



## MATEMÁTICA BÁSICA – CE82

### SEMANA 2 – SP2



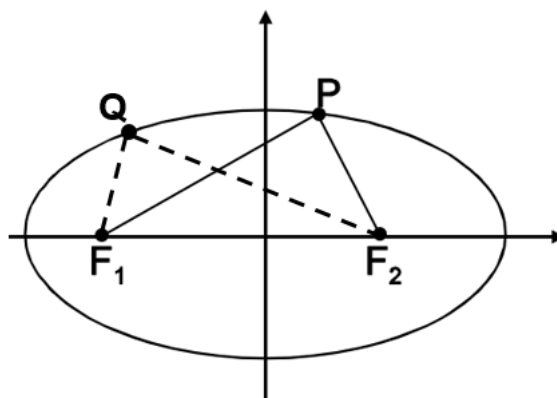
Temario: **LA ELIPSE**

**Logro de la sesión:** Al término de la sesión el estudiante determina la ecuación y gráfica de una elipse, reconoce sus elementos y sus aplicaciones a situaciones de contexto real.

### ELIPSE

Una *elipse* es el conjunto de puntos del plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es constante.

En la figura adjunta los puntos fijos  $F_1$  y  $F_2$  son los



P y Q son dos puntos cualesquiera de la curva.

Según la definición se cumple en toda elipse que:

$$PF_1 + PF_2 = QF_1 + QF_2 = \text{constante}$$

### ELEMENTOS DE LA ELIPSE

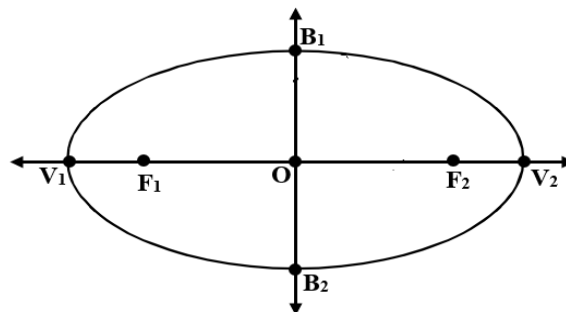
Centro: \_\_\_\_ Vértices: \_\_\_\_ Focos: \_\_\_\_

Eje mayor (eje focal): \_\_\_\_ = \_\_\_\_

Eje menor: \_\_\_\_ = \_\_\_\_

Distancia focal: \_\_\_\_ = \_\_\_\_

Definición de elipse:  $PF_1 + PF_2 = \text{____} = 2a$

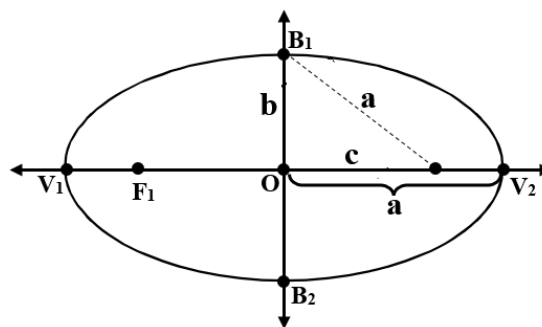


### RELACIÓN ENTRE LAS CONSTANTES

$V_1V_2 = \text{____}$   $B_1B_2 = \text{____}$   $F_1F_2 = \text{____}$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

**Nota:** A los ejes mayor y menor también se les llama ejes de simetría. ¿Por qué?



### EXCENTRICIDAD DE LA ELIPSE

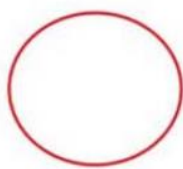
La excentricidad ( $e$ ) de una elipse es la razón entre su semi distancia focal ( $c$ ) y su semieje mayor ( $a$ ). Su valor se encuentra entre cero y uno.

La excentricidad indica la forma de una elipse; una elipse será más redondeada cuanto más se aproxime su excentricidad al valor cero.

