Bab 4
Vektor di Bidang dan di Ruang

Vektor merupakan besaran yang mempunyai arah. Pada bab ini akan dijelaskan tentang vektor di bidang dan di ruang, yang disertai operasi *dot product*, *cross product*, dan penerapannya pada proyeksi vektor dan perhitungan luas suatu segitiga di ruang 3-dimensi. Setiap vektor tersebut dapat dinyatakan secara geometris sebagai segmen garis berarah pada bidang atau ruang, dengan notasi garis berpanah. Ekor panah garis tersebut merupakan titik awal vektor, sedangkan ujung panah sebagai titik akhir (ujung) vektor tersebut.

4.1 OPERASI VEKTOR

Seperti halnya matriks, setiap vektor dapat di dikenakan operasi aljabar, seperti penjumlahan dan perkalian. Notasi vektor dapat dituliskan dengan menggunakan huruf kecil dicetak tebal atau huruf kecil dengan garis diatasnya. Sedangkan unsur vektor tersebut ditulis berurutan atau seperti matriks satu kolom atau memakai notasi vektor satuan $\hat{i}$, $\hat{j}$, dan $\hat{k}$.

Contoh 4.1 :

Berikut adalah beberapa contoh notasi vektor :

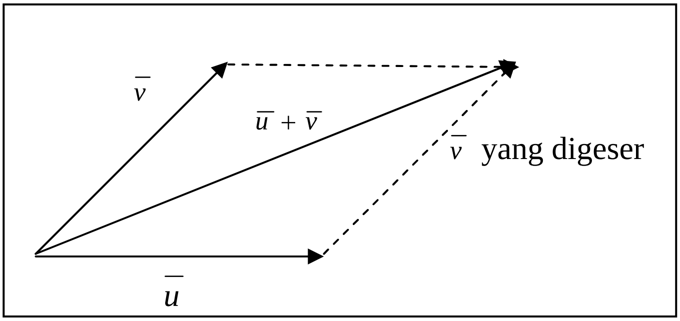
a. $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$

b. $\boldsymbol{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

c. $\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Penjumlahan Vektor

Misalkan $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ adalah vektor – vektor yang berada di ruang yang sama, maka vektor $\bar{u} + \bar{v}$ didefinisikan sebagai sebuah vektor yang titik awalnya sama dengan titik awal $\bar{u}$ dan titik akhirnya merupakan titik ujung dari vektor $\bar{v}$ (setelah digeser sehingga titik awal vektor $\bar{v}$ diletakan pada ujung vektor $\bar{u}$. Agar lebih jelas, perhatikan ilustrasi berkut ini :



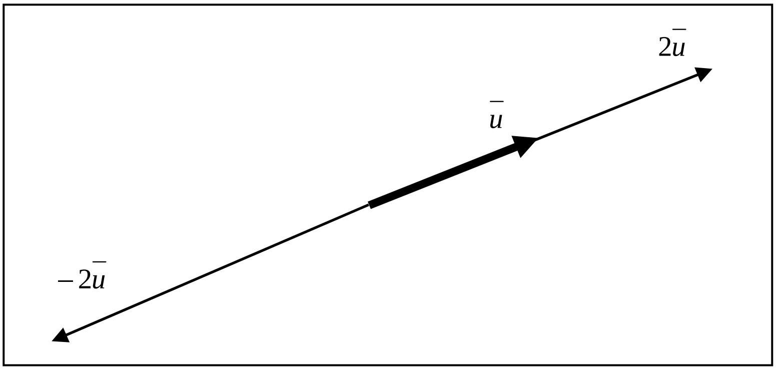
Gambar 4.1 Ilustrasi penjumlahan dua buah vektor pada bidang

Perkalian Vektor

a. Perkalian vektor dengan skalar

Vektor nol didefinisikan sebagai vektor yang memiliki panjang nol. Misalkan $\bar{u}$ vektor tak nol dan k adalah skalar, $k \in \Re$. Perkalian vektor $\bar{u}$ dengan skalar k, $k\bar{u}$ didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya k kali panjang vektor $\bar{u}$ dengan arah memiliki ketentuan sebagai berikut :

