MATEMÁTICA BÁSICA – CE82
SEMANA 9 – SP1

Temario: Ley de senos y cosenos.

Logro de la sesión: Al finalizar la sesión, el estudiante realiza operaciones con los vectores en R^2 tanto en forma algebraica y geométrica.

VECTORES EN 2D

MAGNITUD ESCALAR

Es cualquier magnitud matemática o física que se pueda representar solamente por un número real. Ejemplos: longitud (m), área (m^2), volumen (m^3), temperatura en grados kelvin (°K), etc.

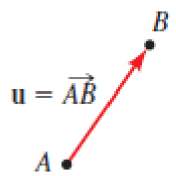
MAGNITUD VECTORIAL

Son aquellas magnitudes en las que además del número que las determina, se requiere conocer la dirección.

Ejemplos: desplazamiento (m), fuerza (N), aceleración (m/s^2), etc.

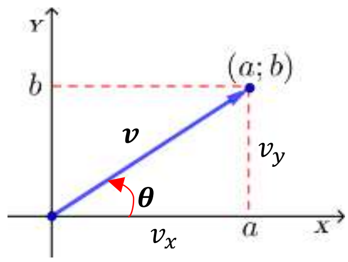
El ente matemático que representa a estas magnitudes se llama **vector**.

Un vector en el plano es un segmento de recta con una dirección asignada. Tracemos un vector como se ve en la figura con una flecha para especificar la dirección. Denotamos este vector con $\overrightarrow{AB}$. El punto A es el **punto inicial** y B es el **punto terminal** del vector $\overrightarrow{AB}$. La longitud del segmento de recta AB recibe el nombre de **magnitud** o **longitud** del vector y está denotado por $|\overrightarrow{AB}| = \|\overrightarrow{AB}\|$.



El vector $\boldsymbol{v}$ está representado por su componente horizontal $\boldsymbol{v_x}$ y componente vertical $\boldsymbol{v_y}$ donde:

$$\boldsymbol{v} = \langle v_x;\ v_y \rangle = \langle a;\ b \rangle$$



MAGNITUD O LONGITUD DE UN VECTOR

$$|\boldsymbol{v}| = \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo:

Determinar la magnitud de cada vector:

a) $u = \langle 2; -3 \rangle$

b) $v = \langle 5; 0 \rangle$

Ejercicios 1:

Determinar la magnitud de cada vector:

a) $u = \langle 0; 7 \rangle$　　b) $v = \langle 4; -3 \rangle$　　c) $w = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

OPERACIONES ALGEBRAICAS CON VECTORES

Si $\boldsymbol{u} = \langle u_1; u_2 \rangle$ y $\boldsymbol{v} = \langle v_1; v_2 \rangle$, entonces:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \langle u_1;\ u_2 \rangle + \langle v_1;\ v_2 \rangle = \langle u_1 + v_1;\ u_2 + v_2 \rangle$$

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \langle u_1;\ u_2 \rangle - \langle v_1;\ v_2 \rangle = \langle u_1 - v_1;\ u_2 - v_2 \rangle$$

$$c\boldsymbol{u} = c\langle u_1;\ u_2 \rangle = \langle cu_1;\ cu_2 \rangle;\ c \in R$$

Ejemplo:

Dados los vectores $u = \langle -4; 7 \rangle$ y $v = \langle 5; -3 \rangle$

Halle:

a) $u + v$

b) $-2u + 3v$

c) $4u - 3v$

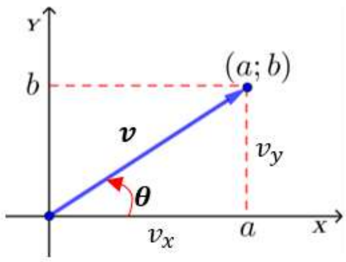
Ejercicios 2:

Dados los vectores $\mathbf{u} = \langle -3; -5 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4; -2 \rangle$,

Halle: a) $u + v$ b) $u - v$ c) $5u - 2v$

DIRECCIÓN DE UN VECTOR

La dirección $\boldsymbol{\theta}$ del vector $\boldsymbol{v}$, se determina por la medida del ángulo positivo más pequeño en posición normal formado por el eje $\boldsymbol{x}$ positivo y el vector $\boldsymbol{v}$.



Si el vector se ubica en el primer cuadrante hallaremos la dirección del vector usando la siguiente expresión.

$$\tan(\boldsymbol{\theta}) = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \boldsymbol{\theta} = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

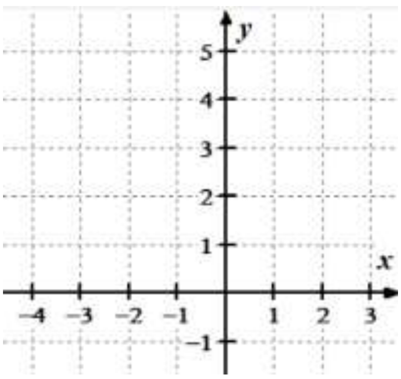
¿Qué ocurre si el vector está ubicado en el IIC, IIIC o IVC?

