Графы

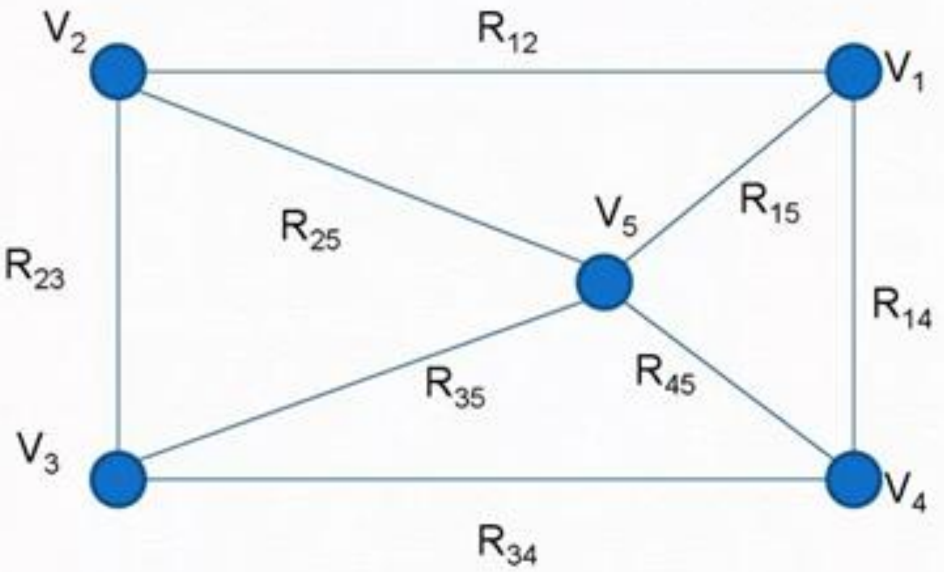
Основные понятия теории графов

Граф **-** это пара множеств

G=(V,R)

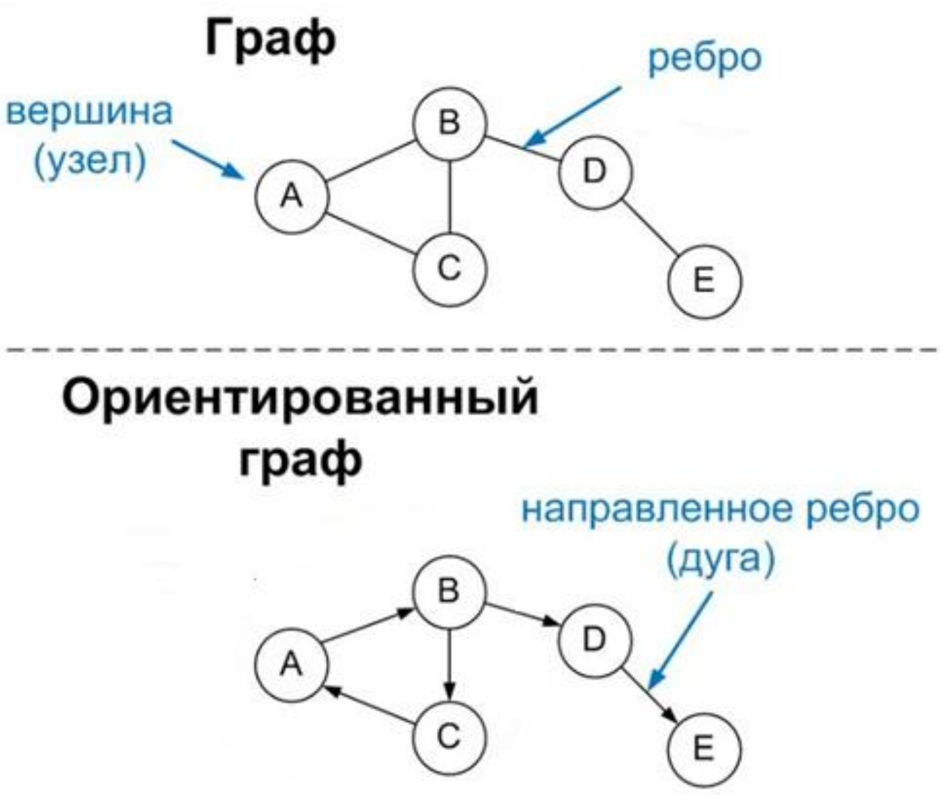
где ***V*** – непустое множество вершин;

R – множество рёбер, соединяющих пары вершин.

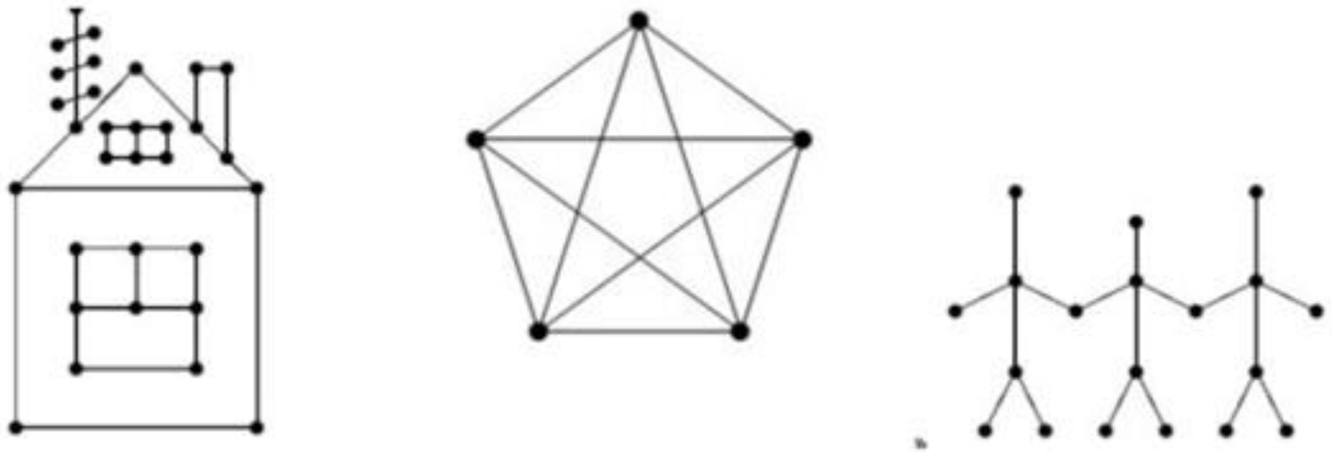


Любое ребро должно соединять две вершины, поэтому его можно задать парой вершин, т.е., например, $R_{2,3} = (v_2, v_3)$.

Если порядок вершин при задании ребра важен, то первая вершина называется *начальной вершиной*, в вторая - *конечной вершиной*, само ребро называется дугой, а граф *ориентированным графом* или *орграфом*. В противном случае, граф называется неориентированным или просто графом.

