MATEMÁTICA BÁSICA – CE82
SEMANA 3 – SP1

Temario: Inecuaciones cuadráticas, función, funciones monótonas.

Logro de la sesión: Al término de la sesión el estudiante resuelve inecuaciones de segundo grado, reconoce una función, determina su dominio y rango y reconoce cuando una función es monótona.

INECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA

Una inecuación cuadrática con una incógnita es aquella que se puede transformar en otra equivalente que tenga una de las siguientes formas: $ax^2+bx+c<0$; $ax^2+bx+c>0$; $ax^2+bx+c\leq 0$; $ax^2+bx+c\geq 0$

El conjunto solución se determina factorizando la expresión algebraica y luego (para este curso) aplicando el método de los números críticos.

Números críticos: son aquellos números que se obtienen al igual a cero cada factor

Ejemplo:

Resuelva la inecuación: $\boldsymbol{x^2-4x<5}$

Paso 1: El segundo miembro de la inecuación se deja en cero

$\mathbf{x^2-4x-5<0}$

Paso 2: Factorice

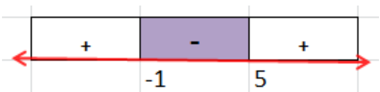
$\mathbf{(x-5).(x+1)<0}$

Paso 3: Halle los números críticos

$\mathbf{x+1=0\rightarrow x=-1}$

$\mathbf{x-5=0\rightarrow x=5}$

Paso 4: Ubique los números críticos en la recta numérica y analice los signos.



Paso 5: CONJUNTO SOLUCIÓN

C.S.=]-1; 5[

Ejercicio 5: Resuelva la inecuación: $x^2\geq 81$

Paso 1: El segundo miembro de la inecuación se deja en cero

$\mathbf{x^2-81\geq 0}$

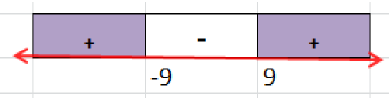
Paso 2: Factorice
$\mathbf{(x-9).(x+9)\geq 0}$

Paso 3: Halle los números críticos

$\mathbf{x+9=0\rightarrow x=-9}$

$\mathbf{x-9=0\rightarrow x=+9}$

Paso 4: Ubique los números críticos en la recta numérica y analice los signos.



Paso 5: CONJUNTO SOLUCIÓN

C.S.=]-∞;-9]∪[+9;+∞[

A. ¿Al resolver la inecuación $x^2 \leq -4$, obtenemos $x \in \varnothing$? ¿explique el significado?

No hay número positivo (x^2) menor que un número negativo.

B. ¿El conjunto solución de $x^2 < 0$, es todo **R**? **No, no hay número positivo(x^2) menor que cero**

C. ¿El conjunto solución de $(x-3)^2 > 0$, es $x = 3$? **No, porque no cumple la desigualdad, no se cumple que 0>0**

FUNCIÓN

Muchas magnitudes dependen de otras, por ejemplo:

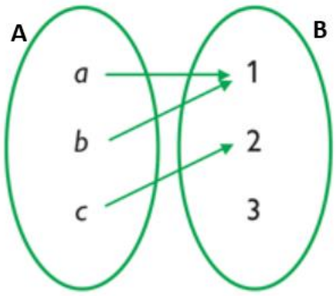
- Los costos totales de producción (C), dependen de la cantidad de artículos a producir (q).
- El área (A) de un círculo depende del radio (r).
- El espacio recorrido por un automóvil (e) depende del tiempo (t).

Para describir como una magnitud depende o es determinada por otra se usa el concepto de función.

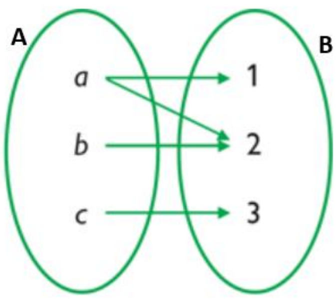
Una función es una relación entre dos conjuntos A y B tales que a cada elemento del conjunto A le corresponde un solo elemento del **conjunto B**.

