
EPE
CONTENIDO
FUNCIÓN EXPONENCIAL $f(x) = b^x$
FUNCIÓN LOGARITMO $f(x) = \log_b x$
ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS
DOMINIO DE FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMO GENERALIZADAS
6.1


EPE
LOGRO
AL TERMINAR LA CLASE EL ALUMNO SERÁ CAPAZ DE:
DEFINIR Y ANALIZAR LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMO GRÁFICAS - DOMINIO Y RANGO
RESOLVER ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS DETERMINANDO EL CVA Y SU CONJUNTO SOLUCIÓN
HALLAR EL DOMINIO DE FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMO EN SU FORMA GENERAL
6.1

EPE

Dada la función f con regla de correspondencia $f(x) = (x-2)^2$, definida en el intervalo $[2; +\infty[$. Halle la regla de correspondencia de f^{-1} e indique su dominio y su rango. Esboce la gráfica.

$x \geq 2$

$x - 2 \geq 0$

f es inyectiva $\rightarrow$ existe f^{-1}

✓ $y = (x-2)^2$

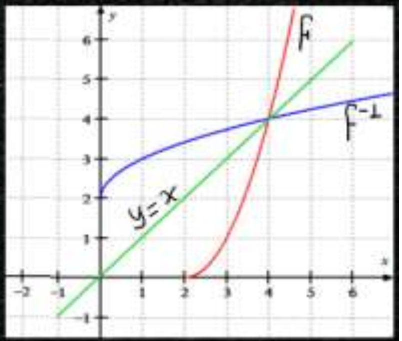
✓ $\pm\sqrt{y} = \underbrace{x-2}_{+}$

$+\sqrt{y} = x - 2$

$2 + \sqrt{y} = x$

✓ $2 + \sqrt{x} = y$

$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x}$



$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Ran}(f) = [0; +\infty[$

$\text{Ran}(f^{-1}) = \text{Dom}(f) = [2; +\infty[$

6.1

EPE

EVALUAR UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

$f(x) = -x^2 + 1$

$f(4) = -(4)^2 + 1 = -15$

HALLAR EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

$g(x) = \sqrt{x+1}$

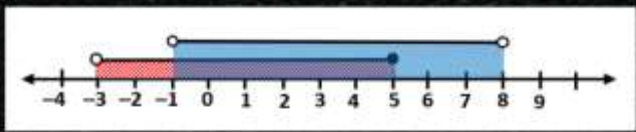
$\text{Dom } g = [-1; +\infty[$

Sabemos que $x + 1 \geq 0$

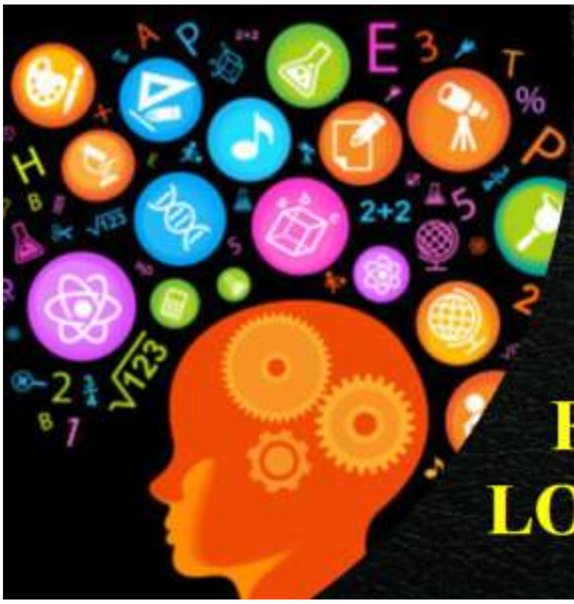
entonces $x \geq -1$

INTERSECCIÓN DE INTERVALOS

$]-3; 5] \cap]-1; 8[$



$]-3; 5] \cap]-1; 8[=]-1; 5]$



FUNCIÓN EXPONENCIAL

FUNCIÓN LOGARITMO

EPE

FUNCIÓN EXPONENCIAL

$y = f(x) = a^x$

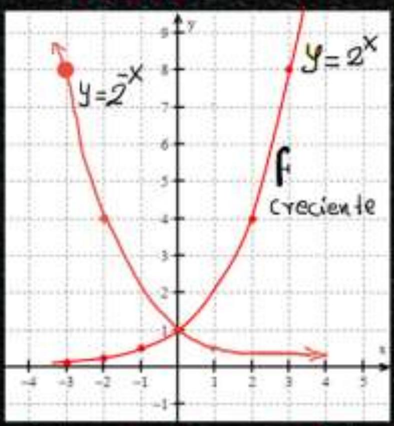
