Instituto de Educação de Ciências e Tecnologia do Ceará

José Francimi Vasconcelos de Queiroz Júnior

26 de novembro de 2022

1 Trabalho de Cálculo

1.1 Questões

1. Calcule, caso existam, os limites abaixo:
   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, onde f(x) $= \begin{cases} x^2 \text{ se } x \leq 1 \\ 2x-1 \text{ se } x > 1 \end{cases}$
   (b) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, onde f(x) $= \begin{cases} x+1 \text{ se } x \geq 1 \\ 2x \text{ se } x < 1 \end{cases}$
2. Suponha que $|f(x)-f(1)| \leq (x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$.Prove que f é contínua em 1.
3. Sabendo que $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, mostre que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.
4. Seja $a > 0, a \neq 1$, mostre que $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = Ln(a)$. A partir daí, conclua que $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$.

Answers

Solution 1: (a)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$$

Se os dois existem e são iguais, logo o limite existe!

(b)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} 2 = 2$$

Os limites são diferentes, logo o limite não existe!

Solution 2:

$$|f(x)-f(1)| \leq (x-1)^2$$
$$-(x-1)^2 \leq f(x)-f(1) \leq (x-1)^2$$
$$-(x-1)^2+f(1) \leq f(x) \leq (x-1)^2+f(1)$$
$$\lim_{x\to 1} -(x-1)^2+f(1) \leq \lim_{x\to 1} f(x) \leq \lim_{x\to 1}(x-1)^2+f(1)$$

Pelo teorema do confronto

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

Portanto f é continua em 1.

Solution 3:

Pelos números positivos:

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$x = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow x \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty \therefore y \to +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{y\to +\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

Pelos números negativos:

$$\lim_{x\to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$x = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow x \to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \to -\infty \therefore y \to -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{y\to -\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$
$$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Os limites laterais existem!

Solution 4:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$$
$$a^h - 1 = t \Rightarrow a^h = t+1$$
$$\Rightarrow lna^h = ln(t+1) \Rightarrow$$
$$h.lna = ln(t+1)$$
$$h = \frac{ln(t+1)}{ln(a)}$$

quando $h \to 0 \Rightarrow a^h - 1 \to 0 \therefore t \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{ln(t+1)}{ln(a)} = \lim_{t\to 0} \frac{ln(t+1)}{t} =$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{ln(a)}{\frac{1}{t}.ln(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{ln(a)}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}$$
$$= \frac{ln(a)}{lne} = ln(a) \therefore$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = ln(a)$$

Em particular, se a = e $\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = ln(e) = 1$