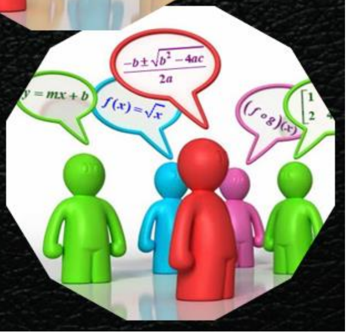
CONTENIDO

- DEFINICIÓN Y ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA
- ECUACIONES DE LA PARÁBOLA
- APLICACIONES DE LA PARÁBOLA



LOGRO

AL TERMINAR LA CLASE , EL ALUMNO SERÁ CAPAZ DE:

- DEFINIR Y REPRESENTAR ALGEBRAICAMENTE Y GRAFICAMENTE UNA PARÁBOLA
- HALLAR LAS ECUACIONES DE UNA PARÁBOLA SEGÚN SUS CARACTERÍSTICAS
- RESOLVER PROBLEMAS DE CONTEXTO REAL RELACIONADOS CON LA PARÁBOLA

A partir de la ecuación de una circunferencia es $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$, identifique su centro, radio y grafique en el plano cartesiano.

$C(-2;1) < \begin{matrix} h=-2 \\ k=1 \end{matrix}$

Radio: $r = 4$

Hallar A y B

• $y = 0$

$(x+2)^2 + 1 = 16$

$(x+2)^2 = 15$

$x + 2 = \pm\sqrt{15}$

$x = -2 \pm \sqrt{15}$

$A(-2-\sqrt{15};0)$ $B(-2+\sqrt{15};0)$

Hallar los puntos de corte con el eje y

• $x = 0$

$4 + (y-1)^2 = 16$

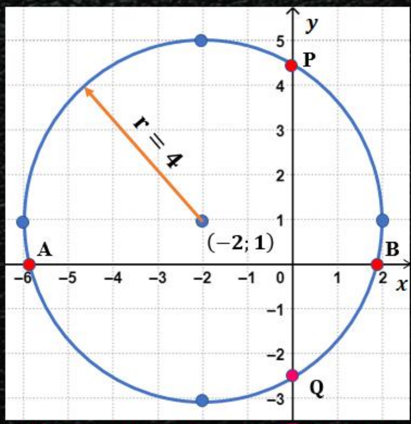
$(y-1)^2 = 12$

$y - 1 = \pm\sqrt{12}$

$y = 1 \pm \sqrt{12}$

$Q(0;1-\sqrt{12})$

$P(0;1+\sqrt{12})$



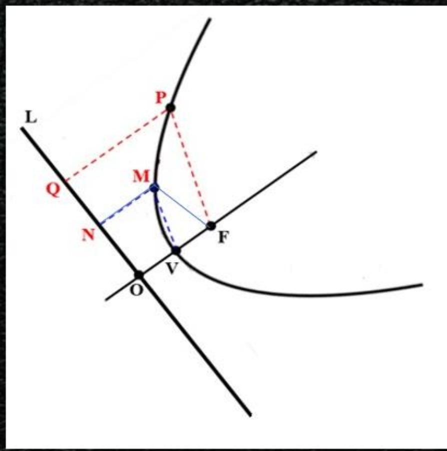
A, B, Q y P ⟶ Desmos

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA PARÁBOLA

PARÁBOLA

Una parábola es el conjunto de puntos del plano que equidistan de una recta fija del plano llamada directriz y un punto fijo llamado foco.

https://www.geogebra.org/m/VGNwWEXB



En la figura adjunta la recta L es la Recta Directriz

El punto F es el Foco

En toda parábola se cumple: d (P; L) = d(P;F)

Es decir:

