EPE
CONTENIDO
1
FUNCIÓN CUADRÁTICA DEFINICIÓN, GRÁFICA, DOMINIO, RANGO.
2
APLICACIONES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA
TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN
3
5.1

EPE
LOGRO
AL TERMINAR LA CLASE EL ALUMNO SERÁ CAPAZ DE:
IDENTIFICAR Y REPRESENTAR ALGEBRAICAMENTE Y GRAFICAMENTE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA
RESOLVER PROBLEMAS DE CONTEXTO REAL RELACIONADOS CON FUNCIONES CUADRÁTICAS
APLICAR LAS TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN PARA ESBOZAR LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES
5.1

EPE

1 Resuelva la siguiente ecuación usando la calculadora. → Symbolab

$8x^2 + 14x - 15 = 0$

$x = 3/4 \quad x = -5/2$

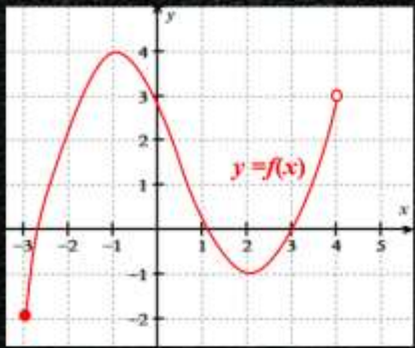
$CS = \{-2,5 ; 0,75\}$

2 El dominio de f es: $[-3; 4[$

El rango de f es: $[-2; 4]$

El máximo absoluto de f es: 4

El mínimo absoluto de f es: -2



5.1

FUNCIÓN CUADRÁTICA

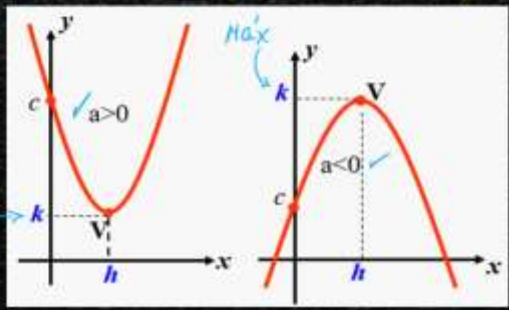
EPE

FUNCIÓN CUADRÁTICA

$f(x) = a(x-h)^2 + k \rightarrow V(h;k)$

Se llama asi a la función cuya regla de correspondencia es: $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo $a \neq 0$ (forma estándar)

La gráfica es una curva llamada *parábola* con eje focal paralelo al eje *y* y vértice V(h; k).



$\boxed{h = -\dfrac{b}{2a}}$ $\boxed{k = f(h)}$

Ejemplo: Halle h y k en cada caso

a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 5$ $a = 2 > 0$

$h = -\dfrac{-4}{2(2)} = 1$

$k = f(1) = 2(1)^2 - 4(1) - 5 = -7$

$\therefore V = (1; -7)$ Min: $k = -7$

b) $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ $a = -1 < 0$

$h = -\dfrac{6}{2(-1)} = 3$

$k = f(3) = -(3)^2 + 6(3) + 1 = 10$ Máx: $k = 10$

$\therefore V = (3; 10)$

5.1

EPE

FUNCIÓN CUADRÁTICA

$f(x) = ax^2 + bx + c$ y $a > 0$

Ejemplo: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ $= 2(x-(-1))^2 + (-5)$

La gráfica de la función f es una **PARÁBOLA**.

La gráfica es cóncava hacia **arriba** $\leftarrow a = 2 > 0$

Intersección con el eje y: $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0; -3)$ $\leftarrow c$

Intersección con el eje x: $y = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 3 = 0$

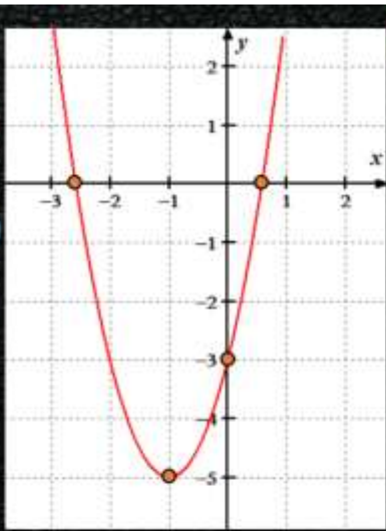
$\Rightarrow x_1 = -2,58;\ x_2 = 0,58$

Puntos de corte: $(-2,58; 0)$, $(0,58; 0)$

Coordenadas de vértice de la parábola:

$h = -\dfrac{4}{2(2)} = -1$ $\therefore V = (-1; -5)$ $\rightarrow$ Mín

$k = f(-1) = -5$



Tiene mínimo absoluto en -1 y su mínimo absoluto es -5

5.1

EPE

FUNCIÓN CUADRÁTICA

$f(x) = ax^2 + bx + c$ y $a < 0$

Ejemplo: $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

La gráfica de la función f es una **PARÁBOLA**.

