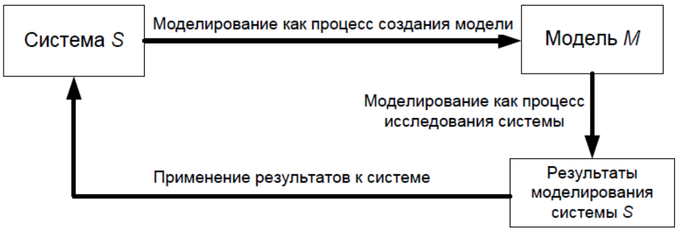
1. Понятия системы, процесса, модели.

Структурируемость – возможность выделения элементов.
Наличие *связей* между элементами, благодаря которым и оказывается возможным говорить о совокупности элементов как ***единой системе.***
Системой называют объект, допускающий *выделение в нем* ***частей*** (элементов или подсистем), ***взаимодействующих*** *между собой и* с другими системами (*окружающей средой*).
Процесс(эволюция) - изменения состояний системы во времени, отражает специфику системы и описывает ее “жизнь”.
С эволюцией системы связано понятие «*жизненного цикла*». Он включает все этапы существования системы от момента ее *зарождения* до момента ее *исчезновения* как системы.
Модель – ***это искусственная система***, создаваемая как *средство исследования* реальной системы.

2. Цели моделирования, способы получения информации от модели

Моделирование – двуединый процесс совершенствования модели и пополнения с ее помощью информации и моделируемой системе
Основная **идея** моделирования: ***вместо*** исследования ***системы S исследуется***, искусственная система, ***модель M***. Результаты исследования M считают верными для моделируемой системы S. Эти ***результаты используются для решения задач***, связанных с системой S.
Модель должна быть создана таким образом, что в некоторых своих чертах, существенных для решения задачи, она ***ведёт себя аналогично*** или близко к поведению ***системы*** S.



Компьютерный эксперимент с ИСМ (Имитационная статистическая модель) - главное ***средство получения информации*** при имитационном методе исследования системы. Заключается в многократном выполнении программы–имитатора системы при различных значениях варьируемых факторов. **Решения уравнений** и других математических соотношений, как в случае математических моделей.

3. Классификации моделей. Динамические- статические, детерминированные- вероятностные, простые- сложные модели.

Классы систем

Признак времени. Если текущее состояние *системы* ***не меняется со временем***, такую систему называют **статической**. У статических систем *нет «памяти»*. В противоположном случае систему называют **динамической**. Примером статической системы является любая строительная конструкция, если рассматривать ее на интервалах времени, малых по сравнению со сроком жизни этой постройки.

Признак случайных факторов и их роль в эволюции системы. Роль этих факторов тесно связана с понятиями простой и сложной системы. Термин «сложная система» относится к категориям, которые интуитивно понятны, но *не поддаются однозначному определению*. Понятие сложной системы принято считать эквивалентным понятию **вероятностной(**стохастической**)** системы. К ним относят системы, для описания которых *недостаточно детерминированных средств* и приходится *использовать* ***вероятностные методы***. Примеры - множество молекул вещества, большой коллектив людей, поток сообщений в компьютерной сети.

Хаотическая система существенным образом меняет закономерности своей эволюции при малых вариациях ее параметров, т.е. обладает высокой чувствительностью к этим вариациям. Причиной хаотического поведения системы является *наличие в ней существенно* ***нелинейных связей*** *между элементами.*

Случайные и хаотические системы принято считать **сложными системами**. **Детерминированные** системы – противоположно – как бы ни были замысловато устроены, ведут себя так, что ***их эволюцию***, по крайней мере, в принципе, ***можно предсказать*** достоверно.

4. Математические и имитационные модели.

Математическая модель системы - система ***математических соотношений***. Это – ***аналитическая модель системы***. Сначала исследуется возможность получения аналитического решения без компьютера.

Найденное аналитическое решение используют для исследования системы. Это исследование выполняют на компьютере. Например, вычисляют, как изменяется вид решения при вариациях параметров системы.

Соответствующие зависимости находят и представляют в виде кривых, диаграмм или таблиц.

Для получения ***статистически надежных выводов*** из результатов экспериментов их приходится повторять многократно при неизменных условиях на разных множествах значений случайных величин. Это – известный *метод Монте-Карло*, или *метод статистических испытаний*

Имитационная модель – *это алгоритм*, реализованный в виде программы на компьютере, который в упрощенном виде отображает структуру связей, логику и последовательность функционирования во времени моделируемой системы. Поэтому имитационная модель *всегда динамическая*. Получение информации о системе от модели осуществляется не путем решения уравнений и других математических соотношений, как в случае математических моделей, а *путем компьютерного эксперимента*, который является имитацией аналогичного эксперимента с моделируемой системой. **Имитационное моделирование** — это циклическое повторение построения, уточнения алгоритма модели и проведения компьютерного эксперимента, что ведет к совершенствованию модели. Этот вид моделирования имеет смысл применять, если *изучаемая* ***система недоступна для*** *других, более* ***простых видов моделирования***. Имитация позволяет проводить такие эксперименты с моделью, которые физически не реализуемы в наблюдениях за моделируемой системой из-за их трудоемкости, большой стоимости или длительности.