Toda función de la forma $\boxed{f(x) = b^x}$; donde b y x son números reales tal que b > 0 y diferente de uno, se denomina función exponencial, con base b.

$1 < b \neq 2$

Ejemplo:

$f(x) = 2^x$

x	$f(x)$
–3	0,125
–2	0,25
–1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8



$y \neq 0$ Asíntota horizontal: $y = 0$

$f(x) = 2^x$

$\boxed{y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$

Dom f = $\mathbb{R}$

Ran f = $]0; +\infty[$

Intersección con el eje x: no existe

Intersección con el eje y: $(0; 1)$

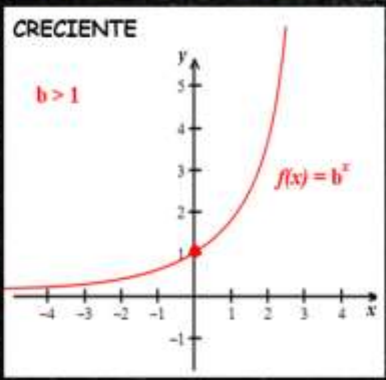
Monotonía: f es creciente en su dominio

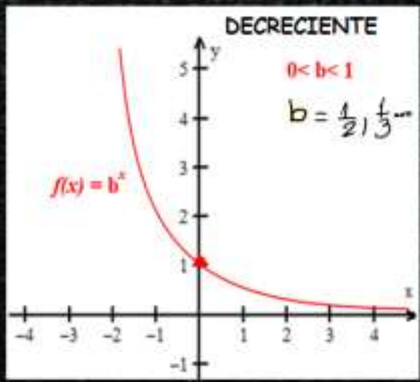
Asíntota: $y = 0$

6.1

EPE

FUNCIÓN EXPONENCIAL





✓ **DOMINIO: Dom f =** $\mathbb{R}$

RANGO: Ran f = $]0; +\infty[$

INTERSECCIÓN CON EL EJE X: No existe

INTERSECCIÓN CON EL EJE Y: $(0;1)$

✓ **ASÍNTOTA:** AH: $y=0$

6.1

EPE

FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Cualquier número no negativo se puede usar como base para una función exponencial. Sin embargo, uno de los más utilizados es el número irracional e (constante de Euler), cuyo valor aproximado a 14 decimales es e = 2,71828182845905.

La función exponencial natural es la función exponencial con base e.

$$\boxed{f(x) = e^x}$$

Dom$f$ = R **Ran$f$ =** $]0\,;+\infty[$

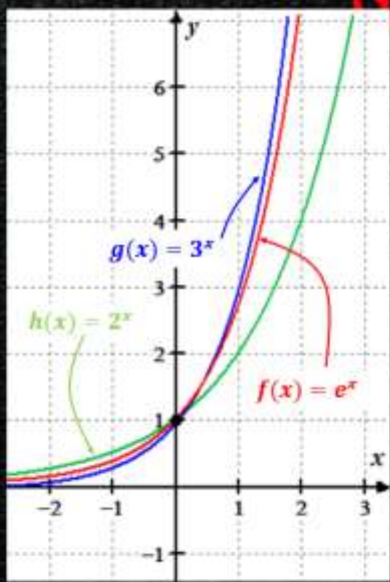
Asíntota: $y = 0$ **Monotonía: Creciente en** R

Intersección con el eje y: $(0\,;1)$

Intersección con el eje x: No tiene

$\hookrightarrow y = 0 \rightarrow 0 = e^x$

no tiene solución



6.1

EPE

FUNCIÓN LOGARITMO

Toda función de la forma $f(x) = \log_b x$; donde b y x son números reales tal que b > 0 y diferente de uno, se denomina función logaritmo con base b, y se cumple que:

$$\boxed{\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x}$$

$\log_2 x = 3 \rightarrow x = 2^3$

En consecuencia,

$\log_b x$ es el __número__ al cual hay que elevar la base _b_ para obtener _x_.

