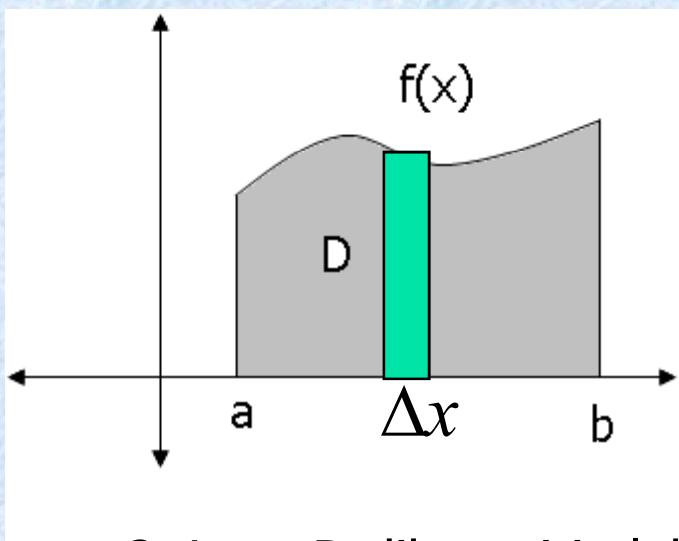


8. APLIKASI INTEGRAL

8.1 Menghitung Luas Daerah

a. Misalkan daerah $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$



Luas D = ?

Langkah :

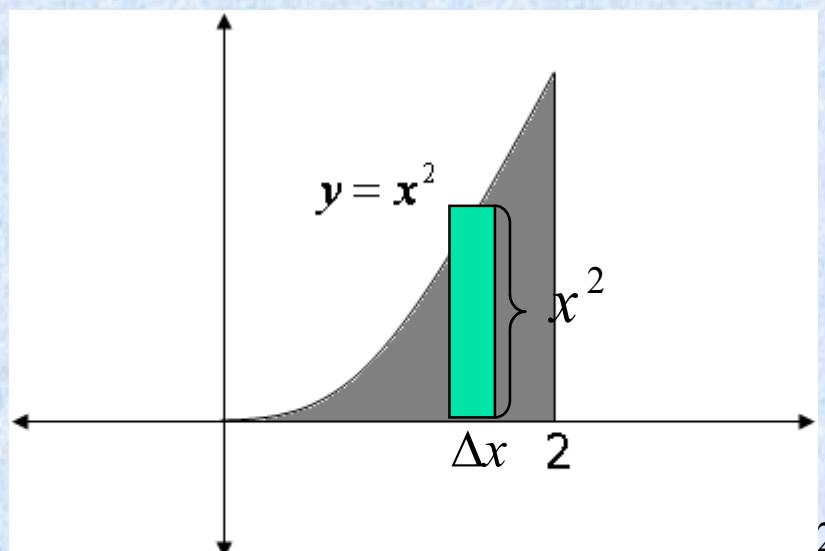
1. Iris D menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi $f(x)$ alas(lebar) Δx

$$\Delta A \approx |f(x)|\Delta x$$

2. Luas D dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

$$\text{Luas } D = A = \int_a^b |f(x)|dx$$

Contoh : Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x , dan $x = 2$.



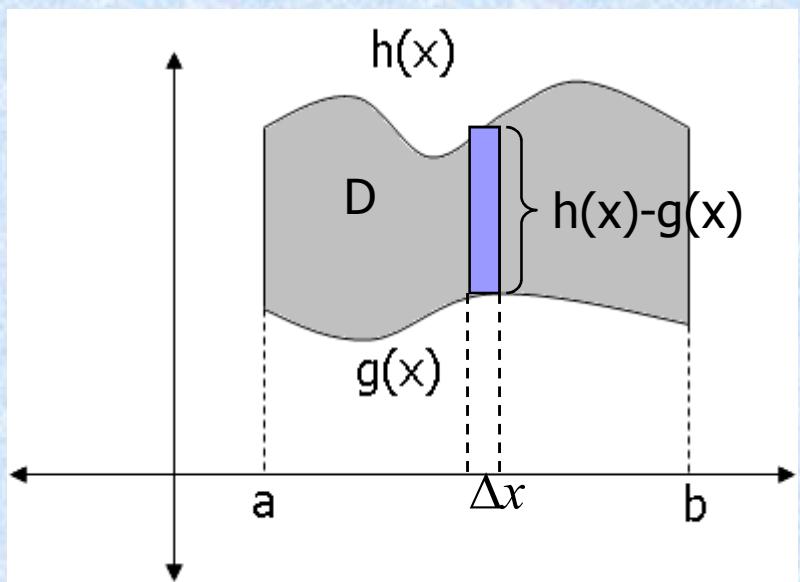
Luas irisan

$$\Delta A \approx |x^2| \Delta x$$

Luas daerah

$$A = \int_0^2 |x^2| dx = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

b) Misalkan daerah $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$



Luas D = ?

Langkah :

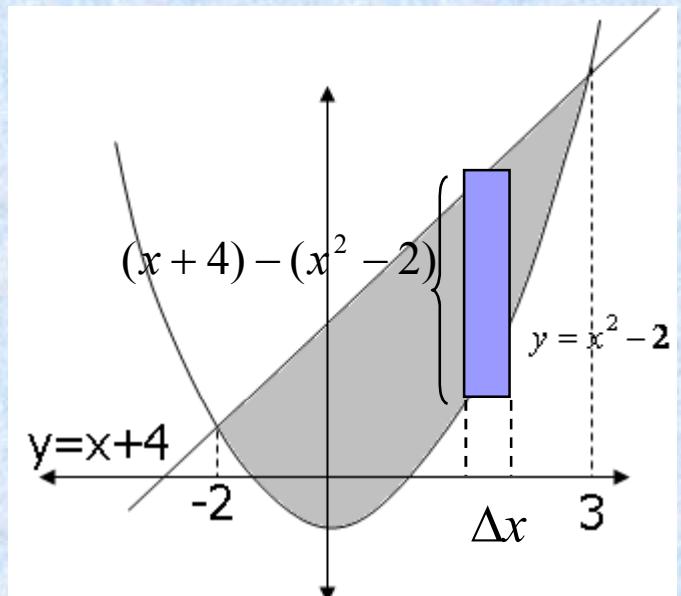
1. Iris D menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi $h(x)-g(x)$ alas(lebar) Δx

$$\Delta A \approx |h(x) - g(x)|\Delta x$$

2. Luas D dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

$$\text{Luas D} = A = \int_a^b |h(x) - g(x)| dx$$

Contoh : Hitung luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x+4$ dan parabola $y = x^2 - 2$



Titik potong antara garis dan parabola

$$x + 4 = x^2 - 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x = -2, x = 3$$

Luas irisan

$$\Delta A \approx ((x + 4) - (x^2 - 2))\Delta x$$

Sehingga luas daerah :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^3 ((x + 4) - (x^2 - 2)) dx = \int_{-2}^3 (-x^2 + x + 6) dx \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \Big|_{-2}^3 = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

Ctt :

Jika irisan dibuat tegak lurus terhadap sumbu x maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak di sebelah atas dikurangi kurva yang berada di sebelah bawah. Jika batas atas dan bawah irisan berubah untuk sembarang irisan di D maka daerah D harus dibagi dua atau lebih

