CONTENIDO

APLICACIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

DETERMINANTES

VECTORES EN R2 Y R3

LOGRO

AL TERMINAR LA CLASE EL ALUMNO SERÁ CAPAZ DE:

APLICAR SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN PROBLEMAS DE CONTEXTO REAL

HALLAR EL DETERMINANTE DE MATRICES DE ORDEN 2 Y 3

IDENTIFICAR VECTORES EN R2 Y R3, HALLAR SU MAGNITUD, COMPONENTES Y EFECTUAR OPERACIONES

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando su calculadora y clasifiquelos.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 18 \\ x - y + z = 10 \\ 3x - 2y + 4z = 24 \end{cases} \Rightarrow C.S. = \left\{\left(11; -\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right)\right\}$$

SEL Compatible determinado

$$\begin{cases} 4x + 5y - 3z = 6 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 2x + 8y - 4z = 5 \end{cases} \Rightarrow C.S. = \{\ \}$$

SEL Incompatible

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 10 \\ 5x - y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow C.S. = \left\{\left(\frac{2+2t}{13}; \frac{23t-42}{13}; t\right) / t \in R\right\}$$

$2(E_3) + (E_1) \rightarrow 13x - 2z = 2$

$-3(E_3) + E_2 \longrightarrow -13x + 2z = -2$

$13x - 2z = 2$

$z = t$

$y =$

$x =$

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando su calculadora y clasifiquelos.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 18 \\ x - y + z = 10 \\ 3x - 2y + 4z = 24 \end{cases} \Rightarrow C.S. = \left\{\left(11; -\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right)\right\}$$

SEL Compatible determinado

$$\begin{cases} 4x + 5y - 3z = 6 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 2x + 8y - 4z = 5 \end{cases} \Rightarrow C.S. = \{\ \}$$

SEL Incompatible

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 10 \\ 5x - y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow C.S. = \left\{\left(\frac{2+2t}{13}; \frac{23t-42}{13}; t\right) / t \in R\right\}$$

SEL Compatible indeterminado

APLICACIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

APLICACIONES DE SEL

Una bióloga ha colocado tres cepas bacterianas (denotadas por I, II y III) en un tubo de ensayo, donde serán alimentadas con tres distintas fuentes alimenticias (A , B y C).

Cada día 2 300 unidades de A, 800 de B y 1 500 de C se colocan en el tubo de ensayo y cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento por día, como se muestra en la tabla.

	Cepa bacteriana I	Cepa bacteriana II	Cepa bacteriana III
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

por día

¿Qué cantidad de alimento B consume en un día una bacteria de la cepa bacteriana II?

En un día una bacteria de la cepa bacteriana II consume 2 unidades del alimento B

¿Qué cantidad de alimento A consumen en dos días 10 bacterias de la cepa bacteriana III?

En dos días 10 bacterias de la cepa bacteriana III consumen 80 unidades del alimento A

¿Qué representa el número 3 en la tabla?

La cantidad de alimento C, que consume en un día 1 bacteria de la cepa bacteriana II

APLICACIONES DE SEL

¿Cuántas bacterias de cada cepa, por día, pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

Paso 1:

Ordene la información en una tabla

	Cepa x bacteriana I	Cepa y bacteriana II	Cepa z bacteriana III	Unidades de alimentos
Alimento A	2	2	4	2300
Alimento B	1	2	0	800
Alimento C	1	3	1	1500

Paso 2:

Defina variables y restricciones

x : cantidad de bacterias de cepa bacteriana I

y : cantidad de bacterias de cepa bacteriana II

z : cantidad de bacterias de cepa bacteriana III

Paso 3:

Plantee el SEL

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 2300 \\ x + 2y + 0z = 800 \\ x + 3y + z = 1500 \end{cases}$$

Restricciones: $x, y, z \in Z^+$

Paso 4:

Resuelva el sistema.

$x = 100$

$y = 350$

$z = 350$

Paso 5:

Interprete los resultados y escriba la respuesta.

Las cantidades de cepas bacterianas, por día, que pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento, son , 100 cepas tipo I, 350 cepas tipo II y 350 cepas tipo III.

APLICACIONES DE SEL

EJERCICIO

$$\underset{M1}{x} + \underset{M2}{y} + \underset{M3}{z} = 60$$

Una empresa de transportes tiene una flota de 60 camiones de tres modelos diferentes. Los grandes transportan diariamente 15000 kg y recorren 400 kilómetros. Los medianos transportan diariamente 10000 kilogramos y recorren 300 kilómetros. Los pequeños transportan diariamente 5000 kilogramos y recorren 100 km de media. Diariamente los camiones de la empresa transportan un total de 475 toneladas y recorren 12500 km entre todos. ¿Cuántos camiones tiene la empresa de cada modelo?

Paso 1:

Ordene la información en una tabla

Tipos de camión	N° de camiones	Kg diarios	Km diarios
Grandes	x	15000 kg	400 km
Medianos	y	10 000 kg	300 km
Pequeños	z	5000 kg	100 km
TOTAL	60	475 toneladas	12500 km

APLICACIONES DE SEL

$1 \text{ Tonelada} = 1000 kg$

$\underbrace{x, y, z}_{\in \mathbb{Z}_0^+}$

Tipos de camión	N° de camiones	Kg diarios	Km diarios
Grandes x	1	15 000	400
Medianos y	1	10 000	300
Pequeños z	1	5 000	100
TOTAL	60	475 000	12 500

Paso 2: Defina variables y restricciones

x: Número de camiones grandes.

y: Número de camiones medianos.

z: Número de camiones pequeños.

