Instituto de Educação de Ciências e Tecnologia do Ceará

José Francimi Vasconcelos de Queiroz Júnior

8 de outubro de 2022

1 Trabalho de Cálculo

1.1 Questões

1. Sejam f e g funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, com M $\neq 0$. Prove que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.
2. Mostre que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.
3. Calcule:
   (a) $\lim_{x\to -2} \frac{2x^3+9x^2+12x+4}{-x^3-2x^2+4x+8}$
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x^2+x-2}$
4. Existe um número a tal que: $\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ exista? Caso exista, encontre a e o valor do limite.

Answers

Solution 1: Como M $\neq 0 \Rightarrow Peloteorema : \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L \therefore$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \left[f(x) \frac{1}{g(x)} \right] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = L\frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

Solution 2: Queremos provar que se $0 <\mid x-1 \mid< \delta \Rightarrow \mid x^2-9 \mid< \varepsilon$,
mas $\mid x^2-9 \mid = \mid (x-3)(x+3) \mid = \mid x-3 \mid\mid x+3 \mid$
Suponha que $\delta \leq 1 \therefore$ se $\mid x-3 \mid< \delta \Rightarrow \mid x-3 \mid< 1$
$-1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow 5 < x+3 < 7 \Rightarrow \mid x+3 \mid< 7$

$\therefore \mid x-3 \mid\mid x+3 \mid< \delta\ 7$

$\delta \leq \frac{\varepsilon}{7}$ Tome $\delta = mín\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$

$\therefore$ Se $0 <\mid x-3 \mid< \delta \Rightarrow\mid x-3 \mid< \frac{\varepsilon}{7} \Rightarrow\mid x-3 \mid 7 < \varepsilon \Rightarrow$
$\mid x-3 \mid\mid x+3 \mid<\mid x-3 \mid 7 < \varepsilon \Rightarrow\mid x-3 \mid\mid x+3 \mid< \varepsilon \Rightarrow\mid x^2-9 \mid< \varepsilon$

Solution 3: (a) Temos:

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^3+9x^2+12x+4}{-x^3-2x^2+4x+8} \Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{(2x^2+5x+2)(x+2)}{(-x^2+4)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{2x^2+5x+2}{-x^2+4} \Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{(2x+1)(x+2)}{(-x+2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{2x+1}{-x+2} = \frac{-3}{4}$$

(b) Temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x^2+x-2} \left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x+1-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$$

Solution 4: Substituindo o x por -2
Temos: $3(-2)^2 + a(-2) + a + 3 = 0 \Rightarrow 12 - 2a + a + 3 = 0 \Rightarrow -a + 15 = 0 \Rightarrow a = 15$
O número existe e é 15
Substituindo a por 15 temos:

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+15x+18}{x^2+x-2} \Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{(3x+9)(x+2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{3x+9}{x-1} = \frac{3(-2)+9}{-2-1} = \frac{3}{-3} = -1$$