Bab 5

RUANG VEKTOR

Pada bab sebelumnya, kita telah membahas tentang vektor di bidang dan diruang. Selanjutnya, kita akan mencoba memahami pengertian ruang vektor secara umum menurut definisi aljabar. Ini diperlukan sebagai landasan dalam memahami tentang basis dan ruang hasil kali dalam yang banyak dipakai dalam beberapa metode optimasi, sistem kontrol, operation research, dan lain-lain.

5.1 RUANG VEKTOR UMUM

Misalkan $\bar{u}$, $\bar{v}$, dan $\bar{w}$ adalah unsur pada ruang *V* dan *k, l* merupakan skalar bilangan Riil, maka *V* dinamakan ruang vektor jika memenuhi syarat berikut ini :

1. Jika $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ adalah vektor-vektor pada *V* maka $\bar{u}$ + $\bar{v}$ berada pada *V* juga.
2. $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$
3. $\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})=(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}$
4. Terdapat $\bar{0}$ di V sehingga $\bar{u}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{u}=\bar{u}$ untuk setiap vektor $\bar{u}$ di *V*
5. Untuk setiap $\bar{u}$ di *V*, terdapat – $\bar{u}$ di *V* yang dinamakan negatif $\bar{u}$ sehingga $\bar{u}+(-\bar{u})=(-\bar{u})+\bar{u}=\bar{0}$
6. Jika *k* adalah sebarang skalar dan $\bar{u}$ berada di *V*, maka $k\bar{u}$ berada di *V*.
7. $k(\bar{u}+\bar{v})=k\bar{u}+k\bar{v}$
8. $(k+l)\,\bar{u}=k\bar{u}+l\bar{u}$
9. $k(l\,\bar{u})=l(k\,\bar{u})=(kl)\,\bar{u}$
10. Terdapat unsur 1 sebagai unsur identitas perkalian sehingga $1.\bar{u}=\bar{u}$

Contoh 5.1 :

Berikut adalah beberapa contoh ruang vektor :

1. Himpunan vektor Euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar). Notasinya R^n
2. Himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar.
   Bentuk umum polinom orde n
   $p_n(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$
   $q_n(x) = b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n$
   Operasi standar pada polinom orde n
   $p_n(x)+q_n(x) = a_0 + b_0 + a_1x + b_1x + \ldots + a_nx^n + b_nx^n$
   $kp_n = ka_0 + ka_1x + \ldots + ka_nx^n$
   Notasi untuk ruang vektor ini adalah P_n
3. Himpunan matriks berukuran m x n dengan operasi standar (penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar), ruang vektor ini sering dinotasikan dengan M_{mxn}

Ruang n–Euclides

Secara geometri vektor-vektor di R^4 dan seterusnya belum bisa digambarkan, tapi operasi-operasi vektor masih sama seperti pada vektor-vektor di R^2 dan R^3. Orang yang pertama kali mempelajari vektor-vektor di R^n adalah Euclides sehingga vektor-vektor yang berada di ruang R^n dikenal sebagai vektor Eucides sedangkan ruang vektornya disebuat ruang n–Euclides. Contoh vektor di ruang n–Euclides adalah $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Seperti halnya di R^2 dan R^3 , dua vektor $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ pada R^n dikatakan sama jika $u_1 = v_1$, $u_3 = v_3$, … , $u_n = v_n$.

Beberapa sifat yang berlaku pada ruang vektor Euclides adalah :

1. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
2. $(\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$
3. $\bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$

4. $\overline{u}+(-\overline{u})=\overline{0}$, yakni $\overline{u}-\overline{u}=\overline{0}$
5. $k\,(l\,\overline{u})=l\,(k\,\overline{u})=(kl)\,\overline{u}$
6. $k\,(\overline{u}+\overline{v})=k\overline{u}+k\overline{v}$
7. $(k+l\,)\,\overline{u}=k\overline{u}+l\overline{u}$
8. $1.\overline{u}=\overline{u}$

Sebelum melangkah lebih jauh dalam beberpa pengertian ruang Euclides, berikut adalah beberapa operasi standar pada ruang vektor Euclides, yaitu :

- Penjumlahan

  $\overline{u}+\overline{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,...,u_n+v_n)$
- Perkalian dengan skalar

  $k\overline{u}=(ku_1,ku_2,...,ku_n)$ k adalah sebarang skalar.
- Perkalian Titik (*Euclidean inner product*)

  $\overline{u}\bullet\overline{v}=u_1v_1+u_2v_2+...+u_nv_n$

Contoh 5.2 :

Diketahui $\overline{u}$ = (–1, 3, 5, 7) dan $\overline{v}$ = (5, –4, 7, –1)

Tentukan $\overline{u}\cdot\overline{v}$!

