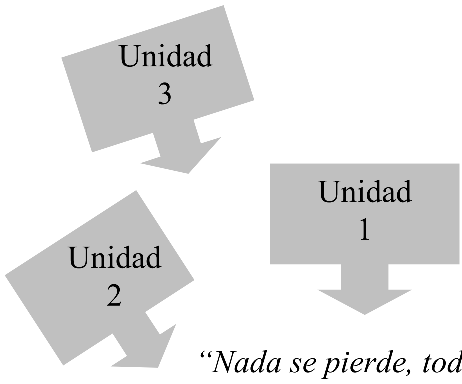
TRANSFORMACIONES MATRICIALES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$



"Nada se pierde, todo se transforma". Antoine Lavoisier.

UNIDAD

CUATRO

Orientación del aprendizaje

Esta unidad constituye una mirada diferente a temas analizados en las anteriores. Esta unidad es una "aplicación" de las unidades anteriores. .En particular, nos detenemos en la *n*-upla de números reales; la consideramos como un vector en el espacio de vectores, $\mathbb{R}^n$, que se expande, contrae y suma con otros. También, dados varios de esos vectores analizamos las relaciones de dependencia o independencia existentes entre ellos, aclaramos: si viven en la misma recta o en el mismo plano, o si unos están generados por otros.

Luego, definimos aplicaciones que "mueven" a los vectores de un espacio a otro, y en las cuales da lo mismo expandirlos, contraerlos o sumarlos antes o después de "moverlos". Sin embargo, nos encontramos con una sorpresa: esta acción "dinámica" de transformar vectores en otros se identifica, se plasma, se realiza a través de la multiplicación por una matriz. Y si dicha matriz se expresa como producto entre una invertible y una diagonal, tal transformación resulta sencilla y rápida en los cálculos. Pero aclaremos, no toda matriz puede expresarse así, ¿por qué? porque no toda matriz es invertible.

Desde este punto de vista, los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) y todo modelo que involucra el producto matricial entre matriz y vector, como los procesos de Markov entre otros, pueden pensarse como transformaciones matriciales (TM), esto es, pueden pensarse desde una visión dinámica.

Así, y en otras palabras, cuando tenemos un conjunto de datos (números reales) y conocemos la ley que los modifica podemos modelar matemáticamente el problema que los involucra de forma fácil.

Los conceptos que se definen son pocos y las técnicas que se usan ya son conocidos. El material para leer es abundante porque es reiterativo. Observará que hemos insistido en expresar en lenguaje coloquial lo que se ha escrito en simbología matemática y viceversa; hemos abusado de explicaciones repetidas para su mejor comprensión; cada vez que podíamos graficar la información lo hemos hecho con fines didácticos. Por todo esto, es fundamental que aplique técnicas de estudio: subraye ideas claves, rotule párrafos, efectúe notaciones marginales y sintetice la información.

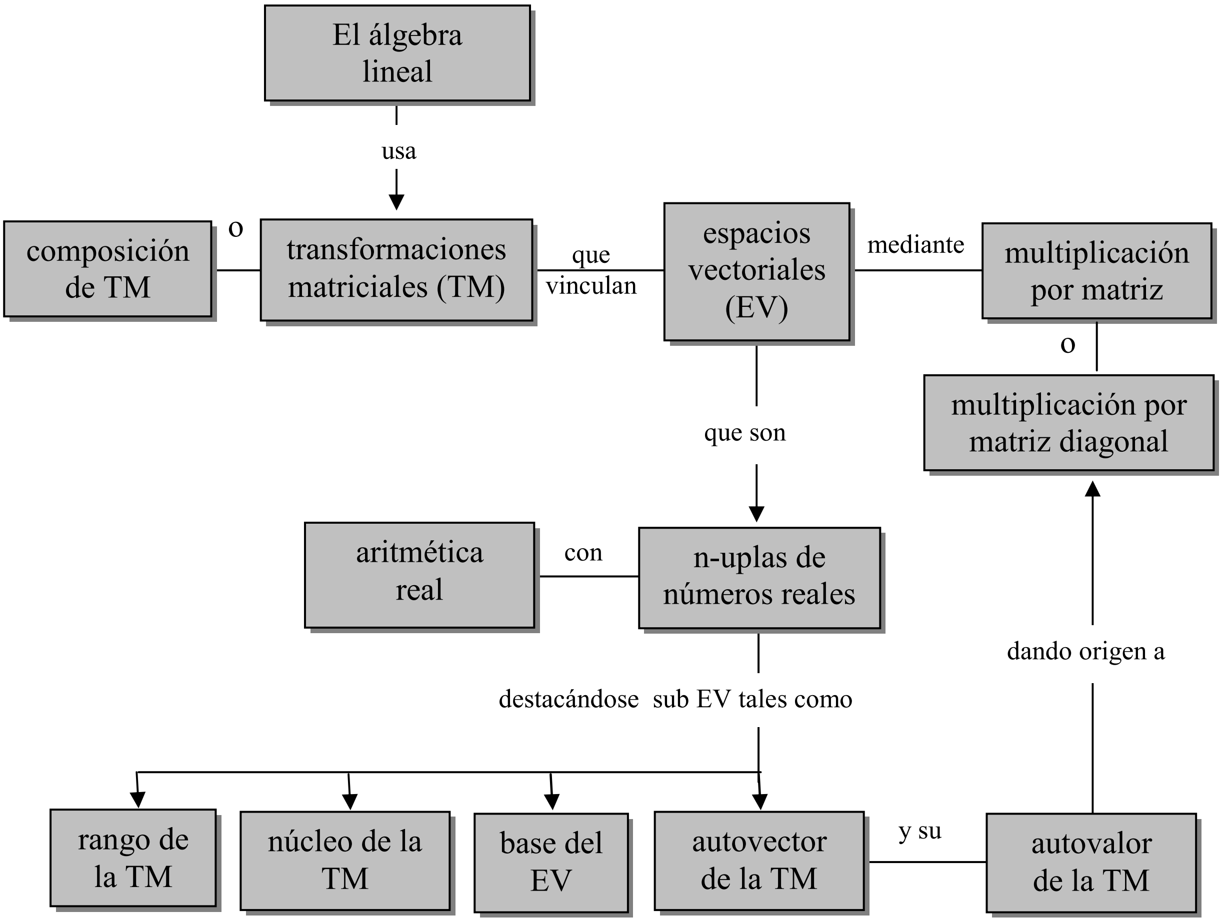
Al finalizar la unidad usted estará en condiciones de alcanzar los siguientes **objetivos.**

- ✓ Caracterizar conjuntos de vectores y analizar relaciones de dependencia e independencia lineal entre ellos.
- ✓ Caracterizar las transformaciones matriciales y construir la matriz que las representa.
- ✓ Identificar matrices diagonalizables y construirlas como producto entre una diagonal y otra invertible.
- ✓ Resolver problemas empleando la multiplicación de matrices en una visión dinámica.
- ✓ Pasar de la abstracción a la interpretación y viceversa.

Para alcanzar estos objetivos de aprendizaje, le proponemos analizar los siguientes **temas**

1. Vectores. Suma entre vectores. Producto por un escalar y producto escalar.
2. Combinación lineal de vectores en $\mathbb{R}^n$.
3. Transformaciones matriciales.
4. Vectores y valores propios.

El siguiente **mapa conceptual** muestre las relaciones que guardan entre sí los conceptos que analizamos en esta unidad.



1. Vectores en $\mathbb{R}^n$. Suma entre vectores. Producto por un escalar y producto escalar.

En esta sección definimos $\mathbb{R}^n$ como un conjunto de vectores conocido como "espacio vectorial" porque cumple ciertas propiedades.

En el apartado 6 de la unidad 1 trabajamos la representación geométrica de puntos en el plano y en el espacio tridimensional ¿recuerda? Entonces dijimos que: "*Las 2-uplas en el plano cartesiano y las 3-uplas en el espacio tridimensional reciben, también, el nombre de coordenadas del punto geométrico que representan*." Este concepto se generaliza a n-uplas en el espacio n-dimensional[1].

En el apartado 1 de la unidad 2 introducimos la siguiente definición: "*Una matriz con una sola columna se llama matriz columna o vector columna*."

En esta unidad ambos conceptos se relacionan ¿se funden? ¿Se confunden? Una n-upla de coordenadas $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ en el espacio n-dimensional se escribe como un vector columna $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ de **entradas** x_1, x_2, …, x_n, y es conocida simplemente como **vector de coordenadas** o simplemente **vector**. Se lo rotula como X, y cuando se necesita darle un orden o posición, se usa el subíndice como por ejemplo X_1. En general se usan las últimas letras del abecedario en mayúsculas: U, V_2, W entre otras notaciones posibles; sus componentes se denotan en la misma letra en minúsculas: $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \cdots \\ v_{2n} \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Cada entrada del vector hace referencia a un número de unidades sobre el correspondiente eje real.

Note el use de los paréntesis rectangulares [ ] y a la ordenación vertical que reemplazan a los paréntesis comunes ( ), a las comas separadoras y a la ordenación horizontal.

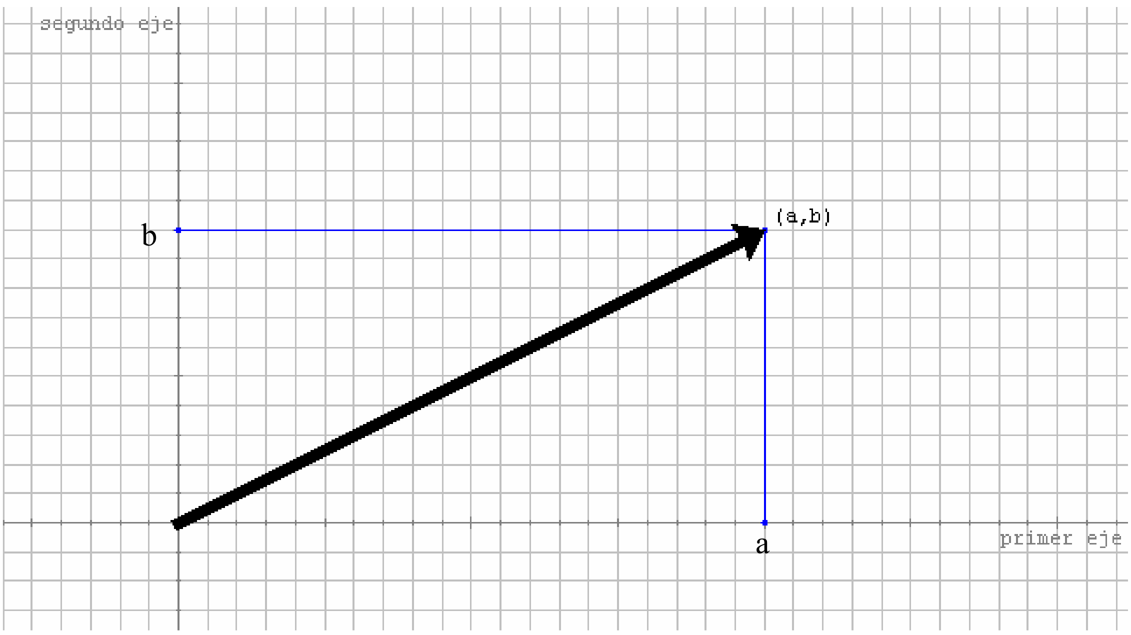
Su **dimensión** o **tamaño** es n porque consta de n componentes (o entradas, o números reales que lo "definen", lo "ubican"). Al conjunto de vectores de tamaño n se los denota por $\mathbb{R}^n$ –se lee erre ene– que es una notación simplificada de $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{n veces}}$ –

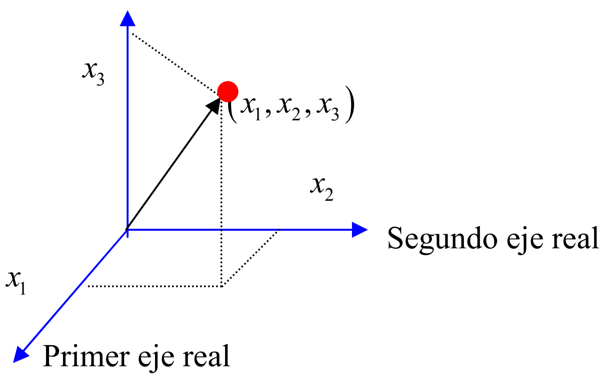
[1] Espacio n-dimensional es el definido como n rectas reales que se cortan en el origen, todas perpendiculares entre sí.

con n natural mayor a uno– (un número real en cada copia de la recta real $\mathbb{R}$). $\mathbb{R}^n$ es más que un conjunto de vectores: es un espacio vectorial. Definiremos este nuevo concepto más adelante.

Un vector se representa geométricamente en el espacio n-dimensional como un segmento rectilíneo dirigido, con extremo inicial en el origen y con extremo final en el punto de coordenadas dado; en el extremo final una flecha denota el **sentido**. Al menos esto es así en $\mathbb{R}^2$, o en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, donde las visualizaciones –o representaciones geométricas– pueden realizarse.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{componente real (o número de unidades) del primer eje o eje horizontal} \\ \leftarrow \text{componente real (o número de unidades) del segundo eje o eje vertical} \end{matrix}$$

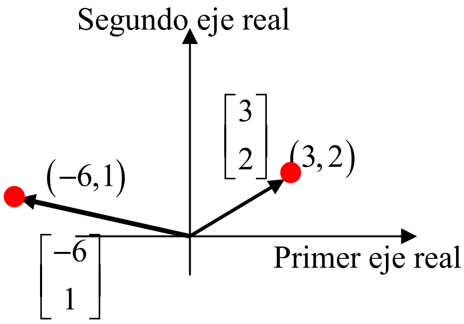




En los siguientes ejemplos trabajamos con vectores específicos, esto es asignamos valores reales (arbitrarios) a las letras que rotulan sus componentes.

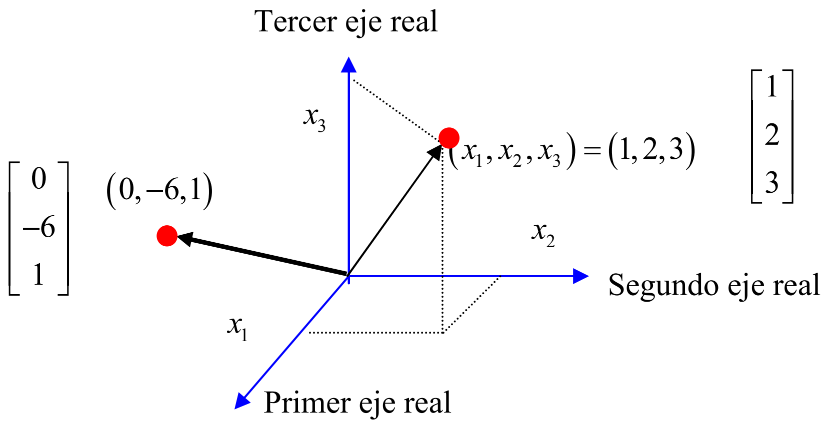
Ejemplo 1

El punto geométrico $(-6,1)$ se identifica con el vector $\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ (porque tienen dos componentes: una en un primer eje y otra en un segundo eje) y recíprocamente, dicho vector se identifica con dicho punto geométrico o coordenadas en el plano cartesiano. Lo mismo vale para el punto geométrico $(3,2)$ y el vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

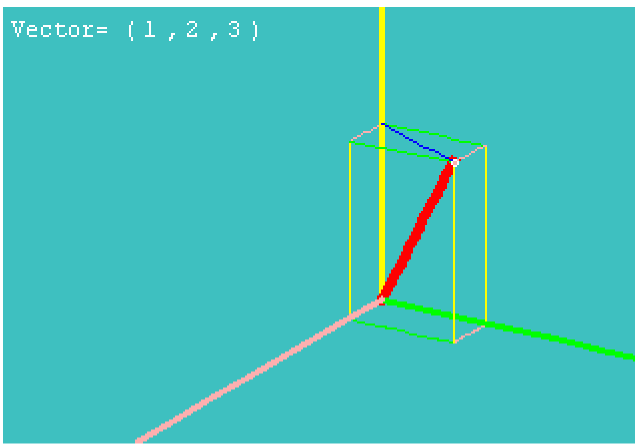


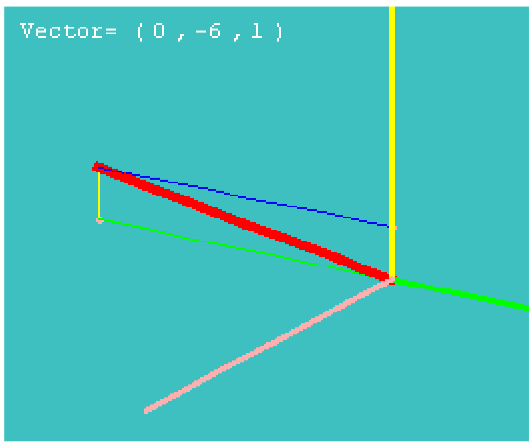
Ejemplo 2

El punto geométrico $(1,2,3)$ se identifica con el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ porque tiene tres componentes, y recíprocamente, dicho vector se identifica con dicho punto geométrico o coordenadas en el espacio tridimensional.



El punto geométrico $(0,-6,1)$ se identifica con el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ y recíprocamente.



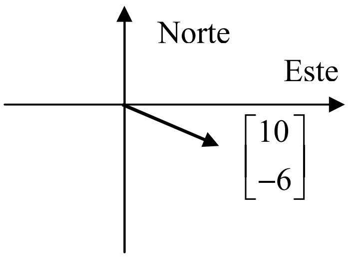


Los gráficos muestran en rojo el vector.

En los siguientes ejemplos mostraremos cómo surgen, o se construyen “vectores” en diferentes contextos, y también mostraremos que cantidad se mide en cada eje.

Ejemplo 3

La velocidad constante de un bote en el agua se describe dando dos coordenadas reales. Luego puede pensarse como un vector en $\mathbb{R}^2$. En particular, el gráfico muestra el vector velocidad constante de componentes $\begin{bmatrix} 10 \\ -6 \end{bmatrix}$ de un bote que se mueve en dirección sudeste. Para graficar fue necesario definir la posición norte en $\mathbb{R}^2$: eje vertical-arriba.



Ejemplo 4

Retomamos el ejemplo 36, apartado 7 de la unidad 1. Podemos ordenar en un vector los porcentajes de componentes por aleación, así:

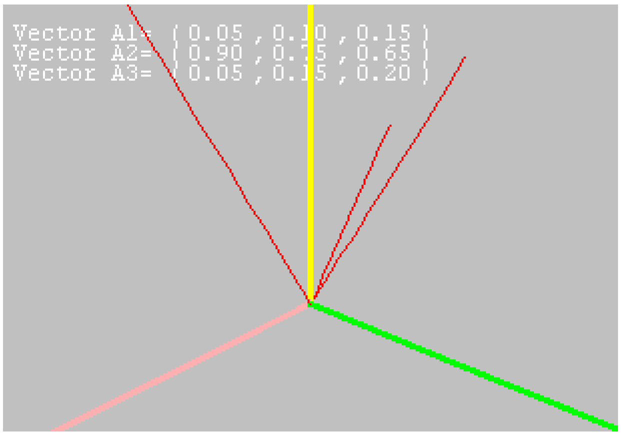
$$\begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.80 \\ 0.15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{porcentaje de titanio en la aleación 1.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de cromo en la aleación 1.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de vanadio en la aleación 1.} \end{array} \quad \text{Vector composición de la aleación1.}$$

$$\begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.65 \\ 0.25 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{porcentaje de titanio en la aleación 2.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de cromo en la aleación 2.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de vanadio en la aleación 2.} \end{array} \quad \text{Vector composición de la aleación2.}$$

$$\begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.55 \\ 0.30 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{porcentaje de titanio en la aleación 3.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de cromo en la aleación 3.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de vanadio en la aleación 3.} \end{array} \quad \text{Vector composición de la aleación3.}$$

$$\begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.62 \\ 0.26 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{porcentaje de titanio en la aleación nueva.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de cromo en la aleación nueva.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de vanadio en la aleación nueva.} \end{array}$$

Y los rotulamos, por ejemplo $A_1 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.80 \\ 0.15 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.65 \\ 0.25 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.55 \\ 0.30 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.62 \\ 0.26 \end{bmatrix}$.



El gráfico muestra en rojo los vectores A_i

Ejemplo 5

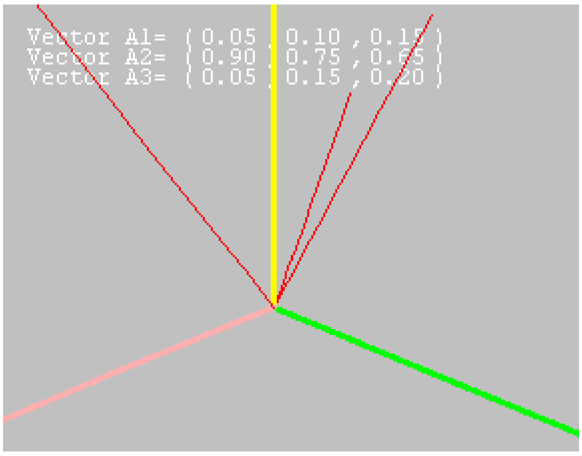
Retomamos el ejemplo 37, apartado 7 de la unidad 1. Podemos ordenar en un vector los porcentajes de componentes por crema, así:

$$\begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.90 \\ 0.05 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{porcentaje de emulsionante en la crema 1.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de esperma de ballena en la crema 1.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de jojoba en la crema 1.} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.75 \\ 0.15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{porcentaje de emulsionante en la crema 2.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de esperma de ballena en la crema 2.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de jojoba en la crema 2.} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.65 \\ 0.20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{porcentaje de emulsionante en la crema 3.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de esperma de ballena en la crema 3.} \\ \leftarrow \text{porcentaje de jojoba en la crema 3.} \end{array}$$

Y rotulamos, por ejemplo $A_1 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.90 \\ 0.05 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.75 \\ 0.15 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.65 \\ 0.20 \end{bmatrix}$. El gráfico muestra en rojo los vectores A_i.



Ejemplo 6

El vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ se encuentra en el espacio $\mathbb{R}^4$ porque consta de cuatro componentes reales (dos de esas componentes son nulas) y no es posible graficarlo. Mientras que $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ se encuentra en el espacio $\mathbb{R}^3$ porque consta de tres componentes reales (una de esas componentes es nula), y $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ porque consta de dos componentes reales (ninguna de esas componentes es nula).

1

a) Dibuje en $\mathbb{R}^2$ los vectores asociados a los puntos coordenados $(-2,-3)$, $(2,3)$, $(-2,3)$, $(2,-3)$.

b) Dibuje en $\mathbb{R}^3$ los vectores asociados a los puntos coordenados $(-2,-3,0)$, $(2,0,3)$, $(0,-2,3)$, $(1,2,-3)$.

c) Un auto se encuentra en dirección sudoeste según el vector dirección de componentes $\begin{bmatrix} -10 \\ -20 \end{bmatrix}$ ¿Cómo graficamos esta información?

d) Retomamos el ejemplo 39, apartado 7 de la unidad 1. Ordene en un vector el número de unidades de cada tipo de alimento para peces así como el vector de unidades totales por tipo de alimento disponibles.

e) Un vector de cinco componentes ¿en qué espacio o copia de $\mathbb{R}$ se encuentra? ¿Y otro vector de *n* componentes? Ejemplifique.

Confronte con la solución nº 1

Bien, como los vectores son –en definitiva– matrices de dimensión $n\times 1$, entre ellos se encuentran definidas las operaciones suma y producto por **escalar**[2]**,** cumpliendo las siguientes propiedades algebraicas.

Propiedades algebraicas de $\mathbb{R}^n$, esto es, de los vectores de la misma dimensión.

Para todos los vectores *U*, *V* y *W* en $\mathbb{R}^n$ y todos los escalares *c* y *d* se cumple:

a) $U+V \quad \in \mathbb{R}^n$

b) $cU \quad \in \mathbb{R}^n$

c) $U+V=V+U$

d) $(U+V)+W=U+(V+W)$

e) $U+0=0+U=U$

f) $U+(-U)=(-U)+U=0$

g) $c(U+V)=cU+cV$

h) $(c+d)U=cU+dU$

i) $c(dU)=(cd)U$

j) $1U=U$

¿Cómo se interpretan esas propiedades algebraicas? Por ejemplo, la propiedad del apartado (a) afirma que el conjunto de vectores en R-ene es cerrado para la suma. En

[2] En el contexto de vectores a cualquier número real que actúa multiplicando a un vector se lo llama escalar.

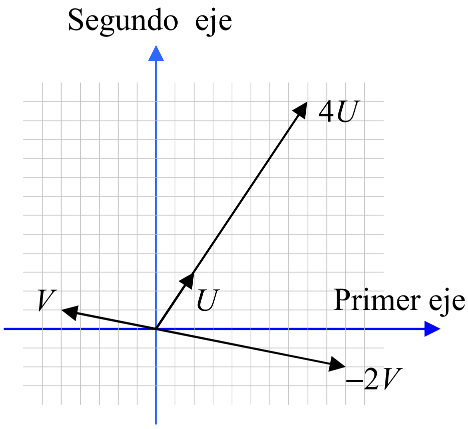
otras palabras, que la suma de dos de sus elementos es otro elemento del conjunto, o bien, la suma de dos vectores de componentes reales es otro vector de componentes reales y del mismo tamaño. Este pasaje de la abstracción a la interpretación es fundamental para la comprensión significativa de la matemática y sobre ello insistimos bastante en el desarrollo de la guía.

2 Exprese en palabras –interprete- cada una de las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}^n$. Confronte con la solución nº 2

Resulta útil <u>analizar geométricamente</u> la suma y la multiplicación por escalares. Lo hacemos en $\mathbb{R}^2$ y comenzamos, en el siguiente ejemplo, con la multiplicación. ¿Me acompaña?

Ejemplo 7

A los fines de una mejor visualización de los vectores, dibujamos el plano $\mathbb{R}^2$ y en el mismo una rejilla o cuadrilla, donde el lado de cada cuadrado lo tomamos como una unidad de medida.



Sean los vectores $U = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$. Esto es:

2 son las unidades del vector U en el primer eje y 3 son las unidades en el segundo; -5 son las unidades del vector V en el primer eje y 1 en el segundo. Luego:

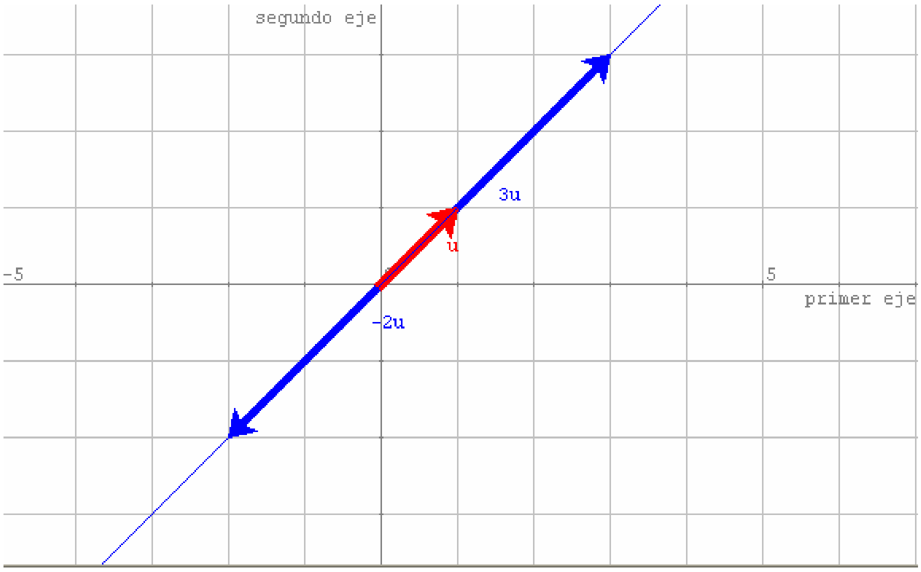
✓ $4U = 4\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times 2 \\ 4\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$. Se lee 4 veces el vector U.

✓ $-2V = -2\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}$. Se lee el opuesto al doble del vector V.

3 Dibuje sobre papel cuadriculado (para que sea fácil establecer una unidad de medida en cada eje) un Sistema de Ejes Cartesianos Ortogonales, y luego dibuje $-3U$, 7 veces U, el opuesto del tercio de U, $\frac{5}{3}U$, $0U$. Confronte con la solución nº 3

(<u>Interpretación de la simbología</u>.) Geométricamente el múltiplo de un vector es otro en la <u>misma dirección,</u> y con el mismo sentido si el escalar es positivo y con sentido opuesto si el escalar es negativo. La multiplicación por un escalar expande o contrae al vector dado. Este hecho, que se visualiza en $\mathbb{R}^2$ y también en $\mathbb{R}^3$, se cumple siempre en $\mathbb{R}^n$ cualquiera sea el natural n

El ejemplo 7 (de esta unidad) y la actividad de proceso 3 (de esta unidad) ejemplifican el hecho de que el conjunto de <u>todos</u> los **múltiplos escalares de un vector fijo** es una línea recta[3] que atraviesa el origen. Aclaremos: “todos los múltiplos escalares” es asignarle al escalar todos y cada uno de los números reales, en particular, cuando el escalar asume el valor nulo se tiene el $0U$ que es el vector nulo 0 y cuya representación geométrica coincide con el origen de coordenadas.



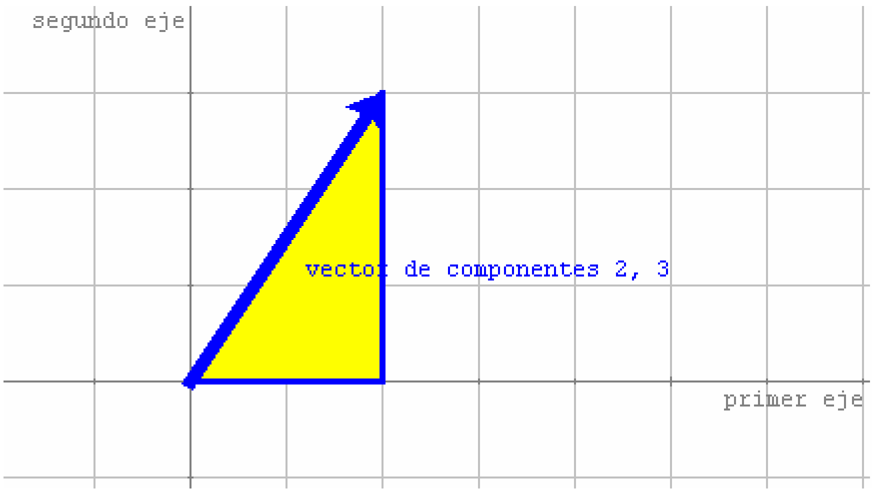
Por otro lado:
- ✓ El vector $-2V$ tiene dos veces la longitud de V y sentido opuesto.
- ✓ El vector $4U$ tiene cuatro veces la longitud de U e igual sentido.

¿Longitud? Y ¿Por qué? En general, la magnitud o longitud del vector cU es $|c|$ veces la longitud de U. ¿Recuerda la notación de valor absoluto de un número real? [4] Y ¿cuál es la longitud del vector U? Para contestar este interrogante debemos recurrir al teorema de Pitágoras, que decía: dado un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de los catetos.

Aplicando el teorema de Pitágoras (conocimiento previo mencionado en Matemática Nivelación) se tiene que la longitud de U (hipotenusa del triángulo rectángulo dibujado) es $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ unidades, pues tiene dos unidades en el eje horizontal (cateto) y tres unidades en el eje vertical (otro cateto). Denotaremos en adelante $\|U\|$ a la longitud de U.

[3] Recuerde que la línea recta no tiene principio, fin ni sentido. Da una dirección.

[4] $|c|$ coincide con c si se trata de un número positivo y con su opuesto si se trata de un número negativo. Ejemplo $|-2|=2=|2|$. Cualquiera sea el número real c, su valor absoluto es siempre positivo: es una medida. Para más información consulte la guía de Nivelación Matemática cuya cita completa se encuentra en la bibliografía.

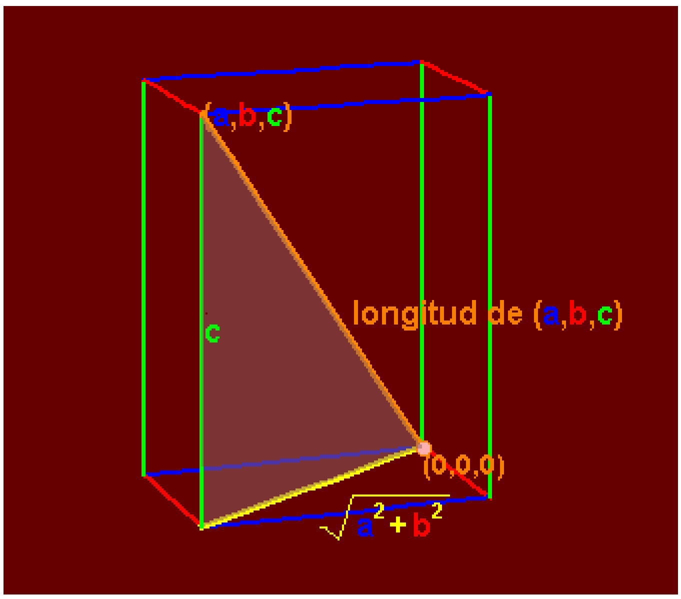


$U = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \|U\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

$4U = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \|4U\| = \sqrt{8^2 + 12^2} = \sqrt{208} = \sqrt{2^4 \cdot 13} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{13} = 4\sqrt{13}$; se cumple $\|4U\| = 4\|U\|$.

$-2V = (-2)\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \|-2V\| = 2\sqrt{26}$, véase [5] y $|-2|\|V\| = 2\sqrt{(-5)^2 + 1^2} = 2\sqrt{26}$.

Es necesario notar que, en el cálculo anterior, el paréntesis indica claramente, sin ambigüedades, sin dejar lugar a dudas, que el exponente 2 afecta a la base -5, entero negativo. No es correcto usar en su reemplazo la notación -5^2 cuyo resultado es el entero negativo -25. El paréntesis debe acompañar siempre a toda potencia de base negativa. El manejo de los números reales en lo que hace a su simbología, operatoria, propiedades y restricciones es conocimiento previo fundamental ¿lo notó verdad?



