Laboratorium komputerowe z przedmiotu "Metody Obliczeniowe", prowadzący: dr hab. inż. L.Bieniasz

Ćwiczenie 11-g	Łukasz Marcin

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:

równanie różniczkowe cząstkowe $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\left[\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \pi^2 \sin(\pi x)\right]$, określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in [0, 1]$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,

warunek początkowy $U(x,0) = 0$, oraz

warunki brzegowe $U(0,t) = 0, \;\; U(1,t) = 0$.

Zagadnienie to może opisywać powstanie stanu ustalonego dla stężenia substancji o współczynniku dyfuzji D, w membranie o grubości 1 i przenikalnych ściankach, w wyniku ucieczki substancji z membrany wskutek transportu dyfuzyjnego, oraz powstawania tej substancji wewnątrz membrany.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać: $U(x,t) = \left[1 - \exp(-\pi^2 Dt)\right]\sin(\pi x)$.

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć ustaloną wartość $\lambda = D\, \delta t/h^2$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (najlepiej w skali logarytmicznej, o ile to możliwe). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.

(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).

(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. **Należy wyjaśnić ewentualnie obserwowane zmiany błędu w czasie.**

Algorytmy:

Dyskretyzacja:

- ☐ Klasyczna metoda bezpośrednia
- ■ Metoda pośrednia Laasonen
- ■ Metoda pośrednia Cranka-Nicolson

Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:

- ☐ Dekompozycja LU macierzy pełnej
- ■ Algorytm Thomasa
- ☐ Metoda iteracyjna Jacobiego
- ■ Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela
- ☐ Metoda iteracyjna SOR (należy dobrać ω)

Parametry:

$t_{max} = 0.5$, $D = 1$.