Отличительные особенности имитационных статистических моделей (ИСМ):

1. ***ИСМ есть алгоритм***, реализованный в виде программы на компьютере.
2. Этот алгоритм в упрощенном виде ***отражает структуру связей***, ***логику*** и последовательность ***функционирования*** во времени моделируемой системы. Поэтому ИСМ – всегда динамическая модель.
3. ***Получение информации*** от модели осуществляется не путем «решения» модели аналитически или одним из численных методов (включая метод Монте-Карло), как в случае математической модели, а путем выборочного ***статистического эксперимента*** с ИСМ на компьютере.
4. Имитационное моделирование ***включает в себя*** как ***конструирование модели***, т.е. алгоритма функционирования системы, так и ***выборочный эксперимент*** с моделью, причем оба эти этапа циклически повторяются, что ведет к совершенствованию модели.
5. Имитационное моделирование, являясь не математической теорией, а численным методом, ***пригодно к использованию в различных областях*** и может использовать одновременно различный математический аппарат для имитации различных элементов системы и связей между ними.
6. Имитационный подход позволяет строить алгоритм функционирования системы, ***согласуясь*** непосредственно ***с имеющимися представлениями*** о

физике этого функционирования. Тем самым в ряде случаев удается *обойти этап математического описания* этого функционирования системы с помощью математической модели.

7. Возможность проведения компьютерных экспериментов с ИСМ сближает последние с физическими моделями систем и позволяет рассматривать такие эксперименты как ***имитацию*** соответствующего натурного ***эксперимента с моделируемой системой***. Отличием и преимуществом компьютерных экспериментов по сравнению с натурными экспериментами является их ***полная управляемость***, что позволяет организовывать и проводить компьютерные эксперименты оптимальным образом. При этом значительно возрастает роль планирования эксперимента и выбора методики обработки его результатов.

5. Моделирование равномерно распределенных чисел.

Имитация случайных переменных (СП) и событий на ЭВМ при моделировании сложных систем необходима по крайней мере по трем причинам:

1) сложные системы практически всегда стохастические, включающие в себя случайные события, сигналы, взаимодействия;

2) упрощение сложной системы при ее моделировании требует замены неучтенных в модели элементов и подсистем эквивалентными воздействиями, которые носят случайный характер;

3) значения случайных величин (СВ) необходимы при решении детерминированных задач, если алгоритм решения предполагает использование случайных шагов, например, в методах случайного поиска для задач оптимизации или методе статистических испытаний (Монте-Карло).

Имитация случайных событий и значений СП на ЭВМ реализуется в два этапа. На первом этапе получают значения равномерно распределенной в диапазоне (0;1) непрерывной СВ (РРНСВ). На втором этапе эти значения преобразуют в значения СП или случайные события с необходимыми вероятностными свойствами.

Для осуществления первого этапа известны три способа:

1) использование ***природных источников*** случайных значений;

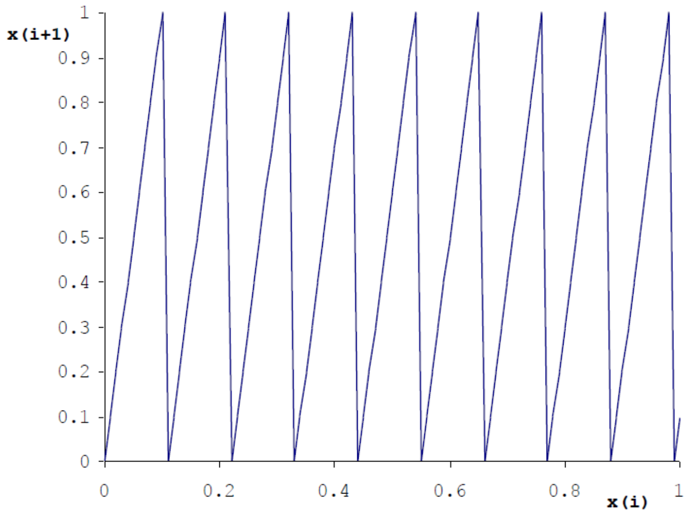
2) отбор значений из заранее ***подготовленных таблиц*** случайных чисел;

3) применение специальных итерационных ***алгоритмов***, последовательно генерирующих числовые значения, которые обладают свойствами РРНСВ.

Третий способ – специальные программно-реализованные алгоритмы, получившие название **генераторов** (датчиков) **псевдослучайных чисел** (ГПСЧ), - является основным при моделировании систем и рассматривается ниже.

