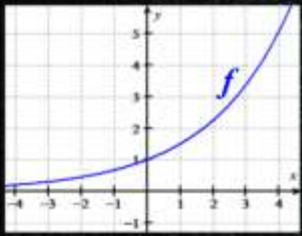

EPE
CONTENIDO
ANÁLISIS GRÁFICO DE FUNCIONES EXPONENCIALES
ANÁLISIS GRÁFICO DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS
APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS
6.2


EPE
LOGRO
AL TERMINAR LA CLASE EL ALUMNO SERÁ CAPAZ DE:
ESBOZAR LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS
ANALIZAR GRAFICAMENTE LAS CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS
APLICAR LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS EN PROBLEMAS DE CONTEXTO REAL
6.2

EPE



En la figura adjunta la regla de la función f es $f(x) = 1,5^x$

La ecuación de su asíntota es $y = 0$

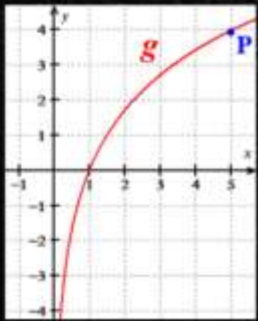
Dom f = R // Ran f = $]0\,;+\infty[$

Monotonía: Creciente en R

✓ $b = 1,5$

$b > 1$

✓ f crece



En la figura adjunta la regla de la función g es $g(x) = \log_{1,5} x$

La ecuación de su asíntota es $x = 0$

Dom g = $]0\,;+\infty[$ Ran g = R //

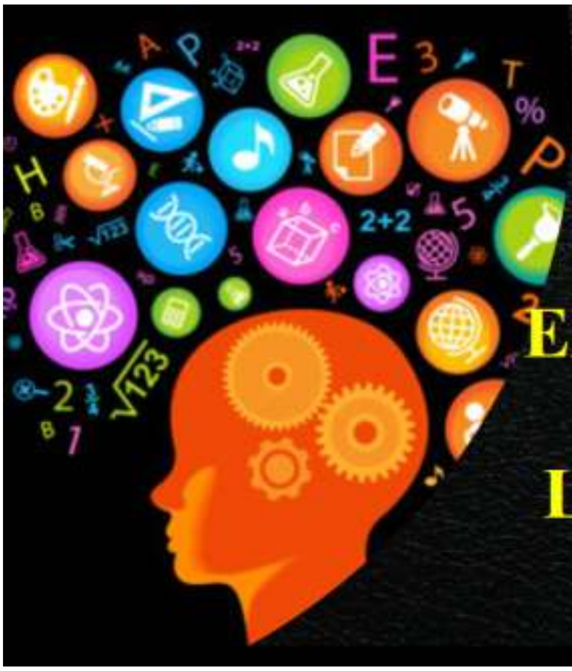
Monotonía: Creciente en $]0\,;+\infty[$

Coordenadas del punto P: (5; 3,969...)

$x = 5$

$y = \log_{1,5} 5 = 3,969...$

6.2



GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Esboce la gráfica de la función: $\boxed{f(x) = 2^x - 3}$

AH: y = -3

Aplicando las técnicas de graficación:

Paso 1: **Función básica** $\boxed{f(x) = 2^x}$

x	$f(x) = 2^x$
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8

Paso 2: $f(x) = 2^x - 3$ **La función se traslada verticalmente hacia abajo 3 unidades**

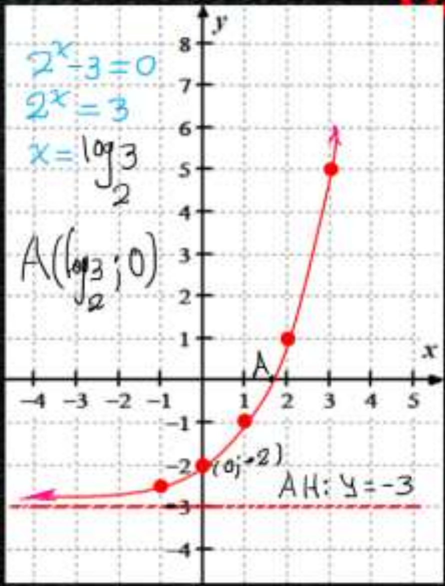
ASÍNTOTA $y = -3$

INTERSECCIÓN CON EJE Y ($x = 0$) (0 ; -2)

