

中原大學
電 機 工 程 學 系
專題報告

封面

四軸無人機軌跡追蹤與飛行控制設計

Four-axis UAV trajectory tracking and flight control design

指導教授：游仁德

專題生：10928102 林芊蓉

中 華 民 國 112 年 12 月

摘要

無人機技術的崛起引起了廣泛關注，從軍事到救援、民生再到農業等多個領域均有應用到此技術。這種技術的蓬勃發展體現了人類應對不同挑戰的多元需求。在軍事領域，無人機的自主飛行、高空偵察和目標追蹤等功能使其成為執行風險較高任務的理想工具。在救援中，無人機可飛越危險區域，提供即時視覺信息，協助救援隊伍迅速制定行動計劃。在民生和創意產業方面，無人機的高空攝影和影片拍攝豐富了視覺藝術的表現形式。農業領域中，搭載多光譜攝影儀的無人機透過遙感技術提供大面積農田的影像數據，為農業管理提供精確的建議，如時機的灌溉、施肥和病蟲害監測。

隨著科技進步，無人機技術成為引人注目的發展領域。本研究的動機在於深入了解無人機的基本運作內容，探討其在不同行業的應用潛力。首先，理解無人機的基本原理有助於深入了解其飛行能力、操控性以及在各種環境中的適應性。其次，研究無人機在不同行業中的應用案例有助於揭示其在解決現實問題、提高效率和降低成本方面的實際效益。同時，隨著人工智慧算法的發展，無人機在自主性和智能性方面的應用成為研究的重要方向。

本研究的目的是在於深入了解無人機的運動方式，透過運動方程式建模實現穩定的飛行狀態，並在仿真平台上模擬數據。研究將聚焦於內迴路和外迴路的控制系統，內迴路控制飛行器的姿態，外迴路負責整體運動方程。已有的研究成果和算法將被借鑑，特別是基於特殊正交群 $SO(3)$ 的姿態表示。此外，研究還將關注無人機的編程和開發，探討如何利用 PX4 仿真平台實現無人機的自動化控制和任務執行，進一步推動該技術的發展。

Abstract

The emergence of drone technology has sparked widespread interest and applications across military, rescue operations, civilian activities, and agriculture. This versatile technology reflects humanity's diverse needs and has proven valuable in various fields. Drones excel in military tasks, providing autonomous flight, high-altitude reconnaissance, and target tracking for high-risk missions. In rescue operations, they offer real-time visual data for efficient decision-making. In civilian and creative sectors, drones contribute to aerial photography and videography, enriching visual arts.

As technology progresses, drone technology becomes a compelling area of development. This study aims to delve into the fundamental operations of drones and explore their applications across industries. Understanding their principles enhances insights into flight capabilities and adaptability. Analyzing real-world applications reveals practical benefits in problem-solving, efficiency, and cost reduction. With advancements in artificial intelligence, the study also focuses on the autonomy and intelligence aspects of drones.

The study's objective is to comprehensively understand drone motion dynamics, achieve stable flight through equation-based modeling, and simulate data on a platform. It concentrates on inner and outer loop control systems, where the inner loop manages the aircraft's attitude, and the outer loop oversees overall motion equations. Leveraging existing research and algorithms, especially those based on $SO(3)$ for attitude representation, the study also addresses drone programming and development using the PX4 simulation platform to advance automation and mission execution.

致謝

首先，我要由衷感謝我的指導教授，游仁德老師。感謝您在整個研究過程中的悉心指導和無私分享。您總是不厭其煩地為我解釋複雜的公式和深奧的觀念，使我對無人機的研究有更深入的理解。您的啟發和指導是我完成這篇論文的重要支持。

感謝我的學長學姊們，尤其是在模擬程式的問題上給予的耐心協助。您們的經驗和專業知識為我的研究提供了寶貴的指引，讓我能夠更順利地進行實驗和模擬。在您們的協助下，我克服了不少困難，進一步提升了研究的深度和廣度。

在這個學術旅程中，我也要感謝身邊的朋友們。大家共同攻克疑難雜題，相互鼓勵，為彼此的成長添上了一抹亮麗的色彩。特別感謝共同面對挑戰的夥伴們，我們一同努力，共同進步，這段時光將永遠在我心中留下美好的回憶。

最後，我要感激我親愛的家人。父母一直以來的支持和鼓勵是我前進的動力。父親以航太工程的專業為我提供了豐富的知識和經驗，讓我能夠從不同的角度思考問題。母親和家人的支持讓我在這條學術之路上走得更堅定，您們是我最堅固的後盾。

在這篇論文中的每一個字背後，都是大家的辛勤付出和支持。感謝每一位在我學術旅程中相遇的人，你們讓這段旅程更加豐富和有意義。

目錄

摘要	I
Abstract	II
致謝	III
目錄	IV
圖目錄	V
表目錄	VI
第一章 緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究動機	2
1.3 研究目的	2
第二章 研究方法	3
2.1 相關數學符號與定義	3
2.2 內迴路	4
2.3 外迴路	6
2.4 圓周運動設計	6
2.5 直線運動設計	8
第三章 研究結果與分析	11
3.1 研究結果	11
3.2 結果分析	23
第四章 結論與未來方向	28
4.1 結論	28
4.2 未來方向	28
參考文獻	30
授權書	32

圖目錄

圖 2-1	J 的示意圖	4
圖 2-2	ω 與 $\dot{\omega}$ 的示意圖	4
圖 2-3	歐拉角示意圖	5
圖 2-4	旋轉矩陣 R[2]	5
圖 2-5	無人機的旋轉運動[1]	5
圖 2-6	圓周運動示意圖	6
圖 2-7	L 示意圖	7
圖 2-8	無人機飛行直線傾斜角度	9
圖 2-9	無人機飛行直線的角速度	9
圖 2-10	無人機飛行直線的角加速度	10
圖 2-11	由 θ 計算出 L 示意圖	10
圖 3-1	規劃的圓周運動角度	11
圖 3-2	規劃的圓周運動[X,Y]位置圖	12
圖 3-3	執行圓周運動所需的力矩	13
圖 3-4	實際圓周運動[X,Y]位置圖	14
圖 3-5	位置誤差圖	14
圖 3-6	實際圓周運動歐拉角	15
圖 3-7	空氣阻力	15
圖 3-8	L+空氣阻力	16
圖 3-9	實際圓周運動升力 L	16
圖 3-10	複合三角函數	17
圖 3-11	直線位置圖	17
圖 3-12	直線所需的 R	18
圖 3-13	直線所需的力矩	18

圖 3-14 QGroundControl 的介面	19
圖 3-15 PX4 SITL 和 jmavsim 啟動的介面	20
圖 3-16 inet IP 地址	20
圖 3-17 Comm Links 設定	21
圖 3-18 規劃路線	21
圖 3-19 模擬場景	22
圖 3-20 vscode 連接到 PX4_Autopilot	23
圖 3-21 未考慮空氣阻力[X,Y]位置圖	24
圖 3-22 無誤差的圓周的位置誤差圖	24
圖 3-23 運用三角函數的角度變化圖	25
圖 3-24 角度變化像三角形	26
圖 3-25 三角形圖形積分後得出的 ω	26
圖 3-26 常數 f	27
圖 3-27 sine 波 f	27
圖 4-1 在 MATLAB 中轉換成程式	29

表目錄

表 2-1 數學符號定義	3
表 2-2 我們所定義的數據	3
表 2-3 圓周設計	7

第一章 緒論

1.1 研究背景

無人機技術的崛起在當今社會中引起了廣泛的關注和應用。這種技術的發展不僅局限於軍事領域，還涵蓋了多個領域，包括救援、民生和農業。無人機的研究背景體現了人類對於應對不同挑戰的多元化需求，並在科技進步的推動下取得了巨大的突破。

在軍事領域，無人機的應用已經成為國家安全和軍事戰略的一個重要組成部分。無人機的自主飛行、高空偵察、目標追蹤等功能，使其成為執行風險較高任務的理想工具。例如：無人機在戰爭中可以取代傳統的有人飛機執行空中攻擊任務，降低了飛行員的風險。同時，無人機的高度機動性和即時反應性使其在情報搜集和實時監控方面具有獨特的優勢。

在救援領域，無人機被廣泛應用於災害應對和搜救任務。它們可以飛越危險區域，提供即時的視覺信息，協助救援隊伍制定更有效的行動計劃。例如，無人機在自然災害發生後能夠快速調查受災地區，提供精確的災害損害評估，有助於救援力量迅速作出應對決策。

在民生方面，無人機的應用範圍也在不斷擴大。許多人利用無人機進行高空攝影和影片拍攝，從而捕捉到以前難以取得的視角和畫面。這不僅豐富了視覺藝術的表現形式，也激發了創意產業的發展。

在農業領域，無人機的應用帶來了革命性的改變。搭載多光譜攝影儀的無人機能夠透過遙感技術收集大面積農田的影像數據。這些數據提供了關於植物生長狀態、土地質地和水分分佈的寶貴信息。透過人工智慧算法，無人機可以分析這些數據，提供精確的農業管理建議，如時機的灌溉、施肥和病蟲害監測，最大程度地提高農業生產效益。

總而言之，無人機的研究和應用正在不斷拓展其在各個領域的應用範疇。這種技術的進步不僅推動了科技的發展，也為解決複雜問題提供了全新的解決方案。無人機作為一種跨學科的技術，正不斷演進並影響著人類的生活和工作方式。

1.2 研究動機

隨著科技的不斷進步，無人機技術正成為一個引人注目的發展領域，其在多個領域的應用潛力引起了廣泛興趣。本研究的動機在於深入探討無人機的基本運作內容，旨在理解這一新興技術的核心原理和應用，並進一步探討其在不同行業中的可行性與發展前景。

首先，理解無人機的基本原理將有助於我們深入了解無人機的飛行能力、操控性以及在各種環境中的適應性。這不僅涉及到飛行器的結構設計和動力系統，還包括飛行控制系統和導航系統的運作原理。透過對這些技術的深入了解，我們可以揭示無人機如何實現自主飛行、自主避障以及高效執行各種任務。

其次，無人機在不同行業中的應用引起了我們的極大關注。在軍事、救援、民生和農業等領域，無人機展現了卓越的性能和應用價值。通過深入研究這些應用案例，我們可以了解無人機如何為複雜、危險或大範圍的任務提供可行的解決方案。這些案例研究還能夠揭示無人機在解決現實問題、提高效率和降低成本方面的實際效益。

此外，隨著人工智慧算法的不斷發展，無人機在自主性和智能性方面的應用也成為研究的重要方向。機器學習和深度學習等技術的引入使得無人機能夠實現更高層次的任務規劃、目標追蹤和環境感知。深入研究這些智能算法的運作機制，有助於我們更好地理解無人機的未來發展方向，並探討如何進一步優化其性能。

總而言之，這項研究的動機在於深入了解無人機的基本運作內容，探討其在不同領域的應用和應用潛力。透過深入研究無人機，我們有望挖掘更多創新應用，推動這一領域的未來發展，為社會帶來更多實用而先進的解決方案。

1.3 研究目的

本研究目的在於深入了解無人機的運動方式，並透過運動方程式建模，實現穩定的飛行狀態，並將數據上傳到仿真平台模擬。我們使用的方程式，分別為內迴路和外迴路，內迴路包含兩個方程式控制姿態： $J\dot{\omega} = \tau - \hat{\omega}J\omega$ 和 $\dot{R} = R\hat{\omega}$ ，還有外迴路為運動方程式： $m\dot{V} = mge_3 - fRe_3$ 和 $\dot{x} = V$ 。

在現有的研究基礎上，無人機的控制主要分為姿態控制和位置控制，即內迴路和外迴路。先前的研究（如 Yu[1]、Mardan[2]、王祈盛[3]、陳則諭[4]）中，已有對特殊正交群 $SO(3)$ 的姿態表示進行深入探討，並運用 MATLAB 的 Simulink 呈現了姿態模擬和位置控制的結果，對四軸飛行器的相關知識也有詳盡介紹，包括測試平台和實際飛行結果。

隨著無人機的技術發展，越來越多人開始進行無人機的編程和開發，例如利用 Python 等程式進行無人機的控制與自動化。這些開發者可以透過個總平台和開發套件，如 PX4 仿真平台，來實現無人機的自動化控制與任務執行，因此，在完成無人機的設計後，我們會運用 PX4 仿真平台去模擬實際的飛行情況。

第二章 研究方法

2.1 相關數學符號與定義

在開始介紹公式前，我們先來定義無人機相關數學符號及座標軸的關係，透過表 2-1，我們能清楚知道各項數學符號的定義。

表 2-1 數學符號定義

$J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	轉動慣量矩陣
$R \in SO(3)$	從體座標到慣性座標的旋轉矩陣
m	質量
g	重力加速度
f	純量升力
θ	歐拉角
$X \in \mathbb{R}^3$	無人機位置
$V \in \mathbb{R}^3$	無人機速度
$\omega \in \mathbb{R}^3$	角速度
$\hat{\omega} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	三階反對稱矩陣
$\tau \in \mathbb{R}^3$	無人機力矩

了解我們所使用的數學符號後，我們要來定義我們所使用到的數據，如表 2-2 所示。

表 2-2 我們所定義的數據

所使用的數據	單位
$m = 2$	kg
$g = 9.8$	m/s^2
$J = \text{diag}[0.65; 0.65; 0.7]$	$kg \cdot m^2$
$\omega^* = 0.2$	弧度

2.2 內迴路

我們使用方程式研究無人機的姿態，又稱內迴路，公式分別為：

$$J\dot{\omega} = \tau - \hat{\omega}J\omega \quad (1)$$

$$\dot{R} = R\hat{\omega} \quad (2)$$

其中，公式(1)是旋轉動力學中的基本運動方程，其中 J 表示轉動慣量，當轉動慣量的值越大，代表此物體越難轉動，反之轉動慣量的值越小，代表此物體越容易轉動，圖 2-1 為 J 的示意圖。

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

圖 2-1 J 的示意圖

τ 表示力矩，我們需要通過調整力矩，使得我們的無人機達到我們所想的軌跡。

ω 表示角速度， $\hat{\omega}$ 是一個三階反對稱矩陣，由向量 ω 所代表的軸與另一個垂直於該軸的向量所構成的向量，且 $\hat{\omega}$ 具有特殊性質如公式(3)，圖 2-2 為 ω 與 $\hat{\omega}$ 的示意圖。

$$\hat{\omega}^T = -\hat{\omega} \quad (3)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

圖 2-2 ω 與 $\hat{\omega}$ 的示意圖

公式(2) $\dot{R} = R\hat{\omega}$ ，此方程式是描述旋轉向量 R 在無外力作用下的運動，也被稱為簡單的剛體運動方程式。 R 是由 θ 歐拉角所轉換成的旋轉矩陣， θ 是由右手迪卡爾座標圍繞 X 、 Y 、 Z 軸旋轉所形成，分別用 roll、pitch 和 yaw 表示，如圖 2-3 所示。