PQ = PF , MN = MF , VF = OV

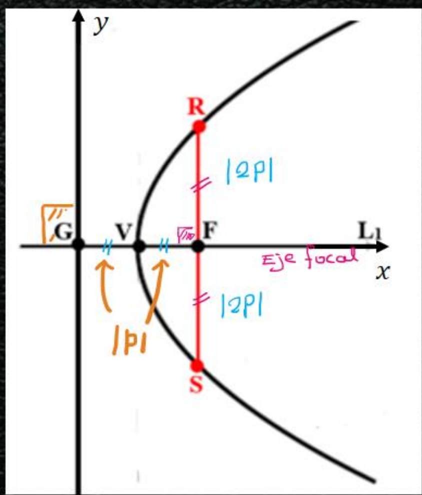
ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

Vértice: V Foco: F

Directriz: L ✓

Eje de simetría (Eje focal): L_1 ✓

Lado recto o ancho focal: RS



La distancia del vértice al foco es igual a la distancia del vértice a la directriz.

Es decir: VG = VF = |p| ✓

La longitud del lado recto o ancho focal es |4p| ✓

ECUACIONES DE LA PARÁBOLA

VÉRTICE: $(h; k)$	EJE FOCAL: PARALELO AL EJE X

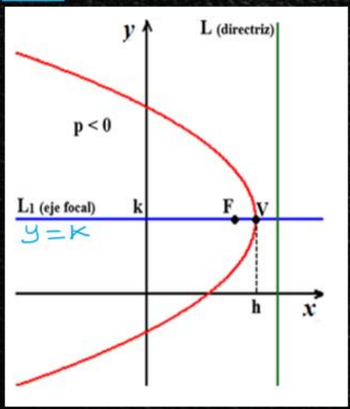
$y = k$

$$(y - \mathrm{k})^2 = 4\mathrm{p}(x - \mathrm{h})$$

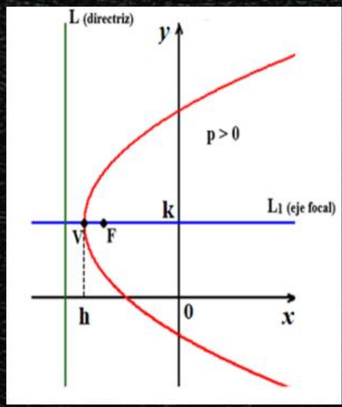
(ecuación ordinaria)

(PARÁBOLA "HORIZONTAL")

Si $\boxed{p < 0}$ la parábola se abre hacia la izquierda.



Si $\boxed{p > 0}$ la parábola se abre hacia la derecha.



$y = k$

ECUACIONES DE LA PARÁBOLA

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ $\quad p < 0$

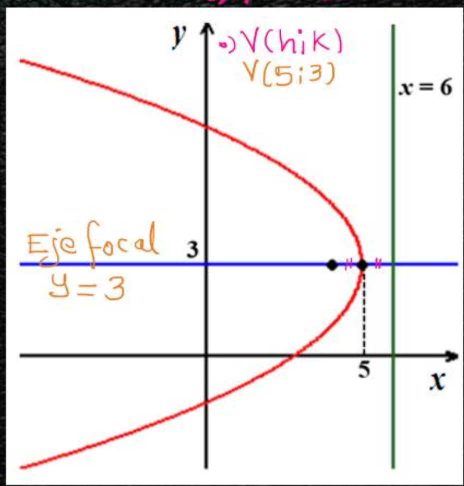
• $p = -1$

Ejemplo:

En la figura adjunta se tiene una parábola cuya directriz es la recta $x = 6$, halle:

• $V(h;k)$

$V(5;3)$



***a*) Coordenadas del vértice:** $V(5\ ;3)$

***b*) El valor de p:** $|p| = |6 - 5| \Rightarrow |p| = 1$

$\Rightarrow p = 1 \lor p = -1$ ✓

***c*) Coordenadas del foco:** $F(5 - 1;\ 3) \Rightarrow F(4\ ;3)$

***d*) Ecuación de la parábola:** $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

$h = 5,\ k = 3,\ p = -1$

$(y - (3))^2 = 4(-1)(x - (5)) \Rightarrow$ **Ecuación:** $(y - 3)^2 = -4(x - 5)$

EJERCICIO $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

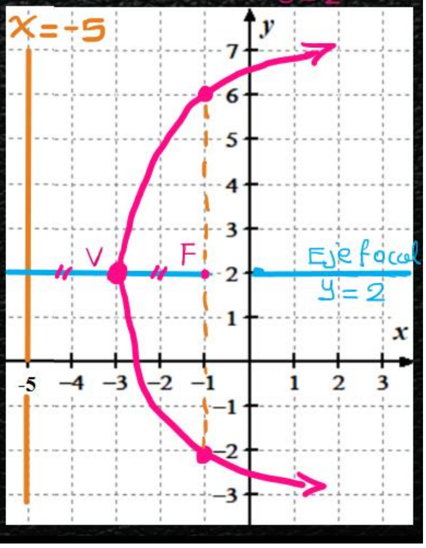
$V(-3;2)$
$F(-1;2)$
$y=2$

El vértice de una parábola es (– 3; 2) y su foco es (– 1; 2). Halle:

a) La ecuación de la parábola

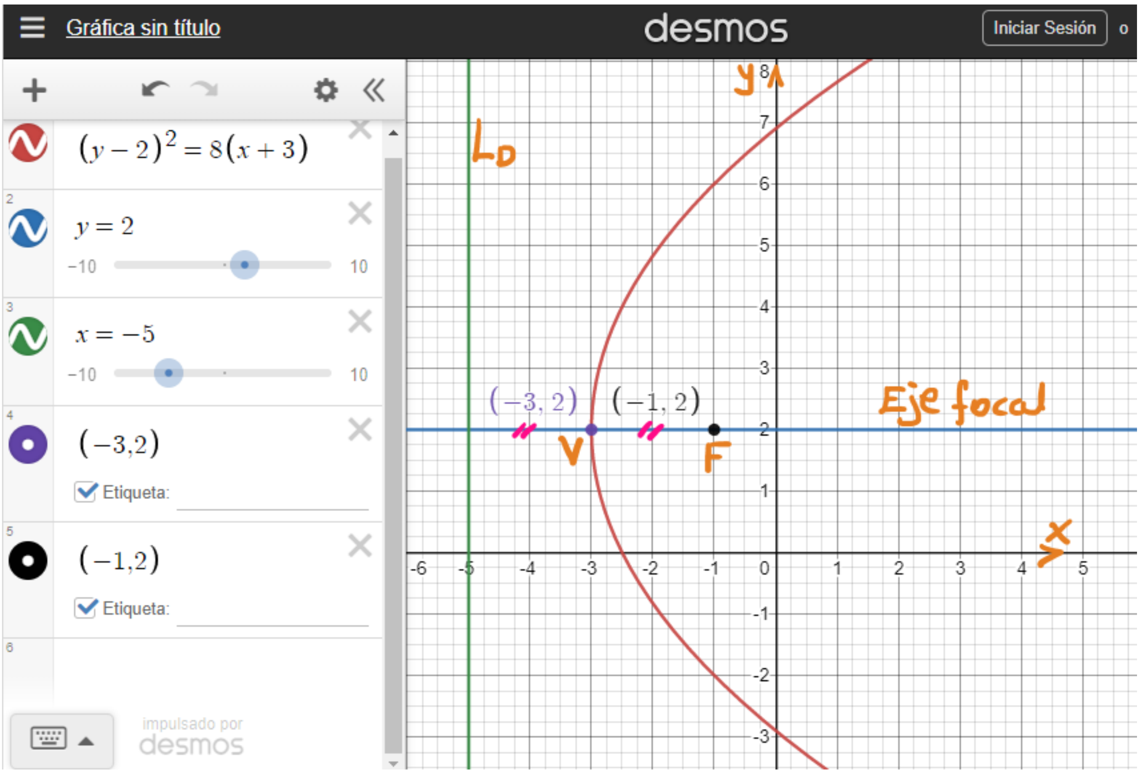
- $p>0 \rightarrow p=+2$
- $V(-3;2) \rightarrow h=-3$, $k=2$

