國 立 東 華 大 學　　一 百 學 年 度　　第 一 學 期　　期 中 考 考 卷

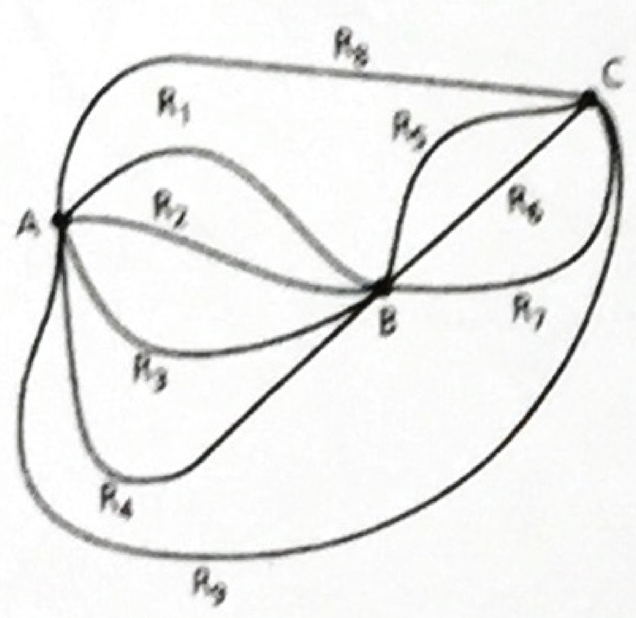
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 科目 | 離散數學 | 系別 | 資工系 | 班級 | 二年級 | 命題老師 | 賴寶蓮 |
| 日期 | 100 年 11 月 16 日 | 時間 | 14:10~17:00 | 學號 | | 姓名 | |

1. (10%) Verify that $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$ is a tautology.

2. (10%) Let x, y be two positive real numbers. Prove that if the product xy exceeds 25, then x >5 or y >5.

3. (15%) Determine all integer solutions to the equation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 10$, where $x_i \ge 0$, for all $1 \le i \le 4$.

4. (10%) Three small towns, designated by A, B, and C, are interconnected by a system of two-way roads, as shown the below figure.
   (a)、 In how many ways can Linda travel from town A to town C?
   (b)、 How many different round trips can Linda travel from town A to town C and back to town A?




5. (15%) Consider the following program segment, where i, j , and k are integer variables.

```
for i := 2 to 20 do
for j := 2 to i do
    for k := 2 to j do
        print (i * j + k)
```

How many times is the print statement executed in this program segment?

6. (10%) Let *I* be an index set where for each $i \in I$, $A_i \subseteq U$. Prove the *Generalized DeMorgan's Laws*.

$(a)\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$　　　　$(b)\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$

7. (10%) Prove the following two equations:

(a)、 $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^{n-1}$, $n$ is an even positive integer.

(b)、 $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^{n-1}$, $n$ is an odd positive integer.

8. (10%) Let p(x), q(x) denote the following open statements.

$p(x): x \le 3$　　　$q(x): x+1$ is odd

If the universe consists of all integers, what are the truth values of the following statements?

$(a)\, q(1)$　$(b) \neg p(3)$　$(c)\, p(7) \vee q(7)$　$(d)\, p(3) \wedge q(4)$　(e) $\neg(p(-4) \vee q(-3))$

9. (10%) Let the universe U={0,1,2,…,22} and Q be a proper subset of U of cardinality 7. Prove that there are two subsets H and S of Q such that $\sum_{x\in H} x = \sum_{x\in S} x$. Note, $\sum_{x\in\phi} x = 0$.

