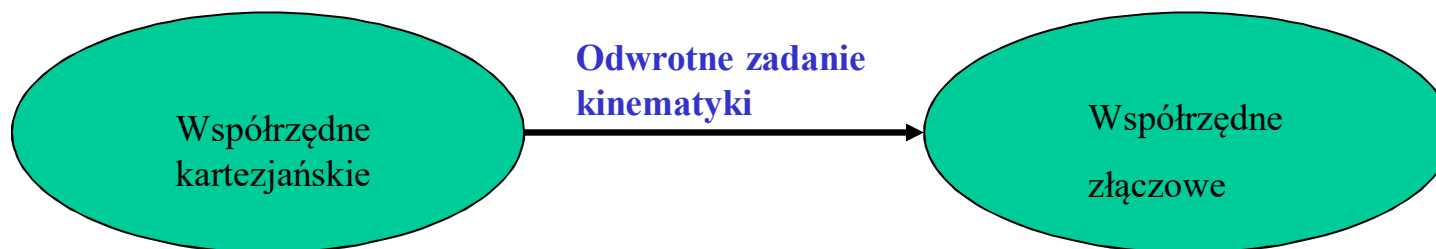


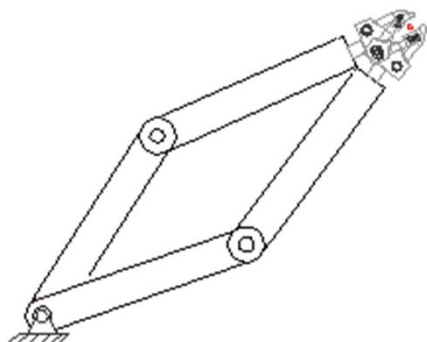
# Kinematyka odwrotna

**Zadanie odwrotne kinematyki:** dla punktu zadanego w przestrzeni kartezjańskiej należy wyznaczyć wartości zmiennych złączowych.



**Zadanie odwrotne kinematyki nie posiada jednoznacznego rozwiązania.**

Oznacza to, że dla zadanego punktu (opisanego współrzędnymi {xyz}) istnieje kilka rozwiązań (kilka zestawów wartości zmiennych przegubowych).



Przykładowo, dla płaskiego robota istnieją dwie różne konfiguracje ustawienia ramion zapewniające ustawienie końcówki robota w tym samym punkcie (rysunek obok).

Dla niektórych robotów (**redundantnych**) rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki nie istnieje (jest nieskończenie wiele rozwiązań).

## Metody rozwiązywania zadania odwrotnego:

- **metody analityczne:**

- algebraiczna:** rozwiązywanie układu równań trygonometrycznych uzyskanych w prostym zadaniu kinematyki

- geometryczna:** wykorzystanie właściwości geometrycznych figur płaskich lub przestrzennych; dekomponowanie zadania przestrzennego na szereg zadań płaskich

- **metody numeryczne:** poszukiwanie rozwiązań równań nieliniowych

Metody analityczne opierają się na bezpośrednich obliczeniach (wzory analityczne), dlatego uważa się, że są one szybsze (pracochłonność obliczeniowa nie zależy od wyboru konkretnego punktu).

