Informatică - rezolvări

1. c) $\frac{1}{11}$

Cum nu se precizează care este zarul ce indică deja valoarea 6, acesta poate reprezenta fie linia 6, fie coloana 6. Deci există 11 cazuri posibile. Vrem ca celălalt zar să indice valoarea 5, ceea ce ar fixa pionul fie în poziţia (5, 6), fie în poziţia (6, 5), însă cazul favorabil este (5, 6), conform cerinţei. Astfel, numărul cazurilor favorabile este egal cu 1, iar cel al cazurilor posibile este egal cu 11. Prin urmare, probabilitatea ca pionul să ajungă fixat în poziţia (5, 6), la acest pas, este $\frac{1}{11}$.

2. a) 4368

Folosind metoda *Stars and bars*, se obţin C_{16}^{5} moduri de a-l scrie pe 17 ca sumă de 6 numere naturale nenule, adică 4368 moduri (deoarece există 16 spaţii între cele 17 stele ce reprezintă numărul 17, şi ne interesează să fixăm barele în aşa fel încât să existe 6 grupuri de stele, deci sunt necesare 5 bare, iar între fiecare două bare trebuie să existe măcar o stea, deoarece numerele sunt nenule. Astfel, numărul de moduri în care pot fi fixate cele 5 bare în cele 16 spaţii este dat de C_{16}^{5}).

3. d) 4040

Se observă că după fiecare apel al funcţiei **f** se afişează câtul împărţirii lui **n** la 2 (deoarece numerele sunt întregi). Astfel, în urma apelului **f(2024)**, se va afişa şirul de numere **2024 1012 506 253 126 63 31 15 7 3**, suma acestora fiind **4040**.

4. e) 0224Aaacimottu

Secvenţa de instrucţiuni are ca efect sortarea vectorului de caractere în ordine crescătoare (după codurile ASCII). Astfel, rezultatul va fi **0224Aaacimottu**.

5. f) 360

Cum anagramele sunt distincte, iar caracterul 'e' apare de două ori, numărul cerut este dat de numărul tuturor permutărilor, împărţit la numărul de permutări ale repetiţiilor fiecărui caracter, adică $\frac{6!}{2!}$, deci 360.

6. b) 681

Metoda I

Cum deplasarea se poate face, la fiecare pas, fie pe orizontală, fie pe verticală, fie pe diagonală (în condițiile date), există 5 cazuri, în funcție de numărul de mișcări pe diagonală.
Fie **diag** numărul mișcărilor diagonale (pe diagonala secundară a fiecărei celule), **r** - numărul mișcărilor orizontale (în dreapta), și **u** - numărul mișcărilor verticale (în sus).
Astfel, considerând toate cele cinci cazuri, obținem:

Cazul I $diag = 0 \implies r = 5, u = 4 \;\Rightarrow\; \exists\ \mathrm{C}_9^4 * \mathrm{C}_4^0 =$ **126** drumuri;
Cazul II $diag = 1 \implies r = 4, u = 3 \;\Rightarrow\; \exists\ \mathrm{C}_8^4 * \mathrm{C}_4^1 =$ **280** drumuri;
Cazul III $diag = 2 \implies r = 3, u = 2 \;\Rightarrow\; \exists\ \mathrm{C}_7^4 * \mathrm{C}_4^2 =$ **210** drumuri;
Cazul IV $diag = 3 \implies r = 2, u = 1 \;\Rightarrow\; \exists\ \mathrm{C}_6^4 * \mathrm{C}_4^3 =$ **60** drumuri;
Cazul V $diag = 4 \implies r = 1, u = 0 \;\Rightarrow\; \exists\ \mathrm{C}_5^4 * \mathrm{C}_4^4 =$ **5** drumuri.

Însumându-le, obținem **681** drumuri ce respectă proprietățile date.

Metoda II

O altă metodă constă în alegerea pașilor **r** și **u** în așa fel încât **r** să preceadă **u**, existând astfel posibilitatea înlocuirii succesiunii de pași **ru** cu pasul **diag**. Similar rezolvării anterioare, vor exista 5 cazuri. Cum fiecare succesiune **ru** poate fi înlocuită cu un pas **diag**, numărul de moduri în care **r** și **u** se pot alege va fi înmulțit cu $\mathbf{2^{diag}}$.

Astfel, considerând toate cele cinci cazuri, obținem:

Cazul I
rurururur $\Rightarrow\ diag = 4 \;\Rightarrow\; \exists\ \mathrm{C}_5^4 * \mathrm{C}_4^4 * 2^4 =$ **80** drumuri;

Cazul II
rururuurr $\Rightarrow\ diag = 3 \;\Rightarrow\; \exists\ \mathrm{C}_5^3 * \mathrm{C}_4^3 * 2^3 =$ **320** drumuri;

Cazul III
ruurruurr $\Rightarrow\ diag = 2 \;\Rightarrow\; \exists\ \mathrm{C}_5^2 * \mathrm{C}_4^2 * 2^2 =$ **240** drumuri;

Cazul IV
ruuuurrrr $\Rightarrow\ diag = 1 \;\Rightarrow\; \exists\ \mathrm{C}_5^1 * \mathrm{C}_4^1 * 2^1 =$ **40** drumuri;

Cazul V
uuuurrrrr $\Rightarrow\ diag = 0 \;\Rightarrow\; \exists\ \mathrm{C}_5^0 * \mathrm{C}_4^0 * 2^0 =$ **1** drum.

