CE82 MATEMÁTICA BÁSICA

LIBRO DE PROBLEMAS RESUELTOS

NOCIONES PREVIAS DE ÁLGEBRA

1. Simplifique:

$$\frac{(x^{4/5}y)^5}{x^2y^{-2}} \div \left[\frac{x^{-8}y^{-14}}{(x^4y^3)^2}\right]^{\frac{1}{4}}$$

SOLUCIÓN

Eliminemos los paréntesis con la siguiente propiedad

Recordando: $(\boldsymbol{x^n.y^m.z^r})^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{x^{np}.y^{mp}.z^{r.p}}$

$$E = \frac{x^4y^5}{x^2y^{-2}} \div \left(\frac{x^{-8}y^{-14}}{x^8y^6}\right)^{1/4}$$

Ahora utilicemos la división de bases iguales

Recordando: $\boldsymbol{\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}}$

$$E = x^2y^7 \div \left(\frac{1}{x^{16}y^{20}}\right)^{1/4}$$

$$E = x^2y^7 \times x^4y^5 = x^6y^{12}$$

2. Simplifique:

$$\left(\frac{x^2-9}{x+2}\right)\left(\frac{x^2-x-6}{x^2-4x-21}\right)\left(\frac{x-3}{x-7}\right)^{-2}$$

SOLUCIÓN

Factoricemos utilizando diferencia de cuadrados

Recordando: $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$

$$P = \left(\frac{(x+3)(x-3)}{x+2}\right)\left(\frac{x^2-x-6}{x^2-4x-21}\right)\left(\frac{x-3}{x-7}\right)^{-2}$$

Factoricemos por aspa simple

$$P = \left(\frac{(x-3)(x+3)}{x+2}\right)\left(\frac{(x-3)(x+2)}{(x-7)(x+3)}\right)\left(\frac{x-3}{x-7}\right)^{-2}$$

Aplicar por la propiedad del exponente negativo

Recordando: $\boldsymbol{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$; $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$

$$P = \left(\frac{(x-3)(x+3)}{x+2}\right)\left(\frac{(x-3)(x+2)}{(x-7)(x+3)}\right)\left(\frac{x-7}{x-3}\right)^2$$

$$P = x - 7$$

3. Racionalice y simplifique la siguiente expresión:

$$F = \frac{10}{\sqrt{x^2-5}+x}$$

SOLUCIÓN

Factor racionalizante: $\sqrt{x^2-5} - x$

$$P=\frac{10}{\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x^2}}\times\frac{\sqrt{x^2-5}-x}{\sqrt{x^2-5}-x}=$$

En el denominador utilizamos diferencia de cuadrados

$$P=\frac{10\left(\sqrt{x^2-5}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-5}\right)^2-(x)^2}=\frac{10\left(\sqrt{x^2-5}-x\right)}{x^2-5-x^2}=-2\left(\sqrt{x^2-5}-x\right)$$

ECUACIONES

4. Resuelva la ecuación.

$$\frac{-x+3}{4}-\frac{2x+5}{3}=1-x$$

SOLUCIÓN

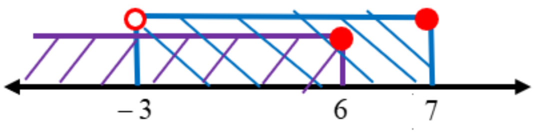
Mínimo común múltiplo: $12\left(\frac{-x+3}{4}\right)-12\left(\frac{2x+5}{3}\right)=12(1-x)$

Simplificando: $3(-x+3)-4(2x+5)=12(1-x)$

$-3x+9-8x-20=12-12x$

$-3x-8x+12x=12-9+20\Longrightarrow x=23$

Respuesta. CS = {23}



5. Resuelva la ecuación.

$(4x-1)(2x+2)=12$

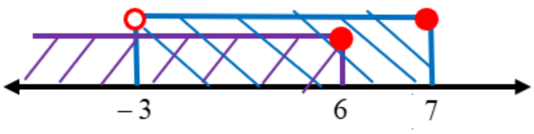
SOLUCIÓN

Efectuando la multiplicación se obtiene	$8x^2+8x-2x-2=12$
Reduciendo términos y simplificando	$4x^2+3x-7=0$
Factorizando por el método del aspa simple	$(4x+7)(x-1)=0$
Igualando a cero cada factor	$x=\frac{-7}{4};x=1$
Conjunto solución:	$CS=\left\{\frac{-7}{4};1\right\}$

INTERVALOS

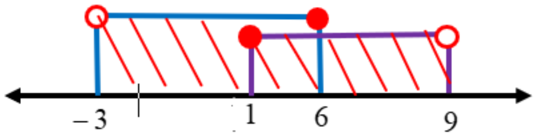
6. Dados los intervalos: $A=[1;9[$, $B=]-\infty;6]$ y $C=]-3;7]$, determine: $(B\cap C)\cup A$.

Hallemos el conjunto $(B\cap C)$ graficando en la recta numérica



$\Rightarrow(B\cap C)=]-3;6]$

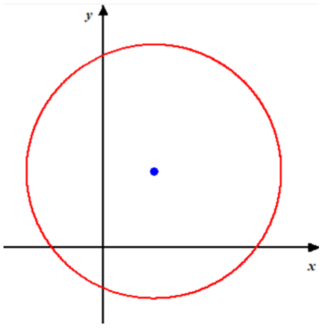
Hallemos el conjunto $(B\cap C)\cup A$ graficando en la recta numérica



$(B \cap C) \cup A =]-3; 9[$

PLANO CARTESIANO

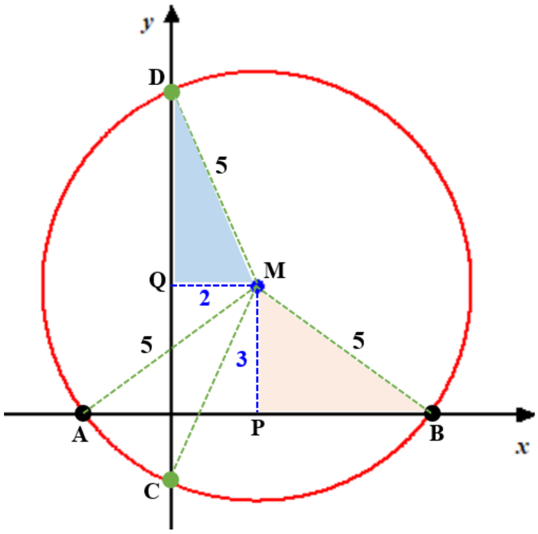
7. En la figura adjunta se tiene una circunferencia de centro (2; 3) y radio 5 unidades. Halle las coordenadas de los puntos de intersección de la curva con los ejes coordenados.



SOLUCIÓN:

Sean A, B, C y D los puntos de intersección de la circunferencia con los ejes coordenados.

Observa que al unir el centro con los puntos indicados se forman triángulos rectángulos. Para hallar sus coordenadas se aplica el teorema de Pitágoras.



Triángulo MPB: $\mathrm{PB}^2 + 3^2 = 5^2 \Longrightarrow \mathrm{PB} = 4$

Entonces las coordenadas de B son (6;0)

Triángulo MPA: $\mathrm{PA}^2 + 3^2 = 5^2 \Longrightarrow PA = 4$

Entonces las coordenadas de A son (– 2;0)

Triángulo MQD: $\mathrm{QD}^2 + 2^2 = 5^2 \Longrightarrow \mathrm{QD} = \sqrt{21}$

Entonces las coordenadas de D son $\left(0; 3+\sqrt{21}\right)$

Triángulo MQC: $\mathrm{QC}^2 + 2^2 = 5^2 \Longrightarrow \mathrm{QC} = \sqrt{21}$

Entonces las coordenadas de D son $\left(0; 3-\sqrt{21}\right)$

8. Halle la distancia entre los puntos medios de los segmentos AB y CD, sabiendo que las coordenadas de los puntos son $A(-8;6), B(10;\ -14), C(5;\ -11)\ \ y\ \ D(-9;\ -5)$.

SOLUCIÓN:

Sea F el punto medio de AB: $\begin{cases} \mathrm{A}(-8;6) \\ \mathrm{B}(10;-14) \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{F}\left(\dfrac{-8+10}{2}; \dfrac{6-14}{2}\right) = \mathrm{F}(1;-4)$

Sea G el punto medio de CD: $\begin{cases} \mathrm{C}(5;-9) \\ \mathrm{D}(-11;-5) \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{G}\left(\dfrac{5-9}{2}; \dfrac{-11-5}{2}\right) = \mathrm{G}(-2;-8)$

Sea d la distancia entre los puntos F y G: $d = \sqrt{(1+2)^2 + (-4+8)^2} = \sqrt{25} = 5$

La distancia entre los puntos medios de AB y CD es 5 unidades.

RECTAS

9. Halle una ecuación de la recta que pasa por los puntos (– 6; 4) y (2; – 4)

SOLUCIÓN:

La ecuación de una recta es: $y - y_0 = m(x - x_0)$

En este caso $(x_0; y_0)$ puede ser $(2; -4\ )$

La pendiente: $m = \dfrac{4-(-4)}{-6-(2)} = \dfrac{8}{-8} = -1$

La ecuación es: $y-(-4) = (-1)(x-2) \Rightarrow \boldsymbol{y+4 = -(x-2)}$

10. Halle la ecuación general de la recta que pasa por (3; 5) y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x - 5y + 7 = 0$.

SOLUCIÓN:

La ecuación de una recta es: $y - y_0 = m(x - x_0)$

En este caso $(x_0; y_0) = (3; 5)$

La ecuación $2x - 5y + 7 = 0$ corresponde a una recta cuya pendiente es $m_1 = \dfrac{2}{5}$

Cuando dos rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es –1

En este ejercicio, $m \cdot m_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad m\left(\dfrac{2}{5}\right) = -1 \Rightarrow m = -\dfrac{5}{2}$

Por lo tanto la ecuación de la recta es: $y - 5 = -\dfrac{5}{2}(x-3)$ (ecuación punto pendiente)

La ecuación general es: $5x + 2y - 20 = 0$

11. Halle la ecuación general de una recta L que pasa por (1; 2) y es paralela a la recta cuya ecuación es $2x - 4y + 7 = 0$.

