3. LIMIT FUNGSI

3.1 Limit Fungsi di Satu Titik

Pengertian limit secara intuisi

Perhatikan fungsi

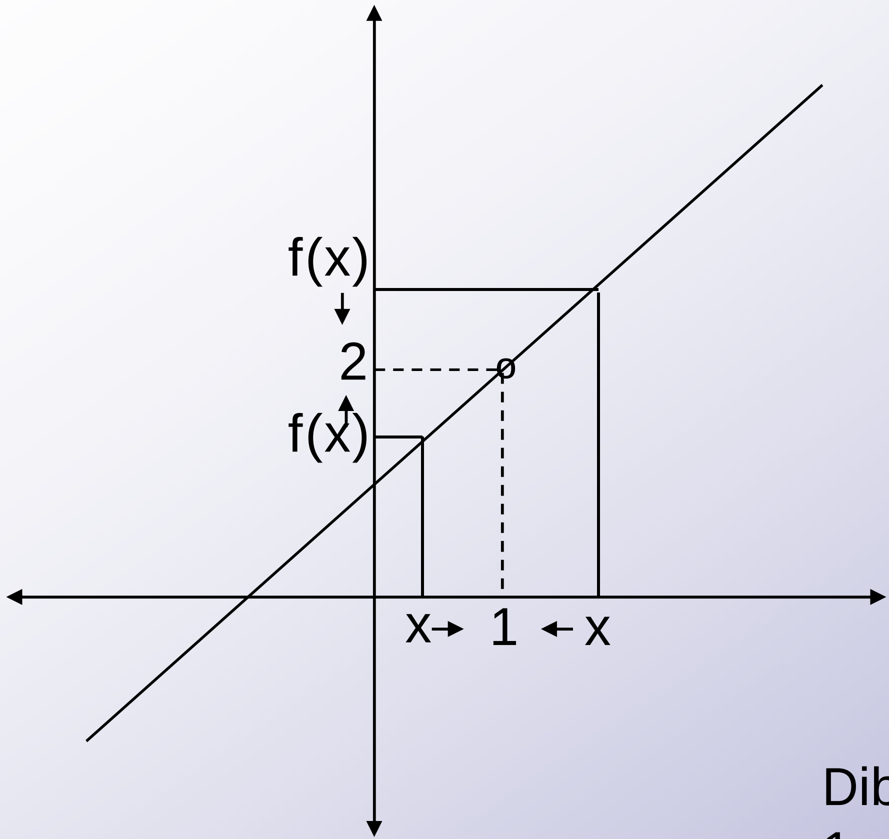
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Fungsi diatas tidak terdefinisi di x=1, karena di titik tersebut f(x) berbentuk 0/0. Tapi masih bisa ditanyakan berapa nilai f(x) jika x mendekati 1

Dengan bantuan kalkulator dapat diperoleh nilai f(x) bila x mendekati 1, seperti pada tabel berikut

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	→ 1 ←	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.9	1.99	1.999	1.9999	→ ? ←	2.0001	2.001	2.01	2.1

Secara grafik



Dari tabel dan grafik disamping terlihat bahwa f(x) mendekati 2 jika x mendekati 1

Secara matematis dapat dituliskan Sebagai berikut

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Dibaca " limit dari $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk x mendekati 1 adalah 2

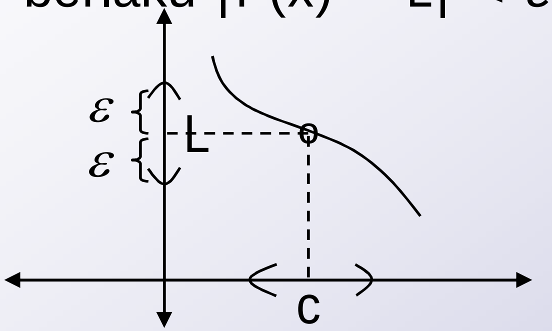
Definisi(limit secara intuisi). Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dengan c, maka f(x) dekat ke L

Definisi limit

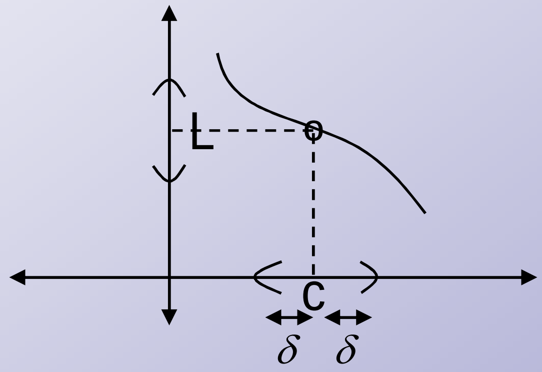
Limit f(x) untuk x mendekati c adalah L, ditulis $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