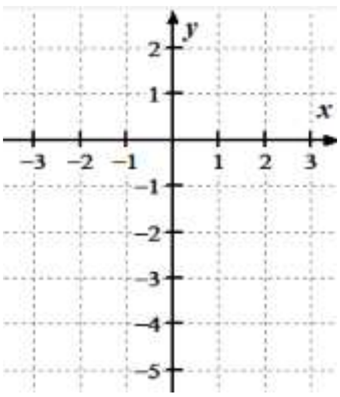
Ejemplos:

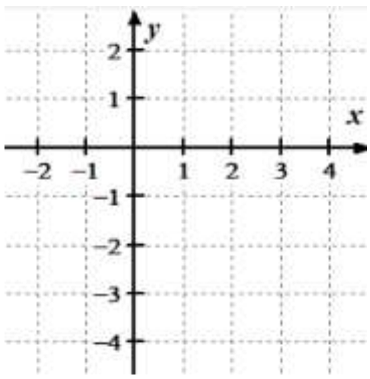
Grafique cada uno de los siguientes vectores y halle la dirección de cada uno de los vectores mostrados a continuación:

a) $u = \langle -3; 4 \rangle$ b) $v = \langle -2; -4 \rangle$ c) $w = \langle 3; -3 \rangle$

Solución:







a) Dirección del vector *u*:

b) Dirección del vector *v*:

c) Dirección del vector *w*:

Ejercicios 3

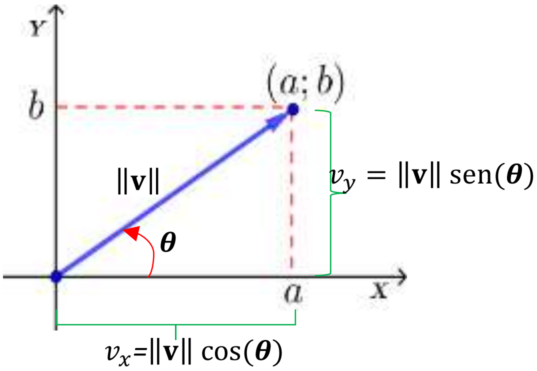
Grafique y halle la dirección de cada uno de los siguientes vectores

a) $u = \langle -5; 4 \rangle$ b) $v = \langle -3; -3 \rangle$ c) $w = \langle 4; -3 \rangle$

VECTOR EN TÉRMINOS DE SU COMPONENTE HORIZONTAL Y VERTICAL

Sea $\boldsymbol{v}$ un vector con magnitud $\|\boldsymbol{v}\|$ y dirección $\boldsymbol{\theta}$. Donde $\mathrm{v}_x = \|\mathbf{v}\|\cos(\boldsymbol{\theta})$ y $\mathrm{v}_y = \|\mathbf{v}\|\,\mathrm{sen}(\boldsymbol{\theta})$. El vector $\mathbf{v}$ se expresa como.

$$\mathbf{v} = \langle \mathrm{v}_x;\ \mathrm{v}_y \rangle = \langle \|\mathbf{v}\|\cos(\boldsymbol{\theta});\ \|\mathbf{v}\|\mathrm{sen}(\boldsymbol{\theta})\rangle$$
$$= \|\mathbf{v}\|\ \langle \cos(\boldsymbol{\theta});\ \ \mathrm{sen}(\boldsymbol{\theta})\ \rangle$$



Ejemplos:

a) Escriba el vector ***v*** en función de sus componentes horizontal y vertical si su módulo es 5 y su dirección es de53°.

b) Escriba el vector ***v*** en función de sus componentes horizontal y vertical si su módulo es 8 y con ángulo de dirección 120°.

VECTOR UNITARIO EN LA DIRECCIÓN DE UN VECTOR

Se llama vector unitario a todo vector cuya magnitud es 1.

Ejemplo:

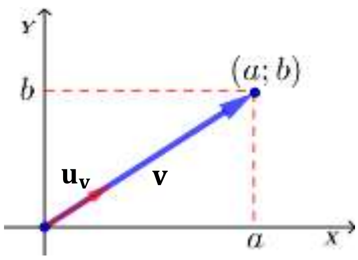
¿El vector $m = \langle 1;1 \rangle$ es vector unitario?

¿El vector $p = \langle 0;1 \rangle$ es vector unitario?

Todo vector *v* tiene asociado un vector unitario que se representa por: u_v y se lee: *vector unitario en la dirección del vector v*.