SOLUCIÓN:

La ecuación de una recta es: $y - y_0 = m(x - x_0)$

En este caso $(x_0; y_0) = (1; 2)$

Cuando dos rectas son paralelas sus pendientes son iguales

La pendiente de la recta $2x - 4y + 7 = 0$ es $m = -\dfrac{2}{-4} = \dfrac{1}{2}$

La ecuación de L es: $y - 2 = \frac{1}{2}(x-1)$

La ecuación general es**:** $\boldsymbol{x - 2y + 3 = 0}$

CIRCUNFERENCIA

12. Determine la ecuación de la circunferencia con centro en (3; 2) y radio 4 y trace su gráfica indicando las coordenadas de los puntos de corte con los ejes.

SOLUCIÓN:

Centro: $C = (h; k) = (3; 2)$

Radio: $r = 4$

Ecuación de la circunferencia:

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4^2 = 16$

Corte con los ejes:

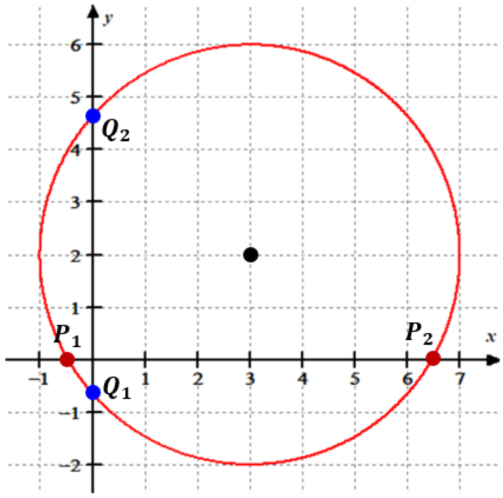
Corte con eje x: se hace $y = 0$

$(x-3)^2 + (-2)^2 = 16 \Rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{3}$

Luego los puntos de corte son:

$P_1 = \left(3 - 2\sqrt{3}; 0\right)$ y $P_2 = \left(3 + 2\sqrt{3}; 0\right)$

o de forma aproximada $(-0{,}46; 0)$ y $(6{,}46; 0)$.



Corte con eje y: se hace $x = 0$

$(-3)^2 + (y-2)^2 = 16 \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{7}$

Luego los puntos de corte son: $Q_1 = \left(0; 2 - \sqrt{7}\right)$ y $Q_2 = \left(0; 2 + \sqrt{7}\right)$

de forma aproximada $(0; -0{,}65)$ y $(0; 4{,}65)$.

13. De las siguientes ecuaciones dadas, determine si la ecuación corresponde a una circunferencia. En caso de que lo sea, determine las coordenadas de su centro, el valor de su radio y trace su gráfica.

$x^2 + 2x + y^2 - 6y + 6 = 0$

SOLUCIÓN:

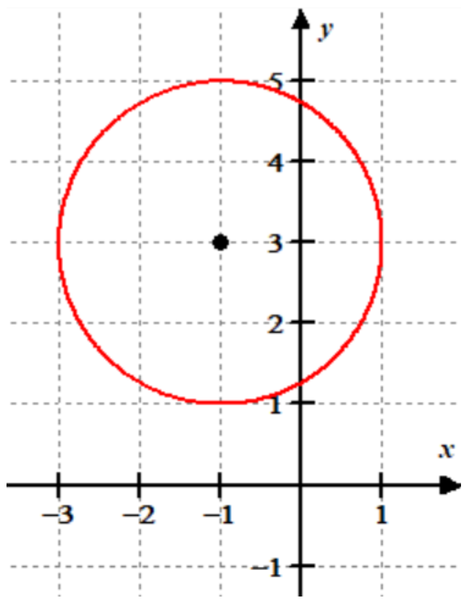
Completando cuadrados:

$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -6 + 1 + 9$

$\boldsymbol{(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4}$

Observamos que se trata de una circunferencia de

Centro $C = (-1; 3)$ y **Radio** $r = 2$.



Corte con eje x: se hace $y = 0$

$(x+1)^2 + (0-3)^2 = 4 \Rightarrow (x+1)^2 = -5$

$\Rightarrow$ *No* hay solución

Luego no hay puntos de corte con el eje x

Corte con eje y: se hace $x = 0$

$(0+1)^2 + (y-3)^2 = 4 \Rightarrow (y-3)^2 = 3 \Rightarrow y = 3 \pm \sqrt{3}$

Luego los puntos de corte son $A = \left(0; 3 + \sqrt{3}\right)$ y $B = \left(0; 3 - \sqrt{3}\right)$

o de forma aproximada $(0; 4{,}73)$ y $(0; 1{,}27)$.

14. Determine la ecuación de la circunferencia sabiendo que uno de sus diámetros tiene como puntos extremos a: $(1; 3)$ y $(5; 7)$.

SOLUCIÓN:

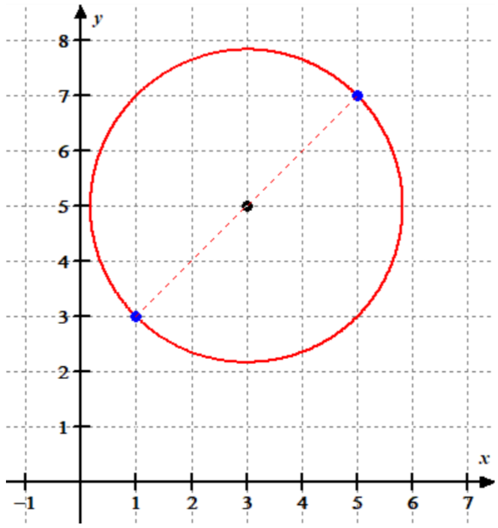
De la figura adjunta, podemos deducir que el centro de la circunferencia es el punto medio del segmento AB.

$C = (h;k) = \left(\frac{1+5}{2};\frac{3+7}{2}\right) = (3;5)$

Su radio puede ser encontrado hasta de tres formas distintas, una de ella es:

$2r = d(A;B) = \sqrt{(5-1)^2+(7-3)^2} = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow r = 2\sqrt{2},$



Finalmente, la ecuación de la circunferencia es:

$$\boldsymbol{(x-3)^2+(y-5)^2=8}$$

PARÁBOLA

15. Determine la ecuación estándar de una parábola que satisface las condiciones dadas: vértice (-2,3) se abre a la izquierda y ancho focal mide 4.

SOLUCIÓN:

Ecuación estándar de una parábola con eje focal paralelo al eje *x*: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

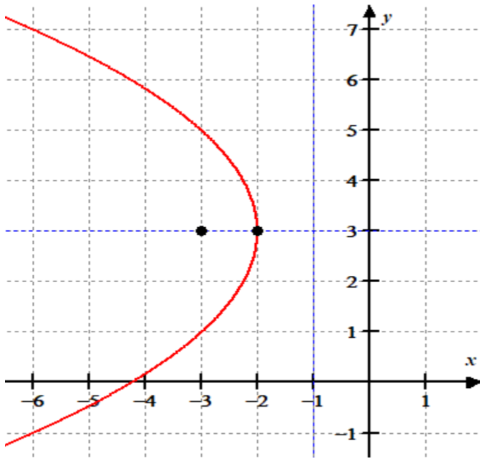
Vértice $(h;k) = (-2;3)$

Ancho focal: $|4p| = 4 \Rightarrow |p| = 1 \Rightarrow p = -1$

Pues se abre a la izquierda

$\Rightarrow (y-3)^2 = 4(-1)(x-(-2))$

$\Rightarrow \boldsymbol{(y-3)^2 = -4(x+2)}$



16. Dada la Parábola de ecuación. $x^2-6x+8y+17=0$. Determine las coordenadas del vértice, foco, la ecuación de la directriz y traza la gráfica.

SOLUCIÓN:

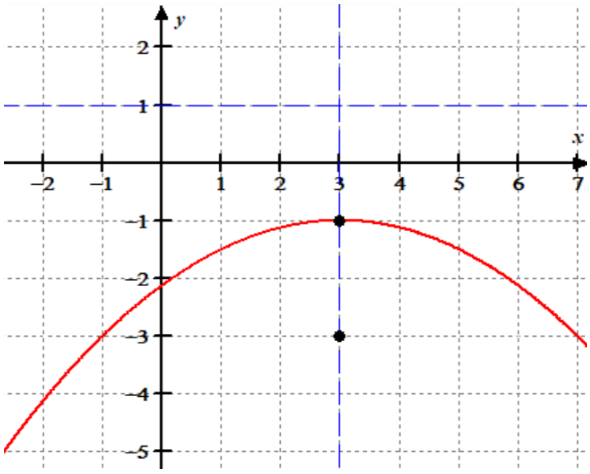
Completando cuadrados respecto a la variable x:

$x^2-6x = -8y-17 \implies (x-3)^2-3^2 = -8y-17 \implies (x-3)^2 = -8y-17+9 = -8y-8$

Ecuación de la parábola: $\boldsymbol{(x-3)^2 = -8(y+1)}$

Vértice: $(3;\ -1)$ **Foco:** $(3;\ -3)$

$4p = -8 \Rightarrow p = -2$ **Directriz:** $y = 1$



Corte con eje y: se hace $x = 0$

$(0-3)^2 = -8(y+1) \Rightarrow 9 = -8y - 8$

$17 = -8y \Rightarrow y = -\dfrac{17}{8} \Longrightarrow A = \left(0; -\dfrac{17}{8}\right)$

Luego los puntos de corte son

Corte con eje x: se hace $y = 0$

$(x-3)^2 = -8(0+1) \Rightarrow (x-3)^2 = -8$

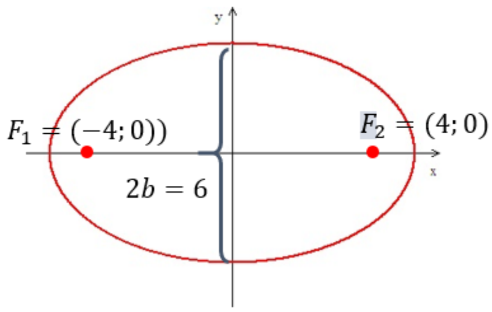
$\Rightarrow$ No hay solución.

Luego no hay puntos de corte con el eje x.

