem persaman linear tersebut. Sementara itu, himpunan *T* = { 1, 2 } **bukan solusi** dari SPL tersebut karena tidak memenuhi SPL tersebut

Suatu sistem persamaan linear (SPL), dalam keterkaitanya dengan solusi, mempunyai tiga kemungkinan, yaitu :

a. SPL mempunyai solusi tunggal
b. SPL mempunyai solusi tak hingga banyak
c. SPL tidak mempunyai solusi

Masalah solusi SPL ini dapat diilustrasikan dalam diagram kartesius. Misalkan SPL terdiri dari dua persamaan dan dua peubah (*x* dan *y*). Setiap persamaan pada SPL dapat direpresentasikan dalam bentuk suatu garis. Suatu SPL dikatakan mempunyai solusi tunggal jika dua garis tersebut berpotongan di satu titik (lihat gambar 3.1.a). Sementara itu, SPL tersebut dikatakan mempunyai solusi tak hingga banyak jika dua garis tersebut berimpit (lihat gambar 3.1.b), sedangkan SPL tersebut dikatakan tidak mempunyai solusi jika dua garis tersebut tidak pernah berpotongan/sejajar (lihat gambar 3.1.c)




Gambar 3.1 Ilustrasi Solusi SPL pada kartesius

Jika suatu SPL memiliki solusi (tunggal atau tak hinggabanyak) maka SPL tersebut dinamakan **SPL konsisten**. Sementara itu, SPL yang tidak mempunyai solusi dinamakan SPL yang tak konsisten. Untuk menentukan solusi suatu SPL dapat digunakan operasi baris elemeneter (OBE), aturan *Cramer*, dan menggunakan matriks invers. Berikut ini akan dijelaskan lebih detil tentang metode beserta kelebihan dan kekurangannya dari setiap metode dalam menentukan (memeriksa) solusi suatu SPL.

### 3.2.1 Solusi Sistem Persamaan Linear dengan OBE

Menentukan solusi persamaan linear dapat dilakukan dengan menggunakan operasi baris elementer (OBE). Langkah yang pertama adalah tulis kembali sistem persamaan linear dalam bentuk matriks yang diperbesar (*augmented matrix*).

Misalkan, SPL :

$$3x - y = 5$$
$$x + 3y = 5$$

dapat ditulis dalam bentuk matriks yang diperbesar

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Selanjutnya dilakukan OBE pada matriks tersebut untuk menentukan solusinya.

**Contoh 3.3 :**

Tentukan solusi dari SPL

$3x - y = 5$

$x + 3y = 5$

**Jawab :**

Bentuk matriks yang diperbesar dari SPL tersebut adalah

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Selanjutnya matriks yang diperbesar dikenakan OBE :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -10 & -10 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tulis dalam bentuk perkalian matrik :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, solusi SPL tersebut adalah $x = 2$ dan $y = 1$

Secara intuitif, kita dapat menentukan apakah suatu SPL mempunyai solusi atau tidak. Setelah dilakukan OBE pada matriks yang diperbesar, perhatikan pada matriks koefisien (bagian kiri), apakah matriks koefisien hasil OBE memiliki baris nol? Jika ya, dan ternyata matriks konstanta (bagian kanan) pada matriks yang diperbesar adalah bilangan tak nol maka SPL tersebut tidak mempunyai solusi. Sementara itu, jika kasus yang terjadi adalah sebagai berikut :

a. tidak ada baris nol pada matriks koefisien hasil OBE
b. ada baris nol pada matriks koefisien hasil OBE dan matriks onstanta pada baris tersebut adalah nol.

Jika kedua hal tersebut terjadi, maka SPL tersebut mempunyai solusi. Sedangkan untuk memeriksa apakah solusinya tunggal atau tak hingga banyak, periksa apakah setiap kolom mempunyai satu utama? Jika ya, solusi SPL tersebut adlah tak hingga banyak. Sebaliknya, jika ada kolom yang tak mempunyai satu utama maka solusi SPL tersebut mempunyai solusi tunggal. Perhatikan beberapa contoh penentuan solusi SPL dengan mengguanakan OBE dibawah ini.