- Jika $k > 0 \rightarrow$ searah dengan $\bar{u}$
- Jika $k < 0 \rightarrow$ berlawanan arah dengan $\bar{u}$



Gambar 4.2 Ilustrasi perkalian vektor dengan skalar

Secara analitis, kedua operasi pada vektor diatas dapat dijelaskan sebagai berikut :

Diketahui $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ merupakan vektor-vektor di ruang (R^3) yang komponen–komponennya adalah $\overline{a} = (a_{11}\ a_2, a_3)$ dan $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ maka :

- $\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
- $\overline{a} - \overline{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$
- $k\ \overline{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$

b. Perkalian anatara dua buah vektor.

Perkalian antara dua buah vektor hanya dapat dilkakukan jika kedua vektor tersebut berada pada ruang yang sama. Perkalian antara dua buah vektor tersebut meliputi :

- o Hasil kali titik (*dot product*)
- o Hasil kali silang (*cross product*)

Berikut ini akan dijelaskan secara lebih detil tentang dua jenis perkalian antara dua buah vektor.

4.2 HASIL KALI TITIK

Hasil kali titik merupakan operasi antara dua buah vektor yang akan menghasilkan skalar. Misal $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ adalah vektor pada ruang yang sama maka hasil kali titik antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ didefinisikan oleh

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = \left\| \bar{a} \right\| \left\| \bar{b} \right\| \cos\alpha , \qquad (4.1)$$

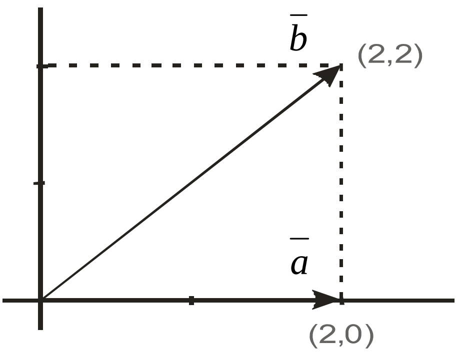
dimana $\left\|\bar{a}\right\|$ dan $\left\|\bar{b}\right\|$ masing-masing merupakan panjang vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ serta α merupakan sudut yang dibentuk antara vektor $\bar{a}$ dan vektor $\bar{b}$. Ingat kembali definisi panjang (norm) suatu vektor semasa si sekolah menengah, yaitu : jika $\vec{a} = (a_1, a_2)$ maka $\left\| \vec{a} \right\| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$.

Contoh 4.2 :

Tentukan hasil kali titik dari dua vektor berikut :

$\bar{a}$ = 2*i* dan $\bar{b}$ = 2i + 2j

Jawab :



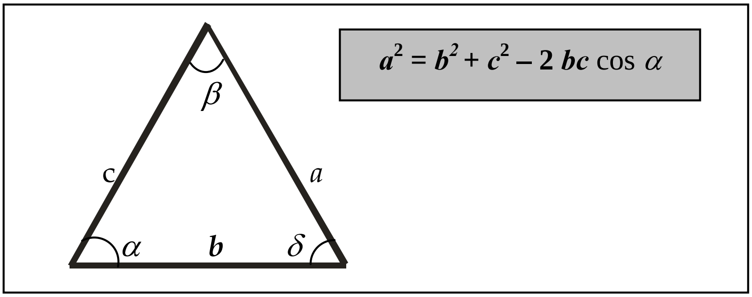
Karena tan α = 1 , artinya α = *45* ^{0}

Sehingga

$$\bar{a}\,.\,\bar{b} = \left\|\bar{a}\right\| \left\|\bar{b}\right\| \cos\,\alpha = 2\,\sqrt{8}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

