Classical Field Theory Notes

...

4 de enero de 2021

1. Introducción

Para describir el movimiento de los sitemas con un número finito de grados de libertad los más eficaces resultaron los métodos de Lagrange y Hamilton. La descripción dinámica más general de los sistemas con un número finito de grados de libertad puede obtenerse si el principio variacional de Hamilton se considera como base de la teoría.

Los campos son en sí objetos con un número infinito de grados de libertad, es decir, sistemas distribuidos o continuos.

2. Teoría de campos en la forma lagrangiana

Consideremos una cadena lineal cerrada que consta de N puntos iguales de masa m cada uno, unidos uno con otro mediante muelles (Fig.1). Sea que estos muelles que efectúan una interacción elástica entre los puntos de la cadena, poseen un mismo coeficiente de rigidez k. Suponiendo que en estado de equilibrio la cadena es de por sí un anillo de radio R y las distancias entre las masas vecinas son las mismas e iguales a a. Al desviarse del equilibrio se admiten movimientos unidimensionales por la circunferencia de anillo. Designamos por q_s al desplazamiento del s-ésimo punto, entonces la energía cinética es [1]

$$T = \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{q}_s^2 \tag{2.1}$$

y la energía potencial [2]

$$V = \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{2} k (q_{s+1} - q_s)^2 \tag{2.2}$$

Entonces el lagrangiano del sistema es igual a

$$L = \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{q}_s^2 - \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{2} k (q_{s+1} - q_s)^2 \tag{2.3}$$

donde $s = 1, 2, \ldots, N$

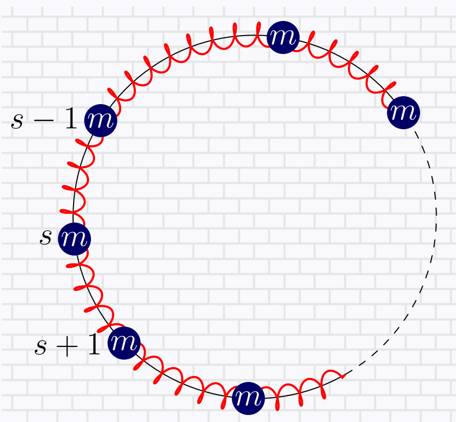

Figura 1: Cadena Lineal

[1] Aquí $\dot{q}_s = \mathrm{d}q_s / \mathrm{d}t$.

[2] Se toma la condición de periodicidad $q_1 = q_{N+1}$.

La acción viene dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L = 0 \tag{2.4}$$

donde la estacionariedad de la operación

$$\delta S = \delta \int_{t1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L \tag{2.5}$$

para $\delta q_s\,(t_1) = \delta q_s\,(t_2)$, genera las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = 0 \tag{2.6}$$

La solución a estas ecuaciones determina el llamado *camino recto* donde el sistema efectúa un movimiento real. En nuestro caso las ecuaciones vienen a ser:

$$m\ddot{q}_s = k(q_{s+1} - q_s) - k(q_s - q_{s-1}), \qquad s = 1, 2, \dots, N \tag{2.7}$$

Para pasar a la distribución continua de la masa respecto a la cadena, examinemos el límita $a \to 0$ y $m \to 0$ a condición de que la densidad lineal de la masa $\lambda = m/a$ y el modulo de Young $\varepsilon = ka$ permanecen finitos. Dado que el tamaño de la cadena no varía en este caso, la cantidad de puntos y junto con ellos la cantidad de grados de libertad del sistema tienden al infinito. En este límite el número del punto s se sustituye por una magnitud continua x que prefija la posición del punto en el anillo, es decir, $s \to x$ y $a = dx$. El desplazamiento $q_s(t)$ se convierte en una función de dos variables continuas x y t, esto es $q_s(t) \to q(x,t)$, que satisface la condición de periodicidad, o sea, $q(x + 2\pi R, t) = q(x,t)$. En este caso

$$\begin{aligned} q_s - q_{s-1} &\to a\frac{\partial q}{\partial x} \\ (q_{s+1} - q_s) - (q_s - q_{s-1}) &\to a^2\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones (2.7) se convierte en

$$\lambda\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \tag{2.8}$$

ésta es una ecuación de ondas longitudinales elásticas que se propaga por el anillo con una velocidad $\sqrt{\varepsilon/\lambda}$.