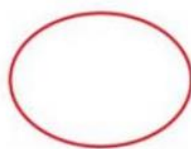
$$e = \frac{c}{a}$$



$e = 0.1$



$e = 0.5$



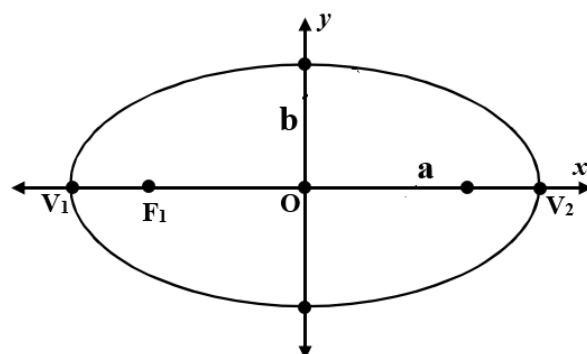
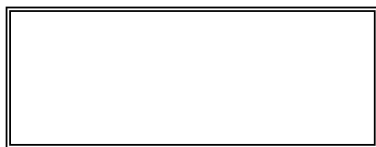
$e = 0.68$



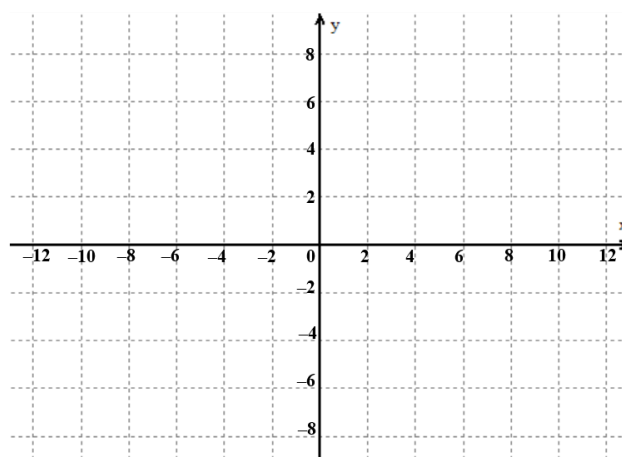
$e = 0.86$

**ECUACIONES DE LA ELIPSE****ECUACIÓN CANÓNICA**

**Centro (0; 0) --- Eje focal el eje x** (elipse “horizontal”)

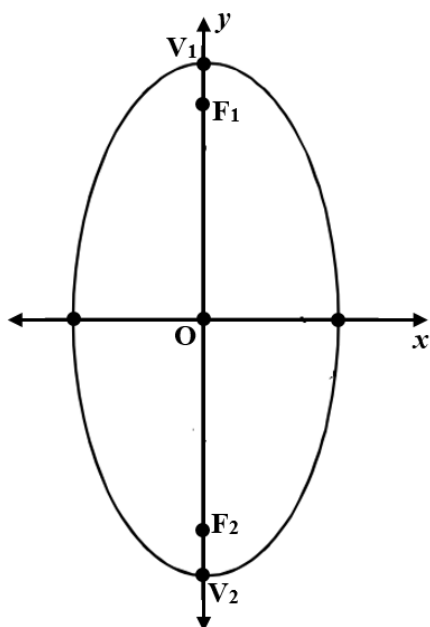
**Ejemplo 1:**

Grafique la elipse cuyo centro es (0;0), un vértice es (10;0), un foco es (8;0), halle su ecuación canónica y excentricidad.

