EPE

CONTENIDO

FUNCIONES DEFINICIÓN, DOMINIO Y RANGO

GRÁFICAS, INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS

ASÍNTOTAS HORIZONTALES Y VERTICALES

"Las oportunidades no ocurren, se crean": **Chris Grosser**

3.1

EPE

LOGRO

AL TERMINAR LA CLASE EL ALUMNO SERÁ CAPAZ DE:

DEFINIR Y REPRESENTAR ALGEBRAICAMENTE Y GRAFICAMENTE UNA FUNCIÓN

HALLAR EL DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

IDENTIFICAR Y GRAFICAR LAS ASÍNTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

x y

t d

t T

3.1

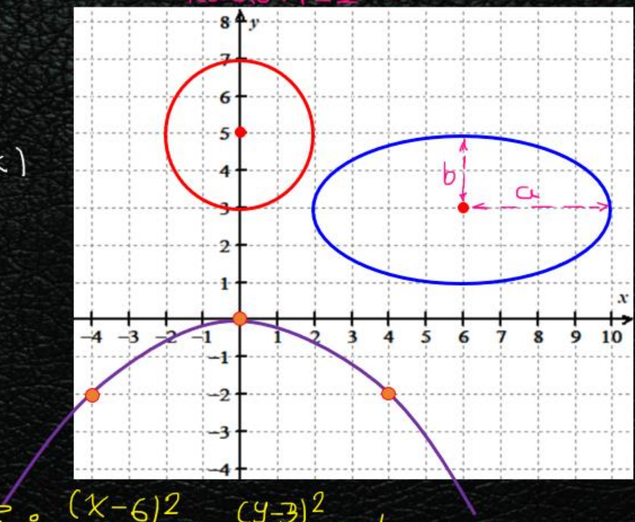
EPE

CIRCUNFERENCIA - PARÁBOLA - ELIPSE

$C(h;k) = C(0;5)$

Radio: $r = 2$

Halle las ecuaciones de cada una de las curvas mostradas en la figura adjunta.



$\mathcal{C}: (x-0)^2 + (y-5)^2 = 2^2$

Parábola: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$V(h;k) = V(0;0)$

$A(-4;-2) \in$ Parábola

$(-4)^2 = 4p(-2)$

$16 = -8p \rightarrow p = -2$

$P: x^2 = 4(-8)(y)$ ✓

Elipse

$C(h;k) = C(6;3)$

$a = 4 \qquad b = 2$

$$E: \frac{(x-6)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$$

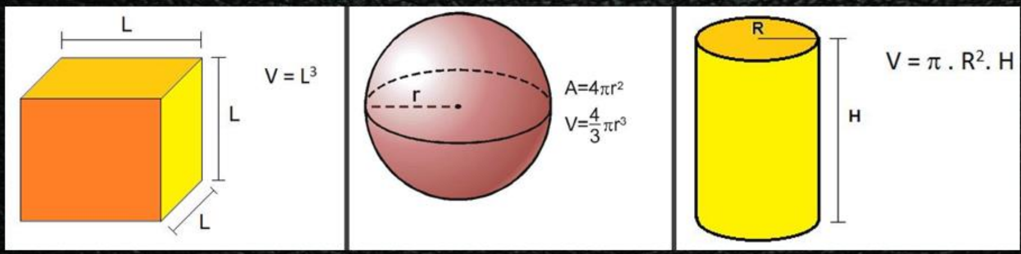
3.1

FUNCIONES

DOMINIO

FUNCIÓN

Muchas magnitudes dependen de otras, por ejemplo:



Para describir como una magnitud depende o es determinada por otra se usa el concepto de función.

$L \longrightarrow V$

$r \longrightarrow A$, $r \longrightarrow V$

$R \longrightarrow V$

$H \longrightarrow V$

FUNCIÓN

También podemos decir que una función es una relación entre dos variables que asocia a cada valor de la primera variable (llamada variable independiente), un único valor de la segunda variable (llamada variable dependiente).

Ejemplos:

$$T(t) = 30 + 70e^{-0,06t}$$

T = temperatura en grados Celsius.
t = tiempo en minutos.

VI: t
VD: T o $T(t)$

$$C(q) = 400 + 100q$$

C = costo en dólares.
q = cantidad en unidades.

VI: q
VD: C o $C(q)$

$$H(t) = 60t + \frac{gt^2}{2}$$

H = altura en metros
t = tiempo en segundos

VI: t
VD: H o $H(t)$

EPE

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Una función real de variable real es una función en la que tanto los valores de la variable dependiente (generalmente y) como los de la variable independiente (generalmente x) son números reales.

$$y = f(x)$$

Variable dependiente (y)
Variable independiente (x)

Esta relación se representa mediante: $y = f(x)$ esta expresión indica que la variable __y__ depende de la variable __x__

Nota: $f(x)$ se lee f de x o f en x.

