1 基本算法

1.1 尺取法 (双指针)

用以解决序列的区间问题, 一般有两个要求:

- 1. 序列是有序的,需要先对序列进行排序
- 2. 问题与序列的区间有关, 操作两个或多个指针 i, j 表示区间

在 Python 中, 用 while 实现较为方便

扫描方向:

反向扫描, 左右指针: i, j 的方向相反;

同向扫描,快慢指针: i, j 的方向相同, 但是扫描速度一般不同, 可以形成一个大小可变的滑动窗口

1.1.1 反向扫描

找指定和的整数对

问题: 输入 n ($n \le 100000$) 个整数, 放在数组 a[] 中. 找出其中的两个数, 它们之和等于整数 m. (假定肯定有解).

输入:

第 1 行是数组 a[], 第 2 行是 m

Sample input

 $21\ 4\ 5\ 6\ 13\ 65\ 32\ 9\ 23$

28

Sample output

5 23

```
1 #哈希 复杂度为O(n), 但是需要较大的哈希空间
2 a = list(map(int, input().split()))
3 m = int(input())
4 s = set(a)
5 outed = set()
6 for item in s:
    if m - item in s and item not in outed:
       print(item, m - item)
       outed.add(m-item)
1 # 尺取法 复杂度为O(n \log_2 n), 其中, 排序的复杂度为O(\log_2 n), 检查的复杂度为O(n)
2 a = list(map(int, input().split()))
3 a.sort()
4 m = int(input())
6 # 双指针
7 i, j = 0, len(a) - 1
8 while (i < j):</pre>
    s = a[i] + a[j]
    # s < m: i增加1, 之后的s>=当前s
    if s < m:
11
12
      i += 1
    elif s > m:
13
14
      j -= 1
     print("{} {}".format(a[i], a[j]))
     i += 1
```

2

判断回文串

输入: 第1行输入测试实例个数, 之后每行输入一个字符串

输出: 是回文串输出 yes, 不是输出 no

```
1 n = int(input())
2 for i in range(n):
     s = str(input())
     i, j = 0, len(s) - 1
     while i < j:
       flag = False
       if s[i] == s[j]:
         flag = True
       else:
9
         flag = False
10
         break
11
       i += 1
12
       j -= 1
13
     if (flag):
14
       print('yes')
15
16
     else:
       print('no')
```

1.1.2 同向扫描

使用尺取法产生滑动窗口

寻找区间和

给定一个长度为 n 的正整数数组 a[] 和一个数 s, 在数组中找一个区间, 使得该区间的数组元素之和等于 s. 输出区间的起点和终点位置

第 1 行输入数组长度 n, 第 2 行输入数组, 第 3 行为 s

Sample input

15

 $6\ 1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 4\ 2\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14$

6

Sample output

0 0

13

5 5

67

初始值 i = j = 0

如果 sum = s: 输出一个解, sum 减去 a[i], i++

如果 sum < s: j++, sum + a[j]

如果 sum > s: sum - a[i], i++

```
1 n = int(input())
2 a = list(map(int, input().split()))
s = int(input())
5 sum = a[0]
6 i, j = 0, 0
7 while i < n and j < n:
    if sum == s:
       print("{} {}".format(i, j))
10
       sum -= a[i]
11
      i += 1
       j += 1
12
      sum += a[j]
13
    elif sum < s:
14
15
     j += 1
      sum += a[j]
17
    elif sum > s:
      sum -= a[i]
18
     i += 1
19
```

数组去重

给出一个数组,输出去除重复元素之后的数组

1 #哈希,数据多或者数值过大时需要占用大量的空间

```
2 a = list(map(int, input().split()))
s = set(a)
4 unique_a = list(s)
5 print(unique_a)
1 # 尺取法
2 a = list(map(int, input().split()))
3 # a排序,使得相同元素排列在一起
4 a.sort()
5 n = len(a)
6 # 双指针均从0开始
7 i, j = 0, 0
8 # j始终指向无重复元素部分的最后一个元素
9 while i < n and j < n:
    # 若 i和 j指向的元素不同, j++, 将 i指向的元素复制到 j上
    # EX: 1 2(j) 3(i) 3
    # -> 1 2 3(j, i) 3
12
    # EX: 1 2 3(j) 3 4(i)
13
   # -> 1 2 3 3(j) 4(i)
14
   # -> 1 2 3 4(j) 4(i)
    if a[i] != a[j]:
     j += 1
17
      a[j] = a[i]
18
    i += 1
19
20 unique_a = a[0:j+1]
21 print(unique_a)
```

