EPE

CONTENIDO

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIONES SENOIDALES

• $y = \operatorname{sen} x$

• $y = \cos x$

9.1

EPE

LOGRO

AL TERMINAR LA CLASE EL ALUMNO SERÁ CAPAZ DE:

$\operatorname{sen} x = 1/2$

DEFINIR LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS INDICANDO SU DOMINIO, RANGO Y GRÁFICA

RESOLVER ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS INDICANDO SU CONJUNTO SOLUCIÓN

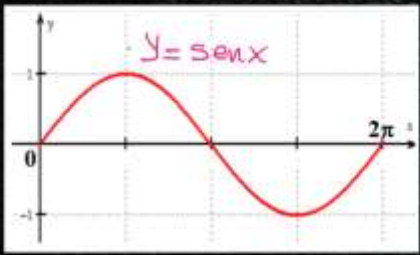
ANALIZAR LAS FUNCIONES SENOIDALES INDICANDO DOMINIO, RANGO, PERIODO Y GRÁFICA

$f(x) = A\operatorname{Sen}(bx + c) + D$

9.1

EPE

A qué función trigonométrica representa cada una de las siguientes curvas.

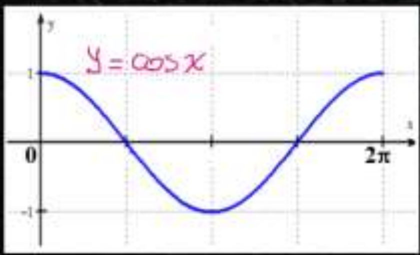


¿Cuál es el rango de la función $f(x) = \text{sen}(x)$?

$Ran(f) = [-1; 1]$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$T = 2\pi$

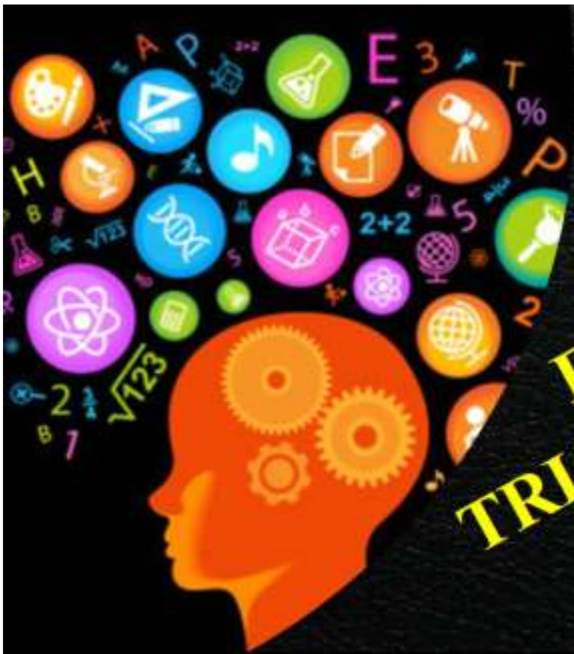


¿Cuál es el periodo de la función $f(x) = \cos(x)$?

$T = 2\pi$

$f(x) = \text{Sen}\,x$
$g(x) = \cos x$ no son inyectivas.

9.1



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

EPE

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

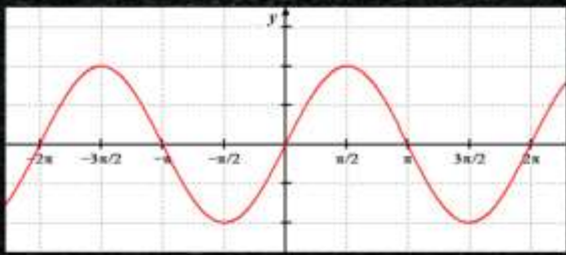
Para determinar si una función tiene inversa una condición fundamental es que debe ser INYECTIVA

Para probar que es inyectiva se trazan rectas horizontales y deben cortar a la curva solo en punto

¿Las funciones trigonométricas son inyectivas? NO

¿Tienen inversa? NO

Para que las funciones trigonométricas puedan tener inversa se restringe el dominio .



$y = \operatorname{Sen} x$ es inyectiva en $[-\pi/2 ; \pi/2]$

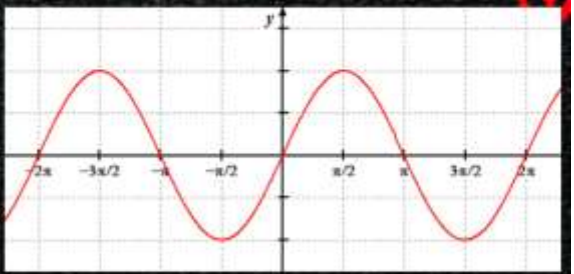
$\boxed{\operatorname{Dom}(f^{-1}) = \operatorname{Ran}(f)}$ $\boxed{\operatorname{Ran}(f^{-1}) = \operatorname{Dom}(f)}$

9.1

EPE

FUNCIÓN INVERSA DEL SENO

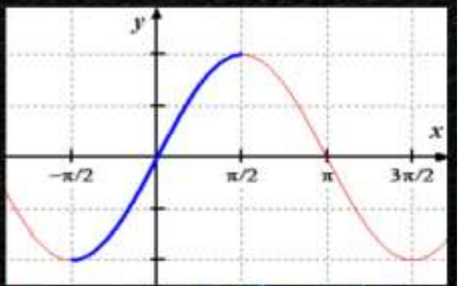
La función seno con regla de correspondencia $f(x) = \operatorname{sen} x$, por el criterio de la recta horizontal (CRH) observamos que no es inyectiva y por lo tanto no tiene inversa.



