

Materi ke-2

Fungsi

Pengertian Fungsi

- Relasi : aturan yang mengawankan/
mengkaitkan/ menugaskan 2 himpunan

- **Fungsi**

Misalkan A dan B himpunan. Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B , artinya :

$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{ jika } x_1 = x_2, \text{ maka } f(x_1) = f(x_2)$$



Untuk
setiap

Pengertian Fungsi

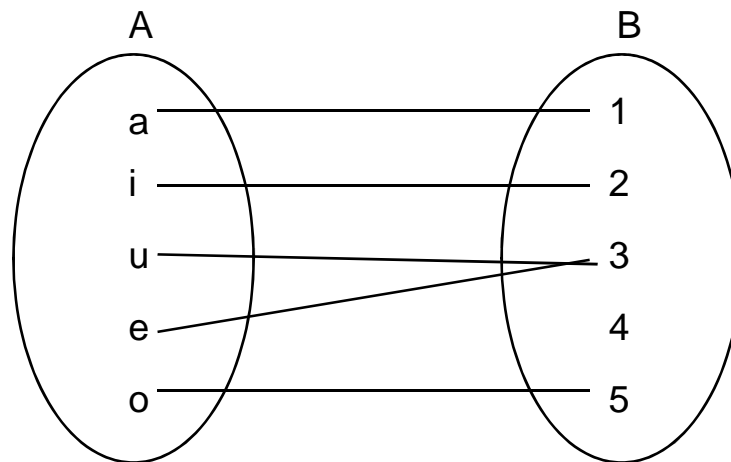
Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

$$f: A \rightarrow B$$

yang artinya f **memetakan** A ke B .

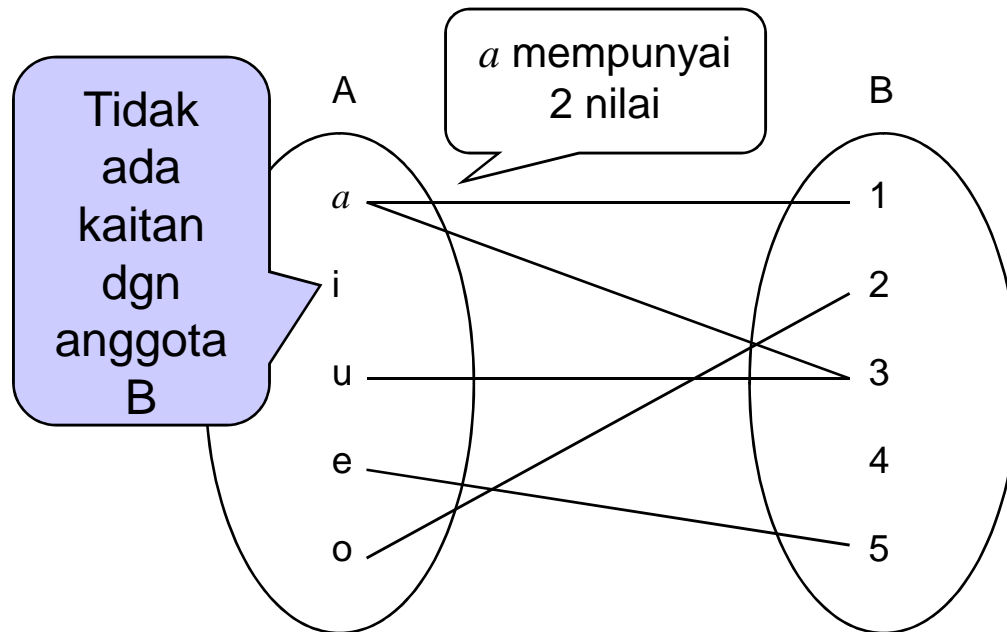
A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f dan B disebut *codomain* dari f .

Relasi di bawah ini merupakan fungsi



Pengertian Fungsi

Relasi di bawah ini bukan merupakan fungsi :



Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) / jangkauan dari f . Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian dari B .

Pengertian Fungsi

Jelajah : $\{y | f(x) = y, x \in A\} \subseteq B$

Jelajah/range/jangkauan dinotasikan dengan R_f

Contoh :

1. Carilah domain dan range dari fungsi :

$$f(x) = \frac{1}{4x + 3}$$

Jawab :

a. Mencari domain

Pengertian Fungsi

syarat agar fungsi tersebut terdefinisi adalah :

$$4x + 3 \neq 0 \quad x \neq -\frac{3}{4}$$

$$\text{Sehingga } D_f = \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}, \infty\right) \text{ atau } \mathfrak{R} - \left\{-\frac{3}{4}\right\}$$

b. Mencari Range

$$y = \frac{1}{4x+3}, 4x+3 \neq 0 \quad y(4x+3) = 1$$

$$R_f = \mathfrak{R} - \{0\} \text{ atau } R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Contoh

2. Carilah domain dan range dari fungsi :

$$f(x) = \frac{x+2}{3x+1}$$

a. Mencari domain

Syarat agar fungsi tersebut terdefinisi adalah :

