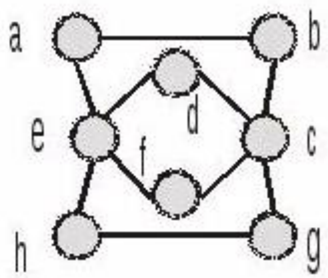
Эйлеровы циклы

Эйлеровы циклы

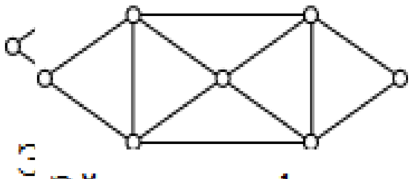
- *Эйлеровым циклом* в графе называется цикл, содержащий все ребра графа.
- Связный граф называется *эйлеровым*, если он содержит эйлеров цикл.

- **Пример**
- abcdefcghea

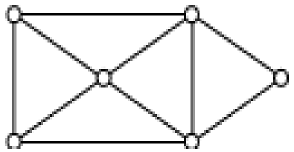


Эйлеровы цепи

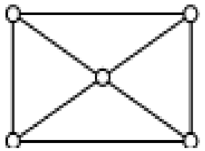
- Цепь называется эйлеровой, если она содержит все ребра графа.
- Если граф содержит эйлерову цепь, то *он* называется *полуэйлеровым*.
- Очевидно, что каждый эйлеров *граф* будет полуэйлеровым.



Эйлеров граф



Полуэйлеров граф



Не эйлеров граф

Теорема 2.7. Если граф G обладает эйлеровым циклом, то все его вершины четные.

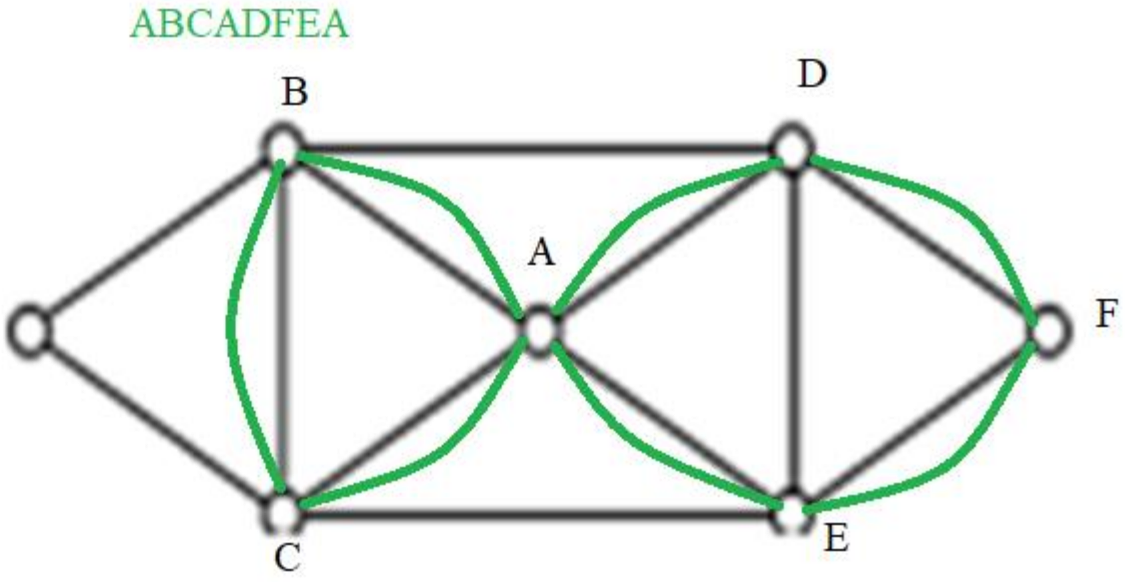
- ***Доказательство***. Эйлеров цикл содержит каждое ребро и притом только один раз. Если мы будем двигаться по эйлерову циклу, то при каждом заходе в вершину по одному ребру, мы сможем выйти из нее по другому ребру. Поскольку число заходов в вершину равно число исходов из нее, то степень любой вершины будет четной

Теорема 2.8. Если граф *G* связный и все его вершины четные, то он обладает эйлеровым циклом.

