4. TURUNAN

4.1 Konsep Turunan

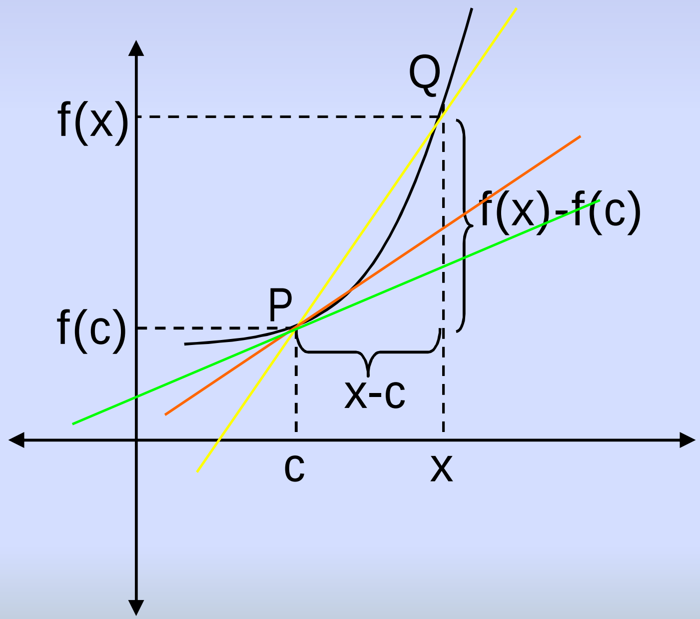
4.1.1 Turunan di satu titik

Pendahuluan (dua masalah dalam satu tema)

a. Garis Singgung

Kemiringan tali busur PQ adalah :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$



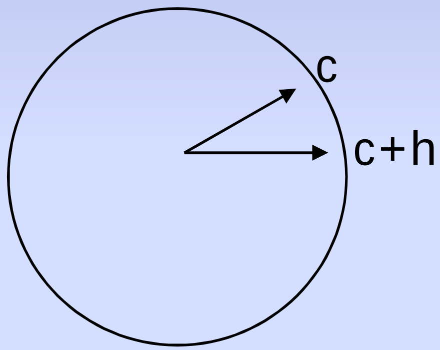
Jika x → c , maka tali busur PQ akan berubah menjadi garis singgung di ttk P dgn kemiringan

$$m = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

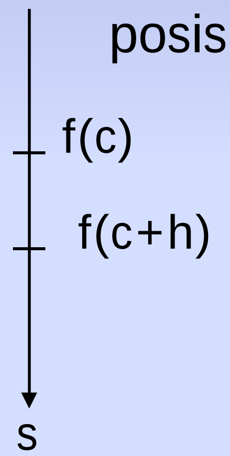
- **b. Kecepatan Sesaat**

  Misal sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisinya setiap saat diberikan oleh $s = f(t)$. Pada saat $t = c$ benda berada di $f(c)$ dan saat $t = c + h$ benda berada di $f(c+h)$.

Perubahan waktu



Perubahan posisi



- Sehingga kecepatan rata-rata pada selang waktu [c,c+h] adalah

$$v_{rata-rata} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Jika h → 0, diperoleh kecepatan sesaat di *x* = *c* :

$$v = \lim_{h \to 0} v_{rata-rata} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Misal x = c + h, bentuk diatas dapat dituliskan dalam bentuk

$$v = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Dari dua bentuk diatas : kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat terlihat bahwa dua masalah tersebut berada dalam satu tema, yaitu turunan

Definisi 4.1 : Turunan pertama fungsi *f* di titik *x* = *c*, notasi $f'(c)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit diatas ada

Notasi lain :

$$\frac{df(c)}{dx}, y'(c)$$

Contoh : Diketahui $f(x) = \frac{1}{x}$ tentukan $f'(3)$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{3 - x}{3x(x - 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x - 3)}{3x(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-1}{3x} = -\frac{1}{9}$$

4.1.2 Turunan Sepihak

Turunan kiri dari fungsi *f* di titik *c*, didefinisikan sebagai :

$$f'_{-}(c) = \lim_{x \to c^{-}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Turunan kanan dari fungsi *f* di titik *c*, didefinisikan sebagai :

$$f'_{+}(c) = \lim_{x \to c^{+}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit ini ada.

