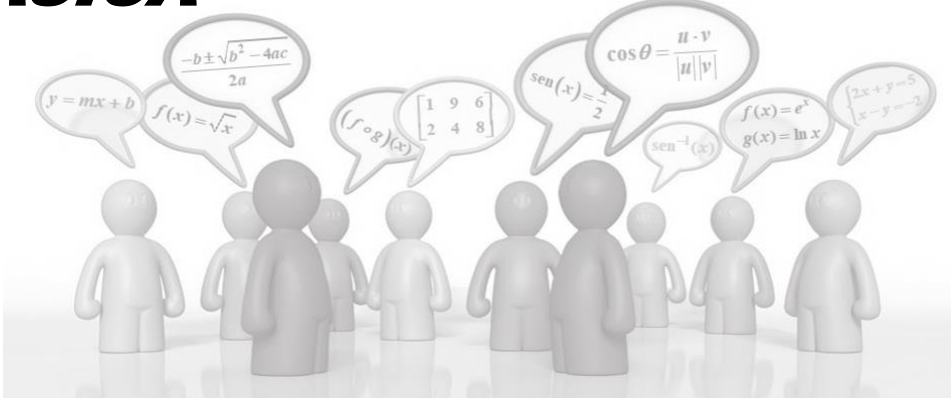
EPE

MATEMÁTICA BÁSICA



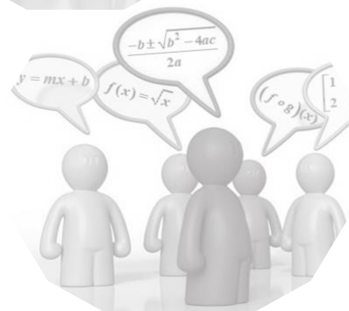
7.2

EPE

CONTENIDO

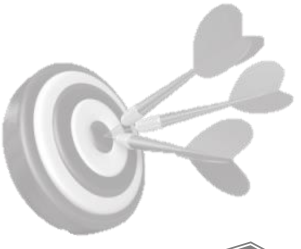
MATRICES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



7.2

EPE



LOGRO

DEFINIR UNA MATRIZ, HALLAR SUS ELEMENTOS Y REALIZAR OPERACIONES

INTERPRETAR GRAFICAMENTE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES Y CLASIFICARLO SEGÚN EL NÚMERO DE SOLUCIONES

RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES APLICANDO EL MÉTODO DE GAUSS

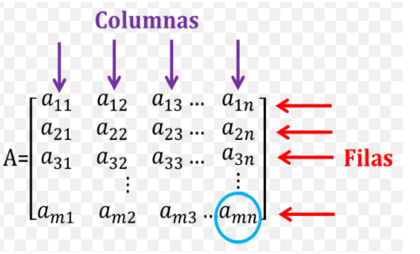
7.2

MATRICES

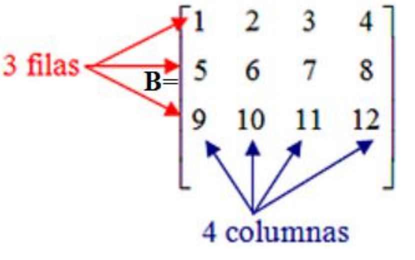
EPE

MATRICES

Una matriz es un arreglo rectangular de números llamados elementos, de la matriz, ordenados en filas y columnas. En la figura adjunta la matriz A tiene *m* filas y *n* columnas.



El *tamaño* de una matriz está dado por el número de filas y columnas que tiene, y generalmente se le denomina orden de la matriz. Una matriz que tiene *m* filas y *n* columnas se dice que es de orden $m \times n$.



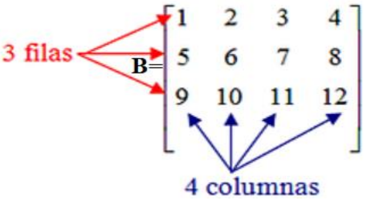
En la figura adjunta la matriz B es de orden 3x4 y también se representa por: $B_{3\times 4}$

7.2

EPE

MATRICES

Se usa la notación de *doble subíndice* para referirse a los elementos de una matriz. Si tenemos una matriz B el elemento que se encuentra en la fila *i* y la columna *j* se denota mediante b_{ij}.