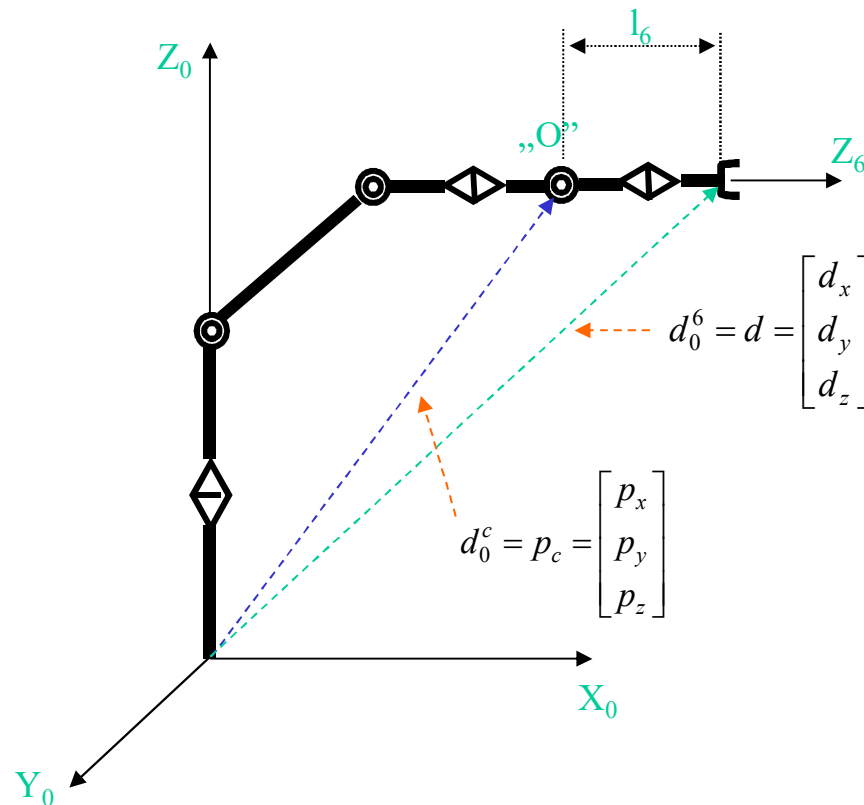
Niestety, w przeciwieństwie do zadania prostego, nie istnieje bezpośrednia i systematyczna procedura pozwalająca na rozwiązywanie zadania odwrotnego. Dlatego każdy robot, czy klasa robotów, musi być traktowany indywidualnie.

Ze względu na trudności rozwiązywania układów równań trygonometrycznych, najczęściej wykorzystuje się metodę geometryczną dla uzyskania analitycznych rozwiązań.

## Podział zadania odwrotnego położenia

Dla manipulatorów o sześciu stopniach swobody, które mają końcówkę sferyczną, możliwe jest podzielenie zadania odwrotnego położenia na dwa prostsze: **kinematykę odwrotną pozycji** i **kinematykę odwrotną orientacji**.

Załóżmy, że mamy sześć stopni swobody i że trzy ostatnie osie obrotu przecinają się w punkcie „O” (środek kiści).



Założeniem jest, że ruch ostatnich trzech osi nie zmienia pozycji punktu „O” (pozycja środka kiści jest funkcją trzech pierwszych zmiennych).

Macierz przekształcenia możemy zapisać jako:

macierz obrotu

$$R_0^6(q_1, \dots, q_6) = R$$

i wektor pozycji

$$d_0^6(q_1, \dots, q_6) = d$$

**Wektor  $p_c$  oznaczający pozycję punktu „O” możemy wyznaczyć jako:**

$$p_c = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x - l_6 \cdot R_{13} \\ d_y - l_6 \cdot R_{23} \\ d_z - l_6 \cdot R_{33} \end{bmatrix}$$

**Z powyższej zależności można znaleźć wartości trzech pierwszych zmiennych złączowych (rozwiązanie odwrotnego zadania dla pozycji).**

**Pozwolą one określić macierz  $R_0^3$**

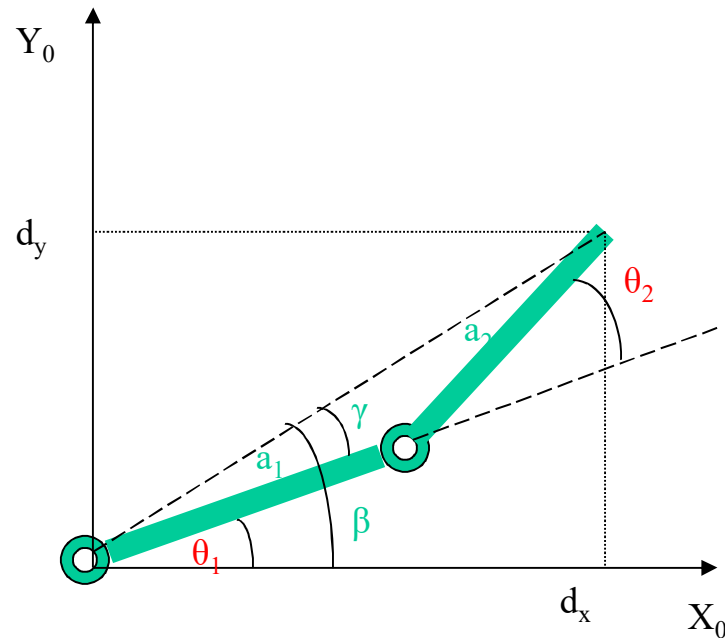
**Następnie z wyrażenia:  $R_0^6 = R_0^3 \cdot R_3^6$**

