MATEMÁTICA BÁSICA – CE82
SEMANA 5 – SP2

Temario: Función inyectiva, Función inversa, determinación de la regla de correspondencia, dominio y rango.

Logro de la sesión: Al término de la sesión el estudiante reconoce una función inyectiva, determina su inversa y regla de correspondencia, dominio y rango, así como aplicaciones a situaciones reales.

FUNCIÓN INYECTIVA

Una función es inyectiva o uno a uno, si y solo si a elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas, es decir:

f es una función inyectiva si para dos valores diferentes x_1 y x_2 ($x_1 \neq x_2$) del dominio de *f* se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$

Si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2$

Elegimos dos valores diferentes ($x_1 \neq x_2$) $x_1 = -2 \; y \; x_2 = 2$ al evaluar se obtiene:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \;\; \Rightarrow f(2) = \_\_\_\_ \\ x_2 = -2 \Rightarrow f(-2) = \_\_\_\_ \end{cases}$$

Resulta que $f(-2) = f(2)$ no cumple con la definición de función inyectiva

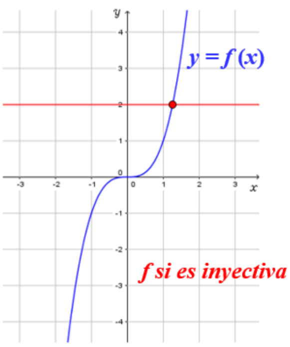
Conclusión: *f* no es una función inyectiva

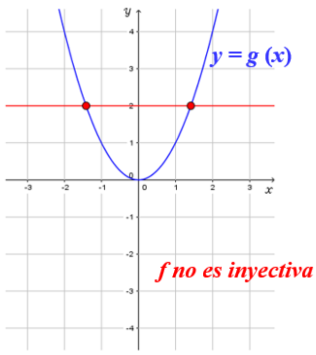
Ejercicio 1: La función *f* cuya regla es $f(x) = |x|$ ¿Es una función inyectiva?

CRITERIO DE LA RECTA HORIZONTAL (CRH)

Una función *f* es inyectiva o uno a uno si y sólo sí cualquier recta _______________ corta a su gráfica a lo más en ______________.

También es correcto afirmar que si una función *f* es estrictamente creciente o _______________ en su dominio esta es inyectiva.





Ejemplo:

Determine si la función *f* con regla de correspondencia $f(x) = |x+1| - 2$ definida en el intervalo $]-\infty;0]$ es inyectiva. Justifique su respuesta.

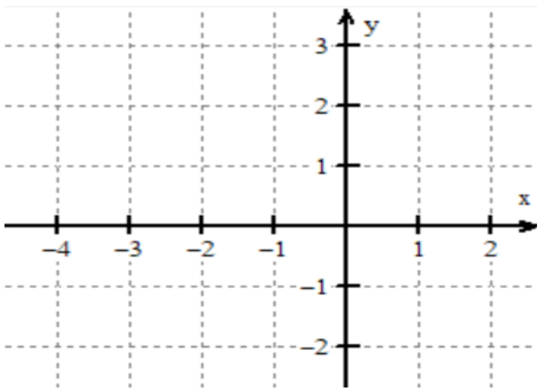
Solución:

Paso 1: Grafique la función

Paso 2: Al trazar rectas horizontales se observa que corta a la gráfica en ___________________________

Paso 3: Conclusión

____

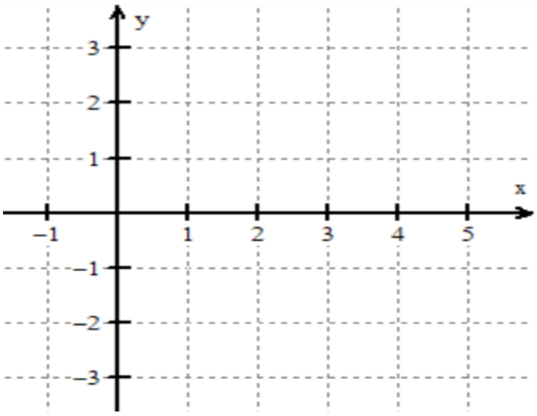


Ejercicio 2:

Determine si la función g con regla de correspondencia $g(x) = 2 - (x-1)^2$ definida en el intervalo $[1;+\infty[$ es inyectiva.