Ahora examinemos el lagrangiano de la cadena

$$L = \sum_{s=1}^{N} \left(\frac{1}{2} a \frac{m}{a} \dot{q}_s^2 - \frac{1}{2} a \frac{(q_{s+1} - q_s)}{a^2} ak \right) \tag{2.9}$$

En el límite $N \to \infty$ la suma según s se sustituye por la integral

$$\left(\sum_s \to \frac{1}{a} \int \mathrm{d}x \right)$$

y se obtiene

$$
\begin{aligned}
L &= \int \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right] \\
&= \int \mathrm{d}x\, \mathcal{L}
\end{aligned}
$$

donde $\mathcal{L}$ recibe el nombre de *densidad lagrangiana*. Entonces la acción se transforma en una integral doble

$$
S = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x\, \mathcal{L} \tag{2.10}
$$

2.1. Problema variacional en tres dimensiones espaciales

De acuerdo con la deducción del apartado anterior, examinemos la generalización del problema variacional. Sea que la acción se prefija en la forma [3]

$$
S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{L}\left(\boldsymbol{\psi}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{x}, t\right) \tag{2.11}
$$

donde $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_N)$ tienen tres dimensiones espaciales y una temporal, el principio de Hamilton tiene la forma:

$$
\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{L}\left(\boldsymbol{\psi}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{x}, t\right) = 0
$$

Tenemos

$$
\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \sum_{\alpha=1}^{N} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha}\, \delta\psi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\, \delta\dot{\psi}_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha)} \cdot \delta(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha) \right\}
$$

donde las variaciones de los ψ_α son mutuamente independientes y se anulan en los extremos de la integracióon temporal y en la superficie que limita la región tridimensional V. Usando $\delta\dot{\psi}_\alpha = \partial(\delta\psi_\alpha)/\partial t$, una región de integración por partes como en el caso unidimensional proporciona

$$
\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\, \delta\dot{\psi}_\alpha = - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\right) \delta\psi_\alpha
$$

Ahora usando $\delta(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha) = \boldsymbol{\nabla}\,\delta\psi_\alpha$ y la identidad $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{\nabla} \cdot (f\boldsymbol{A}) - f\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$, podemos efectuar una integración por partes con ayuda del teorema de la divergencia para obtener

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha)} \cdot \delta\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha)} \cdot \boldsymbol{\nabla}\,\delta\psi_\alpha \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \oint_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{a} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha)}\, \delta\psi_\alpha - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha)}\right) \delta\psi_\alpha \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha)}\right) \delta\psi_\alpha
\end{aligned}
$$

[3] Aquí $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\nabla}\psi_1, \boldsymbol{\nabla}\psi_2, \ldots, \boldsymbol{\nabla}\psi_N)$.

pues las variaciones $\delta\psi_\alpha$ se anulan en la superficie Σ que limita la región espacial V. Entonces el principio de Hamilton toma la forma

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \sum_{\alpha=1}^{N} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\alpha/\partial t)}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} \right\} \delta\psi_\alpha = 0$$

para que la integral sea cero, necesariamente lo que está encerrado en "$\{\}$" debe ser cero. Por lo tanto nos quedan las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\alpha/\partial t)}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, N\,. \tag{2.12}$$

2.2. Problema variacional para campos relativistas

Sean x^μ, donde $\mu = 0, 1, 2, \ldots, D-1$, las coordenadas espaciotemporales del espacio-tiempo de Minkowsky con $\boldsymbol{x} = (x^0, x^1, \ldots, x^{D-1})$, tomando $x^0 = ct$. Sean $\psi^I(\boldsymbol{x})$, donde $I = 1, 2, \ldots, N$, que denotan un conjunto de N variables de campo de valor real con $\boldsymbol{\psi} = (\psi^1, \ldots, \psi^N)$. La densidad lagrangiana viene a ser

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) \tag{2.13}$$

Aquí la acción viene dada por

$$S[\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})] = \int_\Omega \mathrm{d}^D\boldsymbol{x}\, \mathcal{L}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) \tag{2.14}$$

La integración se efectúa en cierta zona del espacio D-dimensional, al que pertenecen x^μ. También notemos que la densidad lagrangiana no tiene dependencia de segundas derivadas $\partial^2\boldsymbol{\psi}/\partial\boldsymbol{x}^2$ o de mayores ordenes.