**można określić macierz orientacji końcówki względem punktu „O”**

$$R_3^6 = \left(R_0^3\right)^{-1} \cdot R_0^6 = \left(R_0^3\right)^T \cdot R_0^6$$

**a z niej trzy ostatnie zmienne złączowe (kąty).**

## Zadanie odwrotne pozycji - metoda geometryczna



1. Korzystając z twierdzenia o trójkącie, możemy napisać:

$$d_x^2 + d_y^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cos(\pi - \theta_2)$$

$$d_x^2 + d_y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cos \theta_2$$

$$\cos \theta_2 = \frac{d_x^2 + d_y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 \cdot a_1 \cdot a_2} = L$$

$$\sin \theta_2 = \pm \sqrt{1 - L^2}$$

$$\theta_2 = \arctg \frac{\pm \sqrt{1 - L^2}}{L}$$

Uzyskujemy dwa różne rozwiązania na kąt  $\theta_2$

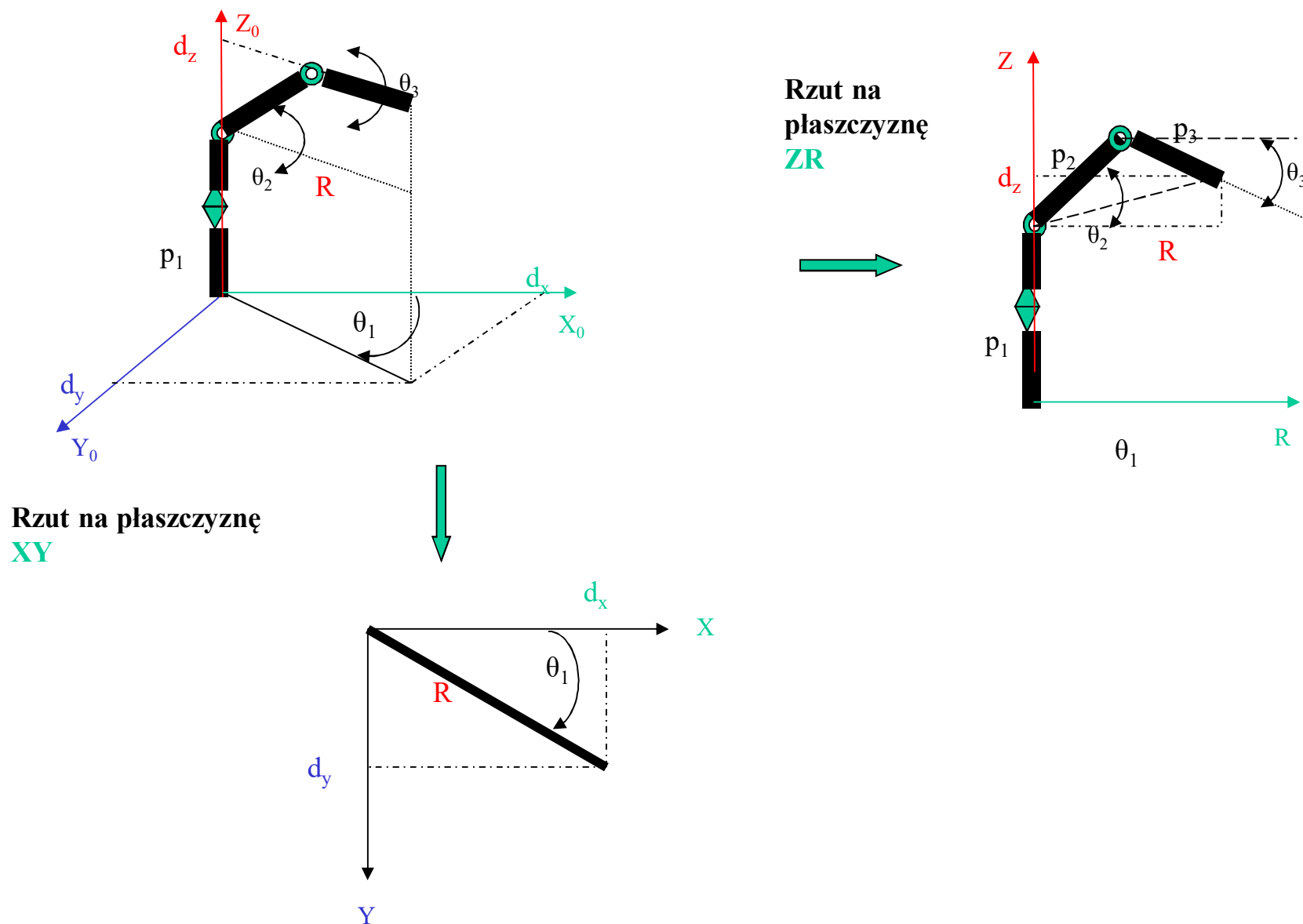
2. Kąt  $\theta_1$  jest równy:

$$\theta_1 = \beta - \gamma$$

$$\theta_1 = \arctg \frac{d_y}{d_x} - \arctg \frac{a_2 \cdot \sin \theta_2}{a_1 + a_2 \cdot \cos \theta_2}$$

Kąt  $\theta_1$  zależy od kąta  $\theta_2$ , czyli mamy również dwa rozwiązania.

Dla bardziej złożonych struktur kinematycznych (przestrzennych) robotów wykorzystuje się dekompozycję zadania przestrzennego na zadania płaskie (rzutowanie na płaszczyzny).

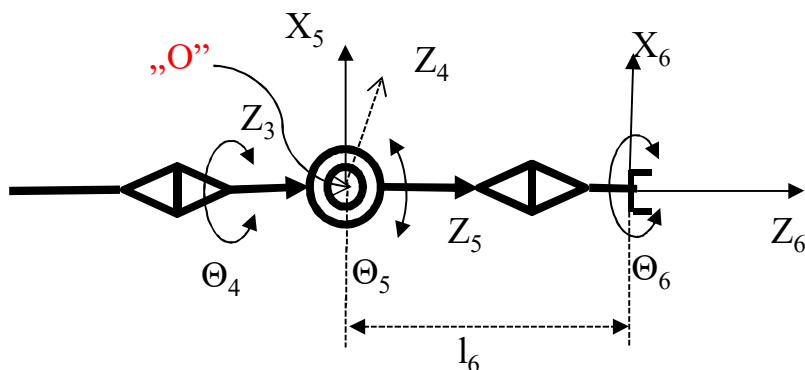


## Kinematyka prosta i odwrotna końcówki sferycznej

Końcówka (kiść) sferyczna: trzy człony obrotowe o osiach przecinających się w jednym punkcie.

### Kinematyka prosta

Osie przecinają się w punkcie „O”.



	a	$\alpha$	d	$\Theta$
4	0	-90	0	$\Theta_4$
5	0	90	0	$\Theta_5$
6	0	0	$l_6$	$\Theta_6$

$$T_3^6 = T_3^4 \cdot T_4^5 \cdot T_5^6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & l_6 c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & l_6 s_4 s_5 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & l_6 c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3^6$   $d_3^6$

### Kinematyka odwrotna

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_{11} & o_{12} & o_{13} \\ o_{21} & o_{22} & o_{23} \\ o_{31} & o_{32} & o_{33} \end{bmatrix}$$