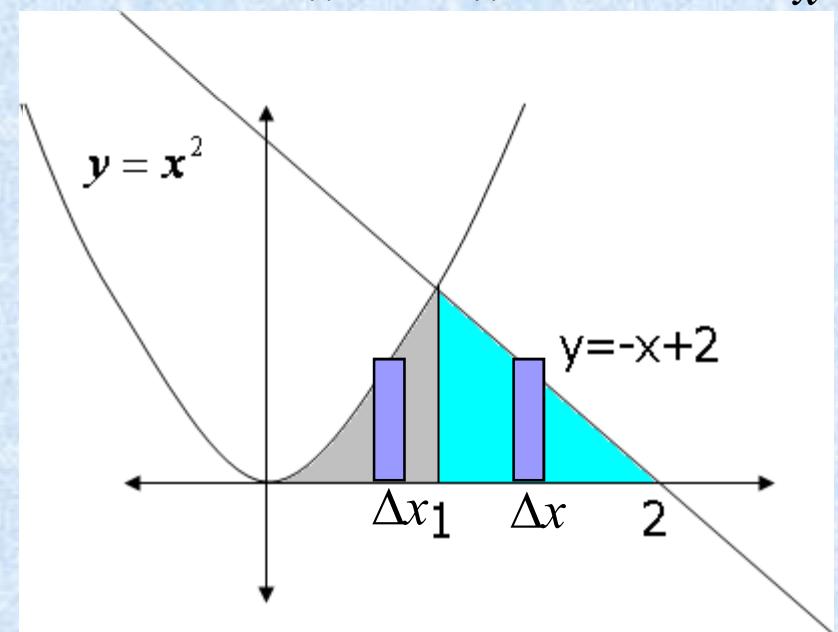
Contoh : Hitung luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x,

$$y = x^2 \text{ dan } y = -x + 2$$

Jawab

Titik potong

$$x^2 = -x + 2 \longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \longrightarrow (x+2)(x-1) = 0$$
$$\longrightarrow x = -2, x = 1$$



Jika dibuat irisan tegak, maka daerah harus dibagi menjadi dua bagian

Luas irisan I

$$\Delta A_1 \approx x^2 \Delta x$$

Luas irisan II

$$\Delta A_2 \approx (-x + 2) \Delta x$$

Luas daerah I

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

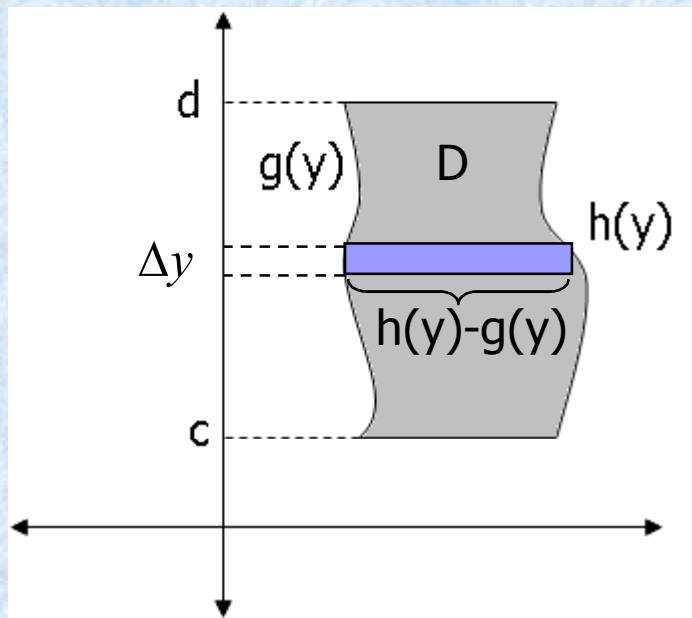
Luas daerah II

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^2 -x + 2 \, dx = -\frac{1}{2} x^2 + 2x \Big|_1^2 \\ &= (-2 + 4) - (-\frac{1}{2} + 2) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sehingga luas daerah

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

c). Misalkan daerah $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$



Luas D = ?

Langkah :

1. Iris D menjadi n bagian dan luas satu buah irisan dihampiri oleh luas persegi panjang dengan tinggi $h(y)-g(y)$ alas(lebar) Δy

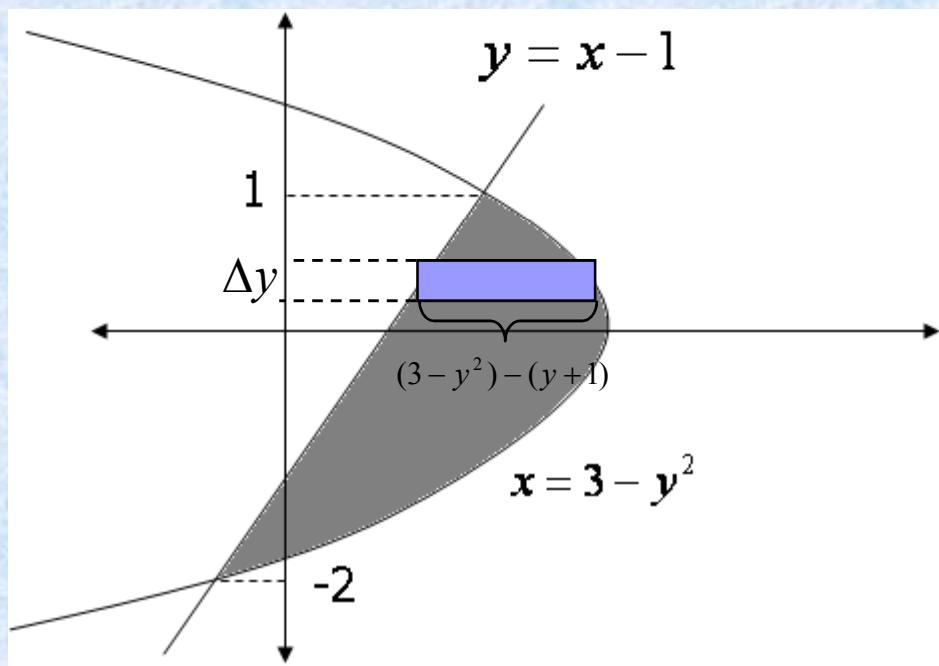
$$\Delta A \approx |h(y)-g(y)|\Delta y$$

2. Luas D dihampiri oleh jumlah luas persegi panjang. Dengan mengambil limitnya diperoleh:

$$\text{Luas } D = A = \int_c^d |h(y)-g(y)| dy$$

Contoh: Hitung luas daerah yang dibatasi oleh $x = 3 - y^2$
dan $y = x - 1$

Jawab :



Titik potong antara garis dan
parabola

$$y + 1 = 3 - y^2$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$(y + 2)(y - 1) = 0$$

$$\mathbf{y = -2 \text{ dan } y = 1}$$

Luas irisan

$$\Delta A = |(3 - y^2) - (y + 1)| \Delta y$$

Sehingga luas daerah :

$$\begin{aligned}L &= \int_{-2}^1 ((3 - y^2) - (y + 1)) dy = \int_{-2}^1 (-y^2 - y + 2) dy \\&= \left[-\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Ctt :

Jika irisan sejajar dengan sumbu x maka tinggi irisan adalah kurva yang terletak disebelah kanan dikurangi kurva yang berada disebelah kiri. Jika batas kanan dan kiri irisan berubah untuk sembarang irisan di D maka daerah D harus dibagi dua atau lebih

Soal Latihan

A. Gambarkan dan hitung luas daerah yang dibatasi oleh

1. $y = x^2$ dan $y = x + 2$

2. $y = x^3$, $y = -x$, dan $y = 8$

3. $y = x$, $y = 4x$, $y = -x + 2$

4. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = 2\pi$.