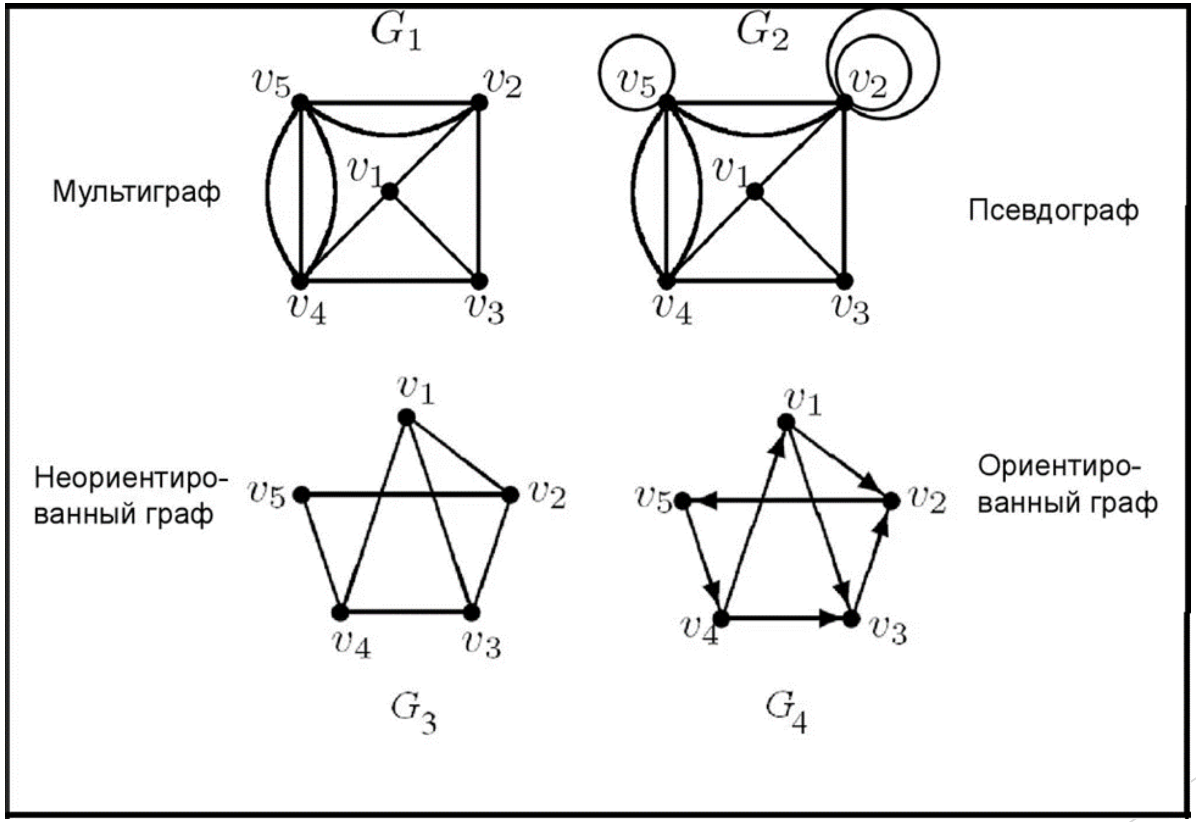


Примеры графов

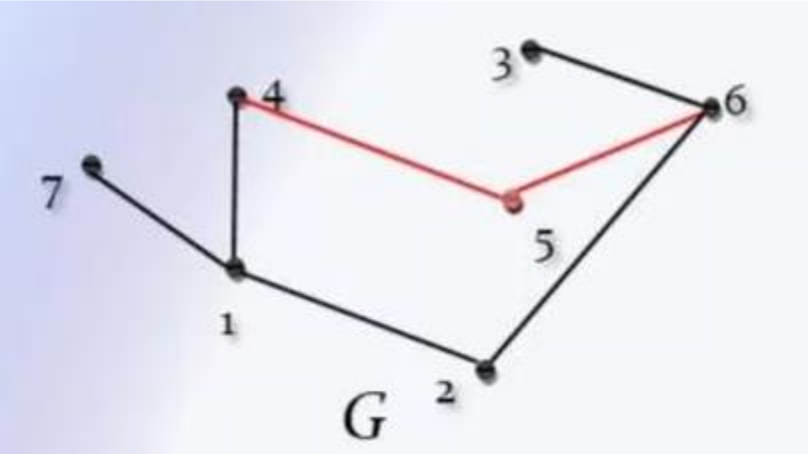


Если пара вершин может быть соединена двумя или более ребрами (или, соответственно, дугами одного направления), то граф называют мультиграфом, а такие ребра (или дуги) называются кратными.

Если в графе не только возможны кратные ребра (дуги), но и ребро (или дуга) может начинаться и заканчиваться в одной и той же вершине, то в этом случае граф называется псевдографом



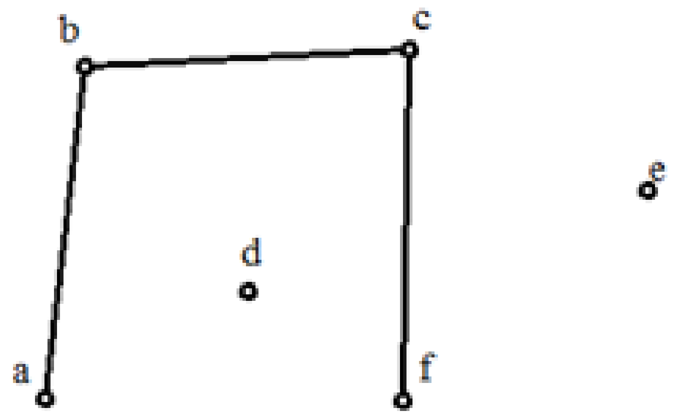
Граф G'(V',E') называется подграфом (или частью) графа G(V,E) (обозначается G' ⊆G), если V' ⊆V к E' ⊆ E. Подграф называется собственным, если он отличен от самого графа. Если V' = V, то G' называется остовным подграфом G.



Вершины и ребра (дуги)

- *Вершины*, соединенные ребром (дугой) называются *смежными*. *Ребра*, имеющие общую вершину, также называются *смежными*.
- Каждое *ребро* (дуга) соединяет две вершины, говорят, что оно *инцидентно* этим вершинам. Также про *вершину*, являющуюся концом ребра (дуги), говорят, что она *инцидентна* этому ребру (дуге).
- Количество ребер инцидентных данной вершине, называется степенью этой вершины. Если рассматриваются петли, то вклад каждой петли в степень вершины равна двум. Обозначать степень вершины v будем d(v).
- Если рассматривать только графы, то степень вершины равна количеству смежных данной вершине вершин. Ясно, что для псевдографов это не всегда так.

Если степень вершины равна нулю, то вершина называется изолированной.   Если степень вершины равна единицы, то вершина называется висячей.



Вершины a, f - висячие
d, e - изалированные.
Степень вершины a равна 1, вершины d - 0, вершины b - 2, вершины c - 2.

Теорема 2.1. (Лемма о рукопожатиях) Сумма степеней всех вершин графа (псевдографа) G(V,E) равна удвоенному количеству рёбер.

Пусть $q = |E|$, тогда.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2q$$

Доказательство. При подсчёте суммы степеней вершин каждое ребро учитывается два раза: для одного конца ребра и для другого.

Следствие 1. Число нечетных вершин чётно.

- Вершину четной (нечетной) степени будем называть четной (нечетной) вершиной.
- ***Доказательство***. По лемме о рукопожатиях сумма степеней всех вершин — чётное число.
- Сумма степеней вершин чётной степени чётна.
- Значит, сумма степеней вершин нечётной степени также чётна.
- Что возможно только в случае когда число нечетных вершин четно.

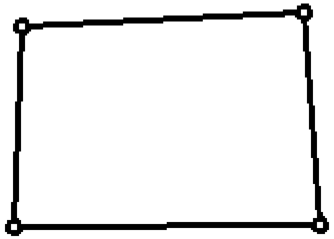
Для орграфа число дуг, исходящих из вершины v, называется полустепенью исхода, а число входящих — полустепенью захода. Обозначаются эти числа, соответственно, $d^-(v)$ и $d^+(v)$.

- Теорема 2.2. Сумма полустепеней вершин орграфа равна удвоенному количеству дуг. Пусть q=|E|, тогда

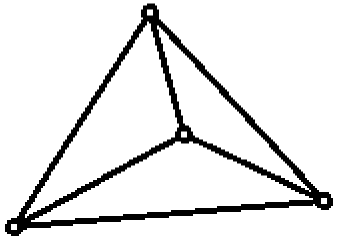
$$\sum_{v\in V} d^-(v) + \sum_{v\in V} d^+(v) = 2q$$

- Доказательство. Каждая дуга имеет начало, которое вносит вклад в полустепень исхода и конец, который вносит вклад в полустепень захода.

