REPASO

Halle el límite en cada caso:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right) = \frac{(2)^2-4}{2+2} = \frac{4-4}{4} = \frac{0}{4} = 0 \in \mathbb{R}$$

$$b)\ \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}}\left(\frac{3-\operatorname{sen}x}{2+\cos x}\right) = \frac{3-\operatorname{Sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2+\operatorname{Cos}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{3-(-1)}{2+0} = \frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{R}$$

$$c)\ \lim_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{-x}}{e^{x+1}-2^x}\right) = \frac{\sqrt{-1+5}+\sqrt{-(-1)}}{e^{-1+1}-2^{-1}} = \frac{\sqrt{4}+\sqrt{1}}{e^0-\frac{1}{2}} = \frac{2+1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

EPE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Efectúe:

$a)\ (3x+4)^2 = (3x)^2+2(3x)(4)+(4)^2 = 9x^2+24x+16$

$b)\ (x+5)(x-5) = (x)^2-(5)^2 = x^2-25$	$c)\ (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) = x-9$

Factorice:

$d)\ x^2-49 = (x)^2-(7)^2 = (x-7)(x+7)$	$e)\ x^2-7x = x(x-7)$
$f)\ x^2-7x-8 = (x-8)(x+1)$	$g)\ x^3-4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$

$$\begin{array}{cc} x & -8 \\ x & 1 \end{array}$$

1.2

EPE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Efectúe:

$a)\ x^2 - 36 = (x-6)(x+6)$

$b)\ \left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}-4\right) = (\sqrt{x})^2 - (4)^2 = x - 16$

Factorice:

$c)\ x^2 - 7x + 12 = (x-4)(x-3)$

$x \quad -4$

$x \quad -3$

$d)\ x^3 - 25x = x\underbrace{(x^2 - 25)} = x(x-5)(x+5)$

EPE

$f(2)$ no existe

LÍMITES DE FUNCIONES EQUIVALENTES

Dos funciones f y g cuyas reglas son $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente son equivalentes en un dominio D, si para todo $x \in D$ se cumple que $f(x) = g(x)$.

2

Por ejemplo $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ **y** $g(x) = x + 2$ **son funciones equivalentes si** $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \overbrace{x+2}^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Si f y g son funciones equivalentes se cumple que: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

en caso de que exista el límite.

Para el ejemplo anterior

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

1.2

EPE

LÍMITES DE FORMAS INDETERMINADAS

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\frac{0}{0}$$

Si halla el $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$ aplicando sustitución directa se obtiene: $\frac{0}{0}$

Este caso se conoce como límite de una forma **INDETERMINADA**

> De manera general, si $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$
>
> Entonces: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Las formas indeterminadas son: $\frac{0}{0};\frac{\pm\infty}{\pm\infty};\infty-\infty;1^{\infty};0^{0};\infty^{0}$

Los tipos de formas indeterminadas que se estudiaran en este curso son: $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty$

$\frac{0}{0}$ y $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

1.2

Slide 8 of 47

PE

LÍMITE DE FORMA INDETERMINADA : 0/0

x^2+x-2
$x \quad 2$
$x \quad -1$

Ejemplo:

Determine el límite (si es que existe): $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x-2}{x^2-x}\right)=\frac{(1)^2+(1)-2}{(1)^2-1}=\frac{0}{0}$

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}=\frac{x+2}{x};\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$$

F. equivalentes

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x-2}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x}\right)=\frac{1+2}{1}=3\in\mathbb{R}$$

2

Caso 1: Factoriza

Caso 2: Conjugada

LÍMITE DE FORMA INDETERMINADA : 0/0

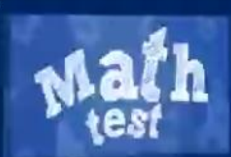
Ejemplo:

Determine el límite (si es que existe): $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}}{h}\right) = \frac{\sqrt{0+2}-\sqrt{2}}{0} = \frac{0}{0}$

$$\frac{(\sqrt{h+2}-\sqrt{2})}{h}\cdot\frac{(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})} = \frac{(\cancel{\sqrt{h+2}})^{\cancel{2}}-(\cancel{\sqrt{2}})^{\cancel{2}}}{h(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{h+\cancel{2}-\cancel{2}}{h(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})} = \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{h+2}+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{h+2}+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



