Résolution de Problèmes
Recherche Locale

Marie Pelleau
marie.pelleau@univ-cotedazur.fr

Master 1 - Semestre 1

Algorithme glouton

Principe

- À chaque étape, on fait un choix, celui qui semble le meilleur à cet instant
- Construit une solution pas à pas
  - sans revenir sur ses décisions
  - en effectuant à chaque étape le choix qui semble le meilleur
  - en espérant obtenir un résultat optimum global
- Approche glouton
  - suivant les problèmes pas de garantie d'optimalité (heuristique gloutonne)
  - peu coûteuse (comparée à une énumération exhaustive)
  - choix intuitif

Recherche locale

Principe

- On part d'une solution initiale
- À chaque étape, on modifie la solution
  - en essayant d'améliorer la valeur de la fonction objectif
  - en espérant obtenir l'optimum global
- Approche locale
  - suivant les problèmes pas de garantie d'optimalité (heuristique)
  - peu coûteuse

Solution initiale

- Solution "vide"
- Solution aléatoire
- Solution d'un algorithme glouton

Recherche locale

Principe

- On part d'une solution initiale
- À chaque étape, on modifie la solution
  - en essayant d'améliorer la valeur de la fonction objectif
  - en espérant obtenir l'optimum global
- Approche locale
  - suivant les problèmes pas de garantie d'optimalité (heuristique)
  - peu coûteuse

Modifications

- Modifie la valeur d'une variable
- Échange la valeur de deux variables

Le sac-à-doc (knapsack)

Description

On a :

- Un Sac dans lequel on peut mettre un poids limité
- Un ensemble d'objets, chaque objet o_i a
  - Un poids : p_i
  - Une valeur : v_i

Quels sont les objets que l'on doit prendre pour maximizer la valeur transportée tout en respectant la contrainte de poids ?

- La somme des valeurs des objets pris est maximale
- La somme des poids des objets pris est $\leq$ poidsmax du sac

Le sac-à-doc (knapsack)

Les variables

- On associe à chaque objet une variable 0-1 (elle ne prend que les valeurs 0 ou 1)
- C'est une variable d'appartenance au sac à dos
- Si l'objet est pris alors la variable vaut 1 sinon elle vaut 0

Le sac-à-doc (knapsack)

Modèle

- La valeur d'un objet et son poids sont des données, donc pour l'objet o_i on a la valeur v_i et le poids p_i
- La variable d'appartenance au sac est x_i
- Le poids maximum du sac est W

Les contraintes

- $max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$ l'objectif
- $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq W$ somme des poids inférieure ou égale au poids maximal

Le sac-à-doc (knapsack)

Solution initiale

- Solution "vide" : sac à dos vide $\Rightarrow$ fonction objectif 0
- Solution aléatoire : sac à dos aléatoire $\Rightarrow$ il faut vérifier que c'est une solution
- Solution d'un algorithme glouton

Modifications

- Ajoute un élément au sac à dos $\Rightarrow$ si la capacité max n'est pas dépassée
- Supprime un élément du sac à dos

Hitting-set : Recouvrement (set cover)

Description

- Un interrupteur est relié à certaines ampoules
- Si on appuie sur l'interrupteur alors on allume toutes les ampoules reliées
- **Question** : sur combien d'interrupteur au minimum doit-on appuyer pour allumer toutes les ampoules ?

Hitting-set : Recouvrement (set cover)

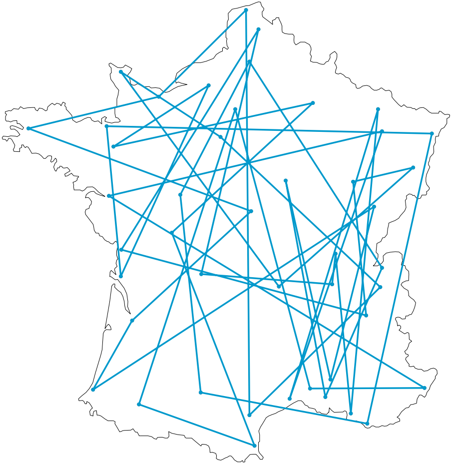
Solution initiale

- Solution "vide" : tous les interrupteurs allumés $\Rightarrow$ fonction objectif nombre d'interrupteurs
- Solution aléatoire : position des interrupteurs aléatoire $\Rightarrow$ il faut vérifier que c'est une solution
- Solution d'un algorithme glouton