Граф называется регулярным, если степени всех его вершин одинаковы.

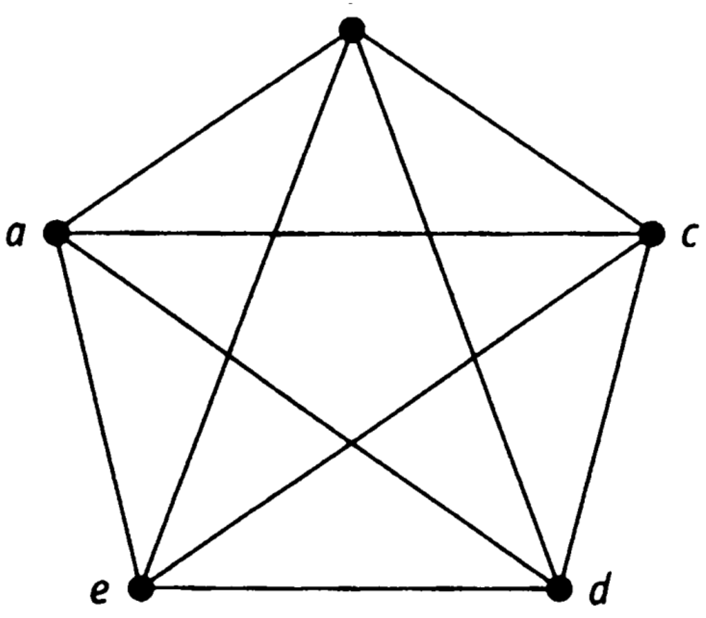


Регулярный граф степени 2.

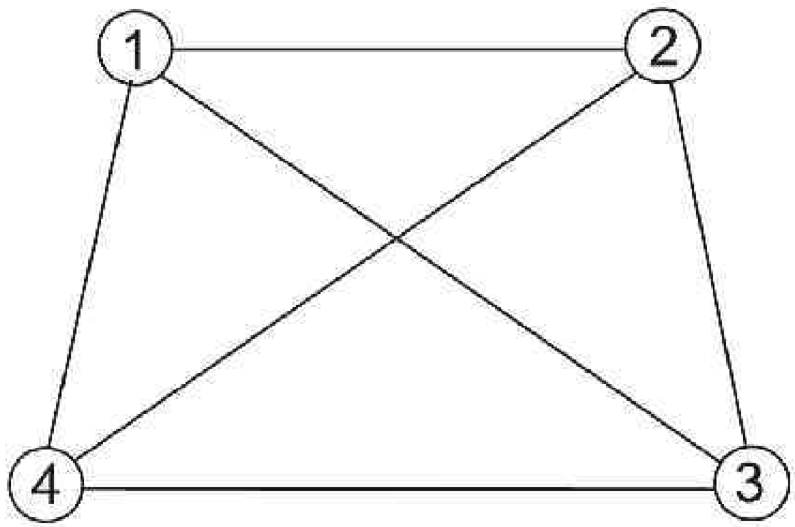


Регулярный граф степени 3.

Полным графом называется граф, у которого каждая вершина соединена с каждой.



Полный граф K_5

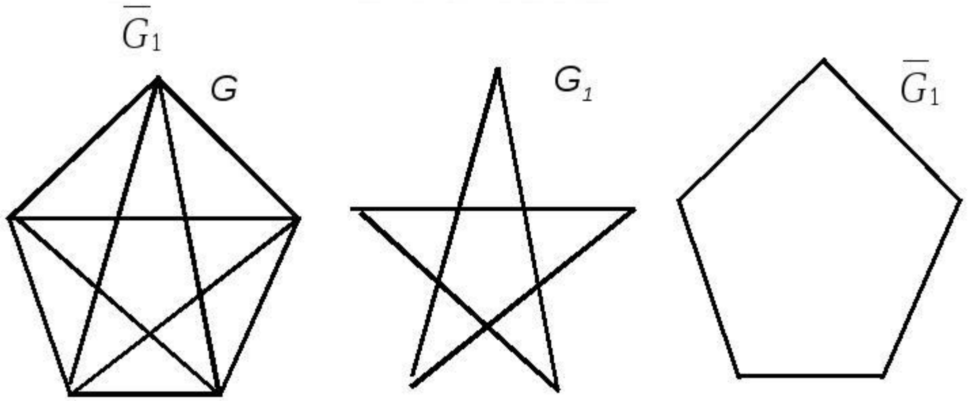


Полный граф K_4

Пустым графом называется граф, у которого все вершины изолированы.

Дополнение графа (обратный граф) — граф G', имеющий то же множество вершин, что и заданный граф G, но в котором две несовпадающие вершины являются смежными тогда и только тогда, когда они не смежные в G.

Дополнением графа $G = \langle V, X \rangle$ называется граф $\overline{G} = \langle V, X' \rangle$ с теми же вершинами *V*, что и граф *G*, и имеющий те и только те рёбра X', которые необходимо добавить к графу G, чтобы он стал полным.



Объединение, пересечение графов

Объединение графов $G_1 = (V_1, X_1)$, $G_2=(V_2,X_2)$ называется граф $G_1 \cup G_2=(V_1 \cup V_2, X_1 \cup X_2)$.

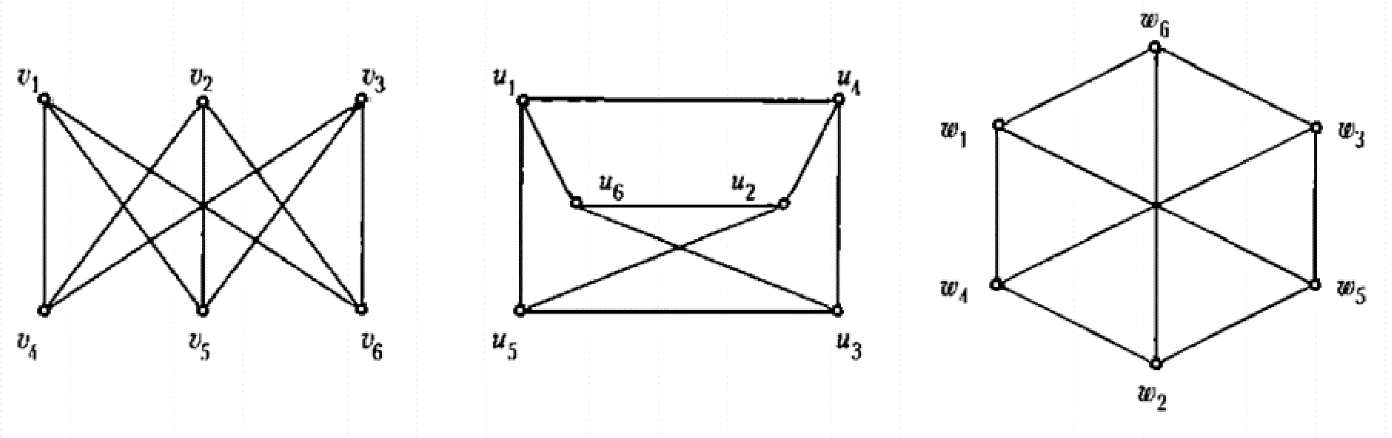
Пересечение графов $G_1 = (V_1, X_1)$, $G_2=(V_2,X_2)$ называется граф

$G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, X_1 \cap X_2)$.

