Счетные множества

Свойства счетных множеств

Счетные множества

- Множество равномощное натуральному ряду называется *счётным*.
- Счетное множество можно записать так: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, где x_1- это элемент поставленный в соответствие единицы, x_2 – двойки и т. д.
- Мы привыкли в такой форме записывать любое бесконечное множество, но только для счетного множества эта запись говорит еще и том, что его элементы можно пронумеровать натуральными числам.
- Счётным можно назвать бесконечное множество, элементы которого можно пронумеровать натуральными числами.

Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество

- Пусть множество *A* бесконечно. Тогда оно не пусто и содержит некоторый элемент b_1.
- Будучи бесконечным, множество *A* не исчерпывается элементом b_1 - возьмем какой - нибудь другой элемент b_2, и т.д.
- Получится последовательность $b_1, b_2, \ldots$; построение не прервется ни на каком шаге, поскольку *A* бесконечно.
- Множество $B=\{ b_1, b_2, \ldots\}$ и будет искомым счетным подмножеством. Полученное множество *B* не обязано совпадать с *A*, даже если *A* счётно.

Подмножество счётного множества конечно или счётно.

- Пусть B - подмножество счётного множества $A=\{a_1, a_2,\ldots,a_n,\ldots\}$.
- Выбросим из последовательности $a_1, a_2,\ldots,a_n,\ldots$ те члены, которые не принадлежат B (сохраняя порядок оставшихся). Тогда оставшиеся члены образуют либо конечную последовательность (и тогда B конечно), либо бесконечную (и тогда B счётно).

Объединение конечного или счётного числа счётных множеств счётно.

- Пусть имеется счетное число счетных множеств A_1, A_2,… Расположив элементы каждого из них слева направо в последовательность ($A_i=\{a_{i0}, a_{i1}, a_{i2},\ldots\}$) и поместив эти последовательности друг под другом, получим таблицу

$$\begin{array}{ccccc}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \ldots \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\
a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Теперь эту таблицу можно развернуть в последовательность, например, проходя по очереди диагонали:

a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{02}, a_{11}, a_{20}, a_{03}, a_{12}, a_{21}, a_{30},…

- Если множества A_i не пересекались, то мы получили искомое представление для их объединения. Если пересекались, то из построенной последовательности надо выбросить повторения.

Декартово произведение конечного числа счётных множеств счётно.

Докажем сначала, что декартово произведение двух счётных множеств счетно. Пусть $A=\{a_1, a_2,\dots\}$, $B=\{ b_1, b_2,\dots\}$ два счетных множеств, тогда элементы декартова произведения можно записать в таблицу:

$<a_1, b_1>$	$<a_1, b_2>$	$<a_1, b_3>$	...
$<a_2, b_1>$	$<a_2, b_2>$	$<a_2, b_3>$	...
$<a_3, b_1>$	$<a_3, b_2>$	$<a_3, b_2>$	...
...	...	...	...

Эту таблицу также можно развернуть в последовательность, проходя по диагоналям:

$<a_1,b_1>, <a_1,b_2>, <a_2,b_1>,<a_1,b_3>,<a_2,b_2>,<a_3,b_1>,\dots$

Если $A_1, A_2, A_3,\dots,A_n$ – счетные множества, счетность их декартово произведения доказывается по индукции.

Базис индукции. Для $n=1$, утверждение очевидно.

Предполагаем, что оно справедливо для $n-1$ (при $n>1$). Тогда счётным будет декартово произведение $(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$, как произведение двух счётных множеств.

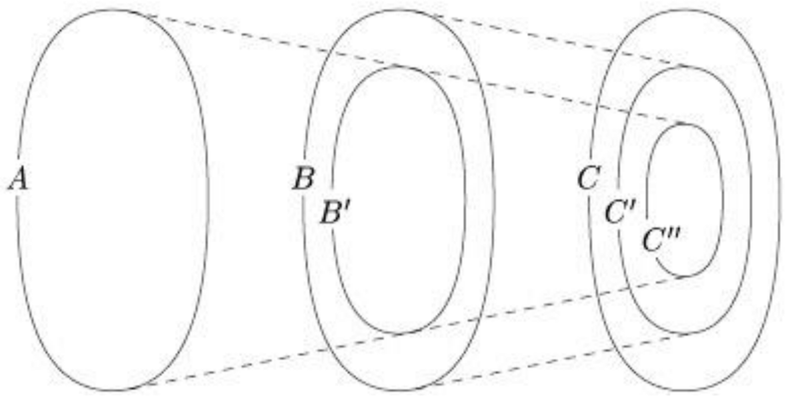
Множества $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ и $(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$, будут разными множествами, поскольку в первом случае элементами будут последовательности вида $\langle a_1,a_2,a_3,\dots a_{n-1},a_n \rangle$, где $a_i \in A_i$, $(1 \le i \le n)$, а во втором случае пары $\langle\langle a_1,a_2,a_3,\dots a_{n-1}\rangle,a_n\rangle$, где $\langle a_1,a_2,a_3,\dots a_{n-1}\rangle \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_{n-1}$ и $a_n \in A_n$.