Ejemplos:

$a)$ $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3$ FUNCIÓN POLINÓMICA

$b)$ $y = \sin(2x)$ FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

$c)$ $y = \ln(x)$ FUNCIÓN LOGARÍTMICA

$d)$ $y = e^x$ FUNCIÓN EXPONENCIAL

$e)$ $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ FUNCIÓN RACIONAL

3.1

EPE

DOMINIO – RANGO – REGLA DE CORRESPONDENCIA

Dada una función f definida por: $y = f(x)$

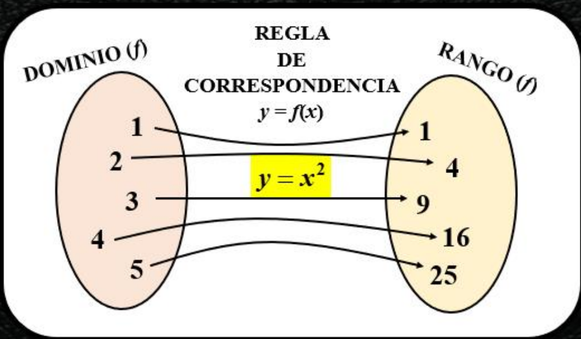
Conjunto de valores que toma la variable independiente x se le llama __dominio__

Conjunto de valores que toma la variable dependiente y se le llama __rango__

El dominio de una función f se representa por __Dom(f)__

El rango de una función f se representa por __Ran(f)__

A la ecuación que relaciona las variables se le denomina __regla de correspondencia__



3.1

EPE

EVALUACIÓN DE UNA FUNCIÓN → En los Reales

Evaluar una función consiste en determinar el valor de la variable dependiente, dado el valor de la variable independiente.

$y = f(4)$

$y = f(4)$ significa que se debe hallar el valor de y para $x = 4$

$-2^2 = -4$

$(-2)^2 = 4$

Ejemplo:

a) $f(x) = -x^4 + x^2 + 5 \Longrightarrow f(2) = -(2)^4 + (2)^2 + 5 = -7$

b) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3} \Longrightarrow g(-2) = \dfrac{(-2)^2+1}{(-2)-3} = \dfrac{5}{-5} = -1$

c) $h(x) = \sqrt{4-x} \Longrightarrow h(-5) = \sqrt{4-(-5)} = \sqrt{9} = 3$

*) $h(5) = \sqrt{4-5} = \sqrt{-1}$

Imaginario

no existe en $\mathbb{R}$

d) $h(x) = \text{sen}\, x \Longrightarrow h\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

3.1

EPE

CÁLCULO DEL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Cuando una función se define mediante su regla de correspondencia $y = f(x)$ y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de x para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido como número real. Éste es el llamado dominio natural o dominio implícito de la función.

Recordar: $\dfrac{1}{0}$ no existe | $\sqrt[n]{p}$ existe $p \geq 0$, n par

Ejemplo:

$y = f(x) = \sqrt{x+3}$, $x \in [-2; 6[$ ⇒ **DOMINIO EXPLÍCITO:** en este caso se indica los valores que puede tomar x, **Dom f = [−2; 6[**

$y = f(x) = \sqrt{x+3}$ ⇒ **DOMINIO NATURAL O IMPLÍCITO:** en este caso NO se indica los valores que puede tomar x entonces hay que calcularlos.

$x + 3 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -3$

Dom f = [−3; ∞[

Mayor

Menor

3.1

CÁLCULO DEL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Si la expresión analítica de la función es un polinomio, el dominio son todos los números reales.

Ejemplo: $f(x) = -x^4 + x^2 + 5$, Dom$f = R$

Si la expresión analítica de la función es un cociente de funciones polinómicas, el dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-9}$$

Solución:

$$x - 9 \neq 0$$
$$x \neq 9$$
$$Dom(f) = R - \{9\}$$

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-9}$$

Solución:

$$x^2 - 9 \neq 0$$
$$x^2 \neq 9$$
$$x \neq \pm 3$$
$$Dom(g) = R - \{-3; 3\}$$

CÁLCULO DEL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Si la expresión analítica de la función es una raíz cuadrada, el dominio está formado por los números reales para los que el radicando es mayor o igual que cero.

