MATEMÁTICA BÁSICA – CE82
SEMANA 8 – SP2

Temario: Matrices equivalentes, sistemas de ecuaciones lineales, clasificación y resolución.

Logro de la sesión: Al término de la sesión el estudiante realiza operaciones que conducen a la obtención de una matriz equivalente mediante operaciones fila y columna. Resuelve sistemas de ecuaciones por el método de eliminación gaussiana.

MATRICES EQUIVALENTES (TRANSFORMACIONES ELEMENTALES)

Existen una serie de operaciones que se pueden realizar entre las filas o columnas de una matriz de manera que obtenemos una nueva matriz. Estas operaciones se denominan operaciones elementales y son:

- ✓ Intercambiar filas o columnas.
- ✓ Multiplicar una fila o columna por un número real distinto de cero.
- ✓ Sumar o restar un múltiplo de una fila o columna por otra fila o columna.

Si una matriz se ha obtenido de otra mediante operaciones elementales se denomina matriz equivalente y tiene las mismas propiedades que la matriz original.

Ejemplo 1:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\ldots\text{intercambiamos la fila1 con la fila 3 (}f_1\leftrightarrow f_3\text{)}\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{bmatrix}\_&\_&\_\\\_&\_&\_\\\_&\_&\_\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\ldots\text{multiplicamos la fila 2 por 3 (}3f_2\text{)}\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{bmatrix}\_&\_&\_\\\_&\_&\_\\\_&\_&\_\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\ldots.\ -4f_1+f_2\leftrightarrow f_2\ldots.. \quad \begin{array}{ccc}\mathbf{-4}&\mathbf{-8}&\mathbf{-12+}\\\mathbf{4}&\mathbf{5}&\mathbf{6}\\\hline\mathbf{0}&\mathbf{-3}&\mathbf{-6}\end{array}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{bmatrix}\_&\_&\_\\\_&\_&\_\\\_&\_&\_\end{bmatrix}$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES (SEL)

Un sistema de ecuaciones lineales (SEL), es un sistema de ecuaciones en el cual cada ecuación es lineal.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\quad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

Donde $a_{11};\ a_{12};\ldots;\ a_{mn}$ (coeficientes) y $b_1;\ b_2;\ldots;\ b_m$ (términos independientes) son números reales, y $x_1;\ x_2;\ldots;\ x_n$ son las variables.

Resolver un sistema consiste en hallar los valores de las variables que satisfacen cada una de las ecuaciones, a este conjunto se le llama: Conjunto Solución.

Ejemplo 2:

$$\begin{cases}x-2y+z=7\\3x-5y+z=14\\2x-2y-z=3\end{cases}$$

Observa que ocurre si reemplazas $x = 2$; $y = -1$; $z= 3$ en cada una de las ecuaciones.

El conjunto solución es:

CS= {(2; – 1; 3)}

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

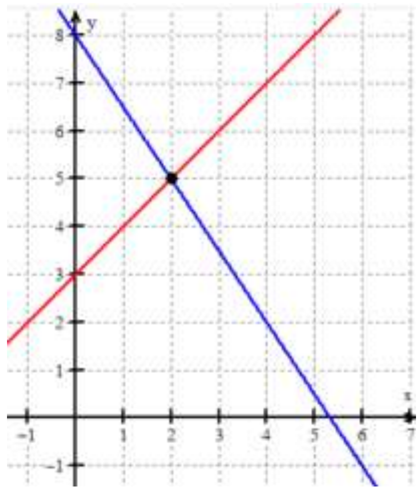
Un SEL se dice **incompatible** si no admite ninguna solución, en este caso su conjunto solución es vacío.

Si el SEL admite soluciones se dice **compatible** y puede ser:

Sistema Compatible Determinado si admite una única solución.

Sistema Compatible Indeterminado si admite más de una solución. En este caso el conjunto solución se expresa mediante parámetros.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE UN SEL DE 2 x 2



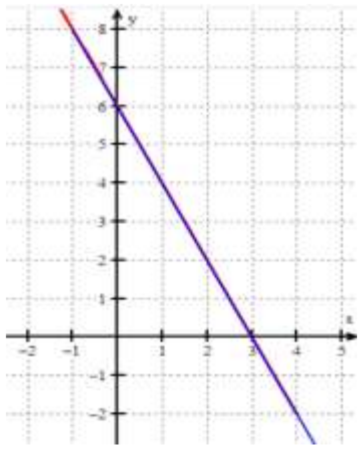
Sistema Compatible Determinado

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$$

Interpretación gráfica

Cada ecuación se representa gráficamente por una recta y el punto de intersección es el conjunto. En este caso: CS =

Resolución algebraica:



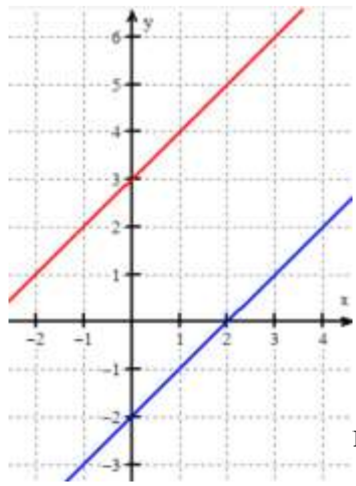
Sistema Compatible Indeterminado

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 2y = 12 \end{cases}$$

Interpretación gráfica

Cada ecuación se representa gráficamente por una recta, en este caso las rectas coinciden por lo tanto hay infinitos puntos de intersección. En este caso: CS =

