

INVESTIGAÇÃO DO ESTADO-DA-ARTE DA TEORIA ESPECTRAL DOS GRAFOS EM PROBLEMAS DE VISÃO COMPUTACIONAL

Carlos Eduardo Valle Rosa Filho¹
Davi Matias Soares Genuino²

RESUMO

Este relatório traz os principais métodos atuais da Teoria Espectral dos Grafos aplicada em problemas de visão computacional, mais especificamente Segmentação de Imagens e Reconhecimento de Padrões. Além disso, é apresentada uma proposta de abordagem algorítmica e sua implementação, bem como a discussão de resultados de testes, para o terceiro trabalho da disciplina de Grafos (DIM0549 - T01 - 2024.1) da UFRN.

Palavras-chave: Grafos, Teoria Espectral dos Grafos, Visão Computacional.

1. INTRODUÇÃO

A Teoria Espectral dos Grafos (TEG) lida com o estudo das propriedades de um grafo por meio de sua representação em uma matriz, como a Matriz de Adjacência ou Matriz Laplaciana. Tal área possui diversas aplicações, como a identificação de elementos em uma imagem, análise de proximidade genética entre populações [15], modelação de ondas cerebrais [23], entre outras.

Neste relatório, abordaremos alguns dos usos da Teoria Espectral dos Grafos relacionados à visão computacional, apresentando um esboço do estado-da-arte desse campo de estudos e das técnicas utilizadas para as respectivas aplicações. Inicialmente, buscou-se abordar a Segmentação de Imagens e o Reconhecimento de Padrões. Contudo, devido à limitação de tempo disponível para a pesquisa, na questão da implementação, optou-se somente pela Segmentação de Imagens.

Este documento está dividido nas seguintes seções: Introdução (1), Descrição do Problema Real (2), Apresentação do Estado da Arte (3), Modelo em Grafos (4), Proposta de Abordagem Algorítmica (5), Implementação (6), Resultados (7), Conclusão (8) e Referências (9).

¹Aluno do Curso de Bacharelado em Tecnologia da Informação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, carlosvallerosafilho@gmail.com

²Aluno do Curso de Bacharelado em Tecnologia da Informação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, davimatiassg@gmail.com

2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA REAL

2.1 Segmentação de Imagens

Considerando uma imagem digital como um conjunto de *pixels*, procuramos achar uma partição desse conjunto tal que os elementos da imagem sejam destacados. Tal destaque precisa ter bordas suaves e contínuas, além de não conter artefatos, ou seja, delimitações na imagem em que não há a presença de um elemento claro.

2.2 Reconhecimento de Padrões

Dado duas imagens digitais, procuramos verificar seu grau de semelhança. Normalmente, utilizamos uma imagem como parâmetro para identificar, dentro de um conjunto, imagens semelhantes. Por exemplo: averiguar se duas assinaturas pertencem a um mesmo indivíduo, ou identificar tumores em imagens proporcionadas por um exame.

3. APRESENTAÇÃO DO ESTADO DA ARTE

3.1 Revisão bibliográfica

A formulação do Estado da Arte deu-se através do encadeamento de pesquisas a respeito da temática de grafos, de forma a afunilar o escopo dos resultados em torno das aplicações da Teoria Espectral dos Grafos, seguida da separação dos documentos acadêmicos mais relevantes. Após isso, analisamos os exemplos práticos e testes realizados nessas pesquisas para melhor descrever as potencialidades e limitações das citadas aplicações.

A pesquisa do estado da arte foi realizada majoritariamente com a plataforma indexadora de busca *Google Scholar*, destinada à pesquisa acadêmica. Realizamos a nossa pesquisa observando as combinações de quatro palavras-chave, unidas em duas *strings*, usadas como descritores da pesquisa. A primeira *string* de descritores foi formada ao concatenar as palavras-chave “*Pattern Recognition*” e “*Spectral Graph Theory*”, enquanto a segunda *string* unia os conceitos de “*Computer Vision*” e “*Graph Theory*”. Os resultados foram filtrados para conter pesquisas entre 2020 e 2024.