Ejemplos: $8 = 2^3$ ✓ $9 = 3^2$ ✓

$\log_2 8 = 3$ … ¿Por qué? $2^3 = 8$ $\log_3 9 = 2$ … ¿Por qué? $3^2 = 9$

Halle (sin calculadora) cada uno de los siguientes logaritmos:

$\log_4 16 = 2$ $\log_3 27 = 3$

$\log_{10} 1\,000 = 3$ $\log_5 5 = 1$

$\hookrightarrow \log_{10} 10^3 = 3 \log_{10} 10 = 3$

$\left\{ \begin{array}{l} \log_b b = 1 \quad \log_b 1 = 0 \\ \log_b A^n = n \log_b A \end{array} \right.$

6.1

EPE

FUNCIÓN LOGARITMO

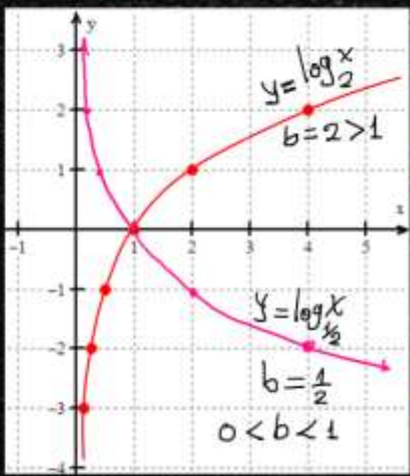
$f(x) = \log_2 x \rightarrow f^{-1}(x) = 2^x$

Ejemplo:

$f(x) = \log_2 x$

$b = 2 > 1$

x	$f(x)$
0,125	-3
0,25	-2
0,5	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



$f(x) = \log_2 x$ $x > 0$

Dom f = $]0; +\infty[$

✓ Ran f = $\mathbb{R}$

Intersección con el eje x: $(1; 0)$

Intersección con el eje y: No existe

Monotonía: f es creciente en $]0; +\infty[$

✓ Asíntota: AV: $x = 0$

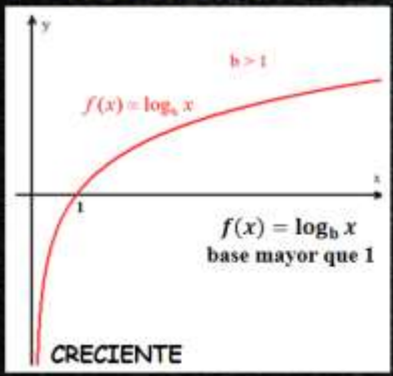
$x = 0$

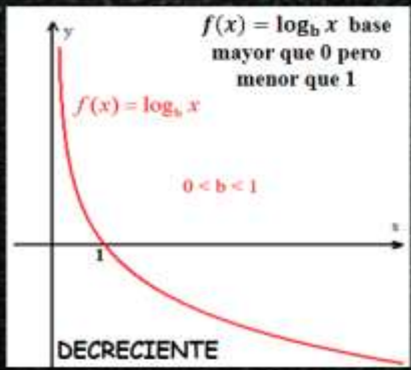
$y = \log_2 0$ ∄

6.1

EPE

FUNCIÓN LOGARITMO





DOMINIO: Dom $f =$ $]0\,;\,+\infty[$

RANGO: Ran $f =$ **R**

INTERSECCIÓN CON EL EJE X: (1 ; 0)

