Instituto de Educação de Ciências e Tecnologia do Ceará

José Francimi Vasconcelos de Queiroz Júnior

17 de dezembro de 2022

1 Trabalho de Cálculo

1.1 Questões

1. Faça o que se pede em cada item abaixo:
   (a) Sejam f e g funções deriváveis em a. Mostre que (fg)'(a)=f'(a) g(a)+f(a) g'(a);
   (b) Sejam f,g e h três funções deriváveis. Mostre que:
$$[f(x)g(x)h(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$
2. Sejam f e g funções deriváveis em a, com $g(a) \neq 0$. Mostre que $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$
3. Seja $f(x) > 0$. Mostre que $[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)}g'(x)ln(f(x)) + g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x)$
4. Seja g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que, $g(1) = 2$ e $g'(1) = 3$. Calcule f'(0), sabendo que $f(x) = e^x g(3x+1)$

Answers

Solution 1: (a)

$$(fg)(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a)}{x-a} \Rightarrow$$
$$(fg)'(a) = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a) + f(a)g(x) - f(a)g(x)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{g(x)(f(x) - f(a))}{x-a} + \frac{f(a)(g(x) - g(a))}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} f'(x)g(x) + f(a)g(x)' = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

(b)

$$\text{Se } g(x)h(x) = w(x) \Rightarrow [f(x)w(x)]' = f'(x)w(x) + f(x)w'(x)$$
$$\text{Se } w(x) = g(x)h(x) \Rightarrow [f(x)g(x)h(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)(g'(x)h(x) + g(x)h'(x)) \Rightarrow$$
$$[f(x)g(x)h(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Solution 2:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h(x)g(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$h'(a)g(a) + h(a)g'(a) = f'(a) \Rightarrow \frac{h'(a)f'(a) - h(a)g'(a)}{g(a)}$$

$$\text{Se } h(a) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \text{então } h(a) = \frac{\frac{f'(a)}{1} - \frac{f(a)}{g(a)}\frac{g'(a)}{1}}{g(a)} =$$

$$= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$$

Solution 3:

$$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow ln(y) = ln(f(x)^{g(x)}) \Rightarrow ln(y)' = [g(x)ln(f(x))]' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y}y' = g'(x)ln(f(x)) + g(x)ln(f(x))'$$

$$y' = f(x)^{g(x)}g'(x)ln(f(x)) + f(x)^{g(x)}g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x) \Rightarrow$$

$$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)}g'(x)ln(f(x)) + f(x)^{g(x)-1}g(x)f'(x)$$

Solution 4:

Derivando o f(x):

$$f(x) = e^x(3x+1) \Rightarrow f'(x) = [e^x]'g(3x+1) + e^x[g(3x+1)]' \Rightarrow$$

$$f'(x) = e^x g(3x+1) + e^x g'(3x+1)3 \Rightarrow f'(x) = e^x[g(3x+1) + 3g'(3x+1)]$$

Então para f'(0):

$$f'(0) = e^0[g(3\cdot 0+1) + 3g'(3\cdot 0+1)] \Rightarrow f'(0) = 1[(0+1) + 3g'(0+1)] \Rightarrow$$

$$f'(0) = g(1) + 3g'(1) = 2 + 3\cdot 3 = 11$$