**Contoh 3. 4 :**

Tentukan solusi (jika ada) dari SPL berikut :

a. $$\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ 2b + c = 7 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

c. $$\begin{cases} a + c = 4 \\ a - b = -1 \\ -a + b = 2 \end{cases}$$

**Jawab :**

a. Matriks yang diperbesar dari SPL tersebut adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Terlihat bahwa tidak ada baris nol pada matriks koefisien dan setiap kolom matiks koefisien hasil OBE memiliki satu utama, jadi SPL tersebut memiliki solusi tunggal, yaitu : $a$ = 1, $b$ = 2, dan $c$ =3.

b. Matriks yang diperbesar dari SPL tersebut adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Terlihat bahwa ada baris nol pada matriks koefisien dan matriks konstanta pada baris ke-3 juga nol. Ini berarti SPL tersebit mempunyai solusi, tetapi ternyata ada kolom yang tidak mempunyai satu utama (kolom ke-3). Dengan demikian, solusi SPL tersebut memiliki solusi tak hingga banyak. Jika dikembalikan kedalam bentuk perkalian matriks diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ini memberikan $a + c = 1$ dan $b + c$ =5.

Dengan memilih $c$ = $t$, dimana $t$ adalah parameter.

Maka solusi SPL tersebut adalah :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dimana } t \text{ adalah parameter}$$

c. Matriks yang diperbesar dari SPL tersebut adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Terlihat bahwa ada baris nol pada matriks koefisien tetapi matriks konstanta pada baris ke-3 sama dengan 1 (tak nol). Jika dikembalikan kedalam bentuk perkalian matriks diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dari baris ke-3 diperoleh hubungan bahwa $0.a + 0.b = 1$. Tak ada nilai $a$ dan $b$ yang memenuhi kesamaan ini. Jadi, SPL tersebut tidak memiliki solusi.

**Contoh 3.5 :**

Diketahui SPL :

$x + 2y - 3z = 4$
$3x - y + 5z = 2$
$4x + y + (a^2 - 14)\, z = a+2$

Tentukan $a$ sehingga SPL :

a) Mempunyai solusi tunggal
b) Tidak mempunyai solusi
c) Tidak terhingga solusi

**Jawab :**

Matrik diperbesar dari SPL adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2 - 2 & a-14 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a-4 \end{array}\right)$$

a. Agar SPL mempunyai solusi tunggal:

$a^2 - 16 \neq 0$ sehingga $a \neq \pm 4$

b. Agar SPL tidak mempunyai solusi

Dari baris ketiga $0x + 0y + (a^2 - 16a)\, z = a - 4$

Agar SPL tidak mempunyai solusi maka $a^2 - 16 = 0$ dan $a - 4 \neq 0$

Sehingga $a = \pm 4$ dan $a \neq 4$.

Jadi , $a = -4$.

c. Agar SPL mempunyai solusi tak hingga banyak

$a^2 - 16 = 0$ dan $a - 4 = 0$

Jadi , $a = 4$

### 3.2.2 Solusi SPL dengan aturan Cramer dan matriks invers

Selain dengan menggunakan OBE, solusi SPL dapat ditentukan dengan menggunakan *aturan Cramer* dan matriks invers. Syarat agar suatu SPL dapat diselesaikan dengan menggunakan *aturan Cramer* atau matriks invers adalah matrik koefisien dari SPL tersebut harus bujur sangkar (persegi) dan determinannya tidak sama dengan nol. *Aturan Cramer* merupakan suatu cara untuk menentukan solusi sistem persamaan linear secara terpartisi (misal $x_i$, yaitu peubah ke-$i$).