¿Qué se debe hacer para que tenga inversa?

RESTRINGIR SU DOMINIO

La función seno con regla de correspondencia $f(x) = \operatorname{sen} x$ es inyectiva en $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, por lo tanto, existe la función inversa.



FUNCIÓN SENO $y = f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$\operatorname{Dom}(\operatorname{sen} x) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ $\operatorname{Ran}(\operatorname{sen} x) = [-1;1]$

$f^{-1}(x) = \operatorname{Sen}^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x$

ojo $\operatorname{Sen}^{-1} x \neq \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

9.1

EPE

FUNCIÓN SENO INVERSA

$y = \text{sen}(x) \;\Rightarrow x = \text{sen}^{-1}(y)$

$\Rightarrow y = \text{sen}^{-1}(x)$

$\text{Dom}(\text{sen}^{-1}(x)) = [-1; 1]$

$\text{Ran}(\text{sen}^{-1}(x)) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Ejemplo: Despeje θ en cada caso

A) $\text{sen}\,\theta = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}7297 \text{ rad}$

B) $\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \theta = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right) = -0{,}2013 \text{ rad}$

Ejemplo: Halle el valor de cada una de las siguientes expresiones

A) $\text{sen}^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$ B) $\text{sen}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

C) $\text{sen}^{-1}(1/2) = \frac{\pi}{6}$ D) $\text{sen}^{-1}(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$

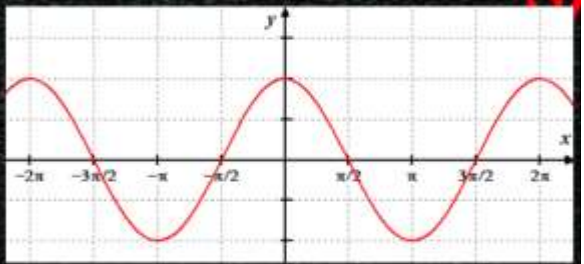
E) $\text{sen}^{-1}(2/3) = 0{,}7297 \text{ rad}$

9.1

EPE

FUNCIÓN INVERSA DEL COSENO

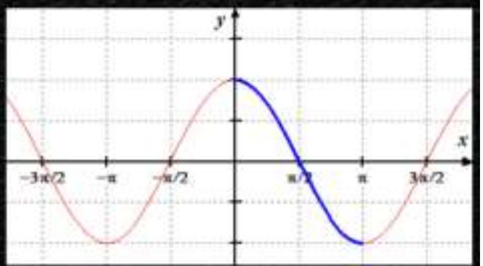
La función coseno con regla de correspondencia $f(x) = \cos x$, por el criterio de la recta horizontal (CRH) observamos que no es inyectiva y por lo tanto no tiene inversa.



¿Qué se debe hacer para que tenga inversa?

RESTRINGIR SU DOMINIO

La función coseno con regla de correspondencia $f(x) = \cos x$ es inyectiva en $[0; \pi]$, por lo tanto, existe la función inversa.



FUNCIÓN COSENO $y = f(x) = \cos(x)$

$\text{Dom}(\cos(x)) = [0; \pi]$ $\quad \text{Ran}(\cos(x)) = [-1; 1]$

$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x = \text{arccos}\,x$

9.1

EPE

FUNCIÓN COSENO INVERSA

$y = \cos(x) \ \Rightarrow x = \cos^{-1}(y)$

$\Rightarrow y = \cos^{-1}(x)$

$\mathrm{Dom}(\cos^{-1}(x)) = [-1; 1]$

$\mathrm{Ran}(\cos^{-1}(x)) = [0; \pi]$

Ejemplo: Despeje θ en cada caso

A) $\cos\theta = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0{,}8410 \text{ rad}$

B) $\cos\theta = -\dfrac{1}{5} \quad \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{5}\right) = 1{,}712.. \text{ rad}$

Ejemplo: Halle el valor de cada una de las siguientes expresiones

A) $\cos^{-1}(1) = 0$ B) $\cos^{-1}(-1) = \pi$

C) $\cos^{-1}(1/2) = \dfrac{\pi}{3}$ D) $\cos^{-1}(-1/2) = \dfrac{2\pi}{3}$

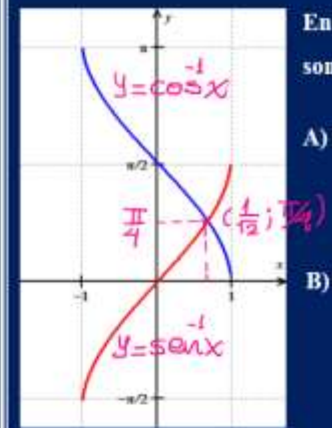
E) $\cos^{-1}(0) = \dfrac{\pi}{2} \ \hookrightarrow \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

$\cos^{-1}(1) = \theta \rightarrow \cos\theta = 1$

9.1

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE



En la figura adjunta se tiene las gráficas de las funciones f y g cuyas reglas son $f(x) = \sin^{-1} x$ y $g(x) = \cos^{-1} x$ respectivamente.

