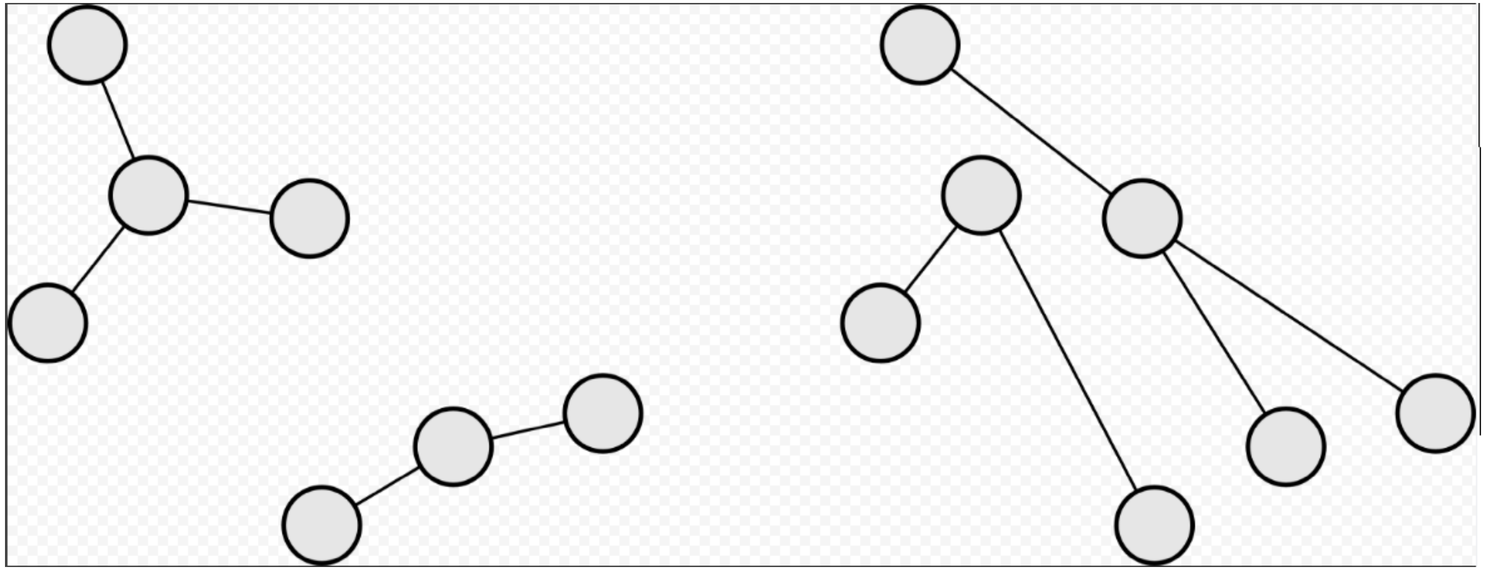
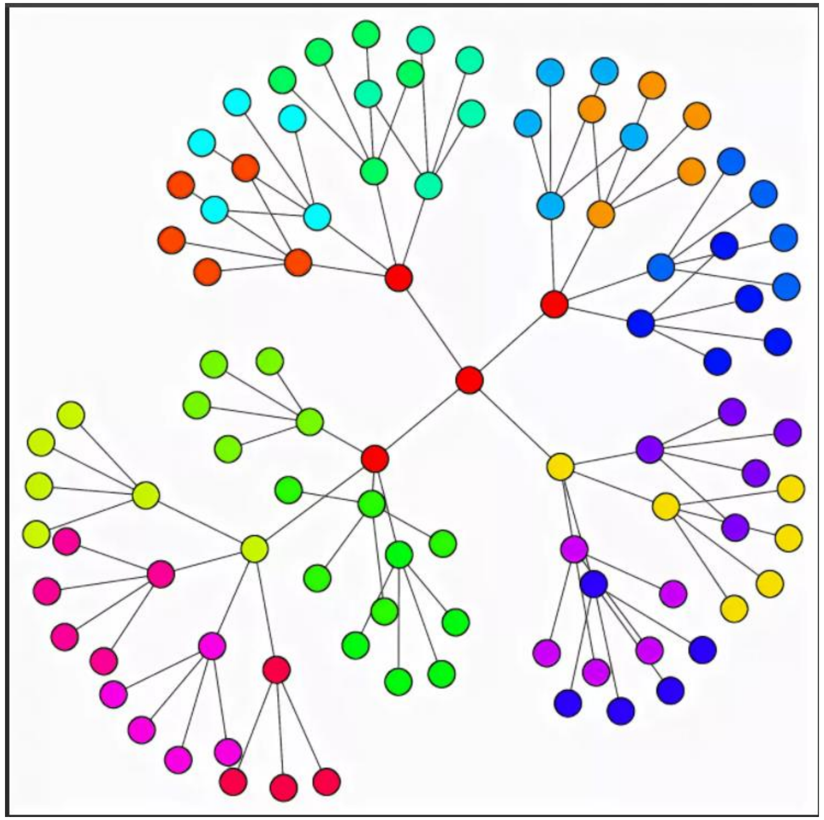
Графы. Гамильтоновы циклы.