En la figura adjunta se tiene una matriz B, el número 7 está en la fila ___ y columna ___ entonces se representa por: b_{23} =__

Con los datos de la matriz B (figura anterior) halle:

b_{32} =	b_{21} =	b_{33} =	b_{14} =	b_{24} =	b_{13} =

7.2

EPE

MATRIZ POR EXTENSIÓN

Dada la matriz $A = \left[a_{\text{ij}}\right]_{m\times n}$ donde a_{ij} define los elementos de la matriz entonces podremos determinar dichos elementos.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \left[a_{\text{ij}}\right]_{2\times 3}$ donde $a_{ij} = 2i - j$, halle la matriz A por extensión.

Observe que la matriz tiene dos filas y tres columnas, es decir es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$$

Luego usamos la condición dada para hallar el valor de cada elemento, es decir:

$a_{11} =$; $a_{12} =$; $a_{13} =$

$a_{21} =$; $a_{22} =$; $a_{23} =$

$$A = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$$

7.2

EPE

EJERCICIO

Dada la matriz $B = \left[b_{\text{ij}}\right]_{3\times 2}$ donde $b_{ij} = \begin{cases} i + 2j & , i < j \\ i \cdot j & , i = j \\ 2i - j & , i > j \end{cases}$, halle la matriz B por extensión.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

7.2

EPE

TIPOS DE MATRICES

MATRIZ NULA

Es aquella matriz donde todos sus elementos son ceros y se representa por $\boldsymbol{O}$, es decir.

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

MATRIZ CUADRADA

Son aquellas matrices cuyo número de filas es igual al número de columnas.

Tiene diagonal principal y diagonal secundaria.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

7.2

EPE

TIPOS DE MATRICES

MATRIZ IDENTIDAD

Son aquellas matrices cuadradas cuyos elementos de la diagonal principal son todos igual a 1 y los demás elementos son ceros.

Ejemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRANSPUESTA

Dada una matriz A de orden $m \times n$, la transpuesta de A es la matriz que se obtiene al intercambiar las filas y columnas de A. Se representa por A^t y es de orden $n \times m$.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -8 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

7.2

EPE

OPERACIONES CON MATRICES

SUMA DE MATRICES

Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{8} & -\mathbf{3} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{15} & \mathbf{42} & \mathbf{17} \end{bmatrix}$**, calcule** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

7.2

EPE

OPERACIONES CON MATRICES

MULTIPLICACIÓN DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Para multiplicar un número real por una matriz, se multiplica el número $\boldsymbol{k}$ **por cada uno de los elementos de la matriz** $\boldsymbol{A}$**.**

Sea las matrices $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$ **calcule** $\mathbf{3A}$.

7.2

EPE

EJERCICIO

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

calcule $2A - 3B^t$

7.2

EPE

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Dada la matriz A de orden $m \times n$ y la matriz B de orden $n \times p$. Entonces el producto AB es una matriz C de orden $m \times p$, tal que cada elemento de C denominado por c_{ij} es el resultado de multiplicar cada fila de la matriz A con cada columna de la matriz B.

Para multiplicar dos matrices es indispensable que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz.

$$A_{m\times n} . B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Ejemplo: Dadas las matrices

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Determine cuáles de las siguientes operaciones son posibles de efectuar indicando el orden de la matriz resultante.

OPERACIÓN	¿SI/N0?	RESULTADO
A · C		
A · B		
B · D		

OPERACIÓN	¿SI/N0?	RESULTADO
C · A		
B · A		
D · B		

7.2

EPE

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Matriz fila: Es aquella matriz que solo tiene una fila, por ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}_{1\times 4}$

Matriz columna: Es aquella matriz que solo tiene una columna, por ejemplo: $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}_{4\times 1}$

Si efectuamos el producto: $A_{1\times 4} \cdot B_{4\times 1}$ **se obtiene una nueva matriz C de orden** 1×1

7.2

EPE

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

El proceso para multiplicar matrices A y B es similar al anterior con la diferencia que tenemos más filas y columnas. Se multiplica la primera fila de la matriz A con cada columna de la matriz B, luego la segunda fila de la matriz A con cada columna de la matriz B, y así sucesivamente hasta terminar con todas las filas de A.

Sea las matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ **y** $B = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 9 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

A) ¿De qué orden es la matriz A?

B) ¿De qué orden es la matriz B?

C) ¿Se puede efectuar el producto AB?

D) ¿Se puede efectuar el producto BA?