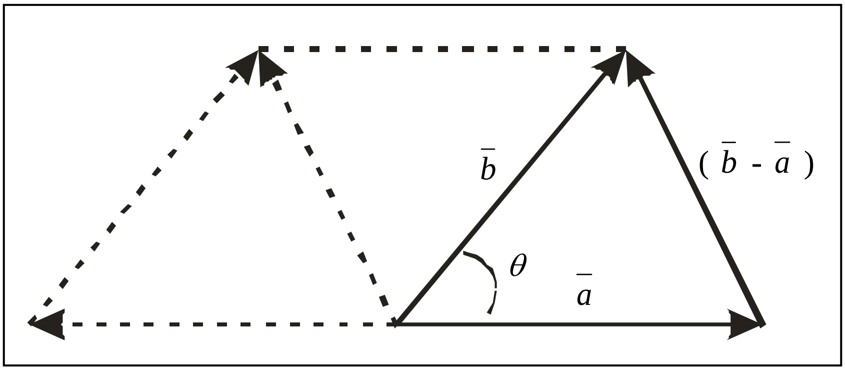
$$= 2\;2\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} \quad = 4$$

Bagaimana cara menghitung hasil kali titik di R^N dan dua buah vektor tanpa diketahui sudut antar kedua vektor tersebut? Untuk hal tersebut, ingat kembali tentang aturan *cosinus* :



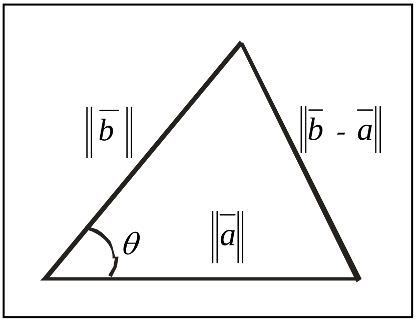
Gambar 4.3 Ilustrasi aturan cosinus

Selanjutnya, akan dijelaskan hubungan dua vektor posisi dengan aturan cosinus. Perhatikan ilustrasi dua vektor di ruang R^2 berikut ini :



Gambar 4.4 Ilustrasi aturan cosinus dua vektor dan selisihnya

Notasi vektor pada Gambar 4.4, akan dirubah dalam notasi panjang (norm) vektor, yaitu :



Gambar 4.5 Aturan Cosinus Norm Dua Vektor dan Selisihnya

Menurut aturan *cosinus* pada ilustrasi diatas, maka :

$$\|\overline{b}-\overline{a}\|^2 = \|\overline{a}\|^2 + \|\overline{b}\|^2 - 2\|\overline{a}\|\,\|\overline{b}\|\cos\alpha$$

Selanjutnya :

$$\|\overline{a}\|\,\|\overline{b}\|\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left[\|\overline{a}\|^2 + \|\overline{b}\|^2 - \|\overline{b}-\overline{a}\|^2\right]$$

Seperti telah kita ketahui bahwa :

(1) $\|\overline{a}\|\ \|\overline{b}\|\ \cos\ \theta = \overline{a}\ .\ \overline{b}$

(2) $\|\overline{a}\|^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \ldots. + a_n{}^2$

(3) $\|\overline{b}\|^2 = b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 + \ldots. + b_n{}^2$

(4) $\|\overline{b} - \overline{a}\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2$

$$= b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots + b_n{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_n{}^2$$
$$- 2b_1a_1 - 2b_na_n - \ldots - 2b_na_n$$

maka akhirnya diperoleh :

$$\overline{a} \bullet \overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

Contoh 4.3 :

Tentukan kembali hasil kali titik dari dua vektor berikut berikut dengan rumus di atas

$\bar{a} = 2i$ dan $\bar{b} = 2i + 2j$

Jawab :

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$
$$= 2\ (2) + 0\ (2)$$
$$= 4$$

Berikut ini adalah sifat – sifat hasil kali titik :

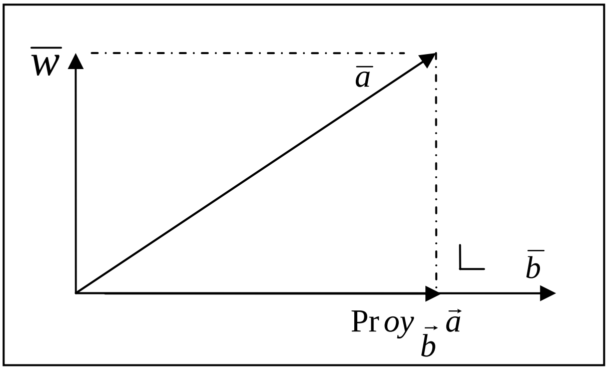
(i) $\bar{a} \bullet \bar{b} = \bar{b} \bullet \bar{a}$