Jawab:

$\overline{u}\;.\;\overline{v}$ = (–1)(5) + (3)(–4) + (5)(7) + (7)(–1)

= –5 + (–12) + 35 + (– 7)

= 11

Panjang vektor dalam suatu ruang vektor Euclides didefinisikan oleh :

$$\|\overline{u}\|=(\overline{u}\bullet\overline{u})^{1/2}$$
$$=\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+...+u_n{}^2} \qquad (5.1)$$

Sementara itu, jarak antara dua vektor didefinisikan oleh :

$$d\,(\overline{u},\overline{v})=\|\,\overline{u}-\overline{v}\,\|$$
$$=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+...+(u_n-v_n)^2} \qquad (5.2)$$

Contoh 5.3 :

Diketahui $\bar{u} = (1, 1, 2, 3)$ dan $\bar{v} = (2, 2, 1, 1)$
Tentukan jarak antara $\bar{u}$ dan $\bar{v}$!

Jawab:

Dengan menggunakan definisi
$$\bar{u} - \bar{v} = (-1, -1, 1, 2)$$
maka jarak dua vektor tersebut adalah :
$$d(\bar{u}, \bar{v}) = ((-1)^2+(-1)^2+1^2+2^2)^{1/2}$$
$$= \sqrt{7}$$

5.2 SUBRUANG

Subhimpunan W dari sebuah ruang vektor V dinamakan **subruang** V jika W itu sendiri adalah ruang vektor yang tertutup terhadap operasi penambahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V. Dengan demikian, syarat agar W dikatakan sebagai subruang dari V adalah :

1. $W \neq \{\}$
2. $W \subseteq V$
3. Jika $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ berada pada W maka $\bar{u} + \bar{v}$ juga berada pada W
4. Jika $\bar{u}$ berada di W maka $k\bar{u}$ juga berada di W, dimana k adalah suatu skalar Riil.

Contoh 5.4 :

Tunjukan bahwa himpunan W yang berisi semua matriks orde 2x2 yang setiap unsur diagonalnya nol merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2x2

Jawab :

(i) Misal $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$. Jadi $W \neq \{\,\}$

(ii) Jelas bahwa $W \subseteq$ Matriks 2x2

(iii) Akan diperiksa apakah $A + B \in$ W

Ambil sembarang matriks A, B ∈ W

Tulis :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa $A + B \in$ W

(iv) Akan diperiksa apakah $kA \in W$

Untuk $k \in$ Riil maka

$$kA = \begin{pmatrix} 0 & ka_1 \\ ka_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Jadi W merupakan subruang dari ruang vector matriks 2x2

Contoh 5.5 :

Periksa apakah himpunan D yang berisi semua matriks orde 2x2 yang determinannya nol merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2x2

Jawab :

Ambil sembarang matriks A, B ∈ W

Pilih $a \neq b$:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, jelas bahwa *det* (A) = 0

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$, jelas bahwa *det* (A) = 0

Perhatikan bahwa :

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa *det* (A + B) = $a^2 - b^2 \neq 0$

Jadi D bukan merupakan subruang karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan

5.3 Basis dan Dimensi

Sebuah vektor $\bar{u}$ dinamakan **kombinasi linear** dari vektor – vektor $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, … , $\bar{v}_n$, jika vektor – vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ ... \ + k_n\bar{v}_n \qquad (5.3)$$

dimana $k_1, k_2, \ldots, k_n$ adalah skalar Riil.

Contoh 5.6 :

Misal $\bar{u}$ =(2, 4, 0), dan $\bar{v}$ = (1, –1, 3), adalah vektor-vektor di R^3.

Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor di atas !

a. $\bar{a}$ = (4, 2, 6)

b. $\bar{b}$ = (1, 5, 6)

c. $\bar{c}$ = (0, 0, 0)

Jawab:

a. Tulis $k_1\bar{u} + k_2\bar{v} = \bar{a}$, akan diperiksa apakah ada k_1, k_2, sehingga kesamaan tersebut dapat terpenuhi :

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ini dapat ditulis menjadi :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dengan OBE dapat kita peroleh:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dengan demikian $\bar{a}$ merupakan kombinasi linear dari vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ yang ditulis dalam bentuk :

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

b. Tulis :

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{b}$$

akan diperiksa apakah ada k_1, k_2, sehingga kesamaan tersebut dapat terpenuhi;

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ini dapat ditulis menjadi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dengan OBE dapat kita peroleh:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Baris terakhir pada matriks ini menunjukkan bahwa SPL tersebut adalah tidak konsisten(tidak mempunyaisolusi).