La gráfica es cóncava hacia **abajo**. $\rightarrow a = -1 < 0$

Intersección con el eje y: $x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow (0; -5)$ $\rightarrow C$

Intersección con el eje x: $y = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1 \,;\, x_2 = 5$

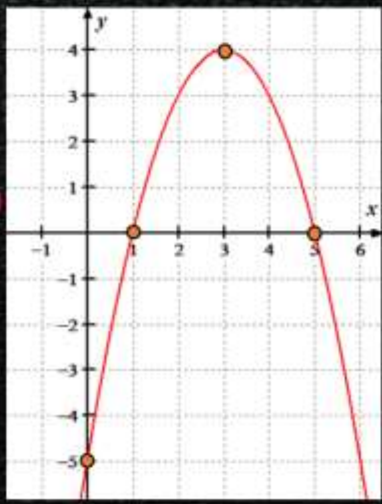
Puntos de corte: $(1;0)$, $(5;0)$

Coordenadas de vértice de la parábola:

$h = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$h = -\frac{6}{2(-1)} = 3$ $\qquad \therefore V = (3;4)$ $\rightarrow$ Máx

$k = f(3) = 4$



Tiene máximo absoluto en 3 y su máximo absoluto es 4

5.1

EPE

EJERCICIO

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k$

En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función cuadrática f. Halle la regla de correspondencia de la función y los puntos de intersección con el eje x.

$V(1;-2) \rightarrow f(x) = a(x-1)^2 + (-2)$

$2 = a(0-1)^2 - 2$

$4 = a$

$\therefore f(x) = 4(x-1)^2 - 2$

Lo puntos de corte con el eje x $(y=0)$

$4(x-1)^2 - 2 = 0$

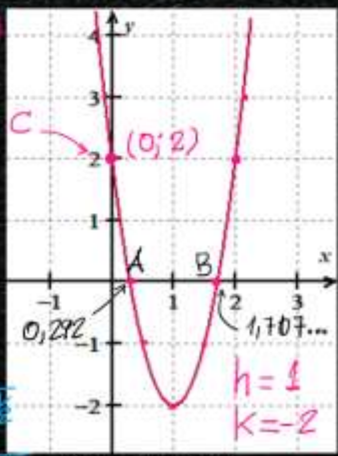
$4(x-1)^2 = 2$

$(x-1)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$(x-1)^2 = \frac{1}{2}$

$x - 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$x = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\begin{cases} 1+\sqrt{1/2} \\ 1-\sqrt{1/2} \end{cases}$



A(0,29 ; 0)
B(1,71 ; 0)

5.1

EPE

FUNCIÓN CUADRÁTICA: FORMA NORMAL

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Otra forma de representar una función cuadrática es: $f(x) = a(x-h)^2 + k$

forma normal

Donde: (h; k) son las coordenadas del vértice

a) Dada la función $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$, escriba su regla en la forma normal.

$a = -2 \quad b = -4 \qquad k = f(-1) = -2(-1)^2 - 4(-1) + 2 \Rightarrow k = 4$

$h = -\dfrac{-4}{2(-2)} = -1 \qquad \therefore f(x) = -2(x+1)^2 + 4$

b) Dada la función $f(x) = 3(x-2)^2 - 4$, escriba su regla en la forma estándar.

$\hookrightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = 3(x^2 - 4x + 4) - 4$

$(x-2)^2 = x^2 - 2(2)x + 2^2$

$f(x) = 3x^2 - 12x + 12 - 4$

$f(x) = 3x^2 - 12x + 8 \rightarrow$ forma estándar.

gió

5.1

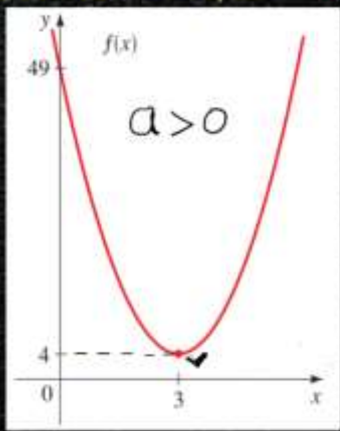
EPE

FUNCIÓN CUADRÁTICA

$(0;49) \in$ Gráfico

Ejemplo: En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función cuadrática, halle la regla de correspondencia en su forma normal.

$\boxed{f(x) = a(x-h)^2 + k}$



Tenemos $(h; k) = (3; 4)$ ➡ $f(x) = a(x-3)^2 + 4$

Como el punto (0; 49) pertenece a la gráfica de la función, debe de cumplir con su regla de correspondencia:

$49 = a(0-3)^2 + 4$

$45 = 9a$

$a = 5$

$\boxed{\therefore f(x) = 5(x-3)^2 + 4}$

5.1

EPE

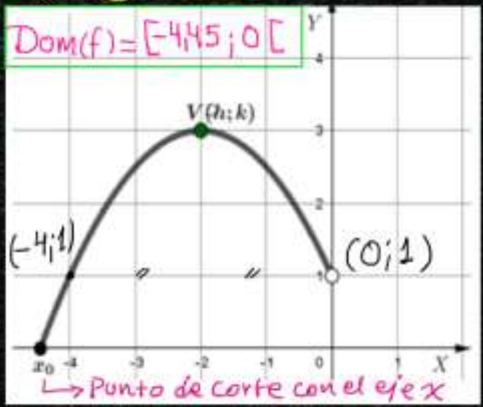
EJERCICIO

$f(x)=a(x-h)^2+k$ $\quad h=-2 \quad k=3 \quad a<0$

La figura muestra la gráfica de una función cuadrática f, con vértice en el punto $(h; k)$. Halle:

$V(-2;3)$

Dom(f) = [-4,45 ; 0[



a. La regla de correspondencia de la función f.

