MATEMÁTICA BÁSICA – CE82
SEMANA 6 – SP1

Temario: Función exponencial, función logarítmica, ecuaciones exponencial y logarítmicas.

Logro de la sesión: Al término de la sesión el estudiante reconoce una función exponencial y logarítmica, determina su regla de correspondencia, gráfica, dominio y resuelve ecuaciones exponenciales, logarítmicas.

FUNCIÓN EXPONENCIAL

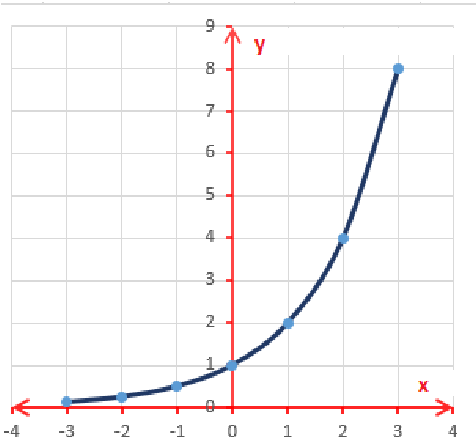
Toda función de la forma $\boldsymbol{f(x)=b^x}$ **;** donde b y x son números reales tal que b > 0 y diferente de uno, se denomina **función exponencial**, con base b.

Por ejemplo: $f(x)=2^x$, $g(x)=3^x$, $h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$, $f(x)=(0{,}35)^x$

Ejemplo:

Si $f(x)=2^x$

x	$f(x)$
–3	**0,125**
–2	**0,25**
–1	**0,5**
0	**1**
1	**2**
2	**4**
3	**8**



Características de la función:

$\boldsymbol{f(x)=2^x}$

Dom f = **R**

Ran f = $]0;\ +\infty[$

Intersección con el eje x: **no hay**

Intersección con el eje y: **(0; 1)**

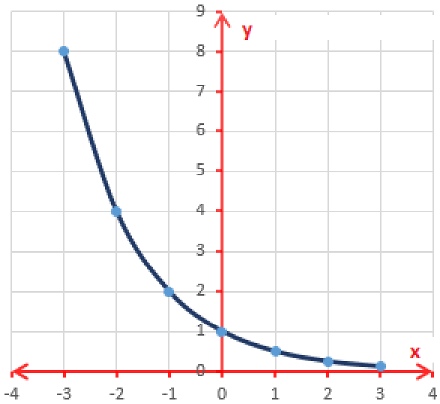
Monotonía: **creciente**

Asíntota: **y = 0**

Ejercicio 1:

Si $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
–3	**8**
–2	**4**
–1	**2**
0	**1**
1	**0,5**
2	**0,25**
3	**0,125**



Características de la función:

$\boldsymbol{f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}}$

Dom f = **R**

Ran f = $]0;\ +\infty[$

Intersección con el eje x: **no hay**

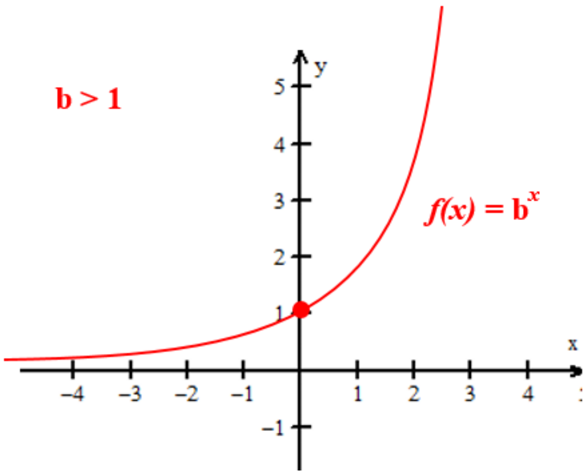
Intersección con el eje y: **(0; 1)**

Monotonía: **decreciente**

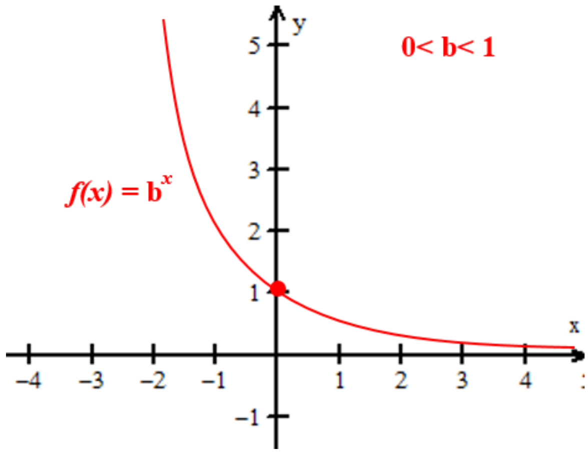
Asíntota: **y = 0**

Conclusiones:

Si $f(x) = b^x$ tal que la base es mayor que 1, es decir, b > **1**



Si $f(x) = b^x$ tal que la base es un número mayor que 0 pero menor que 1, es decir, **0** < b < **1**



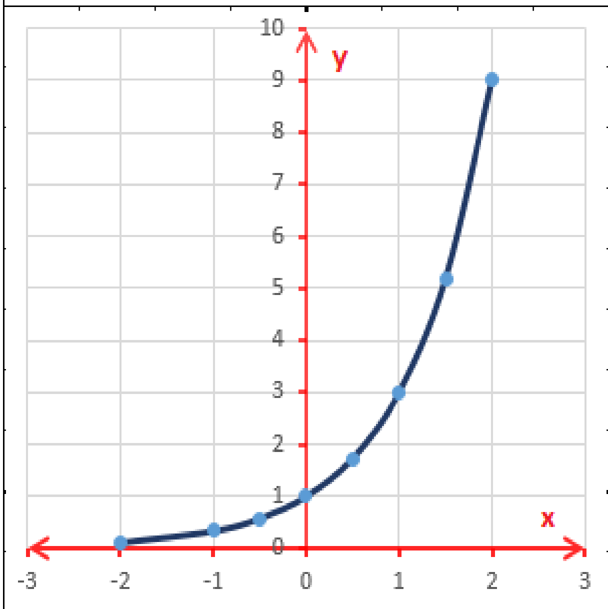
Función exponencial: $f(x) = b^x$

Dominio: *Dom f* = **R** Rango: *Ran f* = $]0;\ +\infty[$

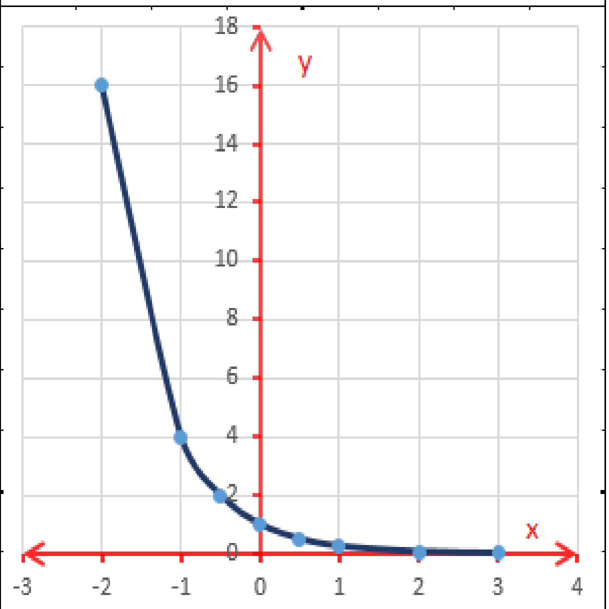
- No hay intersección con el eje **x** Intersecta al eje *y* en el punto: **(0; 1)**
- Si la base: b > 1 entonces la función es **creciente**
- Si la base: 0 < b < 1 entonces la función es **decreciente**
- La asíntota es el eje **x** , cuya ecuación es **y = 0**