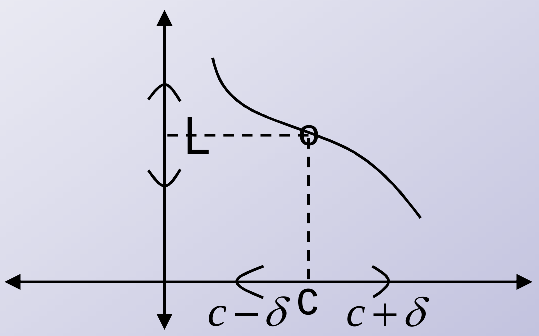
jika dan hanya jika untuk setiap bilangan ε > 0 (betapapun kecilnya), terdapat bilangan δ > 0 sedemikian sehingga apabila 0 < |x − c| < δ berlaku |f (x) − L| < ε.



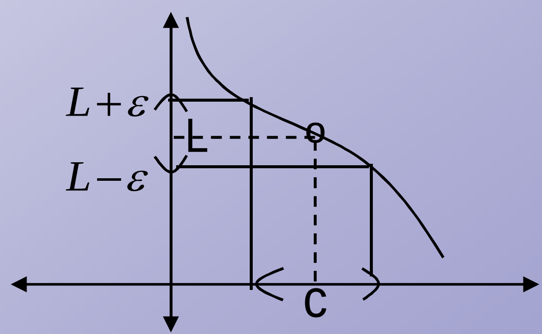
Untuk setiap $\varepsilon > 0$



Terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga



$$0 < |x - c| < \delta$$



$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

- Buktikan bahwa $\lim_{x \to 4} (3x - 7) = 5$

Analisis pendahuluan:
Misalkan $\varepsilon > 0$ sembarang, kita harus dapat menemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < |x - 4| < \delta$ berlaku $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$.

Perhatikan $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 4| < \varepsilon/3$$

Oleh karena itu dapat dipilih $\delta = \varepsilon/3$. Tentu saja dapat dipilih bilangan δ yang kurang dari $\varepsilon/3$.

Bukti:

Ambil sembarang bilangan $\varepsilon > 0$. Kita pilih $\delta > 0$ yaitu $\delta = \varepsilon/3$. Apabila $0 < |x - 4| < \delta$ maka berlaku $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$

$0 < |x - 4| < \delta \quad \Leftrightarrow |(3x - 7) - 5| < \varepsilon$

$0 < |x - 4| < \varepsilon/3 \Leftrightarrow |x - 4)| < \varepsilon/3$

terbukti

- Buktikan bahwa $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

Analisis pendahuluan:

Misalkan ε > 0 sembarang, kita harus dapat menemukan bilangan δ > 0 sedemikian sehingga apabila 0 < |x − 2 |< δ berlaku $\left| \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$

Perhatikan $\left| \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \dfrac{(2x+1)(x-2)}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow |(2x+1) - 5| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2(x-2)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| < \varepsilon / 2$$

Oleh karena itu dapat dipilih δ = ε/2 atau yang kurang dari ε/2.

Bukti:

Ambil sembarang bilangan ε > 0. Kita pilih δ > 0 yaitu δ = ε/2. Apabila 0 < |x − 2 |< δ maka berlaku

$$\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$0 < |x - 2| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$0 < |x - 2| < \varepsilon / 2 \Leftrightarrow |x - 2| < \varepsilon / 2$$

terbukti

Contoh

1. $\lim_{x \to 1} 3x + 5 = 8$

2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(2x+1)(x-2)}{x-2} \quad = \lim_{x \to 2} 2x + 1 = 5$

3. $\lim_{x \to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x} - 3} \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \quad = \lim_{x \to 9} \dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} \quad = \lim_{x \to 9} \sqrt{x} + 3 = 6$

4. $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$

Ambil nilai x yang mendekati 0, seperti pada tabel berikut

x	$2/\pi$	$2/2\pi$	$2/3\pi$	$2/4\pi$	$2/5\pi$	$2/6\pi$	$2/7\pi$	$2/8\pi$	$\longrightarrow$ 0
$\sin(1/x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	$\longrightarrow$?