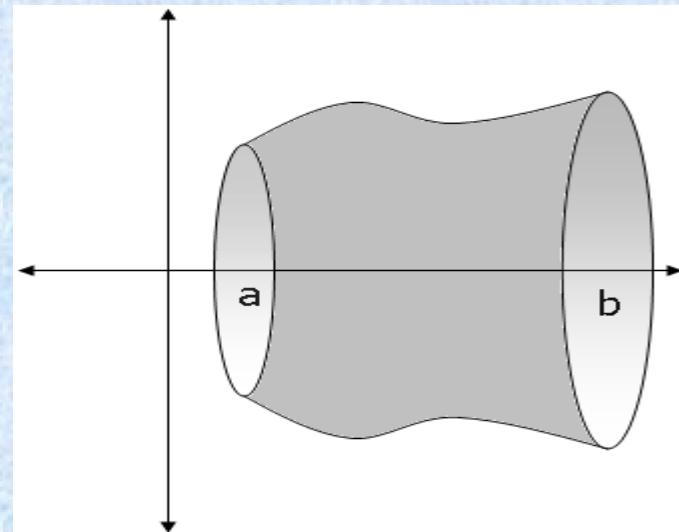
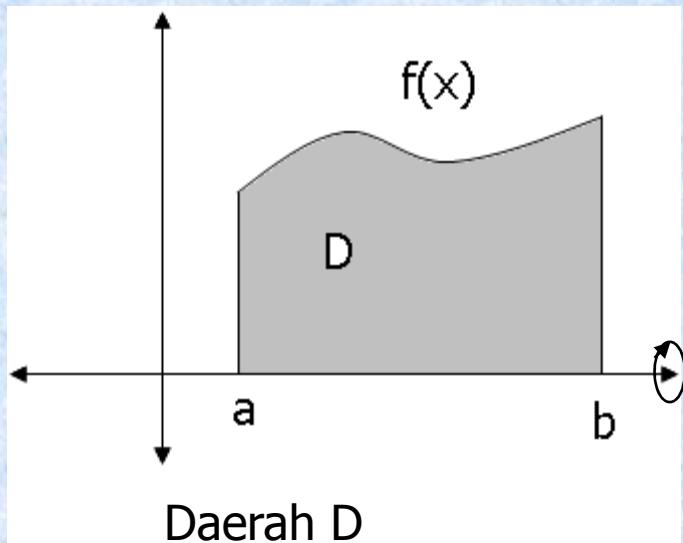
5. $x = 4 - y^2$ dan $y = x + 2$

6. $y = x^2 - 3x + 2$, sumbu y, dan sumbu x

8.2 Menghitung volume benda putar

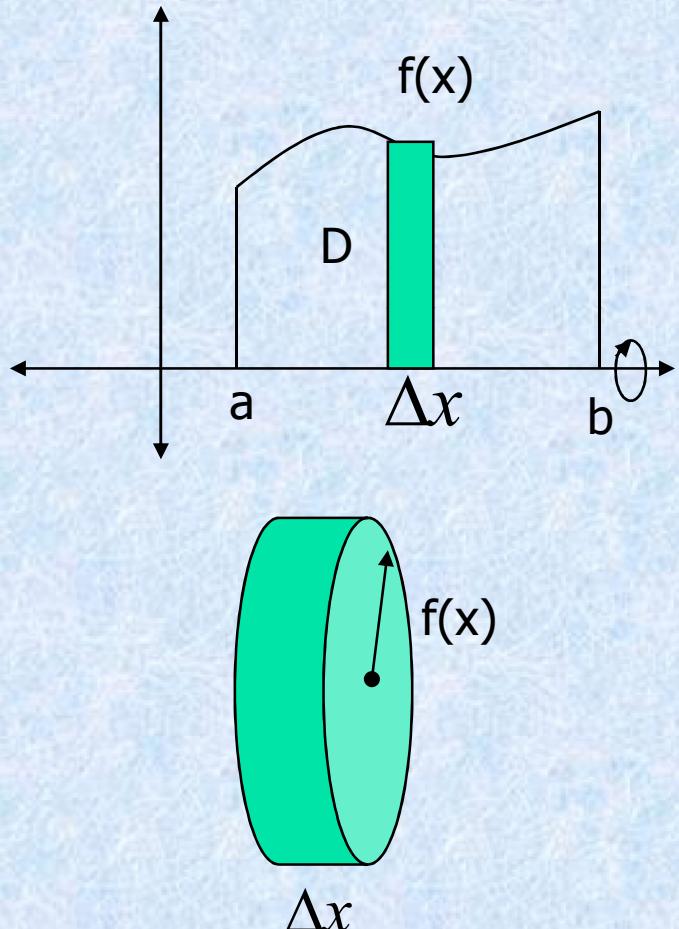
8.2.1 Metoda Cakram

a. Daerah $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ diputar terhadap sumbu x



? Volume benda putar

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan Iris , hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.



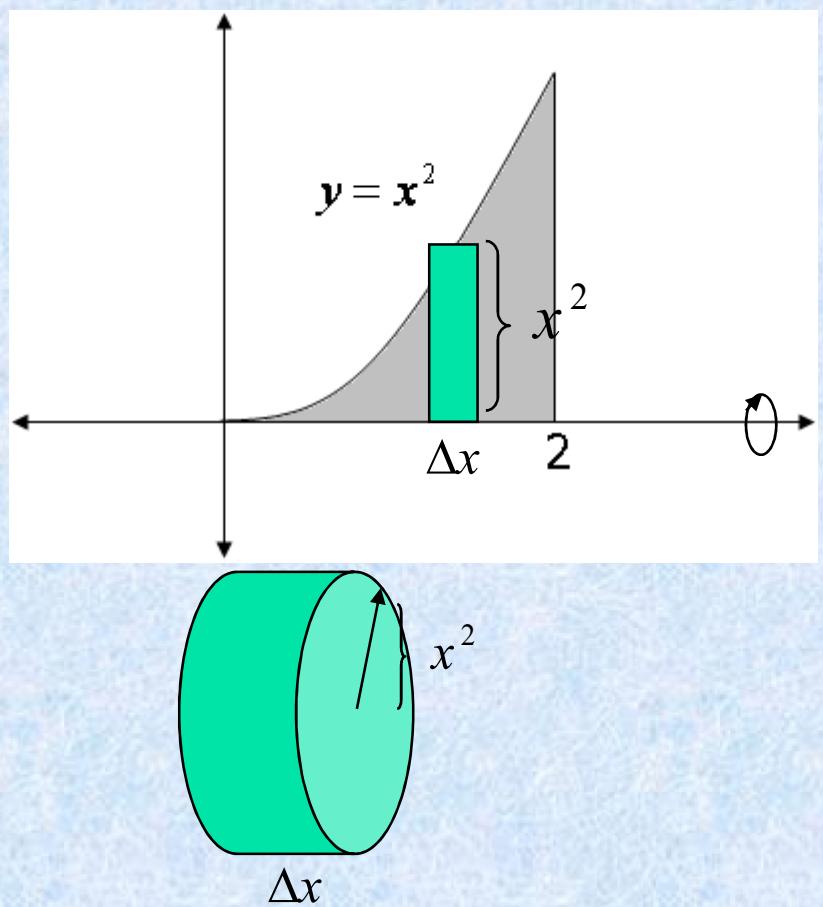
Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $f(x)$ dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δx dan jari-jari $f(x)$.
sehingga

$$\Delta V \approx \pi f^2(x) \Delta x$$



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Contoh: Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis $x=2$ diputar terhadap sumbu x



