Множества

Об определении множества

- ***Понятие множества относится к фундаментальным неопределяемым понятиям.***
- Оно было введено в математику создателем теории множеств немецким ученым Георгом Кантором (1845 – 1918). Следуя ему, под *множеством понимается совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.* Это описание понятия множества нельзя считать строгим определением, поскольку встает вопрос, «Что такое совокупность?». Можно определить, понятие «совокупность», но опять появится слово, которое потребует точного определения.

Элементы множества

- Объекты, из которых состоит множество, называют элементами множества. *Нам не важна природа этих элементов, но важно, что они четко различимы один от другого.*

- Обозначать множества мы будем большими латинскими буквами, а их элементы малыми латинскими буквами. Если некоторый объект x является элементом множества M, то говорят, что x принадлежит M и записывают $x \in M$. В противном случае, говорят, что x не принадлежит M и записывают $x \notin M$.

- Символ $\in$ называется знаком принадлежности.

- *Отметим, что для любого объекта x и для любого множества M, мы, в рассматриваемой теории множеств, можем ответить на вопрос: «Принадлежит объект x множеству M?».*

Конечные и бесконечные множества

- Множества, как объекты могут быть элементами других множеств.
- Например, группу студентов, можно рассматривать как множество студентов, и как элемент множества групп студентов конкретного университета. Университет можно рассматривать, как элемент множества университетов России.
- *Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным*. Но *множество может содержать бесконечное число элементов,* как, например множество четных чисел, *в этом случае оно называется бесконечным*.
- Множество может не содержать ни одного элемента, такое множество называется пустым, оно обозначается $\varnothing$.
- Отметим, множество $\{\varnothing\}$ уже не будет пустым, оно будет содержать один элемент – пустое множество.

Способы задания множеств

- Чтобы задать множество, нужно указать какие элементы ему принадлежат. Это можно сделать следующими способами:

1. Перечислением элементов. Например, *M={Ваня, Маня, Петя}* или *B={2,4,9,80}*. Данный способ приемлем только для конечных множеств. Причем, если один и тот же элемент перечислен несколько раз, он все равно считается одним элементом.
2. Заданием порождающей процедуры, например $A=\{2,4,8,\ldots,2x,\ldots\}$ или $A=\{2,4,8,\ldots\}$, закон порождения можно не указывать, если он очевиден.
3. Указанием свойств элементов множества. Например, множество четных чисел. В этом случае, записывают так: $M=\{x|x$ *– четное число*$\}$

- Отметим, что одно и тоже множество может быть задано разными способами. Так мы задали множество четных чисел и указанием свойства элементов и порождающей процедурой.

Равенство множеств

- Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.
- Например, $M=\{2,7\}$, $A=\{2,7,2\}$. Поскольку каждый элемент в множество может входить только один раз, то множества M и A состоят из одних и тех же элементов, значит $M=A$.

Отношение включения

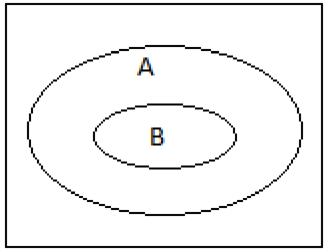
- *Множество B называется подмножеством A (или множество A включает множество B), если любой элемент из B принадлежит множеству A .* Обозначается включение так: $B \subseteq A$.

- Очевидно, что множество A является подмножеством самого себя. Поскольку любой элемент из A является элементом A. Также очевидно, что пустое множество является подмножеством любого множества, поскольку оно не содержит элементов и значит все его элементы являются элементами любого другого множества.