Деревья

- Граф без цикло называется *ациклическим* графом.
- Связный граф без циклов называется *деревом*.
- Связный ациклический граф называется деревом.
- Граф без циклов называется лесом.



Пример.



Пять определений дерева.

Теорема. 2.9. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Граф является деревом, то есть связным без циклов графом.
2. Граф является связным и число его рёбер ровно на единицу меньше числа вершин.
3. Две любые различные вершины графа G можно соединить единственной (и при том простой) цепью.
4. Граф является связным и каждое его ребро является мостом.
5. Граф G не содержит циклов, но, добавляя к нему любое новое ребро, получаем ровно один цикл (и притом простой цикл), проходящий через добавляемое ребро.

Лемма 1. Висячая вершина графа не может входить в цикл или быть промежуточной в цепи.

- Поскольку для вершины, входящей в цикл или промежуточной в цепи, число заходов в нее равно числу исходов из нее, а всякое движение к вершине и из нее происходит по ребрам инцидентным этой вершине.
- Но у висячей вершины только одно инцидентное ей ребро, значит любое движение должно происходить по этому ребру, что невозможно для цикла или цепи, поскольку ни в цикле, ни в цепи нет повторяющихся ребер.

Лемма 2. Если у дерева G есть, по крайней мере, одно ребро, то у него обязательно найдётся висячая вершина.

- Предполагаем противное.
- Значит степени всех вершин G больше 1, а по ранее доказанной теореме такой граф содержит цикл. Этот факт противоречит тому, что G дерево.

Лемма 3. Пусть G-связный граф. v-висячая вершина в G, а G`-граф, получен из G в результате удаления вершины v и инцидентного ей ребра, тогда G`-связный граф.

- Доказательство. Пусть v1,v2 (v1¤v2) произвольные вершины из графа G`, в графе G они соединены цепью.
- Очевидно, что эта цепь не может проходить через вершину v, поскольку та висячая и не совпадает ни с одной вершин v1, v2 .
- Если она не проходит через v, то она является цепью в G`, следовательно, граф G` связный.

Лемма 4. Пусть *G*`-граф, являющийся деревом, *G*-граф, полученный в результате добавления к *G*` новой вершины *v* и ребра *(v,w)*, где *w*-некоторая вершина графа *G*`. Тогда *G*-дерево.

- *Доказательство*. Из леммы 1 следует, что вершина *v* не может принадлежать циклу, следовательно, любой цикл графа *G'* будет циклом графа *G*.
- Поскольку граф *G* не имеет циклов, то граф *G'* тоже не будет иметь.
- Связность графа *G'* также легко следует из связности графа *G*.

Следовательно, граф *G'* дерево.

Доказательство 1 => 2. Если G – дерево, имеющее n вершин и m ребер, то m=n-1.

Доказательство проведем индукцией.

