изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

22. В «секретном» замке на общей оси четыре диска, каждый из которых разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

23. Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

Решение. Относительная частота события A (появление бракованных книг) равна отношению числа испытаний, в которых появилось событие A, к общему числу произведенных испытаний: $W(A)=5/100=0{,}05$.

24. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

25. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

§ 2. Геометрические вероятности

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L, то вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством

$$P=\text{Длина } l/\text{Длина } L.$$

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Если предположить, что вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g, то вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством

$$P=\text{Площадь } g/\text{Площадь } G.$$

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру v, которая составляет часть фигуры V:

$$P=\text{Объем } v/\text{Объем } V.$$

26. На отрезке L длины 20 см помещен меньший отрезок l длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

27. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую, чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

28. В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

29. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

30. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

31. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 6 см, наудачу брошен круг радиуса 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечет ни одной из прямых. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

32. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

33. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

34. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.

35. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$, причем $y \geqslant x$. (Координата точки C для удобства дальнейшего изложения обозначена через y). Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше длины отрезка OB (рис. 1, *а*). Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

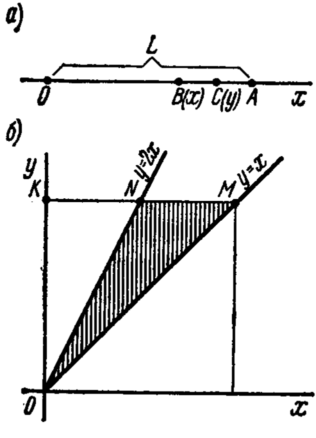

Рис. 1

Решение. Координаты точек B и C должны удовлетворять неравенствам $0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant y \leqslant L$, $y \geqslant x$. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy. В этой системе указанным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей прямоугольному треугольнику OKM (рис. 1, *б*). Таким образом, этот треугольник можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой представляют соответственно все возможные значения координат точек B и C.

Длина отрезка BC должна быть меньше длины отрезка OB, т. е. должно иметь место неравенство $y-x < x$, или $y < 2x$. Последнее неравенство выполняется для координат тех точек фигуры G (прямоугольного треугольника OKM), которые лежат ниже прямой $y=2x$ (прямая ON). Как видно из рис. 1, *б*, все эти точки принадлежат заштрихованному треугольнику ONM. Таким образом, этот треугольник можно рассматривать как фигуру g, координаты точек которой являются благоприятствующими интересующему нас событию (длина отрезка BC меньше длины отрезка OB).

Искомая вероятность

$$P = \text{Пл. } g/\text{Пл. } G = \text{Пл. } ONM/\text{Пл. } OKM = 1/2.$$

36. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше расстояния от точки O до ближайшей к ней точке. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

37. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$, причем $y \geqslant x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше, чем $L/2$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

38. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше, чем $L/2$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

39. Задача Бюффона (французский естествоиспытатель XVIII в.). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2l$ $(l < a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

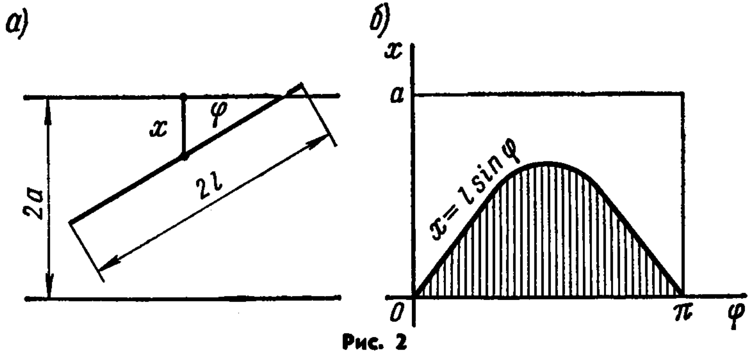

Рис. 2

Решение. Введем следующие обозначения: x — расстояние от середины иглы до ближайшей параллели; φ — угол, составленный иглой с этой параллелью (рис. 2, *а*).

Положение иглы полностью определяется заданием определенных значений x и φ, причем x принимает значения от 0 до a; возможные значения φ изменяются от 0 до π. Другими словами, середина иглы может попасть в любую из точек прямоугольника со сторонами a и π (рис. 2, *б*). Таким образом, этот прямоугольник можно рассматривать как фигуру G, точки которой представляют собой все возможные положения середины иглы. Очевидно, площадь фигуры G равна πa.

Найдем теперь фигуру g, каждая точка которой благоприятствует интересующему нас событию, т. е. каждая точка этой фигуры может служить серединой иглы, которая пересекает ближайшую к ней параллель. Как видно из рис. 2, *а*, игла пересечет ближайшую к ней параллель при условии $x \leqslant l \sin\varphi$, т. е. если середина иглы попадет в любую из точек фигуры, заштрихованной на рис. 2, *б*.