Em razão de particularidades da plataforma utilizada, separamos os 30 primeiros resultados de cada busca realizada e, em seguida, realizamos uma breve análise visual dos documentos obtidos a fim de encontrar os resultados mais alinhados com o foco

desta pesquisa. Ao todo, destacamos 9 produções acadêmicas que apresentam análises empíricas e algoritmos em grafos associados à teoria espectral dos grafos ou à visão computacional, disponíveis pública e gratuitamente na internet. Na tabela 1, é possível verificar algumas informações sobre as pesquisas mencionadas.

Tabela 1 - Textos selecionados para pesquisa do Estado da Arte

Título	Autores	Ano
Graph-based pattern recognition on spectral reduced graphs	Anthony Gillioz, Kaspar Riesen	2023
A Spectral Representation of Networks: The Path of Subgraphs	Shengmin Jin <i>et al</i>	2022
Understanding Spectral Graph Neural Network	Xinye Chen	2020
Analyzing the Expressive Power of Graph Neural Networks in a Spectral Perspective	Muhammet Balcilar <i>et al</i>	2023
Graph Structural Attack by Perturbing Spectral Distance	Lu Lin <i>et al</i>	2022
Interrelationship of Visual Elements of Digital Media Artworks Based on Spectral Graph Theory	Jian Zhang, Yang Tan	2023
Recognition of building group patterns using graph convolutional network	Rong Zhao <i>et al</i>	2020
SimMatchV2: Semi-Supervised Learning with Graph Consistency	Mingkai Zheng <i>et al</i>	2023
DeepCut: Unsupervised Segmentation Using Graph Neural Networks Clustering	Amit Aflalo <i>et al</i>	2023

Fonte: Google Acadêmico (2024)

Primeiramente, é importante alertarmos que as produções selecionadas constituem apenas uma pequena amostra dos resultados da pesquisa. Ainda assim, é possível verificar uma clara heterogeneidade entre as abordagens escolhidas pelos(as) autores(as). A presença simultânea de aplicações da TEG na já citada Visão Computacional [11, 25, 26], na Inteligência Artificial desenvolvida a partir de Redes Neurais [7, 26] e até mesmo na segurança digital dessas mesmas Redes Neurais [16] revela uma amplitude de funcionalidades considerável para essa representação dos Grafos, justificando o interesse da comunidade científica nesta área do conhecimento.

Ainda nesse ensejo, destacamos que estas não foram as únicas pesquisas que se debruçaram sobre a Teoria dos Grafos como ferramenta para a visão computacional que

encontramos através da busca, mas foram escolhidas como exemplos destacáveis de acordo com a sua potencial utilidade para o desenvolvimento de uma abordagem algorítmica para este trabalho. Com isso em mente, podemos partir para uma análise pontual de cada produção acadêmica apresentada na tabela, visando entender mais aprofundadamente as obras selecionadas.

Em [11], apresenta-se um método para reduzir um grafo em suas subestruturas mais importantes, utilizando Aglomeração Espectral de Grafos, com o objetivo de reduzir o custo computacional de algoritmos de comparação entre grafos, mantendo a mesma acurácia. Já em [14], propõe-se uma representação de rede 3D que utiliza informações espectrais dos subgrafos de uma certa rede para fins de Aprendizado de Representação de Rede.

Em [7], mostra-se como o modelo de Rede Neural Convolutacional em Grafos é motivado pela Teoria Espectral dos Grafos e discute-se os principais modelos espectrais em conjunto com seus fundamentos. Ademais, em [3], analisa-se a capacidade do domínio espectral em Redes Neurais em Grafos em distinguir se dois grafos são isomorfos. Enquanto em [16], investiga-se a disrupção de filtros espectrais no domínio Fourier, os quais são as bases teóricas para Redes Convolucionais em Grafos.

Ademais, em [25], estuda-se relações mútuas entre elementos de uma imagem em mídias digitais atuais, por meio da sua representação pelo espectro de correlação de *Laplace feature vectors* em combinação com Teoria Espectral dos Grafos. Já em [26], propõe-se uma nova Rede Neural Profunda baseada em convoluções de grafos para identificar padrões em grupos de prédios em um espaço urbano. Enquanto em [27], introduz-se um novo algoritmo de aprendizado semi-supervisionado para classificação de imagens, com uma abordagem utilizando grafos. Por fim, em [1], mostra-se uma Rede Neural em Grafos de baixo peso para substituir métodos de aglomeração tradicionais, otimizando a função objetiva de aglomeração.

