

EPE

MATEMÁTICA BÁSICA



8.1

EPE

CONTENIDO

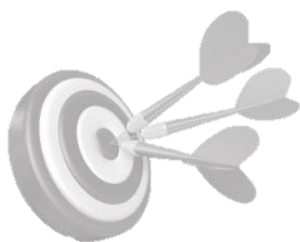
APLICACIONES DE
SISTEMAS DE
ECUACIONES
LINEALES

DETERMINANTES

VECTORES EN
R2 Y R3



8.1



LOGRO

AL TERMINAR LA CLASE EL ALUMNO SERÁ CAPAZ DE:

APLICAR
SISTEMAS DE
ECUACIONES
LINEALES EN
PROBLEMAS DE
CONTEXTO REAL

HALLAR EL
DETERMINANTE
DE MATRICES
DE ORDEN 2 Y 3

IDENTIFICAR
VECTORES EN R^2
Y R^3 , HALLAR SU
MAGNITUD,
COMPONENTES Y
EFECTUAR
OPERACIONES



EPE

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando su calculadora y clasifíquelos.



$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 18 \\ x - y + z = 10 \\ 3x - 2y + 4z = 24 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 4x + 5y - 3z = 6 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 2x + 8y - 4z = 5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 10 \\ 5x - y + z = 4 \end{cases}$$



8.1



APLICACIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

EPE

APLICACIONES DE SEL



Una bióloga ha colocado tres cepas bacterianas (denotadas por I, II y III) en un tubo de ensayo, donde serán alimentadas con tres distintas fuentes alimenticias (A, B y C).

Cada día 2 300 unidades de A, 800 de B y 1 500 de C se colocan en el tubo de ensayo y cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento por día, como se muestra en la tabla.

	Cepa bacteriana I	Cepa bacteriana II	Cepa bacteriana III
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

¿Qué cantidad de alimento B consume en un día una bacteria de la cepa bacteriana II?

¿Qué cantidad de alimento A consumen en dos días 10 bacterias de la cepa bacteriana III?

¿Qué representa el número 3 en la tabla?

8.1

EPE

APLICACIONES DE SEL



¿Cuántas bacterias de cada cepa, por día, pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

Paso 1:

Ordene la información en una tabla

	Cepa bacteriana I	Cepa bacteriana II	Cepa bacteriana III	Unidades de alimentos
Alimento A	2	2	4	2300
Alimento B	1	2	0	800
Alimento C	1	3	1	1500

Paso 2:

Defina variables y restricciones

x : cantidad de bacterias de cepa bacteriana I

y :

z :

Paso 3:

Plantee el SEL

Restricciones: $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

Paso 4:

Resuelva el sistema.

Paso 5:

Interprete los resultados y escriba la respuesta.



$x =$

$y =$

$z =$

8.1

EPE

APLICACIONES DE SEL

EJERCICIO



Una empresa de transportes tiene una flota de 60 camiones de tres modelos diferentes. Los grandes transportan diariamente 15000 kg y recorren 400 kilómetros. Los medianos transportan diariamente 10000 kilogramos y recorren 300 kilómetros. Los pequeños transportan diariamente 5000 kilogramos y recorren 100 km de media. Diariamente los camiones de la empresa transportan un total de 475 toneladas y recorren 12500 km entre todos. ¿Cuántos camiones tiene la empresa de cada modelo?

Paso 1:

Ordene la información en una tabla

Tipos de camión	Nº de camiones	Kg diarios	Km diarios
Grandes			
Medianos			
Pequeños			
TOTAL			

8.1

EPE

APLICACIONES DE SEL



Tipos de camión	Nº de camiones	Kg diarios	Km diarios
Grandes	1	15 000	400
Medianos	1	10 000	300
Pequeños	1	5 000	100
TOTAL	60	475 000	12 500

Paso 2: Defina variables y restricciones

Paso 4: Resuelva el sistema.

Paso 5: Interprete los resultados y escriba la respuesta.

Paso 3: Plantee el SEL

8.1



DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE 2 x 2 y 3 x 3

EPE

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE 2 x 2



Sea A una matriz cuadrada de orden 2, tal que: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Sea llama determinante al número real que se obtiene de hallar el producto de elementos de la diagonal principal menos el producto de elementos de la diagonal secundaria.