Paso 3: Plantee el SEL

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 15x + 10y + 5z = 475 \\ 4x + 3y + 1z = 125 \end{cases}$$

Paso 4: Resuelva el sistema.

calculadora

$x = 5 \quad y = 25 \quad z = 30$

Paso 5: Interprete los resultados y escriba la respuesta.

La empresa tiene 5 camiones grandes, 25 camiones medianos y 30 camiones pequeños.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE 2 x 2 y 3 x 3

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE 2 x 2

Sea A una matriz cuadrada de orden 2, tal que: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Sea llama determinante al número real que se obtiene de hallar el producto de elementos de la diagonal principal menos el producto de elementos de la diagonal secundaria.

El determinante de una matriz A se representa de varias formas: det(A) , |A|

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \det A = (5)(-2) - (3)(-4) = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \det B = (-6)(-4) - (3)(8) = 0$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE 3 x 3

Sea A una matriz cuadrada de orden 3, tal que: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \\ 9 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}$$

$$2[(-2)(0) - (4)(3)] - 5[(1)(0) - (9)(3)] + 8[(1)(4) - (9)(-2)]$$

$$2[-12] - 5[-27] + 8[22]$$

$$-24 + 135 + 176$$

$$\det A = 287$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE 3 x 3

Sea A una matriz cuadrada de orden 3, tal que: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Regla de Sarrus

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$\sum(\text{productos}) = S$

$\sum(\text{productos}) = P$

$\boxed{\det A = P - S}$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} -6 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -6 & 7 \\ -1 & 2 \\ 9 & 4 \end{matrix}$$

$144 \quad 72 \quad 7 = 223$

$12 \quad -189 \quad -32 = -209$

$\det A = P - S$

$\det A = -209 - 223$

$\det A = -432$

CONTROL DE APRENDIZAJE

Determine la verdad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones:

A) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow |B| = 10$

Falso

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$\det B = 45 - (-35) = 80$

$-35 = -35 + 0 + 0$

$45 + 0 + 0 = 45$

B) $M = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow |M| = -1$

$5 \quad 6$

$\det M = 6 - (5) = \underline{1}$

Falso

VECTORES EN R^2 y R^3

VECTORES

MAGNITUD ESCALAR

Es cualquier magnitud matemática o física que se pueda representar solamente por un número real.

Ejemplos: longitud (m), área (m^2), volumen (m^3), temperatura en grados kelvin (° K), etc.

MAGNITUD VECTORIAL

Son aquellas magnitudes en las que además del número que las determina, se requiere conocer la dirección.

Ejemplos: desplazamiento (m), fuerza (N), aceleración (m/s^2), etc.

El ente matemático que representa a estas magnitudes se llama vector.

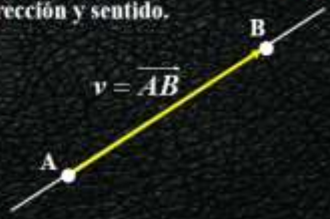
VECTORES

Un vector es un segmento de recta orientado, es decir con una magnitud, dirección y sentido.

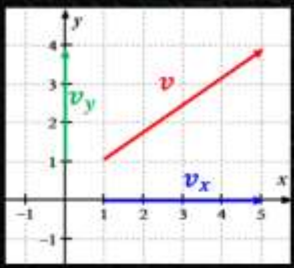
En la figura adjunta se muestra un vector $v = \overrightarrow{AB}$.

El punto A es el punto inicial y B es el punto terminal del vector $\overrightarrow{AB}$.

Las componentes de un vector son las proyecciones de dicho vector sobre los ejes coordenados.



Ejemplo:



Un vector v se representa por : $\langle v_x;\ v_y \rangle$

v_x es su componente horizontal , v_y es su componente vertical.

En la figura adjunta las componentes del vector v son:

Su componente horizontal v_x = 4

Su componente vertical v_y = 3

El vector v es:

$\langle 4 ; 3 \rangle$

$4i + 3j$

VECTORES EN R^3

El concepto de vector en el plano se puede extender de manera natural, con ligeros cambios, en el espacio. En R^3 los vectores tienen tres componentes.

La flecha que va desde O hasta P representa al vector v.

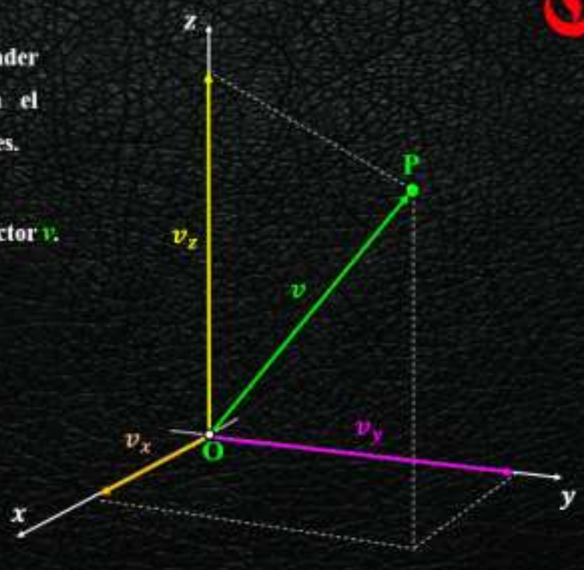
El vector se representa por $v = \langle v_x; v_y; v_z \rangle$