Misalkan SPL dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Jika determinan $A$ tidak sama dengan nol, maka dalam menentukan solusi peubah $x_i$, langkah-langkah yang dapat dilakukan menggunakan aturan *cramer*, adalah :

( i ) Tulis $A_i$ yaitu matrik $A$ dengan mengganti seluruh anggota kolom ke-i dengan konstanta $b_1 \ldots b_n$

Contoh :

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

( ii ) Hitung det($A$) dan det($A_i$)
( iii ) Solusi peubah $x_i$ = det($A_i$) / det($A$)

Sementara itu, selanjutnya kita akan membahas cara menentukan solusi dengan menggunakan matriks invers. Misalkan SPL dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks :

$$\boldsymbol{AX = B}$$

dimana $A$ merupakan matriks bujur sangkar yang mempunyai invers. Solusi SPL tersebut dapat ditentukan dengan menggunakan matriks invers, yaitu dengan mengalikan setiap ruas di atas dengan $A^{-1}$ sehingga menjadi :

$$\boldsymbol{A^{-1} A X = A^{-1} B} \qquad \text{(ingat bahwa } A^{-1} A = I \text{)}$$

sehingga diperoleh :

$$\boldsymbol{X = A^{-1} B}$$

Hal yang perlu diingat bahwa suatu matriks bujur sangkar $A$ mempunyai invers *jika dan hanya jika* det (A) $\neq 0$. Dengan demikian, dengan memeriksa determinan dari matriks koefisiennya (jika bujur sangkar), kita dapat menetukan apakah solusi SPL tersebut tunggal atau tidak. Jika determinan matriks koefisiennya tidak sama dengan nol maka solusinya adalah tunggal, dan dalam menentukan solusinya dapat menggunakan aturan *Cramer* atau invers matriks.

**Contoh 3.6 :**

Tentukan solusi dari SPL berikut :

$$\begin{aligned} a + c &= 4 \\ a - b &= -1 \\ 2b + c &= 7 \end{aligned}$$

**Jawab :**

a. Dengan menggunakan matrik invers
   Invers dari matriks koefisien diatas adalah

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

sehingga $\boldsymbol{X = A^{-1} B}$ berbentuk :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi Solusi SPL tersebut adalah

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b. dengan aturan *Cramer*.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

sehingga

$$a = \frac{\det(Aa)}{\det(A)}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1-0) + 1(-2-(-7))$$

$$= -4 + 0 + 5$$

$$= 1$$

b. Sementara itu, nilai $b$ dapat ditentukan dengan cara berikut :

$$b = \frac{\det(Ab)}{\det(A)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{1}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1-0) + (-4)(1-0) + 1(7-0)$$

$$= -1 + (-4) + 7$$

$$= 2$$

Dengan demikian, kita telah mempunya tiga cara dalam menentukan solusi suatu sistem persamaan linear, antara lain :

- Dengan operasi baris elementer (OBE )

- Dengan Invers matrik
- Aturan Cramer

Untuk 2 point terakhir, matrik koefisien harus bujur sangkar dan determinan tidak sama dengan nol. Jika solusi SPL dapat dicari dengan dua cara tersebut maka solusi SPL tersebut adalah tunggal.

## 3.3 SISTEM PERSAMAAN LINEAR HOMOGEN

Sistem persamaan linear homogen merupakan sistem persamaan linear yang semua konstantanya adalah nol, sehingga bentuk umum SPL homogen adalah :

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

SPL homogen merupakan SPL yang konsisten, yaitu ia selalu mempunyai solusi. Solusi SPL homogen dikatakan tunggal jika solusi itu adalah $\{x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0\}$.
Jika tidak demikian, artinya SPL homogen mempunyai solusi tak hingga banyak. Ini
biasanya ditulis dalam bentuk parameter.

**Contoh 3.7 :**

Tentukan solusi SPL homogen berikut

$$\begin{array}{l} 2p + q - 2r - 2s = 0 \\ p - q + 2r - s = 0 \\ -p + 2q - 4r + s = 0 \\ 3p - 3s = 0 \end{array}$$

**Jawab :**

Sistem persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

dengan melakukan OBE diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dengan demikian solusi SPL homogen tersebut adalah :

$p = a,$
$q = 2b$ ,
$s = a,$ dan
$r = b,$

dimana *a, b* merupakan parameter.