Конгруэнтный мультипликативный алгоритм ГПСЧ

Пусть числа *a, b, m, k* – целые положительные. Два целых числа *a* и *b* называют *конгруэнтными* (***сравнимыми***) по модулю *m*, когда существует такое число *k*, что $a - b = km$. (*a* и *b* конгруэнтны, если их разность делится на *m* и остатки от деления одинаковы). Пример: $\mathrm{mod}_{10}(1988) = 8$; $\mathrm{mod}_{10}(5008) = 8$.). $x_{i+1} = \varphi(x_i) = \mathrm{mod}_m(Ax_i + b)$. Малым изменениям аргумента отвечают большие изменения функции. A=10, b=0, m=1



В качестве значения параметра a выбирают большое (допустимое для разрядности ЭВМ) простое целое число, параметр b подбирают так, чтобы обеспечить независимость значений. Для большей скорости генерации арифметические операции выполняют в целых числах или применяя операции двоичной арифметики.

Достоинством алгоритма, являются высокое ***быстродействие*** и приемлемое ***качество*** ПСЧ при правильном подборе параметров и стартового числа x_0.

6. Моделирование случайных событий.

Пусть A – случайное событие, происходящее с известной вероятностью $p(A)$. Следовательно, при имитации случайного события на ЭВМ оно должно появляться случайным образом с этой вероятностью. Вместо события A рассмотрим событие B, состоящее в попадании ПСЧ на интервал $(0; p(A))$. Вероятность появления события B равна $p(A)$. Тогда процедура генерации появления события A следующая (**П.1**):

1. Генерация ПСЧ x.
2. Если $\boldsymbol{x <= p(A)}$, то событие A произошло, иначе считается, что событие A не произошло.

7. Моделирование полной группы случайных событий.

Рассмотрим процедуру генерации полной группы событий $A(1),\ldots,A(k)$ при известных вероятностях $p(A(1)),\ldots,\ p(A(k))$. В полной группе события несовместны и $p(A(1))+\ldots+p(A(k))=1$. Цель процедуры – определить номер m происшедшего случайного события. Процедура имеет вид (**П.2**):

1. Генерация ПСЧ x.
2. Для $m=1,2,\ldots,k$ проверяется выполнение неравенства

$\boldsymbol{p(A(1))+\ldots+p(A(m))>=x}$. То значение m, при котором оно впервые выполняется, есть искомое значение номера происшедшего случайного события $A(m)$.

8. Моделирование случайной величины с заданным законом распределения. Метод обратной функции.

Случайная величиной – величина, которая в результате опыта со случайным исходом *принимает* то или иное *значение*, причем неизвестно заранее, какое именно. Различают *дискретные и непрерывные* случайные величины. Возможные значения дискретной величины можно перечислить, в то время как возможные значения непрерывной случайной величины непрерывно заполняют некоторый промежуток (конечный или бесконечный). Все возможные значения случайной величины образуют множество (***множество возможных значений случайной величины***)

Законом распределения СВ называется любое ***правило*** (таблица, функция), ***устанавливающее связь между*** возможными ***значениями*** случайной величины и соответствующими им ***вероятностями***.

Под **событием** понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Наиболее распространенными событиями являются следующие:

• случайная величина X принимает значение x;

• случайная величина X попадает в интервал (a, b);

• случайная величина X меньше значения x.

При моделировании случайных величин естественным является вопрос о **базисе** (т.е. совокупности случайных величин с заданными характеристиками) для получения случайной величины на любом наперед заданном множестве возможных значений и при любом наперед заданном законе распределения. В качестве такого базиса можно взять равномерно распределенную случайную величину в интервале (0, 1).

При моделировании случайных величин на ЭВМ невозможно воспроизвести опыт с истинно случайным исходом. Поэтому вместо случайных величин используются псевдослучайные величины.

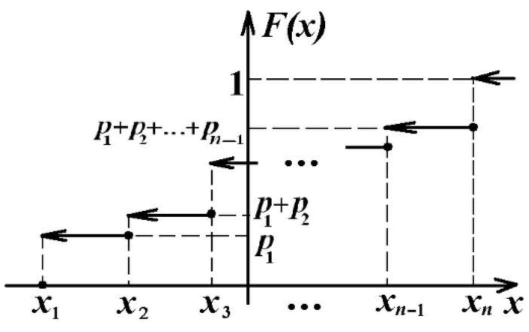
Пусть случайная величина X имеет следующий *закон распределения*

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k	$\dots$	p_n

(1)

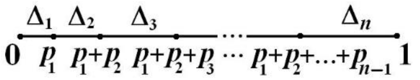
Для количественной характеристики закона распределения удобно использовать вероятность события $X < x$, где x – некоторая переменная. Вероятность этого события, очевидно, зависит от x. Эту зависимость задает ***функция распределения случайной величины X***:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} p_i.$$



Опишем метод моделирования дискретной случайной величины X, заданной своим законом распределения (1) – **метод обратной функции**.