ELIPSE

17. Determine la ecuación de la elipse tal que sus focos son los puntos $(-4; 0)$; $(4; 0)$ y la longitud de su eje menor es 6 unidades.

SOLUCIÓN:



Centro de la elipse: Es el punto medio entre los focos

$$\text{Centro} = \left(\frac{\mathbf{-4+4}}{\mathbf{2}}; \frac{\mathbf{0+0}}{\mathbf{2}}\right) = (\mathbf{0}; \mathbf{0})$$

Distancia entre los focos:

$d(F_1; F_2) = 8 = 2c$ entonces $c = 4$

Eje menor: $2b = 6 \Rightarrow b = 3$

Eje mayor: Para su cálculo utilizamos la relación $a^2 = b^2 + c^2$

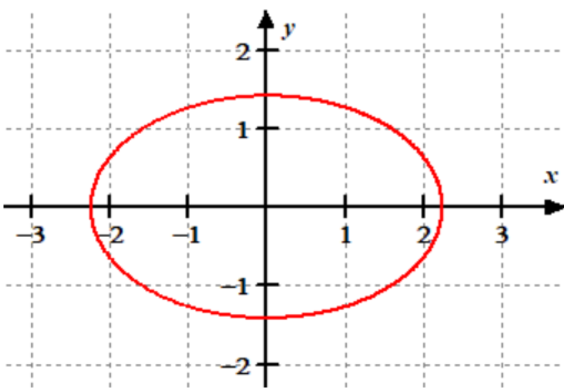
Entonces $\boldsymbol{a} = \sqrt{\mathbf{3^2 + 4^2}} = \mathbf{5}$ **,**

Luego, para la ecuación de la elipse: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Al reemplazar tenemos finalmente lo pedido: $\dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{5^2}} + \dfrac{\boldsymbol{y^2}}{\mathbf{3^2}} = \mathbf{1}$

18. Para le elipse $2x^2 + 5y^2 = 10$, determine su centro, vértices y trace su gráfica.

SOLUCIÓN:



Comparando con la forma general:

$$\frac{\boldsymbol{(x-h)^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{(y-k)^2}}{\boldsymbol{b^2}} = \mathbf{1}$$

Se reduce la ecuación a la forma general de la elipse

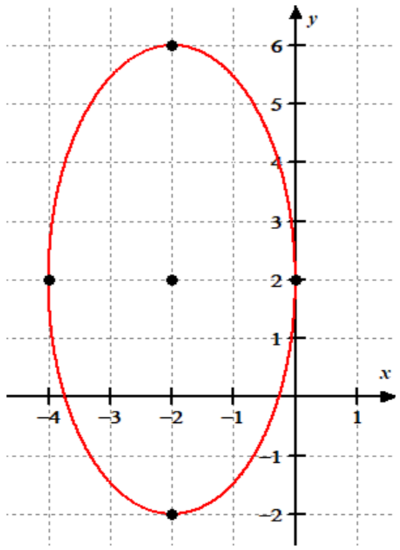
Si $2x^2 + 5y^2 = 10 \;\Rightarrow \dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{5}} + \dfrac{\boldsymbol{y^2}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$

Centro: $(h; \boldsymbol{k}) = (\mathbf{0}; \mathbf{0})$; $\quad a = \sqrt{5}; b = \sqrt{2}$

Vértices: $(-\sqrt{5}; 0); (\sqrt{5}; 0)$

19. Determine el centro, vértices, distancia entre los focos y la gráfica de la elipse

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$



SOLUCIÓN:

De la ecuación: $\boldsymbol{\frac{(x+2)^2}{2^2}+\frac{(y-2)^2}{4^2}=1}$

Comparando con la ecuación general $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Centro: $(\boldsymbol{h};\boldsymbol{k})=(\boldsymbol{-2};\boldsymbol{2})$ **y** $a=2; b=4$

Distancia entre los focos: $\boldsymbol{d(F_1;F_2)=2c}$

$a^2=b^2+c^2$

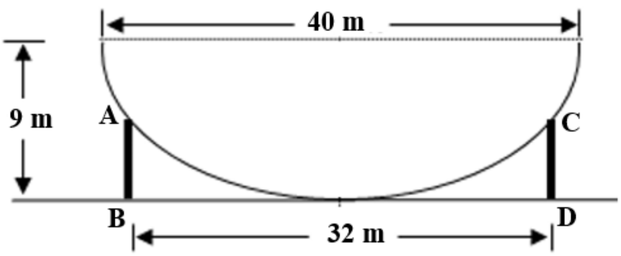
Entonces $\boldsymbol{4=\sqrt{2^2+c^2}\Rightarrow c=2\sqrt{3}}$

Luego, distancia entre los focos

$\boldsymbol{d(F_1;F_2)=2c=4\sqrt{3}}$

APLICACIONES DE CÓNICAS

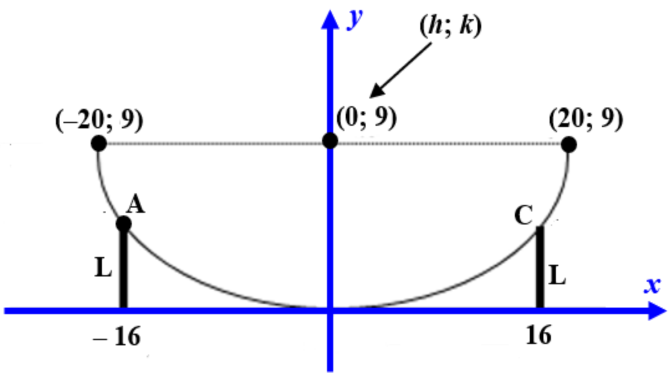
20. Se tiene un tanque abierto de metal, de manera que una de sus secciones transversales es una semi elipse con medidas que se indican en la figura, según ello, determine la altura de los soportes AB y CD sabiendo que son del mismo tamaño.



SOLUCIÓN:

Se coloca un sistema de referencia adecuado de tal manera que el centro de la elipse se ubica en (0; 9) además se deduce que $a=20$ y $b=9$, por lo tanto, la ecuación de la semielipse queda así:

$$\frac{x^2}{20^2}+\frac{(y-9)^2}{9^2}=1\ ;\ \ 0\le y\le 9$$



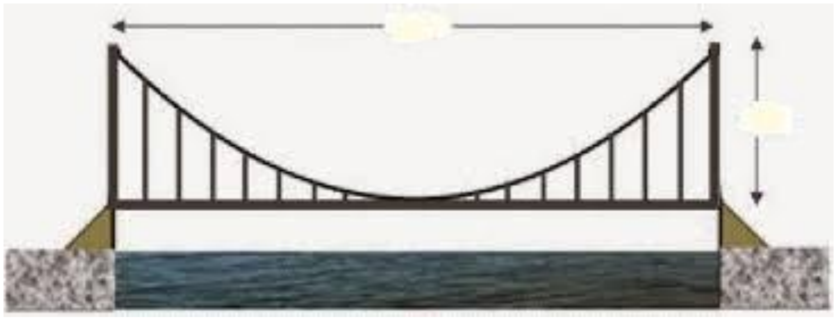
Observa que las coordenadas del extremo A de un soporte son; **(– 16; L)**

Reemplazando: $\frac{(-16)^2}{20^2}+\frac{(\mathrm{L}-9)^2}{9^2}=1$

Resolviendo se obtiene L = 3,6

Significa que la altura de los soportes AB y CD es de 3,6 metros.

21. Las dos torres de suspensión de un puente colgante distan entre si 300m y se extienden 80m por encima de la pista. Si el cable (que tiene la forma de una parábola es tangente a la pista en el centro del puente, determinar la altura del cable por encima de la pista a 50m del centro. Asuma que la pista es horizontal.



SOLUCIÓN:

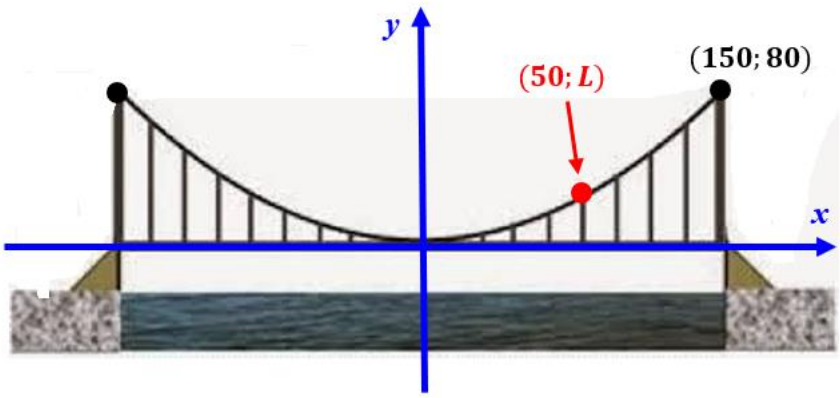
Se coloca un sistema de referencia adecuado de tal manera que el vértice de la parábola se ubica en (0; 0) la ecuación de la parábola es de la forma: $\boldsymbol{x^2 = 4py}$

Uno de los extremos de la torre es el punto **(150; 80)**, se reemplaza en la ecuación para hallar el valor de p.

$$150^2 = 4p(80)$$

Resolviendo se obtiene:

$$p = \frac{1125}{16}$$



Entonces la ecuación de la parábola queda: $x^2 = \frac{1125}{4}y$

Sea L la altura del cable que se encuentra a 50 metros del centro, entonces las coordenadas de uno de sus extremos son (50; L), se reemplaza en la ecuación:

$$(50)^2 = \frac{1125}{4}(L) \Longrightarrow L = \frac{80}{9} \approx 8{,}8888\ldots$$

Respuesta: La altura del cable que se encuentra a 50 m del centro es 8,89 m aproximadamente.

FUNCIONES

22. Halle el valor de "a" para que el siguiente conjunto de pares ordenados sea una función. Determina el dominio y el rango.

$$F = \{(-1; 8)\ ;\ (-5; 1)\ ;\ (a; 7)\ ;\ (5; 2)\ ;\ (3; 6)\ ;\ (-1; a^2 - 1)\ ;\ (4; -3)\}$$

SOLUCIÓN

Para que un conjunto sea función no debe haber dos pares (diferentes) con un mismo primer elemento.

Observa que hay dos pares cuyo primer elemento es – 1 esto significa que las segundas componentes de dichos pares deben ser iguales.