Ejercicios 2: Esboce el gráfico de las siguientes funciones

$f(x) = 3^x$



$f(x) = 4^{-x}$

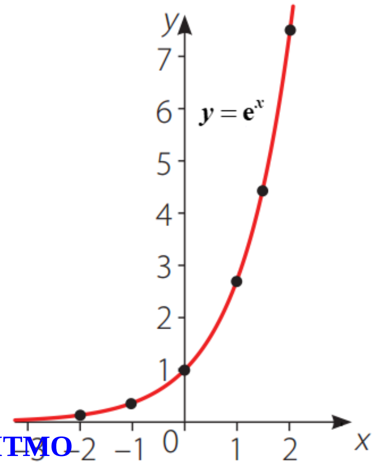


FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Cualquier número no negativo se puede usar como base para una función exponencial. Sin embargo, uno de los más utilizados es el número irracional **e** (**constante de Euler**), cuyo valor aproximado a 14 decimales es e = 2,71828182845905.

La función exponencial natural es la función exponencial con base e: $\boldsymbol{f(x) = e^x}$

x	*f*(*x*)
–2	**0,135…**
–1	**0,367…**
0	**1**
1	**2,718…**
2	**7,389…**



Características de la función: $\boldsymbol{f(x) = e^x}$

Dom f = **R** *Ran f* =]0; +∞[

Intersección con el eje *x*: **no hay**

Intersección con el eje *y*: **(0; 1)**

Monotonía: **creciente**

Asíntota: **y = 0**

FUNCIÓN LOGARITMO

Toda función de la forma $\boldsymbol{f(x) = \log_b x}$ **;** donde b y *x* son números reales tal que b > 0 y diferente de uno, se denomina **función logaritmo** con base b.

Y se cumple que: $\boldsymbol{\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x}$

En consecuencia, $\boldsymbol{\log_b x}$ es el exponente al cual hay que elevar la **base b** para obtener *x*.

Ejemplos:

$\log_2 8 = 3 \ldots$ ¿Por qué? $\mathbf{2^3 = 8}$ $\log_3 9 = 2 \ldots$ ¿Por qué? $\mathbf{3^2 = 9}$

Ejercicio 3:

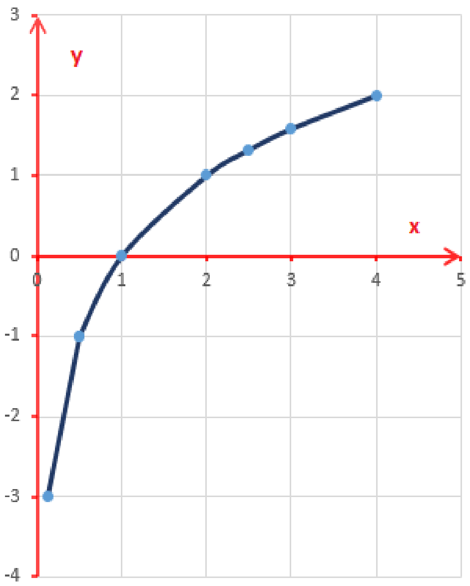
Halle (sin calculadora) cada uno de los siguientes logaritmos:

a) $\log_4 16 =$ ___**2** b) $\log_{10} 1000 =$ ___**3** c) $\log_2 0{,}5 =$ ___**-1** d) $\log_5 5 =$ ___**1**

Ejemplo:

Si

$f(x) = \log_2 x$



Características de la función:

$f(x) = \log_2 x$

Dom f =]0; +∞[

Ran f = **R**

Intersección con el eje *x*: **(1; 0)**

Intersección con el eje *y*: **no hay**

Monotonía: **creciente**

Asíntota: **x = 0**

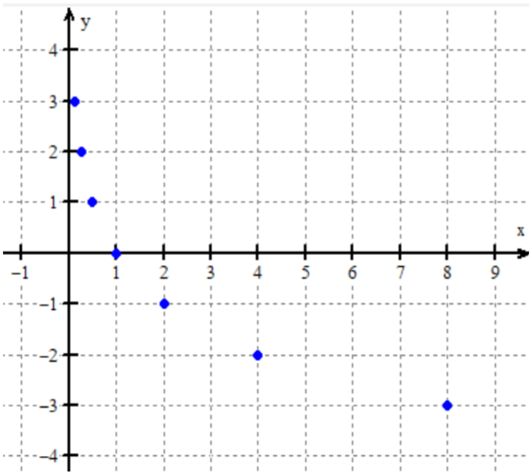
x	*f*(*x*)
0,125	**-3**

0,25	**-2**
0,5	**-1**
1	**0**
2	**1**
4	**2**
8	**3**

Ejercicio 4:

Si $f(x) = \log_{0,5} x$

x	*f*(*x*)
0,125	**3**
0,25	**2**
0,5	**1**
1	**0**
2	**-1**
4	**-2**
8	**-3**



Características de la función:

$f(x) = \log_{0,5} x$

Dom f = $]0;\ +\infty[$

Ran f = **R**

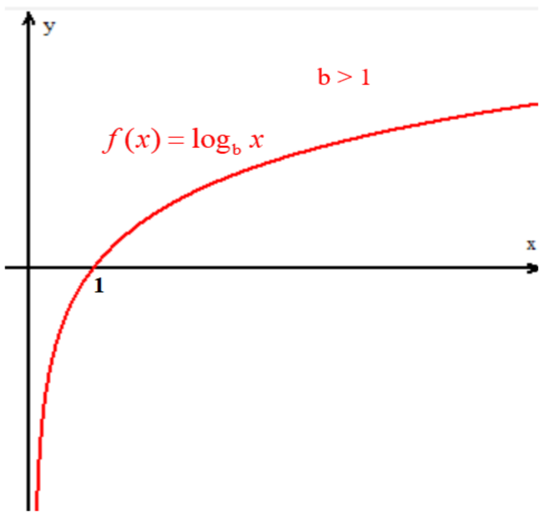
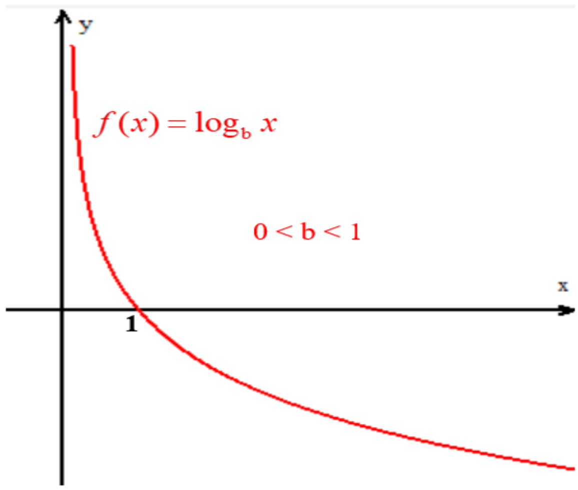
Intersección con el eje *x*: **(1; 0)**

Intersección con el eje *y*: **no hay**

Monotonía: **decreciente**

Asíntota: **x = 0**

Conclusiones:

Si $f(x) = \log_b x$ tal que la base es mayor que 1, es decir, b > **1**	Si $f(x) = \log_b x$ tal que la base es un número mayor que 0 pero menor que 1, es decir, **0** < b < **1**
	

Función logaritmo: $f(x) = \log_b x$

Dominio: *Dom f* = $]0;\ +\infty[$ Rango: *Ran f* = **R**

- No hay intersección con el eje **y** Intersecta al eje *x* en el punto: **(1; 0)**