El vector unitario en la dirección del vector *v* se calcula de la siguiente manera:

$$u_v = —$$



Ejemplo

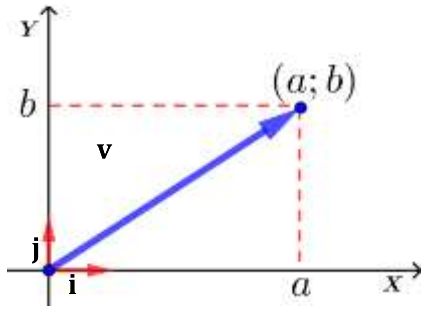
Determine un vector unitario en la dirección de $u = \langle -3; 4 \rangle$.

Ejercicios 4

Determine el vector unitario en dirección de cada uno de los vectores que se muestran a continuación:

a) $u = \langle -3; 3 \rangle$ b) $\mathbf{v} = \langle -5; -12 \rangle$ c) $w = \langle 1; -2 \rangle$

VECTORES EN TÉRMINOS DE i y j



Dos vectores unitarios **i** y **j**, denominado vectores

Canónicos está definidos por:

$$\mathbf{i} = \langle 1; 0\rangle \quad \mathbf{j} = \langle 0; 1\rangle$$

OBS: El vector $\mathbf{v} = \langle a;\ b\rangle$ puede ser expresado en términos de **i** y **j** por

$$\boldsymbol{v} = \langle a;\ b\rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

Ejemplo:

Exprese el vector $u = \langle -5; 4\rangle$ en términos de **i**, **j**

Ejercicios 5

Exprese los siguientes vectores en función de **i**, **j**

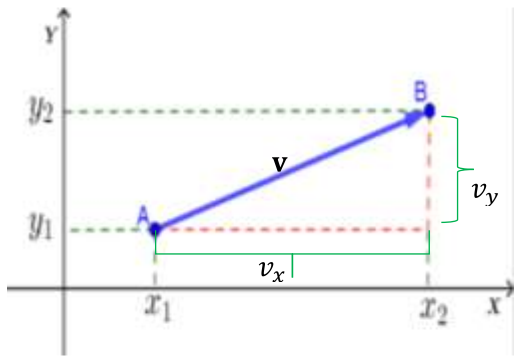
a) $u = \langle -6; 4\rangle$ b) $v = \langle -3; -4\rangle$ c) $w = \langle 4; -3\rangle$

A. El vector $m = \langle -2; 3\rangle$ y el vector $n = -2j + 3i$ ¿Son iguales? ¿por qué?

B. ¿Cuáles son las características de un vector?

C. ¿El vector $\mathbf{u} = \langle 5\operatorname{sen}53°; 5\cos 53°\rangle$ está expresado en función de sus componentes horizontal y vertical correctamente? ¿por qué?

FORMA COMPONENTE DE UN VECTOR



Si un vector **v** está representado en el plano con punto inicial $A(x_1;\ y_1)$ y punto terminal $B(x_2;\ y_2)$, entonces sus componentes son:

$$\mathbf{v}_x = \boldsymbol{x_2 - x_1}\ ;\ \mathbf{v}_y = \boldsymbol{y_2 - y_1}.$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \langle \boldsymbol{x_2 - x_1};\ \boldsymbol{y_2 - y_1}\ \rangle = \langle \mathbf{v}_x;\ \mathbf{v}_y\ \rangle$$

Ejemplo

Determine los vectores AB cuyo punto inicial está representado por A y punto final por B:

a) $A = (-4; 2)$, $B = (-1; 6)$

b) $A = (2; -1)$, $B = (5; 3)$

Ejercicio 6:

Determine los vectores AB cuyo punto inicial está representado por A y punto final por B:

a) $A = (-6; 2)$, $B = (-1; 8)$ b) $A = (2; -4)$, $B = (-3; 6)$ c) $A = (-5; 2)$, $B = (-1; 6)$

PRODUCTO PUNTO O PRODUCTO ESCALAR

Si $\mathbf{a} = \langle a_1;\ a_2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1;\ b_2\rangle$ son vectores, entonces su producto punto o producto escalar, denotado por $\mathbf{v}.\,\mathbf{u}$ está definido por:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Ejemplo

Determine el producto punto o escalar entre los vectores a y b dados a continuación:

a) $a = \langle -5;4\rangle$, $b = \langle -3;-2\rangle$

b) $a = \langle -3;-2\rangle$ $\quad b = \langle -2;5\rangle$

Ejercicio 7:

Determine el producto punto o escalar entre los vectores a y b dados a continuación:

a) $a = \langle -6;2\rangle$, $b = \langle -1;-4\rangle$ $\qquad$ b) $a = \langle -2;-5\rangle$ $\quad b = \langle 2;-6\rangle$

A. ¿El producto escalar entre dos vectores siempre da como resultado un escalar? ¿por qué?

B. ¿Si el producto escalar de dos vectores da 0 entonces necesariamente uno de los vectores es $u = \langle 0;0\rangle$? ¿Por qué?