Solución:

Paso 1: Grafique la función



Paso 2: Al trazar rectas horizontales se observa que corta a la gráfica en ____________________________

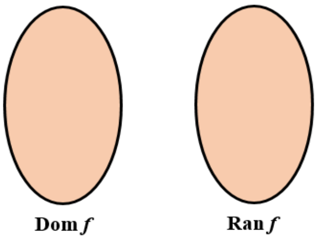
Paso 3: Conclusión

____

FUNCIÓN INVERSA

Si una función f se define de la siguiente manera: $f = \{(1;9),(2;8),(3;7),(4;6)\}$

En el diagrama adjunto coloque los elementos del dominio y rango y luego asocie mediante flechas.



$f(1) =$ ____, $f(2) =$ ____

$f(3) =$ ____, $f(4) =$ ____

La función f ¿Es inyectiva?

Al permutar los elementos de cada par ordenado se obtiene una nueva función __________________________ a esta función se le llama inversa de la función f y se le representa por f^{-1}.

$$f^{-1} = \{(9;1),(8;2),(7;3),(6;4)\}$$

Observa que: Domf^{-1} = ________________, Ranf^{-1} = _______________

DEFINICIÓN

Si f es una función inyectiva con dominio D y rango R entonces existe la inversa de f, que se representa por f^{-1}, tiene dominio R y rango D.

Observaciones:

- El dominio de f^{-1} es igual al rango de f y el rango de f^{-1} es igual al dominio de f.
- Una función g es la función inversa de la función f si
  $f(g(x)) = x$ para todo x en el dominio de g y $g(f(x)) = x$ para todo x en el dominio de f.

Ejemplo:

Demuestre que las funciones $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ son mutuamente inversas.

Solución:

$f(g(x)) =$

$g(f(x)) =$

Como se puede observar $f(g(x)) = g(f(x)) = x$

Por lo tanto, se puede afirmar que f y g son mutuamente inversas.

GRÁFICA DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

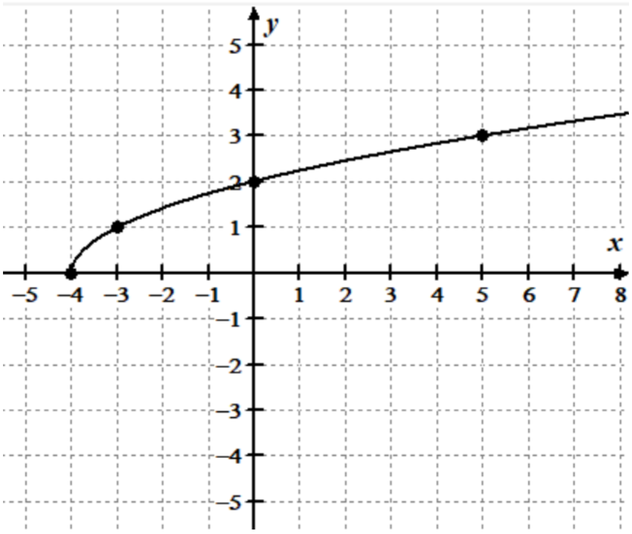
Conociendo la gráfica de una función f se puede determinar la gráfica de la inversa de una función f^{-1} haciendo una reflexión de la gráfica de f respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo:

En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función f cuya regla es $f(x) = \sqrt{x+4}$.

Coloque las coordenadas de los puntos indicados.

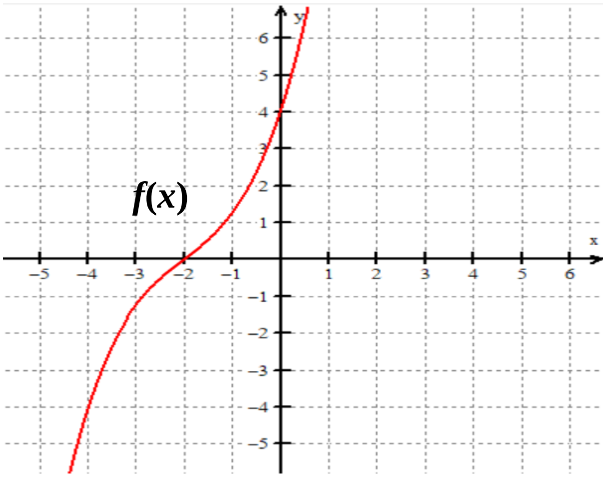
Grafique f^{-1}.