$$\boxed{(y-2)^2 = 4(2)(x-(-3))}$$



b) La ecuación de la directriz : $L: x=-5$

c) El ancho focal $|4p| = 8$



ECUACIONES DE LA PARÁBOLA

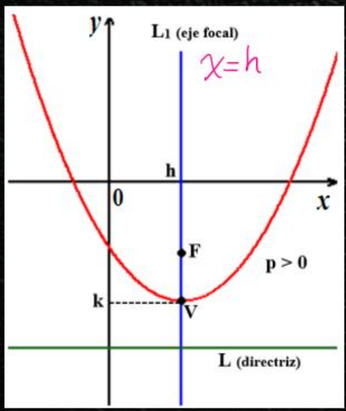
VÉRTICE: $(h; k)$	EJE FOCAL: PARALELO AL EJE Y

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

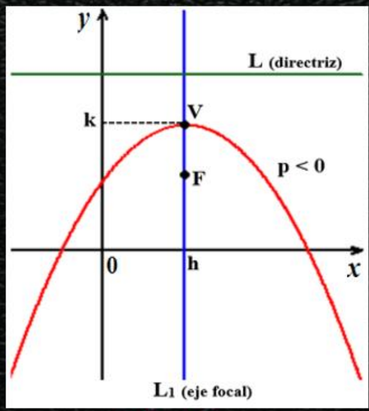
(ecuación ordinaria)

(PARÁBOLA "VERTICAL")

Si $p > 0$ la parábola se abre hacia arriba.



Si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo.



$x=h$

Ejemplo:

En la figura adjunta se tiene una parábola, halle:

a) Coordenadas del vértice $V(4;-3)$

b) El valor de p: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$(x-4)^2 = 4p(y+3)$

Punto:

$A(0;1)$ $\quad (0-4)^2 = 4p(1+3) \Rightarrow 16 = 16p$

$p = 1$

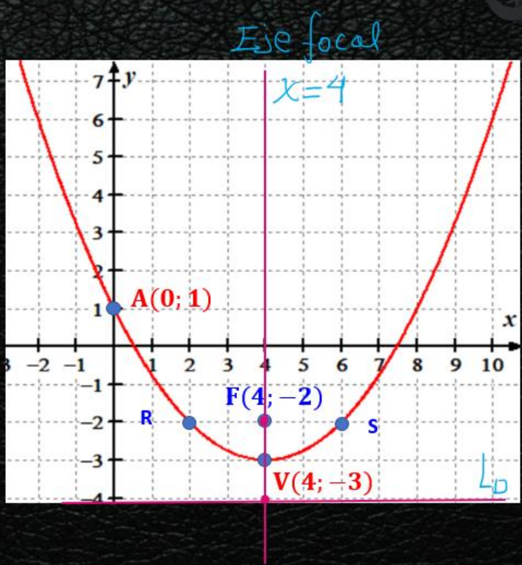
c) Ecuación de la curva: $(x-4)^2 = 4(y+3)$

d) Coordenadas del foco:

$F(4;-3+|p|) \Rightarrow F(4;-2)$

e) Coordenadas de los extremos del lado recto.

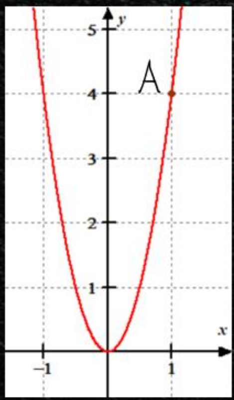
$R(2;-2)$ y $S(6;-2)$



EJERCICIO

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ $\qquad$ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Halle la ecuación de la parábola encada caso:



$V(0;0) \begin{cases} h=0 \\ k=0 \end{cases}$

$x^2 = 4py$

$A(1;4) \in$ Parábola

$1^2 = 4p(4)$

$1 = 16p$

$\frac{1}{16} = p$

$\therefore\ x^2 = 4\left(\frac{1}{16}\right)y$

$V(0;0) \begin{cases} h=0 \\ k=0 \end{cases}$

$y^2 = 4px$

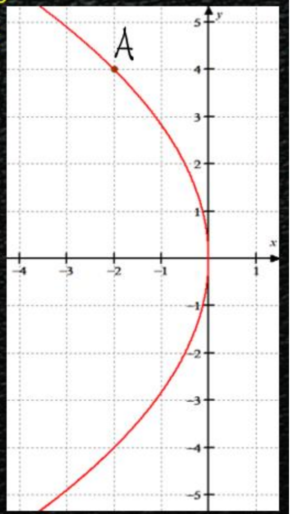
•) $A(-2;4)$ pertenece a la parábola

$4^2 = 4p(-2)$

$16 = -8p$

$-2 = p$

$\therefore\ y^2 = -8x$



EJERCICIO

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ $\qquad$ $V(h;k) = V(4;8)$

$F(4;6)$ → Eje focal $x=4$

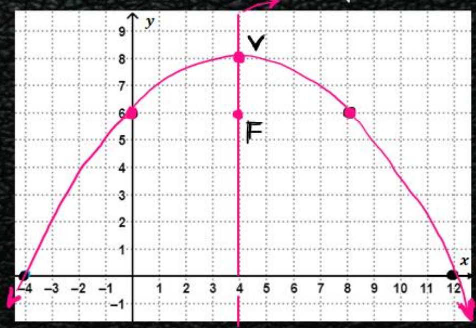
Sabiendo que el vértice de una parábola es (4; 8) y su foco es (4; 6), halle:

a) El valor de p. $\quad p<0 \rightarrow p=-2$

b) La ecuación de la parábola.

$(x-4)^2 = -8(y-8)$

c) Las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados.



•) Con el eje x

$y=0$

$(x-4)^2 = -8(-8)$

$(x-4)^2 = 64$

$x-4 = \pm\sqrt{64}$

$x-4 = \pm 8$

$x = -8+4 = -4$

$x = +8+4 = 12$

$(-4;0)$ $\quad$ $(12;0)$

•) Con el eje y $(x=0)$

$(-4)^2 = -8y+64$

$8y = 64-16 = 48$

$y = 6$ $\qquad$ $(0;6)$

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Complete la información para cada una de las siguientes parábolas.

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

ECUACIÓN	ECUACIÓN ORDINARIA	VÉRTICE	VALOR DE p	ORIENTACIÓN
$(y+3)^2=3x+6$	$(y+3)^2 = 3(x+2)$	$V(-2;-3)$	$4p = 3$ $p = 3/4$	Horizontal
$x^2+2y=6$	$x^2 = -2(y-3)$	$V(0;3)$	$4p = -2$ $p = -1/2$	Vertical
$y^2+12x=0$	$y^2 = -12x$	$V(0;0)$	$4p = -12$ $p = -3$	Horizontal

$x^2 = -2y+6$

$x^2 = -2(y-3)$

ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Para las parábolas con eje focal paralelo a uno de los ejes coordenados se cumple que $A = 0$ o $B = 0$.

Ejemplo

La ecuación general de una parábola es $x^2 + 6x - 16y + 57 = 0$ halle su ecuación ordinaria.

En este caso observa que $A = 1$ y $B = 0$, esto implica que la variable y es de primer grado, por lo tanto se puede afirmar que su eje focal es paralelo al eje y (se abre hacia arriba o abajo)

COMPLETAR CUADRADOS

$$x^2 + 6x = 16y - 57$$

$$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 16y - 57 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 6x + (3)^2 = 16y - 57 + 9$$

$$(x+3)^2 = 16y - 48$$

Ecuación ordinaria

$$(x+3)^2 = 16(y-3)$$

ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

$(y-3)^2 = (y-3)(y-3)$

$= y^2 - 3y - 3y + 9$

Ejemplo

La ecuación de una parábola es $(y-3)^2 = 6(x-2)$ halle su ecuación general.