Abordando de modo mais pontual as especificidades que mencionamos na seção de Descrição do Problema real, com enfoque no problema da Segmentação de Imagens, observamos diversas abordagens diferentes para a solução do problema nas quais 9 utilizam Teoria dos Grafos, dentre as quais 3 utilizam conhecimentos da Teoria Espectral dos Grafos [24]. Nota-se que soluções envolvendo TEG não são as mais populares, porém, como podemos ver em [4, 6, 8, 21] abordagens utilizando essa teoria ainda são relativamente novas, portanto ainda possuem potencial para melhorias.

Já no problema de Reconhecimento de Padrões, notamos pouca utilização de soluções baseadas em grafos [19]. Entretanto, nas que utilizam grafos, observa-se a presença de soluções baseadas em TEG, as quais, por serem normalmente de natureza diferente de soluções pré-estabelecidas, não sofrem dos mesmos problemas. Por exemplo, como podemos ver em [20], a solução baseada em TEG é viável, diferentemente das técnicas de matching para maior isomorfismo entre grafos já existentes.

No geral, as soluções baseadas em TEG trazem algumas melhorias em relação a soluções pré-estabelecidas que utilizam Teoria dos Grafos, porém não necessariamente se destacando como a melhor abordagem para o problema fora deste contexto.

3.2 Casos de teste ou geradores de casos de teste encontrados na literatura

Em nossa pesquisa, casos de teste se caracterizam por imagens pré-segmentadas ou com rótulos, para a verificação de corretude dos algoritmos que implementam soluções dos problemas em questão.

Destacamos três bancos de dados que atendem a essas necessidades: *Berkeley Image Database* [18], um banco de dados de imagens segmentadas por humanos, AFF-WILD2 [12] que possui imagens faciais rotuladas e CASIA-OLHWDB [17] a qual possui sequências de coordenadas de traços de caracteres chineses. Vale citar que é preferível a utilização do primeiro para a Segmentação de Imagens e somente o segundo e o terceiro banco de dados têm utilidade para o Reconhecimento de Padrões.

4. MODELO EM GRAFOS

4.1 Segmentação de Imagens

Podemos converter a imagem fornecida em um grafo simples ponderado, em seguida segmentar este grafo para obter uma segmentação da imagem. Para isso, basta considerar os *pixels* da imagem como vértices e as arestas tais que ligam vértices adjacentes. O peso das arestas, definido por uma métrica, é maior nas partes do grafo onde os vértices, representam *pixels* de um mesmo elemento na imagem.

Utilizando conhecimentos da Teoria Espectral dos Grafos, convém o cálculo do segundo autovetor da Matriz Laplaciana do grafo, denominado de Vetor de Fiedler. Tal vetor associa valores para cada vértice do grafo, em que vértices ligados por arestas de peso maior tendem a ficar com valores parecidos. Desta maneira, segmentamos o grafo,

agrupando vértices com base em seus valores [13]. Após obter a segmentação do grafo, basta segmentar a imagem tendo em mente a relação biunívoca entre vértices e *pixels*.

4.2 Reconhecimento de Padrões

Inicialmente, obtemos dígrafos a partir das duas imagens fornecidas por meio de um método pré-estabelecido, a depender da finalidade. Em seguida, basta verificar a semelhança desses grafos.

Tal verificação pode ser feita analisando o espectro das Matrizes Laplacianas de ambos os grafos, ou seja o conjunto de autovalores destas matrizes. Considerando os autovalores em ordem crescente, podemos transformar este conjunto em uma sequência, a qual apresenta forte relação com a topologia do grafo [20]. Logo, dois grafos com espectros similares, também apresentam estruturas similares.