Jika irisan diputar terhadap sumbu x akan diperoleh cakram dengan jari-jari x^2 dan tebal Δx

Sehingga

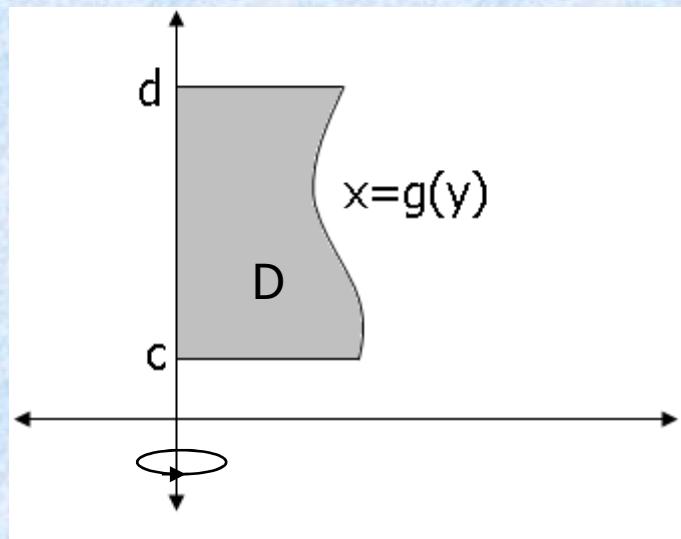
$$\Delta V \approx \pi (x^2)^2 \Delta x = \pi x^4 \Delta x$$

Volume benda putar

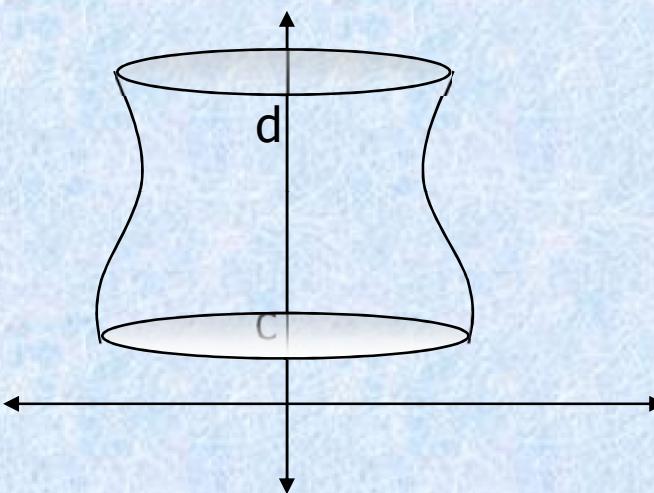
$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32}{5} \pi$$

b. Daerah $D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, 0 \leq x \leq g(y)\}$

diputar terhadap sumbu y



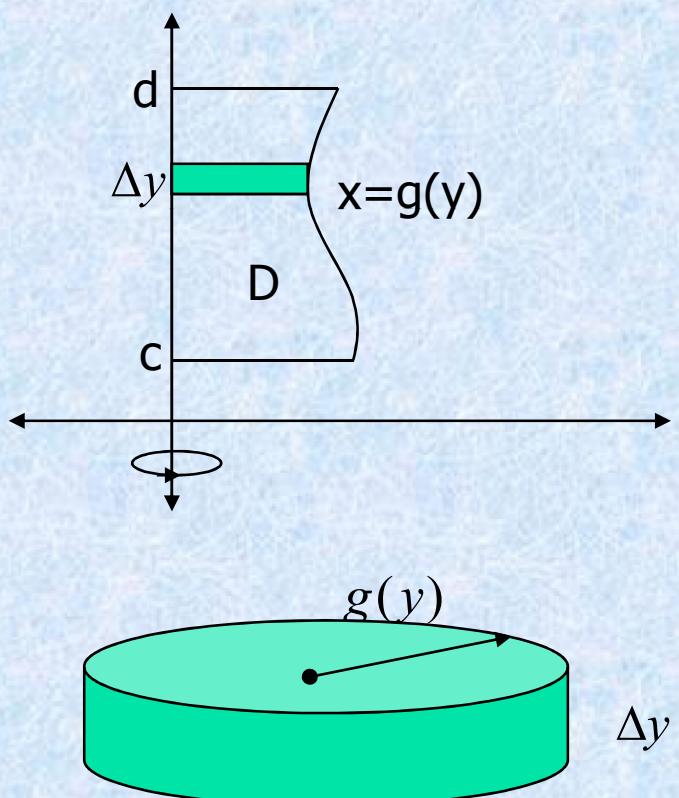
Daerah D



Benda putar

? Volume benda putar

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan Iris , hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.



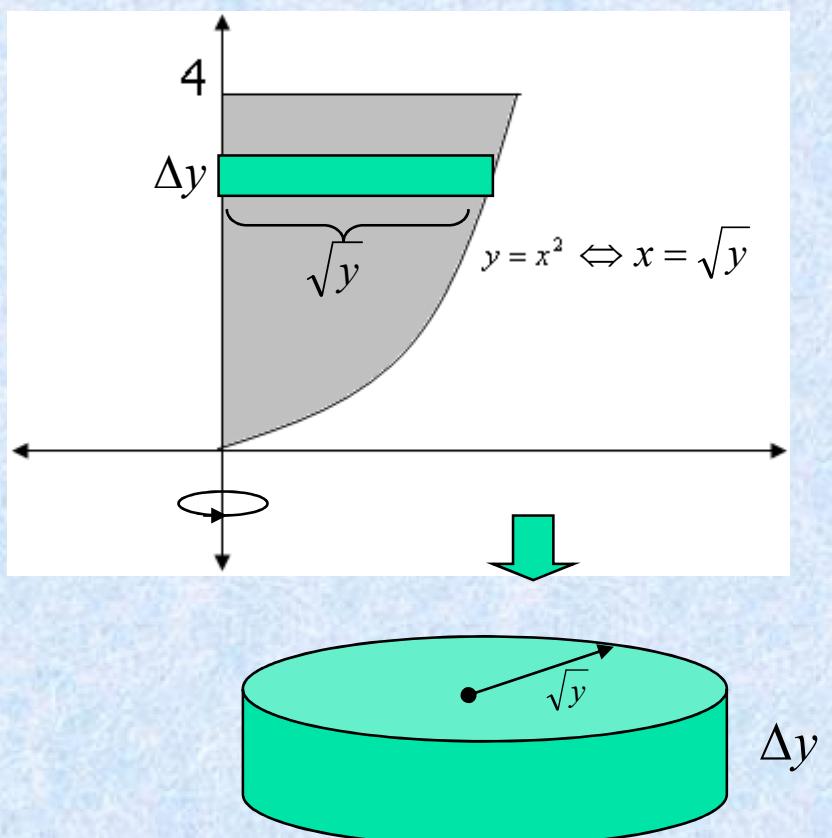
Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $g(y)$ dan alas Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu cakram lingkaran dengan tebal Δy dan Jari-jari $g(y)$.
sehingga

$$\Delta V \approx \pi g^2(y) \Delta y$$



$$V = \pi \int_c^d g^2(y) dy$$

Contoh : Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ garis $y = 4$, dan sumbu y diputar terhadap sumbu y



