MATEMÁTICA BÁSICA – CE82
SEMANA 1 – SP1

Temario: Ecuaciones**,** Intervalos e Inecuaciones Lineales

Logro: Al finalizar la sesión el alumno será capaz de resolver ecuaciones lineales y cuadráticas e inecuaciones lineales.

ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad de expresiones matemáticas, por ejemplo:

a) $3x+4=7x-20$ b) $x^2-7=6x$ c) $x+y=10$ d) $2^x=\operatorname{sen}(x)$

A las letras que figuran en las ecuaciones se les denomina variables y al valor o valores de dichas variables que convierte la ecuación en un enunciado verdadero se le llama solución o raíz de la ecuación. Al conjunto de todos estos valores se le llama conjunto solución.

Ejemplo:

A la ecuación $3x+4=7x-20$

se le denomina: ecuación lineal de una variable ¿Por qué? **Tiene la letra x, con exponente uno**.

su conjunto solución es: $CS=\{6\}$ ¿Por qué? **Cumple la igualdad, 3(6)+4=7(6)-20**

Ejercicios 1:

a) A la ecuación $x^2-7=6x$ se le denomina: **ecuación cuadrática de una variable** y su $CS=\{-1;7\}$

¿Por qué? **Cumple la igualdad**

b) A la ecuación $x+y=10$ se le denomina: **ecuación lineal de dos variables** y su CS=**{(10-t;t), t∈ R}**

ECUACIONES LINEALES DE UNA VARIABLE

Una ecuación lineal de una variable es una ecuación de la forma: $ax+b=0$

donde a y b son números reales y *x* es la variable.

Ejemplo:

Determine el conjunto solución en cada caso:

$a)\ 6(x-4)=3(x-1)-2(2x-3)+1$

$\mathbf{6x-24=3x-3-4x+6+1}$

$\mathbf{6x-24=-x+4}$

$\mathbf{7x=28}$

C.S.={ 4 }

$b)\ \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{2x+1}{6}+x$

$\mathbf{m.c.m.=12}$

$\mathbf{6(3x-1)-3(x+1)=2(2x+1)+12x}$

$\mathbf{18x-6-3x-3=4x+2+12x}$

$\mathbf{15x-9=16x+2}$

x=-11 **C.S.={-11}**

Ejercicios 2:

Determine el conjunto solución en cada caso:

$a)\ x(x-4)=3(x^2-2x)-2(x^2-3)+1$

$\mathbf{x^2-4x=3x^2-6x-2x^2+6+1}$

$\mathbf{x^2-4x=x^2-6x+7}$

$\boldsymbol{-4x+6x=7}$

$\boldsymbol{x=\frac{7}{2}}$

$\boldsymbol{C.S.=\left\{\frac{7}{2}\right\}}$

$b)\quad x-\frac{x+1}{4}=\frac{2x+1}{3}-\frac{x-4}{2}$

$\boldsymbol{m.c.m.=12}$

$\boldsymbol{12x-3(x+1)=4(2x+1)-6(x-4)}$

$\boldsymbol{9x-3=2x+28}$

$\boldsymbol{x=\frac{31}{7}}\qquad \boldsymbol{C.S.=\left\{\frac{31}{7}\right\}}$

ECUACIONES CUADRÁTICAS DE UNA VARIABLE

Una ecuación cuadrática o de segundo grado de una variable es una ecuación de la forma: $\mathrm{a}x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c}=0$

donde a, b *y* c son números reales y *x* es la variable.

El conjunto solución de estas ecuaciones se puede determinar de varias maneras:

a) Utilizando la siguiente fórmula: $x=\dfrac{-\mathrm{b}\pm\sqrt{\mathrm{b}^2-4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$

Ejemplo:

Determine el conjunto solución: $6x^2+x-15=0$

$\boldsymbol{x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(6).(-15)}}{2(6)}=\frac{-1\pm\sqrt{361}}{12}=\frac{-1\pm 19}{12}}$

$\boldsymbol{x_1=\frac{18}{12}=\frac{3}{2},\qquad x_2=\frac{-20}{12}=\frac{-5}{3}}$

$\boldsymbol{C.S.=\left\{\frac{-5}{3};\frac{3}{2}\right\}}$

b) Factorizando (aspa simple):

Ejemplo:

Determine el conjunto solución: $x^2+5x-24=0$

$\mathbf{(x+8).(x-3)=0}$

$\boldsymbol{x_1=-8\ ;\quad x_2=3}$

$\boldsymbol{C.S.=\{-8;3\}}$

Ejercicios 3:

Determine el conjunto solución en cada caso:

$a)\ (x-3)(x+5)=9$ $\qquad$ $C.S.=\{-6;4\}$

$b)\ x(x-5)=3(x^2-2x)+2(x^2-3)+1$ $\qquad$ $C.S.=\left\{-1;\frac{5}{4}\right\}$

Observación:

En este curso está permitido el uso de calculadoras para resolver ecuaciones.