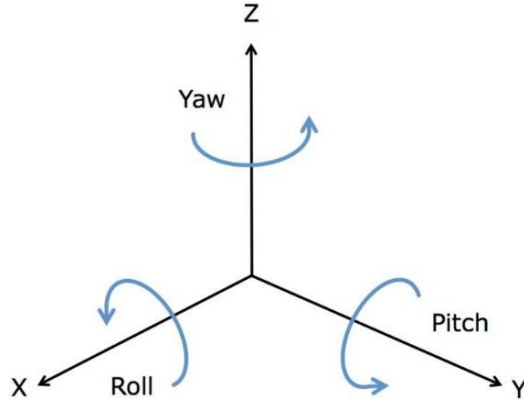


圖 2-3 歐拉角示意圖

R 是正交的旋轉矩陣，用來描述一個物體在三維空間中的旋轉，該矩陣可以描述物體的旋轉方向和角度。由 Z-X-Y 歐拉角的三個角度 (ψ, ϕ, θ) 依次旋轉，可得圖 2-4 旋轉矩陣 R。旋轉矩陣常用來設計和控制旋轉運動，且 R 滿足公式(4)。

$$RR^T = R^TR = I \quad (4)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta - s\phi s\psi s\theta & -c\phi s\psi & c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi \\ c\theta s\psi + c\psi s\phi s\theta & c\phi c\psi & s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi \\ -c\phi s\theta & s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

圖 2-4 旋轉矩陣 R[2]

圖 2-5 為無人機的旋轉運動表示圖。

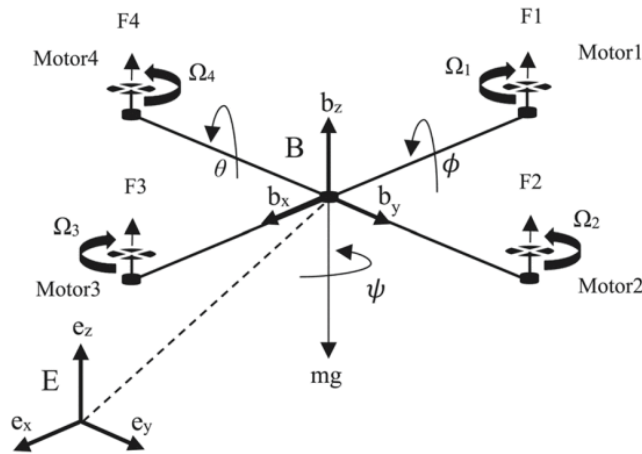


圖 2-5 無人機的旋轉運動[1]

2.3 外迴路

外迴路為運動方程式:

$$m\dot{V} = mge_3 - fRe_3 = W + L \quad (5)$$

$$\dot{x} = V \quad (6)$$

f 為純量升力，向量升力為 $L = -fRe_3$ 也是我們所要控制的一項，需要注意的是我們 z 軸向下為正。由上述的內外迴路四個公式，我們可以透過 Simulink 呈現了簡單的姿態模擬和位置控制的結果。

2.4 圓周運動設計

做完基礎的模擬後，因為我們的控制皆為隨意給的參數，無人機飛行軌跡無法確定，因此我們想要試試看模擬圓周運動，圖 2-6 為圓周運動的示意圖。

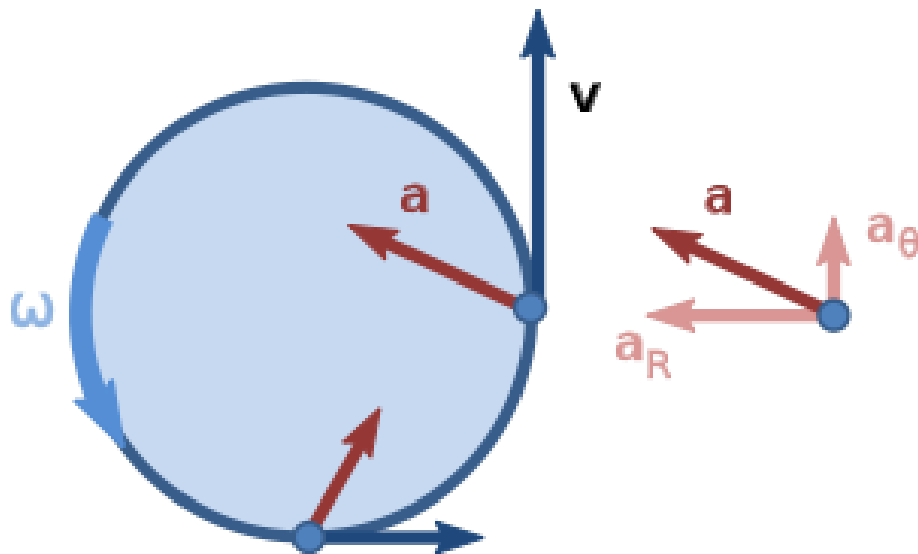


圖 2-6 圓周運動示意圖

為模擬出圓周運動，我們必須先做出理想的圓周運動，為了區別規劃值與實際值，規劃值皆加上的*。我們需要先假設等高飛行的圓周運動位置、半徑、角速度，表 2-3 為我們所設計的圓周。

表 2-3 圓周設計

位置 X^*	$x^* = r^* \cos \omega^* t$
	$y^* = r^* \sin \omega^* t$
	$z^* = \text{constant}$
速度 $ v^* $	$ v^* = r \omega^*$
加速度 $ a^* $	$ a^* = r \omega^{*2} = \frac{ v^* ^2}{r}$
向心力 $ F^* $	$ F^* = m a^* = \frac{m v^* ^2}{r}$

由我們所設計圓周結合無人機的內外迴路公式，我們可以得到升力 L ，如圖 2-7 所示。我們可以得知升力 L 為重力的反向向量與向心力 F 的向量和，且 b_3 為 L 的單位向量，因此我們可以得出公式(7)。

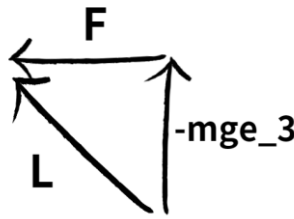


圖 2-7 L 示意圖

$$b_3^* = \frac{F - mge_3}{|F - mge_3|} = -\frac{L^*}{|L^*|} \quad (7)$$

b_1 為切線速度的單位向量，由此我們可以得到公式(8)。由 $R = [b_1, b_2, b_3]$ 三個的座標皆互相垂直，可知 b_2 為 b_3 與 b_1 的外積，即可得到我們理想的旋轉矩陣 R^* 。

$$b_1^* = \frac{v_d}{\|v_d\|} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -y^* \\ x^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

由我們所設計得到的結果與理想值相減，便可以得到誤差 E ，公式(9)、(10)分別為位置與速度的誤差。

$$E_x = X - X^* \quad (9)$$

$$E_v = V - V^* \quad (10)$$

為了求出控制 f ，透過微分(10)可以得公式(11)。由公式(11)結合運動方程式中的公式(5)可得公式(12):

$$E_a = a - a^* \quad (11)$$

$$E_a = \dot{V} - \dot{V}^* = g e_3 - \frac{f_d}{m} R_d e_3 - a^* \quad (12)$$

為了求出控制 τ ，我們需要先求出理想值 R_{ideal} ，理想值即為實際與規劃的差距，我們可以由公式(13)，求出理想的升力 L ，即可求出 b_3 理想值。求出 E_R 的動態方程式，並利用內迴路中的公式(2)代換來得到公式(14)，為求 ω_{ideal} 我們可以使用公式(14)來消除旋轉矩陣 R 並進行移項，得到公式(15)。

$$L_{ideal} = -m g e_3 + F - k m E_x - k m E_v, k > 0 \quad (13)$$

$$\dot{E}_R = \dot{R} - \dot{R}_{ideal} = R \hat{\omega} - R^* \hat{\omega}^* \quad (14)$$

$$\omega_{ideal} = \widetilde{R^T \dot{R}^*} - k R^T E_R, k > 0 \quad (15)$$

為求出 τ ，我們可以使用內迴路的公式(1)代入 \dot{E}_ω 的動態方程式。得到公式(16)，我們將 τ 分別分為 τ_a 、 τ_b 兩部分， τ_a 可以使用公式(17)計算，又因 ω_{ideal} 為常數，微分後為 0，因此公式(17)可簡化為 $\hat{\omega} J \omega$ 。 τ_b 則可以使用公式(18)，最終我們可以得出我們的控制 τ ，得出無人機飛行圓周的軌跡。 V 是將反對稱矩陣轉換為三維向量。

$$\dot{E}_\omega = \dot{\omega} - \dot{\omega}_{ideal} = J^{-1}(\tau - \hat{\omega} J \omega - J \dot{\omega}_{ideal}) \quad (16)$$

$$\tau_a = \hat{\omega} J \omega + J \dot{\omega}_{ideal} = \hat{\omega} J \omega \quad (17)$$

$$\dot{E}_w = J^{-1} \tau_b, \tau_b = -k E_\omega \quad (18)$$

2.5 直線運動設計

由於我們所設計的圓周運動並不完全自由，而是受限於從我們預先設定的起始點出發的位置。因此，我們將假設無人機一開始懸浮在座標點[40;0;-50]處。我們的目標是將無人機移

動到座標點[50;0;-50]處，同時考慮無人機需要傾斜 15 度以面向目標位置，並在短短的 2 秒內完成這一任務。這一過程的詳細圖示如圖 2-8 所示。根據這個過程，我們可以進行一次和二次微分，來計算達到指定位置所需的角速度 ω 和角加速度 $\dot{\omega}$ ，如圖 2-9 和圖 2-10 所示。