Dari tabel terlihat bahwa bila x menuju 0, sin(1/x) tidak menuju ke satu nilai tertentu sehingga limitnya tidak ada

Limit Kiri dan Limit Kanan

x → c

Jika x menuju c dari arah kiri (dari arah bilangan yang lebih kecil dari c, limit disebut limit kiri,

notasi

$$\lim_{x \to c^-} f(x)$$

c ← x

Jika x menuju c dari arah kanan (dari arah bilangan yang lebih besar dari c, limit disebut limit kanan,

notasi

$$\lim_{x \to c^+} f(x)$$

Hubungan antara limit dengan limit sepihak(kiri/kanan)

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Jika $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ maka $\lim_{x \to c} f(x)$ tidak ada

Contoh Diketahui

1. $$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \; x \le 0 \\ x \, , & 0 < x < 1 \\ 2 + x^2 \, , & x \ge 1 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{a. Hitung } \lim_{x \to 0} f(x) \\ \text{b. Hitung } \lim_{x \to 1} f(x) \\ \text{c. Hitung } \lim_{x \to 2} f(x) \end{array}\right\}$ Jika ada

d. Gambarkan grafik f(x)

Jawab

a. Karena aturan fungsi berubah di x=0, maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di x=0

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0} x^2 = 0\\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0} x = 0\end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

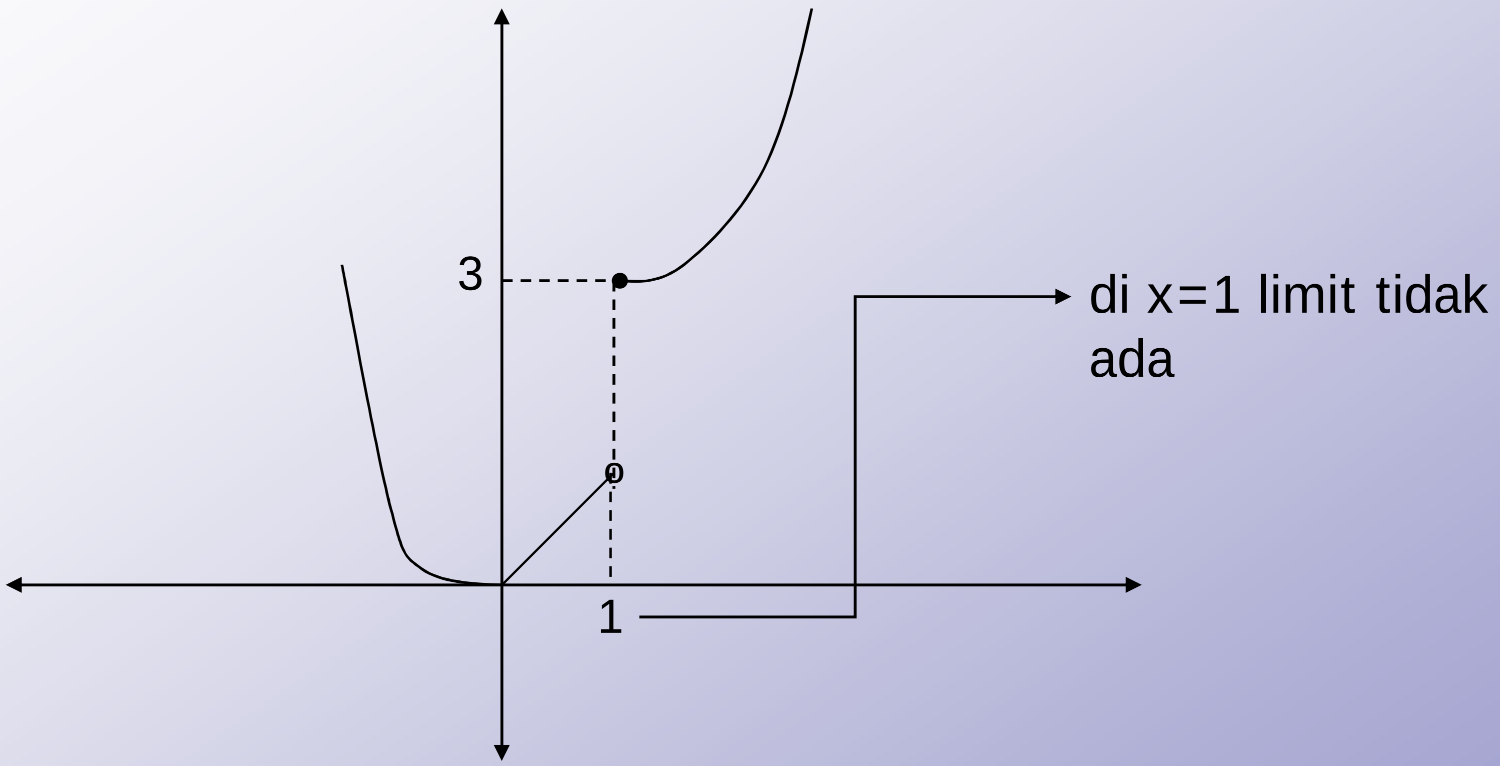
b. Karena aturan fungsi berubah di x=1, maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di x=1