7.2

EPE

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

E) Halle el producto: BA

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 9 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

7.2

EPE

CONTROL DE APRENDIZAJE

Sean las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

a) ¿Es posible halar AB? **b) ¿Es posible hallar BA?** **c) ¿AB = BA?**

d) Halle AB

7.2

CONOCIMIENTOS PREVIOS

EPE

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 1} \\ \mathbf{5x + 4y = 6} \end{cases}$$

7.2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

EPE

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales (SEL), es un sistema de ecuaciones en el cual cada ecuación es lineal.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde $a_{11}; a_{12}; \ldots; a_{mn}$ (coeficientes) y $b_1; b_2; \ldots; b_m$ (términos independientes) son números reales, y $x_1; x_2; \ldots; x_n$ son las variables.

Resolver un sistema consiste en hallar los valores de las variables que satisfacen cada una de las ecuaciones, a este conjunto se le llama: Conjunto Solución (CS).

Ejemplo:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 3x - 5y + z = 14 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

¿El conjunto solución es {(2; – 1; 3)}?

7.2

EPE

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

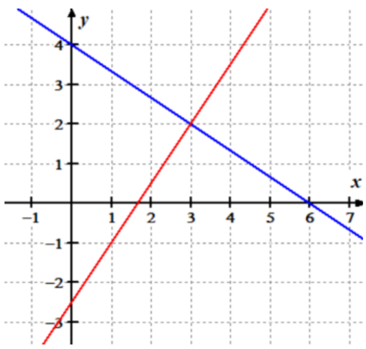
$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

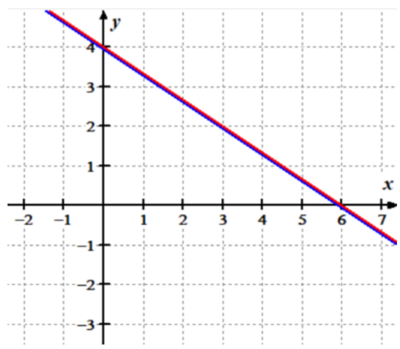
SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

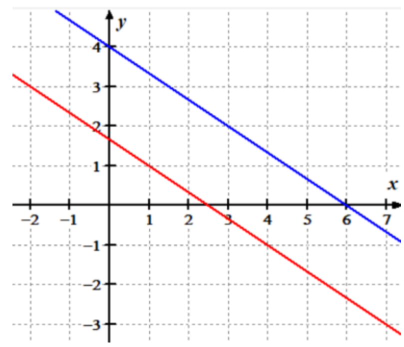
$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -4x - 6y = -24 \end{cases}$$

SISTEMA INCOMPATIBLE

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$







7.2

EPE

RESOLUCIÓN DE UN SEL: ELIMINACIÓN GAUSSIANA

La eliminación gaussiana es un algoritmo que transforma sucesivamente un sistema de ecuaciones lineales simultáneas en otro equivalente, hasta obtener al final un sistema escalonado fácilmente resoluble.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Para aplicar este algoritmo es necesario reconocer las siguientes matrices:

Matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz de variables:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matriz de términos independientes:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

7.2

EPE

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Matriz ampliada o aumentada se forma a partir de las matrices A y B, es decir:

Matriz de coeficientes

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz de variables

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matriz de términos independientes:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriz Ampliada

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]=\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

7.2

Ejemplo:

$$\begin{cases} x-2y+z=7 \\ 3x-5y+z=14 \\ 2x-2y-z=3 \end{cases}$$

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{X}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B}=\begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & 1 & 14 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

EPE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

MATRIZ ESCALONADA

Una matriz es escalonada si:

1. **Todas las filas nulas, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.**
2. **El número de ceros al comienzo de una fila no nula es estrictamente menor que el número de ceros al comienzo de la fila inferior.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.2

EPE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

OPERACIONES ELEMENTALES DE FILAS

Dada una matriz, llamamos operaciones elementales filas a las siguientes operaciones:

Intercambiar el orden de dos filas.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Multiplicar toda una fila por un escalar no nulo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ 5f_2 \longrightarrow \\ -4f_3 \longrightarrow \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 15 & 10 & 35 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Sumar a una fila el resultado de multiplicar otra fila por un escalar.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2f_1 + f_2 \longrightarrow f_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 13 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-1f_1 + f_3 \longrightarrow f_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 13 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

