Bab 1

MATRIKS DAN OPERASINYA

Memahami matriks dan operasinya merupakan langkah awal dalam memahami buku ini. Beberapa masalah real dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Masalah tersebut antara lain : grafika dan citra, *chanel assignment* pada telekomunikasi, rantai markov, *Operation Research*, dan lain-lain. Pada bab ini, selain menjelaskan tentang matriks dan operasi dasar pada matriks, juga akan memaparkan tentang operasi baris elementer sebagai alat analisa yang akan terus digunakan menelaah dalam buku ini.

1.1 MATRIKS DAN JENISNYA

Matriks merupakan kumpulan bilangan yang berbentuk segi empat yang tersusun dalam baris dan kolom.

Contoh 1.1 :

Notasi suatu matriks dalam buku ini dituliskan dalam bentuk :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

a_{ij} untuk setiap i = 1, 2,…, m dan j = 1, 2,…, n dinamakan **unsur/entri/elemen** matriks yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j. **Ukuran** (**orde**) suatu matriks merupakan jumlah baris kali jumlah kolom. Jadi, A pada Contoh 1.1 merupakan matriks berukuran m x n. Jika semua unsurnya matriks bernilai nol maka matriks tersebut dinamakan matriks nol. Misalkan A dan B adalah matriks berukuran sama, dapat dikatakan bahwa A = B, jika unsur-unsur matriks yang seletak pada kedua matriks tersebut adalah sama.

Contoh 1.2 :

Misalkan matriks A dan B masing masing erukuran 2x3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \\ \mathrm{b}_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Jika $a_{ij} = b_{ij}$, untuk setiap i = 1, 2 dan j = 1, 2, 3 maka A = B.

Ada beberapa jenis matriks yang perlu diketahui, sehingga diharapkan akan menjadi dasar untuk pemahaman yang lebih lanjut dalam mempelajari buku ini.

Jenis–jenis matriks tersebut meliputi :

1. Matriks bujur sangkar (persegi)

   Matriks bujur sangkar merupakan matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya adalah sama, dengan kata lain ukuran dari matriks bujur sangkar adalah n x n.

   Contoh 1.3 :

   $$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   B adalah matriks bujur sangkar berukuran 3 x 3.

2. Matriks diagonal

   Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar dimana unsur selain unsur diagonalnya adalah 0. Jika $i = j$ maka a_{ij} dinamakan **unsur diagonal**. Sementara itu, Jika setiap unsur diagonal pada matriks diagonal sama dengan 1 maka matriks tersebut dinamakan **matriks identitas** (**matriks satuan**)

Contoh 1.4 :

Berikut ini adalah contoh matriks diagonal dan matriks identitas :

(a) Matriks diagonal 3x3 ,

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Matriks identitas 3x3 ,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Matriks segitiga

   Ada dua macam matriks segitiga, yaitu : matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang semua unsur dibawah unsur diagonalnya bernilai 0, sedangkan matriks segitiga bawah adlah matriks bujur sangkar yang semua unsur diatas unsur diagonalnya bernilai 0.

Contoh 1.5 :

Matriks dibawah ini merupakan matriks segitiga :

(a) Matriks segitiga atas,

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Matriks segitiga bawah,

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Matrik transpos A (notasi, A^t)
   Matriks transpos diperoleh dengan mengubah baris matriks A menjadi kolom matriks pada matriks A^t
   Contoh 1. 6 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ maka } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Matriks simetri .
   Misalkan A merupakan suatu matriks bujur sangkar, maka A dinamakan matriks simetri jika memenuhi hubungan :

$$A = A^t \tag{1.2}$$

Contoh 1.7 :

Matriks B dibawah ini merupakan matriks simetri

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

1.2 OPERASI MATRIKS

Ada beberapa operasi matriks yang perlu diketahui, yaitu penjumlahan antara dua matriks, perkalian antar skalar dan matriks, perkalian antar matriks, dan operasi baris (operasi yang dikenakan pada unsur-unsur baris dalam suatu matriks). Berikut ini adalah penjelasan dari beberapa operasi yang telah disebutkan di atas.

1. Penjumlahan Matriks

   Agar dua buah matriks dapat dijumlahkan, maka syarat yang harus dipenuhi oleh keduanya adalah ukuran kedua matriks tersebut harus sama. Penjumlahan dua buah matriks akan menghasilkan sebuah matriks dengan ukuran yang sama dengan kedua matriks yang dijumlahkan, dan setiap unsur didalamnya merupakan hasil penjumlahan dari unsur yang seletak pada kedua martriks
   tersebut.

   Contoh 1.8 :

   Penjumlahan dua matriks berukuran 2 x 2 adalah sebagai berikut :

   (a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

2. Perkalian Matriks

   a. Perkalian suatu matriks dengan skalar

      Suatu matriks yang dikalikan dengan skalar akan menghasilkan matriks dengan ukuran yang sama tetapi setiap unsur pada matriks dikalikan dengan skalar tersebut.

      Contoh 1.9 :

      Misalkan $k \in$ Bilangan Riil dan $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

      maka

      $k \times A = k\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kp & kq \\ kr & ks \end{pmatrix}$

b. Perkalian suatu matriks dengan matriks lain
   Misalkan matriks A_{mxn} dan B_{pxq}, maka :
   - A x B bisa dilakukan jika $n = p$ dan hasilnya berukuran m x q
   - B x A bisa dilakukan jika $q = m$ dan hasilnya berukuran p x n

Contoh 1.10 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{2x3} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} p & s \\ q & t \\ r & u \end{pmatrix}_{3x2}$$

maka

$$A \text{ x } B = \begin{pmatrix} ap + bq + cr & as + bt + cu \\ dp + eq + fr & ds + et + fu \end{pmatrix}_{2x2}$$

Perhatikan bahwa unsur baris ke-2 kolom ke-1 dari AB merupakan jumlah dari hasil kali unsur-unsur pada baris ke-2 matriks A dengan unsur-unsur pada kolom ke-1 matriks B.