Modifications

- Allume un interrupteur
- Éteint un interrupteur $\Rightarrow$ si toutes les ampoules restent allumées

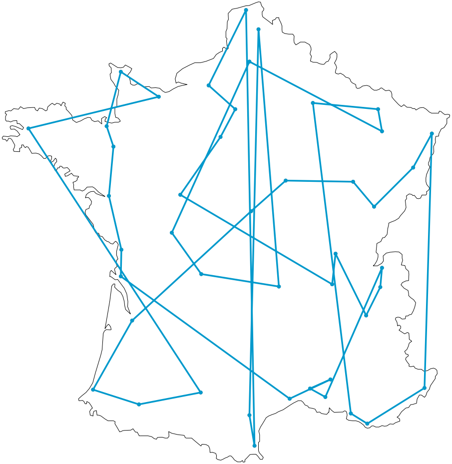
TSP



Solution initiale

- Les villes par ordre alphabétique

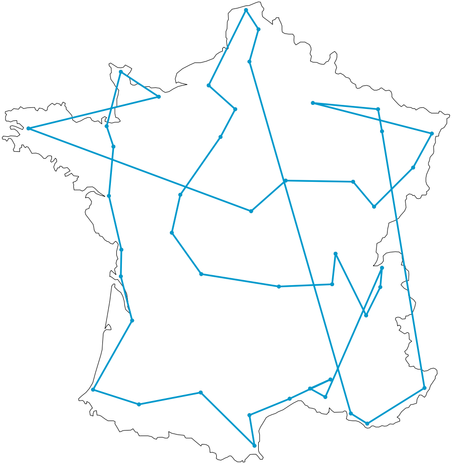
TSP



Solution initiale

- Les villes par ordre alphabétique
- Les villes dans un ordre aléatoire

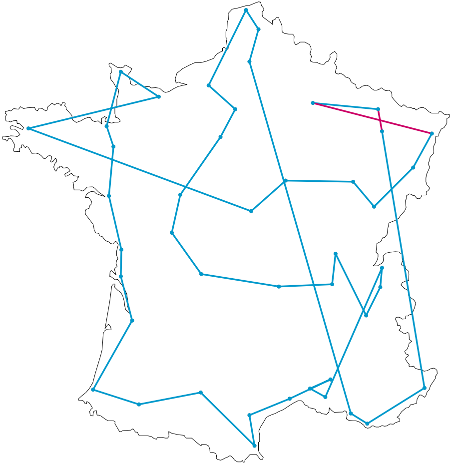
TSP



Solution initiale

- Les villes par ordre alphabétique
- Les villes dans un ordre aléatoire
- Solution d'un algorithme glouton