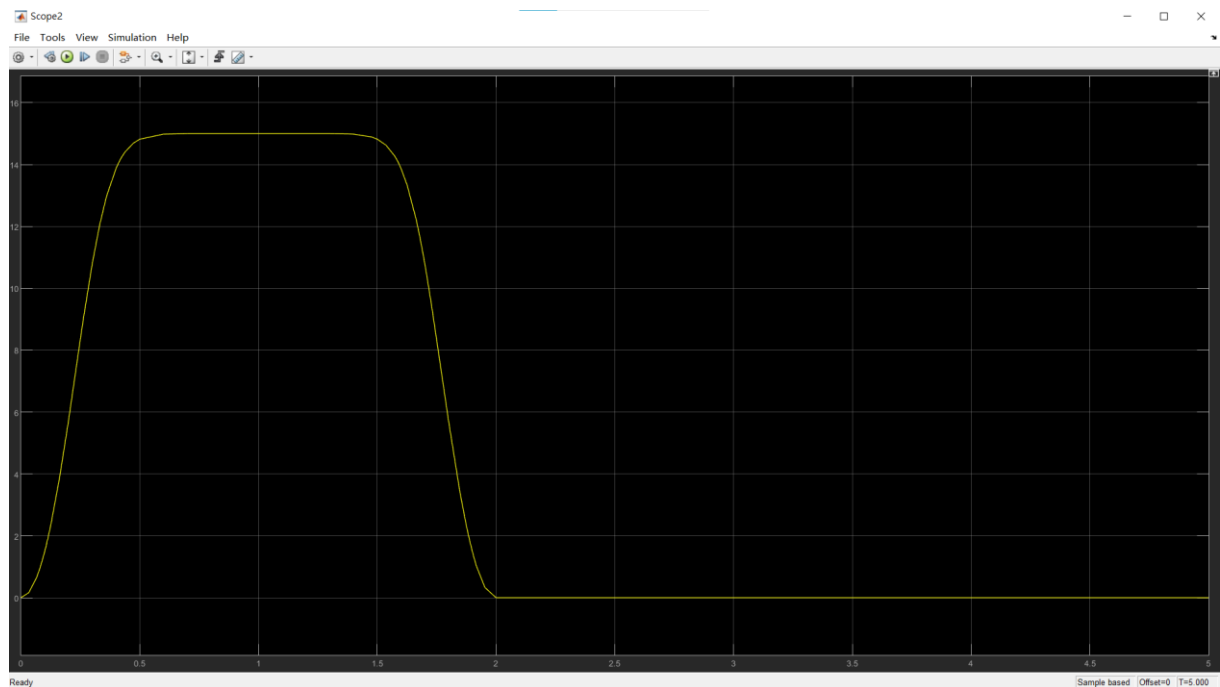


圖 2-8 無人機飛行直線傾斜角度

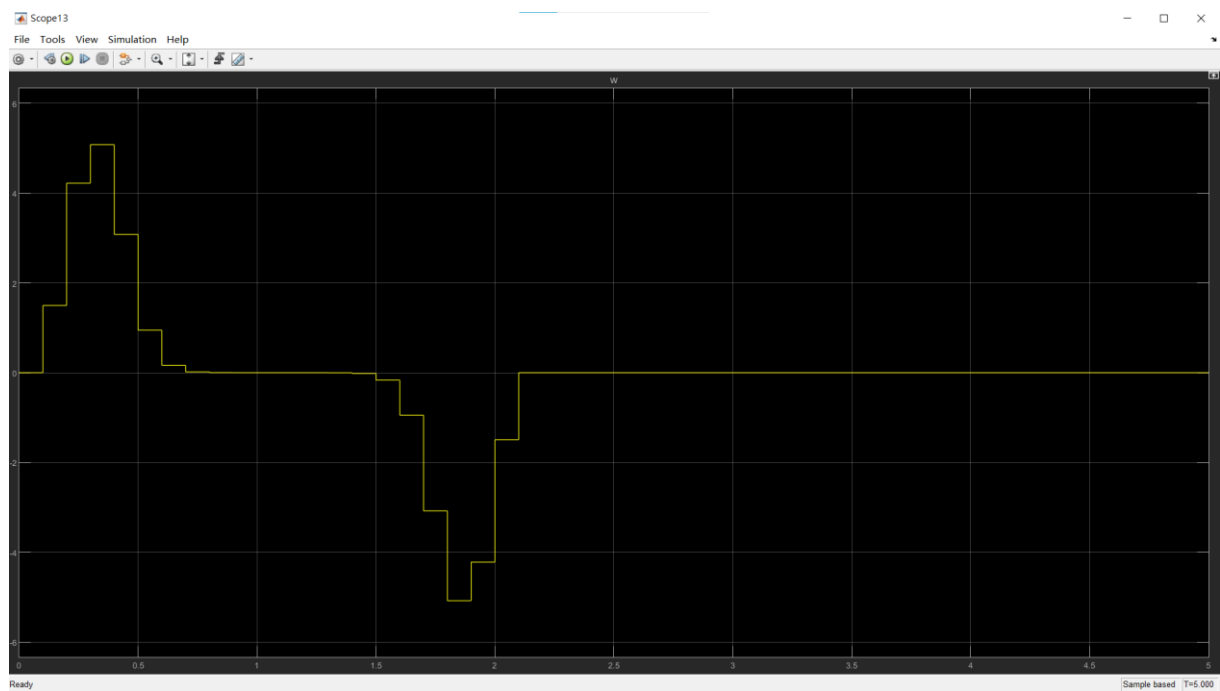


圖 2-9 無人機飛行直線的角速度

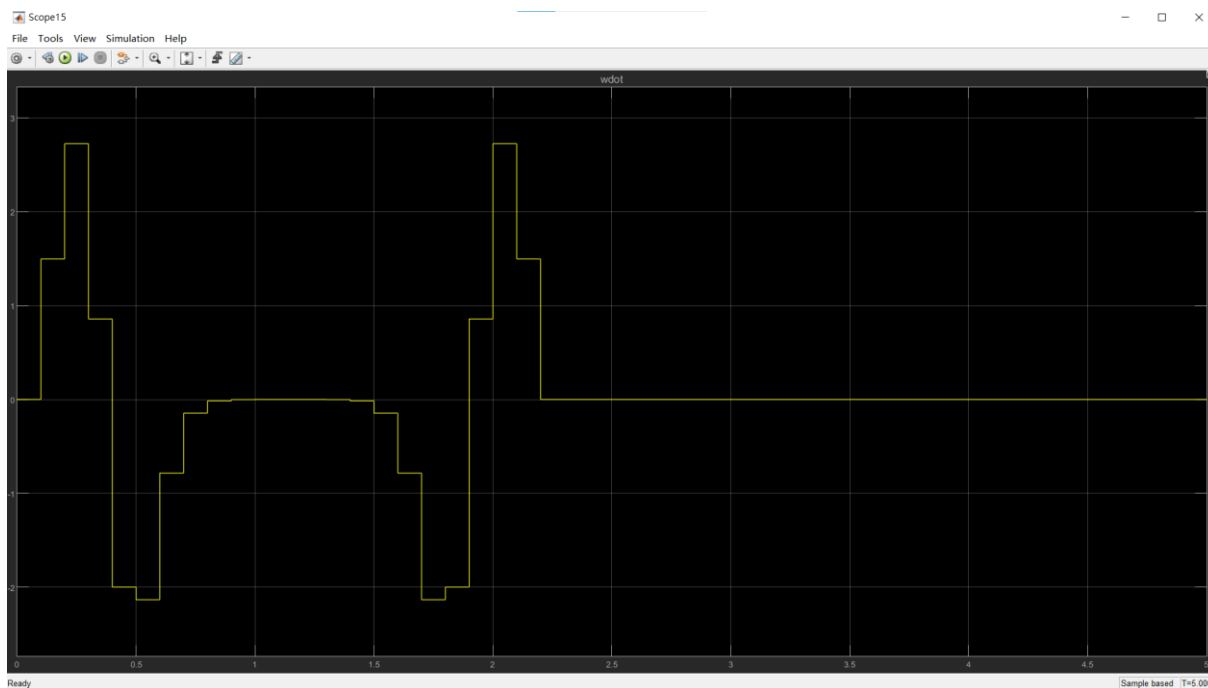


圖 2-10 無人機飛行直線的角加速度

除此之外，由於我們已經設定出 θ 了，因此這也間接設定好了升力 L ，如圖 3-10 所示。我們可以得到公式 (19)。

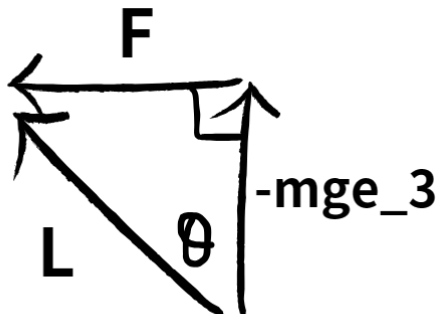


圖 2-11 由 θ 計算出 L 示意圖

$$L = \frac{-mge_3}{\cos\theta} \quad (19)$$

為了得到我們所需的力矩，即控制，我們可以由公式(1)細分為公式(20)、(21)、(22)，考慮我們的設計僅涉及 x 座標的移動，因此我們僅會用到公式(20)。由於我們設計的角速度 ω_2 、 ω_3 皆為 0，因此力矩只受 ω_1 的影響。為了能控制姿態，我們還需要算出旋轉矩陣 R ，已知升力 L ，我們可以透過公式(7)算出單位向量 b_3 ，且知 $b_1 = [1; 0; 0]$ ，可透過計算 b_3 與 b_1 的外積得到單位向量 b_2 。

$$J \dot{\omega}_1 = -(J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 + \tau_1 \quad (20)$$

$$J \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 + \tau_2 \quad (21)$$

$$J \dot{\omega}_3 = \tau_3 \quad (22)$$

第三章 研究結果與分析

3.1 研究結果

透過第二章所提到的公式，我們可以建立內外迴路。透過 MATLAB，我們成功設計了一個理想的圓周運動模型，同時考慮了誤差 E 的影響。接著，我們利用這些公式實現了圓周運動。

在我們的設計中，我們選擇了半徑為 50 且高度為 50 的圓周運動。我們設定理想的角速度為 $\omega_{ideal} = 0.2$ (弧度)。歐拉角的設定如下，如圖 3-1 所示：黃色為 Yaw，紅色為 Roll(11.53 度)，藍色為 Pitch(0 度)。

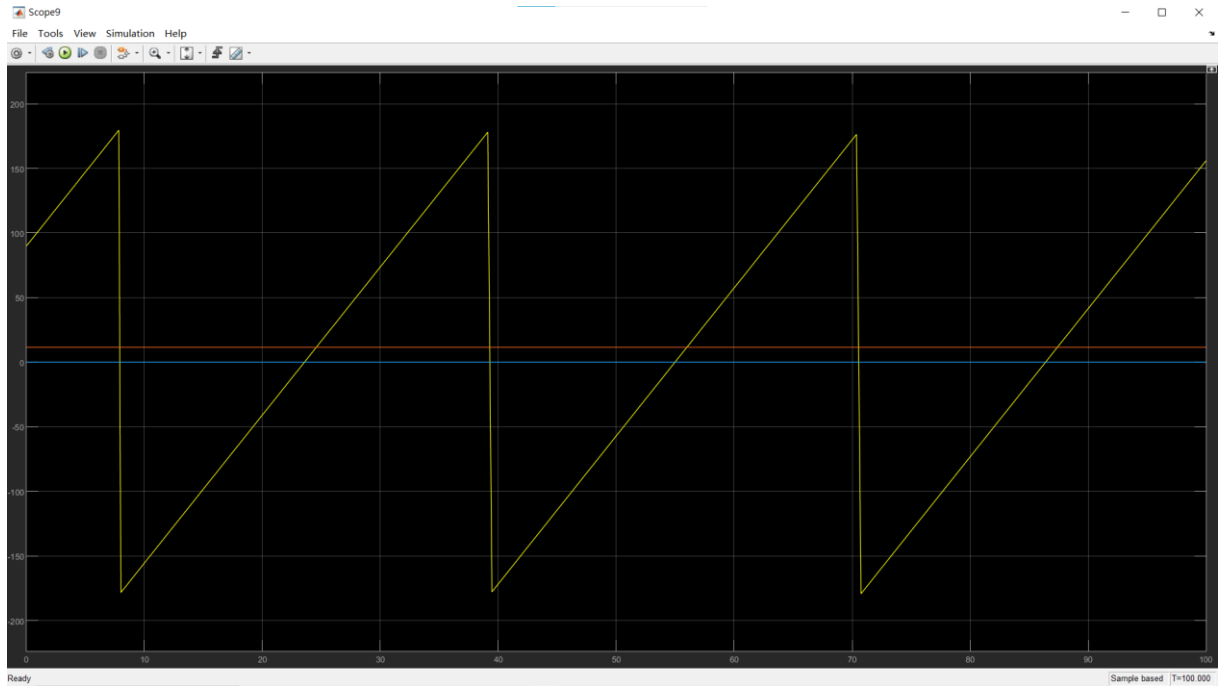


圖 3-1 規劃的圓周運動角度

這些參數的選擇是基於我們對圓周運動的期望，並且為了模擬真實飛行情境而設計的。

此外，我們還生成了[X,Y]位置圖，如圖 3-2 所示。這張圖清晰展示了無人機在理想狀態下的位置變化。這些資訊將被用來計算誤差值，進而量化我們需要調整控制的大小，以實現無人機飛行軌跡的圓周運動。

我們的目標是通過誤差分析，找出控制參數的最佳設定，使無人機能夠更準確地遵循所期望的圓周運動軌跡。

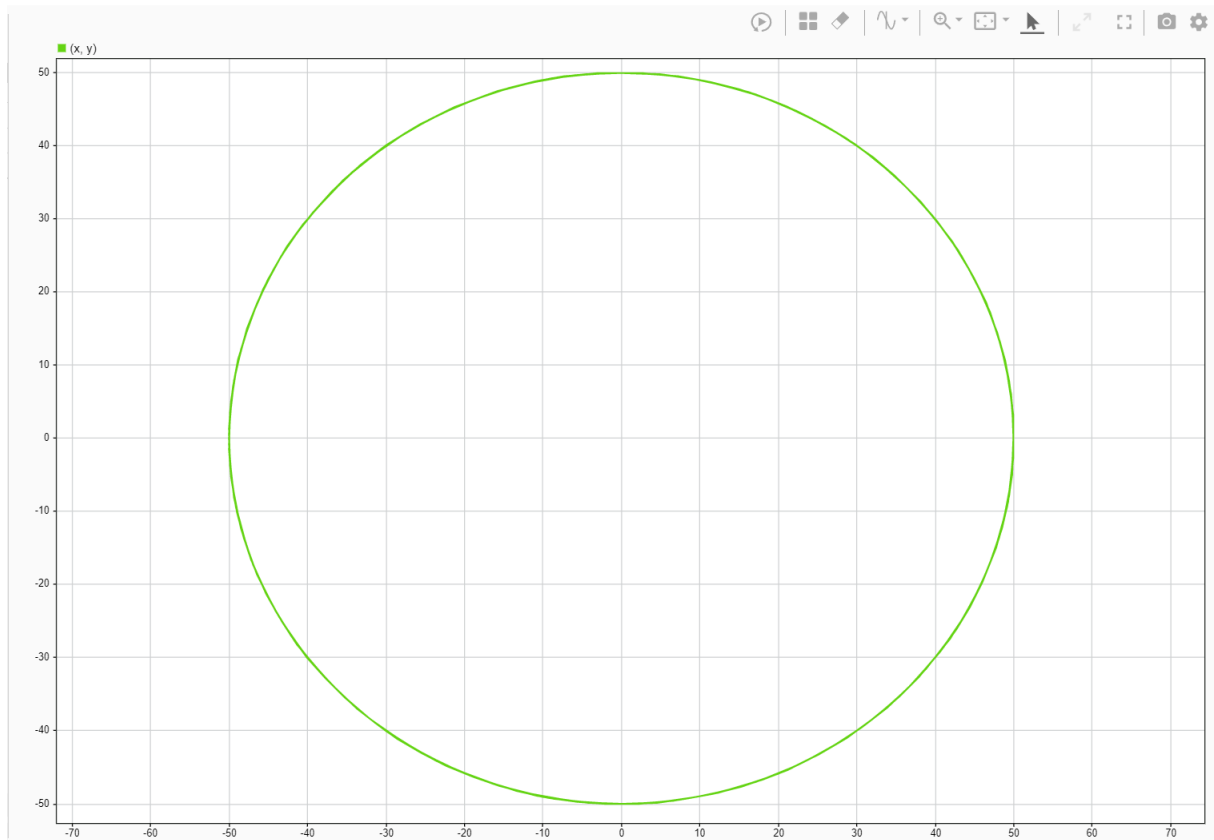


圖 3-2 規劃的圓周運動[X,Y]位置圖

透過上述的圓周運動，我們能夠設計所需的力矩，如同圖 3-3 所呈現的。由於一開始處於懸浮狀態，為了使無人機執行圓周運動，我們需要在初始階段施加一定的力，使無人機達到圓周運動的姿態。在這個過程中，機體受到的力矩將使其產生適當的傾斜角度，使其能夠開始繞著中心點旋轉。

當達到所需的姿態後，為了維持圓周運動，無人機的姿態將保持穩定，此時所需的力矩將趨近於零。這表示無人機處於一種自持平衡的狀態，繼續按照預定的軌道進行運動，而不需要持續地受到外力的干擾。

圖 3-3 中縱軸以牛頓為單位，橫軸以秒為單位，清晰地呈現了在時間軸上所需的力矩變化。這個時間-力矩圖有助於我們理解在無人機執行圓周運動的過程中，力矩如何隨著時間的推進而變化。

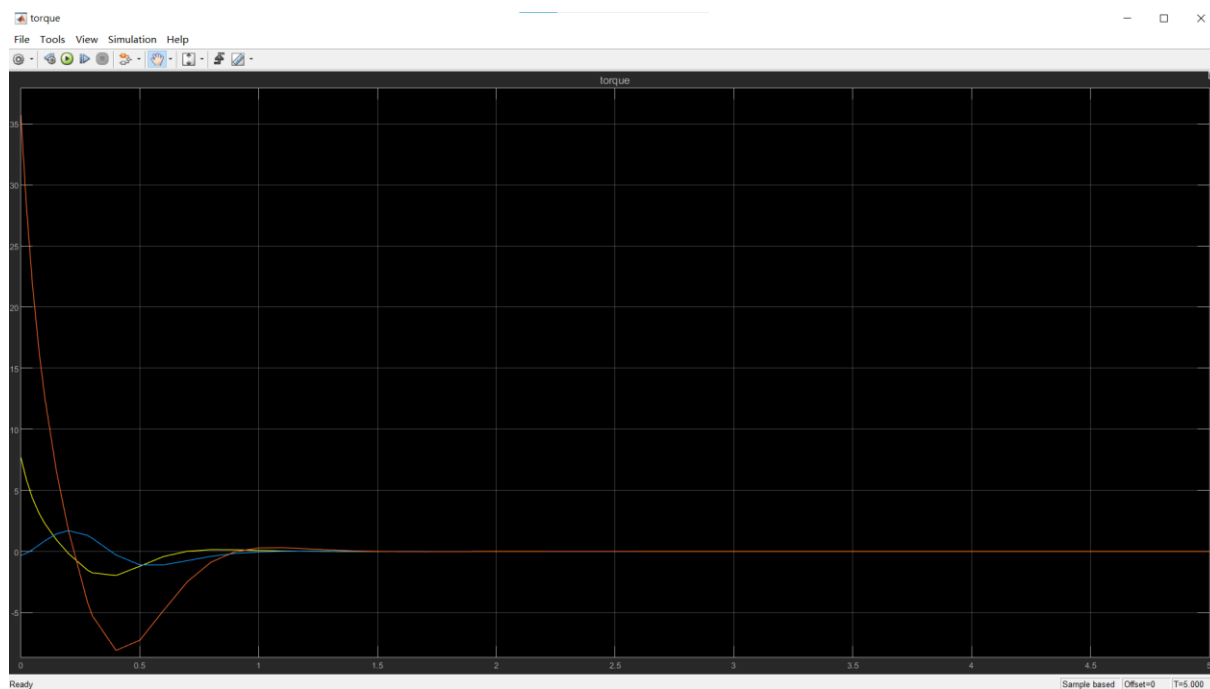


圖 3-3 執行圓周運動所需的力矩

圖 3-4 展示了透過圖 3-3 中所呈現的力矩而產生的圓周運動之[X,Y]位置圖。該圖形呈現了無人機在飛行 100 秒內的運動軌跡，其中橫軸表示 x 座標，縱軸表示 y 座標。

