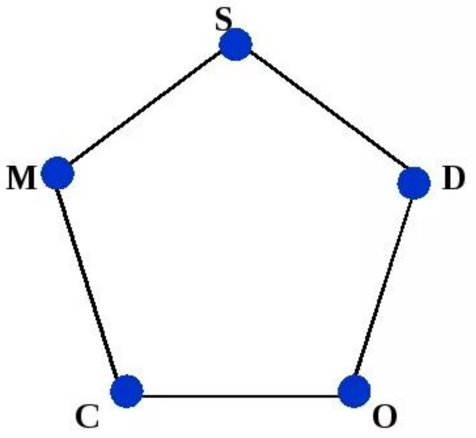
Графы. Связность

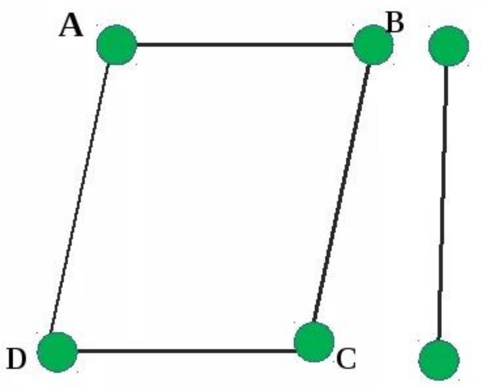
Связный граф

- Вершины называются *связанными*, если существует маршрут их соединяющий.
- Граф называется *связным,* если все его вершины связаны.
- Поскольку из любого незамкнутого маршрута можно выделить простую цепь, имеющую те же начальную и конечную вершины, то в связном графе, любые две вершины можно соединить простой цепью.

Компоненты связности

- Отношение связанности вершин является эквивалентностью.
- Классы эквивалентности по отношению связанности называются *компонентами связности* графа.
- Компонентами связности графа называются его максимальные по включению связные подграфы.



