МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ДИЗАЙНА И ТЕХНОЛОГИИ»
(ФГБОУ ВПО «МГУДТ»)

Т.М. Кузьмина, О.А. Ветрова

Дискретная математика

Конспект лекций

Учебно-методический комплекс
по направлению подготовки 09.03.01 (230100) Информатика и вычислительная техника

Москва
МГУДТ 2016

УДК 677.022:519.86
К89

К89 Дискретная математика: конспект лекций «Дискретная математика» /Кузьмина Т.М., Ветрова О.А. – М.: МГУДТ, 2016. – 80с.

Рецензенты:
проф., д.т.н. Севостьянов П.А. (ФГБОУ ВПО «МГУДТ»)
учитель, к.т.н., доц.Терехина А.О.(ГБОУ лицей №1533
(информационных технологий) г. Москва)

Конспект лекций по курсу «Дискретная математика» предназначен для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01 (230100) Информатика и вычислительная техника.

Курс лекций включает в себя два раздела: теорию множеств и теорию графов. В первом разделе рассматриваются алгебра множеств, соответствия и отношения, сравнение множеств по мощности, нормальные формы Кантора, алгоритм Квайна поиска минимальной НФК. Во втором разделе изучаются способы задания графов, изоморфизм графов, связность, эйлеровы и гамильтоновы циклы, двудольные графы, деревья, цикломатика и взвешенные графы. Рассматриваются различные алгоритмы на графах.

УДК 677.022:519.86

Подготовлено к печати на кафедре автоматизированных систем обработки информации и управления.

Печатается в авторской редакции (*по усмотрению авторов*).

Введение

Дискретная математика является одной из самых древних ветвей математики, поскольку все началось с натуральных чисел, а это объекты дискретные. И вместе с тем она является одной из самых современных бурно развивающихся разделов математика, поскольку язык электронных вычислительных машин дискретен. Мир нулей и единиц – это мир дискретной математики.

В ней не рассматриваются понятия непрерывности и предела последовательности, но вопросы бесконечности ей также близки, как и классической математике. Нужно сказать, что деление математики на непрерывную и дискретную весьма условно. Поскольку постоянно происходит активная циркуляция идей и методов между разными разделами математики. Нередко исследуются модели, обладающие как дискретными, так и непрерывными свойствами одновременно.

В настоящее время методы дискретной математики находят широкое применение в различных областях знаний, прежде всего в компьютерных технологиях.

Множества

Основные определения

Понятие множества относится к фундаментальным неопределяемым понятиям. Оно было введено в математику создателем теории множеств немецким ученым Георгом Кантором (1845 – 1918). Следуя ему, под множеством понимается совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое. Это описание понятия множества нельзя считать строгим определением, поскольку встает вопрос, «Что такое совокупность?». Можно определить, понятие «совокупность», но опять появится слово, которое потребует точного определения. И во всех последующих определениях мы будем встречать слова, которые еще не определены. Понятие множества нельзя свести к каким-то более простым математическим объектам, оно принимается как исходное, первичное.

Примерами множеств могут служить множество книг, составляющих университетскую библиотеку; множество студентов, которые учатся в вашей группе; множество столов, стоящих в аудитории, где проходит наша лекция;

множество планет солнечной системы; множество четных чисел, множество всех точек данной линии, множество всех решений данного уравнения и т.п.

Объекты, из которых состоит множество, называют элементами множества. Нам не важна природа этих элементов, но важно, что они четко различимы один от другого.

Обозначать множества мы будем большими латинскими буквами, а их элементы малыми латинскими буквами. Если некоторый объект x является элементом множества M, то говорят, что x принадлежит M и записывают $x \in M$. В противном случае, говорят, что x не принадлежит M и записывают $x \notin M$.

Символ $\in$ называется знаком принадлежности.

Отметим, что для любого объекта x и для любого множества M, мы, в рассматриваемой теории множеств, можем ответить на вопрос: «Принадлежит объект x множеству M?».

Множества, как объекты могут быть элементами других множеств.

Например, группу студентов, можно рассматривать как множество студентов, и как элемент множества групп студентов конкретного университета. Университет можно рассматривать, как элемент множества университетов России.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным. Но множество может содержать бесконечное число элементов, как, например множество четных чисел, в этом случае оно называется бесконечным.

Множество может не содержать ни одного элемента, такое множество называется пустым, оно обозначается $\varnothing$.

Отметим, множество $\{\varnothing\}$ уже не будет пустым, оно будет содержать один элемент – пустое множество.

Способы задания множеств

Чтобы задать множество, нужно указать какие элементы ему принадлежат. Это можно сделать следующими способами:

1. Перечислением элементов. Например, *M={Ваня, Маня, Петя}* или $B=\{2,4,9,80\}$.
   Данный способ приемлем только для конечных множеств. Причем, если один и тот же элемент перечислен несколько раз, он все равно считается одним элементом.
2. Заданием порождающей процедуры, например $A=\{2,4,8,\ldots,2x,\ldots\}$ или $A=\{2,4,8,\ldots\}$, закон порождения можно не указывать, если он очевиден.

3. Указанием свойств элементов множества. Например, множество четных чисел.

   В этом случае, записывают так: $M=\{x|x$ – *четное число*$\}$

Отметим, что одно и тоже множество может быть задано разными способами. Так мы задали множество четных чисел и указанием свойства элементов и порождающей процедурой.

Сравнение множеств

Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, $M=\{2,6\}$, $A=\{2,7,2\}$. Поскольку каждый элемент в множество может входить только один раз, то множества M и A состоят из одних и тех же элементов, значит $M=A$.

Множество B называется подмножеством A (или множество A включает множество B), если любой элемент из B принадлежит множеству A . Обозначается включение так: $B\subseteq A$.

Очевидно, что множество A является подмножеством самого себя. Поскольку любой элемент из A является элементом A. Также очевидно, что пустое множество является подмножеством любого множества, поскольку оно не содержит элементов и значит все его элементы являются элементами любого другого множества.

Множество B называется собственным подмножеством множества A, если $B\subseteq A$ и $B\neq A$. В этом случае, говорят, что B строго включено в A и обозначают так $B\subsetneq A$.

Для иллюстрации включения множества в другое множество и выполнения операций над множествами используются диаграммы Эйлера - Венна. На них множества изображаются некоторыми фигурами, например овалами.

Если $B\subseteq A$, но на диаграмме множества A и B можно изобразить следующим образом:

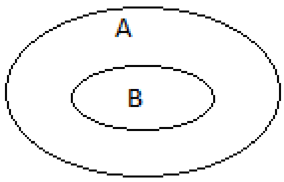


Рисунок 1. $B\subseteq A$

Как правило, предполагается, что рассматриваемые множества содержатся в некотором большем множестве, называемым универсальным множеством, которое на диаграммах Эйлера-Венна, обозначается четырехугольником.

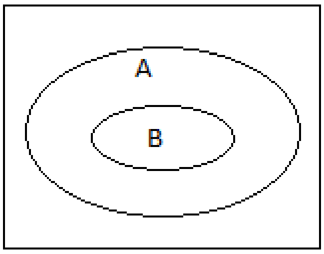


Рисунок 2. ***B⊆A, вместе с универсальным множеством***

Вопросы и задачи

1. Равны ли множества?
   a. {1, 3, 5}, {1, 3, 5,1};
   b. {11, 13}, {{11, 13}};
   c. $\{a, b, c\}$, $\{a, b, a, c\}$;
   d. $\{a, b, c\}$,$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$;
   e. $\{\{a, b\}, c\}$,$\{a, \{b, c\}\}$;
2. Вставьте, где это возможно, между множествами символы ∈ , ⊆ так, что бы получились истинные высказывания. Есть ли среди строк такие, в которых можно поставить оба символа?
   a. {1}, {1,{1, 2}};
   b. {1, 2}, {1, 2, {1}, {2}};
   c. Ø, {1, 2, {1}, {Ø}};
   d. Ø, {Ø};
   e. Ø, {1, 2,3};
   f. {1, 2}, {1, 2}.
   g. {1}, {1, 2, {1}, {2}};
3. Какие из следующих утверждений верны?

a ∈ {a,b}	{a} ∈ {a,b}	∅ ∈ ∅
a ⊆ {a,b}	{a} ⊆ {a,b}	∅ ⊆ ∅
a ∈ {{a},b}	{a} ∈ {{a},b}	∅ ∈ {∅}
a ⊆ {{a},b}	{a} ⊆ {{a},b}	∅ ⊆ {∅}

Алгебра множеств

Операции над множествами

Операция объединения.

Объединением двух множеств *A,B* называют третье множество *A∪B*, которое состоит из элементов входящих любо в множество *A*, либо в множество *B*.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

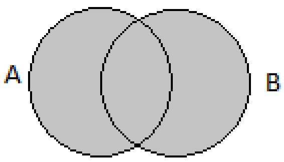


Рисунок 3. ***A∪B***

Операция пересечения.

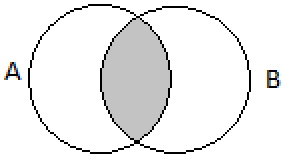


Рисунок 4. $A \cap B$

Пересечением двух множеств A,B называют третье множество $A \cap B$, которое состоит из элементов, входящих в множества A,B одновременно.

$A \cap B \;=\{x|\; x \in A$ и $x \in B\}$

Операция разности.

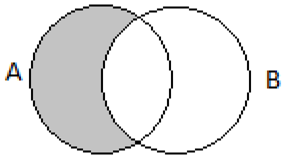


Рисунок 5. $A \backslash B$

Разностью двух множеств A, B называют третье множество $A \backslash B$, которое состоит из элементов, входящих в множество A, но не входящих в множество B.

$A \backslash B \;=\{x|\; x \in A$ и $x \notin B\}$.

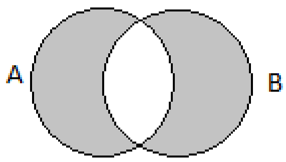


Рисунок 6. $A \nabla B$

Операция симметрической разности.

Симметрической разностью множеств A,B называют множество $A \nabla B$, которое состоит из элементов входящее в одно из этих множеств и не входящих в другое.

$A \nabla B \;=\{x|x \in A$ и $x \notin B$ или $x \in B$ и $x \notin A\}$

Операция дополнения.

Эта операция определяется только при допущении, что существует универсальное множество. Универсальное множество, как правило, ограничивает некоторую область выбора объектов. Например, если мы рассматриваем множества людей, то универсальным множеством может быть множество всех людей или множество млекопитающих, или множество всех живых существ.

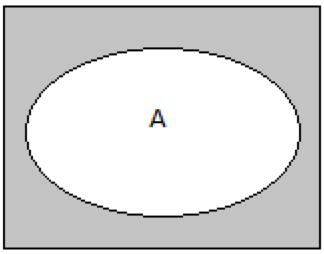


Рисунок 7. $\bar{A}$

Дополнением множества A называется множество $\bar{A}$, которое состоит из элементов, которые не входят в множество A.

$\bar{A} \;=\{x|\; x \notin A\}$

В определении не упоминается универсальное множество, но его существование заранее его оговаривается, поэтому можно сказать, что $\bar{A}=У\backslash A$. Если не рассматривать универсального множества, то мы можем получить парадоксальные (противоречивые) утверждения.

Законы алгебра множеств.

Теорема 1.Для операций объединения, пересечения и дополнения выполняются следующие законы:

Название закона	Формулировка закона
Коммутативности	$A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$;
Ассоциативности	$(A\cup B)\cup C= A\cup(B\cup C)= A\cup B\cup C$; $(A\cap B)\cap C= A\cap(B\cap C)= A\cap B\cap C$
Дистрибутивности	$A\cup(B\cap C)= (A\cup B) \cap (A\cup C)$; $A\cap(B\cap C)= (A\cap B) \cup (A\cap B)$;
Идемпотентности	$A\cup A=A$; $A\cap A=A$;
Свойства дополнения	$A\cup\bar{A}=У$; $A\cap\bar{A}=\varnothing$;
Де Моргана	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;
Поглощения	$A\cup(B\cap A)=A$; $A\cap(B\cap A)=A$;
Двойного дополнения	$\overline{\overline{A}}=A$;
Свойства констант	$A\cup У=У$; $A\cup\varnothing=A$; $A\cap У=A$; $A\cap\varnothing=\varnothing$;
Выражение для разности	$B\backslash A=B\cap \bar{A}$.
Выражение для симметрической разности	$A\nabla B = A\backslash B \cup B\backslash A$

Для того, что бы доказать сформулированные законы, нужно доказать, что множество определенное в левой части равенства совпадает с множеством, определенным в правой части равенства. Существуют два способа доказательства: геометрическое и алгебраическое. При первом способе строят диаграммы Эйлера -Венна для множеств, определяемых обеими частями равенства и получают одинаковые изображения. При втором способе доказывают два утверждения о включениях:

1. $B\subseteq A$
2. $A\subseteq B$

Где буквами *A* и *B* обозначаются множества, соответственно, заданные левой и правой частями формул

Доказательства этих включений проводятся по такой схеме: рассматривается произвольный элемент, удовлетворяющий определению меньшего множества (слева от знака $\subseteq$), и устанавливается, что он удовлетворяет также определению большего множества (справа от знака $\subseteq$).

В качестве примера докажем один из законов дистрибутивности :

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$.

1. Пусть a - произвольный элемент из $A\cup(B\cap C)$. Тогда по определению операции $\cup$ имеем $a\in A$ или $a\in B\cap C$. В первом случае из того же определения выводим, что $a\in A\cup B$ и $a\in A\cup C$. Но тогда по определению операции $\cap$ получаем, что $a\in (A\cup B) \cap (A\cup C)$. Во втором случае из определения $\cap$ следует, что $a\in B$ и $a\in C$. Из этого и из определения $\cup$ снова следует, что $a\in A\cup B$ и $a\in A\cup C$, и $a\in (A\cup B) \cap (A\cup C)$. Таким образом, мы установили, что
$A\cup (B\cap C) \subseteq (A\cup B) \cap (A\cup C)$.
2. Пусть теперь $a\in(A\cup B) \cap (A\cup C)$. Тогда по определению операции $\cap$ имеем $a\in A\cup B$ и $a\in A\cup C$. Если $a\in A$, то оба эти включения выполнены. Но тогда $a\in A\cup(B\cap C)$. Если же $a\notin A$ то из первого включения следует, что $a\in B$, а из второго - $a\in C$. Следовательно, $a\in B\cap C$ и $a\in A\cup (B\cap C)$. Таким образом, $(A\cup B) \cap (A\cup C) \subseteq A\cup (B\cap C)$, и наше утверждение доказано.

Рассмотрим геометрическое доказательство того же закона дистрибутивности:
$A\cup (B\cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$

Построим множество, задаваемое формулой $A\cup (B\cap C)$. Строить его будет поэтапно. Сначала выполним операцию $B\cap C$ (зисунок 8), затем объединим результат с множеством A (рисунок 9).

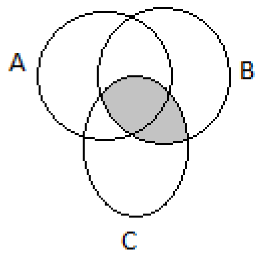


Рисунок 8. ***Диаграмма множества B ∩ C.***

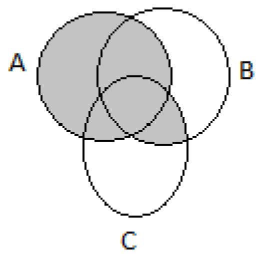


Рисунок 9. Диаграмма множества A ∪(B ∩ C).

Теперь построим множество (A ∪ B) ∩ (A ∪ C). Его также будем строить по действиям (рисунки 10-12).

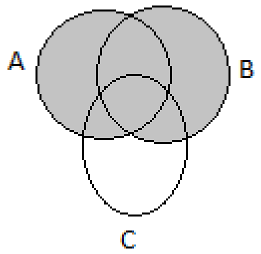


Рисунок 10. Диаграмма множества $A \cup B$.

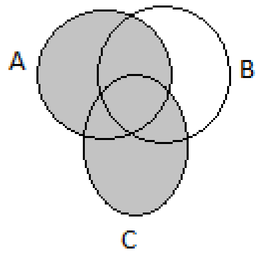


Рисунок 11. Диаграмма множества $A \cup C$.

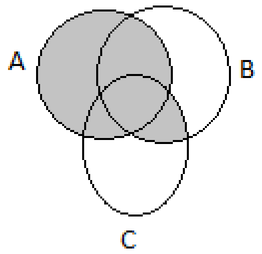


Рисунок 12. Диаграмма множества $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Как видно из результирующих диаграмм, обе формулы определяют одно и то же множество. На практике, часто все действия выполняют на одном рисунке, при этом используют разные способы закраски результатов действий. В таком случае обязательно говорят, как закрашено итоговое множество.

Замечание 1. Поскольку операции разности и симметрической разности выражаются через операции дополнения, пересечения и объединения, мы их подробно рассматривать не будем.

Замечание 2. Операции над множествами упорядочиваются по приоритету. Самый высокий приоритет имеет операция дополнения, затем идет операция пересечения и потом операция объединения.

Вопросы и задачи

1. Универсальное множество У={a, b, c, d, e, f}, множество A={a, b, c} и множество B={a, c}, найти элементы множеств

   a. $A \cup B$
   b. $A \cap B$
   c. $\overline{A \cap B}$
   d. $\overline{A} \cup B$
   e. $\overline{A} \cap B$
   f. $\overline{A} \cup \overline{B}$
   g. $\overline{A} \cap \overline{B}$

2. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера – Венна следующие множества.

   a. $\overline{A} \cup B$
   b. $\overline{A \cup B}$
   c. $\overline{A \cap B}$
   d. $\overline{A} \cup \overline{B}$
   e. $\overline{A} \cap \overline{B}$
   f. $\overline{A} \cap \overline{B} \cup C$
   g. $\overline{A \cup B} \cap C$
   h. $\overline{A} \cup \overline{B} \cup C$
   i. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$

3. Известно, что $x \in A$, верны ли следующие утверждения?

   a) $x \in A \cap B$;
   b) $x \in A \cup B$.

4. Универсальное множество равно множеству натуральных чисел N. Обозначим через A_2, A_3, A_5, A_7 множества натуральных чисел, которые, соответственно, делятся на 2,3,5,7. Множество чисел, которые делятся на 6,

находятся по формуле $A_2 \cap A_3$, поскольку эти числа делятся и на 2 и на 3.Записать в виде формулы множества чисел, которые

1. делятся на 15;
2. делятся на 30;
3. делятся на 14, но не делятся на 3.

5. Используя законы алгебры множеств, упростить следующие выражения:

   a. $\overline{A \cup B} \cap \overline{B}$
   b. $\overline{A \cap B} \cap A$
   c. $\overline{A \cap B} \cap \overline{A}$
   d. $\overline{A \cup B \cap \overline{A}} \cap A$
   e. $\overline{A \cup B \cap A} \cap \overline{B}$
   f. $\overline{A \cap B \cap C} \cap A \cap C$
   g. $\overline{A \cap B \cap C} \cup A \cap C$
   h. $\overline{A \cup B \cup C} \cap A \cap C$

Соответствия и отношения

Последовательность

Мы уже говорили, что порядок элементов в множествах не важен, но иногда надо рассматривать совокупности элементов с фиксированным порядком, такие совокупности называются последовательностями, они как правило, задаются перечислением элементов, которые записываются в угловых скобках, например, $<1,2>$, $<a,b,c>$, $<a_1,a_2,a_3>$.

Две последовательности считаются равными, если они состоят из одинаковых элементов, и порядок этих элементов у них одинаков.

Если $A=<a_1,...,a_n>$, $B=<b_1,...,b_m>$, тогда $A=B$ т. и т. т., когда $n=m$, и $a_i=b_i$ для всех $i<=n$.

Если последовательность состоит из двух элементов, то она называется упорядоченной парой или двухмерным вектором.

Если последовательность состоит из 3 элементов, то она называется упорядоченной тройкой элементов, трехмерным вектором. Если из 4 элементов, то упорядоченной четверкой, 4-х мерным вектором, и т.д.

Декартово произведение

Декартовым произведением двух множеств *A, B* называется множество упорядоченных пар $<a,b>$, таких, что первый элемент пары принадлежит *A,* а второй элемент пары множеству *B*. Декартово произведение множеств *A,B* обозначается $A \times B$

Другими словами $A \times B=\{<a,b> | a \in A, b \in B\}$

Пример 1. Если $A=\{1,2,4\}$, $B=\{1,7\}$, то $A \times B=\{<1,1>,<2,7>,<1,7>,<2,1>,<4,1>,<4,7>\}$.

Пример 2. Если R – множество действительных чисел, то $R \times R$ множество всевозможных пар чисел. Множество действительных чисел можно представить как множество точек на прямой, в этом случае декартово произведение можно представить, как множество точек на плоскости.

Если рассматривать некоторый набор множеств $A_1,\ldots A_n$, то можно определить декартово произведение множеств $A_1,\ldots,A_n$, как множество последовательностей, содержащих n элементов, причем первый элемент должен быть из A_1, второй из A_2, …, n –элемент из A_n.

Другими словами:
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n=\{<a_1,\ldots>a_n>|a_1 \in A_1,\ldots,a_n \in A_n\}$.

Пример 3. . Если $A=\{2,4\}$, $B=\{1,7\}$, $C=\{1,2\}$,то $A \times B \times C=\{<2,1,1>,<2,7,1>,<2,1,2>,<2,7,2><4,7,1>,<4,1,1>,<4,1,2>,<4,7,2>\}$.