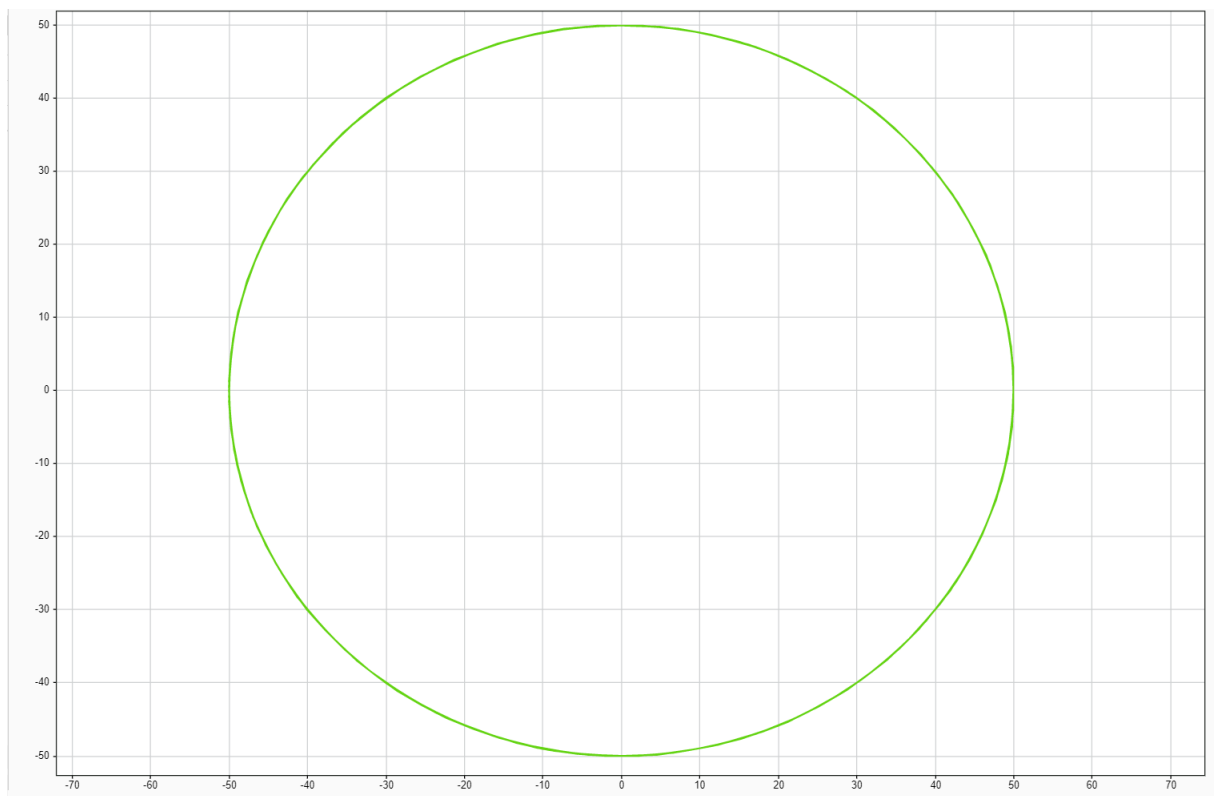


圖 3-4 實際圓周運動[X,Y]位置圖

圖 3-5 為我們實際與規劃值的位置誤差圖，橫軸以秒為單位，縱軸表示誤差，以公尺為單位，可以從圖中觀察到，縱軸的比例為 10^{-10} ，這表示我們的誤差值非常小，趨近於 0。

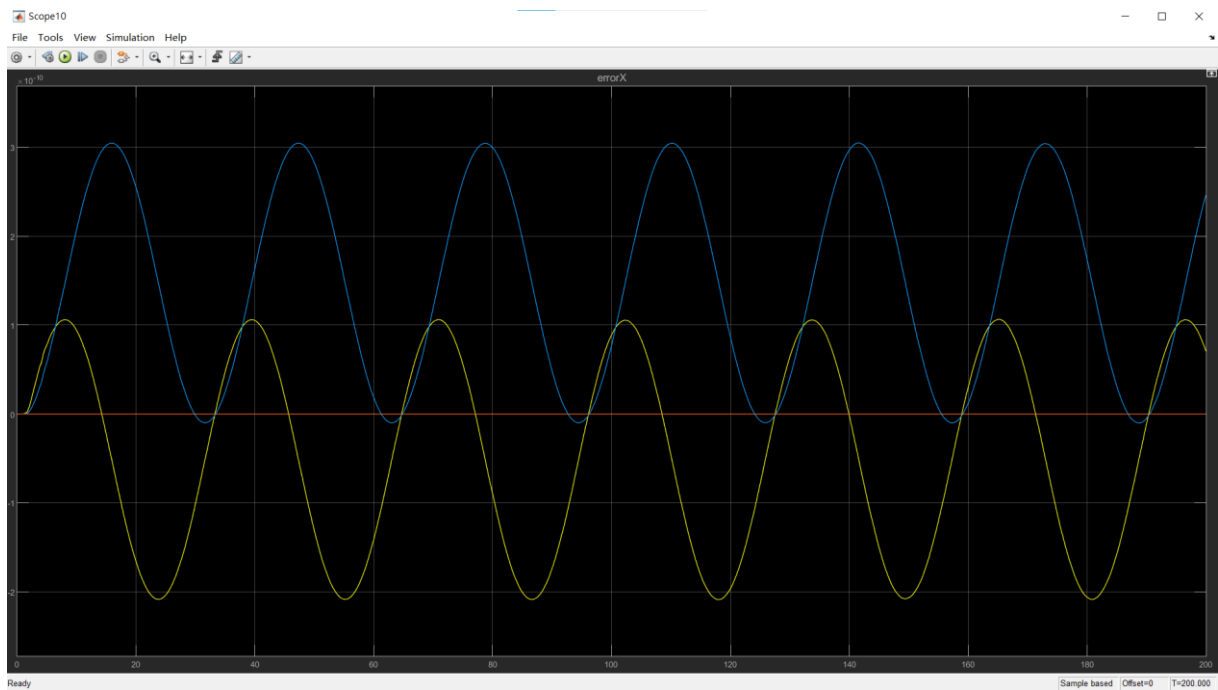


圖 3-5 位置誤差圖

圖 3-6 展示了實際測試中獲得的歐拉角度資訊，其中黃色曲線代表 Yaw（偏航角），紅色曲線代表 Roll（橫滾角，值為 11.53 度），而藍色曲線代表 Pitch（仰角，值為 -0.4581 度）。所有的角度單位均為度。