Jika irisan dengan tinggi \sqrt{y} dan tebal Δy diputar terhadap sumbu y akan diperoleh cakram dengan jari-jari \sqrt{y} dan tebal Δy

Sehingga

$$\Delta V = \pi(\sqrt{y})^2 \Delta y = \pi y \Delta y$$

Volume benda putar

$$V = \pi \int_0^4 y dy = \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_0^4 = 8\pi$$

Latihan Soal

A. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi-fungsi berikut diputar terhadap sumbu x

1. $y = x^3$, $y = 0$, dan $x = 2$

2. $y = 9 - x^2$ dan $y = 0$

B. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi-fungsi berikut diputar terhadap sumbu y

3. $y = x^2$, $y = 4$, dan $x = 0$ di kuadran I

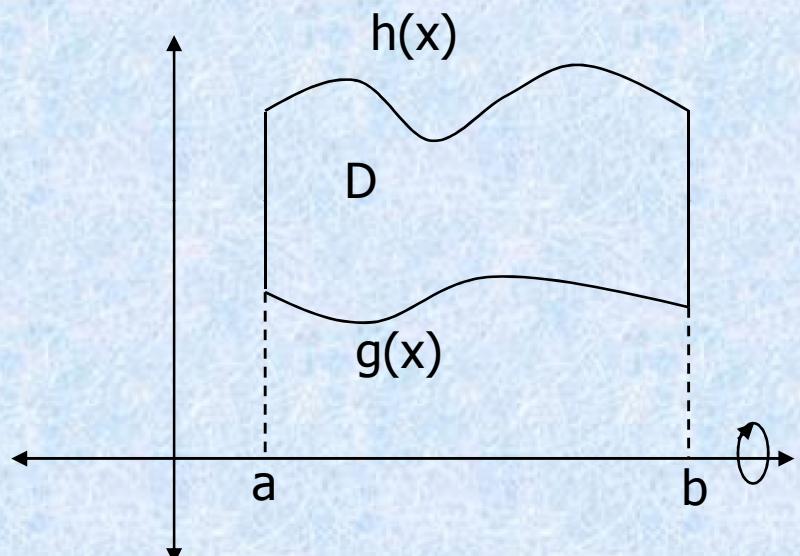
4. $x = y^2$, $y = 2$, dan $x = 0$

5. $y = x^3$, $y = 1$, dan $x = 0$

8.2.2 Metoda Cincin

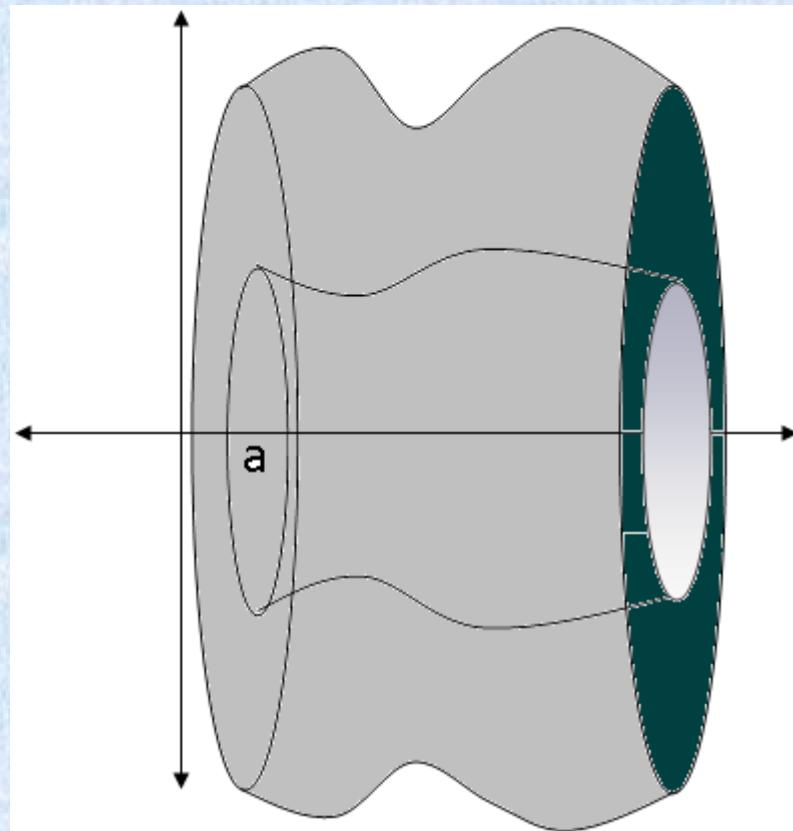
a. Daerah $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$

diputar terhadap sumbu x



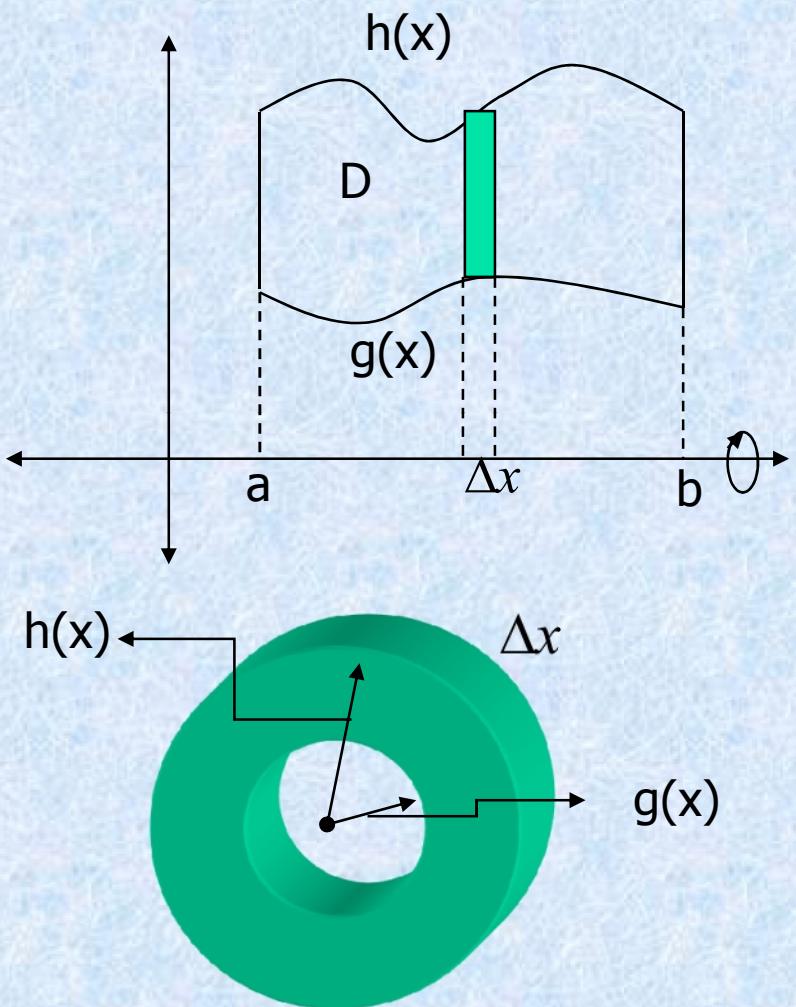
Daerah D

? Volume benda putar



Benda putar

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan Iris , hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.



