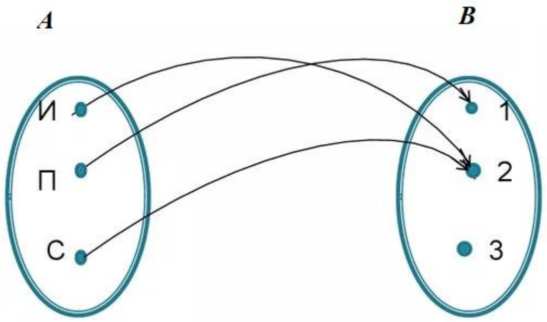
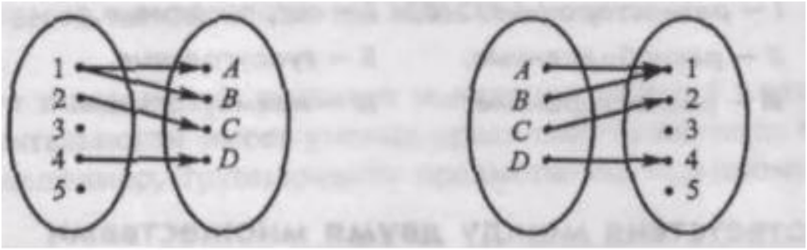
Соответствия и отношения

Соответствия

- Пусть заданы два множества А и В. Соответствие между множествами, точнее между элементами этих множеств считается заданным, если любому элементу $a \in A$ сопоставлен один (или несколько или ни одного) элемент $b \in B$.





- Если буквой f обозначить соответствие, то записывают так $f: A \rightarrow B$.
- Множество A называют областью *определения*, а множество B областью *значений*.

Пример

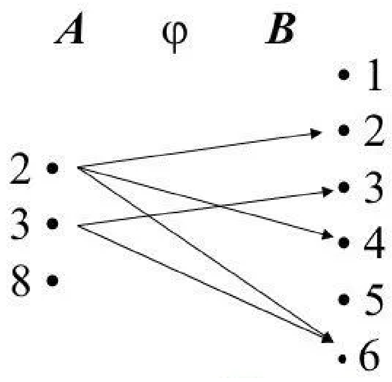
Пусть даны множества A и B

A = { 2, 3, 8 }

B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }.

Соответствием между множествами *A* и *B* «число из A есть делитель числа из B» представляется множеством

$\varphi = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$,



Соответствие между множествами A и B определяется заданным правилом, согласно которому элементам одного множества сопоставляются элементы другого множества.

Соответствием между множествами A и B называется множество φ - подмножество их декатова произведения:

$$\varphi \subset A \times B \quad \text{и} \quad \varphi : A \to B$$

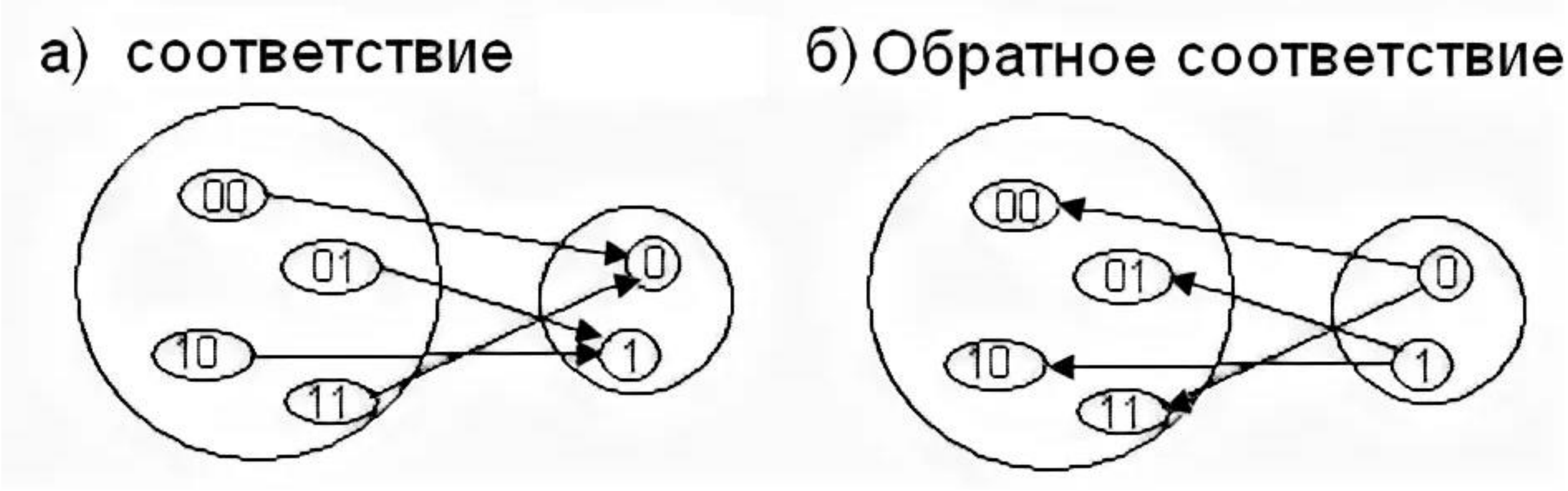
Про элементы $x \in A$ и $y \in B$ говорят, что они находятся в соответствии φ, если пара $(x,y) \in \varphi$.