(ii) $\bar{a} \bullet \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \left(\bar{a} \bullet \bar{b}\right) + \left(\bar{a} \bullet \bar{c}\right)$

(iii) $k\left(\bar{a} \bullet \bar{b}\right) = k\bar{a} \bullet \bar{b} = \bar{a} \bullet k\bar{b}$, dimana $k \in R$

Proyeksi Ortogonal Suatu Vektor

Secara geometri, proyeksi ortogonal suatu vektor terhadap vektor lain dapat diilustrasikan sebagai berikut :



Gambar 4.6 Proyeksi Ortogonal Vektor $\bar{a}$ Terhadap Vektor $\bar{b}$

Misalkan $\bar{c} = proy_{\bar{b}}\bar{a}$ maka $\bar{c} = k\bar{b}$ untuk suatu kelipatan $k \in \Re$. Sementara itu, $\bar{w}$ merupakan suatu komponen dari vektor $\bar{a}$ yang tengah lurus terhadap $\bar{b}$.
Perhatikan bahwa

$$\bar{a} = \bar{w} + \bar{c}$$

Sehingga :

$$\begin{aligned} \bar{a} \bullet \bar{b} &= (\bar{w} + \bar{c}) \bullet \bar{b} \\ &= \bar{w} \bullet \bar{b} + \bar{c} \bullet \bar{b} \\ &= \bar{c} \bullet \bar{b}^{\,2} \\ &= k\bar{b} \bullet \bar{b} \\ &= k\left\|\bar{b}\right\| \end{aligned}$$

Dengan demikian

$$k = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\|b\|^2}.$$

Oleh karena itu, kita peroleh bahwa :

$$proy_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\|b\|^2}\ \bar{b}.$$

Berikut adalah contoh perhitungan untuk memperoleh vektor hasil proyeksi ortogonal suatu vektor terhadap vektor yang lain.

Contoh 4.4 :

Tentukan proyeksi ortogonal vektor $\bar{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ terhadap vektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Jawab :

$$\text{Pr}oy_{\bar{v}}\,\bar{w} = \frac{\bar{w} \bullet \bar{v}}{\|v\|^2}\bar{v}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{1^2 + 3^2 + (-4)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-2 + (-12) + (-12)}{26}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-26}{26}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

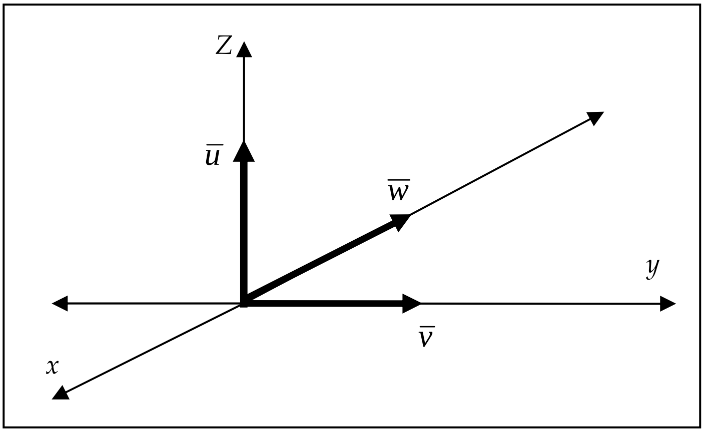
4.3 HASIL KALI SILANG (*CROSS PRODUCT*)

Hasil kali silang merupakan perkalian antara dua vektor yang akan menghasilkan suatu vektor baru

Definisi :

Misal $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ adalah vektor di ruang (R^3) maka vektor yang tegak lurus terhadap keduanya ($\bar{u}$ dan $\bar{v}$) adalah $\bar{w}$ sehingga $\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v}$. Ini membuktikan bahwa $\bar{w} \perp \bar{u}$ dan $\bar{w} \perp \bar{v}$.