$f(x)=a(x-(-2))^2+3$

$1=a(0+2)^2+3 \rightarrow -2=a(4)$

$-\frac{1}{2}=a$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$

Hallar x_0 ($y=0$)

$-\frac{1}{2}(x+2)^2+3=0$

$-\frac{1}{2}(x+2)^2=-3$

Eliminar el −

$(x+2)^2=6 \rightarrow x+2=\pm\sqrt{6}$

$x=-2\pm\sqrt{6}$

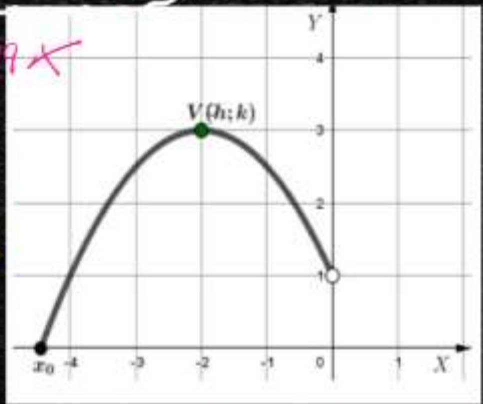
$x=-4{,}449..$ $\quad x=0{,}449... \notin \text{Dom}(f)$

5.1

EPE

FUNCIÓN CUADRÁTICA

$f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$



b. El dominio de la función.

$y=0 \rightarrow x_0=-4{,}449 \;,\; x=0{,}449$ ✗

Dom(f) = [-4,45 ; 0[

c. El valor de x tal que $f(x)=0{,}75$. $\rightarrow 3/4$

$-\frac{1}{2}(x+2)^2+3=\frac{3}{4}$ Calculadora

$-\frac{1}{2}(x+2)^2=\frac{3}{4}-3=-\frac{9}{4}$

$-\frac{1}{2}(x+2)^2=-\frac{9}{4} \rightarrow (x+2)^2=\frac{9}{2}$

$(x+2)=\pm\sqrt{4{,}5}$

$x=-2\pm\sqrt{4{,}5}$ $\quad x=-4{,}121...$ $\quad x=0{,}12 \notin \text{Dom}(f)$

$f(x)=0{,}75$ cuando el valor de x es $-4{,}12$ aprox.

5.1

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

I. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de la función $f(x) = 3x - 4 - x^2$?

$a = -1$

$b = 3$

29//

$h = 3/2 = 1{,}5$

$k = -7/4$

$V(3/2 ; -7/4)$

$h = \frac{-3}{2(-1)} = 3/2$

$k = 3 \cdot \frac{3}{2} - 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$k = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} - 4 = \frac{9}{4} - 4$

$= \frac{-7}{4}$

II. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de la función $f(x) = 5 - (x+1)^2$?

$x + 1 = 0$

$x = -1$

$h = -1$

$h = -1$

$k = 5$

$V(-1 ; 5)$

$f(x) = -(x+1)^2 + 5$

5.1

APLICACIONES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

EPE

APLICACIONES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

PC2

1 La función $f(t) = 80 + 64t - 16t^2$ nos da la altura (en metros) a la que está una pelota lanzada hacia arriba en el instante t (en segundos) hasta que vuelve al suelo.

¿Desde qué altura se lanzó la pelota?

$f(t) = -16t^2 + 64t + 80 \qquad t \longrightarrow f(t)$

Observa que f es una función cuadrática

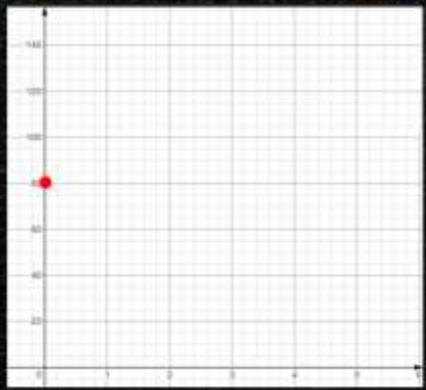
Por lo tanto su gráfica es una PARÁBOLA

En un inicio se considera $t = 0$

$f(0) = 80 + 64(0) - 16(0)^2$

$f(0) = 80$

La pelota se lanzo desde una altura de 80 metros.



5.1

EPE

APLICACIONES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

1 La función $f(t) = 80 + 64t - 16t^2$ nos da la altura (en metros) a la que está una pelota lanzada hacia arriba en el instante t (en segundos) hasta que vuelve al suelo.

Esboce la gráfica de la función, defina variables y coloque restricciones.

t: Tiempo transcurrido en segundos.

$f(t)$: Altura de la pelta en metros.

$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{64}{2(-16)} = 2$ Vértice: $(2; 144)$

$k = f(2) = 144$

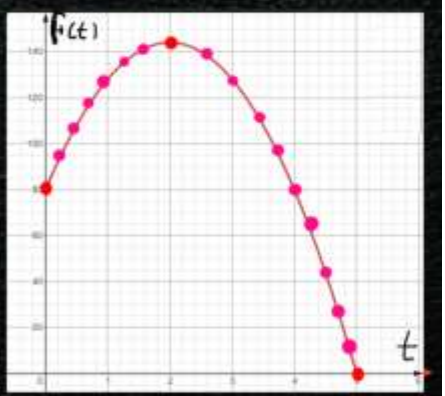
Intercepto con eje horizontal $\Rightarrow f(t) = 0$

$0 = 80 + 64t - 16t^2$

$t = -1$ o $t = 5$

$0 \leq t \leq 5$

$0 \leq f(t) \leq 144$



5.1

EPE

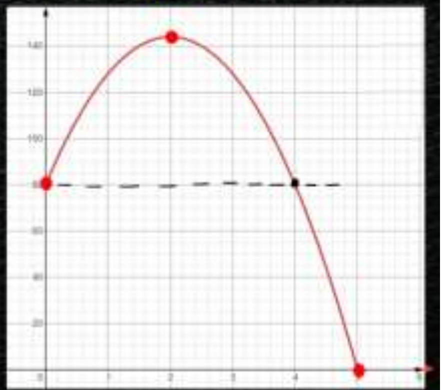
APLICACIONES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

1 La función $f(t) = 80 + 64t - 16t^2$ nos da la altura (en metros) a la que está una pelota lanzada hacia arriba en el instante t (en segundos) hasta que vuelve al suelo.