A) Identifique a qué función corresponde cada curva. ✓

B) Halle las coordenadas del punto de intersección.

$\operatorname{sen}^{-1} x = \cos^{-1} x \ \Rightarrow x = \dots ?$

$x = \dfrac{\pi}{4}$

9.1

EPE

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica es aquella ecuación donde la incógnita está afectada necesariamente por una función trigonométrica.

Por ejemplo: $\boxed{\operatorname{sen}(x) = 1/2,}$ $\boxed{\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1}$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS ELEMENTALES

Estudiamos los casos: $\operatorname{sen}(x) = a$ y $\cos(x) = a$

Los valores de x comprendidos en $[0; 2\pi[$ que cumplen con la igualdad se llaman soluciones básicas.

Cuando no indican el intervalo de solución entonces se halla lo que se conoce como conjunto solución que está formado todos los valores de x que cumplen con la igualdad y se obtiene sumando a cada una de las soluciones básicas $2\pi k$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

9.1

EPE

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS ELEMENTALES

Ejemplo:

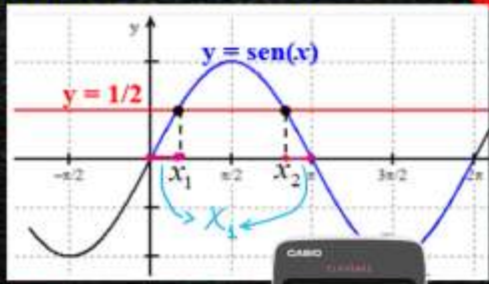
$0 \leq x \leq 2\pi$

Resuelva la ecuación $\text{sen}(x) = 1/2$ en $[0;2\pi]$

Observa que hay dos funciones:

$$\text{sen}(x) = 1/2$$

$f(x) =$ <u>sen(x)</u> $g(x) =$ <u>1/2</u>



$x_1 = \text{sen}^{-1}(1/2)$

$x_1 = \frac{\pi}{6}$

$x_2 = \pi - x_1$

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Graficamos ambas funciones en un mismo plano.

Las abscisas de los puntos de intersección son las soluciones de la ecuación en el intervalo dado.

$x_1 = \frac{\pi}{6}$ $x_2 = \frac{5\pi}{6}$

$CS = \left\{ \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}$

9.1

EPE

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS ELEMENTALES

Ejemplo:

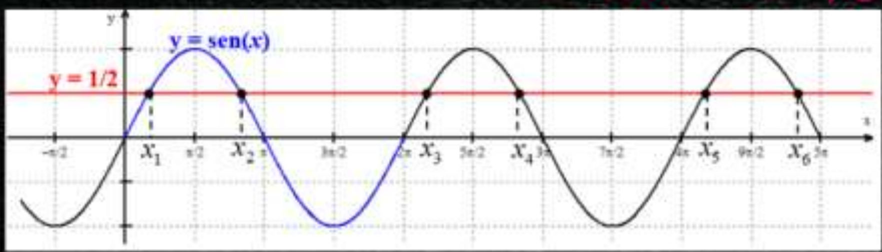
Resuelva la ecuación $\text{sen}(x) = 1/2$

$y = \text{sen}\,x$ $T = 2\pi$

$y = 1/2$

En este caso a diferencia del ejercicio anterior no hay un intervalo específico entonces lo que hay que hallar es el <u>conjunto solución</u>