También podemos decir que una función es una relación entre dos variables que asocia a cada valor de la primera variable (llamada variable independiente), un único valor de la segunda variable (llamada variable **dependiente**).

Se pueden definir funciones entre cualquier tipo de conjuntos, pero las más interesantes son las que se establecen entre conjuntos de números.



¿Es función? SI NO



¿Es función? SI NO

En los próximos temas vamos a estudiar funciones definidas en el conjunto de los números reales.

Las funciones se representan de varias formas:

- analítica, es decir, por medio de una fórmula como $f(x) = x^2$
- verbal, es decir, mediante una descripción con palabras.
- numérica, es decir, mediante una tabla de valores numéricos.
- visual, es decir, con una gráfica.

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Una función real de variable real es una función en la que tanto los valores de la variable dependiente (generalmente ***y***) como los de la variable independiente (generalmente ***x***) son números reales. Esta relación se representa mediante: ***y = f(x)*** esta expresión indica que la variable **y** depende de la variable **x**.

Nota: ***f(x)*** se lee *f* de *x* o *f* en *x* o *f* evaluada en *x*.

DOMINIO – RANGO – REGLA DE CORRESPONDENCIA

Dada una función *f* definida por: ***y = f(x)***

Al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente ***x*** se le llama DOMINIO.

Al conjunto de valores que toma la variable dependiente ***y*** se le llama **RANGO**

La expresión **Dom*f*** significa **dominio** de la función *f*.

La expresión **Ran*f*** significa **rango** de la función *f*.

A la ecuación que relaciona las variables se le denomina **regla de correspondencia.**

EVALUACIÓN DE UNA FUNCIÓN

Evaluar una función consiste en determinar el valor de la variable dependiente, dado el valor de la variable independiente.

$y = f(4)$ significa que se debe hallar el valor de *y* para **x** igual a **4**

Ejemplo:

Si $f(x) = -x^4 + x^2 + 5$ **entonces** $f(2) =$ **$-2^4+2^2+5=-7$**

Ejercicio 1:

Si $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$, halle $g(-2)$ **$=-1$**

Si $h(x) = \sqrt{4-x}$ halle $h(-5)+\mathrm{h}(0)$ $=2+3= 5$

CÁLCULO DE DOMINIO

Cuando una función se define mediante su regla de correspondencia ***y = f(x)*** y el dominio no es explícito, se entiende que el **dominio** es el mayor conjunto de valores de *x* para los cuales la expresión *f*(*x*) tiene sentido como número real. Éste es el llamado **dominio natural** o **dominio implícito** de la función.

Si queremos restringir el dominio natural de alguna manera, entonces debemos decirlo de forma explícita.

Si la expresión analítica de la función es un polinomio, el dominio son todos los números reales.

Ejemplo: $f(x) = -x^4 + x^2 + 5$, Dom*f* = _**R**

Si la expresión analítica de la función es un cociente de funciones polinómicas, el dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador.

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$, Dom*f* = **R-{ 3 }**

Si la expresión analítica de la función es una raíz cuadrada, el dominio está formado por los números reales para los que el radicando es mayor o igual que cero.

Ejemplo: $f(x)=\sqrt{x-3}$, Dom$f$ = **[3; +∞[**

Si la expresión analítica de la función no corresponde a alguna de las formas mencionadas se requiere de un análisis especial.