Halle la altura máxima que alcanzó la pelota y ¿en qué tiempo alcanzó dicha altura?

Como $V = (h; k) = (2; 144)$

La altura máxima que alcanza la pelota es de 144 metros y ocurre después de 2 segundos.



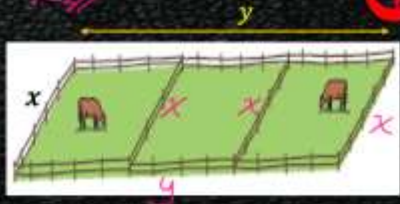
5.1

EPE

APLICACIONES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

pg 9

2 Un agricultor tiene 1200 metros de material para construir una cerca en un terreno rectangular que ha de cercarse en tres porciones iguales, como se muestra en la figura adjunta.



Determine una función que permita expresar el área del terreno rectangular en función de x. *Nota defina sus variables y encuentre su dominio restringido.*

$A = x.y$

x : Longitud del ancho del terreno rectangular en metros.

A(x) : Área del terreno rectangular en metros cuadrados.

$4x + 2y = 1200$ $\quad$ $600 - 2x > 0$ $\quad$ $A = \text{área} \Rightarrow A = xy$

$y = 600 - 2x$ $\quad$ $300 > x$ $\quad$ $A(x) = x(600 - 2x)$

$x > 0 \wedge y > 0$ $\quad$ $\therefore 0 < x < 300$ $\quad$ $A(x) = -2x^2 + 600x$ $\quad$ Dom $A =]0; 300[$

$600 - 2x > 0$

$600 > 2x$

5.1

EPE

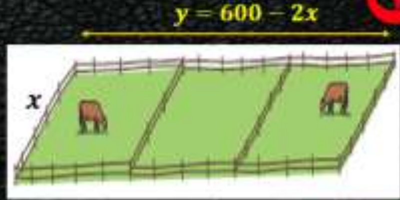
APLICACIONES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

2 b) Calcule el área máxima del terreno

$A(x) = -2x^2 + 600x$

$V(h; k)$

x



A es una función cuadrática su gráfica es una PARÁBOLA

Como a es negativo entonces la parábola se abre hacia ABAJO. Por lo tanto la función tiene MÁXIMO valor en k.

$x = 150$

$y = 300$

$h = -\dfrac{600}{2(-2)} = 150 \Rightarrow k = A(h) \Rightarrow A(150) = 45\,000$

El área máxima del terreno es de $45\,000\,m^2$.

c) Calcule las dimensiones del terreno para que el área sea máxima.

El área es máxima para $x = 150$

$y = 600 - 2x = 300$

Las dimensiones del terreno son 150 m de ancho y 300 m de largo para tener un área máxima.

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

La utilidad U en dólares que se genera al vender x mesas de dibujo está dado por la función con regla de correspondencia $U(x) = -9900 + 50x - 0,0025x^2$; $x \in]200; 19800[$. ¿Cuál es la utilidad máxima y cuántas mesas de dibujo se deben vender para generar esta ganancia?

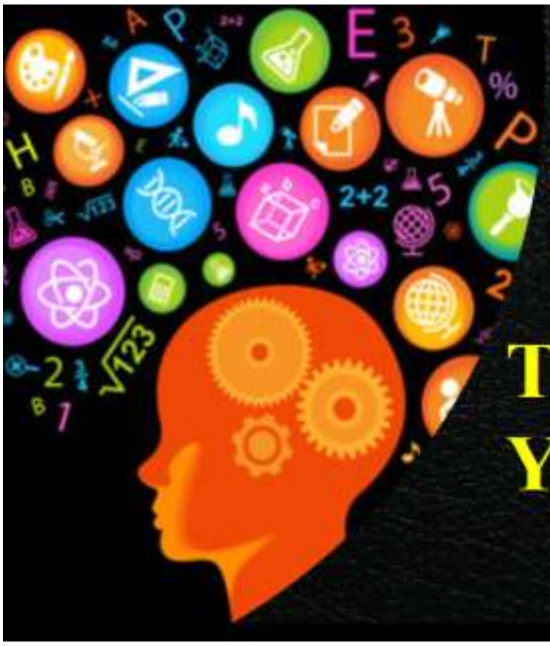
$a = -0,0025 < 0 \longrightarrow U$ tiene un máx

$k = U(h)$

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2(-0,0025)} = 10\,000 \text{ mesas}$$