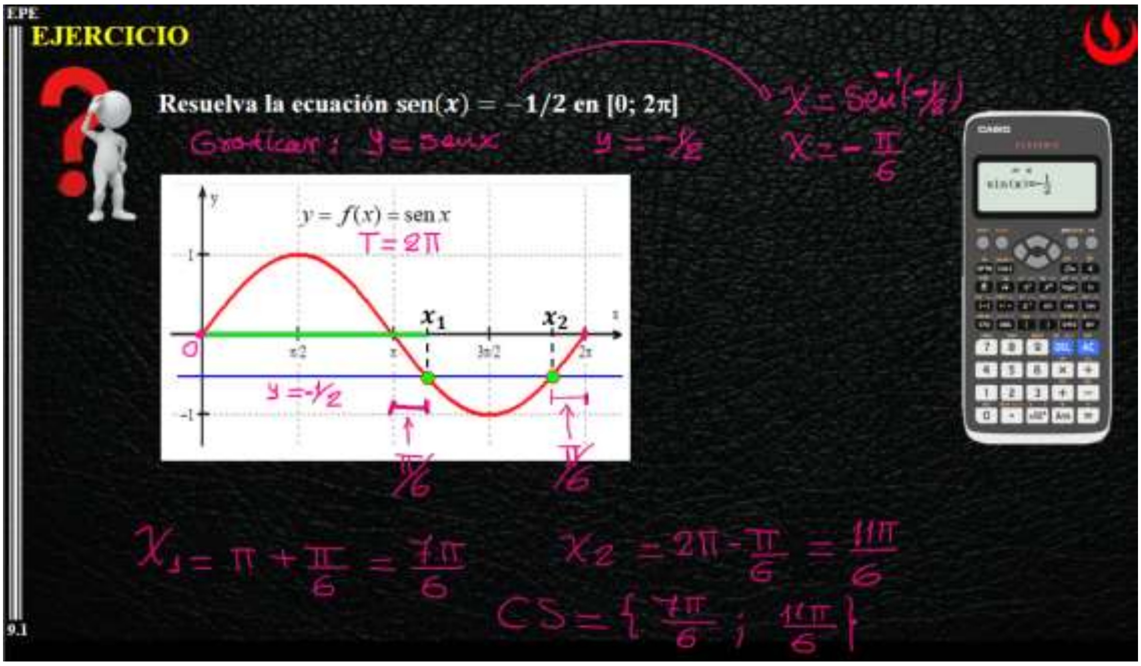
$x_1 = \pi/6$ $x_2 = 5\pi/6$

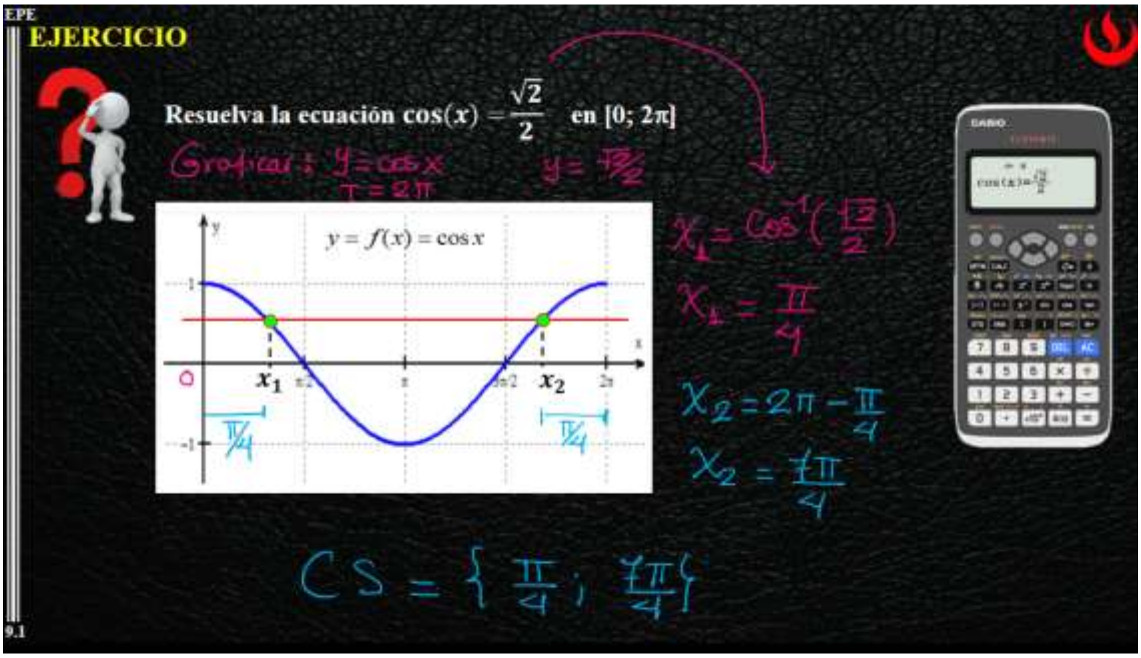


$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k ; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

TK   TK

9.1

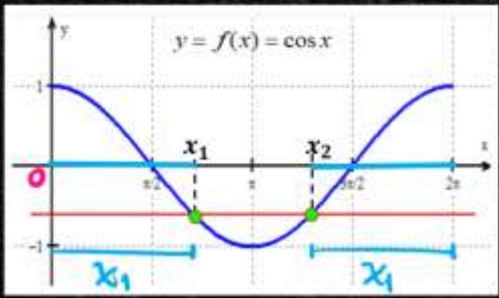

EPE
EJERCICIO
Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}(x) = -1/2$ en $[0; 2\pi]$
Graficar: $y = \operatorname{sen} x$ $y = -\frac{1}{2}$
$x = \operatorname{Sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$
$x = -\frac{\pi}{6}$
$y = f(x) = \operatorname{sen} x$
$T = 2\pi$
x_1 x_2
$y = -\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{6}$
$x_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$
$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$
$CS = \{\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\}$
9.1


EPE
EJERCICIO
Resuelva la ecuación $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $[0; 2\pi]$
Graficar: $y = \cos x$ $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$T = 2\pi$
$y = f(x) = \cos x$
x_1 x_2
$\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4}$
$x_1 = \operatorname{Cos}^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$
$x_1 = \frac{\pi}{4}$
$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4}$
$x_2 = \frac{7\pi}{4}$
$CS = \{\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\}$
9.1