INTERSECCIÓN CON EJE X ($y = 0$) (1,58 ; 0)

DOMINIO R

RANGO $]-3 ; +\infty[$



GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Esboce la gráfica de la función $f(x) = e^{x-2} - 3$

AH

ASÍNTOTA $y = -3$

DOMINIO R

RANGO $]-3 ; +\infty[$

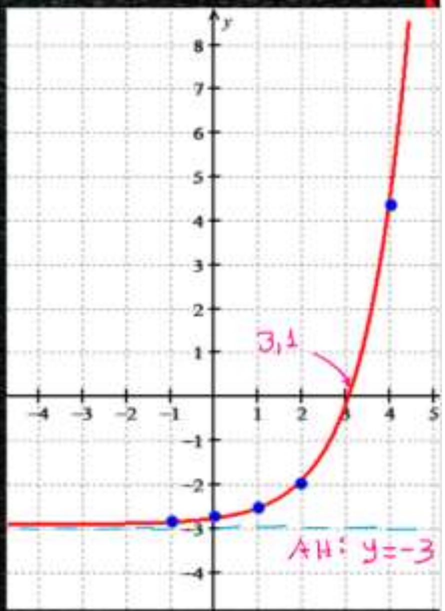
INTERSECCIÓN CON EJE Y ($x = 0$) $(0 ; -2,86)$

INTERSECCIÓN CON EJE X ($y = 0$) (3,1 ; 0)

TABULACIÓN

x	$f(x)$
-1	-2,95
0	-2,86
1	-2,63
2	-2
4	4,39

La función es negativa en $]-\infty; 3,1[$



EPE

EJERCICIO

Esboce la gráfica de la función

$$f(x) = -2^{x+1} + 5$$

¿Qué piensas aplicar, técnicas de graficación o tabulación?

Asíntota horizontal: $y = 5$

- $(0;\ 3)$

  $y = -2^{1} + 5 = 3$

- $(1{,}32\ ;0)$

  $-2^{x+1} + 5 = 0$

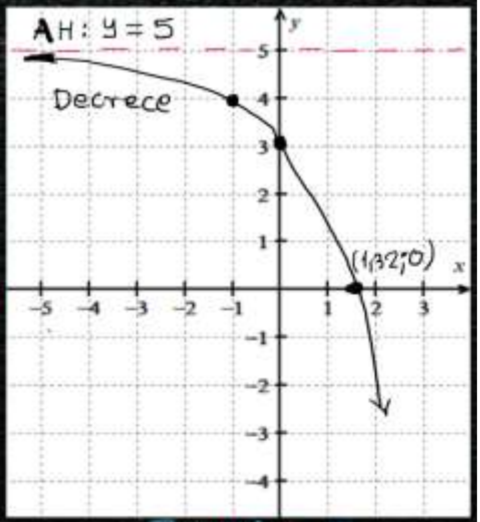
  $5 = 2^{x+1}$

  $\log_2 5 = x+1 \rightarrow x = \log_2 5 - 1 = 1{,}32$

$(-1;\ 4)$

$y = -2^{0} + 5 = 4$

✓ f es positiva en $]-\infty;\ 1{,}32[$



$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Ran(f) =]-\infty;\ 5[$

6.2

EPE

EJERCICIO

Esboce la gráfica de la función

$$f(x) = -2^{x+1} + 5$$

¿Qué piensas aplicar, técnicas de graficación o tabulación?