Пример 4. Если R – множество действительных чисел, то $R \times R \times R$ будет множеством всевозможных троек чисел, а геометрически будет множеством точек в 3-х мерном пространстве.

Соответствия

Пусть даны два множества. Элементы множеств могут быть как-то связаны. Например, множество студентов и множество парт в аудитории. Каждый студент сидит за определенной партой, т.е. студенту можно поставить в соответствие парту, за которой он сидит. Множество студентов и множество оценок, которые поставлены за контрольную работу. В этом случае, студенту ставится в соответствие оценка.

Пусть заданы два множества А и В. Соответствие считается заданным, если любому элементу $a \in A$ сопоставлен один (или несколько или ни одного) элемент $b \in B$. Если буквой f обозначить соответствие, то записывают так $f\colon A \rightarrow B$. Множество A называют областью *определения,* а множество B областью *значений*.

Если $a \in A$, то через $f(a)$ обозначим множество элементов $b \in B$ поставленных в соответствие элементу a. Множество $f(a)$ называется множеством образов элемента a. Если $b \in B$, то через $f^{-1}(b)$ обозначим множество элементов $a \in A$, которым поставлен в соответствие элемент b. Множество $f^{-1}(a)$ называется множеством прообразов элемента b.

Свойства соответствий.

1. Если соответствие определено для любого $a \in A$ (т.е. $f(a) \neq \varnothing$) , то оно называется *всюду определённым*.

2. Если каждому элементу $a \in A$ поставлено в соответствие не более одного элемента $b \in B$, то соответствие называется *функциональным* или *функцией*. В этом случае запись $f(a)$ обозначает, не множество образов, а один образ и используется запись $b=f(a)$.
3. Если разным элементам множества A поставлены в соответствия разные элементы множества B, т.е. если $a_1 \neq a_2$, то $f(a_1) \cap f(a_2) = \varnothing$, то соответствие называется *инъективным*.
4. Если любой элемент $b \in B$ имеет непустое множество прообразов, то соответствие называется *сюръективным*.

Итак, вместо функционального соответствия, мы будем говорить *функция*. Всюду определенную функцию будем называть *отображением*. Если отображение f сюръективно, то будем говорить, что f является отображение множества A *на* множество B, если отображение f не сюръективно, то будем говорить, что f является отображение множества A *в* множество B.

Инъективное и сюръективное отображение называется *взаимно-однозначным соответствием* или *биекцией*.

Легко проверить, что если $f\colon A \to B$ биекция, то $f^{-1}\colon B \to A$ так же будет биекцией.

Пусть даны три множества A, B, C. Причем существуют два соответствия $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$, то можно построить соответствие $h\colon A \to C$ следующим образом элементу а поставим в соответствие элементы из множества $g(f(a))$. Такое соответствие называется *композицией* или *суперпозицией* и записывается $g\,f$.

Несложно проверить, что композиция отображений будет отображением, композиция биекций будет биекцией.

Отношения

Всякое подмножество L декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ произвольных множеств $A_1, \ldots A_n$, называется отношением, определенным на множествах $A_1, \ldots, A_n$.

Если рассматривать соответствие множеств A и B, то это соответствие можно представить парами элементов, первым записать элемент множества A, а вторым элементом его образ из B. Таким образом мы увидим, что соответствие задается, как некоторое подмножество декартово произведения $A \times B$, и наоборот, по любому подмножеству декартово произведения $A \times B$ можно построить соответствие множеств, определив что первому элементу пары, входящему в это подмножество, ставится в соответствие второй элемент той же пары. Таким образом, мы увидели, что соответствие являются частным случаем отношения, точнее отношением на паре множеств A и B.

Продолжим рассмотрение отношения L на паре множеств A и B.

Если $<a,b> \in L$, то говорят, что элемент a находится в отношении L к элементу b или что отношение L для a,b выполняется.

Вместо $<a,b> \in L$ пишут также aLb или $L(a,b)$.

Поскольку отношения, заданные на фиксированной паре множеств A,B суть подмножества множества $A \times B$, то можно рассматривать их объединение, пересечение, дополнение.

Пусть L,M подмножества $A \times B$, тогда

1. $a(L \cup M)b \Leftrightarrow <a,b> \in L \cup M.. \Leftrightarrow. <a,b> \in L$ или $<a,b> \in M$, связка «или» в нашем случае не исключающая, т.е. логическая операция дизъюнкция. Поэтому вместо объединения отношений чаще говорят дизъюнкция отношений.
2. $a(L \cap M)b \Leftrightarrow <a,b> \in L \cap M.. \Leftrightarrow. <a,b> \in L$ и $<a,b> \in M$. Вместо пересечения отношений чаще говорят конъюнкция отношений.
3. $a\overline{L}b \Leftrightarrow <a,b> \notin L$. Вместо дополнения отношения, можно сказать отрицание отношения.

Если L – отношение, определенное на паре множеств A,B, то обратным отношением (символически L^{-1}) называется отношение определенное на паре множеств B, A, которое состоит из тех пар $<b,a>$, для которых $<a,b> \in L$, т.е. $bL^{-1}a \Leftrightarrow aLb$.

Если $B=A$, отношение называется бинарным (двуместным) отношением на множестве A.

Например, отношение равенства, определенное на множестве натуральных чисел N, можно понимать как совокупность всех диагональных пар $<1,1>,<,2,2>,...$ Отношение порядка $<$, есть множество пар $<a,b>$, таких, что $a<b$. Если S – множество людей, то множество супружеских пар будет подмножеством $S \times S$, и будет отношением.

Свойства бинарных отношений.

1. Бинарное отношение L на множестве A называется *рефлексивны*м, если для любого a из A верно aLa (т.е. $<a,a> \in L$).
   Например. Если на числах рассмотреть отношение $\leq$ нестрогого меньше, то оно будет рефлексивным, поскольку для любого числа а, верно $a \leq a$.
2. Бинарное отношение L на множестве A называется *антирефлексивн*ым, если для любого a из A не выполняется $a\ L\ a$.
   Примером антирефрексивного отношения будет отношение строгого меньше $<$ на числах.

3. Бинарное отношение L на множестве A называется *симметричным*, если $bLa \Leftrightarrow aLb$ для любых элементов a, b из А
   Так отношение ≤ уже не будет симметричным. А вот отношение супружеских пар на множестве людей будет симметричным.
4. Бинарное отношение L на множестве A называется *антисимметричным*, если bLa & aLb $=> b=a$, для любых элементов a, b из А
   Несложно проверить, что отношение нестрогого меньше будет антисимметричным отношением.
5. Бинарное отношение L на множестве A называется *транзитивным*, если aLb& bLc $=> aLc$, для любых a, b, c из А.

Поскольку из того, что $a \le b$ и $b \le c$, следует $a \le c$, для любых чисел a,b, c, то отношение ≤ будет транзитивным. Легко проверить, что и отношение строгого меньше (<) будет рефлексивно.

Отношение эквивалентности

Бинарное отношение L на множестве A называется отношением эквивалентности, если оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Отношение эквивалентности часто обозначается ≡

Примером отношения эквивалентности может быть отношение равенство. Оно очевидно рефлексивно (а=а), симметрично (а=в => в=а), и транзитивно (а=в & в=с =>а=с).

Другим примером отношения *эквивалентности* на *множестве* натуральных чисел N является *равенство* остатков при делении на некоторое фиксированное число n: $a = b \ (mod\ n)$.

С каждым отношением *эквивалентности* ≡ на *множестве* А связано *разбиение* А на непересекающиеся *подмножества*- классы *эквивалентности*. Для каждого a из A определяется *класс эквивалентности* $[a]_{\equiv}$, который включает все эквивалентные a элементы, т.е. $[a]_{\equiv} = \{b | a \equiv b\}$.

Покажем, что классы эквивалентности не пересекаются. Предполагаем противное, пусть классы эквивалентности элементов а и в имеют общий элемент с, тогда получим, что $а \equiv с$ и $в \equiv с$, поскольку отношение эквивалентности симметрично, то вместо $в \equiv с$, можно написать $с \equiv в$, поскольку отношение эквивалентности транзитивно, то получим, что $а \equiv в$.

Рассмотрим произвольный элемент к из $[в]_{\equiv}$, т.е. в≡к, по отношению транзитивности мы получим а≡к, т.е. любой элемент из класса $[в]_{\equiv}$ принадлежит классу $[a]_{\equiv}$. Аналогичным образом можно показать, что любой элемент из класса $[a]_{\equiv}$принадлежит классу $[в]_{\equiv}$, т.е. эти классы равны.

Таким образом, мы показали, что если два класса имеют, хотя бы один общий элемент, то они совпадают. Поскольку для любого a $a \in [a]_{\equiv}$, то классы эквивалентности покрывают все множество А, т.е. являются его разбиением на непересекающиеся множества.

Если в приведенном выше примере в качестве n взять, например, 7, то все натуральные числа разобьются на 7 классов *эквивалентности*: N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, , N_5, N_6 где в *класс* N_i (i=0,1,2,3,4,5,6) войдут числа, дающие при делении на 7 *остаток* i.

Множества классов эквивалентности множества А по эквивалентности ≡ называется фактор-множеством множества А по эквивалентности ≡ и обозначается А/≡.

В разобранном выше примере N/≡ ={ N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, , N_5, N_6}.

Частично-упорядоченное множество

Отношения частичного порядка бывают строгими и нестрогими.

Строгое отношение частичного порядка – это антирефлексивное антисимметричное, транзитивное отношение.

В качестве примеров строгого отношения частичного порядка можно рассмотреть отношения меньше(<), больше (>) на числах или строгое включение ($\subsetneq$) множеств.

Нестрогое отношение частичного порядка - это рефлексивное антисимметричное, транзитивное отношение.

В качестве примеров нестрогого отношения частичного порядка можно рассмотреть отношения нестрогого меньше(≤),нестрогого больше (≥) на числах или включение множеств ($\subseteq$).

В дальнейшем мы будем рассматривать только нестрогое отношение частичного порядка, потому будем называть его просто отношением частичного порядка и обозначать будем так$\preccurlyeq$.

Пусть задано некоторое множество А с частичным порядком на нем $\preccurlyeq$, тогда пару (А; $\preccurlyeq$) мы будем называть частично упорядоченным множеством (ч.у. множеством)

Если А – множество чисел, а отношение ≤ - это нестрогое меньше, то для любых чисел а и с верно либо а≤ с, либо с≤ а. Такое свойство называется *линейностью*, а ч.у. множество (А; ≤) *линейно упорядоченным*.

Но не все ч.у. множества линейно упорядочены, например, если А множество множеств, а частичный порядок – включение ($\subseteq$), то в нем могут встретиться несравнимые по включению множества.

Например. А={{1},{2},{1,2}}, множества {1},{2}несравнимы по включению.

Изоморфизмы

Два *частично упорядоченных множества* называются *изоморфными*, если между ними существует *изоморфизм*, то есть взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок.

Можно сказать так: взаимно однозначное соответствие $f\colon A \to B$ называется изоморфизмом частично упорядоченных множеств $(A; \preccurlyeq)$ и $(B; \preccurlyeq)$, если

$$a_1 \preccurlyeq a_2 \leftrightarrow f(a_1) \preccurlyeq f(a_2),$$

для любых элементов a_1, a_2 множества A (слева знак $\preccurlyeq$ обозначает частичный порядок в множестве A, справа - в множестве B).

Очевидно, что *отношение* изоморфности рефлексивно (каждое множество изоморфно самому себе), симметрично (если А изоморфно В, то верно и наоборот) и транзитивно (если A изоморфно B, B изоморфно C, то, очевидно, A изоморфно C).

Теорема 2 Конечные линейно упорядоченные множества, содержащие одинаковое число элементов, изоморфны.

Доказательство. Конечное линейно упорядоченное множество всегда имеет наименьший элемент. Присвоим наименьшему элементу номер 1. Из оставшихся элементов снова выберем наименьший элемент и присвоим ему номер 2 и так далее. Легко понять, что порядок между элементами соответствует порядку между номерами, то есть что наше множество изоморфно множеству $(\{1, 2,\ldots, n\}; \leq)$, где n- число элементов исходного множества, $\leq$ порядок между числами.

Диаграммы Хассе

Для изображения структуры ч.у. множеств или их фрагментов используют *диаграммы Хассе*. На диаграммах Хассе точками изображены элементы множества, а отношения между ними отрезками, соединяющие эти точки, причем, если $a \preccurlyeq c$, то элемент a изображается на диаграмме ниже, чем элемент c.

Рассмотренное выше ч.у. множество A изображено на рисунке 13.

В первом варианте диаграммы указываются непосредственные имена элементов, во втором варианте отражена только структура ч.у. множества.

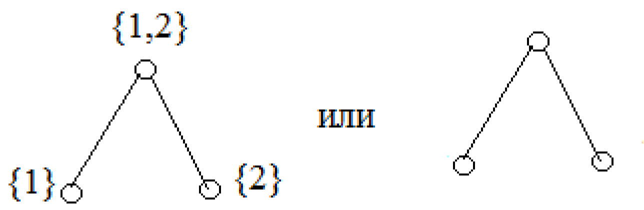


Рисунок 13. Два варианта диаграммы Хассе, изображающих ч.у. множество А.

Поскольку в любом множестве элементы не повторяются, то в диаграмме Хассе нет горизонтальных отрезков. Кроме того, если элемента *а, в, с* таковы, что $а \preccurlyeq в$, $в \preccurlyeq с$, то соединяются только *а* и *в*, *в* и *с*, а в отдельном соединении элементов *а* и *с* нет необходимости, поскольку отношение $\preccurlyeq$ транзитивно.

Элемент *а* ч.у. множества *А* называется *наибольшим*, если для любого $в \in A$, верно $в \preccurlyeq а$.

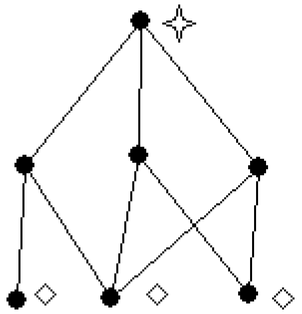
Элемент *а* ч.у. множества *А* называется *наименьшим*, если для любого $в \in A$, верно $а \preccurlyeq в$.

Элемент *а* ч.у. множества *А* называется *максимальным*, если для любого $в \in A$, верно $в \preccurlyeq а$ или *в* несравнимо с *а* ($в \mid а$).

Элемент *а* ч.у. множества *А* называется *минимальным*, если для любого $в \in A$, верно $а \preccurlyeq в$ или $в \mid а$.

Очевидно, что наибольший (наименьший) элемент является максимальным (минимальным).

Пример 1.

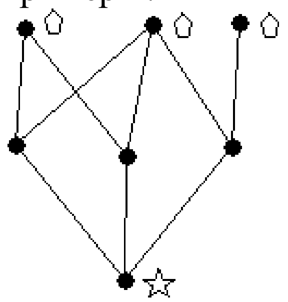


Значком ✧ помечен наибольший элемент

Квадратиками ◇ помечены минимальные элементы

Рисунок 14. Ч.у. множество с помеченными набольшим и минимальными элементами.

Пример 2.



Значком ☆ помечен наименьший элемент

Значками ⬠ помечены максимальные элементы

Рисунок 15. Ч.у. множество с помеченными минимальным и наибольшими элементами.

Теорема 3. Конечное линейно упорядоченное множество всегда имеет наименьший и наибольший элементы.

Доказательство. Докажем сначала, что конечное линейно упорядоченное множество всегда имеет наименьший элемент. Возьмем любой элемент; если он не наименьший, возьмем меньший, если и он не наименьший, еще меньший - и так далее; получим убывающую последовательность *a1>a2>a3>…*, которая рано или поздно должна оборваться, поскольку множество конечно. Очевидно, последний элемент последовательности будет наименьшим элементом. Аналогичным образом доказывается существования наибольшего элемента.

Пусть множество B является подмножеством ч.у. множества A. Элемент $a \in A$ называется верхней гранью множества *B* в ч.у. множестве *A*, если для любого элемента $в \in B$ верно $в \preccurlyeq a$. Аналогичным образом определяется нижняя грань множества *B* в ч.у. множестве *A*.

Пример 3. Элементы множества *B* обведены контуром. Верхние грани множества *B* в ч.у. множестве *A* отмечены значком ✧, а нижние грани ромбиком ◊.

Пример 3.

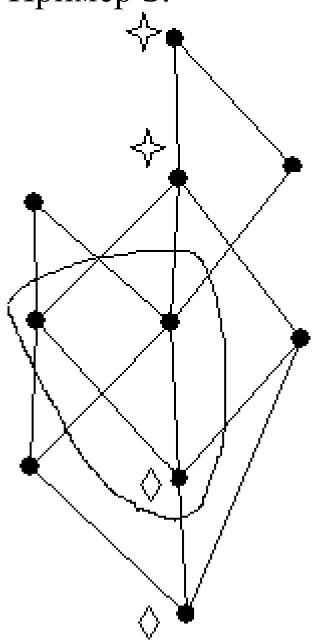


Рисунок 16. Рисунок 16. Ч.у. множество с выделенным подмножеством и с отмеченными гранями этого подмножества.

Очевидно нижних и верхних граней у подмножества *B* в ч.у. множестве *A* может быть много. Наименьший элемент множества всех верхних граней множества *B* в ч.у. множестве *A* называется *наименьшей верхней гранью*. Аналогичным образом определяется *набольшая нижняя грань*. В рассмотренном выше примере существует и наименьшая верхняя, и набольшая нижняя грани. На этом примере мы можем заметить, что грани могут принадлежать, а могут не принадлежать множеству В.

Вопросы и задачи

1. Универсальное множество У={a, b, c, d, e, f}, множество A={a, b, c} и множество B={a, c, f }, найти элементы множеств
   a) $A \times B$
   b) $\overline{A} \times B$
   c) $\overline{A \times B}$
   d) $\overline{A} \times \overline{B}$
2. Выясните, какие из следующих равенств справедливы для любых множеств *A, B , C , D :*

1) $A \times B = B \times A$;

2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

3) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;

4) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$;

5) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

3. Множество А – это множество всех положительных действительных чисел, множество В – множество всех действительных чисел. Соответствие $f: A \to B$ задается формулой:

a) $f(x) = \ln(x)$;
b) $f(x) = x^2$;
c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Какими свойствами обладает соответствие. Изменятся ли эти свойства,

a) если множество А будет множеством всех действительных чисел, а множество В останется прежним?
b) если А останется прежним, а В будет множеством натуральных чисел?

4. Какими свойствами будут обладать соответствия f_1, f_2, f_3, f_4 , представленные на рисунке 17.

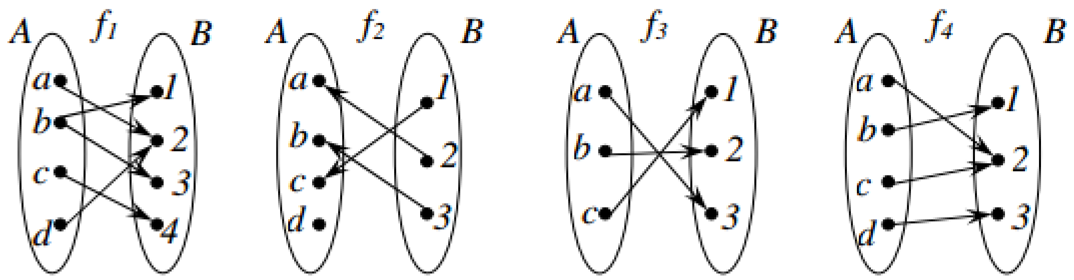


Рисунок 17. Схема соответствий f_1, f_2, f_3, f_4.

5. Определите, какими свойствами обладают следующие отношения на множестве натуральных чисел:

   a) $a\ Rb \leftrightarrow |\ a - b\ | = 2$;
   b) $aRb \leftrightarrow 0 < a - b < 5$;
   c) $aRb \leftrightarrow a + b$ – *нечетное число;*
   d) $aR\ b \leftrightarrow a \geq b^2$

6. Какими свойствами будут обладать следующие отношения:
   a. Множество A – это множество прямых, отношение R– это отношение параллельности прямых (прямая *а* находится в отношении R с прямой *в,* если *а* параллельна *в*).
   b. Множество A – это множество прямых, отношение R– это отношение перпендикулярности прямых (прямая *а* находится в отношении R с прямой *в,* если *а* перпендикулярна *в*).
   c. Множество A – это множество прямых, прямая а находится в отношении R с прямой в, если а и в пересекаются.
   d. Множество A – это множество треугольников, отношение R– это отношение подобия треугольников.
   e. Множество A – это множество треугольников, треугольник а находится в отношении R к треугольнику в, если их площади равны.
   f. Множество A – это множество треугольников, треугольник а находится в отношении R к треугольнику в, площадь треугольника а меньше площади треугольника в..
   g. Множество A – это множество треугольников, треугольник а находится в отношении R к треугольнику в, если они имеют хотя бы одну общую вершину.
   h. Множество A – это множество треугольников, треугольник а находится в отношении R к треугольнику в, если хотя бы один угол треугольника а равен некоторому углу треугольника в.
7. Пусть дано некоторое отображение $f\colon A \to X$. Докажите, что отношение R на множестве A, такое, что $aRb \leftrightarrow f(a)=f(b)$, т.е. a и b отображаются на один и тот же элемент, будет эквивалентностью.
8. На рисунке 18 изображены диаграммы Хассе четырех ч.у. множеств, контуром обведены элементы, попавшие в выделенное подмножество.

Перерисовать диаграммы и, используя разные обозначения, отметить на них наибольший, максимальные, минимальные, наименьший, элементы (если такие найдутся). На новой копии диаграмм отметить верхние, нижние, наименьшую верхнюю, наибольшую нижнюю грани (если они есть) выделенного подмножества.