7.2

EPE

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Transforme en una matriz escalonada la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 3 & -8 & 2 & 14 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

7.2

EPE

RESOLUCIÓN DE UN SEL: ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Resuelva el sistema de ecuaciones y clasifique

$$\begin{cases} x - 2y + z = 9 \\ 3x - 5y + z = 22 \\ 4x - 2y - 3z = 11 \end{cases}$$

7.2

EPE

RESOLUCIÓN DE UN SEL: ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Resuelva el sistema de ecuaciones y clasifique

$$\begin{cases} \mathbf{2x - 2y + z = 3} \\ \mathbf{3x - 5y + z = 0} \\ \mathbf{x + y + z = 5} \end{cases}$$

7.2

EPE

RESOLUCIÓN DE UN SEL: ELIMINACIÓN GAUSSIANA

Resuelva el sistema de ecuaciones y clasifique

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 2y - 2z = 4} \\ \mathbf{4x + \ \ y - \ \ z = 7} \\ \mathbf{\ \ x + 4y - 4z = -2} \end{cases}$$

7.2

EPE

CIERRE DE CLASE

Relacione correctamente CLASIFICACIÓN DE UN SEL Y NÚMERO DE SOLUCIONES

SISTEMA INCOMPATIBLE	TIENE INFINITAS SOLUCIONES
SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO	TIENE UNA SOLUCIÓN
SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO	NO TIENE SOLUCIÓN

7.2

EPE

IDENTIFICAR MATRICES Y EFECTUAR OPERACIONES

CLASIFICAR LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES SEGÚN EL NÚMERO DE SOLUCIONES

APLICAR EL MÉTODO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

7.2

EPE

BIBLIOGRAFÍA

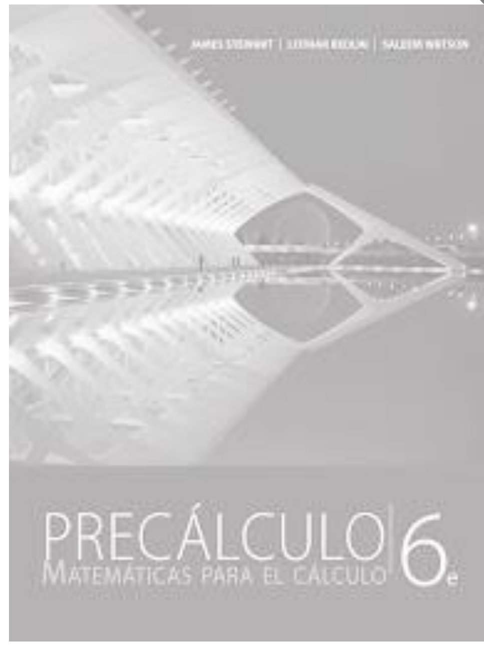
STEWART, James (2012).

PRECÁLCULO: MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO.

Sexta edición. México, D.F. Cengage Learning.

Matrices: Páginas 661 - 672

Sistema de ecuaciones lineales:Páginas 649 - 661



7.2

EPE

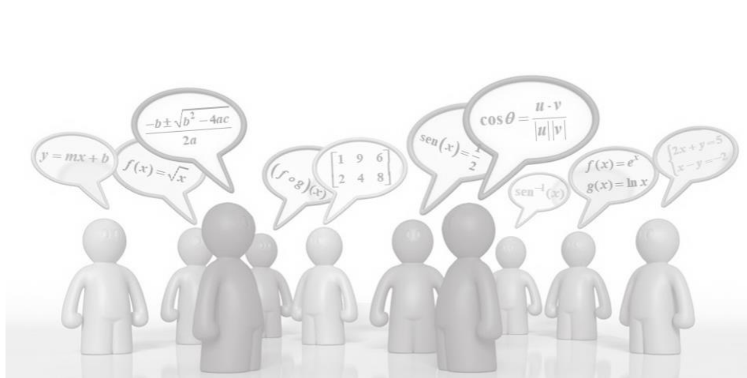
ACTIVIDADES DE LA SEMANA

Inicio de TAREA 5, fecha de entrega: domingo 25 de abril

ASESORÍA 6, clase programada con el AAD

RETROALIMENTACIÓN , actividad 2 y práctica calificada 2

CONSULTAS



7.2

EPE

PRÓXIMA CLASE

APLICACIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

DETERMINANTES

VECTORES

7.2

EPE

7.2