Ecuación ordinaria: $(y-3)^2 = 6(x-2)$

$$y^2 - 2(y)(3) + 3^2 = 6x - 12$$

$$y^2 - 6y + 9 - 6x + 12 = 0$$

Ecuación general. $\boxed{y^2 - 6y - 6x + 21 = 0}$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

$(y-k)^2=4p(x-h)$

La ecuación general de una parábola es $y^2+4x-8y+4=0$ halle las coordenadas de su vértice, foco, puntos de intersección con los ejes coordenados, esboce de gráfico.

$(y-4)^2=-4(x-3)$

$y^2-8y+4^2=-4x-4+4^2$

$V(3;4)$

$4p=-4$

$p=-1$

$F(2;4)$

$A(0;0{,}54)$

$y^2-8y+4=0$

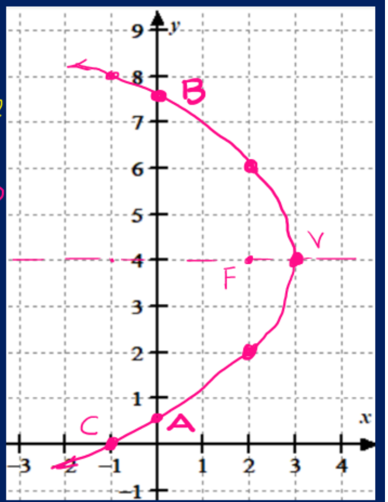
$B(0;7{,}46)$

$C(-1;0)$

$4x+4=0$

$4x=-4$

$x=-1$



2.1

APLICACIONES DE LA PARÁBOLA

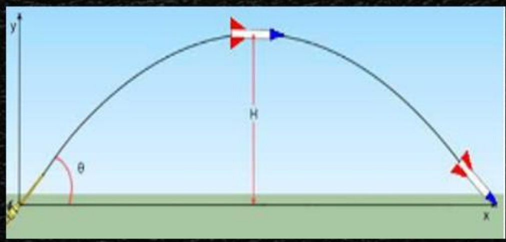
APLICACIONES DE LA PARÁBOLA

FUENTES Y AGUA

El desplazamiento bajo la acción de la atracción gravitatoria de la Tierra permite obtener bonitos arcos parabólicos. Como el caso de los chorros y las gotas de agua que salen de los caños de las numerosas fuentes que podemos encontrar en las ciudades.

TRAYECTORIA DE PROYECTIL

Se denomina movimiento parabólico al realizado por un objeto cuya trayectoria describe una parábola. Se corresponde con la trayectoria ideal de un proyectil que se mueve en un medio que no ofrece resistencia al avance y que está sujeto a un campo gravitatorio uniforme.



APLICACIONES DE LA PARÁBOLA

Si el punto A está a 50 metros del poste más cercano, halle a que altura está respecto de la base del puente.

Primero:

Establecer un sistema de coordenadas

Planteo de la ecuación:

Datos

Vértice: V(0;20) Punto: B (300;170)

Ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$(300-0)^2 = 4p(170-20)$

Entonces: $4p = 600$

Ecuación $x^2 = 600(y-20)$

Hallando la altura H

Remplazando A en la ecuación

$(-250)^2 = 600(H-20)$

Entonces $H = 124,1666..$

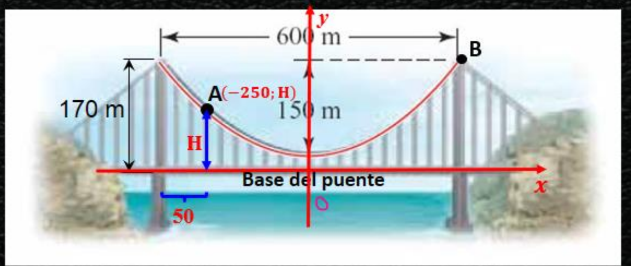
P es un punto cualquiera de la de la parábola que representa el cable de suspensión parabólico

Definición:

x = posición de un punto de la curva al eje y en metros

y = posición de un punto de la curva al eje x en metros

Restricción: $-300 \le x \le 300$ $\quad 20 \le y \le 170$



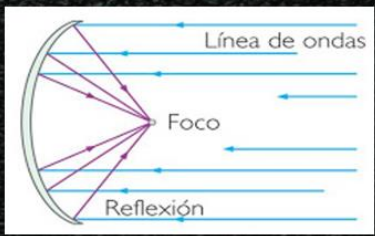
Redacción: El punto A está a una altura de 124,17 metros aprox respecto de la base del puente.