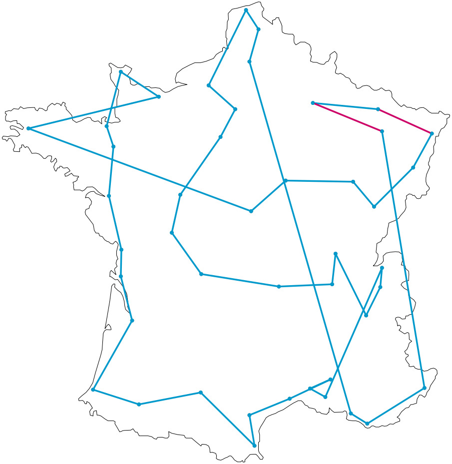
TSP



Modifications

- k-opt
  - $k = 2$
  - $k = 3$

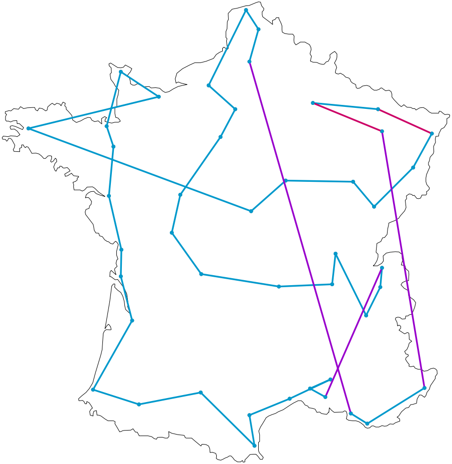
TSP



Modifications

- k-opt
  - $k = 2$
  - $k = 3$

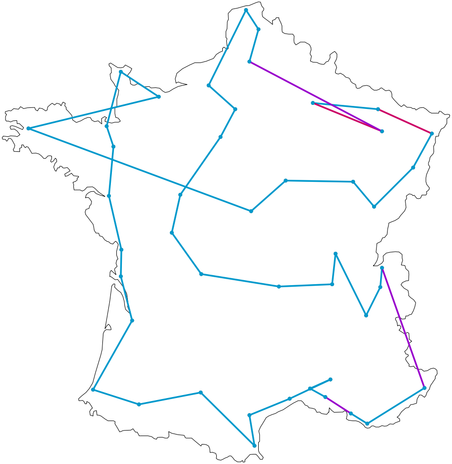
TSP



Modifications

- *k*-opt
  - $k = 2$
  - $k = 3$

TSP



Modifications

- *k*-opt
  - $k = 2$
  - $k = 3$

Recherche locale

Principe

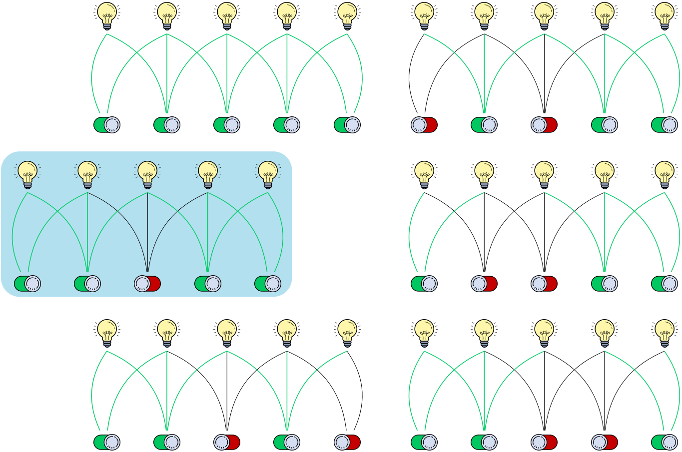
- On part d'une solution initiale
- À chaque étape, on modifie la solution $\Rightarrow$ notion de voisinage

Voisinage

Pour une solution, l'ensemble des solutions à une modification près

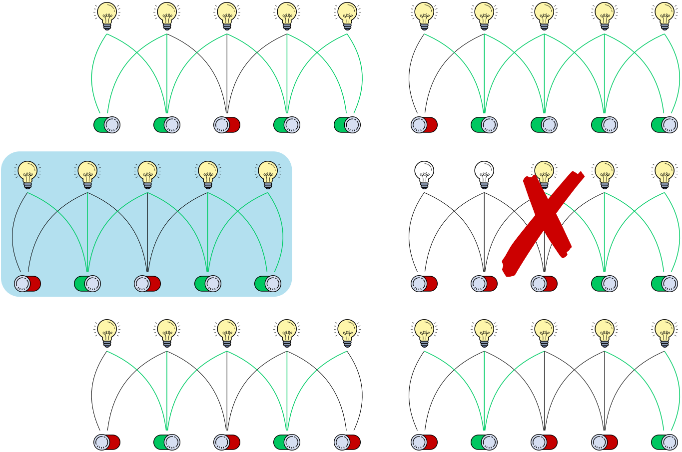
Hitting-set : Recouvrement (set cover)

Voisinage



Hitting-set : Recouvrement (set cover)

Voisinage



Recherche locale

Principe

- On part d'une solution initiale
- À chaque étape, on modifie la solution (on choisit un voisin)

Quel voisin choisir ?