Изоморфизм графов

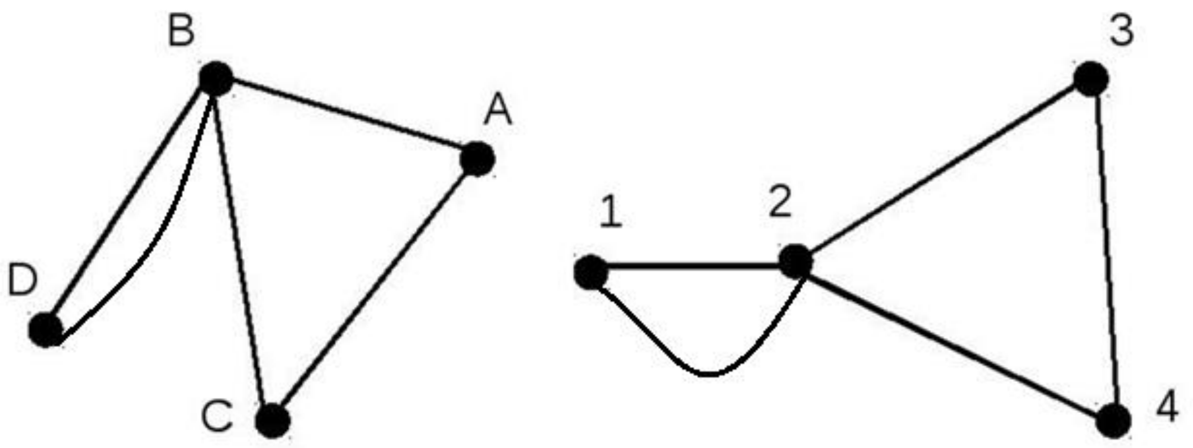
- Говорят, что два графа, $G_1(V,X)$ и $G_2(W,Y)$, изоморфны (обозначается $G_1 \sim G_2$, или $G_1 = G_2$), если существует взаимно-однозначное соответствие $h: V \rightarrow W$, сохраняющее смежность, т.е. две вершины
 $u, v \in V$ соединены ребром т. и т. т., когда их образы $h(u), h(v)$ соединены ребром:

$$(u, v) \in X \leftrightarrow (h(u), h(v)) \in Y.$$



Изоморфизм псевдографов

Псевдографы называются **изоморфными**, если существует взаимно-однозначное соответствие между их рёбрами и вершинами, причём соответствующие рёбра соединяют соответствующие вершины.

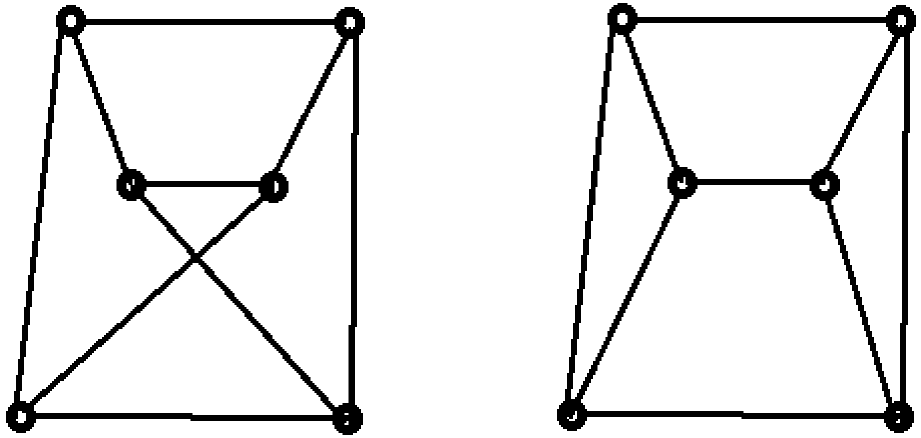


Изоморфизм графов является эквивалентностью

- Докажем это утверждение
- Поскольку тождественная функция определяет изоморфизм графа самого на себя, то отношение рефлексивно.
- Если взаимно-однозначное соответствие $h\colon V \to W$ задает изоморфизм графов $G_1(V,X)$, $G_2(W,Y)$, то соответствие h^{-1} задает изоморфизм графов $G_2(W,Y)$, граф $G_1(V,X)$. Следовательно, отношение изоморфизма симметрично.
- Если взаимно-однозначное соответствие $h\colon V \to W$ задает изоморфизм графов $G_1(V,X)$, $G_2(W,Y)$ и взаимно-однозначное соответствие $g\colon W \to U$ задает изоморфизм графов $G_2(W,Y)$, $G_3(U,Z)$, то соответствие gh будет взаимно-однозначным и будет задавать изоморфизм графа $G_1(V,X)$, $G_3(U,Z)$.

Изоморфизм графов и числовые характеристики

- У изоморфных графов одинаковые числовые характеристики, одинаковое число ребер, вершин, одинаковые степени, одинаковое число вершин, имеющих определенные степени и т.д.
- Но равенство числовых характеристик не определяет изоморфизм графов.



Эти графы не являются изоморфными

Способы задания графов

1. **Графический.** Все элементы множества V обозначаются точками на плоскости, проводятся линии, соединяющие вершины.

2. **Матричный.** С помощью матрицы смежности и матрицы инцидентности.

3. **Аналитический.** Задается список ребер и список вершин.

Матрица смежности

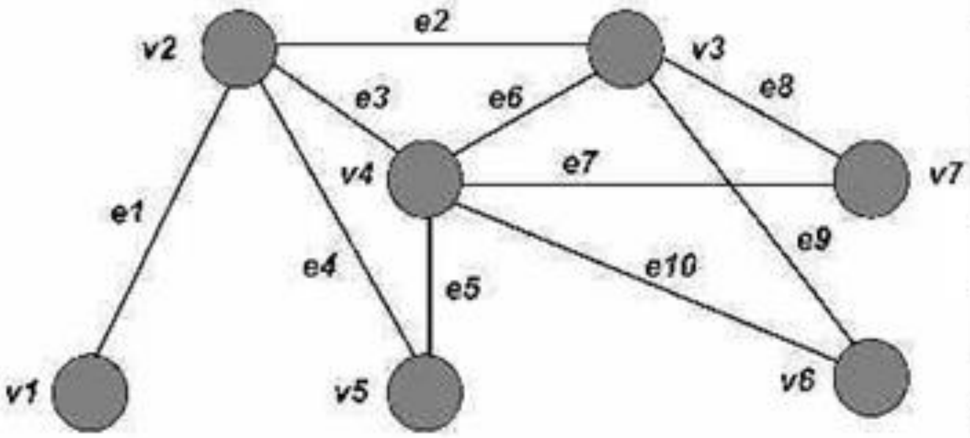
Матрица смежности – это квадратная матрица размерности $n \times n$, значения элементов которой характеризуются смежностью вершин графа. (n- это количество вершин графа). Элементы матрицы определяются следующим образом:

$$s_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ смежные;} \\ 0, \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

Если рассматривается псевдограф, то вместо единиц ставится число кратных ребер, соединяющих вершины v_i и v_j.

Матрица смежности

В матрице смежности **D** по горизонтали и вертикали перечисляются вершины. Каждый элемент этой матрицы, d_{ij} - это число ребер, соединяющих вершины i и j.