$(-1;8) \;=\; (-1;a^2-1) \Rightarrow a=3 \text{ o } a=-3$

Analizando se observa que si a =3 entonces habría dos pares diferentes (3; 7) y (3; 6) y como tienen el mismo primer elemento no sería función, por lo tanto, se descarta que a sea igual a 3.

Conclusión, $a=-3$, reemplazando en Fse obtiene:

$F=\{(-1;8)\;;\;(-5;1)\;;\;(3;7)\;;\;(5;2)\;;\;(3;6)\;;\;(-1;8)\;;\;(4;-3)\}$

Como se puede ver el conjunto F solo tiene 6 elementos

$Dom(f)=\{-5;\;-3;\;-1;\;3;\;4;\;5\}$ y $Ran(f)=\{-3;\;1;\;2;\;6;\;7;\;8\}$

23. La gráfica de la función $y=f(x)=\frac{2}{3}x^2+bx+c$ intersecta al eje x en los puntos (–2; 0) y (5; 0), y al eje y en el punto (0; d). Halle el valor de (b + c + d).

SOLUCIÓN

Como la gráfica pasa por los puntos (-2; 0) y (5; 0) significa que $f(-2)=0\; y\; f(5)=0$

$$f(-2)=\frac{8}{3}-2b+c=0 \text{ y } f(5)=\frac{50}{3}+5b+c=0$$

Se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2b+c=\dfrac{8}{3} \\ 5b+c=-\dfrac{50}{3} \end{cases} \quad \text{resolviendo el sistema se obtiene } b=-2\; y\; c=-\frac{20}{3}$$

Observa que la curva pasa por (0; d) significa que $f(0)=d$ por lo tanto $c=d$

Luego, $\quad b+c+d=b+2c=-2+2\left(\dfrac{-20}{3}\right)=\dfrac{-46}{3}$

DOMINIO DE FUNCIONES

24. Halle el dominio de la función f cuya regla es

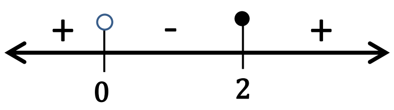
$$f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x}}+x^2$$

SOLUCIÓN

Analiza la expresión dentro del radical: $\dfrac{x-2}{x}\geq 0$

Números críticos: $x-2=0 \Longrightarrow x=2\;;x=0$

Análisis de signos:



Dominio de f

$\mathrm{Dom}(f)=\,]-\infty;0[\,\cup\,[2;+\infty[$

25. Determine el dominio de la función con regla de correspondencia

$$g(x)=\frac{x}{x-2}+\sqrt{x+3}$$

SOLUCIÓN

Analizamos las restricciones: $x+3 \geq 0$; $x-2 \neq 0$

Resolviendo se obtiene: $x \geq -3$; $x \neq 2$

Dominio: $Domf = [-3;+\infty[-\{2\}$

26. Halle el dominio de la función *f* cuya regla es

$$f(x) = \frac{5}{x^3 - x^2 - 2x} - \frac{1}{x+3}$$

SOLUCIÓN

Primero se analiza para que valores de x se anula el denominador.

$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

$x^3 - x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x+1)(x-2) = 0 \rightarrow x = 0; x = -1; x = 2$

Como puedes observar para los valores hallados el denominador se anula, además para este ejercicio no hay otra restricción por lo tanto para hallar el dominio se toma como conjunto de partida los números reales y se le resta los valores que anulan el denominador.

Dominio: $Domf = \mathbb{R} - \{-3; -1; 0; 2\}$

27. Halle el dominio de la función *f* cuya regla es

$$g(x) = \frac{(x-2)\sqrt{1-x}}{x^2 + x - 12}$$

SOLUCIÓN

Análisis: $x^2 + x - 12 = 0$ y $1 - x \geq 0$

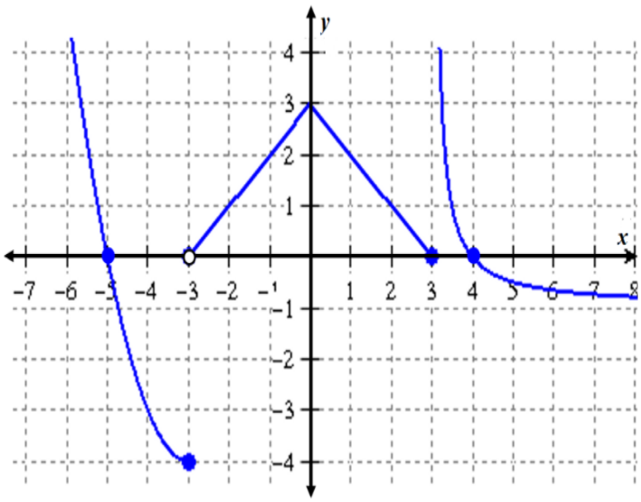
Resolviendo: $(x+4)(x-3) = 0$ y $x \leq 1 \rightarrow$ $x = -4, x = 3$ y $x \leq 1$

Observa que en este ejercicio hay una condición que $x \leq 1$, entonces se debe analizar si los valores que anulan el denominador están dentro de este conjunto.

Dominio: $Dom(g) =]-\infty; 1] - \{-4\}$

PROPIEDADES DE FUNCIONES

28. En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función *f*.



Halle el dominio de la función *f*

Halle el rango de la función *f*.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.

Los ceros

Intervalos de positividad y negatividad.

SOLUCIÓN

De la gráfica se observa:

Dominio: $Domf = \mathbb{R}$

Rango: $[-4;\ +\infty[$

Intervalos de crecimiento: $]-3;0[$

Intervalos de decrecimiento: $]-\infty;-3[\,,]0;3[,]3;+\infty[$

Los ceros: $\{-5;3;4\}$

Intervalos de positividad: $]-\infty;-5[\,,]-3;3[,]3;4[$

Intervalos de negatividad: $]-5;-3]\,,]4;+\infty[$

29. Dada la función $h(x) = 4 - |x-4|$, grafique la función anterior indicando los interceptos con los ejes coordenados, luego halle el dominio, el rango e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

SOLUCIÓN

Interceptos con el eje x:

$h(x) = 0 \Rightarrow 4 - |x-4| = 0 \Rightarrow |x-4| = 4 \Rightarrow x = 0 \lor x = 8$

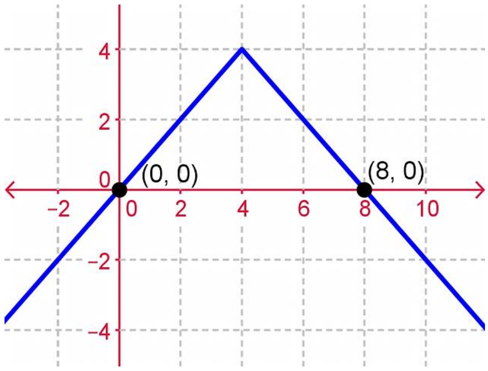
$\Rightarrow (0;0)$ y $(8;0)$

Con el eje y: $y = f(0) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0;0)$

$Dom(f) = R$ y $Ran(f) =]-\infty;4]$

Intervalo de crecimiento: $]-\infty;4]$

Intervalo de decrecimiento: $]4;+\infty[$.



30. Dada la función $f(x) = (x-3)^2 - 1$, grafique la función anterior indicando los interceptos con los ejes coordenados, luego halle el dominio, el rango e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

SOLUCIÓN

Interceptos con los ejes coordenados

Con el eje x: $f(x) = 0 \Rightarrow\ (x-3)^2 - 1 = 0$

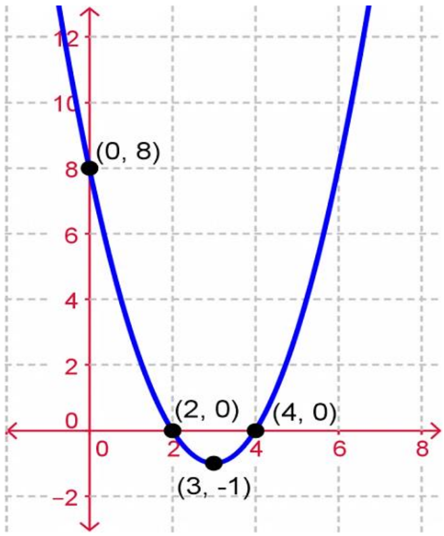
$\Rightarrow\ x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \lor x = 4 \Rightarrow (2;0)\ ,\ (4;0)$

Con el eje y: $y = f(0) \Rightarrow y = 8 \Rightarrow (0;8)$

$Dom(f) = R$ y $Ran(f) = [-1;+\infty[$

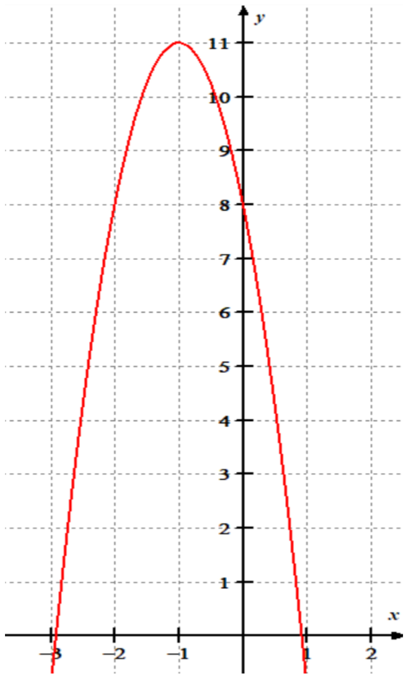
Intervalo de crecimiento: $[3;\ +\infty[$

Intervalo de decrecimiento: $]-\infty;3[$



FUNCIÓN CUADRÁTICA

31. Dada la función f cuya regla es $f(x) = -6x + 8 - 3x^2$, halle el mínimo o máximo valor de la función y en qué punto ocurre.