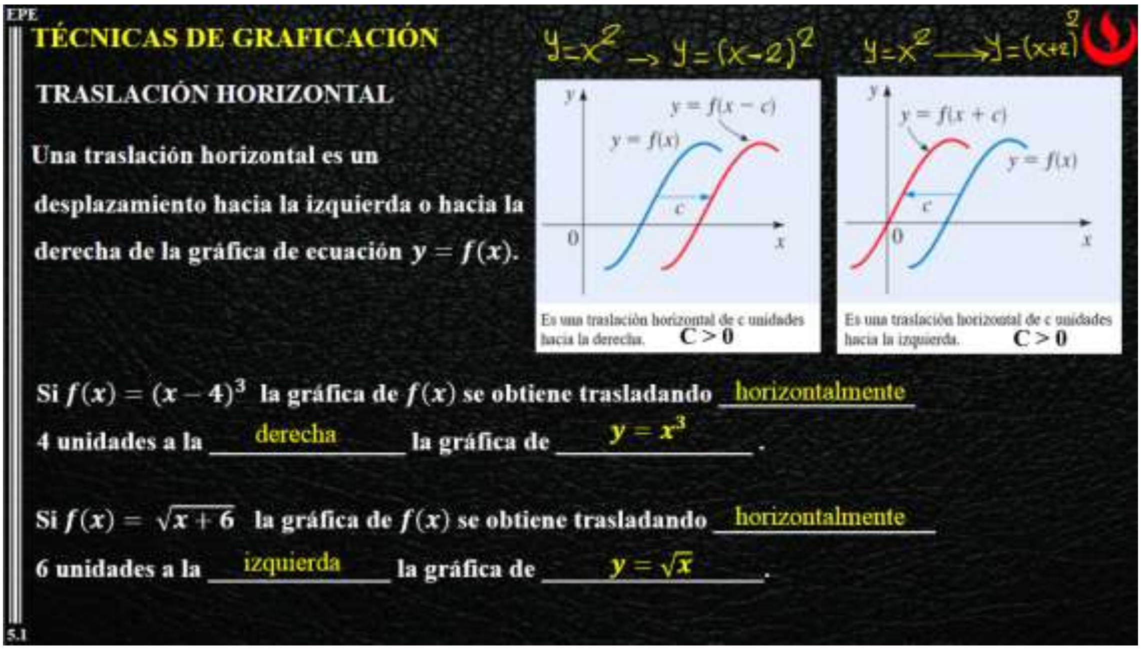
$K = U(1000) = 240\,100$ dólares

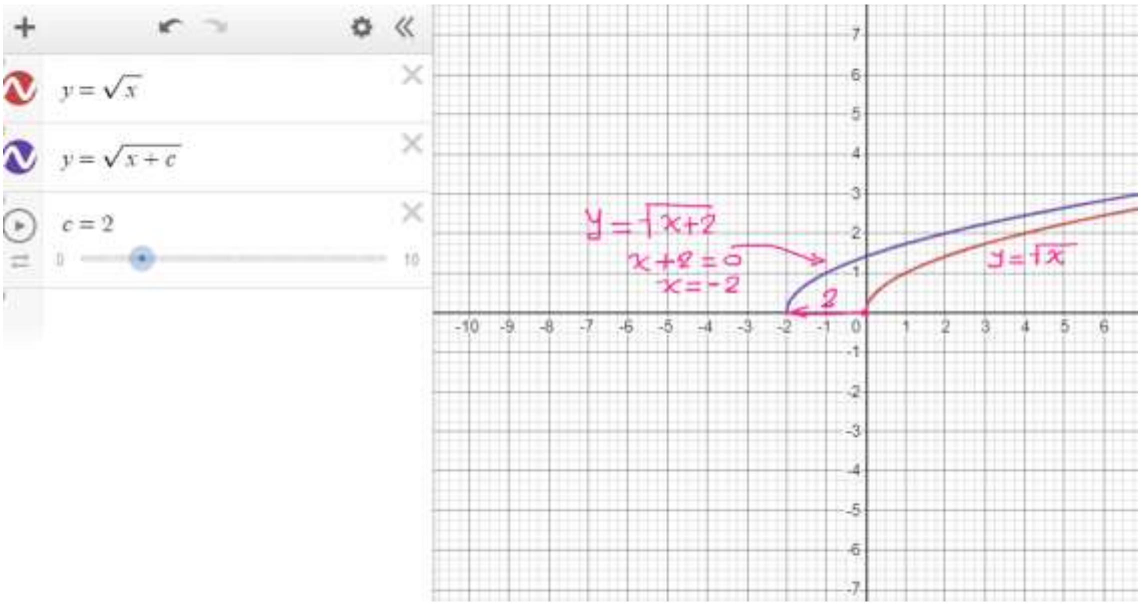
Redactar.



TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

TRASLACIÓN Y REFLEXIÓN


EPE
TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN
$y=x^2 \to y=(x-2)^2$
$y=x^2 \longrightarrow y=(x+2)^2$
TRASLACIÓN HORIZONTAL
Una traslación horizontal es un desplazamiento hacia la izquierda o hacia la derecha de la gráfica de ecuación $y = f(x)$.
$y = f(x - c)$
$y = f(x)$
c
0
x
y
Es una traslación horizontal de c unidades hacia la derecha. $C > 0$
$y = f(x + c)$
$y = f(x)$
c
0
x
y
Es una traslación horizontal de c unidades hacia la izquierda. $C > 0$
Si $f(x) = (x-4)^3$ la gráfica de $f(x)$ se obtiene trasladando horizontalmente 4 unidades a la derecha la gráfica de $y = x^3$.
Si $f(x) = \sqrt{x+6}$ la gráfica de $f(x)$ se obtiene trasladando horizontalmente 6 unidades a la izquierda la gráfica de $y = \sqrt{x}$.
5.1


$y = \sqrt{x}$
$y = \sqrt{x + c}$
$c = 2$
0
10
$y = \sqrt{x+2}$
$x+2=0$
$x=-2$
2
$y = \sqrt{x}$

EPE

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Para graficar aplicando las técnicas de graficación lo primero es identificar la función con la cual se va a empezar a trabajar (función básica) y luego se procede a aplicar la transformación correspondiente.