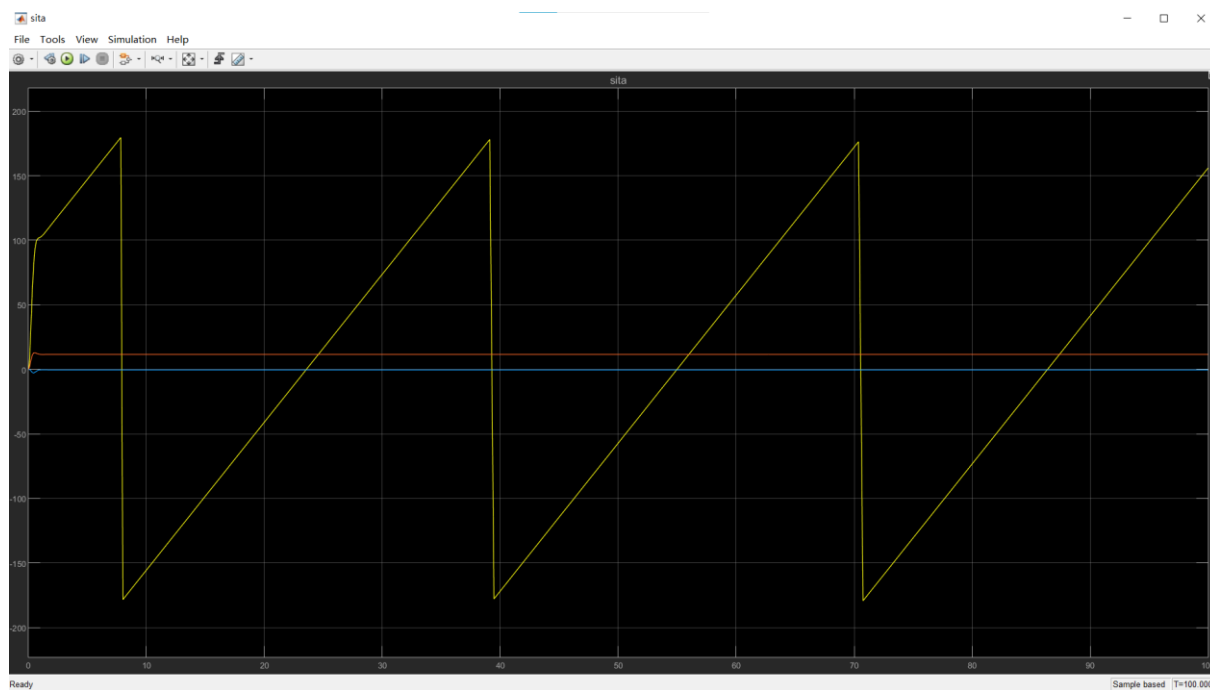


圖 3-6 實際圓周運動歐拉角

在圖 3-7 中，我們可以看到，我們所設定的空氣阻力。

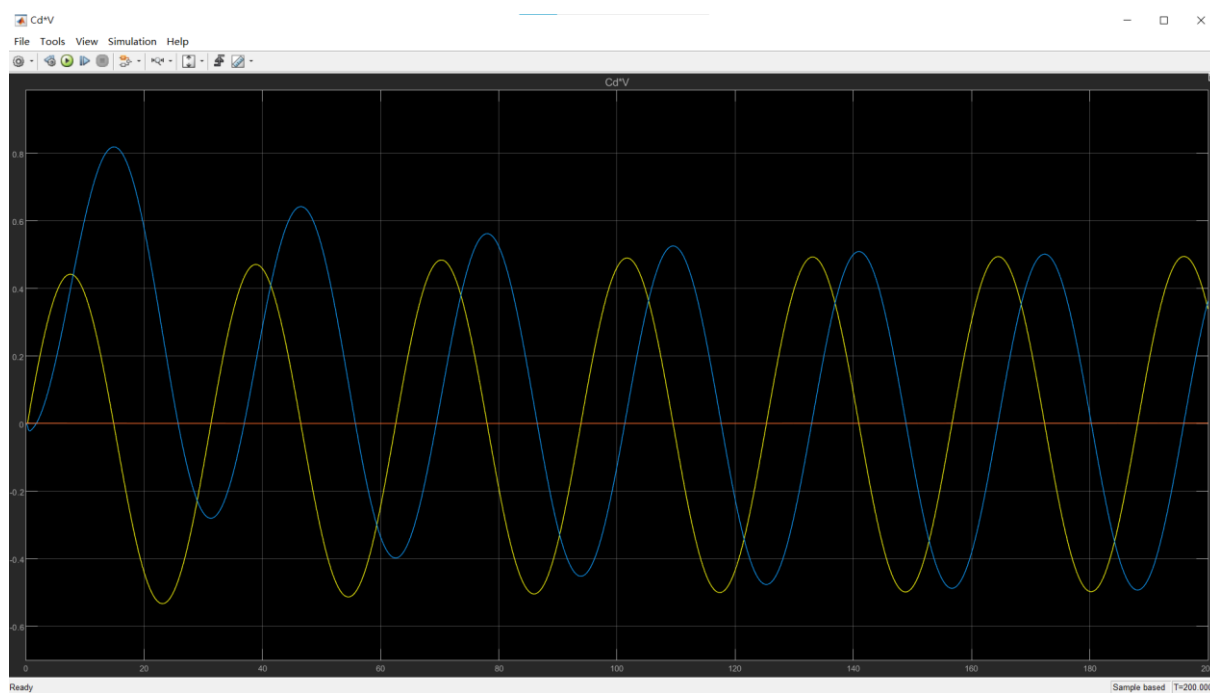


圖 3-7 空氣阻力

圖 3-8 可以得到升力+空氣阻力，沿著圓的切線方向（即飛行方向），會有顛倒方向的空氣阻力（即 $C_d \cdot v$ ），所以有三個力彼此都垂直。

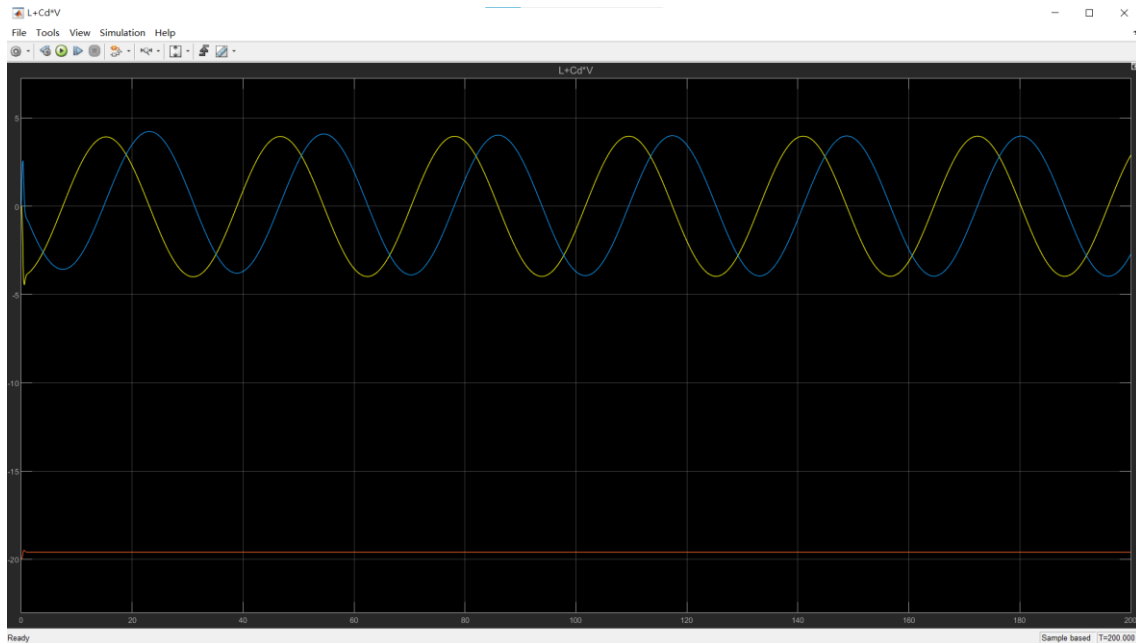


圖 3-8 L+空氣阻力

圖 3-9 展示了，實際無人機飛行時，所需要的升力 L (含向量)，可以從中得知我們的升力方向會隨時間變化。

需要注意的是，由於一開始無人機處於懸浮狀態，因此在實現所需的特定角度之前，需要一定的時間來穩定無人機，使其轉向到目標角度。

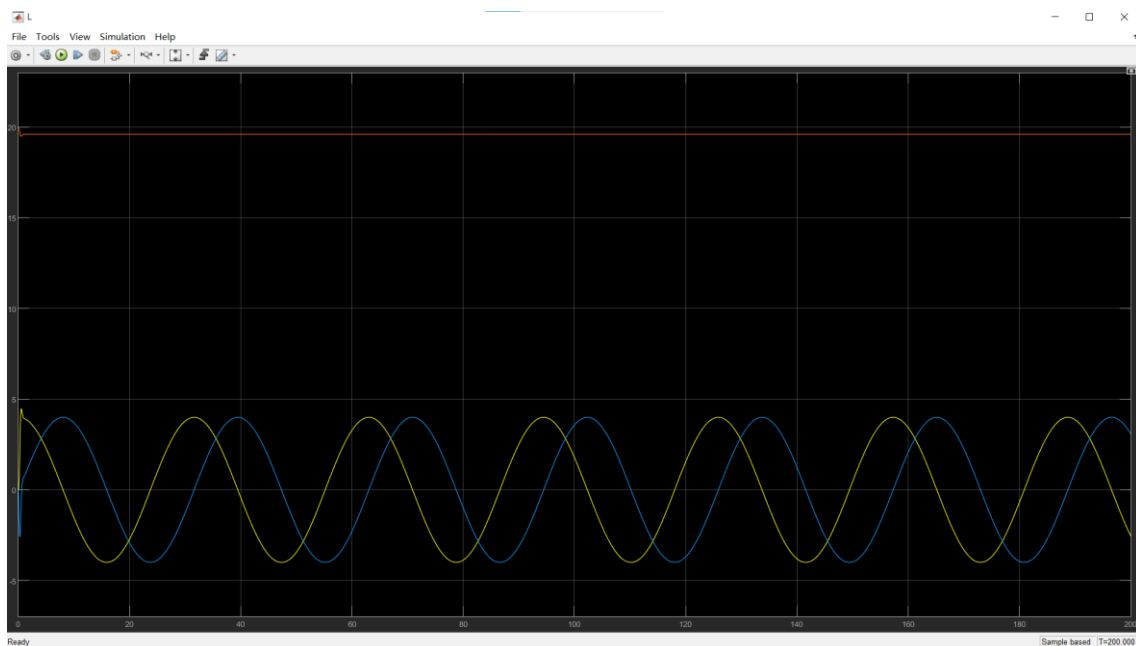


圖 3-9 實際圓周運動升力 L

為了準確設計直線飛行所需的角速度，我們採用複合三角函數和判斷式進行計算，以繪製出所需的角速度圖形，具體如下圖 3-10 所示。透過上述公式和我們所設計的內容，我們能夠得到直線運動的位置圖，詳見圖 3-11。利用這些參數，我們能夠逆向計算出無人機所需的 R（旋轉矩陣）與 τ (力矩)，進而實現精確控制。

```
MATLAB Function1
1  function z = fcn(t,T)
2  if (t<=0.5*T)
3  y = -1+cosh(t);
4  z = 15*tanh(20*y);
5  else
6      dt=T-t;
7      if dt<0
8          dt=0;
9      end
10 y = -1+cosh(dt);
11 z = 15*tanh(20*y);
12 end
```

圖 3-10 複合三角函數

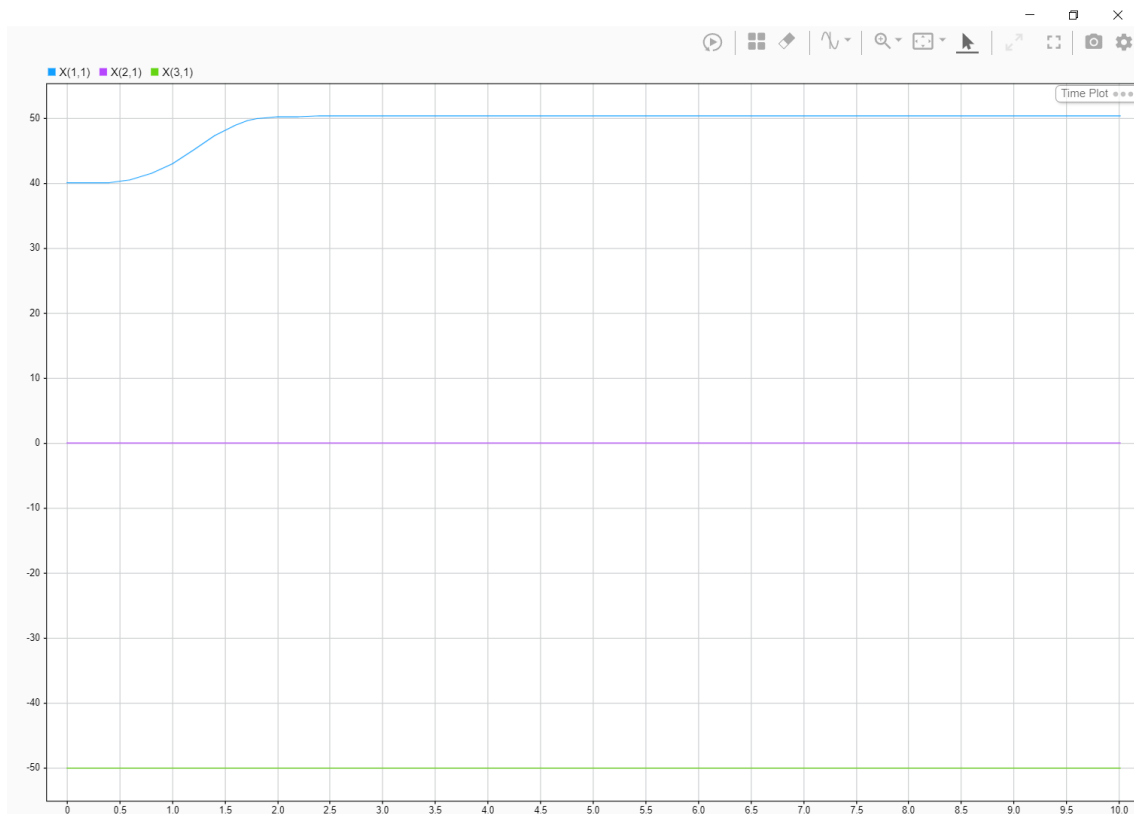


圖 3-11 直線位置圖

運用我們所設計的參數，逆推回去計算出我們無人機所需的 R 與 τ ，讓我們了解我們所需的姿態與控制分別需要多少。圖 3-12 與圖 3-13 提供了對這一計算過程的直觀展示，以便更好地理解我們的設計方法和結果。圖 3-13 中，縱軸以牛頓為單位，橫軸以秒為單位。

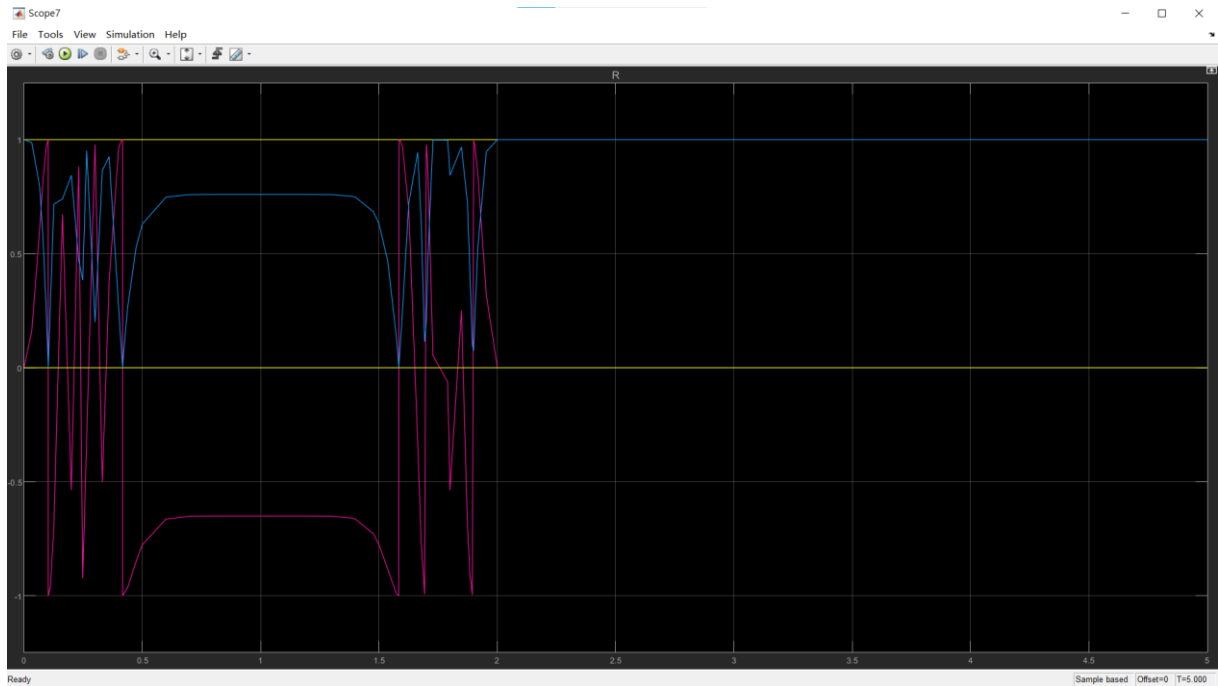


圖 3-12 直線所需的 R

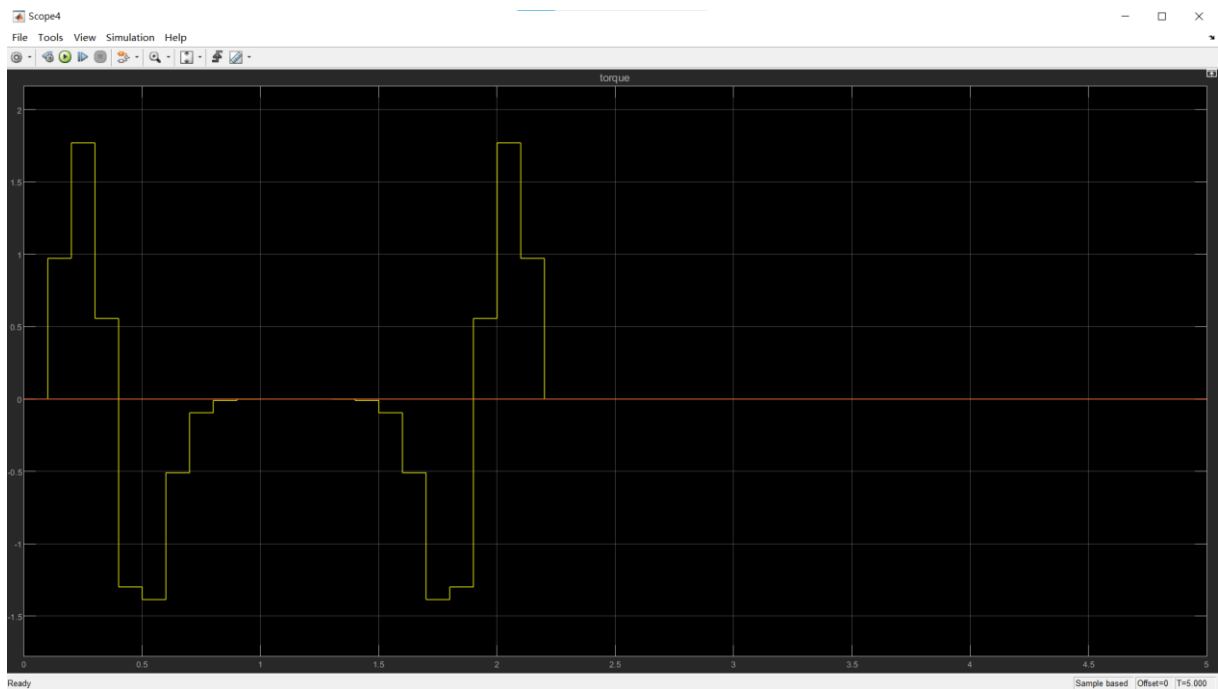


圖 3-13 直線所需的力矩

在 MATLAB 中，我們成功地設計了一個包含圓周和直線軌跡的飛行路徑。為了模擬實際飛行情境，我們計劃使用 PX4 進行模擬。為了實現這一目標，我們必須在 Linux 系統上進行操作。在這個案例中，我們採用了 Windows 的子系統 WSL (Windows Subsystem for Linux) 進行操作。操作的具體步驟可以在 PX4 官方網站上查詢。

然而，在實際操作中，我們注意到抓取 QGroundControl 的 URL 存在錯誤，導致無法正確抓取所需的應用程序。為了解決這個問題，我們建議將抓取 QGroundControl 的 URL 更改為 <https://d176tv9ibo4jno.cloudfront.net/latest/QGroundControl.AppImage>。這樣能夠正確獲取所需的 QGroundControl 應用程序，並繼續進行模擬飛行的操作。

我們將使用以下指令來啟動我們所需的程式。使用指令 `./QGroundControl.AppImage` 可以啟動 QGroundControl，其介面如圖 3-14 所示。另外，使用指令 `"make px4_sitl jmafsim"` 可以透過 PX4 SITL (Software-in-the-Loop) 和 jmafsim，在電腦上模擬飛行控制系統的行為，而無需實際的硬體。該指令所啟動的介面如圖 3-15 所示。