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1} x = 1\\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1} 2 + x^2 = 3\end{aligned}\right\} \text{Karena } \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} \longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) \text{ Tidak ada}$$

c. Karena aturan fungsi tidak berubah di x=2, maka tidak perlu dicari limit kiri dan limit kanan di x=2

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 2 + x^2 = 6$$

d.



Untuk x $\leq$ 0

$$f(x) = x^2$$

Grafik: parabola

Untuk 0<x<1

f(x)=x

Grafik:garis lurus

Untuk $\geq$ 1

$$f(x) = 2 + x^2$$

Grafik: parabola

2. Tentukan konstanta c agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 3 - cx, x < -1 \\ x^2 - c, x \geq -1 \end{cases}$$

mempunyai limit di x=-1

Jawab

Agar f(x) mempunyai limit di x=-1, maka limit kiri harus sama dengan limit kanan

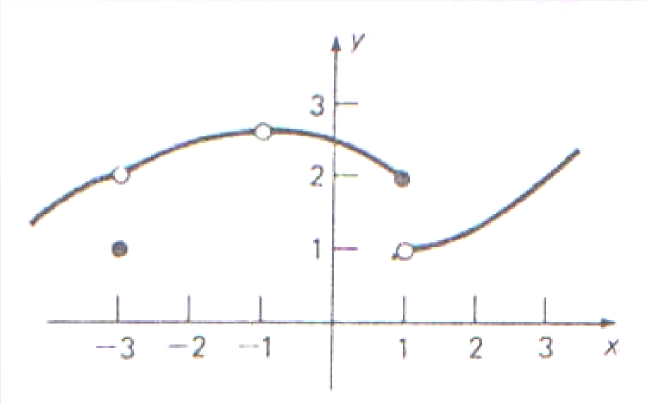
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} 3 - cx = 3 + c \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} x^2 - c = 1 - c \end{aligned}\right\} \text{Agar limit ada} \Rightarrow \text{3+1c=1-c}$$

$$\Downarrow$$

C=-1

Soal Latihan

A. Diberikan grafik suatu fungsi f seperti gambar berikut .



Cari limit /nilai fungsi berikut, atau nyatakan bahwa limit /nilai fungsi tidak ada.

1. $\lim_{x \to -3} f(x)$
2. $\lim_{x \to -1} f(x)$
3. $\lim_{x \to 1} f(x)$
4. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$
5. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$
6. f(-3)
7. f(-1)
8. f(1)

Soal Latihan

B.

1. Diketahui : $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \le 1 \\ x^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases}$

a.Hitung $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ dan $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

b. Selidiki apakah $\lim_{x\to 1} f(x)$ ada, jika ada hitung limitnya

2. Diketahui $g(x) = |x-2| - 3x$, hitung (bila ada) :

a. $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ b. $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ c. $\lim_{x\to 2} g(x)$

3. Diketahui $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$, hitung (bila ada)

a. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ b. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ c. $\lim_{x\to 2} f(x)$

Sifat limit fungsi

Misal

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x\to a} g(x) = G$$ (limit dari f , g ada dan berhingga)

maka

1. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=L\pm G$

2. $\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)=LG$

3. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{G}\ , bila\ G\neq 0$

4. $\lim_{x\to a}(f(x))^n=(\lim_{x\to a} f(x))^n=L^n$,n bilangan bulat positif

5. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L}$ bila n genap L harus positif

Prinsip Apit

Misal $f(x) \le g(x) \le h(x)$ untuk x disekitar c dan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ serta } \lim_{x \to c} h(x) = L$$

maka

$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$

Contoh Hitung $\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1}$

Karena $-1 \le \sin(\frac{1}{x-1}) \le 1 \Rightarrow -(x-1)^2 \le (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1} \le (x-1)^2$

dan

$$\lim_{x \to 1} -(x-1)^2 = 0 \quad , \lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$$

maka

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1} = 0$$

Limit Fungsi Trigonometri

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\cos x=1$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