$$\varphi : x \to y, \quad x \in A, y \in B.$$

Если $(x, y) \in \varphi$, то иногда пишут $x \varphi y$,

y называют *образом* x, а x - *прообразом* y.

Обратное соответствие



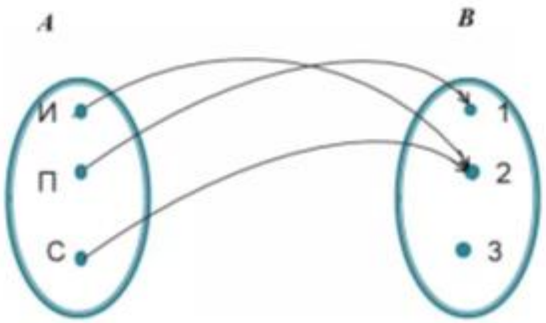
Если f: $A \to B$ соответствие, то так f^{-1}: $B \to A$ обозначается обратное соответствие.

Образы и праобразы

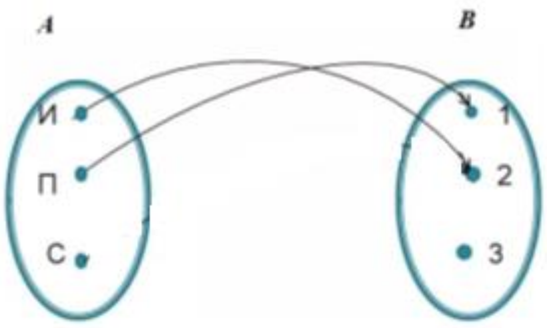
- Если $a \in A$, то через $f(a)$ обозначим множество элементов $b \in B$ поставленных в соответствие элементу a. Множество $f(a)$ называется множеством образов элемента a.

- Если $b \in B$, то через $f^{-1}(b)$ обозначим множество элементов $a \in A$, которым поставлен в соответствие элемент b. Множество $f^{-1}(a)$ называется множеством прообразов элемента b.

Если соответствие определено для любого $a \in A$ (т.е. $f(a) \neq \varnothing$) , то оно называется *всюду определённым*.