Donde:

v_x es la componente en el eje x

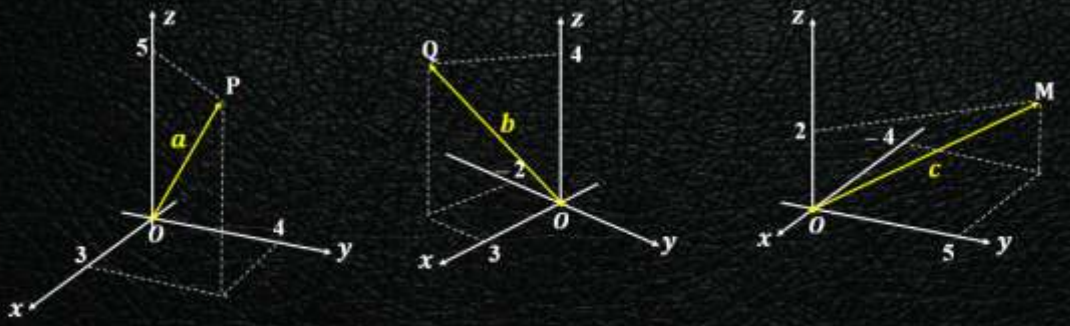
v_y es la componente en el eje y

v_z es la componente en el eje z



VECTORES EN R^3

Ejemplos: Represente cada vector en términos de sus componentes.

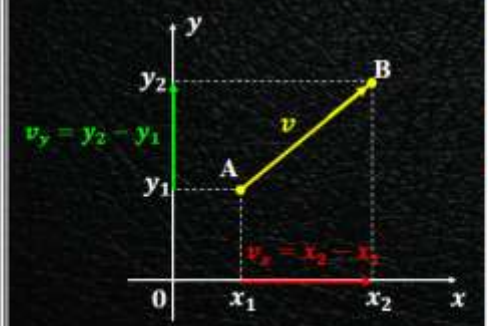


$a = \langle 3;4;5 \rangle$ $\qquad$ $b = \langle 3;-2;4 \rangle$ $\qquad$ $c = \langle -4;5;2 \rangle$

$a = 3i + 4j + 5k$ $\qquad$ $b = 3i - 2j + 4k$ $\qquad$ $c = -4i + 5j + 2k$

COMPONENTES DE UN VECTOR EN R^2

Dado un vector v cuyo punto inicial es $A(x_1;\ y_1)$ y punto terminal $B(x_2;\ y_2)$, entonces: $v = \langle v_x; v_y \rangle$



$v = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1 \rangle$

Ejemplos: Represente cada vector en términos de sus componentes.

$a = \langle 4-2;5-1 \rangle$

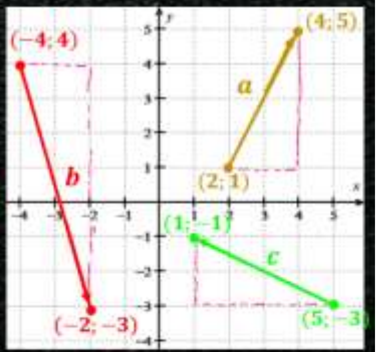
$a = \langle 2;4 \rangle$

$b = \langle -2 - -4; -3 - 4 \rangle$

$b = \langle 2;-7 \rangle$

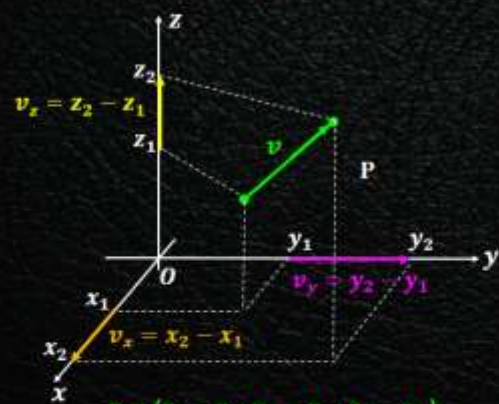
$c = \langle 1-5;-1 - -3 \rangle$

$c = \langle -4;2 \rangle$



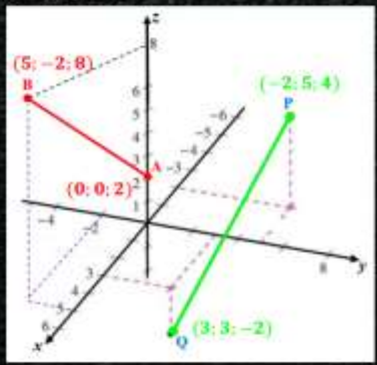
COMPONENTES DE UN VECTOR EN R³

Dado un vector v cuyo punto inicial es $A(x_1;\ y_1; z_1)$ y terminal es $B(x_2;\ y_2; z_2)$, entonces: $v = \langle v_x; v_y; v_z \rangle$



$v = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1 \rangle$

Dados los puntos $Q(3; 3; -2)$, $P(-2;\ 5;\ 4)$. Halle los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{AB}$



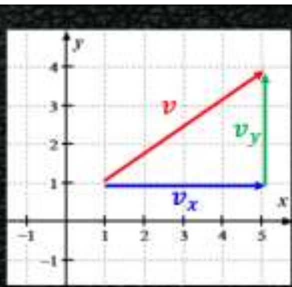
$\overrightarrow{PQ} = \langle 3 - -2; 3 - 5; -2 - 4 \rangle$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} = \langle 5 - 0; -2 - 0; 8 - 2 \rangle$

$\overrightarrow{PQ} = \langle 5; -2; -6 \rangle$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} = \langle 5; -2; 6 \rangle$