INTERSECCIÓN CON EL EJE Y: No tiene

ASÍNTOTA: $x = 0$

6.1

EPE

LOGARITMO COMÚN Y LOGARITMO NATURAL

$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$

$\rightarrow b = 10$ $\quad$ $\rightarrow b = e$

La función logaritmo con base 10 se llama logaritmo común. $\Rightarrow$ $f(x) = \log x$

$y = \operatorname{Log}_{10} 20 = \log 20$

$y = \log_e 20 = \operatorname{Ln} 20$

Ejemplos:

$x = 10^2$ $\quad$ $x = 10^{-3} = \frac{1}{10^3}$

$\log x = 2 \Rightarrow x = 100$ $\qquad$ $\log x = -3 \Rightarrow x = 0{,}001$ ✓ $\qquad$ $\log x = a \Leftrightarrow x = 10^a$

La función logaritmo con base e se llama logaritmo natural. $\Rightarrow$ $f(x) = \ln x$

Ejemplos:

$\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 = 7,389\ldots$ $\qquad$ $\ln x = -3 \Rightarrow x = e^{-3} = 0,0497\ldots$ $\qquad$ $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$

$\operatorname{Log}_3(x-2) = 5 \rightarrow x - 2 = 3^5$

$x =$

$\operatorname{Log}_5(x+1) = 2 \rightarrow x + 1 = 5^2$

$x =$

6.1

EPE

EJERCICIO

Recordar: $y = \log_{10} x = \log x$

$y = \log_e x = \ln x$

Complete el cuadro adjunto:

$\log_b x = a \Rightarrow x = b^a$	$\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 3^2 = 9$	$\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$
$b^x = a \Rightarrow x = \log_b a$	$5^x = 7 \Rightarrow x = \log_5 7$	$e^x = 9 \Rightarrow x = \log_e 9 = \ln 9$
$\log_4 x = 3 \Rightarrow x = 4^3 = 64$	$\log_7 x = -2 \Rightarrow x = 7^{-2}$	$\ln x = 8 \Rightarrow x = e^8$
$8^x = 4 \Rightarrow x = \log_8 4$	$3^x = 6 \Rightarrow x = \log_3 6$	$e^x = 2 \Rightarrow x = \log_e 2 = \ln 2$

6.1

EPE

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

PROPIEDAD 1: $\log_b(m) + \log_b(n) = \log_b(m \cdot n)$

a) $\log_7 4 + \log_7 8 = \log_7(8 . 4) = \log_7(32)$

b) $\log_3 21 = \log_3(7 \cdot 3) = \log_3 7 + \log_3 3$

PROPIEDAD 2: $\log_b(m) - \log_b(n) = \log_b\left(\frac{m}{n}\right)$

a) $\log_7 4 - \log_7 8 = \log_7(\frac{4}{8}) = \log_7(\frac{1}{2})$

b) $\log_2(\frac{8}{9}) = \log_2 8 - \log_2 9$

6.1

EPE

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

PROPIEDAD 3: $\log_b(m)^k = k\log_b(m)$

a) $\log_3(x)^5 = 5\log_3(x)$

b) $9\log_4(x) = \log_4(x)^9$

LOGARITMOS USUALES

$\log_b b = 1$

$\log_b 1 = 0$

a) $\log_4 4 = 1$

b) $\log 10 = 1$

c) $\ln e = 1$

d) $\log_5 5 = 1$

e) $\ln 1 = 0$

6.1

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

De las proposiciones que se indican determine cuáles son correctas o incorrectas.

A) La función $f(x) = 3^{-x}$ es creciente. F $\quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

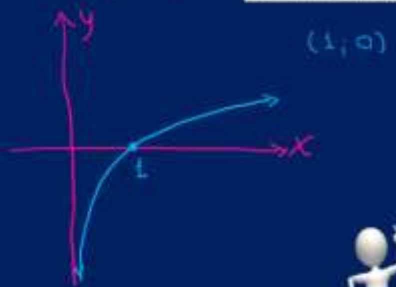
B) La función $f(x) = \ln(x)$ es negativa en $]-\infty; 1[$ F $\quad 0 < b = \frac{1}{3} < 1$

C) Si $2^x = 3$ entonces $x = \log_3 2$ F

↳ $x = \log_2 3$

D) Si $\log_4 x = 0,5$ entonces $x = 2$ V

$x = 4^{0,5} = 4^{1/2} = 2$



ECUACIONES EXPONENCIALES LOGARÍTMICAS

EPE

CONJUNTO DE VALORES ADMISIBLES (CVA)

→ ECUACIÓN

Conjunto de valores admisibles, son aquellos valores para los cuales una expresión matemática está definida.