EJERCICIO

Resuelva la ecuación $3\cos(x) + 2 = 0$ en $[0; 2\pi]$

$\cos x = -\frac{2}{3} \longrightarrow$ Graficar $y = \cos x$, $T = 2\pi$ $\quad y = -\frac{2}{3}$



$X_1 = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$

$X_1 = 2{,}301\ldots$ rad

$X_2 = 2\pi - X_1$

$X_2 = 2\pi - \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$

$X_2 = 3{,}983\ldots$ rad

$CS = \{2{,}30;\ 3{,}98\}$

$\boxed{3\cos x + 2 = 0 \longrightarrow CS = \{2{,}30 + 2\pi K;\ 3{,}98 + 2\pi K \ / K \in \mathbb{Z}\}}$

9.1

EJERCICIO

$0 \leq x < 2\pi$

Resuelva la ecuación en $[0;2\pi[$

$(2\cos x - 1)\sin x = 0$

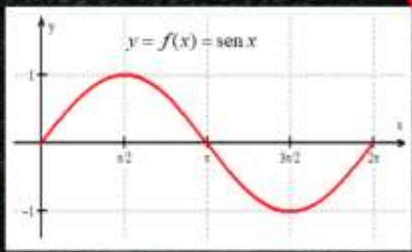
$\boxed{2\cos x - 1 = 0} \vee \boxed{\operatorname{sen} x = 0}$

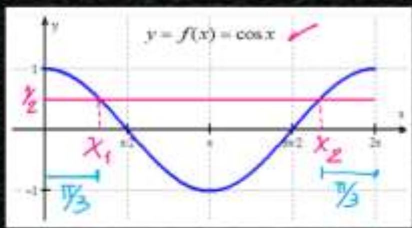
$\cos x = \frac{1}{2}$ $\qquad x = 0$, $x = \pi$

$X_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$X_1 = \frac{\pi}{3}$

$X_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$





$CS = \{0;\ \frac{\pi}{3};\ \pi;\ \frac{5\pi}{3}\}$

$a \cdot b = 0$

$a = 0 \vee b = 0$

9.1

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

Resuelva la ecuación: $2(\cos x)^2 - \cos x - 3 = 0$ en $[0; 2\pi[$

$(2\cos x - 3)(\cos x + 1) = 0 \;<\; \begin{matrix} \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -1 \checkmark \\ 2\cos x - 3 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{3}{2} \end{matrix}$

•) $\cos x = -1 \quad 0 \leq x < 2\pi$

$x = \pi$

•) $\cos x = \frac{3}{2}$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

ϕ

$CS = \{\pi\}$

9.1

EPE

FORMA GENERAL DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Una sinusoide se describe en forma analítica por medio de alguna de las siguientes ecuaciones generales:

$$f(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}(\mathrm{B}x + \mathrm{C}) + \mathrm{D} \qquad f(x) = \mathrm{A}\cos(\mathrm{B}x + \mathrm{C}) + \mathrm{D}$$

La ecuación de la función básica $f(x) = \mathrm{sen}\,x$ se diferencia de la ecuación general en la implementación de cuatro constantes: A, B, C y D.

Cada una de estas constantes presentes en la ecuación general implican la variación de alguno de los elementos de la sinusoide. En lo que sigue se analizará la variación de cada uno de estos elementos por separado.

Recordar

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO	PERIODO
$f(x) = \mathrm{sen}\,x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	2π
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$	2π

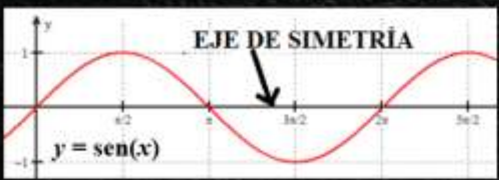
9.1

EPE

EJE DE SIMETRÍA

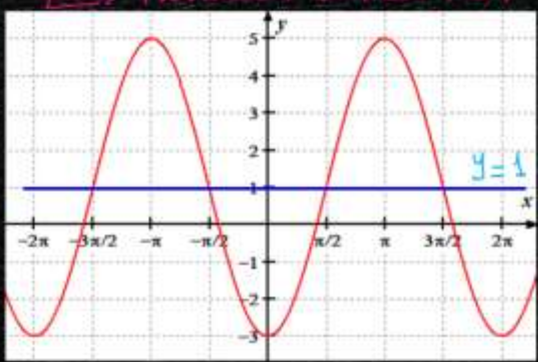
El eje de simetría es la recta horizontal que pasa por el punto medio de los extremos del rango.

En las funciones senoidales básicas, el eje de simetría es la recta $y = 0$.



En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función senoidal ¿cuál es la ecuación del eje de simetría?