Însumându-le, obținem **681** drumuri ce respectă proprietățile date.

Metoda III

Problema se poate rezolva, evident, prin determinarea numărului de drumuri posibile (care respectă cerința) la fiecare pas. Fie **a** numărul de drumuri pentru pasul anterior pe segmentul orizontal, **b** - cel pentru pasul anterior pe segmentul vertical, și **c** - cel pentru pasul anterior pe segmentul diagonal. Atunci, numărul de drumuri posibile pentru pasul curent va fi egal cu **a + b + c**. Se parcurge, în acest mod, întreaga matrice (punctele de interes fiind intersecțiile segmentelor ce formează fiecare celulă), ultimul punct având rezultatul cerut (Figura 1).

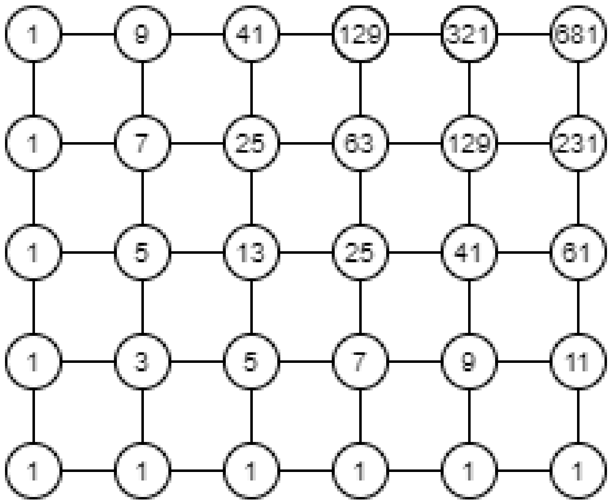

Figura 1

Observații

1. La fiecare pas, deplasarea se face fie pe verticală (pe segment, de jos în sus), fie pe orizontală (pe segment, de la stânga la dreapta), fie pe diagonală (diagonala secundară a fiecărei celule a matricei). Punctul de interes este cel din dreapta-sus, astfel că deplasarea se face către el, **înaintând, nu întorcându-ne pe diagonala secundară**. Deși în cazul mișcării pe diagonală nu se menționează, ca în celelalte două cazuri, că aceasta se face din colțul stânga-jos al celulei în colțul dreapta-sus (al aceleiași celule), este evident că un segment este parcurs, în cazul oricărui drum, o singură dată. Prin urmare, numărul drumurilor cerute este finit, putând fi determinat ca în metodele propuse mai sus.

2. Cum matricea are 4 linii și 5 coloane, conform enunțului, aceasta va arăta ca în Figura 2.
Precizarea privind indexarea ar fi influențat rezolvarea problemei în cazul în care erau menționate coordonatele destinației, însă, în cazul dat, destinația este *colțul din dreapta-sus*, deplasarea făcându-se pe segmente, nu prin celule.

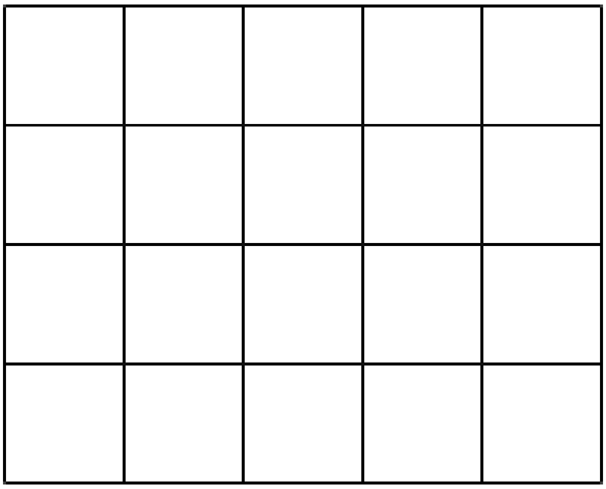

Figura 2

Notă

,,Sursa de inspirație” în cazul acestei probleme este problema din subiectul dat la examenul de admitere anticipată, sesiunea aprilie 2022.

7. d) 13

Cum căutarea binară constă în înjumătăţirea numărului de valori care trebuie verificate, iar cel mai nefavorabil caz este acela când elementul căutat nu există în vector, numărul de comparări în cazul dat este $[log_2 5000] + 1$, adică 13.

8. c) 2520

Pentru a găsi numărul de cicluri hamiltoniene distincte dintr-un graf neorientat complet este necesar să avem în vedere modul în care se formează, adică să ţinem cont de faptul că permutările circulare trebuie excluse. Astfel, se obţin $\frac{7!}{2} = 2520$ cicluri hamiltoniene distincte în graful dat.

9. c) 127

Enunţul dat reprezintă problema turnurilor din Hanoi. Există mai multe metode de rezolvare, iar numărul minim de mutări este $\mathbf{2^n - 1}$, unde **n** reprezintă numărul de discuri. În cazul dat, n = 7, deci numărul minim de mutări este $2^7 - 1 = 127$.
Pentru o mai bună documentare se recomandă înţelegerea explicaţiilor din diverse surse, una dintre ele fiind Turnurile din Hanoi - Wikipedia.

10. e) 18

Ţinând cont de ordinea în care se execută decrementarea, respectiv incrementarea variabilei **x**, se observă uşor că valoarea cerută este 18.