Рассмотрим отрезок [0, 1] и разобьем его на частичные отрезки $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$. Пусть эти отрезки имеют длины соответственно p1, p2, . . ., pn. Так как $p_1 + ... + p_n = 1$, то эти отрезки в совокупности покроют отрезок [0, 1] полностью.



Отрезок [0, 1] расположен на оси ординат 0у. Отсюда происходит название метода: по заданному закону распределения мы строим функцию распределения, а потом моделируем на ЭВМ базисную случайную величину – ординату. По полученной ординате вычисляем абсциссу $x = F^{-1}(y)$. Тогда значение случайной величины X равно x_k, если $r \in \Delta_k$, где r – псевдослучайное число на интервале (0, 1).

Правило определения интервала Δ_k, в который попадает псевдослучайное число r:

$$r \in \begin{cases} \Delta_1 & r \le p_1, \\ \Delta_k & p_1 + p_2 + \cdots + \\ & +p_{k-1} \le r \le p_1 + p_2 + \cdots + p_k, \\ & (k \ge 2) \end{cases}$$

(Важно!) Генерация значений непрерывной случайной величины

Найдем функциональное преобразование $\eta = \varphi(\xi)$ непрерывной равномерно распределенной на интервале (0;1) СВ (РРНСВ) $\xi \sim Un(0;1)$ в непрерывную СВ η с заданной функцией распределения (ФР) $F_\eta(y)$.

Используя правила преобразования ФР СВ при ее функциональном преобразовании, можно записать цепочку равенств:

$$p(\eta < y) = F_\eta(y) = p(\xi < x = \varphi^{-1}(y)) = F_\xi(x = \varphi^{-1}(y)) = x = \varphi^{-1}(y); \qquad \varphi(y) = F_\eta^{-1}(x)$$

из которых следует процедура генерации значений y СВ η с заданной ФР ("метод обратной функции") (**П.7**):

1. Генерация ПСЧ x
2. Вычисление $y = F_\eta^{-1}(x)$

Метод обратной функции пригоден, если $F_\eta^{-1}(x)$ можно найти аналитически или достаточно точно аппроксимировать и на требуемые при этом арифметические операции не затрачивается слишком много компьютерного времени, что делает метод неприемлемым для моделирования. В противном случае применяют различные альтернативные или специальные методы.

9. Моделирование нормально распределенной случайной величины.

Центральная предельная теорема - сумма достаточно большого количества слабо зависимых случайных величин, имеющих примерно одинаковые масштабы (ни одно из слагаемых не доминирует, не вносит в сумму определяющего вклада), имеет распределение, близкое к нормальному.

Нормальное распределение N(m;σ). Используется результат центральной предельной теоремы. Процедура генерации определяется формулой (**П.9**)

$$z = \left(\sum_{j=1}^{k} x_j - a(k)\right) \Big/ \sqrt{D(k)}, \ \ \text{где} \ \ a(k) = k/2; \quad D(k) = k/12; \quad y = \sigma z + m$$

Здесь *a(k)* и *D(k)* – математическое ожидание и дисперсия суммы k РРНСВ. Число слагаемых k может быть не слишком большим. Обычно выбирают k=12. Тогда существенно снижается число операций, требуемых на получение одного значения нормальной СВ (**П.10**): $y = m + (\sum_{j=1}^{12} x_j - 6)\sigma$

Процедура плохо отображает "хвосты" нормального распределения, т.к. значений y ограничены диапазоном (-6 σ; +6 σ).

Следующий метод основан на факте, что декартовы координаты случайного вектора с равномерно распределенными направлениями в пространстве и гамма-распределением длины распределены по нормальному закону. Для двумерного пространства это приводит к экономичной процедуре генерации двух независимых значений нормальной СВ (**П.11**):

1. Генерация *x*(1), *x*(2).
2. $u = \sqrt{-2\ln x(1)}; \quad y(1) = u\cos(2\pi x(2)); \quad y(2) = u\sin(2\pi x(2))$

10. Моделирование экспоненциально распределенных случайных величин.

Показательное распределение Ex(*a*). Требует генерации пяти *x* и дает сразу три независимых значения *y* при одном вычислении логарифма (**П.11**):

1. Генерация *x*(1), *x*(2), *x*(3), *x*(4), *x*(5)
2. Если *x*(4) < *x*(5), то *z1*=*x*(4), *z2*=*x*(5), иначе *z1*=*x*(5), *z2*=*x*(4).
3. *u*=Ln(*x*(1)***x*(2)***x*(3))
4. *y*(1)=-*z1***u*; *y*(2)=(*z*1-*z*2)**u*; *y*(3)=(*z*1-1)**u*

11. Простейшие потоки случайных событий, их свойства и имитационное моделирование.