Halle los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-9x}{x-3}\right) = \frac{(3)^3-9(3)}{3-3} = \frac{27-27}{0} = \frac{0}{0}$

$$\frac{x^3-9x}{x-3} = \frac{x\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = x(x+3)$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-9x}{x-3}\right) = \lim_{x\to 3}\left(x(x+3)\right) = 3(6) = 18$$

Halle los siguientes límites

$b)\ \lim_{x\to 9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}\right) = \frac{3-\sqrt{9}}{9-9} = \frac{3-3}{0} = \frac{0}{0}$

$$\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}\cdot\frac{(3+\sqrt{x})}{(3+\sqrt{x})} = \frac{(3)^2-(\sqrt{x})^2}{(x-9)(3+\sqrt{x})} = \frac{9-x}{(x-9)(3+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{-\cancel{(x-9)}}{\cancel{(x-9)}(3+\sqrt{x})} = \frac{-1}{3+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}\right) = \lim_{x\to 9}\left(\frac{-1}{3+\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{6}$$

CONOCIMIENTOS PREVIOS

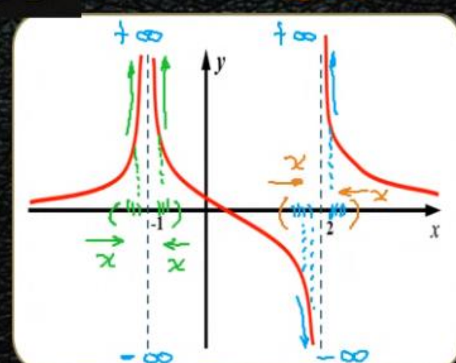
Asíntotas Verticales

$x=-1$ $\quad$ $x=2$

En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función f

$a)\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $b)\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

$c)\ \lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $d)\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$



Conclusion

Un límite en el que $f(x)$ crece o decrece ilimitadamente (es decir, tiende a más o menos infinito) cuando x tiende a un valor a se llama:

LÍMITE INFINITO

Falso

¿ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$?

¿ $+\infty \neq +\infty$?

$1000000 \neq 10'000000$

1.2

EPE

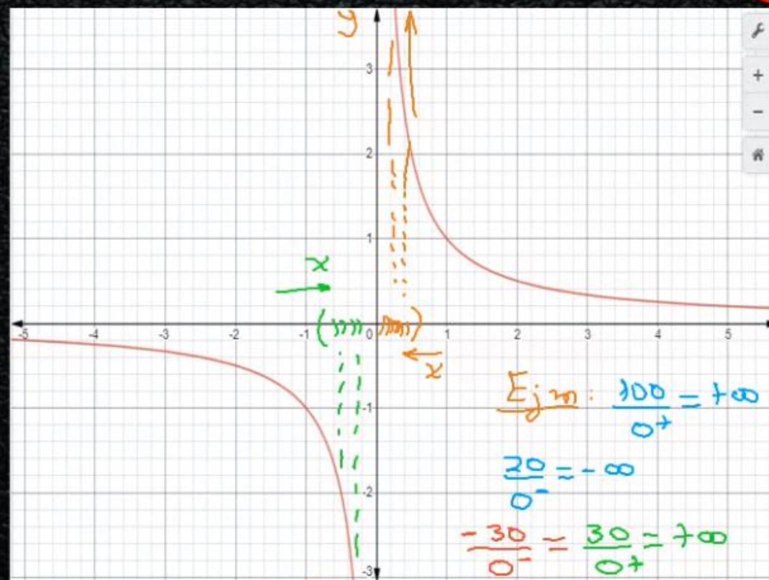
LÍMITES INFINITOS

$y = f(x) = \frac{1}{x}$

x	$y = 1/x$
0,1	10
0,001	1000
0,0001	10000
0,00001	100000
0,000001	1000000

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$



Ejm: $\frac{100}{0^+} = +\infty$

$\frac{20}{0^-} = -\infty$

$\frac{-30}{0^-} = \frac{30}{0^+} = +\infty$

A.VerT: $x = 0$

$\frac{-17}{0^+} = -\infty$

1.2

EPE

LÍMITES INFINITOS

x	$y = 1/x$
0,1	10
0,001	1000
0,0001	10000
0,00001	100000
0,000001	1000000

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

1.2

recuerda

Si $x \to 5^+ \Rightarrow x-5 > \underline{0}$,por lo tanto se puede afirmar que $x-5 \to \underline{0^+}$