La definición y el cálculo de **longitud**[6] **de un vector** X **de** $\mathbb{R}^n$ se generaliza así [7]:

[5] $\|-2V\| = \sqrt{10^2 + (-2)^2} = \sqrt{(2 \cdot 5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{2^2(5^2 + 1)} = 2\sqrt{26}$.

[6] Longitud, módulo o medida: son términos equivalentes y designan, hacen referencia al mismo número real.

[7] Las cantidades que tienen una magnitud, dirección y sentido se denominan **cantidades vectoriales**. En contraste, una cantidad que tiene magnitud pero no dirección ni sentido se llama **cantidad escalar**. El largo, ancho, altura, área y el volumen son cantidades escalares; en cambio la aceleración, la velocidad, la fuerza entre otras son cantidades vectoriales.

$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$. La longitud de un vector es siempre un número real positivo porque es una medida, es la medida del segmento lineal asociado al vector (es el vector sin la flecha). ¿Cómo se calcula esa medida? Tomando la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada componente del vector (una generalización del Teorema de Pitágoras, el gráfico lo muestra en $\mathbb{R}^3$). También, la longitud de un vector puede pensarse en término de la multiplicación entre el vector, como matriz $n \times 1$, y su transpuesta así: $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2} = \sqrt{X^T X}$.

4

a) Calcule la longitud de los vectores que dibujó en la actividad de proceso anterior.

b) Demuestre que $\|cU\| = |c|\|U\|$ para $c \in \mathbb{R}, U_{n\times 1}$.

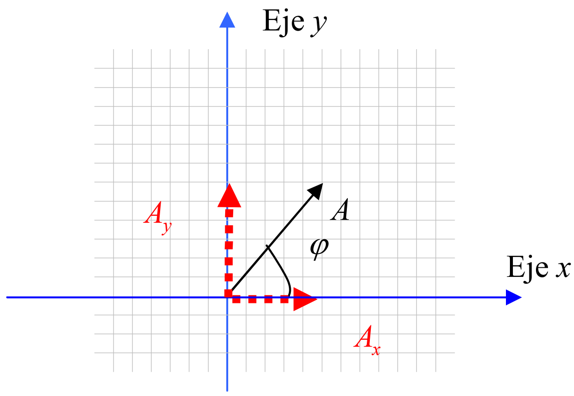
c) Demuestre que la longitud de un vector coincide con la longitud de su vector opuesto, esto es, $\|U\| = \|-U\|$.

Confronte con la solución nº 4

Retomando conceptos de trigonometría[8] podemos establecer una relación entre la longitud de un vector en $\mathbb{R}^2$ y el ángulo que forma dicho vector con el eje horizontal o eje de las *x*. Así, si $A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$ y phi es el ángulo que forma el vector con el eje horizontal positivo, se tiene:

$$A_x = \|A\| \cos\varphi$$

$$A_y = \|A\| \operatorname{sen}\varphi$$



Así, los vectores son más que una matriz que es un arreglo rectangular de números, los vectores tiene una longitud, una dirección y un sentido. Esta manera de "mirar" a un vector es fundamental en el estudio de la física, y así se trabajan los conceptos de velocidad, aceleración, fuerza, momento, trabajo, energía, impulso, cantidad de movimiento entre otros.

Ahora, trabajemos con la suma de vectores.

Ejemplo 8

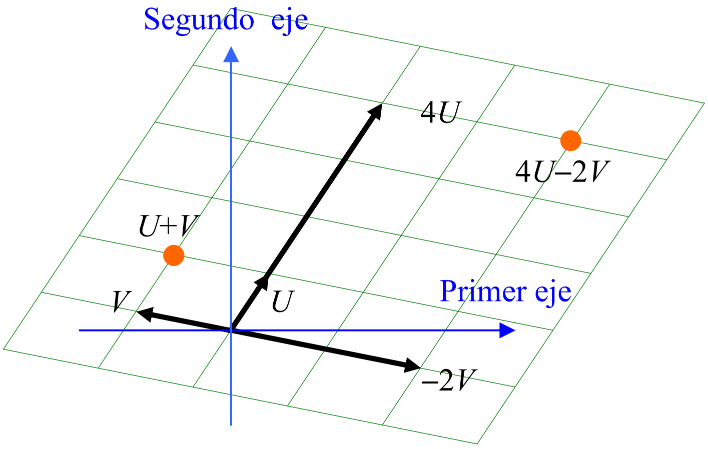
$$U + V = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + (-5) \\ 3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Puede observarse que si U y V se representan como puntos en $\mathbb{R}^2$, entonces $U + V$ corresponde al cuarto vértice del paralelogramo cuyos vértices son U, V, O (que es el vector origen o nulo) y $U + V$. Esta relación también se visualiza en $\mathbb{R}^3$. O bien, en

[8] Las relaciones trigonométricas (definiciones, relaciones entre ellas) fueron vistas en la unidad 3 de la Nivelación Matemática en el Curso de Admisión. Véase su cita completa en Bibliografía.

términos de vectores, el vector suma es la diagonal del paralelogramo que forman los vectores sumandos.

En general, en $\mathbb{R}^2$ y también en $\mathbb{R}^3$, conviene trazar una rejilla o cuadriculado –como se muestra en la figura– para facilitar la ubicación de los vectores suma. Si los que se suman son múltiplos enteros, entonces, sus extremos finales se encuentran en una intersección de la rejilla. Esto es, se construye una rejilla con las longitudes de los vectores dados inicialmente (U y V)



Sigamos con el ejemplo:

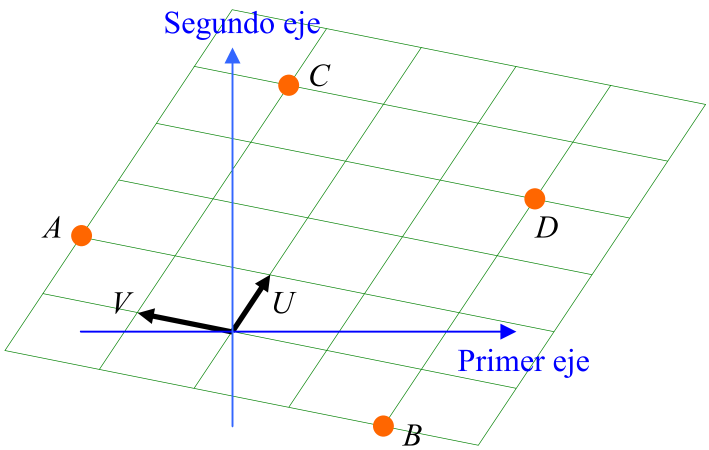
$$U - V = U + (-1)V = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$4U - 2V = 4U + (-2)V = 4\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+10 \\ 12-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{1}{2}U + V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-5 \\ \frac{3}{2}+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Observe el gráfico y responda: ¿a la suma de qué múltiplos corresponden el punto A y el punto B?

El punto A es la suma entre los vectores U y el doble de V y el punto B es la suma entre los vectores $-U$ y el doble de $-V$.



5

a) Dibuje los vectores $3U + 2V$, $2U - \frac{5}{2}V$, $\frac{4}{3}U - V$.

b) Identifique en la rejilla los vectores múltiplos que se suman para dar, respectivamente, el punto geométrico C y el D.

c) En $\mathbb{R}^3$ grafique: $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $-3M$, $N = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$, la suma entre N y el doble de M, $-3M + N$.

d) Calcule la longitud del opuesto del triple de M , y también la de $-M+N$.
e) Demuestre mediante un ejemplo con vectores particulares que la longitud de un vector suma no coincide con la suma de las longitudes individuales, esto es, $\|U+V\| \neq \|U\|+\|V\|$.

Confronte con la solución nº 5

Ejemplo 9

Una compañía produce dos productos que llamaremos respectivamente A y B. Para \$1 de producto A la compañía gasta \$0.45 de materiales, \$0.25 de mano de obra, \$0.15 de gastos generales. Para \$1 de producto B la compañía gasta \$0.40 de materiales, \$0.30 de mano de obra, \$0.15 de gastos generales.

En este ejemplo los costos por \$1 de producto pueden pensarse como un vector, "el vector costos del producto A" y "el vector costos del producto B": $C_A = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.25 \\ 0.15 \end{bmatrix}$, $C_B = \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.30 \\ 0.15 \end{bmatrix}$.

A partir de esta modelización tiene sentido preguntarse qué significado tiene $20C_A$, $C_A - C_B$, $100C_A + 500C_B$.

$20C_A$ es el vector que muestra los costos de producir \$20 de producto A.
$C_A - C_B$ es el vector que muestra la diferencia de costos por \$1 de producto A y \$1 de producto B.
$100C_A + 500C_B$ es el vector que muestra los costos de producción por \$100 de producto A más \$500 de producto B.

Ejemplo 10

Todos y cada uno de los ejemplos citados en la unidad 1 apartado 7, pueden repensarse en términos de vectores. Así, el ejemplo 36 se piensa como la siguiente suma de vectores:

Vector de composición de la Aleación 2. $\downarrow$

Vector de composición de la Aleación nueva. $\downarrow$

$$\begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.80 \\ 0.15 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.65 \\ 0.25 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.55 \\ 0.30 \end{bmatrix} x_3 = 12 \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.62 \\ 0.26 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$

Vector de composición
de la aleación 1.

Donde el primer vector contiene la composición de la aleación 1, el segundo vector la composición de la aleación 2, el tercer vector la composición de la aleación 3 y el vector de la extrema derecha la composición de la nueva aleación a fabricarse en base a las aleaciones existentes en stock. La pregunta es ¿existen valores reales que puedan asignarse a las letras de modo tal que el vector de la derecha se obtenga como suma de múltiplos escalares de los vectores en stock? O bien ¿existen valores reales que puedan asignarse a las letras de modo tal que el vector de la derecha se obtenga como "combinación" de los vectores datos?

Ejemplo 11

El ejemplo 37 (unidad 1, apartado 7) se piensa como la suma de vectores siguiente:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{composición en \%} \\ \text{de la crema 1.}}}{\begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.90 \\ 0.05 \end{bmatrix}} x_1 + \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.75 \\ 0.15 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.65 \\ 0.20 \end{bmatrix} x_3 = 25 \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.65 \\ 0.26 \end{bmatrix}$$

Donde el primer vector almacena la composición de la crema 1, el segundo vector almacena la composición de la crema 2, el tercer vector almacena la composición de la crema 3 y el vector de la extrema derecha almacena la nueva composición a fabricarse en base a las cremas que se tienen. La pregunta es ¿existen valores reales que puedan asignarse a las letras de modo tal que el vector de la derecha se obtenga como suma de múltiplos escalares de los vectores datos? O bien ¿existen valores reales que puedan asignarse a las letras de modo tal que el vector de la derecha se obtenga como "combinación" de los vectores datos?

Ejemplo 12

Una planta de vapor quema dos clases de carbón: antracita (A) y bituminosa (B). Por cada tonelada de A quemada, la planta produce 27.6 millones de BTU [9] de calor, 3100 gr de dióxido de azufre y 250 gr de materia particulada (contaminantes de partículas sólidas). Por cada tonelada de B quemada, la planta produce 30.2 millones de BTU de calor, 6400 gr de dióxido de azufre y 360 gr de materia particulada.

1. ¿Cuánto calor, dióxido de azufre y materia particulada produce la planta de vapor cuando quema x_1 toneladas de A y x_2 toneladas de B?
2. ¿Cuál es la diferencia en el rendimiento de la planta según se use uno u otro carbón?
3. ¿Qué rendimiento se produce si sólo se queman 1000 toneladas de antracita?

Bien. Una modelización matemática que permite responder estas preguntas es la que involucra vectores.

[9] BTU es una unidad de energía, British Termal Unit o Unidades Térmicas Británicas.

Así: definamos $A=\begin{bmatrix}27.6\times 10^6\\3100\\250\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}30.2\times 10^6\\6400\\360\end{bmatrix}$ que llamaremos "vectores de rendimiento". Cada vector guarda información sobre el rendimiento que produce cada tonelada quemada de carbón. Hemos logrado guardar la información dato en un "arreglo rectangular de números".

La suma vectorial x_1A+x_2B da respuesta al primer interrogante.
La resta vectorial $B-A$ da respuesta al segundo interrogante.
El producto por escalar $1000A$ da respuesta al tercer interrogante.

Un hecho importante en toda modelización matemática es la interpretación y la ubicación de los símbolos en el contexto del problema. Para el ejemplo precedente, debemos tener claro que un vector de rendimiento genérico tiene tres componentes, la primera contiene información relacionada a la producción de calor en BTU, la segunda a la producción de dióxido de azufre en gramos y la tercera a la producción de materia particulada en gramos, y en ese orden. Así , cada eje real en el espacio en que representamos estos vectores mide "producciones" de calor, dióxido de carbono y materia particulada en las unidades adecuadas.

Ejemplo 13

Sean $v_1,\ v_2,\ \ldots, v_k$ puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ y supongamos que en cada punto v_i hay un objeto de masa m_i (con el subíndice *i* variando entre 1 y *k,* valor real). Los físicos llaman a tales objetos masas puntuales. La masa total del sistema de masas puntuales viene dada por la suma de las masas puntuales, $m=m_1+\cdots+m_k$, y el **centro de gravedad** o **centro de masa del sistema** es un punto de $\mathbb{R}^3$ y viene dado por la fórmula vectorial (entre vectores) $v=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2+\cdots+m_kv_k}{m_1+m_2+\cdots+m_k}$.

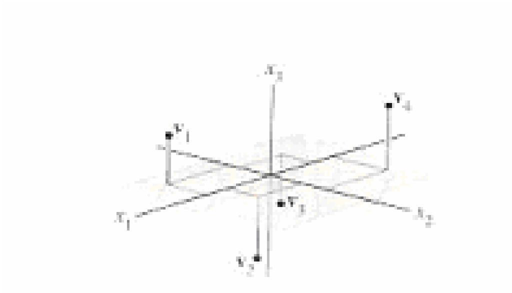
La siguiente tabla da información específica acerca de cuatro masas puntuales.

punto	masa
$v_1=(5,-4,3)$	2g
$v_2=(4,3,-2)$	5g
$v_3=(-4,-3,-1)$	2g
$v_4=(-9,8,6)$	1g

Luego, el centro de masa del sistema de masas puntuales es:

$$v=\frac{1}{m}\left(m_1v_1+\ldots m_kv_k\right)=\frac{1}{2+5+2+1}\left(2\begin{bmatrix}5\\-4\\3\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}4\\3\\-2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-4\\-3\\-1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-9\\8\\6\end{bmatrix}\right)=0.1\begin{bmatrix}13\\9\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.3\\0.9\\0\end{bmatrix}$$

Así las coordenadas del centro de masa son $(1.3,0.9,0)$.



En forma similar los astrónomos calculan el centro de masa de un sistema planetario.

6
Retome el ejemplo 39 del apartado 7 de la unidad 1, piénselo y rescríbalo en términos de vectores.

Confronte con la solución nº 6

¿Porqué pensar en términos de vectores la modelización matemática de estos ejemplos? Porque, al pensarse así hay toda una teoría matemática que predice resultados, porque se usa una simbología clara, precisa, concisa que da orden y simpleza a la notación, a la lectura y al cálculo. Aquí es importante la modelización que se hace de la realidad y la lectura e interpretación de la simbología matemática en términos del contexto. Además, esta simbología de vectores puede representarse geométricamente lo cual ayuda a la comprensión de la situación planteadla poder visualizarse. Los vectores dan origen a tablas de datos y las PC trabajan con ellas.

El producto entre un vector y el transpuesto de otro recibe el nombre de **producto escalar** o **producto punto.**. Así, dados los vectores $A=\begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$ se define el producto escalar entre A y B como el número real dado por el producto $A^T B$ y se lo denota por $A \bullet B$. Formalizamos la definición:

$$A \bullet B = A^T B = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + \cdots a_n b_n .$$

7
Si los vectores tienen dos componentes se los puede representar, dibujar, en $\mathbb{R}^2$. Además, si tenemos en cuenta el Teorema de Pitágoras y las relaciones trigonométricas para ángulos complementarios es fácil deducir que el producto punto coincide con el producto entre la longitud de cada vector y el coseno del ángulo entre ambos vectores. Demuéstrelo, es un concepto muy usado en Física. Compartimos la respuesta en el Aula virtual

Confronte con la solución nº 7

2. Combinación lineal de vectores en $\mathbb{R}^n$

En esta sección definimos varios conceptos importantes relacionados con un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ y con la forma en que se relacionan.

Los vectores que se piensan como suma de otros se denominan vector combinación lineal. Formalmente se dice: dados los vectores $V_1, V_2, \cdots, V_p$ en $\mathbb{R}^n$ y los escalares $c_1, c_2, \cdots, c_p$, el vector $W = c_1V_1 + c_2V_2 + \cdots + c_pV_p$ se llama **combinación lineal** de $V_1, V_2, \cdots, V_p$. Los escalares pueden ser cualquier número real <u>incluido</u> el cero. En general n objetos se dice que "se los combina en forma lineal" cuando se suman múltiplos escalares de los mismos.

Ejemplo 14

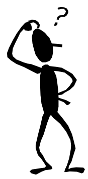
Algunos vectores combinación lineal de los vectores U y V dados en el ejemplo 7 son:

$$1U + (-1)V = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, 4U + 0V = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}, 0U + (-2)V = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}, 1U + 0V = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$4U + 2V = \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Concluimos que para obtener un vector que sea combinación lineal de otros la regla práctica consiste en construir sumas de múltiplos escalares de esos vectores. Cada suma construida es una combinación lineal.

Ahora analicemos la cuestión recíproca. ¿Será el vector $\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ combinación lineal de U y de V? ¿Y el vector nulo $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?



Buena pregunta ¿no? ¿Cómo haría usted para dar con la respuesta? Quiero alentarlo y decirle que cuenta con las herramientas matemáticas para construirla. ¡A pensar, entonces! ¡Y a escribir lo que piensa tratando de formalizar esas ideas!

8

El vector $\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ ¿será combinación lineal de U y de V? ¿Y el vector nulo? Ayuda: deberá usar conceptos vistos en las unidades anteriores.

Confronte con la solución nº 8

"¡Nada se pierde, todo se transforma!" Ya lo dijo el científico Lavoisier y ahora vale en nuestro trabajo. ¿Me permite que se lo aclare más?

Ejemplo 15

a) El ejemplo 19 de la unidad 1 demuestra que el vector $\begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Efectivamente $\begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) El ejemplo 21 de la unidad 1 demuestra que el vector $\begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ no es combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. ¿Por qué? Porque no existen reales x e y tal que se cumple $x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

A esta altura y después de observar los ejemplos 19 y 21 citados, usted seguramente respondió a las preguntas de la actividad de proceso precedente. Efectivamente: la técnica de resolución de problemas y el sentido común nos sugieren el planteo de los siguientes pasos sistemáticos.

Paso 1. Identificamos los datos.
Los datos son tres vectores en el espacio bidimensional. Los llamaremos respectivamente U, V y M.

Paso 2. Identificamos qué se nos pide.
Se nos pide determinar si uno de los vectores dados es combinación lineal de los otros. Esto es, debemos determinar dos constantes reales –escalares–, llamémosles c_1 y c_2, tales que $c_1U + c_2V = M$.

Paso 3. Reemplazamos por los vectores datos y operamos vectorialmente (o matricialmente).

$c_1U + c_2V = M$ Reemplazamos por los vectores:

$c_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}$ Multiplicamos cada vector por cada escalar :

$\begin{bmatrix}c_1 2\\c_1 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c_2(-5)\\c_2 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}$ Sumamos dos vectores:

$\begin{bmatrix}c_1 2 + c_2(-5)\\c_1 3 + c_2 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}$ Conmutamos factores en cada sumando del vector izquierdo:

$\begin{bmatrix}2c_1 - 5c_2\\3c_1 + 1c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}$ Dos vectores son iguales -dos matrices son iguales- cuando coinciden en sus respectivas entradas .

$\begin{cases}2c_1 - 5c_2 = 7\\3c_1 + 1c_2 = 9\end{cases}$ Queda planteado un SEL en las variables c_1 y c_2.

También podemos verlo así:

$c_1U + c_2V = M$ Reemplazamos por las matrices datos:

$c_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}$ Corresponde a la expresión de la multiplicación entre un escalar y una matriz.

$\begin{bmatrix}2 & -5\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}$ Corresponde a la expresión matricial de un SEL, esto es, a una ecuación matricial con $X = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$ matriz desconocida.

Visto como un sistema de ecuaciones lineales (primer desarrollo) o como una ecuación matricial (segundo desarrollo), su solución se obtiene aplicando el método de Gauss, el método de Gauss-Jordan, la Regla de Cramer, o también la fórmula de la inversa (hay más métodos que no han sido desarrollados en esta Guía de estudio). Usando cualquiera de ellos se llega a los valores $c_1 = \frac{52}{17}$ y $c_2 = -\frac{3}{17}$. (Compruebe mediante reemplazo directo que efectivamente son solución.)

<u>Paso 4</u>. Escribimos la respuesta.

El vector *M* es combinación lineal de los vectores *U* y V y su formulación matemática es: $\frac{52}{17}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} - \frac{3}{17}\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}$.

De manera análoga podemos demostrar que el vector cero es combinación lineal de los vectores *U* y V. Efectivamente, en la ecuación matricial $\begin{bmatrix}2 & -5\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ no es nulo, luego, el SELH asociado admite únicamente la solución trivial[10], cumpliéndose: $0\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Concluimos que, en la práctica, analizar si un vector dado es combinación lineal de otros consiste en analizar la solución del SEL asociado. Si la solución existe (es única -nula o no- o infinita) significa que el vector dado es combinación lineal de los otros; si la solución no existe significa que el vector dado no es combinación lineal de los dados. Note que el concepto es nuevo pero la "técnica" es conocida de otras unidades.

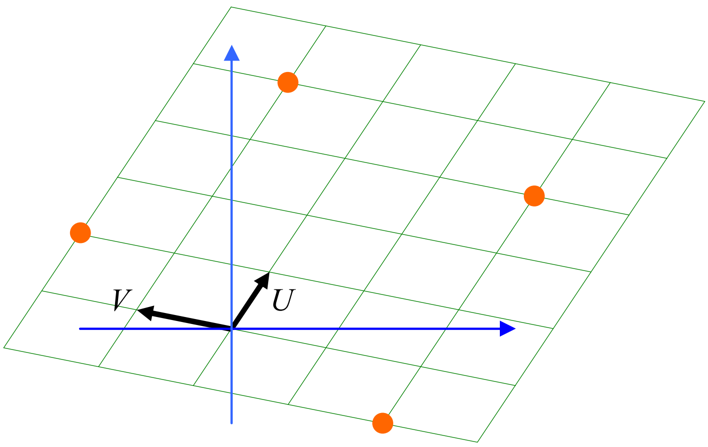
Una de las ideas fundamentales del álgebra lineal es estudiar el conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como combinación lineal de un conjunto de vectores fijo.

El conjunto de <u>todas</u> las combinaciones lineales de los vectores $V_1, V_2, \cdots, V_p$ de $\mathbb{R}^n$ se denota por $\text{Gen}\{V_1, \cdots, V_p\}$ y recibe el nombre de **subespacio de** $\mathbb{R}^n$ **generado por** $V_1, \cdots, V_p$. Esto es, $\text{Gen}\{V_1, \cdots, V_p\}$ es la colección de todos los vectores que pueden escribirse en la forma $c_1V_1 + c_2V_2 + \cdots + c_pV_p$ donde $c_1, \cdots, c_p$ son escalares. O también: $\text{Gen}\{V_1, \cdots, V_p\}$ es el conjunto formado por todas las posibles sumas de múltiplos escalares de esos vectores. En simbología estrictamente matemática se expresa:

$$\text{Gen}\{V_1, \cdots, V_p\} = \{c_1V_1 + c_2V_2 + \cdots + c_pV_p \,/\, c_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \ldots, p\} = \left\{ \begin{bmatrix} c_1v_{11} & \cdots & c_pv_{p1} \\ c_1v_{12} & \cdots & c_pv_{p2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1v_{1n} & \cdots & c_pv_{pn} \end{bmatrix} / c_i \in \mathbb{R} \forall i \right\}$$

Ejemplo 16

Entonces, ¿cuál será el subespacio generado por los ya conocidos vectores U y V (del ejemplo 7) en $\mathbb{R}^2$? Pues, el conjunto de todos los vectores de la forma $c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ con c_1 y c_2 números reales, esto es,



$$Gen\{U, V\} = Gen\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} / c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 2c_1 - 5c_2 \\ 3c_1 + 1c_2 \end{bmatrix} / c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

[10] Véase unidad 3.

Lea e interprete con mucho cuidado la simbología, solo así facilitará su aprendizaje del tema. En particular, el subespacio generado en ejemplo 16, es el conjunto de vectores con primera componente: resta entre el doble de un primer escalar y el quíntuplo de un segundo escalar, segunda componente: suma entre triple del primer escalar y el segundo escalar.

Obviamente este conjunto consta de infinitos vectores porque c_1 y c_2 admiten infinitos valores reales. La **representación gráfica del subespacio** es toda la rejilla dibujada porque todo punto de la rejilla se obtiene como suma entre múltiplos escalares de los vectores el U y V. Esto es, el subespacio generado por U y V es ¡todo el plano $\mathbb{R}^2$! (y es correcto porque $\mathbb{R}^2$ es generado por dos vectores LI).

9

Determine:

a) $Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ b) $Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}\right\}$ c) $Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}\right\}$

d) $Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ e) $Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$

Confronte con la solución nº 9

El ejemplo precedente mostró cómo construir el espacio generado a partir de conocer los vectores. Ahora analizaremos a través de un ejemplo el proceso inverso, esto es, dada la expresión del espacio generado determinar los vectores que lo generan. Verá que el proceso que se sigue es "desandar" el camino trazado en el ejemplo 16.

$$Gen\{U,V\} = Gen\left\{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}\right\} = \left\{c_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix} / c_1,c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}c_1 2\\c_1 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_2(-5)\\c_2 1\end{bmatrix} / c_1,c_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}2c_1-5c_2\\3c_1+1c_2\end{bmatrix} / c_1,c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Y recíprocamente:

$$\left\{\begin{bmatrix}2c_1-5c_2\\3c_1+1c_2\end{bmatrix} / c_1,c_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}c_1 2\\c_1 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_2(-5)\\c_2 1\end{bmatrix} / c_1,c_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{c_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix} / c_1,c_2 \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= Gen\left\{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}\right\} = Gen\{U,V\}$$

Ejemplo 17

Sea $H = \left\{\begin{bmatrix}2a+3b\\a+b\\2a+2b\end{bmatrix} / a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\right\}$ ¿cuáles vectores generan este subespacio?

¿Cómo procedemos para saberlo?

La idea es observar H para "descomponerlo" en términos de vectores. Para esa descomposición usamos el concepto de suma entre vectores y el concepto multiplicación por escalar:

$\begin{bmatrix} 2a+3b \\ a+b \\ 2a+2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 1a \\ 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3b \\ 1b \\ 2b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Luego $H = \left\{ a\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} / a,b \in \mathbb{R} \right\}$, y en esta nueva expresión de H figuran claramente los vectores generadores.

La representación gráfica del subespacio es toda la rejilla que se dibuja a partir de los vectores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

10

a) De un ejemplo de generadores del subespacio $\left\{ c_1\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} / c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

b) De un ejemplo de generadores del subespacio $\left\{ \begin{bmatrix} 9c_1 + 5c_2 \\ -3c_1 - 1c_2 \end{bmatrix} / c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

c) Sea H el subespacio generado por todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} -2t \\ 0 \\ \frac{t}{2} \end{bmatrix}$. De un ejemplo de vectores generadores de H

Confronte con la solución nº 10

Es importante notar que dado un espacio los vectores generadores no son únicos. Continuemos con el ejemplo 17.

$a\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3a\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + 6b\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Y esta igualdad vectorial (que se obtiene tomando a 3 y a 6 –valores arbitrarios- como escalares) permite expresar H en términos de otros vectores <u>múltiplos</u> de los anteriores. H puede re-escribirse $H=\left\{ c\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} / c,d \in \mathbb{R} \right\}$, luego puede pensarse $H = Gen\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$.

La rejilla que se dibuja a partir de los vectores $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ coincide con la dibujada con los vectores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

¿Qué es lo importante en este desarrollo? Al encontrarse un conjunto generador, todo otro conjunto formado por múltiplos también lo es (sus rejillas coinciden).

11

De un ejemplo de generadores del subespacio $\left\{ \begin{bmatrix} m-3n \\ n-m \\ m \\ n \end{bmatrix} / m,n \in \mathbb{R} \right\}$. Y dé un segundo conjunto generador. Y dé un tercer conjunto generador.

Confronte con la solución nº 11

Los espacios generados, sus representaciones geométricas (si estamos en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$) son únicos. No es única ni la cantidad de vectores ni la descripción de los vectores que los generan. Otro ejemplo de esta afirmación es:

Ejemplo 18

El $\text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ coincide con el $\text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. ¿Sabe porqué? Porque el tercer vector es múltiplo del primero. Efectivamente:

$$\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}2a+3b\\1a+1b\\2a+2b\end{bmatrix}\ /\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\2\\4\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}2a+3b+2(2c)\\1a+1b+1(2c)\\2a+2b+2(2c)\end{bmatrix}\ /\ a,\ b\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}2(a+2c)+3b\\1(a+2c)+1b\\2(a+2c)+2b\end{bmatrix}\ /\ a,\ b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}2d+3b\\1d+1b\\2d+2b\end{bmatrix}\ /\ d,\ b\in\mathbb{R}\right\}=\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

$a+2c$ forma un nuevo escalar que rotulamos d.

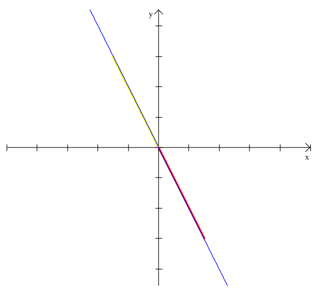
Ejemplo 19

Dado un vector arbitrario en $\mathbb{R}^n$ el espacio por él generado coincide con el espacio generado por su vector opuesto. Lo vemos en detalle, observe como se procede con la técnica:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}\Rightarrow Gen\{X\}=\left\{a\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}/\ a\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}ax_1\\ax_2\\\cdots\\ax_n\end{bmatrix}/\ a\in\mathbb{R}\right\}$$

$$-X=\begin{bmatrix}-x_1\\-x_2\\\cdots\\-x_n\end{bmatrix}\Rightarrow Gen\{-X\}=\left\{a\begin{bmatrix}-x_1\\-x_2\\\cdots\\-x_n\end{bmatrix}/\ a\in\mathbb{R}\right\}=\left\{(-a)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}/\ a\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{c\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}/\ c\in\mathbb{R}\right\}=Gen\{X\}$$



a denota un escalar arbitrario, $-a$ también denota un escalar arbitrario: lo rotulamos c. Esto muestra que el espacio generado por un vector es la recta que lo contiene y esa recta es el espacio generado por cualquier vector que se encuentra en ella.

En general, a partir de un conjunto de generadores se pueden obtener infinidad de otros conjuntos generadores. Esos nuevos pueden formarse con ellos, con sus múltiplos y con combinaciones lineales de ellos.

12

a) ¿El $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ coincide con el $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$?

b) ¿El $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ coincide con el $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$?

c) ¿El $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ coincide con el $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\3\\6\end{bmatrix}\right\}$?

d) ¿Puede ser $U=\begin{bmatrix}2\\2\\4\\0\end{bmatrix}$ y $V=\begin{bmatrix}3\\-1\\-1\\4\end{bmatrix}$ generadores de *W*, el conjunto formado por todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix}s+3t\\s-t\\2s-t\\4t\end{bmatrix}$?

e) ¿El subespacio generado por un vector coincide con el espacio generado por su triple?

Confronte con la solución nº 12

A continuación mostraremos la técnica que permite establecer si un vector arbitrario pertenece o no a un espacio generado por *n* vectores fijos. Si afirmamos que lo está debemos ser capaces de mostrar los escalares que los expresan como combinación lineal.

Ejemplo 20

¿El vector nulo se encuentra en el $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$?¿Y el vector $\begin{bmatrix}-1\\-1\\-2\end{bmatrix}$?

Bien. $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\right\}=\left\{a\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\ /\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\right\}$, que también puede expresarse $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}2a+3b\\a+b\\2a+2b\end{bmatrix}\ /\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\right\}$.

En particular:

$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ corresponde a la expresión matricial de un SELH en las variables a y b. Aplicando el Método de Gauss-Jordan a la matriz aumentada se llega a la forma que muestra como solución la trivial y sólo ella.

<u>Conclusión:</u> $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$, el vector nulo está en el espacio generado. El vector nulo es combinación lineal de los dados.

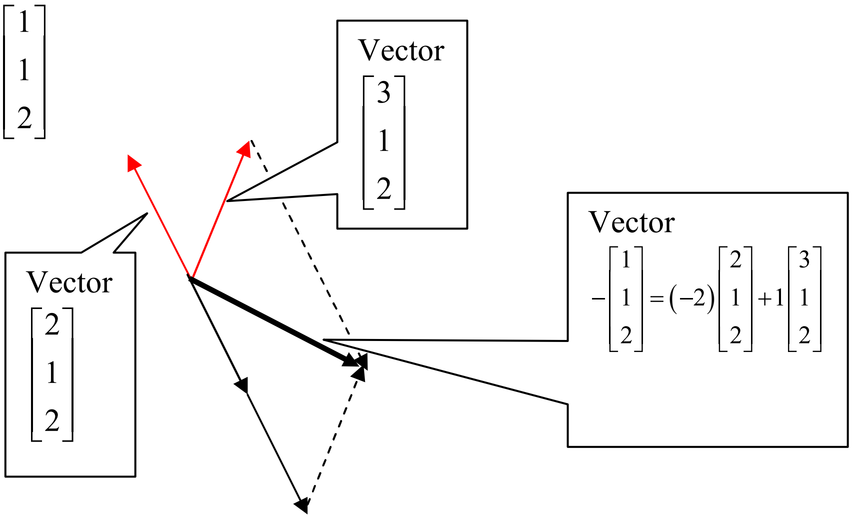
$\begin{bmatrix}-1\\-1\\-2\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ corresponde a la expresión matricial de un SEL en las variables a y b. Aplicando el Método de Gauss-Jordan a la matriz aumentada se llega a la forma que muestra la solución $a=-2$, $b=1$.

<u>Conclusión:</u> $\begin{bmatrix}-1\\-1\\-2\end{bmatrix}=(-2)\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$, el vector dado está en el espacio generado. El vector $\begin{bmatrix}-1\\-1\\-2\end{bmatrix}$ es combinación lineal de los dados.