Поток событий – это последовательность упорядоченных по нарастанию ***моментов времени***, в которые происходят события потока

Если пронумеровать последовательные события в потоке индексом *k* = 1..*n*, то поток событий представляет собой упорядоченное по возрастанию множество моментов времени появления этих событий: П(*n*) = { *t* (*k*) | *k* = 1; 2; ... ; *n* }, причём *t* (*k*) <= *t* (*k* + 1). Если эти неравенства выполняются строго, то поток называют ***ординарным***.

Если все события в потоке одинаковы и отличаются только временем появления, то поток называют потоком ***однородных*** событий

Поток событий удобно описывать не моментами появления, а интервалами времени между событиями: *tau* (1) = *t* (1) ; *tau* (*k*) = *t* (*k*) – *t* (*k* – 1), *k*=2..*n*. Если интервалы - детерминированные величины, постоянные или переменные, меняющиеся по известному закону, - то поток называют **детерминированным.**

Если интервалы - случайные, то **случайным.** Если эти случайные величины ***tau* - *независимы друг от друга*** и одинаково распределены, то поток называют потоком с **ограниченным последействием**. Если все интервалы *tau* - независимые, одинаково распределенные по **экспоненциальному закону** случайные величины, а поток ординарный, его называют **простейшим**, или однородным Пуассоновским потоком

❖ **Свойства простейшего потока событий**

1. **Отсутствие последействия (независимость)**:
   - Будущее поведение потока не зависит от его прошлого (как в марковских процессах).
   - Времена между событиями **независимы и одинаково распределены**.
2. **Равномерность во времени**:
   - События распределены по времени **однородно** (в среднем — одинаковая частота на любом отрезке времени).
3. **Интервалы между событиями (межсобытийные интервалы)**:
   - Распределены по **экспоненциальному закону**:

$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

Среднее значение: $E[T]=1/\lambda$

4. **Аддитивность**:
   - Сумма двух независимых простейших потоков с интенсивностями λ_1 и λ_2 — тоже простейший поток с интенсивностью $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$

5. **Декомпозиция**:
   - Если каждое событие потока с интенсивностью λ попадает в тип A с вероятностью p, то поток событий типа A — простейший с интенсивностью $\lambda_A = p\lambda$

❖ Имитационное моделирование простейшего потока

Моделирование пуассоновского потока часто используется в компьютерных экспериментах для создания входных данных:

► Метод моделирования межсобытийных интервалов

Для генерации последовательности времён поступления событий:

1. Сначала моделируются **временные интервалы** между событиями T_1, T_2, … которые:
   - Подчиняются **экспоненциальному распределению** с параметром λ
   - Используется метод обратной функции:

$$T = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-r) \quad \text{где } r \sim U(0,1)$$

(так как $1 - r \sim U(0,1)$, можно писать $T = -\frac{1}{\lambda}\ln r$)

2. По моделируемым интервалам строится **временная шкала** событий:

$t_1=T_1$, $t_2=T_1+T_2$, $t_3=T_1+T_2+T_3$, …

❖ Применение простейшего потока событий

- **Очереди**: поступление клиентов в кассу, на сервер, в больницу
- **Надежность**: сбои оборудования, откази деталей
- **Связь**: поступление пакетов или звонков
- **Экономика**: случайные заказы, потоки клиентов
- **Физика**: радиоактивные распады, фотоны

12. Марковские процессы, их свойства и применение

Многие классические законы физики обладают отсутствием последействия. Это означает следующее: при “правильно выбранном” описании $x(t)$ состояния изучаемого объекта в произвольный момент времени $t \in T$, если точно известно состояние изучаемого объекта в момент $t \in T$, то этим состоянием определяется эволюция объекта в будущем.

Марковский процесс — это случайный (стохастический) процесс, обладающий ***свойством отсутствия памяти***, то есть вероятностное поведение системы в будущем зависит ***только от её текущего состояния***, но ***не зависит от предыдущих состояний***, через которые она прошла.
Формально:

$$P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \ldots, X_0 = x_0) = P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t)$$

Где:

- X_t — состояние системы в момент времени t;
- P — вероятность перехода;
- Это означает, что прошлое **не влияет** на будущее при известном настоящем.

Классификация Марковских процессов

1. **По характеру времени:**
    - **Дискретные во времени**: изменения происходят в моменты t=0,1,2,…
    - **Непрерывные во времени**: время изменяется непрерывно t∈[0,∞)

2. **По пространству состояний:**
   - **Конечное или счётное множество состояний** (например, 0, 1, 2, …)
   - **Непрерывное пространство состояний** (например, отрезок или область на плоскости)

Марковская цепь (дискретный случай)

- **Марковская цепь** — это Марковский процесс с дискретным временем и дискретным пространством состояний.
- Задаётся:
   - **Множеством состояний**: $S=\{s_1,s_2,...,s_n\}$
   - **Матрицей переходных вероятностей** P, где:
   - $P_{ij} = P(X_{t+1} = s_j \mid X_t = s_i)$
   - Строки в матрице P дают распределение вероятностей перехода из одного состояния в другие.
   - Каждая строка матрицы P нормирована:
   - $\sum_j P_{ij} = 1$

Свойства Марковских процессов

1. **Однородность (гомогенность)**:
   - Переходные вероятности не зависят от времени:

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

2. **Марковское свойство**:
   - Вероятность следующего состояния зависит только от текущего, а не от истории.