ASÍNTOTA $y = 5$

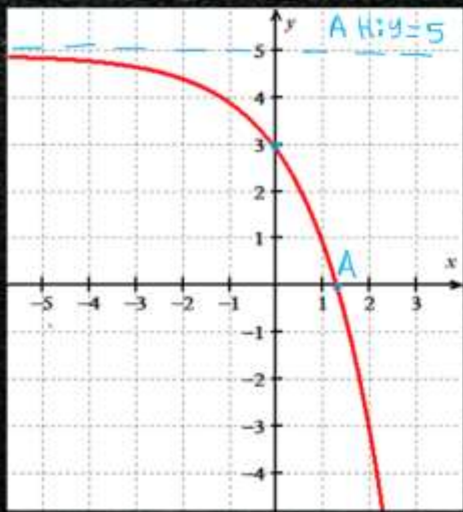
DOMINIO $\mathbb{R}$

RANGO $]-\infty;\ 5[$

INTERSECCIÓN CON EJE Y ($x = 0$) $(0;\ 3)$

INTERSECCIÓN CON EJE X ($y = 0$) $A(1{,}32;\ 0)$

x	$f(x) = -2^{x+1} + 5$
-3	4,75
-2	4,5
-1	4
0	3
1	1
2	-3



6.2

EPE

GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Asíntota Vertical: $x=-4$

Esboce la gráfica de la función $f(x) = \log_2(x+4)$

Aplicando las técnicas de graficación: AV: $x+4=0$

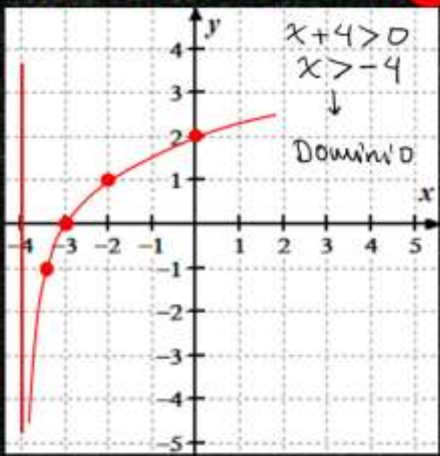
Paso 1:

Función básica $f(x) = \log_2 x$

Paso 2:

$f(x) = \log_2(x+4)$ La función se traslada horizontalmente hacia la izquierda 4 unidades

x	$f(x) = \log_2 x$
0,5	-1
1	0
2	1
4	2



ASÍNTOTA $x = -4$

DOMINIO $]-4\,;+\infty[$

RANGO R

INTERSECCIÓN CON EJE Y $(0\,;2)$
$(x = 0)$

INTERSECCIÓN CON EJE X $(-3\,;0)$
$(y = 0)$

$\log_2(x+4) = 0$
$x+4 = 2^0$
$x = 1-4$

6.2

EPE

GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Esboce la gráfica de la función $f(x) = \ln(3-x)$

ASÍNTOTA $x = 3$

DOMINIO $]-\infty\,;3[$

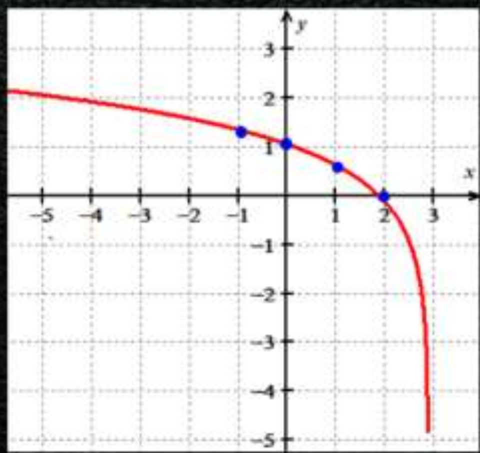
RANGO R

INTERSECCIÓN CON EJE Y $(0\,;1{,}1)$
$(x = 0)$

INTERSECCIÓN CON EJE X $(2\,;0)$
$(y = 0)$

Tabulación

x	$f(x)$
-1	1,39
0	1,10
1	0,69
2	0



EPE

EJERCICIO

Esboce la gráfica de la función

$$f(x) = 4 - \log_3(x+3)$$

¿Qué piensas aplicar, técnicas de graficación o tabulación?