Ejemplos:

$x+7 \geq 0 \wedge x+7 \neq 0$

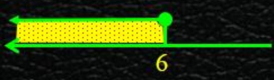
a) $f(x) = \sqrt{x-3}$

$$x - 3 \geq 0$$
$$x \geq 3$$

$Dom(f) = [3;\ +\infty[$

b) $f(x) = \sqrt{6-x}$

$$6 - x \geq 0$$
$$6 \geq x$$
$$x \leq 6$$



$Dom(f) =]-\infty; 6]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+7}}$

$$x + 7 > 0$$
$$x > -7$$

$Dom(f) =]-7; +\infty[$

EPE

EJERCICIOS

Calcule el dominio en cada caso

$a)\ f(x)=\sqrt{x} \longrightarrow x \geq 0$

$\mathrm{Dom}(f)=[0;+\infty[$

$b)\ f(x)=\sqrt{9-x} \longrightarrow 9-x \geq 0 \rightarrow 9 \geq x$

$x \leq 9$

$\mathrm{Dom}(f)=]-\infty;9]$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{x} \longrightarrow x \neq 0$

$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

$d)\ f(x)=\dfrac{1}{x-4} \longrightarrow x-4 \neq 0$

$x \neq 4$

$-\infty \quad 4 \quad +\infty$

$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{4\}$

3.1

EPE

EJERCICIOS

Halle el dominio en cada caso

Raíz par

$\boxed{\sqrt[\text{par}]{P} \text{ existe } P \geq 0}$

$a)\ g(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$

$x^2-4x \neq 0$

$x(x-4) \neq 0$

$x \neq 0$

$x-4 \neq 0 \rightarrow x \neq 4$

$0 \quad 4$

$\mathrm{Dom}(g)=\mathbb{R}-\{0;4\}$

20//

$b)\ f(x)=\sqrt{x^2-9}$

$x^2-9 \geq 0$ Recordar la semana 1

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$\boxed{(x+3)(x-3) \geq 0}$

$x+3=0 \rightarrow x=-3$

$x-3=0 \rightarrow x=3$

$+ \quad -3 \quad - \quad 3 \quad +$

$x=-4$	$x=0$	$x=4$
$-1.-7 \geq 0$	$3(-3) \geq 0$	$7.1 \geq 0$
Verdad	Falso	Verdad

$\mathrm{Dom}(f)=]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[$

3.1

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

control 2

Halle el dominio de la función *f*.

$$f(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{x^2-25}$$

$\cdot)\ 4-x \geq 0$

$4 \geq x$

$\cdot)\ x^2-25 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 25$

$x \neq \pm\sqrt{25}$

$x \neq 5$

$x \neq -5$

$\mathrm{Dom}(f) = \left]-\infty ; 4\right] - \{-5\}$

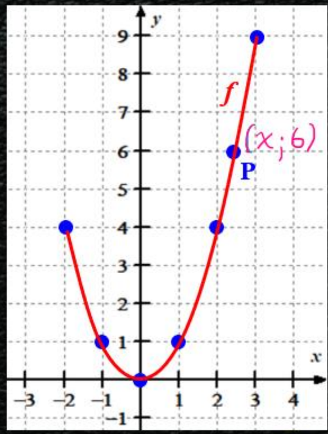
GRÁFICA DE FUNCIONES

GRÁFICA DE FUNCIONES

Si $y = f(x)$ es una función con dominio A, entonces la gráfica de f es el conjunto de puntos $(x; y)$ para todos los valores de x que pertenecen al dominio.

En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función f cuya regla es $\boxed{y = x^2, x \in [-2;\ 3].}$

x	y
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



El punto P pertenece a la curva, ¿puede hallar sus coordenadas?

$y = x^2$

$6 = x^2 \rightarrow x^2 = 6$

$x = \pm\sqrt{6}$ $\begin{cases} x = -\sqrt{6} \notin [-2;3] \\ x = \sqrt{6} \checkmark \end{cases}$

$P(\sqrt{6}; 6)$

EPE

EJERCICIO

Esboce la gráfica en cada caso:

A) $f(x) = 2x - 4\,, x \in [-1; 4[$

$f(-1) = 2(-1) - 4 = -6$

$f(0) = 2(0) - 4 = -4$

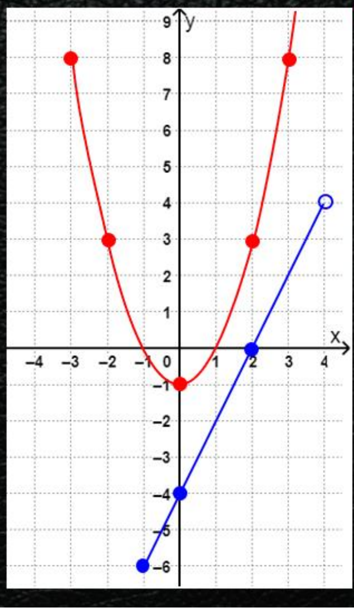
$f(2) = 2(2) - 4 = 0$

$f(4) = 4$

x	y
–1	-6
0	-4
2	0
4	4

B) $g(x) = x^2 - 1\,, x \in [-3; +\infty[$

x	y
–3	8
-2	3
2	3
3	8
0	−1



3.1

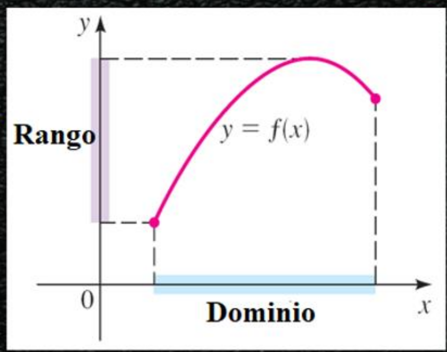
EPE

DOMINIO Y RANGO (INTERPRETACIÓN GRÁFICA)

Dada la gráfica de una función se puede determinar su dominio y rango.