$$3x+1 \neq 0$$

$$x \neq -\frac{1}{3}$$

$$\text{Sehingga } D_f = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

Contoh

b. Range

$$f(x) = y = \frac{x+2}{3x+1}$$

$$3xy + y = x + 2$$

$$3xy - x = 2 - y$$

$$x(3y-1) = 2-y$$

$$x = \frac{2-y}{3y-1}$$

Syarat fungsi tersebut terdefinisi,

$$3y - 1 \neq 0$$

$$y \neq \frac{1}{3}$$

Jadi

$$R_f = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$$

$$\text{Atau } \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

Contoh

3. Carilah domain dan range dari fungsi :

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$$

a. Mencari domain

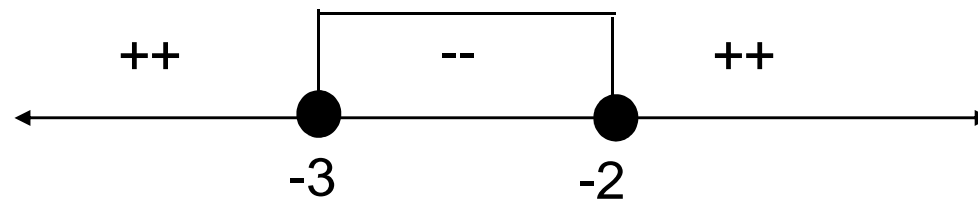
Syarat agar fungsi tersebut terdefinisi adalah :

$$-x^2 - 5x - 6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+3) \leq 0$$

$$\text{TP} = -2, -3$$



$$\text{Jadi } D_f = [-3, -2]$$

Contoh

b. Mencari Range

$$f(x) = y = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$$

$$y^2 = -x^2 - 5x - 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + (y^2 + 6) = 0$$

Agar $x \in \Re$, maka $D \geq 0$

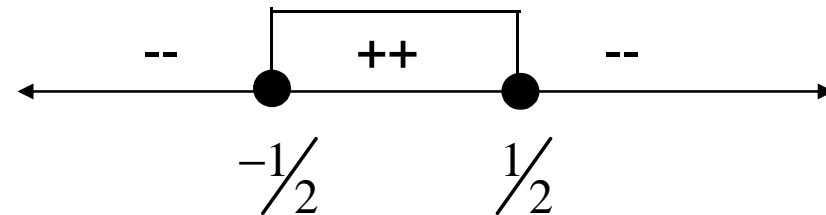
$$\Leftrightarrow 25 - 4 \cdot 1 (y^2 + 6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 25 - 4y^2 - 24 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2y)(1 - 2y) \geq 0$$

$$TP = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$



$$\text{Jadi, } R_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap [0, \infty)$$

$$= \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Karena
 $y \geq 0$

Soal Latihan

Tentukan domain dan range dari fungsi di bawah ini

1 $f(x) = 3 + \sqrt{2 - 4x}$

6 $f(x) = |x|(x + 2)$

2 $f(x) = \sqrt{\frac{x(x-3)}{x-1}}$

7 $f(x) = \sqrt{3 - |x-2|}$

3 $f(x) = 3x - \frac{1}{x} + 2$

8. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

9. $f(x) = 3 + \sqrt{x-4}$

4 $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

5 $f(x) = \sqrt{4-x}$

10. $f(x) = 3 + \sqrt{4-x^2}$

Macam-macam Fungsi

Macam-macam fungsi :

1. Fungsi polinom

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

-Fungsi konstan,

$$f(x) = a_0$$

-Fungsi linier,

$$f(x) = a_0 + a_1x$$

-Fungsi kuadrat,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Macam-macam Fungsi

2. Fungsi Rasional

Bentuk umum :

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad p(x), q(x) = \text{fungsi polinom dengan } q(x) \neq 0$$

contoh :

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^3 + x^2 + 1}$$

3. Fungsi harga/nilai mutlak

Fungsi yang mengandung harga mutlak, contoh :

$$f(x) = 3|x-1| + 2|x-2|$$

Macam-macam Fungsi

4. Fungsi bilangan bulat terbesar/ floor

$\lfloor x \rfloor$ = Bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$$

$$\lfloor 5 \rfloor = 5 \quad \lfloor -1,2 \rfloor = -2$$

$$\lfloor 3,2 \rfloor = 3$$

5. Fungsi Genap

Disebut fungsi genap jika $f(-x) = f(x)$ dan grafiknya simetris terhadap sumbu y

Macam-macam Fungsi

Contoh :

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = \cos(x)$$

6. Fungsi Ganjil

Disebut fungsi ganjil jika $f(-x) = -f(x)$ dan grafiknya simetris terhadap titik asal, contoh :

