Actividad Colaborativa 3.1_Relaciones: Propiedades

1. Considere el conjunto $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ y las relaciones R y S definidas en A mediante

$$aRb \iff a - b \text{ es par } (0 \text{ se considera par})$$

La matriz que representa a S es

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine explícitamente (usando notación de conjuntos) los elementos que forman las relaciones R y S. En cada caso, determine dominio y rango.

b) Para cada relación, determine el dígrafo. Además, indique los grados interno y externo de cada elemento de A.

c) Determine la matriz correspondiente a la relación R.

d) ¿Es R una relación de equivalencia? En caso afirmativo determine A/R.

e) ¿Es S una relación de equivalencia? En caso afirmativo, determine A/S.

Solución

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad M_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

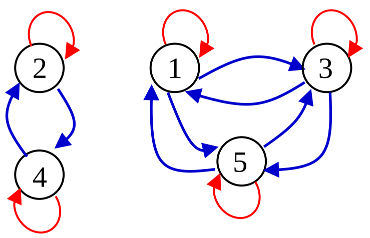
a) $R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

$Dom(R) = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ y $Ran(R) = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$S = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,3), (4,3), (4,4), (4,5), (5,2), (5,5)\}$

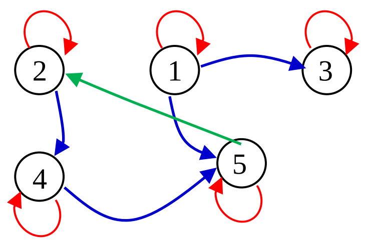
$Dom(S) = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ y $Ran(S) = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

b) Dígrafo de R



Vértice	G.I	G.E
1	3	3
2	2	2
3	3	3
4	2	2
5	3	3

Dígrafo de S



Vértice	G.I	G.E
1	1	3
2	2	2
3	2	1
4	2	2
5	3	2

c) La matriz de R

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

d) Veamos si R es una relación de equivalencia (Reflexiva, Simétrica y Transitiva)

i) R es reflexiva pues m_{ii}

ii) $(M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_R$, luego R es simétrica.

iii) $M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_R$,

entonces R es transitiva.

Por lo tanto, R es una relación de equivalencia.

Conjunto cociente de R

Determinando las clases de equivalencia:

$[1] = \{x \in A \,/\, (x, 1) \in R\} = \{1; 3; 5\} = [3] = [5]$

$[2] = \{x \in A \,/\, (x, 2) \in R\} = \{2; 4\} = [4]$

$A|R = \{\{1; 3; 5\}, \{2; 4\}\}$

e) Veamos si S es una relación de equivalencia (Reflexiva, Simétrica y Transitiva)

i) S es reflexiva pues $m_{ii} = 1$.

ii) $(M_S)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq M_S$, luego R no es simétrica.

Por lo tanto R no es una relación de equivalencia,

2. Considere el conjunto $A = \{1; 2; 3; 6\}$ y las relaciones R y S definidas en A mediante

$$(a; b) \in R \iff 2b \leq a \qquad aSb \iff a\ divide\ a\ b$$

a) Determine explícitamente (usando notación de conjuntos) los elementos que forman la relación S.

b) Analice si cada relación es irreflexiva, asimétrica y antisimétrica.

c) ¿Es R una relación de equivalencia? En caso afirmativo determine A/R.

d) ¿Es S una relación de equivalencia? En caso afirmativo, determine A/S.

Solución

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) $S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,6)\}$

b) Para la relación R:

i) R es irreflexiva pues $m_{ii} = 0$

ii) $M_R \wedge (M_R)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ = matriz NULA, luego la relación R es asimétrica y también antisimétrica

Para la relación S:

i) S no es irreflexiva pues $m_{ii} = 1$.

ii) $M_S \wedge (M_S)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, luego la relación S es antisimétrica.

c) R no es una relación de equivalencia, pues no es reflexiva.

d) S no es una relación de equivalencia, pues no simétrica.

3. En el conjunto $A = \{1; 2; 3; 4; 6\}$ se define la relación R mediante $aRb \iff a\ divide\ a\ b$.

a) Determine explícitamente (usando notación de conjuntos) los elementos que forman la relación R. Determine dominio y rango.

b) Trace el dígrafo de R.

c) Determine los grados interno y externo de todos los elementos de A.

d) Analice si R es irreflexiva, asimétrica y antisimétrica.

e) Es R una relación de equivalencia? En caso afirmativo determine las clases de equivalencia y A/R.

Solución

Tarea

4. En el conjunto $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ se define la relación R como $aRb \iff a^2 - b^2 = a - b$. Verifique que R es una relación de equivalencia y determine A/R.

Solución

Tarea

5. En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales se define la relación R como $xRy \iff 3x - 3y \in \mathbb{Z}$. Muestre que R es una relación de equivalencia. Determine la clase de equivalencia de $2/3$ y $4/5$.

Solución

Tarea

6. En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ defina la relación R como $mRn \iff m^2 = n^2$. Muestre que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. Describa las clases de equivalencia.

Solución

Tarea

7. En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ defina la relación R como

$$mRn \iff m^2 - n^2 \text{ es múltiplo de } 3$$

a) Muestre que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

b) Describa las clases de equivalencia.

c) Halle la clase de equivalencia de 1.

Solución

Tarea

8. Sean A un conjunto no vacío y B un subconjunto de A. En el conjunto $P(A)$ se considera la relación R definida por $XRY \iff X \cap B = Y \cap B$. ¿Es R una relación de equivalencia? En caso afirmativo, describir el conjunto cociente.

Solución

Tarea

9. Sean $A = \{1; 3; 5\}$ y R la relación en A cuya representación matricial es $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Determine si R es o no una relación de equivalencia.

Solución

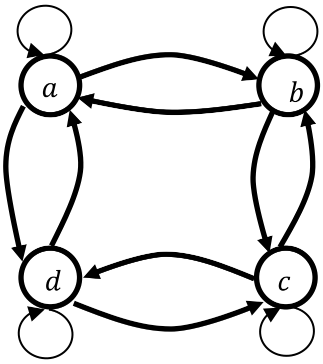
Para que sea de equivalencia R debe ser Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

i) R es reflexiva, pues $m_{ii} = 1$.

ii) R no es simétrica, pues $(M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq M_R$

Luego R no es una relación de equivalencia.

10. Sean $A = \{a; b; c; d\}$ y R la relación en A cuyo dígrafo se muestra en la figura adjunta.



Determine si R es o no una relación de equivalencia.

Solución

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Veamos si R es una relación de equivalencia:

i) R es reflexiva, pues $m_{ii} = 1$

ii) $(M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_R$, luego R es simétrica.

iii) $M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$, luego R no es transitiva.

Por lo tanto, R no es una relación de equivalencia.