- ***Доказательство.*** Пусть v – произвольная вершина графа *G*. Начнем построение цикла, двигаясь по одному из ребер вершины v. Попав в некоторую вершину w по одному ребру, мы всегда можем из нее выйти по новому ребру, поскольку степени вершин четные.

- Так как число ребер конечно, то наше движение должно окончиться. Причем в вершине v. В силу четности степеней для любой другой вершины, если есть "вход" в вершину, то должен быть и "выход", а для вершины v не было "входа".

Рисунок 1 к теореме 2.8



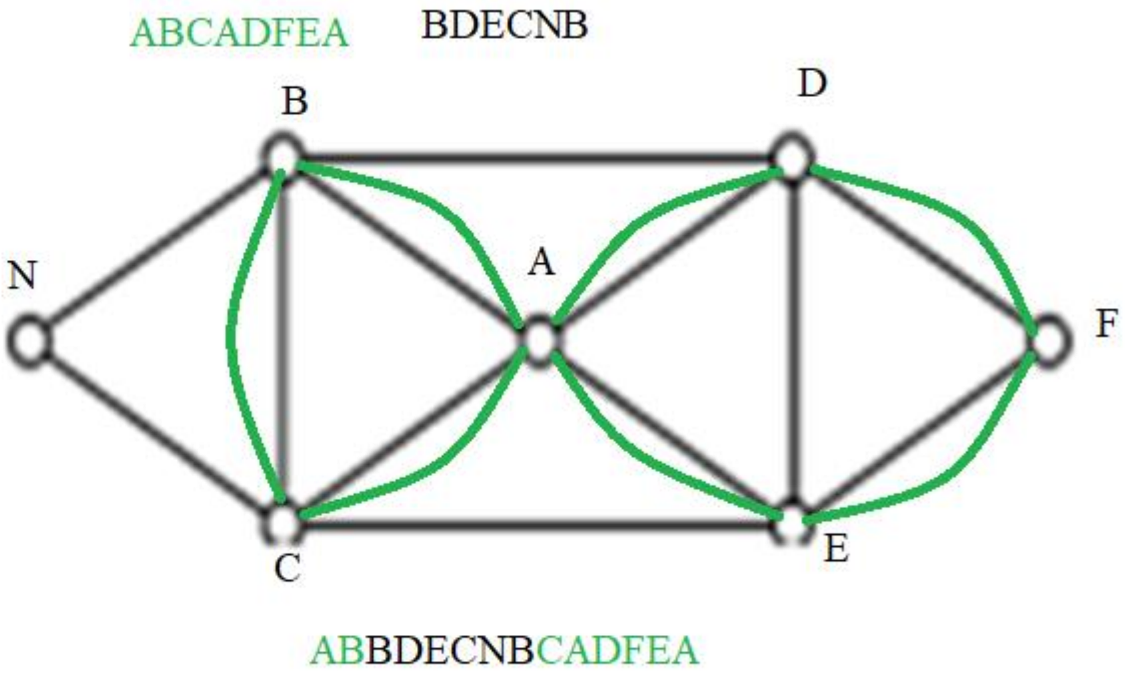
Доказательство. Продолжение.

- Обозначим построенный цикл буквой μ. Если мы прошли все ребра графа, то цикл построен. Если остались не пройдённые ребра, то должна существовать вершина u, принадлежащая μ и, имеющая не пройденное ребро. Поскольку степень вершины u четная, число ребер вошедших в цикл μ и инцидентных вершине u четно, то число не пройденных и инцидентных вершине u ребер тоже четно. Данное утверждение справедливо для любой вершины графа, хотя для некоторых из них число не вошедших в цикл μ ребер будет равно 0. Нам важно только то, что если из графа удалить ребра, вошедшие в цикл μ, то мы получим граф с четными вершинами, хотя связность получившегося графа, скорее всего, будет нарушена.

Доказательство. Продолжение.

- Повторим наши действия по построению цикла для вершины u, используя только ребра, не вошедшие в цикл μ. Получим новый цикл η. Циклы μ, η имеют общую вершину и не имеют общих ребер, значит их можно соединить, получим цикл μ'. Если новый цикл содержит все ребра графа, то эйлеров цикл построен. Если остались не пройденные ребра, то найдется вершина u', принадлежащая μ' и, имеющая не пройденное ребро, и мы повторим предыдущие действия. Число ребер и вершин конечно, процесс повторений действий закончится.

