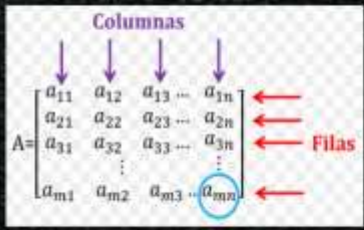

EPE
CONTENIDO
MATRICES
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
7.2


EPE
LOGRO
AL TERMINAR LA CLASE EL ALUMNO SERÁ CAPAZ DE:
DEFINIR UNA MATRIZ, HALLAR SUS ELEMENTOS Y REALIZAR OPERACIONES
INTERPRETAR GRAFICAMENTE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES Y CLASIFICARLO SEGÚN EL NÚMERO DE SOLUCIONES
RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES APLICANDO EL MÉTODO DE GAUSS
7.2

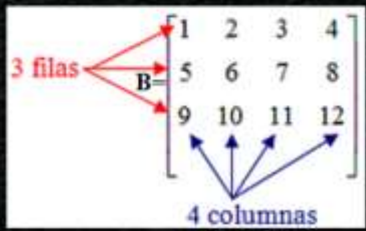
MATRICES

Una matriz es un arreglo rectangular de números llamados elementos, de la matriz, ordenados en filas y columnas.

En la figura adjunta la matriz A tiene *m* filas y *n* columnas.



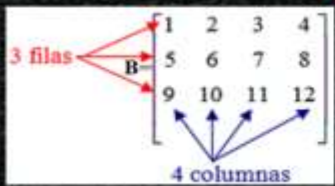
El *tamaño* de una matriz está dado por el número de filas y columnas que tiene, y generalmente se le denomina orden de la matriz. Una matriz que tiene *m* filas y *n* columnas se dice que es de orden $m \times n$.



En la figura adjunta la matriz B es de orden 3x4 y también se representa por: $B_{3\times4}$

MATRICES

Se usa la notación de ***doble subíndice*** para referirse a los elementos de una matriz. Si tenemos una matriz B el elemento que se encuentra en la fila *i* y la columna *j* se denota mediante b_{ij}.



En la figura adjunta se tiene una matriz B, el número 7 está en la fila 2 y columna 3 entonces se representa por: $b_{23} = 7$

Con los datos de la matriz B (figura anterior) halle:

$b_{32} =$ 10	$b_{21} =$ 5	$b_{33} =$ 11	$b_{14} =$ 4	$b_{24} =$ 8	$b_{13} =$ 3

EF → $b_{21} + b_{24} = 5 + 8$
$= 13$

MATRIZ POR EXTENSIÓN

Dada la matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ donde a_{ij} define los elementos de la matriz entonces podremos determinar dichos elementos.

Ejemplo

Dada la matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ donde $a_{ij} = 2i - j$, halle la matriz A por extensión.

Observe que la matriz tiene __2__ filas y __3__ columnas, es decir es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Luego usamos la condición dada para hallar el valor de cada elemento, es decir:

$a_{11} = 1$; $a_{12} = 0$; $a_{13} = -1$

$a_{21} = 3$; $a_{22} = 2$; $a_{23} = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO

Dada la matriz $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$ donde $b_{ij} = \begin{cases} i + 2j & , i < j \\ i \cdot j & , i = j \\ 2i - j & , i > j \end{cases}$, halle la matriz B por extensión.

$i < j$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$j < i$

•) $i < j$

$b_{12} = 1 + 2(2)$

i j

$b_{12} = 5$

$b_{11} = 1.1 = 1$

$b_{22} = 2.2 = 4$

•) $b_{21} = 2(2) - 1 = 3$; $i = 2$, $j = 1$

•) $b_{31} = 2(3) - 1 = 5$; $i = 3$, $j = 1$

7.2

•) $b_{32} = 2(3) - 2 = 4 \leftarrow i = 3, j = 2$

TIPOS DE MATRICES

MATRIZ NULA

Es aquella matriz donde todos sus elementos son ceros y se representa por O, es decir.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

MATRIZ CUADRADA

Son aquellas matrices cuyo número de filas es igual al número de columnas.