MAGNITUD O MÓDULO DE UN VECTOR

Dado un vector en R²: $v = \langle v_x; v_y \rangle$

La magnitud o módulo del vector se representa por: $|v|$



$$|v| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

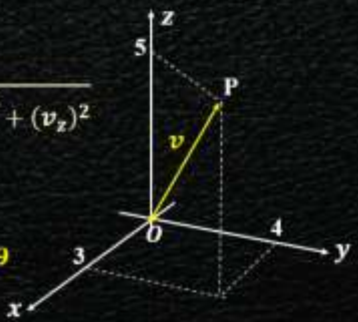
Ejemplos:

$v = \langle 4; 3 \rangle$ $\quad |v| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$a = \langle 2; -5 \rangle$ $\quad |a| = \sqrt{(2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29} = 5,39$ aprox

Dado un vector en R³: $v = \langle v_x; v_y; v_z \rangle$

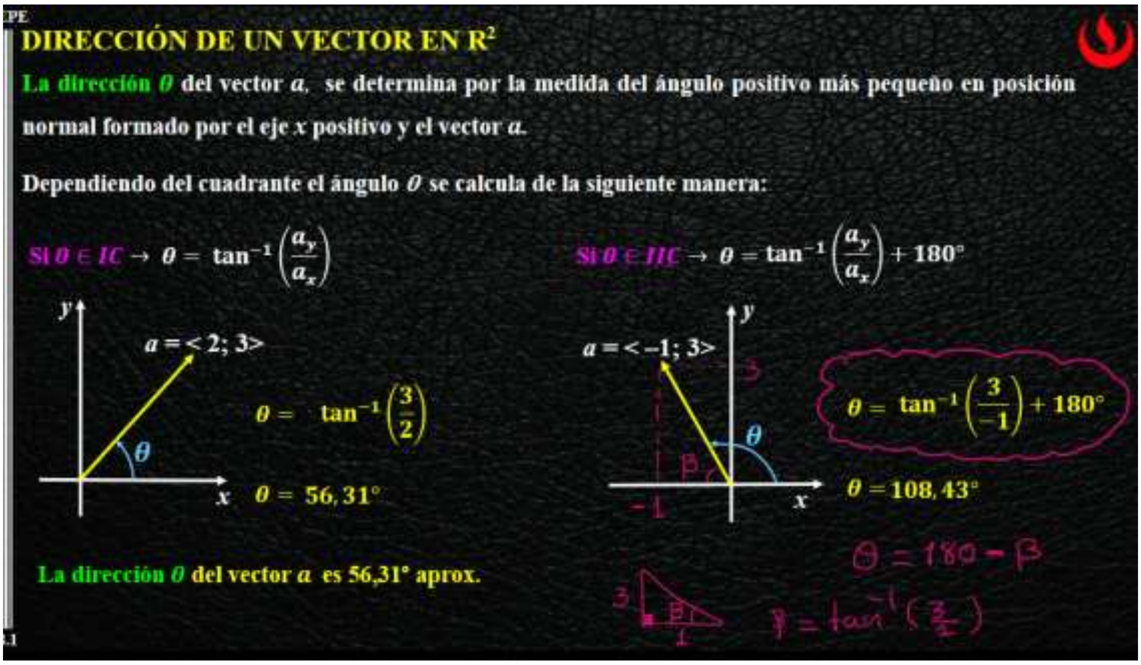
$$|v| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$

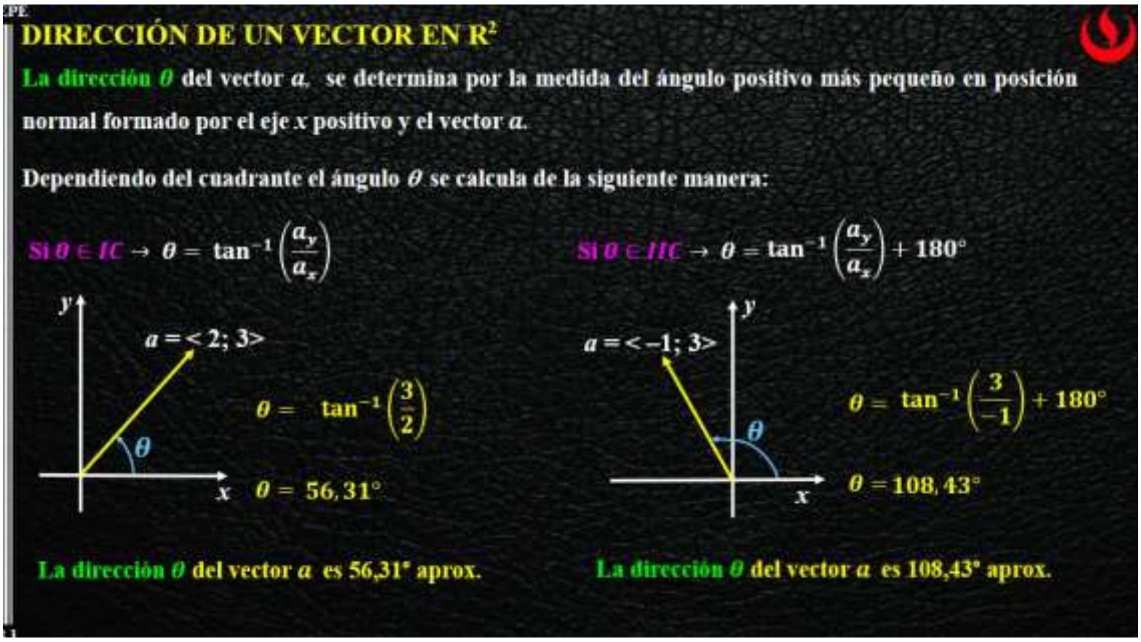


Ejemplos:

$v = \langle 3; 4; 5 \rangle$ $\quad |v| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (5)^2} = \sqrt{50} = 7,07$ aprox

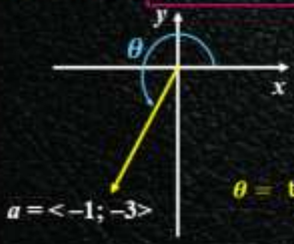
$a = \langle 12; -16; 21 \rangle$ $\quad |a| = \sqrt{12^2 + (-16)^2 + (21)^2} = \sqrt{841} = 29$


DIRECCIÓN DE UN VECTOR EN R^2
La dirección θ del vector a, se determina por la medida del ángulo positivo más pequeño en posición normal formado por el eje x positivo y el vector a.
Dependiendo del cuadrante el ángulo θ se calcula de la siguiente manera:
Si $\theta \in IC \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$
$a = <2; 3>$
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$
$\theta = 56,31°$
La dirección θ del vector a es 56,31° aprox.
Si $\theta \in IIC \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + 180°$
$a = <-1; 3>$
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{-1}\right) + 180°$
$\theta = 108,43°$
$\theta = 180 - \beta$
$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{1}\right)$


DIRECCIÓN DE UN VECTOR EN R^2
La dirección θ del vector a, se determina por la medida del ángulo positivo más pequeño en posición normal formado por el eje x positivo y el vector a.
Dependiendo del cuadrante el ángulo θ se calcula de la siguiente manera:
Si $\theta \in IC \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$
$a = <2; 3>$
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$
$\theta = 56,31°$
La dirección θ del vector a es 56,31° aprox.
Si $\theta \in IIC \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + 180°$
$a = <-1; 3>$
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{-1}\right) + 180°$
$\theta = 108,43°$
La dirección θ del vector a es 108,43° aprox.

DIRECCIÓN DE UN VECTOR EN R²

Si $\theta \in IIIC \rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + 180°}$



$a = <-1; -3>$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{-1}\right) + 180°$$

$$\theta = 251,57°$$

La dirección θ del vector a es 251,57° aprox.

Si $\theta \in IVC \rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + 360°}$

$\rightarrow a_y$

$a = < 1; -1>$

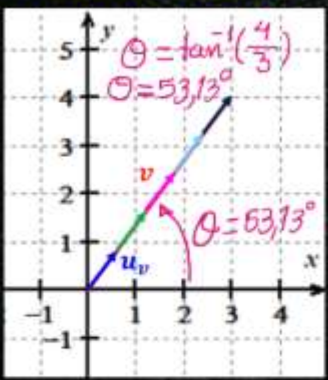
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{+1}\right) + 360°$$

$$\theta = 315°$$

La dirección θ del vector a es 315°

VECTOR UNITARIO

$V = < 3; 4 > \rightarrow |V| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



Se llama **vector unitario** a todo vector cuya magnitud es 1.

Todo vector v tiene asociado un vector unitario que se representa por u_v y se lee: *vector unitario en la dirección del vector v.*

En la figura adjunta la magnitud del vector v es: 5

Entonces el vector unitario en la dirección de v es:

$$u_v = \frac{1}{5}\langle 3;4 \rangle \Rightarrow \quad u_v = \left\langle \frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right\rangle \rightarrow |u_v| = 1$$

En forma general, dado un vector v, el vector unitario asociado a v se determina por:

$$\boxed{u_v = \frac{v}{|v|}}$$

Ejemplos:

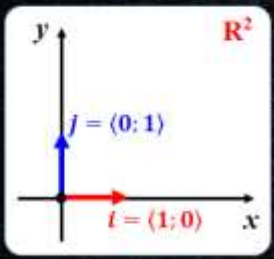
$a = \langle -4; 3 \rangle \qquad |a| = 5$

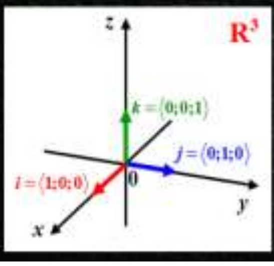
$u_a = \left\langle \frac{-4}{5}; \frac{3}{5} \right\rangle \rightarrow |u_a| = 1$

$b = \langle 2; 1; -1 \rangle \qquad |b| = \sqrt{6}$

$u_b = \left\langle \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}} \right\rangle \rightarrow |u_b| = 1$

VECTORES CANÓNICOS





Son aquellos vectores unitarios que están en la dirección positiva de los ejes coordenados.

Todo vector v puede ser expresado en términos de los vectores canónicos.

Ejemplo: $v = \langle 7; 4\rangle$

$$v = \langle 7; 0\rangle + \langle 0;4\rangle = 7\,\langle 1; 0\rangle + 4\,\langle 0;1\rangle = 7\,i + 4\,j$$

Ejemplos: exprese cada uno de los siguientes vectores en términos de los vectores canónicos.