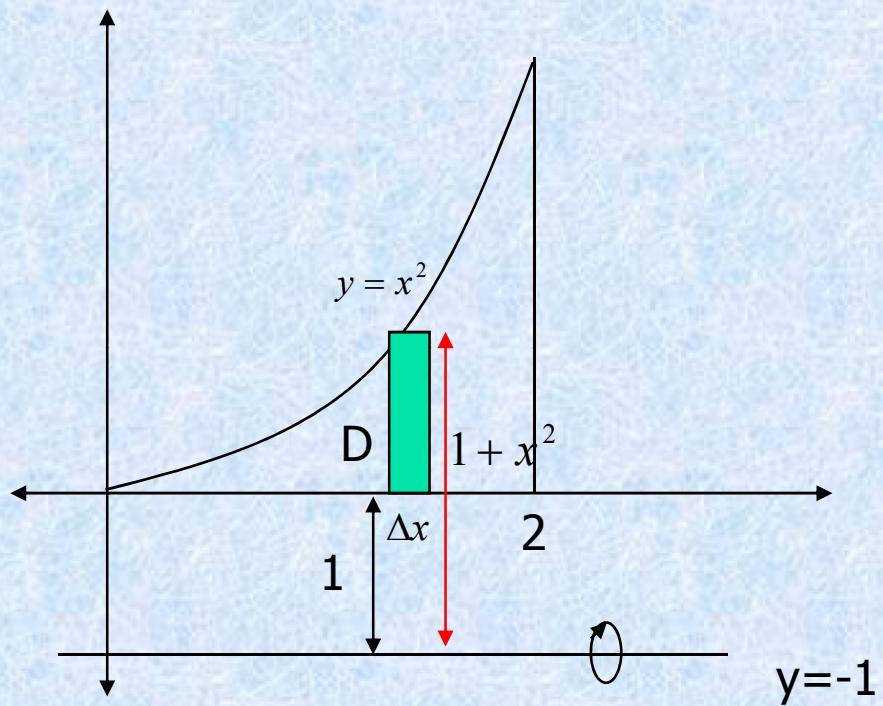
Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $h(x)-g(x)$ dan alas Δx diputar terhadap sumbu x akan diperoleh suatu cincin dengan tebal Δx dan jari –jari luar $h(x)$ dan jari-jari dalam $g(x)$.
sehingga

$$\Delta V \approx \pi(h^2(x) - g^2(x))\Delta x$$



$$V = \pi \int_a^b (h^2(x) - g^2(x))dx$$

Contoh: Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis $x=2$ diputar terhadap garis $y=-1$



Jika irisan diputar terhadap garis $y=1$
Akan diperoleh suatu cincin dengan
Jari-jari dalam 1 dan jari-jari luar $1+x^2$

Sehingga

$$\begin{aligned}\Delta V &= \pi((x^2 + 1)^2 - 1^2)\Delta x \\ &= \pi(x^4 + 2x^2 + 1 - 1)\Delta x \\ &= \pi(x^4 + 2x^2)\Delta x\end{aligned}$$

Volume benda putar :

$$V = \pi \int_0^2 x^4 + 2x^2 dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \pi \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} \right) = \frac{186}{15} \pi$$

Catatan :

-Metoda cakram/cincin

Irisan dibuat tegak lurus terhadap sumbu putar

- Metoda kulit tabung

Irisan dibuat sejajar dengan sumbu putar

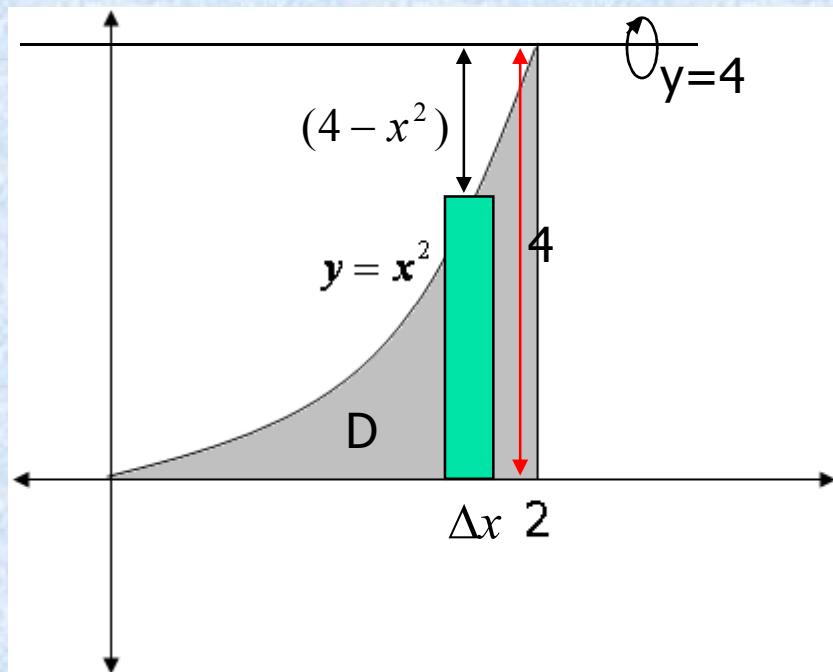
Jika daerah dan sumbu putarnya sama maka perhitungan dengan menggunakan metoda cakram/cincin dan metoda kulit tabung akan menghasilkan hasil yang sama

Contoh Tentukan benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$, garis $x = 2$, dan sumbu x diputar terhadap

- a. Garis $y = 4$
- b. Garis $x = 3$

a. Sumbu putar $y = 4$

(i) Metoda cincin



Volume benda putar

$$V = \pi \int_0^2 (8x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^2 = \pi \left(\frac{64}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{224}{15}\pi$$

Jika irisan diputar terhadap garis $y=4$ akan diperoleh cincin dengan

$$\text{Jari-jari dalam } = r_d = (4 - x^2)$$

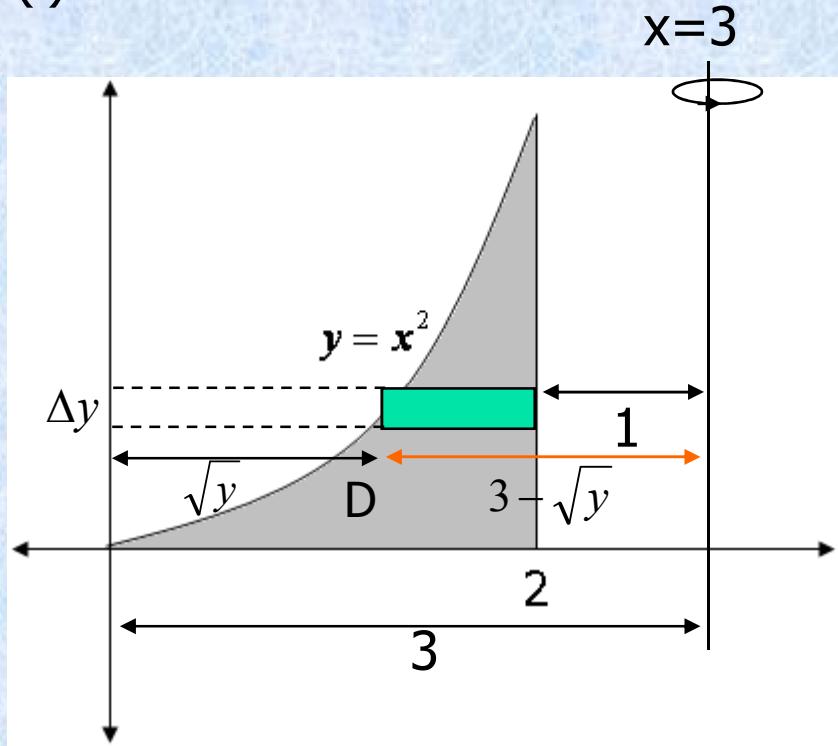
$$\text{Jari-jari luar } = r_l = 4$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx \pi((4)^2 - (4 - x^2)^2)\Delta x \\ &= \pi(8x^2 - x^4)\Delta x\end{aligned}$$