El determinante de una matriz A se representa de varias formas: $\det(A)$, $|A|$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A =$$

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B =$$

EPE

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE 3 x 3

Sea A una matriz cuadrada de orden 3, tal que: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \\ 9 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \\ 9 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

8.1

EPE

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE 3 x 3

Sea A una matriz cuadrada de orden 3, tal que: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Regla de Sarrus

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sum (\text{productos}) = S \\ \sum (\text{productos}) = P \end{matrix}$$

$$\det A = P - S$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} -6 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = P - S$$

$$\det A =$$

$$\det A =$$

8.1

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

Determine la verdad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones:

$$\text{A) } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 10$$

$$\text{B) } M = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |M| = -1$$

3.1



VECTORES EN R^2 y R^3

EPE

VECTORES

MAGNITUD ESCALAR

Es cualquier magnitud matemática o física que se pueda representar solamente por un número real.

Ejemplos: longitud (m), área (m²), volumen (m³), temperatura en grados kelvin (° K), etc.



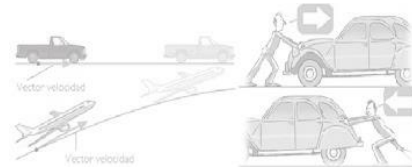
8.1



MAGNITUD VECTORIAL

Son aquellas magnitudes en las que además del número que las determina, se requiere conocer la dirección.

Ejemplos: desplazamiento (m), fuerza (N), aceleración (m/s²), etc.



El ente matemático que representa a estas magnitudes se llama vector.

EPE

VECTORES

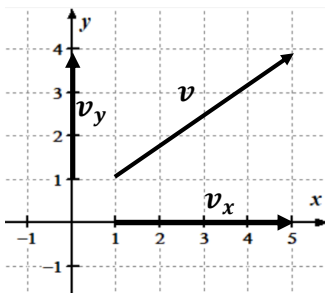
Un vector es un segmento de recta orientado, es decir con una magnitud, dirección y sentido.

En la figura adjunta se muestra un vector $v = \overrightarrow{AB}$.

El punto A es el punto inicial y B es el punto terminal del vector \overrightarrow{AB} .

Las componentes de un vector son las proyecciones de dicho vector sobre los ejes coordenados.

Ejemplo:



Un vector v se representa por : $\langle v_x; v_y \rangle$

v_x es su componente horizontal , v_y es su componente vertical.

En la figura adjunta las componentes del vector v son:

Su componente horizontal $v_x = \underline{\hspace{2cm}}$

Su componente vertical $v_y = \underline{\hspace{2cm}}$



El vector v es:

$\langle \quad ; \quad \rangle$

8.1



EPE

VECTORES EN \mathbb{R}^3

El concepto de vector en el plano se puede extender de manera natural, con ligeros cambios, en el espacio. En \mathbb{R}^3 los vectores tienen tres componentes.

La flecha que va desde O hasta P representa al vector v .

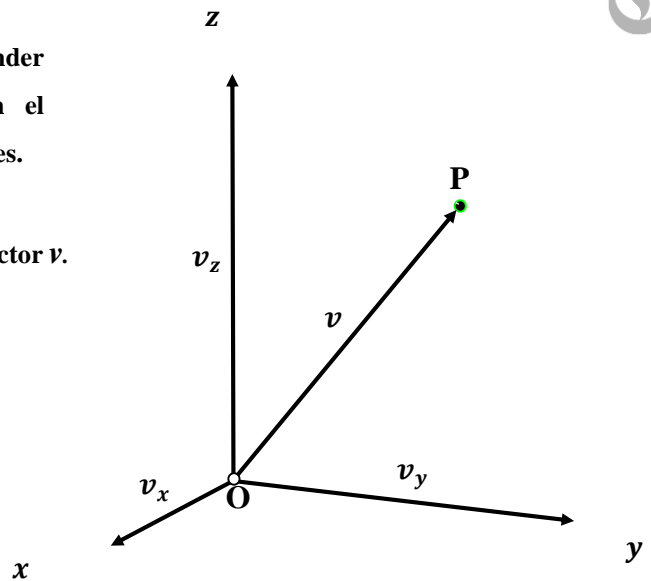
El vector se representa por $v = \langle v_x; v_y; v_z \rangle$