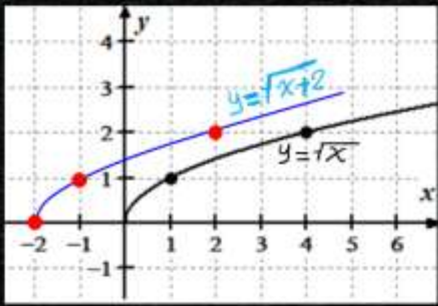
Esboce la gráfica de la función f cuya regla es $f(x) = \sqrt{x+2}$

Paso 1: Identifique la función básica.

En este caso: $f(x) =$ $\sqrt{x}$

Paso 2: Aplique la transformación correspondiente.

En este caso es una traslación horizontal **de** 2 **unidades a la** izquierda.



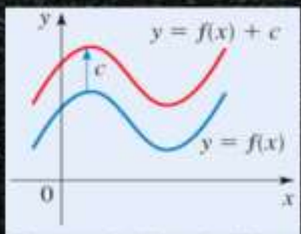
5.1

EPE

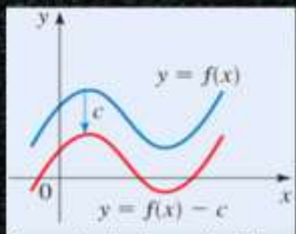
TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

TRASLACIÓN VERTICAL

Una traslación vertical es un desplazamiento hacia arriba o hacia abajo de la gráfica de ecuación $y = f(x)$.



Es una traslación vertical de c unidades hacia arriba. C > 0



Es una traslación vertical de c unidades hacia abajo. C > 0

Si $f(x) = x^3 + 8$ la gráfica de $f(x)$ se obtiene trasladando verticalmente **8 unidades hacia** arriba **la gráfica de** $y = x^3$.

Si $f(x) = \sqrt{x} - 4$ la gráfica de $f(x)$ se obtiene trasladando verticalmente **4 unidades hacia** abajo **la gráfica de** $y = \sqrt{x}$.

5.1

EPE

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

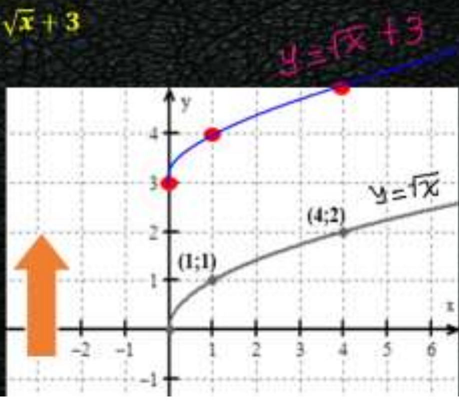
Esboce la gráfica de la función f cuya regla es $f(x) = \sqrt{x} + 3$

Paso 1: Identifique la función básica.

En este caso: $f(x) = \sqrt{x}$

Paso 2: Aplique la transformación correspondiente.

En este caso es una traslación vertical **de** 3 **unidades hacia** arriba.



EPE

EJERCICIO

•) $y=x^2 \to y=(x-3)^2$

Esboce la gráfica de la función f cuya regla es $f(x)=(x-3)^2-2$

Paso 1:

Función básica en este caso:

$f(x) =$ x^2

Paso 2:

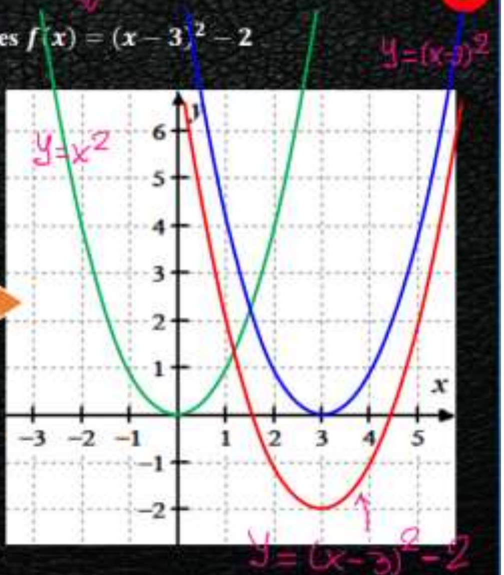
Se aplica una traslación horizontal

de 3 unidades hacia la derecha.

Paso 3:

Se aplica una traslación vertical

de 2 unidades hacia abajo

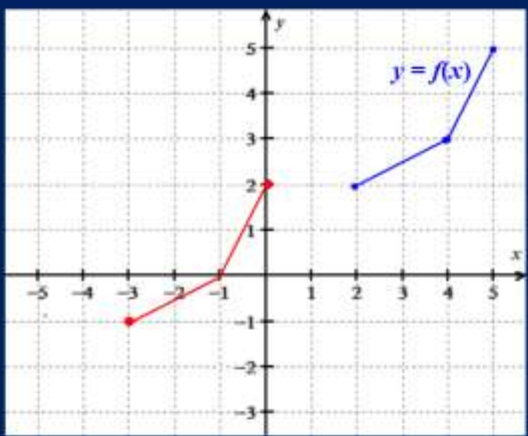


5.1

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

Aplicando las técnicas de graficación, esboce la gráfica de: $\underbrace{f(x+5)}_{\text{T. horizontal}}\overbrace{-3}^{\text{T. Vertical}}$