1. Załóżmy, że :  $\sin \theta_5 \neq 0; \Rightarrow \theta_5 \neq 0$  i  $\theta_5 \neq \pi \Rightarrow o_{13} \neq 0$  i  $o_{23} \neq 0$

Wtedy:

$$\theta_4 = \operatorname{arctg} \frac{o_{23}}{o_{13}}$$

$$\theta_5 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{o_{13}^2 + o_{23}^2}}{o_{33}}$$

$$\theta_6 = \operatorname{arctg} \frac{o_{32}}{o_{31}}$$



2.  $\theta_5 = 0$

Wtedy, obroty ramion 4 i 6 następują wokół równoległych osi (obroty te nie powodują zmiany pozycji końcówki). Takie ustawienie ramion określane jest jako tzw. **konfiguracja osobliwa**, czyli „utrata” stopnia swobody (brak wpływu stopnia swobody na zmianę pozycji).

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} c_4 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 s_6 - s_4 c_6 & 0 \\ s_4 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 s_6 + c_4 c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_{11} & o_{12} & 0 \\ o_{21} & o_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4 + \theta_6) & -\sin(\theta_4 + \theta_6) & 0 \\ \sin(\theta_4 + \theta_6) & \cos(\theta_4 + \theta_6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_{11} & o_{12} & 0 \\ o_{21} & o_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jak widać, możemy wyznaczyć tylko sumę kątów, czyli jest nieskończenie wiele rozwiązań.

$$(\theta_4 + \theta_6) = \arctg \frac{o_{21}}{o_{22}}$$

Dla  $\theta_5 = \pi$  dostaniemy wyrażenie na różnicę kątów.

## Kinematyka prędkości

Podczas ruchu robota zarówno zmienne złączowe  $q$  jak i pozycja i orientacja końcówki łańcucha kinematycznego robota są funkcjami czasu.

Kinematyka prędkości określa związki między prędkościami liniową i kątową końcówki a prędkościami w złączach.

Relacja między wektorem zmiennych złączowych a wektorem zmiennych zadaniowych określona jest zależnością:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(q_1, \dots, q_n) \\ f_2(q_1, \dots, q_n) \\ \vdots \\ f_n(q_1, \dots, q_n) \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\quad} \quad \text{Wyznaczając pochodne względem czasu otrzymamy:}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_1} & \frac{\partial f_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial q_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dq_n}{dt} \end{bmatrix}$$
$$J(q)_{6 \times n} = \begin{bmatrix} J_v(q) \\ J_\omega(q) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d \underline{x}}{dt} = J(q) \cdot \frac{d \underline{q}}{dt}$$

Macierz pochodnych cząstkowych funkcji wektorowej jest znana w analizie matematycznej pod nazwą macierzy Jacobiego. Z tego powodu w robotyce macierz  $J(q)$  jest nazywana **jakobianem manipulatora**. Równanie to opisuje **proste zadanie kinematyki prędkości**.

Ze względu na sterowanie robota zapewniające realizację zadanej trajektorii ruchu końcówki , niezbędne jest znalezienie zależności wektora prędkości zmiennych złączowych od wektora prędkości zmiennych zadaniowych, czyli wyznaczenie relacji odwrotnej.

Tak sformułowany problem nazywany jest **odwrotnym zadaniem kinematyki prędkości**.

Jeżeli jakobian  $J(q)$  jest macierzą kwadratową, to rozwiązanie wyraża się wzorem:

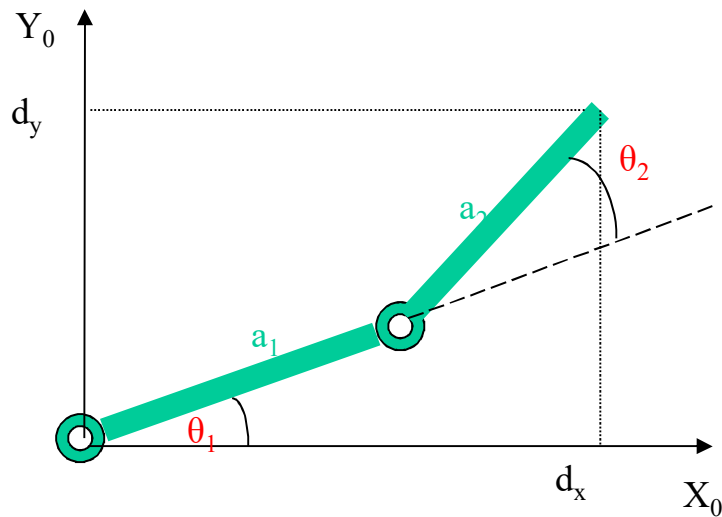
$$\frac{d \underline{q}}{dt} = [J(q)]^{-1} \cdot \frac{d \underline{x}}{dt}$$