Donde:

v_x es la componente en el eje x

v_y es la componente en el eje y

v_z es la componente en el eje z

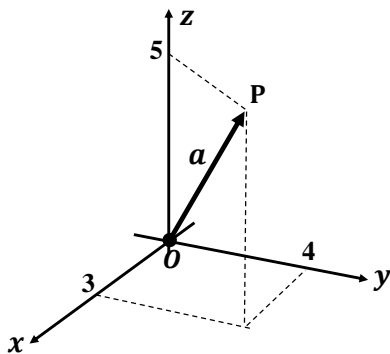


8.1

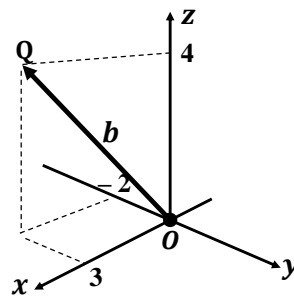
EPE

VECTORES EN \mathbb{R}^3

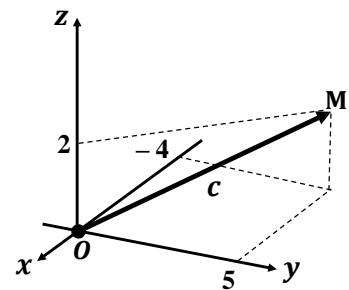
Ejemplos: Represente cada vector en términos de sus componentes.



$$a = \langle \quad ; \quad ; \quad \rangle$$



$$b = \langle \quad ; \quad ; \quad \rangle$$



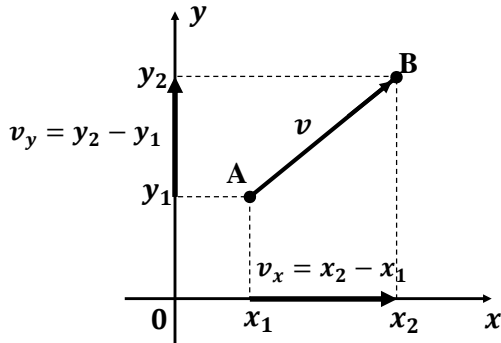
$$c = \langle \quad ; \quad ; \quad \rangle$$

8.1

EPE

COMPONENTES DE UN VECTOR EN \mathbb{R}^2

Dado un vector v cuyo punto inicial es $A(x_1; y_1)$ y punto terminal $B(x_2; y_2)$, entonces: $v = \langle v_x; v_y \rangle$



$$v = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1 \rangle$$

Ejemplos: Represente cada vector en términos de sus componentes.