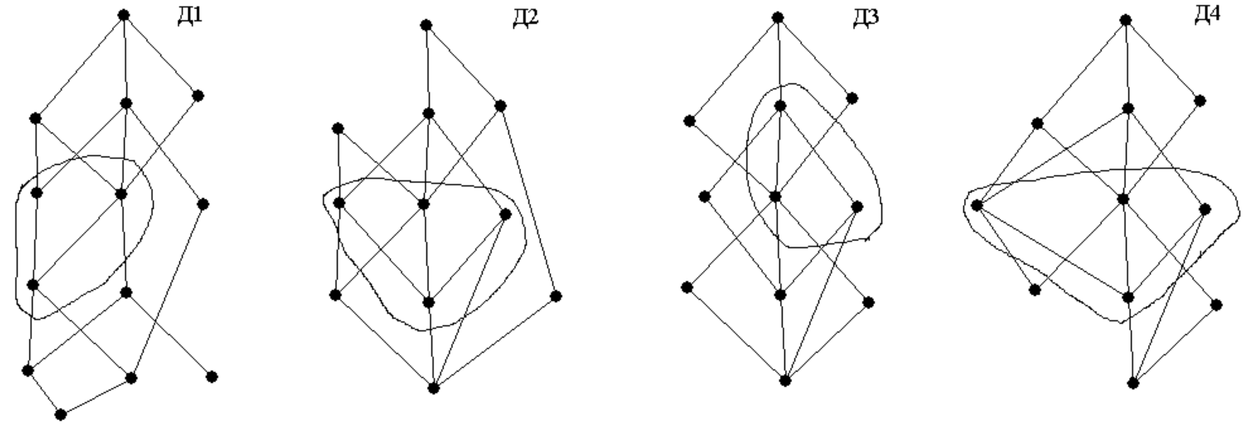


Рисунок 18. Диаграммы Хассе.

Конечные множества

Если множество содержит конечное число элементов, то оно называется конечным. Число элементов в конечном множестве *A* называют также его *мощностью* и обозначают $|A|$.

Если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то в них одинаковое число элементов. Поскольку взаимная однозначность требует, чтобы каждому элементу первого множества соответствовал ровно один элемент второго и наоборот.

Поэтому, если множества $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ имеют одинаковое число элементов (в нашем случае n), то соответствие $f(a_i)=b_i$, где $(0\le i\le n)$ будет взаимно однозначным.

Теорема 4.Даны конечные множества *A* и *B*:

1. если $A \subseteq B$, то $|A|\le|B|$;
2. если $A \subsetneq B$, то $|A|<|B|$;
3. $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$;
4. $|A\times B|=|A|\times|B|$.

Доказательство. Первые два утверждения очевидны. Третье утверждение тоже легко проверяется. Если *A* и *B* не пересекаются, то их объединение содержит элементы и того и другого множества, подсчитываем сначала элементы А, потом В и получаем $|A \cup B|=|A|+|B|$. Если пересечение А и В не пусто, то тогда элементы пересечения подсчитываются дважды и тогда, когда считаются элементы множества А и тогда, когда считаются элементы множества В. Для того что бы избавится от двойного подсчета общих элементов нужно вычесть их количество, т.е. $|A \cap B|$. Четвертое утверждение также легко проверяется.

Пример использования свойства 3 конечных множеств.

Задача. В классе 32 учащихся. Из них 18 посещают литературный кружок, 12 – математический, 8 учеников не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и литературный, и математический кружок? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

Решение. Путь множество А – это ученики посещающие литературный кружок, множество В – ученики посещающие математический кружок.

Указанные кружки посещают $32-8=24$ ученика, т.е. $24= |A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$. Заменяем |А| и $|B|$ получим $24=18+12-|A \cap B|$, следовательно, $|A \cap B|=6$. Итак, учеников посещающих два кружка *6*, значит посещающих только математический кружок тоже *6 (12-6=6)*.

Следующая теорема будет доказана методом математической индукции.

Метод математической индукции

Метод математической индукции используется для доказательства утверждений, в формулировке которых участвует натуральный параметр n. Он основан на так называемом принципе математической индукции (одна из аксиом формальной теории натуральных чисел). Утверждение «для любого n∈ N выполняется P(n)» считается доказанным, если оно доказано для n =1 и для любого натурального числа k из предположения, что P(n) истинно для n = k , доказана его истинность для n = k +1.

Запись принципа математической индукции в символической форме вы- глядит так: $P(1)\&(\forall k \in N)(P(k) \Rightarrow P(k+1)) \Rightarrow (\forall n \in N)\, P(n)$.

Для доказательства утверждений методом математической индукции ис- пользуется схема рассуждений, состоящая из следующих этапов:

1. База индукции. Доказывается истинность утверждения P(n) для $n=1$.

2. Индуктивное предположение. Допускается, что утверждение P(n) верно для всех $1 \le n \le k$.

3. Индукционный переход. Исходя из индуктивного предположения, доказывается истинность P(n) для $n = k + 1$.

4. Вывод. На основании первых трех этапов и принципа математической индукции делается вывод о справедливости утверждения для любого $n \in N$. Замечание. Иногда бывает нужно доказать справедливость некоторого утверждения P(n), зависящего от натурального параметра n, для всех $n \geq m$, где m – фиксированное натуральное число или 0. В этом случае принцип математической индукции можно записать в виде: $P(m) \land (\forall k \geq m)(P(k) \Rightarrow P(k+1)) \Rightarrow (\forall n \geq m)\ P(n)$. И в базисе индукции рассматривается $n = m$.

Теорема 5. Число подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов, равно 2^n

Доказательство проведем методом математической индукции.

База. Если $n=0$, т. е. множество пусто, то у него только одно подмножество — оно само, и интересующее нас число равно $2^0=1$.

Индукционный шаг. Пусть утверждение справедливо для некоторого n и пусть M — множество содержащее $n+1$ элемент. Зафиксировав некоторый элемент $a_0 \in M$, разделим подмножества множества Mна два типа:

1. M_1, содержащее a_0,
2. M_2, не содержащее a_0, то есть являющиеся подмножествами множества $M \setminus \{a_0\}$.

Подмножеств типа (2) по предположению индукции 2^n. Но подмножеств типа (1) ровно столько же, так как подмножество типа (1) получается из некоторого и притом единственного подмножества типа (2) добавлением элемента a_0 и, следовательно, из каждого подмножества типа (2) получается этим способом одно и только одно подмножество типа (1).Таким образом, мы получили, что суммарное количество подмножеств множества M будет 2^{n+1}, и тем самым доказали теорему.

Вопросы и задачи

1. В классе 25 учащихся. Из них 14 посещают химический кружок, 8 – физический, 5 учеников не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и химический, и физический кружок? Сколько учащихся посещают только химический кружок?

2. В группе 32 студентов, из них 18 увлекаются плаванием, а 16 – волейболом.

а) Каким может быть минимальное число студентов, увлекающихся обоими видами спорта?
б) Каким может быть минимальное число студентов, увлекающихся хотя бы одним видом спорта?

3. Пусть A,B,C, произвольные конечные множества, докажите, что верно следующее равенство:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Сравнение множеств по мощности

Равномощные множества.

Конечные множества мы можем сравнивать по количеству элементов. Для бесконечных множеств такое сравнение невозможно, но можно задаться вопросом о существовании между этими множествами взаимно однозначного соответствия.

Два множества A и B называются *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Обозначать равномощность мы будем так: $|A|=|B|$. Мы видим, что это обозначение не противоречит такому же обозначению для конечных множеств, поскольку равенство количества элементов в конечных множествах приводит к существованию взаимно однозначного соответствия между ними.

Бесконечных множеств равномощность ведет себя, на первый взгляд, странно. Так, например, собственное подмножество может быть равномощно всему множеству. Если рассмотреть натуральный ряд и множество четных чисел то отображение $f: x \rightarrow 2x$, будет взаимно однозначным соответствием, которое каждому натуральному числу поставит единственное четное число, причем для любого четного числа найдется его единственный прообраз. Итак, свойство 2 мощностей конечных множеств не выполняется для равномощных бесконечных множеств. Бесконечное множество может быть равномощно своему собственному подмножеству.

Отношение равномощности на множествах будет рефлексивно, симметрично и транзитивно. Первые два свойства очевидны, рассмотрим транзитивность. Пусть даны три множества A,B,C. Причем существуют два взаимно однозначных соответствия $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$. Тогда композиция f и g

будет взаимно однозначным соответствием множеств A и C. Таким образом отношение равномощности является эквивалентностью.

Счётное множество.

Множество равномощное натуральному ряду называется *счётным*.

Счетное множество можно записать так: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, где x_1- это элемент поставленный в соответствие единицы, x_2 – двойки и т. д. Мы привыкли в такой форме записывать любое бесконечное множество, но только для счетного множества эта запись говорит еще и том, что его элементы можно пронумеровать натуральными числам. Счётным можно назвать бесконечное множество, элементы которого можно пронумеровать натуральными числами.

Рассмотрим другие свойства счётных множеств.

Теорема 6.

(а) Подмножество счётного множества конечно или счётно.

(б) Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

(в) Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.

(г) Декартово произведение конечного числа счётных множеств счётно.

Доказательство.

(а) Пусть B - подмножество счётного множества $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Выбросим из последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ те члены, которые не принадлежат B (сохраняя порядок оставшихся). Тогда оставшиеся члены образуют либо конечную последовательность (и тогда B конечно), либо бесконечную (и тогда B счётно).

(б) Пусть множество A бесконечно. Тогда оно не пусто и содержит некоторый элемент b_1. Будучи бесконечным, множество A не исчерпывается элементом b_1 - возьмем какой - нибудь другой элемент b_2, и т.д. Получится последовательность $b_1, b_2, \ldots$; построение не прервется ни на каком шаге, поскольку A бесконечно. Множество $B=\{ b_1, b_2, \ldots\}$ и будет искомым счетным подмножеством. Полученное множество B не обязано совпадать с A, даже если A счётно.

(в) Пусть имеется счетное число счетных множеств $A_1, A_2, \ldots$ Расположив элементы каждого из них слева направо в последовательность

($A_i=\{a_{i0}, a_{i1}, a_{i2},\dots\}$) и поместив эти последовательности друг под другом, получим таблицу

$$\begin{matrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

Теперь эту таблицу можно развернуть в последовательность, например, проходя по очереди диагонали:

$$a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{02}, a_{11}, a_{20}, a_{03}, a_{12}, a_{21}, a_{30},\dots$$

Если множества A_i не пересекались, то мы получили искомое представление для их объединения. Если пересекались, то из построенной последовательности надо выбросить повторения.

Если множеств конечное число или какие-то из множеств конечны, то в этой конструкции части членов не будет - и останется либо конечное, либо счётное множество.

(г) Докажем сначала, что декартово произведение двух счётных множеств счетно. Пусть $A=\{a_1, a_2,\dots\}$, $B=\{ b_1, b_2,\dots\}$ два счетных множеств, тогда элементы декартова произведения можно записать в таблицу:

$$\begin{matrix} <a_1,b_1> & <a_1,b_2> & <a_1,b_3> & \dots \\ <a_2,b_1> & <a_2,b_2> & <a_2,b_3> & \dots \\ <a_3,b_1> & <a_3,b_2> & <a_3,b_2> & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

И также, как при доказательстве пункта (г), таблицу можно развернуть в последовательность, проходя по диагоналям:

$$<a_1,b_1>, <a_1,b_2>, <a_2,b_1>,<a_1,b_3>,<a_2,b_2>,<a_3,b_1>,\dots$$

Таким образом, мы доказали, что декартово произведение двух счетных множеств счетно.

Если $A_1, A_2, A_3,\dots,A_n$ – счетные множества, счетность их декартово произведения доказывается по индукции.

Базис индукции. Для $n=1$, утверждение очевидно. Предполагаем, что оно справедливо для $n-1$ (при n>1). Тогда счётным будет декартово произведение $(A_1{\times}A_2{\times}A_3{\times}\dots{\times}A_{n-1}){\times}A_n$, как произведение двух счётных множеств. Строго говоря, множества $A_1{\times}A_2{\times}A_3{\times}\dots{\times}A_n$ и $(A_1{\times}A_2{\times}A_3{\times}\dots{\times}A_{n-1}){\times}A_n$, будут разными множествами, поскольку в первом случае элементами будут последовательности вида $<a_1,a_2,a_3,\dots a_{n-1},a_n>$, где $a_i \in A_i$, $(1 \le i \le n)$, а во втором случае пары $<<a_1,a_2,a_3,\dots a_{n-1}>,a_n>$, где $<a_1,a_2,a_3,\dots a_{n-1}> \in A_1{\times}A_2{\times}A_3{\times}\dots{\times}A_{n-1}$ и $a_n \in A_n$. Но очевидно, что между ними существует взаимно однозначное соответствие: $<a_1,a_2,a_3,\dots a_{n-1},a_n> \rightarrow <<a_1,a_2,a_3,\dots a_{n-1}>,a_n>$.

Таким образом множество $A_1{\times}A_2{\times}A_3{\times}\dots{\times}A_n$ будет счетным.

Отношение «иметь не большую мощность»

Определение равномощности уточняет интуитивную идею о множествах " одинакового размера". А как формально определить, когда одно множество " больше" другого?

Говорят, что множество *A по мощности не больше множества B*, если оно равномощно некоторому подмножеству множества *B* (возможно, самому *B*).

Отношение «иметь не большую мощность» обладает многими естественными свойствами:

1. Если А и В равномощны, то А имеет не большую мощность, чем В.
2. Если А имеет не большую мощность, чем В, а В имеет не большую мощность, чем С, то А имеет не большую мощность, чем С.
3. Если А имеет не большую мощность, чем В, а В имеет не большую мощность, чем А, то они равномощны.
4. Для любых двух множеств А и В верно (хотя бы) одно из двух: либо А имеет не большую мощность, чем В, либо В имеет не большую мощность, чем А.

По поводу доказательств можно сказать следующее, что первое свойство очевидно. Второе доказать просто. Пусть *A* находится во взаимно однозначном соответствии с $B' \subseteq B$, а *B* находится во взаимно однозначном соответствии с $C' \subseteq C$. Тогда при втором соответствии B' соответствует некоторому множеству $C'' \subseteq C' \subseteq C$, как показано на рисунке 19, и потому *A* равномощно C''.

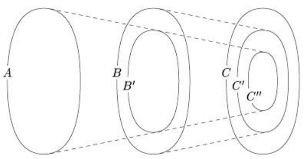


Рисунок 19. *Транзитивность сравнения мощностей*

А вот третье и четвертое свойства в нашем курсе доказывать не будет из-за их сложности. Отметим, что третье свойство известно, как теорема Кантора-Бернштейна**.**

Среди бесконечных множеств мы выделили счетные множества. Одно из свойств счетных множеств говорит о том, что счетные множества самые «маленькие» среди бесконечных множеств. Но встает вопрос, а существуют ли другие бесконечные множества. Следующая теорема дает положительный ответ.

Для любого множества A можно определить множество всех его подмножеств. Оно часто называется множеством степенью А и обозначается $2^{A.}$.

Теорема 7.(Кантора). Никакое множество A не равномощно множеству всех своих подмножеств.

Доказательство. Предположим, что существует множество A, равномощное множеству всех своих подмножеств 2^A, то есть, что существует взаимно однозначное соответствие $f\colon A \to 2^A$, которое ставит в соответствие каждому элементу множества A некоторое подмножество множества A.

Рассмотрим множество B, состоящее из всех элементов A, не принадлежащих своим образам при отображении f.

$B = \{ x \in A \mid x \notin f(x)\}$.

f взаимно однозначное соответствие, а $B \subseteq A$, значит существует $y \in A$ такой , что $f(y)=B$. Посмотрим может ли y принадлежать B.

Если $y \in B$, $y \in f(y)$, а тогда , по определению B, $y \notin B$.

Наоборот, если $y \notin B$, то $y \notin f(y)$, а следовательно, $y \in B$.

В любом случае, получаем противоречие.

Скажем, что множество A *менее мощно*, чем множество B, если A по мощности не больше множества B и множества A и B не равномощны.

Поскольку любое множество A равномощно множеству одноэлементных подмножеств (любому a можно поставить в соответствие множество $\{a\}$), то можно сказать, что A менее мощно, чем 2^A.

Поскольку отношение равномощности на множествах является отношением эквивалентности, то *мощностью* или *кардинальным числом* множества А называется соответствующий ему класс эквивалентности.

Теорема 8 Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству всех подмножеств натурального ряда.

Доказательство. Сопоставим с каждой последовательностью множество номеров мест, на которых стоят единицы: например, последовательность из одних нулей соответствует пустому множеству, из одних единиц -натуральному ряду, а последовательность 10101010… - множеству четных чисел. Очевидно, что получим взаимно-однозначное соответствие.

Теорема 9. (без доказательства) Множество всех действительных чисел равномощно множеству всех подмножеств натурального ряда.

Отсюда мы получим, что мощность натурального ряда меньше, чем мощность всех действительных чисел. Мощность множества действительных чисел называют *мощностью континуума.*

Вопросы и задачи

1. Будут ли равномощны следующие множества:
   1) Отрезки прямой [0;1], [0,3]?
   2) Множество четных чисел и множество чисел, делящихся на 3?
   3) Множество четных чисел и множество всех целых чисел?
   4) Множество целых чисел и множество рациональных чисел.
   5) Интервал (0;1) и луч (0; ∞)?

2. Каким будет счетное множество, если из него вычесть конечное множество?

3.Каким будет счетное множество, если к нему добавить конечное множество?

Алгебраическая система.

Сначала определим понятие операции

Рассмотрим декартово произведение n – множеств $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Если все эти множества равны одному $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется *декартовой n-степенью множества A* и обозначается A^n. Если n=0, то по определению считаем $A^0 = \varnothing$;

Отображение $f\colon A^n \to A$ называется n-местной *операцией* на A.

Если $n=0$, то по определению 0-местная функция - это выделенный элемент А, т.е. константа. Исторически сначала возникли бинарные (или 2-местные) операции (n=2) и унарные (или одноместные) операции (n=1).

Множество, с заданными на нем отношениями и операциями, называется *алгебраической системой*.

$$m = < A; P_1^{i_1}, \ldots, P_n^{i_n}; f_1^{j_1}, \ldots, f_m^{j_m} >$$

A – основное множество.
$P_1 \ldots P_n$ – символы, задающие отношение на множестве А.
$i_1 \ldots i_n$ – числа, указывающие местности этих отношений.
$f_1 \ldots f_m$ – функциональные символы, задающие операции на А.
$j_1 \ldots j_m$ – числа, указывающие местности операций.
Если заранее очевидны местности операций и отношений, то их не пишут.
Пример: частично упорядоченное множество <А; ≤ > - это алгебраическая система с единственным двухместным отношением частичного порядка.

Булева алгебра.

Алгебраическая система $< A; \cup, \cap, - >$, где A – множество, $\cup^2, \cap^2, -^1$ - функциональные символы называется булевой алгеброй, если для любых $a,b,c \in A$ выполняются следующие равенства:
1) $a \cup b = b \cup a$ (коммутативность);
2) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$ (ассоциативность);
3) $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ (дистрибутивность);
4) $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b}$ (закон де Моргана);
5) $a \cup a = a$ (идемпотентность);
6) $(a \cap \bar{a}) \cup b = b$ (закон поглощения);
7) $\bar{\bar{a}} = a$ (двойное дополнение).

Пример: нетрудно проверить, что<Р(А); $\cap$,$\cup$ $\bar{\ }$ >,
где Р(А)-множество всех подмножеств множества А;
$\cap$ - пересечение множеств;
$\cup$ - объединение множеств;
$\bar{\ }$ - дополнение.
будет булевой алгеброй
Мы рассматривали алгебру множеств раньше и выяснили, что свойств у неё много больше. Оказывается из свойств (1-7) вытекают свойства двойственные
Теорема. Пусть a,b произвольные элементы булевой алгебры, тогда
1) $a \cap b = b \cap a$
2) $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$
3) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
4 $\overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b}$
5) $a \cap a = a$
6) $(a \cup \bar{a}) \cap b = b$
Доказательство. Докажем первое утверждение. Применим сначала закон двойного дополнения $a \cap b = \bar{\bar{a}} \cap \bar{\bar{b}}$, затем де Моргана $\bar{\bar{a}} \cap \bar{\bar{b}} = \overline{\bar{a} \cup \bar{b}}$, затем закон

коммутативности $\overline{\overline{a} \cup \overline{b}} = \overline{\overline{b} \cup \overline{a}}$, затем снова закон де Моргана $\overline{\overline{b} \cup \overline{a}} = \overline{\overline{b}} \cap \overline{\overline{a}}$, и в заключении опять закон двойного дополнения $\overline{\overline{b}} \cap \overline{\overline{a}} = b \cap a$.

$\overline{a}$

Получим коммутативность для операции $\cap$. Остальные утверждения доказываются аналогичным образом.

Так же можно доказать существование *0* и *1* и в произвольной булевой алгебре.

Теорема 11. о возможности определения 0 и 1 в булевой алгебре

Для любых $a, c \in A$ верно $a \cup \overline{a} = c \cup \overline{c}$ и $a \cap \overline{a} = c \cap \overline{c}$.

Доказательство.

Запишем закон поглощения $(a \cup \overline{a}) \cap b = b$. Поскольку b произвольный элемент, то вместо b можно написать $c \cup \overline{c}$, тогда

$(a \cup \overline{a}) \cap (c \cup c) = (c \cup \overline{c})$.