Oczywiście, rozwiązanie istnieje tylko wtedy, gdy macierz  $J(q)$  jest nieosobliwa, czyli

$$\det[J(q)] \neq 0$$

Zerowanie wyznacznika jakobianu pozwala wyznaczyć **konfiguracje osobliwe** .

### Przykład



$$\begin{cases} d_x = a_1 \cdot \cos \theta_1 + a_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ d_y = a_1 \cdot \sin \theta_1 + a_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{d}_x = v_x = -a_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 - a_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{d}_y = v_y = a_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + a_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{d}_x \\ \dot{d}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \cdot \sin \theta_1 - a_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \cdot \cos \theta_1 + a_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$J_v(\theta)$$

## Planowanie i generowanie trajektorii

Bardzo często w zastosowaniach robotów istnieje potrzeba przeprowadzenia końcówki po określonej trajektorii zadanej w przestrzeni kartezjańskiej, np. po linii prostej.

Oprogramowanie podstawowe sterownika robota musi zapewnić taką możliwość.

Budowa trajektorii sprowadza się do opracowania zmian w czasie wektora współrzędnych kartezjańskich oraz zasady zmian w czasie wektora współrzędnych złączowych

$$\begin{bmatrix} x(t), y(t), z(t) \end{bmatrix}^T \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots, q_N(t) \end{bmatrix}^T$$

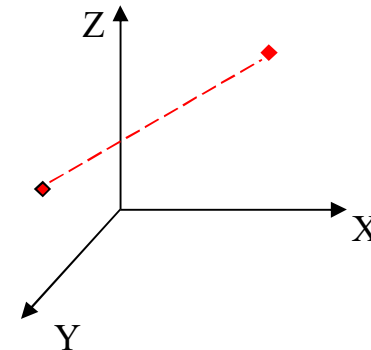
Algorytm formowania trajektorii sprowadza się do następujących etapów:

#### A. utworzenie szkieletu trajektorii w przestrzeni kartezjańskiej

podzielenie całej trajektorii na pewną ilość odcinków, z których każdy ma być zrealizowany w określonym czasie (tzn. wybranie punktów pośrednich na trajektorii)

np. dla trajektorii prostoliniowej łączącej punkty  $[x_p, y_p, z_p]^T$  i  $[x_k, y_k, z_k]^T$  równanie prostej można przedstawić w postaci

$$\frac{x_i - x_p}{x_k - x_p} = \frac{y_i - y_p}{y_k - y_p} = \frac{z_i - z_p}{z_k - z_p} = t$$



co oznacza, że przyrost ruchu w każdej osi ma być zrealizowany w tym samym czasie.

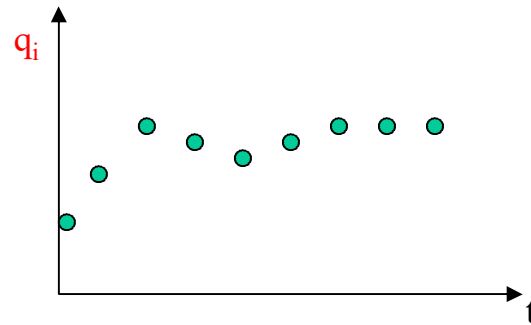
$$\begin{aligned}x_i &= x_p + t \cdot (x_k - x_p) \\y_i &= y_p + t \cdot (y_k - y_p) \\z_i &= z_p + t \cdot (z_k - z_p)\end{aligned}$$