$$a = \langle \quad ; \quad \rangle$$

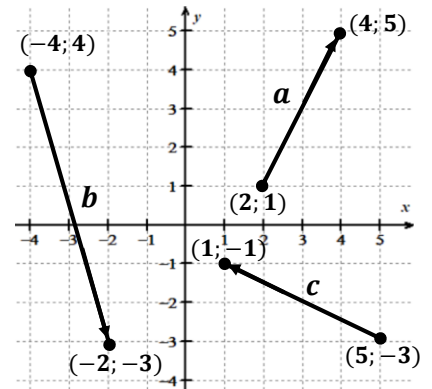
$$a = \langle \quad ; \quad \rangle$$

$$b = \langle \quad ; \quad \rangle$$

$$b = \langle \quad ; \quad \rangle$$

$$c = \langle \quad ; \quad \rangle$$

$$c = \langle \quad ; \quad \rangle$$

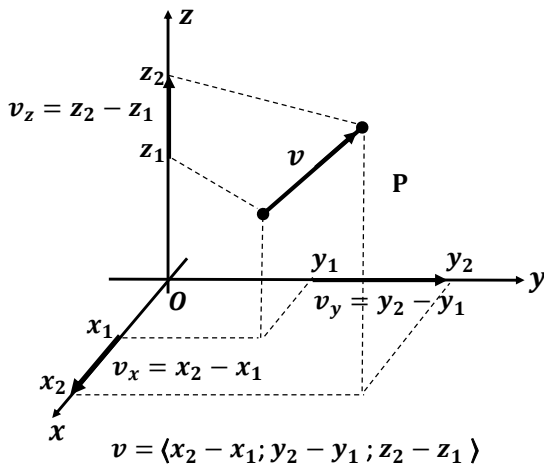


8.1

EPE

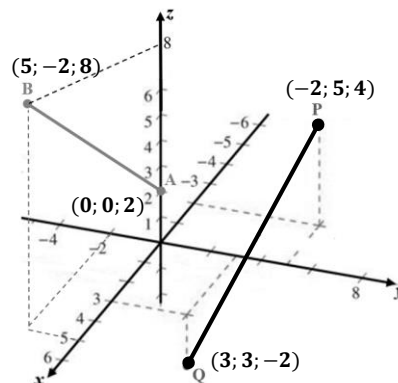
COMPONENTES DE UN VECTOR EN \mathbb{R}^3

Dado un vector v cuyo punto inicial es $A(x_1; y_1; z_1)$ y terminal es $B(x_2; y_2; z_2)$, entonces: $v = \langle v_x; v_y; v_z \rangle$



$$v = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1 \rangle$$

Dados los puntos $Q(3; 3; -2)$, $P(-2; 5; 4)$. Halle los vectores \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{AB}



$$\overrightarrow{PQ} =$$

$$\overrightarrow{PQ} =$$

$$\overrightarrow{AB} =$$

$$\overrightarrow{AB} =$$

8.1

EPE

MAGNITUD O MÓDULO DE UN VECTOR

Dado un vector en \mathbb{R}^2 : $v = \langle v_x; v_y \rangle$

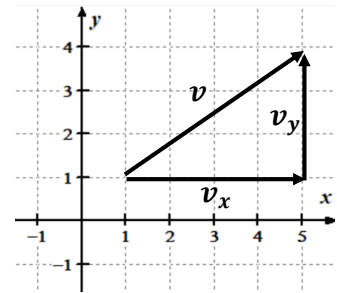
La magnitud o módulo del vector se representa por: $|v|$

Ejemplos:

$$|v| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

$$v = \langle 4; 3 \rangle \quad |v| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} =$$

$$a = \langle 2; -5 \rangle \quad |a| =$$



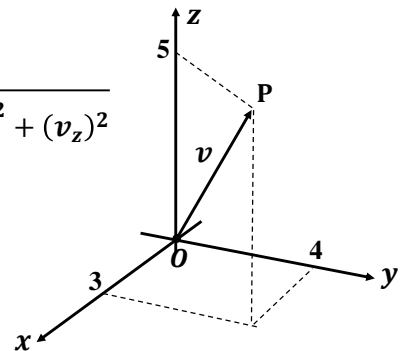
Dado un vector en \mathbb{R}^3 : $v = \langle v_x; v_y; v_z \rangle$

$$|v| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$

Ejemplos:

$$v = \langle 3; 4; 5 \rangle \quad |v| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2 + (\quad)^2} =$$

$$a = \langle 12; -16; 21 \rangle \quad |a| =$$



8.1

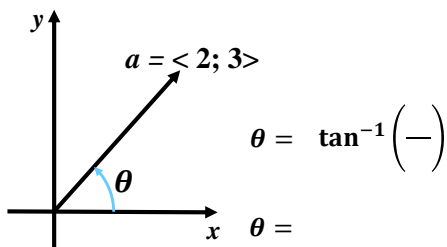
EPE

DIRECCIÓN DE UN VECTOR EN \mathbb{R}^2

La dirección θ del vector a , se determina por la medida del ángulo positivo más pequeño en posición normal formado por el eje x positivo y el vector a .

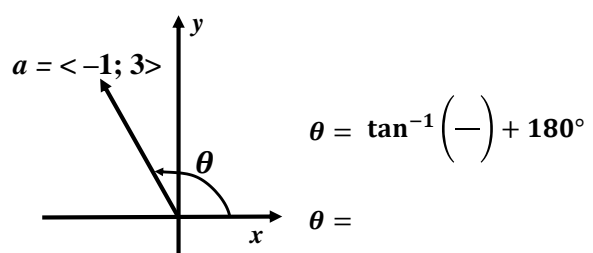
Dependiendo del cuadrante el ángulo θ se calcula de la siguiente manera:

Si $\theta \in IC \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$



La dirección θ del vector a es _____ aprox.