Misalkan A, B, C adalah matriks berukuran sama dan α, β merupakan unsur bilangan Riil, maka operasi matriks memenuhi beberapa berikut :

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
4. $(\alpha + \beta) (A) = \alpha A + \beta A$

Khusus untuk perkalian antara dua matriks, jika A dan B merupakan matriks bujursangkar, maka belum tentu $AB = BA$ (tidak berlaku sifat komutatif). Selain kedua operasi diatas, ada juga operasi pada matriks yang dikenakan pada setiap baris pada matriks tersebut. Opersai yang demikian dinamakan Operasi Baris Elementer (OBE).

1.3 OPERASI BARIS ELEMENTER

Operasi baris elementer (OBE) merupakan operasi aritmatika (penjumlahan dan perkalian) yang dikenakan pada setiap unsur dalam suatu baris pada sebuah matriks.

Operasi baris elementer meliputi :

1. Pertukaran Baris
2. Perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol
3. Penjumlahan hasil perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol (seperti butir 2) dengan baris yang lain.

Contoh 1.11 :

(a) $$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b_1 \leftrightarrow b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Baris pertama (b_1) ditukar dengan baris ke-2 (b_2)

(b) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Perkalian (–2) dengan b_1 lalu tambahkan pada b_3

$$-2b_1 + b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Sebelum memahami lebih jauh tentang operasi baris elementer, ada beberapa definisi yang perlu diketahui, perhatikan matriks berikut :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Bilangan 1 (pada baris baris pertama kolom pertama) dinamakan **satu utama**.
- Bilangan 2 pada baris ke-2 dinamakan **unsur pertama tak nol** pada baris ke-2.
- Baris pertama dan ke-2 dinamakan **baris tak nol**, karena pada kedua baris tersebut memuat unsur tak nol.
- Baris ke-3 dinamakan **baris nol**, karena setiap unsur pada baris ke-3 adalah nol.

Tujuan dilakukan operasi baris elementer pada suatu matriks adalah menghasilkan matriks yang memenuhi beberapa sifat berikut :

1. Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1 (membuat satu utama).
2. Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat 1 utama yang lebih ke kanan.
3. Jika ada baris nol (baris yang semua unsurnya nol), maka ia diletakkan pada baris paling bawah.
4. Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah nol.

Jika butir 1, 2, dan 3 dipenuhi, maka matriks hasil OBE dinamakan berbentuk *esilon baris* (prosesnya dinamakan *eliminasi Gauss*). Sementara itu, jika semua poin dipenuhi matriks dinamakan berbentuk *esilon baris tereduksi* (prosesnya dinamakan *eliminasi Gauss-Jordan*).

Contoh 1.12 :

Tentukan matriks esilon baris tereduksi dari matriks berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$b_2 \leftrightarrow b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$-2b_2 + b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-b_3 + b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b_2 + b_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.4 Matriks Invers

Misalkan, A, B adalah matriks bujur sangkar yang berukuran sama dan I adalah matriks identitas. Jika $A \cdot B = I$

maka B dinamakan invers dari matriks A (sebaliknya, A merupakan invers dari matriks B). Notasi bahwa B merupakan matriks invers dari A adalah $B = A^{-1}$, dan sebaliknya $A = B^{-1}$.

Cara dalam penentuan matriks invers dari suatu matriks dapat dilakukan melalui OBE, yaitu :

$$(\, A \mid I \,) \sim (\, I \mid A^{-1} \,) \tag{1.3}$$

Matriks A pada ruas kiri dikenakan operasi baris elementer secara bersamaan dengan matriks identitas pada ruas kanan sehingga matriks A menjadi matriks identitas, sementara itu matriks identitas menjadi suatu matriks invers dari A. Jika pada proses operasi baris elementer ditemukan baris nol pada matriks ruas kiri maka A dikatakan tidak mempunyai invers. Matriks yang tidak mempunyai invers dinamakan matriks singular.

Beberapa sifat matriks invers yang perlu diketahui adalah :

i. $(A^{-1})^{-1} = A$

ii. Jika A, B dapat dibalik atau memiliki invers maka
$(A \,.\, B)^{-1} = B^{-1} \,.\, A^{-1}$

iii. Misal $k \in \mathrm{R}$, $k \neq 0$ maka $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k} \,.\, A^{-1}$

iv. Akibat dari (ii) maka $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Berikut ini adalah contoh menetukan invers dari suatu matriks bujur sangkar.

Contoh 1.13 :

Tentukan matriks invers (jika ada) dari matriks

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Jadi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Untuk memeriksa apakah A^{-1} sudah benar atau belum, maka dapat dilakukan dengan mengalikan $A \cdot A^{-1} = I$.

Perhatikan bahwa :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

maka

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= I_{3x3}$ (terbukti)

Latihan Bab 1

Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ dan}$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan (untuk no 1 – 5) matriks hasil operasi berikut ini :

1. AB
2. $3CD$
3. $(AB)C$
4. $(4B)C + 2C$
5. $D + E^2$ (dimana $E^2 = EE$)
6. Tentukan matriks bentuk eselon baris tereduksi dari matriks *A, B, C, D, dan E*
7. Tentukan matriks invers dari D dan E (jika ada)