- Если $n=1$, то очевидно, что $m=0$.
- Предполагаем, что утверждение справедливо для всех деревьев, имеющих не более чем k вершин.
- Рассмотрим, дерево, содержащее $k+1$ вершину, т.е. $n=k+1$.
- По лемме 2, дерево G имеет хотя бы одну висячую вершину. Удалим одну висячую вершину вместе с инцидентным ей ребром и получим граф G', который по лемме 3 является деревом.
- Поскольку G' имеет $n-1$ вершину, то к нему можно применить индукционное предположение, следовательно, $m-1=(n-1)-1$.
- Отсюда получим $m=n-1$.

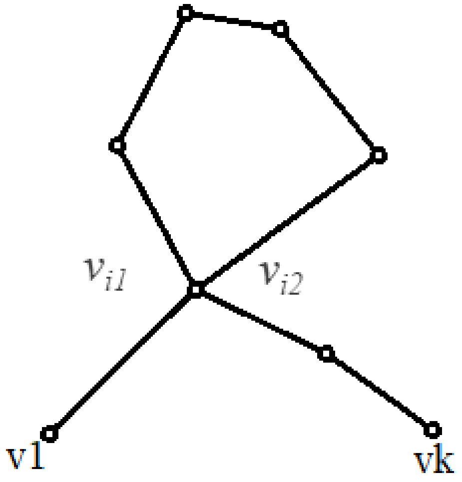
Доказательство 2 => 1. Пусть G-связный граф, имеющий n вершин и m рёбер, тогда если выполняется условие m=n-1, то G является деревом.

Доказательство проведем индукцией по n количеству вершин.

- Если $n=1$, то $m=0$. Граф, состоящий из одной изолированной вершины, является деревом.
- Пусть доказываемое утверждение справедливо для любого графа с менее чем n вершинами.
  - Докажем справедливость этого утверждения для графа G с n-вершинами.
  - Покажем, что в G имеется висячая вершина. Если её нет и граф связан, то степень любой вершины не меньше двух. Тогда сумма степеней всех вершин не меньше $2n$, с другой стороны для любого графа сумма степеней всех вершин равна $2m$. Следовательно, $2m \geq 2n$, т.е. $m \geq n$, что противоречит тому, что $m=n-1$, следовательно, в G есть висячая вершина v.
  - Удалим её вместе с инцидентным ей ребром. В результате получим граф G\`с $n-1$ вершиной и $m-1$ ребром. В силу леммы 3, граф $G$\`-связный. Поскольку $m=n-1$ по условию теоремы, то количество рёбер в графе G\`на единицу меньше чем вершин, т.е. для графа $G$\` можно воспользоваться индукционным предположением, т.е. граф G\`-дерево. Но тогда в силу леммы 4, граф G-тоже дерево.

Лемма 5. Пусть G-дерево, тогда любая цепь в G будет простой.

Доказательство. Предполагаем противное. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_k$- цепь в дереве G и она не является простой, тогда для некоторых $i_1 < i_2$ $v_{i1} = v_{i2}$, т.е. цепь $v_{i1}, \dots, v_{i2}$-цикл, что противоречит тому, что G-дерево.

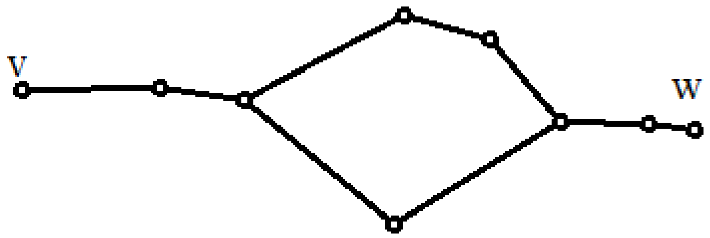


Доказательство 1$\Rightarrow$3. Пусть *G*-дерево, тогда две любые вершины соединяются единственной и притом простой цепью.

Доказательство. Пусть *G*-дерево и v,w некоторые вершины *G*, $v \neq w$. Тогда в силу связности *G* их можно соединить цепью μ_1.

