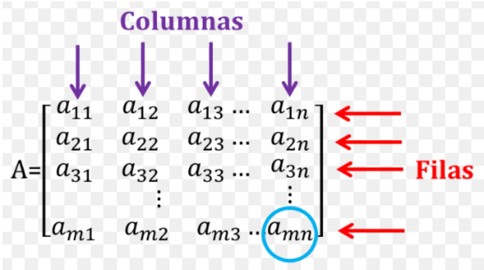
MATEMÁTICA BÁSICA – CE82
SEMANA 7 – SP2

Temario:MATRICES

Logro: Al final la sesión el estudiante será capaz de definir matrices, clasificarlas, reconocer sus elementos y realizar operaciones.

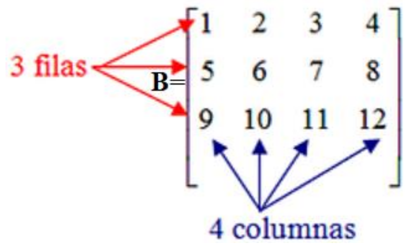
MATRICES



Una **matriz** es un arreglo rectangular de números llamados **elementos**, de la matriz, ordenados en _______ y ___________.

En la figura adjunta la matriz A tiene ***m*** filas y ***n*** columnas.

El ***tamaño*** de una matriz está dado por el número de filas y columnas que tiene, y generalmente se le denomina orden de la matriz. Una matriz que tiene *m* filas y *n* columnas se dice que es de orden _______.



En la figura adjunta la matriz **B** es de orden **3x4** y también se representa por: $\mathbf{B}_{3\times 4}$

Se usa la notación de *doble subíndice* para referirse a los elementos de una matriz. Si tenemos una matriz B el elemento que se encuentra en la fila *i* y la columna *j* se denota mediante $\mathbf{b}_{ij}$.

En la figura anterior el número 7 está en la fila 2 y columna 3 entonces se representa por: $b_{23} =$ ___

Ejercicio 1

Con los datos de la matriz B (figura anterior) halle:

$b_{32} =$	$b_{21} =$	$b_{33} =$	$b_{14} =$	$b_{24} =$	$b_{13} =$

MATRIZ POR EXTENSIÓN

Dada la matriz $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ donde a_{ij} define los elementos de la matriz entonces podremos determinar dichos elementos.

Ejemplo 1:

Dada la matriz $A = \left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$ donde $a_{ij} = 2i - j$, halle la matriz A por extensión.

Solución:

Observe que la matriz tiene dos filas y tres columnas, es decir es de la forma: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

Luego usamos la condición dada para hallar el valor de cada elemento, es decir:

$a_{11} = 2(1) - 1 = 1$; $a_{12} = 2(1) - 2 = 0$; $a_{13} = 2(1) - 3 = -1$

$a_{21} =$; $a_{22} =$; $a_{23} =$

Finalmente, la matriz por extensión es: $A = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

Ejercicio 2

Dada la matriz $B = \left[b_{ij} \right]_{2\times 3}$ donde $b_{ij} = \begin{cases} i + 2j & , i < j \\ i \cdot j & , i = j \\ 2i - j & , i > j \end{cases}$, halle la matriz B por extensión.

TIPOS DE MATRICES

Matriz Nula: Es aquella matriz donde todos sus elementos son ceros y se representa por $\boldsymbol{O}$, es decir.

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

MATRIZ CUADRADA	MATRIZ IDENTIDAD	MATRIZ TRANSPUESTA
Son aquellas matrices cuyo número de filas es igual al número de columnas. Ejemplos: $A = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ Escribe una matriz A de orden 4 $C = \begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{bmatrix}$	Son aquella matrices cuadradas cuyos elementos de la diagonal principal son todos igual a 1 y los demás elementos son ceros. Ejemplos: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Dada una matriz A de orden $m \times n$, la transpuesta de A es la matriz que se obtiene al intercambiar las filas y columnas de A. Se representa por A^t y es orden $n \times m$. Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 9 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 12 & -9 \\ -8 & 11 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 12 & -8 & 10 \\ -9 & 11 & 7 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 13 \\ -9 & 7 & 11 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t =$

A. ¿Qué es una matriz?
B. ¿Qué significa que A es una matriz de orden 4x3?
C. ¿Qué es una matriz cuadrada?
D. ¿Qué es una matriz transpuesta?