$x>5$

Si $x \to 8^- \Rightarrow x-8 < \underline{0}$,por lo tanto se puede afirmar que $x-8 \to \underline{0^-}$

$x<8$

Si $x \to -6^- \Rightarrow x+6 < \underline{0}$,por lo tanto se puede afirmar que $x+6 \to \underline{0^-}$

$x<-6$

Ejemplos: Halle

$a)\ \lim_{x\to 2^+}\frac{3}{x-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$x>2$

$x-2>0$

$b)\ \lim_{x\to 2^-}\frac{3}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

$x<2$

$x-2<0$

$c)\ \lim_{x\to 7^+}\frac{1}{7-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$x>7$

$0>7-x$

$7-x<0$

$d)\ \lim_{x\to 7^-}\frac{1}{7-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x<7$

$0<7-x$

EPE

$a)\ \lim_{x\to 3}\frac{7}{(x-3)^5} = \infty$ Falso

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{7}{(x-3)^5} = \frac{7}{(0^+)^5} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

$x>3$

$x-3>0$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{7}{(x-3)^5} = \frac{7}{(0^-)^5} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

$x<3$

1.2 $x-3<0$

No se concluye nada $\not\to$

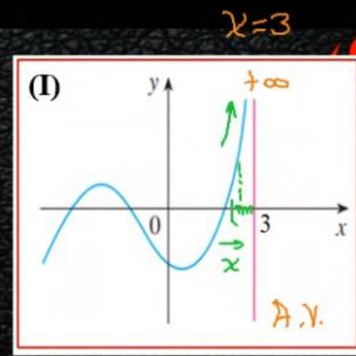
EPE

ASÍNTOTAS VERTICALES

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Las asíntotas verticales son rectas verticales a las cuales la función se va acercando indefinidamente sin llegar a intersectarlas.

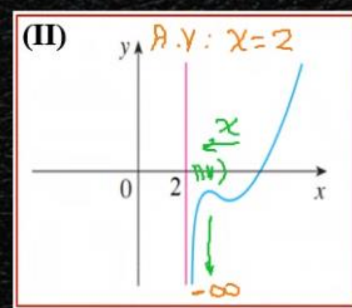
La ecuación de la asíntota vertical que pasa por el número a es $x = a$



En la figura (I) cuando x tiende a 3 por la IZQUIERDA **los valores de f tienden a** $+\infty$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

Por lo tanto, la recta $x = 3$ **es una asíntota vertical.**



En la figura (II) cuando x tiende a 2 por la DERECHA **los valores de f tienden a** $-\infty$

Por lo tanto, la recta $x = 2$ **es una asíntota vertical.**

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

1.2

EPE

EJERCICIO

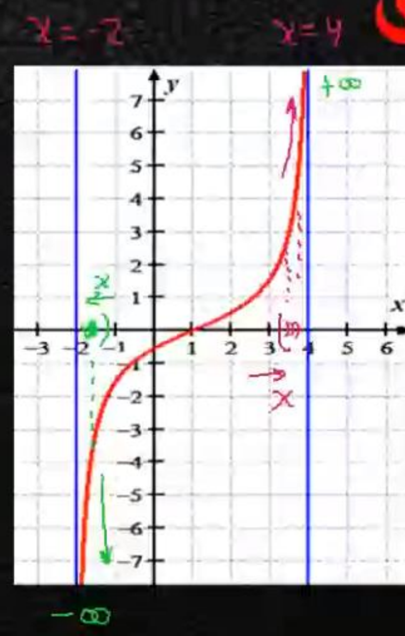
En la figura adjunta se tiene la gráfica de una función f cuya regla es $y = f(x)$, halle la ecuación de cada asíntota y justifique.