b. Sumbu putar $x=3$

(i) Metoda cincin



Volume benda putar

$$V = \pi \int_0^4 (8 - 6\sqrt{y} + y) dy = \pi(8y - 4y^{3/2} + 8|_0^4) = 8\pi$$

Jika irisan diputar terhadap garis $x=3$ diperoleh cincin dengan

$$\text{Jari-jari dalam} = r_d = 1$$

$$\text{Jari-jari luar} = r_l = 3 - \sqrt{y}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx \pi((3 - \sqrt{y})^2 - (1)^2)\Delta y \\ &= \pi(8 - 6\sqrt{y} + y)\Delta y\end{aligned}$$

Latihan Soal

A. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi-fungsi berikut diputar terhadap sumbu x

1. $y = x^2$ dan $y = 4x$

2. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/4$

3. $y = x^3$ dan $y = x$, di kuadran 1

4. $y = x^2$, dan $y = \sqrt{x}$

5. $y = \sqrt{x}$, dan $y = x$

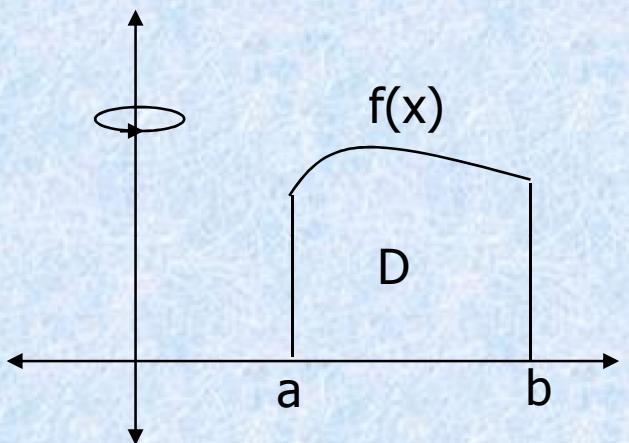
B. Hitung volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi-fungsi berikut diputar terhadap sumbu y

1. $y = x^2$ dan $y = 4x$
2. $y = -x+1$, $y = x^2$, dan $x = 0$ di kuadran 1
3. $y = x^3$ dan $y = x$, di kuadran 1
4. $y = x^2$, dan $y = \sqrt{x}$
5. $y = \sqrt{x}$, dan $y = x$

8.2.3 Metoda Kulit Tabung

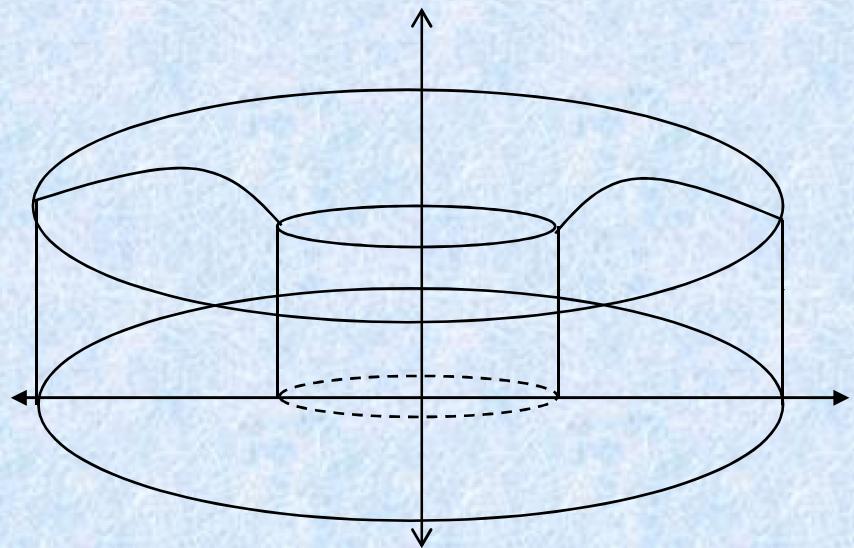
Diketahui $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Jika D diputar terhadap sumbu y diperoleh benda putar



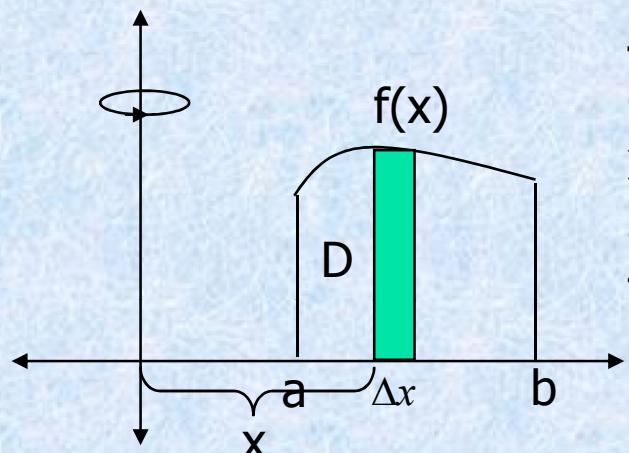
Daerah D

Volume benda putar ?



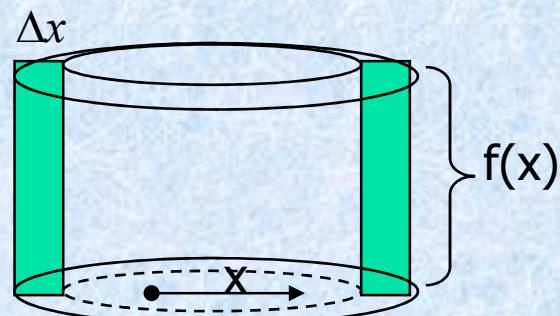
Benda putar

Untuk menghitung volume benda putar gunakan pendekatan Iris , hampiri, jumlahkan dan ambil limitnya.



Jika irisan berbentuk persegi panjang dengan tinggi $f(x)$ dan alas Δx serta berjarak x dari sumbu y diputar terhadap sumbu y akan diperoleh suatu kulit tabung dengan tinggi $f(x)$, jari-jari x , dan tebal Δx