Tiene diagonal principal y diagonal secundaria.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

D.P

EPE

TIPOS DE MATRICES

$AI = A$

MATRIZ IDENTIDAD

Son aquellas matrices cuadradas cuyos elementos de la diagonal principal son todos igual a 1 y los demás elementos son ceros.

$2 \cdot 2^{-1} = 1$

Ejemplos:

$A \cdot A^{-1} = I$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \cdot I = I \cdot A = A$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRANSPUESTA

Dada una matriz A de orden $m \times n$, la transpuesta de A es la matriz que se obtiene al intercambiar las filas y columnas de A. Se representa por A^t y es de orden $n \times m$.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 9 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$A_{2x4} \quad A^T_{4x2}$

7.2

EPE

TIPOS DE MATRICES

MATRIZ IDENTIDAD

Son aquellas matrices cuadradas cuyos elementos de la diagonal principal son todos igual a 1 y los demás elementos son ceros.

Ejemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRANSPUESTA

Dada una matriz A de orden $m \times n$, la transpuesta de A es la matriz que se obtiene al intercambiar las filas y columnas de A. Se representa por A^t y es de orden $n \times m$.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 9 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -8 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 \\ -9 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

7.2

EPE

OPERACIONES CON MATRICES

SUMA DE MATRICES

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -8 & -3 & 2 \\ -15 & 42 & 17 \end{bmatrix}$, calcule A + B.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -3 & 2 \\ -15 & 42 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-8 & 3-3 & 2+2 \\ 5-15 & 4+42 & 7+17 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 4 \\ -10 & 46 & 24 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 10 & 8 & 14 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

7.2

EPE

OPERACIONES CON MATRICES

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Para multiplicar un número real por una matriz, se multiplica el número *k* por cada uno de los elementos de la matriz *A*.

Sea las matrices $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ calcule 3A.

$$3A = \begin{bmatrix} 3(4) & 3(8) & 3(2) \\ 3(5) & 3(4) & 3(7) \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 15 & 12 & 21 \end{bmatrix}$$

EPE

EJERCICIO

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

calcule $2A - 3B^t$

$$B^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$4-(-3)$

$$2A - 3B^T = \overbrace{\begin{bmatrix} 10 & 4 & -6 \\ 14 & 2 & -8 \end{bmatrix}_{2\times 3}}^{2A} - \overbrace{\begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 12 & -15 & 18 \end{bmatrix}_{2\times 3}}^{3B^T} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -12 \\ 2 & 17 & -26 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

EPE

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Dada la matriz A de orden $m \times n$ y la matriz B de orden $n \times p$. Entonces el producto AB es una matriz C de orden $m \times p$, tal que cada elemento de C denominado por c_{ij} es el resultado de multiplicar cada fila de la matriz A con cada columna de la matriz B.

Para multiplicar dos matrices es indispensable que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Ejemplo: Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine cuáles de las siguientes operaciones son posibles de efectuar indicando el orden de la matriz resultante.

OPERACIÓN	¿SI/N0?	RESULTADO
$A \cdot C$	NO	
$A \cdot B$	SI	2×2
$B \cdot D$	NO	

OPERACIÓN	¿SI/N0?	RESULTADO
$C \cdot A$	SI	2×3
$B \cdot A$	SI	3×3
$D \cdot B$	SI	3×2

$A_{2\times 3}\ C_{2\times 2}$

$AB \neq BA$

7.2

EPE

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Matriz fila: Es aquella matriz que solo tiene una fila, por ejemplo: $A = [2 \quad 4 \quad 6 \quad 8]_{1\times 4}$

Matriz columna: Es aquella matriz que solo tiene una columna, por ejemplo: $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}_{4\times 1}$