С другой стороны, $(a \cup \overline{a}) \cap (c \cup \overline{c}) = (c \cup \overline{c}) \cap (a \cup \overline{a}) = a \cup \overline{a}$.

Следовательно, $c \cup \overline{c} = a \cup \overline{a}$.

Аналогичным образом доказывается $a \cap \overline{a} = c \cap \overline{c}$.

Поскольку значения выражения $a \cup \overline{a}$ не зависит от элемента a, то его можно обозначить каким-то символом, например, *1(единицей)*.

Значения $a \cap \overline{a}$ также не зависит от a, его мы обозначим *0*.

Несложно доказать, что $1 \cap a = a$, $1 \cup a = 1$, $0 \cup a = a$, $0 \cap a = 0$.

Примеры булевых алгебр:

1) Рассмотренная нами алгебра множеств.
2) Алгебра логики.

Основное множество – это множество высказываний, операции:

Дизъюнкция (аналог объединения), конъюнкция (пересечение), отрицание (дополнение).

3) Алгебра релейно-контактных схем.

Основное множество-это множество сигналов.

Операции соответственно задаются такими устройствами как дизъюнктер, конъюнктер, инвертор.

4) Пусть даны множества $A_{1,\dots,}A_n$. С помощью операций объединения, пересечения и дополнения образовываются из $A_{1,\dots,}A_n$ всевозможные новые множества. Совокупность всех этих множеств обозначим через $C(A_{1,\dots,}A_n)$.

Очевидно $C(A_{1,\dots,}A_n)$ и замкнуто относительно операций $\cap, \cup, \overline{}$. Очевидно, алгебраическая система $N = < C(A_{1,\dots,}A_n);\ \cap,\ \cup,\ \overline{}\ >$ является булевой алгеброй.

Булева алгебра N также называется алгеброй множеств, порожденной множествами $A_{1,\dots,}A_n$. Множества $A_{1,\dots,}A_n$ называются образующими или порождающими множествами.

Определение: Пусть даны две булевы алгебры $M=\langle A, \cap,\cup, \overline{} \rangle$ и $N=\langle B, \cap,\cup, \overline{} \rangle$, говорят, что эти алгебры изоморфны, если существует такая биекция f множества A на множество B, что

1) $f(a\cap b) = f(a)\cap f(b)$

2) $f(a\cup b) = f(a)\cup f(b)$

3) $f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$

В математике, как правило, изоморфные объекты не различаются, поскольку их структурные свойства одинаковы.

Теорема 12. Стоуна (без доказательства). Каждая булева алгебра изоморфна некоторой алгебре множеств.

Из теоремы Стоуна следует, что изучая свойства алгебры множеств, мы изучаем структурные свойства любой другой булевой алгебры.

$A=\langle C(A_1\dots A_n); \cap,\cup, \overline{} \rangle$

Алгебра множеств, порожденная некоторым набором образующих множеств

Фиксируем множества $A_1,\dots,A_n$, которые назовем образующими, множество $A_1\cup\dots\cup A_n$ будем считать универсальным, и будем рассматривать все множества, которые получаются из образующих с помощью операций пересечения, объединения и взятия дополнения. Совокупность всех таких множеств обозначается $C(A_1\dots A_n)$.

Множество $A_i^{\sigma_i} = \begin{cases} A_i, & \text{если } \sigma_i = 1 \\ \overline{A_i}, & \text{если } \sigma_i = 0 \end{cases}$ называется *первичным термом*. Пересечение первичных термов называется *элементарным пересечением*.

Конституэнта – это элементарное пересечение, которое отличается от остальных элементарных пересечений тем, что

1) оно содержит ровно n членов (n -число образующих);

2) каждое образующее множество либо само входит в конституэнту, либо входит его дополнение.

Если $B = A_1^{\sigma_1} \cap\dots\cap A_n^{\sigma_m}$, то последовательность $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ ее полностью определяет.

Эта последовательность состоит из нулей и единиц, и ее можно считать записью числа в двоичной системе исчисления. Например, $B= A_1\cap A_2\cap \overline{A_3}\cap A_4$, получим последовательность 1101, которая задает число $1101_2=13_{10}$.

Итак, любую конституэнту можно задать числом. Наоборот, любое число можно считать записью конституэнты, если известно число образующих. Число образующих нам нужно знать для того, чтобы определить сколько знаков в двоичной записи числа использовать. Если знаков больше чем надо, то отбрасываются старшие разряды, если знаков меньше, то недостающие старшие разряды заполняются нулями. Так, например число 5, в системе 4-х порождающих множеств задает конституэнту $\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$ ($5_{10}=101_2=0101$, дописываем 0 справа), а в системе 3-х порождающих задает $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$ ($5_{10}=101_2=101$, здесь ничего дописывать не надо).

Нормальные формы Кантора

Если множество $B \in (A_1 \ldots A_n)$ записано в виде объединения элементарных пересечений, то говорят, что оно представлено в нормальной форме Кантора (НФК). Точнее в дизъюнктивной нормальной форме Кантора. Есть еще конъюнктивная нормальная форма – пересечение элементарных объединений, но мы ее изучать не будем, и потому пропуск слова дизъюнктивная к путанице не приведет.

Если множество B записано в виде объединения конституэнт, то говорят, что B представлено в *совершенной нормальной форме Кантора* (СНФК).

$$B = \bigcup_{j} \bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\sigma_i}$$

Теорема 13. о представление множества в СНФК (без доказательства).Пусть дана алгебра множеств, порожденная множествами $A_1,\ldots,A_m$, тогда любое множество этой алгебры можно представить в СНФК.

Пусть множество B задано в НФК, путем преобразований, количество термов, входящих в НФК, можно уменьшить. НФК называется *минимальной*, если она содержит минимальное количество термов. Для решения практических задач, нам наиболее интересна минимальная НФК.

СНФК, как правило, не является минимальной, но ее можно привести к минимальной. В реальных задачах приходиться работать с формулами содержащими не 3-4 переменные, а десятки и сотни переменных. В случае большого числа переменных упрощение или минимизация формул оказывается довольно трудоемкой работой. Существует много алгоритмов минимизации СНФК. Один из них, алгоритм Квайна(Куайна), мы рассмотрим сейчас.

Алгоритм Квайна поиска минимальной НФК

Алгоритм Квайна поиска минимальной НФК, в качестве отправной точки используют СНФК.

Он состоит из двух этапов.

1)Первый этап. Нахождение сокращенной НФК.

2)Второй этап. Нахождения минимальной НФК.

Первый этап.

На первом этапе выполняются следующие действия:

1. Конституэнты, задающие исходное множество, записываются в виде последовательностей нулей и единиц.
2. Получившееся множество последовательностей нулей и единиц разбивается на слои, следующим образом:
   в нулевой слой попадает одна последовательность, состоящая из нулей; во первый слой попадают последовательности содержащие 1 единицу; во второй слой последовательности содержащие две единицы, и т.д.
3. Выполняются все операции склеивания. Операция склеивания – это преобразование следующего вида $\bar{A}\cap B\cup A\cap B=B$. Нетрудно заметить, что операцию склеивания можно применить только к конституэнтам, расположенным в соседних слоях. Разбиение всех конституэнт на слои уменьшает сложность алгоритма.

Простой импликантой мы будем называть элементарное пересечение, которое либо является конституэнтой, входящей в СНФК исходного множества, либо получено на шаге 3 в результате склеивания, и которое не могло быть использовано в дальнейшем процессе склеивания. *Сокращенная НФК* – это объединение всех простых импликант. Сокращенная НФК в общем случае избыточна, некоторые из составляющих ее простых импликант, могут быть исключены при сохранении эквивалентности формулы.

Рассмотрим пример.

$A=\bar{A}_1\cap \bar{A}_2\cap \bar{A}_3\cup A_1\cap \bar{A}_2\cap \bar{A}_3\cup A_1\cap A_2\cap \bar{A}_3\cup\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3\cup A_1\cap A_2\cap A_3$

Запишем А с помощью нулей и единиц. Получим последовательности 000, 100, 110, 011, 111. Разбиваем все последовательности на слои.

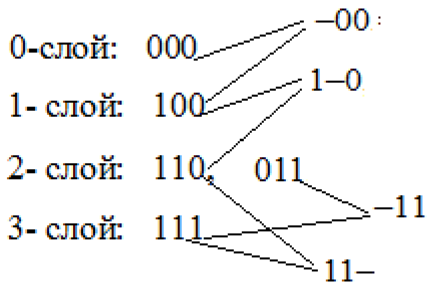
0-слой: 000,

1- слой: 100,

2- слой: 110, 011,

3- слой: 111.

Выполним склеивание:



получим импликанты, которые записываются следующим образом: –00, 1–0, 11–, –11, где знак «–» означает отсутствие терма, соответствующей образующей.
Записываем сокращенную НФК исходного множества.
$A = \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap A_2 \cup A_2 \cap A_3$.

Переходим ко второму этапу.

На втором этапе находится минимальная НФК.

Для дальнейшей работы нам потребуется несколько определений

Пусть дана некоторая двумерная таблица.

Определение: *Покрытием столбцов строками* в двумерной таблице называют такое множество строк, в котором для каждого столбца найдется хотя бы одна строка из этого множества, на пересечении с которой этот столбец имеет единицу, причем при вычеркивании хотя бы одного элемента из этого множества строк указанное свойство не выполняется.

Таблица Квайна – двумерная таблица каждой строке которой взаимно – однозначно соответствует простая импликанта, столбцу- конституэнта, а на пересечении i-й строки и j-ого столбца находится единица, если j–я конституэнта участвовала в получении i–й простой импликанты; в противном случаи клетку (i, j) не заполняют или ставят в ней 0.

Строим таблицу Квайна для рассматриваемого нами примера. В этой таблице мы добавим лишние строку и столбец, они нам понадобятся для пометок, которые надо делать, выполняя алгоритм Квайна.

Таблица Квайна

Элементарная импликанта /коституанта	000	100	110	011	111	
-00	1	1				~
1-0		1	1			
11-			1		1	
-11				1	1	~
	*	**		*	**	

Сначала находим ядро покрытия. В ядро покрытия войдут те строки, которые содержатся в любом покрытии данной таблицы.

Для этого отмечаем столбцы, имеющие только одну единицу (в нашем примере для отметки используем символ «*»). Затем отмечаем строки, в которых стоят эти единицы (используем символ «~»), именно они войдут в ядро покрытия. Затем отмечаем столбцы, которые покрываются строками из ядра (используем символы «**»). Ядро, скорее всего, не покроет все столбцы. Далее перебором рассматриваем все покрытия и выбирает из них минимальные.

В нашем примере, ядро {-00, -11}. Ядро покрывает 1, 2, 4, 5 столбцы (при нумерации столбцов мы не учитывали столбец с заголовками строк).

Для образования покрытия можно взять 2 или 3-ю строку. В результате получаем 2 покрытия.

1) {-00, -11, 1-0}, добавили к ядру 2-ю строку.
2) {-00, -11, 11-}, добавили к ядру 3-ю строку.

Каждое из них имеет сложность 6. Каждому соответствует минимальная НФК:

$A= \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap \bar{A}_3 \cup A_2 \cap A_3;$

$A= \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap A_2 \cup A_2 \cap A_3.$

Дальнейшее уменьшение сложности выражения, определяющее множество возможно, если из класса НФК перейти в класс скобочных форм Кантора (СФК).

Скобочная форма Кантора – выражение, определяющее множество М, в котором кроме первичных термов и знаков $\cap, \cup, \bar{\ }$ есть скобки –(,).

$A= \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap \bar{A}_3 \cup A_2 \cap A_3 = \bar{A}_3 \cap (\bar{A}_2 \cup A_1) \cup A_2 \cap A_3;$

$A= \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap A_2 \cup A_2 \cap A_3= \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_2 \cap (A_1 \cup A_3).$

Минимальная НФК находится в результате перебора всех покрытий. Для поиска покрытий столбцов строками нередко используется метод Петрика

Метод Петрика

Обозначим строки таблицы Квайна буквами a, b, c, d.

Запишем множество строк, каждый элемент которого покрывает j-й столбец:

$J=1 \quad \rightarrow A_1=\{a\};$
$J=2 \quad \rightarrow A_2=\{a, b\};$
$J=3 \quad \rightarrow A_3=\{b, c\};$
$J=4 \quad \rightarrow A_4=\{d\};$
$J=5 \quad \rightarrow A_5=\{c, d\};$

Покрытием столбцов строками этой таблицы является множество строк, покрывающее все столбцы таблицы, и при удалении хотя бы одной и этих строк найдется непокрытый столбец. Следовательно, если каждое множество A_j представить в виде объединения его элементов и найти пересечение всех множеств A_j, то каждое пересечение соответствует покрытию, а число всех покрытий равно числу различных пересечений.

Каждое A_j представим в виде объединения элементов и найдем пересечение всех A_j.
$a\cap (a\cup b)\cap (b\cup c)\cap d \cap(c\cup d) =a \cap(b \cup c)\cap d =a\cap b \cap d \cup a \cap c\cap d$

Полученные пересечения порождают два покрытия:
{-00, 1-0, -11}, {-00, 11-, -11}.

В заключение рассмотрим, как менялось количество термов (α) в примере.
1)Совершенная НФК (α=15) (в нее входят конституэнты)

$$\begin{aligned} A=&\bar{A}_1\cap \bar{A}_2\cap \bar{A}_3\cup \\ &A_1\cap \bar{A}_2\cap \bar{A}_3\cup \\ &A_1\cap A_2\cap \bar{A}_3\cup \\ &\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3\cup \\ &A_1\cap A_2\cap A_3 \end{aligned}$$

2)Сокращенная НФК (α=8) (в нее входят все простые импликанты)

$$\begin{aligned} A=&\bar{A}_2\cap \bar{A}_3\cup \\ &A_1\cap \bar{A}_3\cup \\ &A_1\cap A_2 \cup \\ &A_2\cap A_3. \end{aligned}$$

3)Минимальная НФК (α=6) (после нахождения покрытия таблицы Квайна)

Первое решение $A= \bar{A}_2\cap \bar{A}_3\cup$
$A_1\cap \bar{A}_3 \cup$
$A_2\cap A_3$;

Второе решение $A= \bar{A}_2\cap \bar{A}_3\cup$
$A_1\cap A_2 \cup$
$A_2\cap A_3$.

3) Скобочная НФК (α=5) (после вынесения за скобки)
Первое решение $A= \bar{A}_3\cap(\bar{A}_2\cup A_1) \cup A_2\cap A_3$.
Второе решение $A= \bar{A}_2\cap \bar{A}_3\cup A_2\cap (A_1 \cup A_3)$.
Отметим, что вместо 15 термов мы получили 5.

Вопросы и задачи

1. Переписать следующие формулы и отметить элементарные пересечения символом «*», формулы; находящиеся в НДФ, символом «+»; формулы находящиеся в СНФК символом «^»:
   a. A_1
   b. $A_1 \cup A_1$
   c. $\bar{A}_3 \cap (\bar{A}_2 \cup A_1)$

d. $\bar{A}_3 \cap \bar{A}_2 \cap A_1$
e. $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cup A_2 \cap A_3$
f. $\bar{A}_1 \cup A_1$
g. $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4$
h. $\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap \bar{A}_3 \cup A_2 \cap A_3$
i. $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cup \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$

2. Как какими последовательностями нулей и единиц записываются следующие конституэнты:
   a. $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4$
   b. $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4$
   c. $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4$
3. Известно, что образующими множествами являются - A_1, A_2, A_3, A_4, какие конституэнты задаются числами 4, 6, 9, 12, 15?
4. Система образующих состоит из 4 множеств, множество В находится в СНФК, конституэнты, которые его задают, определяются числами
   a. 1, 3, 6, 12, 14, 15;
   b. 0, 2, 5, 13, 15;
   c. 0, 4, 7, 11, 12, 15.

Найти минимальную НФК множества В.

Основные определения теории графов

Хотя история теории графов насчитывает более двух столетий (ее начало было положено Л Эйлером в 1736 году при решении задачи о Кёнигсбергских мостах) для понятия «граф» нет общепризнанного единого определения. Разные авторы, занимающиеся разными приложениями этой теории, называют словом «граф» очень похожие, но все-таки различные объекты. Мы будет использовать наиболее, на наш взгляд, распространенные определения.

Графом $G(V,E)$ называется совокупность двух множеств — непустого множества V (множества *вершин*) и множества E (E — множество *рёбер*). Любое ребро (элемент из множества E) должно соединять две вершины, поэтому его можно задать парой вершин. Если $e \in E$, то $e=(v_1,v_2)$, где v_1,v_2 две разные вершины из V. Если порядок вершин при задании ребра важен, то первая вершина называется *начальной вершиной*, в вторая - *конечной вершиной*, само ребро называется *дугой*, а граф *ориентированным графом* или *орграфом*. В противном случае, граф называется *неориентированным* или просто графом.

Название «граф», говорит о наличии некого геометрического образа. Любой неориентированный граф можно представить в виде точек (вершин), соединенных отрезками (ребрами), а ориентированный - в виде точек, соединенных направленными отрезками (дугами). И дуги и ребра могут изображаться криволинейными отрезками. Теория графов позволяет создавать наглядные модели различных объектов и процессов. Изображения графа позволяют «усмотреть» суть дела на интуитивном уровне. В теории графов важен сам факт соединения или отсутствие соединения вершин, в случае орграфов, еще играет роль и направление, поэтому длина отрезков или их форма не играют роли. Так же неважно расположение вершин. На рисунке 20 приведены примеры графа (а) и орграфа (б).

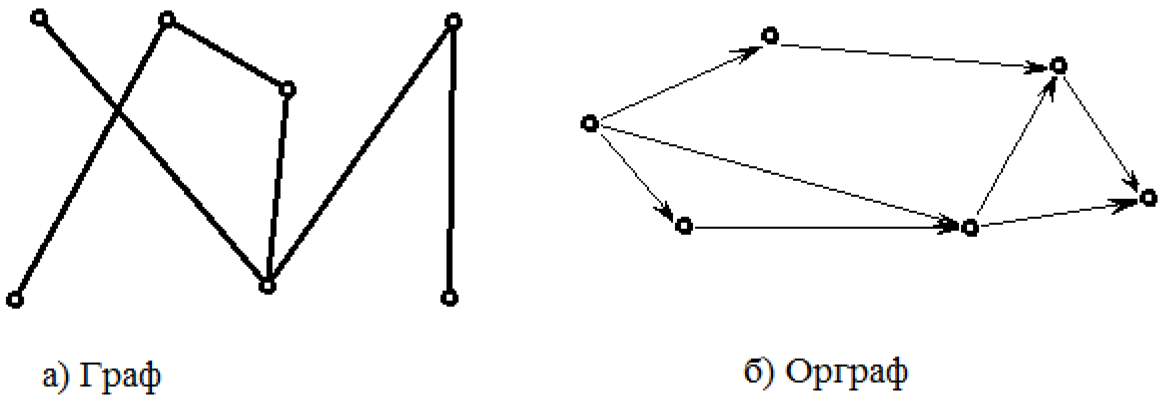


Рисунок 20 Граф и орграф.

Если вместо множества Е используется мультимножество, т.е. если пара вершин может быть соединена двумя или более ребрами (или, соответственно, дугами одного направления), то граф называют *мультиграфом*, а такие ребра (или дуги) называются *кратными*.

На рисунке 21 приведен пример мультграфа.

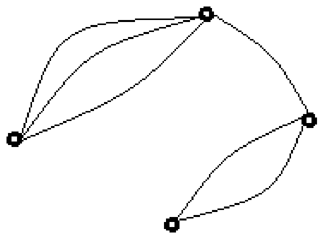


Рисунок 21. Мультиграф.

Если в графе не только возможны кратные ребра (дуги), но и ребро (или дуга) может начинаться и заканчиваться в одной и той же вершине, то в этом случае граф называется *псевдографом* (рисунок 22), а соответствующее ребро (или дуга) называется *петлей*.

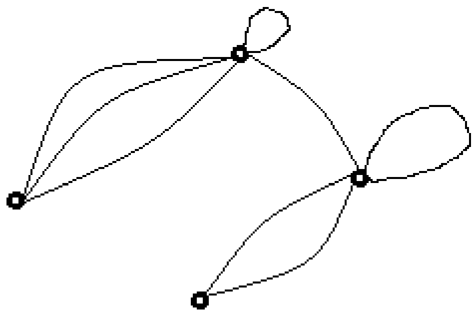


Рисунок 22. Псевдограф.

Граф *G'(V',E')* называется *подграфом* (или частью) графа *G(V,E)* (обозначает- ся $G' \subseteq G$), если $V' \subseteq V$ к $E' \subseteq E$. Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа. Если $V' = V$, то G' называется *остовным подграфом* G.

Вершины, соединенные ребром (дугой) называются *смежными*. *Ребра,* имеющие общую вершину, также называются *смежными*.

Каждое *ребро* (дуга) соединяет две вершины, говорят, что оно *инцидентно* этим вершинам. Также про *вершину*, являющуюся концом ребра (дуги), говорят, что она *инцидентна* этому ребру (дуге).

Степени вершин графа

Количество ребер инцидентных данной вершине, называется *степенью* этой вершины. Если рассматриваются петли, то вклад каждой петли в степень вершины равна двум. Обозначать степень вершины v будем $d(v)$.

Если рассматривать только графы, то степень вершины равна количеству смежных данной вершине вершин. Ясно, что для псевдографов это не всегда так.

Если степень вершины равна нулю, то вершина называется *изолированной*. Если степень вершины равна единицы, то вершина называется *висячей*. На рисунке 23, вершины *a,f* – висячие, а *d,e* – изолированные.