SOLUCIÓN

Observa que f es una función cuadrática: $f(x) = -3x^2 - 6x + 8$

por lo tanto: $a = -3; b = -6 \text{ y } c = 8$

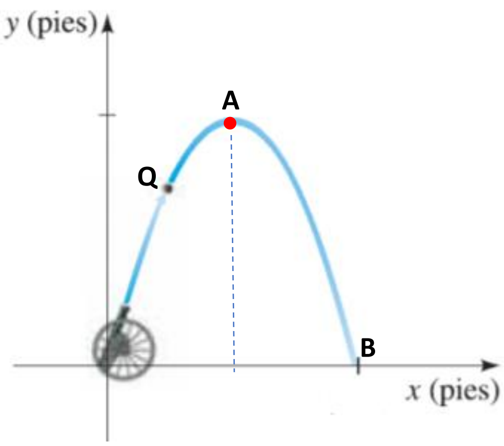
Como a es negativo se deduce que su gráfica es una parábola hacia abajo, por lo tanto, tiene máximo.

Vértice: $h = -\dfrac{b}{2a} \rightarrow h = -\dfrac{-6}{2(-3)} = -1$; $k = f(h) = f(-1)$

$$= -3(-1)^2 - 6(-1) + 8 = 11$$

Por lo tanto, el máximo valor de la función es 11 en – 1.

32. Un cañón dispara una bala como se ve en la figura. La trayectoria de la bala es una parábola con vértice en el punto A. La bala cae al suelo a 1600 pies del cañón y el punto más alto que alcanza es 3200 pies sobre el suelo. Halle la regla de correspondencia de la función cuadrática que corresponde a la trayectoria de la bala indicando su dominio.



SOLUCIÓN

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, la ecuación de la curva

Observa que la curva parte del origen entonces un punto de la curva es $(0; 0)$ significa que $c = 0$

Además, la bala cae al suelo a 1600 pies entonces las coordenadas de B son $(1600; 0)$

Como el punto más alto es 3200 entonces el vértice es $(800; 3200) = (h; k)$

Sabemos también que la ecuación de una función cuadrática se puede escribir así:

$f(x) = a(x - h)^2 + k$ (forma normal)

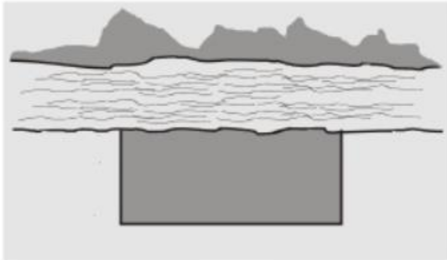
Entonces para nuestro caso queda: $f(x) = a(x - 800)^2 + 3200$

Para hallar a se reemplaza $(0; 0)$ $\rightarrow 0 = a(0 - 800)^2 + 3200 \rightarrow$ resolviendo: $a = -\frac{1}{200}$

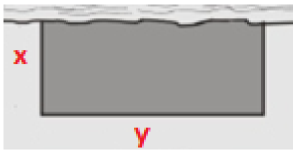
La regla de correspondencia es: $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{200}(x - 800)^2 + 3200 \ ; \ 0 \leq x \leq 1600}$

También puede ser: $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + 8x \ ; \ 0 \leq x \leq 1600}$

33. Un agricultor dispone de 3000 € para cercar un terreno rectangular que se encuentra al lado de un río (ver figura adjunta). Una condición es que el área del terreno a cercar debe ser lo mayor posible, otra condición es que debe usar el río adyacente como lado con el fin de que el recinto sólo necesite tres cercas y además debe utilizar todo el dinero disponible. Los encargados de hacer el trabajo le informan que el costo de la cerca paralela al río es de 5 € por metro instalado, y el de la cerca para cada uno de los lados restantes es de 3 € por metro instalado. Halle las dimensiones del terreno de área máxima.



SOLUCIÓN



x = ancho del terreno en m; y= largo del terreno en m

A= área del terreno en m^2.

Dato: $6x + 5y = 3000$

Hallamos el área: $A = xy = x\left(\frac{3000 - 6x}{5}\right) = -\frac{6}{5}x^2 + 600x$

Observa que A es una función cuadrática y como $a < 0$ tiene máximo valor.

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{600}{2\left(-\frac{6}{5}\right)} = 250 \quad y \quad k = -\frac{6}{5}(250)^2 + 600(250) = 75000$$

Significa que el área máxima del terreno es de 75 000 m2, cuando el ancho es de 250 metros.

Para hallar el largo se utiliza la condición: $6x + 5y = 3000 \rightarrow 6(250) + 5y = 3000$

Resolviendo se obtiene $y = 300$.

Conclusión, las dimensiones del terreno de área máxima son 250 metros de ancho y 300 metros de largo.

OPERACIONES CON FUNCIONES

34. Dada la función $f(x) = 3x - 2$, $Dom(f) = [-3; 12]$ y $g(x) = \sqrt{2x}$

Halle el dominio y la regla de correspondencia de la función $\left(\frac{f}{g}\right)$

SOLUCIÓN:

Sabemos que $Domf = [-3; 12]$ y $Domg = [0; +\infty[$

Dominio de una división: $Dom\left(\frac{f}{g}\right) = [Dom(f) \cap Dom(g)] - \{x/g(x) = 0\}$

$[-3; 12] \cap [0; +\infty[= [0; 12]$, $\sqrt{2x} = 0 \Longrightarrow x = 0$

Finalmente: $Dom\left(\frac{f}{g}\right) = [0; 12] - \{0\} = \;]0; 12]$

Regla de correspondencia: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 2}{\sqrt{2x}}$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

35. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $g(x) = x - 4$, $h(x) = 2x^2 + x$.

Evalúe $E = [-(f \circ g)(3) + (g \circ f)(1)(f \circ h)(-1) - (h \circ g)(4)]^{-3}$

SOLUCIÓN

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(-1) = 2$; $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(6) = 2$

$(f \circ h)(-1) = f(h(-1)) = f(1) = 6$; $(h \circ g)(4) = h(g(4)) = h(0) = 0$

Luego, $E = [-(f \circ g)(3) + (g \circ f)(1)(f \circ h)(-1) - (h \circ g)(4)]^{-3}$

$\Longrightarrow E = [-2 + (2)(6) - 0]^{-3} = 0{,}001$

36. Dadas las funciones f y g: $f(x) = -\sqrt{x} + 3$ y $g(x) = -x + 1$, $-4 \leq x \leq 2$

Halle $(f_o g)(x)$ y su dominio.

SOLUCIÓN

$Dom(f \circ g) = \{x / x \in Dom(g)\ y\ g(x) \in Dom(f)\}$

Observa que: $Dom(g) = [-4; 2]$ y $Dom(f) = [0; +\infty[$

$Dom(f \circ g) = \{x \mid x \in [-4; 2]\ \ y\ -x + 1 \in [0; +\infty[\}$

$$\boxed{\begin{array}{c} -x + 1 \geq 0 \\ \rightarrow x \leq 1 \\ x \in]-\infty; 1] \end{array}}$$

$Dom(f \circ g) = \{x \mid x \in [-4; 2] \cap]-\infty; 1]\} = [-4; 1]$

Regla de correspondencia: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x + 1) = -\sqrt{-x + 1} + 3$

Conclusión: $(f \circ g)(x) = -\sqrt{-x + 1} + 3$; $Dom(f \circ g) = [-4; 1]$

FUNCIÓN INVERSA

37. Halle la función inversa de $f(x) = 2x + 9$; $x \in [-3; 1]$, si es que existe.

SOLUCIÓN

(I) Determine si la función es inyectiva, en este caso la función es una recta, por lo tanto, es inyectiva.

(II) $y = 2x + 9$ para hallar la inversa se permuta x con y, entonces: $x = 2y + 9$

(III) Se despeja y: $y = 2x + 9 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x + 9$

(IV) Para hallar el dominio y rango de f^{-1} se analiza el dominio y rango de f luego se aplica la propiedad.

Dato: $Domf = [-3; 1]$ para hallar el rango se procede de la siguiente manera

$-3 \leq x \leq 1 \implies -6 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2x + 9 \leq 11$ entonces: $Ranf = [3; 11]$

Propiedad: $Domf^{-1} = Ranf$ y $Ranf^{-1} = Domf$

Entonces: $Domf^{-1} = [3; 11]$ y $Ranf^{-1} = [-3; 1]$

FUNCIÓN LOGARITMO - FUNCIÓN EXPONENCIAL

38. Grafique la función, cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x+1} - 3 & , \quad x > -1 \\ -(x+1)^2 + 1 & , -3 < x < -1 \end{cases}$$

Indique las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados, dominio, rango y ecuación de su asíntota.

SOLUCIÓN:

Primero se grafica la función exponencial:

$f_1(x) = 2^{-x+1} - 3, x > -1$

Segundo se grafica la función cuadrática

$f_2(x) = -(x+1)^2 + 1, -3 \leq x < -1$

DOMINIO: $Domf = [-3; +\infty[- \{-1\}$

RANGO: $Ranf = [-3; 1[$

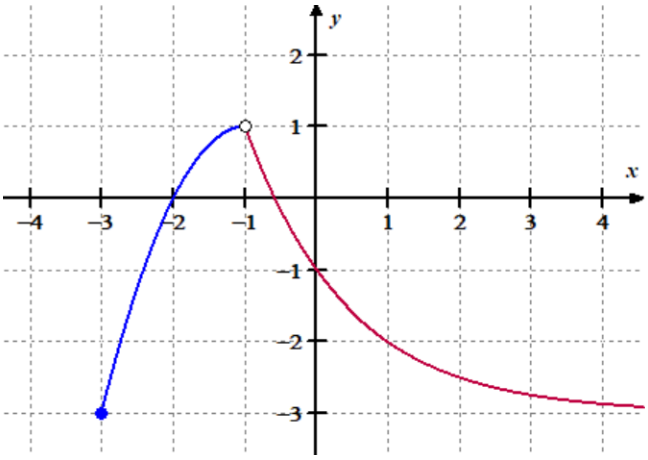
INTERSECCIÓN CON EL EJE x: $y = 0$

$2^{-x+1} - 3 = 0 \rightarrow x = -0{,}584$

$-(x+1)^2 + 1 = 0 \rightarrow x = -2$

INTERSECCIÓN CON EL EJE y: $x = 0$

$y = 2^{-0+1} - 3 = -1$



Las coordenadas de los puntos de intersección son (–0,584; 0), (–2; 0) y (0; –1).