Notemos que el vector $\begin{bmatrix}-1\\-1\\-2\end{bmatrix}$ es el opuesto al vector $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ y puede re-escribirse

$$\begin{bmatrix}-1\\-1\\-2\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

Visualizamos así:



Ejemplo 21

Retomamos el ejemplo 9 del apartado anterior. ¿$\begin{bmatrix} 85 \\ 55 \\ 30 \end{bmatrix} \in Gen\{C_A, C_B\}$? ¿$\begin{bmatrix} 85 \\ 55 \\ 20 \end{bmatrix} \in Gen\{C_A, C_B\}$? ¿Qué interpretación le damos a estas formulaciones matemáticas en el contexto del problema planteado en el citado ejemplo?

La interpretación es la siguiente:

- En ese contexto de costos ¿puede la compañía gastar \$85 de materiales, \$45 de mano de obra y \$30 de gastos generales? ¿Cuántas unidades del producto A y cuántas del producto B podrá producir? Debemos resolver la ecuación matricial $\begin{bmatrix} 0.45 & 0.40 \\ 0.25 & 0.30 \\ 0.15 & 0.15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 55 \\ 30 \end{bmatrix}$; tiene por solución $x = 100$, $y = 100$.
- En ese contexto de costos ¿puede la compañía gastar \$85 de materiales, \$55 de mano de obra y \$20 de gastos generales? ¿Cuántas unidades del producto A y cuántas del producto B podrá producir? Debemos resolver la ecuación matricial $\begin{bmatrix} 0.45 & 0.40 \\ 0.25 & 0.30 \\ 0.15 & 0.15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 55 \\ 20 \end{bmatrix}$; no tiene por solución.

Dado el subespacio $\text{Gen}\{V_1, \cdots, V_p\}$ identifiquemos algunos vectores que allí viven. Ellos son:

- ✓ El vector nulo.
- ✓ Cualquier vector múltiplo escalar de V_i, en particular cada V_i y sus respectivos opuestos $-V_i$. Recordemos que $-V_i$ es una multiplicación por escalar, esto es, $-V_i = (-1)V_i$. El subíndice *i* moviéndose entre 1 y *p*, se formaliza: $i = 1, \ldots, p$.
- ✓ Cualquier vector que se obtenga como suma de dos de ellos.

Lo planteado en el ejemplo 20 nos permite generalizar así: un vector W está en $\text{Gen}\{V_1, \cdots, V_p\}$ si el sistema de ecuaciones lineales (SEL), cuya matriz aumentada es $\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_p & W \end{bmatrix}$, es consistente (tiene solución única).

Así, los SEL planteados en la unidad 1 pueden expresarse en términos de vectores. Efectivamente: si llamamos como A_1, $A_2, \ldots, A_n$ cada columna de la matriz *A*, tiene sentido la siguiente simbología matemática:

$$AX = B \quad \leftarrow \text{ecuación matricial}$$

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots x_nA_n = B \quad \leftarrow \text{ecuación vectorial}$$

La ecuación vectorial da lugar a la siguiente interpretación: el término independiente B está en el espacio generado por las columnas de A si $AX = B$ tiene una o infinitas soluciones, $B \in Gen\{A_1, \ldots, A_n\}$; o no lo está si $AX = B$ no tiene solución, $B \notin Gen\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Ejemplo 22

(Ejemplo 12. Apartado 1.) El gerente informó que la planta produjo en el primer semestre del 2007 162 millones de BTU, 23610 g de dióxido de azufre y 1623 g de materia particulada. El correspondiente vector de rendimiento que se construye a partir de estos datos ¿está en el subespacio generado por los vectores rendimiento A y B?

Para responder debemos analizar si el vector $\begin{bmatrix} 162\times10^6 \\ 23610 \\ 1623 \end{bmatrix}$ está en el espacio generado

$$Gen\left\{\begin{bmatrix} 27.6\times10^6 \\ 3100 \\ 250 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 30.2\times10^6 \\ 6400 \\ 360 \end{bmatrix}\right\}.$$

Ejemplo 23

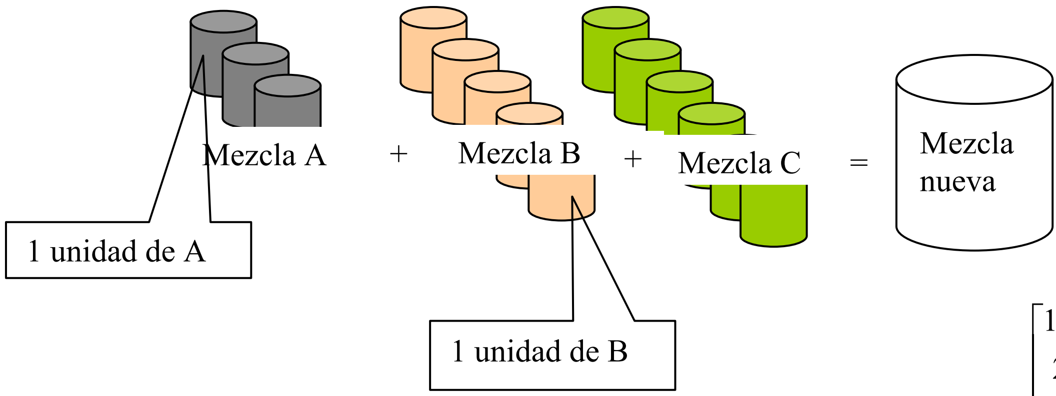
Una compañía cementera almacena tres mezclas básicas que identificaremos como A, B y C. Las cantidades se miden en gramos y cada unidad de mezcla pesa 60 gramos. La compañía fabrica mezclas a pedido, combinando las mezclas básicas. Desde este punto de vista, un pedido especial –el vector pedido especial– se piensa como combinación lineal de los vectores de mezclas básicas y debe pertenecer al subespacio generado por ellos.

	A	B	C
cemento	20	18	12
agua	10	10	10
arena	20	25	15
grava	10	5	15
tobas	0	2	8

Composición en gramos de cada mezcla básica

¿Puede haber una mezcla nueva, obtenidas con las mezclas básicas, que consista en 1000g de cemento, 200 g de agua, 1000 g de arena, 500 g de grava y 300g de tobas? Cualquiera sea su respuesta explique por qué. Si puede, ¿cuántas unidades de cada mezcla básica –A, B y C- se necesitan para formular la mezcla nueva?

Suponga que fabricará 5000 g de concreto que requiere una razón de agua a cemento de 2 a 3, con 1250 g de cemento. Si debe incluir 1500 g de arena, 1000 de grava y el resto de tobas en las especificaciones, ¿se puede formular ésta como una mezcla nueva? Si es así, ¿cuántas unidades de cada mezcla básica se necesitan para formular la mezcla nueva?



Bien, no cabe duda de que debemos averiguar si los vectores $U = \begin{bmatrix} 1000 \\ 200 \\ 1000 \\ 500 \\ 300 \end{bmatrix}$ y

$V = \begin{bmatrix} 1250 \\ 2500/3 \\ 1500 \\ 1000 \\ 1250/3 \end{bmatrix}$ pertenecen al $\text{Gen}\{A,B,C\}$.

$\text{Gen}\{A,B,C\} = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \\ 25 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$. Haciendo los cálculos se demuestra que

$U \notin \text{Gen}\{A,B,C\}$ y que $V \in \text{Gen}\{A,B,C\}$, $V = 20A + 15B + \dfrac{145}{3}C$.

Concluimos: la primera de las mezclas nuevas no podrá fabricarse a partir de las básicas que se dispone. La segunda mezcla solicitada podrá fabricarse tomando 20 unidades de la 1ª básica, 15 unidades de la 2ª básica y $\dfrac{145}{3}$ unidades de la 3ª básica.

Ejemplo 24

Un artesano fabrica piezas mezclando componentes. Tiene 3 tipos de barras con la siguiente composición: 1º barra: 20 gr de oro, 30 gr de plata, 40 gr de cobre; 2º barra: 30 gr de oro, 40 gr de plata, 50 gr de cobre; 3º barra: 40 gr de oro, 50 gr de plata, 90 gr de cobre.

Una pieza que contenga 34 gr de oro, 46 gr de plata y 67 gr de cobre ¿pertenece al espacio generado por los tres tipos de barra?

En otras palabras: ¿el vector $\begin{bmatrix} 34 \\ 46 \\ 67 \end{bmatrix}$ está en el $Gen\left\{\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 90 \end{bmatrix}\right\}$? ¿Existen escalares *a*, *b* y *c* tales que $a\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 46 \\ 67 \end{bmatrix}$? Sí existen, el método de Gauss-Jordan, Cramer y otros asignan a las letras desconocidas los siguientes valores: $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{5}$, $c = \frac{3}{10}$.

13

¿El vector $\begin{bmatrix} 180 \\ 240 \\ 360 \end{bmatrix}$ está en el espacio generado por las tres barras base?

Confronte con la solución nº 13

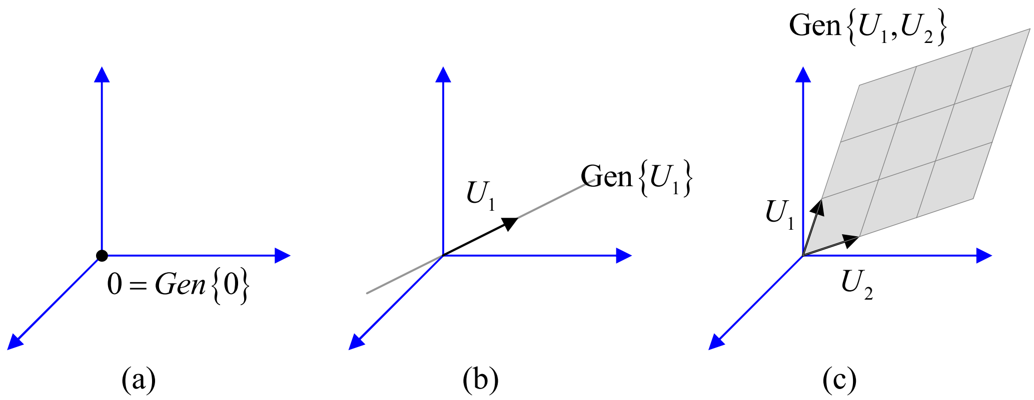
14

Usando este enfoque de vectores replantee el desarrollo de los ejemplos 36 y 37 de la unidad 1.

Confronte con la solución nº 14

¿Qué le parece si realizamos una descripción geométrica de algunos subespacios generados? Buena idea ¿no? Las haremos en el espacio $\mathbb{R}^3$.

En $\mathbb{R}^3$ solo existen vectores de tres componentes (una componente por cada eje).



a) Si tomamos el vector nulo $\text{Gen}\{0\}$ es el vector nulo: es un punto, su longitud es 0, es el origen de coordenadas. $\text{Gen}\{0\} = \{c0,\ c \in \mathbb{R}\} = \{0\}$.

b) Si tomamos un solo vector no nulo en $\mathbb{R}^3$, llamémoslo U_1, la representación gráfica –o descripción geométrica– de $\text{Gen}\{U_1\}$ es una línea recta que pasa por el origen. $\text{Gen}\{U_1\}$ es el conjunto de todos los múltiplos escalares de U_1, en particular viven allí: $0 \cdot U_1 = 0$, $1 \cdot U_1 = U_1$, $(-1) \cdot U_1 = -U_1$ y $U_1 + U_1 = 2U_1$.

$\text{Gen}\{U_1\} = \{cU_1,\ c \in \mathbb{R}\}$.

c) Si tomamos <u>dos</u> vectores no nulos en $\mathbb{R}^3$ que no sean uno múltiplo del otro, esto es, que no estén en la misma línea, llamémosles U_1 y U_2, la representación gráfica de $\text{Gen}\{U_1, U_2\}$ es una rejilla que pasa por el origen. En particular contiene a U_1, U_2, 0, $U_1 + U_2$, la línea en $\mathbb{R}^3$ que pasa por U_1 y 0, y la línea que pasa por U_2 y 0, como muestra la figura. $\text{Gen}\{U_1, U_2\} = \{c_1 U_1 + c_2 U_2 \ , c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}\}$: es toda la rejilla.

d) Finalmente, sólo nos faltaría analizar el caso de tres vectores no nulos que además no pertenecen a la misma rejilla, y el caso en que se toman más de tres vectores. Ambos análisis surgirán más adelante.

15 Siguiendo la idea de lo hecho en $\mathbb{R}^3$, realice una descripción geométrica de subespacios generados de $\mathbb{R}^2$. Confronte con la solución nº 15

<u>Conclusión:</u>

✓ en $\mathbb{R}^2$, el punto origen de coordenadas y toda línea recta que pasa por el origen, son representaciones geométricas posibles de subespacios generados de $\mathbb{R}^2$.

✓ en $\mathbb{R}^3$, el punto origen de coordenadas, toda línea recta que pasa por el origen y toda rejilla generada por dos vectores que no son múltiplos uno del otro y que además pasa por el origen, son representaciones geométricas posibles de subespacios generados de $\mathbb{R}^3$.

Otro concepto importante que involucra al conjunto de vectores del cual venimos hablando, es el siguiente: $\{V_1, V_2, \cdots, V_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ se define **linealmente independiente** (LI) si la <u>única</u> manera de obtener la combinación lineal nula es tomando cada escalar igual a cero. Esto es

$$0 = c_1 V_1 + c_2 V_2 + \cdots + c_p V_p \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, p.$$

Será LI si el sistema de ecuaciones lineales homogéneo (SELH), cuya matriz aumentada es. $\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_p & 0 \end{bmatrix}$, tiene únicamente la solución nula, también –en el caso de ser $\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_p \end{bmatrix}$ una matriz cuadrada- si $\det\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_p \end{bmatrix} \neq 0$.

<u>Si algún</u> escalar es <u>no</u> nulo, el conjunto de tales vectores se define como **linealmente dependiente** (LD). Ser LD significa que existe una relación de dependencia entre ellos, que puede expresarse al menos un vector en términos de los otros, que al menos un vector vive en el subespacio generado por el resto, o bien, que al menos un vector puede expresarse como combinación lineal del resto.

En símbolos matemáticos: $\{V_1, V_2, \cdots, V_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ se define linealmente dependiente (LD) si $0 = c_1 V_1 + c_2 V_2 + \cdots + c_p V_p \Rightarrow c_i \neq 0$ para algún i.

En particular, dados **<u>dos</u> vectores no nulos, uno múltiplo del otro, son LD siempre**. Y, por lo tanto, lo es todo conjunto de vectores que los contenga.

¿Cómo lo demostramos[11]? Muy simple: sean V_1 y $kV_1 = V_2$ dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$. ¿Para que escalares c_1 y c_2 se logra que la igualdad vectorial[12] $0 = c_1V_1 + c_2V_2$ sea verdadera?

Planteamos: $0 = c_1V_1 + c_2V_2 = c_1V_1 + c_2(kV_1) = c_1V_1 + (c_2k)V_1 = (c_1 + c_2k)V_1$, que es verdadera sólo si el escalar $c_1 + c_2k$ es nulo, pues el vector V_1 no es nulo por hipótesis[13]. Concluimos que la igualdad $0 = c_1V_1 + c_2V_2$ será verdadera sólo para aquellos valores de c_1 y c_2 que hacen verdadera la ecuación lineal $c_1 + c_2k = 0$.

Luego, cada vez que tomamos $c_1 = -c_2k$, logramos una combinación lineal nula de los vectores dados sin que los escalares sean necesariamente nulos.

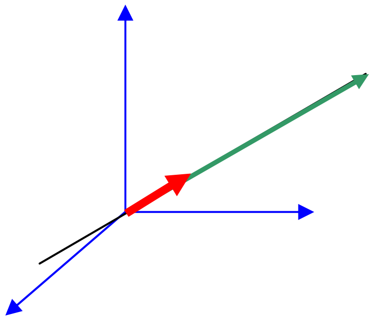
Los pasos que seguimos en esta demostración fueron:
1º. Planteamos en simbología matemática la hipótesis: se construyó una igualdad.
2º. Aplicamos las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}^n$ necesarias.
3º. Usando datos dados logramos establecer restricciones entre los escalares.

Ejemplo 25

Los vectores $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}4\\8\\12\end{bmatrix}$ son LD en $\mathbb{R}^3$. Por simple observación, componente a componente de cada vector, establecemos que el segundo vector es cuatro veces el primer vector y, usando el análisis descrito arriba, puede obtenerse el vector cero tomando por ejemplo $c_2 = 3$.

Efectivamente: para $c_2 = 3$, se tiene $c_1 = -c_2k = (-3)\cdot 4 = -12$, luego,

$$-12\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}4\\8\\12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$



es una relación de dependencia entre los vectores dados. Se muestra en la gráfica.

Otra relación de dependencia es

---

[11] Demostrar es "capacidad" matemática que se transforma en "habilidad" cuando se la practica prestando especial atención al buen empleo de la simbología matemática.

[12] Igualdad vectorial: hace referencia a una igualdad entre vectores, esto es, entre arreglos rectangulares de números.

[13] La tercera igualdad es consecuencia de aplicar la propiedad algebraica i de $\mathbb{R}^n$, y la cuarta igualdad de aplicar la propiedad h.

$$4\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}4\\8\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$, y otra es $-2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\8\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. Hay una infinidad de relaciones de dependencia. Hay una relación de dependencia cada vez que se cumple $c_1=-c_2k$. (En esta igualdad observe que "k" es dato conocido, es el factor de proporcionalidad entre los dos vectores. A c_2 le asignamos un valor arbitrario y c_1 depende de ese valor arbitrario.)

Analizando la representación geométrica de ambos vectores observamos que, en el caso de dos vectores en $\mathbb{R}^3$, ser LD (para dos vectores) significa vivir en la misma línea recta que pasa por el origen. Es correcto pensar que esa línea recta es generada por uno u otro de los vectores.

En términos de SEL decimos que el SEL homogéneo que tiene por matriz ampliada a $\begin{bmatrix}V_1 & V_2 & 0\end{bmatrix}$ tiene infinitas soluciones monoparamétricas no nulas.

Bien, ¡cuánta información hemos logrado analizando dos vectores múltiplos uno del otro en el espacio tridimensional! ¿Qué le parece si, siguiendo este ejemplo, ahora usted obtiene una relación de dependencia entre los vectores $V_1=\begin{bmatrix}-2\\ \frac{1}{2}\\ -1\end{bmatrix}$ y $V_2=\begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}$?

16
Obtenga una relación de dependencia entre los vectores V_1 y V_2. Además, grafíquelos.
Confronte con la solución nº 16

Ahora, supongamos que en el $\{V_1,V_2,\cdots,V_p\}$ de vectores en $\mathbb{R}^n$ uno de ellos es el cero. Luego: ¿son LD o LI? Reflexione con lápiz y papel en mano...

17
El $\{V_1,V_2,\cdots,0,\cdots,V_p\}$ de vectores en $\mathbb{R}^n$ ¿es LD o LI? Fundamente su respuesta.
Confronte con la solución nº 17

Bien, sigamos con otro resultado importante: cualquier conjunto $\{V_1,V_2,\cdots,V_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ con $p>n$, es LD.

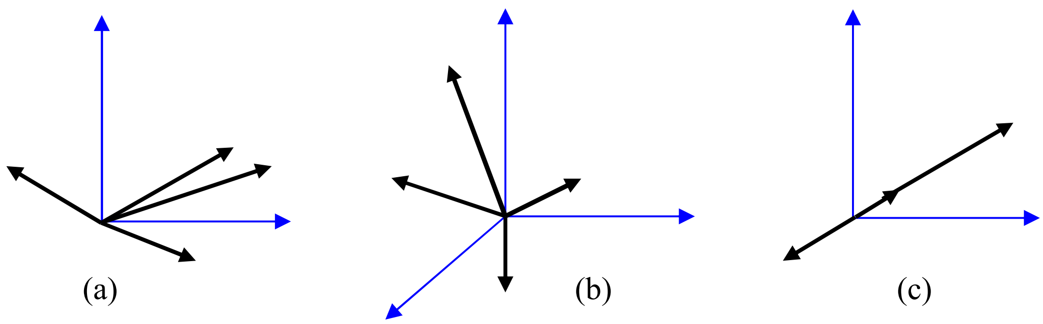
Esto es, **si en un conjunto de vectores el número de ellos supera el número de entradas de cada vector, dicho conjunto es LD**. ¿Lo demuestra? Bien: ánimo, relájese pues tiene todos los elementos para construir fácilmente dicha demostración.

Mejor lo hacemos juntos: pensemos en la matriz ampliada $\left[V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots, V_p, 0\right]$ que corresponde a un SEL homogéneo de n ecuaciones en p variables, ¡con $n < p$!, que al llevarla a la forma escalonada en los renglones reducida nos devolverá - como máximo- n unos principales, quedando $p - n$ variables libres –como mínimo -.

<u>Conclusión:</u> el SELH admite infinitas soluciones no nulas además de la nula, esto es, existen p-uplas de valores reales no todos nulos tal que
$c_1 V_1 + c_2 V_2 + \cdots + c_n V_n + \cdots + c_p V_p = 0$.

¿Comprende la afirmación dada? ¿Seguro? Lo chequeamos:

- ✓ Si tiene tres vectores en $\mathbb{R}^2$ ¿son LD o LI?
- ✓ Si tiene cinco vectores en $\mathbb{R}^3$ ¿son LD o LI?
- ✓ Si está en $\mathbb{R}^2$ ¿cuál es el máximo número posible de vectores en un conjunto para que sean LI? ¿y en $\mathbb{R}^3$?
- ✓ Observe los gráficos (en azul se representa el sistema de ejes cartesianos ortogonales): en cada caso el correspondiente conjunto de vectores (trazados en negro) es ¿LD o LI?



(a) (b) (c)

18
Demuestre que los vectores son LD, ¿en qué espacio? ¿En $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$?

a) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1\\7\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

Confronte con la solución nº 18

19
Dibuje los conjuntos de vectores y luego deduzca a partir de lo que ve si son LD o LI.

a) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1\\7\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-7\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\21\\18\end{bmatrix}$

Confronte con la solución nº 19

Nos detengamos un momento. Hemos alcanzado resultados importantes, y como parte de un proceso significativo de aprendizaje, es aconsejable sintetizarlos. Ellos son:
El $\{V_1, V_2, \cdots, V_p\}$ de vectores en $\mathbb{R}^n$, es LD si:

- ✓ el número de vectores supera el número de entradas de un vector, $p > n$;
- ✓ el vector cero forma parte de ese conjunto de vectores;
- ✓ al menos un vector es combinación lineal de los otros.
- ✓ El vector 0 es combinación lineal (de escalares no todos nulos) de los vectores $V_1, V_2, \cdots, V_p$.

Ahora, un surtido de ejercicios ¿le parece?

20

En cada ítem proceda paso a paso del siguiente modo: lea la consigna, reflexione, calcule algebraicamente, responda y justifique la respuesta.

a) ¿Los vectores $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ son LD o LI?

b) ¿Los vectores $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ son LD o LI?

c) ¿Para qué valor de *h* el vector V_3 está en $\text{Gen}\{V_1, V_2\}$?

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{bmatrix}.$$

d) ¿Para qué valor de *h* son LD $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$?

e) Asigne valores reales al tercer vector para obtener una relación de dependencia lineal entre ellos, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \right\}$.

f) Asigne valores reales al tercer vector de modo tal que el conjunto sea LD.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

g) El eje horizontal en $\mathbb{R}^2$ contiene diferentes conjuntos de vectores LD. Construya algebraicamente uno de esos conjuntos.

h) Dibuje los vectores $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ y deduzca a partir de ese gráfico si son LD o no.

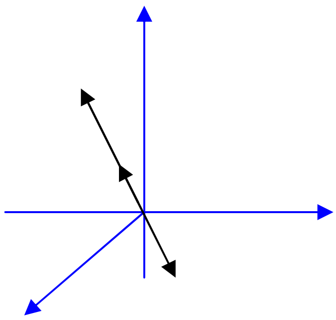
i) Dibuje los vectores $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$ y deduzca a partir de ese gráfico la relación entre ellos: dependencia o independencia lineal.

Confronte con la solución nº 20

En general, todo subespacio generado por <u>un</u> vector <u>NO NULO</u> se conoce por el nombre de **recta,** y todo subespacio generado por <u>dos</u> vectores <u>LI</u> (esto es, que no sean múltiplos uno del otro), por el de **plano**. De aquí que, muchas veces se cite el espacio $\mathbb{R}^2$ con el nombre de plano y el espacio $\mathbb{R}$ como recta real. También, cualquier subespacio generado por $n-1$ vectores LI en $\mathbb{R}^n$ se denomina **hiperplano** en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 26

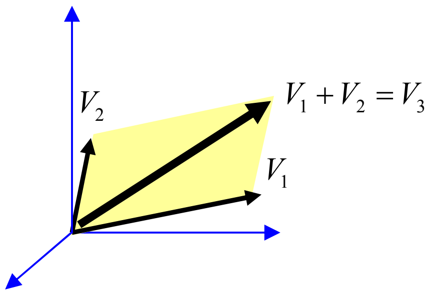
- ✓ Los vectores no nulos $\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-5\\10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}$ son LD y viven en la misma recta en $\mathbb{R}^3$. Toda relación de dependencia lineal entre ellos viene dada por la ecuación algebraica $c_1-5c_2-c_3=0$ ¿sabe porqué?[14] En particular:



$$6\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\-5\\10\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

De la observación de los vectores dato concluimos que el segundo vector es (-5) veces el primero y el tercero es (-1) vez el primero: son múltiplos.

- ✓ Los vectores $\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\6\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\7\\5\end{bmatrix}$ son LD y viven en el mismo plano en $\mathbb{R}^3$. En particular el tercer vector está en el Gen de los dos primeros: $1\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\6\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\7\\5\end{bmatrix}$. O el primero está en el Gen de los dos últimos $\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}0\\6\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\7\\5\end{bmatrix}$. El segundo ¿puede pensarse en el Gen del 1º y del 2º? En general lo pensamos así:



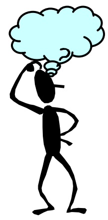
---

[14] Plantee $c_1\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\-5\\10\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ y responda ¿qué valores asumen c_1, c_2 y c_3 para que se dé la independencia lineal?

$$c_1\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\6\\2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\7\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}c_1+6c_2+7c_3=0\\3c_1+2c_2+5c_3=0\end{cases}$$

. Trabajando con la matriz aumentada y Gauss Jordan llegamos a las siguientes relaciones: $c_1=-c_3=c_2$. ¿Qué interpretamos de estas igualdades? Que existen infinitos valores para asignar y que cada vez que se cumple $c_1=-c_3=c_2$ uno de los tres vectores se puede expresar en términos de los otros dos, esto es, son LD.

Generalicemos a partir de nuestra reflexión sobre vectores que se pueden visualizar:



- ✓ ¿<u>Dos</u> vectores no nulos LD significa que son uno múltiplo del otro? Sí. Pues, sea $c_1V_1+c_2V_2=0$, con ambos escalares no nulos por ser LD. Como el primer escalar es no nulo podemos dividir por ese valor, resulta: $V_1=-\dfrac{c_2}{c_1}V_2$. Esto es: uno es múltiplo del otro sí o sí viven en la misma recta sí o sí son LD.
- ✓ ¿<u>Tres</u> vectores no nulos LD significa que son múltiplos? No necesariamente. Pueden vivir en la misma línea recta –si son múltiplos- o bien en el mismo plano si uno es combinación lineal de los otros dos.

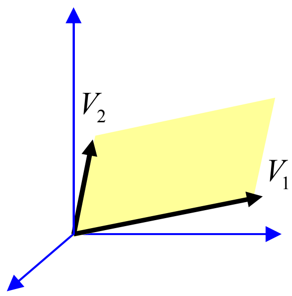
Como habrá notado, en forma permanente recurrimos a contenidos de las unidades anteriores, por ello es necesario manejarlos con fluidez para comprender lo nuevo.

A continuación, más definiciones... Dado un conjunto de p vectores en $\mathbb{R}^n$, $\{V_1,V_2,\cdots,V_p\}$, se denomina **dimensión** del subespacio por ellos generado, $\text{Gen}\{V_1,\cdots,V_p\}$, al <u>máximo número</u> (digamos *m*) de vectores LI que podamos encontrar en $\{V_1,V_2,\cdots,V_p\}$. En ese caso, cualquier subconjunto LI de *m* vectores se denomina **base** del $\text{Gen}\{V_1,\cdots,V_p\}$. El número de vectores de la base es entonces igual a la dimensión de $\text{Gen}\{V_1,\cdots,V_p\}$.

Algunos ejemplos nos ayudarán a fijar estos nuevos conceptos ¿le parece? Hacia ellos vamos.

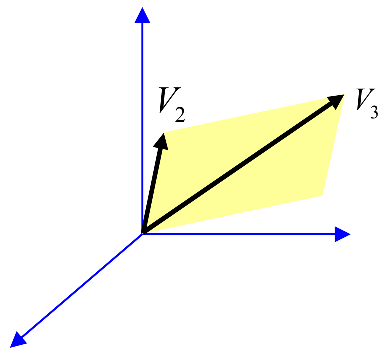
Ejemplo 27

Retomemos información del ejemplo anterior (el 26). Los vectores $\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0\\6\\2\end{bmatrix}$ constituyen un subconjunto LI[15] del conjunto $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\6\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\7\\5\end{bmatrix}\right\}$; además, el tercer vector $\begin{bmatrix}0\\7\\5\end{bmatrix}$ es combinación lineal de los otros dos; por lo tanto el subconjunto



$\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\6\\2\end{bmatrix}\right\}$ constituye una base de $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\6\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\7\\5\end{bmatrix}\right\}$; su dimensión es 2, porque dos son los vectores que forman base, y se lo visualiza como una rejilla en $\mathbb{R}^3$, es un plano que pasa por el origen.

¿Hay más bases para nuestro conjunto? Sí. Los subconjuntos $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\7\\5\end{bmatrix}\right\}$ y $\left\{\begin{bmatrix}0\\6\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\7\\5\end{bmatrix}\right\}$ son ambos LI y constan de dos vectores, luego, son también base del $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\6\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\7\\5\end{bmatrix}\right\}$.



En todos los casos el vector restante puede pensarse como combinación lineal de los otros dos:

- ✓ $1V_1 + 1V_2 = V_3$
- ✓ $-1V_1 + 1V_3 = V_2$
- ✓ $-1V_2 + 1V_3 = V_1$

Por otra parte, el subconjunto $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$ es LI, porque consta de un solo vector no nulo; ¿será base? Pues no, porque podemos encontrar subconjuntos con más vectores que siguen siendo LI.

Sintetizamos así. Una forma ordenada de pensar es:

---

[15] Efectivamente $\begin{bmatrix}0&0\\1&6\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ tiene a $x=0, y=0$ por única solución.

- ¿Qué tenemos? Un conjunto de vectores.
- ¿Qué necesitamos averiguar? ¿Qué es lo desconocido? El hecho desconocido es la base para ese conjunto, es determinar el mínimo número de vectores LI.
- ¿Cómo se procede para dar con la respuesta? Se procede de a poco…Tomamos cualquier vector no nulo (que sabemos es LI). A ese primero le agregamos otro cualesquiera y chequeamos si ambos, son LI. Si lo son agregamos un tercero y chequeamos si los tres son LI. <u>Seguimos así hasta agotar los vectores datos.</u> Si al agregar un vector nos damos con que resultan LD lo separamos del resto: no formará parte de nuestra base.

La base que buscamos estará compuesta por los vectores LI cuidadosamente seleccionados de la manera descripta. Esa expresión de la base es única en el número de vectores que la componen, pero no es única en la expresión de sus componentes.
No es única porque, recuerde en particular, que un vector siempre puede pensarse como multiplicación por un escalar. Note: $\begin{bmatrix} a \\ \dots \\ b \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \frac{a}{k} \\ \dots \\ \frac{b}{k} \end{bmatrix}$ luego si $\begin{bmatrix} a \\ \dots \\ b \end{bmatrix}$ forma parte de la base puede ser perfectamente reemplazado por $\begin{bmatrix} \frac{a}{k} \\ \dots \\ \frac{b}{k} \end{bmatrix}$. Esta igualdad vectorial vale porque vale la igualdad numérica $a = k \cdot \frac{a}{k}$ para cualquier real *a* y cualquier real *k* no nulo.

Chequeemos el grado de comprensión que está logrando del tema en cuestión..

21
En cada ítem: grafique los vectores dados, determine una base y la dimensión del correspondiente subespacio generado.

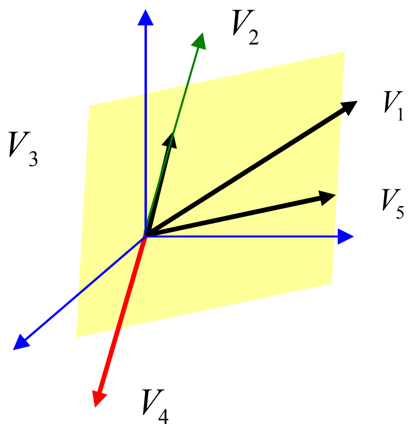
$$\text{a)}\ \ \mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\6\\18\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\-6\end{bmatrix}\right\},\ \text{b)}\ \ \mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

$$\text{c)}\ \ \mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}\right\};\ \text{d)}\ \ \mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ \frac{3}{2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Confronte con la solución nº 21

22

Observe el gráfico y determine tres bases diferentes para el subespacio bidimensional que contiene los vectores graficados.



Confronte con la solución nº 22

Ejemplo 28

¿Cómo encontramos una base para el subespacio $\pi = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / 2x - y + 3z = 0 \right\}$? ¿Cuál es la dimensión de este subespacio? ¿Cómo se visualiza o grafica este subespacio?

Muy simple. Partimos de la información disponible y la re-escribimos pensando en lo que queremos obtener: una expresión de "vector generado". Entonces, aclaremos ideas, pensamientos:

<u>¿Qué información tenemos?</u>

✓ Una expresión algebraica del subespacio π. Esto es, una relación entre las coordenadas de un punto genérico; una ley de formación de esas coordenadas.

<u>¿Qué buscamos?</u>

✓ Una base, esto es, vectores generadores de este subespacio, una expresión de combinación lineal para el vector genérico de este subespacio.