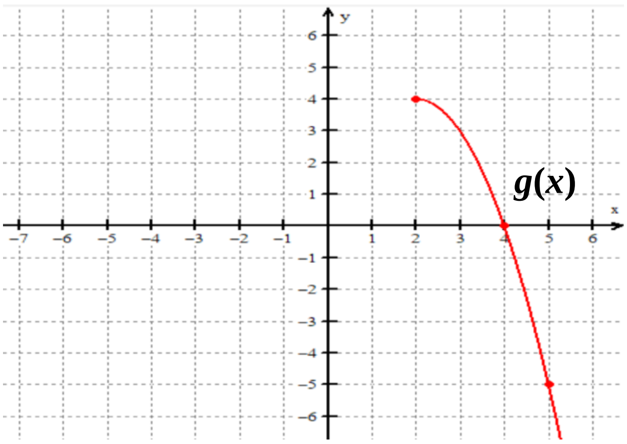


Ejercicio 3:

En la figura adjunta se muestran las gráficas de dos funciones *f* y *g*, ¿son inyectivas?

Grafique en el mismo plano la inversa de ambas funciones.





REGLA DE CORRESPONDENCIA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Dada la función $y = f(x)$, para determinar la regla de correspondencia de f^{-1}, se debe seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Verifique que f es inyectiva o uno a uno, para garantizar la existencia de f^{-1}.

Paso 2: Escriba $y = f(x)$, luego despeje la variable *x* en función de variable *y*.

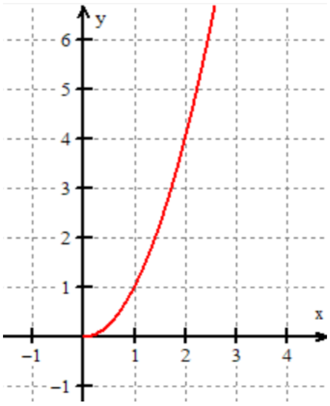
Paso 3: Ahora escriba $f^{-1}(x)$ en lugar de la variable *x* y en lugar de la variable *y*, escriba *x*.

Paso 4: Determine el dominio para f^{-1}.

Ejemplo:

Dada la función f con regla de correspondencia $f(x)=x^2$, definida en el intervalo $[0;+\infty[$.

Halle la regla de correspondencia de f^{-1} e indique su dominio y su rango.



Solución:

Para halla la inversa de *f* hay que seguir los pasos indicados.

Paso 1: Verifique que f es inyectiva para garantizar la existencia de f^{-1}.

Para determinar si existe la inversa de *f*, se esboza la gráfica y se aplica el principio de ______________________.

Al trazar rectas horizontales se observan que cortan a la curva en __________

Por lo tanto ______ tiene inversa.

Paso 2: Escriba $y=f(x)$, luego despeje la variable *x* en función de variable *y*.

$f(x)=x^2 \Rightarrow$

Despejamos la variable *x*: (2 soluciones)

Por dato $x \in [0;+\infty[$ por lo tanto $x=$ ________

Paso 3: Ahora escriba $f^{-1}(x)$ en lugar de la variable *x* y en lugar de la variable *y*, escriba *x*.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cambiamos } x \text{ por } f^{-1}(x)\\ \text{Cambiamos } y \text{ por } x\end{array}\right\} \quad f^{-1}(x)= \_\_\_\_\_\_$$

Paso 4: Determine el dominio para f^{-1} recuerde $\text{Dom}f^{-1}=\text{Ran}f$ y $\text{Ran}f^{-1}=\text{Dom}f$

En este caso el $\text{Dom}f=[0;+\infty[$ y $\text{Ran}f=[0;+\infty[$

Por lo tanto $\text{Dom}f^{-1}=$ ______ y $\text{Ran}f^{-1}=$ ______

Conclusión: $f^{-1}(x)=$ ______ , $\text{Dom}f^{-1}=$ ______

Ejercicio 4:

Dada la función f con regla de correspondencia $f(x)=3x+4$; $x\in[-3;2[$. Halle la regla de correspondencia de f^{-1} e indique su dominio y su rango.

Ejercicio 5:

Dada la función f con regla de correspondencia $f(x)=x^2-4;[0;+\infty[$. Halle la regla de correspondencia de f^{-1} e indique su dominio y su rango.

CIERRE DE CLASE

A. Sea la función $f(x)=x+3$, ¿luego su inversa es $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x+3}$? ¿Por qué?

B. La función $f(x)=x^2$ ¿Es inyectiva? ¿Tiene inversa?

C. La función $f(x)=x^2$, $x\in\,]-\infty;0]$ ¿Es inyectiva? ¿Tiene inversa?