Ejemplo:

Haciendo uso de la calculadora determine el conjunto solución en cada caso

a) $6x^2+x-15=0$ $\qquad$ $C.S.=\left\{\frac{-5}{3};\frac{3}{2}\right\}$

b) $x^2+5x-24=0$ $\qquad$ $C.S.=\{-6;4\}$

c) $x^2+2x+3=0$ $\qquad$ $C.S.=\{\ \ \}$

INTERVALOS

En primer lugar, se debe recordar algunos conceptos previos:

$a<b$ se lee "**a menor que b**" $\qquad$ $b>a$ se lee "**b mayor que a**"

Como puedes observar, lo mismo se puede leer de dos formas distintas, ya que si "a" es menor que "b" entonces es obvio que "b" es mayor que "a", lo cual nos recuerda que toda desigualdad, a < b, al igual que toda igualdad, en matemáticas se puede leer en dos sentidos, de izquierda a derecha, "a < b, a menor que b" o de derecha a izquierda, "b > a, b mayor que a".

Su representación en la recta numérica es:

Ejemplos:

¿Cómo se representa que 7 es menor que 10? **$7<10$**

¿Qué quiere decir: $x>3$? **x es mayor que 3**

¿Qué quiere decir: $x\le 5$? **x es menor o igual que 5**

¿Cómo representar a todos los números reales mayores que 3 y menores que 10? **$3<x<10$**

¿Qué quiere decir: $2\le x\le 8$? **Todos los números reales mayores o igual que 2 y menores o igual que 10**

Nota: $\quad a\le b$ se lee "**a menor o igual que b**" y si cambiamos el sentido de la lectura leeríamos

$b\ge a$, "**b mayor o igual que a**"

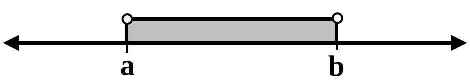
Se llama intervalo en la **recta real**, a todo subconjunto de esta comprendido entre dos puntos fijos llamados extremos.

CLASIFICACIÓN DE LOS INTERVALOS

INTERVALO ABIERTO: es aquel en el que los extremos no forman parte de este, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos forman parte del intervalo, salvo los propios extremos.

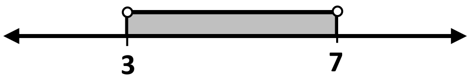
Representación de conjunto: $x\in\ ]a;b[\ =\ \{x\in R/a<x<b\}$

Representación gráfica:



Ejemplo:

$x \in]3;7[$ significa que ________________



Observa que los valores que puede tomar la variable "*x*" son mayores que 3 pero menores que 7.

Es decir, los valores que puede tomar *x* están entre **3 y 7**

INTERVALO CERRADO: es aquel en el que los extremos si forman parte de este, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluidos éstos, forman parte del intervalo.

Representación de conjunto: $x \in [a;b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$

Representación gráfica:

Ejemplo:

$x \in [2;8]$ significa que ______________

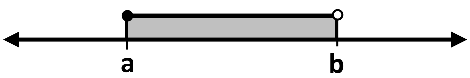
Observa que los valores que puede tomar la variable "*x*" son mayores o iguales que 2 pero menores o iguales que 8. Es decir, los valores que pueden tomar *x* son desde **2 hasta 8**

INTERVALO SEMIABIERTO: es aquel en el que sólo uno de los extremos forma parte de este.

Intervalo semiabierto por la derecha:

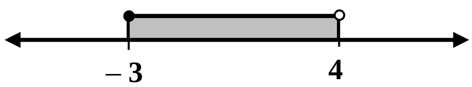
Representación de conjunto: $x \in [a;b[= \{x \in R / a \leq x < b\}$

Representación gráfica:



Ejemplo:

$x \in [-3;4[$ significa que _____________

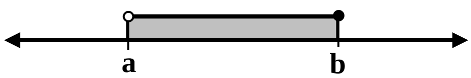


Observa que los valores que puede tomar la variable "*x*" son mayores o iguales que –3 pero menores que 4.

Intervalo semiabierto por la izquierda:

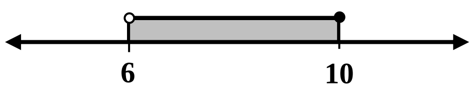
Representación de conjunto: $x \in]a;b] = \{x \in R / a < x \leq b\}$

Representación gráfica:



Ejemplo:

$x \in]6;10]$ significa que ______________

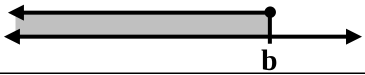
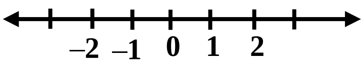


Observe que los valores que puede tomar la variable "*x*" son mayores que 6 pero menores o iguales que 10.

