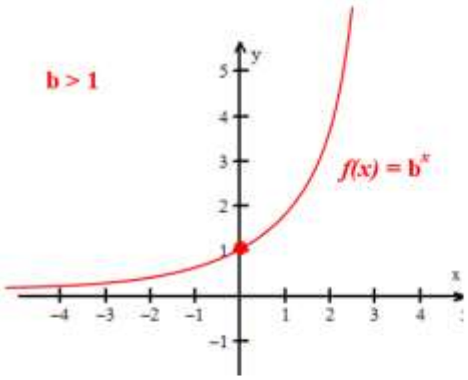
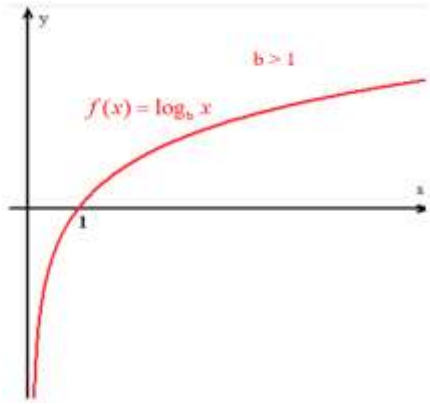
MATEMÁTICA BÁSICA – CE82
SEMANA 6 – SP2

Temario: Gráficas y aplicaciones de las funciones exponencial y logarítmica.

Logro de la sesión: Al término de la sesión el estudiante determina la gráfica de una función exponencial y logarítmica. Aplica dichas funciones a problemas de la vida real.

GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Recordar:

Si $f(x) = b^x$ tal que b > 1	Si $f(x) = \log_b x$ tal que b > 1
	

Ejemplo:

Esboce la gráfica de la función $f(x) = 2^x - 3$

Solución

Paso 1: Identificar la ecuación de la asíntota

La función $f(x) = 3 + 2^x$ tiene asíntota _______________ cuya ecuación es:

Paso 2: Elaborar un cuadro de tabulación

x	*y*
-2	
-1	
0	
1	
2	

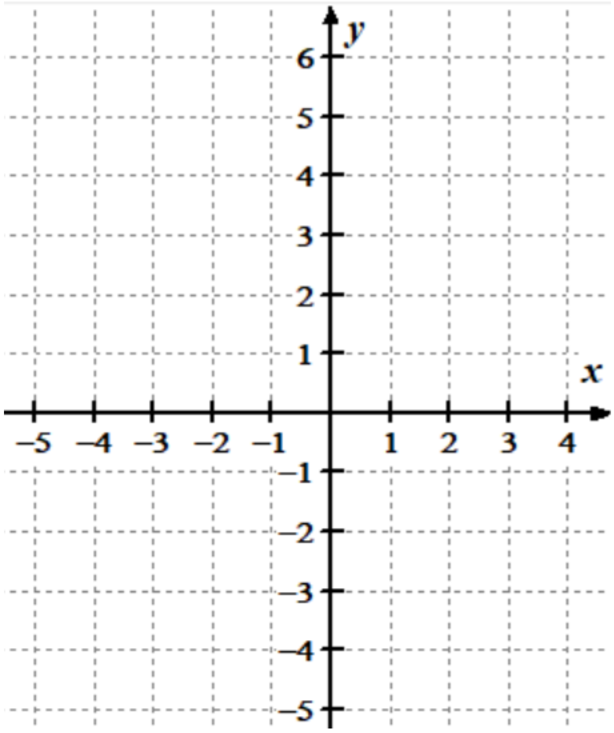
Paso 3: Hallar puntos de intersección con los ejes coordenados

Intersección con el eje *x*:

Resolviendo: ____ el punto de corte es: _____

Intersección con el eje *y*:

Resolviendo: ____ el punto de corte es: _____



Paso 4: Ubicar los puntos en el plano cartesiano y graficar.