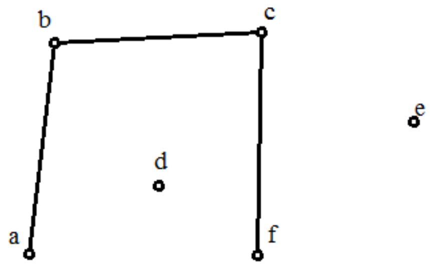


Рисунок 23. Висячие и изолированные вершины

Полным графом называется граф, у которого каждая вершина соединена с каждой. *Пустым* графом называется граф, у которого все вершины изолированы. Для задания полного или пустого графа достаточно знать число его вершин. Полный граф с n вершинами обычно обозначается через K_n

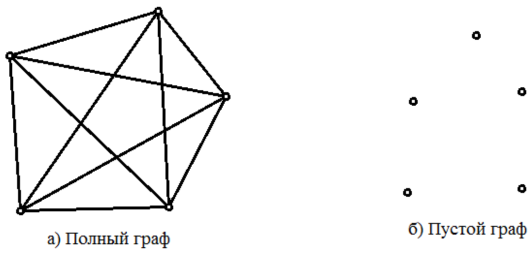


Рисунок 24. Примеры графов.

Теорема 14. (Лемма о рукопожатиях) Сумма степеней вершин графа (псевдографа) равна удвоенному количеству *(q)* рёбер:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2q$$

Доказательство. При подсчёте суммы степеней вершин каждое ребро учитывается два раза: для одного конца ребра и для другого.

Вершину четной (нечетной) степени будем называть *четной (нечетной)* вершиной.

Следствие 1. Число нечетных вершин чётно.

Доказательство. По теореме 14 сумма степеней всех вершин — чётное число. Сумма степеней вершин чётной степени чётна, значит, сумма степеней вершин нечётной степени также чётна, следовательно, число нечетных вершин должно быть чётным числом.

Граф называется *регулярным*, если степени всех его вершин одинаковы.

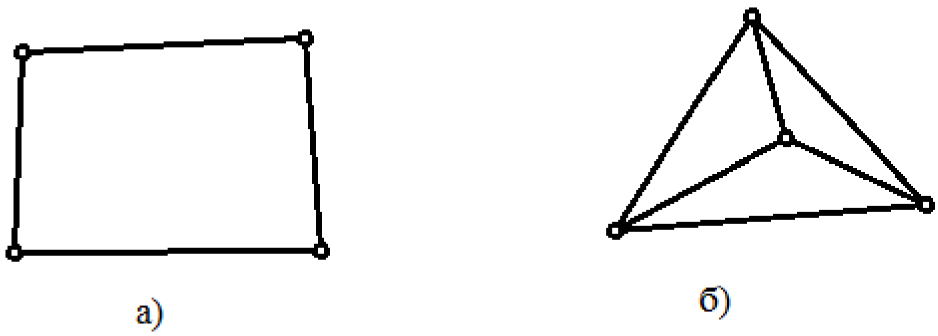


Рисунок 25. Регулярные графы, а) -степени 2, б) - степени 3

Для орграфа число дуг, исходящих из вершины v, называется полустепенью исхода, а число входящих — полустепенью захода. Обозначаются эти числа, соответственно, $d^{-}(v)$ и $d^{+}(v)$.

Теорема 15. Сумма полустепеней узлов орграфа равна удвоенному количеству (q) дуг:

$$\sum_{v\in V} d^{-}(v) + \sum_{v\in V} d^{+}(v) = 2q$$

Доказательство. Каждая дуга имеет начало, которое вносит вклад в полустепень исхода и конец, который вносит вклад в полустепень захода.

Объединение, пересечение, дополнение графов.

Объединение графов $G_1=<V_1,X_1>,G_2=<V_2,X_2>$ называется граф $G_1\cup G_2=(V_1\cup V_2,\ X_1\cup X_2)$.

Пересечение графов $G_1=<V_1,X_1>,G_2=<V_2,X_2>$ называется граф

$G_1\cap G_2=(V_1\cap V_2,\ X_1\cap X_2)$.

Дополнительный граф к графу G = (V,X) – такой граф $\overline{G}$ = (V′ ,X′) , у которого V′ =V , а (a,b)∈X′ тогда и только тогда, когда (a,b)∉X

Очевидно, что граф $G\cup\overline{G}$ является полным.

Изоморфизм графов

Говорят, что два графа, $G_1(V,X)$ и $G_2(W,Y)$, изоморфны (обозначается $G_1 \sim G_2$, или $G_1 = G_2$), если существует биекция $h\colon V \to W$, сохраняющая смежность, т.е. две вершины

$u, v \in V$ соединены ребром т. и т. т., когда их образы $h(u),h(v)$ соединены ребром:

$$(*) \qquad (u, v) \in X \leftrightarrow (h(u),h(v)) \in Y$$

Изоморфизм графов является эквивалентностью. Докажем это утверждение. Поскольку тождественная функция определяет изоморфизм графа самого на себя, то отношение рефлексивно. Если биекция $h\colon V \to W$ задает изоморфизм графа $G_1(V,X)$ на граф $G_2(W,Y)$, то биекция h^{-1} задает изоморфизм графа $G_2(W,Y)$ на граф $G_1(V,X)$. Следовательно, отношение изоморфизма симметрично. Если биекция $h\colon V \to W$ задает изоморфизм графа $G_1(V,X)$ на граф $G_2(W,Y)$, биекция $g\colon W \to U$ задает изоморфизм графа $G_2(W,Y)$ на граф $G_3(U,Z)$, то биекция gh задает изоморфизм графа $G_1(V,X)$ на граф $G_3(U,Z)$. Таким образом, отношение изоморфизма транзитивно.

В теории графов графы рассматриваются с точностью до изоморфизма, то есть рассматриваются классы эквивалентности по отношению изоморфизма.

На рисунке 26 изображены три изоморфных графов.

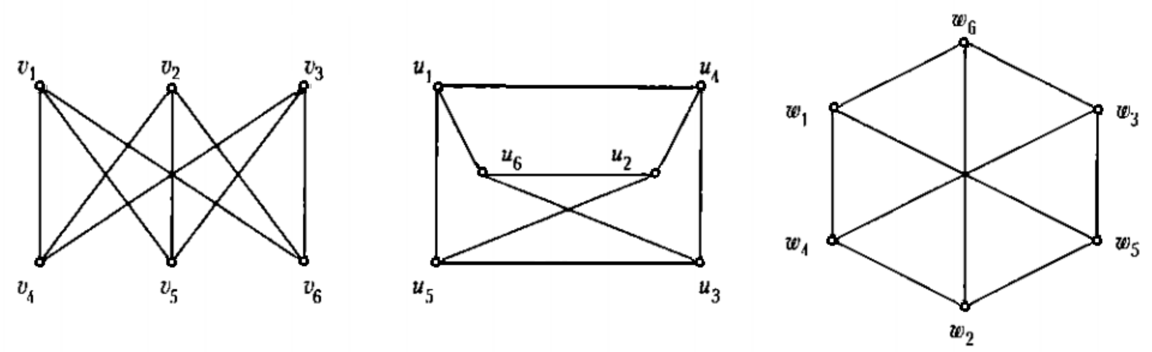


Рисунок 26. Изоморфные графы.

Внешний вид этих графов сильно отличается. Вместе с тем, если представить эти графы нарисованными на экране компьютера, то перемещая мышкой вершины можно каждый из этих рисунков преобразовать в другой.

Числовая характеристика, одинаковая для всех изоморфных графов, называется инвариантом графа. Так, количество вершин графа или его ребер — инварианты графа. Степени образов и праобразов одинаковы и много других числовых характеристик совпадает у изоморфных графов, но не известно никакого простого набора инвариантов, определяющих граф с точностью до изоморфизма.

Количество вершин, рёбер и количество вершин заданное степени не определяют граф даже в простейших случаях! На рисунке 27 представлены графы, у которых указанные инварианты совпадают, по графы при этом не изоморфны.

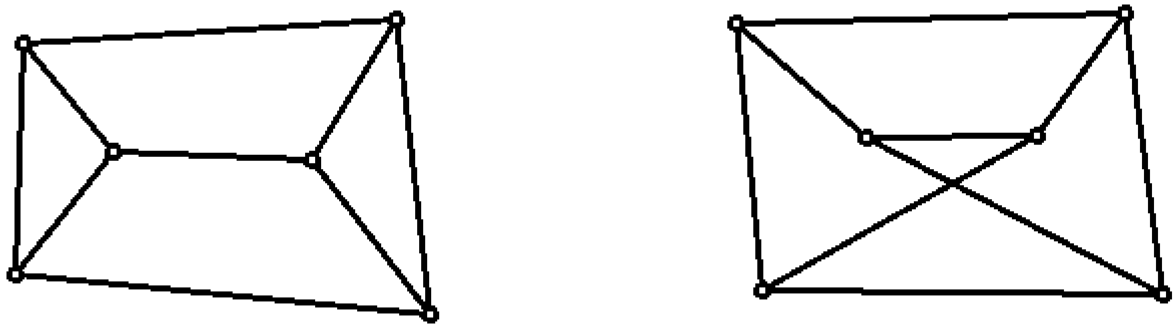


Рисунок 27. Пример неизоморфных графов.

Для определения изоморфизма орграфов нужно потребовать, не только сохранения смежности, но и согласованного направления дуг. Кстати сказать, формула (*) полностью отражает все особенности изоморфизма орграфов.

Для определения изоморфизма псевдографов нам потребуются две биекции одна между множествами вершин V, W, другая между множествами ребер X, $У$, сохраняющие отношение не только отношение смежности, но и инцидентности. Пусть биекции $h: V \to W$, $g: X \to Y$ задают изоморфизм псевдографов, тогда верно следующее:

(**) $$x=(u, v) \in X \leftrightarrow g(x)=(h(u),h(v)) \in Y.$$

Очевидно, что при рассмотрении графов, также можно определить отображение ребер по следующему правилу. Если $x=(u, v) \in X$, то $g(x)=(h(u),h(v))$. Поскольку любая пара вершин может быть соединена только одним ребром, и в силу формулы (*), отображение g будет биекцией, и будет верна формула (**). Значит изоморфные графы, будут так же изоморфны, как псевдографы.

Вопросы и задачи

1. Привести пример мультиграфа, содержащего более 5 вершин, не являющегося графом.
2. Привести пример псевдографа, содержащий 3 вершины и 9 ребер.
3. Привести пример регулярного графа степени 3.
4. Привести пример графа, имеющего 5 висячих вершин и диаметр равный 4.
5. Построить полный граф K_7.
6. Построить графы дополнительные к графам на рисунке 28.

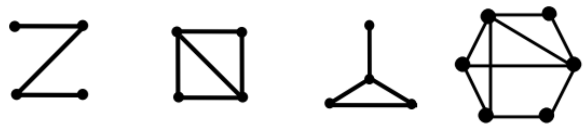


Рисунок 28 к задачи 6..

7. Есть ли на рисунке 29 изоморфные графы, если есть построить изоморфизмы:

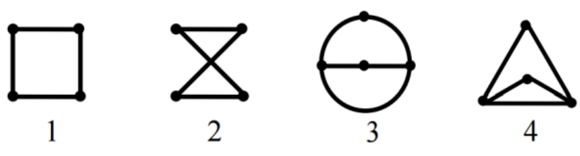


Рисунок 29 к задаче 7

8. Выяснить, существуют ли графы с набором степеней:

1) (0,2,2,3,3); 2) (1,2,2,3,3);

3) (2,2,3,3,3); 4) (0,1,2,3,4)

9. Граф G называется самодополнительным, если G изоморфен графу $\overline{G}$.
Привести пример самодополнительного графа с числом вершин, более 3.

Маршруты, цепи, циклы

Маршрутом в псевдографе называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер, начинающаяся и кончающаяся вершиной, $v_0,x_1,v_1,x_2,\dots,x_n,v_n$, в которой любые два соседних элемента инцидентны, причём однородные элементы (вершины, рёбра) через один смежные или совпадают. В ориентированном псевдографе такая последовательность называется *путем*, причем учитывается направление, вершина v_{i-1} должна быть началом дуги x_i, а вершина v_i – концом, для всех $1 \le i \le n$.

В графе (орграфе) маршрут(путь) можно задать последовательностью вершин. $v_0,v_1, \dots, v_n$. В псевдографе надо обязательно указывать ребра, причем последовательности ребер (дуг) $x_1, x_2,\dots,x_n$ для задания маршрута (пути) будет достаточно.

Если начальная вершина маршрута совпадает с конечной, то маршрут называется *замкнутым*.

Подмаршрутом μ маршрута η $(\mu \subseteq \eta)$ называется такая последовательность вершин и ребер, которая является маршрутом и полностью содержится в маршруте η.

Маршрут, не имеющий повторяющихся ребер, называется *цепью*. В цепи $v_0,x_1,v_1,x_2,\dots,x_n,v_n$ вершины v_0, v_n называются концами цепи. Говорят, что цепь с концами v_0, v_n соединяет вершины v_0 и v_n.

Длиной цепи (маршрута) называется количество входящих в нее (него) ребер

Цепь, не имеющая повторяющихся вершин, называется *простой цепью.*

Цепь у которой начальная вершина совпадает с конечной, называется замкнутой цепь или *циклом*.

Цикл, не имеющий повторяющихся вершин, называется простым *циклом*.

Пример. В графе, на рисунке 30:

1) V_I, V_3, V_l, V_4 — маршрут, но не цепь;

2) $V_I, V_3, V_5, V_2, V_3, V_4$ — цепь, но не простая цепь;

3) V_I, V_4, V_3, V_2, V_5 — простая цепь;

4) $V_I, V_3, V_5, V_2, V_3, V_4, V_1$ — цикл, но непростой цикл;

5) V_1, V_3, V_4, V_1 — простой цикл.

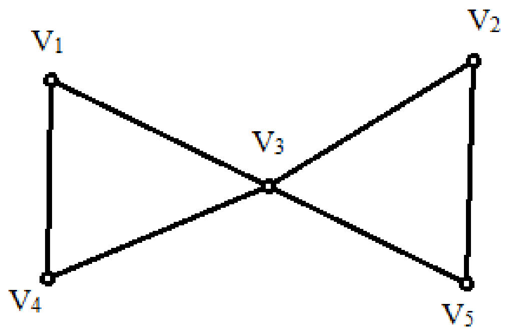


Рисунок 30. Граф, на котором рассматриваются примеры маршрутов, цепей, циклов.

Теоремы о постой цепи и простом цикле

Теорема 16. Из всякого незамкнутого маршрута можно выделить простую цепь с теми же начальной и конечной вершинами.

Доказательство. Индукцией по k-количеству рёбер в маршруте. При $k=1$ всякий маршрут является простой цепью.

Пусть при некотором $k \geq 2$ доказываемое утверждение справедливо для любого маршрута длины $n \leq k\text{-}1$. Покажем его справедливость для произвольного маршрута $\eta=v_1,x_2,v_2,\ldots,v_k, x_k, v_{k+1}$, где $v_i \neq v_{k+1}$ длины k. Рассмотрим два номера i,j, где $1\leq i<j\leq k+1$ такие, что $v_i=v_j$. Если таких нет, то маршрут η является простой цепью. Если указанные номера нашлись, то, переходим к подмаршруту $\mu=v_1,x_1,v_2,\ldots x_{i-1},v_i,x_j,v_{j+1},\ldots,x_k,v_{k+1}$ (т.е. предполагаем $i\neq 1$, $j\neq k+1$, случаи $i=1$ и $j=k+1$, рассмотрим позднее) длиной не больше $k\text{-}1$, соединяющему исходные начальную и конечные вершины. А из маршрута μ в силу индукционного предположения можно выделить простую цепь, соединяющую вершины v_1 и v_{k+1}. Выполнение двух равенств $i=1, j=k+1$ одновременно невозможно, поскольку исходный маршрут незамкнутый. Если $i=1$, то получим подмаршрут $\mu=v_1,x_j,v_{i+1},\ldots,x_k,v_k$, если $j=k+1$, то $\mu= v_1,x_2,\ldots,x_{i-1},v_i$. В любом случае получаем подмаршрут μ, для которого выполняется индукционное предположение и который соединяет исходные начальную и конечные вершины.

Теорема 16. (о простом цикле). В псевдографе G из всякого цикла можно выделить простой цикл.

Доказательство. Доказывать будем индукцией по длине цикла k. Если k=1, то мы имеем дело с петлёй, а это простой цикл.

Пусть теорема справедлива для всех циклов, имеющих длину не больше k, где $k \geq 2$. Рассмотрим цикл η длины $k+1$. Пусть $\eta=v_1,x_1,\ldots,v_k,x_{k+1},v_1$.

Если η простой цикл, то теорема верна, если нет, то существуют вершины v_i и v_j, такие что $i<j$ и $v_i=v_j$. Если $i=1$, то цикл $\mu = v_1,x_1,\ldots,v_j,x_{j+1},v_j$ будет искомым, если $i>1$, то цикл

$\mu = v_1,x_1,\ldots,x_{i-1},v_i, x_j,\ldots,v_k, x_{k+1},v_1$ имеет длину меньше k, и, следовательно, для него справедливо индукционное предположение.

Вопросы и задачи

1. На графе, данном на рисунке 31, привести примеры
   a. маршрута, содержащего 5 ребер, который не является цепью;
   b. замкнутого маршрута, содержащего более 3 ребер, не являющегося циклом;
   c. простого цикла;
   d. сложного цикла;
   e. простой цепи длины 5.

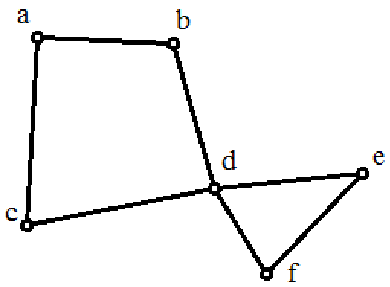


Рисунок 31 к задачам 1,2,3,4.

2. Существует ли на графе, представленном на рисунке 19, цепь длины 8?
3. Существует ли на графе, представленном на рисунке19, простая цепь длины 7?
4. Существует ли на графе, представленном на рисунке 19, маршрут длины 22?

Способы задания графов

Граф может быть задан с помощью рисунка или непосредственным перечислением множеств вершин и ребер, но нас более всего интересуют те способы, которые используются при программировании. Нужно отметить, что единого, универсального способа нет. В разных задачах могут использоваться разные представления графов. Мы рассмотрим два представления с помощью матриц смежности и инцидентности.

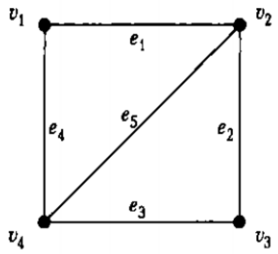
Матрица смежности

Матрица смежности – это квадратная матрица размерности $n \times n$, значения элементов которой характеризуются смежностью вершин графа. (n- это количество вершин графа). Элементы матрицы определяются следующим образом:

$$s_{i,j} = \begin{cases} 1, \textit{если вершины } v_i \textit{ и } v_j \textit{ смежные}; \\ 0, \textit{в противном случае}; \end{cases}$$

Если рассматривается псевдограф, то вместо единиц ставится число кратных ребер, соединяющих вершины v_i и v_j.

Пример. На рисунке 32 дан граф и его матрица смежности.



	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	0	1
v_2	1	0	1	1
v_3	0	0	1	1
v_4	1	1	1	0

Рисунок 32. Граф и его матрица смежности.

Матрица смежности графа симметрична относительно главной диагонали, поэтому достаточно хранить только верхнюю (или нижнюю) треугольную матрицу.

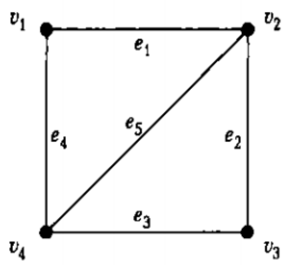
Матрица инцидентности

В матрице инцидентности хранятся связи между инцидентными элементами – вершинами и ребрами. Размерность этой матрицы $m \times n$, где m - количество ребер, n - количество вершин. Столбцы матрицы соответствуют вершинам, строки – ребрам. Ненулевое значение в ячейке матрицы указывает связь между вершиной и ребром. Данный способ является самым емким для хранения, но облегчает нахождение циклов в графе.

Если рассматривается неориентированный граф, то матрица инцидентности определяется так:

$$s_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ если } i - \text{тое ребро инцидентно } j - \text{той вершине}; \\ 0, \text{ в противном случае}; \end{cases}$$

Пример. На рисунке 33 представлены граф и его матрица инцидентности.



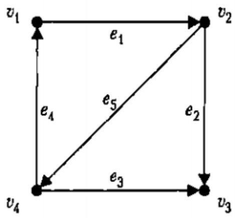
	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	1	1	0	0
e_2	0	1	1	0
e_3	0	0	1	1
e_4	1	0	0	1
e_5	0	1	0	1

Рисунок 33. Граф и его матрица инцидентности.