**Contoh 3.8 :**

Diketahui SPL $\begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a. Tentukan *b* agar SPL memiliki solusi banyak dengan 1 atau 2 parameter
b. Tuliskan solusi SPL tersebut

**Jawab :**

Seperti yang kita ketahui bersama bahwa solusi suatu SPL homogen adalah tak tunggal jika ***det*(A) =** 0.
Sehingga

$$\begin{vmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (-b)\begin{vmatrix} 1-b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $(-b)$ $((1 - b)(1 - b)) - 1 \quad = 0$

$\Leftrightarrow$ $(-b)$ $(b^2 - 2b + 1 - 1) \quad = 0$

$\Leftrightarrow$ $(-b)$ $(b^2 - 2b) \quad = 0$

$b = 0$ atau $b = 2$

a. Saat $b = 0$, dengan mensubstitusikan kedalam matriks tadi maka akan diperoleh

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE maka $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Misal $x = p, z = q$ dimana *p, q* merupakan parameter.

Maka $y = -q$

Sehingga :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} q$$

Sehingga dapat dikatakan bahwa solusi SPL adalah tak hingga banyak dengan dua parameter saat $b = 0$.

b. untuk b = 2, dengan mensubstitusikan kedalam matriks tadi maka akan diperoleh

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE maka

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

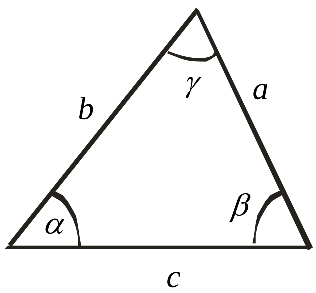
Misalkan $z = q$, akibatnya $y = q$ sehingga

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q$$

Sehingga dapat dikatakan bahwa solusi SPL adalah tak hingga banyak dengan satu parameter saat $b = 2$.

**Contoh 9 :**

Perhatikan ilustrasi segitiga berikut :



Tunjukan bahwa :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

**Jawab :**

Dari gambar tersebut diketahui bahwa :

$c\cos\beta + b\cos\gamma = a$

$c\cos\alpha + a\cos\gamma = b$

$b\cos\alpha + a\cos\beta = c$

Tiga persamaan tersebut dapat dipandang sebagai suatu SPL dengan tiga peubah, yaitu : $\cos\alpha$, $\cos\beta$, dan $\cos\gamma$. Sehingga SPL tersebut dapat ditulis menjadi :

$$\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa :

$$\det\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} = 0 + c(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} c & a \\ b & 0 \end{vmatrix} + b(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} c & 0 \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$= -c(ab) + b(ac)$$

$$= 2abc$$

Dengan aturan Crammer diperoleh bahwa :

$$\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & 0 & a \\ c & a & 0 \end{vmatrix}}{2abc}$$

$$= \frac{1}{2abc}\left( c(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b & a \\ c & 0 \end{vmatrix} + 0 + a(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \right)$$

$$= \frac{ac^2 - a^3 + a^2b^2}{2abc}$$

$$= \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2bc}$$

Jadi, terbukti bahwa : $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos\alpha$

**Latihan Bab 3**

1. Tentukan solusi SPL berikut :

$$2a - 8b = 12$$
$$3a - 6b = 9$$
$$-a + 2b = -4$$

2. Diketahui SPL ($p$, $q$, $r$ dan $s$ merupakan peubah bebas) :

$$2p - 2q - r + 3s = 4$$
$$p - q + 2s = 1$$
$$-2p + 2q - 4s = -2$$

Tentukan solusi SPL diatas

3. Tentukan solusi SPL homogen berikut :

$$p - 5q - 4r - 7t = 0$$
$$2p + 10q - 7r + s - 7t = 0$$
$$r + s + 7t = 0$$
$$-2p - 10q + 8r + s + 18t = 0$$

4. Diketahui sistem persamaan linear :

$$AX = B$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tentukan solusi SPL di atas dengan menggunakan :

- operasi baris elementer (OBE )
- Invers matrik
- Aturan Cramer

5. Diketahui $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

   Tentukan $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ yang memenuhi sistem persamaan tersebut

6. Tentukan nilai *k* sehingga SPL homogen (dengan peubah *p*, *q*, dan *r*) berikut mempunyai solusi tunggal :

   $$p + 2q + r = 0$$
   $$q + 2r = 0$$
   $$k^2 p + (k+1)\, q + r = 0$$

7. Misalkan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

   Tentukan vektor tak nol $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sehingga $B\bar{u} = 6\bar{u}$