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = x^3$$

Macam-macam Fungsi

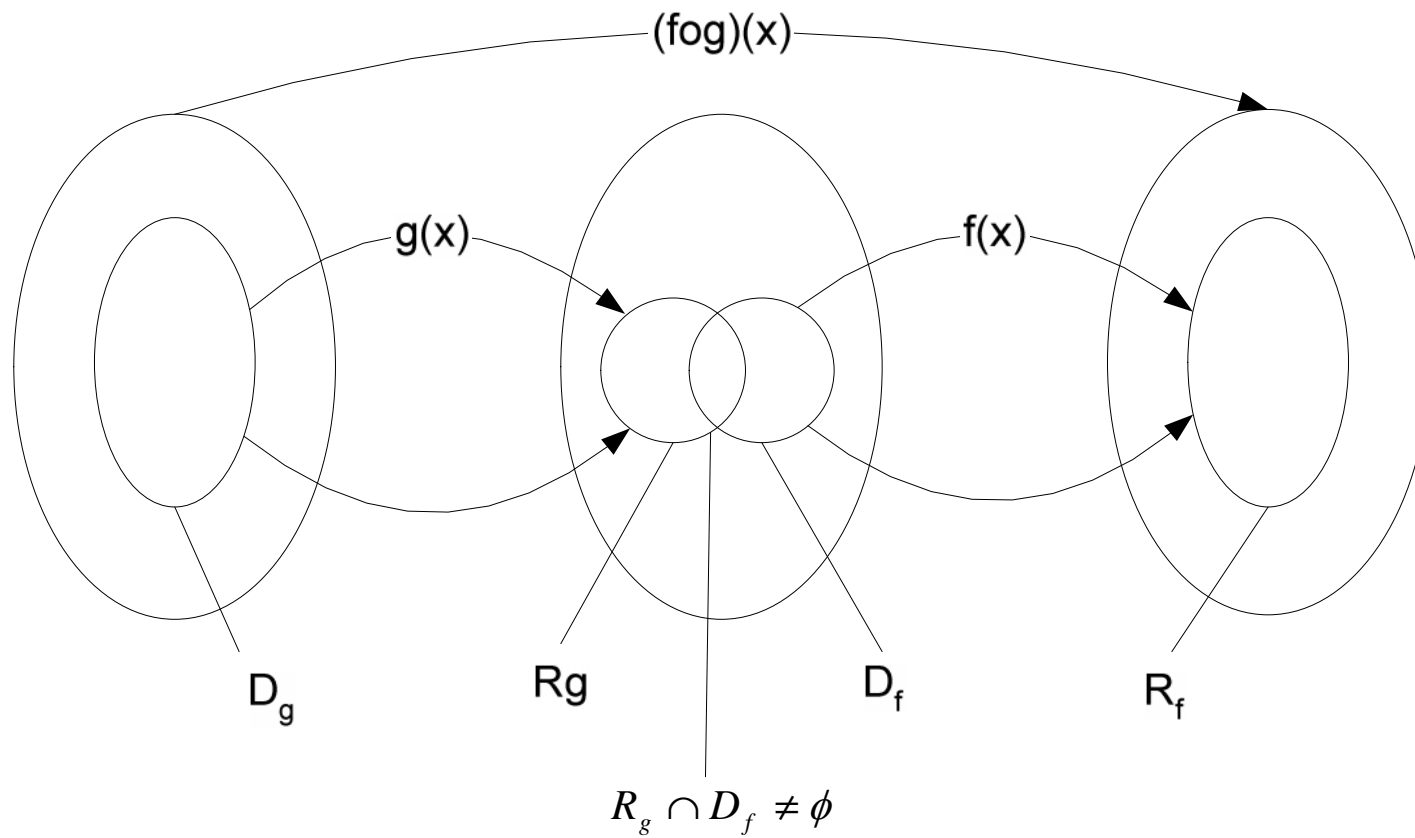
7. Fungsi Komposisi

Diberikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, komposisi fungsi antara $f(x)$ dan $g(x)$ ditulis $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Domain dari $(f \circ g)(x)$ adalah himpunan semua bilangan x dengan domain $g(x)$ sehingga $g(x)$ di dalam D_f .

Syarat agar dua fungsi bisa dikomposisikan, maka harus terpenuhi $R_g \cap D_f \neq \emptyset$.

Fungsi Komposisi

Hal tersebut dapat diilustrasikan sebagai berikut :



Fungsi Komposisi

Dengan cara yang sama, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Syarat agar dua fungsi bisa dikomposisikan, maka harus

terpenuhi $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

Domain dari komposisi fungsi f dan g didefinisikan sbb :

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

Sedangkan definisi dari Range komposisi fungsi komposisi

$$R_{g \circ f} = \{g(t) \in R_g \mid t \in R_f\} \quad \text{atau} \quad R_{g \circ f} = \{y \in R_g \mid y = g(t), t \in R_f\}$$

$$R_{f \circ g} = \{f(t) \in R_f \mid t \in R_g\} \quad \text{atau} \quad R_{f \circ g} = \{y \in R_f \mid y = f(t), t \in R_g\}$$

Fungsi Komposisi

Sifat-sifat fungsi komposisi :

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

Contoh :

1. Jika diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = 1 - x^2$ Tentukan

$g \circ f$ dan $f \circ g$ beserta domain dan range-nya!

$$D_f = [0, \infty) \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$R_f = [0, \infty) \quad R_g = (-\infty, 1]$$

Contoh

Karena $R_f \cap D_g = [0, \infty) \neq \emptyset$, maka fungsi $g \circ f$ terdefinisi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 1 - x$$

a. Mencari Domain $g \circ f$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathfrak{R}\} \\ &= \{x \geq 0 \mid -\infty < \sqrt{x} < \infty\} \end{aligned}$$

Contoh

$$\begin{aligned} &= \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \geq 0\} \\ &= \{x \geq 0 \mid x \geq 0\} \\ &= x \in [0, \infty) \cap [0, \infty) \\ &= x \in [0, \infty) \end{aligned}$$

b. Mencari Range $g \circ f$

$$\begin{aligned} R_{g \circ f} &= \{y \in R_g \mid y = g(t), t \in R_f\} \\ R_{g \circ f} &= \{y \in (-\infty, 1] \mid y = 1 - t^2, t \in [0, \infty)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } R_{g \circ f} &= y \in (-\infty, 1] \cap (-\infty, 1] \\ &= y \in (-\infty, 1] \end{aligned}$$

Contoh

Karena $R_g \cap D_f = (-\infty, 1] \cap [0, \infty) = [0, 1] \neq \emptyset$, maka fungsi $f \circ g$ terdefinisi dengan

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2}$$

c. Domain $f \circ g$

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \in [0, \infty)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} \\ &= \mathbb{R} \cap [-1, 1] \\ &= [-1, 1] \end{aligned}$$

Contoh

d. Range $f \circ g$

$$\begin{aligned} R_{f \circ g} &= \{y \in R_f \mid y = f(t), t \in R_g\} \\ &= \{y \in [0, \infty) \mid y = \sqrt{t}, t \in (-\infty, 1]\} \\ &= \{y \geq 0 \mid y = \sqrt{t}, 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \{y \geq 0 \mid 0 \leq y \leq 1\} \\ &= [0, \infty) \cap [0, 1] \\ &= [0, 1] \end{aligned}$$

Contoh

2. Jika diketahui fungsi

$$f(x) = x|x| \quad g(x) = x - 1$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R} \quad R_g = \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R}$$

Tentukan $g \circ f$ beserta domain dan range-nya!