$x > -3$
$x+3 > 0$

AV: $x = -3$
$Dom(f) =]-3; +\infty[$

ASÍNTOTA $x = -3$

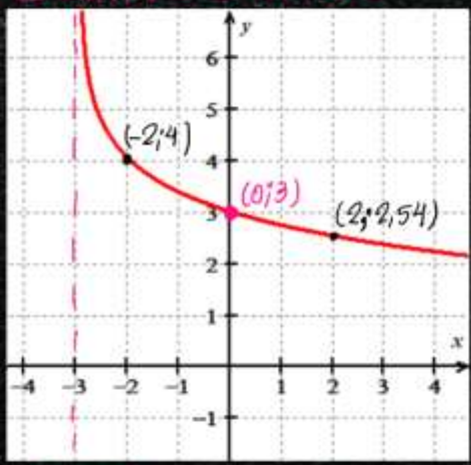
DOMINIO $]-3; +\infty[$

RANGO $\mathbb{R}$

INTERSECCIÓN CON EJE Y ($x = 0$) $(0;3)$

INTERSECCIÓN CON EJE X ($y = 0$) $(78;0)$

x	$f(x) = 4 - \log_3(x+3)$
-2	4
-1	3,37
0	3
1	2,74
2	2,54
3	2,37



$4 - \log_3(x+3) = 0 \xrightarrow{AV} 4 = \log_3(x+3)$

$3^4 = x+3$

6.2

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

P1) La función $f(x) = 4 + e^{x+3}$ determine la verdad o falsedad de cada alternativa

A) Su dominio es R ✓ B) Tiene asíntota horizontal $y = 4$ ✓

C) Su rango es R F D) Es creciente en todo su dominio ✓

$f(x) = b^x + c$

AH: $y = +c$

P2) Si al graficar la función g cuya regla es $g(x) = 2 - \ln(x+5)$ se utiliza las técnicas de graficación, entonces los pasos a seguir son:

Paso 1: $y = \ln x$ f. básica

Paso 2: $y = \ln(x+5)$ → Traslación horizontal de 5 unidades hacia la izq.

Paso 3: $y = -\ln(x+5)$ Reflexión con el eje x

Paso 4: $y = 2 - \ln(x+5)$ Traslación vertical 2 unidades hacia arriba.

6.2

APLICACIONES DE FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARITMO

APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1 EJEMPLO

En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $f(x) = A + B\log_2(-x + C)$.

Halle la regla de correspondencia de *f*.

Del gráfico: Dom $f(x) = \,]-\infty\,;4\,[$

De la función: $-x + C > 0 \;\Rightarrow x < C$

$\Rightarrow$ Dom $f(x) = \,]-\infty\,;C\,[$ $\quad \therefore C = 4$

$\Rightarrow f(x) = A + B\log_2(-x + 4)$

Formamos ecuaciones con los puntos conocidos

$(-4;2) \Rightarrow 2 = A + B\log_2(4 + 4)$

$(0\,;1) \Rightarrow 1 = A + B\log_2(0 + 4)$

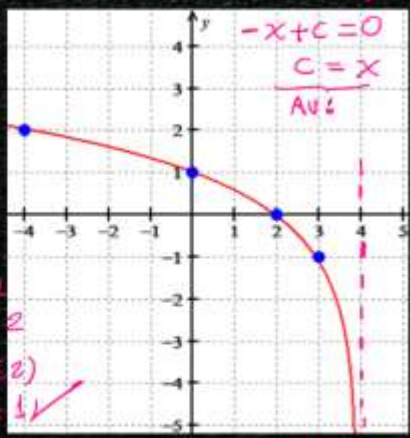
$$\begin{cases} A + 3B = 2 \;\ldots 1 \\ A + 2B = 1 \;\ldots 2 \end{cases}$$

(1) − (2)

B = 1

Utilizando la calculadora $A = -1$ y $B = 1$

$\therefore f(x) = -1 + \log_2(-x + 4)$



AV: x=4

$\log_b x = y \rightarrow x = b^y$

EPE

APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

2 EJERCICIO

Con los datos del problema anterior halle $f^{-1}(x)$, dominio, rango y esboce su gráfica. $f(x) = -1 + \log_2(-x+4)$