Contoh

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin 4x}{5x-\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x+\sin 4x}{x}}{\frac{5x-\tan 2x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{\sin 4x}{4x}.4}{5-\frac{\tan 2x}{2x}.2}=\frac{3+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}.4}{5-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}.2}$$

$$=\frac{3+\lim\limits_{4x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}.4}{5-\lim\limits_{2x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}.2}=\frac{7}{3}$$

x → 0 ekivalen dgn 4x → 0

Soal Latihan

Hitung

1. $\lim_{t \to 0} \frac{\tan^2 3t}{2t}$

2. $\lim_{t \to 0} \frac{\cot \pi t \sin t}{2 \sec t}$

3. $\lim_{t \to 0} \frac{\cos^2 t}{1 + \sin t}$

4. $\lim_{t \to 0} \frac{\sin 3t + 4t}{t \sec t}$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\sin 2x}$

Limit Tak Hingga dan Limit di Tak Hingga

Limit Tak Hingga

Misal $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, maka $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

$(i)\ +\infty,$ jika $L > 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah atas

$(ii)\ -\infty,$ jika $L > 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah bawah

$(iii)\ +\infty,$ jika $L < 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah bawah

$(iv)\ -\infty,$ jika $L < 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah atas

Ctt : g(x) → 0 dari arah atas maksudnya g(x) menuju 0 dari nilai g(x) positif.

g(x) → 0 dari arah bawah maksudnya g(x) menuju 0 dari nilai g(x) negatif.

Contoh Hitung

a. $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1}$ b. $\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1}$ c. $\lim_{x \to \pi^+} \frac{x}{\sin x}$

Jawab

a. $\lim_{x \to 1^-} x^2+1 = 2 > 0$,g(x)=x-1 akan menuju 0 dari arah bawah, karena x → 1 dari kiri berarti x lebih kecil dari 1, akibatnya x-1 akan bernilai negatif

Sehingga

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$$

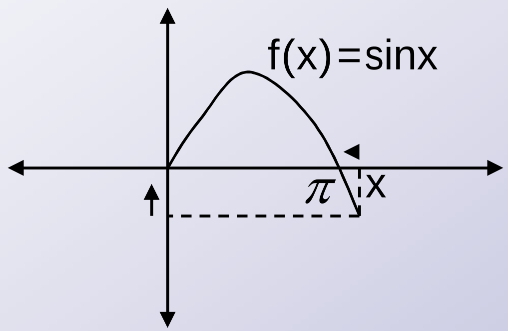
b. $\lim_{x \to -1^-} x^2+1 = 2 > 0$ $g(x) = x^2 - 1$ akan menuju 0 dari arah atas, karena x → -1 dari kiri berarti x lebih kecil dari -1, tapi bilangan negatif yang lebih kecil dari -1 jika dikuadrat kan lebih besar dari 1 sehingga x^2-1 bernilai positif

Sehingga

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$$

c. Karena

$$\lim_{x \to \pi^+} x = \pi > 0$$ dan



Jika x menuju π dari arah kanan maka nilai sinx menuju 0 dari arah bawah(arah nilai sinx negatif)

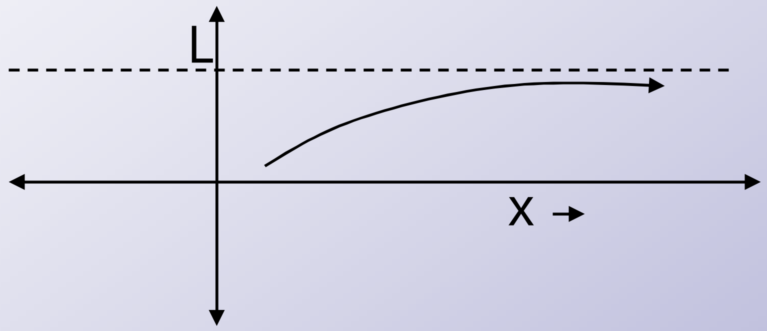
sehingga

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{x}{\sin x} = -\infty$$

Limit di Tak Hingga

a. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ jika $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, M > 0 \ \ni \ x > M \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$