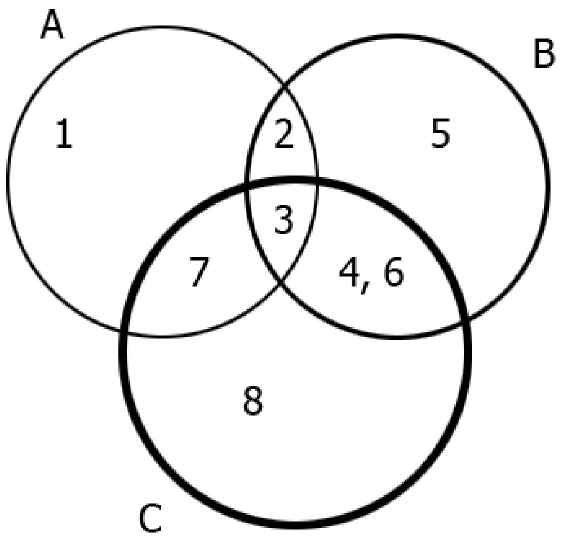
- Множество B называется *собственным подмножеством* множества A, если $B \subseteq A$ и $B \neq A$. В этом случае, говорят, что B строго включено в A и обозначают так $B \subsetneq A$.

Диаграммы Эйлера -Венна.

- Диаграммы Эйлера – это замкнутые фигуры, с помощью которых можно изображать множества. Венн показал, что эти фигуры можно использовать при доказательстве теорем.
  - Если $B \subseteq A$, но на диаграмме множества A и B можно изобразить следующим образом:



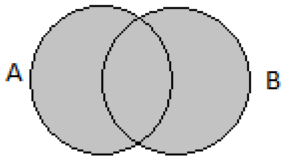
Пример



A = { 1, 2, 3, 7 };
B = { 2, 3, 4, 5, 6 };
C = { 3, 4, 6, 7, 8 };

Операция объединения

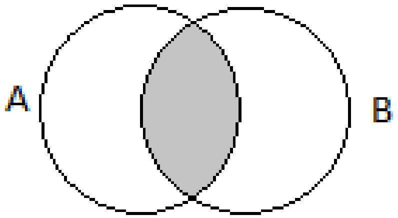
- Объединением двух множеств A, B называют третье множество $A \cup B$, которое состоит из элементов входящих любо в множество A, либо в множество B.



- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Операция пересечения

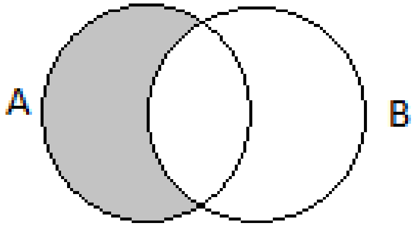
Операция пересечения.



Пересечением двух множеств A,B называют третье множество $A \cap B$, которое состоит из элементов, входящих в множества A,B одновременно.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$

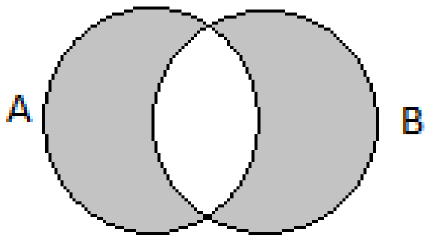
Операция разности



Разностью двух множеств *A, B* называют третье множество $A \backslash B$, которое состоит из элементов, входящих в множество *A*, но не входящих в множество *B*.

$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Операция симметрической разности

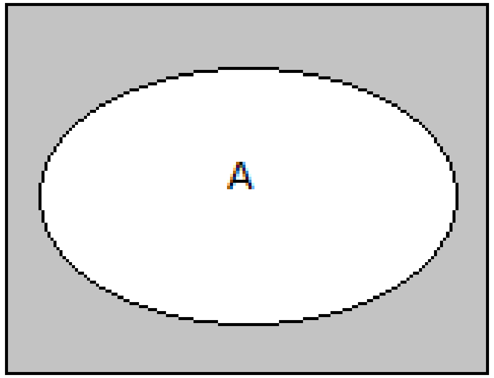


Симметрической разностью множеств A,B называют множество $A \oplus B$, которое состоит из элементов входящее в одно из этих множеств и не входящих в другое.