Fungsi *f* dikatakan mempunyai turunan(diferensiabel) di *c* atau $f'(c)$ ada, jika

$$f'_{-}(c) = f'_{+}(c) \text{ dan } f'(c) = f'_{-}(c) = f'_{+}(c)$$

sebaliknya *f* dikatakan tidak mempunyai turunan di *c*.

Contoh : Diketahui
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & , x < 1 \\ 1 + 2\sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$$

Selidiki apakah $f(x)$ diferensiabel di $x=1$

Jika ya, tentukan $f'(1)$

Jawab :

a. $$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 3 - (1 + 2\sqrt{1})}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x - 1)}{x - 1} = 1$$

b. $$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1 + 2\sqrt{x} - (1 + 2\sqrt{1})}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = 2 \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = 1$$

Jadi, f diferensiabel di $x=1$. dan $f'(1) = 1$.

- **Teorema 4.1** Jika *f* diferensiabel di *c* ➔ *f* kontinu di *c*.
- **Bukti :** Yang perlu ditunjukkan adalah

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

- Perhatikan bahwa $f(x) = f(c) + \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}.(x - c) \quad , \quad x \neq c$

- Maka

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c}\left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c)\right]$$

$$= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.\lim_{x \to c}(x - c)$$

$$= f(c) + f'(c).0$$ = f(c). Terbukti.

- Sifat tersebut tidak berlaku sebaliknya. Artinya, Jika *f* kontinu di *c*, maka belum tentu *f* diferensiabel di *c*. Hal ini, ditunjukkan oleh contoh berikut.

Contoh   Tunjukkan bahwa f (x) = | x | kontinu di x = 0 tetapi tidak diferensiabel di x = 0

Jawab

Akan ditunjukkan bahwa f(x)=|x| kontinu di x=0

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \ , & x \geq 0 \\ -x \ , & x < 0 \end{cases}$$

- f(0) = 0
- $$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0} x = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0} (-x) = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$
- $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

f kontinu di x=0

Selidiki apakah f terdiferensialkan di x=0

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Karena $-1 = f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0) = 1$

maka f tidak diferensiabel di 0.

Contoh: Tentukan konstanta a dan b agar fungsi f(x) berikut diferensiabel di x=1 ;

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b \ , \ x < 1 \\ ax \ , \ x \geq 1 \end{cases}$$

Jawab : Agar f(x) terdiferensialkan di x = 1, haruslah

a. f kontinu di x = 1 (syarat perlu)

b. Turunan kiri = turunan kanan di x = 1 (syarat cukup)

f kontinu di x = 1 jika f kontinu kiri dan kontinu kanan di x = 1 atau

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

$$f(1) = a.1 = a$$

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 + b = \lim_{x \to 1^+} ax \Leftrightarrow 1 + b = a$$

$$a = 1 + b = a \Leftrightarrow b = a - 1$$

$$f'_{-}(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+b-a}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+(a-1)-a}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

$$f'_{+}(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{ax-a}{x-1} = a\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1} = a$$

$$f'_{-}(1) = f'_{+}(1) \Rightarrow a = 2$$

b = a - 1= 2-1 = 1

Maka diperoleh : a = 2 dan b = 1.

Soal Latihan

Tentukan nilai a dan b agar fungsi berikut diferensiabel di titik yang diberikan.

1. $f(x) = \begin{cases} ax - b & ;\ x < 2 \\ 2x^2 - 1 & ;\ x \geq 2 \end{cases}$, x = 2

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ;\ x < 3 \\ 2ax + b & ;x \geq 3 \end{cases}$, x = 3

3. $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3} & ;0 \leq x < 1 \\ x^2 - bx & ;\ x \geq 1 \end{cases}$, x = 1

4.2 Aturan Pencarian Turunan

- **Fungsi Turunan Pertama**

- Definisi 4.2 Misalkan *f* (*x*) terdefinisi pada selang *I*. Fungsi turunan pertama dari *f*, ditulis $f'(x)$ didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad \forall x \in I$$

- atau jika *h=t-x*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \forall x \in I$$

bila limitnya ada.