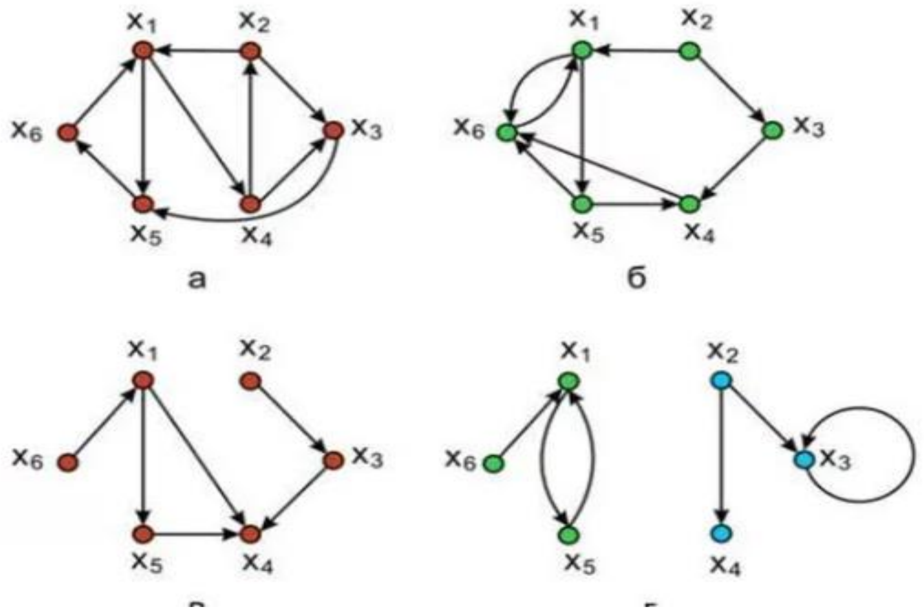


связный граф

не связный граф

Сильная и слабая связности орграфа

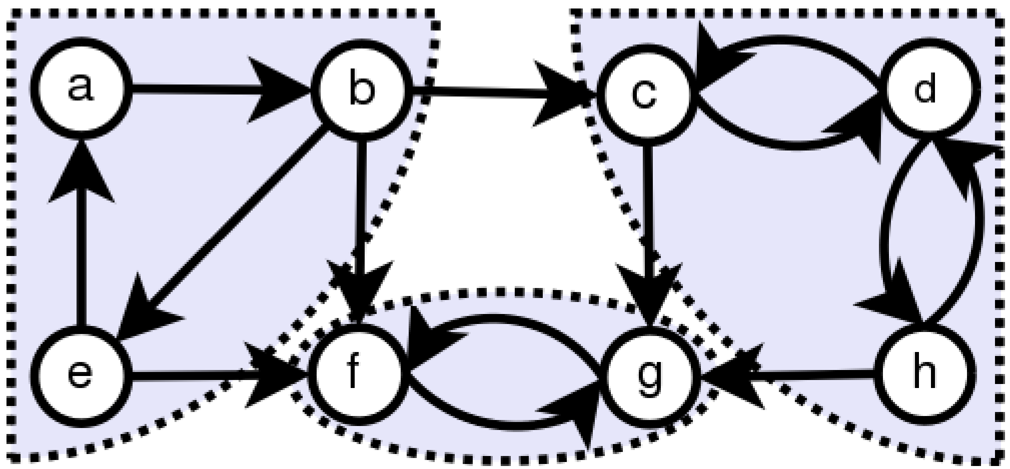
Орграф называется ***сильно связным***, или ***сильным***, если для двух любых различных его вершин x_i и x_j существует, *по* крайней мере, один *путь*, соединяющий эти вершины. Это *определение* означает также, что любые две вершины сильно связного графа взаимодостижимы.



Орграф называется ***слабо связным***, или ***слабым***, если для любых двух различных вершин графа существует *по* крайней мере **одна цепь,** соединяющий их.

Компонента сильной связности орграфа

- **Компонентами сильной связности** орграфа называются его максимальные по включению сильно связные подграфы.
- **Областью сильной связности** называется множество вершин компоненты сильной связности.



Алгоритм поиска компонент сильной связности орграфа

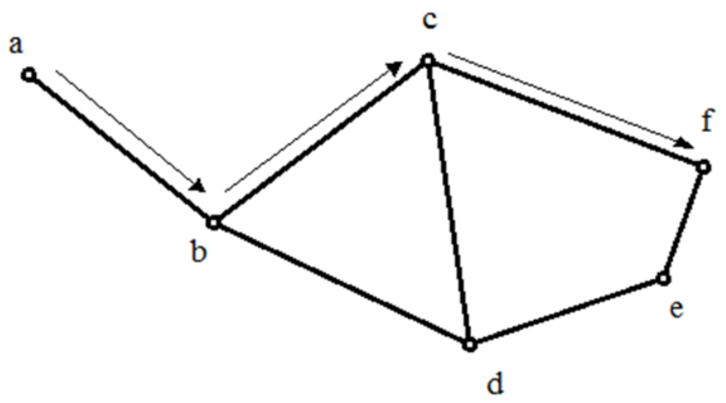
- Выбираем вершину v. Находим множество вершин, которые достижимы из в, обозначим это множество P(в), затем находим множество вершин, из которых достижима вершина в, обозначим это множество C(в).
- Компонента сильной связности, содержащая вершину в, будет также содержать вершины из множества $P(в) \cap C(в)$.
- Очевидно, что, вычислив множество $P(в) \cap C(в) \cup \{в\}$, мы найдем все вершины искомой компоненты, добавив в нее дуги орграфа, соединяющие эти вершины мы найдем саму компоненту сильной связности.

Расстояние между вершинами.

- Рассматривается связный граф. Напомним, что длиной цепи называется количество ребер входящих в эту цепь.