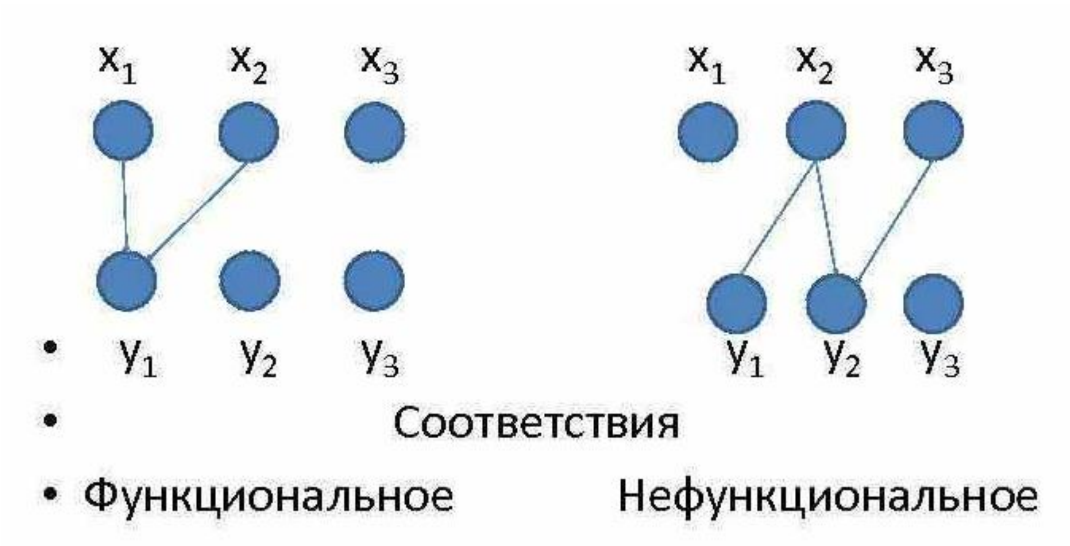


Всюду определенное соответствие



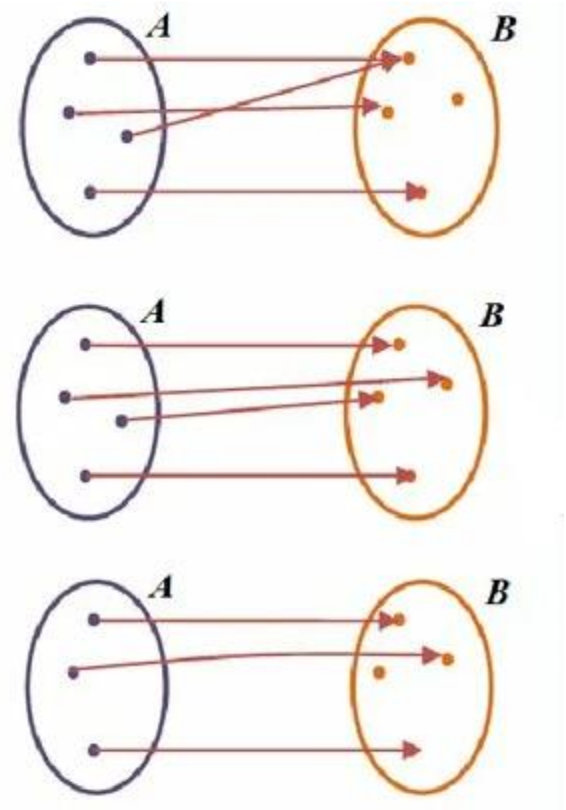
Не всюду определенное соответствие

Если каждому элементу $a \in A$ поставлено в соответствие не более одного элемента $b \in B$, то соответствие называется *функциональным* или *функцией*.

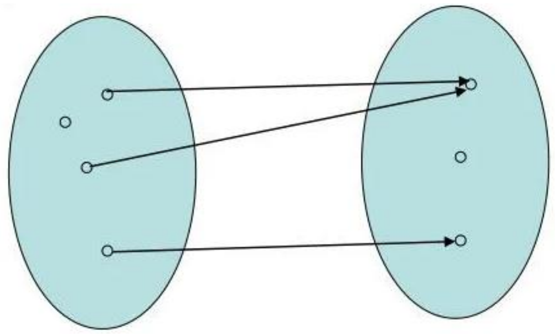


1. В этом случае запись *f(a)* обозначает, не множество образов, а один образ и используется запись *b=f(a)*.

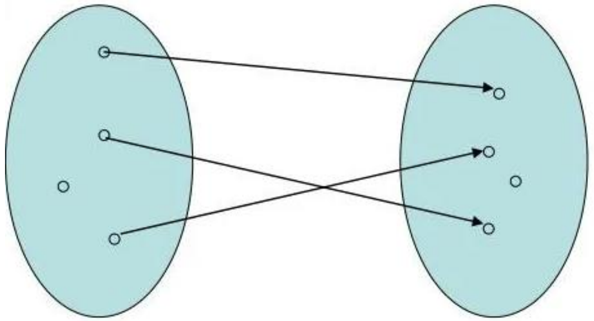
Всюду определенное функциональное соответствие называется отображением



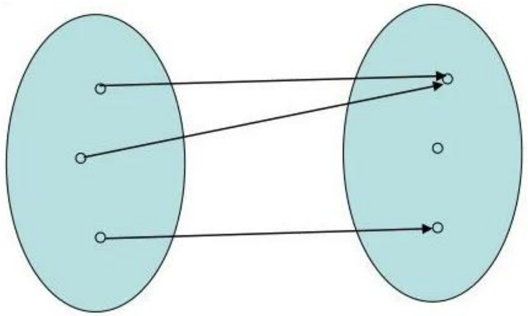
Если разным элементам множества *A* поставлены в соответствия разные элементы множества *B*, т.е. если $a_1 \neq a_2$, то $f(a_1) \cap f(a_2) = \varnothing$, то соответствие называется ***инъективным***.



