В результате окончательно имеем

$$P\left(\frac{mv^2}{2} < E\right) = \operatorname{erf}(\Theta) - \frac{2\Theta}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\Theta^2}, \qquad \Theta = \sqrt{\frac{E}{kT}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.15 Загон представляет собой квадрат со стороной 5 м. В выбранную наугад точку внутри загона фермер вбивает кол и привязывает к нему козу на веревке длиной 1 м. Найти вероятность того, что коза не сможет дотянуться ни до одного угла загона.

1.16 Через середину одной из сторон единичного квадрата проводят прямую, угол которой с этой стороной квадрата выбирают наугад. Найти вероятность того, что прямая делит квадрат на треугольник и пятиугольник, причем площадь треугольника меньше a, $0 < a < 1/4$.

1.17 Дан равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами AB и AC длины 1. На отрезке AB наугад выбирают точку M. Найти вероятность того, что периметр треугольника CAM меньше 3.

1.18 Из начала координат O выпускают луч, для которого угол с осью абсцисс можно считать выбранным наугад из интервала $[0, 2\pi)$. Этот луч пересекает единичную окружность в точке B. Пусть точка A имеет координаты $(1, 0)$. Найти вероятность того, что площадь треугольника AOB меньше x для всех $x \in \mathbb{R}$.

1.19 Число α выбирается наугад из отрезка $[0, 1]$. Пусть $\gamma = k\alpha + b$, где $k, b = \mathrm{const}$, $k > 0$, $\gamma_* = \min(\alpha, 1-\alpha)$, $\gamma^* = \max(\alpha, 1-\alpha)$. Для каждой из величин γ, γ_*, γ^* определить диапазон её возможных значений и найти вероятность того, что значение величины попадёт в произвольный интервал $[x_1, x_2]$ внутри этого диапазона. Можно ли считать, что для γ, γ_*, γ^* справедливо условие «однородности» вероятности (т. е. то, что вероятность попадания значения величины в интервал пропорциональна длине этого интервала)?

1.20 Пусть числа α и β выбираются независимо друг от друга наугад из отрезка $[0, 1]$. Решить предыдущую задачу для
а) величины $\xi_1 = \alpha + \beta$ и интервала $[x_1, x_2] = [1/2, 3/2]$,
б) величины $\xi_2 = \alpha - \beta$ и интервала $[-1/2, 1/2]$,
в) для $\xi_* = \min(\alpha, \beta)$, $\xi^* = \max(\alpha, \beta)$ и соответственно интервалов $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$.

1.21 На бесконечную шахматную доску со стороной клетки a бросают наугад круглую монету диаметром $2r < a$. Найти вероятность того, что
а) монета попадёт целиком внутрь одной клетки;
б) монета пересечёт не более одной линии.

1.22 Числа a и b выбираются независимо друг от друга наугад из промежутка $[0, 1]$. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ действительны.

1.23 Автобус маршрута А имеет интервал движения 10 мин., автобус маршрута Б имеет интервал движения 15 мин. Человек приходит на остановку в момент времени, который можно считать выбранным наугад относительно моментов прихода автобусов. Найти вероятность того, что человеку придётся ждать первого подошедшего автобуса менее 5 мин. Считать, что автобусы строго соблюдают интервал движения и их расписания движения независимы.

1.24 Палочка единичной длины ломается в двух местах, выбранных наугад, на три части. Найти вероятность того, что из получившихся трех обломков можно сложить треугольник.

1.25 Точка наугад брошена в прямоугольник со сторонами $3/2$ и 2. Для $0 < x < \sqrt{2}/2$ найти вероятность того, что $d < x$, где d – расстояние от этой точки до:
а) ближайшей стороны, $0 < x < 1$;
б) каждой стороны, $1 < x < 3/2$.

1.26 Футболист бьет пенальти, стоя на расстоянии $a = 11$ м от ворот шириной $2b = 6$ м. Вратарь ловит мяч, если расстояние по горизонтали от вратаря до мяча не больше $d = 1$ м. Найти вероятность того, что будет забит гол. Считать, что задача двумерная: движение мяча и вратаря происходит в одной горизонтальной плоскости. В момент пересечения мячом линии ворот вратарь находится в точке, выбранной наугад в пределах ворот, угол полета мяча футболист выбирает наугад, но так, чтобы обязательно попасть в створ ворот.

1.27 Пьяный человек делает два шага длины a каждый, выбирая направление движения на каждом шаге наугад. Найти вероятность того, что за два шага он уйдет от начальной точки на расстояние меньше a.

1.28 В шаре радиуса R случайным образом независимо друг от друга разбросаны n точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра до ближайшей к нему точки больше r.

1.29 Из центра цилиндра радиуса $R = 1$ и высоты d выпускают луч, угол которого с осью цилиндра можно считать выбранным наугад в пространстве. Найти вероятность того, что этот луч выйдет через боковую сторону цилиндра (монета, аккуратно положенная на стол, встанет на ребро).

1.4. Элементы теории множеств.

Мы уже неоднократно отмечали, что в теории вероятностей события рассматриваются как подмножества пространства элементарных исходов: событие A есть множество тех элементарных исходов, которые влекут его наступление. Рассмотрим некоторые факты теории множеств, необходимые для аккуратного математического задания вероятности события. Всюду далее любые рассматриваемые множества являются подмножествами пространства Ω.

Замечание. Здесь мы не обсуждаем вопрос, выводят ли операции из множества случайных событий, т. е. имеют ли вероятность множества элементарных исходов, полученные как результат операций. Подробнее свойства вероятности мы рассмотрим в разделе 1.5.

Тремя основными операциями являются объединение, пересечение и дополнение множеств (см. рис. 1.2). Посмотрим, какую роль эти понятия играют в том случае, когда мы говорим о множествах элементарных исходов в пространстве Ω.

Пусть $\{A_\alpha\}$ – некоторый набор множеств, пронумерованных индексом α; каков диапазон значений этого индекса, в данном случае совершенно несущественно.

Объединение множеств задаётся как

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = \big\{\omega \in \Omega\colon \text{ существует } \alpha \text{ такой, что } \omega \in A_\alpha\big\}.$$

Пересечение множеств задаётся как

$$\bigcap_\alpha A_\alpha = \big\{\omega \in \Omega\colon \text{ для любого } \alpha \text{ имеем } \omega \in A_\alpha\big\}.$$

Дополнение $\overline{A}$ *к множеству* A состоит из всех тех и только тех элементарных исходов ω, которые не принадлежат множеству A,

$$\overline{A} = \big\{\omega \in \Omega\colon \ \omega \notin A\big\}.$$