找相同数对

洛谷 P1102

给出一串数字和一个数字 C,要求计算出所有 A - B = C 的数对的个数 (不同位置的数字一样的数对算不同的数对)

输入: 2 行, 第 1 行输入整数 n 和 C, 第 2 行输入 n 个整数

输出: 满足 A - B = C 的数对的个数

Sample Input

6 3

 $8\; 4\; 5\; 7\; 7\; 4$

Sample Output

5

```
1 n, c = map(int, input().split())
2 a = list(map(int, input().split()))
3 a.sort()
4
5 i, j, k = 0, 0, 0
6 ans = 0
7
8 for i in range(n):
9 # j, k指向相同元素区间的起点和终点后1个元素
10 # 寻找的对象是区间内的元素 - a[i] = C
11 while j < n - 1 and a[j] - a[i] < c:
12     j += 1
13 while k < n and a[k] - a[i] <= c:
14     k += 1
15     if a[j] - a[i] == c and a[k-1] - a[i] == c and k - 1 >= 0:
16     ans += k - j
17 print(ans)
```

1.2 二分法

1.2.1 Python 二分搜索库 bisect

```
1 from bisect import *
2 def fun(find, x, bias=0):
    global a
    index = find(a, x) + bias
     print("index: {}, element: {}".format(index, a[index]))
7 global a
8 a = [1, 2, 4, 4, 4, 5]
9 # target: x
10 x = 4
11
12 # first > x
13 fun(bisect_right, x)
14 # first >= x
15 fun(bisect_left, x)
16 # first = x
17 fun(bisect_left, x)
18 # last = x
19 fun(bisect_right, x, bias=-1)
20 # last <= x
21 fun(bisect_right, 3, bias=-1)
22 # last < x
23 fun(bisect_left, x, bias=-1)
24 # count x in a monotonic array
26 print(a.count(x))
27 # fast, using binary search
28 print(bisect_right(a, x) - bisect_left(a, x))
```

output

```
1 index: 5, element: 5
2 index: 2, element: 4
3 index: 2, element: 4
4 index: 4, element: 4
5 index: 1, element: 2
6 index: 1, element: 2
7 3
8 3
```

1.2.2 整数二分

需要注意终止边界和左右区间问题, 避免漏解和死循环

mid 的计算

```
1 # 适用单调递增序列的后继问题
2 mid = 1 + (r - 1) // 2 # 相当于计算出的mid向下取整, 计算的是左中位数
3 # 适用单调递增序列的前驱问题
4 mid = 1 + (r - 1 + 1) // 2 # 相当于计算出的mid向上取整, 计算的是右中位数
```

在单调递增序列中寻找 x 或 x 的后继

在单调递增序列中寻找第一个 x 的位置, 若没有 x, 则寻找比 x 大的第一个数的位置, 即寻找第一个 >= x 的位置

```
1 # 左闭右开[0, n)
2 l, r = 0, n
3 while l < r:
4 mid = l + (r - l) // 2
5 if a[mid] >= x:
6 r = mid
7 else:
8 l = mid + 1
9 return l
```

在单调递增序列中寻找 x 或 x 的前驱

在单调递增序列中寻找第一个 x 的位置, 若没有 x, 则寻找比 x 小的第一个数的位置, 即寻找第一个 <= x 的位置

```
# 左开右闭(-1, n-1]
2 l, r = -1, n - 1
3 while l < r:
4 mid = l + (r - l + 1) // 2
5 if a[mid] <= x:
6 l = mid
7 else:
8 r = mid - 1
9 return l
```