3. **Стационарность (в другом смысле)**:
   - Если распределение вероятностей не меняется во времени:

$$P(X_t = i) = \pi_i \quad \forall t$$

4. **Эргодичность**:
   - Система «забывает» начальное состояние и со временем приходит к одинаковому распределению вероятностей из любого исхода.
5. **Периодичность и апериодичность**:
   - Если возврат в состояние возможен только через кратные шаги k, система периодическая.
   - Если нет такого ограничения, — апериодическая.

Примеры и области применения

1. Системы массового обслуживания (СМО):

- Клиенты приходят в очередь, обслуживаются и покидают систему.
- Времена между приходами и обслуживания — экспоненциальны.
- Состояние — число заявок в системе.
- Используются модели типа M/M/1 (один канал), M/M/n (несколько каналов).

2. Надёжность технических систем:

- Состояния: «работает», «в ремонте», «отказала» и т. д.
- Переходы между ними описываются с помощью вероятностей отказа и восстановления.

3. Финансовое моделирование:

- Рейтинги кредитоспособности компаний.
- Моделирование цен акций или рисков дефолта.

4. Биоинформатика и генетика:

- Последовательности ДНК и белков можно анализировать через скрытые марковские модели (HMM).

5. Интернет и ИИ:

- Алгоритм PageRank (Google) — определение «важности» страницы по вероятности, что случайный пользователь на неё попадёт.
- Распознавание речи и текста.
- Обучение с подкреплением (Reinforcement Learning).

13. Свойства динамики Марковских систем. Переходный режим, стационарный режим.

Динамика – это наука об изменениях, происходящих с любой системой с течением времени. Поэтому переменная "время" - непременный атрибут любой задачи о динамике.
Изучение свойств переходных вероятностей составляет главный путь для ответа на вопрос о предельном поведении марковской цепи, о возможности наличия у неё установившегося стационарного режима.

❖ **Динамика марковских систем — это процесс изменения распределения вероятностей по состояниям системы во времени.**
Марковская система может находиться в двух основных режимах:

1. Переходный (нестационарный) режим

- Это **начальная фаза функционирования системы**, когда распределение вероятностей по состояниям **ещё зависит от начального состояния**.
- В этом режиме:
  - Система **неустойчива**;
  - Вероятности состояний изменяются от момента ко моменту;
  - Не достигнуто равновесие.

Формально:

Пусть $p^{(t)}$ — вектор вероятностей состояний в момент времени t.

Тогда: $p^{(t+1)}=p^{(t)}P$

Пока $p^{(t)}$ зависит от $p^{(0)}$, система находится в переходном режиме.

Пример:

- СМО только что начала работать: сначала заявок нет, позже появляются, очередь формируется.

2. Стационарный (установившийся) режим

- Это **устойчивое состояние системы**, при котором **распределение вероятностей не меняется со временем**: $p^{(t)}=\pi \ \ \forall t \geq T$

В этом случае: $\pi=\pi P$ — вектор π является **стационарным распределением**.

- Такое поведение возможно при выполнении **условий эргодичности** (система апериодична, все состояния достижимы, возврат возможен с вероятностью 1).

Свойства:

- Независимость от начального состояния;
- Все переходные колебания исчезают;
- Можно использовать долгосрочные характеристики (среднее число заявок, среднее время обслуживания и т.д.).

❖ Переход от переходного к стационарному режиму

- Обычно происходит **постепенно**, по мере того как матрица переходов применяется к начальному распределению: $p^{(t)}=p^{(0)}P^t$
- При $t\to\infty$, если система эргодична, то $p^{(t)}\to\pi$.

❖ Зачем это нужно в моделировании?

- Стационарные характеристики позволяют **упрощать расчёты**: можно анализировать долгосрочное поведение системы без учёта конкретного времени.

- Пример: найти среднюю длину очереди, среднее время ожидания, вероятность отказа и т.д.

14. Системы массового обслуживания, их основные элементы и характеристики

❖ **Определение**

Система массового обслуживания (СМО) — это математическая модель, описывающая процесс обслуживания случайным образом поступающих требований (заявок) с ограниченными ресурсами (каналами обслуживания). Используется для анализа и оптимизации **очередей**, **загрузки оборудования**, **времени ожидания**, **пропускной способности** и др.

❖ **Основные элементы СМО**

1. **Источник заявок**
    - Порождает требования (клиенты, машины, пакеты, вызовы).
    - Источники могут быть **ограниченными** (например, 10 устройств) или **неограниченными** (бесконечный поток клиентов).
2. **Поток заявок**
    - Описывает время между поступлениями заявок.
    - Характеризуется интенсивностью λ — среднее число заявок в единицу времени.
    - Часто моделируется **пуассоновским потоком** (экспоненциальное распределение межприходных интервалов).
3. **Очередь**
    - Место ожидания, если все каналы заняты.
    - Может быть **ограниченной** (например, максимум 5 мест) или **неограниченной**.