El dominio de una función se puede obtener proyectando sobre el <u>eje x</u> cada uno de los puntos de la curva.

El rango de una función se puede obtener proyectando sobre el <u>eje y</u> cada uno de los puntos de la curva.

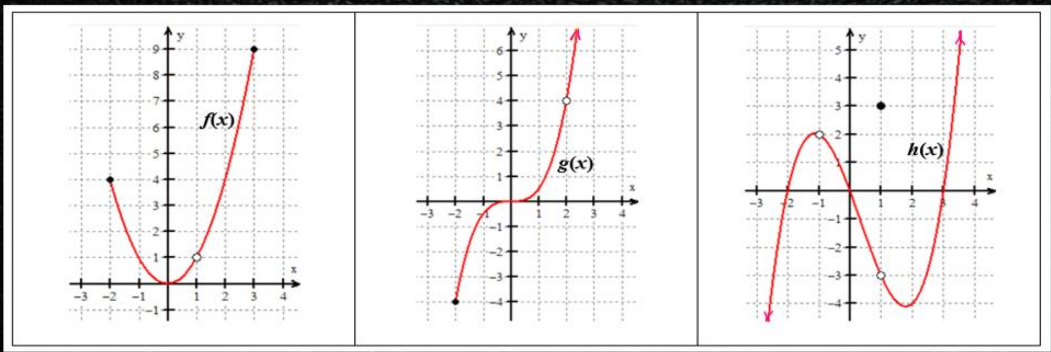


EPE

DOMINIO Y RANGO (INTERPRETACIÓN GRÁFICA)

Ejemplos:

Determine el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones.



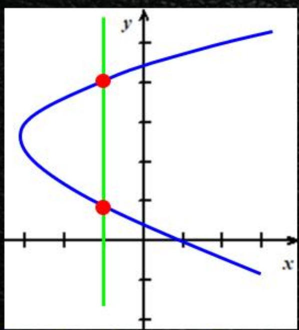
Dom$f$ = $[-2;\ \ 3] - \{1\}$	Dom$g$ = $[-2;\ +\infty[- \{2\}$	Dom$f$ = $]-\infty; +\infty[- \{-1\}$
Ran$f$ = $[0;\ \ 9]$	Ran$g$ = $[-4;\ +\infty[- \{4\}$	Ran$f$ = $]-\infty; +\infty[$

3.1

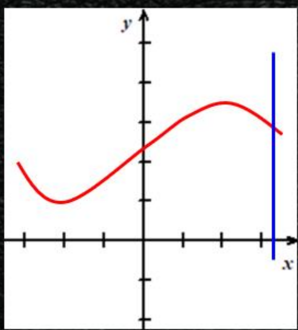
EPE

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN: PRUEBA DE LA LÍNEA VERTICAL

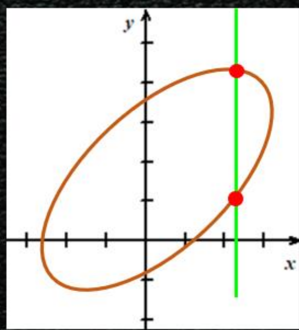
Una curva en el plano coordenado es la gráfica de una función si y solo si al trazar una recta vertical por cualquier parte del dominio esta intersecta a la curva en un solo punto.



No es función pues al trazar la recta vertical corta a la curva en dos puntos



Si es función pues al trazar la recta vertical corta a la curva en un solo punto



No es función pues al trazar la recta vertical corta a la curva en dos puntos

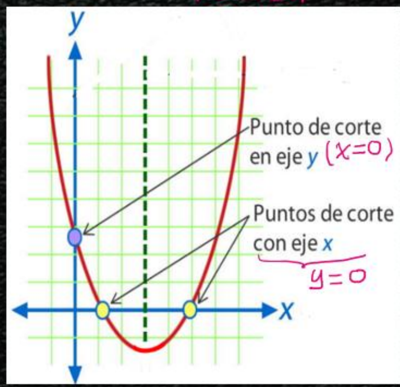
3.1

EPE

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN: INTERSECCIONES CON LOS EJES

Recordar

Se denominan puntos de intersección o puntos de corte con los ejes coordenados a los puntos en los cuales la gráfica de la función corta al eje de abscisas y/o al eje de ordenadas.