→ Traslación Vertical (D)

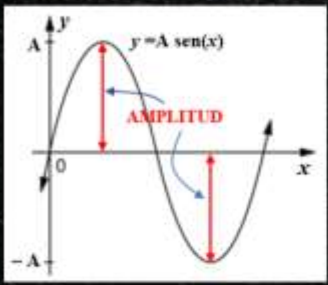


9.1

EPE

AMPLITUD (|A|)

Es la distancia vertical que existe entre el eje de simetría y el punto más alto o más bajo de la sinusoide.



Para las funciones

$f(x) = A\text{sen}(x)$

$f(x) = A\cos(x)$

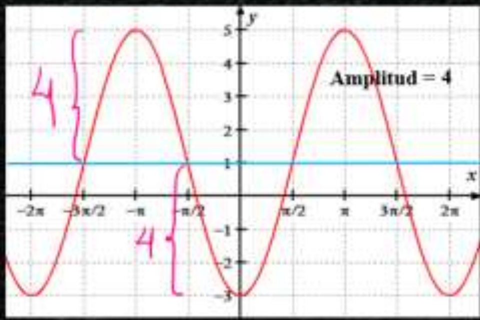
Amplitud = |A|

Ejemplos:

(I) Halle la amplitud en cada caso

a) $f(x) = 4\text{sen}(x) \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow |A| = |4|$

b) $g(x) = -7\text{sen}(x) \ldots\ldots\ldots \Rightarrow |A| = |-7| = 7$



9.1

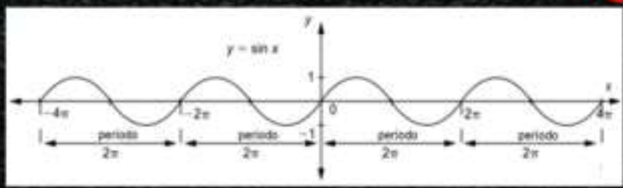
EPE

PERIODO (T)

Sabemos que el periodo de las funciones trigonométricas básicas

$f(x) = \text{sen}(x)$ o $f(x) = \cos(x)$

es $T = 2\pi$.

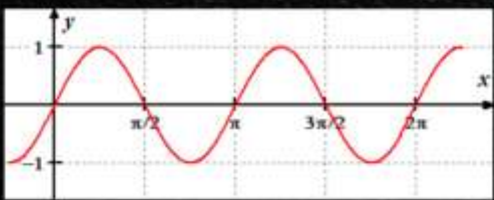


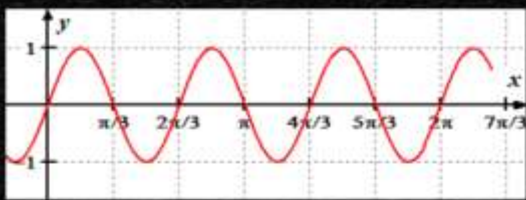
¿Qué pasa en funciones de la forma $f(x) = \text{sen}\, Bx$?

$T = \dfrac{2\pi}{|B|}$

$f(x) = \text{sen}(2x) \ldots\ldots T = \pi$

$f(x) = \text{sen}(3x) \ldots\ldots T = 2\pi/3$





9.1

PERIODO (T)

Para el caso de las funciones

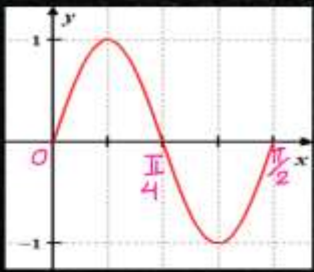
$f(x) = \text{sen}(Bx)$ o $f(x) = \cos(Bx)$, $B > 0$

$$\text{Periodo} = T = \frac{2\pi}{|B|}$$

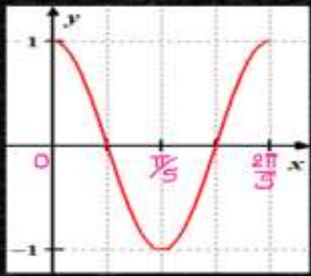
Ejemplos:

(I) Halle el periodo en cada caso

a) $f(x) = \text{sen}(4x)$ ...... $\Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$



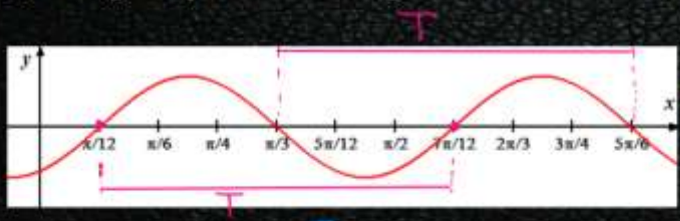
b) $g(x) = \cos(5x)$ ...... $\Rightarrow T = \frac{2\pi}{5}$



9.1

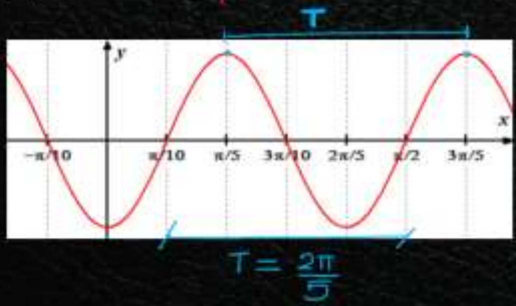
PERIODO (T)