<u>¿Cómo llegamos?</u>

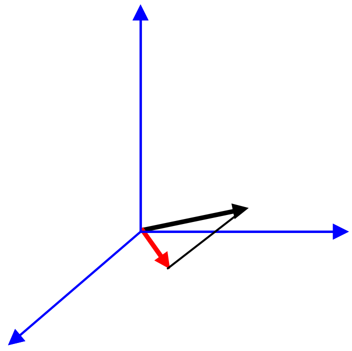
Partiendo de lo que conocemos y trabajando algebraicamente esa información:

$$\pi = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / 2x - y + 3z = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / 2x + 3z = y \right\} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x+3z \\ z \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1x+0z \\ 2x+3z \\ 0x+1z \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1x \\ 2x \\ 0x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0z \\ 3z \\ 1z \end{bmatrix} \right\} = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = Gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

donde x y z son escalares arbitrarios.

Se puede demostrar que los vectores $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}$ son LI[16], luego son base del subespacio π cuya dimensión resulta ser dos. El subespacio π es un plano en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ (que contiene al triángulo graficado).



Este ejemplo nos mostró paso a paso cómo construir la base, nos mostró la técnica utilizada.

Ahora, a practicar.

23
Determine una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en:
a) el plano $2x - y - z = 0$.
b) en la recta $x = 3t, y = -2t, z = t$.

Confronte con la solución nº 23.

24
Establezca una base y la dimensión para el espacio solución S de cada SELH (además, describa la idea, la forma, el método que se sigue en la resolución):

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 4x - 2y + 6z = 0 \\ -6x + 3y - 9z = 0 \end{cases}$.

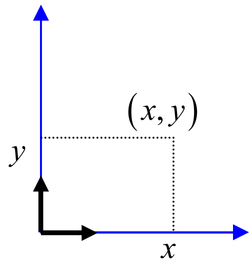
Confronte con la solución nº 24

El ejemplo 28 muestra que todo ELH puede pensarse como un subespacio generado. Y en general la solución de un SELH puede pensarse como un subespacio generado. El desafío es determinar los vectores que constituyen una base de ese subespacio. De esta manera tenemos nuevas herramientas (vectores, rejillas) para graficar la solución de un SELH (unidad 1, apartado 6. Gráfica de un SEL). Cuidado, no hablamos de cualquier SEL sino de SELH porque todo SEL que no pasa por el origen NO es subespacio ¿si?

En particular, hablando de bases:

[16] Efectivamente $\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ tiene a $m = 0, n = 0$ por única solución al aplicarle Gauss_Jordan por ejemplo.

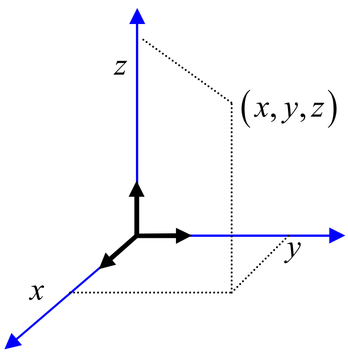
✓ En $\mathbb{R}^2$ los vectores $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ constituyen una base de $\mathbb{R}^2$ porque son dos vectores LI. Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ puede expresarse como combinación lineal de ellos. Efectivamente: $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ es la expresión "genérica" de un vector en el plano $\mathbb{R}^2$ y puede expresarse $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Luego $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$.



$\mathbb{R}^2$ tiene dimensión dos, de allí el nombre de espacio bidimensional, y dos vectores lo generan, de allí el nombre de "plano" con el cual muchas veces se lo designa.

Observe que, gráficamente, esos vectores generan una rejilla de líneas perpendiculares ya que forman ángulos de 90º. Es la rejilla más usada, pero no es la única.

✓ En $\mathbb{R}^3$ los vectores $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ constituyen una base de $\mathbb{R}^3$. Cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ puede expresarse como combinación lineal de ellos. Efectivamente: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ es la expresión "genérica" de un vector en $\mathbb{R}^3$ y puede expresarse $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. Luego: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.



$\mathbb{R}^3$ tiene dimensión tres, de allí el nombre de "espacio tridimensional".

✓ En $\mathbb{R}^n$ los n vectores, de n componentes cada uno, de la forma

$$V_i=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\leftarrow \text{posición i}$$

constituyen una base de $\mathbb{R}^n$. El espacio erre-ene tiene dimensión n y cualquier vector del mismo puede expresarse como combinación lineal de ellos.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \in Gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\mathbb{R}^n$ tiene dimensión *n*, de allí el nombre de espacio *n*-dimensional.

Tales bases reciben el nombre de **base estándar** para $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente.

25

a) Exprese los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ en términos de las respectivas bases estándar.

b) $-5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{7}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ corresponde a un vector de $\mathbb{R}^3$. Identifíquelo.

Confronte con la solución nº 25

Antes del merecido descanso:

26

- ✓ elabore una síntesis de los contenidos nuevos definidos en la sección. Identifique las ideas principales, las ideas clave.
- ✓ Realice una segunda lectura más profunda de la sección. Rotuló párrafos.
- ✓ Liste sus dudas y busque aclararlas con sus compañeros y/o tutor.

Usted coincidirá conmigo en que este tema es muy amplio. Por eso propongo plantearlo como un tema de profundización en el Aula virtual.

Tema de profundización en el Aula virtual

Lo invito a indagar y a compartir los resultados de su investigación en un foro del Aula virtual:

¿Qué se conoce por **sistema de coordenadas** para un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$?

¿Qué se define como **vector de coordenadas de *X* relativo a una base**?

Qué es fijo: ¿el vector *X* o sus coordenadas?

¡Nos encontramos en el foro!

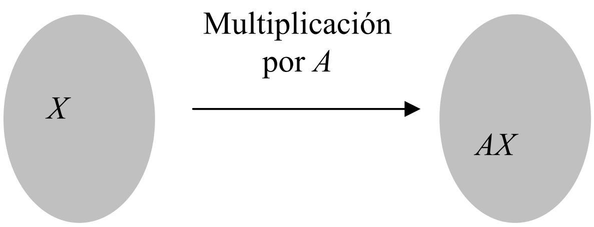
3. Transformaciones matriciales

En esta sección introducimos terminología que otorga una visión “dinámica” a la multiplicación por matrices; la pensamos como una función con ciertas características.

El apartado 1 lo comenzamos recordando y relacionando conceptos de las unidades 1 y 2; en el presente, seguimos recordando y relacionando...

$A_{m\times n}X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$ se conoció en la unidad 2 como la “expresión matricial” de un SEL, o como una ecuación matricial con A y B conocidos y X desconocida; y en la unidad 3 definimos, por primera vez, el concepto de función al hablar de la función determinante.

Aquí pensaremos a una matriz $A_{m\times n}$ como un objeto que actúa sobre un vector *X*, multiplicándolo, para producir otro vector *AX*, también designado como *B*.



Este gráfico se interpreta así: el vector *X* se toma del dominio de la función. Dicho dominio está representado por el óvalo grisado de la izquierda. Al aplicarle la acción representada por la flecha y que consiste en multiplicar por una matriz que llamamos *A*, se transforma en el vector *AX*. Este último vector es la imagen de *X* y vive en el óvalo grisado de la derecha. Dicho óvalo recibe el nombre de codominio de la función.

Desde este “nuevo” punto de vista la multiplicación por la matriz *A* es una función del conjunto de vectores de tamaño $n\times 1$ en el conjunto de vectores de tamaño $m\times 1$. Esta función asociada a la multiplicación por la matriz A se denomina **transformación matricial**. En simbología matemática se expresa:

$$\begin{aligned} A:\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

(Observe que se usa la flecha $\to$ para relacionar dos conjuntos, y se usa la flecha $\mapsto$ para relacionar dos vectores.)

Luego la ecuación $AX = B$ dice, se interpreta: proporcione un “*X*” y obtendrá un “*B*”.

Ejemplo 29

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, se tiene:

- ✓ La dimensión de la matriz *A* nos indica que la transformación toma vectores de cuatro componentes y los transforma en vectores de dos componentes: $A:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$.

- ✓ A transforma el vector de unos en $\mathbb{R}^4$ en el vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ del plano $\mathbb{R}^2$.
- ✓ A transforma el vector $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$ en el vector nulo del plano $\mathbb{R}^2$.
- ✓ A transforma el vector genérico $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$ en el vector $\begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 \\ 0x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 5x_4 \end{bmatrix}$ del plano $\mathbb{R}^2$. Aquí, se expresan claramente las componentes del vector AX en términos de las componentes del vector X.

Efectivamente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 \\ 0x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 5x_4 \end{bmatrix}.$$

A pensar:
¿Qué vector en $\mathbb{R}^4$ será transformado por A en el vector de unos del plano $\mathbb{R}^2$?
¿Para todo vector B del plano $\mathbb{R}^2$ existe un X en $\mathbb{R}^4$ tal que $B = AX$?
¿Existen más vectores en $\mathbb{R}^4$ que sean transformados por A en el vector nulo del plano? ¿Cuántos? ¿Cuáles?

27 Responder a estos interrogantes implica regresar a SEL. Eso se lo dejo a usted. Confronte con la solución nº 27

En $\mathbb{R}^3$ se llama **plano** (x_1, x_2) al subespacio generado por dos vectores de la base estándar,

$\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}=\left\{x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\ / \ x_1,x_2\ \in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\0\end{bmatrix}\ / \ x_1,x_2\ \in\mathbb{R}\right\}$. Es el conjunto de vectores cuya tercera componente es nula. Es un plano porque está generado por dos vectores. De manera similar se definen en $\mathbb{R}^3$ el plano (x_1,x_3) y el plano (x_2,x_3).

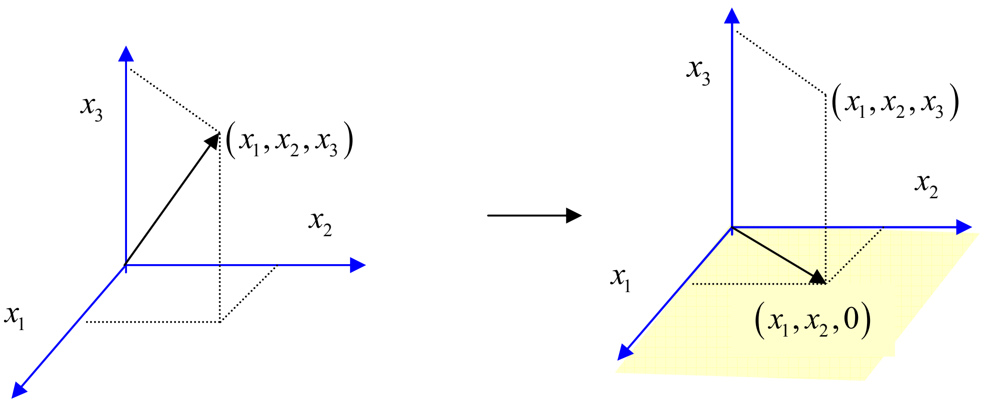
La definición es necesaria para entender el ejemplo que a continuación desarrollamos.

Ejemplo 30

Si $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, la transformación $X\mapsto AX$ proyecta puntos de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano (x_1,x_2). ¿Cómo lo sabemos? Al hacer la multiplicación por A se nos muestra con más claridad:

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\0\end{bmatrix}$. Esta simbología dice que un vector arbitrario del dominio es llevado a otro que mantiene sus componentes en el primer y segunda eje y anula la tercera componente.

$$\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-2\\-3\\3\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-2\\-3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$



28

Determine el transformado por A del vector $\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}$ y también del vector $\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}$.

Confronte con la solución nº 28

A recibe el nombre de **transformación de proyección** de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano (x_1,x_2).

29

a) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ define una proyección. ¿Sobre qué plano? Explicite en términos de las componentes del vector *X*, las componentes de *AX*.

b) $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ define una proyección. ¿Sobre qué plano? Explicite en términos de las componentes del vector *X*, las componentes de *AX*.

c) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ define una proyección. ¿Sobre qué recta? Explicite en términos de las componentes del vector *X*, las componentes de *AX*.

Confronte con la solución nº 29

Continuemos trabajando en el ejemplo 30. Si *X* es un vector cualquiera de la "recta" $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, tiene la forma $a\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ para cierto escalar *a*; su "transformado" vale $AX = Aa\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = aA\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, esto es, pertenece a la recta $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$. Esta información también la podemos <u>interpretar</u> diciendo que: una recta es transformada en otra recta.

Y también podemos demostrar que si *X* está en el espacio generado por dos vectores LI, su transformado está en el espacio generado por las proyecciones LI de esos vectores. Esto es: si $X \in Gen\{X_1, X_2\}$ su transformado $AX \in Gen\{AX_1, AX_2\}$.

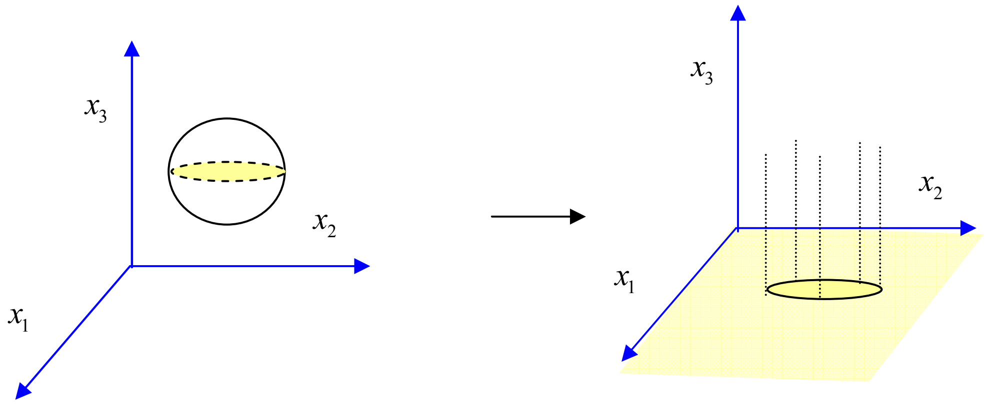
30

Sea *A* la **transformación de proyección** de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano (x_1, x_2). Para esta *A* determine el transformado de:

a) la recta $Gen\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}$, b) la recta $Gen\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}$, c) del plano $Gen\left\{\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix}\right\}$.

Confronte con la solución nº 30

La transformación de proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano (x_1, x_2) aplicada a cada punto de una esfera la transforma en un círculo –todo el círculo, circunferencia e interior– ¿Lo visualiza? Imagine una luz que ilumina al cuerpo desde arriba; bien, lo proyectado es, simplemente, su sombra en el "piso".



Ejemplo 31

Para $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, la transformación $X \mapsto AX$ se llama **transformación de trasquilado horizontal** o **transformación de corte (en el factor 3) sobre el eje horizontal**.

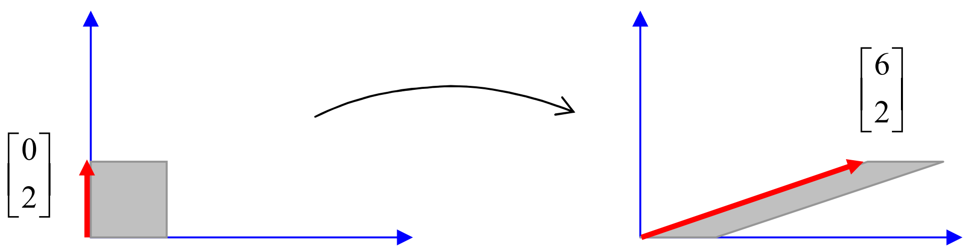
La dimensión de la matriz A nos indica que tanto el espacio de salida como el de llegada son de dimensión 2, entonces se trata de $\mathbb{R}^2$ y vale la notación $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. La expresión AX viene dada en términos de las componentes del vector $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ así: $AX=\begin{bmatrix}x+3y\\ y\end{bmatrix}$. Sintetizamos:

$$\begin{aligned} A:\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ X &\mapsto AX\\ \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix}x+3y\\ y\end{bmatrix}\end{aligned}$$

En particular, esta transformación, al actuar sobre cada punto de un cuadrado transforma a éste en un paralelogramo. ¿Lo vemos? Para ello aplicamos la transformación en los vértices de un cuadrado de 2 unidades de medida lateral, por ejemplo. Las coordenadas de los vértices, recorridos en el sentido de las agujas del reloj, son: $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$ y $(2,0)$.

Los vértices transformados valen:

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$$



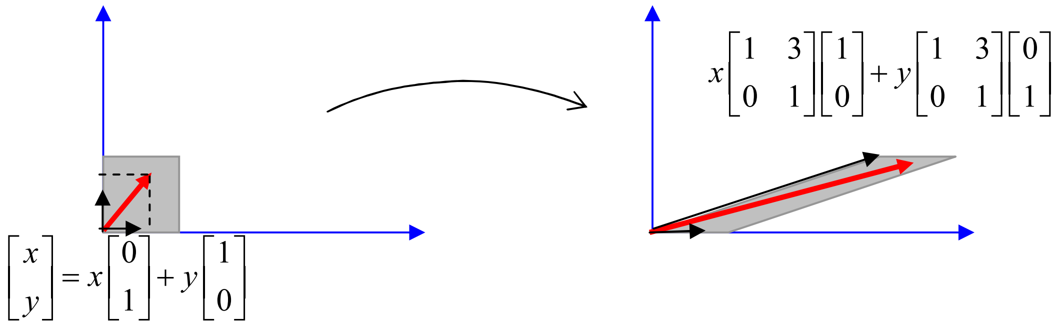
El trasquilado “acuesta” la figura con cierta inclinación dada por el factor (factor 3 en este ejemplo).

Cualquier punto (x, y) del cuadrado puede pensarse como un vector combinación lineal –CL- de los vectores $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (vectores que forman la base estándar de $\mathbb{R}^2$).

Efectivamente: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ con x e y moviéndose entre 0 y 2, esto es, $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$. Luego, aplicando propiedades de matrices se obtiene:

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ¿Cómo se interpreta esta simbología matemática? Que el transformado de una CL es una CL de los transformados de los vectores de la base estándar.

Visualicemos:



Por lo que hemos analizado, estamos en condiciones de afirmar que, en general, si $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en el espacio de salida, $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, más aún es de la forma $x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ en el espacio de llegada.

31

Aplique la transformación matricial $A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, que corresponde a un trasquilado horizontal de factor $\frac{1}{4}$, grafique y observe el transformado de:

a) la recta $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$,

b) la recta $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$,

c) un cuadrado con lado de medida cuatro unidades,

d) la letra **A** con vértices $(0,0),(1,1),(2,2),(3,1),(4,0)$ en el plano.

e) Explicite el conjunto de salida y el de llegada de la transformación, así como la expresión del transformado *AX* en términos de las componentes de *X*.

Confronte con la solución nº 31

32

a) Construya la matriz de dimensión 2×2 de trasquilado horizontal en un factor 5. Explicite en términos de las componentes del vector *X*, las componentes de *AX*. Trasquile un cuadrado y grafique.

b) Construya la matriz de dimensión 2×2 de trasquilado horizontal en un factor $\frac{1}{5}$. Explicite en términos de las componentes del vector *X*, las componentes de *AX*. Trasquile un cuadrado y grafique.

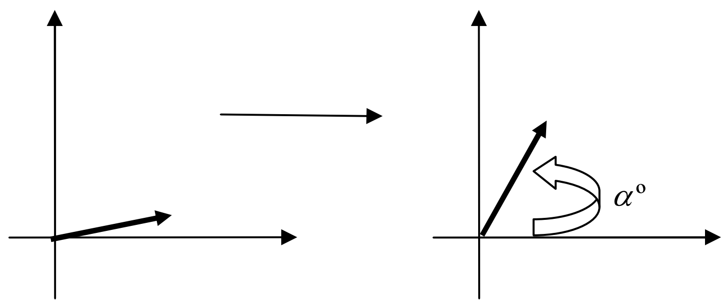
c) Compare y saque conclusiones de la acción de trasquilado según el factor sea mayor o menor a 1.

Confronte con la solución nº 32

Le propongo otros ejemplos geométricos interesantes. Para ello es necesario recordar conceptos de las relaciones trigonométricas. Por eso, y por si le surgen dudas tenga a mano la Guía de "Nivelación matemática".

Ejemplo 32

Para $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, la transformación $X \mapsto AX$ se llama **transformación de rotación en un ángulo α,** con α medido en sentido contrario a las agujas del reloj**.** Por ser *A* una matriz de tamaño 2×2 la transformación va del espacio $\mathbb{R}^2$ al espacio $\mathbb{R}^2$, esto es,



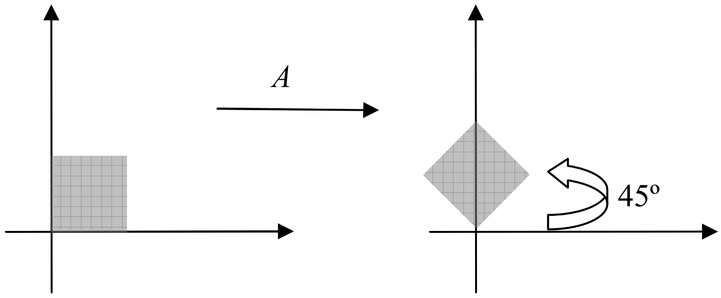
$$
\begin{aligned}
A:\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\
X &\mapsto AX \qquad .\\
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

En particular si $\alpha = \dfrac{\pi}{4} = 45^{\mathrm{o}}$, medido en sentido contrario a las agujas del reloj, y recordando los valores asignados a las relaciones trigonométricas en el primer cuadrante[17] se tiene que A es:

Esta última igualdad se plantea por conveniencia, para simplificar la notación de las entradas de A, ¡nada más!

$$
A = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -sen\dfrac{\pi}{4} \\ sen\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

La figura muestra como se transforma un cuadrado.



Efectivamente, los transformados de los vértices según cálculos algebraicos valen:

$$
A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

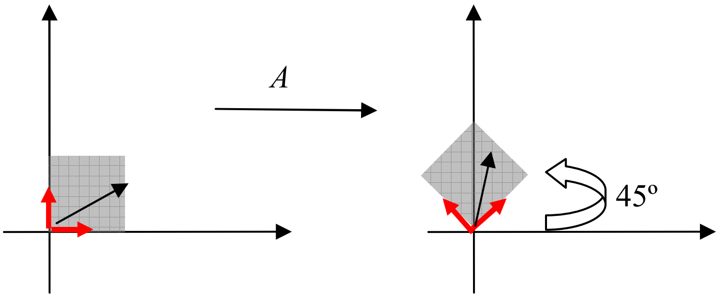
Cualquier punto (x, y) del cuadrado puede pensarse como un vector combinación lineal –CL-de los vectores $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (que forman la base estándar de $\mathbb{R}^2$). Efectivamente: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Luego, aplicando propiedades de matrices se obtiene:

[17] Consulte la unidad 3 del Módulo de nivelación matemática. La cita completa del texto se encuentra en la bibliografía.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\left(x\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)=x\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+y\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

¿Cómo se interpreta esta simbología matemática? Que el transformado de una CL es una CL de los transformados de la base estándar. Es importante que no se pierda en la simbología y en los números y es por eso que insistimos en las interpretaciones.

Visualicemos:



Por lo que hemos analizado para una transformación de 45º, estamos en condiciones de afirmar que, en general, si $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\in Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ en el espacio de salida, $A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\in Gen\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$, más aún es de la forma $x\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+y\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ en el espacio de llegada.

Repetimos: no se pierda en los números. No pierda de vista la acción. Interprete la simbología al margen de los valores numéricos de sus componentes.

33

Dada la letra **A** con vértices en el plano $(0,0),(1,1),(2,2),(3,1),(4,0)$:

a) Rótela 45º. Determine las componentes de la nueva posición de los vértices. Grafique.

b) Rótela 90º usando dos transformaciones sucesivas de 45º cada una. Determine las componentes de la nueva posición de los vértices.

c) Construya la matriz A para una rotación de 90º. Explicite las componentes de AX.

Confronte con la solución nº 33

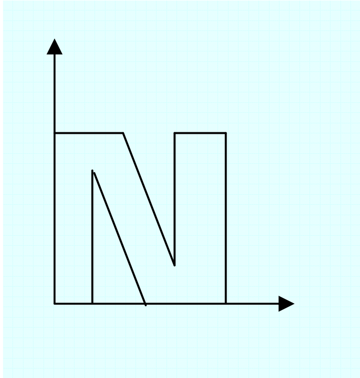
Tema para indagar y compartir resultados en el Aula virtual

Algunas transformaciones matriciales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ son muy usadas, por ejemplo, a la hora de realizar gráficos en computadoras. He aquí ejemplos de dichas transformaciones.

- ✓ Reflexión respecto del primer eje real, también llamado eje *x*.
- ✓ Reflexión respecto del segundo eje real, también llamado eje *y*.
- ✓ Reflexión sobre la recta $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$.
- ✓ Contracción y expansión horizontal.
- ✓ Contracción y expansión vertical.
- ✓ Trasquilado o corte horizontal.
- ✓ Trasquilado o corte vertical.

✓ Proyección sobre el primer eje, también llamado eje x.

✓ Proyección sobre el segundo eje, también llamado eje y.



Lo invito a indagar sobre la forma y las características de las matrices A que las representan. Luego le propongo que muestre en un gráfico su accionar. Descubrirá que son realmente interesantes los efectos o transformaciones que realizan. Aplique en particular cada una de esas transformaciones a la letra N.

El libro *Álgebra lineal* de Grossman, desarrolla estos temas de manera muy simple, clara y completa; una síntesis del mismo se encuentra en el aula virtual, sección archivos, material complementario formando parte de los archivos que comienzan con 400 y algo. La cita completa del libro se encuentra en la bibliografía.

Volviendo a la proyección de un objeto de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ (su sombra en el "piso", ¿recuerda?), discuta los resultados obtenidos al proyectar un cubo. ¿En qué se proyecta si está "cruzado"?

Ejemplo 33

Transformación de un "vector de producción" en un "vector de materia prima".
Un fabricante fabrica cuatro productos diferentes; cada uno requiere tres tipos de materiales (materia prima). La tabla siguiente muestra el número de unidades de cada materia prima, que denotamos por R_i para $i = 1,2,3$, requeridas para fabricar una unidad de cada producto, que denotamos por P_i para $i = 1,2,3,4$.

	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	2	1	3	4
R_2	4	2	2	1
R_3	3	3	1	2

Una pregunta que surge naturalmente es: para producir ciertos números de cada producto ¿cuántas unidades de cada materia prima se requerirán? Esto es, si se quieren fabricar p_1 artículos del producto P_1, p_2 artículos del producto P_2, y así sucesivamente ¿Qué cantidades r_1 de la materia prima R_1, r_2 de la materia prima R_2 y r_3 de la materia prima R_3 necesitaremos?

Bien. Modelicemos, usando simbología matemática, la situación verbalizada. Obviamente deben cumplirse las siguientes relaciones entre datos conocidos y datos desconocidos: $\begin{cases} 2p_1 + 1p_2 + 3p_3 + 4p_4 = r_1 \\ 4p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 1p_4 = r_2 \\ 3p_1 + 3p_2 + 1p_3 + 2p_4 = r_3 \end{cases}$

Que puede escribirse $p_1\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}+p_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+p_3\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}+p_4\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\4&2&2&1\\3&3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$.

Si definimos los vectores, $P=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}$, $R=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$, podemos pensar en la transformación

$$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$
$$P \mapsto AP = R$$
$$\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}2&1&3&4\\4&2&2&1\\3&3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}.$$

De esta simbología se lee que R debe estar en el espacio generado por las columnas de A, es decir, el espacio generado por los vectores de requerimientos de materia prima por producto.

En particular, si $P=\begin{bmatrix}10\\30\\20\\50\end{bmatrix}$ ¿cuál es el vector $R=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$?

Hacemos los cálculos: $R=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\4&2&2&1\\3&3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\30\\20\\50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}310\\190\\240\end{bmatrix}$. Se requieren 310 unidades de la materia prima uno, 190 de la dos y 240 de la tres.

A es la transformación matricial que "transforma" un vector de producción en un vector de materia prima. Interesante punto de vista ¿verdad?

34

Determine R para:

a) $P=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\100\end{bmatrix}$.

b) Una unidad de cada producto.

c) Solo 200 unidades del segundo producto.

d) p unidades de cada producto.

e) El vector $R=\begin{bmatrix}100\\100\\100\end{bmatrix}$ ¿pertenece al espacio generado por las columnas de A?

Confronte con la solución nº 34

<u>Siempre</u> se cumple para una transformación matricial representada por A, vectores U y V y un escalar c:

- ✓ $A(U+V)=AU+AV$
- ✓ $A(cU)=c\cdot AU$

<u>¿Cómo justificamos esas igualdades matriciales?</u> Recorramos nuestra guía: unidad 2, apartado 3 Álgebra de matrices, propiedad f –el producto de matrices se distribuye en la suma de matrices– y propiedad e –el producto por un escalar es asociativo–.

<u>¿Cómo se interpreta la simbología?</u> Toda **transformación matricial es lineal**, esto es, el objeto matriz al aplicarse a una suma de vectores se distribuye: sumar dos transformados es lo mismo que transformar la suma de ambos vectores. También: transformar un producto de vector por escalar es lo mismo que transformar el vector y luego, multiplicar por el escalar. En otras palabras, hacer aritmética (suma y/o multiplicación por escalares) antes de transformar, es lo mismo que transformar y luego hacer aritmética de vectores transformados. Estas propiedades son muy importantes y útiles.

En los ejemplos de proyección, trasquilado y rotación antes mencionados, la **propiedad de linealidad de una transformación matricial** se expresa diciendo que: es lo mismo sumar vectores <u>antes</u> o <u>después</u> de proyectarlos, trasquilarlos o girarlos en un ángulo determinado.

Como consecuencia de esto, y aquí es donde radica el interés e importancia de la propiedad, uno elige donde operar aritméticamente y esa elección depende, entre otras cosas, de la facilidad de cálculo.

Y algo más importante aún. Los ejemplos desarrollados muestran que conocidos los transformados de los vectores generadores puede conocerse el transformado de un vector genérico.

Pensando en un <u>contexto más general</u>, toda transformación matricial es una transformación. Se define: una **transformación** (o **función** o **mapeo** u **operador**) T, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, es una regla que asigna a cada vector X en $\mathbb{R}^n$ un único vector TX en $\mathbb{R}^m$. En esta definición $\mathbb{R}^n$ se llama **dominio de *T*** y $\mathbb{R}^m$ **codominio de *T***. Para cada X en $\mathbb{R}^n$, el vector TX se llama **imagen de *X* bajo la acción de *T*** y el conjunto de todas las imágenes se llama **rango de *T***. La simbología matemática, lo verbalizado se expresa:

$$\begin{aligned} T:\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ X &\mapsto T(X) \end{aligned}$$

$\{TX \,/\, X \in \text{Dominio de T}\} = \text{Rango de T} \subset \text{Codominio de T}$.

Ejemplo 34
Son ejemplos de transformaciones:

a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1+x \\ y \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} xy \\ y \end{bmatrix}$

¿Cómo se interpretan tales transformaciones?
La primera transformación deja la segunda componente del vector dónde está y a la primera componente la cambia a su valor opuesto, así describimos su “accionar”.
La segunda transformación lleva todo vector de $\mathbb{R}^2$ al origen de coordenadas, así describimos su “accionar”.

35
a) Interprete la simbología dada en los apartados c) a g), esto es, describa el “accionar” de cada transformación.
b) ¿Cuál sería la expresión de una transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que anula la segunda componente y a la primera la duplica?
c) ¿Cuál sería la expresión de una transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que intercambia el valor asignado a las componentes?
d) Construya una transformación arbitraria de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Describa verbalmente su accionar.
e) Construya una transformación arbitraria de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Describa verbalmente su accionar.

Confronte con la solución nº 35

No todas las transformaciones (funciones, mapeos u operadores) son lineales. Una **transformación es lineal** si preserva las operaciones de suma de vectores y de multiplicación por escalares, es decir:

- ✓ al aplicarse a una suma de vectores coincide con la suma de los vectores transformados individuales,
- ✓ al aplicarse al producto por un escalar coincide con el producto entre el escalar y el transformado del vector.

En simbología matemática, *T* es una transformación lineal, si para todo *U*, *V* en el dominio de *T* y todo escalar *c*, cumple:

$$T(U+V)=T(U)+T(V)$$
$$T(cU)=c\cdot T(U)$$

Usando esta simbología la transformación matricial, multiplicación por A, se expresa:

$$T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$X \mapsto T(X)=AX$$

Ya hemos demostrado que las transformaciones matriciales son lineales.

Diferenciemos: el término "transformación lineal" se centra en una propiedad de la función –la linealidad- mientras que el término "transformación matricial" describe cómo se implementa la acción, es la fórmula que describe la transformación – multiplicar por una matriz -.

Ejemplo 35

¿Cuáles de las transformaciones definidas en el ejemplo precedente son lineales? Analicemos el ejemplo e) donde el vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ se transforma en el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$. Se interpreta (o su "accionar" es): la primera componente se transforma en 1, la segunda se sustituye por la primera.

Para empezar estudiamos como se transforma la suma de vectores:
Sean $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ vectores en la salida. El vector suma de ambos es $\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix}$.

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}, \qquad T\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ x' \end{bmatrix}, \qquad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+T\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ x' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+1 \\ x+x' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ x+x' \end{bmatrix},$$

$T\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ x+x' \end{bmatrix}$. Luego $T\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ x+x' \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 2 \\ x+x' \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+T\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

Con esto alcanza para afirmar que la transformación no es lineal, por lo cual no es necesario estudiar el transformado del producto por escalar. Pero si de todos modos decide analizarlo verá que resulta:

$$T\left(c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ cx \end{bmatrix}\neq c\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}=c\left(T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right).$$

El ejemplo a) está asociado a una transformación lineal. Lo demostramos:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+T\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x-x' \\ y+y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(x+x') \\ y+y' \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix}$$

$$T\left(c\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=T\begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -cx \\ cy \end{bmatrix}=c\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}=c\left(T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

Entonces: debe quedarle claro que en la práctica, la técnica que se usa para decir si una transformación es lineal o no, consiste en calcular el transformado de dos vectores, el transformado de su suma, el transformado del producto entre un escalar y uno de los vectores y luego analizar si se cumplen las relaciones de igualdad de la definición.

36
Estudie la linealidad de las restantes transformaciones del ejemplo.
Confronte con la solución nº 36

En situaciones de la vida real veamos como se interpreta la linealidad de la transformación.