- *Расстоянием между двумя вершинами* называется длина самой короткой цепи, соединяющей эти вершины.

- В графе, изображенном на рисунке, вершины a и f могут быть соединены разными цепями, но самой короткой цепью будет цепь a,b,c,f , длины 3.

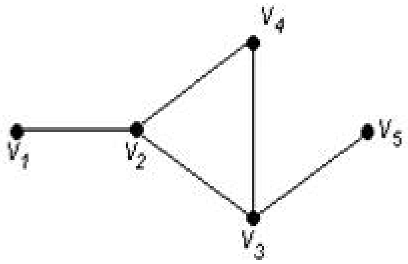


Метрические характеристики графа

- **Эксцентриситетом** вершины называется расстояние от нее до самой дальней вершины графа.
- **Радиусом графа** называется минимальный эксцентриситет среди всех вершин графа
- **Диаметром графа** - это наибольшее расстояние между всеми парами вершин графа
- **Центральной вершиной** графа является вершина чей эксцентриситет равен радиусу графа.
- **Периферийной вершиной** графа является вершина чей эксцентриситет равен диаметру графа.

Пример.

- Для графа G, изображенного на рисунке, найдем радиус, диаметр и центры.



- Найдем матрицу D(G) расстояний между вершинами графа, элементами dij которой будут расстояния между вершинами vi и vj.

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Затем найдем эксцентриситет для каждой вершины vi {3,2,2,2,3}.
- Отсюда получаем, что диаметр графа равен 3, радиус -2, вершины 2,3,4 являются центрами.

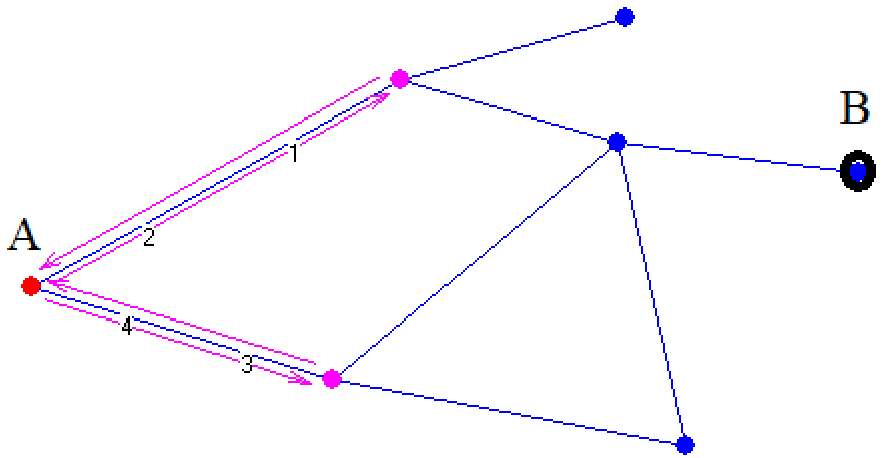
Алгоритм Терри построения маршрута соединяющего две вершины (*v u w*).

Движение по алгоритму Терри производится по ребрам графа в соответствии со следующими правилами:

1. идя по произвольному ребру, всякий раз отмечать направление, в котором оно пройдено,
2. исходя из некоторой вершины, всегда двигаться только по тому ребру, которое либо не было пройдено, либо было пройдено в другом направлении,
3. для всякой вершины, кроме начальной, отмечать ребро, по которому в эту вершину заходим впервые (первое заходящее ребро).
4. исходя из некоторой вершины, отличной от начальной, двигаться по первому заходящему ребру лишь в том случае, когда другой возможности нет.