$\sqrt{x+3}$ existe $x+3\geq 0$

Ejemplos:

A) $\sqrt{x+3}=2 \rightarrow$ **CVA =** $x+3\geq 0$ $\quad x\geq -3$ $\qquad$ CVA = $[-3\,;+\infty[$

B) $\sqrt{x+3}=\log x \rightarrow$ **CVA =** $x+3\geq 0 \ \wedge \ x>0$

$x\geq -3$ $\qquad$ CVA = $]0\,;+\infty[$ ✓

-3 $\quad 0$

C) $\log_2 x=\log(x-4) \rightarrow$ **CVA =** $x>0 \ \wedge \ x-4>0$

$x>4$ $\qquad$ CVA = $]4\,;+\infty[$

$x>0$ $\quad$ $x-4>0$

$x>4$

0 $\quad 4$

6.1

EPE

ECUACIONES EXPONENCIALES

$\log_b x = y \longleftrightarrow x = b^y$

Son igualdades de la forma: $b^{f(x)} = N$, donde x es la variable. El conjunto solución está determinado por los valores que verifican la igualdad y pertenecen al CVA.

Para resolver se aplica la definición de logaritmo: $f(x) = \log_b N$

- $\sqrt[\text{par}]{a} \rightarrow a \geq 0$
- $\frac{1}{a} \rightarrow a \neq 0$
- $\log_b a \rightarrow a > 0$

Ejemplo:

Resuelva la ecuación $3^{x+1} - 4 = 0$ CVA = R

$3^{x+1} = 4$

Aplicando la definición: $x + 1 = \log_3(4)$

$x = \log_3(4) - 1$

$x = 0,261859\ldots$ $CS = \{0,262\}$

1) $3^x = 5 \rightarrow x = \log_3 5$ 2) $2^x = 7 \rightarrow x = \log_2 7$

6.1

EPE

EJERCICIO

Resuelva las siguientes ecuaciones

$5^{3x-2} + 3 = 9$

$CVA = \mathbb{R}$

$5^{3x-2} = 6$

$3x - 2 = \log_5 6$

$3x = \log_5 6 + 2 \rightarrow x = \dfrac{\log_5 6 + 2}{3}$

$x = 1,03776\ldots$

$CS = \{1,04\}$

$e^{\frac{x+1}{2}} - 3 = 2$

$CVA = \mathbb{R}$

$e^{\frac{x+1}{2}} = 5 \rightarrow \frac{x+1}{2} = \ln 5$

$x + 1 = 2\ln 5 = \ln 5^2$

$x = 2\ln 5 - 1 = 2,218\ldots$

$CS = \{2,22\}$

6.1

EPE

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Son igualdades de la forma: $\log_b f(x) = N$, donde x es la variable. El conjunto solución está determinado por los valores que verifican la igualdad y pertenecen al CVA.

Para resolver se aplica la definición de logaritmo: $f(x) = b^N$

$-3/2$

Ejemplo:

Resuelva la ecuación $\log_2(2x+3) - 5 = 0$ $\quad 2x+3>0 \quad x > \frac{-3}{2} \quad CVA = \left]\frac{-3}{2}; +\infty\right[$

$$\log_2(2x+3) = 5$$

Aplicando la definición: $2x + 3 = 2^5$ $\quad$ ojo $14{,}5 \in CVA$

$$2x = 29$$

$$x = \frac{29}{2} \qquad CS = \{14,5\}$$

EPE

EJERCICIO

$\rightarrow$ CVA $\quad$ función $\rightarrow$ Dominio

Resuelva las siguientes ecuaciones

$3 + \log_3(2x - 5) = 5$

$2x-5>0$

$2x>5 \rightarrow x>2{,}5$

$CVA =]2{,}5; +\infty[$

$\log_3(2x-5) = 2 \rightarrow 2x-5 = 3^2$

$2x = 9+5$

$x = 7$

$7 \in CVA$

$CS = \{7\}$

$6 + 5\ln(4x - 3) = 2$

$4x-3>0 \rightarrow 4x>3$

$x > \frac{3}{4} = 0{,}75$

$CVA =]0{,}75; +\infty[$

$5\ln(4x-3) = -4$

$\ln(4x-3) = -\frac{4}{5} = -0{,}8$

$4x-3 = e^{-0{,}8} \rightarrow 4x = e^{-0{,}8}+3$

$x = \frac{e^{-0{,}8}+3}{4} = 0{,}86233\ldots$

$CS = \{0{,}86\} \quad 0{,}86 \in CVA$

6.1

EPE

EJERCICIO

$a \cdot b = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0$

Halle el conjunto solución de: $(4 - 3^x)(2^x + 3) = 0$

$CVA = \mathbb{R}$

$4 - 3^x = 0 \quad \vee \quad 2^x + 3 = 0$

$4 = 3^x \qquad\qquad 2^x = -3 \qquad\qquad *) \ -3^x = -4$

$\log_3 4 = x \qquad\qquad x = \underbrace{\log_2(-3)}_{\text{No existe}} \qquad\qquad 3^x = 4$

$x = 1{,}262\ldots \qquad\qquad \phi$

$CS = \{\log_3 4\} = \{1{,}26\}$

EPE

EJERCICIO

$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$

Halle el conjunto solución de: $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

$CVA = \mathbb{R}$

$e^x \quad -3 \rightarrow -3e^x$

$e^x \quad +2 \rightarrow 2e^x$

$\qquad\qquad\qquad -e^x$

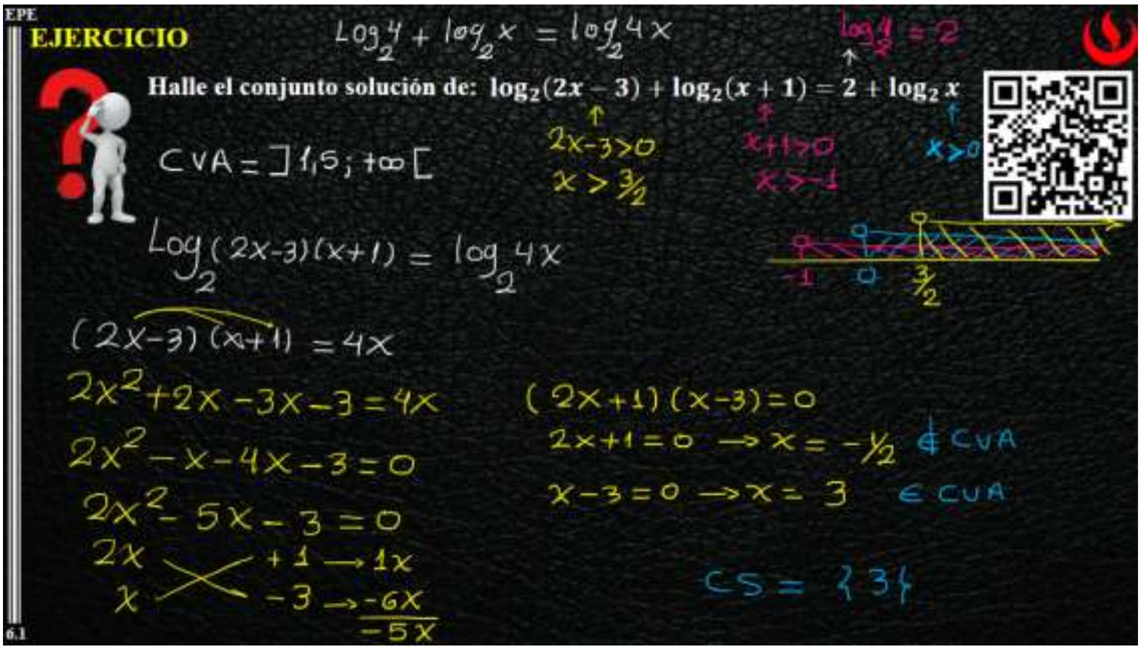
$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0$