Si $\theta \in IIC \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + 180^\circ$



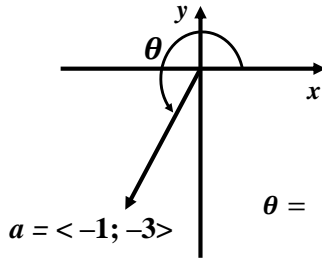
La dirección θ del vector a es _____ aprox.

8.1

EPE

DIRECCIÓN DE UN VECTOR EN \mathbb{R}^2

Si $\theta \in III C \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + 180^\circ$

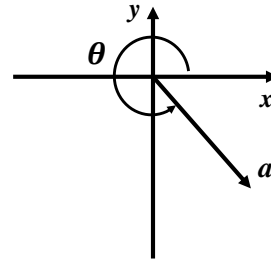


$$\theta = \tan^{-1}\left(-\right) + 180^\circ$$

$$\theta =$$

La dirección θ del vector a es _____ aprox.

Si $\theta \in IV C \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + 360^\circ$



$$a = \langle 1; -1 \rangle$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\right) + 360^\circ$$

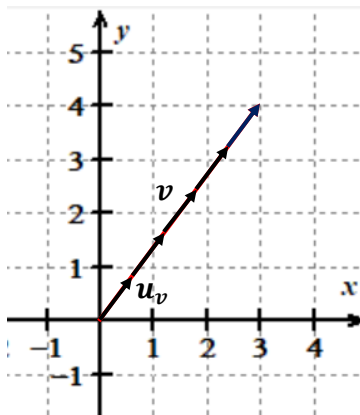
$$\theta =$$

La dirección θ del vector a es _____

8.1

EPE

VECTOR UNITARIO



Se llama vector unitario a todo vector cuya magnitud es 1.

Todo vector v tiene asociado un vector unitario que se representa por u_v y se lee: *vector unitario en la dirección del vector v* .

En la figura adjunta la magnitud del vector v es: 5

Entonces el vector unitario en la dirección de v es:

$$u_v = \frac{1}{5} \langle 3; 4 \rangle \Rightarrow u_v = \left\langle \frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right\rangle$$

En forma general, dado un vector v , el vector unitario asociado a v se determina por:

$$u_v = \frac{v}{|v|}$$

Ejemplos:

$$a = \langle -4; 3 \rangle \quad |a| =$$

$$u_a = \left\langle -; - \right\rangle$$

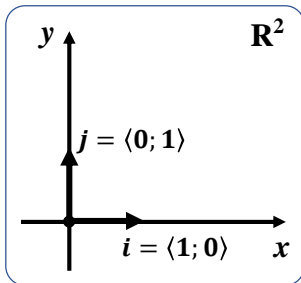
$$b = \langle 2; 1; -1 \rangle \quad |b| =$$

$$u_b = \left\langle -; -; - \right\rangle$$

8.1

EPE

VECTORES CANÓNICOS



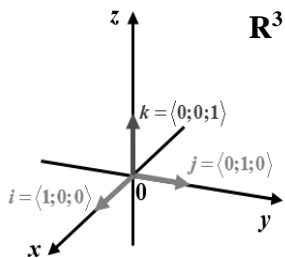
Son aquellos vectores unitarios que están en la dirección positiva de los ejes coordenados.

Todo vector v puede ser expresado en términos de los vectores canónicos.

Ejemplo: $v = \langle 7; 4 \rangle$

$$v = \langle 7; 0 \rangle + \langle 0; 4 \rangle = 7 \langle 1; 0 \rangle + 4 \langle 0; 1 \rangle =$$

Ejemplos: exprese cada uno de los siguientes vectores en términos de los vectores canónicos.



$$a = \langle 3; 2 \rangle =$$

$$b = \langle 3; 2; -7 \rangle =$$

$$p = 2i - 6k = \langle \quad ; \quad ; \quad \rangle$$

$$q = 3i + 4j - k = \langle \quad ; \quad ; \quad \rangle$$

8.1

EPE

OPERACIONES CON VECTORES



Ejemplos:

$$a = \langle -4; 7 \rangle \text{ y } b = 5i - 3j = \langle 5; -3 \rangle$$

Halle:

i) $a + b =$

ii) $4b =$

iii) $-3a =$

iv) $-2a + 3b =$

$$a + b$$

$$ka; k \in \mathbb{R}$$

Ejemplos:

$$a = \langle -1; -3; 7 \rangle \text{ y } b = 2i - 5j + k = \langle 2; -5; 1 \rangle$$