Таким образом, заштрихованную фигуру можно рассматривать как фигуру g. Найдем площадь этой фигуры:

$$\text{Пл. } g = \int_0^\pi l \sin\varphi \, d\varphi = -\, l \cos\varphi \Big|_0^\pi = 2l.$$

Искомая вероятность того, что игла пересечет прямую

$$P = \text{Пл. } g / \text{Пл. } G = 2l/(\pi a).$$

40. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

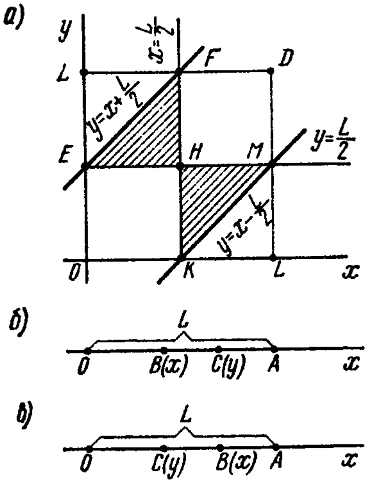

Рис. 3

Решение. Для того чтобы из трех отрезков можно было построить треугольник, каждый из отрезков должен быть меньше суммы двух других. Сумма всех трех отрезков равна L, поэтому каждый из отрезков должен быть меньше $L/2$.

Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy. Координаты любых двух точек B и C должны удовлетворять двойным неравенствам: $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$. Этим неравенствам удовлетворяют координаты любой точки $M(x, y)$, принадлежащей квадрату $OLDL$ (рис. 3, *а*). Таким образом, этот квадрат можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой представляют все возможные значения координат точек B и C.

1. Пусть точка C расположена правее точки B (рис. 3, *б*). Как указано выше, длины отрезков OB, BC, CA должны быть меньше $L/2$, т. е. должны иметь место неравенства $x < L/2$, $y - x < L/2$, $L - y < L/2$, или, что то же,

$$x < L/2, \; y < x + L/2, \; y > L/2. \qquad (*)$$

2. Пусть точка C расположена левее точки B (рис. 3, *в*). В этом случае должны иметь место неравенства $y < L/2$, $x-y < L/2$, $L-x < L/2$, или, что то же,

$$y < L/2,\ y > x-L/2,\ x > L/2. \qquad (**)$$

Как видно из рис. 3, *а*, неравенства (*) выполняются для координат точек треугольника EFH, а неравенства (**) — для точек треугольника KHM. Таким образом, заштрихованные треугольники можно рассматривать как фигуру g, координаты точек которой благоприятствуют интересующему нас событию (из трех отрезков можно построить треугольник).

Искомая вероятность

$$P = \text{Пл.}\, g/\text{Пл.}\, G = (\text{Пл.} \triangle EFH + \text{Пл.} \triangle KHM)/\text{Пл.} \square OLDL = 1/4.$$

41. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t ($t < T$). Найти вероятность того, что сигнализатор срабатывает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

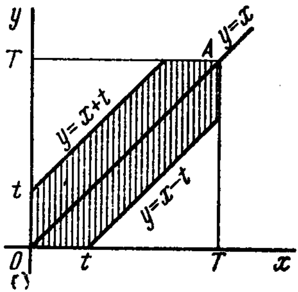

Рис. 4

Решение. Обозначим моменты поступления сигналов первого и второго устройств соответственно через x и y. В силу условия задачи должны выполняться двойные неравенства: $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$.

Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy. В этой системе двойным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату $OTAT$ (рис. 4). Таким образом, этот квадрат можно рассматривать как фигуру G, координаты точек которой представляют все возможные значения моментов поступления сигналов.

Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t, т. е. если $y-x < t$ при $y > x$ и $x-y < t$ при $x > y$, или, что то же,

$$y < x+t \quad \text{при} \quad y > x, \qquad (*)$$

$$y > x-t \quad \text{при} \quad y < x. \qquad (**)$$

Неравенство (*) выполняется для координат тех точек фигуры G, которые лежат выше прямой $y=x$ и ниже прямой $y=x+t$; неравенство (**) имеет место для точек, расположенных ниже прямой $y=x$ и выше прямой $y=x-t$.

Как видно из рис. 4, все точки, координаты которых удовлетворяют неравенствам (*) и (**) принадлежат заштрихованному шестиугольнику. Таким образом, этот шестиугольник можно рассматривать как фигуру g, координаты точек которой являются благоприятствующими срабатыванию сигнализатора моментами времени x и y.

Искомая вероятность

$$P=\frac{\text{Пл. } g}{\text{Пл. } G}=\frac{T^2-2(T-t)^2/2}{T^2}=\frac{t(2T-t)}{T^2}.$$

42. Задача о встрече. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

43*. Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков длиной не более L можно построить треугольник. Предполагается, что вероятность попадания точки в пространственную фигуру пропорциональна объему фигуры и не зависит от ее расположения.

Указание. Ввести в рассмотрение пространственную систему координат.

44. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное y/x не больше двух.

45. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.

Глава вторая

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 1. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие. *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$