

Введение

Современные технические и информационные системы характеризуются высокой степенью сложности и требуют эффективного управления ресурсами, особенно в условиях неопределённости и вероятностных процессов. Одним из ключевых инструментов анализа и оптимизации таких систем является теория массового обслуживания, которая широко применяется в телекоммуникациях, вычислительной технике, логистике, банковской сфере и других отраслях.

Анализ систем массового обслуживания позволяет оценить их производительность, вероятность отказа, среднее время ожидания и другие важные характеристики, что, в свою очередь, способствует принятию обоснованных решений при проектировании и эксплуатации реальных сервисных систем.

Актуальность темы обусловлена широким применением многоканальных систем с ограниченной очередью в различных сферах деятельности, где важно обеспечить высокую надежность и эффективность обслуживания при ограниченных ресурсах.

Модель системы массового обслуживания

Данные значения модели:

- 1) Интенсивность входящего потока заявок $\lambda = 1$ заяв./мин;
- 2) Емкость накопителя $R = 6$;
- 3) Число обслуживающих каналов $M = 5$;
- 4) Интенсивность обслуживания заявки каналом $\mu = 6$ заяв./мин;
- 5) Потери из-за простоя одного канала $C1 = 100$ руб/(канал*мин);
- 6) Потери из-за простоя одной заявки в очереди $C2 = 10$ руб/(заявка*мин);
- 7) Потери из-за ухода заявки вследствие отказа в обслуживании или нетерпеливых заявок $C3 = 20$ руб/заявка;
- 8) Прибыль от каждой обслуженной заявки $C4 = 15$ руб/заявка.

Вычисленные вероятности состояний системы находятся в таблице 1.

Таблица 1 – Данные по вероятностям состояний

№ состояния k	Число заявок в системе n	Число занятых каналов Mз	Число свободных каналов Mс	Длина очереди r	Вероятности состояний р
0	0	0	5	0	0,84648
1	1	1	4	0	0,14108
2	2	2	3	0	0,01176
3	3	3	2	0	0,00065
4	4	4	1	0	0,00003
5	5	5	0	0	0,00000
6	6	5	0	1	0,00000
7	7	5	0	2	0,00000
8	8	5	0	3	0,00000
9	9	5	0	4	0,00000
10	10	5	0	5	0,00000
11	11	5	0	6	0,00000

Граф Марковского процесса для модели находится на рисунке 1.

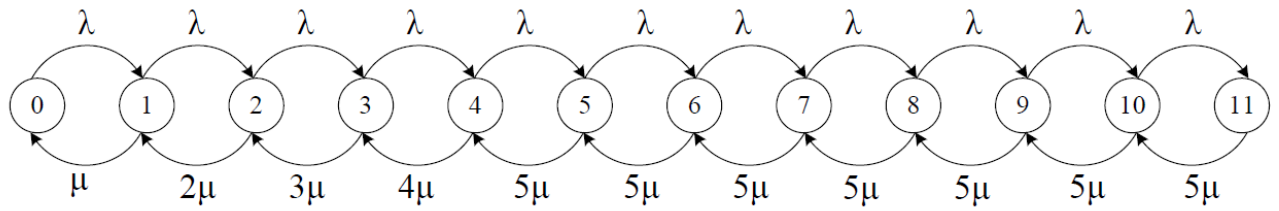


Рис 1. Граф Марковского процесса

Для вычисления вероятности состояний вычислим коэффициент использования по формуле 1 и сами вероятности по формуле 2.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (1)$$

где λ – интенсивность входящего потока; μ – интенсивность обслуживания;
 ρ – коэффициент использования.

$$p_i = \begin{cases} \frac{p_0 * (\rho^i)}{i!}, & i \leq 5 \\ \frac{p_0 * (\rho^i)}{5! * 5^{i-5}}, & i > 5 \end{cases}, \quad (2)$$

где i – номер состояния; p_i – вероятность состояния i .

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} = 1, \quad (3)$$

где $p_0 - p_{11}$ – вероятности состояний.