P1: f es inyectiva

P2: $y = -1 + \log_2(-x+4)$

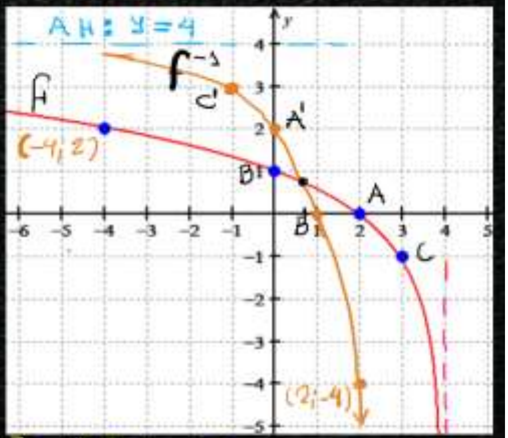
P2: $y + 1 = \log_2(-x+4)$

$2^{y+1} = -x+4$

$x = 4 - 2^{y+1}$

$y = 4 - 2^{x+1}$

$f^{-1}(x) = 4 - 2^{x+1}$



$Dom(f^{-1}) = Ran(f) = \mathbb{R}$

$Ran(f^{-1}) = Dom(f) =]-\infty; 4[$

6.2

EPE

APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

3 EJEMPLO

En una olla a presión se hierve agua y se empieza a enfriar de acuerdo con la Ley de enfriamiento de Newton, de modo que la temperatura en el tiempo está dada por: $T(t) = 30 + 60e^{-0{,}0673t}$ donde t se mide en minutos y T en ºC.

a. ¿Cuál es la temperatura inicial del agua?

b. ¿Cuál es la temperatura del agua a los 22 minutos?

c. ¿Después de cuánto tiempo la temperatura del agua será de 40 ºC?

d. Trace la gráfica de T, escriba la ecuación de la asíntota y diga qué representa a largo plazo.

EPE

APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

3 EJEMPLO

a. ¿Cuál es la temperatura inicial del agua?

$T(t) = 30 + 60e^{-0{,}0673t}$ donde t se mide en minutos y T se mide en ºC

Definiendo variables:

t : Tiempo desde que empieza a enfriar el agua en minutos

T : Temperatura del agua en un determinado tiempo t en ºC

La temperatura inicial del agua ocurre cuando $t = 0$

$$T(0) = 30 + 60e^{-0{,}0673(0)} \Rightarrow T(0) = 90$$

La temperatura inicial del agua es 90 ºC

b. ¿Cuál es la temperatura del agua a los 22 minutos?

$$T(22) = 30 + 60e^{-0{,}0673(22)} \Rightarrow T(22) = 43{,}65$$

La temperatura del agua a los 22 minutos es 43,65 ºC

6.2

EPE

APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

3 EJEMPLO

c. ¿Después de cuánto tiempo la temperatura del agua será de 40 ºC?

$T(t) = 30 + 60e^{-0{,}0673t}$ donde t se mide en minutos y T se mide en ºC.

$t = ?$

$T(t) = 40$

$$40 = 30 + 60e^{-0{,}0673(t)}$$

$$10 = 60e^{-0{,}0673(t)}$$

$$\frac{10}{60} = e^{-0{,}0673(t)}$$

Aplicando la propiedad $-0{,}0673\, t = \ln\left(\frac{1}{6}\right)$ $\qquad t = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{-0{,}0673}$ $\qquad t = 26{,}6234\ldots$

La temperatura del agua será de 40 ºC después de 26,62 minutos aprox.

EPE

APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

3 EJEMPLO

d. Trace la gráfica de T, escriba la ecuación de la asíntota y diga qué representa a largo plazo.