atau f(x) mendekati L jika x menuju tak hingga



Contoh Hitung

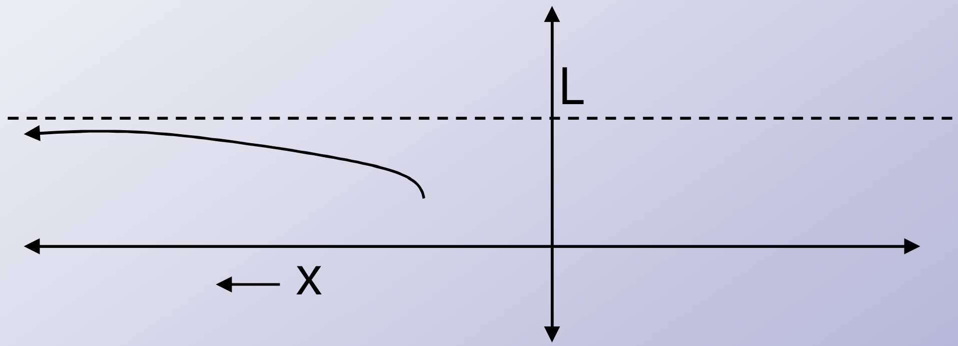
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 + 4}$$

Jawab

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 (1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})}{x^2 (2 + \frac{4}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 1/2$$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ jika $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M < 0 \ \ni \ x < M \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$

atau f(x) mendekati L jika x menuju minus tak hingga



Contoh Hitung

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+5}{2x^2+4}$$

Jawab

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+5}{2x^2+4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})}{x^2(2 + \frac{4}{x^2})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})}{(2 + \frac{4}{x^2})} = 0$$

Contoh Hitung

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+3}+x$$

Jawab :

Jika x → ∞ , limit diatas adalah bentuk ($\infty-\infty$)

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+3}+x = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x+3}+x\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+x+3}-x}{\sqrt{x^2+x+3}-x}\right)$$

$$\boxed{\sqrt{x^2}=|x|}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+3-x^2}{\sqrt{x^2+x+3}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+3}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+\frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2})}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+\frac{3}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{-(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1)} = -\frac{1}{2}$$

Soal Latihan

Hitung

1. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3+x}{3-x}$

2. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3}{x^2-4}$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{1+x^2}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+x}{x+1}$

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

Kekontinuan Fungsi

Fungsi f(x) dikatakan <u>kontinu</u> pada suatu titik x = a jika

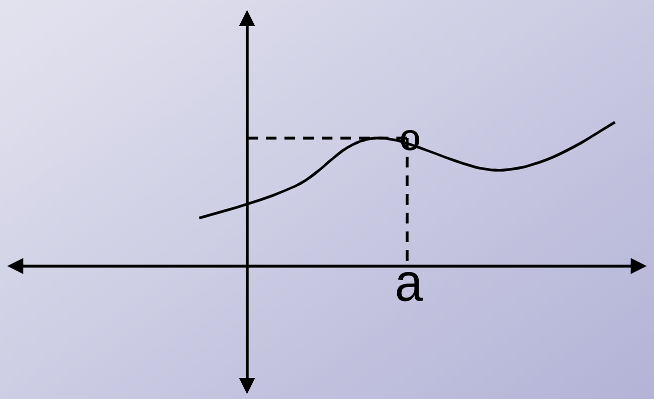
(i) f(a) ada

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ ada

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Jika paling kurang salah satu syarat diatas tidak dipenuhi maka f dikatakan tidak kontinu di x=a

(i)

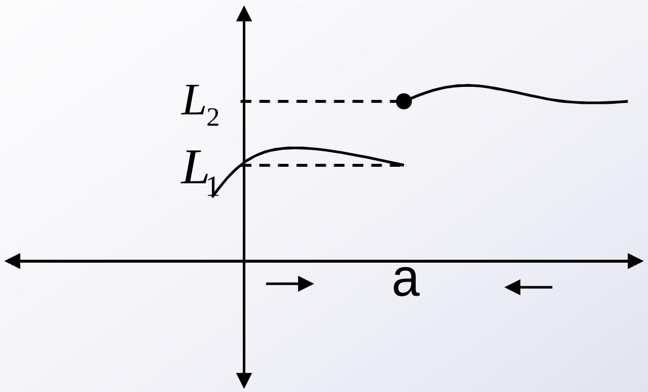


f(a) tidak ada

⇩

f tidak kontinu di x=a

(ii)