Ejemplo 36

Una compañía fabrica dos productos B y C. Con información de una tabla construimos la matriz de "costo unitario" U, cuyas columnas describen los "costos en pesos por unidad de producción de cada producto":

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{B} & \text{C} \end{array} \\ U = & \begin{bmatrix} 0.45 & 0.40 \\ 0.25 & 0.35 \\ 0.15 & 0.15 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{materiales} \\ \text{mano de obra} \\ \text{gastos generales} \end{array}$$

matriz de costos unitarios

Sea $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ un "vector de producción", correspondiente a x_1 unidades del producto B y a x_2 unidades del producto C, definimos $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T(X) = UX = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.40 \\ 0.25 & 0.35 \\ 0.15 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.25 \\ 0.15 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.35 \\ 0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{costo total de materiales} \\ \text{costo total de mano de obra} \\ \text{costo total de gastos generales} \end{bmatrix}$$

El mapeo transforma el "vector de unidades de producción" en el "vector costos totales de producción". La linealidad de este mapeo se refleja en los siguientes hechos:

- ✓ si la producción se incrementa en un factor k, los costos se incrementan en el mismo factor: vale

$$X \mapsto T(X)$$
$$kX \mapsto kT(X) = T(kX)$$

- ✓ si X e Y son vectores de producción, el costo total asociado a la producción combinada $X+Y$ es, precisamente, la suma de los vectores de costos totales. Vale:

$$X \mapsto T(X)$$
$$Y \mapsto T(Y)$$
$$X + Y \mapsto T(X) + T(Y) = T(X+Y)$$

37
Aplique la linealidad y determine el costo de producir para cada producto:

a) una unidad,
b) cien unidades,
c) doscientas unidades.

Confronte con la solución nº 37

Ejemplo 37
La siguiente tabla muestra la composición en gramos por barra para tres tipos distintos de barras B1, B2, B3.

B1	B2	B3	
20	30	40	oro
30	40	50	plata
40	50	90	cobre

Si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ representa un vector genérico "número de barras o parte de una barra", esto es, X se interpreta como x_1 partes de la barra B_1, x_2 partes de la barra B_2 y x_3 partes de la barra B_3.

La composición para una nueva barra obtenida a partir de las ya existentes viene dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto x_1 \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{gramaje total en oro} \\ \text{gramaje total en plata} \\ \text{gramaje total en cobre} \end{bmatrix}$$

Luego, esta idea, da lugar a una la transformación matricial $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$X \mapsto TX = x_1 \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 30 & 40 & 50 \\ 40 & 50 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = AX .$$

La entrada de esta "transformación" es un vector con el número de unidades o parte de cada barra de depósito, y el transformado es la nueva barra que se puede obtener a partir de esa materia prima disponible (barras B1, B2 y B3) y en esas cantidades.

Si tenemos disponible para usar 2 barras del tipo B1, media barra del tipo B2 y 3 barras del tipo B3 ¿qué composición nueva podemos obtener? Esto es, si $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ¿Qué entradas forman *TX*?

Pues: $2\begin{bmatrix}20\\30\\40\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}30\\40\\50\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}40\\50\\90\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&30&40\\30&40&50\\40&50&90\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1/2\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}175\\130\\375\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{gramaje total en oro}\\\text{gramaje total en plata}\\\text{gramaje total en cobre}\end{bmatrix}.$

Concluimos que la nueva barra estará compuesta por 175g de oro, 130g de plata y 375g de cobre, todo mezclado.

Como la transformación es lineal duplicar las unidades de partida equivale a duplicar los gramajes en la llegada. Esto es, $T(2X)=2T(X)$.

Si afirmamos que T es lineal y conocemos los transformados de un conjunto de vectores LI, entonces conocemos el transformado de un vector arbitrario, cualesquiera, del espacio generado por esos vectores. Este resultado es muy importante. $X\in Gen\{V_1,\ldots V_k\}\Rightarrow X=c_1V_1+\ldots+c_kV_k\Rightarrow TX=T(c_1V_1+\ldots+c_kV_k)=c_1TV_1+\ldots+c_kTV$

Observe que no conocemos la expresión de *T* en un vector genérico sino que conocemos su accionar en un conjunto LI que no es lo mismo. Analicemos un ejemplo.

Ejemplo 38

Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\0\\5\end{bmatrix}$. El vector $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ está en el $Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ ¿A qué vector de $\mathbb{R}^3$ es transformado?

1º. Determinamos los escalares que determinan la CL del vector de salida. ¿Cómo procedemos? Pues expresamos el vector dado en una suma de dos así: $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$. Resolvemos esta ecuación vectorial en *a* y en *b*. Resulta *a*=2, *b*=1.

2º. Aplicamos la transformación.

$$T\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=T\left(2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=2T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\0\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\\11\end{bmatrix}.$$

3º. Concluimos $T\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\\11\end{bmatrix}$.

¿Comprendió la idea? ¿Comprendió los pasos ordenados que se siguen en la demostración? ¿Si? Entonces a practicar.

38

Para la transformación del ejemplo precedente determine el transformado de:

a) $M=\begin{bmatrix}\sqrt{3}-\sqrt{2}\\ \sqrt{3}+\sqrt{2}\end{bmatrix}$, b) $N=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{7}{2}\end{bmatrix}$.

Confronte con la solución nº 38

39

Pensemos las siguientes transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$.

a) Se tiene la transformación tal que al primer eje del sistema de coordenadas cartesianas lo lleva al segundo, el segundo al tercero y al tercero al primero. Determine el transformado de un vector genérico $\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ según esta transformación.

b) Construya la matriz que proyecta sobre el segundo eje. Explicite en términos de las componentes del vector *X*, las componentes de *AX*.

c) Construya la matriz que proyecta sobre el tercer eje. Explicite en términos de las componentes del vector *X*, las componentes de *AX*.

d) Reflexione sobre el plan sistematizado, o idea, que se sigue al construir la respuesta.

Ayuda: use la base estándar en el espacio de salida.

Confronte con la solución nº 39

Bien, sigamos con la teoría general de transformaciones matriciales. En términos de SEL - o de ecuación matricial -, expresaremos los conceptos previamente definidos. Así, relacionando con temas anteriores, logramos una mejor comprensión ¿verdad? Bien.

El dominio de una transformación lo constituyen todos los vectores que "viven" en el conjunto de salida. La imagen es el vector que se obtiene en el conjunto de llegada al aplicar la transformación a uno de salida: son los posibles *B*, que al plantear el SEL – la ecuación matricial- $AX=B$ resulta consistente; el conjunto de todos los *B* se llama rango de la transformación. El rango de una transformación es simplemente el conjunto de las combinaciones lineales de las columnas de *A*. Según este análisis, el rango de *T* también se conoce por **espacio de columnas de *A*,** y se denota $\operatorname{Col}A=\operatorname{Gen}\{A_1,\cdots A_n\}$. Es el subespacio generado por las columnas de *A*.

Veamos más definiciones: el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$, transformados en el vector nulo, se llama **núcleo de la transformación;** es la solución del SELH $AX=0$ y también se denota por $\operatorname{Nul}A$: consta del vector nulo o de infinitos vectores además del nulo.

$$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$
$$X\mapsto T(X)=AX$$
$$A=\begin{bmatrix}A_1 & \cdots & A_n\end{bmatrix}$$
$$\operatorname{Nul}T=\left\{X\in\mathbb{R}^n \,/\, AX=0\right\}=\text{núcleo de } T$$
$$\operatorname{Col}A=\operatorname{Gen}\{A_1,\cdots,A_n\}=\left\{B\ \varepsilon\ \mathbb{R}^m \,/\, B=AX \text{ para algún } X\in\mathbb{R}^n\right\}=\text{rango de } T$$

Un **subespacio de** $\mathbb{R}^n$, con n natural arbitrario**,** es cualquier conjunto H en $\mathbb{R}^n$ con tres propiedades específicas:

- ✓ El vector cero está en H.
- ✓ Para cada U, V en H, su suma $U+V$ está en H.
- ✓ Para cada U en H y cada escalar c, cU está en H.

Dicho en palabras, un subespacio es "cerrado" bajo la suma y la multiplicación por escalares. ¿Cerrado? Este término se usó en la Nivelación matemática en relación a la propiedad de clausura de algunas operaciones en los números reales ¿recuerda? [18]

De acuerdo a esta definición, $\operatorname{Col} A$ y $\operatorname{Nul} T$ son subespacios de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente.

40

a) Retome la definición de subespacio generado y responda: ¿por qué se llama subespacio?

b) Demuestre que $\operatorname{Col} A$ y $\operatorname{Nul} T$ son subespacios de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente.

c) Seleccione y relacione los conceptos nuevos.

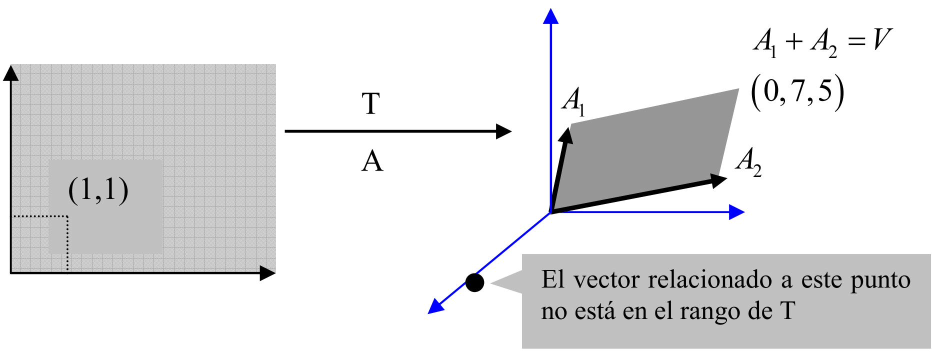
Confronte con la solución nº 40

¿Y si desarrollamos un ejemplo donde mostramos cada uno de los conceptos definidos? Vamos entonces.

Ejemplo 39

$$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1x_1 + 6x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$



Para esta transformación:

- El dominio (o espacio de salida) es $\mathbb{R}^2 = Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

[18] Consulte la unidad 1 de Nivelación matemática. La cita completa del libro la encontrará en bibliografía.

- El <u>codominio</u> (o espacio de llegada) es $\mathbb{R}^3$.
- El <u>núcleo</u> de la transformación es el vector cero. Lo vemos en detalle: $\operatorname{Nul} T = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \,/\, AX = 0 \right\}$. Luego, buscamos los vectores X de dos componentes tal que $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Aplicando cualquier método visto en las unidades precedentes, esta ecuación matricial (asociada a un SELH) admite solamente la solución nula, esto es, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- El <u>rango</u> es $\operatorname{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. Es un subespacio de dimensión dos –un "plano" – que pasa por el origen, es la rejilla. Lo vemos en detalle: $\operatorname{Rango} T = \left\{ TX \,/\, X \in \operatorname{Dom} T \right\}$

  $TX = \begin{bmatrix} 0x_1 + 0x_2 \\ 1x_1 + 6x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x_1 \\ 1x_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0x_2 \\ 6x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$. Esta notación nos permite visualizar *TX* como un vector del $\operatorname{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. Como $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ son LI (lo demostramos en el ejemplo 27) constituyen base del $\operatorname{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Gen}\left\{ A_1, A_2 \right\}$.
- Notemos que hay puntos del codominio que no pertenecen al rango de *T*. Efectivamente, usando cualquier método para resolver SEL se puede demostrar que dado el vector $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ la ecuación matricial $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ no tiene solución.

Bien, es hora de evaluar su grado de comprensión de los nuevos temas. Para ello presentamos la siguiente actividad que le permitirá, en caso de duda, realizar otra lectura de profundización. ¿De acuerdo? Y un consejo: para visualizar la acción de la transformación y los subespacios notables, ¡dibuje! ¡dibuje todo!

41

Retomemos el ejemplo 30, la transformación de proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano (x_1, x_2). Observe el gráfico y responda, luego justifique “algebraicamente”:

a) ¿es $\mathbb{R}^3$ el dominio de T?

b) ¿El núcleo de T coincide con el vector nulo?

c) ¿Es $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ el rango de T?

d) ¿Es $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ el rango de T?

e) ¿Los vectores $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ son base del subespacio $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$?

f) ¿Es $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ un subespacio vectorial?

g) ¿Cuál es el X tal que su imagen es el vector $\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}$?

h) ¿$\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ está en el codominio de T? ¿y en rango de T?

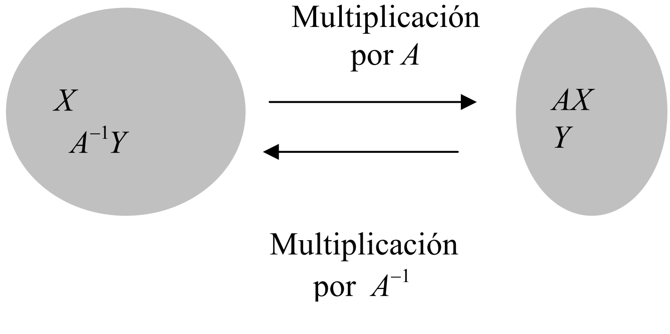
Confronte con la solución nº 41

Ahora pasemos a otra cuestión importante. Si A es cuadrada con inversa y representa la acción de una transformación matricial T ¿qué acción representará su inversa A^{-1}?

Hagamos algunos cálculos algebraicos:

$$X \mapsto AX \mapsto A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = X$$

Tal **transformación** T se dice **invertible**: existe una transformación, denotada por T^{-1}, que cuando se aplica a continuación de T nos devuelve el vector de partida. Las transformaciones invertibles están asociadas a matrices invertibles. Observe que el espacio de salida de una es el espacio de llegada de



la otra y viceversa.

La transformación mencionada en el ejemplo 29 no es invertible porque la matriz de la transformación ni siquiera tiene determinante al no ser cuadrada.
La proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano (x_1, x_2) mencionada en el ejemplo 30 no es invertible porque su matriz no lo es. Observe que esa matriz (que es diagonal) tiene determinante nulo.
El trasquilado horizontal de factor 3 mencionado en el ejemplo 31 es invertible: su matriz es cuadrada con determinante no nulo.
La rotación en 45º mencionada en el ejemplo 32 es invertible: su matriz es cuadrada con determinante no nulo.
La transformación mencionada en el ejemplo 33 no es invertible porque la matriz de la transformación ni siquiera tiene determinante al no ser cuadrada.

42
Sean T y T^{-1} transformaciones invertibles:
a) ¿coinciden en su dominio?
b) ¿Coinciden en su rango?
c) ¿Coinciden en su núcleo?
Justifique sus respuestas.

Confronte con la solución nº 42

43
Analice cuáles de las transformaciones lineales mencionadas en el ejemplo 34 son invertibles.

Confronte con la solución nº 43

Cuando se aplica más de una transformación matricial en sucesión se obtiene una **composición de transformaciones**. Y puede demostrarse que la matriz de esa composición es el producto de las matrices de cada transformación. ¿Lo vemos?

Supongamos T y S transformaciones matriciales dadas por el producto por la matriz A y B, respectivamente:

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ & X \mapsto T(X) = AX \\ S &: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \\ & Y \mapsto S(Y) = BY \end{aligned}$$

Si aplicamos tales transformaciones en forma sucesiva (primero T y luego S) tenemos:

$$X \mapsto T(X) = AX \mapsto S(AX) = B(AX) = (BA)X$$

(¿Nota que aplicamos la propiedad asociativa del producto matricial?) Este desarrollo algebraico muestra que BA es la matriz que representa la composición de transformaciones que se denota $S \circ T$ (se lee S compuesto con T), en ese orden: primero T y luego S. En notación matemática se formula, o escribe:

$$S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$
$$X \mapsto S \circ T(X) = (BA)X$$

Algunos ejemplos de composición de transformaciones son:

a) Primero rotar en cierto ángulo y después proyectar sobre un plano.
b) Primero proyectar sobre una recta y después expandir en un factor *k*.
c) Primera trasquilar horizontalmente en un factor *t* y luego contraer en un factor *s*.

44

Aplique en $\mathbb{R}^2$ una proyección sobre el primer eje y luego una rotación en 30º.

a) ¿Cuál es la matriz que representa esa transformación de composición?
b) ¿Se trata de una transformación invertible? Justifique.
c) Calcule su núcleo y explicite una base.
d) Calcule su rango y explicite una base.
e) Dado el vector de unos como transformado ¿qué punto del dominio le corresponde?

Confronte con la solución nº 44

45

En cada caso encuentre una sola matriz que lleve a cabo la sucesión indicada de operaciones en $\mathbb{R}^2$.

a) Comprima en un factor $\frac{1}{2}$ en la dirección del eje horizontal; a continuación, dilate en un factor 5 en la dirección del eje vertical.
b) Refleje respecto a la "recta" $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$, a continuación realice un giro de 180º.

Confronte con la solución nº 45

46

Demuestre que para la sucesión siguiente de transformaciones lineales: un corte (trasquilado) a lo largo del primer eje con *k*=2, expansión a lo largo del segundo eje con *k*=2, luego una reflexión respecto del primer eje, un corte a lo largo del segundo eje con *k*=3,

a) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ es la matriz que representa la composición final de transformaciones.
b) $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ es el transformado de $\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$.

Confronte con la solución nº 46

47

Por medio de la inversión de matrices demuestre que:

a) La transformación inversa para una compresión a lo largo de uno de los ejes es una expansión a lo largo de ese eje.
b) La transformación inversa para una reflexión respecto a uno de los ejes es una reflexión respecto a ese eje.

Confronte con la solución nº 47

Finalmente, si no tenemos la expresión de la matriz A sino que tenemos información sobre vectores transformados ¿podremos calcular A? ¡Claro que sí! Siempre y cuando esos vectores sean LI.

Ejemplo 40

Supongamos una transformación del espacio bidimensional al espacio tridimensional.

$$T:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-7\\2\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\8\\0\end{bmatrix}.$$

¿Cuál es la expresión de la transformación lineal T en términos de la matriz A?

Bien: sabemos que cualquier X en $\mathbb{R}^2$ puede expresarse como combinación lineal de $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, que constituyen la base estándar en $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

T es lineal, luego:

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=T\left(x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=T\left(x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+T\left(x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=x_1T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+x_2T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$=x_1\begin{bmatrix}5\\-7\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-3\\8\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5x_1-3x_2\\-7x_1+8x_2\\2x_1+0x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-3\\-7&8\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

¡Encontramos A! La transformación lineal o transformación matricial se expresa:

$$X\mapsto\begin{bmatrix}5&-3\\-7&8\\2&0\end{bmatrix}X$$

<u>Conclusión:</u> la transformación está completamente determinada por los “efectos que produce” a los vectores de la base canónica.

La matriz A que se construye a partir de los transformados de la base estándar –también llamada **base canónica**– se conoce como la **matriz canónica para la transformación lineal T**.

48
Sea:

$$T:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\8\\0\end{bmatrix}, \qquad T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-7\\0\end{bmatrix}, \qquad T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

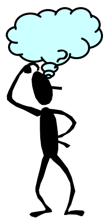
Calcule:

a) la expresión matricial de la transformación,
b) el núcleo de la transformación,
c) una base del rango de la transformación.
d) Construya A para $T:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, $TX = A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5x_1-6x_2\\x_2\\2x_1-2x_2\end{bmatrix}$.

Confronte con la solución nº 48

Y ahora a buscar a información por otro camino distinto al de la guía.

Tema para indagar y compartir resultados en el Aula virtual



¿Toda transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ puede expresarse matricialmente? Esto es, ¿toda transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ puede pensarse como una transformación matricial?

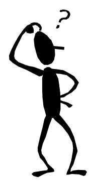
La expresión de la matriz A ¿es única? Y si no es única ¿con qué está relacionada?
¿Toda transformación será lineal? Y ¿cómo se imagina el accionar de una transformación que no sea lineal?

Los invito a responder estas preguntas y a compartir resultados en un foro del aula virtual. ¡Allí nos encontramos!

---

4. Valores propios y vectores propios

Esta sección distingue aquellos vectores en el dominio que son “estirados” o “contraídos” por la transformación. Generalmente, tales vectores forman una matriz asociada a la transformación, que simplifica la multiplicación por la matriz original.



En general, una transformación matricial $X \mapsto AX$ mueve vectores en diferentes direcciones pero, ¿existirán vectores que no cambien de dirección al aplicarles A? Esto es, dada cualquier A, ¿existirán vectores X en el dominio que no sean “modificados” por la transformación, esto es, que $AX = X$ en el codominio? Y/o también ¿existirán vectores que sólo sean “estirados” –dilatados– o “contraídos” –comprimidos– por A?; en otras palabras, $AX = kX$ para ciertos escalares[19] k. Observe: si k es positivo y menor que 1, hay **compresión** y si es mayor a 1, **dilatación** o **expansión**. Si k es 1, el vector queda como está.

[19] Recuerde que en estos contextos se llama “escalar” a cualquier número real.

En primer lugar se observa que el dominio y el codominio deben coincidir, se hablará entonces de una transformación del espacio n-dimensional en el espacio n-dimensional.

En segundo la manipulación algebraicamente de la ecuación matricial $AX = kX$ nos da un método para determinar autovalores y autovectores:

$$AX = kX$$

$$AX - kX = 0$$

$$AX - kIX = 0$$

$$(A - kI)X = 0$$

(Atención: en el desarrollo algebraico anterior debió agregarse la Identidad I para poder sacar X factor común. Recuerde que k es un número real, un escalar, y por lo tanto no puede restarse a una matriz. En cambio KI es una matriz y puede restarse a otra matriz. ¡Esta incorporación de I es fundamental! Así actúan los "neutros": se ponen y sacan a conveniencia.)

La última expresión $(A - kI)X = 0$ es la representación matricial de un SEL homogéneo. ¡Bien, terreno conocido por nosotros! Pero: ¿qué sabemos de SELH?

- ✓ sabemos que siempre tienen solución;
- ✓ sabemos que si el determinante de la matriz $A - kI$ es <u>no nulo</u>, sólo admite la solución nula. Esto es, $|A - kI| \neq 0 \Rightarrow X = 0$;
- ✓ sabemos que si el determinante de la matriz $A - kI$ es <u>nulo</u>, admite infinitas soluciones, además de la nula. Más aún, el conjunto solución es un subespacio vectorial.

Ahora, <u>podemos concluir</u>: dado un cierto escalar k, siempre existe un X tal que $AX = kX$. Ese X es únicamente el nulo o bien forma parte de un subespacio vectorial[20] llamado **autoespacio** o **espacio propio asociado a *k***. Tales X <u>no nulos</u> reciben el nombre de **vectores propios** o **autovectores** y los correspondientes k **valores propios** o **autovalores**.

$$\underset{autovector}{X} \neq 0 \quad / \quad AX = \underset{autovalor}{k}\, X$$

$$\{X \,/\, AX = kX\} = \text{ autoespacio asociado a } k$$

¡Atención nuevamente! Respecto de los autovalores y autovectores, tenemos una <u>definición</u> y también un <u>método para calcularlos</u>. El método consiste en determinar:
Primero los autovalores, ¿cómo? El desarrollo anterior en notación matemática concluye planteando el siguiente SEL homogéneo $(A - kI)X = 0$. Si la solución X no es nula quien debe anularse es el determinante de A-kI, esto es, $\det(A - kI) = 0$. Pero $\det(A - kI) = 0$ es una ecuación algebraica en el valor desconocido k, que se plantea en el álgebra de los números reales.
Segundo: conocido k se resuelve la igualdad matricial $AX = kX$.

[20] Es un subespacio porque se puede demostrar que la suma de dos autovectores es también autovector y que todo múltiplo de un autovector sigue siendo autovector. Esto es, que se satisface la definición de espacio o subespacio vectorial.

Antes de continuar debemos asegurarnos de que usted conoce por qué son válidas todas y cada una de las igualdades de arriba. Entonces:

> 49
> Responda: ¿qué propiedades del álgebra matricial se usaron para llegar de la expresión $AX = kX$ a la última igualdad matricial $(A - kI)X = 0$?
>
> Confronte con la solución nº 49

Ejemplo 41

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ¿Son U y V vectores propios de A? O dicho de otro modo, ¿son U y V vectores propios de la transformación matricial A?

Bien, hagamos cálculos aritméticos basándonos en el siguiente hecho: si son vectores propios existen escalares u y v tal que $AU = uU$ y $AV = vV$. Ahora, busquemos los escalares ...

$AU = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = uU = \begin{bmatrix} u6 \\ u(-5) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -24 = 6u \\ 20 = -5u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 = u \\ -4 = u \end{cases}$. Se muestra que $AU = (-4)U$

$AV = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} = vV = \begin{bmatrix} v3 \\ v(-2) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -9 = 3v \\ 11 = -2v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = v \\ -\dfrac{11}{2} = v \end{cases}$, muestra que no existe un v real tal que $AV = vV$, no existe un v que satisfaga simultáneamente ambas ecuaciones.

<u>Concluimos que:</u> U es autovector de A, no así V.

Finalmente, observe que los cálculos aritméticos matriciales se basaron fuertemente en el concepto de igualdad de dos vectores: dos vectores son iguales si lo son componente a componente. Recuerde: un vector es una matriz columna. Y de ahí en más todo se reduce a operar en la aritmética de los números reales.

Ejemplo 42

Para buscar autovectores y autovalores, retomemos información de ejemplos anteriores ¿le parece?

✓ El ejemplo 30 nos provee la transformación de proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano (x_1, x_2) .

$$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Planteamos $\det(A-kI)=0$:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - k\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}\right) = (-k)(1-k)(1-k) = (-k)(1-k)^2$$

que se anula para k valiendo 0 ó 1.[21]

Si $k=1$, planteamos

$$AX = 1X$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Y esta igualdad matricial se cumple sólo si la tercera componente es nula; la igualdad no plantea restricciones para las otras dos coordenadas x_1, x_2. Luego, todo vector de la forma $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un vector propio de la transformación lineal. x_1, x_2 pueden asumir cualquier valor real.

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ puede pensarse como suma $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ que puede pensarse como producto por escalar $x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Y esta última expresión coincide con $\operatorname{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Luego, X es autovector si $X \in \operatorname{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ y su autovalor asociado es 1.

(<u>Interpretamos</u> este resultado: todo el plano (x_1, x_2) es dejado como está por la transformación proyección. Si usted lo piensa un poquito este resultado es obvio.)

[21] Se trata de aplicar la ley de anulación del producto, también de hallar las raíces de un polinomio en k expresado en términos de sus factores primos. Estos temas se desarrollaron en Matemática nivelación ¿recuerda? Constituyen conocimientos previos de vital importancia. ¿Cómo están anclados sus conocimientos previos?

En particular $\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$, son vectores propios de la transformación dada y lo es todo vector del plano horizontal o plano (x_1, x_2) que pasa por el origen. Ya, al conocer la "acción" de A se intuía que el plano no era "movido" y también, se lo observaba gráficamente.

Si $k=0$ el problema de determinar los autovectores se convierte en determinar el núcleo de la transformación porque debemos resolver $AX = 0X = 0$. El núcleo de la transformación es la recta $\mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Todo $X \in \mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ es un autovector de autovalor nulo. También es un resultado obvio; si miramos el accionar de A el tercer eje es "mandado" al origen.

- ✓ El ejemplo 31 nos provee $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}$, asociada a la transformación de trasquilado horizontal en un factor 3. Todo vector de la forma $\begin{bmatrix}x_1\\0\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ es un vector propio, en particular $\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix}$ lo son. En otra interpretación lo que dice es: todo punto geométrico sobre el primer eje no es "movido" de su lugar al aplicarle la transformación de trasquilado. Si $X \in \mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ es un autovector de autovalor 1.

- ✓ Ejemplo 32: para $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$, la transformación $X \mapsto AX$ se llama transformación de rotación en un ángulo α. Si $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, ¿cuáles serán sus valores propios? ¿y sus vectores propios?

  Se verifica que $\det(A-kI)$ es igual a $k^2-\sqrt{2}\cdot k+1$, expresión polinómica [22] en *k*, no tiene raíces reales, esto es, no se anula en los números reales. Al no haber autovalor(es) no hay autovector(es). Esta rotación no deja vectores (no nulos) en la misma dirección. Esta rotación cambia la dirección de todo vector no nulo.

[22] Expresión polinómica o polinomio en una variable. Consulte la guía Módulo de nivelación matemática, unidad 2. Su cita completa se encuentra en la bibliografía.

50

a) Demuestre paso a paso que $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ es el autoespacio asociado al autovalor 1, que 1 es el único autovalor de la transformación lineal asociada a la matriz del ejemplo 31.

b) Para la matriz del ejemplo 32 verifique que $\det(A-kI)=k^2-\sqrt{2}\cdot k+1$.

c) Analice para qué valores del ángulo α la transformación de rotación tiene autovalores y autovectores. Previamente grafique, observe y saque conclusiones aplicando el sentido común.

Confronte con la solución nº 50

51

a) Compruebe que 1 y 0.92 son los autovalores correspondientes a los autovectores $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ respectivamente, para la transformación matricial $A=\begin{bmatrix}0.95 & 0.03\\0.05 & 0.97\end{bmatrix}$.

b) Calcule los autovalores y los correspondientes autoespacios para la transformación matricial $A=\begin{bmatrix}0.93 & 0.4\\0.07 & 0.6\end{bmatrix}$.

c) Determine en $\mathbb{R}^2$ los autovalores y sus correspondientes autovectores para una expansión de factor 2 en el primer eje [23].

d) Determine en $\mathbb{R}^2$ las bases de los autoespacios de una reflexión respecto del segundo eje.

Confronte con la solución nº 51

¿Cuál es la diferencia entre lo planteado en el ejemplo 41 y lo planteado en el ejemplo 42? En el 41 se pidió demostrar que dos vectores dados (dato) son o no son autovectores. En el ejemplo 42, en cambio, se solicitó construir los autovectores asociados a una transformación matricial (dato). Fíjese, entonces, que se trabajaron dos habilidades intelectuales matemáticas diferentes.

Seguimos con una transformación matricial

$$T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$X \mapsto AX$$

Un resultado importante afirma que: **los autovectores correspondientes a autovalores diferentes constituyen un conjunto LI**. Esto es, en lenguaje matemático: si $k_i \neq k_j$ $\forall i \neq j$ con $AV_i = k_i V_i$, entonces, $\{V_i\}$ es LI.

$$k_i \neq k_j \quad \forall i \neq j \ \wedge \ AV_i = k_i V_i \quad \forall i \Rightarrow \{V_i\} \text{ es LI}$$

[23] El primer eje es el $\text{Gen}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ y el segundo eje es el $\text{Gen}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

¿Lo demuestra usted? Pero le doy una ayudita: suponga k autovectores de autovalores diferentes, plantee que son LD y llegue a una contradicción, esto es, llegue a un resultado que contradiga alguna de las hipótesis. [24]

52
Los autovectores correspondientes a autovalores diferentes constituyen un conjunto LI. Demuéstrelo.
Confronte con la solución nº 52

También se puede demostrar, pero no lo haremos, que si **la suma de todas las dimensiones de los autoespacios es *n*, entonces existen *n* autovectores LI,** y por lo tanto constituyen una base para $\mathbb{R}^n$. Este resultado es muy importante ya que nos permite construir dos matrices de tamaño $n \times n$, muy útiles:

- ✓ la primera, cuya simbología estándar es P y cuyas columnas son cada uno de esos autovectores LI, esto es $P = \begin{bmatrix} V_1 & \cdots & V_n \end{bmatrix}$;
- ✓ la segunda es diagonal, se expresa como D y sus entradas diagonales son los correspondientes autovalores. $D = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$. Dichos autovalores no tienen porque ser todos iguales ¿si?

¿Y por qué son "tan" importantes estas matrices? Se cumple: $A = PDP^{-1}$, esto es, A se expresa como producto entre una matriz diagonal y una invertible. En particular, la importancia radica en que el cálculo de una potencia de A se simplifica notablemente al cumplirse la igualdad matricial pues $A^m = PD^mP^{-1}$, para cualquier m natural.

La expresión anterior permite reemplazar el cálculo de m productos matriciales de A, por el cálculo de m potencias reales y dos productos matriciales.

53
a) Demuestre la igualdad matricial $A = PDP^{-1}$.
b) Demuestre la igualdad matricial $A^m = PD^mP^{-1}$. Le ofrezco esta ayuda: use el concepto de potencia, la propiedad asociativa del producto matricial, el concepto de matriz inversa y la propiedad de la identidad matricial.
Confronte con la solución nº 53

Lo que acaba de realizar en la actividad anterior no es más que "trabajo algebraico" partiendo del concepto de potencia: la base que se multiplica m veces por sí misma. De la observación surge la asociación de matrices invertibles, y la aplicación del concepto de matriz identidad: $IM = M$ cualquiera sea la matriz M.

Tal A que puede expresarse como el producto $A = PDP^{-1}$ se dice **diagonalizable**.

Ejemplo 43

Los autovalores y los autovectores nos permiten analizar la evolución discreta de un sistema dinámico que cambia con el tiempo, por ejemplo, los llamados procesos de

[24] Demostraciones de este estilo son parte del método: **demostrar por contradicción**.

Markov. ¿Los recuerda? De ellos hablamos en la unidad 2; entonces ejemplificaron el uso de las operaciones matriciales producto y potencia entre la matriz estocástica y el vector de población inicial.

Retomemos el ejemplo 22 de la unidad 2: plantea un problema de distribución de población entre ciudad y suburbios, y llega a la conclusión de que $A^k X_0$ determina la distribución de la población después de *k* períodos. *A* es la matriz estocástica, X_0 el vector de población inicial.

La situación planteada puede describirse en términos de transformaciones lineales: se trata de una

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$X \mapsto AX$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{población en}\\ \text{el período k}\end{array}} \mapsto \boxed{\begin{array}{l}\text{población en}\\ \text{el período k+1}\end{array}}$$

En intervalos de tiempo discretos se produce la secuencia de vectores $X_0, X_1, X_2, \cdots, X_k$ que describen la población a lo largo de un período de años. La entrada X_k proporciona información acerca del estado del sistema en el momento de la k-ésima medición que corresponde al k-ésimo estado o período.

Dicha transformación es lineal debido a que:
- ✓ el número de personas que escogen mudarse es proporcional al número de personas en el área;
- ✓ y el efecto acumulado de esas decisiones se obtiene sumando los movimientos.

En este párrafo final hemos interpretado el concepto de linealidad en el contexto del problema. Interpretar es una habilidad intelectual que debe desarrollarse para comprender mejor la relación matemática-realidad.

54
Retome el ejemplo 22 de la unidad 2 y los resultados de la actividad 28 apartado b, luego resuelva estas consignas:

a) Demuestre que el producto $\begin{bmatrix} 0.93 & 0.4 \\ 0.07 & 0.6 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1500 \\ 2100 \end{bmatrix}$ coincide con

$\frac{1}{47}\begin{bmatrix} -1 & 40 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.53^k & 0 \\ 0 & 1^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 40 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1500 \\ 2100 \end{bmatrix}$ y representa la distribución de la población en *k* períodos.

b) Cuando *k* tiende a valores muy grandes la distribución de la población se estabiliza o tiende a $\begin{bmatrix} 3064 \\ 536 \end{bmatrix}$. ¿Corresponde a un vector propio? Justifique su respuesta.