При рассмотрении орграфов учитывается направление дуг:

$$s_{i,j}=\begin{cases}1, \text{ если } i-\text{тая дуга заканчивается в } j-\text{той вершине,}\\ 0, \; i-\text{тая дуга и } j-\text{тая вершина не инцидентны,}\\ -1, \text{ если } i-\text{тая дуга начинается в } j-\text{той вершине,}\end{cases}$$

Пример. На рисунке 34 представлен орграф и его матрица инцидентности.



	v_1	v_2	v_3	v_4
e_1	-1	1	0	0
e_2	0	-1	1	0
e_3	0	0	1	-1
e_4	-1	0	0	1
e_5	0	-1	0	1

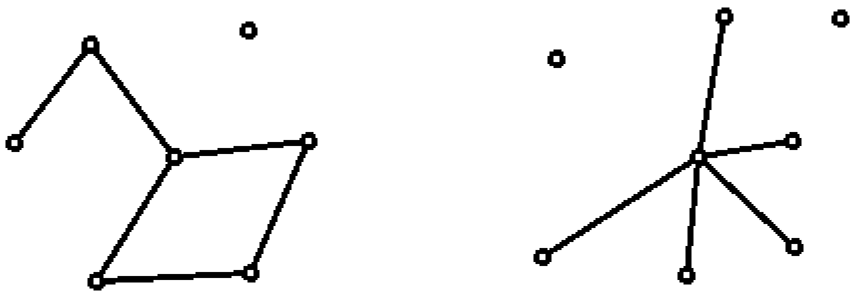
Рисунок 34. Ориентированный граф и его матрица инцидентности.

Вопросы и задачи

1. Нарисовать граф, заданный матрицей смежности, найди диаметр этого графа и построить матрицу инцидентности.

$$1)\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&1&1&0&1\\1&1&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix};\quad 2)\begin{pmatrix}0&1&1&0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0&0&1&1\\1&1&0&1&1&0&1&1\\0&0&1&0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&1&1&1\\0&0&0&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&0&0&1\\1&1&1&0&1&1&1&0\end{pmatrix};\quad 3)\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&1&1&1\\1&0&1&1&1&1&1&0\\0&1&0&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&1&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\1&1&1&1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1&0&1\\1&0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

2. Построить матрицы инцидентности и смежности графов (рисунок 35).



1 2

Рисунок 35 к задаче 2.

3. Построить матрицу инцидентности орграфа (рисунок 36).

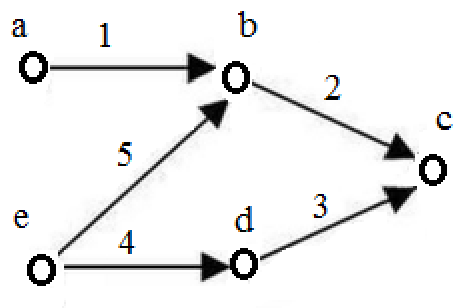


Рисунок 36.ориентированный граф.

Связность

Связный граф.

Вершины называются *связанными*, если существует маршрут их соединяющий. Граф называется *связным,* если все его вершины связаны. Поскольку из любого незамкнутого маршрута можно выделить простую цепь, имеющую те же начальную и конечную вершины, то в связном графе, любые две вершины можно соединить простой цепью.

Отношение связанности вершин является эквивалентностью. Классы эквивалентности по отношению связанности называются *компонентами связности* графа. Связный граф имеет одну компоненту связности.

Расстояние между вершинами. Диаметр графа

Рассматривается связный граф. Напомним, что длиной цепи называется количество ребер входящих в эту цепь.

Расстоянием между двумя вершинами называется длина самой короткой цепи соединяющей эти вершины.

В графе, изображенном на рисунке 37, вершины a и f могут быть соединены разными цепями, но самой короткой цепью будет цепь a,b,c,f , длины 3.

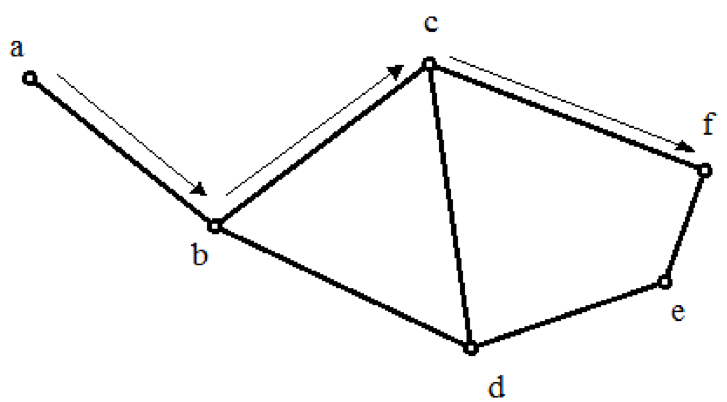


Рисунок 37. Кратчайшая цепь, соединяющая вершины a,f.

Диаметр графов называется наибольшее расстояние между двумя вершинами этого графа. В нашем случае, диаметр графа равен 3.

Разделяющее множество - это множество ребер, удаление которых из графа приводит к увеличению числа компонент связности. Связный граф делает граф несвязным.

Разрезом называется такое разделяющее множество ребер, которое не имеет собственного разделяющего подмножества.

Разрез, состоящий из одного ребра, называется либо *мостом*, либо *перешейком*.

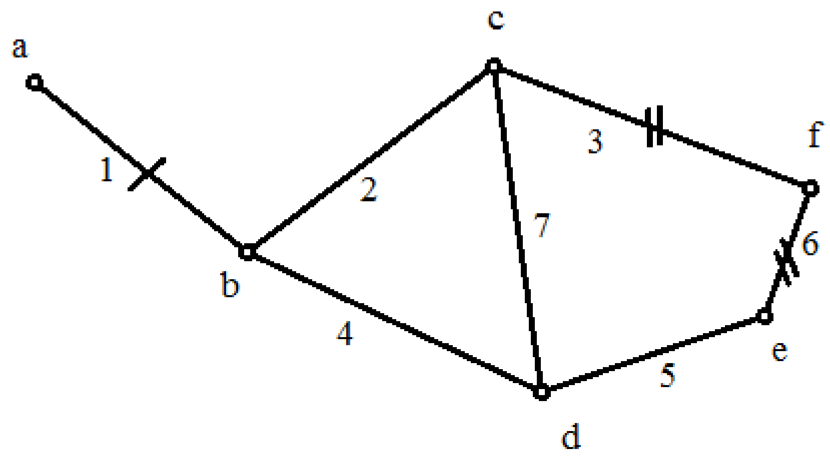


Рисунок 38. Одной черточкой отмечен мост, двумя - пример разреза.

На рисунке 38 отмечен одной черточкой мост, он в графе единственный. Разрезов много, на этом рисунке приведен пример одного из них, ребра входящие в него отмечены двумя черточками. Другие примеры разрезов {2,4}, {2,3,7}, {4,5,7}. Примерами разделяющих множеств будут сами разрезы и любые множества ребер графа, включающие разрезы.

Точкой сочленения называется вершина, удаление которой приводит к увеличению числа компонент связности. Граф на рисунке 38, имеет точку сочленения – вершину *b*.

Алгоритм Тэрри

Нередко при решении прикладных задач возникает необходимость найти маршрут, соединяющий заданные вершины графа. Существует довольно много алгоритмов решающих эту задачу, ***алгоритм Тэрри*** один из них. Надо отметить, что он дает далеко не оптимальный маршрут, но алгоритм прост, а полученный маршрут в большинстве случаев легко оптимизируется.

Движение по ребрам графа по алгоритму Тэрри производится в соответствии со следующими правилами:

1. идя по произвольному ребру, всякий раз отмечать направление, в котором оно пройдено,
2. исходя из некоторой вершины, всегда двигаться только по тому ребру, которое либо не было пройдено, либо было пройдено в другом направлении,
3. для всякой вершины, кроме начальной, отмечать ребро, по которому в эту вершину заходим впервые (первое заходящее ребро).
4. исходя из некоторой вершины, отличной от начальной, двигаться по первому заходящему ребру лишь в том случае, когда другой возможности нет.

Обоснование алгоритма Тэрр.

Пусть мы, следуя алгоритму Тэрри, двигаемся из вершины v в вершину w.

Допустим, руководствуясь этим алгоритмом, мы остановимся в некоторой вершине u (не достигнув вершины w) и все рёбра инцидентные u, уже пройдены в направлении «из» u и тогда в силу правила 2 мы уже не сможем выйти из u. Покажем, что в этом случае:

а) вершина u совпадает с v,

б) все вершины графа G являются пройденными.

а) Если $u \neq v$, то пусть в вершине u мы побывали k раз (включая последний). Пусть рёбра, инцидентные u, были пройдены k раз по направлению «к» u и k-1 раз в направлении «из» u (так как число заходов в u, за исключением последнего, соответствует числу исходов из этой вершины). Встает вопрос, а сколько ребер инцидентно вершине u? По направлению «к» u мы получаем k ребер, поскольку по каждому ребру в одном направлении мы можем пройти один раз, а по направлению «из» u k-1 ребер. Получили противоречие. Значит $u=v$.

б) Пусть $v_1, v_2, \dots, v_k$, где $v_1=v_k=v$ есть последовательность вершин, расположенных в том же порядке, в каком мы их проходили, действуя согласно алгоритму.

Покажем, что последовательность содержит все вершины. Предварительно докажем, что каждое ребро, инцидентное любой вершине v_j, где $1 \leq j \leq k$, было пройдено по одному разу в обоих направлениях

Доказательство проведем индукцией по j.

Базис индукции. Поскольку в замкнутом маршруте для каждой, содержащейся в нём вершине число исходов из этой вершины равно числу заходов в неё, то в силу утверждения “а“ и правилу 2 все рёбра, инцидентные вершине $v=v_1$ были пройдены по разу в направлении «из» v. Если $\delta(v)$ степень вершины v, то $\delta(v)$ мы вышли из вершины v. Поскольку мы сейчас в вершине v, то ровно $\delta(v)$ раз мы заходили в v, а в силу правила 2, каждый раз мы заходили в v по новому ребру, значит все рёбра, инцидентные вершине $v_1=v$, были пройдены в обоих направлениях по разу.

Индуктивный шаг. Допустим, что при некотором j, где $2 \leq j \leq k$, доказываемое утверждение верно для всех вершин $v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}$. Докажем его для вершины v_j. Если $v_j=v_i$ для $i=1,\ldots,j-1$, то справедливость утверждения для v_j следует из индукционного предположения. Если это не так, то (v_{j-1},v_j)- первое заходящее в вершину v_j ребро. Поскольку оно инцидентно вершине v_{j-1}, то по индуктивному предположению оно будет пройдено в обоих направлениях, что по правилу 4 возможно лишь в том случае, когда все остальные рёбра, инцидентные v_j, будут пройдены в направлении «из» v_j. Далее, поскольку в замкнутом маршруте, как уже отмечалось, число исходов из этой вершины равно числу заходов в неё, то, опираясь на правило 2, получаем, что все рёбра инцидентные v_j будут пройдены по разу в обоих направлениях.

Итак, каждую вершину в маршруте мы проходим вместе со смежными ей вершинами, откуда в силу связности графа G следует, что маршрут проходит через все вершины графа G, а это противоречит исходному предположению, что вершина w не была достигнута.

Замечание 1. Алгоритм Тэрри и его обоснования остаются в силе, если G- связный псевдограф.

Замечание 2. Если псевдограф G не является связным, то с помощью алгоритма Тэрри, исходя из произвольной вершины v и, помечая пройденные вершины и рёбра, можно выделить компоненту связности псевдографа G, содержащую вершину v.

Вопросы и задачи

1. Сколько мостов и точек сочленения есть в графе, представленном на рисунке 39.

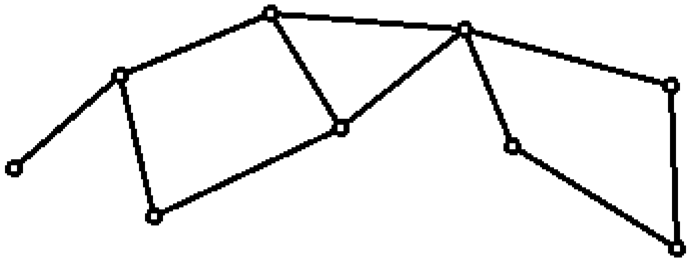


Рисунок 39 к задаче 1, 2.

2. Вычислить диаметр графа на рисунке 39.
3. На рисунке 40 даны три графа, их надо обойти по алгориму Тэрри. Выберите начальную вершину и перемещайтесь по ребрам графа, следуя алгоритму Тэрри, до тех пор, пока не окажитесь в тупике, затем проанализируйте свой маршрут.

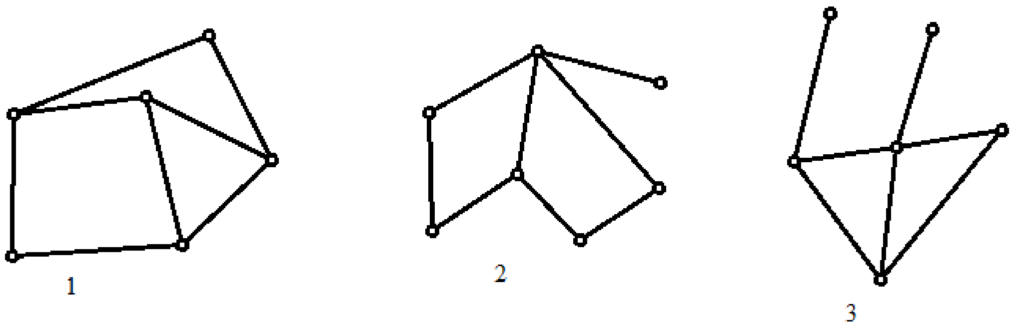


Рисунок 40 к задаче 3.

Двудольный граф.

Граф $G=<V, X>$ называется *двудольным*, если множество вершин V можно разбить на два пересекающихся подмножества V_1,V_2, таких, что для любого ребра $x \in X$, если x соединяет вершины u и v, то либо $u \in V_1$ и $v \in V_2$, либо $v \in V_1$ и $u \in V_2$.

Другими словами, граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества таких, что все ребра этого графа соединяют вершины из разных подмножеств. Эти множества нередко называются долями.

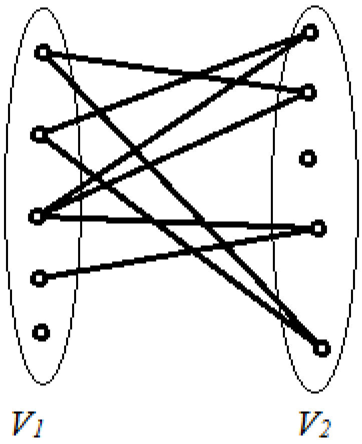


Рисунок 41. Двудольный граф.

Теорема 17. **(***Признак двудольности графа)*. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют четную длину.

Доказательство необходимости. Пусть граф G двудольный, значит существуют V_1, V_2 такие, что ребра соединяют вершины находящиеся в разных множествах V_i. Любое ребро имеет один конец в V_1 , а другой V_2.

Лемма. Пусть начальная вершина цепи $u_1 \in V_1$, тогда если она имеет нечетную длину, то заканчивается в V_2 ,а если имеет четную длину, то заканчивается в V_1 .

Доказательство проведем индукции по длине цепи.

Базис индукции. Очевидно, лемма верна для длин $n=0, n=1$.

Индукционное предположение. Пусть лемма верна для цепей длины меньшей, чем n. Докажем утверждение для цепи μ длины $n>1$. Уберем последнее ребро цепи μ. Получим цепь μ' длины $n-1$, для которой справедливо индукционное предположение. Если n–четно, то $n-1$ – нечетно, по индукционному предположению, цепь μ'заканчивается в V_2, тогда цепь μ заканчивается в V_1. Если n–нечетно, то $n-1$ –четно, по индукционному предположению цепь μ' заканчивается в V_1, тогда цепь μ заканчивается в V_2.

Рассмотрим произвольный цикл графа G. Ясно, что он будет содержать вершины из обоих множеств V_1, V_2. Пусть вершина u принадлежит циклу и множеству V_1, если цикл записать так, чтобы вершина u была начальной, то она будет и конечной, т.е. цикл должен закончится в множестве V_1, что по лемме возможно только в случае, если он имеет четную длину.

Доказательство достаточности. Рассмотрим связный граф. Пусть в графе все циклы имеют четную длину. Выберем произвольную вершину v. Множество V_1 – образуем как множество вершин, находящихся на четном расстоянии от v ,V_2 как множество вершин на нечетном расстоянии от вершины v.

Ясно, что множества V_1,V_2 будут разбиением множества вершин графа G, покажем, что они будут удовлетворять условию двудольности графа G. Предполагаем противное, пусть существуют вершины u, $w \in V_1$, которые соединены ребром. Рассмотрим кратчайшие цепи из v в вершины u и w, они имеют четную длину, поскольку определяют расстояния от вершины v до вершин u и w. Эти цепи могут иметь совпадающие фрагменты, но поскольку они ведут в разные вершины, то наступит момент, когда они разойдутся. Если y – это точка их окончательного расхождения, то длина обеих цепей от v до y будет одинакова, поскольку цепи кратчайшие. Длина цепи из u в w, проходящая через y, будет иметь четную длину, поскольку длины цепей из v в u и w четные, и из их суммы мы вычитаем дна одинаковых числа – длины участков цепей соединяющих v и y. Добавим к рассмотренной цепи ребро (u,w) , получим цикл нечетной длины, чего быть не может. Аналогично разбирается случай, когда u, $w \in V_2$.

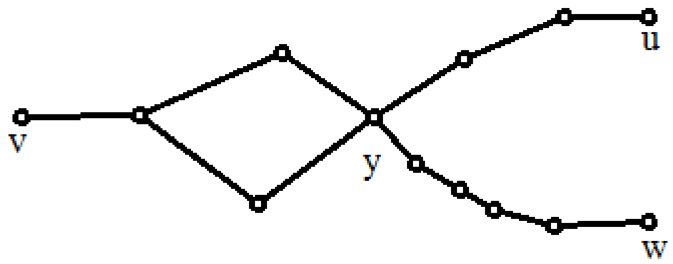


Рисунок 42. Иллюстрация к доказательству теоремы 17.

На рисунке 42 изображен пример только что рассмотренной ситуации. На участке v,y цепи могут расходиться, но для нас это не имеет значения, важно только, что длины у них одинаковы. Поскольку расстояние от вершины v до вершин u и w либо оба четные (как в рассмотренном случае), либо нечетные, удаление из их суммы двух одинаковых чисел приведет к числу четному. Это число будет длиной цепи соединяющей вершины u, y, w. Добавление ребра (u,w) даст нам цикл с нечетной длиной, что противоречит условию теоремы.

Если рассматривать несвязный граф, то мы может отдельно поработать с каждой компонентой связности, а затем объединить все подмножества вершин, имеющие номер 1 и получить множество V_1, объединить все подмножества, имеющие номер 2 и получить V_2.

Эйлеровы и гамильтоновы графы

Эйлеровым циклом в графе называется цикл, содержащий все ребра графа.

Связный граф называется *эйлеровым*, если он содержит эйлеров цикл.

Цепь называется эйлеровой, если она содержит все ребра графа. Если граф содержит эйлерову цепь, то *он* называется *полуэйлеровым*, при этом каждый эйлеров *граф* будет полуэйлеровым.

Примеры.

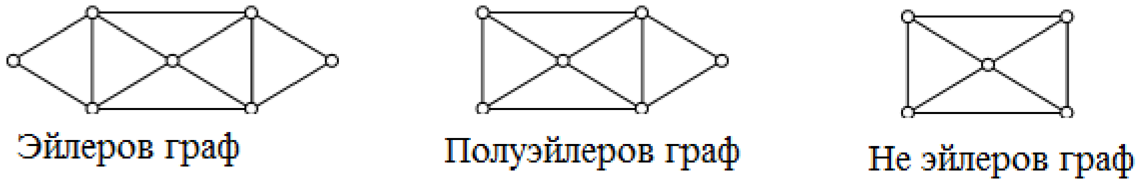


Рисунок 43. Примеры графов.

Задачи с эйлеровыми графами часто встречаются в книгах по занимательной математике — например, можно ли нарисовать какую-нибудь диаграмму, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя никакую линию дважды.

Критерий существования эйлерова цикла

Теорема 18. Если граф *G* обладает эйлеровым циклом, то все его вершины четные.

Доказательство. Эйлеров цикл содержит каждое ребро и притом только один раз. Если мы будем двигаться по эйлерову циклу, то при каждом заходе в вершину по одному ребру, мы сможем выйти из нее по другому ребру. Поскольку число заходов в вершину равно число исходов из нее, то степень любой вершины будет четной

Верно и обратное утверждение.

Теорема 19. Если граф *G* связный и все его вершины четные, то он обладает эйлеровым циклом.

Доказательство. Пусть v – произвольная вершина графа *G*. Начнем построение цикла, двигаясь по одному из ребер вершины v. Попав в некоторую вершину w по одному ребру, мы всегда можем из нее выйти по новому ребру, поскольку степени вершин четные.

Так как число ребер конечно, то наше движение должно окончиться. Причем в вершине v. В силу четности степеней для любой другой вершины, если есть "вход" в вершину, то должен быть и "выход", а для вершины v не было "входа".

Обозначим построенный цикл буквой μ. Если мы прошли все ребра графа, то цикл построен. Если остались не пройдённые ребра, то должна существовать вершина u, принадлежащая μ и, имеющая не пройденное ребро. Поскольку степень вершины u четная, число ребер вошедших в цикл μ и инцидентных вершине u четно, то число не пройденных и инцидентных вершине u ребер тоже четно. Данное утверждение справедливо для любой вершины графа, хотя для некоторых из них число не вошедших в цикл μ ребер будет равно 0. Нам важно только то, что если из графа удалить ребра, вошедшие в цикл μ, то мы получим граф с четными вершинами, хотя связность получившегося графа, скорее всего, будет нарушена.