Resolución algebraica:



Sistema Incompatible

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Interpretación gráfica

Cada ecuación se representa gráficamente por una recta, en este caso las rectas son paralelas, por lo tanto, no hay puntos de intersección. En este caso: CS =

Resolución algebraica:

RESOLUCIÓN DE UN SEL: ELIMINACIÓN GAUSSIANA

La eliminación gaussiana es un algoritmo que transforma sucesivamente un sistema de ecuaciones lineales simultáneas en otro equivalente, hasta obtener al final un sistema escalonado fácilmente resoluble.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Para aplicar este algoritmo es necesario reconocer las siguientes matrices:

Matriz de coeficientes:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz de variables:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matriz de términos independientes:

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriz ampliada o aumentada se forma a partir de las matrices A y B, es decir:

$$[A|B]=A=\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Ejemplo 3:

Dado el sistema $\begin{cases} x-2y+z=7 \\ 3x-5y+z=14 \\ 2x-2y-z=3 \end{cases}$ halle:

Matriz de coeficientes	Matriz de variables	Matriz de términos independientes	Matriz Ampliada

Ejemplo 4:

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando la eliminación gaussiana y clasifique el sistema.

A) $\begin{cases} 2x-2y+z=3 \\ 3x-5y+z=0 \\ 4x-2y-3z=5 \end{cases}$

Paso 1: Matriz ampliada $\left[\begin{array}{cccc} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}\right]$

Paso 2: Eliminación gaussiana

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{-3f_1+2f_2\to f_2} \left[\begin{array}{cccc} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2f_1+f_3\to f_3} \left[\begin{array}{cccc} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}\right] \xrightarrow{2f_3+f_2\to f_3} \left[\begin{array}{cccc} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}\right]$$

Paso 3: Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x-2y+\quad z=3 & \text{............(I)} \\ \_\_y+\_\_z=\_\_ & \text{............(II)} \\ \qquad\quad \_\_z=\_\_ & \text{............(III)} \end{cases}$

Paso 4: Conjunto solución y clasificación del sistema:

Resolvemos cada ecuación (de abajo hacia arriba, ecuación III): ___*z* = ___ entonces *z* =

Reemplazamos el valor de *z* en la ecuación II: ___*y* + ____=____ entonces *y* =

Reemplazamos estos valores en la ecuación I: 2*x* – 2 (   ) + (   ) = 3 entonces *x* =

Conjunto solución: **Clasificación:**

Ejercicio 1:

B) $\begin{cases} 2x-2y+z=3 \\ 3x-5y+z=0 \\ x+y+z=5 \end{cases}$

Conjunto solución:

Clasificación:

Paso 1: Matriz ampliada Paso 2: Eliminación gaussiana (Matriz escalonada) Paso 3: Sistema de ecuaciones Paso 4: Conjunto solución y clasificación

Ejercicio 2:

C) $\begin{cases} 2x-2y+z=3 \\ x+y+z=6 \\ 3x-5y+z=0 \end{cases}$

Conjunto solución: **Clasificación:**

APLICACIONES

Ejemplo 5:

Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de tres productos diferentes. Cada máquina se utiliza 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada, en la producción de una unidad de cada uno de los tres productos está dado en la tabla adjunta.

	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Máquina 1	1	2	1
Máquina 2	2	1	0
Máquina 3	1	1	3

a. ¿Cuántas horas demanda la fabricación del producto 1?

b. Represente mediante un sistema de ecuaciones la información del problema, asigne variables y defínalas.

c. ¿Cuántas unidades de cada producto se deben producir?

Ejercicio 3:

Una compañía fabrica tres tipos de muebles de Lujo, Estándar y Económicos. Para la fabricación de estos utiliza ciertas cantidades madera, plástico y aluminio, como se muestra en la tabla adjunta.

	Madera	Plástico	Aluminio
Lujo	5	1	2
Estándar	11	1	5
Económico	17	3	7

La compañía tiene en almacén 340 unidades de madera, 60 unidades de plástico y 140 unidades de aluminio y utiliza todo el material existente. ¿Cuántos muebles de cada tipo se fabricarán, si necesitan como mínimo 5 unidades de cada uno?

CIERRE DE CLASE

A. ¿Un sistema de ecuaciones compatible admite infinitas soluciones? ¿Por qué?
B. ¿Un sistema incompatible tiene por conjunto solución el conjunto vacío? ¿Por qué?
C. ¿Un sistema es compatible indeterminado si tiene solución única?
D. ¿La matriz ampliada siempre es rectangular?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resuelva los siguientes sistema de ecuaciones lineales aplicando la eliminación gaussiana y clasifíquelos

a) $\begin{cases} x-y+3z=22 \\ -2x+2y+z=-9 \\ 3x+y-2z=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+4y+z=3 \\ -x+5y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ 2x+2y-z=4 \end{cases}$