Jadi, tidak ada nilai k_1 dan k_2 yang memenuhi persamaan.

c. Dengan memilih $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$, maka dapat ditulis

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{c}$$

artinya vektor nol merupakan kombinasi linear dari vektor apapun. Ini berkorespondensi dengan pernyataan bahwa SPL homogen merupakan SPL yang konsisten (selalu punya solusi).

Sebelum memahami pengertian tentang basis suatu ruang vektor, terlebih dahulu harus dipahami tentang definisi membangun dan bebas linear.

Definisi membangun dan bebas linear

a. Himpunan vektor $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ dikatakan **membangun** suatu ruang vektor V jika setiap vektor pada ruang vektor V selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor – vektor di S.

Contoh 5.7 :

Tentukan apakah

$\bar{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\bar{v}_2 = (1, 0, 1)$, dan $\bar{v}_3 = (2, 1, 3)$

membangun R^3 !

Jawab :

Ambil sembarang vektor di R^3, misalkan $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

Akan diperiksa apakah $\bar{u}$ merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, dan $\bar{v}_3$.

Tulis :

$$\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Syarat agar dapat dikatakan bahwa $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, dan $\bar{v}_3$ membangun R^3 (dari definisi kombinasi linear) adalah SPL tersebut harus mempunyai solusi (konsisten). Dengan operasi baris elementer diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & u1 \\ 0 & -1 & -1 & u2 - u1 \\ 0 & 0 & 0 & u3 - u1 - u2 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa agar SPL itu konsisten, **haruslah** $u_3 - u_2 - u_1 = 0$. Padahal diawal vektor $\bar{u}$ adalah vektor sembarang (unsur – unsurnya bebas, tak bersyarat). Dengan demikian vektor – vektor $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, dan $\bar{v}_3$ **tidak membangun** R^3.

b. Misalkan $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ adalah himpunan vektor diruang vektor V, himpunan S dikatakan **bebas linear** (*linearly independent*), jika SPL homogen :

$$k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_1 + ... + k_n\bar{u}_n = \bar{0} \qquad (5.4)$$

hanya mempunyai satu solusi (tunggal), yakni

$$k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ \dots,\ k_n = 0$$

Jika solusinya lebih dari satu, artinya ada solusi $k_i \neq 0$ untuk suatu i, maka S kita namakan himpunan tak bebas linear (*linearly dependent*), ini dapat dikatakan bahwa himpunan S merupakan himpunan vektor yang bergantung linear.

Contoh 5.8 :

Diketahui $\bar{u} = (-1,\ 3,\ 2)$ dan $\bar{a} = (1,\ 1,\ -1)$

Apakah saling bebas linear di R^3

Jawab :

Tulis :

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{a} = \vec{0}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan operasi baris elementer dapat diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dengan demikian diperoleh solusi tunggal yaitu :

$k_1 = 0$, dan $k_2 = 0$.

Ini berarti ū dan ā adalah saling bebas linear.

Contoh 5.9 :

Misal :

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ di } R^3$$

Periksa apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear ?

Jawab :

Tulis :

$$\bar{0} = k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dengan operasi baris elementer dapat diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

k_1, k_2, k_3 merupakan solusi tak hingga banyak, artinya vektor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ adalah vektor-vektor yang bergantung linear.

Perhatikan bahwa jika kita ingin memeriksa sejumlah n vektor di R^n maka dapat dilakukan lebih cepat untuk memeriksa apakah himpunan vektor tersebut bebas linear atau tidak. Cara yang dilakukan adalah kumpulkan vektor – vektor tersebut dalam sebuah matriks sehingga vektor – vektor tadi merupakan vektor kolom pada matriks tersebut. Selanjutnya, cukup diperiksa determinan dari matriks tersebut. Jika determinan matriks tersebut tidak sama dengan nol maka himpunan vektor tersebut adalah bebas linear. Sebaliknya, jika determinan matriks tersebut sama dengan nol maka himpunan vektor tersebut adalah bergantung linear.

Jika V adalah sembarang ruang vektor dan $S = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor – vektor di V, maka S dinamakan basis bagi V jika kedua syarat berikut dipenuhi :

- S membangun V
- S bebas linear

Contoh 5.10 :

Tunjukan bahwa himpunan matriks berikut :

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

merupakan basis bagi matriks berukuran 2 x 2 ($M_{2 \times 2}$) !

Jawab :

Tulis kombinasi linear :

$$k_1\begin{bmatrix}3 & 6\\ 3 & -6\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0 & -8\\ -12 & -4\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{pmatrix}3k_1+k_4 & 6k_1-k_2-8k_3\\ 3k_1-k_2-12k_3-k_4 & -6k_1-4k_3+2k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

dengan menyamakan setiap unsur pada kedua matriks tersebut, diperoleh :

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -8 & 0\\ 3 & -1 & -12 & -1\\ -6 & 0 & -4 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\\ k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix} \qquad (5.5)$$

Perhatikan bahwa determinan matriks koefisiennya (MK) tidak sama dengan nol,

yaitu 48.

