Алгебра множеств, порожденная некоторым набором образующих множеств

Алгебраическая система
Вспомогательные определения

- Рассмотрим декартово произведение *n* – множеств $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.
- Если все эти множества равны одному $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется *декартовой n-степенью множества A* и обозначается A^n.
- Если n=0, то по определению считаем $A^0 = \varnothing$;
- Отображение $f: A^n \to A$ называется *n*-местной *операцией* на A.
- Если $n=0$, то по определению 0-местная функция - это выделенный элемент A, т.е. константа.

Алгебраическая система

- Множество, с заданными на нем отношениями и операциями, называется *алгебраической системой*.

$$m = < A; P_1^{i_1}, \ldots, P_n^{i_n}; f_1^{j_1}, \ldots, f_m^{j_m} >$$

- A – основное множество.
- $P_1 \ldots P_n$ – символы, задающие отношение на множестве А.
- $i_1 \ldots i_n$ – числа, указывающие местности этих отношений.
- $f_1 \ldots f_m$ – функциональные символы, задающие операции на А.
- $j_1 \ldots j_m$ – числа, указывающие местности операций.

Если заранее известны местности операций и отношений, то их не пишут.

Пример алгебраической системы

- Частично упорядоченное множество $<A; \leq>$ - это алгебраическая система с единственным двухместным отношением частичного порядка

Алгебры и модели

- Алгебраическая система, не содержащая отношений, называется алгеброй.
- Алгебраическая система, не содержащая операций, называется моделью.

Алгебра множеств, порожденная набором образующих множеств

- Фиксируем множества $A_1,\ldots,A_n$, которые назовем образующими.
- Множество $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ будем считать универсальным.
- Будем рассматривать все множества, которые получаются из образующих с помощью операций пересечения, объединения и взятия дополнения. Совокупность всех таких множеств обозначается $C(A_1 \ldots A_n)$.
- *Ясно, что операции* пересечения, объединения и взятия дополнения не выводят нас из множества $C(A_1 \ldots A_n)$.
- *Значит можно рассматривать алгебру*

$$A = \langle C(A_1 \ldots A_n);\ \cap, \cup, \bar{\ }\ \rangle,$$

В которой $C(A_1 \ldots A_n)$ – *основное множество.*

Первичный терм

Множество

$$A_i^{\sigma_i} = \begin{cases} A_i, \text{ если } \sigma_i = 1 \\ \overline{A}_i, \text{ если } \sigma_i = 0 \end{cases}$$

называется первичным термом

Конституента
Примечание

- Рассматриваются ***конституенты единицы*** *и нуля*, но мы будем рассматривать только конституенту единицы, и потому будем называть ее просто конституентой.
- По одному из определений, ***конституента единицы*** - это такая функция, которая принимает значение единицы только для одной комбинации значений переменных.
- Мы рассмотрим другое определение, но нами определенная конституента будет обладать этим свойством.

Конституента Определение

Пересечение первичных термов называется *элементарным пересечением*.

Конституента – это элементарное пересечение, которое отличается от остальных элементарных пересечений тем, что

- 1) оно содержит ровно *n* членов (*n* -число образующих);
- 2) каждое образующее множество либо само входит в конституенту, либо входит его дополнение.

Запись конституенты

Если $B = A_1^{\sigma_1} \bigcap \ldots \bigcap A_n^{\sigma_m}$, то последовательность $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ее полностью определяет.

Эта последовательность состоит из нулей и единиц, и ее можно считать записью числа в двоичной системе исчисления.

Например, если B= $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$, то получим последовательность 1101, которая задает число $1101_2 = 13_{10}$.

Прочтение чисел как конституент

- Если известно число образующих, то любое натуральное число можно считать записью конституенты.
- Число образующих нам нужно знать для того, чтобы определить сколько знаков в двоичной записи числа использовать.
- Если знаков больше чем надо, то отбрасываются старшие разряды, если знаков меньше, то недостающие старшие разряды заполняются нулями.
- Пример. Число 5, в системе 4-х образующих множеств задает конституенту $\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$ ($5_{10}=101_2=0101$, дописываем 0 слева), а в системе 3-х образующих задает $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$ ($5_{10}=101_2=101$, здесь ничего дописывать не надо).

Нормальные формы Кантора

- Если множество B$\in$ ($A_1 \ldots A_n$) записано в виде объединения элементарных пересечений, то говорят, что оно представлено в *нормальной форме Кантора (НФК)*.
- Точнее в дизъюнктивной нормальной форме Кантора. Есть еще конъюнктивная нормальная форма – пересечение элементарных объединений, но мы ее изучать не будем, и потому пропуск слова дизъюнктивная к путанице не приведет.
- Если множество B записано в виде объединения конституент, то говорят, что B представлено в *совершенной нормальной форме Кантора (СНФК)*.

Теорема. О представление множества в СНФК

- Пусть дана алгебра множеств, порожденная множествами $A_1, \dots, A_т$, тогда любое множество этой алгебры можно представить в СНФК.

Алгоритм Квайна (Куайна) поиска минимальной НФК

- НФК называется *минимальной*, если она содержит минимальное количество термов.
- Алгоритм Квайна поиска минимальной НФК, в качестве отправной точки используют СНФК.
- Алгоритм состоит из двух этапов.
- 1) Первый этап. Нахождение сокращенной НФК.
- 2) Второй этап. Нахождения минимальной НФК.