	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
v1		1					
v2	1		1	1	1		
v3		1		1		1	1
v4		1	1		1	1	1
v5		1		1			
v6			1	1			
v7			1	1			

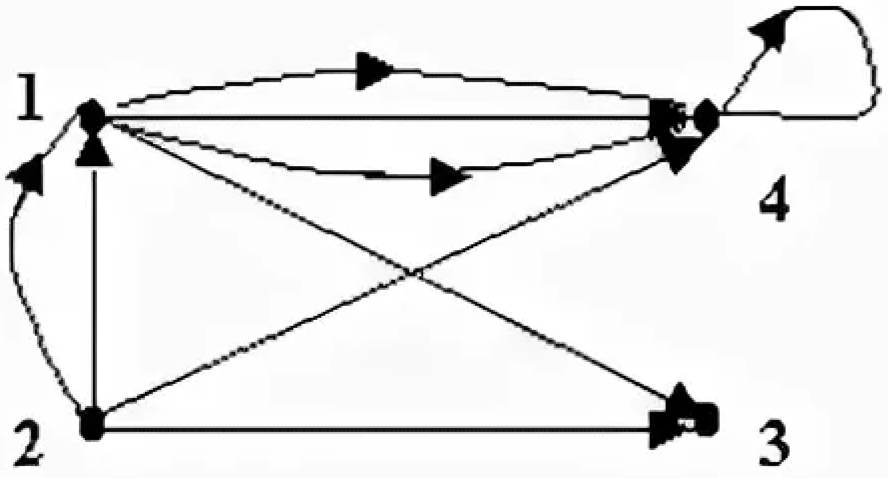
Матрица смежности ориентированного графа

Матрица смежности – это квадратная матрица размерности $n\times n$, значения элементов которой характеризуются смежностью вершин графа. (*n*- это количество вершин графа). Элементы матрицы определяются следующим образом:

$$s_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ если существует дуга } (v_i; v_j); \\ 0, \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

Если рассматривается псевдограф, то вместо единиц ставится число кратных дуг, соединяющих вершины v_i и v_j и имеющих начало в вершине v_i.

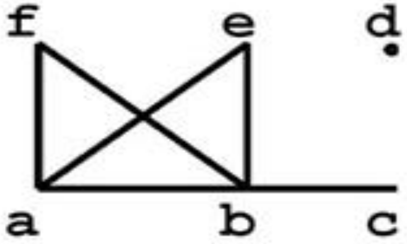
Матрица смежности ориентированного псевдографа



	1	2	3	4
1	0	0	1	3
2	2	0	1	1
3	0	0	0	0
4	0	0	0	1

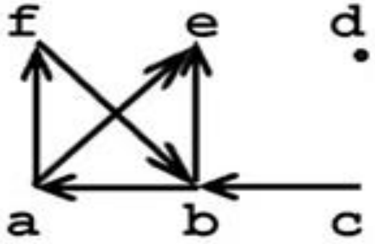
Матрица смежности

Неориентированный



	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	0	1	1
b	1	0	1	0	1	1
c	0	1	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	0
e	1	1	0	0	0	0
f	1	1	0	0	0	0

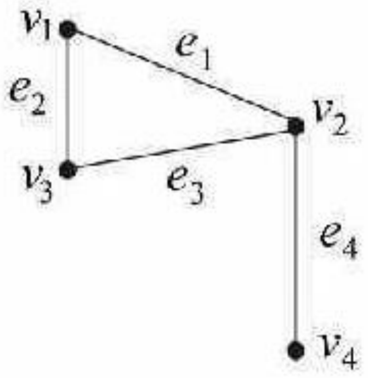
Ориентированный

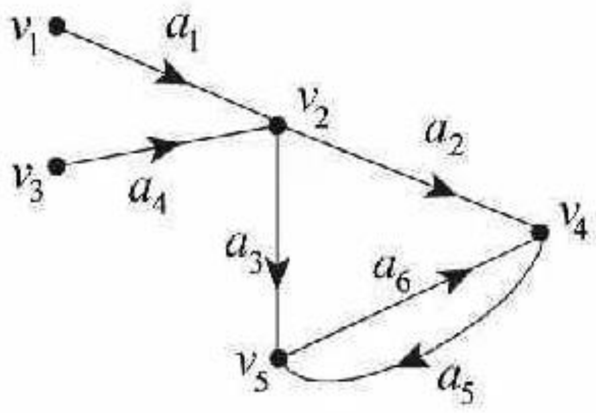


	a	b	c	d	e	f
a	0	0	0	0	1	1
b	1	0	0	0	1	0
c	0	1	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	0
f	0	1	0	0	0	0

Очевидно, что в программах используются не имена, а номера вершин графа.

Матрица смежности





Матрица смежности

$$
\begin{array}{cc}
\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}
\end{array}
$$

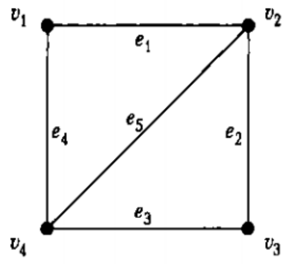
$$
\begin{array}{cc}
\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}
\end{array}
$$

Матрица инцидентности

В матрице инцидентности хранятся связи между инцидентными элементами – вершинами и ребрами. Размерность этой матрицы $m \times n$, где m - количество ребер, n - количество вершин. Столбцы матрицы соответствуют вершинам, строки – ребрам.

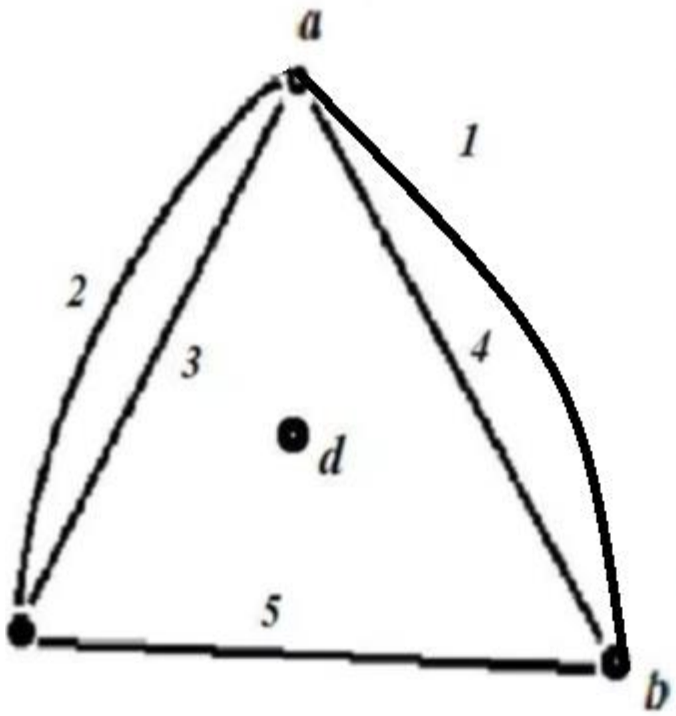
Если рассматривается неориентированный граф, то матрица инцидентности определяется так:

$$s_{i,j} = \begin{cases} 1, \textit{ если } i - \textit{тое ребро инцидентно } j - \textit{той вершине}; \\ 0, \textit{ в противном случае}; \end{cases}$$



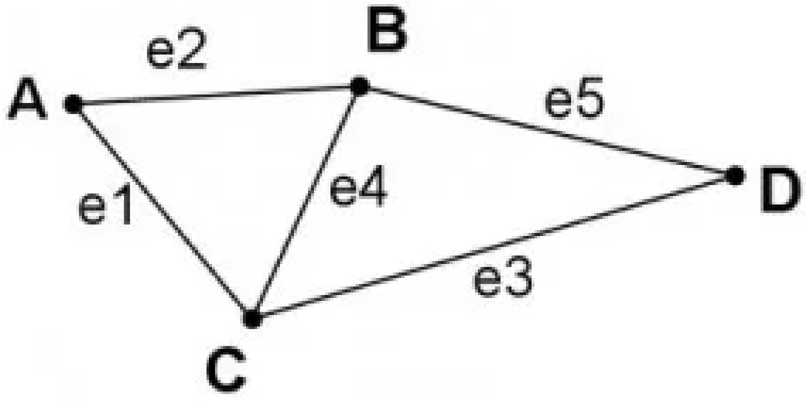
	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	1	1	0	0
e_2	0	1	1	0
e_3	0	0	1	1
e_4	1	0	0	1
e_5	0	1	0	1