Вспомогательные определения

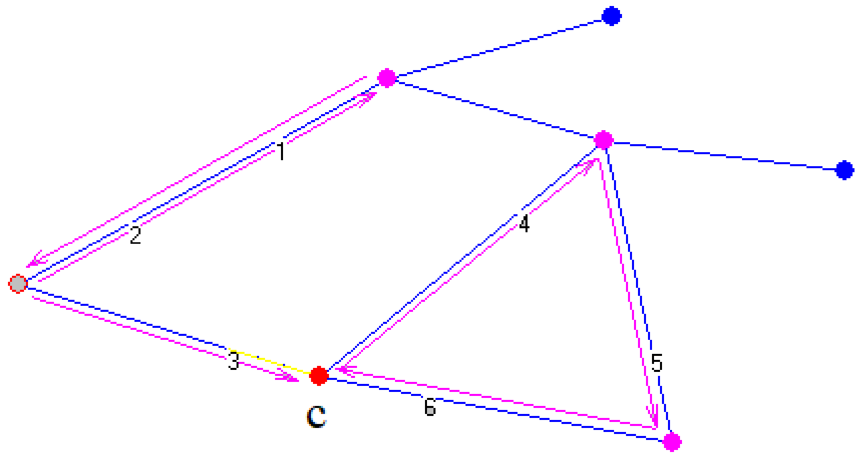
- Предположим, что из алгоритма Терри мы выбрали только два первых пункта и пытаемся построить маршрут, соединяющий вершины а и в.



Находится в тупике – это находится в некоторой вершине, из которой нельзя выйти, используя рассматриваемый алгоритм.

Вспомогательные определения

- Ребро, по которому мы попали в вершину A первый раз будем называть первым заходящим ребром.



- Для вершины c первым заходящим ребром будет ребро со стрелкой 3.

Обоснование алгоритма Терри. Часть 1.

- Если, начав движение согласно алгоритму Терри из вершины v, мы попали в тупик не достигнув вершины w, то
- 1. мы находимся в начальной вершине v.
- 2. все вершины графа G являются пройденными.

Докажем первый пункт. Предполагаем противное. Мы находимся в вершине u ≠ v. Пусть в вершине u мы побывали k раз (включая последний). Вершина u не начальная, значит по ребрам инцидентным вершине u в направлении «к» u мы прошли к-раз. Поскольку по одному ребру в одном направлении мы можем пройти только один раз, то ясно что ребер инцидентных u не менее, чем к. Из вершины u мы вышли к-1 раз, а сейчас выйти не можем, значит ребер инцидентных u всего к-1, что противоречит тому, что их должно быть не менее, чем к.

Обоснование алгоритма Терри. Часть 2.1.

- Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$, где $v_1 = v_k = v$ есть последовательность вершин, расположенных в том же порядке, в каком мы их проходили, действуя согласно алгоритму.
  - Покажем, что последовательность содержит все вершины. Предварительно докажем, что каждое ребро, инцидентное любой вершине v_j, где $1 \leq j \leq k$, было пройдено по одному разу в обоих направлениях
  - Доказательство проведем индукцией по j.

Обоснование алгоритма Терри. Часть 2.2.

- Базис индукции. j=1. Поскольку в замкнутом маршруте для каждой, содержащейся в нём вершине число исходов из этой вершины равно числу заходов в неё, то в силу утверждения “a“ и правилу 2 все рёбра, инцидентные вершине $v=v_1$ были пройдены по разу в направлении «из» v. Если $d(v)$ степень вершины v, то d(v) мы вышли из вершины v. Поскольку мы сейчас в вершине v, то ровно d(v) раз мы заходили в v, а в силу правила 2, каждый раз мы заходили в v по новому ребру, значит все рёбра, инцидентные вершине $v_1=v$, были пройдены в обоих направлениях по разу.

Обоснование алгоритма Терри. Часть 2.3.