Halle:

i) $a + b =$

ii) $4a =$

iii) $2a - 3b =$

8.1

EPE

PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO PUNTO



Dados los vectores en \mathbb{R}^2

$$a = \langle a_x; a_y \rangle \text{ y } b = \langle b_x; b_y \rangle$$

El producto punto o producto escalar denotado como $a \cdot b$ está definido por:

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$

Ejemplo:

$$a = \langle -5; 4 \rangle, \quad b = \langle -3; -2 \rangle$$

$$a \cdot b =$$

$$a \cdot b =$$

$$a \cdot b =$$

Dados los vectores en \mathbb{R}^3

$$a = \langle a_x; a_y; a_z \rangle \text{ y } b = \langle b_x; b_y; b_z \rangle$$

El producto punto o producto escalar denotado como $a \cdot b$, está definido por:

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Ejemplo:

$$a = \langle -5; 4; 3 \rangle, \quad b = \langle 1; -2; 6 \rangle$$

$$a \cdot b =$$

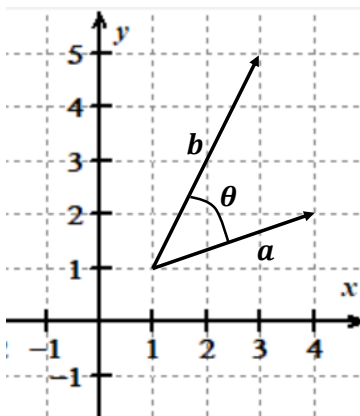
$$a \cdot b =$$

$$a \cdot b =$$

8.1

EPE

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES



$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{a \cdot b}{|a| |b|} \right)$$

Ejemplos: Determine el ángulo entre los vectores a y b

$$a = 3i + j, b = \langle 2; 4 \rangle$$

$$a = \langle \quad ; \quad \rangle$$

$$a \cdot b =$$

$$a \cdot b =$$

$$|a| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|a| =$$

$$|b| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|b| =$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\quad}{\quad} \right)$$

$$\theta =$$

$$a = \langle 2; 1; -1 \rangle, b = -2i + j + 4k$$

$$b = \langle \quad ; \quad ; \quad \rangle$$

$$a \cdot b =$$

$$a \cdot b =$$

$$|a| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|a| =$$

$$|b| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$|b| =$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\quad}{\quad} \right)$$

$$\theta =$$

8.1

EPE

VECTORES ORTOGONALES O PERPENDICULARES

Dos vectores a y b son ortogonales o perpendiculares si se cumple:

$$a \cdot b = 0$$

Grafique los vectores $a = \langle 3; 4 \rangle$, $b = \langle -4; 3 \rangle$

¿Qué ángulo forman? $a \cdot b = (3)(-4) + (4)(3) \Rightarrow a \cdot b = 0$
los vectores a y b son ortogonales entonces forman 90°

Ejemplos:

¿Los vectores $a = \langle 2; -3 \rangle$ y $b = \langle -6; 4 \rangle$ son ortogonales?

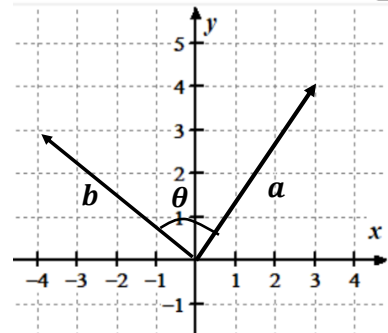
$$a \cdot b = \quad \Rightarrow a \cdot b$$

los vectores a y b _____

¿Los vectores $a = \langle 1; -2; 4 \rangle$ y $b = 8i + 6j + k$ son ortogonales?

$$a \cdot b = \quad \Rightarrow a \cdot b =$$

los vectores a y b _____



8.1

EPE

VECTORES PARALELOS

Dos vectores a y b son paralelos si y solo si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$a = kb$$

Dados los vectores en \mathbb{R}^2 , $a = \langle a_x; a_y \rangle$ y

$$b = \langle b_x; b_y \rangle$$

Si cumplen $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = k \Rightarrow$ son paralelos.