Hay una asíntota horizontal cuya ecuación es: $y = -3$

39. Determine el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{5 + \log(x-1)}{2^x - 8}$$

SOLUCIÓN:

En el numerador observa: $x - 1 > 0 \Longrightarrow x > 1$

Además: $2^x - 8 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

Dominio: $Domf =]1; +\infty[- \{3\}$

40. Resuelva la ecuación: $\ln(2x-1) + \ln(x-3) = \ln(11-x)$

SOLUCIÓN:

En este tipo de ecuaciones primero se analiza el CVA:

$$2x - 1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2} \quad , \quad x - 3 > 0 \rightarrow x > 3 \ ; \ 11 - x > 0 \rightarrow x < 11$$

De estos resultados se deduce que el CVA= $]3; 11[$

Aplicamos las propiedades: $\ln(2x-1)(x-3) = \ln(11-x)$

Igualando los argumentos: $2x^2 - 6x - x + 3 = 11 - x$

Simplificando queda: $2x^2 - 6x - 8 = 0 \ \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

Resolviendo esta ecuación cuadrática se obtiene: $x = -1; x = 4$

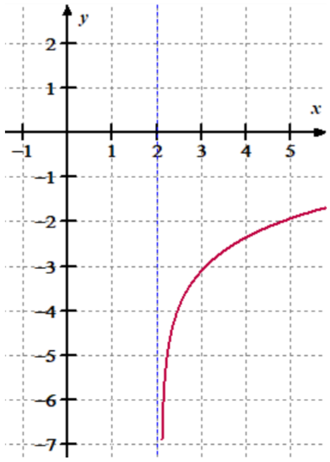
De estos dos valores -1 no pertenece al CVA, por lo tanto: $CS = \{4\}$

41. Si la función f tiene la regla de correspondencia: $f(x) = \ln(x-2) - 3$.

En el caso de que exista la función inversa f^{-1}, halle su regla de correspondencia indicando dominio y rango.

SOLUCIÓN:

Esboce la gráfica de $f(x) = \ln(x-2) - 3$



Observa que la función es inyectiva, por lo tanto, tiene inversa.

$Domf =]2; +\infty[\ \ y \ \ Ranf = \mathbb{R}$

Para hallar la regla de la inversa se sigue el siguiente proceso

$$y = \ln(x-2) - 3 \quad \rightarrow \quad x = \ln(y-2) - 3$$

$$x + 3 = \ln(y-2) \rightarrow \quad y - 2 = e^{x+3} \rightarrow y = e^{x+3} + 2$$

Finalmente, $f^{-1}(x) = e^{x+3} + 2$, $Domf^{-1} = \mathbb{R}$ y $Ranf^{-1} =]2; +\infty[$

42. El porcentaje de árboles en una plantación que se ha infectado por cierta plaga está dado por la siguiente función $P(t) = \dfrac{100}{1 + 20e^{kt}}$ donde t es el número de semanas después que se reportó la enfermedad. Si en 20 semanas el porcentaje de árboles infectados fue del 12%, determine el porcentaje de árboles infectados, cuando hayan transcurrido 50 semanas.

SOLUCIÓN:

Si en 20 semanas el porcentaje de árboles infectados fue del 12%, este dato significa que

$P(20) = 12$

Se reemplaza en la función: $P(20) = \dfrac{100}{1 + 20e^{k(20)}} = 12 \rightarrow$ resolviendo se obtiene $k = -0{,}05$

Luego de 50 semanas, $t = 50 \Longrightarrow P(50) = \dfrac{100}{1 + 20e^{-0{,}05(50)}} = 37{,}8$

Por determinar el valor del porcentaje $P = 37{,}85$

El porcentaje de árboles infectado cuando han transcurrido 50 semanas es 37,85%

43. La taquilla T (en millones de dólares) que recauda la película El Ingeniero, se modela con la función, $T(t) = 250 + Be^{kt}$donde t es el número de semanas transcurridas desde su estreno. Según un sondeo, se estima que el día del estreno la película recaudó 50 millones de dólares en taquilla, y tres semanas después la taquilla fue de 200 millones. Determine el valor de las constantes B y k, además halle la taquilla en la semana 4.

SOLUCIÓN:

El día del estreno recaudó 50 millones, esto significa que $T(0) = 250 + Be^{k(0)}$

$= 250 + B = 50 \Rightarrow \; B = -200 \;\; \Rightarrow \; T(t) = 250 - 200e^{kt}$

Tres semanas después la taquilla fue de 200 millones, esto significa que

$T(3) = 250 - 200e^{k(3)} = 200 \Rightarrow \; 0{,}25 = e^{3k} \Rightarrow \; k = -0{,}462098$

La taquilla en la semana 4 es: $T(4) = 250 - 200e^{(-0{,}462098)(4)}$=218,501

La taquilla en la semana 4 es de 218,5 millones de dólares aproximadamente.

MATRICES

Dadas las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0{,}5 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 10 \\ 6 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \boldsymbol{D} = [d_{ij}]_{3\times 3} \text{ donde } d_{ij} = \begin{cases} i+j; i > j \\ j; i = j \\ 2j - i; i < j \end{cases}$$

44. Determine por extensión la matriz D

SOLUCIÓN:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \text{ para hallar los } d_{ij} \text{ se trabaja con } d_{ij} = \begin{cases} i+j & ; i > j \\ j & ; i = j \\ 2j - i & ; i < j \end{cases}$$

$d_{11} \rightarrow i = j = 1$ $\quad$ $d_{12} \longrightarrow i = 1 < j = 2$ $\quad$ $d_{13} \longrightarrow i = 1 < j = 3$

$d_{11} = j = 1$ $\quad$ $d_{12} = j = 2$ $\quad$ $d_{13} = 2j - i = 2(3) - 1 = 5$

$d_{21} \rightarrow i = 2 > j = 1$ $\quad$ $d_{22} \rightarrow i = j = 2$ $\quad$ $d_{23} \rightarrow i = 2 < j = 3$

$d_{21} = i + j = 2 + 1 = 3$ $\quad$ $d_{22} \rightarrow j = 2$ $\quad$ $d_{23} = 2j - i = 2(3) - 2 = 4$

$d_{31} \rightarrow i = 3 > j = 1$ $\quad$ $d_{32} \rightarrow i = 3 > j = 2$ $\quad$ $d_{33} \rightarrow i = j = 3$

$d_{31} = i + j = 3 + 1 = 4$ $\quad$ $d_{32} = 3 + 2 = 5$ $\quad$ $d_{33} = j = 3$

Finalmente: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

45. Halle $\mathbf{2A - 3C}$

SOLUCIÓN:

$$2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{C} = 2\begin{bmatrix} 3 & 0{,}5 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 10 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -9 & 6 \\ -9 & 3 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 4 \\ 11 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

46. Halle $\mathbf{AC^T - 3I}$, donde I es la matriz identidad.

SOLUCIÓN:

$$\boldsymbol{AC}^T - \boldsymbol{3I} = \begin{bmatrix} 3 & 0{,}5 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 11{,}5 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

47. Halle $\mathbf{det(B)}$

SOLUCIÓN:

$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 10 \\ 6 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ para hallar det(B) se puede aplicar el desarrollo por cofactores:

$$\mathbf{det(B)} = 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 5(2-0) + 3(12-0) + 10\big(12-(-5)\big) = 216$$

48. Halle el producto $\boldsymbol{AB}$.

SOLUCIÓN:

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_{2\times3}\boldsymbol{B}_{3\times3} = \mathbf{H}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 0{,}5 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 5 & -3 & 10 \\ 6 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \end{bmatrix}$$

$$(fila\ 1\ \times columna\ 1) \quad h_{11} = [3 \quad 0{,}5 \quad 5]\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix} = (3)(5) + (0{,}5)(6) + (5)(-5) = -7$$

$$(fila\ 1\ \times columna\ 2) \quad h_{12} = [3 \quad 0{,}5 \quad 5]\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (3)(-3) + (0{,}5)(1) + (5)(2) = 1{,}5$$

$$(fila\ 1\ \times columna\ 3) \quad h_{13} = [3 \quad 0{,}5 \quad 5]\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (3)(10) + (0{,}5)(0) + (5)(2) = 40$$

$$(fila\ 2\ \times columna\ 1) \quad h_{21} = [1 \quad -1 \quad 3]\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix} = (1)(5) + (-1)(6) + (3)(-5) = -16$$

$$(fila\ 2\ \times columna\ 2) \quad h_{22} = [1 \quad -1 \quad 3]\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (1)(-3) + (-1)(1) + (3)(2) = 2$$

$$(fila\ 2\ \times columna\ 2) \quad h_{23} = [1 \quad -1 \quad 3]\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (1)(10) + (-1)(0) + (3)(2) = 16$$

Finalmente: $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -7 & 1{,}5 & 40 \\ -16 & 2 & 16 \end{bmatrix}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales escalonando su matriz ampliada y clasifíquelos según su solución.

49. $\begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 7 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Se comienza por la matriz ampliada: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right]$

Ahora corresponde escalonar: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1+F_3]{(-2)F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{F_3 \longleftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{(-3)F_2+F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{(-\frac{1}{2})F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ de este resultado se deduce: $\begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ y - z = 4 \\ z = 3 \end{cases}$

Por lo tanto: $z = 3; y = 7; x = -2$ entonces el CS $= \{(-2; 7; 3)\}$

Como solo hay una solución el sistema se clasifica como Sistema Compatible Determinado.

50. $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 3 \\ 3x - 6y + 3z = 5 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[(-3)F_1+F_3]{(-1)F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

de este resultado se deduce: $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -y + z = 4 \\ 0z = 2 \end{cases}$ ➡ $\boxed{\text{No existe valor de } z \text{ que cumpla con esta igualdad}}$

Por lo tanto, no hay solución significa que CS = {}

Dado que NO hay solución el sistema se clasifica en Sistema Incompatible.

51. $\begin{cases} x + y + 1{,}2z = 20 \\ 3x + 2y + 4z = 60 \\ 2x + 3y + 2z = 40 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1{,}2 & 20 \\ 3 & 2 & 4 & 60 \\ 2 & 3 & 2 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow[(-2)F_1+F_3]{(-3)F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1{,}2 & 20 \\ 0 & -1 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)F_2+F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1{,}2 & 20 \\ 0 & -1 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se tiene: $\begin{cases} x + y + 1{,}2z = 20 \\ -y + 0{,}4z = 0 \end{cases}$ observa que hay tres variables y dos ecuaciones por lo tanto es un sistema compatible indeterminado.