Матрица инцидентности



	a	b	c	d
1	1	1	0	0
2	1	0	1	0
3	1	0	1	0
4	1	1	0	0
5	0	1	1	0

Матрица инцидентности



	e1	e2	e3	e4	e5
A	1	1	0	0	0
B	0	1	0	1	1
C	1	0	1	1	0
D	0	0	1	0	1

Матрица инцидентности

Нередко вершинам ставятся в соответствие строки, а ребрам - столбцы

Матрица инцидентности орграфа

Если число вершин графа G равно n, а число ребер – m, то матрицей инцидентности B = (B_{ij}) мультиграфа G называется матрица размера m x n:

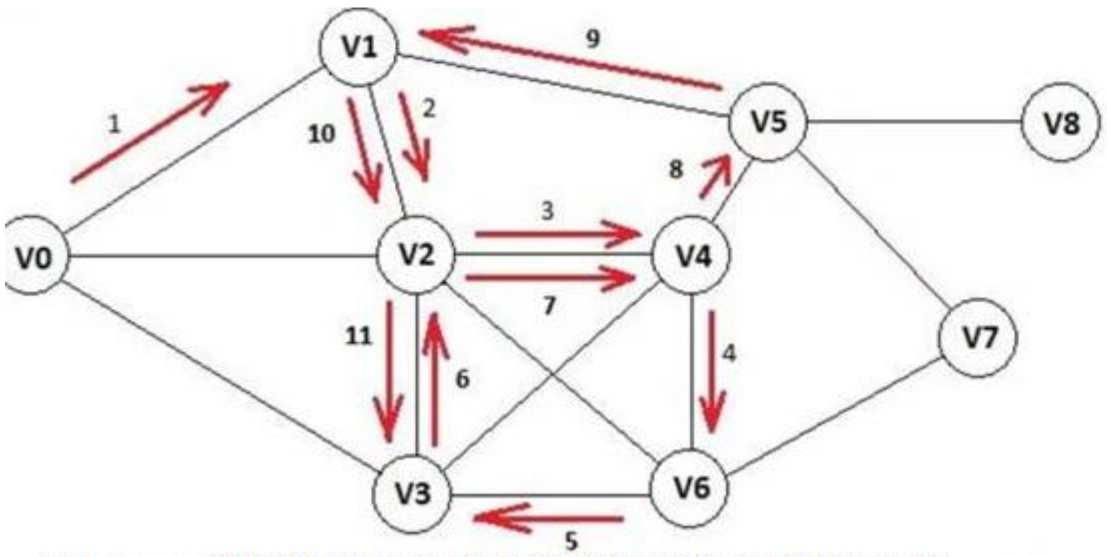
$$B_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если дуга } u_j \text{ исходит из вершины } a_i; \\ -1, \text{если дуга } u_j \text{ заходит в вершину } a_i \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Маршруты

- *Маршрутом* в псевдографе называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер, начинающаяся и заканчивающаяся вершиной, $v_0, x_1, v_1, x_2, \ldots, x_n, v_n$, в которой для любого $0<i\leq n$ ребро x_i соединяет вершины v_{i-1}, v_i.
  - Говорят, что *маршрут соединяет* вершины v_0 и v_n, они называются соответственно *началом* и *концом* маршрута, остальные вершины маршрута называются *промежуточными*.
  - Число n называется длиной маршрута.
  - Если начальная вершина маршрута совпадает с конечной, то маршрут называется *замкнутым*.

Маршруты

- В графе маршрут можно задать последовательностью вершин. $v_0, v_1, \ldots, v_n.$
- В псевдографе надо обязательно указывать ребра, причем последовательности ребер (дуг) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для задания маршрута будет достаточно.



Маршрут V0,V1,V2,V4,V6, V3,V2,V4,V5,V1V2,V3

Цепи и циклы

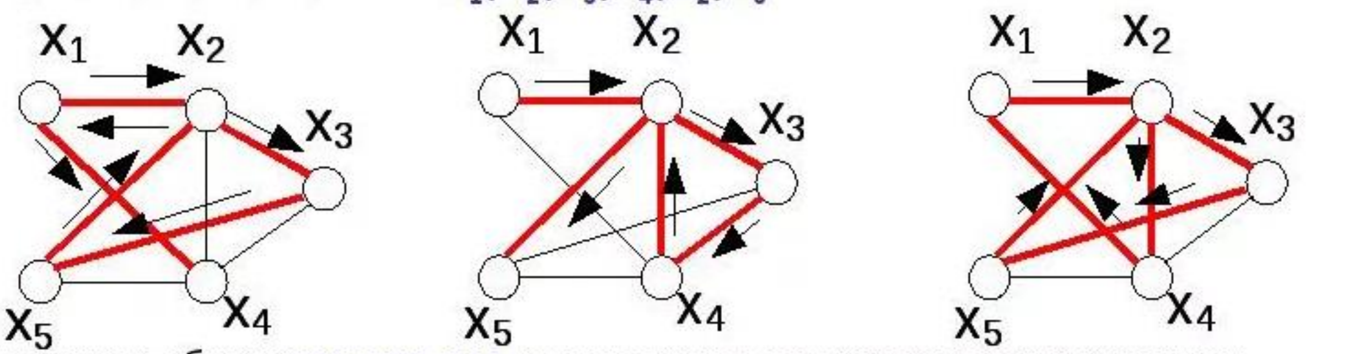
Если все ребра маршрута различны, он называется *цепью*.

Замкнутая цепь называется *циклом*.

Маршрут $x_1,x_2,x_3,x_5,x_2,x_1,x_4$

Цепь x_1,x_2,x_3,x_4,x_2,x_5

Цикл $x_1,x_2,x_3,x_5,x_2,x_4,x_1$



Цепи и циклы будут *простыми*, если они не содержат повторяющихся вершин, например, x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 – простая цепь,

а x_1,x_2,x_3,x_4,x_1 – простой цикл.

Теорема 2.3. В любом маршруте, соединяющем две различные вершины, содержится простой путь, соединяющий те же вершины.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \dots x_n$ - маршрут. Если все его вершины различны, то это уже простая цепь. В противном случае, пусть $x_i = x_j$, $i < j$. Тогда последовательность $x_1, x_2 \dots x_{i-1}, x_i, x_{j+1} \dots x_n$, полученная из этого маршрута удалением отрезка последовательности от x_{i+1} до x_j, тоже является маршрутом. Новый маршрут соединяет те же вершины и имеет меньшую длину. Продолжая действовать таким образом, после конечного числа "спрямлений" получим простой путь, соединяющий x_1 и x_n.

Иллюстрация к теореме 2.3.