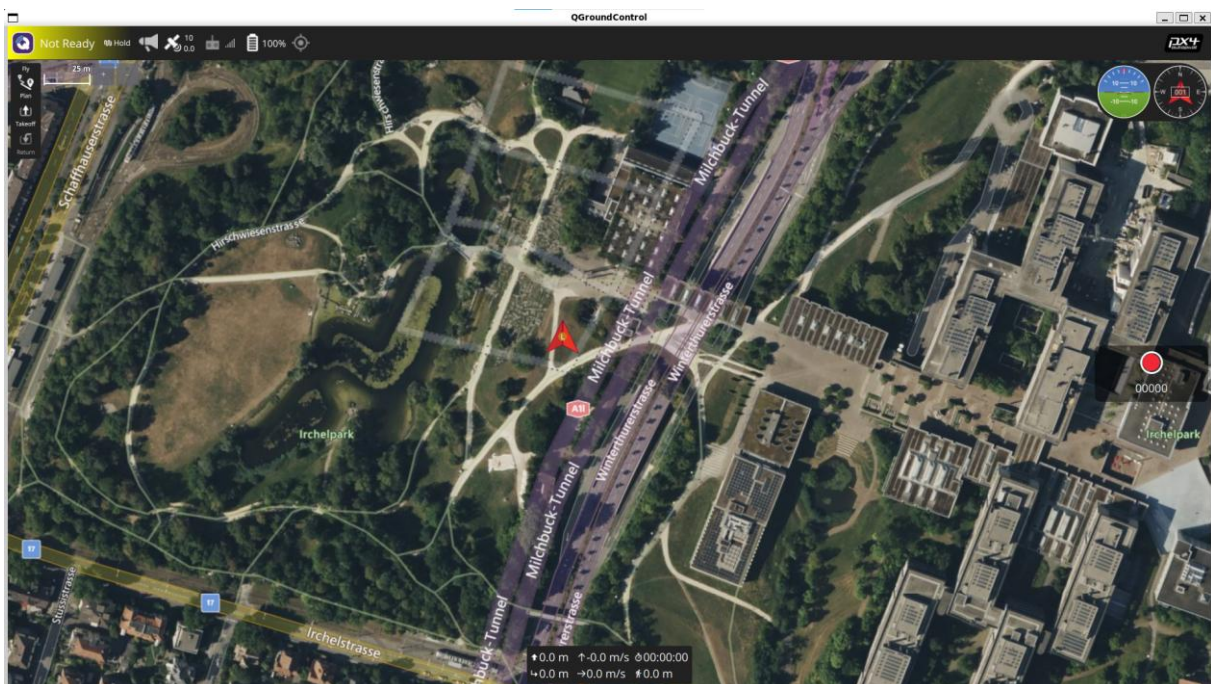


圖 3-14 QGroundControl 的介面

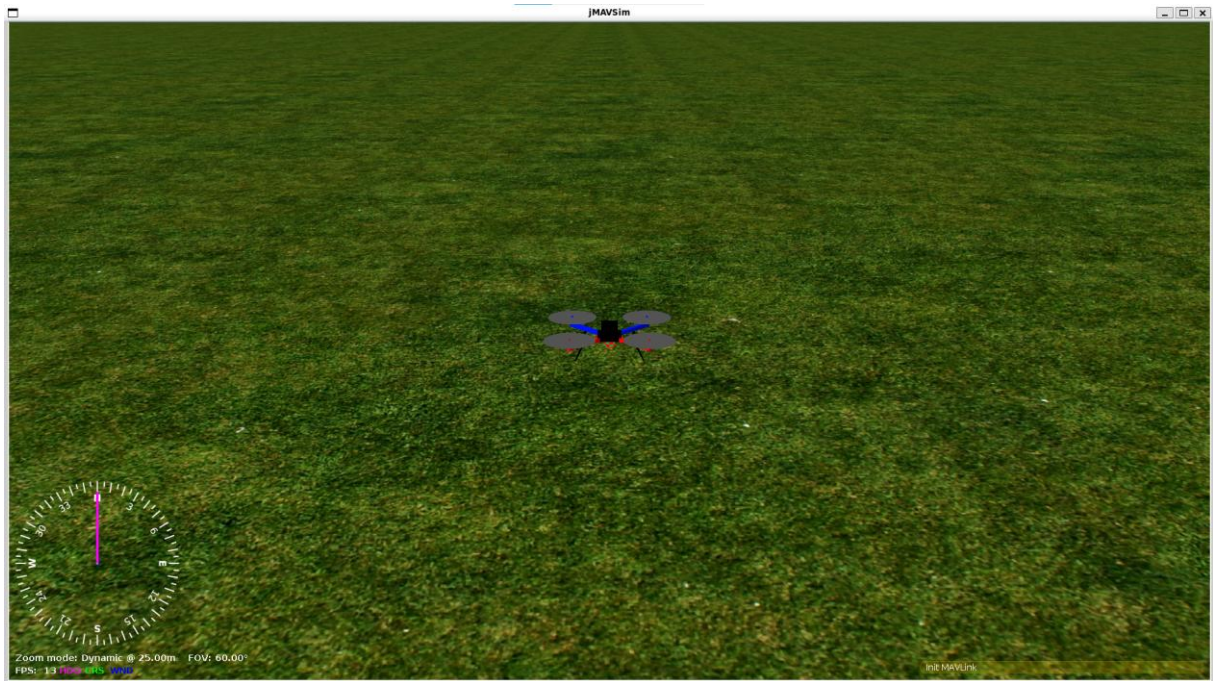


圖 3-15 PX4 SITL 和 jmavsim 啟動的介面

為了在使用指令"make px4_sitl jmavsim"前成功連接這兩個程式，首先我們需要透過指令"ip addr | grep eth0"確認我們的主機在使用模擬器時的 inet IP 地址，詳見圖 3-16。接下來，我們將取得的 IP 地址應用於 QGroundControl 中的 Comm Links 設定，以確保兩個程式能夠成功建立連接。如圖 3-17 所示。

```
qian@LAPTOP-A5VQ5L63: /mnt/c/Users/88696
Windows PowerShell
Copyright (C) Microsoft Corporation. 著作權所有，並保留一切權利。
請嘗試新的跨平台 PowerShell https://aka.ms/pscore6

PS C:\Users\88696> wsl
-bash: /opt/ros/humble/setup.bash: No such file or directory
qian@LAPTOP-A5VQ5L63:/mnt/c/Users/88696$ ip addr | grep eth0
2: eth0: <BROADCAST,MULTICAST,UP,LOWER_UP> mtu 1500 qdisc mq state UP group default qlen 1000
    inet 172.19.238.156/20 brd 172.19.239.255 scope global eth0
qian@LAPTOP-A5VQ5L63:/mnt/c/Users/88696$
```

圖 3-16 inet IP 地址

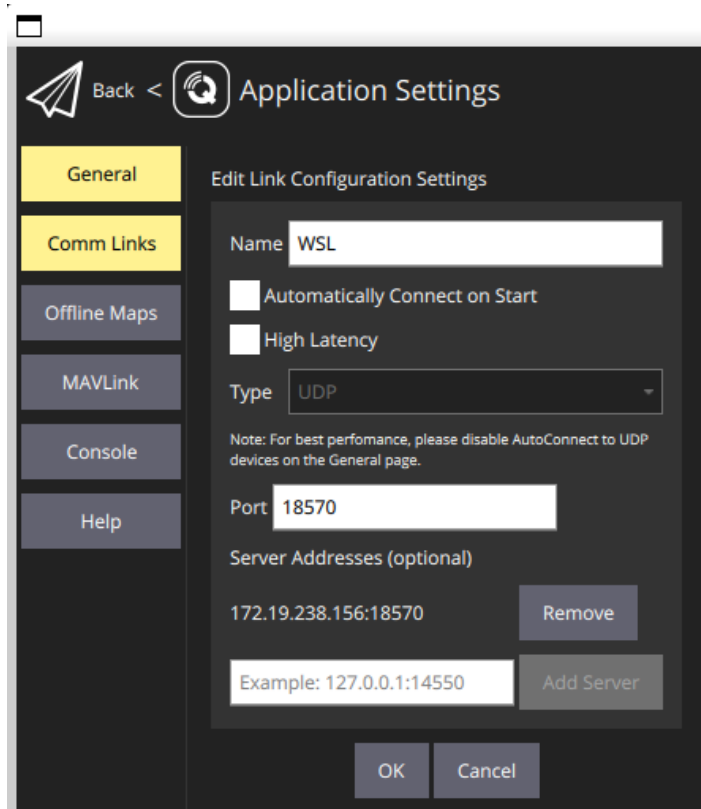


圖 3-17 Comm Links 設定

可以透過 QGroundControl 內建的模擬，規劃路線，去嘗試類似我們所做的圓周運動。
如圖 3-18 所示。

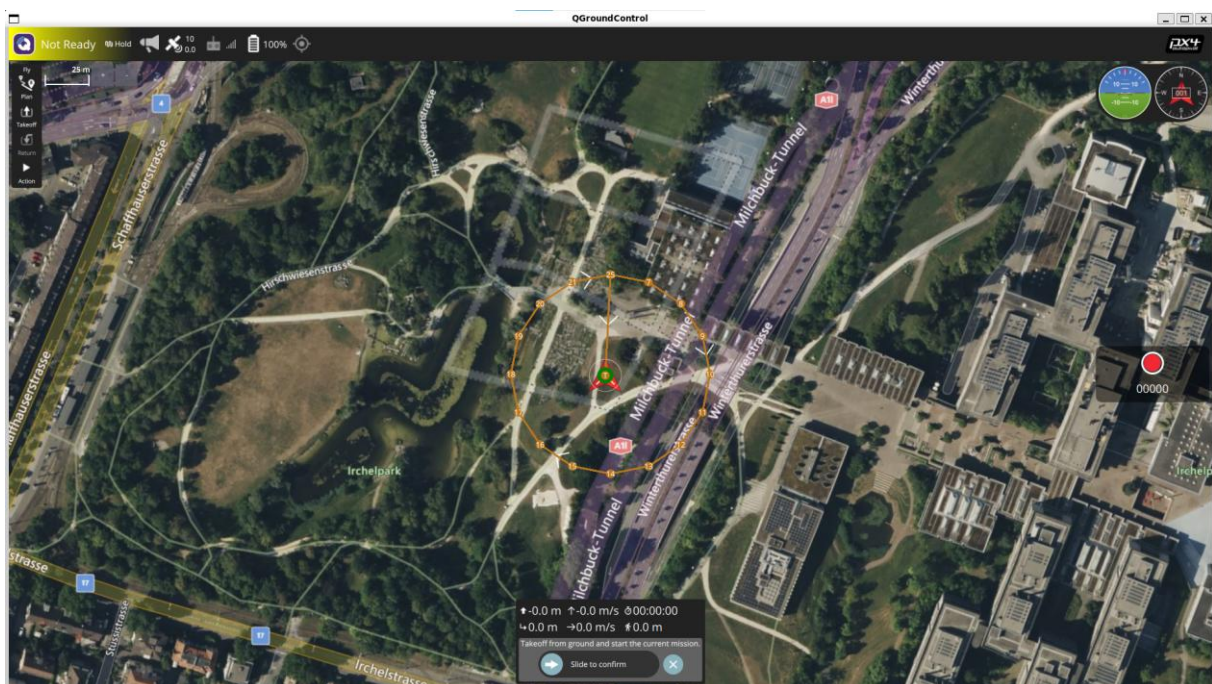


圖 3-18 規劃路線

圖 3-19 為規劃路線完後的模擬場景，左邊可以看到無人機目前高度與位置，以及執行到哪裡，右圖為實際執行的場景圖，可以看到無人機實際飛行的樣子。

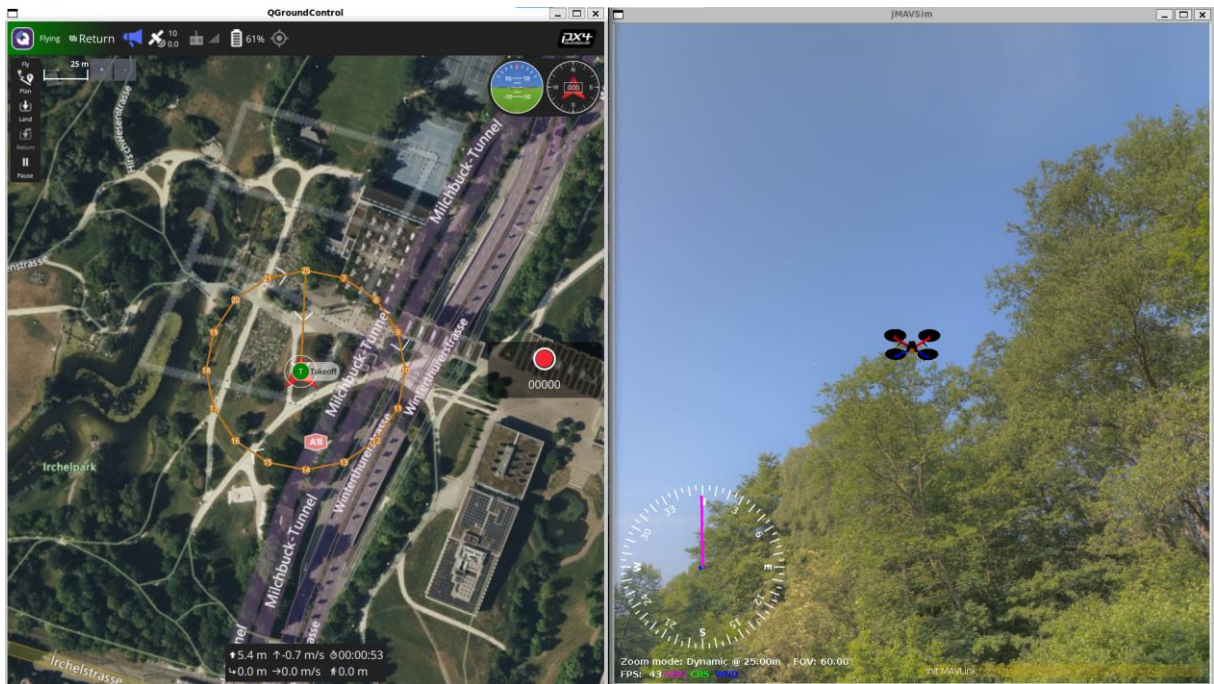


圖 3-19 模擬場景

透過內建的模擬，我們能夠深入了解 QGroundControl 和 PX4 的基本運作。為了與我們的專題相符，我們需要在 PX4 Autopilot 中調整特定的參數。透過輸入指令"code . "，我們可以方便地連接到 Visual Studio Code，以進程式碼的修改。如圖 3-20 所示，請確保左下角已連接到 Windows Subsystem for Linux (WSL)，以確保正確使用相關功能。