Но очевидно, что между ними существует взаимно однозначное соответствие: $\langle a_1,a_2,a_3,\dots a_{n-1},a_n \rangle \to \langle\langle a_1,a_2,a_3,\dots a_{n-1}\rangle,a_n\rangle$.

Свойства отношения «иметь не большую мощность»:

- Если A и B равномощны, то A имеет не большую мощность, чем B.
- Если A имеет не большую мощность, чем B, а B имеет не большую мощность, чем C, то A имеет не большую мощность, чем C.
- Если A имеет не большую мощность, чем B, а B имеет не большую мощность, чем A, то они равномощны.
- Для любых двух множеств A и B верно (хотя бы) одно из двух: либо A имеет не большую мощность, чем B, либо B имеет не большую мощность, чем A.

Если A имеет не большую мощность, чем B, а B имеет не большую мощность, чем C, то A имеет не большую мощность, чем C



Пусть A находится во взаимно однозначном соответствии с $B' \subseteq B$, а B находится во взаимно однозначном соответствии с $C' \subseteq C$.
Тогда при втором соответствии B' соответствует некоторому множеству $C'' \subseteq C' \subseteq C$.

Теорема Кантора. Никакое множество A не равномощно множеству всех своих подмножеств.

- Предположим, что существует множество A, равномощное множеству всех своих подмножеств 2^A, то есть, что существует взаимно однозначное соответствие $f\colon A \to 2^A$, которое ставит в соответствие каждому элементу множества A некоторое подмножество множества A.
- Рассмотрим множество B, состоящее из всех элементов A, не принадлежащих своим образам при отображении f.
  $B = \{ x \in A \mid x \notin f(x)\}$.
- f взаимно однозначное соответствие, а $B \subseteq A$, значит существует $y \in A$ такой , что $f(y)=B$.
- Посмотрим, может ли y принадлежать B.

Посмотрим, может ли *y* принадлежать *B*. $B = \{ x \in A \mid x \notin f(x)\}$.

- Если $y \in B$, $y \in f(y)$, а тогда , по определению B, $y \notin B$.
- Наоборот, если $y \notin B$, то $y \notin f(y)$, а следовательно, $y \in$ B.
- В любом случае, получаем противоречие.

Поскольку отношение равномощности на множествах является отношением эквивалентности, то мощностью или кардинальным числом множества A называется соответствующий ему класс эквивалентности.

Скажем, что множество *A* *менее мощно*, чем множество *B* (или ***мощность множества A меньше, чем мощность множества B***), если *A* по мощности не больше множества *B* и множества *A* и *B* не равномощны.

Поскольку любое множество *A* равномощно множеству одноэлементных подмножеств (любому *a* можно поставить в соответствие множество $\{a\}$), то можно сказать, что мощность множества *A* меньше мощности множества 2^A . Т.е. можно записать

$$|A| < |2^A|$$

Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству всех подмножеств натурального ряда.

Сопоставим с каждой последовательностью множество номеров мест, на которых стоят единицы.

- например, 10010110…
  1,4,6,7….
- последовательность из одних нулей соответствует пустому множеству,
- из одних единиц -натуральному ряду,
- а последовательность 1010101010… - множеству нечетных чисел.

Очевидно, что получим взаимно-однозначное соответствие.

Мощность континуума

- Множество всех действительных чисел равномощно множеству всех подмножеств натурального ряда (без доказательства).
- Отсюда мы получим, что мощность натурального ряда меньше, чем мощность всех действительных чисел $|N| < |R|$.
- Мощность множества действительных чисел называют *мощностью континуума*.

Континуум гипотеза

- Конти́нуум-гипо́теза (проблема континуума, первая проблема Гильберта) — выдвинутое в 1877 году Георгом Кантором предположение о том, что любое бесконечное подмножество континуума является либо счётным, либо континуальным.
- Другими словами, гипотеза предполагает, что мощность континуума — наименьшая, превосходящая мощность счётного множества, и «промежуточных» мощностей между счетным множеством и континуумом нет.
- В частности, это предположение означает, что для любого бесконечного множества действительных чисел всегда можно установить взаимно-однозначное соответствие либо между элементами этого множества и множеством целых чисел, либо между элементами этого множества и множеством всех действительных чисел.
- Первые попытки доказательства этого утверждения средствами наивной теории множеств не увенчались успехом, в дальнейшем показана невозможность доказать или опровергнуть гипотезу в аксиоматике Цермело — Френкеля (как с аксиомой выбора, так и без неё).