Supongamos que en las fronteras del campo de integració las funciones ψ^I se eligen de una manera determinada (condiciones de frontera) y dentro del campo se admiten sus variaciones arbitrarias.

$$\psi^I = \psi^I(\boldsymbol{x}) \to \psi^I(\boldsymbol{x}) + \delta\psi^I(\boldsymbol{x})$$

Si ahora aplicamos el principio de Hamilton a la acción (2.14), la condición de carácter extremal de la acción tiene la forma

$$\delta S[\boldsymbol{\psi}] = \delta \int_\Omega \mathrm{d}^D\boldsymbol{x}\, \mathcal{L}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) = 0 \tag{2.15}$$

Si definimos $\psi^I_{,\mu} \equiv \partial\psi^I/\partial x^\mu$, podemos escribir la variación de la acción como

$$\delta S[\boldsymbol{\psi}] = \int_\Omega \mathrm{d}^D\boldsymbol{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^I}\,\delta\psi^I + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^I_{,\mu}}\,\delta\psi^I_{,\mu}\right) \tag{2.16}$$

Dado que las coordendas independientes x^μ no cambian, la variación de la acción es conmutativa con la diferenciación, es decir:

$$\delta\frac{\partial\psi^I}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\delta\psi^I \quad\to\quad \delta\psi^I_{,\mu} = \partial_\mu\,\delta\psi^I \tag{2.17}$$

teniendo en cuenta esto, transformemos (2.16) separando la divergencia

$$\delta S[\boldsymbol{\psi}] = \int_\Omega \mathrm{d}^D\boldsymbol{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^I}\, \delta\psi^I + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^I_{,\mu}}\, \delta\psi^I \right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^I_{,\mu}} \right) \delta\psi^I \right]$$

Según el teorema de Gauss, la integral espacial respecto a la divergendia se transforma en una integral superficial respecto a la frontera de volumen $\partial\Omega$, donde las variaciones $\delta\psi^I\big|_{\partial\Omega} = 0$ y por eso la integral se anula:

$$\int_\Omega \mathrm{d}^D\boldsymbol{x}\; \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}}^I \right) \delta\psi^I = \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\sigma_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^I_{,\mu}}\, \delta\psi^I \right) = 0$$

Entonces nos queda

$$\delta S[\boldsymbol{\psi}] = \int_\Omega \mathrm{d}^D\boldsymbol{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^I_{,\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^I_{,\mu}} \right) \delta\psi^I = 0 \tag{2.18}$$

De aquí, en virtud del carácter arbitrario de las variaciones $\delta\psi^I$, obtenemos definitivamente las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^I} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^I)} \right) = 0, \qquad I = 1, 2, \ldots, N \tag{2.19}$$

que son en sí ecuaciones dinámicas del sistema continuo (del campo) con coordenadas generalizadas (funciones del campo) ψ^I.

3. Teoría de campos en la forma hamiltoniana

Retornando al problema de la cadena lineal examinado al principio de la teoría en la forma lagrangiana. En lugar de las variables q_s para cada s-ésimo punto material introduciremos las variables canónicas: una coordenada (q_s) y un impulso

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial q_s} \tag{3.1}$$

y mediante la transformación de Legendre construimos la función de Hamilton de la cadena

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{s=1}^{N} p_s \dot{q}_s - L \tag{3.2}$$

y como es sabido se obtienen las siguientes ecuaciones canónicas

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \tag{3.3}$$

que describen el movimiento de las masa puntuales de la cadena.