Para expresar el conjunto solución se parametriza: $z = t\ ; y = 0{,}4t\ ; x = 20 - 1{,}6t$

CS $= \{(20 - 1{,}6t; 0{,}4t; t)/t \in R\}$

52. En una fábrica de Gamarra se producen tres modelos de pantalones a las que llamaremos tipo I, tipo II, y tipo III. Cada pantalón pasa por tres procesos: cortado, cosido y planchado. Los pantalones se elaboran por lotes. El tiempo en minutos requeridos para producir un lote se indica en el siguiente cuadro.

	Cortado	Cosido	Planchado
Tipo I	30	60	20
Tipo II	50	40	50
Tipo III	60	50	90

¿Cuántos lotes de pantalones de cada tipo se pueden fabricar si se emplean exactamente 550 minutos en cada uno de los procesos?

SOLUCIÓN:

Sea *x*: El número de pantalones Tipo I que se produce en la fábrica de Gamarra.

Sea *y*: El número de pantalones Tipo II que se produce en la fábrica de Gamarra.

Sea *z*: El número de pantalones Tipo III que se produce en la fábrica de Gamarra.

Se obtiene el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 30x+50y+60z=550 \\ 60x+40y+50z=550 \\ 20x+50y+90z=550 \end{cases} \quad \text{dividiendo } (\div 10) \text{ se tiene } \begin{cases} 3x+5y+6z=55 \\ 6x+4y+5z=55 \\ 2x+5y+9z=55 \end{cases}$$

Resolviendo el SEL se tiene

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 55 \\ 6 & 4 & 5 & 55 \\ 2 & 5 & 9 & 55 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)F_1+3F_3]{(-2)F_1+F_2} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 55 \\ 0 & -6 & -7 & -55 \\ 0 & 5 & 15 & 55 \end{bmatrix} \xrightarrow{(5)F_2+6F_3} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 55 \\ 0 & -6 & -7 & -55 \\ 0 & 0 & 55 & 55 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x+5y+6z= \ \ 55 \\ \quad -6y-7z \ =-55 \\ \qquad \quad 55z= \ \ 55 \end{cases}$$

$$55z=55 \Rightarrow z=1,\ -6y-7(1)=-55 \Rightarrow y=8,\ 3x+5(8)+6(1)=55 \Rightarrow x=3$$

Respuesta: Se debe fabricar 3 pantalones Tipo I, y 8 pantalones Tipo II y 1 pantalón Tipo III para emplear todos los minutos disponibles.

53. Un almacén distribuye cierto producto que fabrican 3 marcas distintas: A, B y C. La marca A lo envasa en cajas de 250 gramos y su precio es de 100 €, la marca B lo envasa en cajas de 500 gramos a un precio de 180 € y la marca C lo hace en cajas de 1 kilogramo a un precio de 330 €. El almacén vende a un cliente 2,5 kilogramos de este producto por un importe de 890 €. Sabiendo que el lote iba envasado en 5 cajas, plantea un sistema para determinar cuántas cajas de cada tipo se han comprado y resuelve el problema.

SOLUCIÓN:

x = número de cajas de 250 gramos

y = número de cajas de 500 gramos

z = número de cajas de 1000 gramos

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=5 \\ 250x+500y+1000z=2500 \\ 100x+180y+330z=890 \end{cases}$$

Simplificando:

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y + 4z = 10 \\ 10x + 18y + 33z = 89 \end{cases} \xrightarrow{MATRIZ\ AMPLIADA} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 1 & 2 & 4 & | & 10 \\ 10 & 18 & 33 & | & 89 \end{bmatrix} \underset{(-10)F_1+F_3}{\xrightarrow{(-1)F_1+F_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & 8 & 23 & | & 39 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-8)F_2+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 5 \\ y + 3z = 5 \\ -z = -1 \end{cases} \text{ resolviendo el sistema: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Respuesta:

Se han comprado 2 cajas de 250 gramos, 2 cajas de 500 gramos y 1 caja de 1000 gramos.

VECTORES

54. Dados los vectores $a =< -2; 1 >, b =< 3; 2 >$ y $c =< 6;\ 4 >$; halle: $|3a + 2b - c|$

SOLUCIÓN:

$|3a + 2b - c| = |\ 3 < -2; 1 > +2 < 3; 2 > -< 6; 4 >| = |< 6; 3 >|$

$| < 6; 3 >| = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$

55. Dados los vectores $a = 3i + 2j$ y $b = -5i + 7j$ halle el ángulo que forman los vectores a y b.

SOLUCIÓN:

$a = 3i + 2j =< 3; 2 > \quad y \quad b = -5i + 7j =< -5; 7 >$

Sea θ el ángulo formado por los vectores a y b $\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a.b}{|a||b|}\right)$

$a.b =< 3; 2 >.< -5; 7 \geq -15 + 14 = -1$

$|a| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ y $|b| = \sqrt{(-5)^2 + 7^2} = \sqrt{74}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a.b}{|a||b|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{74}}\right) = 88{,}15°$

56. Dados los vectores $a = -3i + 4j$ y $b =< 7;\ -3 >$ halle el vector unitario en la dirección de $2a + b$

SOLUCIÓN:

Primero se calcula $v = 2a + b = 2 < -3; 4 > +< 7; -3 > \Rightarrow v =< 1; 5 >$

El vector unitario en la dirección de un vector v se calcula: $u_v = \frac{v}{|v|}$

En este caso: $u_v = \frac{< 1; 5 >}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{< 1; 5 >}{\sqrt{26}} =< \frac{1}{\sqrt{26}}; \frac{5}{\sqrt{26}} >$

57. Dados los vectores $a = \langle -1; 2; 4\rangle$ y $b = 3i - 2j + k$ halle el producto escalar de los vectores

$m = a + b \ \ y \ \ n = a - b$

SOLUCIÓN:

$m =< -1; 2; 4 > +< 3; -2; 1 > = < 2; 0; 5 >$; $n =< -1; 2; 4 > -< 3; -2; 1 > = < -4; 4; 3 >$

$m \cdot n =< 2; 0; 5 > \cdot < -4; 4; 3 >= -8 + 0 + 15 = 7$

58. Dados los vectores $a = 2i - 4j + 3k$ y $b = -i + 5j + 2k$ halle la medida del ángulo entre los vectores $3a - b$ y $a + 3b$.

SOLUCIÓN:

$a = 2i - 4j + 3k =< 2; -4; 3 >$ $\qquad$ $b = -i + 5j + 2k =< -1; 5; 2 >$

$m = 3a - 2b = 3 < 2; -4; 3 > -2 < -1; 5; 2 > \Longrightarrow m =< 8; -22; 5 >$

$n = a + 3b =< 2; -4; 3 > +3 < -1; 5; 2 > \Longrightarrow n =< -1; 11; 9 >$

Sea θ el ángulo formado por los vectores m y n $\Longrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{m.n}{|m||n|}\right)$

$m.n =< 8; -22; 5 > \cdot < -1; 11; 9 > = -8 - 242 + 45 = -205$

$|m| = \sqrt{8^2 + (-22)^2 + 5^2} = \sqrt{573}$

$|n| = \sqrt{(-1)^2 + (11)^2 + 9^2} = \sqrt{203}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-205}{\sqrt{573}\sqrt{203}}\right) = 126{,}95°$

59. Dados los vectores $a = \langle 2; 3; 8\rangle$ y $b = \langle -2; 2; -5\rangle$ halle el producto vectorial de a y b.

SOLUCIÓN:

Recuerde que el producto vectorial de dos vectores $a =< a_x; a_y; a_z >$ y $b =< b_x; b_y; b_z >$ se halla mediante un determinante.

$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_y \end{vmatrix}$ para este caso $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

$a \times b = i\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = i(-15 - 16) - j(-10 + 16) + k(4 + 6)$

$a \times b = -31i - 6j + 10k =< -31;\ -6; 10 >$

APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA

ÁNGULOS DE EELVACIÓN Y DEPRESIÓN

60. Dos observadores están separados 400 pies, en lados opuestos de un árbol. Los ángulos de elevación de los observadores a la punta del árbol son 15° y 20°. Determine la altura del árbol.

SOLUCIÓN:

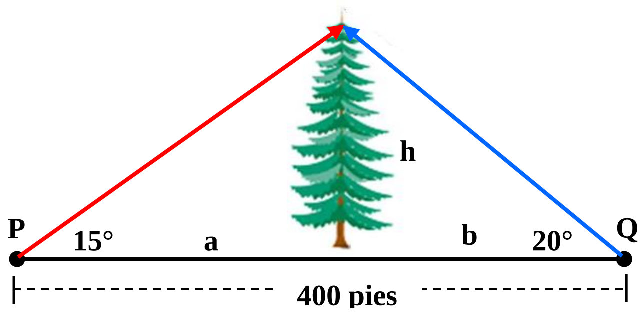
Primero se esboza el gráfico

Sean P y Q los observadores

a = distancia de P al árbol en pies

b = distancia de Q al árbol en pies

De la figura se observa: a + b = 400



Además: $\dfrac{h}{a} = \tan 15°$ y $\dfrac{h}{b} = \tan 20°$ entonces se puede afirmar que $a = \dfrac{h}{\tan 15°}$ y $b = \dfrac{h}{\tan 20°}$

Reemplazando en $a + b = 400$ se obtiene: $\dfrac{h}{\tan 15°} + \dfrac{h}{\tan 20°} = 400$

$$h\left(\frac{1}{\tan 15°} + \frac{1}{\tan 20°}\right) = 400 \Rightarrow h = \frac{400}{\left(\frac{1}{\tan 15°} + \frac{1}{\tan 20°}\right)} \Longrightarrow h = 61{,}73$$

La altura del árbol es de 61,73 pies aproximadamente.

61. Ana está practicando a usar el teodolito y se propone medir la altura de un árbol, para ello hace dos mediciones. Desde un punto P mide un ángulo de elevación de 26° y después se aleja 20 m en la misma línea hasta un punto Q y mide un ángulo de elevación de 16°. Luego de hacer los cálculos correspondientes y considerando que la altura del teodolito es de 1,2 metros, ¿qué valor obtuvo para la altura del árbol?