Si efectuamos el producto: $A_{1\times 4} \cdot B_{4\times 1}$ se obtiene una nueva matriz C de orden 1×1

$$[2 \quad 4 \quad 6 \quad 8]\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix} = [2(-3) + (4)(5) + (6)(-7) + (8)(9)] = [44]_{1\times 1}$$

$$A_{1\times 4}\, B_{4\times 1} = C_{1\times 1}$$

7.2

EPE

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

El proceso para multiplicar matrices A y B es similar al anterior con la diferencia que tenemos más filas y columnas. Se multiplica la primera fila de la matriz A con cada columna de la matriz B, luego la segunda fila de la matriz A con cada columna de la matriz B, y así sucesivamente hasta terminar con todas las filas de A.

Sea las matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 9 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

A) ¿De qué orden es la matriz A? 2×2

B) ¿De qué orden es la matriz B? 3×2

C) ¿Se puede efectuar el producto AB?

No, las columnas de A no coincide con el número de filas de B.

$A_{\underbrace{2\times 2\ B_{3}}_{\neq}\times 2}$

D) ¿Se puede efectuar el producto BA?

Si

$B_{3\times \underbrace{2} \times A_{2}}_{=}{}_{\times 2} = C_{3\times 2}$

7.2

EPE

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

E) Halle el producto: BA

$$B = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 9 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_{3\times 2}A_{2\times 2} = C_{3\times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 9 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}^{B}\overbrace{\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}^{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_{11} = \text{fila 1B} \times \text{columna 1A} = (8)(5) + (-7)(3) = 19 \\ c_{12} = \text{fila 1B} \times \text{columna 2A} = (8)(-4) + (-7)(-2) = -18 \\ c_{21} = \text{fila 2B} \times \text{columna 1A} = (9)(5) + (0)(3) = 45 \\ c_{22} = \text{fila 2B} \times \text{columna 2A} = (9)(-4) + (0)(-2) = -36 \\ c_{31} = \text{fila 3B} \times \text{columna 1A} = (-4)(5) + (3)(3) = -11 \\ c_{32} = \text{fila 3B} \times \text{columna 2A} = (-4)(-4) + (3)(-2) = 10 \end{cases}$$

$$C = BA = \begin{bmatrix} 19 & -18 \\ 45 & -36 \\ -11 & 10 \end{bmatrix}$$

7.2

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

a) ¿Es posible hallar AB? b) ¿Es posible hallar BA? c) ¿AB = BA? d) Halle AB

$\underbrace{A_{2\times3}B_{3\times2}}_{C_{2\times2}}$ $\underbrace{B_{3\times2}A_{2\times3}}_{C_{3\times3}}$ No son iguales