國立東華大學　一百學年度　第一學期　期中考考卷

| 科目 | 離散數學 | 系別 | 資工系 | 班級 | 二年級 | 命題老師 | 賴寶蓮 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 日期 | 100年11月16日 | 時間 | 14:10~17:00 | 學號 | 49921018 | 姓名 | 董以理 |

背面英文試題

1. (10%) 試證 “$[p\rightarrow(q\rightarrow r)]\rightarrow[(p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r)]$” 為一同意反覆(tautology)。

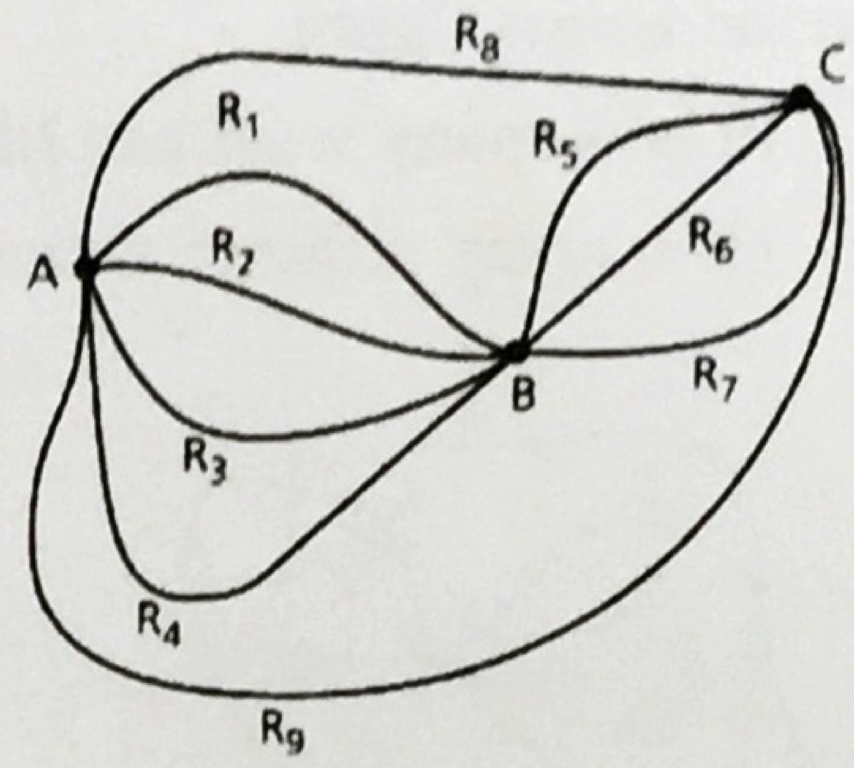
2. (10%) 假設x, y為兩個正實數, 請證明 “若乘積xy大於25，則 $x>5$ 或 $y>5$”。

3. (15%) $x_1+x_2+x_3+x_4<10$有幾組可能的解? 假設所有變數均為整數，其中$x_i\geq 0$，$1\leq i\leq 4$。

4. (10%) 如右圖所示，有A、B、C三座小鎮，並有道路連通。

   (a)、　Linda 有多少種方法從A小鎮到C小鎮?

   (b)、　Linda 有多少種方法從A小鎮到C小鎮再回至A小鎮?




5. (15%) 考慮下段程式碼， i、j、k 皆為整數變數。

```
for i := 2 to 20 do
for j := 2 to i do
    for k := 2 to j do
        print (i * j + k)
```

請問在此程式中，print敘述執行了多少次?

6. (10%) $I$ 為一個索引集合， $i\in I$，$A_i\subseteq \mathbb{U}$。請證明迪摩根定律 (Generalized DeMorgan's Laws)。

   $(a)\ \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}$　　　$(b)\ \overline{\bigcap_{i\in I} A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$

7. (10%) 請證明下面兩項等式:

   (a)、　$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n}=2^{n-1}$，n為正偶數。

   (b)、　$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots+\binom{n}{n}=2^{n-1}$，n為正奇數。

8. (10%) p(x), q(x) 為下面兩敘述。

   $p(x): x\leq 3$　　　$q(x): x+1$ 為奇數

   如果宇集$\mathbb{U}$為整數集，下列敘述何者為真?

   F　T　T　T

   $(a)\ q(1)$　$(b)\ \neg p(3)$　$(c)\ p(7)\vee q(7)$　$(d)\ p(3)\wedge q(4)$　(e) $\neg(p(-4)\vee q(-3))$

9. (10%) 設Q為從0到22這23個整數中任選7個相異數所組成的集合。請證明Q中必定存在兩個不同的子集合H與S，使得$\sum_{x\in H}x=\sum_{x\in S}x$，其中我們定義$\sum_{x\in\phi}x=0$。