寻找 minimum

7

寻找指定和的整数对

输入 n (n <= 100000) 个整数, 找出其中的两个数, 使它们之和等于整数 m, 假设肯定有解

```
1 from bisect import *
 3 a = list(map(int, input().split()))
 4 m = int(input())
 5 n = len(a)
 6 a.sort()
8 # ver. 1
9 for i in range(n-1):
    # bisearch, a[k] = m - a[i]
    1, r = i+1, n
12
    x = m - a[i]
13
    while 1 < r:
      mid = 1 + (r - 1) // 2
14
      if a[mid] >= x:
15
        r = mid
16
17
      else:
       1 = mid + 1
18
    if a[1] == x:
19
       print("{} {}".format(a[i], a[l]))
20
^{21}
22 # ver. 2
23 for i in range(n-1):
24
    # bisearch, a[k] = m - a[i]
    x = m - a[i]
25
    # search from a[i+1] to a[end-]
p = bisect_left(a, x, lo=i+1, hi=n)
    if a[p] == x:
       print("{} {}".format(a[i], a[p]))
```

8

1.2.3 整数二分 最大值最小化

序列划分: 二分 + 贪心

给定一个序列, 如 $\{2, 2, 3, 4, 5, 1\}$, 将其划分为 m 个连续的子序列 S_1, S_2, S_3 , 每个子序列至少有一个元素, 使得每个子序列的和的最大值最小

EX. m = 3

划分为 (2, 2, 3), (4, 5), (1) 子序列和分别为 7, 9, 1, 最大值为 9 划分为 (2, 2, 3), (4), (5, 1) 子序列和为 7, 4, 6, 最大值为 7, 优于前一个

```
1 # Input:
3 # m: amount of subarray
4 # Output:
5 # x: minimum of maximum of sum(all possible subarrays)
6 # subarrays
  from bisect import *
10 a = list(map(int, input().split()))
11 m = int(input())
12 n = len(a)
13 l, r = max(a), sum(a)
14 subs = []
16 while 1 < r:
    mid = 1 + (r - 1) // 2
     # greedy divide subarray
     # each sum(subarray) <= mid
    flag = False
    idx = 0
22
     subs = []
     for i in range(m):
23
       sum = 0
24
       while idx < n and sum + a[idx] <= mid:
25
         sum += a[idx]
         idx +=1
27
       if idx == n or sum + a[idx] > mid:
28
         subs.append(idx-1)
29
30
     # judge
     if subs[-1] < n-1:
       flag = False
32
     else:
33
      flag = True
34
     # binary control
35
     if flag:
       # reduce
39
       # enlarge
40
       l = mid + 1
41
43 print('minimum sum: ', 1)
44 for i in range(m):
    if i == 0:
45
       print(a[ : subs[0]+1])
46
47
       print(a[subs[i-1]+1 : subs[i]+1])
```

1.2.4 整数二分 最小值最大化

洛谷 P1824 进击的奶牛

在一条很长的直线上, 指定 n 个坐标点. 有 c 头牛, 每头牛占据一个坐标点, 求相邻两头牛之间距离的最大值 Input:

第 1 行输入: n c

第2行开始每行输入:一个整数,表示每个点的坐标

```
1 n, c = map(int, input().split())
3 for i in range(n):
     x.append(int(input()))
5 x.sort()
7 def check(x, dis, c):
    i = 1
    last = 0
    c -= 1
10
     while c > 0 and i < len(x):
11
       while i < len(x) and x[i] - x[last] < dis:
12
         i += 1
13
       if i < len(x) and x[i] - x[last] >= dis:
14
15
16
         last = i
17
         i += 1
     if c == 0:
      return True
20
       return False
21
22
23 l, r = 0, x[-1] - x[0]
24 \text{ ans} = 0
25 while 1 < r:
     mid = 1 + (r - 1) // 2
     if check(x, mid, c):
       ans = mid
       1 = mid + 1
    else:
       r = mid
32 print(ans)
```

1.2.5 实数二分

for 控制: 过大的 for 次数会超时, 过小的会导致精度不够答案错误. 一般取 100, 但是循环体内计算量大的时候容易超时, 可以缩减到 50

while 控制: while 需要设计精度 eps, 过小的 eps 会超时, 过大的会导致精度不够答案错误

```
1 # 精度, 可以调整
2 \text{ eps} = 1e-7
3 while r - 1 > eps:
4 # for ver.
5 # epoch = 100 # 轮次
6 # for i in range(epochs):
    mid = 1 + (r - 1) / 2.0
    if check(mid):
       # reduce range
       r = mid
10
11
    else:
       # enlarge range
12
       1 = mid
13
14 return 1
```

分蛋糕 poj 3122

m+1 个人分 n 个半径不同的蛋糕,要求每个人分得的蛋糕重量一致,且必须是可以切出来的一整块,每个人能分到的最大蛋糕是多少.