Вычисления:

$$1) \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{6};$$

$$2) \quad p_1 = p_0 * \rho = \frac{p_0 * 1}{6} = \frac{p_0}{6};$$

$$3) \quad p_2 = \frac{p_0 * (\rho^2)}{2} = \frac{p_0 * \left(\left(\frac{1}{6}\right)^2\right)}{2} = \frac{p_0 * \left(\frac{1}{36}\right)}{2} = \frac{p_0}{72};$$

$$\begin{aligned}
4) \quad p_3 &= \frac{p_0 * (\rho^3)}{2*3} = \frac{p_0 * \left(\left(\frac{1}{6}\right)^3\right)}{2*3} = \frac{p_0 * \left(\frac{1}{216}\right)}{6} = \frac{p_0}{1296}; \\
5) \quad p_4 &= \frac{p_0 * (\rho^4)}{2*3*4} = \frac{p_0 * \left(\left(\frac{1}{6}\right)^4\right)}{2*3*4} = \frac{p_0 * \left(\frac{1}{1296}\right)}{24} = \frac{p_0}{31104}; \\
6) \quad p_5 &= \frac{p_0 * (\rho^5)}{2*3*4*5} = \frac{p_0 * \left(\left(\frac{1}{6}\right)^5\right)}{2*3*4*5} = \frac{p_0 * \left(\frac{1}{7776}\right)}{120} = \frac{p_0}{933120}; \\
7) \quad p_6 &= \frac{p_0 * (\rho^6)}{2*3*4*5^2} = \frac{p_0 * \left(\left(\frac{1}{6}\right)^6\right)}{2*3*4*5^2} = \frac{p_0 * \left(\frac{1}{46656}\right)}{600} = \frac{p_0}{27993600}; \\
8) \quad p_7 &= \frac{p_0 * (\rho^7)}{2*3*4*5^3} = \frac{p_0 * \left(\left(\frac{1}{6}\right)^7\right)}{2*3*4*5^3} = \frac{p_0 * \left(\frac{1}{279936}\right)}{3000} = \frac{p_0}{839808000}; \\
9) \quad p_8 &= \frac{p_0 * (\rho^8)}{2*3*4*5^4} = \frac{p_0 * \left(\left(\frac{1}{6}\right)^8\right)}{2*3*4*5^4} = \frac{p_0 * \left(\frac{1}{1679616}\right)}{15000} = \frac{p_0}{25194240000}; \\
10) \quad p_9 &= \frac{p_0 * (\rho^9)}{2*3*4*5^5} = \frac{p_0 * \left(\left(\frac{1}{6}\right)^9\right)}{2*3*4*5^5} = \frac{p_0 * \left(\frac{1}{10077696}\right)}{75000} = \frac{p_0}{755827200000}; \\
11) \quad p_{10} &= \frac{p_0 * (\rho^{10})}{2*3*4*5^6} = \frac{p_0 * \left(\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\right)}{2*3*4*5^6} = \frac{p_0 * \left(\frac{1}{60466176}\right)}{375000} = \frac{p_0}{22674816000000}; \\
12) \quad p_{11} &= \frac{p_0 * (\rho^{11})}{2*3*4*5^7} = \frac{p_0 * \left(\left(\frac{1}{6}\right)^{11}\right)}{2*3*4*5^7} = \frac{p_0 * \left(\frac{1}{362797056}\right)}{1875000} = \frac{p_0}{680245248000000}.
\end{aligned}$$

Исходя из условия нормировки формулы 3 вычислим сумму коэффициентов.

$$\begin{aligned}
& p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} = p_0 * \frac{1}{6} + \\
& + p_0 * \frac{1}{72} + p_0 * \frac{1}{1296} + p_0 * \frac{1}{31104} + p_0 * \frac{1}{933120} + p_0 * \frac{1}{27993600} + \\
& + p_0 * \frac{1}{839808000} + p_0 * \frac{1}{25194240000} + p_0 * \frac{1}{755827200000} + \\
& + p_0 * \frac{1}{22674816000000} + p_0 * \frac{1}{680245248000000} = 1
\end{aligned}$$

Сумма коэффициентов при p_0 :

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{72} + \frac{1}{1296} + \frac{1}{31104} + \frac{1}{933120} + \frac{1}{27993600} + \frac{1}{839808000} + \\
 & + \frac{1}{25194240000} + \frac{1}{755827200000} + \frac{1}{22674816000000} + \frac{1}{680245248000000} = \\
 & = 1 + 0.166666666666667 + 0.013888888888889 + 0.000771604938272 \\
 & + 0.000032150205761 + 0.000001071673525 + 0.000000035722451 + \\
 & + 0.000000001190748 + 0.000000000039692 + 0.000000000001323 + \\
 & + 0.0000000000000044 + 0.0000000000000001 \approx 1.181360419327374 \approx \\
 & \approx 1.18136
 \end{aligned}$$