Повторим наши действия по построению цикла для вершины u, используя только ребра, не вошедшие в цикл μ. Получим новый цикл η. Циклы μ, η имеют общую вершину и не имеют общих ребер, значит их можно соединить, получим цикл μ'. Если новый цикл содержит все ребра графа, то эйлеров цикл построен. Если остались не пройденные ребра, то найдется вершина u', принадлежащая μ' и, имеющая не пройденное ребро, и мы повторим предыдущие действия. Число ребер и вершин конечно, процесс повторений действий закончится.

Пример. На рисунке 44 представлен связный граф, у которого все вершины четные. Посмотрим, как может на нем работать алгоритм, описанный в теореме. На первом шаге построим цикл 1,2,5,1, затем цикл 2,3,4,2. Соединяем два первых цикла, получим цикл 1,2,3,4,2,5,1. Поскольку остались не вошедшие в итоговый цикл ребра, то строим еще один цикл 4,5,6,4. Соединяем циклы, получим 1,2,3,4,5,6,4,2,5,1. Последний цикл содержит все ребра графа.

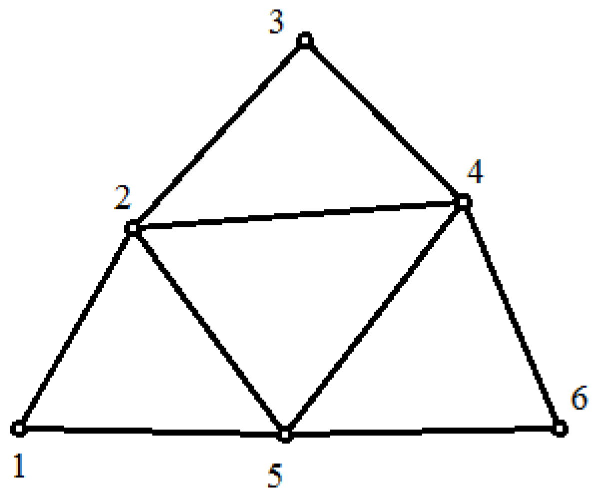


Рисунок 44. Граф, в котором строится эйлеров цикл.

Гамильтонов цикл

Простой цикл называется гамильтоновым, если он содержит все вершину графа.

Граф называется *гамильтоновым*, если он содержит гамильтонов цикл. Граф, который содержит простую цепь, проходящую через каждую его вершину, называется *полугамильтоновым*. Ясно, что гамильтонов граф является полугамильтоновым.

Рисунок 45. Примеры графов.

Эйлеровы и гамильтоновы циклы сходны по способу задания. Первые содержат все ребра, по одному разу каждое, вторые - все вершины, по одному разу каждую. Но, несмотря на внешнее сходство, задачи их поиска резко отличаются по степени трудности. Для решения вопроса о наличии эйлерова цикла в графе достаточно выяснить, все ли его вершины четны. Критерий же существования гамильтонова цикла в произвольном графе еще не найден. Проблема существования гамильтонова цикла принадлежит к классу так называемых *NP-полных задач.* Это широкий касс задач, включающий фундаментальные задачи из теории графов, логики, теории чисел, дискретной оптимизации и других дисциплин, ни для одной из которых не известен полиномиальный алгоритм (т.е. с числом шагов, ограниченным полиномом от размерности задачи). Причем существование полиномиального алгоритма для хотя бы одной из них автоматически влекло бы за собой существование полиномиальных алгоритмов для всех этих задач. Именно факт фундаментальности многих *NP*-полных задач в различных областях и то, что, несмотря на независимые друг от друга усилия специалистов в этих областях, не удалось найти полиномиального алгоритма ни для одной из этих задач, склоняет к предположению, что такого алгоритма не существует.

Вопросы и задачи

1. Есть ли на рисунке 46 двудольные графы. Если есть, то построить разбиение множества вершин на доли.

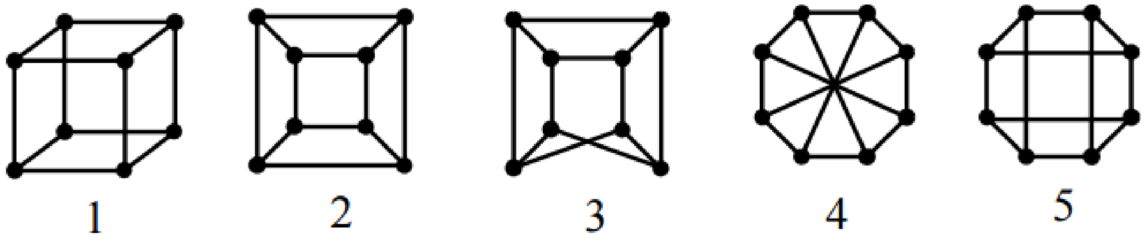


Рисунок 46 к задаче 1.

2. Найти граф с шестью вершинами, который имеет эйлеров цикл, но не имеет гамильтонова цикла.

3. Найти граф с шестью вершинами, который имеет гамильтонов цикл, но не имеет эйлерова цикла.

4. Каково наибольшее число ребер в двудольном графе с 6 вершинами?

5. Двудольный граф имеет k компонент связности. Каким числом способов его можно разбить на две доли?

Деревья

Связный граф без циклов называется *деревом*.

Пять определений дерева

Теорема 20. Следующие утверждения эквивалентны**:**

1. Граф является деревом, то есть связным без циклов графом.
2. Граф является связным и число его рёбер ровно на единицу меньше числа вершин.
3. Две любые различные вершины графа G можно соединить единственной (и при том простой) цепью.
4. Граф является связным и каждое его ребро является мостом.
5. Граф G не содержит циклов, но, добавляя к нему любое новое ребро, получаем ровно один цикл (и притом простой цикл), проходящий через добавляемое ребро.

Доказательство. Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

<u>*Лемма 1.*</u> Висячая вершина графа не может входить в цикл.

Доказательство. Предполагаем противное. Пусть μ - цикл, v висячая вершина и $v \in \mu$, тогда цикл μ содержит участок w,v,w, где w-смежная с v вершина, т.е. ребро (w,v)- встречается в μ дважды, а это противоречит определению цикла.

<u>Лемма 2.</u> Если у дерева G есть, по крайней мере, одно ребро, то у него обязательно найдётся висячая вершина.

Доказательство. Поскольку граф G связный, то можно построить последовательность вершин $v_1,v_2,v_3,\ldots$такую, что для любого i вершины v_i,v_{i-1} смежные и $v_i \neq v_{i-1}$. Поскольку в G висячих вершин нет, то последовательность можно продолжать неограниченно. Поскольку в графе G конечное число вершин, то обязательно произойдёт совпадение $v_i=v_j$, где $1\leq i \leq j$. Пусть это первое совпадение, т.е. совпадение с наименьшим номером j, тогда $v_i, v_2,\ldots ,v_j$- цикл в G, что противоречит тому, что G дерево.

<u>Лемма 3.</u> Пусть G-связный граф. v-висячая вершина в G, а G`-граф, получен из $G$ в результате удаления вершины v и инцидентного ей ребра, тогда $G$`-связный граф.

Доказательство. Пусть v_1,v_2 $(v_1 \neq v_2)$ произвольные вершины из графа G`, в графе $G$ они соединены цепью. Очевидно, что эта цепь не может проходить через вершину $v$, поскольку та висячая и не совпадает ни с одной вершин $v_1$, $v_2$ . Если она не проходит через $v$, то она является цепью в $G$`, следовательно, граф G` связный.

<u>Лемма 4.</u> Пусть G`-граф, являющийся деревом, $G$-граф, полученный в результате добавления к $G$` новой вершины v и ребра (v,w), где w-некоторая вершина графа G`. Тогда G-дерево.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что вершина v не может принадлежать циклу, следовательно, любой цикл графа G' будет циклом графа G. Поскольку граф G не имеет циклов, то граф G' тоже не будет иметь. Связность графа G' также легко следует из связности графа G. Следовательно, граф G' дерево.

Доказательство 1 => 2. Если G – дерево, имеющее n вершин и m ребер, то $m=n-1$.

Доказательство проведем индукцией. Если $n=1$, то очевидно, что $m=0$. Предполагаем, что утверждение справедливо для всех деревьев, имеющих не более чем k вершин. Рассмотрим, дерево, содержащее $k+1$ вершину, т.е. $n=k+1$. По лемме 2, дерево G имеет хотя бы одну висячую вершину. Удалим одну висячую вершину вместе с инцидентным ей ребром и получим граф G', который по лемме 3 является деревом. Поскольку G' имеет $n-1$ вершину, то к нему можно применить индукционное предположение, следовательно, $m-1=(n-1)-1$. Отсюда получим $m=n-1$.

Доказательство 2 => 1. Пусть G-связный граф, имеющий n вершин и m рёбер, тогда если выполняется условие $m=n-1$, то G является деревом.

Доказательство. Проведём индукцией по n количеству вершин. Если $n=1$, то $m=0$. Граф, состоящий из одной изолированной вершины, является деревом.

Пусть доказываемое утверждение справедливо для любого графа с менее чем n вершинами.

Докажем справедливость этого утверждения для графа G с n-вершинами.

Покажем, что в G имеется висячая вершина. Если её нет и граф связан, то степень любой вершины не меньше двух. Тогда сумма степеней всех вершин не меньше $2n$, с другой стороны для любого графа сумма степеней всех вершин равна $2m$. Следовательно, $2m \geq 2n$, т.е. $m \geq n$, что противоречит тому, что $m=n-1$, следовательно, в G есть висячая вершина v. Удалим её вместе с инцидентным ей ребром. В результате получим граф $G`$с $n-1$ вершиной и $m-1$ ребром. В силу леммы 3, граф $G`$-связный. Поскольку $m=n-1$ по условию теоремы, то количество рёбер в графе $G`$на единицу меньше чем вершин, т.е. для графа $G`$ можно воспользоваться индукционным предположением, т.е. граф $G`$-дерево. Но тогда в силу леммы 4, граф G-тоже дерево.

Лемма 5. Пусть G-дерево, тогда любая цепь в G будет простой.

Доказательство. Предполагаем противное. Пусть $v_1,v_2,\dots ,v_k$- цепь в дереве G и она не является простой, тогда для некоторых $i_1 <i_2$ $v_{i1}=v_{i2}$, т.е. цепь
$v_{i1},\dots ,v_{i2}$-цикл, что противоречит тому, что G-дерево.

Доказательство 1⇒3. Пусть G-дерево, тогда две любые вершины соединяются единственной и притом простой цепью.

Доказательство. Пусть G-дерево и v,w некоторые вершины G, $v\neq w$.Тогда в силу связности G их можно соединить цепью μ_1.Предположим, найдётся вторая цепь μ_2, которая тоже соединяет вершины.

Пусть $\mu_1=v_1,\dots ,v_k$, $\mu_2=w_1,\dots ,w_n$, $v_1=v=w_n$, $v_k=w=w_n$

Поскольку $\mu_1 \neq \mu_2$,то найдётся такое i, что $v_1=w_1,\dots,$ $v_i=w_i$, $v_{i+1}\neq w_{i+1}$. Пусть $j>i$ такой номер, что вершина v_j встретится среди вершин $w_{i+1}\dots w_n$,такое j найдется, поскольку $v_k=w=w_n$. Пусть е такое, что $v_j=w_e$, тогда

v_i, $v_{i+1},\dots ,v_j ,w_{e-1},\dots ,w_i= v_i$ есть цикл, а это противоречит тому, что G дерево.

Простота цепи сразу следует из того, что если в цепи есть повторяющиеся вершины, то из нее можно выделить цикл, а циклов в дереве быть не должно.

Доказательство 3=>1. Пусть G такой граф, что две любые вершины соединяются единственной цепь, тогда G - дерево.

Очевидно, что G - связный граф. Покажем, что в G нет циклов. Предположим противное. Пусть μ - цикл в графе G $\mu=v_1,v_2,\ldots,v_k$ и $v_1=v_k$, очевидно $k\geq 3$.

Тогда вершины v_1 и v_2 можно соединить цепями v_1,v_2 и $v_2,v_3,\ldots,v_k$.

Доказательство 3⇒4. Пусть G такой граф, что две любые вершины соединяются единственной цепь, тогда любое ребро графа является мостом.

Доказательство. Рассмотрит ребро (v,w). Если удаление этого ребра не приводит к нарушению связности графа, то значит существует некоторая цепь, которая соединяет вершины v, w, и не содержит ребра (v,w). Но в графе G вершины соединяются цепью, содержащей единственное ребро (v,w), т.е. мы получим, что вершины v,w соединяются в графе G двумя различными цепями, что противоречит условию на граф G. Следовательно, удаление любого ребра из графа G приводит к нарушению связности, т.е. любое ребро графа G является мостом.

Доказательство 4⇒1. Пусть граф G является связным, и любое ребро этого графа является мостом, тогда G – дерево.

Предполагаем противное, пусть граф G имеет цикл. Легко проверить, что любое ребро, входящее в цикл, не является мостом, что противоречит условию на граф G.

Доказательство 1⇒5. Пусть G - дерево. Тогда в G нет циклов. Пусть v и w - две любые вершины в G, не соединённые ребром, добавляя к G ребро (v,w) получим граф G\`. Поскольку вершины $v$ и $w$ соединяются цепью $\mu$, то цепь $\eta = \mu+(w,v)$ будет циклом. Этот цикл будет проходить через ребро $(v,w)$, а из единственности цепи $\mu$ следует единственность цикла $\eta$, т.е. стоит предположить существование другого цикла в графе $G$\`, проходящего через это ребро, так сразу же мы получаем вторую цепь, соединяющую вершины v и w , что невозможно для дерева.

Доказательство 5⇒1. Пусть для графа G выполняется утверждение 4. Предположим, что G не является деревом, а так как он не содержит циклов, то для того, чтобы граф G не был деревом, он должен быть не связный графом, т.е. должны существовать вершины v и w, которые нельзя соединить цепью. Добавим к G ребро (v,w) и получим граф G\`, уже имеющий цикл μ, который проходит через ребро (v,w). А следовательно, этот цикл имеет вид $\mu=v,w,w_1,\ldots,w_k$, где $w_k=w$, т.е. $w,w_1,\ldots,w_k$-цепь, соединяющая вершины v и w. Эта цепь не содержит ребра (v,w), следовательно, она принадлежит графу G, что противоречит не связности графа G. Следовательно, G связный граф, а поскольку он не имеет циклов, то он является деревом.

Остовное дерево

Остовным деревом (остовом) связного графа G называется его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Построение остовного дерева связного графа.

Пусть дан связный граф G. Остовное дерево D будем строить по шагам, точнее, будем строить некоторый подграф D графа G, а затем покажем, что он является остовным деревом.

Шаг 1. Выбираем произвольную вершину и помещаем ее в подграф D.

Шаг 2. Если D содержит все вершины графа, то завершает работу, в противном случае, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Находим вершину v, которая еще не попала в подграф D и является смежной некоторой вершине w, находящейся в подграфе D. Поскольку граф G является связным, то такая вершина найдется. Помещаем вершину v и ребро (v,w) в подграф D. Переходим к шагу 2.

Поскольку алгоритм завершает работу только тогда, когда все вершины графа G окажутся в подграфе D, то D является остовом графа G. На первом шаге в подграф D помещена 1 вершина, на шаге 3 в подграф D помещаются 1 вершина и 1 ребро, причем вершина и ребро выбираются так, чтобы не нарушить связность подграфа D. Таким образом, мы построим связный граф, у которого ребер на единицу меньше, чем вершин, т.е. дерево. Значит, подграф D является остовным деревом графа G.

Лесом называется граф без циклов. Дерево – частный вид леса. Лес можно представить как совокупность деревьев.

Остовным лесом (остовом) не связного графа G называется его подграф, содержащий все вершины графа G, являющийся лесом и имеющим тоже число компонент связности, что и граф G.

Вопросы и задачи

1. В графах 47 на рисунке выделить остовные поддеревья.

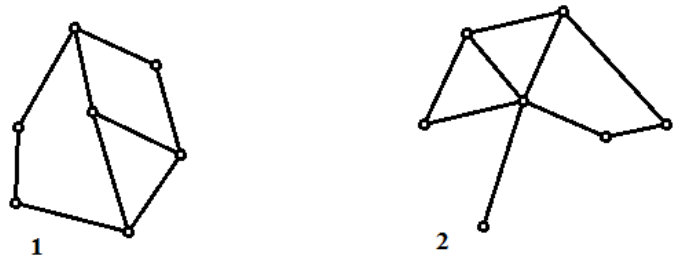


Рисунок 47 к задаче 1.

2. Какое наименьшее число ребер может быть в связном графе с n вершинами?
3. Перечислить все попарно неизоморфные деревья с числом вершин, не превышающим 6.
4. Найти два неизоморфных дерева с одинаковыми наборами степеней.
5. Сколько ребер в лесе с n вершинами и k компонентами связности?
6. Сколько ребер в связном графе с n вершинами, если в нем имеется единственный цикл?
7. В дереве с n вершинами степень каждой вершины равна 1 или k . Сколько висячих вершин (листьев) в таком дереве?

Планарный и плоский графы

Граф называется ***плоским***, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его ребра пересекались только в вершинах. Пример представлен на рисунке 48.

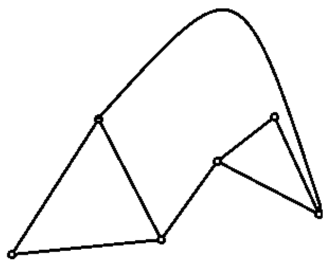


Рисунок 48. Плоский граф.

Граф, изоморфный плоскому графу, называется ***планарным***. Планарный граф можно определить еще так: граф планарен, если его можно уложить на плоскости так, чтобы ребра пересекались только в вершинах.

Примером неплоского графа может служить полный граф с пятью вершинами или полный двудольный граф, у которого доли состоят из трех вершин. Напомним, что первый обозначается, как K_5, а второй – $K_{3,3}$ (рисунок 49).

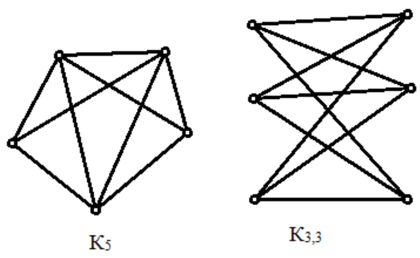


Рисунок 49. Графы K_5 и $K_{3,3}$

В качестве характеристики плоского представления графа вводится понятие грани. ***Гранью*** в плоском представлении графа называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов.

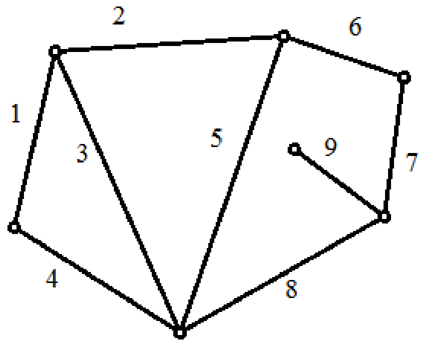


Рисунок 50. Граф, имеющий три грани.

На рисунке 50 показан плоский граф, имеющий три грани – {1,2,3}, {2,3,5}, {5,6,7,8}. Простой цикл {1,2,5.4} не является гранью, так как содержит внутри себя другой цикл {1,2,3}. Ребро 9 не входит ни в один цикл и не разбивает грань {5,6,7,8}.

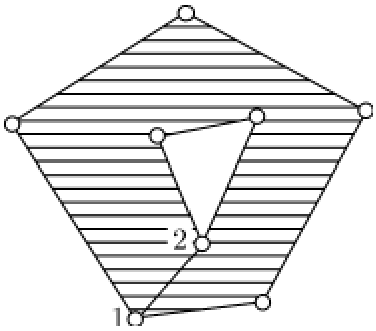


Рисунок 51. Граф, имеющий перегородку.

Заштрихованная часть графа на рисунке 51 не является гранью, поскольку ее граница не является циклом, да еще и содержит внутри себя цикл. Ребро (1,2) является мостом, соединяющим циклы. Такие мосты называются *перегородками*.

Простой цикл, ограничивающий грань, называется *границей грани*. Две грани будем называть *соседними*, если их границы имеют хотя бы одно общее ребро. В нашем примере грани {1,2,3}, {2,3,5} соседние, а {1,2,3}, {5,6,7,8} – нет.

В качестве грани рассматривают и часть плоскости, расположенную "вне" плоского представления графа. Она ограничена "изнутри" простым циклом и не содержит других циклов. Эту часть плоскости называют бесконечной гранью. На рисунке простой цикл {1,2,6,7,8,4} является границей бесконечной грани.

При изучении планарных графов рассматривается операция разбиение ребра. Из ребра (v,u) получают два ребра (v,w), (w,u), добавив вершину w, которой в графе не было.

Два графа называют гомеоморфными, если они получены разбиением ребер двух изоморфных графов. Если изоморфные графы не различать, то нередко говорят, что гомеоморфные графы получаются из одного графа при разном разбиении ребер. На рисунке представлены два гомеоморфных графа.

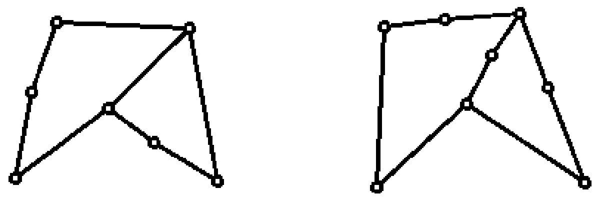


Рисунок 52. Гомеоморфные графы.

Введение понятия гомеоморфности графов позволяет установить важный результат, известный как теорема Понтрягина-Куратовского, которая дает необходимое и достаточное условие планарности графа.