- Notasi lain $y', \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, D_x y, D_x f(x)$, bentuk $\frac{dy}{dx}$ dikenal

sebagai notasi **Leibniz.**

- Dengan menggunakan definisi tersebut dapat diturunkan **aturan untuk mencari turunan** sebagai berikut :

1. Jika *f* (*x*)=k, maka $f'(x) = 0$

2. $\dfrac{d\left(x^{r}\right)}{dx} = r\,x^{r-1}\;;\;\; r \in R$

3. $\dfrac{d\left(f(x) \pm g(x)\right)}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$

4. $\dfrac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx} = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

5. $\dfrac{d\left(f(x)/g(x)\right)}{dx} = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^{2}(x)}$ dengan $g(x) \neq 0$.

Bukti aturan ke-4

Misal h(x) = f(x)g(x)

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h)-h(x)}{h} \qquad = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Contoh

1. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

   Jawab :

$$f'(x) = 3x^2 + 3.2x + 0 = 3x^2 + 6x$$

2. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = (x^3 + 1)(x^2 + 2x + 3)$

   Jawab :

$$f'(x) = 3x^2(x^2 + 2x + 3) + (x^3 + 1)(2x + 2)$$

$$= 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 2x^4 + 2x^3 + 2x + 2$$

$$= 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 2x + 2$$

3. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$

   Jawab :

$$f'(x) = \frac{1.(x^2+1) - 2x(x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 6x - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 6x + 1}{(x^2+1)^2}.$$

Soal Latihan

Tentukan fungsi turunan pertama dari

1. $f(x) = x^{1/2} + \sqrt[3]{x^2} + 1$

2. $f(x) = (x+1)(x^3 + 2x + 1)$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

4.3 Turunan Fungsi Sinus dan Cosinus

$$a.\ f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$b.\ f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

Bukti:

a. Misal f(x) = sin x maka

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{\sin t - \sin x}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{2\cos\left(\frac{t+x}{2}\right)\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{t-x}$$

$$= \lim_{t \to x} \cos(\frac{t+x}{2}). \lim_{\frac{t-x}{2} \to 0} \frac{\sin(\frac{t-x}{2})}{(\frac{t-x}{2})}$$

$$= \cos x.1 = \cos x.$$

b. Misal f(x) = cos x maka

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cosh - \sin x \sinh - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cosh - 1) - \sin x \sinh}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(-\sin^2 \frac{h}{2})}{h} - \sin x \frac{\sinh}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos x\ (-\sin^2 \frac{h}{2})h}{(h/2)^2 4} - \sin x \frac{\sinh}{h} \right) = \cos x \lim_{(h/2)\to 0} - \left(\frac{\sin(h/2)}{h/2} \right)^2 \frac{h}{4} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sinh}{h}$$

$$= \cos x . 0 - \sin x = -\sin x$$

Untuk turunan fungsi trigonometri yang lain dapat diperoleh dengan menerapkan rumus perhitungan turunan, khususnya turunan bentuk u/v

$$c.\ \frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d\left(\sin x / \cos x\right)}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$d.\ \frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{d\left(\cos x / \sin x\right)}{dx} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$e.\ \frac{d(\sec x)}{dx} = \frac{d\left(1 / \cos x\right)}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} = \tan x\ \sec x$$

$$f.\ \frac{d(\csc x)}{dx} = \frac{d\left(1 / \sin x\right)}{dx} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

4.4 Aturan Rantai

- Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika $\frac{dy}{du}$ dan $\frac{du}{dx}$ ada , maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Contoh : Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \sin(x^2 + 1)$

Jawab :

Misal $u = x^2 + 1$ sehingga bentuk diatas menjadi $y = \sin u$

Karena

$$\frac{dy}{du} = \cos u \text{ dan } \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

maka

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2 + 1)\,2x = 2x\cos(x^2 + 1)$$

Jika y = f(u), u = g(v), v = h(x), dan $\frac{dy}{du}, \frac{du}{dv}, \frac{dv}{dx}$ Ada, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Contoh : Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = Sin^4(x^3 + 5)$

Jawab :

Misal $v = x^3 + 5 \longrightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2$

u = Sin v $\rightarrow \frac{du}{dv} = \cos v = \cos(x^3 + 5)$

$y = u^4 \rightarrow \frac{dy}{du} = 4u^3 = 4Sin^3(x^3 + 5)$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx} = 12x^2\, Sin^3(x^3 + 5)Cos(x^3 + 5)$$