Dados los vectores en \mathbb{R}^3 , $a = \langle a_x; a_y; a_z \rangle$ y

$$b = \langle b_x; b_y; b_z \rangle$$

Si cumplen $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k \Rightarrow$ son paralelos.

En la figura adjunta los vectores a y b ¿son paralelos?

$$a = \langle 4; 6 \rangle$$

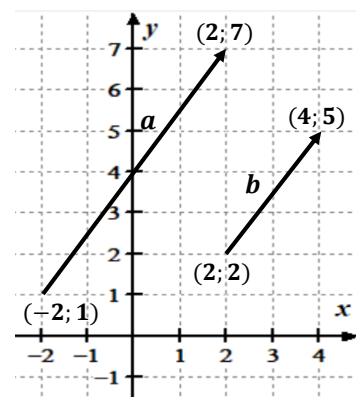
$$b = \langle 2; 3 \rangle \quad \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow \text{son paralelos}$$

Determine si los vectores indicados son paralelos en cada caso

a) $a = \langle -4; -2 \rangle$ y $b = \langle 10; 5 \rangle$ $\quad \quad \quad \Rightarrow$ _____

b) $a = \langle 2; 3; -4 \rangle$ y $b = \langle -10; -15; 20 \rangle$

$$\Rightarrow$$



8.1

EPE

PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial entre dos vectores a y b en \mathbb{R}^3 , distintos del vector nulo, es otro vector y se representa como $a \times b$.

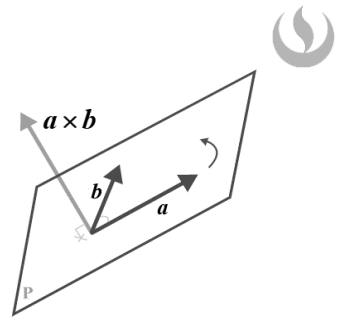
En la figura adjunta se representa gráficamente qué representa un producto vectorial. Como se puede observar el resultado del producto vectorial $a \times b$ es otro vector, perpendicular al plano que determinan a y b .

Para calcular el producto vectorial entre dos vectores a y b en \mathbb{R}^3 definidos como $a = \langle a_x; a_y; a_z \rangle$, $b = \langle b_x; b_y; b_z \rangle$ se forma una matriz cuadrada de orden tres y se calcula su determinante.

Ejemplo: $a = \langle -4; 2; 1 \rangle$ y $b = \langle -3; 5; -2 \rangle$ Halle: $a \times b$

$$a \times b = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -4 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} = i \begin{vmatrix} & & \\ & & \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} & & \\ & & \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$a \times b =$$



$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

8.1

EPE

EJERCICIO



Sabiendo que: $a = \langle 2; 3; -4 \rangle$ y $b = \langle -1; -5; 2 \rangle$

Halle: $b \times a$

8.1

EPE

CIERRE DE CLASE

Dados los vectores: $a = \langle 3; 4 \rangle$, $b = -4j + i$, halle:

A) $|2a - b|$

B) $a + b$

C) $a \cdot b$

D) El ángulo formado por los vectores a y b

8.1



EPE



APLICAR LOS
SISTEMAS DE
ECUACIONES
LINEALES EN
PROBLEMAS DE
CONTEXTO REAL

HALLAR EL
DETERMINANTE DE
MATRICES DE ORDEN
2 Y 3.
REGLA DE SARRUS

VECTORES EN EL PLANO
Y EL ESPACIO
MAGNITUD, DIRECCIÓN
Y OPERACIONES ENTRE
VECTORES

8.1



EPE

BIBLIOGRAFÍA

STEWART, James (2012).

PRECÁLCULO: MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO.

Sexta edición. México, D.F. Cengage Learning.

Vectores páginas 579 – 594

Sistema de ecuaciones lineales páginas 631 – 649



8.1

EPE

ACTIVIDADES DE LA SEMANA 8

Control 5

ASESORÍA 7, clase programada con el AAD

CONTROL DE RECUPERACIÓN 5, se evalúa en la asesoría 7



CONSULTAS



8.1

EPE



**PRÓXIMA
CLASE**

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS

8.1

EPE



Gracias



8.1