Confronte con la solución nº 54

Bien, bien, ya exhaustos estamos abandonando el interesante mundo de la teoría matemática conocida como álgebra lineal. Como broche de oro redondeamos algunos conceptos y planteamos una actividad final.

Los conceptos a redondear son:

- ✓ Un **espacio vectorial**, en general, es un conjunto no vacío V de objetos, llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones suma y multiplicación por escalares (números reales), sujetas a diez axiomas o reglas.

- ✓ Todo subconjunto de V que cumple esos diez axiomas, se llama **subespacio vectorial de V**. En realidad, alcanza con que satisfaga tres de esos 10 axiomas, ya que el resto se satisface automáticamente.

- ✓ Todo espacio vectorial puede pensarse como subespacio de un espacio mayor y viceversa. En general, todo subespacio vectorial es un espacio vectorial en sí mismo.

- ✓ $\mathbb{R}^n$ para cualquier n natural es un espacio vectorial y sus vectores se representan con n componentes. En las representaciones gráficas, es usual representar $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ como rejillas donde la base está constituida por vectores con una componente igual a uno y las demás cero, que son perpendiculares entre sí (base estándar).

- ✓ Los diez axiomas a que hacemos referencia son equivalentes a las diez propiedades algebraicas de $\mathbb{R}^n$, mencionadas oportunamente. Y los tres axiomas para un subespacio vectorial también corresponden a los tres axiomas dados para un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

- ✓ Todo espacio unidimensional en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se visualiza como una línea que pasa por el origen y se lo identifica con el nombre de **recta**.

- ✓ Todo espacio bidimensional en $\mathbb{R}^3$ se visualiza como un espacio vectorial de dos dimensiones –o subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$– que pasa por el origen, y se lo identifica con el nombre de **plano**. La base habitual para estos planos no la forman los vectores unitarios perpendiculares, sino otros dos vectores LI.

Y la actividad final es la siguiente:

55

Señale las afirmaciones incorrectas, justifique.

a) El subespacio vectorial generado por el vector nulo es LI.

b) El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vive en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

c) Todo $X \in \mathbb{R}^n \,/\, AX = kX$ con $k \neq 0 \in \mathbb{R}$ es un autovector de autovalor k.

d) Cualquier conjunto de dos vectores, de dos componentes cada uno, es base de $\mathbb{R}^2$.

e) Toda transformación matricial, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, es invertible.

f) Toda matriz A de una transformación matricial puede expresarse como producto $A = PDP^{-1}$ con D diagonal.

g) En $\mathbb{R}^2$, el vector cero y toda recta son los únicos subespacios vectoriales.

Confronte con la solución nº 55

Como parte del proceso de aprendizaje es conveniente que aplique una estrategia de síntesis. Por ejemplo, un cuadro sinóptico, un mapa conceptual o un hilo conductor, entre otros. También le propongo que elabore un glosario de la materia.

Y para terminar: usted ha trabajado en esta asignatura poniendo en juego conocimientos previos: ¿los ha identificado? ¿Se ha dado cuenta? A la vez, ha incorporado conocimientos nuevos que utilizará a partir de ahora como base para otros aprendizajes. Lo vemos en detalle ¿me acompaña?

En matemática II continuará trabajando el concepto de función o mapeo, más precisamente considerará las funciones, con el conjunto de los números reales (o espacio vectorial unidimensional) como dominio y codominio, esto es, en notación o simbología matemática:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

En matemática III, las funciones tendrán dominio en $\mathbb{R}^n$ y codominio en el conjunto de los números reales (o espacio unidimensional) con n natural mayor a uno. Esto es:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$X \mapsto f(X)$$

En matemática IV, al estudiar ecuaciones diferenciales, retomará los conceptos de autovalor y autovector.

En cuanto a los saberes previos la presente unidad se cimentó fuertemente en el conjunto de los números reales, sus operaciones y sus propiedades y también, en la factorización de polinomios en sus factores primos y en el cálculo de ceros o raíces de un polinomio, ya que el $\det\left(A - kI\right) = 0$ plantea el cálculo de los ceros de un polinomio en k; tal polinomio recibe el nombre de **polinomio característico de A**. Por su parte las transformaciones lineales de rotación, requirieron del uso de las relaciones trigonométricas y de sus valores en la circunferencia trigonométrica.

Cabe un párrafo especial para destacar otros saberes en los cuales hemos trabajado: el saber hacer. En las actividades planteamos interpretar, demostrar, calcular, construir, entre otras habilidades intelectuales matemáticas de pensamiento.

Usted seguramente advertirá que el álgebra lineal no se agota en estos temas ni en esta forma de presentarlos. Cualquiera de estos cuatro ejes presentados admite profundización. Sus aplicaciones son innumerables y superan en complejidad e importancia a los pocos ejemplos que pudimos mostrar. No obstante, usted ya cuenta con una buena base para indagar y comprender temas relacionados.

Actualmente estos temas se aplican en campos científicos y no científicos y es notable el interés y ahínco con que se los investiga.

Tema para pensar y compartir en el Aula virtual

El conjunto de los números reales pensados como vectores forma el espacio vectorial denotado por $\mathbb{R}$. Esto justifica el nombre de "espacio" que se asigna a los números reales. Demuestre que, efectivamente, se trata de un espacio vectorial. Determine también una base que lo genere así como sus distintos subespacios.

Visión retrospectiva

En este apartado consignamos los conceptos clave de la unidad. Esperamos que usted los haya comprendido e internalizado.

Los números reales tomados ordenadamente en grupos de n, identifican un punto coordenado que puede pensarse como un **vector** de n componentes. Un **espacio vectorial,** o un **subespacio** de éste, es un conjunto de vectores que es cerrado para la suma y la multiplicación por escalares, y satisface propiedades similares a las de los números reales. De hecho, los números reales constituyen un espacio vectorial. Cada espacio vectorial incluye un **conjunto base**, esto es, un conjunto de vectores **independientes** cuya cardinalidad determina la **dimensión de la base** y tal que cualquier otro vector del espacio pueda pensarse como **combinación lineal** de ellos.

Las **transformaciones lineales** logran dar una visión dinámica a los modelos matemáticos que usan SEL y multiplicación de matrices, ya que toda matriz puede pensarse como una función o un mapeo, esto es, como una aplicación que transforma vectores de un espacio vectorial en vectores del mismo espacio vectorial o de otro.

Tal transformación, también llamada **transformación matricial**, tiene la propiedad de "preservar" la suma de vectores y la multiplicación por escalares. Esta propiedad se conoce como **linealidad** y asegura que los resultados coinciden independientemente de que se haga aritmética de vectores antes o después de transformar.

En esa "transformación" importan particularmente algunos conjuntos de vectores: los que son transformados en el vector nulo, la base de los vectores transformados, los que son expandidos o contraídos en un factor. Tales conjuntos son subespacios vectoriales y reciben nombres especiales: **núcleo**, **rango**, **autoespacio** de **autovector** correspondiente a un **autovalor.** Por ser espacios vectoriales es importante determinarles el conjunto base.

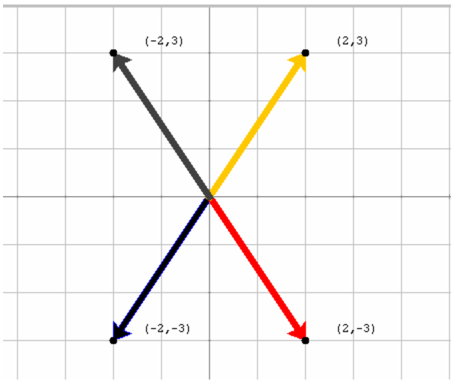
En general, los autovalores permiten construir una matriz diagonal, y los autovectores una matriz invertible. Ambas matrices hacen **diagonalizable** a la matriz de la transformación. Pero no toda matriz de la transformación es diagonalizable.

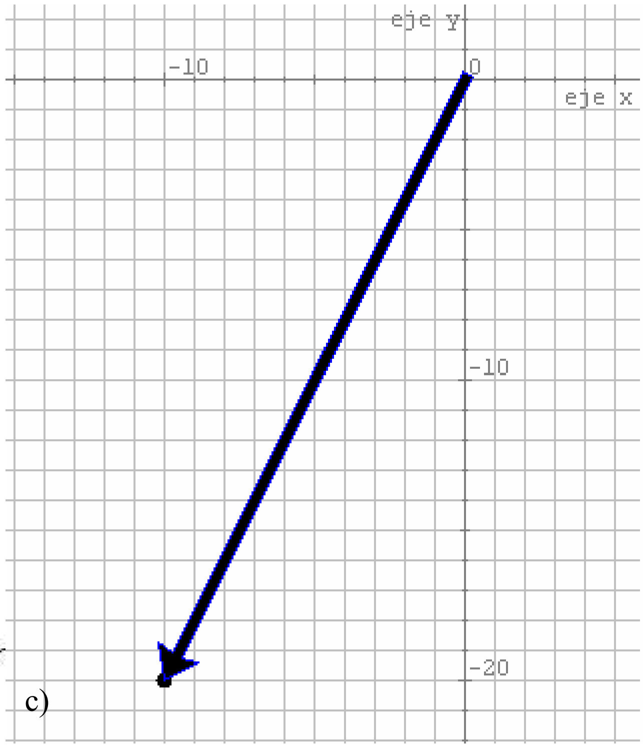
Las transformaciones se pueden aplicar en número finito dando lugar a una **composición de transformaciones**. Y una **transformación es invertible** si la matriz que la representa es invertible, luego, no toda transformación es invertible.

Soluciones a Actividades de proceso.

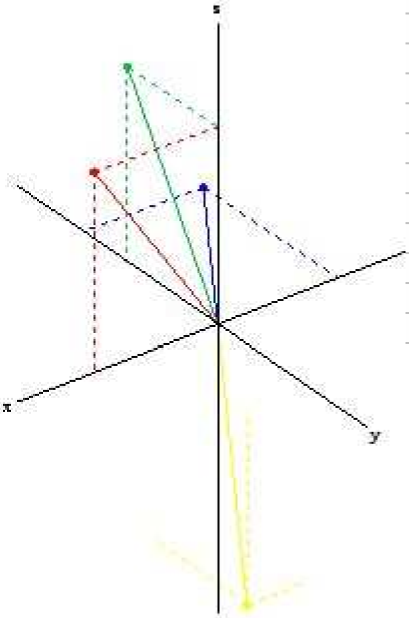
APARTADO 1.

1.

a) 



c)



b)

en rojo (2,0,3); en azul (-2,-3,0), en verde (0,-2,3), en amarillo (1,2,-3)

1a) Los vectores se encuentran, respectivamente, en el tercer, primer, segundo y cuarto cuadrante del sistema de ejes coordenados cartesianos ortogonales.

1c) El vector se encuentra en el cuadrante oeste-sur.

1d)

$$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2500\\2000\\5500\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\text{unidades diarias}\\\text{consumidas por}\\\text{pezA}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\text{unidades diarias}\\\text{consumidas por}\\\text{pezB}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\text{unidades diarias}\\\text{consumidas por}\\\text{pezC}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\text{unidades}\\\text{semanales}\\\text{disponibles}\end{bmatrix}$$

Retomamos el ejemplo 39 de la unidad 1. Podemos ordenar en un vector el número de unidades de cada tipo de alimento para peces, así:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow \text{unidades de cada tipo de alimento 1 que consume pez A.}\\\leftarrow \text{unidades de cada tipo de alimento 2 que consume pez A.}\\\leftarrow \text{unidades de cada tipo de alimento 3 que consume pez A.}\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow \text{unidades de cada tipo de alimento 1 que consume pez B.}\\\leftarrow \text{unidades de cada tipo de alimento 2 que consume pez B.}\\\leftarrow \text{unidades de cada tipo de alimento 3 que consume pez B.}\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow \text{unidades de cada tipo de alimento 1 que consume pez C.}\\\leftarrow \text{unidades de cada tipo de alimento 2 que consume pez C.}\\\leftarrow \text{unidades de cada tipo de alimento 3 que consume pez C.}\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}2500\\2000\\5500\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow \text{unidades totales de alimento 1.}\\\leftarrow \text{unidades totales de alimento 2.}\\\leftarrow \text{unidades totales de alimento 3.}\end{array}$$

Y hasta los podemos rotular, por ejemplo $A_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}2500\\2000\\5500\end{bmatrix}$

1e. todo vector de cinco componentes vive en $\mathbb{R}^5$ y todo vector n componentes vive en $\mathbb{R}^n$.

---

2. Verbalmente pueden expresarse:
La suma es cerrada en $\mathbb{R}^n$. La suma de dos vectores es otro vector.
La multiplicación por escalares es cerrada en $\mathbb{R}^n$. Multiplicar un escalar por un vector da otro vector.
La suma de vectores conmuta. El resultado suma no depende del orden en que se efectúa la suma.
La suma de vectores es asociativa. El resultado suma de muchas vectores no depende de la asociación parcial de vectores que se haga al sumarlos de a pares.
El vector nulo cumple la propiedad de identidad. El vector nulo es el vector que no aporta en una suma.
El vector $(-1)V=-V$ cumple la propiedad de inverso aditivo. Para obtener el vector opuesto a uno dado se multiplica al dado por el escalar -1.
El producto por escalares se distribuye respecto de la suma de vectores. Expandir o contraer el vector suma coincide con sumar las expansiones o contracciones de cada sumando.
El producto por escalares se distribuye respecto de la suma de escalares.
El producto por escalares es asociativo.
El 1 es la identidad respecto al producto por escalares.

---

3. Falta dibujo.
-3U es triplicar el vector U y tomar su opuesto (cambiar el sentido), mantener la dirección.
7U es agrandar siete veces el vector U manteniendo el sentido y la dirección.

(-1/3)U es tomar la tercera parte del vector U y cambiarle el sentido, mantener la dirección.
(5/3)U es tomar 5/3 de U y conservar el sentido, mantener la dirección.
Además dibujar el origen que corresponde al vector 0U.

---

4. Es simple aplicación de conocimientos relaciones a los números reales y sus operaciones y propiedades.

4a)

$$\|-3U\| = |-3| \cdot \|U\| = 3\sqrt{13}$$

$$\|7U\| = |7| \cdot \|U\| = 7\sqrt{13}$$

$$\left\|-\frac{1}{3}U\right\| = \left|-\frac{1}{3}\right| \cdot \|U\| = \frac{1}{3}\sqrt{13}$$

$$\left\|\frac{5}{3}U\right\| = \left|\frac{5}{3}\right| \cdot \|U\| = \frac{5}{3}\sqrt{13}$$

$$\|0U\| = |0| \cdot \|U\| = 0\sqrt{13} = 0$$

4b)

$$\|cU\| = \|(cu_1, \cdots, cu_n)\| = \sqrt{(cu_1)^2 + \cdots + (cu_n)^2} = \sqrt{c^2\left(u_1^2 + \cdots + u_n^2\right)} =$$

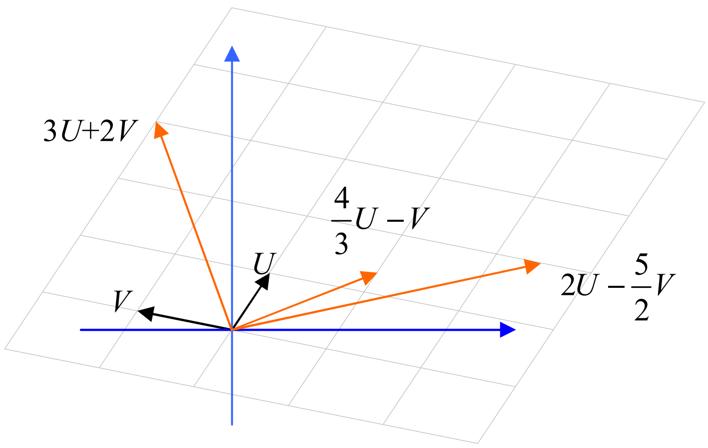
$$\sqrt{c^2}\sqrt{\left(u_1^2 + \cdots + u_n^2\right)} = |c|\|U\|$$

4c)

$\|-U\| = \|(-1)U\| = |-1|\|U\| = 1\|U\| = \|U\|$. Debe recordar (conocimiento previo) que la norma es siempre un número positivo.

5.

5a)



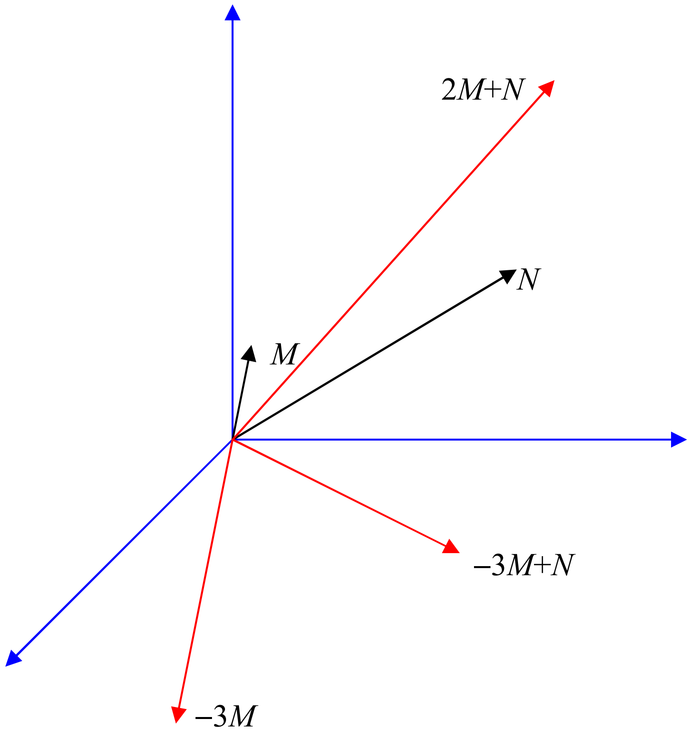
5b) $C = 4U + V$, $D = 3U - 2V$.

5c)

5d) $\left\|-3M\right\| = \left|-3\right| \cdot \left\|M\right\| = 3\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{11}$

$\left\|-M + N\right\| = \sqrt{(-1+3)^2 + (-1+9)^2 + (-3+6)^2} = \sqrt{77}$

5e) Tomemos por ejemplo un vector arbitrario U y tomemos su opuesto –U. El vector



suma de ambos es el vector nulo con longitud cero. Por otro lado, la longitud de U y de su opuesto coinciden, luego la suma de sus longitudes es el doble de la longitud de U. Esto es, la suma de las longitudes de cada vector no coincide con la longitud de la suma de vectores, $2\left\|U\right\| \neq 0$. La única vez que la igualdad se cumple es cuando ambos vectores son el vector nulo.

---

6. Ejemplo 39, apartado 7, unidad 1.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 2500 \\ 2000 \\ 5500 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{vector} \\ \text{porc. de alimento} \\ \text{para pezA} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \text{vector} \\ \text{porc. de alimento} \\ \text{para pezB} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} \text{vector} \\ \text{porc. alimento} \\ \text{para pezC} \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} \text{vector} \\ \text{porc. totales} \\ \text{semanales} \end{bmatrix}.$$

El vector “porciones totales semanales” o “consumo semanal” se piensa como suma reiterada de vectores de “porciones individuales”.

Donde el primer vector contiene por fila el número de unidades de cada tipo de alimento consumido por el pez A; el segundo vector contiene por fila el número de unidades de cada tipo de alimento consumido por el pez B; el tercer vector contiene por fila el número de unidades de cada tipo de alimento consumido por el pez C; y el vector de la extrema derecha es el vector que contiene la disponibilidad (en número de unidades) de cada tipo de alimento. La pregunta es ¿existen valores reales que puedan asignarse a las letras de modo tal que el vector de la derecha se obtenga como suma de múltiplos escalares de los vectores datos? O bien ¿existen valores reales que puedan asignarse a las letras de modo tal que el vector de la derecha se obtenga como "combinación" de los vectores datos?

7.

$$A=\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\|A\|\cos\varphi\\\|A\|sen\varphi\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}B_x\\B_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\|B\|\cos\theta\\\|B\|sen\theta\end{bmatrix}$$

$$A\bullet B=A^TB=\begin{bmatrix}\|A\|\cos\varphi & \|A\|sen\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|B\|\cos\theta\\\|B\|sen\theta\end{bmatrix}=\|A\|\cos\varphi\|B\|\cos\theta+\|A\|sen\varphi\|B\|sen\theta=$$

$$=\|A\|\|B\|\left(\cos\varphi\cos\theta+sen\varphi sen\theta\right)=\|A\|\|B\|\cos\left(\varphi-\theta\right).$$

La fórmula $\cos\left(\varphi-\theta\right)=\cos\varphi\cos\theta+sen\varphi sen\theta$ se demuestra usando relaciones entre ángulos complementarios.
Falta dibujo.

APARTADO 2

8. Parta de la definición de combinación lineal, luego opere y compruebe los cálculos. Más adelante, en esta teoría que desarrollamos, planteamos la respuesta completa.

9.

9a) $Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}=\left\{t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}/\,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix}/\,t\in\mathbb{R}\right\}$. El espacio generado por el vector de componentes 1, 0 no es otra cosa que el eje horizontal del sistema de ejes coordenados. Se trata de todos los múltiplos reales del vector de componentes 1, 0. Es una recta dibujada en el plano.

9b)

$$Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}\right\}=\left\{a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}a-2b\\a-2b\end{bmatrix}/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\left(a-2b\right)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{k\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}/\,k\in\mathbb{R}\right\}=Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

El espacio generado por esos dos vectores es el conjunto de todos los vectores del plano que coinciden en ambas componentes. Y este último conjunto de vectores no es más que el espacio generado por el vector de componentes 1, 1. Se trata de una recta en el plano que pasa por el origen y divide al primer cuadrante del sistema de ejes coordenados por la mitad. Este resultado era de esperar, porque los dos vectores de partida son múltiplos, esto es, el segundo se obtiene del primero duplicándolo y tomando el opuesto: todos sus múltiplos y los múltiplos de su suma viven en la misma recta. Dibuje, así lo puede comprender a través de la visualización.

9c) $Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}\right\}=\left\{a\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}a\\2a-2b\end{bmatrix}/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$. Este espacio generado es una rejilla en el plano.

9d) $Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}=\left\{m\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}/\,m\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}m\\m\\m\end{bmatrix}/\,m\in\mathbb{R}\right\}$. Este espacio es una recta en el espacio tridimensional. Se trata de la recta que pasa por el origen de coordenadas y cada componente de un punto equidista de dicho origen; pertenecen entre otros los vectores $\begin{bmatrix}-2\\-2\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}12\\12\\12\end{bmatrix},\begin{bmatrix}101\\101\\101\end{bmatrix}$.

9e) $Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}=\left\{u\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}/\,u,v\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}u+v\\u-v\\u\end{bmatrix}/\,u,v\in\mathbb{R}\right\}$. Este espacio generado es una rejilla. Así pertenecen a este espacio los vectores $\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}101\\99\\100\end{bmatrix}$ entre otros.

---

10. Las bases que se obtienen por observación directa de los conjuntos generados son:

10a) Los vectores $\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ constituyen una posible base del espacio generado. Toda base de dicho espacio siempre estará compuesta por dos vectores como mínimo.

10b) Los vectores $\begin{bmatrix}9\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$ constituyen una posible base del espacio generado. Toda base de dicho espacio siempre estará compuesta por dos vectores como mínimo.

10c) El vector $\begin{bmatrix}-2\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ constituye una posible base del espacio

$H=\left\{\begin{bmatrix}-2t\\0\\2^{-1}t\end{bmatrix}/\,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}-2t\\0t\\\frac{1}{2}t\end{bmatrix}/\,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{bmatrix}-2\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}/\,t\in\mathbb{R}\right\}=Gen\left\{\begin{bmatrix}-2\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right\}$. Toda base de dicho espacio siempre estará compuesta por un vector como mínimo. Note que como paso intermedio para determinar la base fue necesario completar coeficientes.

---

11. Para hallar la primera base procedemos paso a paso así, escribiendo las sucesivas identidades que nos permiten dejar en descubierto los vectores base:

$$\left\{\begin{bmatrix} m-3n \\ n-m \\ m \\ n \end{bmatrix} / m,n\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 1m-3n \\ 1m-1n \\ 1m+0n \\ 0m+1n \end{bmatrix} / m,n\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 1m \\ 1m \\ 1m \\ 0m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3n \\ -1n \\ 0n \\ 1n \end{bmatrix} / m,n\in\mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{ m\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} / m,n\in\mathbb{R}\right\} = Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Para obtener esta base $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ fue necesario que previamente ordenemos y completemos cada componente. Otra base, que se obtiene duplicando el primer vector es $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, y otra que se obtiene triplicando el opuesto del segundo vector y agregando otro vector combinación lineal de los dos primeros es $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$.

Toda base contiene como mínimo dos vectores.

12.

12a. 12b. 12c. Sí. Todos los espacios generados coinciden, esto es están compuestos por los mismos vectores.

Para comenzar observamos, analizamos, escudriñados los conjuntos dados. De esa observación afirmamos que los vectores que siguen a los dos primeros son combinación lineal de ellos. Determinamos esa combinación: ¿es suma de ellos? ¿Suma de algunos de sus múltiplos? ¿De qué múltiplos?

A los fines de simplificar la notación llamaremos U al vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y V al vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Luego:

12a) $Gen\{U,V\}$ coincide con $Gen\{U,V,U-V\}$ porque

$$Gen\{U,V,U-V\} = \{aU+bV+c(U-V) / a,b,c\in\mathbb{R}\} = \{aU+bV+cU-cV / a,b,c\in\mathbb{R}\} =$$

$$= \{(a+c)U+(b-c)V / a,b,c\in\mathbb{R}\} = \{kU+tV / k,t\in\mathbb{R}\} = Gen\{U,V\}$$

Notemos que es fundamental comprender en su totalidad, el concepto de espacio generado: es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores dados (base o no); es el conjunto de los vectores quue se obtienen como suma de múltiplos reales de los vectores dados. *Es necesario tambien, comprender cabalmente que si a, b, c designan números reales arbitrarios, las sumas a+c, b-c tambien son reales* *arbitrarios y por lo tanto podemos simplificar (en el sentido de hacer más sencilla, simple) la notación y llamarlos simplemente k y t respectivamente. Es fundamental comprender el valor de la notación "simplificada" (en el sentido de hacer más sencilla, simple), el valor de designar o rotular números arbitrarios. Este hecho de hacer más sencilla, simple, simplificada la notación, la designación de hechos, cosas, relaciones, es propia de la ciencia matemática, es uno de sus aspectos más valiosos y que hacen a su escencia.*

12b) $Gen\{U,V\}$ coincide con $Gen\{U,V,-U+V\}$ porque

$$Gen\{U,V,-U+V\} = \{aU+bV+c(-U+V)\,/\,a,b,c\in\mathbb{R}\} = \{aU+bV-cU+cV\,/\,a,b,c\in\mathbb{R}\} =$$

$$= \{(a-c)U+(b+c)V\,/\,a,b,c\in\mathbb{R}\} = \{kU+tV\,/\,k,t\in\mathbb{R}\} = Gen\{U,V\}$$

En este apartado se designa arbitrariamente como k a la suma real a-c, y como t a la suma real b+c.

12c) $Gen\{U,V\}$ coincide con $Gen\{U,V,U+V,2U+V\}$ porque

$$Gen\{U,V,U+V,2U+V\} = \{aU+bV+c(U+V)+d(2U+V)\,/\,a,b,c,d\in\mathbb{R}\} =$$

$$= \{aU+bV+cU+cV+2dU+dV\,/\,a,b,c,d\in\mathbb{R}\} =$$

$$= \{(a+c+2d)U+(b+c+d)V\,/\,a,b,c,d\in\mathbb{R}\} = \{kU+tV\,/\,k,t\in\mathbb{R}\} = Gen\{U,V\}$$

Aquí se designó arbitrariamente como k a la suma real a+c+2d, y como t a la suma b+c+d.

12d) ¿Cómo procedemos para demostrarlo? Procedemos así:

Escribimos en simbología matemática la identidad de W, esto es,

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} s+3t \\ s-t \\ 2s-t \\ 4t \end{bmatrix} s,t\in\mathbb{R} \right\}.$$

Observamos que cada componente de un vector de W incluye dos letras. Completamos y ordenamos cada componente con la intención de separalos en dos vectores, esto es, pensarlo como suma de dos vectores:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} s+3t \\ s-t \\ 2s-t \\ 4t \end{bmatrix} s,t\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1s+3t \\ 1s-1t \\ 2s-1t \\ 0s+4t \end{bmatrix} s,t\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1s \\ 1s \\ 2s \\ 0s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3t \\ 1t \\ -1t \\ 4t \end{bmatrix} s,t\in\mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} s,t\in\mathbb{R} \right\} = Gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

Ahora, recién ahora, observamos los datos y los comparamos, intentando relacionarlos con los vectores generadores que acabamos de determinar: V coincide con el segundo generador y U es el doble del primer generador. Concluimos que: tanto U como V son combinación lineal de los generadores, más aún, determinados que valen las igualdades

$U=2\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\4\end{bmatrix}$. O lo que es lo mismo $\frac{1}{2}U=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}$. Luego:

$$Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\4\end{bmatrix}\right\}=Gen\left\{\frac{1}{2}U,V\right\}=Gen\{U,V\}.$$

Respuesta: U y V son, pueden pensarse como, generadores de W.

12e) Sí. Rotulemos como U un vector arbitrario. Por definición se tiene que $Gen(2U)=\{m(2U)/m\in\mathbb{R}\}=\{(2m)U/m\in\mathbb{R}\}=\{kU/k\in\mathbb{R}\}=GenU$.

Una demostración similar justifica la última igualdad del apartado anterior:

$$Gen\left(\frac{1}{2}U,V\right)=\left\{m\left(\frac{1}{2}U\right)+nV/m,n\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left(\frac{1}{2}m\right)U+nV/m,n\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\{kU+nV/k,n\in\mathbb{R}\}=Gen\{U,V\}$$

Es fundamental que observe cómo se aplican las distintas propiedades algebraicas de la operatotria vectorial. Esas propiedades que se mencionaron en el apartado 1 de la unidad 4 y cuya verbalización se solicita en la AP 2.

---

13. Sí. Se obtiene tomado dos barras de cada tipo. Esta solución se determine resolviendo el SEL:

$$a\begin{bmatrix}20\\30\\40\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}30\\40\\50\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}40\\50\\90\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}180\\240\\360\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}20&30&40\\30&40&50\\40&50&90\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}180\\240\\360\end{bmatrix}$$

$$10\begin{bmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=10\begin{bmatrix}18\\24\\36\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\24\\36\end{bmatrix}$$

Note que, para simplificar los cálculos intermedios pensamos la matriz de coeficientes y la de términos independientes como multiplicación por el escalar 10. Esto resultó al observar que cada componente de la matriz tiene al factor 10.

Finalmente vale: $2\begin{bmatrix}20\\30\\40\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}30\\40\\50\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}40\\50\\90\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}180\\240\\360\end{bmatrix}$.

---

14. En términos de vectores se expresan:

Ejemplo 36, unidad 1. Plantea si un nuevo vector aleación $\begin{bmatrix} 2.4tn \\ 12.4tn \\ 5.2tn \end{bmatrix}$ es combinación lineal de los vectores aleación 1, aleación 2 y aleación 3. Esto es, si la nueva aleación está en el espacio generado por las tres aleaciones existentes.

Ejemplo 7, unidad 1. Plantea si un nuevo vector crema es combinación lineal de los vectores crema 1, crema 2, crema 3. Es decir, si está en el espacio generado por crema 1, crema 2, crema 3. En otras palabras: si la nueva crema puede obtenerse "usando" partes de las ya existentes.

O también vale decir:

Con información del ejemplo 36 de la unidad 1, construimos los vectores que contienen información de constitución de cada aleación base y de la nueva aleación:

$$\begin{array}{cccc} Al1 & Al2 & Al3 & A1\text{nueva} \\ \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.80 \\ 0.15 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.65 \\ 0.25 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.55 \\ 0.30 \end{bmatrix} & 20\begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.62 \\ 0.26 \end{bmatrix} \end{array}$$

La pregunta sería: ¿puede pensarse la nueva aleación como combinación lineal de las aleaciones base? ¿ $Al\text{nueva} \in \text{Gen}\{Al1, Al2, Al3\}$?

En el caso del **ejemplo 37 de la unidad 1**, la pregunta es: ¿puede pensarse la nueva fórmula como combinación lineal de las fórmulas báse? ¿ $N \in \text{Gen}\{C_1, C_2, C_3\}$? con

$$\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & N \\ \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.90 \\ 0.05 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.75 \\ 0.15 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.65 \\ 0.20 \end{bmatrix} & 25\begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.62 \\ 0.26 \end{bmatrix} \end{array}$$

---

15. En $\mathbb{R}^2$:

- ✓ El $\text{Gen}\{V\} = \{cV \text{ con } c \text{ escalar arbitrario}\}$. Si V es nulo, el subespacio es el nulo: es un punto; si es no nulo se visualiza como una recta que pasa por el origen.
- ✓ El $\text{Gen}\{U,V\} = \{uU + vV \text{ con } u \text{ y } v \text{ escalares arbitrarios}\}$. Si ambos vectores no son nulos ni uno múltiplo del otro, el subespacio generado es todo $\mathbb{R}^2$.

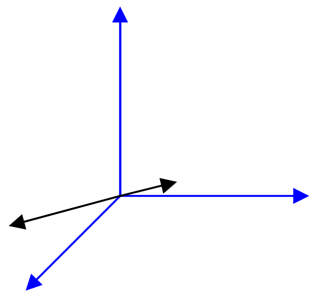
---

16. Se tiene: $V_2 = (-2)V_1$ con el vector nulo en el espacio generado por ellos, esto es, $c_1V_1 + c_2V_2 = 0$, luego la igualdad $c_1 = -kc_2$ da diferentes relaciones de dependencia. En particular:

$c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 2 \wedge 2V_1 + V_2 = 0$

$c_2 = -3 \Rightarrow c_1 = -6 \wedge (-6)V_1 + (-3)V_2 = 0$

Efectivamente: $2\begin{bmatrix}-2\\ 1/2\\ -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\ -1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ y también



$$(-6)\begin{bmatrix}-2\\ 1/2\\ -1\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}4\\ -1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Otra mirada: $Gen\{V_1\}$ coincide con $Gen\{V_2\}$ porque

$$Gen\{V_2\}=Gen\{(-2)V_1\}=\{t((-2)V)_1 \,/\, t\in\mathbb{R}\}=\{(-2t)V_1 \,/\, t\in\mathbb{R}\}=\{kV_1 \,/\, k\in\mathbb{R}\}=Gen\{V_1\}$$

Se trata del espacio generado por un vector, se trata de una recta que pasa por el origen.

