MATEMÁTICA BÁSICA – CE82
SEMANA 5 – SP2

Temario: Igualdad**,** Operaciones y composición de funciones, determinación de la regla de correspondencia, dominio y rango.

Logro de la sesión: Al término de la sesión el estudiante establece cuando dos funciones son iguales , realiza las diversas operaciones y la composición entre dos o más funciones logrando determinar la regla de correspondencia, dominio y rango así como aplicaciones a situaciones reales.

IGUALDAD DE FUNCIONES

Sean f y g dos funciones reales de variable real con dominios $Dom(f)$ y $Dom(g)$ respectivamente y con reglas de correspondencias $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente.

Las funciones f y g son iguales si se cumple:

- $\boldsymbol{Dom(f) = Dom(g)}$
- $\boldsymbol{f(x)=g(x)}$ para todo $\boldsymbol{x}$ del dominio

Ejemplos 1.

Determine en cada caso si la funciones f y g cuyas reglas son f(x) y g(x) respectivamente, son iguales.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$
$g(x)=x+1$

b) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$
$g(x)=\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}$

OPERACIONES CON FUNCIONES

Dadas las funciones f y g con dominios Dom$f$ y Dom$g$ respectivamente, tal que $\text{Dom}f\cap\text{Dom}g\neq\phi$ y con reglas de correspondencia $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, entonces las operaciones algebraicas de f y g están definidas mediante las siguientes reglas de correspondencia

SUMA Y RESTA DE FUNCIONES

Regla de correspondencia: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ y Dominio: $\text{Dom}(f+g)=\text{Dom}f\cap\text{Dom}g$

Regla de correspondencia: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ y Dominio: $\text{Dom}(f-g)=\text{Dom}f\cap\text{Dom}g$

Ejemplo: Dadas las funciones f y g cuyas reglas de correspondencia son $f(x)=x^2+1\ \wedge$ $g(x)=\sqrt{2x+1}$ respectivamente. Determine la regla de correspondencia para la función $f+g$.

Ejercicio 1: Dadas las funciones *f* y *g* cuyas reglas de correspondencia son $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$, respectivamente. Determine la regla de correspondencia para la función $f-g$.

PRODUCTO DE FUNCIONES

Regla de correspondencia: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ y Dominio: $\text{Dom}(f\cdot g)=\text{Dom}f\cap\text{Dom}g$

Ejemplo: Dadas las funciones f y g cuyas reglas de correspondencia son $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$, respectivamente. Determine la regla de correspondencia para la función $f\cdot g$.

Ejercicio 2: Dadas las funciones *f* y *g* cuyas reglas de correspondencia son $f(x)=x-1\,;x\in[-3;6]$, $g(x)=x+1\,;x\in[-1;8]$. Halle: $f\cdot g$.

DIVISIÓN DE FUNCIONES

Regla de correspondencia: $(\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Dominio: $\text{Dom}(\dfrac{f}{g})=\text{Dom}f\cap\text{Dom}g-\{x\,/\,g(x)=0\}$

Ejemplo: Dadas las funciones f y g cuyas reglas de correspondencia son $f(x)=x^2-4$, $g(x)=\sqrt{1-2x}$ respectivamente. Halle $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

Ejercicio 3: Dadas las funciones *f* y *g* cuyas reglas de correspondencia son $f(x)=x^2-4\,;x\in[-3;6]$, $g(x)=x^2+1\,;x\in\,]-1;7[$. Halle $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

La operación de aplicar sucesivamente dos o más funciones en un orden determinado da origen a otra función llamada composición de funciones.

Suponga que $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2+1$ a partir de estas dos funciones se puede definir una nueva función h como $h(x)=f(g(x))=f\left(x^2+1\right)=\sqrt{x^2+1}$

La función *h* está formada por las funciones *f* y *g* en una forma interesante: dado un número *x*, primero le aplicamos la función *g* y luego aplicamos *f* al resultado. En otras palabras, obtenemos la regla *h* al aplicar la regla *g* y luego la regla *f*.

La figura 1 muestra un diagrama de máquina para *h*.