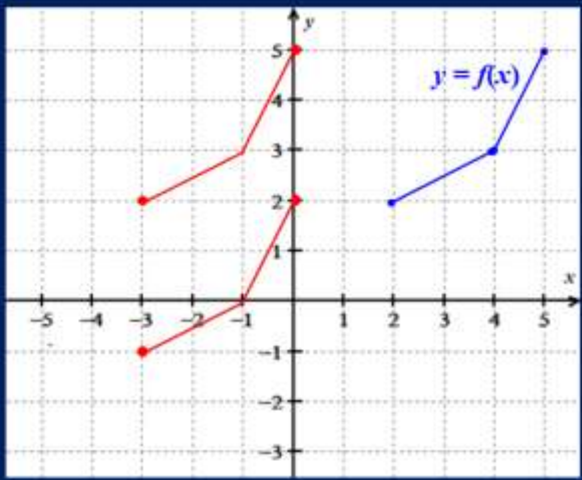
5.1

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

T·Vertical

Aplicando las técnicas de graficación, esboce la gráfica de: $\underbrace{f(x+5)}_{\text{T·horizontal}} \overbrace{-3}^{\text{T·Vertical}}$



5.1

EPE

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

REFLEXIÓN RESPECTO AL EJE X

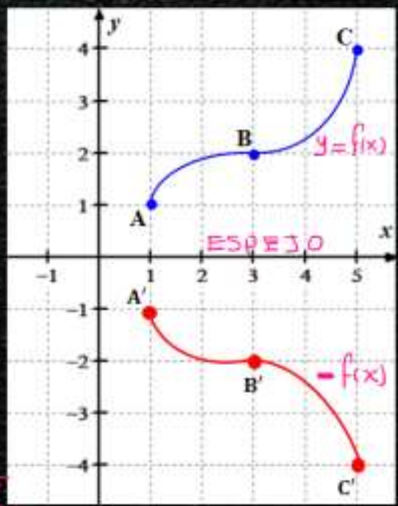
En la figura adjunta determine las coordenadas de cada punto y luego refleje cada uno respecto al eje *x*.

Determine las coordenadas de cada punto reflejado.

A	(1 ; 1)
B	(3; 2)
C	(5; 4)

REFLEXIÓN RESPECTO AL EJE X.

A′	(1; −1)
B′	(3; −2)
C′	(5; −4)



CONCLUSIÓN: Al reflejar un punto (a; b) respecto al eje *x*, las coordenadas del nuevo punto son: (a; −b).

a) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad$ $f(x)=-\sqrt{x}$

(1;1) $\quad$ (1;-1)

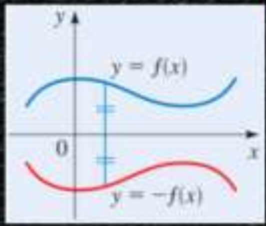
(4;2) $\quad$ (4;-2)

5.1

EPE

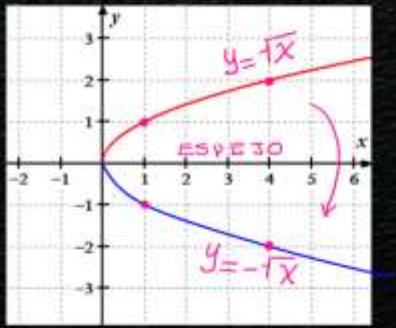
TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

REFLEXIÓN RESPECTO AL EJE X



La gráfica con ecuación $y = -f(x)$ es el reflejo de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ con respecto al eje x.

Ejemplo: Esboce la gráfica de la función f cuya regla es $f(x) = -\sqrt{x}$



Paso 1: Identifique la función básica.

En este caso: $f(x) =$ $\sqrt{x}$

Paso 2: Aplique la transformación correspondiente.

En este caso es una reflexión al eje x

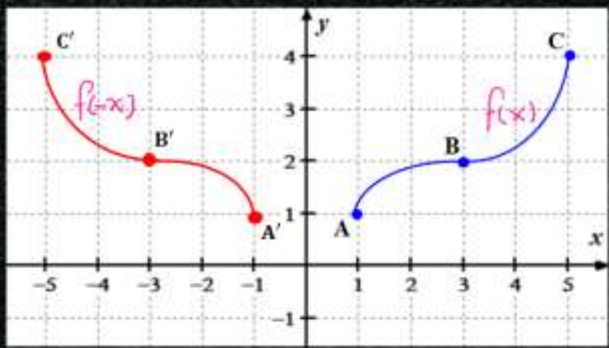
5.1

EPE

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

REFLEXIÓN RESPECTO AL EJE Y

En la figura adjunta determine las coordenadas de cada punto y luego refleje cada uno respecto al eje *y*. Determine las coordenadas de cada punto reflejado.



CONCLUSIÓN: Al reflejar un punto (a; b) respecto al eje *y*, las coordenadas del nuevo punto son: (– a; b)

A	$(1\,;1)$
B	$(3;2)$
C	$(5;4)$

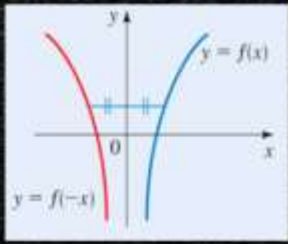
REFLEXIÓN RESPECTO AL EJE *Y*.

A′	$(-1;1)$
B′	$(-3;2)$
C′	$(-5;4)$

5.1

TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

REFLEXIÓN RESPECTO AL EJE Y



La gráfica con ecuación $y = f(-x)$ es el reflejo de la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ con respecto al eje *y*.

Ejemplo: Esboce la gráfica de la función f cuya regla es

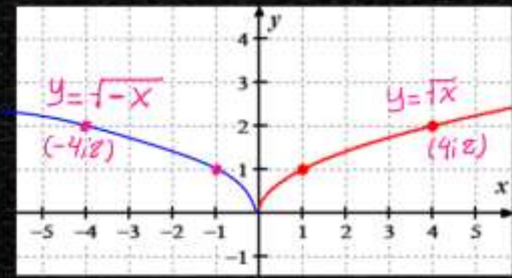
$f(x) = \sqrt{-x}$

Paso 1: Identifique la función básica.