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de matrices

Sean las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ de orden $m \times n$, la suma de la matriz A y B es otra matriz $C = A + B$ de orden $m \times n$, definida por $C = c_{ij}$, donde $C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$

Esto es:

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{22} & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Observación: Solo se suman matrices del mismo orden.

Ejemplo 2:

Sean las matrices $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} -8 & -3 & 2 \\ -15 & 42 & 17 \end{bmatrix}$ calcule $A+B$.

Solución

Como en orden de las matrices son iguales entonces podemos sumar o restar.

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -8 & -3 & 2 \\ -15 & 42 & 17 \end{bmatrix}=$$

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Definición: Sea la matriz $A=[a_{ij}]$ de orden $m\times n$ y sea k un número real. El producto del número k por la matriz A es otra matriz de orden $m\times n$ y se denota por $kA=[ka_{ij}]$

Para multiplicar un número real por una matriz, se multiplica el número k por cada uno de los elementos de la matriz A.

Ejemplo 3:

Sea las matrices $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ calcule $3A$.

Solución

$$3A=3\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}=$$

Ejercicio 3

Sean las matrices $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ calcule $2A-3B^t$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Dada la matriz A de orden $m\times n$ y la matriz B de orden $n\times p$. Entonces el producto AB es la matriz C de orden $m\times p$, tal que cada elemento de C denominado por c_{ij} es el resultado de multiplicar la i-ésima fila de la matriz A con la j-ésima columna de la matriz B.

Para multiplicar dos matrices es indispensable que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

Para entender mejor el producto de matrices primero entandamos el producto de una matriz fila por una matriz columna

Matriz fila: Es aquella matriz que solo tiene una fila, por ejemplo: $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}_{1\times 4}$

Matriz columna: Es aquella matriz que solo tiene una columna, por ejemplo: $B=\begin{bmatrix}-3\\ 5\\ -7\\ 9\end{bmatrix}_{4\times 1}$

Si efectuamos el producto: $A_{1\times 4}\cdot B_{4\times 1}$ se obtiene una nueva matriz C de orden 1 × 1 los elementos de la matriz C se obtienen multiplicando los elementos de la matriz fila por la matriz columna en el orden siguiente:

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 5\\ -7\\ 9\end{bmatrix}=$$

Nota: en este ejemplo puedes observar porqué para poder multiplicar matrices el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.

El proceso para multiplicar matrices A y B es similar al anterior con la diferencia que tenemos más filas y columnas. Se multiplica la primera fila de la matriz A con cada columna de la matriz B, luego la segunda fila de la matriz A con cada columna de la matriz B, y así sucesivamente hasta terminar con todas las filas de A.

Ejemplo 4:

Sea las matrices $A=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}8 & -7\\ 9 & 0\\ -4 & 3\end{bmatrix}$

A) ¿De qué orden es la matriz A?

B) ¿De qué orden es la matriz B?

C) ¿Se puede efectuar el producto AB?

D) ¿Se puede efectuar el producto BA?

E) Halle el producto: BA

Ejercicio 4

Sean las matrices $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -3\\ 7 & 1 & -4\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & -5\\ 2 & 6\end{bmatrix}$

a) Halle (si es posible) AB

b) Halle (si es posible) BA

CIERRE DE CLASE

A. ¿Qué es una matriz identidad? Escriba una matriz identidad de orden 4.

B. Si una matriz A es de orden 3x4, ¿qué representa el elemento a_{31}?

C. ¿Qué se debe cumplir para poder multiplicar dos matrices?