$R_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \emptyset$, sehingga $g \circ f$ terdefinisi

a. Domain $g \circ f$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x|x| \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Contoh

b. Range $g \circ f$

$$\begin{aligned} R_{g \circ f} &= \{y \in R_g \mid y = g(t), t \in R_f\} \\ &= \{y \in \mathfrak{R} \mid y = t - 1, t \in \mathfrak{R}\} \\ &= \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R} \end{aligned}$$

Soal Latihan

Apakah $f \circ g$ terdefinisi? Bila ya, tentukan rumusan dari $f \circ g$ dan domain dari $f \circ g$.

- 1 $f(x) = \sqrt{4-x}$ $g(x) = |x|$
- 2 $f(x) = 3 + \sqrt{2-4x}$ $g(x) = 3x - \frac{1}{x} + 2$
- 3 $f(x) = \sqrt{\frac{x(x-3)}{x-1}}$ $g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
- 4 $f(x) = |x|(x+2)$ $g(x) = \sqrt{3-|x-2|}$
- 5 $f(x) = x^2 - 5x + 6$ $g(x) = 3 + \sqrt{x-4}$

Grafik dari fungsi

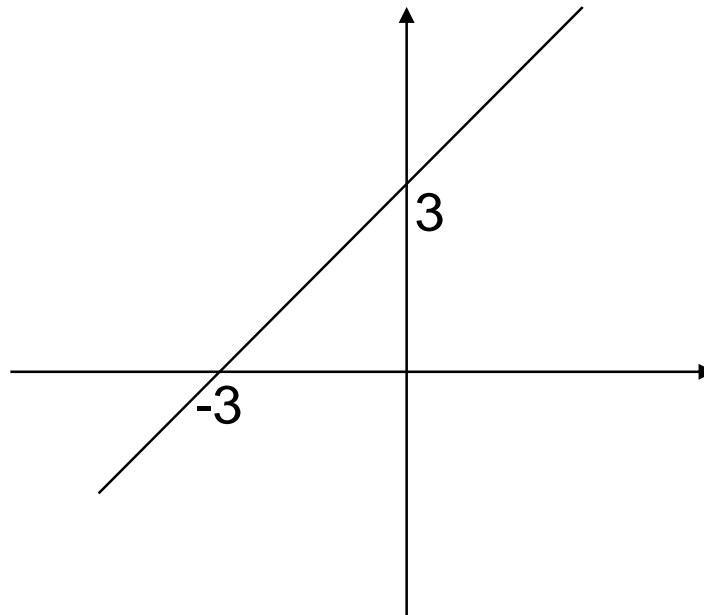
1. Garis Lurus

$$y = mx + c$$

persamaan garis lurus yang melewati $(0, c)$

contoh :

$$y = x + 3$$



Garis Lurus

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

Persamaan garis lurus melalui (x_1, y_1)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Persamaan garis lurus melalui (x_1, y_1) & (x_2, y_2)

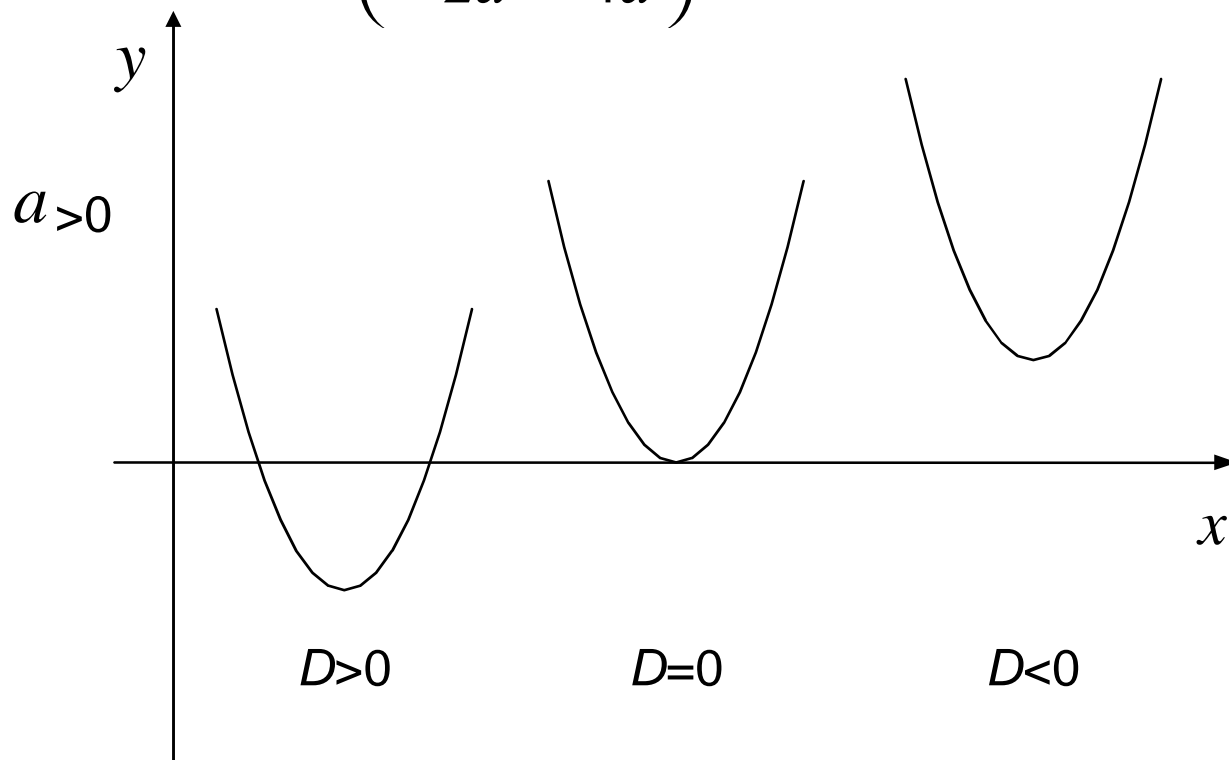
2. Grafik fungsi kuadrat (parabola)