- Contoh : Tentukan

$$f'(x^2) \quad jika \quad \frac{d}{dx}(f(x^2)) = x^2 + 1, x \neq 0$$

jawab :

$$\frac{d}{dx}(f(x^2)) = x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x^2).2x = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

Soal Latihan

Tentukan fungsi turunan pertama dari

1. $$y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$$

2. $$y = (2x - 3)^{10}$$

3. $$y = \sin^3 x$$

4. $$y = \cos^4\left(4x^2 - x\right)$$

5. $$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

6. y = sin x tan [x^2 + 1]

Tentukan $f'(\cos(x^2))$,

jika $\frac{d(f(\cos(x^2)))}{dx} = \left(2x - 3\right)^{10}$

4.5 Turunan Tingkat Tinggi

- Turunan ke-*n* didapatkan dari penurunan turunan ke-(*n*-1).

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right)$$

- Turunan pertama $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$
- Turunan kedua $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$
- Turunan ketiga $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$
- Turunan ke-n $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$
- **Contoh** : Tentukan y'' dari $y = 4x^3 + \sin x$
- **Jawab** :

$$y' = 12x^2 + \cos x \quad maka \quad y'' = 24x - sin\ x$$

Soal Latihan

A. Tentukan turunan kedua dari

1. $y = \sin(2x-1)$

2. $y = (2x-3)^4$

3. $y = \dfrac{x}{x+1}$

4. $y = \cos^2(\pi x)$

B. Tentukan nilai c sehingga $f''(c) = 0$ bila $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$

C. Tentukan nilai a, b dan c dari $g(x) = ax^2 + bx + c$ bila g (1) = 5,

$g'(1) = 3$ dan $g''(1) = -4$

4.6 Turunan Fungsi Implisit

- Jika hubungan antara *y* dan *x* dapat dituliskan dalam bentuk *y* = *f*(*x*) maka y disebut **fungsi eksplisit** dari x, yaitu antara peubah bebas dan tak bebasnya dituliskan dalam ruas yang berbeda. Bila tidak demikian maka dikatakan ***y* fungsi implisit dari *x***.

  Contoh :

  $$1.\ x^3y^2 + x^2 + y = 10$$

  $$2.\ \sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$$

- Untuk menentukan turunan dari bentuk implisit digunakan aturan rantai dan anggap *y* fungsi dari *x*.

Tentukan dy/dx dari bentuk implisit berikut

1. $x^3y^2 + x^2 + y = 10$ 2. $\sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$

Jawab

1. $D_x(x^3y^2 + x^2 + y) = D_x(10)$

$$D_x(x^3y^2) + D_x(x^2) + D_x(y) = D_x(10)$$

$$(3x^2y^2 + 2x^3y\,y') + 2x + y' = 0$$

$$(2x^3y + 1)y' = -2x - 3x^2y^2$$

$$y' = \frac{-2x - 3x^2y^2}{2x^3y + 1}$$

2. $D_x(\sin(xy) + x^2) = D_x(y^2 + 1)$

$$\cos(xy)(y + xy') + 2x = 2yy' + 0$$

$$(x\cos(xy) - 2y)y' = -2x - y\cos(xy)$$

$$y' = \frac{-2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - 2y}$$

Soal Latihan

Tentukan turunan pertama (y') dari bentuk implisit

1. $x^3 - 3x^2y + y^2 = 0$
2. $y + \sin(xy) = 1$
3. tan (x y) - 2 y = 0
4. $x^2 \sin(xy) + y = x$

4.7 Garis singgung dan garis normal

- Persamaan garis singgung fungsi $y = f(x)$ di titik (x_0,y_0) dengan kemiringan *m adalah*

$$\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0).}$$

- Garis yang tegak lurus dengan garis singgung disebut dengan garis normal.
- Persamaan garis normal di titik (x_0,y_0) adalah

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0). \quad , m \neq 0$$

$m = 0$

gs $y = y_0$

gn $x = x_0$

Contoh: Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal

fungsi $y = x^3 - 2x^2 + 6$ di (2,6).