C. ¿La suma de dos vectores es conmutativa?

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

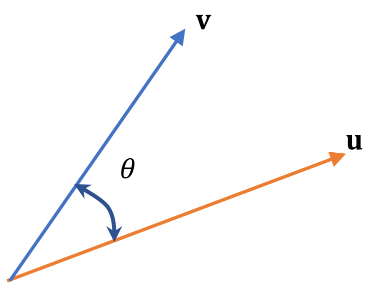
Sean los vectores **v** y **u** el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ determinado por los vectores **u** y **v**.
Se define por:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|\cos\theta\ ;\ \ 0 \le \theta \le \pi \ \text{ o } \ (0 \le \theta \le 180°)$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Entonces

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$



Ejemplo:

Determine el ángulo entre los vectores **u** y **v** dados a continuación:

a) $u = \langle 2;3\rangle$, $v = \langle -2,5\rangle$

b) $u = \langle 2;1\rangle$ $\quad v = \langle -1;-3\rangle$

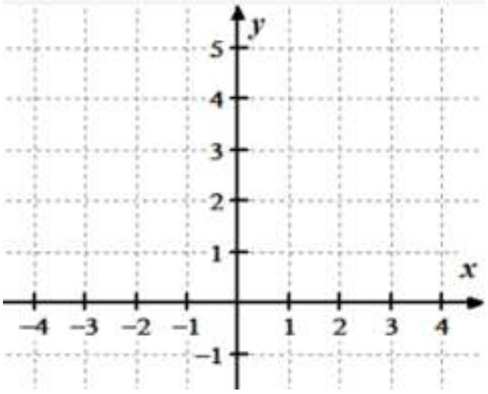
Ejercicio 8:

Determine el ángulo entre los vectores **u** y **v** dados a continuación:

a) $u = \langle 4;6\rangle$, $v = \langle -4;10\rangle$

b) $u = \langle 6;2\rangle$ $\quad v = \langle -1;3\rangle$

VECTORES ORTOGONALES O PERPENDICULARES



Grafique los vectores $a = \langle 3;4 \rangle$, $b = \langle -4;3 \rangle$

¿Qué ángulo forman?

Halle: $a \cdot b$

Dos vectores a y b se llaman ortogonales si y solo si:

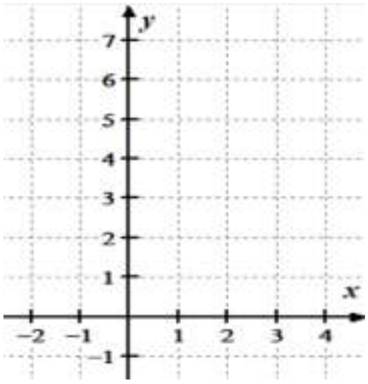
Ejemplo:

Pruebe que los vectores $a = \langle 2;-3 \rangle$ y $b = \langle 6;4 \rangle$ son ortogonales

Ejercicio 9:

Pruebe que los vectores $u = \langle 2;-3 \rangle$ y $v = \left\langle \frac{3}{2};-1 \right\rangle$ son ortogonales

VECTORES PARALELOS



Grafique los vectores $a = \langle 1;2 \rangle$, $b = \langle 3;6 \rangle$

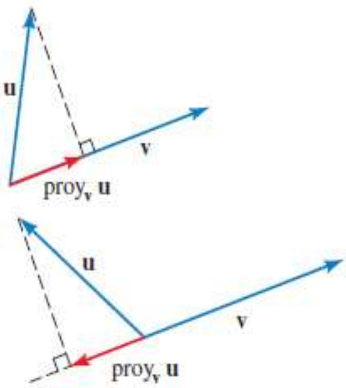
¿Qué ángulo forman?

Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y solo si existe $t \in R$ tal que:

Ejemplo:

Pruebe que los vectores $a = \langle -4;-2 \rangle$ y $b = \langle 10;5 \rangle$ son paralelos

PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE OTRO VECTOR



La proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, denotada por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$, es un vector paralelo a $\mathbf{v}$ y se calcula:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v}$$

Ejemplo:

Determine la proyección del vector *a* sobre *b*, sabiendo que $a = \langle 6;2 \rangle$ y $b = \langle 5;-5 \rangle$.

Ejercicios 10:

a) Halle la proyección *u* de sobre *v*, sabiendo que $u = \langle 6;-2 \rangle$ y $v = \langle 2;0 \rangle$

b) Halle la proyección a sobre b, sabiendo que $a = \langle -3;4 \rangle$ y $b = \langle -2;4 \rangle$.