Input:

第一行: 1 个整数, 表示测试用例个数

对每个测试, 第一行输入 n, m. 第二行输入 n 个整数, 表示每个蛋糕的半径

Output:

对于每个测试,输出一个答案,保留 4 位小数

可以将问题建模为最小值最大化问题, 用面积代替重量

保留小数

1 a = 1.13456 # float

```
2 ans = format(a, '.4f) # 四舍五入保留4位小数
1 def check(mid, area, f):
     sum = 0
     for i in range(len(area)):
       sum += int(area[i] / mid)
     if sum >= f:
       return True
     else:
       return False
10 \text{ eps} = 1e-5
11 pi = 3.1415926
12 T = int(input())
13 for t in range(T):
     n, f = map(int, input().split())
     cakes = list(map(float, input().split()))
15
     maxx = 0
     area = []
17
     for i in range(n):
18
      area.append(pi * cakes[i] * cakes[i])
19
       if area[i] > maxx:
20
21
         maxx = area[i]
    1, r = 0, maxx
     while r - 1 > eps:
       mid = 1 + (r - 1) / 2.0
24
      if check(mid, area, f):
25
         1 = mid
26
       else:
         r = mid
     ans = format(1, '.4f')
29
     print(ans)
```

1.3 三分法

用于求取单峰函数的极值. 通过在 [l, r] 内取两个点 mid1, mid2, 将函数分为三段

```
1 k = (r - 1) / 3.0
2 mid1, mid2 = 1 + k, r - k
```

三分法模板 洛谷 P3382

给出一个 N 次多项式函数, 保证在区间 [l, r] 内存在一点 x, 使得 x 是函数在区间上的极大值, 求出 x Input:

第一行输入 n: N l r

第二行输入: N + 1 个实数, 表示从高到低各项的系数

Output:

x, 四舍五入保留 5 位小数

```
1 n, l, r = map(float, input().split())
2 n = int(n)
3 cons = list(map(float, input().split()))
4 def f(x, n, cons):
    for i in range(1, n+2):
       sum += cons[-i] * pow(x, i-1)
    return sum
9 eps = 1e-6
10 while r - 1 > eps:
k = (r - 1) / 3.0
mid1, mid2 = 1 + k, r - k
    if f(mid1, n, cons) < f(mid2, n, cons):</pre>
13
     1 = mid1
14
     r = mid2
17 ans = format(1, '.5f')
18 print(ans)
```

三分法函数洛谷 P1883

给定 n 个二次函数 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ (均形如 $ax^2 + bx + c$),设 $F(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$,求 F(x) 在区间 [0, 1000] 上的最小值。

输入格式

输入第一行为正整数 T,表示有 T 组数据。

每组数据第一行一个正整数 n,接着 n 行,每行 3 个整数 a,b,c,用来表示每个二次函数的 3 个系数,注意二次函数有可能退化成一次。

输出格式

每组数据输出一行,表示 F(x) 的在区间 [0,1000] 上的最小值。答案精确到小数点后四位,四舍五入。输入输出样例 1

输入1

2

1

200

2

200

2 - 42

输出1

0.0000

0.5000

说明/提示

对于 50% 的数据, $n \le 100$ 。

对于 100% 的数据, T < 10, $n \le 10^4$, $0 \le a \le 100$, $|b| \le 5 \times 10^3$, $|c| \le 5 \times 10^3$.

```
1 def cal(cons, x):
     ans = -float('inf')
     for a, b, c in cons:
       ans = \max(ans, a * x ** 2 + b * x + c)
     return ans
7 eps = 1e-9
8 T = int(input())
9 for t in range(T):
    n = int(input())
10
     cons = \Pi
11
12
     for i in range(n):
      a, b, c = map(float, input().split())
      cons.append([a, b, c])
14
    1 = 0
15
    r = 1000
16
     while r - 1 > eps:
17
      margin = (r - 1) / 3.0
      mid1 = 1 + margin
       mid2 = r - margin
       f1 = cal(cons, mid1)
21
       f2 = cal(cons, mid2)
22
      if f1 <= f2:
23
        r = mid2
24
25
       else:
         1 = mid1
    ans = cal(cons, 1)
27
    print(format(ans, '.4f'))
```