PROPIEDADES DE REFELEXIÓN DE LA PARÁBOLA

PROPIEDAD DE REFLEXIÓN DE LA PARÁBOLA

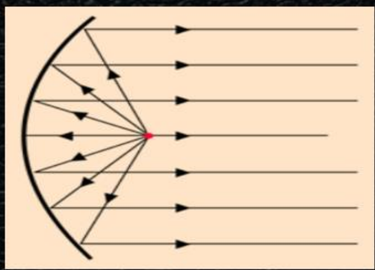
Todos los rayos que inciden en una superficie parabólica y que son paralelos al eje focal son reflejados hacia el foco de la parábola.

https://www.geogebra.org/m/xHwBqDwv



Todos los rayos procedentes del foco de una parábola hacia su superficie serán dirigidos hacia el exterior como rayos paralelos al eje focal.

https://bit.ly/2IMlA80

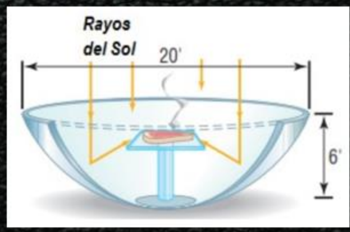


PROBLEMA

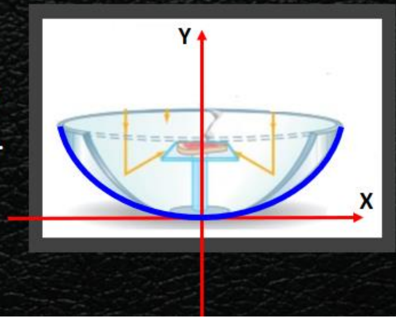
Un espejo tiene la forma de un paraboloide de revolución y se usará para concentrar los rayos del sol en su foco, creando así una fuente de calor. El espejo tiene 20 pies de abertura y 6 pies de profundidad.

a) ¿Dónde se concentrará la mayor concentración de calor?

Se encuentra en el foco del espejo con forma de paraboloide



b) Escoja un sistema de coordenadas rectangular adecuado y escriba una ecuación para una sección transversal del espejo. (defina variables y coloque restricciones).



PROBLEMA

$V(0;0)$ $(x-0)^2 = 4p(y-0)$

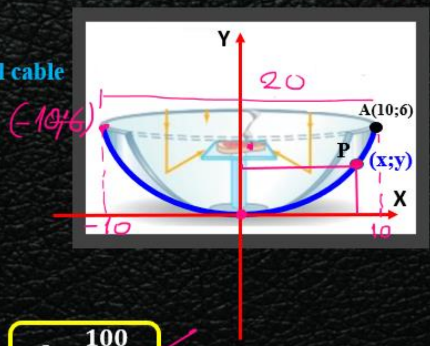
b) Escoja un sistema de coordenadas rectangular adecuado y escriba una ecuación para una sección transversal del espejo. (defina variables y coloque restricciones).

$x^2 = 4py$

Primero:

Establecer un sistema de coordenadas

P es un punto cualquiera de la de la parábola que representa el cable de suspensión parabólico



Definición:

x = posición de un punto de la curva al eje y en pies

y = posición de un punto de la curva al eje x en pies

Restricción:

$-10 \leq x \leq +10$

$0 \leq y \leq 6$

Ecuación:

Vértice V(0;0)

Punto A(10;6)

Planteo:

$x^2 = 4py$

$10^2 = 4p6$

Entonces

$4p = \frac{100}{6}$

$\boxed{x^2 = \frac{100}{6}y}$