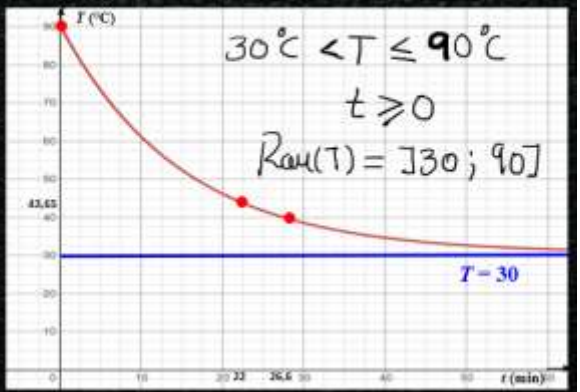
$T(t) = 30 + 60e^{-0,0673t}$ donde t se mide en minutos y T se mide en °C.

De los ítems anteriores tenemos los siguientes puntos $(t\,;T)$

$(0\,;90)$, $(22\,;43,65)$ y $(26,6\,;40)$

Como se trata de una función exponencial:

Asíntota $T = 30$



La asíntota representa a largo plazo la temperatura del agua cuando se enfría y tiende a 30°C.

EPE

APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

4 EJERCICIO

La ley del olvido (Hermann Ebbinghaus) establece que si una tarea se aprende en un inicio a un nivel de desempeño P_o, entonces, después de cierto intervalo de tiempo t por efecto del olvido, el nivel del desempeño esperado P cumple con la siguiente expresión:

tal que $\boxed{\log P = \log P_o - k\log(t+1)}$

k= constante que depende del tipo de tarea

t = número de meses que han transcurrido desde un momento de referencia.

a) Exprese P en términos de Po; k y t , sin logaritmos.

b) Si la nota de un estudiante en una prueba de matemática fue de 16, qué nota se espera (considerando que k=0,2) pueda obtener el mismo estudiante si rinde la misma prueba dentro de un año.

EPE

APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

4 **La ley del olvido (Hermann Ebbinghaus)**

$$\log P = \log P_o - k\log(t+1)$$

$P_o =$ nota inicial en una prueba de matemática

$t =$ número de meses que han transcurrido desde un momento de referencia

$P =$ nota esperada en una prueba de matemática

$k =$ constante que depende del tipo de tarea

a) Exprese P en términos de Po; k y t, sin logaritmos.

$$\text{Log}P = \log P_0 - \log(t+1)^K$$

$$\text{Log}P = \text{Log}\frac{P_0}{(t+1)^K}$$

$$P = \frac{P_0}{(t+1)^K}$$

b) Si la nota de un estudiante en una prueba de matemática fue de 16, qué nota se espera (considerando que $k = 0{,}2$) pueda obtener el mismo estudiante si rinde la misma prueba dentro de un año.

$P_0 = 16$

$t = 1$ año

$t = 12$ meses

$K = 0{,}2$

$$P(12) = \frac{16}{(12+1)^{0,2}} = 9{,}58$$

La nota del estudiante después de un año es de 9,58.

6.2

EPE

APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

5 **EJERCICIO**

Un medicamento se elimina del cuerpo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad que queda en el cuerpo disminuye el 80 % cada hora.

a) Escriba una ecuación en la forma $C(t) = a(b)^t$, donde C es la cantidad de medicamento en el cuerpo al cabo de t horas.

C: Cantidad de un medicamento en el cuerpo en mg, $0 < c \le 10$

t: Tiempo en horas, $t \geq 0$

$$\underset{t=0}{10\text{ mg}} \xrightarrow{1h} \underset{t=1}{2\text{ mg}}$$

$$C(0) = a.b^0 = 10 \rightarrow a = 10$$

$$C(t) = 10.b^t$$

$$C(1) = 10(b^1) = 2 \rightarrow b = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

$$\therefore\ C_{(t)} = 10(0{,}2)^t$$

6.2

EPE

APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

5 Para que el fármaco haga efecto en el cuerpo, debe haber por lo menos 2,6 mg del mismo, determine cuánto tiempo debe pasar para que esto ocurra. $C(t) = 10(0.2)^t$

ACTIVIDADES DE LA SEMANA 6

Control 4

ASESORÍA 5, clase programada con el AAD

CONTROL DE RECUPERACIÓN 4, se evalúa en la asesoría 5

EVALUACIÓN VIRTUAL 2

CONSULTAS