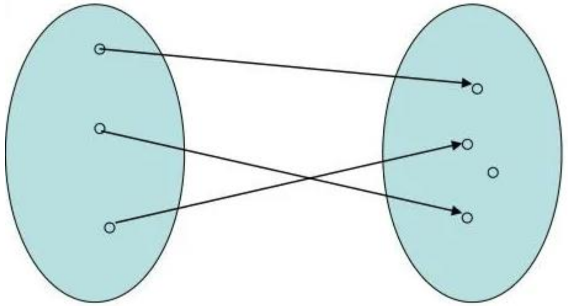
Соответствие не является инъективным



Инъективное соответствие

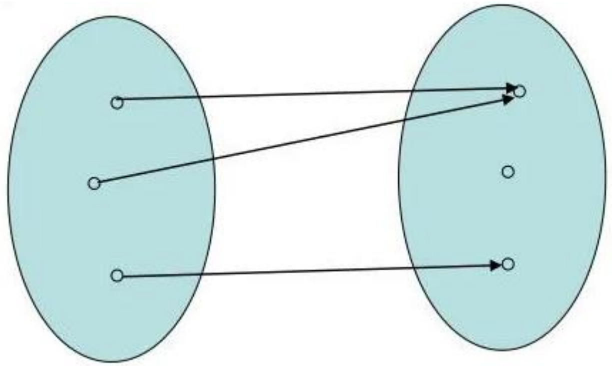


Отображение не является инъективным

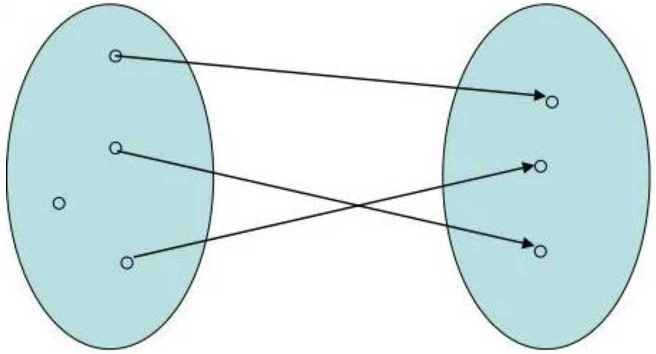


Инъективное отображение

Если любой элемент $b \in B$ имеет непустое множество прообразов, то соответствие называется *сюръективным*.



Соответствие не является сюръективным

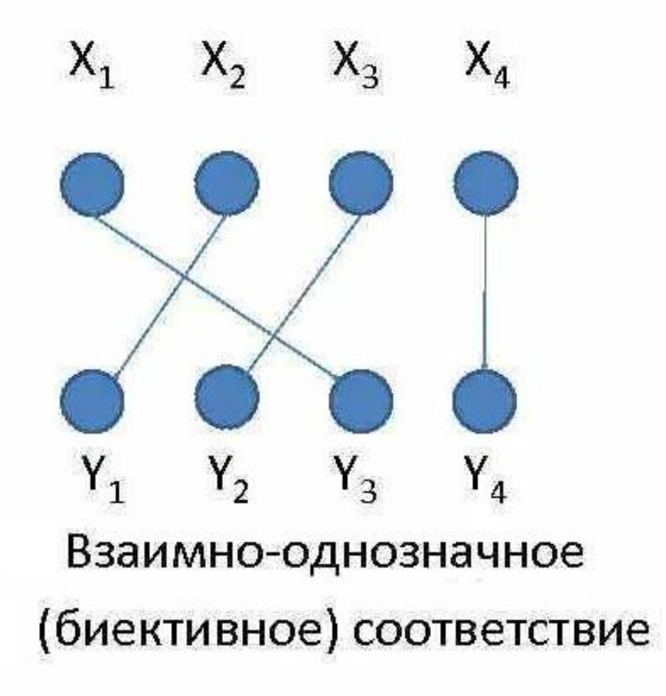


Сюрьективное соответствие

Замечание об отображениях

- Если отображение *f* сюръективно, то говорят, что *f* является отображение множества *A на* множество *B*, если отображение *f* не сюръективно, то говорят, что *f* является отображение множества *A в* множество *B*.