- Si la base: b > 1 entonces la función es **creciente**
- Si la base: 0 < b < 1 entonces la función es **decreciente**
- La asíntota es el eje **y**, cuya ecuación es **x=0**

LOGARITMO COMÚN y LOGARITMO NATURAL

La función logaritmo con **base 10** se llama **logaritmo común** y se representa por: $\boldsymbol{f(x)=\log x}$

Ejemplos: $\log x = 2 \Rightarrow 10^2 = x$, $\log x = -3 \Rightarrow 10^{-3} = x$, $\mathbf{\log x = a \Leftrightarrow 10^a = x}$

La función logaritmo con **base e** se llama **logaritmo natural** y se representa por: $\boldsymbol{f(x)=\ln x}$

Ejemplos: $\ln x = 2 \Rightarrow e^2 = x$, $\ln x = -3 \Rightarrow e^{-3} = x$, $\mathbf{\ln x = a \Leftrightarrow e^a = x}$

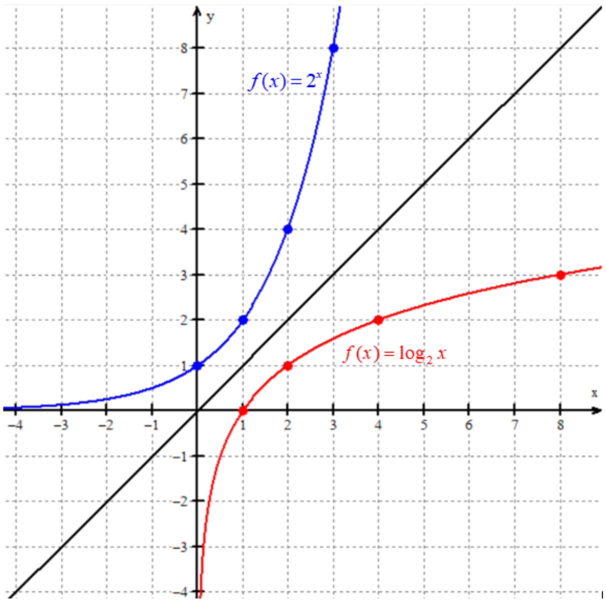
FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARITMO

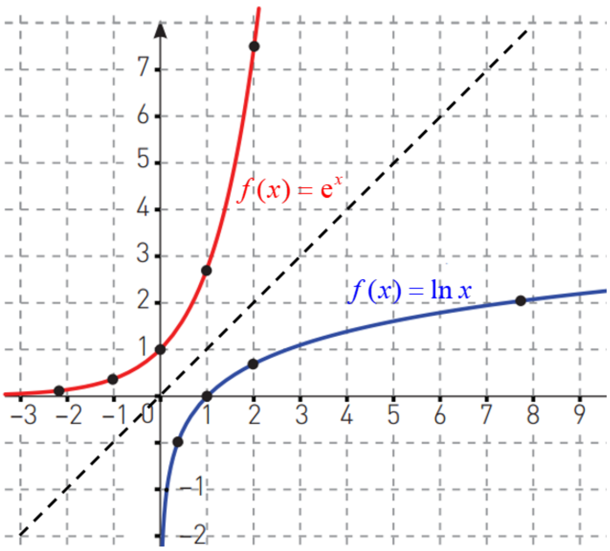
La función exponencial $\boldsymbol{f(x)=b^x}$ y función logaritmo $\boldsymbol{f(x)=\log_b x}$ son mutuamente inversas, por lo tanto, cumplen con las propiedades de las funciones inversas.

Si $f(x)=b^x$ entonces: Dom f = **R** y *Dom f* = $]0;\ +\infty[$; asíntota: **y = 0**

Si $f(x)=\log_b x$ entonces: *Dom f* = $]0;\ +\infty[$y *Ran f* = **R**; asíntota: **x = 0**

Relación gráfica: Las curvas son simétricas respecto a la recta *y* = *x*.





