

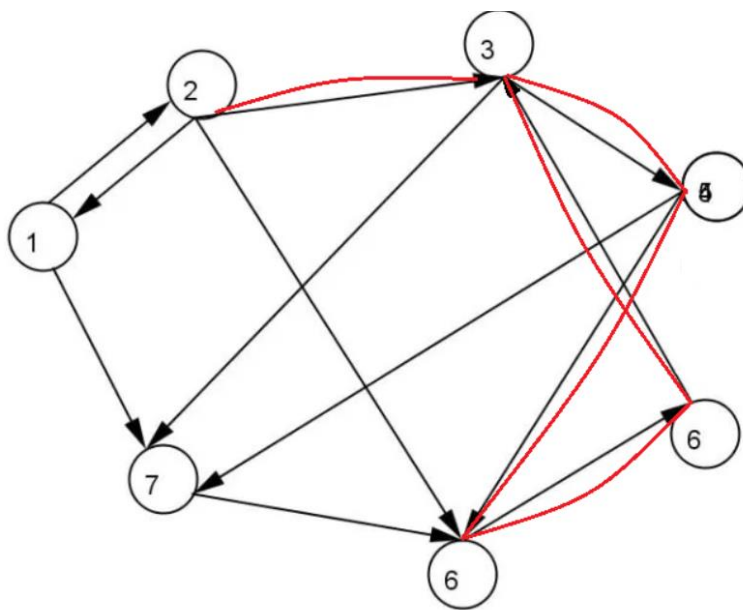
Топологическая сортировка вершин орграфа

Рассмотрим ориентированный бесконтурный граф.

- ▶ Поустепень исхода вершины, это число дуг исходящих из этой вершины.
- ▶ Поустепень захода вершины, это число дуг входящих из эту вершину.

В каждом бесконтурном орграфе имеется по крайней мере одна вершина, полустепень исхода которой равна нулю.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — бесконтурный орграф и w_1 — его произвольная вершина. Если ее полустепень исхода не равна нулю, выберем произвольную вершину w_2 , такую, что $w_1 w_2 \in E$, затем w_3 так, что $w_2 w_3 \in E$ и т.д. Поскольку в графе нет вершин с полустепенью исхода равной 0, то процесс этот бесконечен. Поскольку граф конечный, то наступит момент, когда некоторая вершина повторится и мы получим контур, что противоречит условию отсутствия контуров в орграфе.



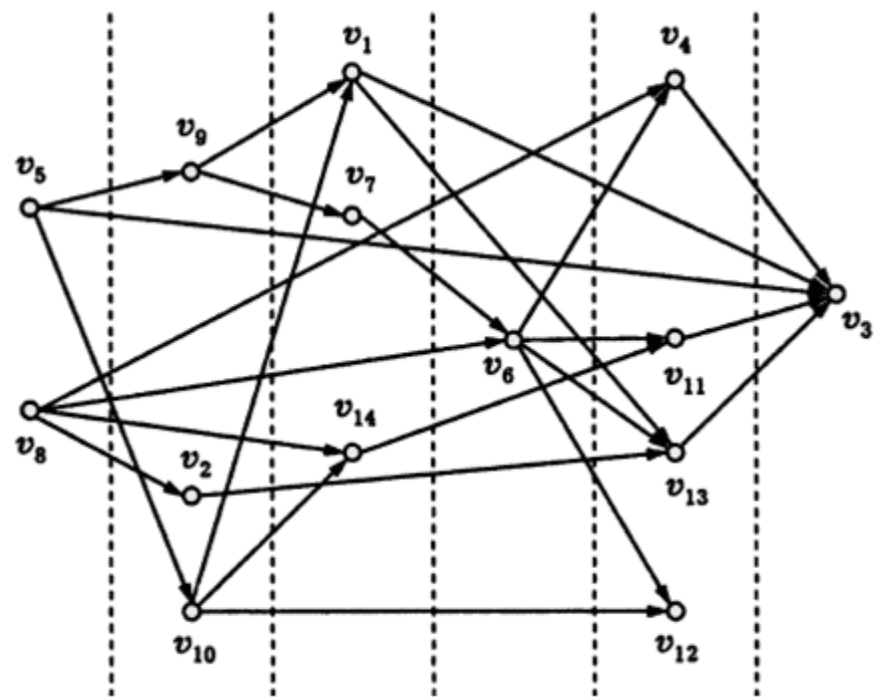
Вершины бесконтурного орграфа можно перенумеровать так, что каждая дуга будет идти из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером.

Нумерацию вершин будем строить по шагам

- 1) Объявить наибольшим неиспользованным номером число, равное количеству вершин в орграфе;
- 2) Выбрать произвольную вершину v , полустепень исхода которой равна нулю, и присвоить вершине v наибольший из еще неиспользованных номеров. Номер, который получит вершина v считать использованным;
- 3) Удалить из орграфа вершину v вместе со всеми входящими в нее дугами;
- 4) Повторять шаги 2 и 3 до тех пор, пока все вершины не получат свой номер.

Очевидно, что вершина под номером 1 будет иметь полустепень захода равную 0.

Пример.



Определение

- ▶ *Оrientированной сетью (или просто сетью) называют бесконтурный ориентированный граф.*
- ▶ Поскольку сеть является бесконтурным орграфом, то мы только, что показали, что у нее существуют вершины сети с нулевой полустепенью исхода, а также вершины с нулевой полустепенью захода.
- ▶ Дуга (a, c) соединяет вершины a и c , a – начало дуги, c – ее конец. Будем говорить, что a предшествовать c .