Инъективное и сюръективное отображение называется *взаимно-однозначным соответствием* или *биекцией*.

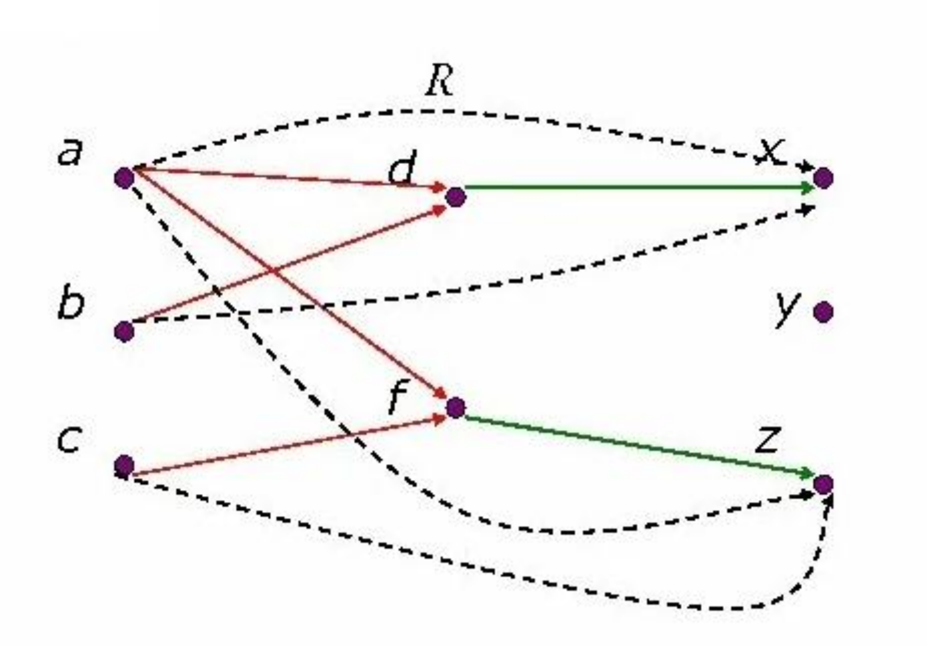


- Легко проверить, что если $f: A \to B$ биекция, то $f^{-1}: B \to A$ так же будет биекцией.

Композиция соответствий

- *Композицией соответствий* называют последовательное применение двух соответствий.
- Пусть даны три множества А, В, С. Причем существуют два соответствия $f: A \to B$ и $g: B \to C$, то можно построить соответствие $h: A \to C$ следующим образом элементу а поставим в соответствие элементы из множества $g(f(a))$.
  - Несложно проверить, что композиция отображений будет отображением, композиция биекций будет биекцией.

Пример



Отношения

- Всякое подмножество L декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ произвольных множеств $A_1, \ldots A_n$, называется отношением, определенным на множествах $A_1, \ldots, A_n$.
- Мы в основном будем рассматривать L на паре множеств A и B.
  - Если $<a,b> \in L$, то говорят, что элемент a находится в отношении L к элементу b или что отношение L для a,b выполняется.
  - Вместо $<a,b> \in L$ пишут также aLb или $L(a,b)$.

Отношения и соответствия

- Если рассматривать соответствие множеств A и B, то это соответствие можно представить парами элементов, первым записать элемент множества A, а вторым элементом его образ из B. Таким образом мы увидим, что соответствие задается, как некоторое подмножество декартово произведения $A \times B$, и наоборот, по любому подмножеству декартово произведения $A \times B$ можно построить соответствие множеств, определив что первому элементу пары, входящему в это подмножество, ставится в соответствие второй элемент той же пары. Таким образом, мы увидели, что соответствие являются частным случаем отношения, точнее отношением на паре множеств A и B.