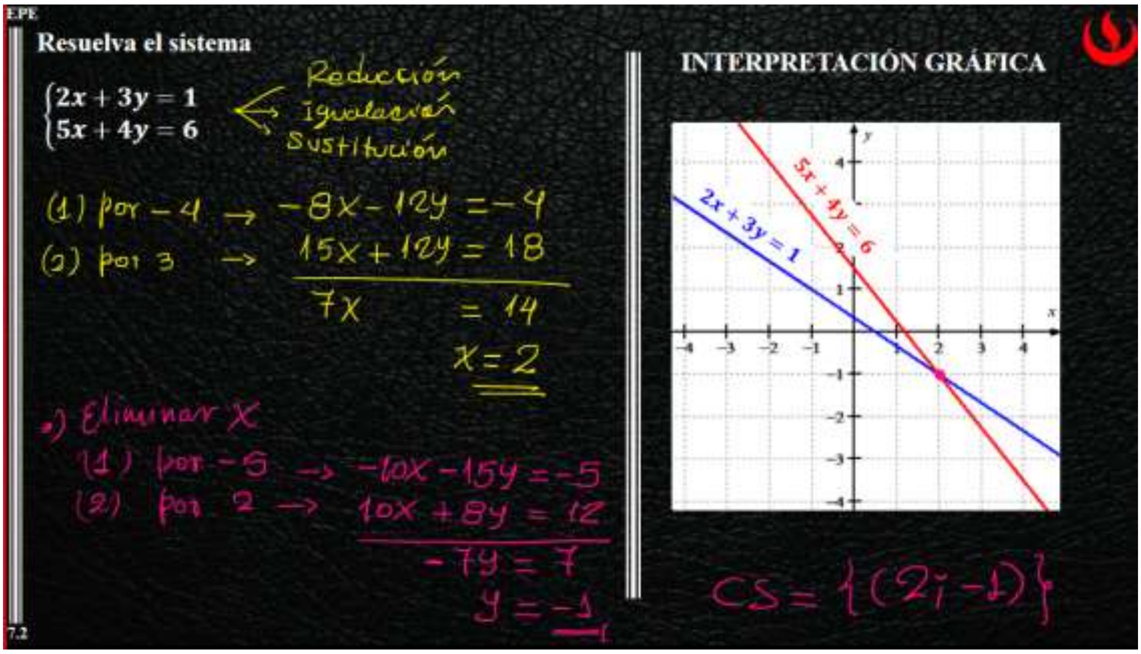
$20-10-18=-18$

$AB = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2}$

20

$7(4)+1(-5)+(-4)(6)=-1$

7.2


EPE
Resuelva el sistema
$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}$
Reducción
igualación
Sustitución
(1) por −4 → −8x − 12y = −4
(2) por 3 → 15x + 12y = 18
7x = 14
x = 2
Eliminar x
(1) por −5 → −10x − 15y = −5
(2) por 2 → 10x + 8y = 12
−7y = 7
y = −1
7.2
INTERPRETACIÓN GRÁFICA
5x + 4y = 6
2x + 3y = 1
CS = {(2; −1)}


SISTEMAS
DE
ECUACIONES
LINEALES

EPE

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales (SEL), es un sistema de ecuaciones en el cual cada ecuación es lineal.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde $a_{11}; a_{12}; \ldots; a_{mn}$ (coeficientes) y $b_1; b_2; \ldots; b_m$ (términos independientes) son números reales, y $x_1; x_2; \ldots; x_n$ son las variables.

Resolver un sistema consiste en hallar los valores de las variables que satisfacen cada una de las ecuaciones, a este conjunto se le llama: Conjunto Solución (CS).

Ejemplo:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 3x - 5y + z = 14 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

¿El conjunto solución es $\{(2; -1; 3)\}$?

$x = 2, \; y = -1, \; z = 3$

$\hookrightarrow$ 3 ecuaciones y 3 variables

Sistema compatible determinado(tiene solución única)

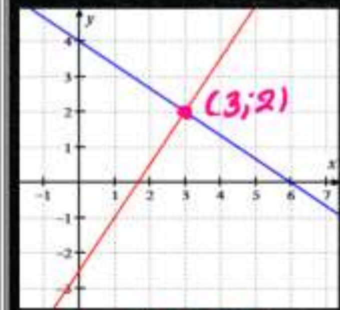
7.2

EPE

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO ✓

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

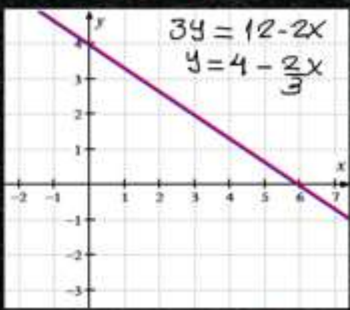


$CS = \{(3;2)\}$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -4x - 6y = -24 \end{cases}$$