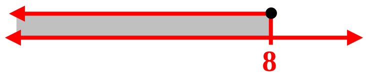
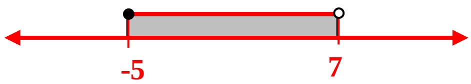
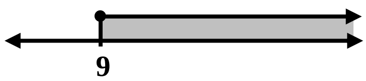
Ejercicio 4: Complete el cuadro adjunto

Intervalo	Desigualdad	Gráfico
$x \in [-7;9[$	$-7 \leq x < 9$	
$x \in]-2;11[$	$-2 < x < 11$	
$x \in [5;9[$	$5 \leq x < 9$	
$x \in]-5;8]$	$-5 < x \leq 8$	

INTERVALOS INFINITOS

Intervalo	Desigualdad	Gráfico
$x \in]-\infty;b]$	$x \leq b$	
$x \in]-\infty;b[$	$x < b$	
$x \in [a;+\infty[$	$x \geq a$	
$x \in]a;+\infty[$	$x > a$	
$x \in]-\infty;+\infty[$	$x \in R$	

Ejercicio 5: Complete el cuadro adjunto

Intervalo	Desigualdad	Gráfico
$x \in]-\infty;8]$	$x \leq 8$	
$x \in [-5;7[$	$-5 \leq x < 7$	
$x \in [9;+\infty[$	$x \geq 9$	
$x \in]\frac{2}{3};5[$	$\frac{2}{3} < x < 5$	
$x \in [6;+\infty[$	$x \geq 6$	
$x \in]-3;+\infty[$	$x > -3$	

A. ¿ Qué es un intervalo? **a todo subconjunto de esta comprendido entre dos puntos fijos llamados extremos.**

B. ¿Cuáles son los tipos de intervalos? **Abierto, cerrado y semiabiertos.**

C. ¿Si $x \in \left]2;5\right[$, es correcto afirmar que los valores de *x* van desde 2 hasta 5? **No**

D. Si los ingresos de una persona (*I*) no exceden los S/ 3500, ¿A qué intervalo pertenece *I*? $\left]-\infty;\mathbf{3500}\right]$

OPERACIONES CON INTERVALOS

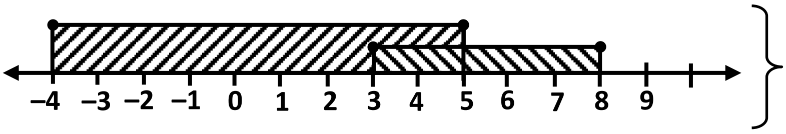
Siendo los intervalos un subconjunto de los números reales (IR), es posible realizar entre ellos operaciones como: Unión e Intersección.

UNIÓN DE INTERVALOS

La unión de dos intervalos A y B que se representa por $A \cup B$ está formado por todos los elementos de ambos intervalos.

Ejemplo: $A=[3;8]$ y $B=[-4;5]$ entonces $A \cup B$ se forma por todos los elementos de A y B

Lo recomendable para realizar la operación es graficar:



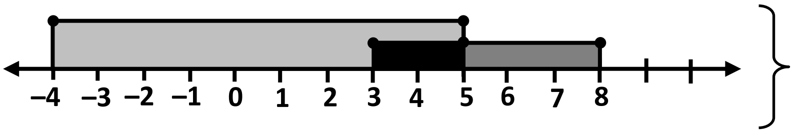
$A \cup B = [-4;8]$

INTERSECCIÓN DE INTERVALOS

La intersección de dos intervalos A y B que se representa por $A \cap B$ está formado por los elementos comunes de ambos intervalos.

Ejemplo: $A=[3;8]$ y $B=[-4;5]$ entonces $A \cap B$ se forma por todos los elementos de A y B

Lo recomendable para realizar la operación es graficar:



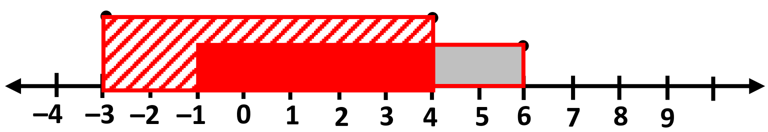
$A \cap B = [3;5]$

Ejercicio 6: Halle $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada caso

a) $A=[-1;6]$ y $B=[-3;4]$

$\mathbf{A \cup B = [-3;6]}$

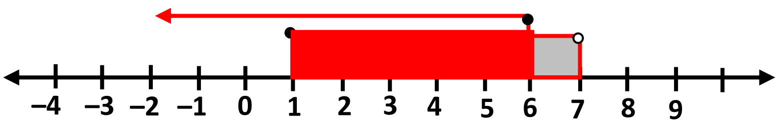
$\mathbf{A \cap B = [-1;4]}$



b) $A=\left]-\infty;6\right]$ y $B=\left[1;7\right[$

$\mathbf{A \cup B = \left]-\infty;7\right[}$

$\mathbf{A \cap B = [1;6]}$



DESIGUALDADES

Una desigualdad numérica es una comparación entre dos números a y b, utilizando los símbolos de: “>”, “mayor que”; “<” menor que”; “$\geq$”, “mayor o igual que”; “$\leq$”, “menor o igual que”.