Объединение, пересечение и отрицание отношений

Поскольку отношения, заданные на фиксированной паре множеств A,B суть подмножества множества $A \times B$, то можно рассматривать их объединение, пересечение, дополнение.

Пусть L,M подмножества $A \times B$, тогда

1. $a(L \cup M)b \Leftrightarrow \langle a,b \rangle \in L \cup M$.. $\Leftrightarrow$. $\langle a,b \rangle \in L$ или $\langle a,b \rangle \in M$, связка «или» в нашем случае не исключающая, т.е. логическая операция дизъюнкция. Поэтому вместо объединения отношений чаще говорят дизъюнкция отношений.
2. $a(L \cap M)b \Leftrightarrow \langle a,b \rangle \in L \cap M$.. $\Leftrightarrow$. $\langle a,b \rangle \in L$ *и* $\langle a,b \rangle \in M$. Вместо пересечения отношений чаще говорят конъюнкция отношений.
3. $a\overline{L}b \Leftrightarrow \langle a,b \rangle \notin L$. Вместо дополнения отношения, можно сказать отрицание отношения.

Обратное отношение

- Если L – отношение, определенное на паре множеств A,B, то обратным отношением (символически L^{-1}) называется отношение определенное на паре множеств B, A, которое состоит из тех пар $\langle b,a \rangle$, для которых $\langle a,b \rangle \in L$, т.е. $bL^{-1}a \Leftrightarrow aLb$.

Бинарное (двуместное) отношение на множестве А.

- Если $B=A$, отношение называется бинарным (двуместным) отношением на множестве A.

- Например, отношение равенства, определенное на множестве натуральных чисел N, можно понимать как совокупность всех диагональных пар $<1,1>,<,2,2>,\ldots$

- Отношение порядка $<$, есть множество пар $<a,b>$, таких, что $a<b$.

- Если S – множество людей, то множество супружеских пар будет подмножеством $S \times S$, и будет отношением.

Рефлексивность

1. Бинарное отношение L на множестве A называется *рефлексивным*, если для любого a из A верно aLa (т.е. $<a,a> \in L$).
   Например. Если на числах рассмотреть отношение $\leq$ нестрогого меньше, то оно будет рефлексивным, поскольку для любого числа a, верно $a \leq a$.

Антирефлексивность

Бинарное отношение L на множестве A называется *антирефлексивн*ым, если для любого a из A не выполняется $a \, L \, a$.

1. Примером антирефрексивного отношения будет отношение строгого меньше < на числах.

Симметричность

Бинарное отношение L на множестве A называется *симметричным*, если $bLa \Leftrightarrow aLb$ для любых элементов a, b из A.

1. Так отношение $\leq$ уже не будет симметричным.
2. А вот отношение супружеских пар на множестве людей будет симметричным.

Антисимметричность

Бинарное отношение *L* на множестве *A* называется *антисимметричным*, если bLa & $aLb \Rightarrow b=a$, для любых элементов a, b из A.

1. Несложно проверить, что отношение нестрогого меньше будет антисимметричным отношением.

Транзитивность

Бинарное отношение *L* на множестве *A* называется *транзитивным*, если

aLb& bLc =>aLc, для любых *a, b, c* из A.

1. Поскольку из того, что $a \le b$ и $b \le c$, следует $a \le c$, для любых чисел *a,b, c*, то отношение ≤ будет транзитивным.
2. Легко проверить, что и отношение строгого меньше (<) будет транзитивно.

Отношение эквивалентности

Бинарное отношение *L* на множестве *A* называется отношением эквивалентности, если оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Отношение эквивалентности часто обозначается ≡

- Примером отношения эквивалентности может быть отношение равенство. Оно очевидно рефлексивно (а=а), симметрично (а=в => в=а), и транзитивно (а=в & в=с =>а=с).

- Другим примером отношения *эквивалентности* на *множестве* натуральных чисел *N* является *равенство* остатков при делении на некоторое фиксированное число *n*: $a = b \ (mod\ n)$.

Классы эквивалентности

- Для каждого a из A определяется *класс эквивалентности* $[a]_{\equiv}$, который включает все эквивалентные a элементы, т.е. $[a]_{\equiv} = \{b | a \equiv b\}$.
- Очевидно, что каждый элемент множества A принадлежит некоторому классу эквивалентности, поскольку для любого a $a \in [a]_{\equiv}$. Таким образом мы выяснили, что классы эквивалентности покрывают все множество A.
- Покажем, что классы эквивалентности не пересекаются.