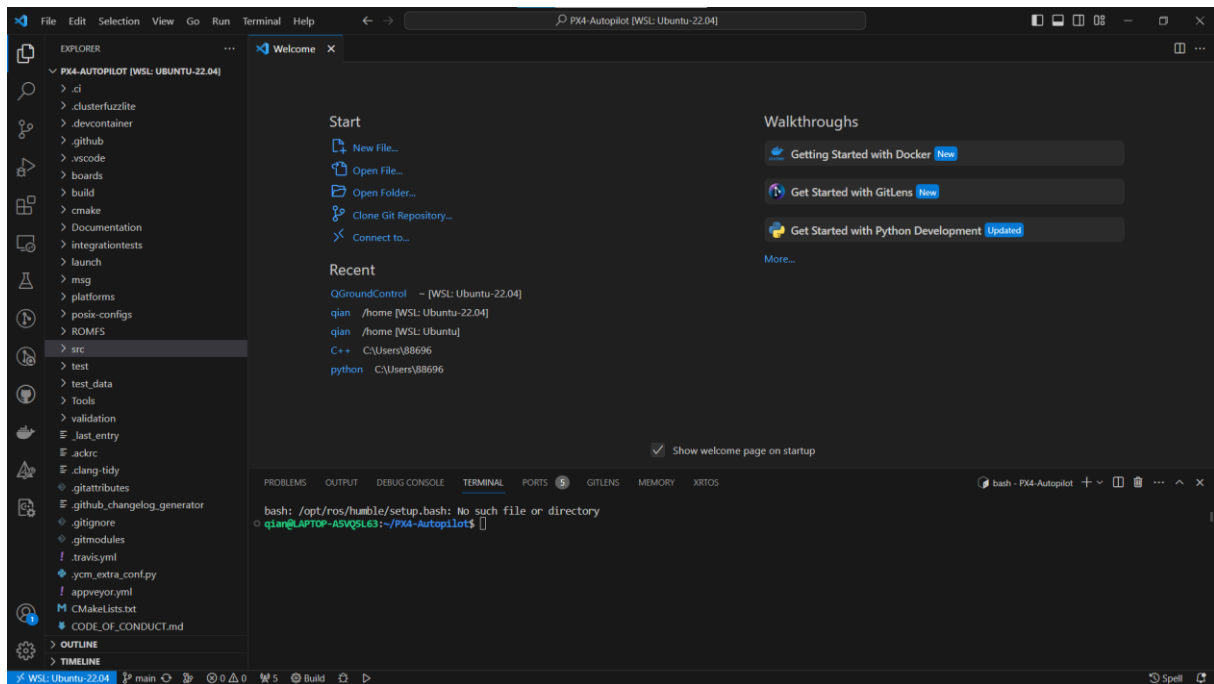


圖 3-20 vscode 連接到 PX4_Autopilot

3.2 結果分析

我們所設定的圓周為半徑 50，高度 50， $\omega_{ideal} = 0.2$ (弧度)，其圓周運動是在理想的情況下飛行，即沒有空氣阻力，因此只有 roll 和 yaw 有值，且 roll 會等於我們所設計的 ω_{ideal} 。在算出各項誤差與力矩後，我們帶回我們的無人機內外迴路，使其模擬實際的情況。圖 3-21 為我們最初設計的 torque，未考慮空氣阻力，所接回無人機的[X,Y]位置圖，其橫軸與縱軸皆以公尺為單位。圖 3-22 為位置誤差圖，其橫軸以秒為單位，縱軸以公尺為單位。透過這兩張圖，我們可以看到，圓周運動極其的不穩定，由於我們無人機考慮到實際情況，導致其高度也相對的不穩定。

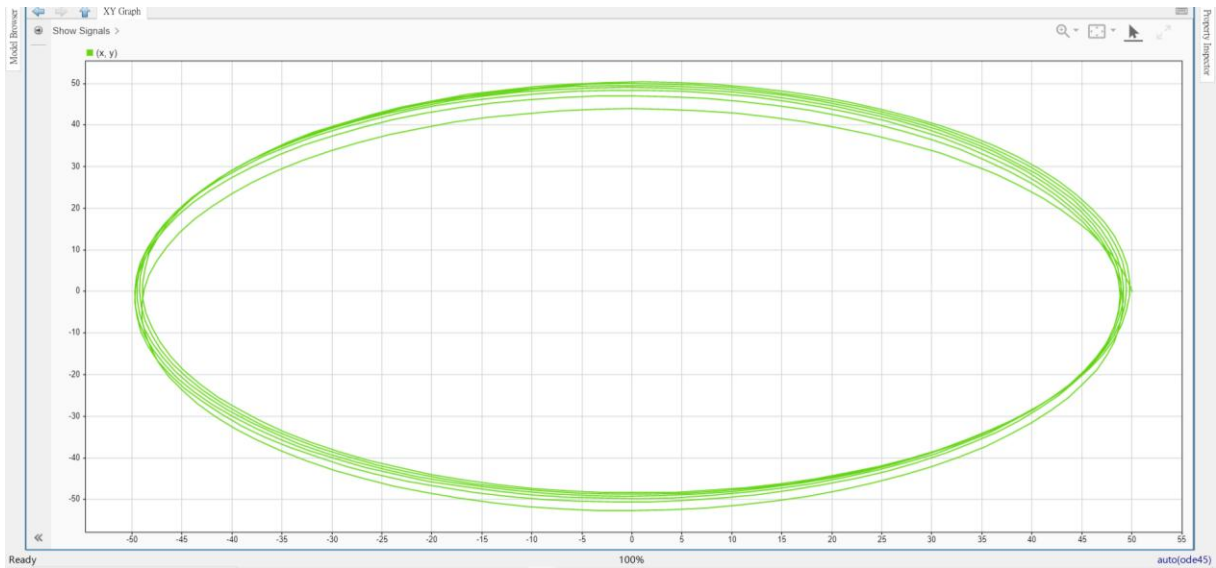


圖 3-21 未考慮空氣阻力 [X,Y]位置圖

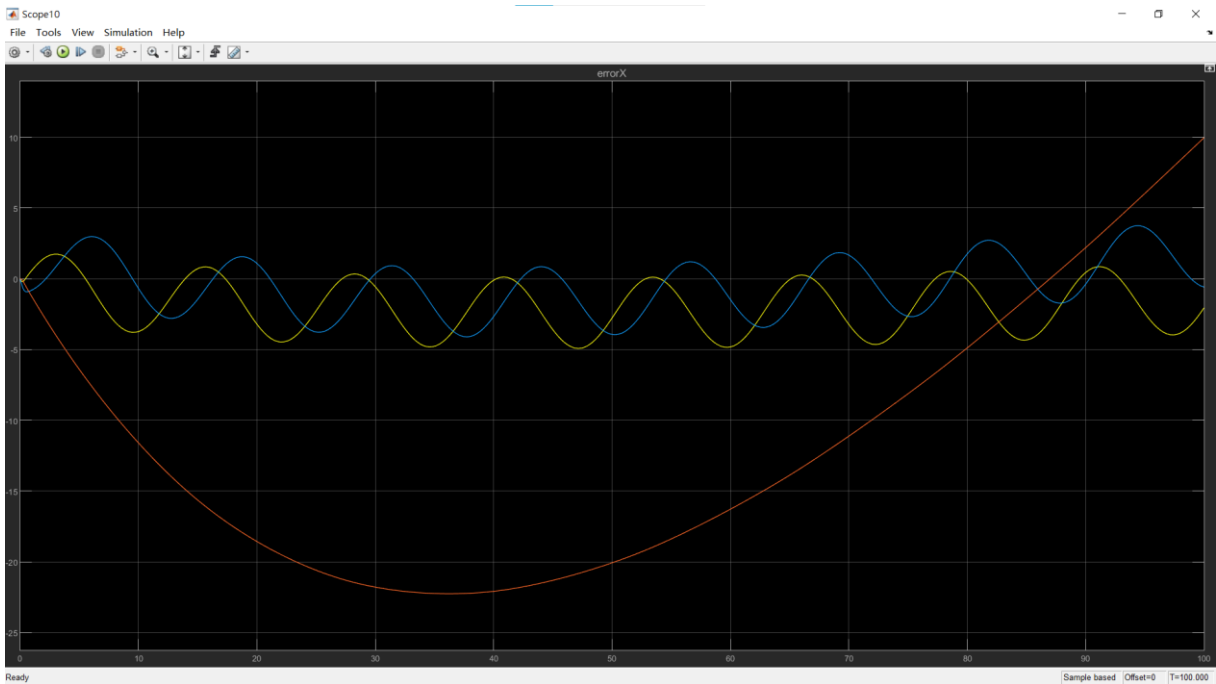


圖 3-22 無誤差的圓周的位置誤差圖

如上所述的直線飛行，我們所設想的角度會從 0 增加到我們所設定的角度後，會下降回 0，因此我們有設計過三種角度的變化圖。

第一種為利用三角函數去設計，我們直觀認為角度的變化如圖 3-23 所示，其圖形轉換成公式，會如公式(23)所示， x_p 為指定位置， d_{max} 為離指定位置最大差距， ω 會如公式(24)所示，還有 $\dot{\omega}$ 會如 ω 的公式一致，可 θ 、 ω 、 $\dot{\omega}$ 為微分的關係，因此我們所設的推斷不合。

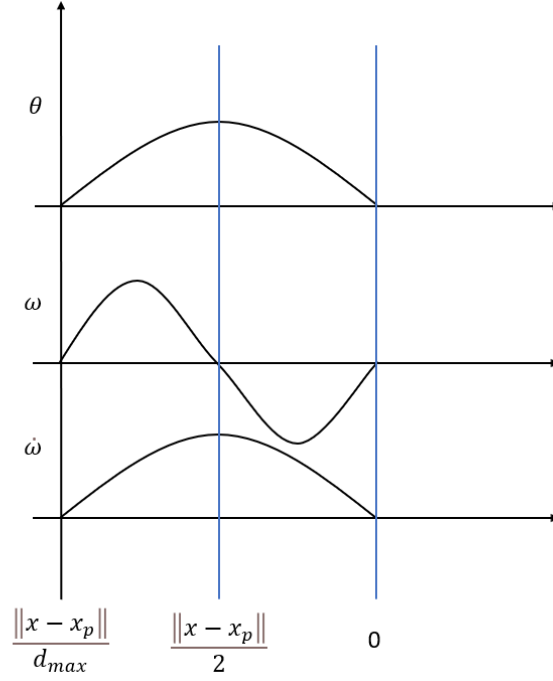


圖 3-23 運用三角函數的角度變化圖

$$\theta = \sin\left(\pi * \frac{\|x - x_p\|}{d_{max}}\right) \quad (23)$$

$$\omega = \sin\left(2\pi * \frac{\|x - x_p\|}{d_{max}}\right) \quad (24)$$

第二種是利用高斯的常態分佈做出類似圖形，如公式(25)，後發現高斯函數對其橫軸微分再乘其橫軸對時間微分才是高斯函數對時間微分，這樣做會使公式過於複雜，因而放棄這個方式。

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\|x - x_p\|)^2}{2}} \quad (25)$$

第三種是角度變化像三角形的圖形，如圖 3-24 所示，此方式簡單很多，可是當微分成 ω 時，會變成圖 3-25 所示，這樣的圖形會使的 MATLAB 無法辨識，我們無法從 0 直接跳到我們所要的數值，因此這個方法也被我們所放棄。

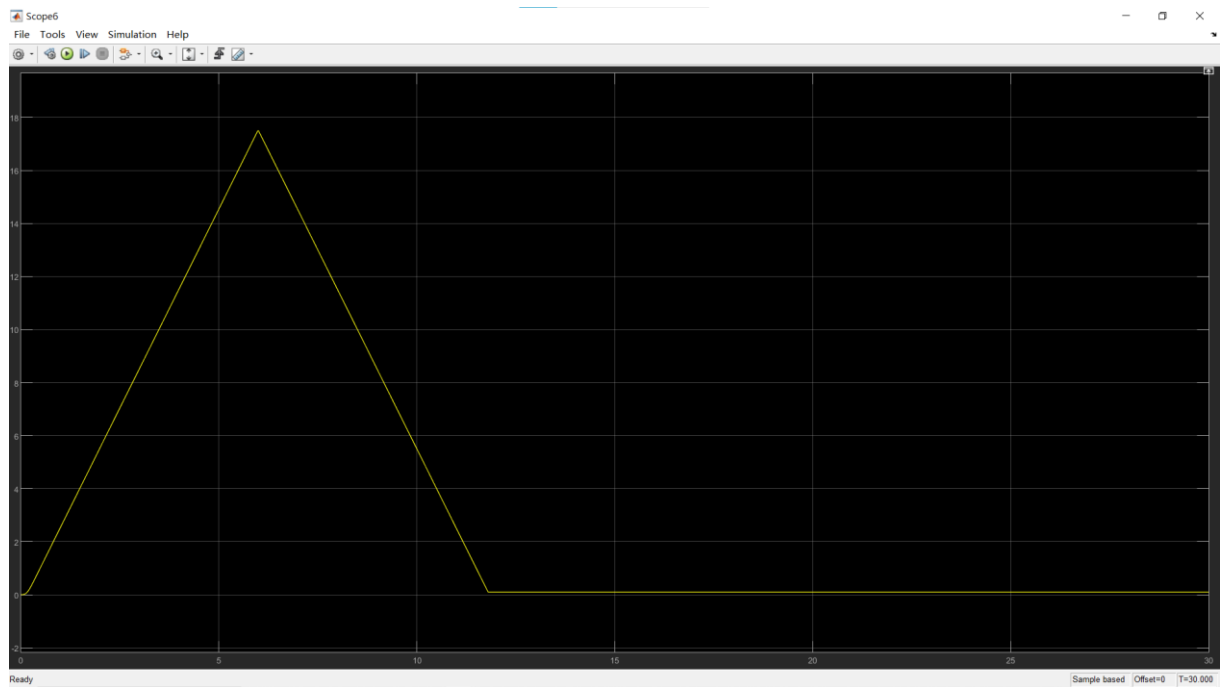


圖 3-24 角度變化像三角形



圖 3-25 三角形圖形積分後得出的 ω

當初我們目前不知道如何準確的設計 τ 、 f ，升力 f 使用 sine 波或是常數，會使得速度和位置的結果不同，圖 3-26 常數為理想值，如圖 3-27 的 sine 波的狀況會比較貼近現實狀況。還有即使知道了誤差值，我們依舊無法知道如何設計 τ ，我們也無法逆推回去如何設定 τ 的