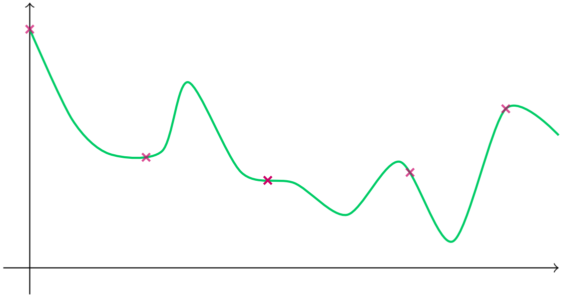
- Aléatoirement
- Le meilleur
- Un parmi les meilleurs

Plan

Marche aléatoire

Principe

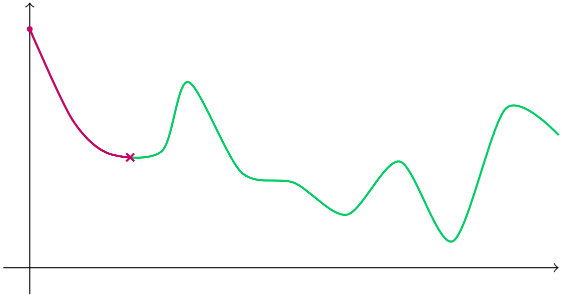
- On part d'une solution initiale
- À chaque étape, on modifie **aléatoirement** la solution



Algorithme de la descente

Principe

- On part d'une solution initiale
- À chaque étape, on se déplace vers une solution du voisinage **améliorant strictement** l'objectif



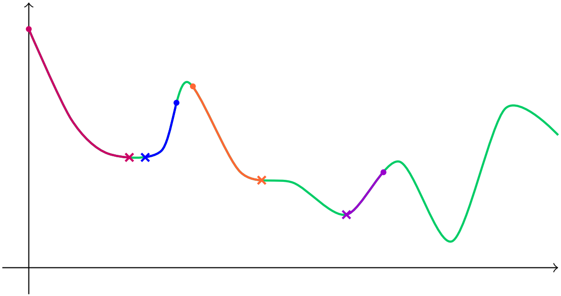
Inconvénients

On peut rester bloquer dans des minimum locaux

Algorithme de la descente

Principe

- On part d'une solution initiale
- À chaque étape, on se déplace vers une solution du voisinage **améliorant strictement** l'objectif



Restarts

On recommence à partir d'une autre solution

Recherche locale

Restarts

- Solution aléatoire
- Solution “ vide ”, dans laquelle on fixe un certain pourcentage de variables comme dans la meilleure solution trouvée jusqu'ici
  - 5%, 10%, 20%

Large Neighborhood Search (LNS) [Shaw, 1998]

Pas d'amélioration

- On se déplace vers une solution du voisinage **sans améliorer** l'objectif

$\Rightarrow$ Il ne faut pas être un poisson rouge

Recherche Tabou [Glover, 1986]

Principe

- On part d'une solution s
- On se déplace vers **la meilleure** solution du voisinage qui ne soit pas **interdite**
- On ajoute s aux solutions interdites pour les m itérations suivantes

Mémoire

- Interdire des solutions peut être coûteux en mémoire
- À la place on interdit des mouvements

Critère d'aspiration

On peut accepter un mouvement tabou s'il permet d'obtenir une **meilleure** solution que la meilleure solution connue jusqu'ici

Taille de la liste taboue

- Si m trop faible, **intensification** trop forte $\Rightarrow$ blocage de la recherche autour d'un optimum local
- Si m trop grand, **diversification** trop forte $\Rightarrow$ risque de rater des solutions

La longueur optimale de la liste varie

- d'un problème à l'autre
- d'une instance à l'autre d'un même problème
- au cours de la résolution d'une même instance

[Battiti, Protasi 2001] : adapter cette longueur dynamiquement

- Besoin de diversification $\Rightarrow$ augmenter m
- Besoin de d'intensification $\Rightarrow$ diminuer m

Recherche locale

Principe

- On part d'une solution initiale
- À chaque étape, on modifie la solution
  - en essayant d'améliorer la valeur de la fonction objectif
  - en espérant obtenir l'optimum global
- Approche locale
  - suivant les problèmes pas de garantie d'optimalité (heuristique)
  - peu coûteuse

Remarque

- Cela suppose qu'il existe une fonction objectif
- Comment faire s'il n'en existe pas ?