$2x + 3y = 12 \quad \div -2$

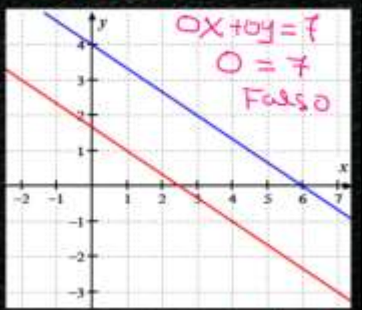


$CS = \{(x; 4 - \frac{2}{3}x) / x \in \mathbb{R}\}$

SISTEMA INCOMPATIBLE

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$



$CS = \phi = \{ \}$

7.2

EPE

RESOLUCIÓN DE UN SEL: ELIMINACIÓN GAUSSIANA

La eliminación gaussiana es un algoritmo que transforma sucesivamente un sistema de ecuaciones lineales simultáneas en otro equivalente, hasta obtener al final un sistema escalonado fácilmente resoluble.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Para aplicar este algoritmo es necesario reconocer las siguientes matrices:

Matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz de variables:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matriz de términos independientes:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

7.2

EPE

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Matriz ampliada o aumentada se forma a partir de las matrices A y B, es decir:

Matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz de variables

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matriz de términos independientes:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriz Ampliada

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Resolver

Ejemplo: $\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 3x - 5y + z = 14 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & 1 & 14 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Escalonar

7.2

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

EPE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

MATRIZ ESCALONADA

Una matriz es escalonada si:

1. **Todas las filas nulas, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.**
2. **El número de ceros al comienzo de una fila no nula es estrictamente menor que el número de ceros al comienzo de la fila inferior.**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 0 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 8 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

EPE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

OPERACIONES ELEMENTALES DE FILAS

Dada una matriz, llamamos operaciones elementales filas a las siguientes operaciones:

Intercambiar el orden de dos filas.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & 7\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$f_1 \leftrightarrow f_3$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 7\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

$f_2 \leftrightarrow f_3$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & 7\end{bmatrix}$$

Multiplicar toda una fila por un escalar no nulo.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & 7\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}\\ 5f_2 \rightarrow\\ -4f_3 \rightarrow\end{matrix}\ A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 15 & 10 & 35\\ -4 & 0 & -8\end{bmatrix}$$

Sumar a una fila el resultado de multiplicar otra fila por un escalar.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & 7\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$2f_1 + f_2 \rightarrow f_2$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & -2 & 13\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$-1f_1 + f_3 \rightarrow f_3$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 5 & -2 & 13\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

7.2

EPE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Transforme en una matriz escalonada la siguiente matriz: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 3 & -8 & 2 & 14 \\ 2 & -7 & 1 & 3 \end{array}\right]$

Resolver

$\begin{cases} x-2y+z=7 \\ 3x-8y+2z=14 \\ 2x-7y+z=3 \end{cases}$

$-3E_1 \to -3x+6y-3z=-21$

$\quad\; 3x-8y+2z=14$

$-3E_1+E_2 \to 0x-2y-z=-7$

$-2x+4y-2z=-14$

$\quad 2x-7y+z=3$

$\quad 0x-3y-z=-11$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 3 & -8 & 2 & 14 \\ 2 & -7 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{-3F_1+F_2} \\ \xrightarrow{-2F_1+F_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{-3F_2+2F_3} \begin{array}{cccc} x & y & z & = \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$z=1$

$y=3$

$x=12$

$\begin{cases} x-2y+z=7 \\ -2y-z=-7 \\ z=1 \end{cases}$

$CS=\{(12;3,1)\}$

7.2

EPE

RESOLUCIÓN DE UN SEL: ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Resuelva el sistema de ecuaciones y clasifique $\begin{cases} x-2y+z=9 \\ 3x-5y+z=22 \\ 4x-2y-3z=11 \end{cases}$ (1)

Paso 1: Matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 9 \\ 3 & -5 & 1 & 22 \\ 4 & -2 & -3 & 11 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{FILA } 1 = f_1 \\ \longleftarrow \text{FILA } 2 = f_2 \\ \longleftarrow \text{FILA } 3 = f_3 \end{array}$$

Paso 2: Eliminación gaussiana (matriz escalonada)

$$\begin{array}{l} -3f_1+f_2 \\ -4f_1+f_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 6 & -7 & -25 \end{bmatrix}$$

$$-6f_2+f_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

$x \quad y \quad z \quad =$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & = \end{array}$$

$$1/5f_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 3: Sistema de ecuaciones

