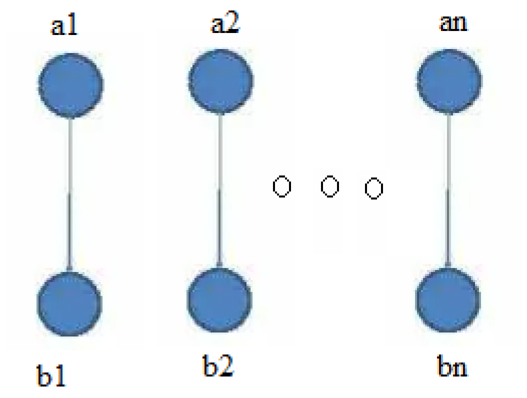
Равномощность

Конечные множества

- Два конечных множества называются равномощными если они имеют одинаковое число элементов.
- Два конечных множества равномощны, если и только если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие.



Равномощность произвольных множеств

- Два множества A и B называются *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.
- Обозначать равномощность мы будем так: $|A|=|B|$.
- Мы видим, что это обозначение не противоречит такому же обозначению для конечных множеств, поскольку равенство количества элементов в конечных множествах приводит к существованию взаимно однозначного соответствия между ними.

Отношение «иметь не большую мощность»

- Определение равномощности уточняет интуитивную идею о множествах "одинакового размера". А как формально определить, когда одно множество "больше" другого?
- Говорят, что множество *A по мощности не больше множества B*, если оно равномощно некоторому подмножеству множества B (возможно, самому B).
- Обозначать данный факт будем следующим образом:

$$|A| \leq |B|.$$

Свойства конечных множеств

- Даны конечные множества A и B:

1. если $A \subseteq B$, то $|A| \leq |B|$;
2. если $A \subsetneq B$, то $|A| < |B|$;

- Из определения отношения $|A|\leq|B|$, следует, что первое свойство выполняется.
- А вот второе свойство для бесконечных множеств не выполняется.
- Например, множество А – это множество всех натуральных чисел, а множество В – это множество всех четных чисел, тогда отображение

$$f: x \to 2x,$$

будет взаимно однозначным соответствием, которое каждому натуральному числу поставит единственное четное число, причем для любого четного числа найдется его единственный прообраз.

Отсюда получим, что $|A|=|B|$.

- ***Бесконечное множество может быть равномощно своему собственному подмножеству.***

Свойства отношения равномощности на множествах

- Отношение равномощности на множествах будет рефлексивно, симметрично и транзитивно.
- Первые два свойства очевидны, рассмотрим транзитивность. Пусть даны три множества A,B,C. Причем существуют два взаимно однозначных соответствия f: $A \rightarrow B$ и g: $B \rightarrow C$. Тогда композиция f и g будет взаимно однозначным соответствием множеств A и C.
- Таким образом отношение равномощности является эквивалентностью.
- Поскольку отношение равномощности на множествах является отношением эквивалентности, то *мощностью* или *кардинальным числом* множества A называется соответствующий ему класс эквивалентности.