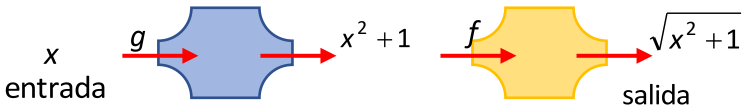
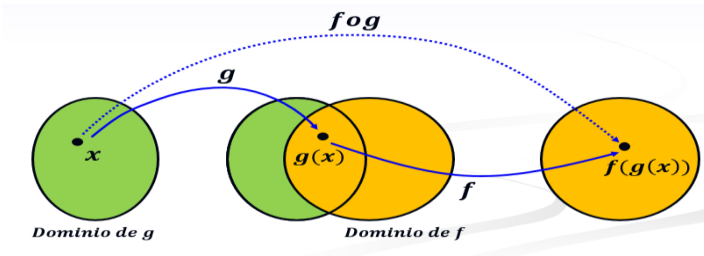


Figura 1. La máquina *h* está compuesta de la máquina *g* y luego por la máquina *f*.

DEFINICIÓN

Dadas las funciones *f* y *g*, tal que $\text{Dom}f \cap \text{Rang}\, g \neq \{\ \}$, la composición *f* de *g*, denotada $f\circ g$ se define mediante la siguiente regla de correspondencia

$$\left(f\circ g\right)(x)=f\left(g(x)\right)$$



DOMINIO DE LA COMPOSICIÓN

De la figura observa que el dominio de la composición está formado por todos los valores del dominio de *g* cuya imagen pertenece al dominio de *f*.

De manera formal: $\text{Dom}\left(f\circ g\right)=\left\{x\in R\,/\,x\in \text{Dom}g \ \wedge\ g(x)\in \text{Dom}f\right\}$

Ejemplo:

Dadas las funciones *f* y *g* con regla de correspondencia: $f(x)=2x+3\,;x\in\left[-7;5\right]$ y $g(x)=3x-4\,,x\in\left[0;5\right]$. Halle $f\circ g$ y $g\circ f$

Dominio de *f*: $f(x)=2x+3\ \Rightarrow$

Dominio de *g*: $g(x)=3x-4\Rightarrow$

Para determinar la composición $f\circ g$, primero se debe determinar el dominio, según la definición:

Parte I:

$$\text{Dom}\left(f\circ g\right)=\left\{x\in R\,/\,\underbrace{x\in \text{Dom}g}_{\textbf{Parte I}}\ \wedge\ \underbrace{g(x)\in \text{Dom}f}_{\textbf{Parte II}}\right\}$$

Parte II:

Dominio de la composición:

Ahora se debe intersectar los resultados de la parte I y la parte II:

Por lo tanto: $\mathrm{Dom}(f \circ g) =$

Regla de correspondencia: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$

Conclusión: $(f \circ g)(x) =$ ____________ ; $x \in$ _______

Ahora veamos el caso de $g \circ f$

Dominio de *f*: $f(x) = 2x + 3 \Rightarrow$

Dominio de *g*: $g(x) = 3x - 4 \Rightarrow$

Para determinar la composición $g \circ f$, primero se debe determinar el dominio, según la definición:

Parte I:

Parte II:

Dominio de la composición:

Ahora se debe intersectar los resultados de la parte I y la parte II:

Por lo tanto: $\mathrm{Dom}(g \circ f) =$

Regla de correspondencia: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$

Conclusión: $(g \circ f)(x) =$ ____________ ; $x \in$ _______

Ejercicio 1:

Dadas las funciones *f* y *g* con regla de correspondencia: $f(x) = \sqrt{x-4}$ y $g(x) = x^2$, $x \in [0;5]$.

Halle $f \circ g$ y $g \circ f$.

Respuesta: ___________________________________

CIERRE DE CLASE

A. En general ¿$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?.

B. Sean las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 4$, luego es cierto que ¿$(f \circ g)(x) = -4$?.

C. Se tiene que $f(x) = -3$ y $g(x) = x$, luego es cierto que ¿ $(f \circ g)(x) = -3x$?

D. Sean las funciones $f(x) = \sqrt{x-3}$ y $g(x) = \sqrt{3-x}$ entonces $(f+g)(x) = 0$

EJERCICIOS

Sean las funciones *f* y *g* con regla de correspondencia $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$.

Halle: a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$