- Предположим, найдётся вторая цепь μ_2, которая тоже соединяет вершины.
- Пусть $\mu_1 = v_1, \ldots, v_k$, $\mu_2 = w_1, \ldots, w_n$, $v_1 = v = w_n$, $v_k = w = w_n$
- Поскольку $\mu_1 \neq \mu_2$,то найдётся такое i, что $v_1 = w_1, \ldots, v_i = w_i$, $v_{i+1} \neq w_{i+1}$. Пусть $j > i$ такой номер, что вершина v_j встретится среди вершин $w_{i+1} \ldots w_n$,такое j найдется, поскольку $v_k = w = w_n$. Пусть e такое, что $v_j = w_e$, тогда
- $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j, w_{e-1}, \ldots, w_i = v_i$ есть цикл, а это противоречит тому, что *G* дерево.
- Простота цепи сразу следует из того, что если в цепи есть повторяющиеся вершины, то из нее можно выделить цикл, а циклов в дереве быть не должно.

Рисунок к доказательству 1=>3



Доказательство 3=>1. Пусть G такой граф, что две любые вершины соединяются единственной цепь, тогда G - дерево.

- Очевидно, что G - связный граф. Покажем, что в G нет циклов. Предположим противное. Пусть μ - цикл в графе G $\mu=v_1,v_2,\ldots,v_k$ и $v_1=v_k$, очевидно $k\geq 3$.
- Тогда вершины v_1 и v_2 можно соединить цепями v_1,v_2 и $v_2,v_3,\ldots,v_k$.

Доказательство 3⇒4. Пусть G такой граф, что две любые вершины соединяются единственной цепь, тогда любое ребро графа является мостом.

- Доказательство. Рассмотрит ребро *(v,w)*. Если удаление этого ребра не приводит к нарушению связности графа, то значит существует некоторая цепь, которая соединяет вершины *v*, *w*, и не содержит ребра *(v,w)*.
- Получим, что вершины *v,w* соединяются в графе G двумя различными цепями, что противоречит условию на граф G.
- Следовательно, удаление любого ребра из графа G приводит к нарушению связности, т.е. любое ребро графа G является мостом.

Доказательство 4⇒1. Пусть граф G является связным, и любое ребро этого графа является мостом, тогда G – дерево.

- Предполагаем противное, пусть граф G имеет цикл. Легко проверить, что любое ребро, входящее в цикл, не является мостом, что противоречит условию на граф G.

Доказательство 1⇒5. Если граф G дерево, то G не содержит циклов, но, добавляя к нему любое новое ребро, получаем ровно один цикл (и притом простой цикл), проходящий через добавляемое ребро.

- Пусть v и w - две любые вершины в G, не соединённые ребром, добавляя к G ребро (v,w) получим граф G\`. Поскольку вершины v и w соединяются цепью μ, то цепь $\eta = \mu+(w,v)$ будет циклом.
- Этот цикл будет проходить через ребро (v,w), а из единственности цепи μ следует единственность цикла η, т.е. стоит предположить существование другого цикла в графе G\`, проходящего через это ребро, так сразу же мы получаем вторую цепь, соединяющую вершины v и w , что невозможно для дерева.

Доказательство 5⇒1. Если граф G не содержит циклов, но, добавление к нему любого нового ребра, приводит к появлению ровно одного цикла (и притом простого), проходящего через добавляемое ребро, то G дерево.

- Граф G не содержит циклов, для того, чтобы доказать, что он дерево, надо доказать его связность.
  - Предполагаем противное. Пусть вершины v и w *графа* G нельзя соединить цепью. Добавим к G ребро (v,w) и получим граф G\`, уже имеющий цикл μ, который проходит через ребро (v,w). А следовательно, этот цикл имеет вид $\mu=v,w,w_1,\ldots,w_k$, где $w_k=v$, т.е. $w,w_1,\ldots,w_k$-цепь, соединяющая вершины v и w. Эта цепь не содержит ребра (v,w), следовательно, она принадлежит графу G, что противоречит не связности графа G.
  - Следовательно, G связный граф, а поскольку он не имеет циклов, то он является деревом.