$A \oplus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B \text{ или } x \in B \text{ и } x \notin A\}$

Операция дополнения

- *Эта операция определяется только при допущении, что существует универсальное множество. Универсальное множество, как правило, ограничивает некоторую область выбора объектов.*
- В определении не упоминается универсальное множество, но его существование заранее его оговаривается. Если не рассматривать универсального множества, то мы можем получить парадоксальные (противоречивые) утверждения.



Дополнением множества A называется множество $\bar{A}$, которое состоит из элементов, которые не входят в множество A.
$\bar{A} = \{x |\ x \notin A\}$
Дополнение можно определить и так $\bar{A} = У \backslash A$, где У – универсальное множество.

Законы алгебра множеств

Название закона	Формулировка закона
Коммутативности	$A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$;
Ассоциативности	$(A\cup B)\cup C= A\cup(B\cup C)= A\cup B\cup C$; $(A\cap B)\cap C= A\cap(B\cap C)= A\cap B\cap C$
Дистрибутивности	$A\cup(B\cap C)= (A\cup B) \cap (A\cup C)$; $A\cap(B\cap C)= (A\cap B) \cup (A\cap B)$;
Идемпотентности	$A\cup A=A$; $A\cap A=A$;
Свойства дополнения	$A\cup\bar{A}=У$; $A\cap\bar{A}=\varnothing$;
Де Моргана	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;
Поглощения	$A\cup(B\cap A)=A$; $A\cap(B\cup A)=A$;
Двойного дополнения	$\overline{\overline{A}}=A$;
Свойства констант	$A\cup У=У$; $A\cup\varnothing=A$; $A\cap У=A$; $A\cap\varnothing=\varnothing$;
Выражение для разности	$B\setminus A=B\cap\bar{A}$.
Выражение для симметрической разности	$A\oplus B = A\setminus B\cup B\setminus A$

Пример аналитического доказательства одного из законов

- Рассмотрим доказательство одного из законов дистрибутивности :

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

- Надо доказать два утверждения.
    1. $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$
    2. $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

Доказательство утверждения $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Пусть a - произвольный элемент из $A \cup (B \cap C)$. Тогда по определению операции $\cup$ имеем $a \in A$ или $a \in B \cap C$.

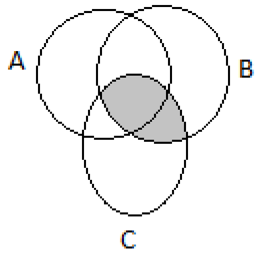
- В первом случае из того же определения выводим, что $a \in A \cup B$ и $a \in A \cup C$. Но тогда по определению операции $\cap$ получаем, что $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Во втором случае из определения $\cap$ следует, что $a \in B$ и $a \in C$. Из этого и из определения $\cup$ снова следует, что $a \in A \cup B$ и $a \in A \cup C$, и $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Таким образом, мы установили, что $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

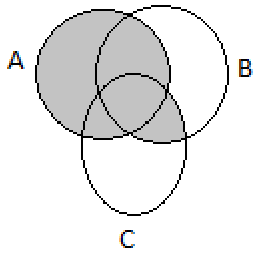
Доказательство утверждения $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

- Пусть теперь $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда по определению операции $\cap$ имеем $a \in A \cup B$ и $a \in A \cup C$.
- Если $a \in A$, то оба эти включения выполнены. Но тогда $a \in A \cup (B \cap C)$. Если же $a \notin A$ то из первого включения следует, что $a \in B$, а из второго - $a \in C$. Следовательно, $a \in B \cap C$ и $a \in A \cup (B \cap C)$.
- Таким образом, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$, и наше утверждение доказано.

Геометрическое доказательство закона $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- Сначала построим рисунок множества, задаваемое формулой $A \cup (B \cap C)$. Строить его будет поэтапно. Сначала выполним операцию $B \cap C$, затем объединим результат с множеством A.