    - Тип организации: FIFO (первый пришёл — первый обслужен), LIFO, приоритетная и др.
4. **Обслуживающее устройство (канал обслуживания)**
    - Выполняет работу с заявкой.
    - Количество каналов: один (одноканальная система) или несколько (многоканальная).
    - Интенсивность обслуживания μ: среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени.
5. **Уход заявок**
    - После обслуживания — выход из системы.
    - Иногда возможен **отказ** (если нет места в очереди).

❖ Основные характеристики СМО

Число каналов M;
длина очереди R;
интенсивность входящего потока λ
интенсивность обслуживания μ;
интенсивность ухода из очереди ν = 0 заяв./мин.
потери C
Коэффициент загрузки системы: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
1) Число заявок в системе
$n = 0 \cdot P0 + 1 \cdot P1 + 2 \cdot P2 + ... + 11 \cdot P11$
2) Число простаивающих (свободных) каналов
$Mc = 6 \cdot p + 5 \cdot p + 4 \cdot p + 3 \cdot p + 2 \cdot p + 1 \cdot p + 0 \cdot (p + ... + p)$
3) Число занятых каналов
$Mз = M - Mc$
4) Длина очереди
$r = n - Mз = 0 \cdot (p0 + ... + p6) + 1 \cdot p7 + 2 \cdot p8 + ... + 5 \cdot p11$
5) Вероятность отказа
$Pотк = p11$
Поток отказов
$\lambdaотк = \lambda \cdot Pотк$
6) Относительная пропускная способность
$q = 1 - Pотк$

7) Абсолютная пропускная способность
$A = q \cdot \lambda$
8) Доля необслуженных заявок
*D*необсл = λ*отк*/λ = *Ротк*
9) Доля заявок, получивших отказ в обслуживании
*D*отк = λ*отк*/λ = *Ротк*
10) Время пребывания заявки в системе
3
tc = *n* / *A*
11) Время ожидания в очереди
tож = *r* / *A*
12) Время обслуживания
tобсл = *tc* – *tож*
Средние затраты на функционирование системы в единицу времени
W

15. Марковские модели систем массового обслуживания.

Марковская модель СМО — это модель, в которой ***состояние системы***, количество заявок, изменяется со временем как ***марковский процесс***, то есть только текущее состояние влияет на переходы.

Системы массового обслуживания — это такие системы, в которые в ***случайные моменты времени поступают заявки*** на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

Для задания СМО необходимо задать вероятностные характеристики времени обслуживания одной заявки. Обозначим это время через Tobsl. Величина Tobsl является случайной. Во многих задачах теории массового обслуживания закон распределения времени обслуживания предполагается показательным

$F(t) = P(T_{obsl} < t) \qquad P(T_{obsl} < t) = 1 - e^{(-\mu t)}$

Параметр этого распределения, называемый **интенсивностью потока** обслуживания, есть величина, обратная среднему времени обслуживания

$$\mu = \frac{1}{M(T_{obsl})}$$

При этом под **потоком обслуживания** понимается поток заявок, обслуживаемых одна за другой одним непрерывно занятым каналом. Если Tobsl представляет собой случайную величину, имеющую показательное распределение, то поток обслуживания является простейшим.

Если входящий поток и все потоки обслуживания простейшие, то процесс, протекающий в СМО, является марковским случайным процессом (цепью) с дискретными состояниями и непрерывным временем. Поэтому СМО, в которой все потоки простейшие, называют марковской СМО. Таким образом, предположение о показательном законе распределения времени обслуживания и интервала времени между двумя последовательными поступлениями заявок играет исключительную роль в теории массового обслуживания, так как упрощает аналитическое исследование СМО, сводя его к исследованию цепей Маркова.

Условия применения Марковских моделей к СМО

- Поступление заявок — **поток Пуассона** (интервалы — экспоненциально распределённые, с параметром λ).
- Время обслуживания — **экспоненциально распределено** с параметром μ.
- Дискретное множество состояний: n — количество заявок в системе (включая в обслуживании и в очереди).
- Переходы возможны только между соседними состояниями:
  - n→n+1 при поступлении заявки;
  - n→n−1 при завершении обслуживания.

Одноканальная СМО с отказами

Простейшей одноканальной моделью с вероятностным входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания.

Поток заявок и обслуживания простейшие, т.е. обладающие свойствами ***стационарности*** (среднее число событий, воздействующих на систему, в течение единицы времени, остается постоянным), ***ординарности*** (вероятность попадания на элементарный участок времени двух и более событий пренебрежимо мала) и ***отсутствия последействия*** (для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени). Для простейшего потока интенсивность = const.