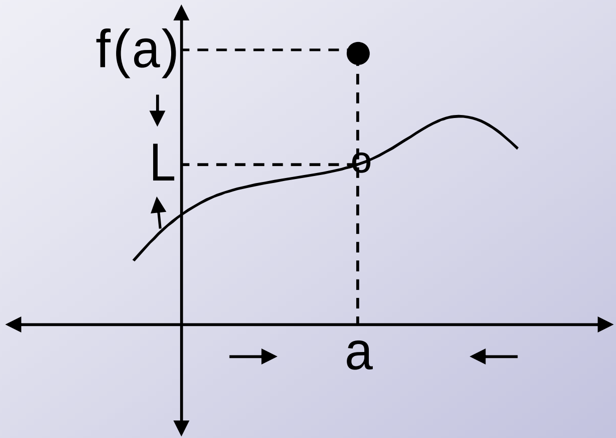


Karena limit kiri(L1) tidak sama dengan limit kanan(L2) maka f(x) tidak mempunyai limit di x=a

⇓

Fungsi f(x) tidak kontinu di x=a

(iii)



f(a) ada

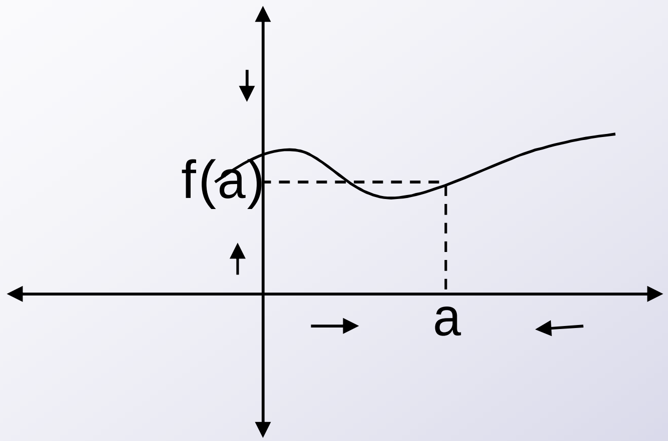
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ada

Tapi nilai fungsi tidak sama dengan limit fungsi

⇓

Fungsi f(x) tidak kontinu di x=a

(iv)

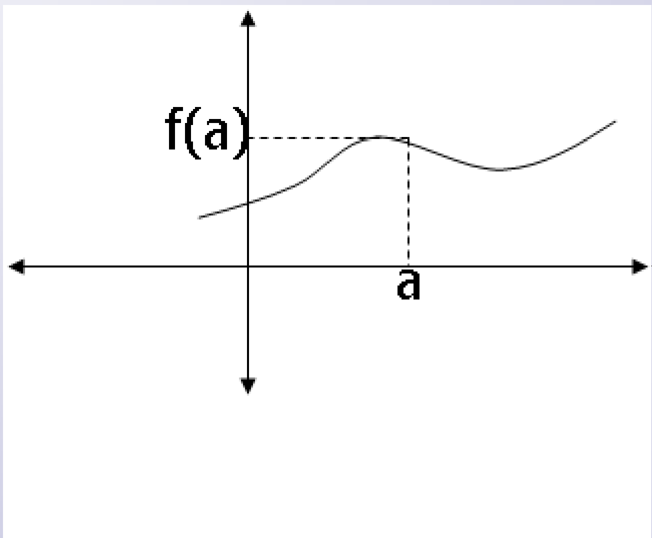


f(a) ada

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{ada}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

f(x) kontinu di x=2



Ketakkontinuan terhapus

Ketakkontinuan kasus (i) bisa dihapus dengan cara mendefinisikan nilai fungsi dititik tersebut = limit fungsi contoh

Periksa apakah fungsi berikut kontinu di x=2, jika tidak sebutkan alasannya

a. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$ c. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ x^2-1, & x \geq 2 \end{cases}$

Jawab :

a. Fungsi tidak terdefinisi di x=2 (bentuk 0/0) $\Rightarrow$ f(x) tidak kontinu di x=2

b. - f(2) = 3

- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} x+2 = 4$

- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

$\Downarrow$

Karena limit tidak sama dengan nilai fungsi, maka f(x) tidak kontinu di x=2

c. - $f(2) = 2^2 - 1 = 3$

$$\left.\begin{aligned} &- \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} x + 1 = 3 \\ &\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 - 1 = 3 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

- $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Karena semua syarat dipenuhi → f(x) kontinu di x=2