$e^x - 3 = 0 \quad \vee \quad e^x + 2 = 0$

$e^x = 3 \qquad\qquad e^x = -2$

$x = \ln 3 \qquad\qquad x = \ln(-2)$ no existe

$CS = \{\ln 3\}$


EPE
EJERCICIO
$\log_2 4 + \log_2 x = \log_2 4x$
$\log_2 4 = 2$
Halle el conjunto solución de: $\log_2(2x-3)+\log_2(x+1)=2+\log_2 x$
$2x-3>0$
$x>\frac{3}{2}$
$x+1>0$
$x>-1$
$x>0$
$CVA =]1,5;+\infty[$
-1 0 $\frac{3}{2}$
$\log_2 (2x-3)(x+1) = \log_2 4x$
$(2x-3)(x+1)=4x$
$2x^2+2x-3x-3=4x$
$2x^2-x-4x-3=0$
$2x^2-5x-3=0$
$2x \quad +1 \rightarrow 1x$
$x \quad -3 \rightarrow -6x$
$-5x$
$(2x+1)(x-3)=0$
$2x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2} \notin CVA$
$x-3=0 \rightarrow x=3 \in CVA$
$CS=\{3\}$
6.1


DOMINIO
DE FUNCIONES
EXPONENCIALES
Y
LOGARÍTMICAS

DOMINIO DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO
$f(x)=b^x$	R	$]0\,;+\infty[$
$f(x)=\log_b x$	$]0\,;+\infty[$	R

Ejemplos: Halle el dominio en cada uno de los siguientes casos

$f(x)=\log_2(4x-12)$

$4x-12>0$

$4x>12$

$x>3$

Dom $f(x)=\,]3;+\infty[$

$4x-12=0$

$4x=12$

$x=3$

Asíntota Vertical: $x=3$

$g(x)=2^{x-4}+3$

Dom $g(x)=R$

Asíntota horizontal: $y=+3$

6.1

DOMINIO DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ejemplos: Halle el dominio en cada uno de los siguientes casos