Одноканальная СМО с ожиданием

Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания. Предположим, что СМО не может вместить более N заявок, т.е. заявки, не попавшие в ожидание, покидают СМО. Выполнение условия стационарности не обязательно, поскольку число допускаемых в СМО заявок контролируется путем введения ограничения на длину очереди

Многоканальная СМО с отказами с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением длительности обслуживания

Пусть СМО с отказами имеет n каналов обслуживания, функционирующих независимо друг от друга. Входной поток заявок и поток обслуживания заявок являются пуассоновскими.

Применение Марковских моделей СМО

- Оптимизация количества операторов, касс, оборудования.
- Моделирование серверов, сетевых устройств, распределённых систем.

- Планирование работы служб доставки, скорой помощи, центров обработки данных.
- Проектирование систем с учётом допустимого времени ожидания и отказов.

16. Ограничения возможностей математического моделирования систем и процессов.

Математическое моделирование — это процесс построения и анализа моделей, основанных на математических уравнениях, описывающих поведение реальных систем. Однако при всей полезности моделирования у него есть **ограничения**, которые нужно учитывать при разработке и интерпретации моделей.

❖ 1. Ограниченность описания реальности

- **Математическая модель — всегда упрощение.** Она отражает только наиболее важные, с точки зрения исследователя, свойства системы.
- Некоторые аспекты реальной системы могут быть **неизвестны**, **сложноизмеримы** или **игнорированы**.
- Модель не может учесть **всех факторов**: человеческие решения, политические риски, внешние катастрофы и пр.

📌 *Пример:* При моделировании транспорта невозможно учесть все стихийные события или личные предпочтения водителей.

❖ 2. Недостаток или неточность исходных данных

- Для построения и верификации модели требуются **достоверные исходные данные** (параметры, статистика, граничные условия). **Ошибка первого рода**— ситуация, когда отвергнута верная нулевая гипотеза (об отсутствии связи между явлениями или искомого эффекта).

Ошибка второго рода — ситуация, когда принята неверная нулевая гипотеза.

- **Погрешности** измерений, **устаревшая информация**, **недоступные данные** могут искажать результаты.
- Для сложных систем невозможно измерить все параметры с нужной точностью.

📌 *Пример:* Модель прогноза погоды будет неточной, если данные со спутников неполны или устарели.

❖ 3. Сложность и вычислительная трудоёмкость

- Реальные системы могут описываться **сложными нелинейными уравнениями**, которые **не имеют аналитических решений**.
- Возникает необходимость использования численных методов (аппроксимаций), что ведёт к **накоплению ошибок округления**.
- Высокая **размерность** задач требует большого объёма вычислений и времени (проблема «проклятия размерности»).

📌 *Пример:* Моделирование глобального климата включает сотни переменных и требует суперкомпьютеров.

❖ 4. Трудности верификации и валидации моделей

- **Верификация** — проверка корректности математической и программной реализации модели.
- **Валидация** — проверка соответствия модели реальной системе.
- В сложных системах результаты моделирования **не всегда можно проверить экспериментально**.
- Если модель работает хорошо на исторических данных — это **не гарантирует её точность в будущем**.

📌 *Пример:* Финансовая модель может отлично описывать прошлое поведение рынка, но провалиться в кризисной ситуации.

❖ **5. Стохастический (случайный) характер многих процессов**

- Во многих областях присутствует **случайность и неопределённость**: физика, биология, экономика.
- Приходится использовать **вероятностные методы** и **статистическое моделирование**.
- Результаты не являются точными, а имеют **распределение вероятностей**.

📌 *Пример:* Модель эпидемии учитывает вероятность заражения, выздоровления, смертности и т. д.

❖ **6. Ограничения программной реализации**

- Реализация модели зависит от **вычислительной среды**, **точности чисел с плавающей запятой**, **алгоритмов**.
- Ошибки программирования, недостаточная оптимизация, плохая архитектура могут исказить результаты.

❖ **7. Невозможность учёта человеческого фактора**

- Поведение людей часто **непредсказуемо**, зависит от эмоций, мотивации, культуры.
- В социально-экономических системах человеческий фактор часто доминирует, и модели дают лишь **обобщённые оценки**.

📌 *Пример:* Модель поведения потребителей может не учесть эффект паники или ажиотажа.

❖ **8. Неоднозначность интерпретации результатов**

- Один и тот же результат моделирования может интерпретироваться по-разному.
- Сильная зависимость от **целей исследования** и **выбора критериев оценки**.
- Возможна **переинтерпретация результатов** в угоду желаемым выводам (особенно в политике, экономике).

❖ Вывод

Математическое моделирование — мощный инструмент анализа и прогноза, но он требует:

- критического мышления,
- проверки гипотез и результатов,
- понимания ограничений применимости моделей.

Эффективность моделирования зависит от **качества модели, полноты данных**, **корректной реализации** и **здравой интерпретации**.