Теорема 21. Граф планарен тогда и только тогда, когда не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Цикломатика

При изучении циклов мы не будем привязываться к некоторой фиксированной записи цикла, в которой есть начальная вершина и есть конечная, цикл можно задать, начиная запись с любой вершины. Можно сказать, что вершины и ребра цикла равноправны. Цикл может быть задан:

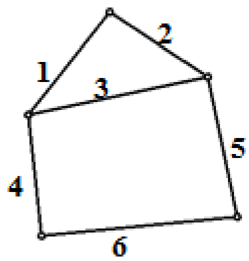
1. Перечислением вершин в порядке их прохождения, начиная с любой вершины цикла.
2. Перечислением ребер (в любом порядке), входящих в цикл;
3. С помощью цикломатических матриц.

Цикломатическая матрица

Количество столбцов в цикломатической матрице равно количеству ребер, количество строк – количеству циклов. Каждый элемент этой матрицы определяется так:

$$E_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{если j - е ребро входит в i - ый цикл} \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пример.



	1	2	3	4	5	6
Цикл 1	1	1	1	0	0	0
Цикл 2	0	0	1	1	1	1
Цикл 3	1	1	0	1	1	1

Рисунок 53. Граф и его цикломатическая матрица

Строки в цикломатической матрице можно рассматривать как вектора.

Итак, если порядок ребер в графе фиксирован, то все циклы задаются векторами, содержащими нули и единицы.

Мы будем обозначать одной и тоже буквой цикл, его запись в виде вектора и граф, который определяют ребра цикла. В последнем случае, мы рассматриваем подграф исходного графа, который включает весе ребра цикла и инцидентные этим ребрам вершины. Про этот подграф можно сказать, что его задает вектор (тот, который задает цикл) и рассматривать как отдельный граф.

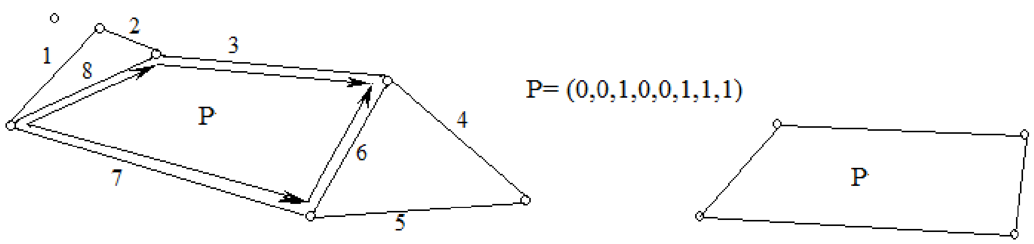


Рисунок 54. Буквой P обозначается цикл, вектор, задающий этот цикл, и граф, который определяется циклом.

На векторах, содержащих только нули и единицы, можно рассматривать побитовую операцию сложение по модулю 2 (симметрическую разность) $\oplus$.

Например. Если сложить Цикл 1 с Циклом 2, из рассмотренного выше примера, то получим Цикл 3:

$\oplus$	1	1	1	0	0	0
	0	0	1	1	1	1
	1	1	0	1	1	1

Теорема 22. Если вектора R и L задают циклы и не равны, то вектор $P = R \oplus L$ будет задавать один или несколько циклов.

Доказательство. Рассмотрим циклы R, L, как отдельные графы. Очевидно, что эти графы будут эйлеровыми, все вершины этих графов будут иметь четные степени. Будем считать, что эти графы имеют разные ребра, т.е. если ребро x было у них общим, то вместо него будем рассматривать два ребра x_1 и x_2, первое принадлежит графу R, второе графу L. Общие вершины оставим общими. Объединим полученные графы, как мультиграфы, т.е. оставляя ребра x_1 и x_2 разными. Получим мультиграф с вершинами, имеющими четные степени, обозначим этот мультиграф буквой M. Если рассматривать граф, который образуют ребра, определенные вектором $P = R \oplus L$, то он будет отличаться от мультиграфа M, тем, что в нем будут отсутствовать кратные ребра вида x_1 и x_2, и вершины, которые становятся изолированными, при удалении таких ребер. Каждая вершина мультиграфа M, при переходе к графу P, может потерять только четное число инцидентных ей ребер (ребра удаляются попарно), это значит все вершины графа P имеют четную степень. Граф P может быть не связным, но любая его компонента связности является эйлеровым графом, т.е. каждая компонента связности задает цикл.

Базисная система циклов

Вектор M называется *линейной комбинацией векторов* $R_1, R_2, \ldots R_n$, если

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$$

Если система векторов $R_1, R_2, \ldots R_n$. такая, ни один вектор R_i, $(1 \le i \le n)$ нельзя представить линейной комбинацией других, то она называется линейно независимой. Если система циклов такова, что вектора, определяющие эти циклы, линейно независимы, то такая система циклов также называется линейно независимой.

Система циклов называется *базисной*, если она состоит только из простых линейно независимых циклов и любой цикл графа можно представить в виде линейной комбинации циклов из этой системы. Вектор, задающий базисный цикл, будем так же называть базисным вектором.

Пример: В рассмотренном выше примере базисной является система {Цикл 1, Цикл 2}.

Пусть дан граф G и в нем выделено остовное дерево D.

Ребра, не входящие в остовное дерево называются ***хордами***. Пусть G-связный граф, содержащий n вершин и m рёбер. Поскольку остовное дерево содержит n-1 ребро, то граф содержит m-n+1 хорду.

Построим систему циклов связного графа G следующим образом:

Выделим остов в графе G, обозначим его буквой D. К остову D добавим некоторую хорду, получим граф D', который содержит единственный простой цикл. Этот цикл включаем в строящуюся систему векторов, затем к остову добавляем другую хорду, получаем граф D''и следующий простой цикл, и т.д. Каждая хорда определяет свой цикл, в который входит только она и ребра из остова. В построенную систему циклов войдут ровно m-n+1 цикл, ровно столько, сколько хорд в графе. Обозначим эту систему циклов $C(D)$.

Теорема 23. Каждый остов D задает систему базисных циклов $C(D)$.

Доказательство. Из построения $C(D)$ ясно, что циклы, входящие в эту систему простые. Поскольку любой набор ребер, определенный линейной комбинацией $R_1,R_2,\dots R_n$ - различных циклов из $C(D)$ содержит все хорды, определяющие эти циклы, т.е. n хорд, а цикл, входящий в $C(D)$ содержит ровно одну хорду, то система циклов $C(D)$ линейно независима.

Пусть M произвольный цикл графа G, покажем, что верна формула (***):

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i ,$$

где $R_1,R_2,\dots R_n$ различные циклы из $C(D)$.

Пусть $r_1,r_2,\dots,r_n$ хорды, которые входят в M, а $R_1,R_2,\dots R_n$ - циклы, которые определяются, соответственно, хордами $r_1,r_2,\dots,r_n$ докажем, что верна формула (***). Предположим, что это не так, т.е.

$$M \neq T = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$$

Рассмотрим $K=M\oplus T$, множество ребер не пусто, поскольку M не равно T, оно не содержит хорд, поскольку M и T содержат одинаковые хорды, значит все ребра из K принадлежат дереву D. Но по теореме следует, что множество ребер K содержит, хотя бы один цикл. Но цикл не может принадлежать дереву. Получили противоречие.

Построение цикломатической матрицы графа G.

1. Строим некоторое остовное дерево D графа G.

2. По каждой хорде построенного остовного дерева строим цикл, тот цикл, который содержит одну хорду и ребра остовного дерева. Таким образом мы построим базисную систему циклов.

3. Вектора всех базисных циклов заносим в цикломатическую матрицу.

4. Выполняем операцию ⊕ - побитового сложения по модулю два, над различными наборами векторов базисных циклов. После выполнения очередной операции ⊕, проводим исследование графа, задаваемого полученным вектором, на связность, если граф связный, то вектор задает цикл, и его помещаем в матрицу.

Поскольку R⊕R=0 и 0⊕R=R, то в наборы векторов бессмысленно вводить два одинаковых базисных вектора. Поэтому нам нужно будет рассмотреть не более 2^i наборов, где i – число базисных векторов.

Пусть граф G имеет n – вершин, m –ребер, k – компонент связности, тогда число m-n+k называется *цикломатическим*.

Если для каждой компоненты связности построить остовное дерево, то общее количество хорд будет равно m-n+k, и, значит, столько будет базисных циклов, т.е. цикломатическое число определяет количество базисных циклов.

Вопросы и задачи

1. Для каждого графа на рисунке 55.
   a. Построить остовное дерево.
   b. Найти базисную систему циклов, определенную, построенным остовным деревом.
   c. Используя операцию найти три цикла, не входящих в построенную базисную систему циклов.

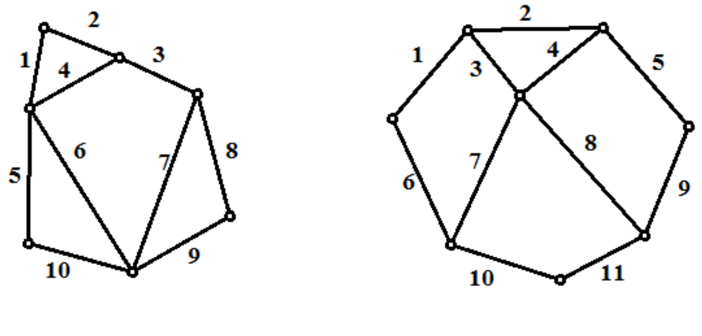


Рисунок 55 для задачи 1.

2. Сколько базисных циклов содержат графы на рисунке 56?.
3. Построить цикломатическую матрицу графов на рисунке 56.

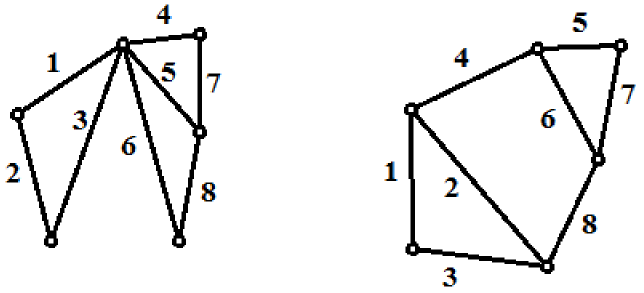


Рисунок 56 для задач 2,3.

Взвешенные графы

Граф называется взвешенным, если его ребрам или вершинам приписаны некоторые значения, называемые весом или длиной, или стоимостью, или ценой. В каждом конкретном случае выбирается то слово, которое ближе подходит по смыслу задачи.

Мы будем рассматривать случай, когда значения приписываются ребрам. Называть эти значения будем длинами ребер, хотя в реальности, эти значения могут быть и временем прохождения и ценой и чем-то другим, например, субъективной оценкой комфортности. Будем считать, что длины всех ребер являются числами неотрицательными.

Алгоритм поиска кратчайшего

Длинна цепи во взвешенном графе это сумма длин ребер, входящих в эту цепь. Наша задача найти цепь минимальной длины (кратчайший путь) соединяющей две выбранные вершины связного графа.

Пусть дан взвешенный связный граф G=(V,X). Если (x,y) ϵ X ребро, то через $L(x,y)$,будем обозначать его длину. По условию, $L(x,y)\geq 0$, для всех ребер графа G.

Алгоритмов поиска кратчайшего пути довольно много, есть алгоритмы, в которых веса ребер могут быть отрицательными числами, но на сами графы накладываются некоторые условия. Мы рассмотрим *алгоритм Де́йкстры*, для взвешенных графов без отрицательных весов. Пусть дан взвешенный связный граф G=(V,X) и выбраны две вершины *a* и *b*.

Алгоритм Де́йкстры

Каждой вершине приписывается индекс – это длина пути от начальной вершины *a* до данной. Индекс вершины *v* будем обозначать *I(v)*. Вершины на определенном шаге, мы будем проходить. Если вершина пройдена, то ее индекс совпадает с длиной кратчайшего пути от нее до начальной вершины, если нет – то совпадение не обязательно. Одну из пройденных вершин мы выделим как текущую и обозначим буквой c.

Шаг 1. Всем вершинам, за исключением первой, присваивается индекс равный бесконечности, а первой вершине – 0.

Шаг 2. Первая вершина объявляется пройденной и текущей.

Шаг 4. Рассматриваем все вершины, смежные текущей и не пройденные. Для этих вершин проверяем неравенство $L(c,y) < I(y) - I(c)$ (c- текущая вершина, y- рассматриваемая). Если это неравенство выполнено, то заменяем индекс вершины y на $I(y) = L(c,y) + I(c)$.

Шаг 5. Среди не пройденных вершин ищется вершина с минимальным индексом. Ее мы проходим и объявляем текущей (предыдущая текущая вершина теряет свой статус «текущей вершины»).

Шаг 6. Если текущая вершина совпадает с конечной, то завершаем работу.

Шаг 7. Переходим к шагу 4.

Обоснование алгоритма. В силу связности графа наступит момент, когда мы дойдем до конечной вершины b. Вершины посещаются в некотором порядке. $v_1,\ldots, v_k$, где $v_1 = a$, $v_k = b$ Докажем, что в момент посещения вершины, ее индекс равен длине кратчайшего пути этой вершины до вершины a. Пусть $D(w)$ длина кратчайшего пути от вершины a до вершины w.

Доказательство проведем индукцией по номеру n, в последовательности $v_1,\ldots, v_k$.

Базис индукции. Первой посещается вершина a. В этот момент $I(a)= D(a)=0$.

Индукционное утверждение. Пусть для всех вершин, посещенных ранее n, утверждение справедливо. Рассмотрим вершину v_n . Предположим противное, т.е., что $I(v_n)\neq D(v_n)$,т.е. $I(v_n)>D(v_n)$, поскольку индекс не может быть меньше длины кратчайшего пути. Пусть цепь $u_1,\ldots,u_m$, - кратчайшая цепь, соединяющая вершины a и v_n , т.е. $a= u_1$, $u_m = v_n$. Начальная часть этой кратчайшей цепи будет пройдена ранее вершины v_n, (хотя бы потому, что $a= u_1$). Если вершина u_{m-1} пройдена ранее вершины v_n, то индекс вершины u_{m-1} равен кратчайшему пути до нее, т.е. $I(u_{m-1})=D(u_{m-1})$. Но $D(v_n)= D(u_{m-1})+ L(u_{m-1}, v_n)$, отсюда получим, что на шаге 4, в тот момент, когда вершина u_{m-1} была текущей при проверке неравенства мы получим, что $I(u_{m-1})+ L(u_{m-1}, v_n)< I(v_n)$, и заменим индекс $I(v_n)$ вершины v_n на $I(u_{m-1})+ L(u_{m-1}, v_n)= D(u_{m-1})+ L(u_{m-1}, v_n) = D(v_n)$. Получили противоречие.

Если вершина u_{m-1} не была пройдена ранее вершины v_n, то рассмотрим вершину u_i такую, что вершина u_{i-1} пройдена ранее вершины v_n, а вершина u_i - нет. Тогда определенный на шаге 4 индекс вершины u_i , будет равен $I(u_i)=I(u_{i-1})+ L(u_{i-1}, u_i)= D(u_{i-1})+ L(u_{i-1}, u_i)$. В этом случае, индекс $I(u_i)$ будет меньше $D(v_n)$, поскольку равен длине части кратчайшей цепи, соединяющей вершины a,v_n. Значит $I(u_i)< I(v_n)$. Поскольку на шаге 5, мы выбираем для прохождения вершину с наименьшим индексом, то вершина v_n не может быть пройдена ранее вершины u_i. Опять получили противоречие.

Таким образом, мы показали, что индексы вершин, в момент их прохождения, - это длины кратчайших цепей соединяющих эти вершины с начальной вершиной a.

Для построения самого кратчайшего пути мы начинаем двигаться от вершины b, и будем выбирать ребра, длины которых участвовали в построении индекса вершины b. Сначала выбираем ребро (b,x_1), для которого выполняется равенство $I(b)=L(b,x_1)+I(x_1)$ и переходим к вершине x_1. Затем находим ребро (x_1,x_2), такое, что $I(x_1)=L(x_1,x_2)+I(x_2)$, и переходим к вершине x_2, и снова ищем ребро и т.д. до тех пор, пока не дойдем до вершины a. Отметим, что кратчайший путь может быть не единственным. На каком-то шаге равенство $I(x_i)=L(x_i,x_{i+1})+I(x_{i+1})$ (*) может выполниться не только для вершины x_{i+1}, но и для вершины x'_{i+1} , или даже для большего числа вершин, смежных вершине x_i. В этом случае, мы учитываем все вершины, для которых выполняется равенство (*) и строим несколько кратчайших путей.

Минимальное остовное дерево

Если ребра графа взвешены, то возникает задача выделения остова с минимальной оценкой. Будем рассматривать связный граф.

Рассмотрим первое решение задачи: жадный алгоритм.

Жадный алгоритм

Выбирается ребро, имеющее минимальный вес среди всех рёбер, и включается в остов. Из оставшихся ребер выбирается снова то, которое имеет минимальный вес, и включается в остов, если при этом не образуются циклы. Процесс продолжается до тех пор, пока все вершины не будут включены в остов.

Можно показать, что в результате мы получим остовное дерево с минимальным весом. Но в этом алгоритме неявно присутствует процедура проверки на появления циклов, которая связана с перебором по всему графу, поэтому чаще используется алгоритм Прима.

Алгоритм Прима

1. Включим любую вершину в остов.

2. Рассмотрим все ребра, исходящие из вершин, включенных в остов, к оставшимся вершинам, и из них выберем ребро с минимальным весом и включим в остов. Инцидентную ему вершину, ту, которая еще не была включена в остов, также включим в остов. Повторяем этот пункт, пока все вершины не окажутся в остове.

Обоснование алгоритма.

Обозначим через D остов, найденный алгоритмом Прима, он связный и вершин в нем на единицу меньше, чем ребер, значит он является деревом. Через C — минимальное остовное дерево. Покажем, что веса C и D совпадают.

Рассмотрим первый момент времени, когда в D происходило добавление ребра, не входящего в оптимальное остовное дерево C. Обозначим это ребро через e, концы его — через v и w, а множество входящих на тот момент в остовное дерево вершин — через V (пусть $v \in V$, $w \notin V$). В оптимальном остове C вершины v и w соединяются какой-то цепью μ; найдём в этой цепи любое ребро x, один конец которого лежит в V, а другой — нет. Поскольку алгоритм Прима выбрал ребро e вместо ребра x, то это значит, что вес ребра x больше либо равен весу ребра e.

Удалим теперь из C ребро x, и добавим ребро e. По только что сказанному, вес остова в результате не мог увеличиться (уменьшиться он тоже не мог, поскольку вес C был минимальным). Кроме того, C не перестало быть остовным деревом, поскольку связность не нарушилась, мы замкнули цепь μ в цикл, и потом удалили из этого цикла одно ребро.

Итак, мы показали, что можно выбрать оптимальное остовное дерево C таким образом, что оно будет включать ребро e. Повторяя эту процедуру необходимое число раз, мы получаем, что можно выбрать оптимальный остов C так, чтобы он совпадал с D. Следовательно, вес построенного алгоритмом Прима остовного дерева D минимален.

Вопросы и задачи

1. Для графа на рисунке 57 построить кратчайший путь, соединяющий вершина a и b.

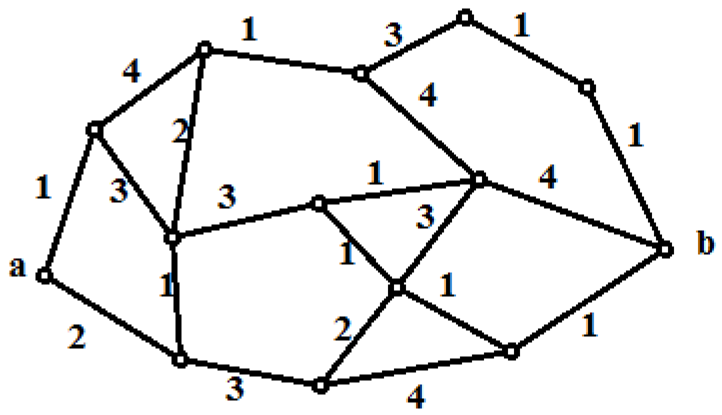


Рисунок 57 для задач 1,2.

2. Для графа на рисунке 33 построить остовное дерево минимального веса.

Оглавления

Оглавление

Список литературы

1. Алексеев В.Е., Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. Сборник задач по дискретной математике., Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012, 80 с.
2. Горбатов В.А., Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика., М: Наука. Физматлит., 2000, 544 с.
3. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера, СПб.: Лань, 2009., 400с.
4. Кузьмина Т.М. Конспект лекций по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов»., М.: МГТУ им. А.Н.Косыгина., 2012, 80с.
5. Нефедов В. Н., Осипова. В. А. Курс дискретной математики: учеб. Пособие, М.: Изд-во МАИ, 1992.
6. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. — СПб.: Питер, 2009, 384 с.
7. Хаггарти Р., Дискретная математика для программистов., Москва: «Техносфера», 2003, 320с
8. Чередникова А.В., Садовская О.Б., Каминская Л.А. ,Дискретная математика. Теория и практика, Кострома: Изд-во Костром. гос. технол. ун-та, 2011, 74 с.
9. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, 4-е изд., М: «Высшая школа», 2003, 384 с.

Учебная литература

Тамара Михайловна Кузьмина

Ольга Авенировна Ветрова

Конспект лекций по курсу «Дискретная математика»

Конспект лекций

Усл.печ.л.____Тираж 30 экз. Заказ №____

Редакционно- издательский отдел МГУДТ

117997, Москва, ул. Садовническая, 33, стр.1

тел./ факс: (495) 955-35-88

e-mail: riomgudt@mail.ru

Отпечатано в РИО МГУДТ