---

17. El $\{V_1,\cdots,0,\cdots,V_p\}$ contiene al vector nulo, luego cada vez que se toma un escalar c no nulo, se obtiene el vector cero como combinación lineal de ellos:

$$0V_1+\cdots+c0+\cdots 0V_p=0$$

Conclusión: el $\{V_1,\cdots,0,\cdots,V_p\}$ es LD porque existen infinitas maneras de obtener combinaciones lineales nulas con no todos los escalares nulos.

18.

18a) Al tratarse de tres vectores de dos componentes cada uno, serán LD en $\mathbb{R}^2$.

18b) Al tratarse de cinco vectores de tres componentes cada uno, serán LD en $\mathbb{R}^3$.

19.

19a) Los tres vectores se encuentran en la misma recta, esto es, tienen la misma dirección y además dos de ellos tiene el mismo sentido. Los tres vectores se encuentran en $\mathbb{R}^2$. El segundo vector es el opuesto del primero y el tercer vector es la mitad del primero.

$$\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\cdot 1\\ -1\cdot 1\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\cdot 1\\ \frac{1}{2}\cdot 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

19b) Los tres vectores se encuentran en la misma recta, esto es, tienen la misma dirección y además dos de ellos tiene el mismo sentido. Los tres vectores se encuentran en $\mathbb{R}^3$. El segundo vector es el opuesto del primero y el tercero es el triple del primero. Vale:

$$\begin{bmatrix}-1\\ -7\\ -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)\cdot 1\\ (-1)\cdot 7\\ (-1)\cdot 6\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1\\ 7\\ 6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\ 21\\ 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 1\\ 3\cdot 7\\ 3\cdot 6\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\ 7\\ 6\end{bmatrix}$$

20.

20a) Son LD porque su número supera el número de componentes de un vector. Efectivamente: planteamos: $c_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ que se transforma en un SELH en las variables c_1,c_2,c_3, cuya matriz aumentada es equivalente por renglones a la matriz aumentada $\left.\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & \frac{7}{11} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{21}{11} & 0\end{array}\right.$.

La solución establece las siguientes relaciones de dependencia entre los escalares ("variables" del SELH): $c_1=-\frac{7}{11}c_3, c_2=\frac{21}{11}c_3$ y c_3 escalar arbitrario. Cada vez que, dado un valor a c_3 se cumple esa relación de dependencia, se tendrá una combinación lineal no nula de los vectores dados. En particular $-\frac{7}{11}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\frac{21}{11}\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

20b) El vector nulo se encuentra entre ellos, luego son LD.

20c) $V_3\in Gen\{V_1,V_2\}$ si $V_3=c_1V_1+c_2V_2$ para ciertos escalares c_1,c_2.

$$c_1V_1+c_2V_2=\begin{bmatrix}V_1 & V_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 6\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\h\end{bmatrix}$$

queda planteado un SEL en las variables c_1,c_2. La matriz aumentada es equivalente por renglones a la matriz aumentada $\left.\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{5}{6}\\ 0 & 1 & \frac{-1}{12}\\ 0 & 0 & 2+h\end{array}\right.$ y así, el SEL original es equivalente al SEL $\begin{cases}c_1=\frac{5}{6}\\ c_2=-\frac{1}{12}\\ 0=2+h\end{cases}$ que tiene solución sólo si h vale –2.

<u>Conclusión:</u> si $h=-2$, resulta $c_2=-\frac{1}{12}$ y $c_1=\frac{5}{6}$. Finalmente la relación de dependencia es: $\frac{5}{6}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}+\left(-\frac{1}{12}\right)\begin{bmatrix}-2\\6\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$.

Si h asume cualquier valor real diferente de -2, el SEL planteado no tiene solución. Esto es, no existen escalares c_1, c_2 tal que el vector V_3 se exprese como suma de múltiplos de los vectores V_1, V_2.

20d) Planteamos: $c_1\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\-5\\7\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}2\\0\\h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0&2\\1&-5&0\\-2&7&h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, SELH en tres variables con determinante de la matriz de coeficientes:

$\begin{vmatrix}0&0&2\\1&-5&0\\-2&7&h\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1&-5\\-2&7\end{vmatrix}=-3$, valor que no depende de h.

<u>Conclusión</u>: cualquiera sea el valor de h, como el determinante es no nulo, los escalares sólo admiten el valor nulo, $c_1=c_2=c_3=0$ y el $\{V_1, V_2, V_3\}$ es LI.

20e) Planteamos: $c_1\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2\\6\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}*\\*\\*\end{bmatrix}$. En particular, al asignar los valores 1 y –1 a los escalares, obtenemos el vector: $\begin{bmatrix}*\\*\\*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\\-6\end{bmatrix}$. Luego, el conjunto resulta LD.

20f) Al ser cuatro vectores de tres componentes cada uno, puedo asignarle cualquier valor. En particular puedo tomar el vector nulo, o tomar un múltiplo de alguno de los vectores dados.

20g) En particular lo son: $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ y $\left\{\begin{bmatrix}c\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \text{ con } c \text{ escalar arbitrario}\right\}$.

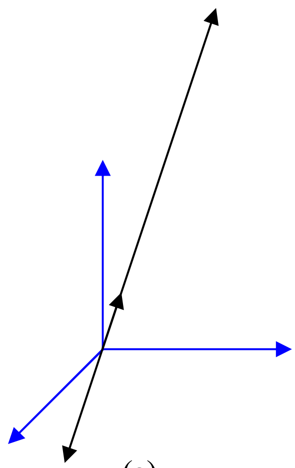
20h) Falta dibujo. Son LI porque <u>no</u> se encuentran en la misma recta (no tienen la misma dirección) en $\mathbb{R}^2$. En la gráfica o imagen visual notamos que el primer vector se encuentra en el primer cuadrante de nuestro sistema de ejes coordenados ortogonales, y el segundo vector se encuentra en el cuarto cuadrante.

20i) Falta dibujo. Son LD porque se encuentran en la misma recta (tienen la misma dirección y distinta medida) en $\mathbb{R}^3$. Trabajando con las componentes del segundo vector notamos la relación que existe entre ambos: $\begin{bmatrix}4\\8\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\bullet 1\\4\bullet 2\\4\bullet 3\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

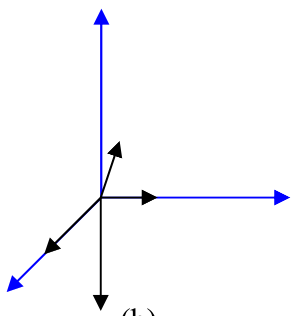
21.

21a) El vector $\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$ es LI, es base del subespacio, y la dimensión es uno, ya que los otros vectores son múltiplos. Efectivamente: $\begin{bmatrix}0\\6\\18\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\\-6\end{bmatrix}=(-2)\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$.

21b) Cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$ son LD. Analicemos cuál es el número máximo de vectores LI.



(a)



(b)

Tomemos $\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$ es obviamente LI.

Agreguemos un segundo vector $\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$. Son LI porque …(complete).

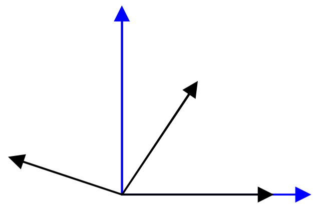
Agregamos un tercer vector $\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-6\end{bmatrix}$. Son LD porque … (complete).

Descartamos el tercer vector y agregamos el cuarto vector $\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}$. Son LI porque…(complete).

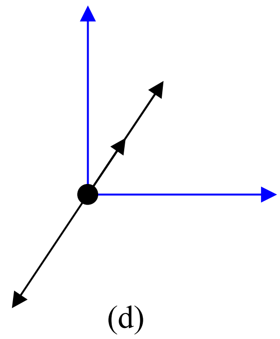
El número máximo de vectores LI es tres. La base tiene dimensión tres y es el conjunto formado por los vectores $\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}$.

21c) Tres vectores en $\mathbb{R}^2$ son LD. En particular: $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$ son LI (demuéstrelo) y forman base; la dimensión es dos.

21d) Cuatro vectores en $\mathbb{R}^2$ son LD. Además, observamos que los vectores no nulos son múltiplos. Luego, para formar una base descartamos el vector nulo y nos quedamos con cualquiera de ellos. En particular: $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ es base. La dimensión es uno.



(c)



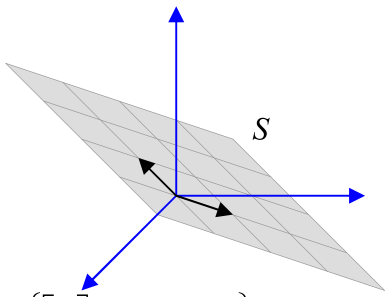
(d)

---

22. Mirando la imagen resulta que los vectores V_2, V_3, V_4 están en la misma recta; V_1 es suma de múltiplos de los vectores V_2, V_5. Luego V_2, V_5 son base, o bien V_3, V_5, o bien V_4, V_5 entre otras posibles opciones.

23.

23a) $2x - y - z = 0$ es una EL en las variables *x*, *y*, *z*. En la unidad 1 analizamos su representación gráfica ¿recuerda?: $S = \{(x,y,z) / 2x - y - z = 0\}$ y entonces, calculábamos los valores de tres puntos coordenados para graficar. Ahora, planteamos una alternativa: trabajamos algebraicamente sobre la expresión de *S*, resultando:

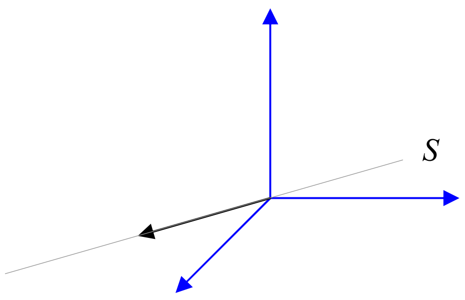


$$S = \{(x,y,z)/2x-y-z=0\} = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} / 2x-y-z=0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} / 2x-z=y \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix}x\\2x-z\\z\end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix}1x+0z\\2x-1z\\0x+1z\end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix}1x\\2x\\0x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0z\\-1z\\1z\end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ x\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} / x,z \in \mathbb{R} \right\} = Gen\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} \right\}$$

Conclusión: S es un plano generado por los vectores $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ y su dimensión es dos.



23b) Planteamos de manera similar, y lo importante es descubrir la idea central de ese hecho: trabajar algebraicamente la fórmula para S buscando una expresión como combinación lineal de vectores. Vamos, entonces:

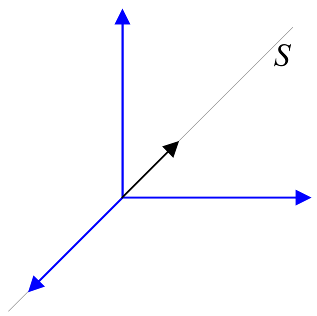
$$S=\{(x,y,z)/x=3t,y=-2t,z=t \ \wedge \ t\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}3t\\-2t\\t\end{bmatrix}/t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}/t\in\mathbb{R}\right\}$$

Obviamente es un subespacio generado por un vector: se trata entonces de una recta en $\mathbb{R}^3$.

24.

24a) SELH en tres variables $\begin{cases}1x+2y+(-1)z=0\\2x+(-1)y+3z=0\end{cases}$, cuya forma escalonada en los renglones reducida equivalente a la matriz aumentada es: $\left.\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\end{array}\right.$, luego $x=-z, y=z$, sin restricciones para la variable z.

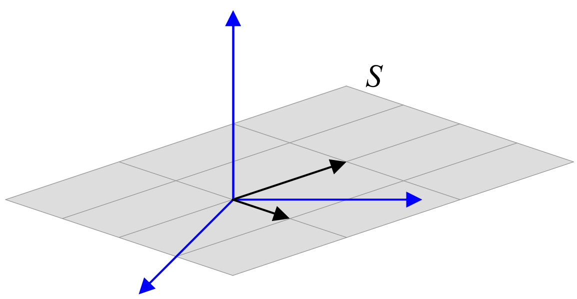


Conclusión:

$$S=\left\{\begin{bmatrix}-z\\z\\z\end{bmatrix}/z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{z\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}/z\in\mathbb{R}\right\}=Gen\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

y dimensión de S, uno. Geométriamente se trata de una recta que pasa por el origen de coordenadas y se trata de la intersección (puntos en común) de dos planos (que son las soluciones de las respectivas EL)

24b) SELH en tres variables $\begin{cases}2x+(-1)y+3z=0\\4x+(-2)y+6z=0\\(-6)x+3y+(-9)z=0\end{cases}$, cuya forma escalonada en los renglones reducida, equivalente a la matriz aumentada del sistema, es: $\left.\begin{array}{ccc|c}1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right.$; luego $x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=0$ establece restricciones –únicamente– para el escalar x. Los escalares y, z carecen de restricciones.



$$x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}u-\frac{3}{2}t & \\ y=u & u\in\mathbb{R} \\ z=t & t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

<u>Conclusión</u>: $S=Gen\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ (verifíquelo), y dimensión de *S*, dos.

25.

25a)

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\-3\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\-7\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+(-7)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix}-1\\0\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};$$

25b) $-5\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{7}{5}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\\frac{7}{5}\\1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$

---

26. No hay solución para esta actividad ya que es parte de "su" proceso de aprendizaje.

APARTADO 3.

27.

✓ Respuesta al primer interrogante: ¿Qué se busca? Se busca un vector desconocido X de componentes x_1,x_2,x_3,x_4 que al ser multiplicado por A de el vector de unos en $\mathbb{R}^2$ (datos). Esto es,

$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Así planteado resulta ser un SEL en cuatro variables. Trabajando con la matriz aumentada y el método de Gauss-Jordan (herramienta de la unidad 1) se llega a la matriz aumentada:

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{21}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

con x_3 y x_4 variables libres. La relación de dependencia entre las variables –escalares– viene dada por: $\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 \\ x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{21}{4}x_4 \end{cases}$. Cualquier vector de la forma

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{21}{4}x_4 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -\frac{21}{4} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ con x_3 y x_4 escalares cualesquiera será transformado en el vector de unos del plano $\mathbb{R}^2$. (Observe que este conjunto de vectores no es un subespacio; en particular el vector nulo no se encuentra entre esos vectores.)

✓ Respuesta al segundo interrogante:

Equivale a preguntar: ¿el SEL dado por la ecuación matricial $AX = B$ tiene solución cualquiera sea el vector de términos independientes? Para responder, observamos la forma escalonada en los renglones reducida de la matriz aumentada correspondiente y de ella resulta: sí, porque son más variables que ecuaciones y no puede darse 0=1 en el último renglón.

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & b_2 \\ \hline 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{b_1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{b_2}{2} \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{21}{4} & \frac{b_1}{2} + \frac{3b_2}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{b_2}{2} \end{array}$$

✓ Respuesta al tercer interrogante:

Podemos formularlo así: ¿Cuál es conjunto solución de $AX=0$? Nuevamente, observando su forma escalonada en los renglones reducida obtenemos la información: $a\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-\frac{21}{4}\\ -\frac{5}{2}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ es transformado en el vector nulo al aplicarse A. En detalle sería:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 5 & 0\\ \hline 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0\\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{21}{4} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 1x_1+0x_2-\frac{1}{4}x_3+\frac{21}{4}x_4=0\\ 0x_1+1x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{5}{2}x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{4}x_3-\frac{21}{4}x_4\\ x_2=\frac{1}{2}x_3-\frac{5}{2}x_4 \end{cases}$$

Conjunto solución

$$S=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{4}x_3-\frac{21}{4}x_4\\ \frac{1}{2}x_3-\frac{5}{2}x_4\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}\right\}=\left\{a\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-\frac{21}{4}\\ -\frac{5}{2}\\ 0\\ 1\end{bmatrix} / \, a,b\in\mathbb{R}\right\}=\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\frac{21}{4}\\ -\frac{5}{2}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

Todo un subespacio generado por dos vectores es llevado al origen de coordenadas o vector nulo de $\mathbb{R}^2$.

---

28. Se tiene:

$$\begin{gathered}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\ X\mapsto AX\\ \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ 0\end{bmatrix}\end{gathered}$$

Si remplazamos las respectivas coordenadas con la información disponible resulta:

$$\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}$$

Como era de esperar el último vector dato no se altera al aplicarle la transformación porque dicho vector se encuentra “viviendo” en el plano.

29.

29 a) A define una proyección sobre el el **plano** (x_1, x_3) en $\mathbb{R}^3$.

$\begin{bmatrix}x_1\\0\\x_3\end{bmatrix}$ es la forma proyectada de un vector genérico $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ porque $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\0\\x_3\end{bmatrix}$.

$\left\{\begin{bmatrix}x_1\\0\\x_3\end{bmatrix} / x_1, x_3 \in\mathbb{R}\right\}=\left\{x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} / x_1, x_3 \in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Es el conjunto de vectores cuya segunda componente es nula. Es un plano que pasa por el origen porque está generado por dos vectores.

Falta gráfico.

29 b) A define una proyección sobre el el **plano** (x_2, x_3) en $\mathbb{R}^3$.

$\begin{bmatrix}0\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ es la forma proyectada de un vector genérico $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ porque $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

$\left\{\begin{bmatrix}0\\x_2\\x_3\end{bmatrix} / x_2, x_3 \in\mathbb{R}\right\}=\left\{x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} / x_2, x_3 \in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Es el conjunto de vectores cuya primera componente es nula. Es un plano que pasa por el origen porque está generado por dos vectores.

Falta gráfico.

29 c) A define una proyección sobre el el **primer eje** en $\mathbb{R}^3$.

$\begin{bmatrix}x_1\\0\\0\end{bmatrix}$ es la forma proyectada de un vector genérico $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ porque $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\0\\0\end{bmatrix}$.

$\left\{\begin{bmatrix}x_1\\0\\0\end{bmatrix} / x_1 \in\mathbb{R}\right\}=\left\{x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} / x_1 \in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$. Es el conjunto de vectores cuyas dos últimas componentes son nulas. Es una recta que pasa por el origen porque está generado por un vector. Falta gráfico.

---

30. Se tiene la proyección:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

30a) Sea la recta $Gen\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} = \left\{ t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\}$. La proyección de un vector genérico es

$$\begin{bmatrix} -2t \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así, el tranformado pertenece a la recta

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\} = Gen\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Finalmente decimos que la recta $Gen\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ es transformada en la recta $Gen\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Hacer dibujo.

30b) Sea la recta $Gen\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{ t\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ 2t \\ 0 \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\}$. La proyección de un vector genérico es

$$\begin{bmatrix} -2t \\ 2t \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2t \\ 2t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así, el tranformado pertenece a la misma recta

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ 2t \\ 0 \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\} = Gen\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Finalmente decimos que la recta $Gen\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ es transformada en si misma. Hacer dibujo.

30c) Sea el plano

$$Gen\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{ a\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} / a,b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2a+2b \\ -2b \\ 2a \end{bmatrix} / a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

La proyección de un vector genérico es

$$\begin{bmatrix} -2a+2b \\ -2b \\ 2a \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2a+2b \\ -2b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así el transformado pertenece al plano

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2a+2b \\ -2b \\ 0 \end{bmatrix} / \, a,b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} / \, a,b \in \mathbb{R} \right\} = Gen\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

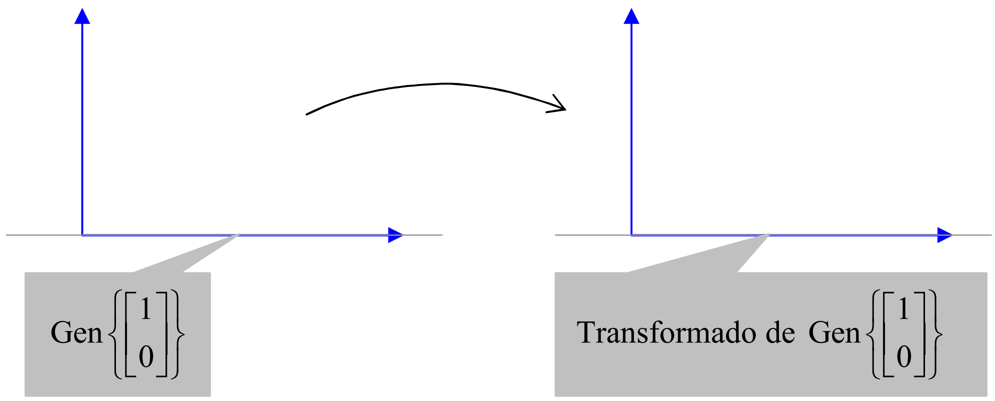
Hacer dibujo.

---

31. $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, se trata de un trasquilado o corte en un factor $\frac{1}{4}$ a lo largo del primer eje. Es habitual llamar al primer eje "eje *x*" o "eje x_1".

31a) $\text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; /c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \; /c \in \mathbb{R} \right\}$, luego: $A\begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$, esto es, el primer eje al "transformarse" queda igual porque cada vector queda igual..

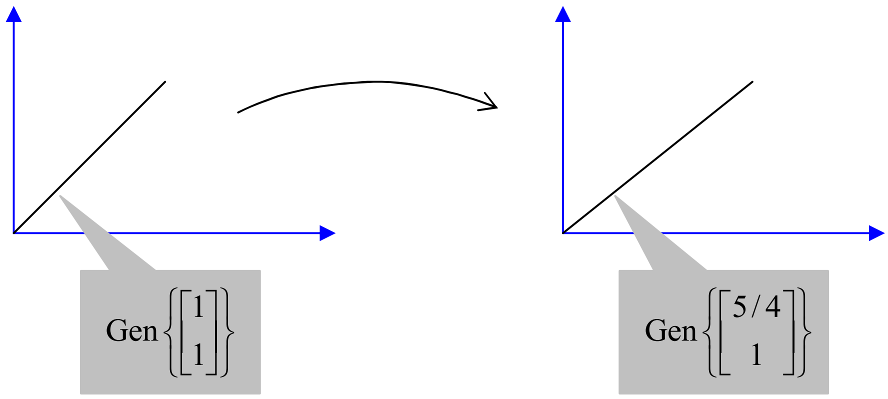
31b) $\text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; / \, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} \; / \, c \in \mathbb{R} \right\}$, luego:



$A\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}c \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$, esto es, la recta generada por el vector de unos es "transformada" en la recta generada por el vector $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$. Esto es,

$$\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{5}{4}c \\ c \end{bmatrix}$$

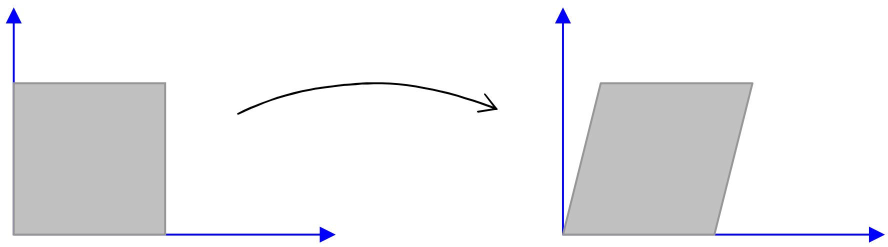
$$Gen\left\{\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}\right\} \mapsto Gen\left\{\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$



31c) Al aplicar la transformación a cada vértice, resulta:

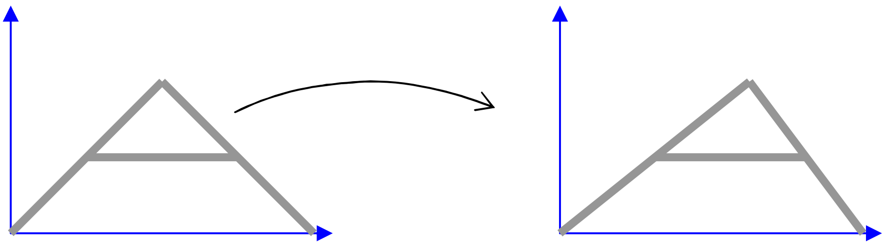
$$A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; A\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}; A\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}; A\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ya sabemos que el eje horizontal queda tal cual; el eje vertical es transformado en la



recta generada por el vector $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$, pues: $A\begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$. (El segundo eje o eje vertical es $Gen\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} / c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} / c \in \mathbb{R}\right\}$.)

31d) Al aplicar la transformación a cada vértice, resulta:



$$A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix};A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4}\\1\end{bmatrix};A\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\2\end{bmatrix};A\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{4}\\1\end{bmatrix};A\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$$

$$X\mapsto\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+\frac{1}{4}y\\y\end{bmatrix}$$

Nos informa que se "desplaza" horizontalmente (o sea en el primer eje o en la coordenada x) en 1/4 unidades de la correspondiente coordenada y.

31e) Conjunto de salida y el de llegada es $\mathbb{R}^2$. El vector transformado es $\begin{bmatrix}x+\frac{1}{4}y\\y\end{bmatrix}$ pues $\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+\frac{1}{4}y\\y\end{bmatrix}$. Observe que $\begin{bmatrix}x+\frac{1}{4}y\\y\end{bmatrix}$ pertenece al $Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\1\end{bmatrix}\right\}$ que es el espacio formado por las columnas de A.

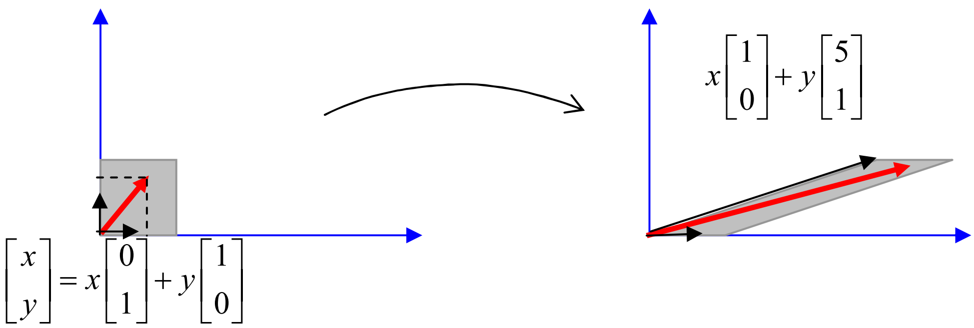
Bien, ésta es la idea subyacente en los tipos de letra itálica, por ejemplo.

32.

32a) $A=\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}$, Se trata de la transformación

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\&X\mapsto AX\\&\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x+5y\\y\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Luego el transformado de un vector arbitrario del espacio de salida $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix}x+5y\\y\end{bmatrix}$.



Visualicemos:

Por lo que hemos analizado, estamos en condiciones de afirmar que, en general, si $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en el espacio de salida, $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, más aún es de la forma $x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ en el espacio de llegada.

32b) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, Se trata de la transformación

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$X \mapsto AX$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + \frac{1}{5}y \\ y \end{bmatrix}$$

Luego el transformado de un vector arbitrario del espacio de salida $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} x + \frac{1}{5}y \\ y \end{bmatrix}$.

Visualicemos:

Hacer grafico.

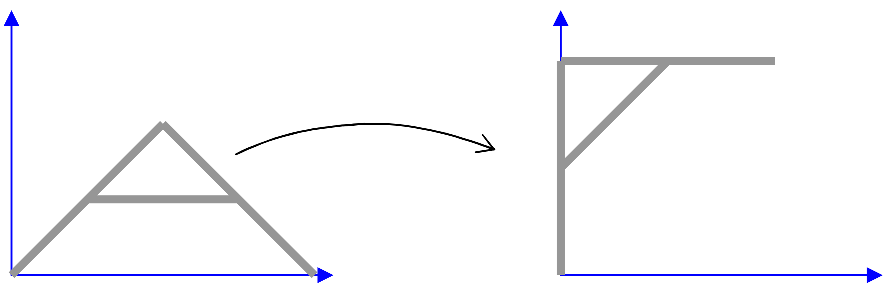
Por lo que hemos analizado, estamos en condiciones de afirmar que, en general, si $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en el espacio de salida, $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, más aún es de la forma $x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$ en el espacio de llegada.

---

33. Para resolver este ejercicio el manejo algebraico de los números reales debe ser excelente.

33a) $45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$, luego $A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz de la transformación.

$$A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}; A\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}; A\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}; A\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



33b) Rotar 90º es lo mismo que componer dos rotaciones de 45º cada una.

$$X \xrightarrow{\text{roto } 45^{\circ}} AX \xrightarrow{\text{roto } 45^{\circ}} A(AX) = A^2X$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\\sqrt{2}\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

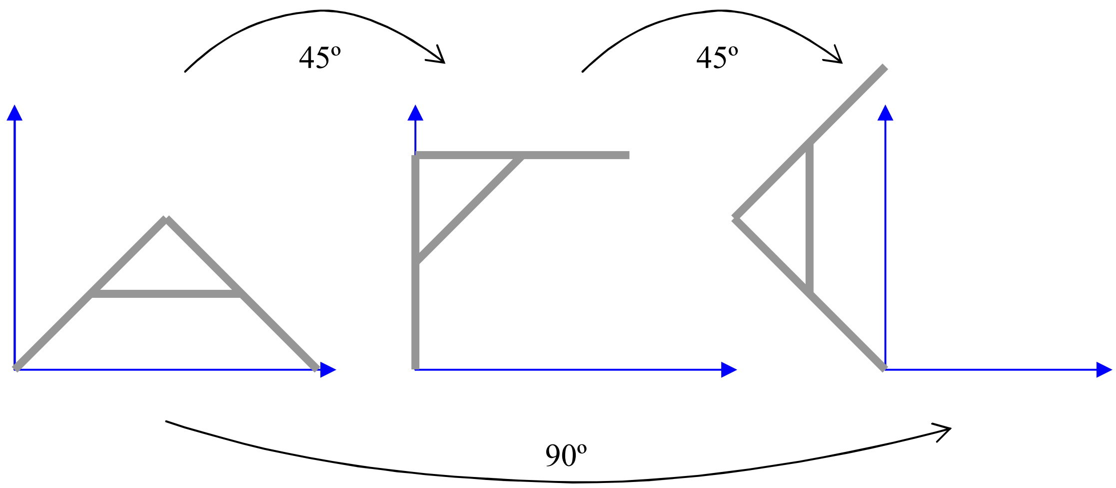
$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\2\sqrt{2}\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$$

33c) $90^{\circ} = \dfrac{\pi}{2}$, luego $B = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ es la matriz de la transformación rotación.

$$B\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}; B\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}; B\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}; B\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}; B\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$$



$$BX = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$$

Se verifica que dan los mismos resultados (recordemos que el producto matricial es asociativo).

$$X \xrightarrow{\text{roto } 45^{\circ}} AX \xrightarrow{\text{roto } 45^{\circ}} A(AX) = (AA)X = A^2X$$

$$X \xrightarrow{\text{roto } 90^{\circ}} BX$$

Finalmente hagamos los cálculos para A^2; y verifiquemos que coincide con B.

---

34. El R buscado es el resultado de multiplicar A por P, esto es:

34a) $R=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\4&2&2&1\\3&3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}400\\100\\200\end{bmatrix}$

$R=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\4&2&2&1\\3&3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\9\\9\end{bmatrix}$

$R=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\4&2&2&1\\3&3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\200\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}200\\400\\600\end{bmatrix}$

$R=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\4&2&2&1\\3&3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\p\\p\\p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\4&2&2&1\\3&3&1&2\end{bmatrix}\left(p\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=p\left(\begin{bmatrix}2&1&3&4\\4&2&2&1\\3&3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=p\begin{bmatrix}10\\9\\9\end{bmatrix}.$

34b) El vector R sí pertenece porque…

$R\in Gen\{A_1,A_2,A_3\}$ solo si existen escalares a,b,c,d tal que

$R=aA_1+bA_2+cA_3+dA_4=A\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=AX$. Esto es si la ecuación matricial $AX=R$ tiene solución. Analicemos paso a paso la existencia de soluciones:

$$\left.\begin{array}{cccc|c}2&1&3&4&100\\4&2&2&1&100\\3&3&1&2&100\end{array}\right.\Rightarrow\left.\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-\frac{4}{3}&0\\0&1&0&\frac{17}{12}&25\\0&0&1&\frac{7}{4}&25\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}a-\frac{4}{3}d=0\\b+\frac{17}{12}=25\\c+\frac{7}{4}025\end{cases}$$

. Y el conjunto solución es

$S=\left\{(a,b,c,d)/\,a=\frac{4}{3}d,b=-\frac{17}{12}d,c=-\frac{7}{4}d,d\in\mathbb{R}\right\}$. Son infinitas las soluciones, dependen de un valor paramétrico. En particular si le damos al parámetro el valor 12 (solo para tener combinaciones *enteras*), resulta que $R=16A_1-17A_2-21A_3+12A_4$.

35.

35a) Cuidado ya que su interpretación puede diferir de ésta lo cual no significa que sea incorrecta. En caso de duda consulta al tutor en el foro Dudas.

Ejemplo 34c. Tal transformación no mofifica al vector de salida.

Ejemplo 34d. Tal transformación proyecta un vector de salida sobre el eje vertical.

Ejemplo 34e. Tal transformación sustituye la segunda componente por el valor de la primera del vector de salida.y asigna el valor constante 1 a la primera componente.

Ejemplo 34f. Tal transformación multiplica por si misma cada componente del vector de salida.

Ejemplo 34g. Tal transformación desplaza en una unidad la primera componente del vector de salida.
Ejemplo 34h. Tal transformación reemplaza la primera componente del vector de salida por el producto entre ambas componentes.

35b) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \end{bmatrix}$

35c) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$

35d), 35d) Publique sus respuestas en el foro y compartimos la respuesta y profundizamos en un aprendizaje en colaboración.