A.V. $x = -2$ Justificar:

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

A.V. $x = 4$ Justificar:

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$



1.2

EPE

Math test

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^3-x}$ **, halle las ecuaciones de las asíntotas verticales, si es que existen.**

$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^3 - x \neq 0\}$

$x(x-1)(x+1) \neq 0$

$x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$

- $f(x) = \dfrac{\cancel{x}(x-2)}{\cancel{x}(x-1)(x+1)} = \dfrac{x-2}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)(x+1)}$
- $(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-1}{0^+ 2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \Rightarrow$ A. Vertical $x = 1$

$x > 1$

$x - 1 > 0$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-3}{-2.0^+} = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty \Rightarrow$ A. Vertical $x = -1$

$x > -1 \quad x + 1 > 0$

1.2

EPE

LÍMITES AL INFINITO

x	$y = 1/x$
10	0,1
100	0,01
1000	0,001
10000	0,0001
100000	0,00001

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ejemplos: Halle

$a) \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8}{x^3}\right) = 0$

$b) \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-7}{x^6}\right) = 0$

Ejemplos: Halle

$a) \lim\limits_{x\to\infty} x^4 = (+\infty)^4 = +\infty$ $\quad b) \lim\limits_{x\to-\infty} x^6 = (-\infty)^6 = +\infty$

$c) \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = (-\infty)^5 = -\infty$

1.2

EPE

EJERCICIOS

Halle los siguientes límites

$a)\ \lim_{x\to\infty} x^6 = (+\infty)^6 = +\infty$ $\quad b)\ \lim_{x\to-\infty} x^{11} = (-\infty)^{11} = -\infty$ $\quad c)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(-\infty)^3} = \frac{1}{-\infty} = 0$

$d)\ \lim_{x\to\infty} 2^x = 2^{+\infty} = +\infty$

$f)\ \lim_{x\to\infty} 5^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5^x} = \frac{1}{5^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$e)\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3^x} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$g)\ \lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

1.2

LÍMITE DE FORMA INDETERMINADA : ∞ / ∞

LÍMITES AL INFINITO DE FUNCIONES RACIONALES

Ejemplos: Halle

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{x}\right)$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{x^3}\right)$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3+1}{x}\right)$

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{x}\right) = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{x}+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right) = 5+0=5$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{x^3}\right) = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5\cancel{x}}{\cancel{x^3}_2}+\frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = 0$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3+1}{x}\right) = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}}+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(5x^2+\frac{1}{x}\right) = \infty$

A. Verticales: $x = a$ A. Horizontales : $y = a$

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

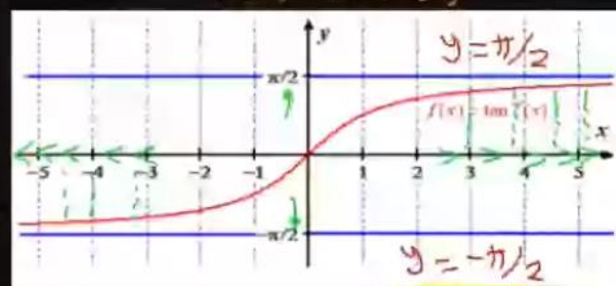
Las asíntotas horizontales son rectas horizontales a las cuales la función se va acercando indefinidamente a medida que la variable independiente aumenta o disminuye ilimitadamente.

La ecuación de la asíntota horizontal que pasa por el número *a* es $y = a$

En la figura adjunta observe que cuando x crece ilimitadamente, ósea $x \to \infty$ $f(x)$ se aproxima a $\pi/2$. Por lo tanto, la recta $y = \frac{\pi}{2}$ es una asíntota horizontal.

$f(x) = \tan^{-1}(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$



En la figura adjunta observe que cuando x decrece ilimitadamente, ósea $x \to -\infty$ $f(x)$ se aproxima a $-\pi/2$. Por lo tanto, la recta $y = -\frac{\pi}{2}$ es una asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

$\boxed{y = a}$ Es la ecuación de una asíntota horizontal (AH) de una función f cuya regla es $y = f(x)$ si se cumple alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

Ejemplo: Halle las ecuaciones de las asíntotas horizontales en cada caso

a) $f(x) = 5^x$ $\quad \lim_{x \to +\infty} 5^x = 5^{+\infty} = \infty$

Este resultado indica que cuando x se va al más infinito los valores de la función también se van al más infinito, por lo tanto no hay asíntota horizontal por la derecha.

$$\lim_{x \to -\infty} 5^x = 5^{-\infty} = \frac{1}{5^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal (por la izquierda).

b) $f(x) = \dfrac{7}{x-4}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{7}{x-4}\right) = \frac{7}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{7}{x-4}\right) = \frac{7}{-\infty} = 0$$

Observa en este caso que cuando x tiende a más o menos infinito se obtiene el mismo resultado en este caso cero. Significa que solo hay una asíntota horizontal por ambos lados.