5. PROPOSTA DE ABORDAGEM ALGORÍTMICA PARA O TERCEIRO TRABALHO

5.1 Pseudocódigo

Seguem esboços de algoritmos em pseudocódigo para a segmentação de uma imagem e a determinação do grau de similaridade entre grafos respectivamente:

Processo Segmentação-de-Imagem (I, n , P, M):

- I é uma imagem digital constituída de pixels.
 - n é o número máximo de iterações desejado.
 - P é um processo que aplica uma transformação em uma imagem, normalmente utilizado para aumentar a efetividade ou eficiência do algoritmo.
 - M é uma métrica para pesos de arestas, baseado no grau de variação entre pixels.
1. Processe I em I' utilizando o método P.
 2. Converta I' em um grafo G de modo que cada pixel de I' seja um vértice em G e arestas existam entre vértices adjacentes, com peso determinado por M.
 3. Seja S uma partição de G tal que todos os vértices estão em um único conjunto s0.
 4. **Para n iterações:**

Para cada s em S :

- 4.1 Calcule a Matriz Laplaciana L de s .
 - 4.2 Calcule o Vetor de Fiedler F de L .
 - 4.3 Divida s em outros dois conjuntos s^+ e s^- baseado no sinal dos valores associados a cada vértice em F .
 - 4.4 Altere S , dividindo s em s^+ e s^- .
5. Particione I baseado na bijeção entre I' e G e I e I' .

Processo Similaridade-entre-Imagens (I, J, M, S):

- I, J são imagens digitais constituídas de pixels.
 - M é um processo que converte uma imagem digital em um dígrafo.
 - S é uma sequência de valores que será utilizada como margem para determinar se dois grafos são similares o suficiente.
1. Converta I e J em G e H utilizando M .
 2. Calcule a Matriz de Adjacência M_g, M_h de G e H .
 3. Calcule os espectros S_g, S_h de M_g e M_h .
 4. Transforme S_g e S_h em sequências de ordem crescente e seja $S_d = S_g - S_h$.
 5. Verifique se $S_d < S$, para determinar se I e J são imagens similares o suficiente.

5.2 Análise de complexidade

No primeiro algoritmo, observa-se que para todos os passos, exceto o quarto, temos uma complexidade de $O(n)$, em que n é o número de pixels da imagem fornecida. No quarto passo, temos que a cada iteração a complexidade é $O(n^3)$, visto que a maior complexidade neste escopo vem do algoritmo utilizado para achar o Vetor de Fiedler, a decomposição QR, a qual possui a complexidade $O(n^3)$ [2]. Logo, considerando n como um número infinitamente grande, nota-se que a quantidade de iterações do quarto passo tende a $\log_2 n$. O que resulta em uma complexidade de $O(n^3 \log_2 n)$ para o quarto passo e para o algoritmo como um todo, por ser maior que a complexidade dos outros passos ($O(n)$).

Já no segundo algoritmo, nota-se que a complexidade no primeiro passo depende da complexidade do método fornecido, a qual será denominada de W . No segundo passo, a complexidade é $O(n^2)$, em que n é a maior quantidade de vértices entre os dois grafos fornecidos, visto que a matriz de adjacência não é simétrica (pois os grafos considerados são direcionais). Enquanto no terceiro passo, a complexidade é $O(n^3)$, pois o algoritmo utilizado para achar o espectro da matriz é o mesmo do primeiro algoritmo, a decomposição QR, a qual tem uma complexidade de $O(n^3)$ [2]. Já no quarto passo, temos uma complexidade de $O(n \log n)$ devido a ordenação dos espectros. Por fim, no quinto passo, a complexidade da checagem é $O(n)$. Portanto, a complexidade do algoritmo é $O(W + n^3)$.

6. IMPLEMENTAÇÃO

Vale notar que foi escolhida apenas a implementação do algoritmo de segmentação de imagens. Essa implementação do algoritmo foi feita utilizando a linguagem Python, com o auxílio das bibliotecas externas: *numpy*, *Python Imaging Library* (PIL) e *scipy*. O código está disponível em um repositório online de livre acesso [10].

O código está dividido em três arquivos *main.py*, *image_segmentation.py* e *util.py*, os quais são respectivamente: a interface do usuário, o algoritmo de segmentação de imagens e uma coleção de funções úteis utilizadas no projeto.

Sobre o primeiro, sua implementação não será detalhada, visto que não está no escopo deste relatório.