Классы эквивалентности не пересекаются.

- Предполагаем противное, пусть классы эквивалентности элементов а и в имеют общий элемент с, тогда получим, что *а≡с* и *в≡с*, поскольку отношение эквивалентности симметрично, то вместо *в≡с*, можно написать *с≡в*, поскольку отношение эквивалентности транзитивно, то получим, что *а≡в*.

- Рассмотрим произвольный элемент к из $[в]_{\equiv}$, т.е. в≡к, по отношению транзитивности мы получим а≡к, т.е. любой элемент из класса $[в]_{\equiv}$ принадлежит классу $[a]_{\equiv}$. Аналогичным образом можно показать, что любой элемент из класса $[a]_{\equiv}$принадлежит классу $[в]_{\equiv.}$, т.е. эти классы равны.

- Таким образом, мы показали, что если два класса имеют, хотя бы один общий элемент, то они совпадают.

Разбиение множества

Совокупностью подмножеств M_i, где $i \in I$ (множеству индексов), множества M называется **разбиением** множества M если выполняются следующие условия:

1. Каждое из подмножеств M_i непусто.
2. Объединение всех подмножеств M_i равно множеству M.
3. Два различных подмножества M_i и M_j, где $i \neq j$, не имеют общих элементов.

Разбиение и классы эквивалентности

Пусть $\equiv$ – отношение эквивалентности на множестве M. Тогда совокупность классов эквивалентности множества M образует его разбиение.

Действительно, если в качестве подмножеств M_i взять классы эквивалентности $[a]_\equiv$,то все три условия выполняются:

1. Каждый класс эквивалентности является непустым множеством
2. Объединение всех классов эквивалентности есть множество M
3. Два различных класса эквивалентности не имеют общих элементов,

Все условия определения разбиения выполнены. Следовательно классы эквивалентности есть разбиение множества M.

Фактор-множество

- Множества классов эквивалентности множества A по эквивалентности ≡ называется фактор-множеством множества A по эквивалентности ≡ и обозначается $A/\equiv$.

Разбиение X_A множества A определяет единственное отношение эквивалентности $\sim$, такое что $A/{\sim} = \mathrm{X}_A$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{X}_A = \{X_i \mid i \in I\}$ — разбиение множества A. Рассмотрим такое отношение $\sim$, что $x \sim y$, если x и y являются элементами одного и того же множества X_i, для некоторого i.

Покажем, что $\sim$ — отношение эквивалентности. В самом деле, отношение $\sim$ рефлексивно, так как каждый элемент множества A принадлежит какому-либо множеству из X_A.

Очевидно, что отношение $\sim$ также является симметричным.

Пусть теперь $x \sim y$ и $y \sim z$. Тогда найдутся такие множества X_i и X_j, что элементы x и y принадлежат X_i, а элементы y и z принадлежат X_j. Следовательно, $y \in X_i \cap X_j$, поэтому $X_i = X_j$. Таким образом, $x \in X_i$ и $z \in X_i$, поэтому $x \sim z$ и отношение $\sim$ транзитивно.

Итак, $\sim$ — отношение эквивалентности. Найдем фактормножество $A/{\sim}$. Пусть a — произвольный элемент множества A. Тогда $a \in X_i$ для некоторого i, и $[a] = \{x \mid x \in X_i\} = X_i$. Таким образом, $A/{\sim} = \mathrm{X}_A$.

Покажем, что отношение $\sim$ — единственное отношение эквивалентности, обладающее указанным свойством. Пусть R — также отношение эквивалентности, такое, что $A/R = \mathrm{X}_A$. Тогда если $(x, y) \in R$, то элементы x и y входят в один и тот же класс эквивалентности, который в свою очередь совпадает с одним из элементов разбиения X_A. Следовательно, $x \sim y$. Обратно, если $x \sim y$, то элементы x и y принадлежат одному из множеств разбиения X_A, которое совпадает с одним из классов эквивалентности отношения R. Следовательно, пара (x, y) принадлежит отношению R. Таким образом, $R = \sim$.