Ejemplos: $3<9$; $-8>-5$; $6\leq 10$

Propiedades de las desigualdades

(1): Al intercambiar los miembros de una desigualdad, se modifica el sentido de la misma.

Ejemplo: $5<7 \Leftrightarrow 7>5$

(2) Al sumar o restar un mismo número a ambos miembros de una igualdad, esta no cambia de sentido.

Ejemplos: $5<7 \Rightarrow 5+8<7+8$

(3) Al multiplicar los dos miembros de una desigualdad por un mismo número positivo, se obtiene otra desigualdad que será de igual sentido. Ejemplo: $5<7 \Rightarrow 5(9)<7(9)$

(3) Al multiplicar los dos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo, se obtiene otra desigualdad que será de sentido opuesto. Ejemplo: $5<7 \Rightarrow 5(-10)>7(-10)$

INECUACIÓN

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas, llamadas miembros de la inecuación, que está condicionada a los valores numéricos que se asignen a las incógnitas.
Las soluciones de una inecuación son los valores de las incógnitas que hacen cierta la desigualdad.

Ejemplo: $x^2 - 4x < 6 + x$

Una solución es $x = 5$ ¿Por qué? **Cumple la desigualdad $5^2 - 4(5) < 6 + 5$**

¿Es $x = 7$ una solución? **No cumple la desigualdad: $7^2 - 4(7) > 6 + 7$**

¿Es $x = -2$ una solución? **No cumple la desigualdad: $(-2)^2 - 4(-2) > 6 - 2$**

Resolver una inecuación significa hallar los valores que deben tomar las incógnitas para que se cumpla la desigualdad.
Al conjunto de todos los valores que verifican la inecuación se le llama **conjunto solución** y puede expresarse de tres formas diferentes: en notación de intervalo, en notación de conjunto y en forma gráfica.

INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Una inecuación lineal con una incógnita es aquella que se puede transformar en otra equivalente que tenga una de las siguientes formas: $ax+b<0$; $ax+b>0$; $ax+b\leq 0$; $ax+b\geq 0$

El conjunto solución se determina despejando la variable, aplicando las propiedades de desigualdades.

Ejemplo:

a) Resuelva la inecuación: **$4x - 3 < 25$**

Sumando 3 a ambos miembros: $\mathbf{4x - 3 + 3 < 25 + 3}$

Dividiendo entre 4 a cada miembro: $\mathbf{\frac{4x}{4} < \frac{28}{4}}$

Gráfica: $\Big\}$ Conjunto solución: $]-\infty; 7[$

Ejercicio 7: Resuelva la inecuación: $\mathbf{4x - 3 \leq 10x - 21}$

Agrupando términos semejantes: $\mathbf{21 - 3 \leq 10x - 4x}$

Reduciendo términos semejantes: $\mathbf{18 \leq 6x}$

Dividiendo entre 6 a cada miembro: $\frac{18}{6} \leq \frac{6x}{6}$

Gráfica  $\Big\}$ Conjunto solución: $[3; +\infty[$

CIERRE DE CLASE

A. Escriba una inecuación cuyo conjunto solución sea $]2;+\infty[$ **5x-2>2x+4**

B. La ecuación $x-3=0$ y la inecuación $x-3\geq 0$ ¿tienen el mismo conjunto solución?

No, { 3 } ≠ [3; +∞[

C. Si $-4x\geq 8 \Rightarrow x\geq -2$ ¿es correcto? **No, x≤-2**

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Clasifique cada una de las siguientes ecuaciones:

$a)$ $3x-9=x+5$, **de una variable lineal**

$b)$ $3x-9=x^2+5$, **de una variable cuadrática**

$c)$ $x^2+y^2=9$, **de 2 variaables cuadrática**

2. Halle el conjunto solución en cada caso

$a)$ $\dfrac{x+3}{6}-x=\dfrac{x}{4}+3$, $C.S.=\left\{\frac{-30}{13}\right\}$

$b)$ $\dfrac{x-3}{2}-2x\geq\dfrac{x-1}{4}-1$, $C.S.=\left]-\infty;\frac{-1}{7}\right]$

$c)$ $(x+5)(x-1)=16$, $C.S.=\{-7;3\}$

$d)$ $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{4}=0$, $C.S.=\{\ \ \}$