Constraint Based Local Search

Principe

- Étant donné un problème sous la forme
  - $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$: variables
  - $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_n\}$: domaines
  - $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_p\}$: contraintes
- Fonction objectif à minimiser : nombre de contraintes non satisfaites

Intuition

- Recherche guidée par la structure du problème
  - les contraintes donnent de la structure au problème et les variables les lient ensemble
- Tout type de contraintes peut être utilisé

Constraint Based Local Search

N-reines

- Sur un échiquier de $n \times n$
- Placer n reines de telle sorte qu'aucune reine ne puisse en capturer une autre

Formulation

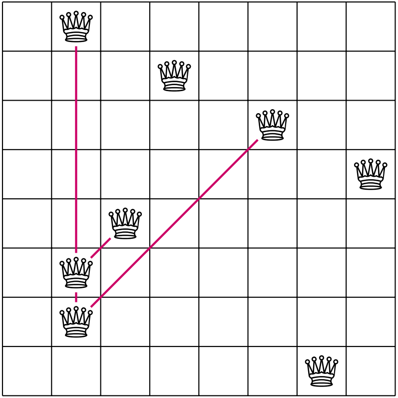
- l_i : colonne de la reine sur le ligne i
- $l_i \neq l_j$
- $l_i + i \neq l_j + j$ (diagonale montante)
- $l_i - i \neq l_j - j$ (diagonale descendante)

Fonction objectif

- Nombre de contraintes non satisfaites

Constraint Based Local Search

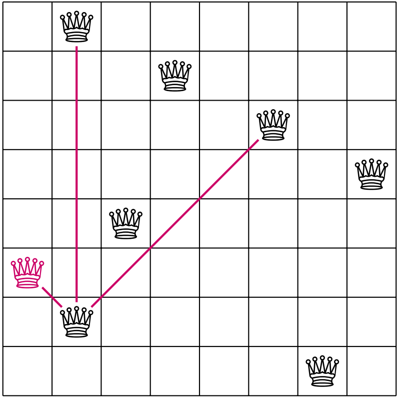
Formulation



Fonction objectif : 4

Constraint Based Local Search

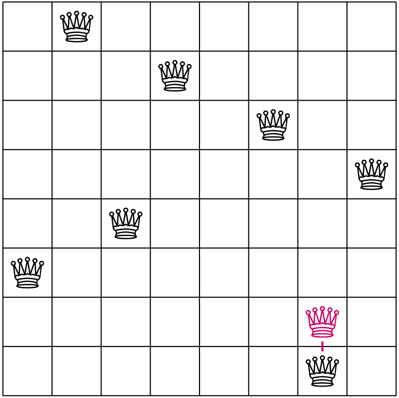
Formulation



Fonction objectif : 3

Constraint Based Local Search

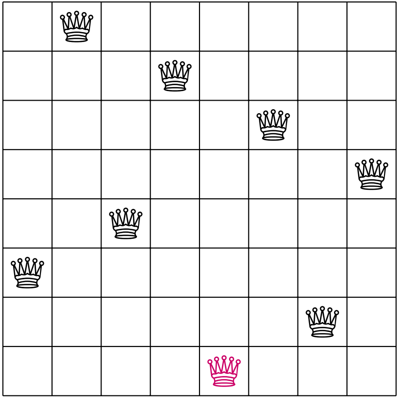
Formulation



Fonction objectif : 1

Constraint Based Local Search

Formulation



Fonction objectif : 0