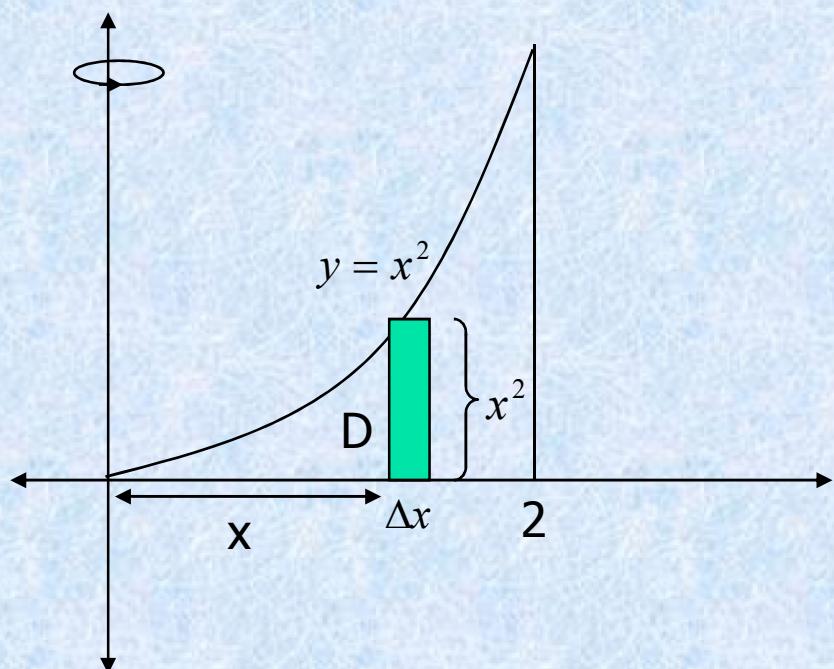
sehingga



$$\Delta V \approx 2\pi x f(x) \Delta x$$

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Contoh: Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu x, dan garis $x=2$ diputar terhadap sumbu y



Jika irisan dengan tinggi x^2 , tebal Δx dan berjarak x dari sumbu y diputar terhadap sumbu y akan diperoleh kulit tabung dengan tinggi x^2 , tebal Δx dan jari-jari x

Sehingga

$$\Delta V = 2\pi x x^2 \Delta x = 2\pi x^3 \Delta x$$

Volume benda putar

$$V = 2\pi \int_0^2 x^3 dx = \frac{\pi}{2} x^4 \Big|_0^2 = 8\pi$$

Catatan :

-Metoda cakram/cincin

Irisan dibuat tegak lurus terhadap sumbu putar

- Metoda kulit tabung

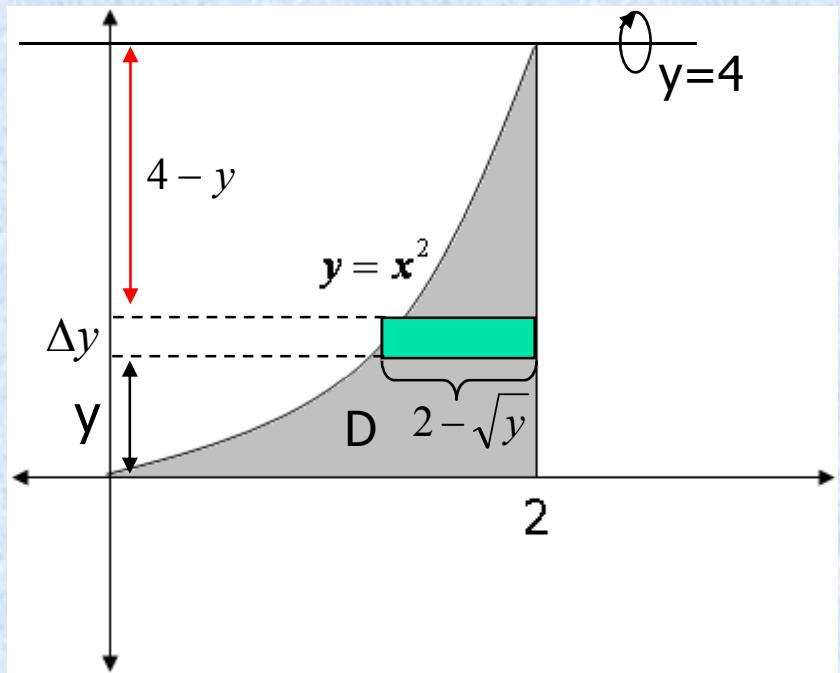
Irisan dibuat sejajar dengan sumbu putar

Jika daerah dan sumbu putarnya sama maka perhitungan dengan menggunakan metoda cakram/cincin dan metoda kulit tabung akan menghasilkan hasil yang sama

Contoh Tentukan benda putar yang terjadi jika daerah D yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$, garis $x = 2$, dan sumbu x diputar terhadap

- a. Garis $y = 4$
- b. Garis $x = 3$

(ii) Metoda kulit tabung



Volume benda putar

$$V = 2\pi \int_0^4 (8 - 4\sqrt{y} - 2y + y\sqrt{y}) dy = 2\pi \left(8y - \frac{8}{3}y^{3/2} - y^2 + \frac{2}{5}y^{5/2} \right) \Big|_0^4 = \frac{224}{15}\pi$$

Jika irisan diputar terhadap garis $y=4$ akan diperoleh kulit tabung dengan

$$\text{Jari-jari} = r = 4 - y$$

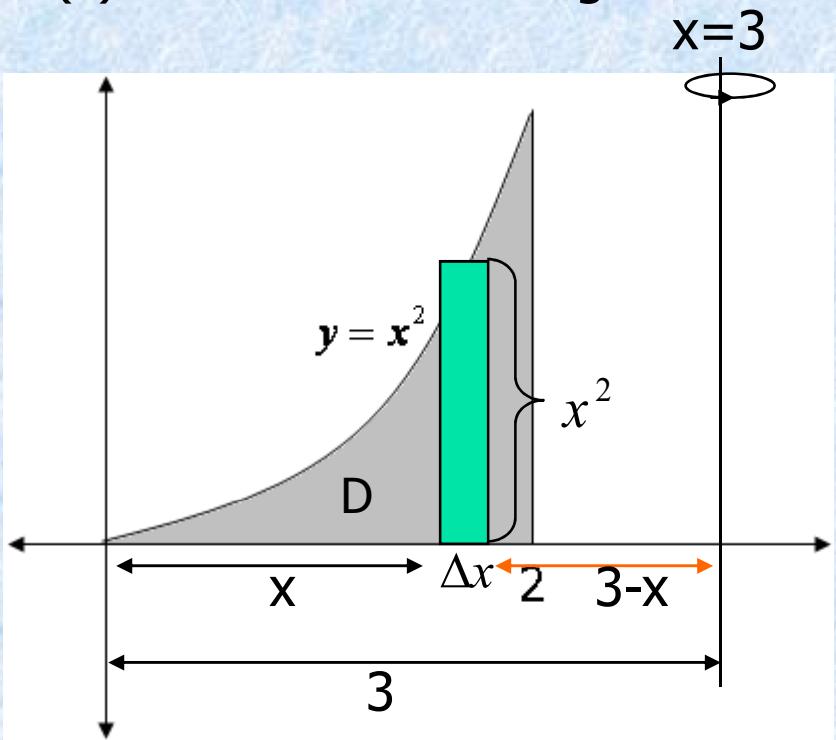
$$\text{Tinggi} = h = 2 - \sqrt{y}$$

$$\text{Tebal} = \Delta y$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx 2\pi(4-y)(2-\sqrt{y})\Delta y \\ &= 2\pi(8 - 4\sqrt{y} - 2y + y\sqrt{y})\Delta y \end{aligned}$$

(ii) Metoda kulit tabung



Jika irisan diputar terhadap garis $x=3$ diperoleh kulit tabung dengan

$$\text{Tinggi} = h = x^2$$

$$\text{Jari-jari} = r = 3-x$$

$$\text{Tebal} = \Delta x$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx 2\pi(3-x)x^2\Delta x \\ &= 2\pi(3x^2 - x^3)\Delta x\end{aligned}$$

Volume benda putar

$$V = 2\pi \int_0^2 (3x^2 - x^3) dx = 2\pi \left(x^3 - \frac{1}{4}x^4\right) \Big|_0^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$$