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{Diskriminan} \rightarrow D = b^2 - 4ac$$

Grafik Fungsi Kuadrat

Titik puncak = $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$



Grafik Fungsi Kuadrat

Contoh :

Gambarlah grafik fungsi $y = x^2 + x + 1$

$a = 1$ jadi $a > 0 \rightarrow$ grafik menghadap ke atas

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= 1^2 - 4$$

$$= -3 < 0 \rightarrow \text{tidak menyinggung sumbu } x$$

Grafik Fungsi Kuadrat

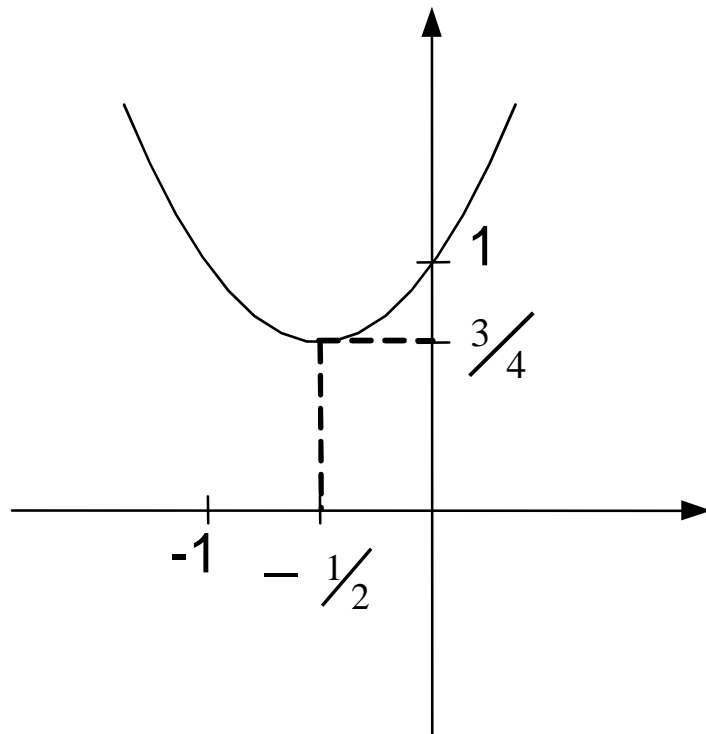
- Titik potong dengan sumbu koordinat
 - Karena $D < 0$, maka titik potong dengan sumbu x tidak ada
 - Titik potong dengan sumbu y
 $x = 0 \rightarrow y = 1$
dengan demikian grafik melalui $(0,1)$

- Titik puncak = $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a} \right)$
 $= \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right)$

Grafik Fungsi Kuadrat

Gambar grafik fungsi

$$y = x^2 + x + 1$$



Untuk persamaan kuadrat

$$x = ay^2 + by + c$$

$$\text{Titik puncak} = \left(-\frac{D}{4a}, -\frac{b}{2a} \right)$$

$$\text{Sumbu simetri} = -\frac{b}{2a}$$

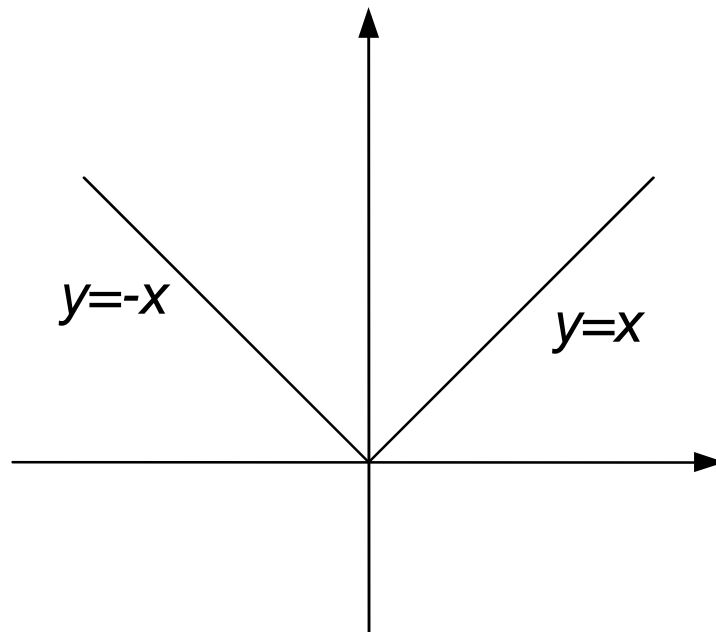
Grafik Fungsi Majemuk

3. Grafik Fungsi Majemuk

Contoh :

1. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = |x|$

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

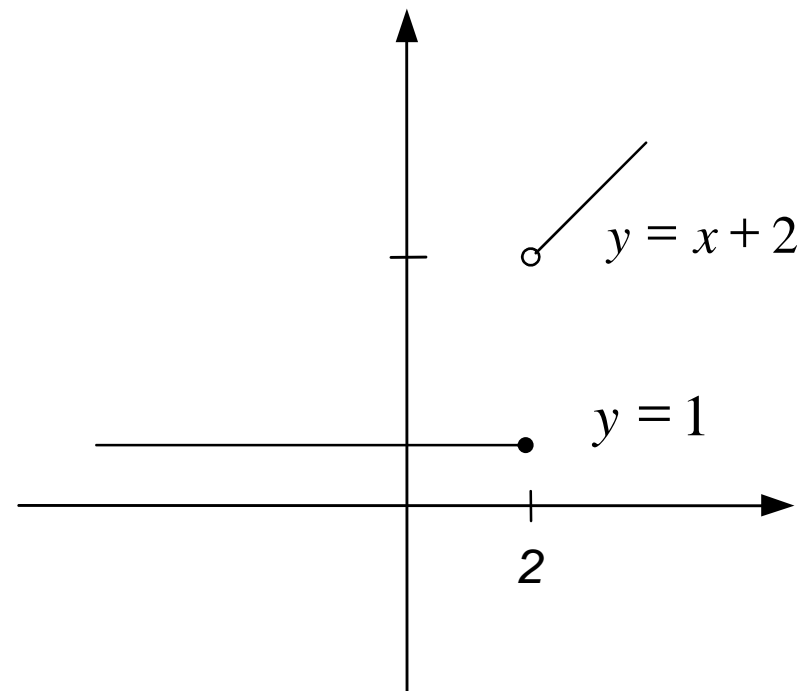


Grafik Fungsi Majemuk

2. Gambarkan grafik fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$$

Grafiknya terdiri dari 2 bagian, yaitu garis $y = 1$ untuk $x \leq 2$ dan garis $y = x + 2$ untuk $x > 2$



Grafik Fungsi Majemuk

3. Gambarkan grafik dari fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$f(x)$ terdefinisi untuk setiap x kecuali 2, sehingga domain dari $f(x)$ adalah semua bilangan riil kecuali 2

Fungsi $f(x)$ dapat diuraikan sebagai berikut :

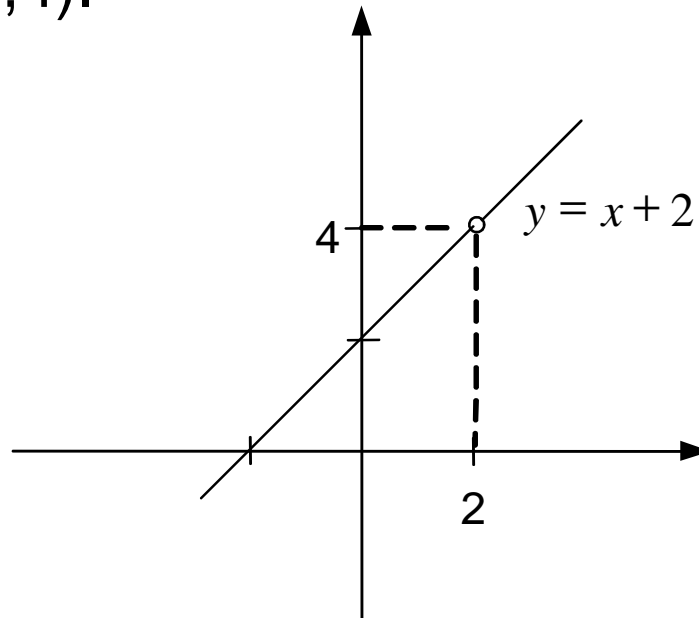
$$f(x) = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)}$$

Grafik Fungsi Majemuk

atau $f(x) = x + 2$, jika $x \neq 2$

Range dari $f(x)$ adalah semua bilangan riil kecuali 4.

Jadi grafiknya terdiri dari semua titik pada garis $y = x + 2$ kecuali titik $(2, 4)$.



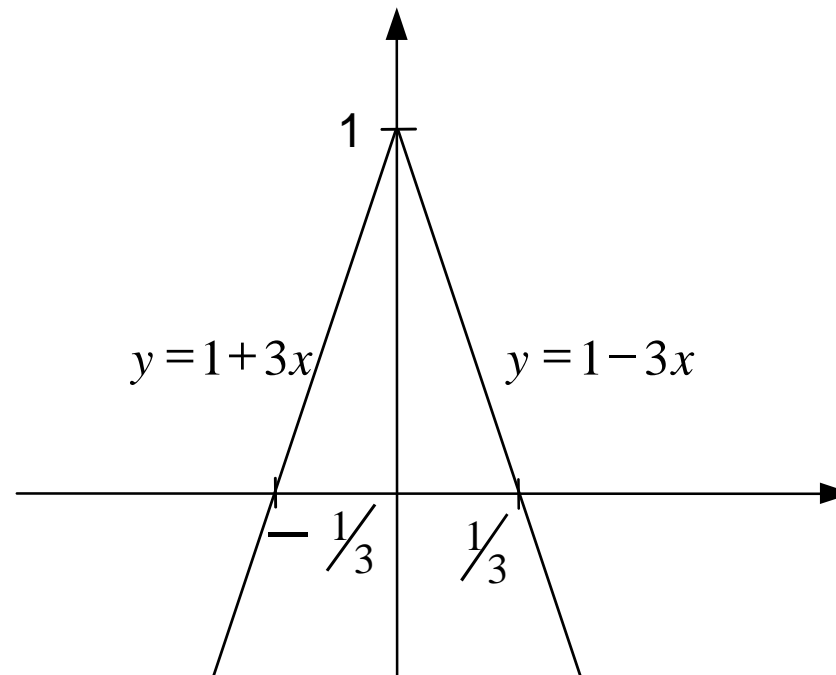
Grafik Fungsi Majemuk

3. Gambarkan grafik dari fungsi

$$f(x) = 1 - 3|x|$$

Kita definisikan :