$y = (x-3)^3 - 3x$ di $x = 2$

Jawab :

$$y' = 3x^2 - 4x \rightarrow y'(2,6) = 3.2^2 - 4.2 = 4$$

Sehingga persamaan garis singgung di titik (2,6) :

$$y - 6 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 2$$

Persamaan garis normal dititik (2,6) :

$$y - 6 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y - 6 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{2}.$$

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva

$x^2 y^2 - xy - 6 = 0$ di titik dengan absis(x) = 1

Jawab :

Jika disubstitusikan nilai x = 1 pada persamaan kurva diperoleh

$y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y+2) = 0$ y = 3 dan y = -2

Sehingga diperoleh titik dimana akan ditentukan persamaan garis singgung dan garis normalnya adalah (1,3) dan (1,-2)

Hitung terlebih dahulu y' dengan menggunakan turunan fungsi implisit

$D_x(x^2y^2 - xy - 6) = D_x(0) \Leftrightarrow 2xy^2 + 2x^2yy' - (y + xy') - 0 = 0$

$2xy^2 + 2x^2yy' - y - xy' = 0$

$$(2x^2y - x)y' = y - 2xy^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y - 2xy^2}{2x^2y - x}$$

Di titik (1,3)

$$y'|_{(1,3)} = \frac{3 - 2.1.9}{2.1.3 - 1} = \frac{-15}{5} = -3$$

Persamaan garis singgung

$$y - 3 = -3(x - 1) = -3x + 3$$

$$3x + y = 6$$

Persamaan garis normal

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$x - 3y = -8$$

Di titik (1,-2)

$$y'\big|_{(1,-2)} = \frac{-2-2.1.4}{2.1.(-2)-1} = \frac{-10}{-5} = 2$$

Persamaan garis singgung

$$y + 2 = 2(x-1) = 2x - 2$$

$$2x - y = 4$$

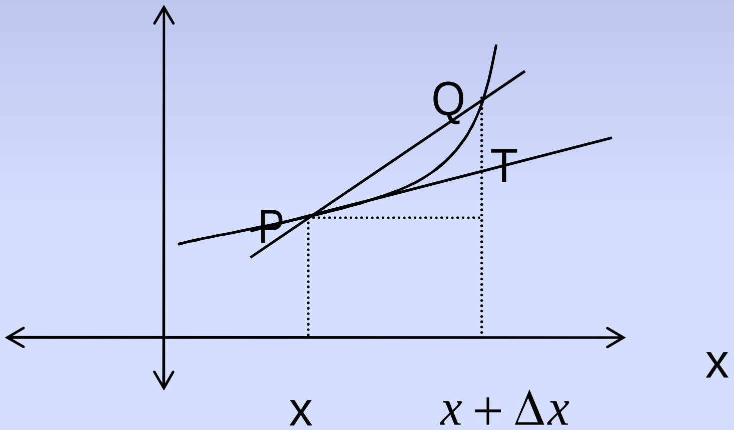
Persamaan garis normal

$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x-1) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$x + 2y = -3$$

4.8 Diferensial dan Hampiran

- **4.8.1 Diferensial**
- Jika $f'(x)$ ada, maka $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Untuk Δx sangat kecil , maka $m_{PQ} = m_{PT}$ yakni $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$, $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$

- **Definisi 4.4** Jika $y = f(x)$ diferensiabel di x, maka
  Diferensial dari x , dinyatakan dengan dx, adalah $dx = \Delta x$
  Diferensial dari y , dinyatakan dengan dy, adalah $dy = f'(x)dx$

4.8.2 Hampiran

- Perhatikan kembali gambar sebelumnya,
- Misalkan $y = f(x)$ diferensiabel di interval I yang memuat x dan $x + \Delta x$. Jika x ditambah Δx, maka y bertambah sepadan dengan Δy yang dapat dihampiri oleh dy .
- Jadi , $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x$ (*)
- **Contoh :** Hampiri $\sqrt[3]{28}$
- **Jawab** : Pandang, $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(27) = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(27) = \frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(3^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27}$$

Dengan pers (*)

$$f(28) \approx f(27) + f'(27)(28 - 27) = 3\frac{1}{27}.$$

Soal Latihan

1. Diketahui kurva yang dinyatakan secara implisit

$$y + \sin\left(xy\right) = 1$$

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal di $(\pi, 1)$

2. Gunakan diferensial untuk menghampiri

a. $\sqrt{10}$

b. $\sqrt{33}$

3. Jika diketahui $f'(0) = 2,\ g(0) = 0\ ,\ g'(0) = 3$ tentukan $(f \circ g)'(0)$.