$a = \langle 3; 2\rangle = 3\,i + 2\,j$ $\quad$ $b = \langle 3; 2; -7\rangle = 3\,i + 2j - 7k$

$p = 2i - 6k = \langle 2\,; 0\,; -6\,\rangle$ $\quad$ $q = 3i + 4j - k = \langle 3\,; 4\,; -1\,\rangle$

OPERACIONES CON VECTORES

$\boxed{a + b}$ $\quad$ $\boxed{ka; k \in R}$

Ejemplos:

$a = \langle -4; 7\rangle$ y $b = 5i - 3j = \langle 5\,; -3\rangle$

Halle:

i) $a + b = \langle 1\,; 4\,\rangle$

ii) $4b = \langle 20\,; -12\,\rangle$

iii) $-3a = \langle 12\,; -21\,\rangle$

iv) $-2a + 3b = \langle 8\,; -14\,\rangle + \langle 15\,; -9\rangle$

$= \langle 23\,; -23\rangle$

Ejemplos:

$a = \langle -1; -3; 7\rangle$ y $b = 2i - 5j + k = \langle 2\,; -5\,; 1\,\rangle$

Halle:

i) $a + b = \langle 1\,; -8\,; 8\,\rangle$

ii) $4a = \langle -4\,; -12\,; 28\,\rangle$

iii) $2a - 3b = \langle -2\,; -6\,; 14\,\rangle - \langle 6\,; -15\,; 3\,\rangle$

$= \langle -8\,; 9\,; 11\,\rangle$

PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO PUNTO

Dados los vectores en $\mathbb{R}^2$

$a = \langle a_x;\ a_y\rangle$ y $b = \langle b_x;\ b_y\rangle$

El producto punto o producto escalar denotado como $a \cdot b$ está definido por:

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$

Ejemplo:

$a = \langle -5; 4\rangle$, $\quad b = \langle -3; -2\rangle$

$a \cdot b = (-5)(-3) + (4)(-2)$

$a \cdot b = 15 - 8$

$a \cdot b = 7$

Dados los vectores en $\mathbb{R}^3$

$a = \langle a_x;\ a_y; a_z\rangle$ y $b = \langle b_x; b_y; b_z\rangle$

El producto punto o producto escalar denotado como $a \cdot b$, está definido por:

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Ejemplo:

$a = \langle -5; 4; 3\rangle$, $\quad b = \langle 1; -2; 6\rangle$

$a \cdot b = (-5)(1) + (4)(-2) + (3)(6)$

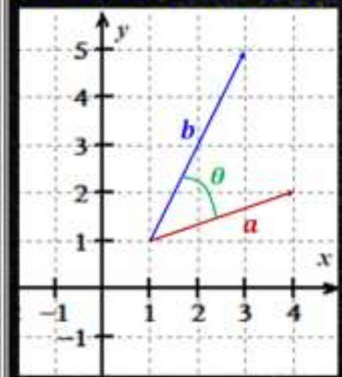
$a \cdot b = -5 - 8 + 18$

$a \cdot b = 5$

$\langle -3;4\rangle \cdot \langle 4;3\rangle = -12+12=0$

$u \cdot v = 0 \longrightarrow u \perp v$

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES



$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a.b}{|a|\ |b|}\right)}$$

Ejemplos: Determine el ángulo entre los vectores *a* y *b*

$a = 3i + j$, $b = \langle 2; 4\rangle$

$a = \langle 3; 1\rangle$

$a \cdot b = (3)(2) + (1)(4)$ ✓

$a \cdot b = 10$

$|a| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2}$

$|a| = \sqrt{10}$ ✓

$|b| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2}$

$|b| = \sqrt{20}$ ✓

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{10}\sqrt{20}}\right)$

$\theta = 45°$

$a = \langle 2; 1; -1\rangle$, $b = -2i + j + 4k$

$b = \langle -2; 1; 4\rangle$

$a \cdot b = (2)(-2) + (1)(1) + (-1)(4)$

$a \cdot b = -7$

$|a| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2}$

$|a| = \sqrt{6}$

$|b| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (4)^2}$

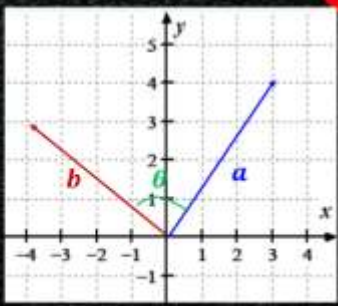
$|b| = \sqrt{21}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{6}\sqrt{21}}\right)$

$\theta = 128{,}58°$ aprox.

VECTORES ORTOGONALES O PERPENDICULARES

Dos vectores *a* y *b* son ortogonales o perpendiculares si se cumple: $\boxed{a.b = 0}$



Grafique los vectores $a = \langle 3;4\rangle, b = \langle -4;3\rangle$

¿Qué ángulo forman? $a \cdot b = (3)(-4) + (4)(3) \Rightarrow a \cdot b = 0$

los vectores *a* y *b* son ortogonales entonces forman 90°

Ejemplos:

¿Los vectores $a = \langle 2;-3\rangle$ y $b = \langle -6;4\rangle$ son ortogonales?

$a \cdot b = (2)(-6) + (-3)(4) = -24 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$

los vectores *a* y *b* no son ortogonales

¿Los vectores $a = \langle 1;-2;4\rangle$ y $b = 8i + 6j + k$ son ortogonales?