1.4 排序与排列

1.4.1 排序

Python 自定排序 key

key function:

Input: x, y

Output: 1: x > y

0: x = y

-1: x < y

1 from functools import cmp_to_key

 $_2$ def cmp(x, y):

- 3 # compare x and y
- 4 # return result
- $5 \text{ sort_key} = \text{cmp_to_key}(\text{cmp})$

洛谷 P1093

P1093 [NOIP 2007 普及组] 奖学金

题目背景

NOIP2007 普及组 T1

题目描述

某小学最近得到了一笔赞助,打算拿出其中一部分为学习成绩优秀的前 5 名学生发奖学金。期末,每个学生都有 3 门课的成绩:语文、数学、英语。先按总分从高到低排序,如果两个同学总分相同,再按语文成绩从高到低排序,如果两个同学总分和语文成绩都相同,那么规定学号小的同学排在前面,这样,每个学生的排序是唯一确定的。

任务: 先根据输入的 3 门课的成绩计算总分, 然后按上述规则排序, 最后按排名顺序输出前五名名学生的学号和总分。

注意,在前5名同学中,每个人的奖学金都不相同,因此,你必须严格按上述规则排序。例如,在某个正确答案中,如果前两行的输出数据(每行输出两个数:学号、总分)是:

7 279

5 279

这两行数据的含义是: 总分最高的两个同学的学号依次是 7 号、5 号。这两名同学的总分都是 279 (总分等于输入的语文、数学、英语三科成绩之和), 但学号为 7 的学生语文成绩更高一些。

如果你的前两名的输出数据是:

5 279

7 279

则按输出错误处理,不能得分。

输入格式

共n+1 行。

第 1 行为一个正整数 n < 300,表示该校参加评选的学生人数。

第 2 到 n+1 行,每行有 3 个用空格隔开的数字,每个数字都在 0 到 100 之间。第 j 行的 3 个数字依次表示学号为 j-1 的学生的语文、数学、英语的成绩。每个学生的学号按照输入顺序编号为 $1 \sim n$ (恰好是输入数据的行号减 1)。

保证所给的数据都是正确的,不必检验。

输出格式

共 5 行,每行是两个用空格隔开的正整数,依次表示前 5 名学生的学号和总分。

```
输入输出样例 1
输入 1
```

```
6
90 67 80
87 66 91
```

78 89 91

88 99 77

67 89 64

78 89 98

输出1

6 265

4 264

3 258

2 244

1 237

```
1 # 洛谷P1093
 3 # 自定义比较函数 cmp -> key
 4 \# x: (id, c, m, e, sum)
5 # Input: x, y
 6 # Output:
 7 \# 1: x > y; 0: x = y; -1: x < y
 8 from functools import cmp_to_key
 9 def cmp(x, y):
     if x[4] > y[4]:
11
       return 10
     elif x[4] < y[4]:
12
      return -1
13
     else:
14
      if x[1] > y[1]:
15
        return 1
17
       elif x[1] < y[1]:
        return -1
18
       else:
19
         if x[0] < y[0]:</pre>
20
           return 1
^{21}
22
         else:
            return -1
23
24 \text{ sort\_key} = \text{cmp\_to\_key}(\mathbf{cmp})
25
26 n = int(input())
27 stu = []
28 for id in range(1, n+1):
    c, m, e = map(int, input().split())
    summ = c + m + e
30
    stu.append([id, c, m, e, summ])
32 rst = sorted(stu, key=sort_key, reverse=True)
33 for i in range(5):
    print('{} {}'.format(rst[i][0], rst[i][-1]))
```