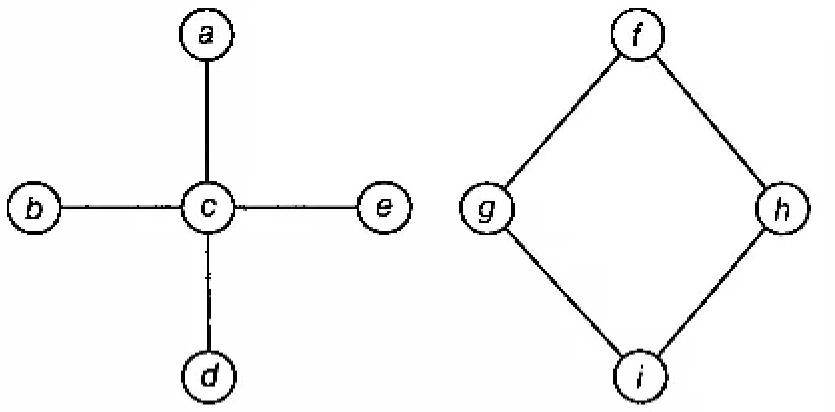
- Индуктивный шаг. Допустим, что при некотором *j*, где $2 \leq j \leq k$, доказываемое утверждение верно для всех вершин $v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}$. Докажем его для вершины v_j. Если $v_j = v_i$ для $i=1,\ldots,j-1$, то справедливость утверждения для v_j следует из индукционного предположения. Если это не так, то (v_{j-1}, v_j)- первое заходящее в вершину v_j ребро. Поскольку оно инцидентно вершине v_{j-1} , то по индуктивному предположению оно будет пройдено в обоих направлениях, что по правилу 4 возможно лишь в том случае, когда все остальные рёбра, инцидентные v_j, будут пройдены в направлении «из» v_j. Далее, поскольку в замкнутом маршруте, как уже отмечалось, число исходов из этой вершины равно числу заходов в неё, то, опираясь на правило 2, получаем, что все рёбра инцидентные v_j будут пройдены по разу в обоих направлениях.

Обоснование алгоритма Терри. Часть 2.4.

- Итак, каждую вершину в маршруте мы проходим вместе со смежными ей вершинами, откуда в силу связности графа G следует, что маршрут проходит через все вершины графа G, а это противоречит исходному предположению, что вершина w не была достигнута.

Замечание 1. Алгоритм Терри и его обоснования остаются в силе, если *G*-связный псевдограф.

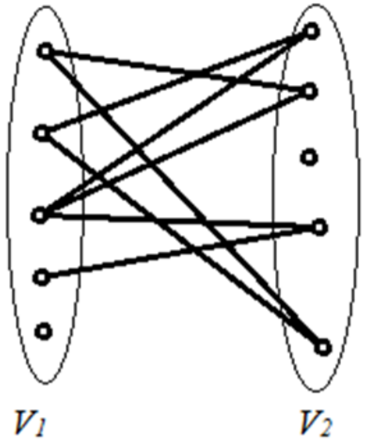
Замечание 2. Если псевдограф *G* не является связным, то с помощью алгоритма Терри, исходя из произвольной вершины *v* и, помечая пройденные вершины и рёбра, можно выделить компоненту связности псевдографа G, содержащую вершину *v*.



Двудольный граф

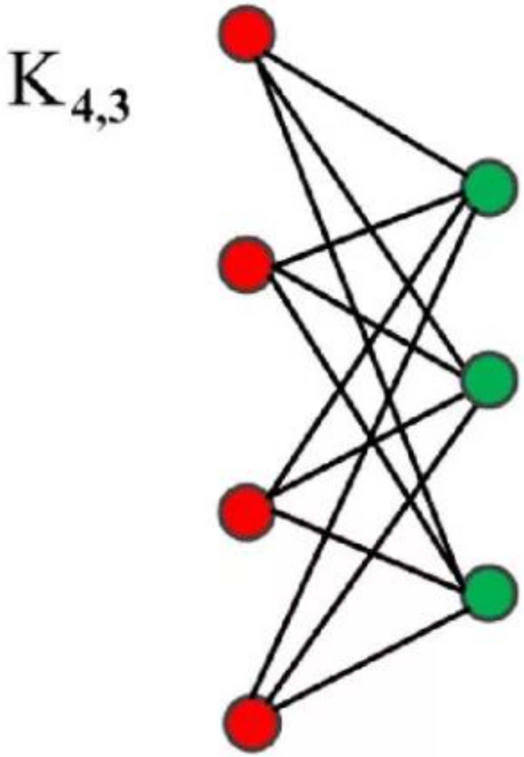
- Граф $G=<V, X>$ называется *двудольным*, если множество вершин V можно разбить на два пересекающихся подмножества V_1, V_2, таких, что для любого ребра $x \in X$, если x соединяет вершины u и v, то либо $u \in V_1$ и $v \in V_2$, либо $v \in V_1$ и $u \in V_2$.