$a \cdot b = (1)(8) + (-2)(6) + (4)(1) = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$

los vectores *a* y *b* son ortogonales

VECTORES PARALELOS

Dos vectores *a* y *b* son paralelos si y solo si existe $k \in R$ tal que: $\boxed{a = kb}$

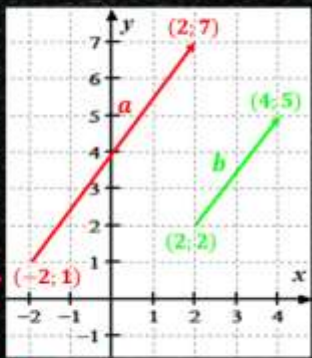
Dados los vectores en R^2, $a = \langle a_x;\ a_y\rangle$ y $b = \langle b_x;\ b_y\rangle$

Si cumplen $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = k \Rightarrow$ son paralelos.

Dados los vectores en R^3, $a = \langle a_x;\ a_y;\ a_z\rangle$ y $b = \langle b_x;\ b_y;\ b_z\rangle$

Si cumplen $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} = k \Rightarrow$ son paralelos.

En la figura adjunta los vectores *a* y *b* ¿ son paralelos?



$a = \langle 4;6\rangle$

$b = \langle 2;3\rangle$ $\quad \dfrac{4}{2} = \dfrac{6}{3} = 2 \Rightarrow$ son paralelos $\quad a = 2b$, $k = 2$

Determine si los vectores indicados son paralelos en cada caso

a) $a = \langle -4;-2\rangle$ y $b = \langle 10;5\rangle$ $\quad \dfrac{-4}{10} = \dfrac{-2}{5} = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow$ son paralelos