$$1 - 3|x| = \begin{cases} 1 - 3x & x \geq 0 \\ 1 + 3x & x < 0 \end{cases}$$



Translasi

Untuk fungsi yang dinyatakan sebagai $y = f(x)$, $h > 0$ $a > 0$

$$y = f(x - a)$$

→ grafik $y = f(x)$ mengalami pergeseran sejauh a ke kanan

$$y = f(x + a)$$

→ grafik $y = f(x)$ mengalami pergeseran sejauh a ke kiri

$$y = f(x) + h$$

→ grafik $y = f(x)$ mengalami pergeseran sejauh h ke atas

$$y = f(x) - h$$

→ grafik $y = f(x)$ mengalami pergeseran sejauh h ke bawah

Translasi

Untuk fungsi yang dinyatakan sebagai $x = f(y)$, $a > 0$

$$x = f(y - a)$$

→ grafik $x = f(y)$ mengalami pergeseran sejauh a ke atas

$$x = f(y + a)$$

→ grafik $x = f(y)$ mengalami pergeseran sejauh a ke bawah

$$x = f(y) + a$$

→ grafik $x = f(y)$ mengalami pergeseran sejauh a ke kanan

$$x = f(y) - a$$

→ grafik $x = f(y)$ mengalami pergeseran sejauh a ke kiri

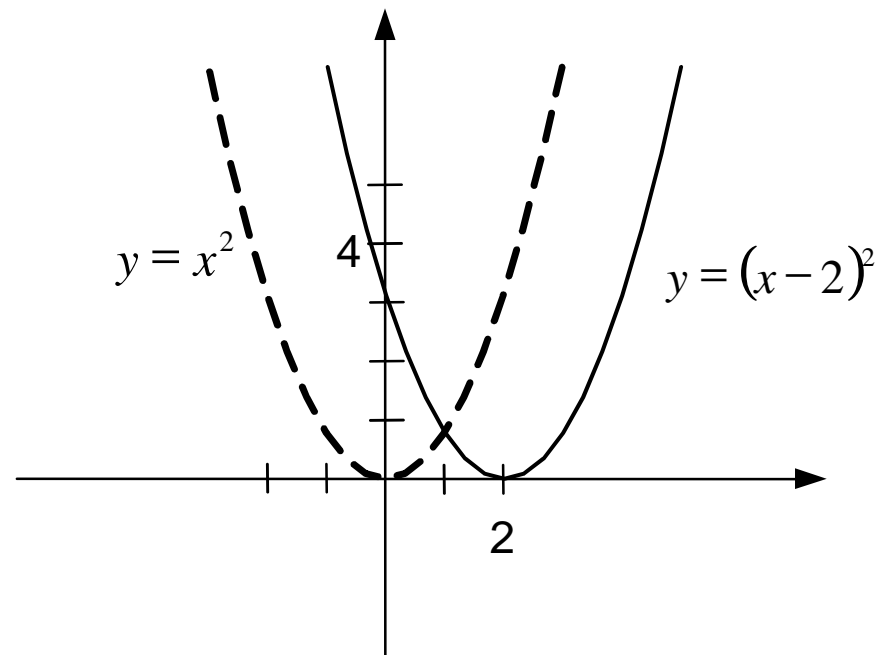
Contoh Translasi

1. Gambarkan grafik dari fungsi

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 4x + 5 \\&= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 5 \\&= (x - 2)^2 + 1\end{aligned}$$