Уровень вершины

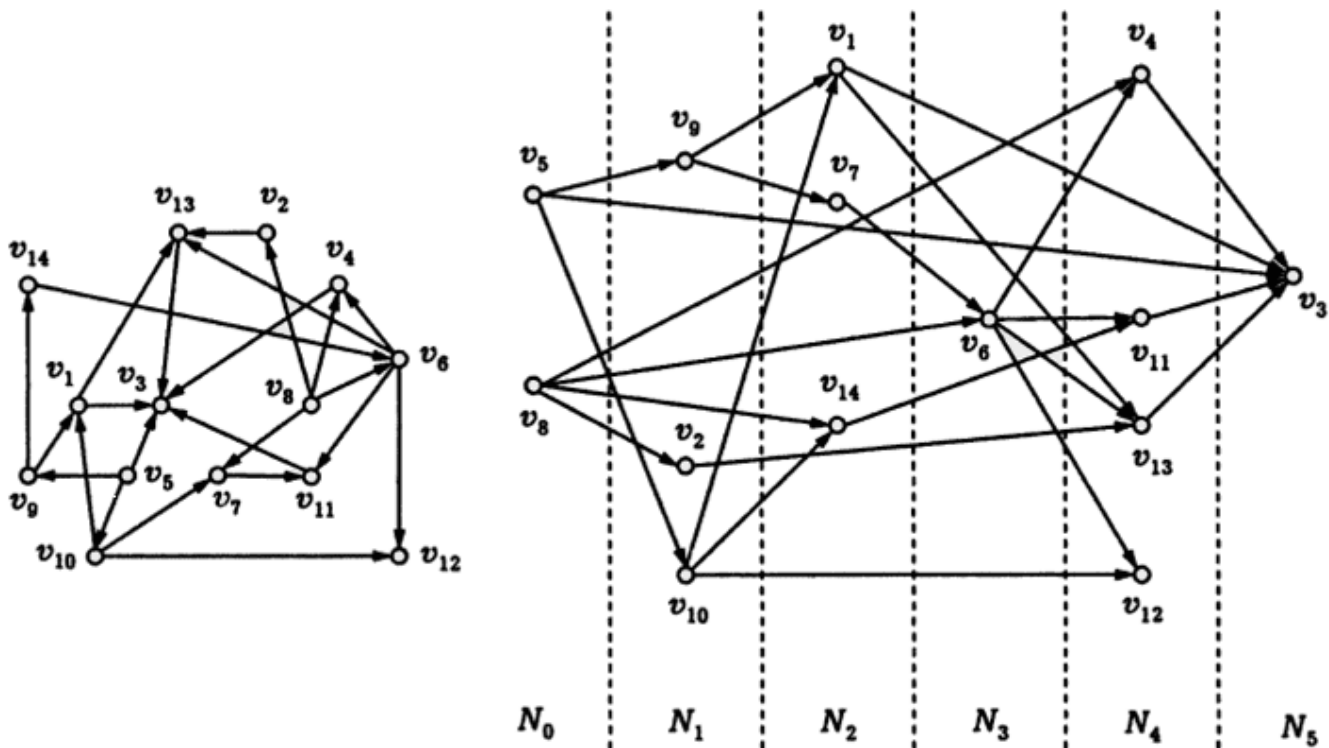
- ▶ Уровень вершины сети — это натуральное число, определяемое следующим образом:
 - 1) если полустепень захода вершины равна 0, то ее уровень равен 0 и наоборот (т.е. нулевой уровень — это множество всех *истоков*);
 - 2) если множества N_i вершин уровня i определены для всех $i < k$, то уровень N_k содержит те и только те вершины, предшественники которых принадлежат любому из уровней N_i с номером i от 0 до $k-1$, причем существует хотя бы один предшественник уровня $k-1$.

- ▶ Уровень вершины сети можно интерпретировать как длину максимального пути от входов сети до этой вершины.

Топологическая сортировка вершин орграфа

- ▶ Порядковой функцией сети $G=(V,E)$ называют отображение $V \rightarrow N$, сопоставляющее каждой вершине сети номер ее уровня.
- ▶ Во многих прикладных задачах возникает проблема такого упорядочения вершин сети, при котором вершины, принадлежащие одному уровню, располагаются друг под другом, а дуги ориентированного графа ведут в его изображении на плоскости от вершин с меньшим уровнем к вершинам с большим уровнем слева направо. Подобного рода проблема называется проблемой топологической сортировки, поскольку необходимо расположить вершины графа на плоскости так, чтобы отчетливо было видно распределение вершин по уровням. Само расположение при этом может быть разным, лишь бы оно имело "слоистую" структуру, в которой каждый слой составляют вершины одного уровня.

Пример топологической сортировки вершин орграфа



Пример.

- ▶ Топологическая сортировка применяется, например при распараллеливании алгоритмов,
- ▶ когда по некоторому описанию алгоритма нужно составить граф зависимостей его операций и,
- ▶ отсортировав его топологически, определить, какие из операций являются независимыми и могут выполняться параллельно (одновременно).

Алгоритм Демукрона вычисления порядковой функции сети

1. Счетчику x присвоить значение 0.
2. Сформировать уровень N_x поместив в него все истоки.
3. Удалить из графа все вершины уровня N_x вместе с инцидентными им дугами.
4. Если в графе не осталось вершин, то завершить работу, в противном случае увеличить значение счетчика x на 1 и перейти к шагу 2.