- Karena *det*(MK) $\neq$ 0 maka SPL (5.5) memiliki solusi untuk setiap *a, b, c, d.* Ini menunjukan bahwa M membangun M_{2x2}.
- Ketika $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0,$ SPL (*) merupakan SPL homogen. Karena *det*(MK) $\neq$ 0 maka SPL homogen tersebut memiliki solusi tunggal. Dengan demikian, ini menunjukan bahwa M bebas linear.

Karena M bebas linear dan membangun $M_{2\times 2}$ maka M merupakan basis bagi $M_{2\times 2}$.

Yang perlu diingat, basis untuk setiap ruang vektor adalah tidak tunggal. Jadi, suatu ruang vektor dapat mempunyai lebih dari satu basis. Sekedar contoh, untuk ruang vektor dari $M_{2\times 2}$, himpunan matriks :

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

juga merupakan basisnya.

Misalkan matriks :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Vektor kolom

Vektor baris

dengan melakukan OBE kita peroleh bahwa matriks A berkorespondensi dengan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan kolom-kolom pada matriks hasil OBE yang memiliki satu utama berseseuaian dengan matriks asal. ini berarti, bahwa matriks A tersebut mempunyai **basis ruang kolom** :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Sedangkan basis ruang baris diperoleh dengan cara, mentransposkanterlebih dahulu matriks A, lakukan OBE pada A^t, sehingga diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom-kolom pada matriks hasil OBE yang memiliki satu utama berseseuaian dengan matriks asal (A). Ini berarti, bahwa matriks A tersebut mempunyai **basis ruang baris** :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimensi dari basis ruang baris dan ruang kolom senantiasa sama dan dinamakan **rank**. Jadi rank dari matriks A adalah 2.

Contoh 5.11 :

Diberikan SPL homogen (dengan peubah p, q, r, dan s) berikut :

$$\begin{aligned} 2p + q - 2r - 2s &= 0 \\ p - q + 2r - s &= 0 \\ -p + 2q - 4r + s &= 0 \\ 3p - 3s &= 0 \end{aligned}$$

Tentukan basis ruang solusi dari SPL diatas

Jawab :

Sistem persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

dengan melakukan OBE diperoleh :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Solusi SPL homogen tersebut adalah :

$p = a$,
$q = 2b$,
$s = a$, dan
$r = b$,

dimana a, b merupakan parameter.
atau

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b$$

Dengan demikian, basis ruang solusi dari SPL diatas adalah :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimensi dari basis ruang solusi dinamakan **nulitas.** Dengan demikian, nulitas dari SPL diatas adalah 2.

Latihan Bab 5

1. Nyatakanlah matriks $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ sebagai kombinasi linear dari matriks berikut :
   $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

2. Periksa, apakah himpunan berikut bebas linear !
   a. $\{6 - x^2 , 6 + x + 4x^2 \}$
   b. $\{1 + 3x + 3x^2,\ x + 4x^2,\ 5 + 6x + 3x^2,\ 7 + 2x - x^2\}$

3. Periksa, apakah himpunan A = $\{6 - x^2 , 6 + x + 4x^2 \}$ membangun polinom orde 2

4. Periksa apakah $\{1 - x + 2x^2,\quad 2 + x - 2x^2,\quad -1 - 5x + 10x^2\}$ merupakan himpunan yang bebas linear ! Jelaskan.

5. Periksa, apakah himpunan berikut merupakan basis bagi polinom orde 2 (P2)
   a. $\{4 + 6x + x^2, -1 + 4x + 2x^2, 5 + 2x - x^2\}$
   b. $\{-4 + x + 3x^2,\ 6 + 5x + 2x^2, 8 + 4x + x^2\}$

6. Misalkan $J = \left\{ a + bx + cx^2 \;\middle|\; a^2 = b^2 + c^2 \right\}$ merupakan himpunan bagian dari ruang vektor Polinom orde dua. Periksa apakah J merupakan subruang dari ruang vektor Polinom orde dua Jika ya, tentukan basisnya

7. Diberikan SPL homogen (dengan peubah *p*, *q*, dan *r*) berikut :
   $$p + 2q + 3r = 0$$
   $$p + 2q - 3r = 0$$
   $$p + 2q + 3r = 0,$$
   Tentukan basis ruang solusi (buktikan) dan dimensinya.

8. Tentukan *rank* dari matriks :

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$