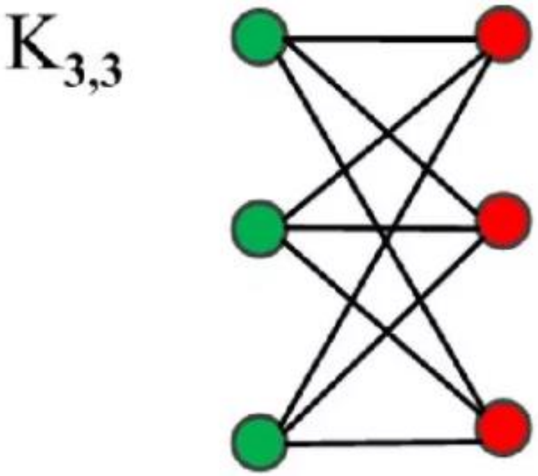
- Другими словами, граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества таких, что все ребра этого графа соединяют вершины из разных подмножеств. Эти множества нередко называются долями.



Полный двудольный граф

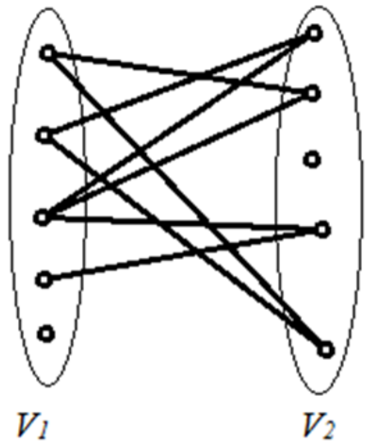
- Полный двудольный граф — специальный вид двудольного графа, у которого любая вершина первой доли соединена со всеми вершинами второй доли





Теорема 2.6. (Признак двудольности графа). Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют четную длину.

- Доказательство необходимости. Пусть граф G двудольный, значит существуют V1, V2 такие, что ребра соединяют вершины находящиеся в разных множествах Vi. Любое ребро имеет один конец в V1 , а другой V2.

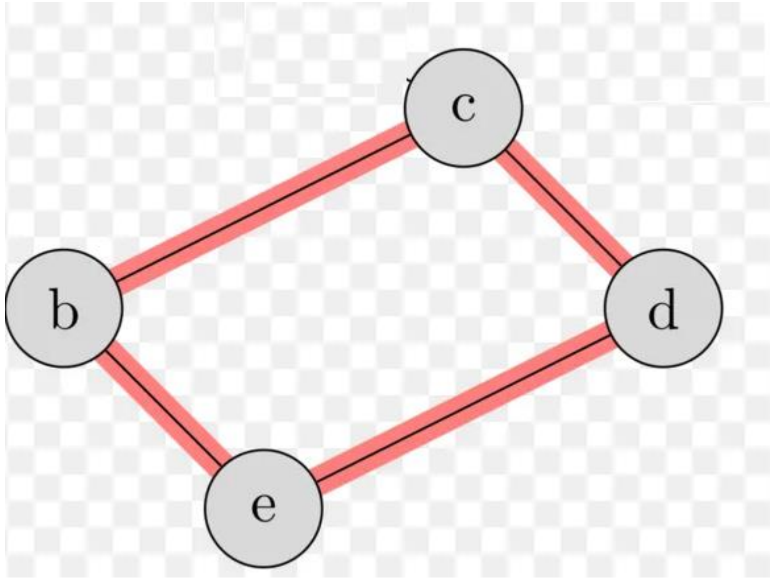


Лемма. Пусть начальная вершина цепи $u_1 \in V_1$, тогда если она имеет нечетную длину, то заканчивается в V_2 ,а если имеет четную длину, то заканчивается в V_1 .