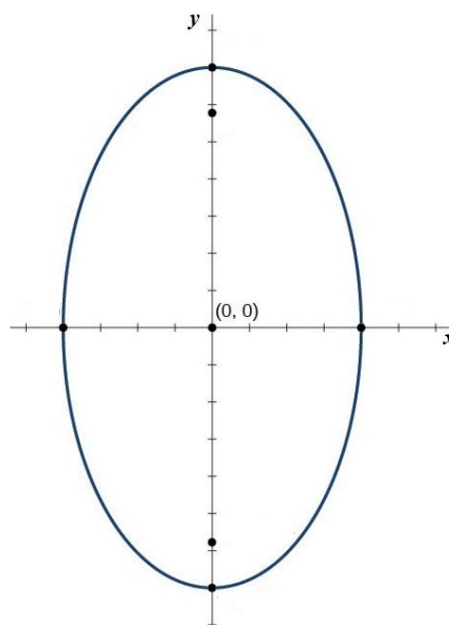
**ECUACIÓN CANÓNICA**

**Centro (0; 0) --- Eje focal el eje y** (elipse “vertical”)

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ (ecuación canónica)}$$

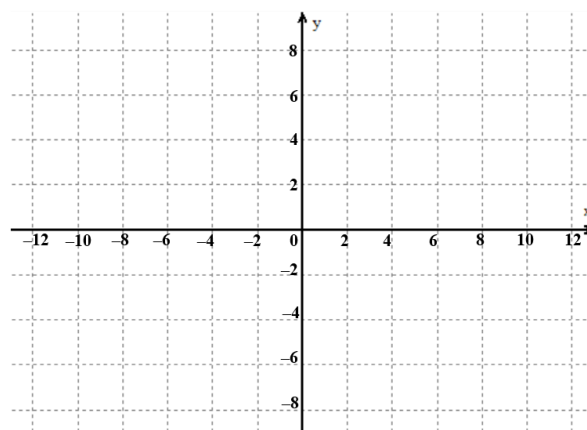
**Ejemplo 2:**

Determine las coordenadas de los vértices, y focos de la elipse que se muestra en la figura adjunta. Halle la ecuación de la elipse y su excentricidad.

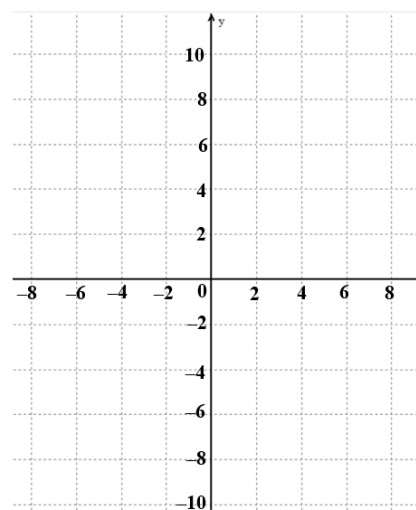


**Ejercicio 1:**

Grafique la elipse cuyo centro es  $(0;0)$ , un vértice es  $(-12;0)$ , un foco es  $(10;0)$  y halle su ecuación canónica.

**Ejercicio 2:**

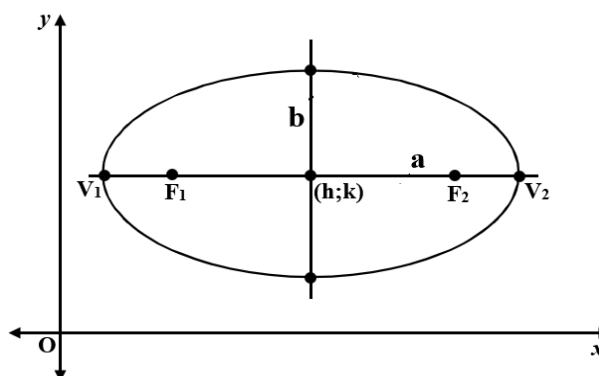
Grafique la elipse cuyo centro es  $(0;0)$ , un vértice es  $(0; -10)$ , un foco es  $(0;8)$  y halle su ecuación canónica.

**ECUACIÓN ORDINARIA**

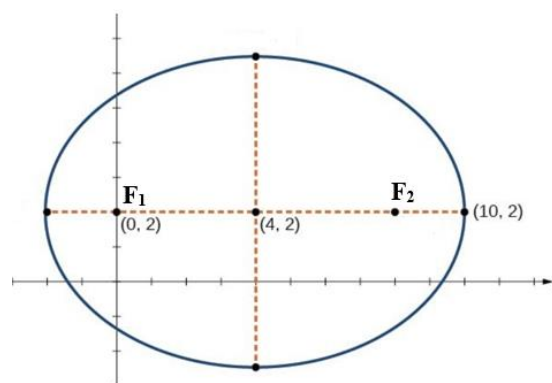
**Centro  $(h; k)$**

**Eje focal paralelo al eje  $x$**

(elipse “horizontal”)

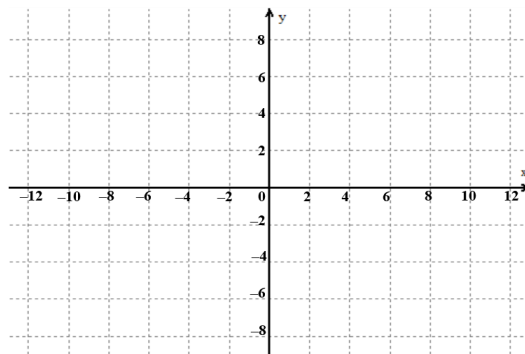
**Ejemplo 3:**

De la figura adjunta determine la ecuación de la elipse, sabiendo que  $F_1$  es un foco.