Ejercicio 1: Esboce la gráfica de la función $f(x) = e^{(x-2)} - 3$

Paso 1: Asíntota

Paso 2: Tabulación

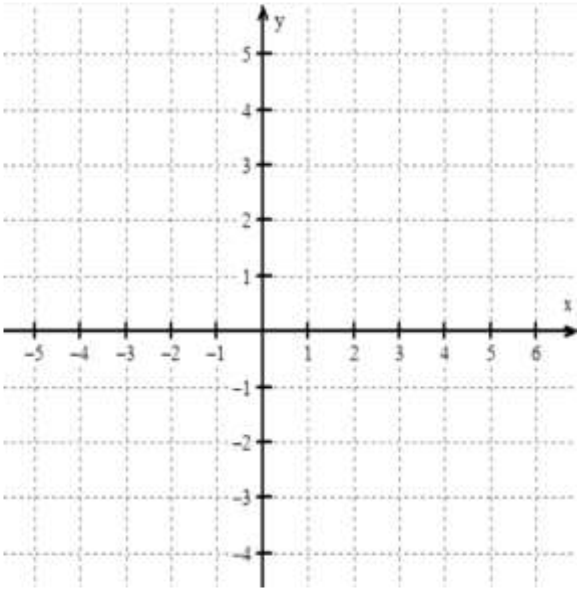
x	*y*

Paso 3: Intersección con los ejes

Intersección con el eje x:

Intersección con el eje y:

Paso 4: Gráfica



Ejemplo: Esboce la gráfica de la función $f(x) = \ln(x+5) + 1$

Paso 1: Asíntota

En este caso la función $f(x) = \ln(x+5) + 1$ tiene asíntota

____

El argumento se iguala a cero: _____________

Entonces la ecuación de la asíntota es: ____________

Paso 2: Intersección con los ejes.

Intersección con el eje x; $y =$

Resolviendo se obtiene: ____ el punto de corte es: _____

Intersección con el eje y; $x =$

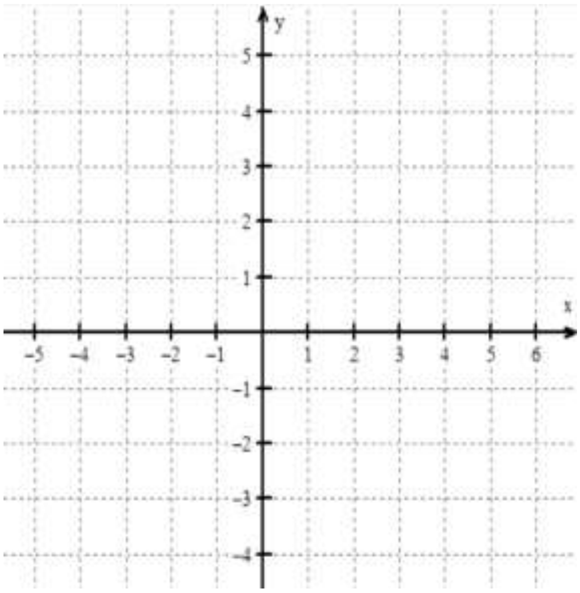
Resolviendo se obtiene: ___el punto de corte es: ______

Paso 3: Dominio

Dominio

$\mathrm{Dom}f =$ _____________

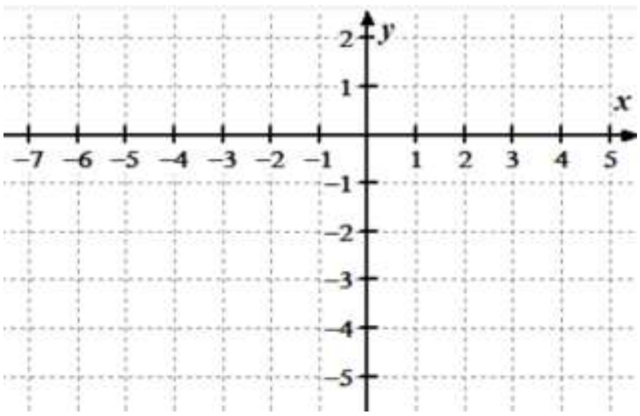
Paso 4: Puntos de referencia



Paso 5: Gráfica

Ejercicio 2:

Esboce la gráfica de la función $f(x) = \log_3(4-x) - 2$. Indique cada uno de los pasos que realiza.



APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

APLICACIÓN 1: LA LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Establece que el cociente de diferencias de temperaturas real y máxima decrece en forma exponencial

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

T_0 : Temperatura inicial de un objeto.
T_m : Temperatura del ambiente o medio circundante.
k : Constante positiva que depende del tipo de objeto.

EJEMPLO:

En UPC, Starbucks determina que la temperatura de su café recién preparado es 130°F. Ellos están preocupados, que si un cliente, en forma accidental, se riega café sobre el mismo, se podría generar un pleito legal como sucedió en 1992 en Estados Unidos, una anciana fue indemnizada con $ 2,86 millones por McDonald's, porque un vaso gigante de café le produjo quemaduras en el 6% del cuerpo. La temperatura del local en los restaurantes, por lo general, es 72°F. La temperatura del café se enfría a 120°F después de 4,3 minutos. La compañía determina que es más seguro servir el café a una temperatura de 105°F.

a) Determine una función que modele la temperatura del café en un tiempo *t*.

b) ¿En cuánto tiempo se enfría una taza de café que se sirve a, 105°F?

Ejercicio 3:

Un huevo cocido a temperatura de 96°C se coloca en agua a 16°C para enfriarlo; cuatro minutos después la temperatura del huevo es 45°C. Determine el momento en que el huevo estará a 20°C.

APLICACIÓN 2: MODELOS DE CRECIMIENTO

La disciplina que estudia la población se conoce como demografía y analiza el tamaño, composición y distribución de la población, sus patrones de cambio a lo largo de los años en función de nacimientos, defunciones y migración, y los determinantes y consecuencias de estos cambios. El estudio de la población proporciona una información de interés para las tareas de planificación (especialmente administrativas) en sectores como sanidad, educación, vivienda, seguridad social, empleo y conservación del medio ambiente.
Una población que experimenta crecimiento exponencial crece según el siguiente modelo.

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

$n(t)$: Población en un tiempo t.
n_0 : Tamaño inicial de la población.
r : Tasa relativa de crecimiento (expresada como una proporción de la población)
t : Tiempo.

EJEMPLO:

Los biólogos han determinado que cuando se dispone de suficiente espacio y nutrientes, el número de bacterias de un cultivo crece según la ley de crecimiento exponencial. Suponga que se tiene inicialmente 2000 bacterias en cierto cultivo y que 20 minutos después hay 6000. ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de una hora?

Ejercicio 4:

Supóngase que una población experimental de moscas de la fruta aumenta de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Si al inicio hay 100 moscas y 4 días después hay 600 moscas:

a) Determinar la función que modela la situación planteada.

b) ¿Cuántas moscas habrá en el décimo día?

c) ¿Después de cuántos días habrá 20000 moscas?

MATEMÁTICA FINANCIERA

Suponga que un capital P, se invierte a una tasa fija de interés anual r. El valor de la inversión después de t años cuando el interés se capitaliza k veces por año es:

$$\boxed{A = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}}$$

Cuando el interés se capitaliza de forma continua:

$$\boxed{A = Pe^{rt}}$$

EJEMPLO:

Suponga que se invierten \$1000 a una tasa de interés anual de 6%. Calcule el saldo después de 10 años si el interés se capitaliza:

a) Trimestralmente

b) Mensualmente

c) continuamente

Ejercicio 5:

En cuánto tiempo una inversión de \$2000 crecerá hasta \$5000 cuando se invierte a una tasa anual de 8%, si el interés se capitaliza:

a) trimestralmente

b) Continuamente

OTRAS APLICACIONES

Ejercicio 6:

El estroncio 90 se utiliza en los reactores nucleares y se desintegra según la fórmula de decaimiento exponencial $A = Pe^{-0,0248t}$,donde P es la cantidad presente cuando t = 0 y A es la cantidad restante después de t años. Calcule la vida media del estroncio 90 (la vida media es el tiempo que toma la cantidad original en disminuir a su mitad).