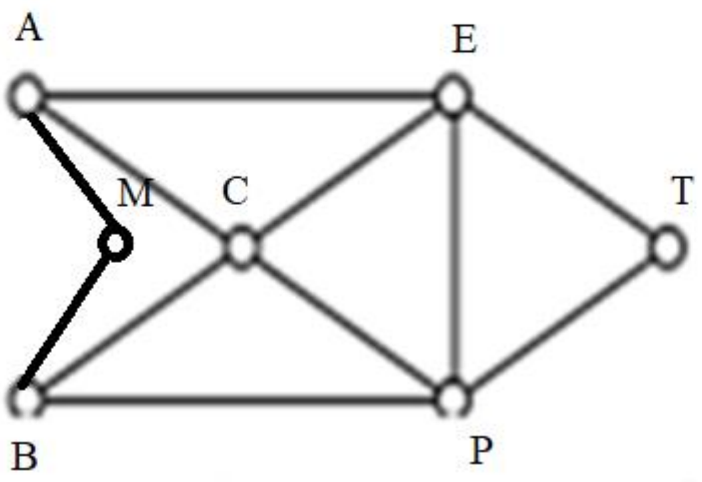
Рисунок 2 к теореме 2.8



Алгоритм построения эйлерова цикла.

Теорема 4.4. Если граф связный и A и B единственные нечетные вершины его, то граф обладает эйлеровой цепью с концами A и в.

- Вершины A и B могут быть соединены ребрами в графе.
- А могут быть и не соединены.

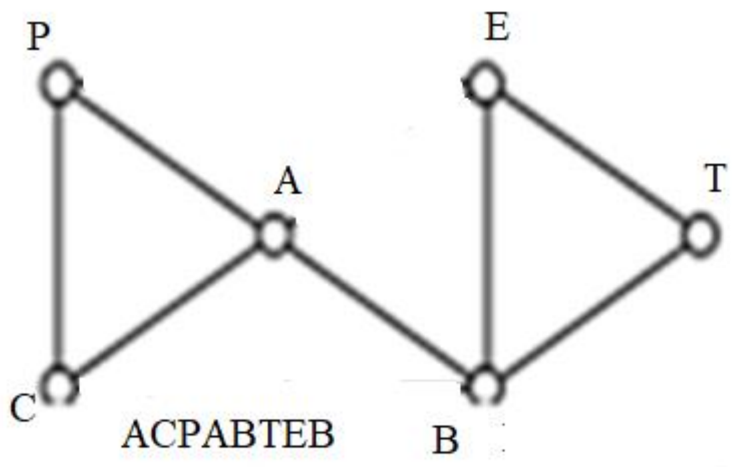


Доказательство. Продолжение.

- Если A и B не соединены ребром, то к графу добавим новое ребро (A, B), тогда все вершины его станут четными. Новый граф, согласно предыдущей теореме, обладает эйлеровым циклом. Начнем его из вершины A по ребру (A , B). Закончится путь тоже в вершине A . Если теперь удалить из полученного цикла ребро (A , B), то останется эйлерова цепь с началом в A и концом в B или с началом в B и концом в A.
- Если A и B соединены ребром, то удалим его. Тогда все вершины станут четными. Если новый граф связный, то согласно теореме 2.8, обладает эйлеровым циклом, началом и концом которого может служить любая вершина. Начнем эйлеров путь в вершине A и закончим его в вершине A . Добавим ребро (A, B) и получим эйлеров путь с началом в A   и концом в B.

Доказательство. Продолжение.

- Если удаленное ребро было мостом, то получим две компоненты связности с четными вершинами. Построим эйлеров цикл в компоненте с вершиной A, и начинающийся в вершине A, затем добавим ребро (A,B) и построим эйлеров цикл в компоненте, содержащей B, и начинающийся с B. Получим эйлерову цепь, которая начинается в вершине A и заканчивается в вершине B.



Особенности полуэйлеровых графов.

- Связный граф с четными вершинами, можно начертить одним росчерком без повторений, начиная рисовать с любой вершины.
- Связный граф с двумя нечетными вершинами, можно начертить одним росчерком без повторений, начиная рисовать с одной из нечетных вершин.