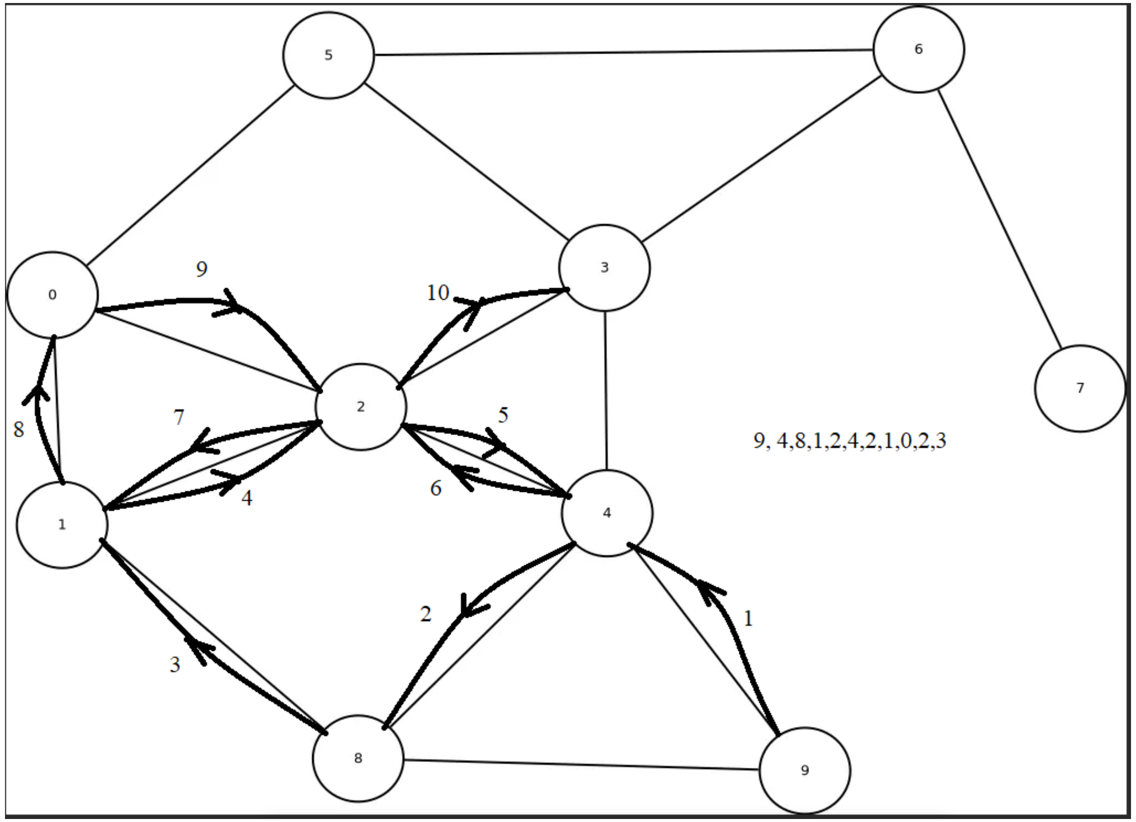


Иллюстрация к теореме 2.3

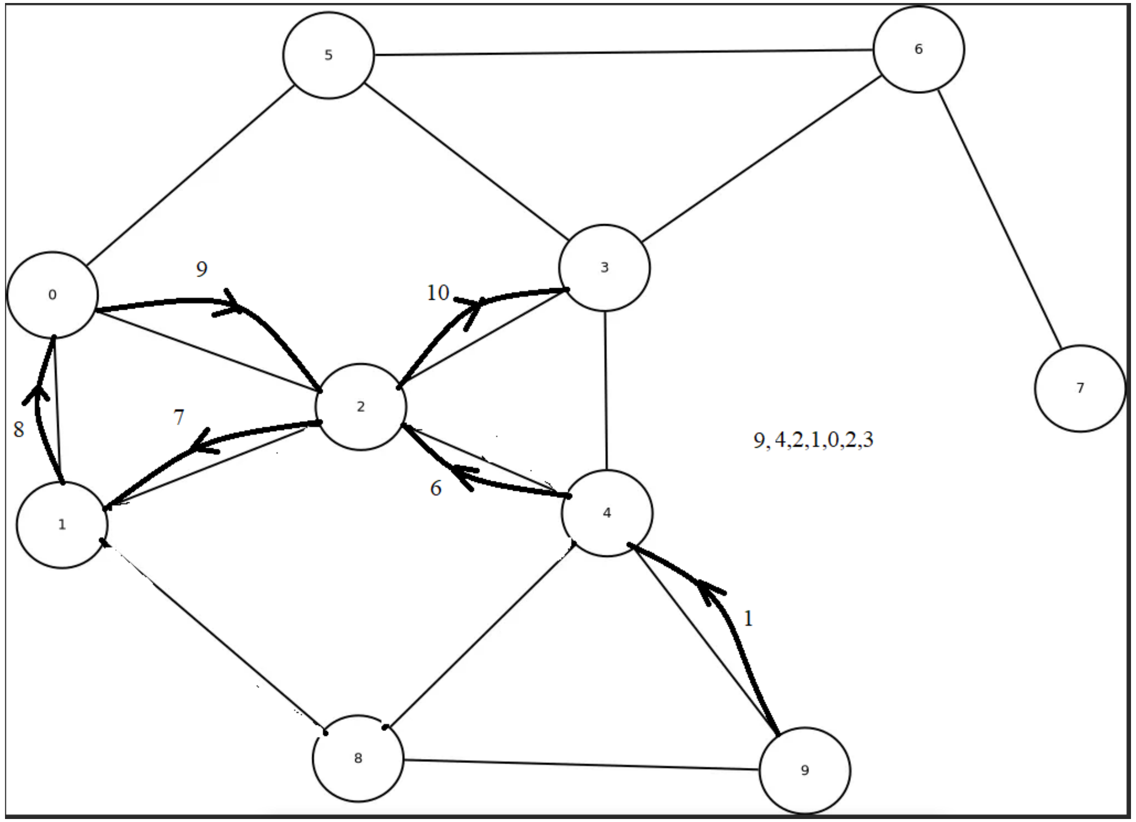
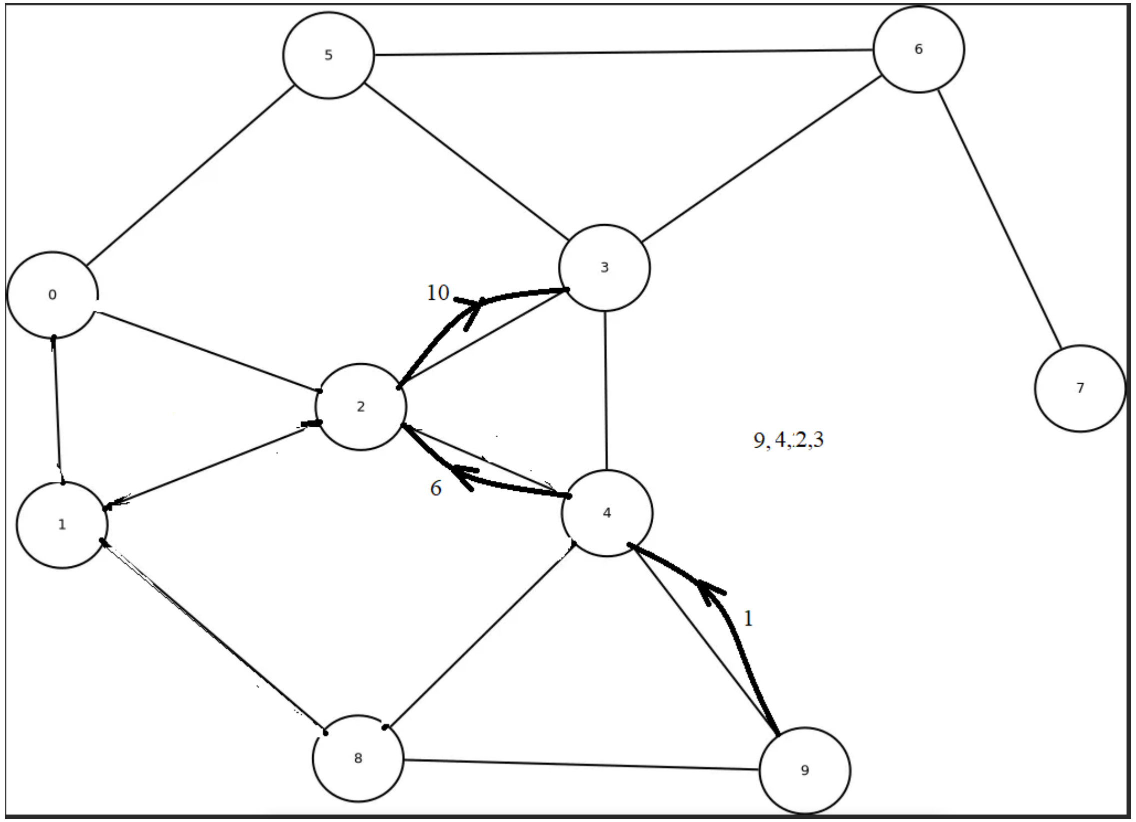