Secara geometri, misal $\bar{u}$ =(0,0,1) dan $\bar{v}$ =(0,1,0), jika $\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v}$ maka $\bar{w}$ yang tegak lurus terhadap $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ yang searah sumbu x negatif. Arah vektor $\bar{w}$ di tentukan dengan menggunakan aturan tangan kanan, dimana arah empat jari dari vektor $\overline{u}$ menuju vektor $\overline{v}$ sehingga ibu jari searah dengan arah vektor $\overline{w}$.



Gambar 4.7 Ilustrasi Hasilkali Silang antara Dua Vektor

Cara menentukan vektor $\overline{w}$ yang mempunyai hasil kali silang antara dua vektor yaitu $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ adalah sebagai berikut :

$$\overline{w} = \overline{u} \times \overline{v}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= (u_2v_3\text{-}u_3v_2)\,\hat{i} + (u_3v_1\text{-}u_1v_3)\,\hat{j} + (u_1v_2\text{-}u_2v_1)\,\hat{k}$$

Contoh 4.5 :

Tentukan $\overline{w} = \overline{u} \times \overline{v}$, dengan $\overline{u} = (1, 2, -2)$ dan $\overline{v} = (3,\ 0, 1)$.

Jawab :

$$\overline{w} = \overline{u} \times \overline{v}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\,\hat{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\hat{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\hat{k}$$

$$= \left(2.1 - 0(-2)\right)\hat{i} + \left(3(-2) - 1.1\right)\hat{j} + \left(1.0 - 3.2\right)\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} - 7\hat{j} - 6\hat{k}$$

Beberapa sifat hasil kali silang yang perlu diketahui adalah:
Misal $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ di ruang (R^3) maka:

a. $\overline{u} \bullet \left(\overline{u}\ x\ \overline{v}\right) = 0$

b. $\overline{v} \bullet \left(\overline{u}\ x\ \overline{v}\right) = 0$

c. $\left\|\overline{u} \times \overline{v}\right\|^2 = \|\overline{u}\|^2 \|\overline{v}\|^2 - \left(\overline{u} \bullet \overline{v}\right)^2$

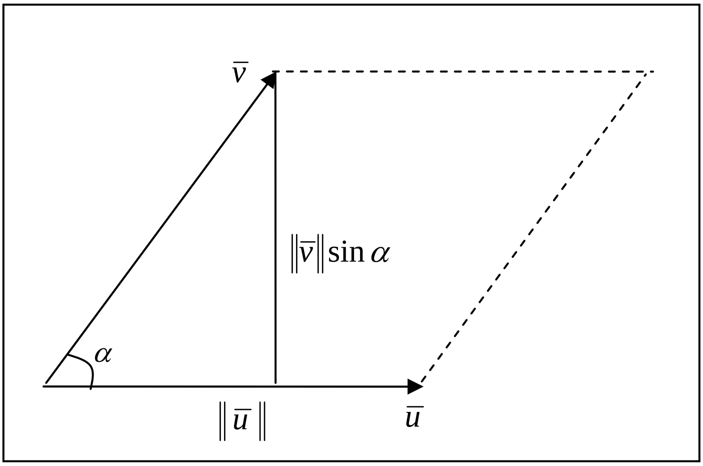
Dari sifat ketiga dapat kita simpulkan bahwa:

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{u} \times \overline{v}\right\|^2 &= \|\overline{u}\|^2 \cdot \|\overline{v}\|^2 - \left(\overline{u} \bullet \overline{v}\right) \\
&= \|\overline{u}\|^2 \cdot \|\overline{v}\|^2 - \left(\|\overline{u}\| \cdot \|\overline{v}\| \cdot \cos\alpha\right)^2 \\
&= \|\overline{u}\|^2 \cdot \|\overline{v}\|^2 - \left(\|\overline{u}\|^2 \cdot \|\overline{v}\|^2 \cdot \cos^2\alpha\right) \\
&= \|\overline{u}\|^2 \cdot \|\overline{v}\|^2 \ \left(1 - \cos^2\alpha\right) \\
&= \|\overline{u}\|^2 \cdot \|\overline{v}\|^2 \cdot \sin^2\alpha
\end{aligned}$$