Dada una función f cuya regla es $y = f(x)$

Los puntos de intersección con el eje x se obtienen resolviendo la ecuación: $y =$ <u>0</u> o $f(x) = 0$

Los puntos de intersección con el eje y se obtienen reemplazando: $x =$ <u>0</u> o $y = f(0)$

3.1

EPE

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN: INTERSECCIONES CON LOS EJES

Ejemplo: $Dom(f) = \mathbb{R}$

Dada una función f cuya regla es $f(x) = x^2 - 9$, halle los puntos de intersección de la gráfica de la función con los ejes coordenados.

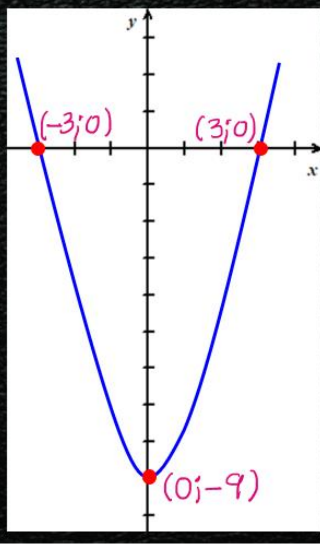
Intersección con el eje x: $y = f(x) = 0$ entonces: $x^2 - 9 = 0$

resolviendo se obtiene $x_1 =$ <u>-3</u> ; $x_2 =$ <u>3</u>

Esto significa que los puntos de intersección con el eje x son: $(-3; 0)$ y $(3; 0)$

Intersección con el eje y: $y = f(0) = 0^2 - 9 = -9$

Esto significa que el punto de intersección con el eje y es: $(0; -9)$

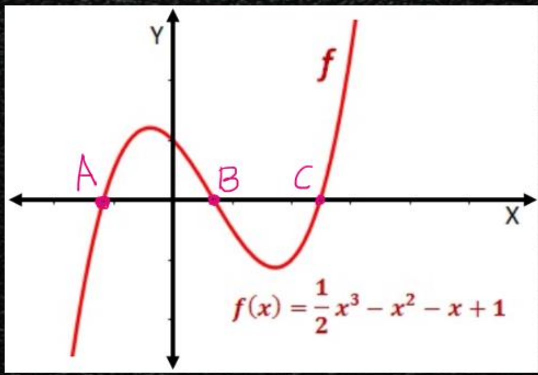


EPE

EJERCICIO

En la figura adjunta se tiene la gráfica de una función *f*, halle las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados.

$f(x) = 0$ *usando la calculadora*



$A(-1{,}17;0)$

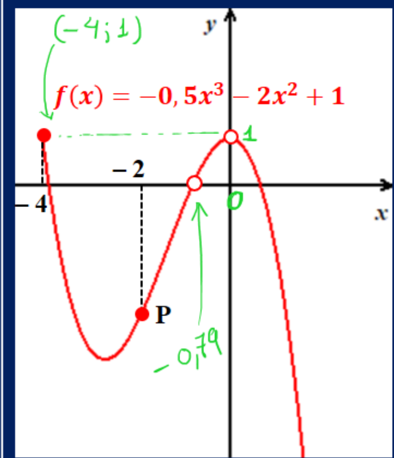
$B(0{,}69;0)$

$C(2{,}48;0)$

3.1

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE



En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función *f*. Halle dominio, rango y las coordenadas del punto P.

$-0{,}5x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \begin{cases} x = -3{,}86 \\ x = -0{,}79 \\ x = 0{,}65 \end{cases}$

$\mathrm{Dom}(f) = [-4; +\infty[- \{0; -0{,}79\}$

$\mathrm{Ran}(f) =]-\infty; 1]$

$P(-2; -3)$

$f(-2) = -\frac{1}{2}(-2)^3 - 2(-2)^2 + 1$

$f(-2) = -3$

3.1

ASÍNTOTAS VERTICALES

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

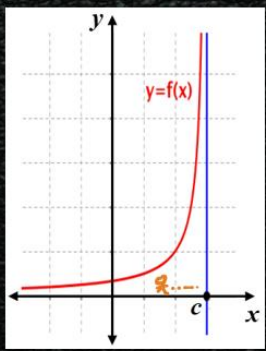
EPE

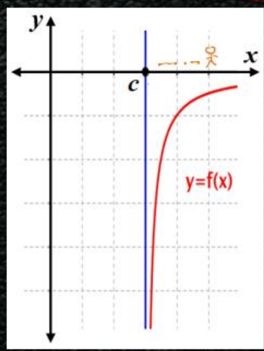
ASÍNTOTAS VERTICALES

Las asíntotas verticales de una función **son rectas** verticales de la forma $x = c$.