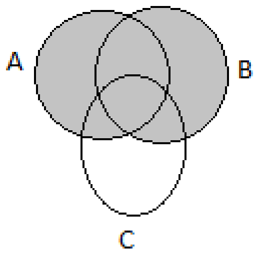




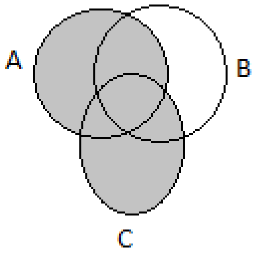
- $B \cap C$ $\quad$ $A \cup (B \cap C)$

Геометрическое доказательство закона $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

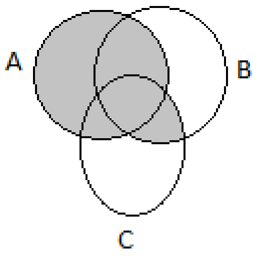
- Потом построим рисунок множества $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Его также будем строить по действиям.



$A \cup B$



$A \cup C$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

- Как видно из результирующих диаграмм, обе формулы определяют одно и то же множество.

Замечания

- На практике, часто все действия выполняют на одном рисунке, при этом используют разные способы закраски результатов действий. В таком случае *обязательно говорят, как закрашено итоговое множество*.
- Операции над множествами упорядочиваются по приоритету. Самый высокий приоритет имеет операция дополнения, затем идет операция пересечения и потом операция объединения.

Последовательности

- Порядок элементов в множествах не важен, но иногда надо рассматривать совокупности элементов с фиксированным порядком, такие совокупности называются ***последовательностями***, они как правило, задаются перечислением элементов, которые записываются в угловых скобках, например, $<1,2>$, $<a,b,c>$, $<a_1,a_2,a_3>$.

- *Две последовательности считаются равными, если они состоят из одинаковых элементов, и порядок этих элементов у них одинаков.*

- Если $A=<a_1,\dots,a_n>$, $B=<b_1,\dots,b_m>$, тогда $A=B$ т. и т. т., когда $n=m$, и $a_i=b_\mathrm{i}$ для всех $i<=n$.

- Если последовательность состоит из двух элементов, то она называется упорядоченной парой или двухмерным вектором.

- Если последовательность состоит из 3 элементов, то она называется упорядоченной тройкой элементов, трехмерным вектором. Если из 4 элементов, то упорядоченной четверкой, 4-х мерным вектором, и т.д.

Декартово произведение двух множеств

- Декартовым произведением двух множеств *A*, *B* называется множество упорядоченных пар $<a,b>$, таких, что первый элемент пары принадлежит *A*, а второй элемент пары множеству *B*. Декартово произведение множеств *A*,*B* обозначается $A \times B$
- Другими словами $A \times B=\{<a,b> \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Примеры

- Пример 1. Если $A=\{1,2,4\}$, $B=\{1,7\}$, то $A \times B=\{<1,1>,<2,7>,<1,7>,<2,1>,<4,1>,<4,7>\}$.

- Пример 2. Если R – множество действительных чисел, то $R \times R$ множество всевозможных пар чисел. Множество действительных чисел можно представить как множество точек на прямой, в этом случае декартово произведение можно представить, как множество точек на плоскости.

Декартово произведение n множеств

- Если рассматривать некоторый набор множеств $A_1,\ldots A_n$, то можно определить декартово произведение множеств $A_1,\ldots,A_n$, как множество последовательностей, содержащих *n* элементов, причем первый элемент должен быть из A_1, второй из A_2, …, n –элемент из A_n.
- Другими словами:
- $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{<a_1,\ldots,a_n> | a_1 \in A_1,\ldots,a_n \in A_n\}$.

Примеры

- Пример 3. Если $A=\{2,4\}$, $B=\{1,7\}$, $C=\{1,2\}$, то $A\times B\times C=\{<2,1,1>,<2,7,1>,<2,1,2>,<2,7,2><4,7,1>,<4,1,1>,<4,1,2>,<4,7,2>\}$.

- Пример 4. Если R – множество действительных чисел, то $R\times R\times R$ будет множеством всевозможных троек чисел, а геометрически будет множеством точек в 3-х мерном пространстве.