Иллюстрация к теореме 2.3

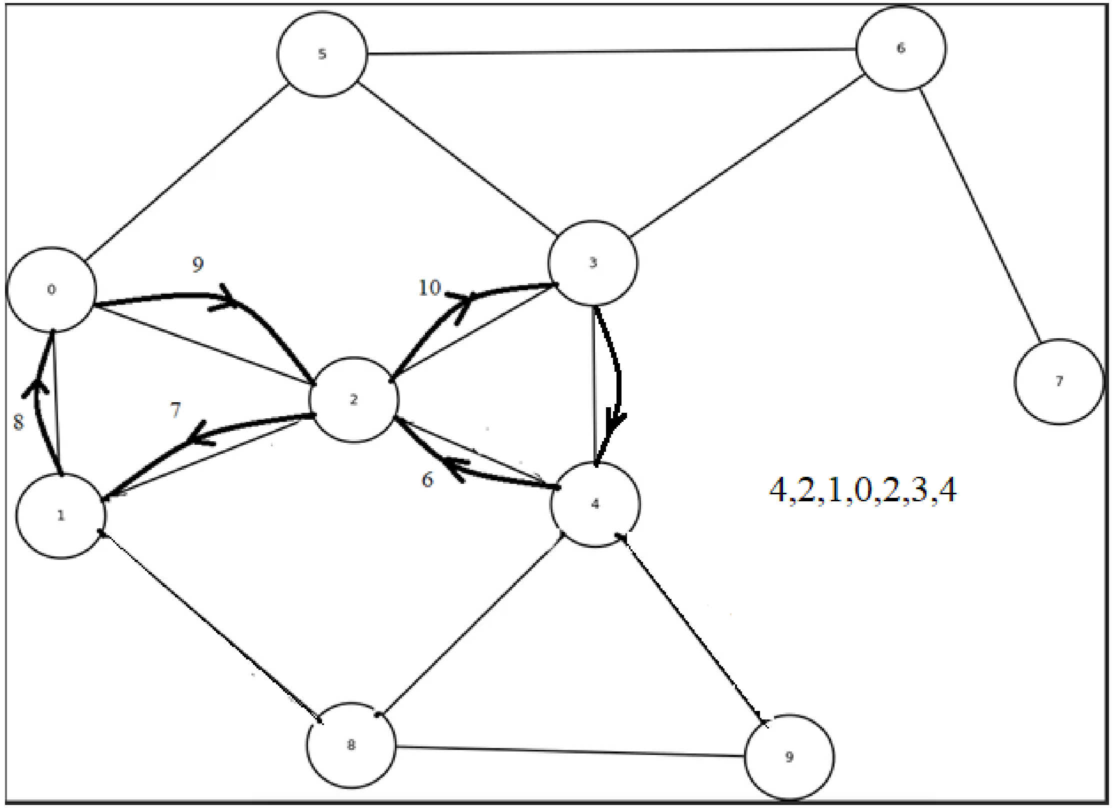


Теорема 2.4. В любом цикле, проходящем через некоторое ребро, содержится простой цикл, проходящий через это ребро.

- Доказательство. Удалим ребро из цикла, получим цепь. Вершины, инцидентные удаленному ребру, будут начальной и конечной вершинами цепи. Выделим из нее простую цепь, соединяющие те же вершины. Добавим удаленное ребро, получим искомый простой цикл.

- Отметим, что в формулировке теоремы 1 нельзя заменить слово "цикл" словами "замкнутый маршрут". Действительно, если (a,c) - ребро графа, то последовательность a,c,a - замкнутый маршрут, проходящий через это ребро, но никакого цикла в нем нет.

Иллюстрация к теореме 2.4.



Теорема 2.5. Если в графе степень каждой вершины не меньше 2, то в нем есть цикл.

- Сначала построим цепь, следующим образом. Выберем вершину x_1, затем смежную ей вершину x_2, поскольку степень вершины x_2 больше 2, то найдется вершина x_3 смежная вершине x_2, отличная от x_1. Затем ищем вершину x_4 смежную вершине x_3 и не равную x_2. Если $x_4=x_1$, то цикл построен, если нет, то повторяем процедуру, на шаге к ищем вершину $x_{к+1}$ смежную вершине $x_к$ и не равную $x_{к-1}$. Затем проверяет не будет ли вершина $x_{к+1}$ совпадать с одной из вершин $x_1,…,x_{к-2}$. Если найдется вершина x_i, $1 \le i < k-1$, то цепь $x_i,…,x_{к+1}$ будет замкнутой, т.е. искомым циклом. Поскольку вершин конечное число, то рано или поздно, вершина с нужным свойством найдется. Т.е. цикл будет построен.

Иллюстрация к теореме 2.5.

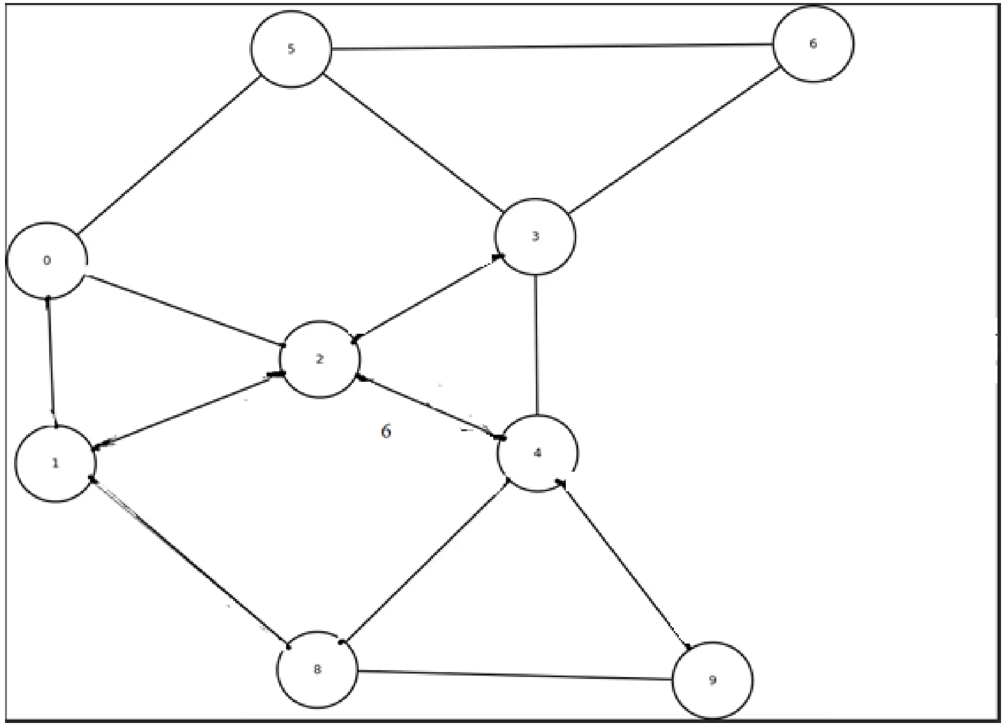


Иллюстрация к теореме 2.5.