Ejercicios 2: Calcule el dominio en cada caso

1. $f(x)=\sqrt{x}$ **Dom f. =[0; +∞[**	**2.** $f(x)=\sqrt{9-x}$ **Dom f. =]-∞ ;+9]**
3. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ **Dom f =R-{ 0 }**	**4.** $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ **Dom f =R-{ 4 }**
5. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-9}$ **Dom f =[1; +∞ [-{ 3 }**	**6.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{144-x^2}}{x^2-13x}$ **Dom f =[-12; +12] - { 0 }**

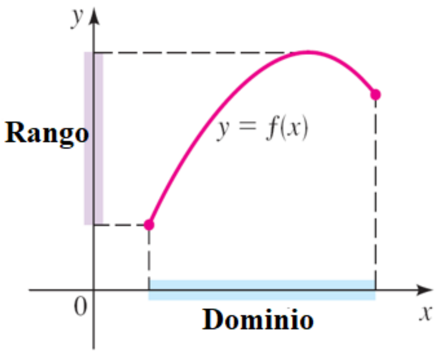
GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Si $y = f(x)$ es una función con dominio A, entonces la gráfica de f es el conjunto de puntos $(x; y)$ para todos los valores de x que pertenecen al dominio.

Dada la gráfica de una función se puede determinar el dominio y el rango.

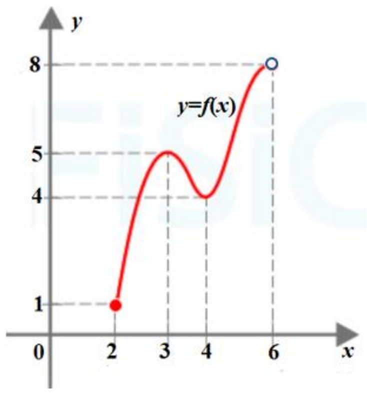
El dominio de una función se puede obtener proyectando sobre el **eje x** cada uno de los puntos de la gráfica.

El rango de una función se puede obtener proyectando sobre el **eje y** cada uno de los puntos de la gráfica.



Ejemplo:

En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función f.

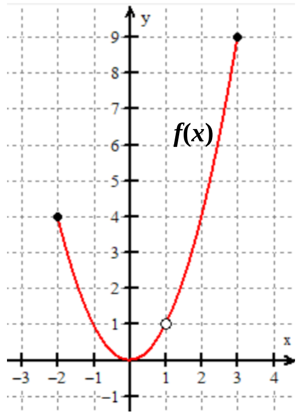
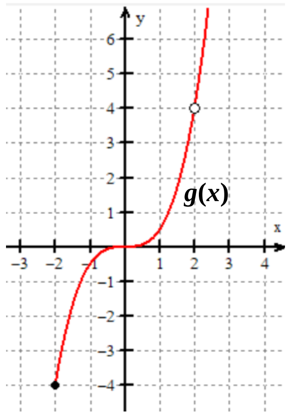
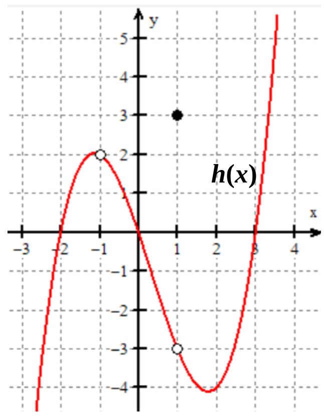


Determine el dominio y rango.

Dom$f$ = **[2; 6 [**

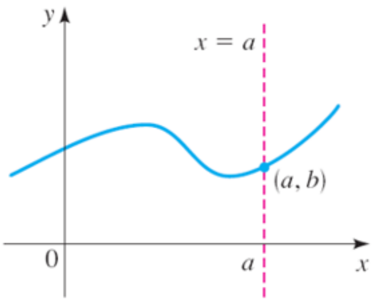
Ran$f$ = **[1; 8 [**

Ejercicios 3: Determine el dominio y rango en cada caso

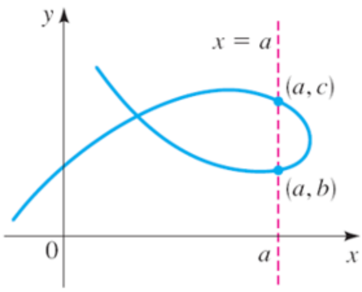
		
Dom f = [-2; +3] **Ran f = [0; +9]**	**Dom f = [-2; +∞[-{ 2 }** **Ran f = [-4; +∞[-{ 4 }**	**Dom f = R - { -1 }** **Ran f = R**

PRUEBA DE LA LÍNEA VERTICAL

Una curva en el plano coordenado es la gráfica de una función si y solo si al trazar una recta vertical por cualquier parte del dominio esta intersecta a la curva en un solo punto.