1.4.2 排列

Python 生成全排列

```
_{1} from itertools import permutations
 2 a = [1, 2, 3]
 3 # 全排列
 4 per = permutations(a)
 5 for item in per:
 6 print(item)
 7 # Output:
 8 (1, 2, 3)
9 (1, 3, 2)
10 (2, 1, 3)
11 (2, 3, 1)
12 (3, 1, 2)
13 (3, 2, 1)
15 # n取m排列
16 per = permutations(a, 2)
17\ \mathbf{for}\ \mathbf{item}\ \mathbf{in}\ \mathbf{per:}
    print(item)
19 # Output:
20 (1, 2)
21 (1, 3)
22 (2, 1)
23 (2, 3)
24 (3, 1)
25 (3, 2)
```

蓝桥杯 2016 省赛 Cpp A 组 T6

```
有加减乘除 4 种运算:
```

```
() + () = ()
```

$$() - () = ()$$

$$() \times () = ()$$

$$() \div () = ()$$

每个括号代表 1-13 中的某个数字, 但不能重复, 一共有多少种方案

```
1 # 蓝桥杯2016省赛C++A组第6题
 3 a = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]
 4 n = len(a)
 5 vis = [False] * n
 6 b = [None] * n
 7 ans = 0
 9 def permu(s, t):
    global ans
     # 输出
    if s == 12 and b[9] == b[10] * b[11]:
      ans += 1
13
      return
14
     # 剪枝
15
    if s == 3 and b[0] + b[1] != b[2]:
17
    if s == 6 and b[3] - b[4] != b[5]:
18
      return
19
    if s == 9 and b[6] * b[7] != b[8]:
20
21
     return
     # 全排列
    for i in range(t):
23
      if not vis[i]:
24
        vis[i] = True
25
        b[s] = a[i]
26
         permu(s+1, t)
^{27}
         vis[i] = False
30 permu(0, n)
31 print(ans)
```

1.5 分治法

将问题分解为多个独立的子问题,子问题的规模大致相等. 分治法常能够显著降低算法的时间复杂度. 分治法经典应用: 汉诺塔, 归并排序, 快速排序等

汉诺塔 蓝桥 1512

Input: 两个整数 N M. N 为要移动的盘子数, M 为最少移动步骤的第 M 步

Output:

第一行: #No: a->b. No 为移动的盘子编号, a->b 为从 a 杆移动到 b 杆, 取值为 {A, B, C}

第二行:一个整数,最少移动步数

```
1 step = 0
2 n, m = map(int, input().split())
4 def hanoi(x, y, z, n):
     global step, m
    if n == 1:
       step += 1
      if step == m:
        print('#{}: {}->{}'.format(m, x, z))
10
11
      hanoi(x, z, y, n-1)
      step += 1
12
     if step == m:
13
       print('#{}: {}->{}'.format(m, x, z))
14
15
       hanoi(y, x, z, n-1)
16
17 hanoi('A', 'B', 'C', n)
18 print(step)
```

逆序对 hdu 4911

输入一个序列, 交换任意两个元素, 不超过 k 次交换之后, 最少的逆序对有多少个.

逆序对: a_i, a_j , when $1 \le i \le j \le n$ and $a_i > a_j$

Input:

第一行: n, k

第二行: n 个整数

Output: 最少的逆序对数量

```
1 # hdu 4911
3 n, k = map(int, input().split())
4 a = list(map(int, input().split()))
6 b = [0] *10000
8 def merge(1, mid, r):
     global count, a, b
     i, j = 1, mid+1
    t = 0
     while i <= mid and j <= r:
12
      if a[i] > a[j]:
13
       b[t] = a[j]
14
         t, j = t+1, j+1
15
16
         count += mid - i + 1
17
        b[t] = a[i]
18
         t, i = t+1, i+1
19
20
    while i <= mid:
21
     b[t] = a[i]
      t, i = t+1, i+1
    while j <= r:
23
      b[t] = a[j]
24
      t, j = t+1, j+1
25
    for i in range(t):
26
       a[l+i] = b[i]
^{27}
29 def merge_sort(1, r):
    if 1 < r:
30
      mid = (1 + r) // 2
31
      merge_sort(1, mid)
32
     merge_sort(mid+1, r)
       merge(l, mid, r)
36 merge_sort(0, len(a)-1)
37 if count <= k:
     print(0)
39 else:
     print(count - k)
```