Sobre o segundo, contém um método principal denominado de *spectral_segmentation*, o qual inclui a implementação do pseudo código descrito na seção passada. Este recebe uma imagem carregada no código pela biblioteca PIL e o tamanho mínimo desejado de um segmento da imagem (em número de pixels) e retorna uma árvore binária de partições. Vale destacar que a métrica utilizada para o cálculo do peso das arestas do grafo foi baseada no artigo *Spectral Image Segmentation using Image Decomposition and Inner Product-based metric* [6]. Além disso, o cálculo do Vetor de Fiedler da matriz Laplaciana é feito com auxílio da biblioteca *numpy*. Quanto aos métodos restantes, *image_segmentation* encapsula e chama *spectral_segmentation* e *draw_segmentation*. Este último desenha as bordas da segmentação obtida em uma nova imagem.

Já o terceiro arquivo, contém, por exemplo, o método que define a função gradiente da imagem, utilizada para o cálculo do peso das arestas no grafo gerado pelo código (este cálculo é feito com o auxílio da biblioteca *scipy*). Outros métodos notáveis incluem, *find_borders*: acha as bordas de uma segmentação; *coarse_image*: reduz a resolução da imagem passada para o programa; *scale_partition*: aumenta o tamanho de uma partição feita em uma imagem com a resolução reduzida para o tamanho da imagem original.

7. RESULTADOS

7.1 Base de dados

Foram utilizadas duas bases de dados: *Berkeley Image Database* [18]; e uma de criação própria, denominada de *test_files*, presente no repositório citado anteriormente [10]. A primeira contém imagens em *grayscale* de tamanho 481 x 321 e 321 x 481, com conteúdos diversos, como por exemplo, fotos de pessoas, animais e edifícios. A segunda, também contém imagens em *grayscale*, com tamanhos de 32 x 32 e 64 x 64, contendo figuras abstratas como círculos e retângulos. Entretanto, possuindo bem menos variação entre uma cor totalmente branca e outra totalmente preta, ou seja, com um maior destaque para os elementos, de maneira a facilitar o cálculo da segmentação.

7.2 Configurações de hardware e software

Os experimentos foram feitos em uma máquina com as seguintes especificações:

1. Tipo de Sistema: 64x
2. Processador: Intel(R) Core(TM) i7-8750H CPU @ 2.20GHz 2.21 GHz
3. Memória: 16 GB
4. SO: Windows 10, Versão: 22H2
5. Interpretador Python versão 3.10.0

7.3 Experimentos realizados

Foram realizadas duas baterias de testes, em que cada teste se caracteriza como o resultado da segmentação de uma imagem passada para o programa.

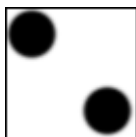
Primeiramente, utilizou-se a base de dados *test_files*, segue exemplos de resultados obtidos (imagem utilizada na esquerda e resultado obtido na direita):



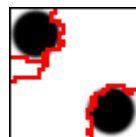
test1.png



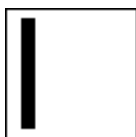
test1_partitioned.png



test3.png



test3_partitioned.png



test5.png

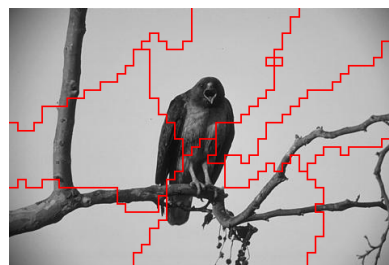


test5_partitioned.png

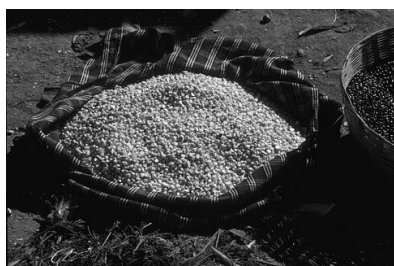
Em seguida, as imagens fornecidas ao programa foram extraídas da *Berkeley Data Base*, seguem exemplos de resultados obtidos:



42049.jpg



42049_partitioned.png



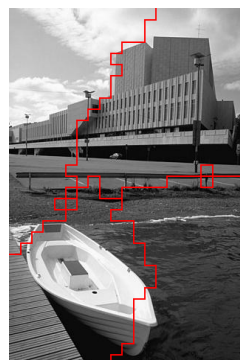
58060.jpg



58060_partitioned.png



78004.jpg



78004_partitioned.png

Segue uma tabela com o tempo em segundos despendido para cada teste apresentado no documento:

<i>test1.png</i>	<i>teste3.png</i>	<i>test5.png</i>	<i>42049.jpg</i>	<i>58060.jpg</i>	<i>78004.jpg</i>
4.371	4.240	6.329	8.769	9.406	2.071

Vale destacar que estas e outras imagens, tanto como os resultados, estão disponíveis no repositório citado anteriormente [10].