$f(x)=\ln(3-2x)$

$3-2x>0$

$3>2x$

$\frac{3}{2}>x$ x es menor a $3/2$

Dom $f(x)=\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$

$g(x)=\dfrac{5}{2^x-8}$

$2^x-8\neq 0$

$2^x\neq 8 \rightarrow 2^x\neq 2^3$

$x\neq 3 \qquad x\neq \log_2 8=3$

Dom $g(x)=R-\{3\}$

EPE

EJERCICIO

Halle el dominio en cada uno de los siguientes casos

a) $f(x) = \log_3(4x-6)$

$4x-6>0$

$4x>6$

$x>\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$

$Dom(f) = \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

b) $g(x) = \ln(9-x) + \ln(x-2)$

$9-x>0 \qquad x-2>0$

$9>x \qquad x>2$

$2 \qquad 9$

$Dom(g) = \left]2;9\right[$

Menor

6.1

EPE

EJERCICIO

PC2

Halle el dominio en cada uno de los siguientes casos

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x}}{\log_2 x - 3}$

Ojo $\log_2 x - 3 \neq \log_2(x-3)$

•) $9-x \geq 0$

$9 \geq x$

•) $x>0$

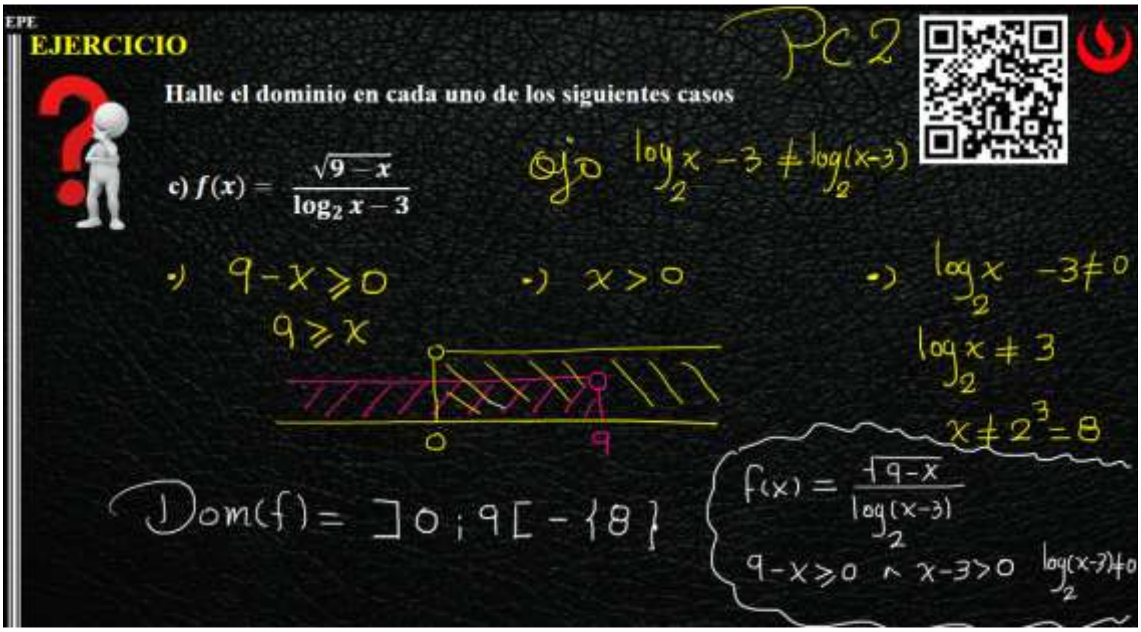
•) $\log_2 x - 3 \neq 0$

$\log_2 x \neq 3$

$x \neq 2^3 = 8$

$0 \qquad 9$

$Dom(f) = \left]0;9\right[- \{8\}$


EPE
EJERCICIO
PC2
Halle el dominio en cada uno de los siguientes casos
c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x}}{\log_2 x - 3}$
ojo $\log_2 x - 3 \neq \log_2(x-3)$
•) $9 - x \geq 0$
$9 \geq x$
•) $x > 0$
•) $\log_2 x - 3 \neq 0$
$\log_2 x \neq 3$
$x \neq 2^3 = 8$
0
9
$Dom(f) =]0;9[- \{8\}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x}}{\log_2(x-3)}$
$9 - x \geq 0 \wedge x - 3 > 0 \quad \log_2(x-3) \neq 0$


EPE
CONTROL DE APRENDIZAJE
Determine cuáles son proposiciones correctas
A) El dominio de la función $f(x) = \log_3(x-6)$ es $[6;\infty[$
$x - 6 > 0$
$x > 6$
F
B) El dominio de la función $g(x) = e^x$ es $]-\infty;+\infty[$ $= \mathbb{R}$ V
C) La base de la función $g(x) = 2^{-x}$ es 2. F $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
base
D) El conjunto solución de la ecuación $3^x = 5$ es $\{\log_3 5\}$ V
E) El conjunto solución de la ecuación $\log_4(2x-3) = 0$ es $\{2\}$ V
$2x - 3 = 4^0$
$2x = 1 + 3$
$x = 2$
6.1

EPE

ACTIVIDADES DE LA SEMANA 6

Control 4, se evaluará en la segunda sesión de clases   10 → Videos PC2

ASESORÍA 5, clase programada con el AAD

CONTROL DE RECUPERACIÓN 4, se evalúa en la asesoría 5

EVALUACIÓN VIRTUAL 2 → PC2 < viernes → sábado / EV2

CONSULTAS

6.1