SOLUCIÓN:

Primero se esboza el gráfico

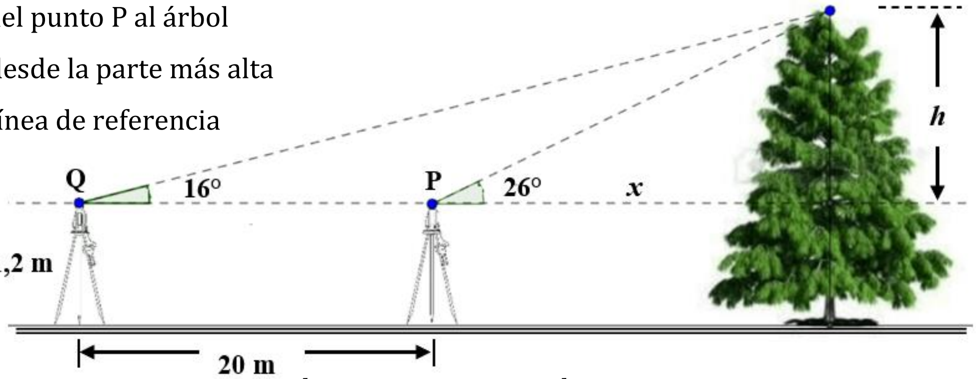
Sea x la distancia del punto P al árbol

Sea h la distancia desde la parte más alta del árbol hasta la línea de referencia

Observa que:

$\tan 26° = \dfrac{h}{x}$

$\tan 16° = \dfrac{h}{x + 20}$



De estas dos igualdades se deduce: $x = \dfrac{h}{\tan 26°}$ y $x + 20 = \dfrac{h}{\tan 16°}$

Por lo tanto $\dfrac{h}{\tan 26°} + 20 = \dfrac{h}{\tan 16°}$ despejando se obtiene: $h = \dfrac{20}{\dfrac{1}{\tan 16°} - \dfrac{1}{\tan 26°}} = 13{,}916$

La altura de árbol es $13{,}92 + 1{,}2 = 15{,}12$ metros aproximadamente.

LEY DE SENOS Y COSENOS

62. Para hallar la distancia entre dos puntos extremos de un lago A y B (ver figura), un topógrafo midió el ángulo ACB de 96° y los lados AC y BC midieron 95 y 68 metros, respectivamente. ¿Cuál es la distancia aproximada entre los puntos A y B?

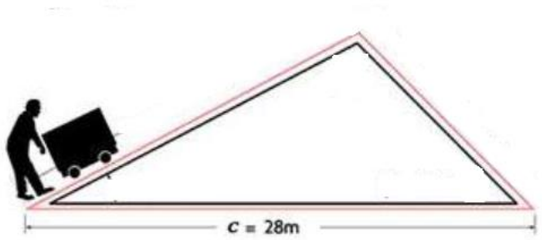
SOLUCIÓN:

Analizando los datos proporcionados en la figura adjunta, se puede deducir que es posible usar la ley de cosenos:

$AB^2 = 95^2 + 68^2 - 2(95)(68)\cos 96° \Longrightarrow AB = 122{,}472$

Por lo tanto, la distancia aproximada entre los puntos A y B es 122,47 metros

63. Calcule la distancia que debe recorrer un obrero para subir y bajar una carretilla por una rampa. Si sabemos que la base mide 28 m y tiene una inclinación de 25° en la subida y 46°en la bajada.



SOLUCIÓN:

Sea b la distancia de subida y a la distancia de bajada

Aplicación de la ley de senos

Distancia de subida:

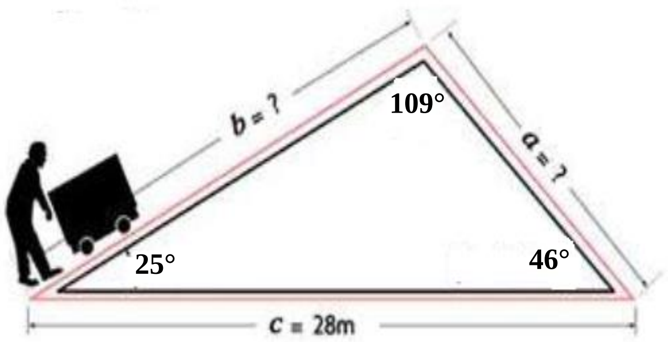
$\dfrac{b}{\sin 46°} = \dfrac{28}{\sin 109°} \quad \Longrightarrow b = \dfrac{28\sin 46°}{\text{sen}109°}$

$b = 21{,}3$

Distancia de bajada:

$\dfrac{a}{\sin 25°} = \dfrac{28}{\sin 109°} \quad \Longrightarrow b = \dfrac{28\sin 25°}{\text{sen}109°}$

$a = 12{,}51$



La distancia que debe recorrer el obrero es de 21,3+12,51= 33,81 metros aproximadamente.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

64. Resuelva la ecuación y determine el conjunto solución en $[0; 2\pi]$

$\cos^2(x) - \cos(x) - 2 = 0$

SOLUCIÓN:

Para facilitar la resolución de esta ecuación se hace un cambio de variable: $u = \cos(x)$

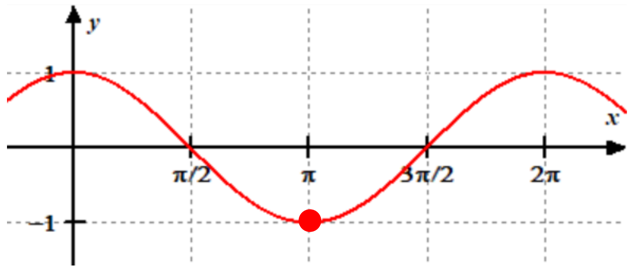
La ecuación queda así: $u^2 - u - 2 = 0 \Longrightarrow (u-2)(u+1) = 0 \Rightarrow u = 2 \;\; o \;\; u = -1$

Regresamos a la variable original:

$\cos(x) = 2$ no tiene solución

$\cos(x) = -1 \Rightarrow x = \cos^{-1}(-1) = \pi$

En el intervalo indicado CS $= \{\pi\}$



65. Resuelva la ecuación y determine el conjunto solución en $[0; 2\pi]$

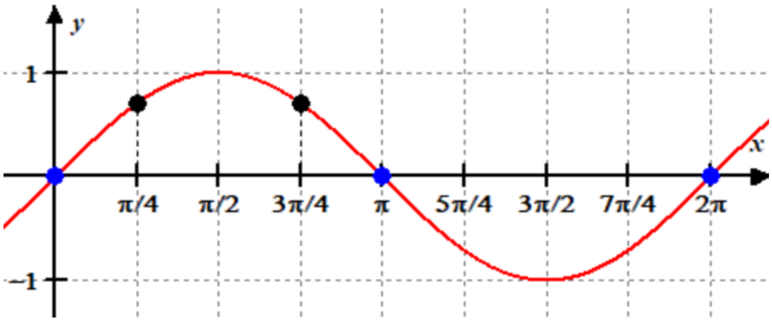
$\text{sen}^2 x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}x = 0$

SOLUCIÓN:

Para facilitar la resolución de esta ecuación se hace un cambio de variable: $u = \text{sen}(x)$

La ecuación queda así: $u^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}u = 0 \Rightarrow u\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Rightarrow u = 0 \;\; o \;\; u = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Regresamos a la variable original:



$\text{sen}(x) = 0 \;\Rightarrow x = \{0;\; \pi; 2\pi\}$

$\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \left\{\frac{\pi}{4};\; \frac{3\pi}{4}\right\}$

En el intervalo indicado

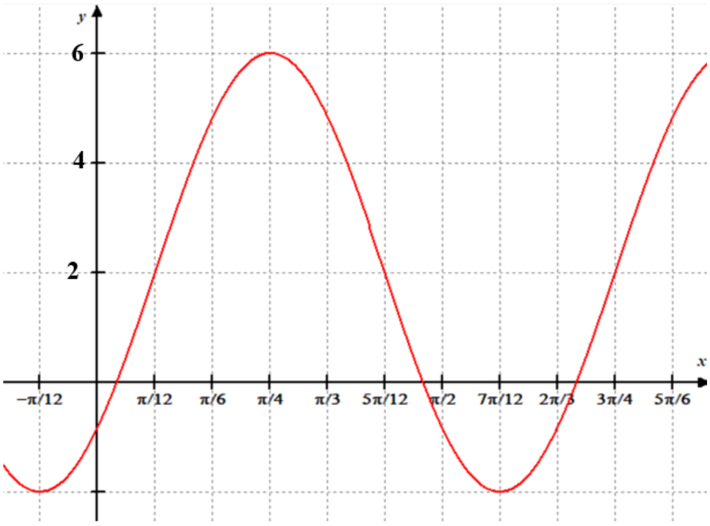
$\text{CS} = \left\{0;\; \frac{\pi}{4};\; \pi;\; \frac{3\pi}{4}; 2\pi\right\}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS GENERALIZADAS

66. En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función

$f(x) = \text{A}\,\text{sen}(\text{B}x + \text{C}) + \text{D}$

Halle su amplitud, periodo, desfase y traslación vertical. Escriba su regla de correspondencia.



SOLUCIÓN:

De la gráfica se observa:

Amplitud: $|A| = 4$

Periodo: $T = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$

Desfase: $\emptyset = \frac{\pi}{12}$

Traslación vertical de 2 unidades hacia arriba.

De estos resultados se deduce: $A = 4\,; B = 3; C = -\frac{\pi}{4}\,; D = 2$

La regla de correspondencia de la función es: $f(x) = 4\,\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

67. Dada la función $g(x) = -2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$

Determine su amplitud, periodo, desfase y traslación vertical y trace la gráfica en un periodo.

SOLUCIÓN:

Función: $g(x) = -2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$

Amplitud $= |-2| = 2$

Periodo $= \frac{2\pi}{2} = \pi$

desfase $= 2\emptyset + \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow \emptyset = -\frac{\pi}{12}$

Traslación vertical 3 unidades a la derecha.

Para esbozar la gráfica se toma como referencia $[0; 2\pi]$.

$$0 \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{11\pi}{12}$$

Estos valores se llevan a una recta y se divide en cuatro partes para esbozar la gráfica.