Ahora pasemos al límite de la distribución continua de la masa por la cadena

$$a, m \to 0, \quad N \to \infty, \quad \lambda = \frac{m}{a} < \infty, \quad \varepsilon = ka < \infty$$

Entonces para el impuslo canónico se obtiene

$$p_s = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \sum_{s'}^{N} \frac{1}{2} m \dot{q}_{s'}^2 = a \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \sum_{s'}^{N} \frac{1}{2} \lambda \dot{q}_{s'}^2 \to \mathrm{d}x \, \frac{\partial}{\partial(\partial q/\partial t)} \mathcal{L}$$

donde $\mathcal{L}$ venía a ser

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \tag{3.4}$$

bajo este resultado podemos definir

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q/\partial t)} \tag{3.5}$$

entonces $p_s \to dx\pi$ y en el límite para la función de Hamilton hallamos

$$H = \sum_s p_s \dot{q}_s - L \to \int \mathrm{d}x \left(\pi \frac{\partial q}{\partial t} - \mathcal{L} \right) = \int \mathrm{d}x \, \mathcal{H} \tag{3.6}$$

donde

$$\mathcal{H} = \pi \frac{\partial q}{\partial t} - \mathcal{L} \tag{3.7}$$

es la densidad de la función de Hamilton (densidad Hamiltoniana). Utilizando la forma explícita de $\mathcal{L}$, podemos escribir $\mathcal{H}$ como función explícita de las variables canónicas $\pi, q, \partial q/\partial t$:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{\lambda} + \varepsilon \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right) \tag{3.8}$$

En lo que se refiere a las ecuaciones canónicas (3.3), es muy complicado efectuar para ellas el paso al límite. Por eso pasaremos directamente a la deducción de las ecauciones canónicas del campo de la misma manera como se hace para los sistemas discretos, esto es, con la transformación de Legendre.

3.1. Problema variacioonal en tres dimensiones espaciales

Vamos a definir el momento canónicamente conjugado de $\psi_\alpha(\boldsymbol{x})$, denotado por $\pi^\alpha(\boldsymbol{x})$,

$$\pi^\alpha(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} \tag{3.9}$$

y la *densidad hamiltoniana* proveniente de la transformación de Legendre de la densidad lagrangiana, esto es,

$$\mathcal{H} = \sum_\alpha \pi^\alpha \dot{\psi}_\alpha - \mathcal{L} \tag{3.10}$$

que viene expresada en términos de π^α, ψ_α y sus gradientes. La hamiltoniana

$$H[\psi_\alpha, \pi^\alpha] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \, \mathcal{H}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\pi}) \tag{3.11}$$

aquí $\boldsymbol{\pi} = (\pi^1, \ldots, \pi^N)$.

La acción en la forma hamiltoniana se escribe

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{N} \pi^\alpha \dot{\psi}_\alpha - \mathcal{H}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{x}, t) \right\} \tag{3.12}$$

debido al principio variacional $\delta S = 0$. Variando independientemente los campos y sus momentos canónicamente conjugados, el principio de Hamilton toma la forma

$$\begin{aligned}\delta S = \int_\Omega \mathrm{d}^4\boldsymbol{x} \sum_{\alpha=1}^{N} \Big\{ \pi^\alpha\, \delta\dot{\psi}_\alpha + \delta\pi^\alpha\, \dot{\psi}_\alpha - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi_\alpha}\,\delta\psi_\alpha - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha)} \cdot \delta(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha) \\ - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi^\alpha}\,\delta\pi^\alpha - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\pi^\alpha)} \cdot \delta(\boldsymbol{\nabla}\pi^\alpha) \Big\} = 0\end{aligned}$$

nuevamente como el caso lagrangiano, efectuamos integración por partes

$$\begin{aligned}\delta S = \int_\Omega \mathrm{d}^4\boldsymbol{x} \sum_{\alpha=1}^{N} \Big\{ \left(-\dot{\pi}^\alpha - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi_\alpha} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha)} \right) \delta\psi_\alpha \\ + \left(\dot{\psi}_\alpha - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi^\alpha} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\pi^\alpha)} \right) \delta\pi^\alpha \Big\} = 0\end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes de $\delta\psi_\alpha$ y $\delta\pi^\alpha$ obtenemos

$$\dot{\psi}_\alpha = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi^\alpha} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\pi^\alpha)} \tag{3.13}$$

$$\dot{\pi}^\alpha = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi_\alpha} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha)} \tag{3.14}$$

que son las ecuaciones de campo en la forma hamiltoniana. Usando derivada funcional obtenemos las ecuaciones de Hamilton en forma mas compacta

$$\dot{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\delta H(t)}{\delta\pi^\alpha(\boldsymbol{x}, t)} \tag{3.15}$$

$$\dot{\pi}_\alpha(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\delta H(t)}{\delta\psi_\alpha(\boldsymbol{x}, t)} \tag{3.16}$$