En este caso: $f(x) =$ ___ $\sqrt{x}$ ___

Paso 2: Aplique la transformación correspondiente.

En este caso es una ___ reflexión al eje y ___



EJERCICIO

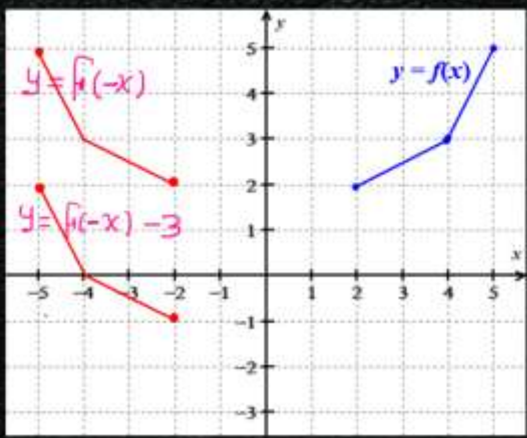
En la figura adjunta realice las siguientes transformaciones en el orden indicado:

(T 1) Reflexión respecto al eje *y*.

(T 2) Traslación vertical de 3 unidades hacia abajo.

¿Cuál es la ecuación que corresponde al proceso realizado?

$y = f(-x) - 3$



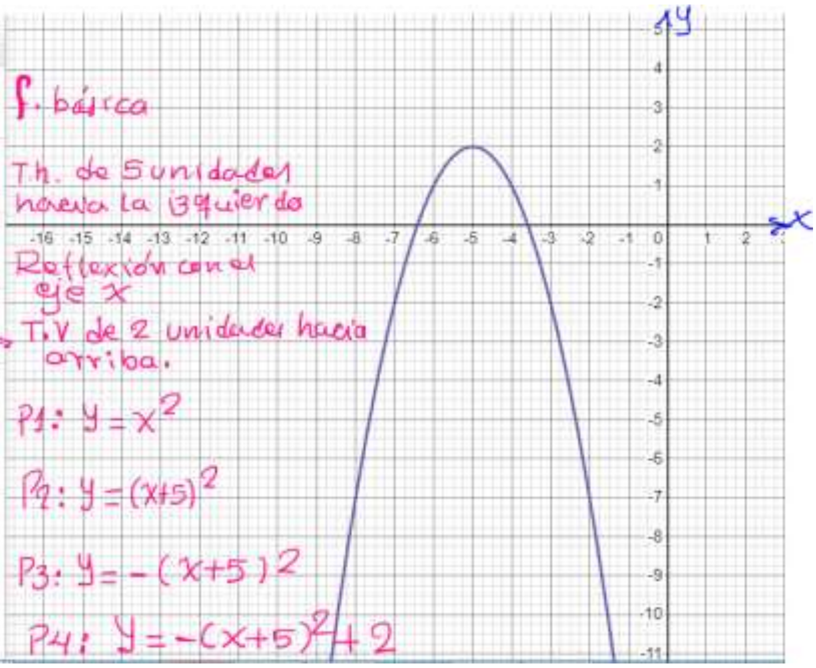
$y = x^2$	f. básica
$y = (x+5)^2$	Th. de 5 unidades hacia la izquierda
$y = -(x+5)^2$	Reflexión con el eje x
$y = -(x+5)^2 + 2$	T.V de 2 unidades hacia arriba.

P1: $y = x^2$

P2: $y = (x+5)^2$

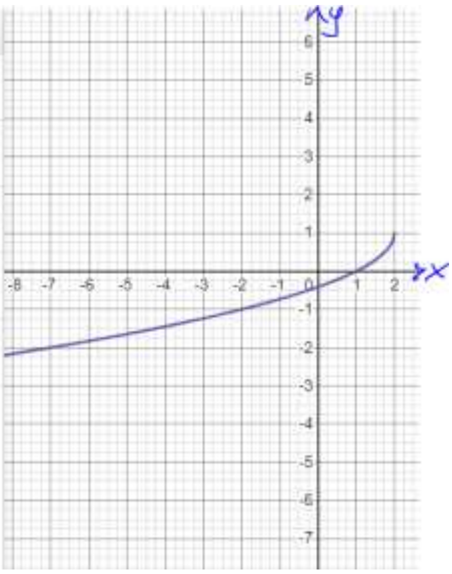
P3: $y = -(x+5)^2$

P4: $y = -(x+5)^2 + 2$



$y = \sqrt{x}$	Función raíz cuadrada
$y = \sqrt{x+2}$	T.h. de 2 unidades hacia la izquierda
$y = \sqrt{-x+2}$	Reflexión con el eje y
$y = -\sqrt{-x+2}$	Reflexión con le eje x
$y = -\sqrt{-x+2} + 1$	T.V. de una unidad hacia arriba.

$y = -\sqrt{-x+2} + 1$



EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

La regla de correspondencia de una función f es $f(x) = \sqrt{x}$, cuál será la regla de correspondencia si se le aplica una traslación horizontal de 3 unidades hacia la derecha, luego una reflexión respecto al eje x y finalmente una traslación vertical de 4 unidades hacia abajo.

$f(x) = -\sqrt{x-3} - 4$

EPE

ACTIVIDADES DE LA SEMANA 5

Inicio de TAREA 4, fecha de entrega: domingo 20 de junio

Control 3

ASESORÍA 4, clase programada con el AAD

CONTROL DE RECUPERACIÓN 3, se evalúa en la asesoría 4

CONSULTAS