¿Qué pasa con la curva a medida que x se acerca a c por la izquierda ? tiende al $+\infty$

¿Qué pasa con la curva a medida que x se acerca a c por la derecha? tiende al $-\infty$





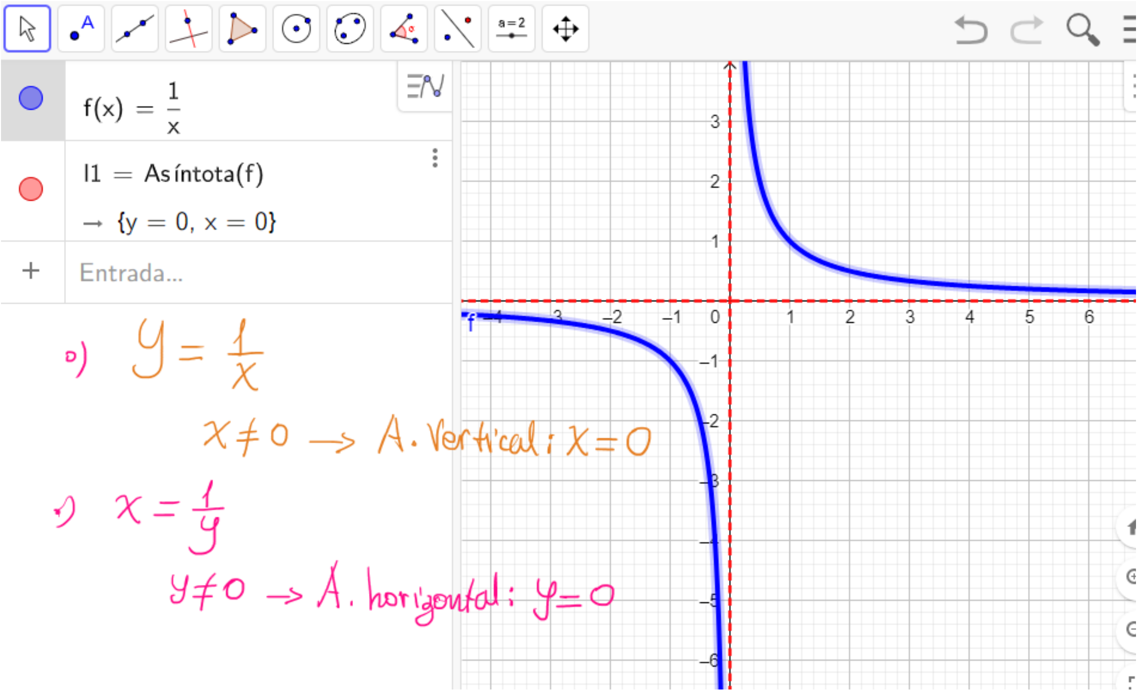
Conclusión:

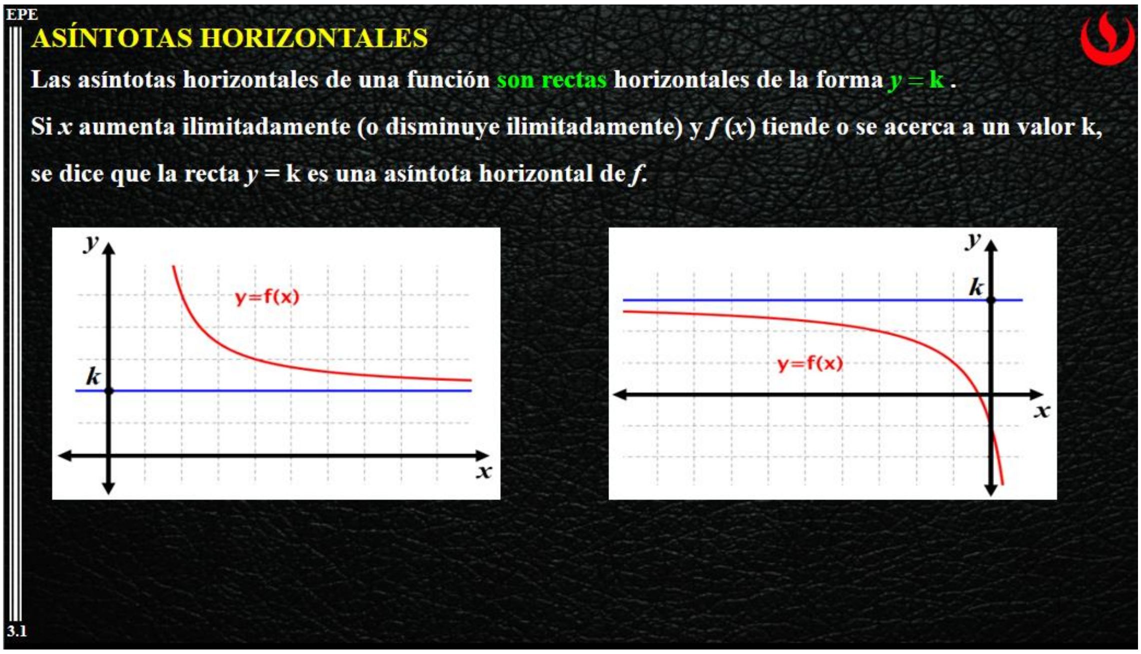
Si para un valor c (del eje x) $f(x)$ tiende o se va al infinito (o menos infinito) cuando x se acerca a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