Kontinu kiri dan kontinu kanan

Fungsi f(x) disebut kontinu kiri di x=a jika

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Fungsi f(x) disebut kontinu kanan di x=a jika

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Fungsi f(x) kontinu di x=a jika kontinu kiri dan kontinu kanan di x=a

Contoh : Tentukan konstanta a agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x + a, x < 2 \\ ax^2 - 1, x \geq 2 \end{cases}$$

Kontinu di x=2

Jawab :

Agar f(x) kontinu di x=2, haruslah

f kontinu kiri di x=2

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} x + a = 2 + a \qquad f(2) = a2^2 - 1 = 4a - 1$$

2 + a = 4a – 1

-3a = -3

a = 1

f kontinu kanan di x=2

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(2) = a2^2 - 1 = 4a - 1 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} ax^2 - 1 = 4a - 1 \end{array}\right\} \text{Selalu dipenuhi}$$

Soal Latihan

1. Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x \leq -1 \\ 2x + 2, x > -1 \end{cases}$

selidiki kekontinuan fungsi f(x) di x = -1

2. Agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \ x < 1 \\ ax + b, 1 \leq x < 2 \\ 3x, x \geq 2 \end{cases}$$

kontinu pada R, maka berapakah a + 2b ?

3. Tentukan a dan b agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 + bx - 4}{x - 2}, \ x < 2 \\ 2 - 4x, \quad x \geq 2 \end{cases}$$

kontinu di x = 2

Kekontinuan pada interval

- Fungsi $f(x)$ dikatakan **kontinu pada interval buka** (a,b) bila $f(x)$ kontinu pada setiap titik di dalam interval tersebut.

- Sedangkan $f(x)$ dikatakan **kontinu pada interval tutup** [a,b] bila :

  1. $f(x)$ kontinu pada (a,b)
  2. $f(x)$ kontinu kanan di $x = a$
  3. $f(x)$ kontinu kiri di $x = b$

Bila $f(x)$ kontinu untuk setiap nilai $x \in \boldsymbol{R}$ maka dikatakan $f(x)$ kontinu (dimana-mana).

- **Teorema 3.2**
- Fungsi Polinom kontinu dimana-mana
- Fungsi Rasional kontinu pada Domainnya
- Misalkan $f(x) = \sqrt[n]{x}$, maka
  - *f*(x) kontinu di setiap titik di ***R*** jika *n* ganjil
  - *f*(*x*) kontinu di setiap ***R*** positif jika *n* genap.

Contoh : tentukan selang kekontinuan $f(x) = \sqrt{x-4}$

Dari teorema diatas diperoleh f(x) kontinu untuk x-4≥0 atau x≥4.

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = 0 = f(4) \Longrightarrow$$ f(x) kontinu kanan di x=4

Sehingga f(x) kontinu pada [4, ∞)

Soal Latihan

A. Carilah titik diskontinu dari fungsi

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 3}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

3. $f(x) = \dfrac{x - 2}{|x| - 2}$

B. Tentukan dimana f(x) kontinu

1. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$

2. $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

Limit dan Kekontinuan Fungsi Komposisi

- **Teorema Limit Fungsi Komposisi:**

  Jika $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ dan $f(x)$ kontinu di L, maka

  $$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(L)$$

- **Teorema kekontinuan fungsi komposisi:**

Jika $g(x)$ kontinu di a, $f(x)$ kontinu di $g(a)$, maka fungsi $(f \circ g)(x)$ kontinu di a.

Bukti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) &= \lim_{x\to a} f(g(x)) \\ &= f(\lim_{x\to a} g(x)) && \text{karena f kontinu di g(a)} \\ &= f(g(a)) && \text{karena g kontinu di a} \\ &= (fog)(a)\end{aligned}$$

Contoh Tentukan dimana fungsi

$$f(x) = \cos\left(\frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 + 3x - 4}\right)$$

kontinu

Jawab :

Fungsi f(x) dapat dituliskan sebagai komposisi dua fungsi atau

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$

dengan

$$h(x) = \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 + 3x - 4} \quad \text{dan } g(x) = \cos x$$

Karena h(x) kontinu di R-{-4,1} dan g(x) kontinu dimana-mana maka fungsi f(x) kontinu di R-{-4,1}

Soal Latihan

- Dimanakah fungsi berikut kontinu?
  - $f(x) = \cos(x^2 - 2x + 1)$
  - $f(x) = \cos((x^2 - 1)/(x+1))$