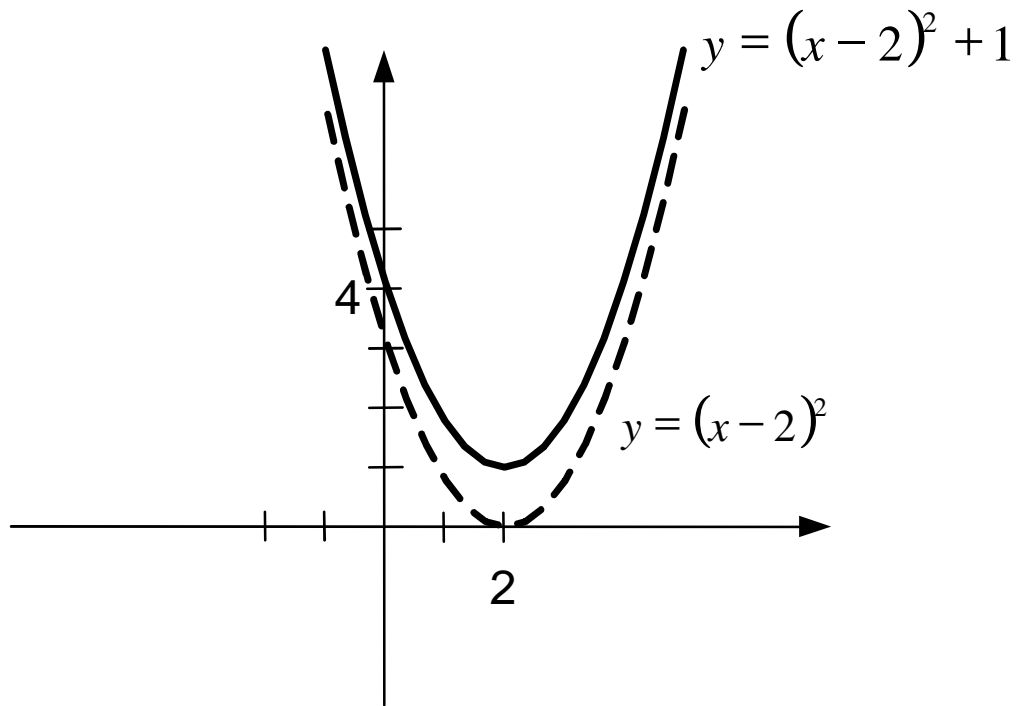
$$y = (x - 2)^2$$

→ $y = x^2$ digeser sejauh
2 ke kanan



Contoh Translasi

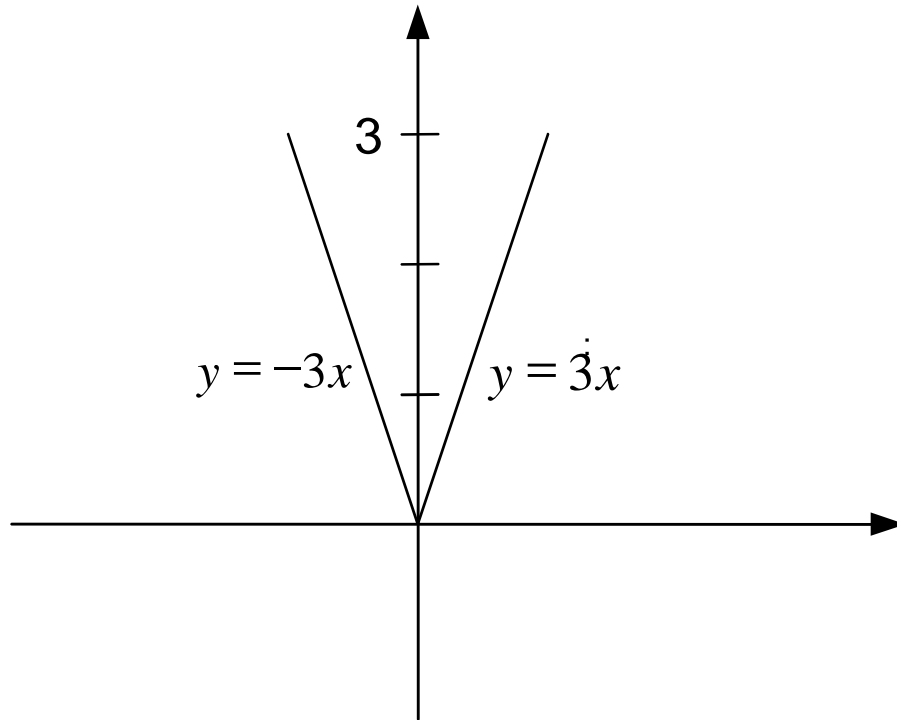
Kemudian $y = (x - 2)^2$ digeser sejauh 1 ke atas
maka akan terbentuk $y = (x - 2)^2 + 1$



Contoh Translasi

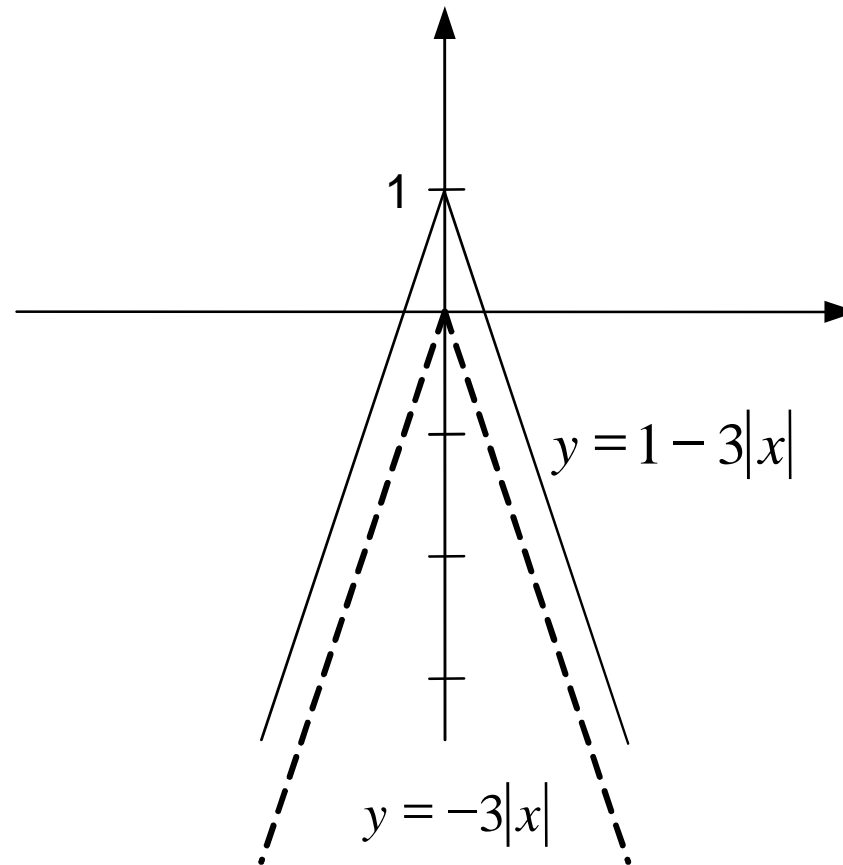
2. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = 1 - 3|x|$

Kita lihat dahulu grafik $y = 3|x|$



Contoh Translasi

Grafik $y = 1 - 3|x|$ dapat
dipandang sebagai grafik
 $y = -3|x|$ yang digeser
ke atas sejauh 1 satuan



Soal Latihan

Tentukan domain dan range dari fungsi di bawah ini

1 $f(x) = 3 + \sqrt{2 - 4x}$

3 $f(x) = 3x - \frac{1}{x} + 2$

2 $f(x) = \sqrt{\frac{x(x-3)}{x-1}}$

4 $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

5 Diketahui $f(x) = \sqrt{4 - x}$ $g(x) = |x|$

Apakah $f \circ g$ terdefinisi? Bila ya, tentukan rumusan dari $f \circ g$ dan domain dari $f \circ g$.

Gambarkan grafik dari fungsi di bawah ini

6 $f(x) = |x|(x + 2)$

7 $f(x) = \sqrt{3 - |x - 2|}$

8. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

9. $f(x) = 3 + \sqrt{x - 4}$