Закончим вычисление вероятностей состояний:

- 1) $p_0 \approx \frac{1}{1.18136} \approx 0,84648$;
- 2) $p_1 \approx 0.84648 * \frac{1}{6} \approx 0,14108$;
- 3) $p_2 \approx 0.84648 * \frac{1}{72} \approx 0,01176$;
- 4) $p_3 \approx 0.84648 * \frac{1}{1296} \approx 0,00065$;
- 5) $p_4 \approx 0.84648 * \frac{1}{31104} \approx 0,00003$;
- 6) $p_5 \approx 0.84648 * \frac{1}{933120} \approx 0.00000$;
- 7) $p_6 \approx 0.84648 * \frac{1}{27993600} \approx 0.00000$;
- 8) $p_7 \approx 0.84648 * \frac{1}{839808000} \approx 0.00000$;
- 9) $p_8 \approx 0.84648 * \frac{1}{25194240000} \approx 0.00000$;
- 10) $p_9 \approx 0.84648 * \frac{1}{755827200000} \approx 0.00000$;
- 11) $p_{10} \approx 0.84648 * \frac{1}{22674816000000} \approx 0.00000$;
- 12) $p_{11} \approx 0.84648 * \frac{1}{680245248000000} \approx 0.00000$

Расчет средних характеристик для стационарного режима:

1) Число заявок в системе:

$$\bar{n} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 + 5 \cdot p_5 + 6 \cdot p_6 + 7 \cdot p_7 + 8 \cdot p_8 + 9 \cdot p_9 + 10 \cdot p_{10} + 11 \cdot p_{11} = 0 \cdot 0.84648 + 1 \cdot 0.14108 + 2 \cdot 0.01176 + 3 \cdot 0.00065 + 4 \cdot 0.00003 + 0 = 0.16667$$

2) Число простаивающих (свободных) каналов

$$\overline{M_c} = 5 \cdot p_0 + 4 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + 1 \cdot p_4 + 0 \cdot (p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11}) = 5 \cdot 0.84648 + 4 \cdot 0.14108 + 3 \cdot 0.01176 + 2 \cdot 0.00065 + 1 \cdot 0.00003 + 0 = 4.83333$$

3) Число занятых каналов

$$\overline{M_3} = M - \overline{M_c} = 5 - 4.83333 = 0.16667$$

4) Длина очереди

$$\bar{r} = \bar{n} - \overline{M_3} = 0.16667 - 0.16667 = 0$$

5) Вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = p_{11} = 0$$

6) Поток отказов

$$\lambda_{\text{отк}} = \lambda * P_{\text{отк}} = 1 \cdot 0 = 0$$

7) Относительная пропускная способность

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0 = 1$$

8) Абсолютная пропускная способность

$$A = q * \lambda = 1 \cdot 1 = 1$$

9) Доля необслуженных заявок

$$D_{\text{необсл}} = \frac{\lambda_{\text{отк}}}{\lambda} = P_{\text{отк}} = 0$$

10) Доля заявок, получивших отказ в обслуживании

$$D_{\text{отк}} = \frac{\lambda_{\text{отк}}}{\lambda} = P_{\text{отк}} = 0$$

11) Время пребывания заявки в системе

$$\bar{t}_c = \frac{\bar{n}}{A} = \frac{0.16667}{1} = 0.16667$$

12) Время ожидания в очереди

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{r}}{A} = \frac{0}{1} = 0$$

13) Время обслуживания

$$\bar{t}_{обсл} = \bar{t}_c - \bar{t}_{ож} = 0.16667 - 0 = 0.16667$$

Средние затраты на функционирование системы в единицу времени

$$W = C1 \cdot \bar{M}c + C2 \cdot r + C3 \cdot \lambda_{отк} - C4 \cdot A = 100 \cdot 4.83333 + \\ + 10 \cdot 0 + 20 \cdot 0 - 15 \cdot 1 = 483.33300 - 15 = 468.33300$$