(II) En la figura adjunta se muestra la gráfica de funciones senoidales, halle el periodo.



$$T = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12}$$

$$T = \frac{\pi}{2}$$



$$T = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$$

$$T = \frac{2\pi}{5}$$

$$T = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

9.1

EPE

TRASLACIÓN HORIZONTAL

$f(x) = \text{sen}(x - C)$

$f(x) = \cos(x - C)$

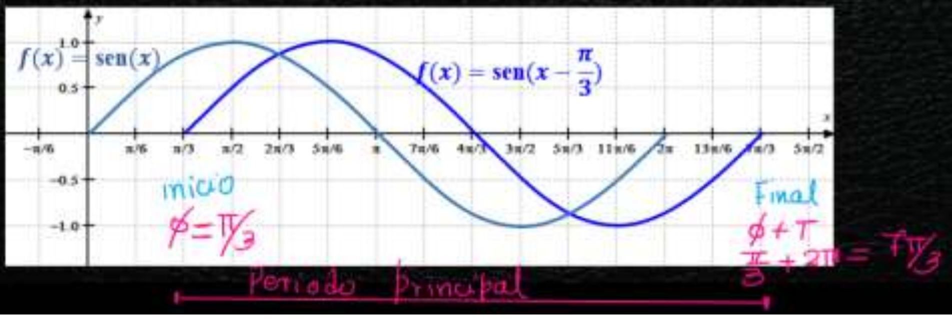
Las gráficas de estas funciones se obtienen mediante una traslación de $f(x) = \text{sen}(x)$ o $f(x) = \cos(x)$, C unidades hacia la derecha si $C > 0$ y C unidades a la izquierda si $C < 0$

Para el caso de las funciones trigonométricas al valor C se le llama desfase y se le representa por ϕ

Ejemplo: $f(x) = \text{sen}(x - \frac{\pi}{3})$

En este caso el desfase es: $\phi = \pi/3$ inicio $x - \frac{\pi}{3} = 0 \to x = \frac{\pi}{3}$

Significa que la función $y = \text{sen}(x)$ se desplaza $\pi/3$ **unidades a la derecha**



9.1

EPE

TRASLACIÓN HORIZONTAL

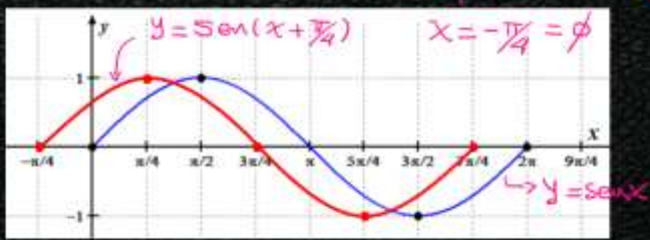
$x + \frac{\pi}{4} = 0$

Ejemplo:

$f(x) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{4})$

En este caso el desfase es: $\phi = -\pi/4$

Significa que la función $y = \text{sen}(x)$ se desplaza $\pi/4$ **unidades a la izquierda**



Una forma práctica de calcular el desfase es igualar el argumento a cero.

Ejemplos:

$f(x) = \text{sen}(x - \frac{\pi}{3})$ ⇒ $\phi = \frac{\pi}{3}$ **Hay un desplazamiento horizontal de $\pi/3$ unidades a la derecha.**

$f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$ ⇒ $\phi = -\frac{\pi}{6}$ **Hay un desplazamiento horizontal de $\pi/6$ unidades a la izquierda.**

9.1

EPE

TRASLACIÓN VERTICAL

$f(x) = \text{sen}(x) + \text{D}$

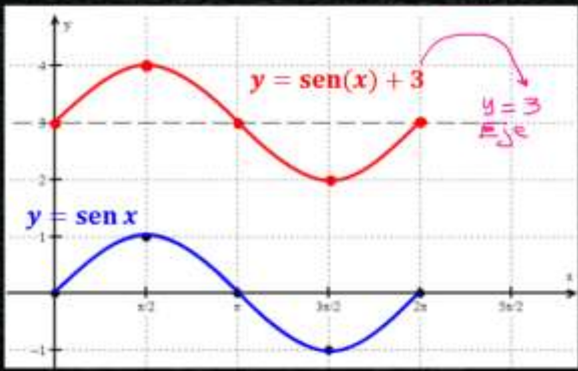
$f(x) = \cos(x) + \text{D},$

Las gráficas de estas funciones se obtienen mediante una traslación de $f(x) = \text{sen}(x)$ o $f(x) = \cos(x)$, según corresponda, D unidades hacia arriba si $\text{D} > 0$ y D unidades hacia abajo si $\text{D} < 0$.

Ejemplo:

$f(x) = \text{sen}(x) + 3\ ,\ x \in [0; 2\pi]$

En este caso la gráfica de f se obtiene desplazando la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ tres unidades hacia arriba.