4. Algunos campos

Campo de Schrödinger

Ejemplo 4.1. *Sea Ψ un campo complejo y considere la densidad lagrangiana*

$$\mathcal{L} = \frac{\imath\hbar}{2}\left(\Psi^*\dot{\Psi} - \dot{\Psi}^*\Psi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\Psi \cdot \boldsymbol{\nabla}\Psi^* - V(\boldsymbol{x}, t)\Psi^*\Psi$$

tomando Ψ y Ψ^* como campos independientes y que $V(\boldsymbol{x}, t)$ es real. Muestre que las ecuaciones de Lagrange correspondientes son la ecuación de Schrödinger y su complejo conjugado. Luego encuentre la densidad hamiltoniana.

Solución. Tenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\alpha/\partial t)}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi_\alpha)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi_\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, 2\ .$$

- Caso $\psi_1 = \Psi^*$, calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\Psi^*/\partial t)}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\iota\hbar}{2}\Psi\right) = -\frac{\iota\hbar}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\Psi^*)}\right) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\Psi\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\Psi^*} = \frac{\iota\hbar}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - V(\boldsymbol{x},t)\Psi$$

  Por lo tanto se obtiene la famosa ecuación de Schrödinger

$$\iota\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(\boldsymbol{x},t)\Psi$$

- Caso $\psi_2 = \Psi$, calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\Psi/\partial t)}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\iota\hbar}{2}\Psi^*\right) = \frac{\iota\hbar}{2}\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\Psi)}\right) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\Psi^*\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^*$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\Psi} = -\frac{\iota\hbar}{2}\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} - V(\boldsymbol{x},t)\Psi^*$$

  Así obtenemos el conjugado complejo de la ecuación de Schrödinger

$$-\iota\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi^* + V(\boldsymbol{x},t)\Psi^*$$

Ahora calculamos el momento canónico conjugado de Ψ y Ψ^*

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}} = \frac{\iota\hbar}{2}\Psi^*$$
$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}^*} = -\frac{\iota\hbar}{2}\Psi$$

entonces la densidad Hamiltoniana es

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi\dot{\Psi} + \pi^*\dot{\Psi}^* - \mathcal{L}\\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\Psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\Psi + V\Psi^*\Psi\end{aligned}$$

■

Campo de Klein-Gordon

Ejemplo 4.2. *Consideremos una teoría de un mesón escalar cuya densidad lagrangiana es*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi^2\right)$$

Muestre que la ecuación de Lagrange relativista correspondiente es la ecuación de Klein-Gordon.

Solución. Recordemos que $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$. Si introducimos la notación $\phi_\mu \equiv \partial_\mu\phi$, se cumple que $g^{\nu\mu}\phi_\mu = \phi^\nu$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= \frac{\partial}{\partial\phi_\mu}\left(\frac{1}{2}\phi_\nu g^{\nu\lambda}\phi_\lambda\right)\\ &= \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu g^{\nu\lambda}\phi_\lambda + \frac{1}{2}\phi_\nu g^{\nu\lambda}\delta_\lambda{}^\mu\\ &= \frac{1}{2}\left(g^{\mu\lambda}\phi_\lambda + \phi_\nu g^{\nu\mu}\right) = \phi^\mu\end{aligned}$$

Entonces

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = \partial_\mu\partial^\mu\phi$$

Luego calculamos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{m^2c^2}{\hbar^2}(2\phi)\right)\\ &= -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0$$

Recordando que $\partial_\mu\partial^\mu = \hat{\Box}$, se tiene

$$\left(\hat{\Box} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0$$

■

Campo de Maxwell

Ejemplo 4.3. *Consideremos el electromagnetismo de Maxwell con presencia de corrientes descritas por la cuadricorriente J^μ. En este caso los campos independientes son las componentes del cuadripotencial A_μ. Muestre que la densidad lagrangiana*

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon_0 c^2}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

conduce a las ecuaciones de Maxwell.