- Доказательство проведем индукции по длине цепи.
- Базис индукции. Очевидно, лемма верна для длин $n=0$, $n=1$.
- Индукционное предположение. Пусть лемма верна для цепей длины меньшей, чем n. Докажем утверждение для цепи μ длины $n>1$. Уберем последнее ребро цепи μ. Получим цепь μ' длины n-1, для которой справедливо индукционное предположение. Если n–четно, то n-1 – нечетно, по индукционному предположению, цепь μ'заканчивается в V_2, тогда цепь μ заканчивается в $V_{1.}$ Если n–нечетно, то n-1 –четно, по индукционному предположению цепь μ' заканчивается в V_1, тогда цепь μ заканчивается в $V_{2.}$

Продолжение доказательства

- Рассмотрим произвольный цикл графа *G*. Ясно, что он будет содержать вершины из обоих множеств V_1, V_2. Пусть вершина *u* принадлежит циклу и множеству V_1, если цикл записать так, чтобы вершина *u* была начальной, то она будет и конечной, т.е. цикл должен закончится в множестве V_1, что по лемме возможно только в случае, если он имеет четную длину.

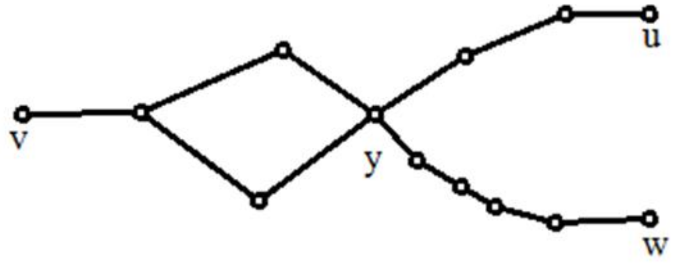


Доказательство достаточности

- Рассмотрим связный граф. Пусть в графе все циклы имеют четную длину. Выберем произвольную вершину v. Множество V_1 – образуем как множество вершин, находящихся на четном расстоянии от v ,V_2 как множество вершин на нечетном расстоянии от вершины v.

- Ясно, что множества V_1,V_2 будут разбиением множества вершин графа G, покажем, что они будут удовлетворять условию двудольности графа G.

Предполагаем противное, пусть существуют вершины u, $w \in V_1$, которые соединены ребром. Рассмотрим кратчайшие цепи из v в вершины u и w, они имеют четную длину, поскольку определяют расстояния от вершины v до вершин u и w. Эти цепи могут иметь совпадающие фрагменты, но поскольку они ведут в разные вершины, то наступит момент, когда они разойдутся. Если y – это точка их окончательного расхождения, то длина обеих цепей от v до y будет одинакова, поскольку цепи кратчайшие. Длина цепи из u в w, проходящая через y, будет иметь четную длину, поскольку длины цепей из v в u и w четные, и из их суммы мы вычитаем дна одинаковых числа – длины участков цепей соединяющих v и y. Добавим к рассмотренной цепи ребро (u,w) , получим цикл нечетной длины, чего быть не может. Аналогично разбирается случай, когда u, $w \in V_2$.



Продолжение доказательства

- Если рассматривать несвязный граф, то мы может отдельно поработать с каждой компонентой связности, а затем объединить все подмножества вершин, имеющие номер 1 и получить множество V1, объединить все подмножества, имеющие номер 2 и получить V2.