Sehingga kita memperoleh hubungan :

$$\|\overline{u}\ x\,\overline{v}\| = \|\overline{u}\| \cdot \|\overline{v}\| \ \cdot \sin\alpha$$

Untuk memudahkan pemahaman rumusan diatas, perhatikan ilustrasi berikut :



Gambar 4.8 Hasilkali Silang Dua Vektor dengan Daerah yang Dibentuknya

Dengan mengacu pada gambar 4.8, beberapa hal yang diperoleh antara lain :

- Luas jajaran-genjang yang dibentuk oleh vektor $\bar{u}$ & $\bar{v}$ adalah $\|\bar{u} \times \bar{v}\|$
- Luas segitiga yang dibentuk oleh $\bar{u}$, $\bar{v}$, dan ($\bar{u}$ – $\bar{v}$) adalah $\frac{1}{2}\|\bar{u} \times \bar{v}\|$

Agar dapat memperoleh pemahaman lebih dalam berikut adalah contoh aplikasi hasilkali silang dalam menghitung luas segitiga.

Contoh 4.6 :

Diketahui titik-titik diruang (R^3) adalah :

A = (1, –1, –2), B = (4, 1, 0), dan C = (2, 3, 3)

Dengan menggunakan hasilkali silang, tentukan luas segitiga ABC !

Jawab:

a. Misalkan, $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AC}$ adalah vektor yang berimpit pada titik A.

Tulis $\overrightarrow{AB}$ = B – A= (4, 1, 0) – (1, –1, –2)
= (3, 2, 2)

$\overrightarrow{AC}$ = C – A= (2, 3, 3) – (1, –1, –2)
= (1, 4, 5)

Dengan menggunakan kedua vektor tersebut

diperoleh :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\hat{i} - 13\hat{j} + 10\hat{k}$$

Sehingga luas segitiga ABC yang berimpit di A adalah :

$$= \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 169 + 100}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{273}$$

b. Misalkan, $\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{BC}$ adalah vektor yang berimpit pada titik B.

$\overrightarrow{BA}$ = $\bar{a} - \bar{b}$ = (1,-1,-2) – (4,1,0)
= (-3,-2,-2)

$\overrightarrow{BC}$ = $\bar{c} - \bar{b}$ = (2,3,3) – (4,1,0)
= (-2,2,3)

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -2\hat{i} + 13\hat{k} - 10\hat{j}$$

Sehingga luas segitiga ABC yang berimpit di B adalah :

$$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right\|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 169 + 100}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{273}$$

Dengan demikian, walaupun titik acuan (sudut) yang berbeda-beda tetapi luas segitiga itu adalah tetap yaitu $\frac{1}{2}\sqrt{273}$

Latihan Bab 4

1. Tentukan cos sudut yang terbentuk oleh pasangan vektor berikut :

   a. $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\bar{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

   b. $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\bar{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Tentukan proyeksi ortogonal vektor $\bar{a}$ terhadap vektor $\bar{b}$ dan tentukan panjang vektor proyeksi tersebut:

   a. $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\bar{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b. $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Tentukan dua buah vektor satuan (vektor dengan panjang satu) yang tegak lurus terhadap vektor $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. Tentukan vektor yang tegak lurus terhadap vektor $\bar{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

   dan vektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. Tentukan luas segitiga yang mempunyai titik sudut P (2, 0, –3), Q (1, 4, 5) dan R (7, 2, 9)

6. Misalkan $\overline{u} \bullet \overline{v} = 1$ dan $\overline{a} \bullet \overline{w} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Sementara itu, $\overline{a} \perp \overline{u}$ dan $\overline{a} \perp \overline{v}$, jika panjang vektor $\overline{u}$ $\overline{v}$, dan $\overline{w}$ masing-masing adalah 1, 2, dan 3. Tentukan sudut antara $\overline{a}$ dan $\overline{w}$

7. Diketahui A=(1, 2, 3), B=(–1, 2, –3), dan C=(3, 2, 1) merupakan titik-titik pada ruang XYZ.
   a. Tentukan proyeksi vektor $\overrightarrow{AC}$ terhadap vektor $\overrightarrow{AB}$
   b. Tentukan luas segitiga ABC