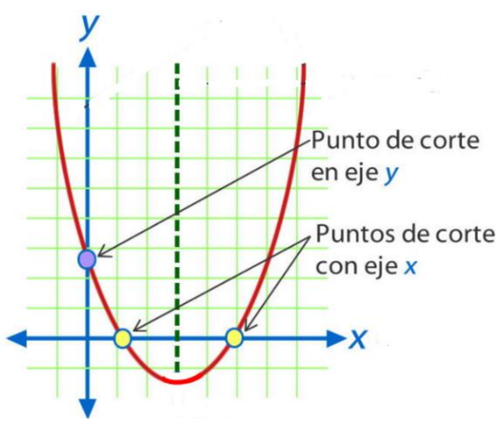
La recta vertical intersecta a la curva en un punto, por lo tanto es una función.



La recta vertical intersecta a la curva en dos puntos, por lo tanto NO es una función.

PUNTOS DE INTERSECCIÓN CON LOS EJES COORDENADOS

Se denominan puntos de intersección o puntos de corte con los ejes coordenados a los puntos en los cuales la gráfica de la función corta al eje de abscisas y/o al eje de ordenadas.



Dada una función f cuya regla es $y = f(x)$

Los puntos de intersección **con el eje x** se obtienen resolviendo la ecuación**:** y **= 0 o** $f(x) = 0$

Los puntos de intersección **con el eje y** se obtienen reemplazando**:** x **= 0 o** $y = f(0)$

Ejemplo:

Dada una función f cuya regla es $f(x) = x^2 - 9$, halle los puntos de intersección de la gráfica de la función con los ejes coordenados.

Intersección con el eje *x*: $y = f(x) = 0$ entonces: $x^2 - 9 = 0$ resolviendo se obtiene $x_1 =$ **-3**; $x_2 =$ **+3**

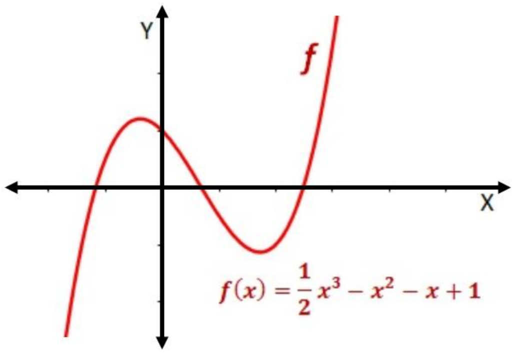
Esto significa que los puntos de intersección con el eje *x* son: **(-3; 0) , (+3; 0)**

Intersección con el eje *y*: $y = f(0) = 0^2 - 9 = -9$

Esto significa que el punto de intersección con el eje *y* es: **(0; -9)**

Ejercicio 4:

En la figura adjunta se tiene la gráfica de una función *f*, halle las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados.



Puntos de intersección con el eje *x*: $y = 0$

(-1,17; 0) , (0,69; 0) , (2,48; 0)

Puntos de intersección con el eje *y*: $x = 0$

(0; 1)

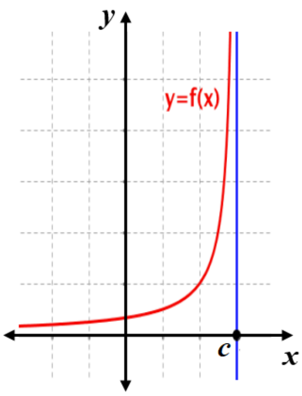
ASÍNTOTAS

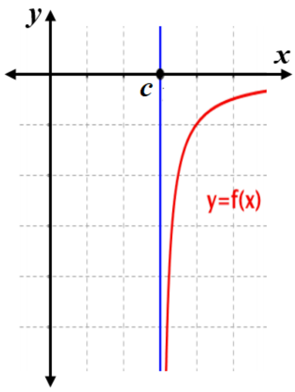
ASÍNTOTA VERTICALES

Las **asíntotas verticales** de una función son rectas verticales de la forma $\mathbf{x = c}$.