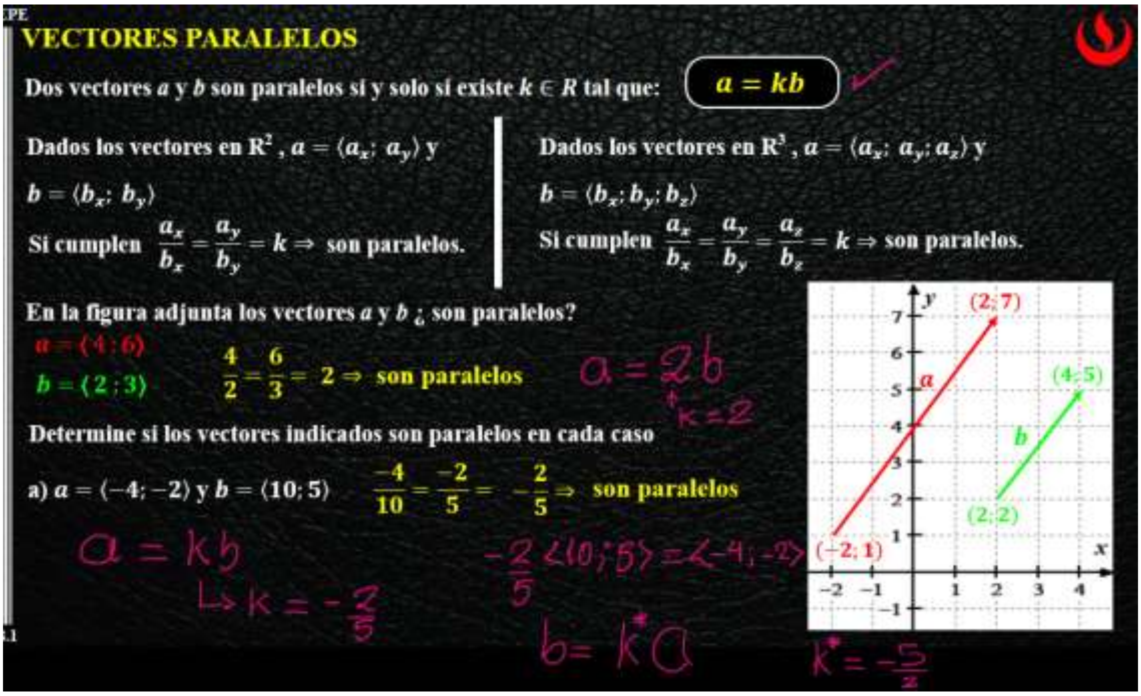
$a = kb$

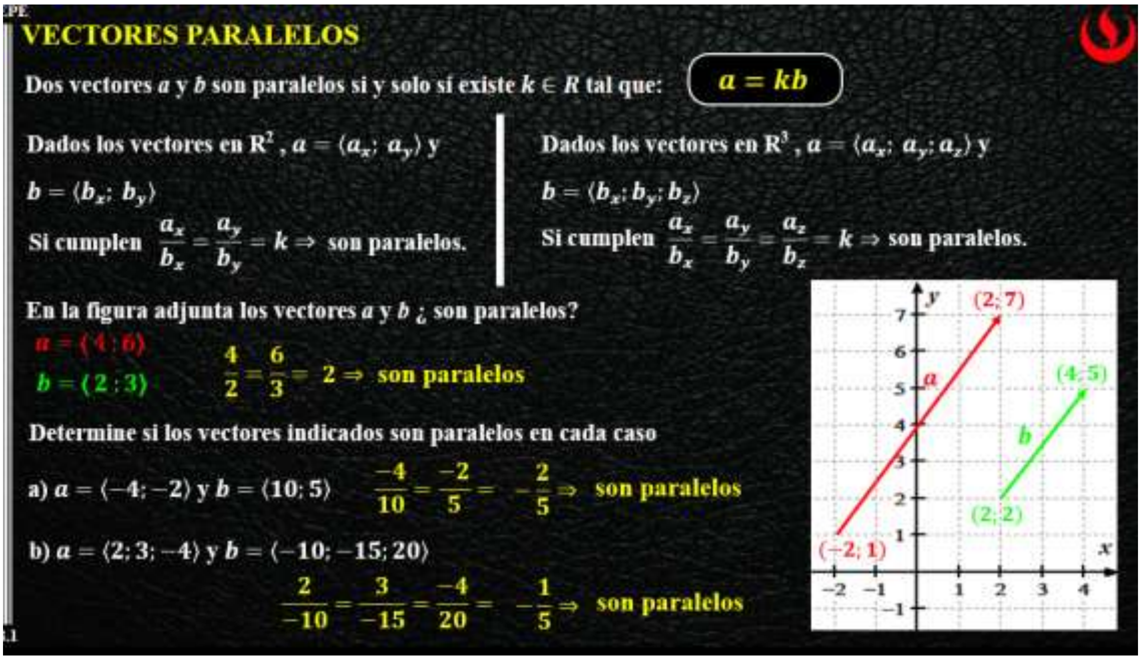
$\hookrightarrow k = -\dfrac{2}{5}$

$-\dfrac{2}{5}\langle 10;5\rangle = \langle -4;-2\rangle$

$b = k^* a$

$k^* = -\dfrac{5}{2}$

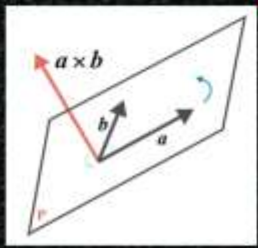

VECTORES PARALELOS
Dos vectores a y b son paralelos si y solo si existe $k \in R$ tal que: $a = kb$
Dados los vectores en R^2, $a = \langle a_x; a_y \rangle$ y $b = \langle b_x; b_y \rangle$
Si cumplen $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = k \Rightarrow$ son paralelos.
Dados los vectores en R^3, $a = \langle a_x; a_y; a_z \rangle$ y $b = \langle b_x; b_y; b_z \rangle$
Si cumplen $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k \Rightarrow$ son paralelos.
En la figura adjunta los vectores a y b ¿ son paralelos?
$a = (4; 6)$
$b = (2; 3)$
$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow$ son paralelos
$a = 2b$
$k = 2$
Determine si los vectores indicados son paralelos en cada caso
a) $a = \langle -4; -2 \rangle$ y $b = \langle 10; 5 \rangle$ $\frac{-4}{10} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow$ son paralelos
$a = kb$
$\hookrightarrow k = -\frac{2}{5}$
$-\frac{2}{5}\langle 10; 5 \rangle = \langle -4; -2 \rangle$
$b = k^* a$
$k^* = -\frac{5}{2}$
(2; 7)
(4; 5)
(2; 2)
(−2; 1)
a
b
x
y


VECTORES PARALELOS
Dos vectores a y b son paralelos si y solo si existe $k \in R$ tal que: $a = kb$
Dados los vectores en R^2, $a = \langle a_x; a_y \rangle$ y $b = \langle b_x; b_y \rangle$
Si cumplen $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = k \Rightarrow$ son paralelos.
Dados los vectores en R^3, $a = \langle a_x; a_y; a_z \rangle$ y $b = \langle b_x; b_y; b_z \rangle$
Si cumplen $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k \Rightarrow$ son paralelos.
En la figura adjunta los vectores a y b ¿ son paralelos?
$a = (4; 6)$
$b = (2; 3)$
$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow$ son paralelos
Determine si los vectores indicados son paralelos en cada caso
a) $a = \langle -4; -2 \rangle$ y $b = \langle 10; 5 \rangle$ $\frac{-4}{10} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow$ son paralelos
b) $a = \langle 2; 3; -4 \rangle$ y $b = \langle -10; -15; 20 \rangle$
$\frac{2}{-10} = \frac{3}{-15} = \frac{-4}{20} = -\frac{1}{5} \Rightarrow$ son paralelos
(2; 7)
(4; 5)
(2; 2)
(−2; 1)
a
b
x
y

PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial entre dos vectores a y b en R^3, distintos del vector nulo, es otro vector y se representa como $a \times b$.

En la figura adjunta se representa gráficamente qué representa un producto vectorial. Como se puede observar el resultado del producto vectorial $a \times b$ es otro vector, perpendicular al plano que determinan a y b.



Para calcular el producto vectorial entre dos vectores a y b en R^3 definidos como $a = \langle a_x; a_y; a_z \rangle$, $b = \langle b_x; b_y; b_z \rangle$ se forma una matriz cuadrada de orden tres y se calcula su determinante.

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Ejemplo: $a = \langle -4; 2; 1 \rangle$ y $b = \langle -3; 5; -2 \rangle$ **Halle:** $a \times b$

$$a \times b = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -4 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$i[(2)(-2) - (5)(1)] - j[(-4)(-2) - (-3)(1)] + k[(-4)(5) - (-3)(2)]$$

$$a \times b = -9i - 11j - 14k = \langle -9; -11; -14 \rangle$$

EJERCICIO

Sabiendo que: $a = \langle 2; 3; -4 \rangle$ y $b = \langle -1; -5; 2 \rangle$

Halle: $b \times a$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$b \times a = +i \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

6 20 4 4 −10 −3

$$b \times a = i(20-6) - j(4-4) + k(-3-(-10))$$

$$b \times a = 14i + 0j + 7k \rightarrow b \times a = \langle 14; 0; 7 \rangle$$

ACTIVIDADES DE LA SEMANA 8

Control 5

ASESORÍA 7, clase programada con el AAD

CONTROL DE RECUPERACIÓN 5, se evalúa en la asesoría 7

CONSULTAS