A V: $x=c$

$f(x) = \frac{1}{x-c}$

3.1


$f(x) = \frac{1}{x}$
l1 = Asíntota(f)
→ {y = 0, x = 0}
Entrada...
a) $y = \frac{1}{x}$
$x \neq 0 \rightarrow$ A. Vertical: $x = 0$
b) $x = \frac{1}{y}$
$y \neq 0 \rightarrow$ A. horizontal: $y = 0$


EPE
ASÍNTOTAS HORIZONTALES
Las asíntotas horizontales de una función son rectas horizontales de la forma $y = k$.
Si x aumenta ilimitadamente (o disminuye ilimitadamente) y $f(x)$ tiende o se acerca a un valor k, se dice que la recta $y = k$ es una asíntota horizontal de f.
y
y=f(x)
k
x
y
k
y=f(x)
x
3.1

EPE

EJERCICIO

De la figura adjunta determine:

Dominio: $]-\infty ; +\infty[- \{-4; 2\}$

Rango: $\mathbb{R}$

Asíntotas horizontales: $y=-5$, $y=3$

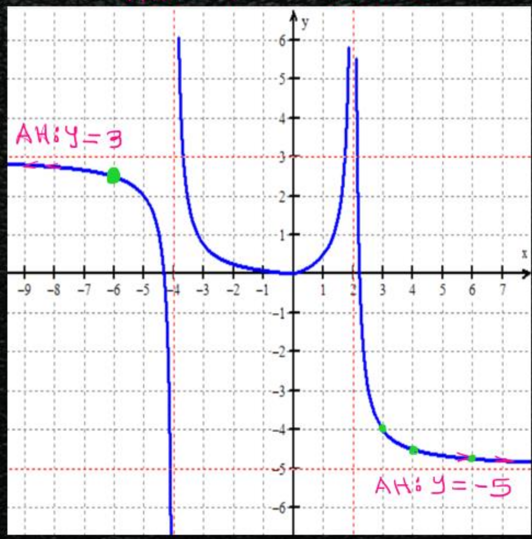
Asíntotas verticales: $x=-4$, $x=2$

¿Qué signo tiene $f(-6)$? → $+$

¿Qué signo tiene $f(4)$? → $-$

¿$f(3) > f(6)$? → Verdad

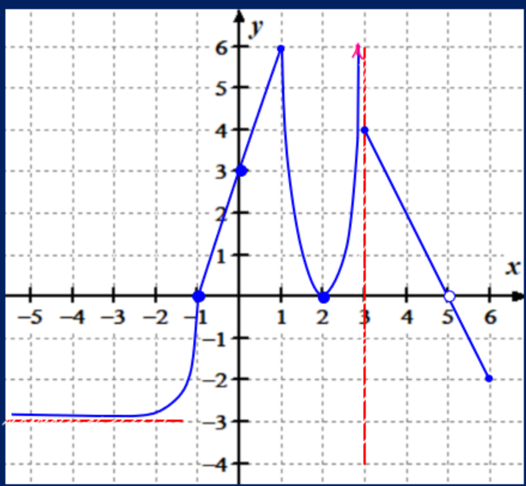
AV: $x=-4$ AV: $x=2$



3.1

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE



En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función f cuya regla es $y = f(x)$.