36.
A simple vista, observando sus componentes resulta que:

a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ es lineal b) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es lineal c) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ es lineal

d) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ es lineal e) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$ no es lineal f) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}$ no es lineal

g) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1+x \\ y \end{bmatrix}$ no es lineal h) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} xy \\ y \end{bmatrix}$ no es lineal

En particular:
e) 1+1 nunca dará 1 como primera componente de la suma de vectores;
f) $x^2 + x'^2$ no siempre coincidirá con $(x + x')^2$ como primera componente de la suma de vectores;
g) $2x + x'$ no coincide con $1 + (x + x')$ como primera componente de la suma de vectores;
h) $(x + x')(y + y')$ no coincide con $xy + x'y'$ como primera componente de la suma de vectores.
Cuidado: usted debe demostrarlo paso a paso esto que ojos con mayor experiencia pueden leer. Para demostrar recuerde lo dicho en la Guía de estudio:
"Entonces: debe quedarle claro que en la práctica, la técnica que se usa para decir si una transformación es lineal o no, consiste en calcular el transformado de dos vectores, el transformado de su suma, el transformado del producto entre un escalar y uno de los vectores y luego analizar si se cumplen las relaciones de igualdad de la definición."
Demuestre de manera similar a lo hecho en el ejemplo desarrollado en la guía.

---

37. Recordemos:

$$T(X) = UX = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.40 \\ 0.25 & 0.35 \\ 0.15 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.25 \\ 0.15 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.35 \\ 0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{costo total de materiales} \\ \text{costo total de mano de obra} \\ \text{costo total de gastos generales} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0.45 & 0.40\\0.25 & 0.35\\0.15 & 0.15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}0.45\\0.25\\0.15\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0.40\\0.35\\0.15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.85\\0.60\\0.30\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}100\\100\end{bmatrix}\right)=T\left(100\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=100T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=100\begin{bmatrix}0.85\\0.60\\0.30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}85\\60\\30\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}200\\200\end{bmatrix}\right)=T\left(200\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=200T\left(\begin{bmatrix}100\\100\end{bmatrix}\right)=200\begin{bmatrix}0.85\\0.60\\0.30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}170\\120\\60\end{bmatrix}$$

Cuidado: yo pensé $\begin{bmatrix}200\\200\end{bmatrix}$ como $200\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. Es correcto si usted piensa como $\begin{bmatrix}100\\100\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}100\\100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}200\\200\end{bmatrix}$ y aplica linealidad.

38.

$$M=\begin{bmatrix}\sqrt{3}-\sqrt{2}\\\sqrt{3}+\sqrt{2}\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b\\a+b\end{bmatrix}$$

Resolvemos el SEL en los valores desconocidos a, b que surge al igualar componente a componente los dos vectores de arriba: $\begin{cases}a-b=\sqrt{3}-\sqrt{2}\\a+b=\sqrt{3}+\sqrt{2}\end{cases}$; su solución es $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}$. Luego $M=\sqrt{3}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\sqrt{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$,

$$TM=T\left(\sqrt{3}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\sqrt{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=\sqrt{3}T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)+\sqrt{2}T\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=\sqrt{3}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\sqrt{2}\begin{bmatrix}-4\\0\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}-4\sqrt{2}\\2\sqrt{3}\\3\sqrt{3}+5\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

.

De igual forma planteamos el SEL a partir de N:

$$N=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{7}{2}\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b\\a+b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a-b=\frac{1}{2}\\a+b=-\frac{7}{2}\end{cases}.$$

Resulta $TN=T\left(-\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)=-\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-4\\0\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{2}\\-3\\-\frac{29}{2}\end{bmatrix}$

39.

Lo expresado en lenguaje verbal como *datos*, se escriben en lenguaje matemático así:

39a) $T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$

39b)

$$\begin{aligned}&T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\&\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\y\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

39c)

$$\begin{aligned}&T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\&\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\0\\z\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Lo expresado en lenguaje verbal como *actividad*, se escribe en lenguaje matemático así: expresar TX, determinar A matriz de la transformación.
Las respuestas se construyen así:

39a) Como $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, se tiene

$$T\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=T\left(a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=aT\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+bT\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+cT\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\a\\b\end{bmatrix}$$

39b) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. Luego $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

39c) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. Luego $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

39d) si tiene dudas lo conversamos en el foro Dudas ¿si?

40.

40a) Se llama subespacio porque es un espacio dentro de otro espacio mayor. Es también un espacio generado.

40b) $\mathrm{Col}\,A=\mathrm{Gen}\{A_1,\cdots,A_n\}$. Si regresamos al párrafo que mencionaba algunos vectores que viven en $\mathrm{Gen}\{V_1,\cdots,V_p\}$, se expresaba que lo hacen el vector nulo, los múltiplos y las combinaciones lineales de dos o más de ellos. Bien, esto no es más que la condición que distingue un subespacio de un conjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$.

$\mathrm{Nul}\,A=\{X\in\mathbb{R}^n\,/\,AX=0\}$, ya sabemos que:

- ✓ 0 es siempre solución del SELH, $AX=0$.

- ✓ U es solución, $AU=0$. Luego $A(xU)=xAU=x0=0$; todo múltiplo es solución.
- ✓ U es solución y V también, $A(U+V)=AU+AV=0+0=0$, la suma es solución.

Conclusión: $\mathrm{Nul}\,A$, el conjunto solución de todo SELH, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Es muy importante, a esta altura de nuestro aprendizaje, que los signos igual planteados cuenten con la clara justificación: el producto por escalar conmuta, propiedad de anulación del producto en las ecuaciones matriciales, el producto matricial se distribuye respecto de la suma de matrices.

40b) La selección, la síntesis y la relación de la información se la dejamos a usted, que además, le agregará su toque personal. Con esta síntesis en mano realice una lectura renovada de la unidad.

41.

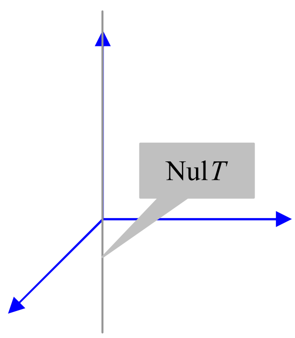
41a) Sí. $\mathbb{R}^3$ es el dominio de la proyección porque TX es un vector de tres componentes.

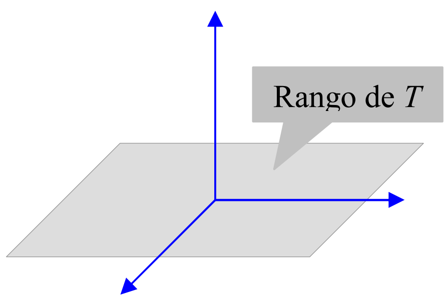
$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

41b) No porque:

$\mathrm{Nul}\,T=\{X\in\mathbb{R}^3 / T(X)=0\}$ coincide con el conjunto solución del SELH $AX=0$. Como $\det(A)$ es nulo, admite infinitas soluciones además de la trivial. El conjunto solución es de la forma $S=\{(x,y,z)/x=0, y=0, z=t / t\in\mathbb{R}\}$ que pensado en términos de vectores es $S=\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} / t\in\mathbb{R}\right\}=S=\left\{t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} / t\in\mathbb{R}\right\}=Gen\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Finalmente: $\mathrm{Nul}\,T$, contiene el vector 0, pero no coincide con él. Conclusión: $\mathrm{Nul}\,T=\mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. El tercer eje es "proyectado" en el vector nulo y constituye un resultado fácil de visualizar geométricamente.





41c) Sí porque

$$RangoT = Gen\{A_1, A_2, A_3\} = Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\} = \left\{a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} / a,b,c \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix} / a,b,c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} / a,b \in \mathbb{R}\right\} = Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

41d) Sí porque:

$$RangoT = Gen\{A_1, A_2, A_3\} = Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\} = \left\{a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} / a,b,c \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix} / a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$$

$$Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\} = \left\{u\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} / u,v \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}u\\u+v\\0\end{bmatrix} / u,v \in \mathbb{R}\right\}$$

Tomemos un arbitrario $X \in RangoT$ y estudiemos si pertenece al $Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ y luego tomemos un arbitrario $Y \in Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ y analicemos si pertenece al RangoT.

De esta forma tendremos que todo vector de un conjunto lo es también del otro, esto es, ambos conjuntos coinciden.

$X = \begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix}$ será igual a algún vector de la forma $\begin{bmatrix}u\\u+v\\0\end{bmatrix}$ solo si $a = u, b = u + v$. Esto es, solo si $u = a, v = b - a$ y así tenemos que

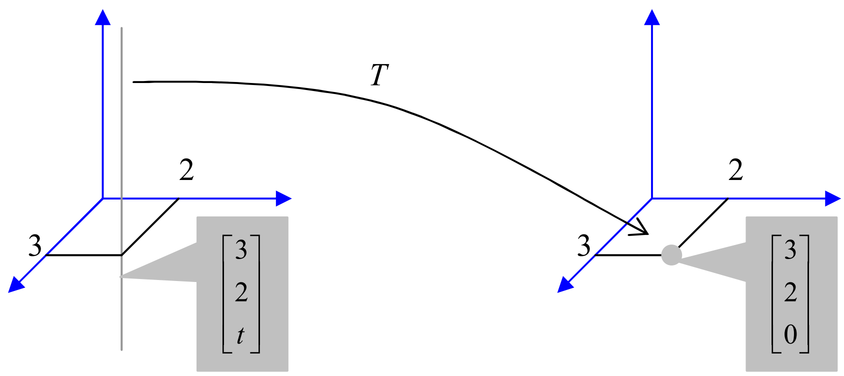
$$X = \begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + (b-a)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \in Gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Recíprocamente: $Y = \begin{bmatrix} u \\ u+v \\ 0 \end{bmatrix}$ será igual a algún vector de la forma $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ solo si $u = a, u+v = b$. Esto es, solo si $a = u, b = u+v$ y así tenemos que $Y = \begin{bmatrix} u \\ u+v \\ 0 \end{bmatrix} = u\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (u+v)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \in Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

41e) Sí, son base porque son LI. En particular, en el subespacio mencionado se encuentra el vector nulo que resulta ser combinación lineal del resto.
41f) Sí, lo es. En actividad 40 demostramos que es subespacio.

41g) $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

No se establecen restricciones sobre el escalar *z*, esto es, al no establecerse restricciones sobre la tercera componente, ésta puede tomar cualquier valor. <u>Conclusión:</u> todo vector de la forma $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ t \end{bmatrix}$, *t* escalar arbitrario, es "transformado" en el vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Note que estos vectores componen la recta $\begin{bmatrix} 3+0t \\ 2+0t \\ 0+1t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, pero como no pasa por el origen, no es un subespacio.



41h) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sí está en el codominio de T porque es un vector de tres componentes y vive en $\mathbb{R}^3$. No está en el rango de T porque su tercera componente es diferente de cero.

42.

$$T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$T^{-1}:\mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}^n$$
$$X \to Y$$
$$X \leftarrow Y$$

42a) Sí, el dominio para ambas es $\mathbb{R}^n$.

42b) Rango de $T = \operatorname{Col} A = \operatorname{Gen}\{A_1,\cdots,A_n\}$ con $A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$.

Rango de $T^{-1} = \operatorname{Col} A^{-1} = \operatorname{Gen}\{B_1,\cdots,B_n\}$ con $A^{-1} = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_n \end{bmatrix}$.

Ambos son subespacios de $\mathbb{R}^n$, generados por *n* vectores LI, luego generan $\mathbb{R}^n$. Entonces, sí coinciden.

42c) Sí coinciden en su núcleo, es el vector cero. Como *A* y su inversa son matrices invertibles, sus respectivos determinantes son no nulos y las ecuaciones matriciales $AX = 0 \wedge A^{-1}Y = 0$ admiten únicamente la solución nula.

42d) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con *A=I* o cualquier *A* cuyo determinante no sea nulo.

43.

Las respectivas matrices de las transformaciones de los apartados a, b, c, d del Ejemplo 34 son respectivamente $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Los determinantes de la primera y la tercera son no nulos por lo cual sus transformaciones son invertibles. El resto tiene determinante nulo y su correspondiente transformación no es invertible. Las restantes transformaciones del ejercicio no son lineales y por eso no analizamos si son invertibles.

44.

Es conveniente que usted se ayude representando gráficamente las diversas transformaciones. Las respectivas matrices de las transformaciones son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Entonces: $T:\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{proyectamos}} A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Y \xrightarrow{\textit{rotamos}} BY = B\left(A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (BA)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

<u>Observe el orden:</u> de adentro hacia fuera en la expresión última. Al vector le aplicamos *A* y a ese resultado le aplicamos *B*.

44a) La matriz de la transformación composición es:

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solo para facilitar la visualización de la matriz resultado y facilitar cálculos aritméticos posteriores, sacamos ½ como escalar que multiplica a una matriz de entradas *enteras* (son números enteros),

44b) No es invertible porque $\det(BA) = 0$.

44c) $\mathrm{Nul}T=\left\{X\in\mathbb{R}^2/\left(BA\right)X=0\right\}$. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}X=0\Rightarrow\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}X=0$. Aplicamos Gauss a la matriz aumentada

$$\begin{array}{cc|cl}
\sqrt{3} & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & \leftarrow\frac{1}{\sqrt{3}}\quad(-1) \\
0 & 0 & 0 & \qquad\quad \hookleftarrow
\end{array}$$

El SEL asociado a la última matriz aumentada es $\begin{cases}x=0\\0=0\end{cases}$. Aquí, claramente se lee el conjunto solución de la ecuación matricial $\left(BA\right)X=0$: la primera componente del vector X es nula y la segunda no tiene restricciones, puede asumir cualquier valor real. Respuesta: $NulT=\left\{\begin{bmatrix}0\\t\end{bmatrix}/t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}/t\in\mathbb{R}\right\}=Gen\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Se trata de una recta, más aún es el eje vertical del Sistema de Coordenadas. La base del núcleo es el vector $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

44d)

Rango de $T=Gen\left\{BA_1,BA_2\right\}=Gen\left\{\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}=\left\{a\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}\ /\,a\in\mathbb{R}\right\}$, que también puede expresarse a los fines de facilitar la visualización,

$$\left\{a\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}\ /\,a\in\mathbb{R}\right\}=\left\{k\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}\ /\,k\in\mathbb{R}\right\}$$

En este ejemplo la "dificultad visual" es absorbida por el escalar. La fracción $\frac{1}{2}$ que multiplica cada entrada de la matriz se la piensa como parte del escalar que multiplica al vector base.

44e) $\left(BA\right)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ es el vector transformado. Esta situación no puede darse porque dicho vector no está en rango de T, ya que no es un múltiplo de $\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}$. Efectivamente, la ecuación matricial planteada no tiene solución como se ve en lo que sigue:

$$\begin{array}{cc|ll}
\sqrt{3} & 0 & 1 & \\
1 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\
1 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \quad (-1) \\
0 & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}}+1 & \quad \hookleftarrow
\end{array}$$

Respuesta: al vector dato no le corresponde ningún punto del dominio.

45.

45a) Compresión horizontal: $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=A$; Dilatación vertical: $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}=B$. Primero comprimimos, luego dilatamos: *BA*, esto es,

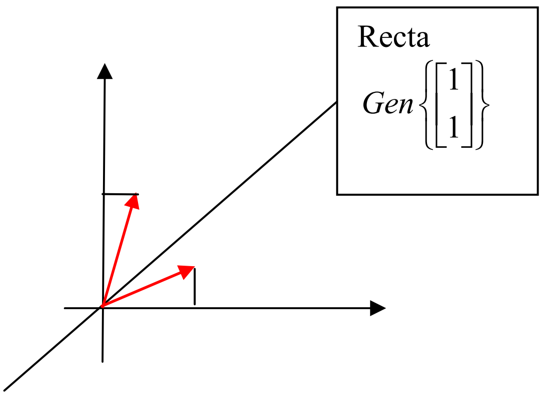
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto B\left(A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=(BA)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x\\ 5y\end{bmatrix}.$$

Respuesta: la matriz composición es $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$.

45b)

$$\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}=\left\{t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}/\,t\in R\right\}=\left\{\begin{bmatrix}t\\t\end{bmatrix}/\,t\in R\right\}.$$

Se trata de los vectores donde la primera y la segunda componentes coinciden, por eso también se lo conoce como *Reflexión respecto a la recta* $y=x$: Esta reflexión puede expresarse así $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$. Aplicada a los vectores $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ nos da su expresión $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=A$.



Toda rotación en un ángulo α tiene por matriz $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -sen\alpha\\ sen\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$. Luego giro 180º: $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=B$.

Primero reflexión, luego giro: *BA*, esto es,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto B\left(A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (BA)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}.$$

Respuesta: la matriz composición es $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

46.

46a) Los datos son: Corte $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Expansión $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Reflexión $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Corte $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. La matriz que representa la composición final de las transformaciones citadas es $DCBA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, para cualquier orden en que se asocien las matrices al operar. Recordemos que el producto matricial es asociativo.

46b) Efectivamente es el transformado porque al realizar la transformación (multiplicar la matriz por el vector) da ese vector. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Hacer dibujos.

47.

47a) Compresión: $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ con $0 < c < 1$. Su matriz inversa vale $\frac{1}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $0 < c < 1 \Rightarrow \frac{1}{c} > 1$, luego la última matriz corresponde a la matriz de expansión en el primer eje.

47b) Reflexión: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Su matriz inversa vale: $-1\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ que corresponde a la matriz de reflexión sobre el primer eje.

Hacer dibujos.

48.

48a) Cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ se expresa, en términos de la base canónica,

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, luego, por linealidad de T, se cumple:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = xT\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + yT\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + zT\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= x\begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matriz de la tranformación}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = AX$$

48b) $\text{Nul}T = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 / AX = 0 \right\} = \left\{ \text{solución del SELH } AX = 0 \right\}$. Como $\det(A) = 0$ al tener una fila nula, el SELH planteado admite infinitas soluciones además de la trivial. Para obtener la "forma" de la solución, trabajamos sobre la matriz aumentada

$$\begin{array}{ccc|c} -3 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \cdots & & \\ \hline 1 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

El SELH asociado a esta última matriz, equivalente al de partida, muestra las restricciones impuestas a las coordenadas –variables– del punto genérico *x*, *y*, *z*. Esas restricciones son: $\begin{cases} x = \frac{5}{3} y \\ y = 0 \\ z \text{ sin restricciones} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \text{ sin restricciones} \end{cases}$. Luego,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / x = 0 = y, z = t \wedge t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

S es el conjunto solución de la ecuación matricial $AX = 0$.

Respuesta: $\text{Nul}T = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una recta, más precisamente, el tercer eje de coordenadas cartesianas.

48c) Rango de $T = \text{Gen}\left\{ A_1, A_2, A_3 \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Se demuestra que tales vectores son LI: la única combinación lineal posible para obtener el vector nulo es $a = 0 = b$. La dimensión del rango de *T* es dos.

Respuesta. Los vectores $\begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}$ forman una base para el Rango de T.

48d) Se trata de un simple trabajo algebraico en el cual se distingue la información de partida y el resultado al cual se quiere arribar. En nuestro caso:

<u>Información de partida</u>: *T* es lineal, vale la expresión $T(X) = AX$.

<u>Resultado al cual se quiere arribar:</u> expresión de la matriz de la transformación.

Idea de trabajo: desandar camino algebraicamente; expresar $T(X)$ como suma de los transformados de la base canónica usando la linealidad. ¡A trabajar!

$$T:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$$
$$X \mapsto AX$$

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - 6x_2 \\ x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - 6x_2 \\ 0x_1 + 1x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 \\ 0x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6x_2 \\ 1x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} == 1\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} == 0\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

respuesta: $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

APARTADO 4.

49.

Se cumple:

- ✓ por definición de autovector: $AX = kX$;
- ✓ propiedad uniforme de la suma: $AX - kX = 0$;
- ✓ propiedad de identidad en la multiplicación: $AX - kIX = 0$;
- ✓ propiedad distributiva del producto respecto de la suma matricial: $(A - kI)X = 0$

50.

50a) Ejemplo 31. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz de la transformación de trasquilado horizontal $X \mapsto AX$.

Planteamos $0 = \det(A - kI) = (1-k)^2$. Entonces k vale 1. El autovalor es 1.

Sustituimos k por 1 y resolvemos $AX = 1X$. Esto es:

$AX = X \Rightarrow AX - IX = 0 \Rightarrow (A - I)X = 0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La última matriz aumentada expresa $\begin{cases} 0x + 1y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$, que establece restricciones para el conjunto solución: dice que la segunda componente del vector X es nula y sobre la primera no hay restricciones y puede tomar cualquier valor real. El conjunto solución de la ecuación vectorial $AX = X$ es el conjunto

$\left\{\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R}\right\} = Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, autoespacio asociado al autovalor 1.

50b) Ejemplo 32. A matriz de rotación 45º.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -sen\frac{\pi}{4} \\ sen\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det(A-kI) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-k & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}-k \end{bmatrix}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-k\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = k^2 - \sqrt{2}\cdot k + 1$$

50c) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

$$\det(A-kI) = \det\left(\begin{bmatrix} \cos\alpha - k & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha - k \end{bmatrix}\right) = k^2 + (2\cos\alpha)k + 1$$

$\det(A-kI) = k^2 + (2\cos\alpha)k + 1 = 0$ que no tiene solución en los reales porque $\sqrt{-sen^2\alpha}$ no tiene solución. Para un ángulo de rotación dado, no hay autovalores ni autovectores como en el ejemplo de 45º.

51.

51a) Multiplicando se comprueba $\begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y también, $\begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.92\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Esto es, se cumple $AX = kX$ con k escalar y X vector no nulo.

51b) $A = \begin{bmatrix} 0.93 & 0.4 \\ 0.07 & 0.6 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-kI) = \begin{bmatrix} 0.93-k & 0.4 \\ 0.07 & 0.6-k \end{bmatrix} = (0.93-k)(0.6-k) - (0.07)(0.4) = k^2 - 1.53k + 0.53,$$

el determinante es un polinomio de grado 2 en k por lo que tiene dos raíces.

$$0 = \det(A-kI) \Rightarrow k = 0.53 \wedge k = 1.$$

Si $\underline{k = 0.53} \Rightarrow A - 0.53I = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.07 & 0.07 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \left\{X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} / (A-0.53I)X = 0\right\} =$

$= \left\{\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}\right\} = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Si $\underline{k = 1} \Rightarrow A - 1I = \begin{bmatrix} -0.07 & 0.4 \\ 0.07 & -0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \left\{X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} / (A-1I)X = 0\right\} =$

$$=\left\{\begin{bmatrix}\frac{0.4}{0.07}t\\ t\end{bmatrix} \ / \ t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{bmatrix}\frac{40}{7}\\ 1\end{bmatrix} \ / \ t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\frac{1}{7}\begin{bmatrix}40\\ 7\end{bmatrix} \ / \ t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{u\begin{bmatrix}40\\ 7\end{bmatrix} \ / \ u\in\mathbb{R}\right\}=\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}40\\ 7\end{bmatrix}\right\}$$

Note que hemos expresado el vector generador con componentes *naturales* (números naturales) en vez de racionales, debido a que los naturales son expresiones más simples de manipular y de visualizar. El factor 1/7 fue absorbido por el escalar.

Conclusión:

- ✓ $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ es el autoespacio del autovector $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ asociado al autovalor 0.53.
- ✓ $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}40\\ 7\end{bmatrix}\right\}$ es el autoespacio del autovector $\begin{bmatrix}40\\ 7\end{bmatrix}$ asociado al autovalor 1.

Esos autovectores son LI y forman base en $\mathbb{R}^2$ (demuéstrelo).

51c) Expansión de factor dos en el primer eje: $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

$$\det(A-kI)=\begin{bmatrix}2-k & 0\\ 0 & 1-k\end{bmatrix}=(2-k)(1-k)$$

$$0=\det(A-kI)\Rightarrow k=2\wedge k=1.$$

$$\text{Si } \underline{k=2}\Rightarrow A-2I=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow S=\left\{X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}/(A-2I)X=0\right\}=$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}t\\ 0\end{bmatrix}/ \ t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \ / \ t\in\mathbb{R}\right\}=\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{Si } \underline{k=1}\Rightarrow A-1I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow S=\left\{X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}/(A-1I)X=0\right\}=$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}0\\ t\end{bmatrix} \ / \ t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \ / \ t\in\mathbb{R}\right\}=\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

Conclusión:

- ✓ $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right\}$ es el autoespacio del autovector $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ asociado al autovalor 2.
- ✓ $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ es el autoespacio del autovector $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ asociado al autovalor 1.

Esos autovectores son LI y forman base en $\mathbb{R}^2$ (demuéstrelo).

51d) Reflexión: $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Como A es diagonal, por simple observación, se puede anticipar que los escalares –1 y 1 son los autovalores de autovectores $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, respectivamente Lo demostramos:

$\det(A-kI)=\begin{bmatrix}-1-k & 0\\ 0 & 1-k\end{bmatrix}=-(1+k)(1-k)$ polinomio de grado 2 en *k*, tiene dos raíces. $0=\det(A-kI)\Rightarrow k=1\wedge k=-1$.

Si $\underline{k=1}\Rightarrow A-1I=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow S=\left\{X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}/\left(A-1I\right)X=0\right\}=$

$=\left\{\begin{bmatrix}0\\ t\end{bmatrix}/\ t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}/\ t\in\mathbb{R}\right\}=\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$

Si $\underline{k=-1}\Rightarrow A+1I=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow S=\left\{X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}/\left(A+1I\right)X=0\right\}=$

$=\left\{\begin{bmatrix}t\\ 0\end{bmatrix}/\ t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}/\ t\in\mathbb{R}\right\}=\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right\}$

<u>Conclusión:</u>

- ✓ $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right\}$ es el autoespacio del autovector $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ asociado al autovalor –1.
- ✓ $\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ es el autoespacio del autovector $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ asociado al autovalor 1.

52.

Si $k_i\neq k_j\quad\forall\ i\neq j$ con $AV_i=k_iV_i$, entonces, $\{V_i\}$ es LI. Lo demostraremos por contradicción ¿recuerda el concepto? Supongamos que $\{V_1,\cdots,V_p\}$ es <u>LD</u> porque <u>sólo</u> el primer vector es combinación lineal <u>no nula</u> del resto. Apliquemos *T* y trabajemos algebraicamente con todo lo que sabemos:

$$V_1=c_2V_2+\cdots+c_pV_p$$

$$TV_1=T\left(c_2V_2+\cdots+c_pV_p\right)$$

$$k_1V_1=c_2TV_2+\cdots+c_pTV_p=c_2\left(k_2V_2\right)+\cdots+c_p\left(k_pV_p\right)$$

$$k_1\left(c_2V_2+\cdots+c_pV_p\right)=c_2k_2V_2+\cdots+c_pk_pV_p$$

$$\left(c_2k_1-c_2k_2\right)V_2+\cdots+\left(c_pk_1-c_pk_p\right)V_p=0$$

$$c_2\left(k_1-k_2\right)V_2+\cdots+c_p\left(k_1-k_p\right)V_p=0$$

Pero V_1 es combinación lineal de $V_2,\cdots,V_p$, luego existe un escalar no nulo, supongamos c_2. Si $c_2\neq 0\Rightarrow k_1=k_2$, ¡contradicción! Pues por hipótesis, $k_i\neq k_j\quad\forall i\neq j$.

<u>Conclusión:</u> $\{V_1,\cdots,V_p\}$ es <u>LI</u>.

53.

53a) Sea

$$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

$$X\mapsto AX$$

$$TV_i=k_iV_i\quad\forall i=1,\cdots,n \text{ además con } V_i\neq 0\ \forall i=1,\cdots,n$$

Armemos las matrices P y D como sigue:

$$P=\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_p \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_p \end{bmatrix}$$

Operamos:

$$PD=\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_1V_1 & k_2V_2 & \cdots & k_pV_p \end{bmatrix}$$

$$AP=A\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AV_1 & AV_2 & \cdots & AV_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1V_1 & k_2V_2 & \cdots & k_pV_p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AV_1 & AV_2 & \cdots & AV_p \end{bmatrix}$$

$$AP=PD$$

$$(AP)P^{-1}=(PD)P^{-1}$$

$$A\left(PP^{-1}\right)=(PD)P^{-1}$$

$$\underline{A=PDP^{-1}}$$

53b)

$$\left(PDP^{-1}\right)^m=\underbrace{\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\cdots\left(PDP^{-1}\right)}_{m\ \text{veces}}=PD\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)\cdots DP^{-1}$$

$$\underline{A^m=PD^mP^{-1}}$$

Se utilizó: el concepto de potencia, la propiedad asociativa del producto matricial, el concepto de matriz inversa, la propiedad de la identidad matricial y, nuevamente, el concepto de potencia, en ese orden.

54.

La actividad de proceso 51 en su apartado (b) nos provee los autovalores y los autovectores para construir las matrices P y D, respectivamente. El ejemplo 22 de la unidad 2 nos provee la relación entre A –matriz estocástica– y X –vector de distribución de la población–.

54a) Con esta información, sólo nos queda reemplazar y calcular:

$$A^kX=\left(PD^kP^{-1}\right)X$$

$$\begin{bmatrix} 0.93 & 0.4 \\ 0.07 & 0.6 \end{bmatrix}^k\begin{bmatrix} 1500 \\ 2100 \end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix} -1 & 40 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.53^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-7}{47} & \frac{40}{47} \\ \frac{1}{47} & \frac{1}{47} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1500 \\ 2100 \end{bmatrix}$$

Hagamos cálculos aritméticos:

$$0.53^k = \frac{53^k}{100^k}$$

$$0.53^2 = 0.2809$$

$$0.53^{10} = 1.7489 \times 10^{-3}$$

$$0.53^{100} = 2.6766 \times 10^{-28}$$

$$0.53^{1000} = 1.8874 \times 10^{-276}$$

$$0.53^{10000} = 5.7371 \times 10^{-2758}$$

Observamos que, a medida que el exponente *k* crece, la potencia decrece y “tiende” al valor nulo.

54b) Llamemos X_0 a la distribución inicial de la población, entonces la distribución después de *k* períodos es $X_k = A^k X_0$. Los autovectores $V_1 = \begin{bmatrix} 40 \\ 7 \end{bmatrix}$ (autovalor 1) y $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (autovalor 0.53) forman base de $\mathbb{R}^2$, de modo que existen escalares c_1 y c_2 tales que $X_0 = c_1V_1 + c_2V_2$. Entonces

$$X_k = A^k X_0 = A^k\left(c_1V_1 + c_2V_2\right) = c_1A^kV_1 + c_2A^kV_2$$
$$= c_1(1)^k V_1 + c_2(0.53)^k V_2 = c_1V_1 + c_2(0.53)^k V_2$$

y, como para valores muy grandes de *k*, 0.53^k es prácticamente cero, tendremos

$$X_k \simeq c_1V_1.$$

Es decir, después de muchos períodos, la distribución de población es proporcional al autovector de autovalor uno. En efecto, $\frac{3600}{47}\begin{bmatrix} 40 \\ 7 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 3064 \\ 536 \end{bmatrix}$. Interesante, ¿verdad?

NOTA: $X_0 = \begin{bmatrix} 1500 \\ 2100 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 40 \\ 7 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3600}{47}\begin{bmatrix} 40 \\ 7 \end{bmatrix} + \frac{73500}{47}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

55.

55a) Falso. El vector dado tiene tres componentes y en $\mathbb{R}^2$, los vectores admiten sólo dos.

55b) Falso. La definición establece restricciones sobre el vector, no sobre el escalar. *X* debe ser no nulo y *k* puede asumir cualquier valor real incluido el 0.

55c) Falso. Es necesario que, además, no sean nulos ni múltiplos, esto es que sean LI.

55d) Falso. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no es invertible. Se trata de la matriz de proyección sobre el primer eje en $\mathbb{R}^2$.

55e) Falso. No existe una matriz diagonal correspondiente a la matriz de corte $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

55f) Falso. Sólo si la recta pasa por el origen. Por ejemplo la recta dada por la fórmula $S = \{(x, y) / x + 2y = 5\}$ no es un subespacio porque el vector nulo no está en él.

Efectivamente:

$$S = \{(x, y) / x + 2y = 5\} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} / x + 2y = 5\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 5-2t \\ t \end{bmatrix} / t \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$\left\{\begin{bmatrix} 5-2t \\ 0+1t \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t \\ 1t \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} / \, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Y no hay valor a asignar al escalar para obtener el vector nulo en *S*.

Actividades de autoevaluación

Hemos incorporado tres actividades que nos permiten evaluar la totalidad de los objetivos de aprendizaje planteados, ¿los recuerda? Ellos son:

- ✓ Caracterizar conjuntos de vectores y analizar relaciones de dependencia e independencia lineal entre ellos.
- ✓ Caracterizar las transformaciones matriciales y construir la matriz que las representa.
- ✓ Identificar matrices diagonalizables y construirla como producto entre una diagonal y otra invertible.
- ✓ Resolver problemas empleando la multiplicación de matrices en una visión dinámica.

Al finalizar las actividades confronte sus respuestas con las dadas al final de la guía. De ser necesario consulte nuevamente el material de estudio, ejercítese con las actividades complementarias que se encuentran en el Aula virtual, *Archivos / Actividades complementarias* y también, consulte a sus compañeros de curso en el foro del Aula virtual y a su tutor. Practicará así un aprendizaje en colaboración.

1

Dado el SELH $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$:

a) **Defina** vectores apropiados y **redefina** el problema en términos de combinaciones lineales.
b) **Defina** el problema en términos de una transformación lineal apropiada.
c) **Encuentre** una base y la dimensión del conjunto solución.
d) **Construya** una base y la dimensión para la solución de cada ecuación lineal del SELH.
e) **Grafique** en $\mathbb{R}^3$ los apartados anteriores.

Con la información de la actividad de proceso 44, de la unidad 1:
f) **Exprese** el conjunto solución S como un conjunto de vectores.
g) **Demuestre** que S no es un subespacio vectorial.

2

Retome la AP31 de la unidad 4.
- ✓ **Defina** el problema en términos de una transformación lineal apropiada.
- ✓ **Responda:** ¿Es diagonalizable la matriz de la transformación? ¿Es invertible la transformación? **Fundamente** sus respuestas.

3

Clasifique como “verdadera” V o “falsa” F, cada una de las siguientes afirmaciones. **Fundamente** su respuesta.

a) $V=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} / x\geq 0 \wedge y\geq 0\right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

b) El espacio de columnas de una matriz $A_{7\times 5}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^7$.

c) Toda matriz 2×2 puede tener a lo sumo dos autovalores.

d) $-U$ es combinación lineal de U y de V.

e) Si A es 2×4, las columnas de la matriz son LD.

f) Toda $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal queda completamente determinada por su accionar sobre las columnas de la matriz I_m.

g) $V_1,\cdots,V_p$ LI, son base de $\text{Gen}\{V_1,\cdots,V_s\}$ con $p \le s$.

h) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es LI y base de $\mathbb{R}^2$.

i) $\text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{-3}{7} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ coincide con $\text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}$.

j) El plano de la gráfica es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.