Relación analítica

a) $\log_b x = a \Rightarrow b^a = x$ b) $\log_3 x = 2 \Rightarrow 3^2 = x$ c) $\ln x = -1 \Rightarrow e^{-1} = x$

d) $b^x = a \Rightarrow x = \log_b a$ e) $5^x = 7 \Rightarrow x = \log_5 7$ f) $e^x = 9 \Rightarrow x = \ln 9$

g) $8^x = 4 \Rightarrow \boldsymbol{x = \log_8 4}$ h) $e^x = 2 \Rightarrow \boldsymbol{x = \log_e 2}$ i) $3^x = 6 \Rightarrow \boldsymbol{x = \log_3 6}$

j) $\log_4 x = 3 \Rightarrow$ $x = 4^3$ k) $\log_7 x = -2 \Rightarrow$ $x = 7^{-2}$ l) $ln\, x = 8 \Rightarrow$ $x = e^8$

Propiedades fundamentales: $\log_b b = 1$ y $\log_b 1 = 0$

Ejemplos: $\log_4 4 = 1$ $\log_5 1 = 0$ $log 10 = 1$ ln e= **1**

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

PROPIEDAD	APLICACIÓN
$\log_b(m) + \log_b(n) = \log_b(m \cdot n)$	**a)** $\log_7 4 + \log_7 8 = \log_7(4x8) = \log_7 32$ **b)** $\log_3 21 = \log_3(7x3) = \log_3 7 + \log_3 3$
$\log_b(m) - \log_b(n) = \log_b\left(\frac{m}{n}\right)$	**a)** $\log_7 4 - \log_7 8 = \log_7\left(\frac{4}{8}\right) = \log_7\left(\frac{1}{2}\right)$ **b)** $\log_2\left(\frac{8}{9}\right) = \log_2 8 - \log_2 9$
$\log_b(m)^k = k \log_b(m)$	**a)** $\log_3(x)^5 = 5 \log_3 x$ **b)** $9 \log_4(x) = \log_4(x)^9$

Ejercicios 5:

a) $\log_3 7 + \log_3 5 =$ $\log_3 35$	**b)** $\ln 12 - \ln 3 + \ln 2 =$ $\ln 8$	**c)** $\ln(x^2)^5 =$ 10. lnx
d) $\log x^6 - \log x^4 - 2\log x =$ 0	**e)** $\log_2 8^6 - \log_3 9^5 =$ 8	**f)** $\ln(e)^5 =$ 5

CIERRE DE CLASE

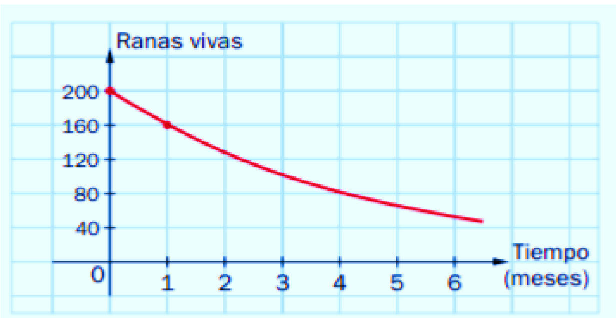
A. La función $f(x) = 3^{-x}$, ¿es creciente? **No**

B. La función $g(x) = e^x$ ¿Tiene asíntota vertical? **No**

C. La función $h(x) = \ln x$ ¿es negativa? **No**

Problema (Competencia Razonamiento Cuantitativo)

Una colonia de ranas está en un proceso de extinción de forma exponencial. El gráfico muestra la cantidad de ejemplares que aún quedan vivos por mes.



A) ¿Cuántas ranas había inicialmente? **200**

B) Escribe una función del tipo $r(t) = k(b)^t$ con la que se pueda calcular la cantidad de ranas vivas que hay cada mes. $r(t) = 200(0,8)^t$

C) ¿Qué porcentaje de ranas se muere cada mes? **20%**