Ejercicio 7:

Una ley de curación de las heridas es $A = Be^{-\frac{n}{10}}$, siendo A (en cm^2) el área dañada después de n días, y B (en cm^2) el área original dañada. Halle el número de días necesarios para reducir a su tercera parte el área dañada.

Problema (Competencia Razonamiento Cuantitativo)

La concentración de un medicamento muy potente en un órgano al instante ***t*** (en segundos) está dada por $C(t)=0{,}08+0{,}12e^{-0{,}02t}$, donde $C(t)$ son gramos/centímetros cúbicos (gr/cm^3).

A) Halle $C(0)$, interprete el resultado.

B) ¿Cuál es la concentración cuando ha transcurrido 1 minuto?

C) Esboce la gráfica de $C(t)$.Defina variables y restricciones.

D) ¿El tiempo que tarda en alcanzar 0,18 gr/cm^3 de medicamento es mayor a los 9 segundos?

CIERRE DE CLASE

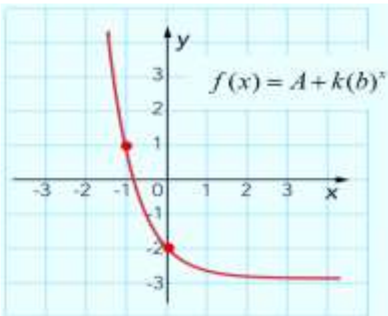
A. Sea la función $f(x)=2^x-3$, luego ¿la asíntota horizontal es $y=3$? ¿Por qué?

B. Sea la función $y=e^{-x}+2$, luego ¿es cierto que $y=2$ es su asíntota horizontal?

C. La función $y=\ln(x+3)$, ¿tiene una asíntota vertical en $x=3$? ¿por qué?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halle la ecuación de la curva en cada caso

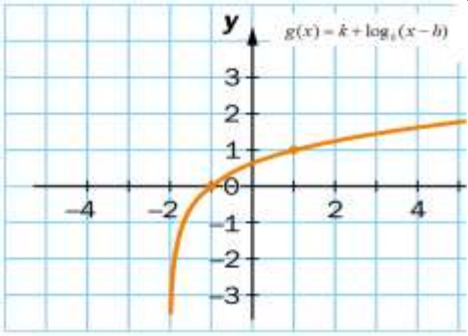


Dominio:

Rango:

Asíntota:

Intersecciones con los ejes:



Dominio:

Rango:

Asíntota:

Intersecciones con los ejes:

2. Analice cada una de las siguientes funciones, determine su dominio, rango, asíntota. Esboce la gráfica y halle los puntos de intersección con los ejes coordenados.

a) $f(x)=1-\log(x-2)$ b) $g(x)=2^{x+1}-2$

3. La presión atmosférica *P* sobre un avión decrece a medida que este asciende. Esta presión, medida en milímetros de mercurio, está relacionada con el número de kilómetros *h* sobre el nivel del mar, mediante la fórmula: $P(h)=760e^{-0{,}145h}$

A) Halle *P* (0) interprete su resultado.

B) Halle la presión atmosférica a 2 kilómetros de altura.

C) Esboce la gráfica de la función *P*(*h*). Defina variables y coloque restricciones.

D) A medida que aumenta la altura, la presión atmosférica ¿aumenta o disminuye?