**Ejercicio 3:**

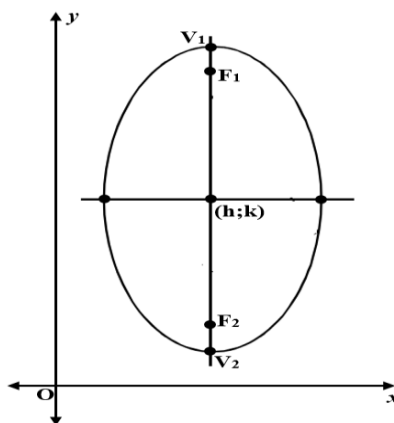
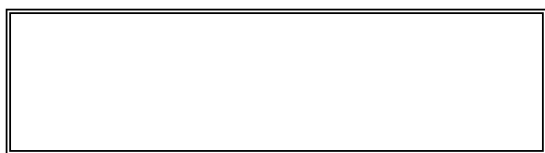
Grafique la elipse cuyos vértices son  $(12; 2)$  y  $(-10; 2)$ , su eje menor mide 8 u y halle su ecuación.

**ECUACIÓN ORDINARIA**

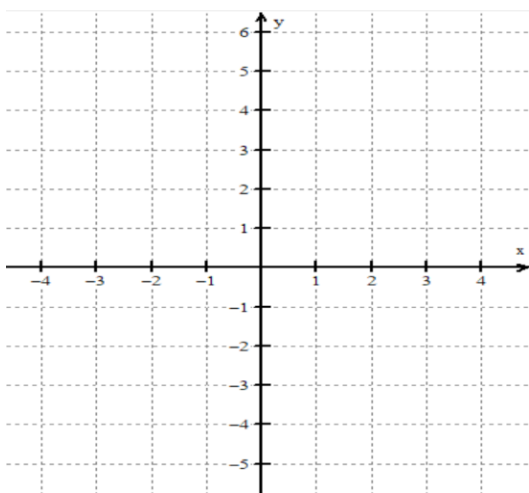
**Centro  $(h; k)$**

**Eje focal paralelo al eje y**

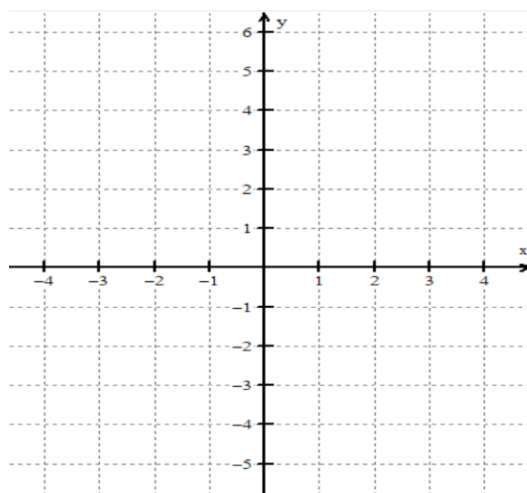
(elipse “vertical”)

**Ejemplo 4:**

Grafique la elipse cuyo centro es  $(1; 1)$ , un vértice es  $(1; 6)$ , un foco es  $(1; 5)$ , halle su ecuación y puntos de intersección con los ejes coordenados.

**Ejercicio 4:**

Grafique la elipse cuyos vértices son  $(1; 6)$  y  $(1; -4)$ , su eje menor mide 6 u, halle su ecuación y puntos de intersección con los ejes coordenados.

**CIERRE DE CLASE**

A. ¿Escriba la ecuación de una elipse en su forma canónica?

B. La ecuación de una elipse es  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ , ¿los puntos de intersección con los ejes?