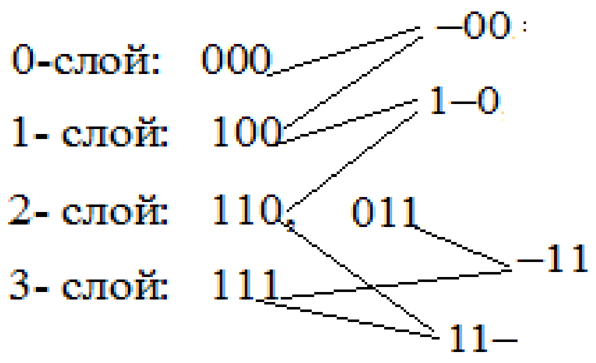
Первый этап. Нахождение сокращенной НФК

- Конституенты, задающие исходное множество, записываются в виде последовательностей нулей и единиц.
- Получившееся множество последовательностей нулей и единиц разбивается на слои, следующим образом:
  в нулевой слой попадает одна последовательность, состоящая из нулей; в первый слой попадают последовательности содержащие одну единицу; во второй слой последовательности содержащие две единицы, и т.д.
- Выполняются все операции склеивания. Операция склеивания – это преобразование следующего вида $\bar{A}\cap B\cup A\cap B=B$. Нетрудно заметить, что операцию склеивания можно применить только к конституентам, расположенным в соседних слоях.

Пример

- Дано множество $A=\bar{A}_1\cap \bar{A}_2\cap \bar{A}_3\cup A_1\cap \bar{A}_2\cap \bar{A}_3\cup A_1\cap A_2\cap \bar{A}_3\cup\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3\cup A_1\cap A_2\cap A_3$
- Запишем A с помощью нулей и единиц. Получим последовательности 000, 100, 110, 011, 111.
- Разбиваем все последовательности на слои.
- 0-слой: 000,
- 1- слой: 100,
- 2- слой: 110, 011,
- 3- слой: 111.

Выполним склеивание:



получим элементарные пересечения, которые записываются следующим образом: –00, 1–0, 11–, –11, здесь знак «–» означает отсутствие терма, соответствующей образующей.

Записываем сокращенную НФК исходного множества.

$A = \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap A_2 \cup A_2 \cap A_3$.

Простая импликанта

- Простой импликантой мы будем называть элементарное пересечение, которое либо является кнституентой, входящей в СНФК исходного множества, либо получено на шаге 3 в результате склеивания, и которое не может быть использовано в дальнейшем процессе склеивания.
- *Сокращенная НФК* – это объединение всех простых импликант исходного множества.

Покрытие столбцов строками в двумерной таблице

- Дана двумерная таблица, в ячейках которой записаны только нули и единицы.
- ***Покрытием столбцов строками*** в такой двумерной таблице называют множество строк, в котором для каждого столбца найдется хотя бы одна строка из этого множества, на пересечении с которой этот столбец имеет единицу, причем при вычеркивании хотя бы одного элемента из этого множества строк указанное свойство не выполняется.

Таблица Квайна

- Таблица Квайна – двумерная таблица каждой строке которой взаимно – однозначно соответствует простая импликанта, столбцу- конституента, а на пересечении i-й строки и j-ого столбца находится единица, если j–я конституента участвовала в получении i–й простой импликанты; в противном случаи клетку (i, j) не заполняют или ставят в ней 0.

Таблица Квайна рассматриваемого примера

- В эту таблице мы добавим лишние строку и столбец, они нам понадобятся для пометок, которые придется делать, выполняя алгоритм Квайна.

Элементарная импликанта /коституента	000	100	110	011	111	
-00	1	1				~
1-0		1	1			
11-			1		1	
-11				1	1	~
	*	**		*	**	

Ядро покрытия

- В ядро покрытия войдут те строки, которые содержатся в любом покрытии таблицы.
- отмечаем столбцы, имеющие только одну единицу
- Затем отмечаем строки, в которых стоят эти единицы. именно они войдут в ядро покрытия.
- В нашем примере, ядро {-00, -11}.

Нахождение покрытий

- Отмечаем столбцы, которые покрываются строками из ядра. Если покрываются все столбцы, то тогда покрытие совпадает со своим ядром.
- Если ядро покрытия не покрывает все столбцы, то перебором строк находим все покрытия.
- Среди найденных покрытий находим минимальные покрытия, именно они будут определять итоговые минимальные НФК.

Нахождение покрытий таблице рассматриваемого примера

- В нашем примере, ядро покрывает 1, 2, 4, 5 столбцы. Для образования покрытия можно взять 2 или 3-ю строку. В результате получаем 2 покрытия.
- 1) {-00, -11, 1-0}, добавили к ядру 2-ю строку.
- 2) {-00, -11, 11-}, добавили к ядру 3-ю строку.
- Каждое из них содержит 6 термов. Им соответствуют следующие минимальные НФК:
- $A = \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap \bar{A}_3 \cup A_2 \cap A_3$;
- $A = \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap A_2 \cup A_2 \cap A_3$.

Скобочная форма Кантора (СФК).

- Скобочная форма Кантора – выражение, определяющее множество M, в котором кроме первичных термов и знаков $\cap$,$\cup$, ¯ есть скобки (,).
- Дальнейшее уменьшение сложности выражения, определяющее множество возможно, если из класса НФК перейти в класс скобочных форм Кантора (СФК).
- Скобочные формы рассматриваемого примера
- $A = \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap \bar{A}_3 \cup A_2 \cap A_3 = \bar{A}_3 \cap (\bar{A}_2 \cup A_1) \cup A_2 \cap A_3$;
- $A = \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_1 \cap A_2 \cup A_2 \cap A_3 = \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup A_2 \cap (A_1 \cup A_3)$.