$\begin{cases} x-2y+z=9 \\ y-2z=-5 \\ z=1 \end{cases}$ (2)

$y-2(1)=-5 \quad \to y=-3$

$x-2(-3)+1=9 \to x=2$

Paso 4: Conjunto solución y clasificación

$C.S.=\{(2;-3;1)\}$

El sistema es compatible determinado

7.2

EPE

RESOLUCIÓN DE UN SEL: ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Resuelva el sistema de ecuaciones y clasifique $\begin{cases} 2x-2y+z=3 \\ 3x-5y+z=0 \\ x+y+z=5 \end{cases}$

Paso 1: Matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{FILA 1} \\ \leftarrow \text{FILA 2} \\ \leftarrow \text{FILA 3} \end{matrix}$$

Paso 2: Eliminación gaussiana (matriz escalonada)

$$f_1 \leftrightarrow f_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-3f_1+f_2}{-2f_1+f_3} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -15 \\ 0 & -4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & = \end{array}$$

$$-2f_3+f_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Paso 3: Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ y+1/4\,z=15/8 \\ 0z=-1 \rightarrow 0=1 \end{cases}$$

ABSURDO !!!!

Paso 4: Conjunto solución y clasificación

C. S. = { }

$CS = \phi$

~~$CS = \{\phi\}$~~ ojo

7.2

EPE

RESOLUCIÓN DE UN SEL: ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Resuelva el sistema de ecuaciones y clasifique $\begin{cases} 2x-2y+z=3 \\ 3x-5y+z=0 \\ x+y+z=5 \end{cases}$

Paso 1: Matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{FILA 1} \\ \leftarrow \text{FILA 2} \\ \leftarrow \text{FILA 3} \end{matrix}$$

Paso 2: Eliminación gaussiana (matriz escalonada)

$$f_1 \leftrightarrow f_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-3f_1+f_2}{-2f_1+f_3} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -15 \\ 0 & -4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$-2f_3+f_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ y+1/4\,z=15/8 \\ 0z=-1 \rightarrow 0=1 \end{cases}$$

ABSURDO !!!!

Paso 4: Conjunto solución y clasificación

C. S. = { }

El sistema es incompatible.

7.2

EPE

RESOLUCIÓN DE UN SEL: ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Resuelva el sistema de ecuaciones y clasifique $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 4 \\ 4x + y - z = 7 \\ x + 4y - 4z = -2 \end{cases}$

Paso 1: Matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{FILA 1} \\ \longleftarrow \text{FILA 2} \\ \longleftarrow \text{FILA 3} \end{array}$$

Paso 2: Eliminación gaussiana (matriz escalonada)

$$f_1 \leftrightarrow f_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \underline{-4f_1 + f_2} \\ \overline{-3f_1 + f_3} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & -15 & 15 & 15 \\ 0 & -10 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \underline{-1/15 f_2} \\ \overline{-1/10 f_3} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & = \end{array} \\ -f_2 + f_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Paso 3: Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 4y - 4z = -2 \\ \quad\;\; y - z = -1 \\ \quad\;\; 0z = 0 \end{cases} \quad z \in \mathbb{R} \quad \text{PARAMETRIZAR} \quad z = t \,/\, t \in \mathbb{R}$$

Paso 4: Conjunto solución y clasificación

$y - t = -1 \rightarrow y = t - 1$

$x + 4(t - 1) - 4t = -2 \rightarrow x = 2$

C.S. $= \{(2; t - 1; t) / t \in \mathbb{R}\}$

El sistema es compatible indeterminado.

7.2

EPE

CIERRE DE CLASE

Relacione correctamente CLASIFICACIÓN DE UN SEL Y NÚMERO DE SOLUCIONES

- SISTEMA INCOMPATIBLE → NO TIENE SOLUCIÓN
- SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO → TIENE UNA SOLUCIÓN
- SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO → TIENE INFINITAS SOLUCIONES

7.2