C. La elipse  $4(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$  ¿es “horizontal” o “vertical”?

**ECUACIÓN GENERAL:**

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \quad A \neq 0; C \neq 0; A \neq C; A \text{ y } C \text{ del mismo signo.}$$

**Ejemplo 5:**

La ecuación general de una elipse es  $9x^2 + 4y^2 - 54x - 40y + 145 = 0$  halle su ecuación ordinaria.

**Ejercicio 5:**

La ecuación de una elipse es  $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$ , halle su ecuación general.

**Problema 1 (Competencia Razonamiento Cuantitativo)**

Un arco semielíptico sobre un túnel, para un camino en un sentido a través de una montaña, tiene un eje mayor de 50 pies y una altura en el centro de 10 pies.

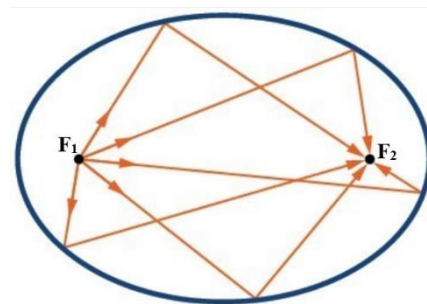
**a)(Interpretación)** Según el sistema de referencia, determine las coordenadas del punto más alto del túnel y de los extremos de la base.

**b)(Representación)** Escriba la ecuación del arco semielíptico, defina sus variables y coloque restricciones.

**c)(Cálculo)** Usted conduce un camión que tiene un ancho de 8 pies y una altura de 9 pies. ¿Pasará el camión por la abertura del arco?

**PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE LA ELIPSE**

Si desde uno de los focos de una elipse sale un rayo o una onda que impacta en la elipse está se refleja y pasa por el otro foco de la elipse. Algunos edificios, llamados cámaras de susurros, están diseñados con cúpulas elípticas, de modo que una persona que susurra en un foco puede ser fácilmente escuchada por alguien que se encuentra en el otro foco.



**Problema 2 (Competencia Razonamiento Cuantitativo)**

Un carpintero desea hacer una mesa de billar elíptica para su hijo y en una tabla de 2,60 m por 1,30 m hace el diagrama que se muestra en la figura adjunta, dejando 5 cm entre el contorno de la elipse y el borde de la madera.



- a) Si la bola amarilla está en uno de los focos y la bola blanca está en el otro foco de la elipse, ¿Qué sucede cuando se taquea fuertemente (sin efecto) la bola amarilla y choca con la banda? Justifique su respuesta.
- b) Si colocas un sistema de coordenadas rectangulares (plano cartesiano) cuyo origen de coordenadas coincide con el centro de la elipse (esboce el gráfico) y el eje de abscisas es paralelo al lado mayor, determine las coordenadas de los vértices, las coordenadas de los focos, la ecuación de la elipse.
- c) Si la bola amarilla (bola de la derecha) se taquea fuertemente (sin efecto) y choca con la banda, ¿qué distancia recorre hasta chocar con la bola blanca? Justifique su respuesta, esboce un gráfico.

**CIERRE DE CLASE**

- D. La ecuación de una elipse es  $9(x-1)^2 + 4y^2 = 36$ , halle la distancia entre los vértices.
- E. Si P es un punto cualquiera de la elipse anterior, halle la suma de las distancias de P a los focos.
- F. Escriba la ecuación de una elipse con eje mayor igual a 8 y eje menor igual a 6.

**EJERCICIOS Y PROBLEMAS**

6. La ecuación de una elipse es  $9x^2 + 25y^2 = 225$ , halle las coordenadas del centro, vértices y focos.
7. La ecuación de una elipse es  $25x^2 + 9y^2 + 150x - 36y + 36 = 0$ , halle las coordenadas del centro, vértices y focos. Longitud de los ejes mayor y menor. Esboce la gráfica de la curva.
8. El centro de una elipse es (3;4), su excentricidad es 0,8 y la suma de las distancias de un punto cualquiera de la elipse a los focos es 10 unidades. Halle la longitud del eje mayor y menor, la ecuación general de la elipse, las coordenadas de los focos y vértices, las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados. Esboce la gráfica de la elipse.
9. Una elipse de centro (4; 3) es tangente a los ejes coordenados. Halle la ecuación general de la elipse.