7.4 Análise e discussão dos resultados

Nota-se que os resultados ainda são insatisfatórios, com sucesso em apenas alguns casos isolados, como nas imagens *test1.png* e *test3.png*. Ao observar os resultados da segunda bateria de testes, percebe-se que o programa tem dificuldade em identificar bordas quando há uma maior homogeneidade entre as cores. Por exemplo, no caso da segmentação da imagem *58060.jpg*, em que não há destaque tão significativo entre o saco de grãos e o fundo como entre o ponto preto e o fundo branco em *test1.png*.

Já no resultado da imagem *78004.jpg*, na qual há uma menor homogeneidade entre as cores, nota-se uma região que engloba o barco no canto inferior esquerdo da imagem, entretanto de maneira imprecisa.

Outro problema que pode-se observar, é a segmentação de regiões completamente homogêneas, como é possível notar na parte direita da imagem *test5_partitioned.png* e no centro da imagem *42049.jpg*.

8. CONCLUSÃO

Determinamos que a Teoria Espectral dos Grafos é uma boa ferramenta para a solução de problemas na área da visão computacional, entretanto nem sempre a melhor. Normalmente, sua vantagem está no fato de abordar o problema de uma maneira diferente dos outros métodos baseados em grafos e por isso não sofrer dos mesmos impasses. Entretanto, como o campo é relativamente novo, não se pode concluir que os métodos existentes expressem todo o seu potencial, logo, opinamos que mais pesquisas são necessárias nessa área.

Outro fato que notamos, é a falta de um forte envolvimento com a Teoria dos Grafos. Em todos os casos onde a TEG é utilizada, depois de converter a imagem em um grafo, conversão que muitas vezes não é difícil, se utilizam na maior parte conhecimentos da álgebra linear.

Sobre a implementação e os experimentos, ressalvado que foi utilizada apenas a segmentação de imagens, apesar da ausência de resultados ideais, não se considera que a fundamentação teórica esteja incorreta. Julga-se que as imperfeições nos resultados são devidas à falta de aperfeiçoamento de técnica, como no pré-processamento da imagem e no controle de profundidade da recursão. Tal fato é evidenciado pelos resultados positivos do algoritmo em casos simples, em que há poucos elementos, os quais são facilmente distinguíveis do cenário.

Por fim, gostaríamos de agradecer às docentes Elizabeth Ferreira Gouvêa Goldbarg e Silvia Maria Diniz Monteiro Maia pela oportunidade de realização desse trabalho. Esta investigação foi bem impactante no nosso conhecimento sobre Teoria Espectral dos Grafos e visão computacional, e, pessoalmente, adquirimos um interesse por esse tema.

9. REFERÊNCIAS

1. AFLALO, A. et al. **DeepCut: Unsupervised Segmentation using Graph Neural Networks Clustering**. arXiv:2212.05853 [cs], 18 dez. 2022.
2. ARBENZ, P. **Lecture Notes on Solving Large Scale Eigenvalue Problems Spring semester 2016**. p. 63 [s.l: s.n.]. Disponível em: <<https://people.inf.ethz.ch/arbENZ/ewp/Lnotes/lsevp.pdf>>.
3. BALCILAR, M. et al. **Analyzing the Expressive Power of Graph Neural Networks in a Spectral Perspective**. Disponível em: <<https://openreview.net/forum?id=-qh0M9XWxnv>>. Acesso em: 25 maio. 2024.