Solución. En nuestro caso $\psi_\alpha = A_\alpha$. Definimos el campo tensorial auxiliar $A_{\mu\alpha} \equiv \partial_\mu A_\alpha$ y teniendo en cuenta que $\partial\mathcal{L}/\partial A_\alpha = -J^\alpha$, las ecuaciones de Lagrange se reducen a

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu\alpha}} \right) + J^\alpha = 0$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu\alpha}} &= -\frac{\epsilon_0 c^2}{4} \left(\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial A_{\mu\alpha}} F^{\beta\gamma} + F_{\beta\gamma} \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial A_{\mu\alpha}} \right) \\ &= -\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial A_{\mu\alpha}} F^{\beta\gamma} \end{aligned}$$

por otro lado, de la definición $F_{\beta\gamma} = A_{\beta\gamma} - A_{\gamma\beta}$ resulta inmediatamente

$$\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial A_{\mu\alpha}} = \delta^\mu{}_\beta \delta^\alpha{}_\gamma - \delta^\mu{}_\gamma \delta^\alpha{}_\beta$$

entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu\alpha}} &= -\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left(\delta^\mu{}_\beta \delta^\alpha{}_\gamma - \delta^\mu{}_\gamma \delta^\alpha{}_\beta \right) F^{\beta\gamma} \\ &= -\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left(F^{\mu\alpha} - F^{\alpha\mu} \right) = -\epsilon_0 c^2 F^{\mu\alpha} \end{aligned}$$

Por lo tanto las ecuaciones del campo electromagnético son ($1/\mu_0 = \epsilon_0 c^2$):

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha} = \mu_0 J^\alpha \Longleftrightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

El otro par de ecuaciones se obtiene evidentemente de la definición $F_{\beta\gamma} = \partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta$.

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

■

Campo de Proca

5. Corchetes de Poisson

En la formulación Hamiltoniana, una variable dinámica X es un funcional de los ψ^I y π_α de la forma

$$X[\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\pi}] = \int_\Sigma \mathrm{d}\sigma_x \, \mathcal{X}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{x}, t) \tag{5.1}$$

donde la integración se extiende por todo el espacio y supongamos que ψ^I y π_I se anulan en el infinito espacial. Notemos que las variables dinámicas son, generalmente, funciones del tiempo. El corchete de Poisson de dos variables dinámicas es definido por

$$\{X(t), Y(t)\} = \int_\Sigma \mathrm{d}\sigma_x \left(\frac{\delta X(t)}{\delta \psi^I(t, \boldsymbol{x})} \frac{\delta Y(t)}{\delta \pi_I(t, \boldsymbol{x})} - \frac{\delta X(t)}{\delta \pi_I(t, \boldsymbol{x})} \frac{\delta Y(t)}{\delta \psi^I(t, \boldsymbol{x})} \right) \tag{5.2}$$

Así podemos escribir las ecuaciones de movimiento de la forma

$$\left\{\psi^I(t,\boldsymbol{x}), H(t)\right\} = \dot{\psi}^I(t,\boldsymbol{x}) \tag{5.3}$$

$$\{\pi_I(t,\boldsymbol{x}), H(t)\} = \dot{\pi}_I(t,\boldsymbol{x}) \tag{5.4}$$

Las relaciones entre corchetes de Poisson entre las variables canónicas son

$$\left\{\psi^I(t,\boldsymbol{x}), \pi_J(t,\boldsymbol{x}')\right\} = \delta^I{}_J \delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \tag{5.5}$$

y

$$\left\{\psi^I(t,\boldsymbol{x}), \psi^J(t,\boldsymbol{x}')\right\} = 0 = \{\pi_I(t,\boldsymbol{x}), \pi_J(t,\boldsymbol{x}')\} \tag{5.6}$$

6. Teorema de Noether

A. Derivada funcional

B. Relatividad especial