振幅、頻率、位移。現在我們利用設計一段軌跡，在結合無人機公式，即可逆推回去我們所需要的力矩以及升力。

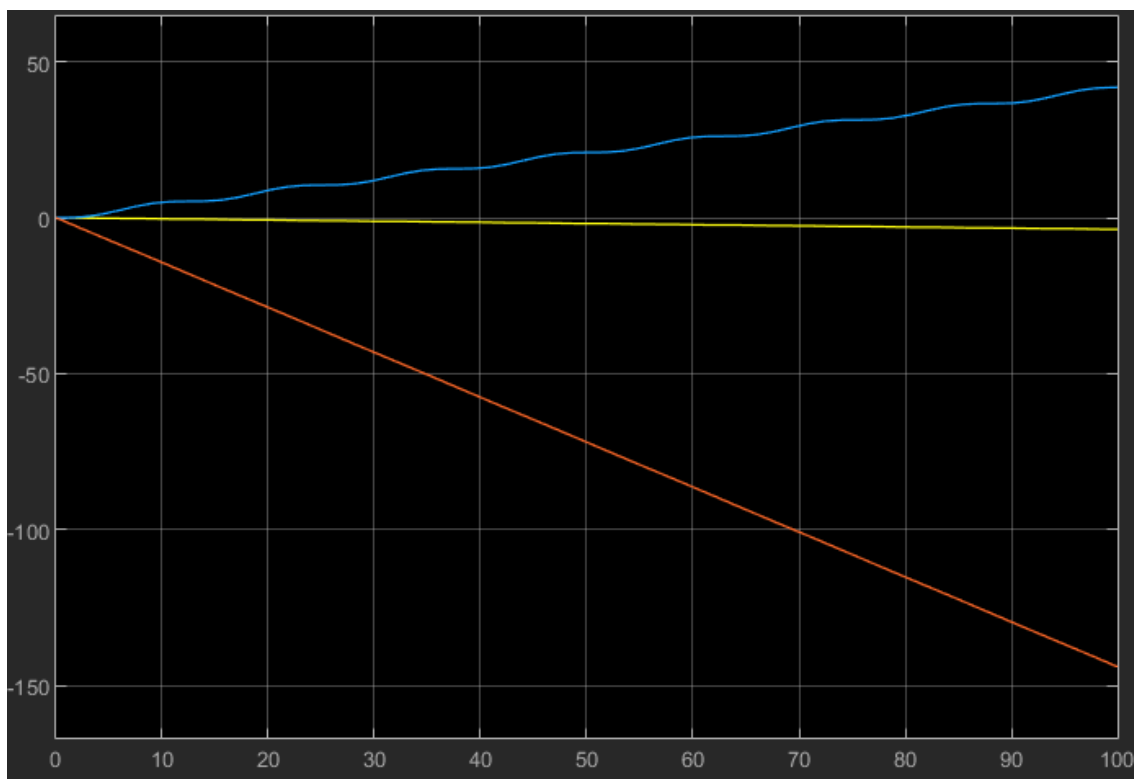


圖 3-26 常數 f

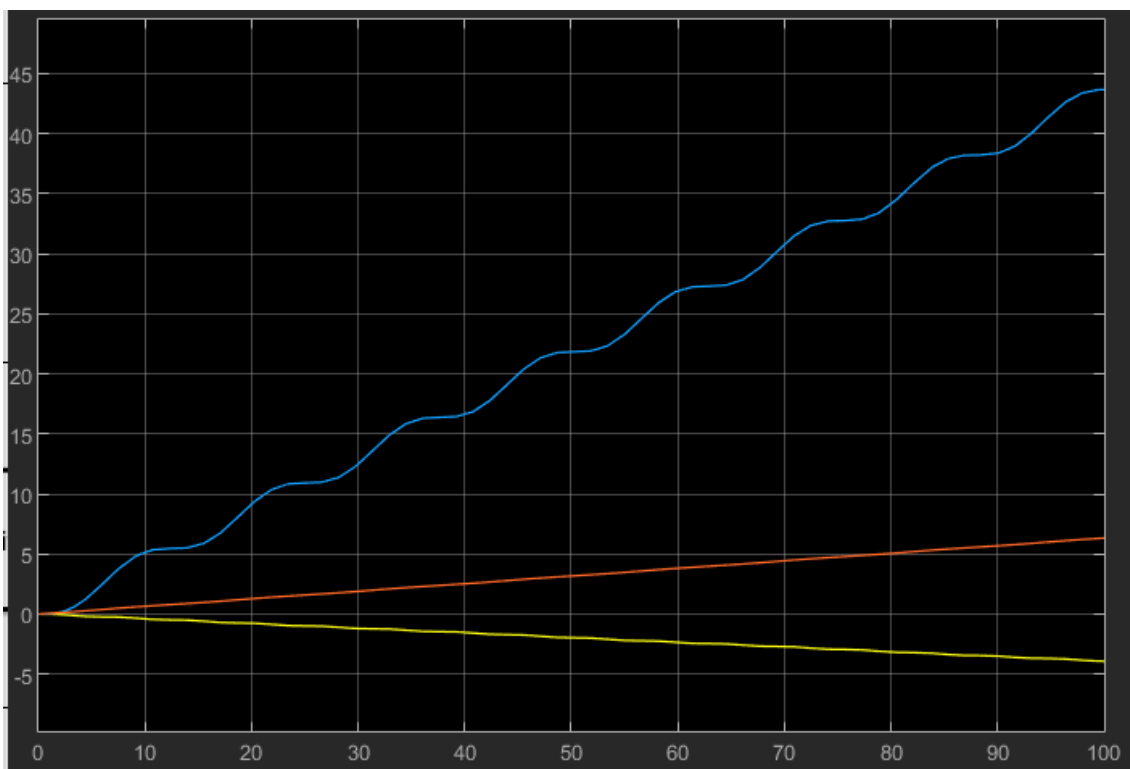


圖 3-27 sine 波 f

第四章 結論與未來方向

4.1 結論

本專題在於運用基礎的方程式探索無人機的運用，特別是在無人機的姿態與運動方式。透過運用數學公式，我們成功地實現了無人機的圓周運動，並推導出直線運動所需的合理角度。

在圓周運動的實現過程中，我們採用了相關的公式結合圓周運動原理，使得無人機能夠以穩定且可控的方式完成圓周飛行。這展現了基礎方程式在控制無人機的多樣化應用提供了一個實用的範例。

同時，我們透過對直線運動的角度推導，深入研究了無人機需要用怎樣的數學模型，才能使其順利的控制飛行。這有助於我們更好地理解無人機在特定任務中的最佳運動軌跡，以及我們所需要的控制大小。

總而言之，本專題的研究為無人機的控制和運動提供了圓周運動及直線運動的理論參考。未來的研究方向可以進一步擴展基礎方程式的應用範疇，以應對更複雜的飛行任務，同時更深入地探討不同環境條件下無人機的姿態控制策略。希望這項研究成果能夠為無人機技術的發展和應用提供實際而有益的參考。

4.2 未來方向

基於我們在無人機軌跡模擬和數學模型方面的研究，未來的工作可以朝著以下方向進行擴展：

1. **擴展軌跡模擬：** 透過進一步探索基礎公式，我們可以擴展無人機的軌跡模擬，將更多飛行情境納入考慮，包括複雜環境下的飛行、多機協同作業等。這有助於提高無人機在不同應用場景下的適應性和效率。
2. **數學模型優化：** 進一步優化數學模型，以實現無人機更快速地抵達目標軌跡。這涉及對控制策略和引導系統的改進，以提高飛行的精確性和靈活性。
3. **優化實驗與模擬方法：** 針對 MATLAB 中的數據，優化實驗和模擬方法。透過實際修改 QGroundControl 的資料，實時進行模擬，並採用不同的程式碼轉換技術，如 Embedded Coder 建立 C 或 C++ 程式碼，嘗試不同的技術的準確性和實用性。如圖 4-1 所示。
4. **實地測試和實驗：** 考慮進行更多的實地測試和實驗，以驗證模擬結果的可行性。實地測試能夠提供更現實的環境和情境，有助於確保研究的實用性和實用價值。

這些建議將有助於深化我們對無人機控制系統的理解，同時提高無人機在不同應用場景下的性能和應用價值。

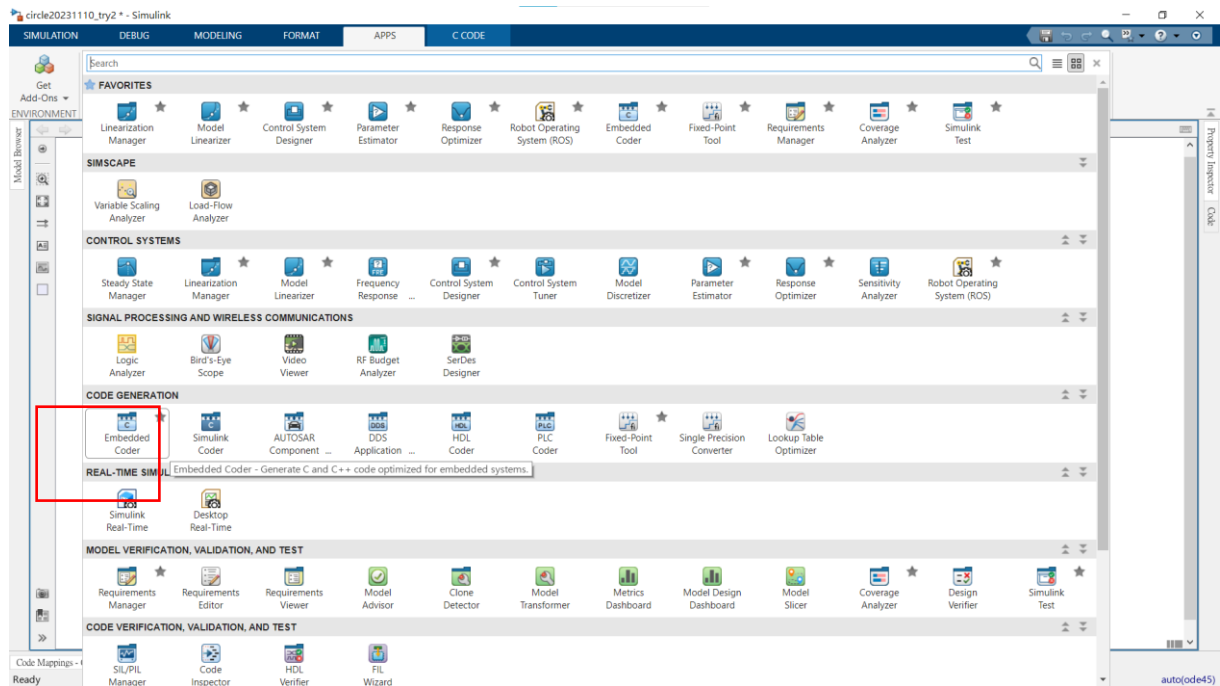


圖 4-1 在 MATLAB 中轉換成程式

參考文獻

- [1]"A Unified SO(3) Approach to the Attitude Control Design for Quadrotors" by JEN-TE YU.
- [2]Maziar Mardan "Attitude and position controller design and Implementation for a quadrotor"
Article first published online: May 24, 2017; Issue published:May 1, 2017 Received: November 18, 2016; Accepted: April 07, 2017
- [3]王祈盛."Flight Controller Design of Quadrotors Using Special Orthogonal Group SO(3) and Virtual Control Method"(2022)
- [4]陳則諭."以特殊正交群 SO (3) 為姿態表示法之四旋翼無人機姿態與位置控制器設計."
(2021)
- [5] [圓周運動 - 維基百科，自由的百科全書 \(wikipedia.org\)](https://zh.wikipedia.org)
- [6] [無人機資訊平台：DJI 航拍機評測 | 台灣空拍景點推介 | 多旋翼飛行器知識 \(dronesplayer.com\)](https://dronesplayer.com)
- [7] [Drones | An Open Access Journal from MDPI](https://www.mdpi.com/journal/drones)
[烏克蘭 17 歲少年發明探測地雷無人機 獲全球學生獎 - 國際 - 中時新聞網 \(chinatimes.com\)](https://www.chinatimes.com)
- [8] [自製無人機銳鳶偵蒐行動 8 月共軍圍台軍演時建功 | 公視新聞網 PNN \(pts.org.tw\)](https://www.pts.org.tw)
- [9] [無人機攝影測量應用於歷史建築保育 | am730](https://www.am730.com)
- [10] [DJI 大疆行業應用案例 由於熱成像無人機，小鹿從可怕的命運中解脫出來 - 先創國際 \(esentra.com.tw\)](https://www.esentra.com.tw)
- [11] [Differential Equations \(GNU Octave \(version 7.3.0\)\)](https://www.gnu.org/software/octave/)

- [12] [旋轉矩陣 - 維基百科，自由的百科全書 \(wikipedia.org\)](https://www.wikipedia.org)
- [13] [歐拉角和旋转变換：易混淆概念区分&MATLAB 計算 rotm2eul 李昀康的博客-CSDN 博客](#)
- [14] [旋轉群 \$SO\(3\)\$ - 知乎 \(zhihu.com\)](https://www.zhihu.com)
- [15] [無人機飛控之幾種飛控的姿態解算算法 - 每日頭條 \(kknews.cc\)](http://kknews.cc)
- [16] [3D rotation group - Wikipedia](https://en.wikipedia.org)
- [17] [\(1\) PX4 Development Environment Setup using WSL-2 - YouTube](#)
- [18] [Windows Development Environment \(WSL2-Based\) | PX4 User Guide \(main\)](#)
- [19] [安裝 WSL | Microsoft Learn](#)
- [20] [Generate C Code from Simulink Model - MATLAB & Simulink \(mathworks.com\)](https://www.mathworks.com)
- [21] <https://www.coretronic-robotics.com/tw/application>
- [22] <https://www.ydn.com.tw/news/newsInsidePage?chapterID=1610420&type=forum>

著作權授權書

本授權書所授權之專題報告為學生 林芊蓉、
_____、_____、_____

在 中原大學 112 學年度第 一 學期所撰寫

專題名稱：四軸無人機軌跡追蹤與飛行控制設計

1. 本人具有著作財產權之專題全文，同意授予中原大學電機系，得重製成電子資料檔後收錄於該單位之網路，並與台灣學術網路及科技網路連線，得不限地域時間與次數以光碟或紙本重製發行。如有因涉及專利等智慧財產權之申請，請將本專題全文延至民國 年 月 日後再公開。
2. 本人具有著作財產權之專題內容文字與實驗數據，係本人所原創、實驗所得，如涉有智慧財產權等相關爭議與法律責任，概由本人承擔。

學生簽名：

(所有同學親筆正楷)

林芊蓉

指導老師：

游仁隆

中華民國 112 年 11 月 22 日

中原大學

電機工程系

四軸無人機軌跡追蹤與飛行控制設計

112

年

12

月