Si para un valor c (del eje *x*) $f(x)$ tiende o se va al infinito (o menos infinito) cuando *x* se acerca a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de *f*

.

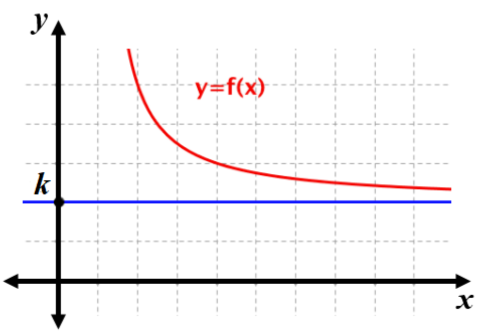


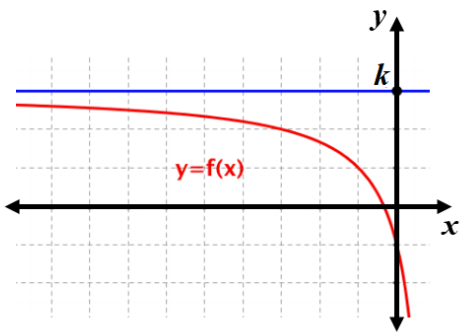


ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Las **asíntotas horizontales** de una función son rectas horizontales de la forma $\mathbf{y = k}$.

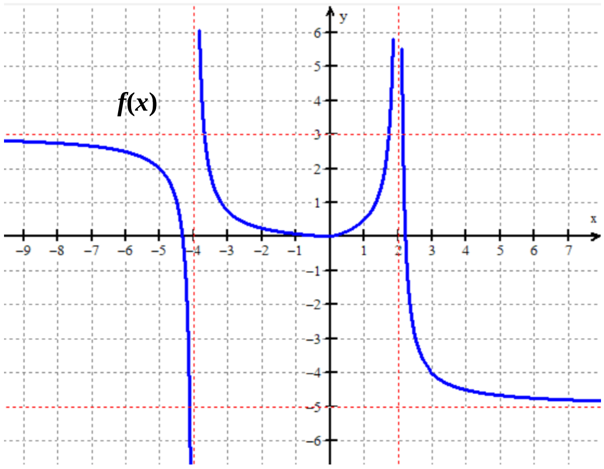
Si *x* tiende al infinito (o menos infinito) y $f(x)$ tiende o se acerca a un valor k, se dice que la recta $y = k$ es una asíntota horizontal de *f*.





Ejercicio 5:

De la figura adjunta determine:



Dominio: **R – {-4; 2 }**

Rango: **R**

Asíntotas horizontales: **y =-5; y=3**

Asíntotas verticales: **x= -4; x=+2**

¿Qué signo tiene $f(-6)$? **positivo**

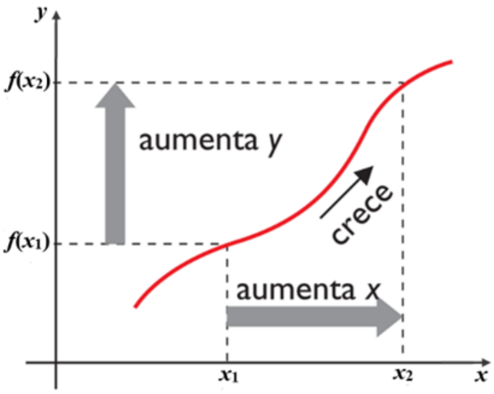
¿Qué signo tiene $f(4)$? **negativo**

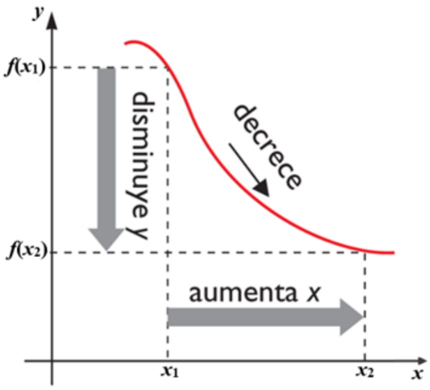
¿$f(3) > f(6)$? **correcto**

MONOTONÍA: CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

Una función es **creciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el valor de la variable dependiente.

En símbolos, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo x_1 y x_2 del intervalo.





Una función es **decreciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el valor de la variable dependiente.

En símbolos, si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, para todo x_1 y x_2 del intervalo.

Una función es **constante** en un intervalo cuando para todo valor de la variable independiente, la dependiente toma siempre el mismo valor.

En símbolos, $f(x_1) = f(x_2)$, para todo x_1 y x_2 del intervalo.

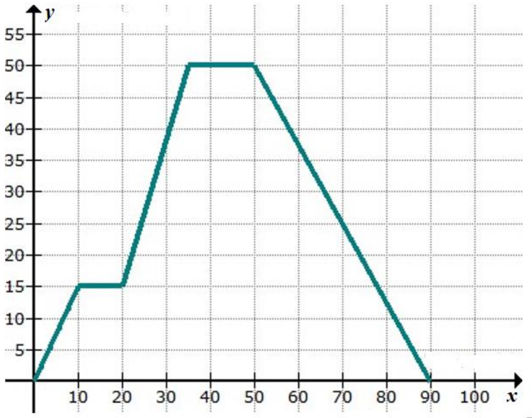
Ejemplo:

En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función *f*. Analice la monotonía, es decir, determine los intervalos donde la función crece, decrece o es constante.

Intervalos donde *f* crece: **]0; 10[,]20; 35[**

Intervalos donde *f* decrece: **]50; 90[**

Intervalos donde *f* es constante: **]10; 20[,]35; 50[**



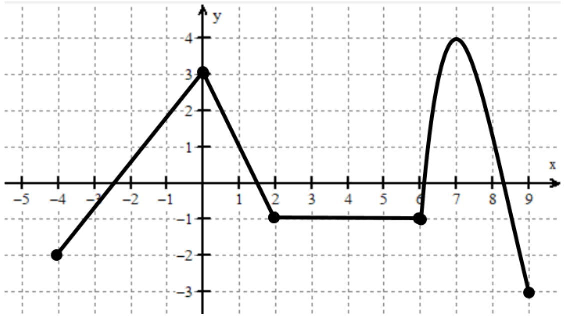
Ejercicio 6:

En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función *f*. Analice la monotonía.

Intervalos donde *f* crece: **]-4; 0[,]6; 7[**

Intervalos donde *f* decrece: **]0; 2[,]7; 9[**

Intervalos donde *f* es constante: **]2; 6[**



CIERRE DE CLASE

A. Sea $F=\{(2;-3),(-1;0),(-2;6),(2;5)\}$, luego ¿F es una función? **incorrecto**

B. Dada la función $f(x)=-2$, entonces ¿ $f(-\sqrt{3})+f(\pi)$ es igual a? **-4**

C. ¿Cuándo se dice que una función es creciente en [a;b]? **si se cumple que f(b) > f(a)**

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función *f* cuya regla es $y=f(x)$.

a) Dominio: **[-5; +5[**

b) Rango: **[-3;+∞[**

c) Intervalos de crecimiento: **]-5;-2[,]+1;+3[,]+3;+5[**

d) Intervalos de decrecimiento: **]-2;+1[**

e) Intercepto con el eje X e Y en el intervalo , $-5\le x\le 1$

(-3,8; 0) , (-0,5; 0) , (0 ;-0,67)