a) **Dominio:** $]-\infty ; 6] - \{5\}$

b) **Rango:** $]-3 ; +\infty[$

c) **Asíntotas verticales:** $x=3$

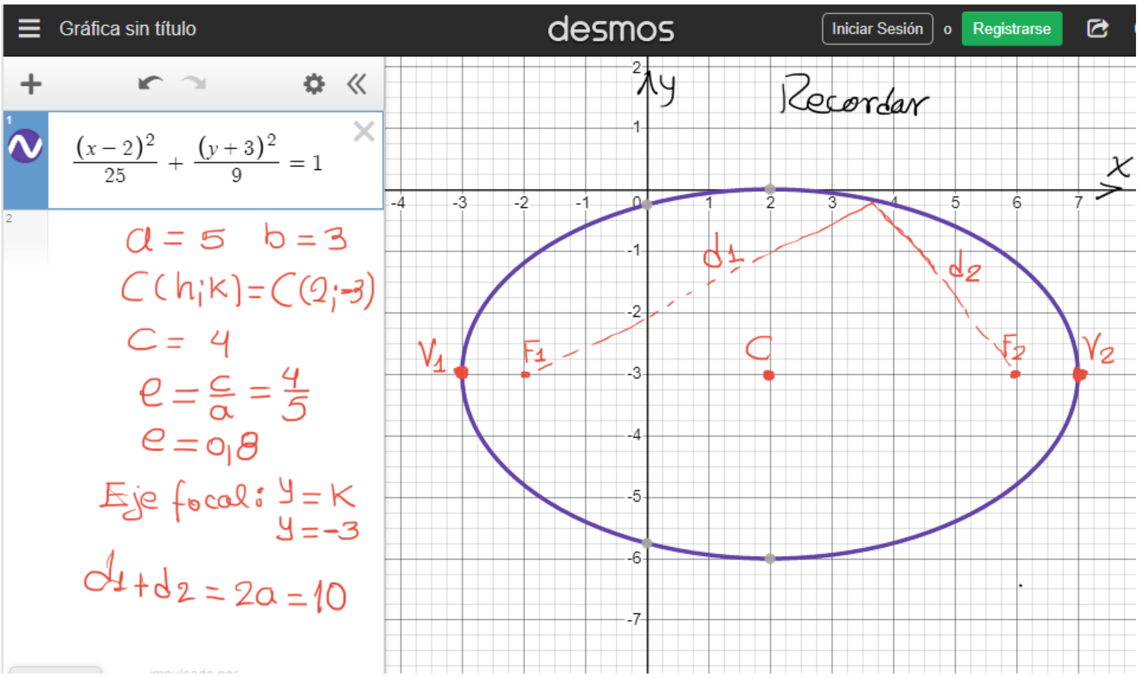
d) **Asíntotas horizontales:** $y=-3$

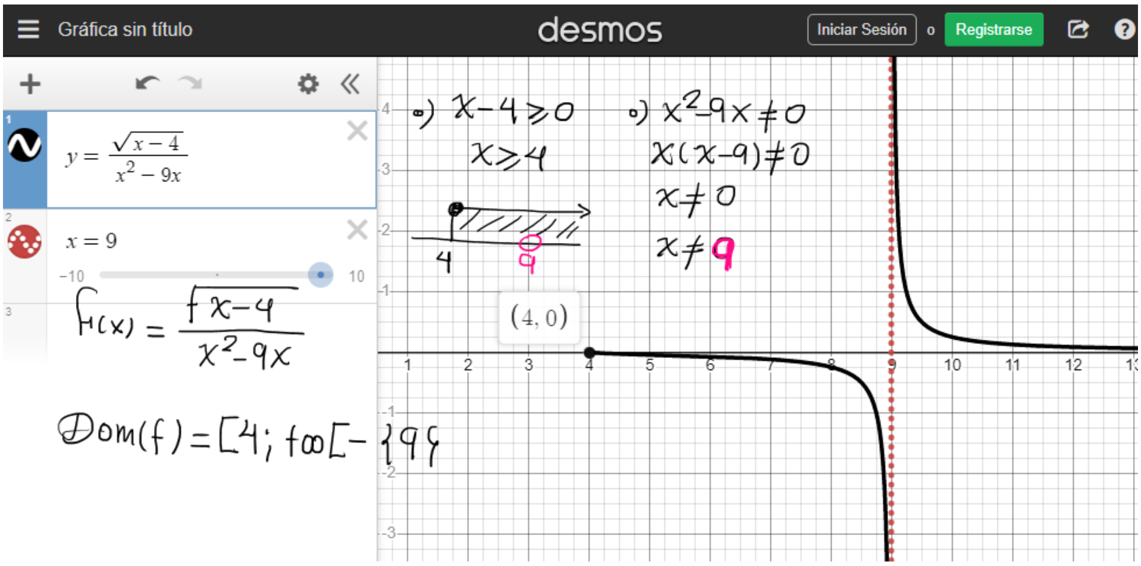
e) **Puntos de intersección con los ejes.**

Eje x $(-1;0)$ $(2;0)$

Eje y $(0;3)$

3.1


Gráfica sin título
desmos
Iniciar Sesión o Registrarse
$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$
$a = 5 \quad b = 3$
$C(h;k) = C(2;-3)$
$c = 4$
$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$
$e = 0{,}8$
Eje focal: $y = k$
$y = -3$
$d_1 + d_2 = 2a = 10$
Recordar
d_1
d_2
V_1
F_1
C
F_2
V_2


Gráfica sin título
desmos
Iniciar Sesión o Registrarse
$y = \frac{\sqrt{x-4}}{x^2 - 9x}$
$x = 9$
$f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x^2-9x}$
$Dom(f) = [4; +\infty[- \{9\}$
•) $x - 4 \geq 0$
$x \geq 4$
•) $x^2 - 9x \neq 0$
$x(x-9) \neq 0$
$x \neq 0$
$x \neq 9$
(4, 0)