# Алгебраическая система

# Операция на множестве А

- Рассмотрим декартово произведение $n$ – множеств $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Если все эти множества равны одному $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется *декартовой n-степенью множества A* и обозначается $A^n$. Если n=0, то по определению считаем $A^0 = \varnothing$;
- Отображение $f\colon A^n \to A$ называется $n$-местной *операцией* на $A$.
- Если $n=0$, то по определению $0$-местная функция - это выделенный элемент А, т.е. константа.

# Алгебраическая система

- Множество, с заданными на нем отношениями и операциями, называется *алгебраической системой*.
- Более строгое определение

$$m = < A; P_1^{i_1}, \ldots, P_n^{i_n}; f_1^{j_1}, \ldots, f_m^{j_m} >$$

- $A$ – основное множество.
- $P_1 \ldots P_n$ – символы, задающие отношение на множестве А.
- $i_1 \ldots i_n$ – числа, указывающие местности этих отношений.
- $f_1 \ldots f_m$ – функциональные символы, задающие операции на А.
- $j_1 \ldots j_m$ – числа, указывающие местности операций.
- Если заранее очевидны местности операций и отношений, то их не пишут.
- Пример: частично упорядоченное множество $<A; \leq>$ - это алгебраическая система с единственным двухместным отношением частичного порядка.

# Булева алгебра

- Алгебраическая система $<A;\cup,\cap,- >$, где $A$ – множество,

$\cup^2, \cap^2, -^1$ - функциональные символы, называется булевой алгеброй, если для любых $a,b,c \in A$ выполняются следующие равенства:

1) $a \cup b = b \cup a$ (коммутативность);
2) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$ (ассоциативность);
3) $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ (дистрибутивность);
4) $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b}$ (закон де Моргана);
5) $a \cup a = a$ (идемпотентность);
6) $(a \cap \bar{a}) \cup b = b$ (закон поглощения);
7) $\bar{\bar{a}} = a$ (двойное дополнение).

***Теорема***. Пусть $a, b$ произвольные элементы булевой алгебры, тогда

1) $a \cap b = b \cap a$
2) $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$
3) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
4 $\overline{a \cap b} = \overline{a} \cup \overline{b}$
5) $a \cap a = a$
6) $(a \cup \overline{a}) \cap b = b$

***Доказательство.*** Докажем первое утверждение. Применим сначала закон двойного дополнения $a \cap b = \overline{\overline{a}} \cap \overline{\overline{b}}$, затем де Моргана $\overline{\overline{a}} \cap \overline{\overline{b}} = \overline{\overline{a} \cup \overline{b}}$, затем закон коммутативности $\overline{\overline{a} \cup \overline{b}} = \overline{\overline{b} \cup \overline{a}}$, затем снова закон де Моргана $\overline{\overline{b} \cup \overline{a}} = \overline{\overline{b}} \cap \overline{\overline{a}}$, и в заключении опять закон двойного дополнения $\overline{\overline{b}} \cap \overline{\overline{a}} = b \cap a$. Получим коммутативность для операции $\cap$. Остальные утверждения доказываются аналогичным образом.

$$\overline{a \cap b} = \overline{\overline{\overline{a}} \cap \overline{\overline{b}}} = \overline{\overline{\overline{a} \cup \overline{b}}} = \overline{a} \cup \overline{b}$$

$$(a \cup \overline{a}) \cap b = (\overline{\overline{a}} \cup \overline{\overline{\overline{a}}}) \cap b = (\overline{\overline{a} \cap \overline{\overline{a}}}) \cap b = (\overline{\overline{a} \cap a}) \cap b = (\overline{a \cap \overline{a}}) \cap \overline{\overline{b}} = \overline{(a \cap \overline{a}) \cup \overline{b}} = \overline{\overline{b}} = b$$

## ***Теорема.*** о возможности определения 0 и 1 в булевой алгебре. Для любых $a, c \in A$ верно $a \cup \bar{a} = c \cup \bar{c}$ и $a \cap \bar{a} = c \cap \bar{c}$.

Запишем закон поглощения $(a \cup \bar{a}) \cap b = b$. Поскольку $b$ произвольный элемент, то вместо $b$ можно написать $c \cup \bar{c}$, тогда

- $(a \cup \bar{a}) \cap (c \cup c) = (c \cup \bar{c})$.
- С другой стороны, $(a \cup \bar{a}) \cap (c \cup \bar{c}) = (c \cup \bar{c}) \cap (a \cup \bar{a}) = a \cup \bar{a}$.
- Следовательно, $c \cup \bar{c} = a \cup \bar{a}$.
- Аналогичным образом доказывается $a \cap \bar{a} = c \cap \bar{c}$.
- Поскольку значения выражения $a \cup \bar{a}$ не зависит от элемента $a$, то его можно обозначить каким-то символом, например, $1$ *(единицей)*.
- Значения $a \cap \bar{a}$ также не зависит от $a$, его мы обозначим $0$.
- Несложно доказать, что $1 \cap a = a$, $1 \cup a = 1$, $0 \cup a = a$, $0 \cap a = 0$.

# Примеры булевых алгебр:

1) Рассмотренная нами алгебра множеств.
2) Алгебра логики.
3) Алгебра релейно-контактных схем.
    1. Основное множество-это множество сигналов.
    2. Операции соответственно задаются такими устройствами как дизъюнктер, конъюнктер, инвертор.

# Пример булевой алгебры

- Пусть даны множества $A_{1,\dots,}A_n$ . С помощью операций объединения, пересечения и дополнения образовываются из $A_{1,\dots,}A_n$ всевозможные новые множества. Совокупность всех этих множеств обозначим через $C(A_{1,\dots,}A_n)$.
- Очевидно $C(A_{1,\dots,}A_n)$ и замкнуто относительно операций $\cap, \cup, \bar{\ }$. Очевидно, алгебраическая система $N = \langle C(A_{1,\dots,}A_n); \cap, \cup, \bar{\ } \rangle$ является булевой алгеброй.
- Булева алгебра $N$ также называется алгеброй множеств, порожденной множествами $A_{1,\dots,}A_n$. Множества $A_{1,\dots,}A_n$ называются образующими или порождающими множествами.

# Изоморфизм булевых алгебр

Определение: Пусть даны две булевы алгебры $M=<A, \cap, \cup, \bar{\ }>$ и $N=<B, \cap, \cup, \bar{\ }>$, говорят, что эти алгебры изоморфны, если существует такая биекция *f* множества *A* на множество *B*, что

- $1)\ f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$
- $2)\ f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$
- $3)\ f(\bar{a}) = \overline{f(a)}$

В математике, как правило, изоморфные объекты не различаются, поскольку их структурные свойства одинаковы.

# Теорема. Стоуна (без доказательства). Каждая булева алгебра изоморфна некоторой алгебре множеств.

- Из теоремы Стоуна следует, что изучая свойства алгебры множеств, мы изучаем структурные свойства любой другой булевой алгебры.