9.1

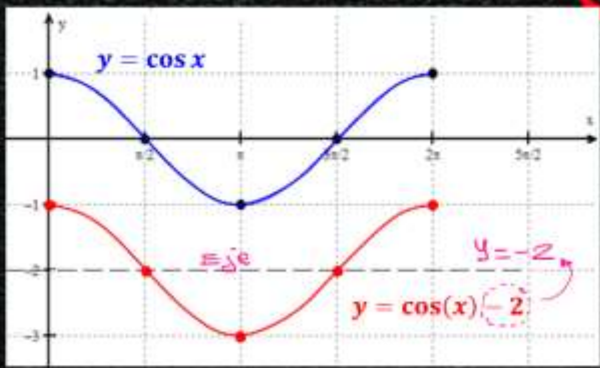
EPE

TRASLACIÓN VERTICAL

Ejemplo:

$f(x) = \cos(x) - 2\ ,\ x \in [0; 2\pi]$

En este caso la gráfica de f se obtiene desplazando la gráfica de la función $f(x) = \cos(x)$ dos unidades hacia abajo.



EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

Complete cada una de las tablas

$2x - \frac{\pi}{3} = 0$

$2x = \pi/3 \rightarrow x = \pi/6$

$\phi = \pi/6$

$f(x) = 3\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 4$
AMPLITUD = 3
PERIODO = $\frac{2\pi}{\lvert 2 \rvert} = \pi$
DESFASE = $\pi/6$
DESPLAZAMIENTO VERTICAL $D = 4$ Eje
EJE DE SIMETRÍA $y = 4$
RANGO = $[1 ; 7]$ ($4-3$, $4+3$)

$f(x) = -3\cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) - 6$
AMPLITUD = 3
PERIODO = $\frac{2\pi}{5}$
DESFASE = $-\pi/10$
DESPLAZAMIENTO VERTICAL $D = -6$ eje
EJE DE SIMETRÍA $y = -6$
RANGO = $[-9 ; -3]$

$\leftarrow 5x + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{10}$

9.1

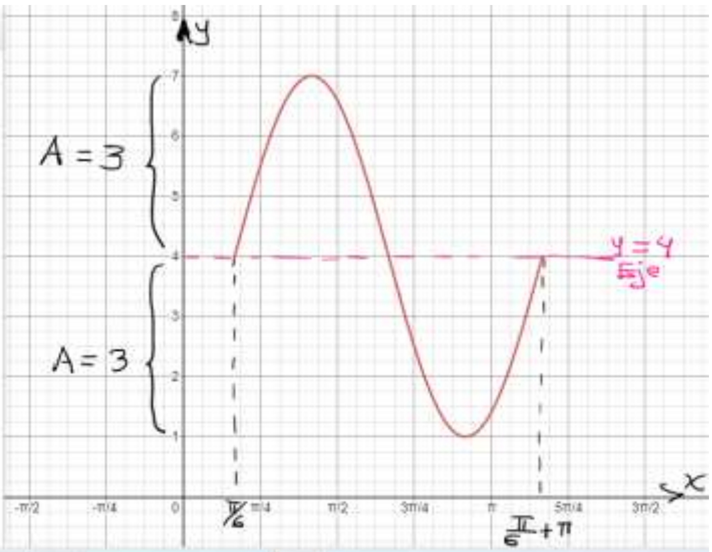
$y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 4 \left\{\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6} + \pi\right\}$

•) Eje $y = 4$

•) $2x - \frac{\pi}{3} = 0 \rightarrow \phi = x = \pi/6$

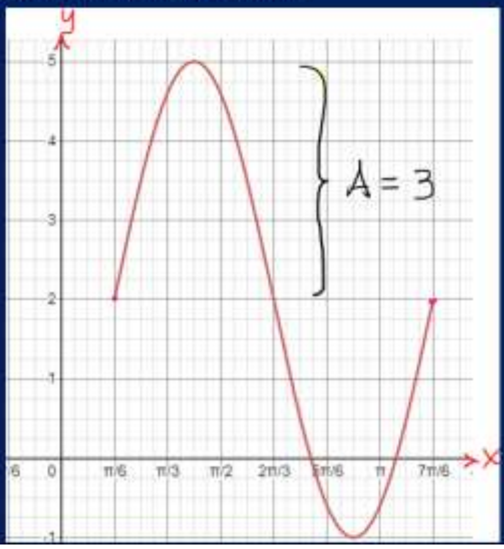
•) $T = \frac{2\pi}{\lvert 2 \rvert} = \pi$

desmos



CONTROL DE APRENDIZAJE

Complete cada una de las tablas



$f(x) = A\,\mathrm{Sen}(bx+c)+D$

•) $\underbrace{T = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}_{\text{Gráfico}} = \pi = \frac{2\pi}{b} \quad b = 2$

•) Eje : $y = 2 \rightarrow D = 2$

•) $2x + c = 0$

$\phi = x = -\frac{c}{2} = \frac{\pi}{6} \rightarrow -c = \frac{\pi}{3}$

$c = -\frac{\pi}{3}$

•) $A = 3$

$f(x) = 3\,\mathrm{Sen}(2x - \frac{\pi}{3}) + 2$