## B. szkielet trajektorii w przestrzeni współrzędnych złączowych

uzyskujemy go poprzez rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki dla każdego punktu  $[x_i, y_i, z_i]^T$

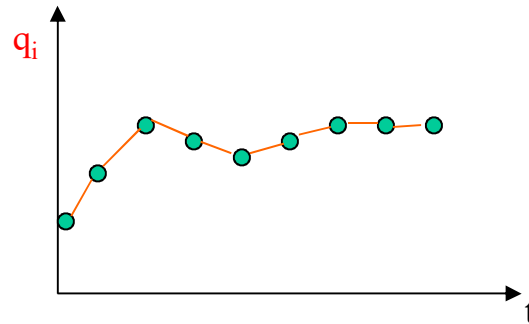
$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{kinematyki}]{\text{odwrotne zadanie}} \begin{bmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ q_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{Ni} \end{bmatrix}$$

Dla każdej zmiennej złączowej  $q_i$  uzyskujemy ciąg punktów  $q_{i0}, q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{iM}$  będących punktami podporowymi trajektorii zmiennej złączowej



### C. interpolacja trajektorii dla każdej zmiennej złączowej

wyznaczenie wartości położenia oraz prędkości dla dowolnej chwili czasu pomiędzy punktami podporowymi; najczęściej jest to realizowane poprzez interpolację wielomianową;



Przy planowaniu pojedynczego fragmentu ruchu występują co najmniej cztery ograniczenia:

- dwa na wartość położenia na początku i końcu odcinka

$$q(0) = q_0 \quad q(t_k) = q_k$$

- dwa na prędkość na początku i końcu ruchu

$$\dot{q}(0) = 0 \quad \dot{q}(t_k) = 0$$



Te cztery ograniczenia spełnia wielomian co najmniej trzeciego rzędu

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

Prędkość jest określona wielomianem 2-go rzędu

$$\dot{q}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

Łącząc te równania z ograniczeniami uzyskamy układ równań

$$\begin{cases} q_0 = a_0 \\ q_k = a_0 + a_1 t_k + a_2 t_k^2 + a_3 t_k^3 \\ 0 = a_1 \\ 0 = a_1 + 2a_2 t_k + 3a_3 t_k^2 \end{cases}$$

Rozwiązując, uzyskujemy współczynniki wielomianu

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_2 = \frac{3(q_k - q_0)}{t_k^2} \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_3 = \frac{-2(q_k - q_0)}{t_k^3} \end{cases}$$

Gdy trajektoria ma punkty pośrednie, w których prędkość nie jest równa zero, lecz jest określona, to warunki będą następujące:

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} q(t_k) = q_k \\ \dot{q}(t_k) = \dot{q}_k \end{cases}$$

wtedy układ równań będzie:

$$\begin{cases} q_0 = a_0 \\ q_k = a_0 + a_1 t_k + a_2 t_k^2 + a_3 t_k^3 \\ \dot{q}_0 = a_1 \\ \dot{q}_k = a_1 + 2a_2 t_k + 3a_3 t_k^2 \end{cases} \quad \longrightarrow$$

a współczynniki wielomianu:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 & a_1 = \dot{q}_0 \\ a_2 = \frac{3(q_k - q_0)}{t_k^2} - \frac{\left(2\dot{q}_0 + \dot{q}_k\right)}{t_k} \\ a_3 = \frac{-2(q_k - q_0)}{t_k^3} + \frac{\left(\dot{q}_0 + \dot{q}_k\right)}{t_k^2} \end{cases}$$

Dla każdego segmentu trajektorii wyznaczane są współczynniki wielomianu. Te współczynniki wykorzystywane są przez generator do obliczania położenia i prędkości dla dowolnego czasu. Generator oblicza wartości wielomianu w miarę upływu czasu. Po osiągnięciu końca jednego segmentu przywołuje nowy zbiór współczynników i dalej prowadzi generowanie trajektorii. Wyliczone wartości podawane są jako wartości zadane do serwomechanizmów poszczególnych osi robota.