4. BOYKOV, Y.; FUNKA-LEA, G. **Graph Cuts and Efficient N-D Image Segmentation.** International Journal of Computer Vision, v. 70, n. 2, p. 109–131, nov. 2006.
5. BROUWER, A. E.; HAEMERS, W. H. **Spectra of Graphs.** [s.l.] Springer Nature, 2012.
6. CASACA, W. et al. **Spectral Image Segmentation Using Image Decomposition and Inner Product-Based Metric.** Journal of Mathematical Imaging and Vision, v. 45, n. 3, p. 227–238, 14 jun. 2012.
7. CHEN, X. **Understanding Spectral Graph Neural Network.** Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2012.06660>>. Acesso em: 25 maio. 2024.
8. COUR, T.; BÉNÉZIT, F.; SHI, J. **Spectral Segmentation with Multiscale Graph Decomposition.** [s.l.: s.n.]. Disponível em: <<https://www.cis.upenn.edu/~jshi/papers/multiscale-paper.pdf>>. Acesso em: 28 abr. 2024.
9. CVETKOVIĆ, D.; SIMIĆ, S. **Spectral graph theory in computer science.** [s.l.: s.n.]. Disponível em: <<https://tar.ipsitransactions.org/2011July/p95.pdf>>. Acesso em: 28 abr. 2024.
10. EDUARDO, C. **CinquilCinquil/ImgSeg.** Disponível em: <<https://github.com/CinquilCinquil/ImgSeg>>. Acesso em: 29 maio. 2024.
11. GILLIOZ, A.; RIESEN, K. **Graph-based pattern recognition on spectral reduced graphs.** Pattern Recognition, v. 144, p. 109859, dez. 2023.
12. i·bug - resources - **Aff-Wild2 database.** Disponível em: <<https://ibug.doc.ic.ac.uk/resources/aff-wild2/>>.
13. JIANBO SHI; MALIK, J. **Normalized cuts and image segmentation.** IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, v. 22, n. 8, p. 888–905, 2000.
14. JIN, S. et al. **A Spectral Representation of Networks: The Path of Subgraphs.** Proceedings of the 28th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 14 ago. 2022.
15. LEE, A. B. et al. **Discovering genetic ancestry using spectral graph theory.** Genetic Epidemiology, p. n/a-n/a, 2009.
16. LIN, L.; BLASER, E.; WANG, H. **Graph Structural Attack by Perturbing Spectral Distance.** Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2111.00684>>. Acesso em: 25 maio. 2024.

17. LIU, C. et al. **CASIA Online and Offline Chinese Handwriting Databases** | IEEE Conference Publication | IEEE Xplore. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/6065272>>.
18. MARTIN, D. et al. **A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics**. Proceedings Eighth IEEE International Conference on Computer Vision. ICCV 2001, [s.d.].
19. RAJESHWAR DASS. **Pattern Recognition Techniques: A Review**. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/327906835_Pattern_Recognition_Techniques_A_Review>.
20. SHOKOUFANDEH, A.; DICKINSON, S. **Graph-Theoretical Methods in Computer Vision**. [s.l.: s.n.]. Disponível em: <<https://www.cs.toronto.edu/~sven/Papers/graph02.pdf>>. Acesso em: 28 abr. 2024.
21. TAO, W.; JIN, H.; ZHANG, Y. **Color Image Segmentation Based on Mean Shift and Normalized Cuts**. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics), v. 37, n. 5, p. 1382–1389, out. 2007.
22. THESIS. **Spectral Geometry for Structural Pattern Recognition** HEWAYDA EL GHAWALBY. [s.l.: s.n.]. Disponível em: <https://theses.whiterose.ac.uk/1525/1/Spectral_geometry_for_structural_pattern_recognition.pdf>. Acesso em: 28 abr. 2024.
23. VERMA, P.; NAGARAJAN, S.; RAJ, A. **Spectral graph theory of brain oscillations—Revisited and improved**. NeuroImage, v. 249, p. 118919, 1 abr. 2022.
24. YU, Y. et al. **Techniques and Challenges of Image Segmentation: A Review**. Electronics, v. 12, n. 5, p. 1199, 1 jan. 2023.
25. ZHANG, J.; TAN, Y. **Interrelationship of Visual Elements of Digital Media Artworks Based on Spectral Graph Theory**. Applied mathematics and nonlinear sciences, v. 9, n. 1, 8 nov. 2023.
26. ZHAO, R. et al. **Recognition of building group patterns using graph convolutional network**. Cartography and Geographic Information Science, v. 47, n. 5, p. 400–417, 12 jun. 2020.

27. ZHENG, M. et al. **SimMatchV2: Semi-Supervised Learning with Graph Consistency**. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2308.06692>>. Acesso em: 25 maio. 2024.