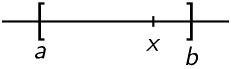
Contraintes continues

Marie Pelleau
marie.pelleau@univ-cotedazur.fr

Problèmes continus

- Les variables sont réelles
  - On ne peut pas représenter les réels $\Rightarrow$ nombres flottants
  - Approxime les réels par un intervalle à bornes flottantes



  - Il peut y avoir des problèmes de précision

Arithmétique des intervalles

Opérations arithmétiques

- $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$
- $[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$
- $[a, b] \times [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$
- $[a, b] \div [c, d] = \left[\min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right)\right]$ si $0 \notin [c, d]$

Exemple

- $[-2, 3] + [2, 4] = [0, 7]$
- $[-2, 3] - [2, 4] = [-6, 1]$
- $[-2, 3] \times [2, 4] = [-8, 12]$
- $[-2, 3] \div [2, 4] = [-1, 1.5]$

Arithmétique des intervalles

Opérations arithmétiques

- $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$
- $[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$
- $[a, b] \times [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$
- $[a, b] \div [c, d] = \left[\min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right)\right]$ si $0 \notin [c, d]$

Exercice

- $[-5, 5] + [2, 4] = [-3, 9]$
- $[-2, 5] \times [-2, 4] = [-10, 20]$
- $[1, 3] \times [-2, 5] - [2, 4] = [-10, 13]$
- $[-10, 9] + [-2, 3] \times [-5, 3] - [-1, 6] = [-31, 20]$

Évaluer une contrainte

$x \in [-2, 5]$
$y \in [-3, 7]$

$$\begin{array}{rcl} 2x - y & = & 0 \\ 2 \times [-2, 5] - [-3, 7] & = & 0 \\ [-4, 10] - [-3, 7] & = & 0 \\ [-11, 13] & = & 0 \end{array}$$

$0 \in$ à l'intervalle résultat $\Rightarrow$ Il existe **peut-être** une solution
$0 \notin$ à l'intervalle résultat $\Rightarrow$ Pas de solution

Évaluer une contrainte

Exercice

$x \in [-2, 5]$
$y \in [-3, 7]$
$z \in [4, 9]$

Les contraintes suivantes ont-elles des solutions ?

- $x + y - z = 5 \rightarrow 5 \in [-14, 8] \Rightarrow$ peut-être une solution
- $3z \leq 10 \rightarrow 10 < [12, 27] \Rightarrow$ pas de solution
- $x + y + z \geq 10 \rightarrow 10 \in [-1, 21] \Rightarrow$ peut-être une solution
- $x \times y + y \times z \neq 0 \rightarrow [0, 0] \neq [-42, 98] \Rightarrow$ peut-être une solution

Limites

$x \in [-2, 5]$

$$\begin{aligned} x \times x &= [-2, 5] \times [-2, 5] \\ &= [-10, 25] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - x &= [-2, 5] - [-2, 5] \\ &= [-7, 7] \end{aligned}$$

Plus de **corrélation** entre les différentes occurrences d'une variable

$$\begin{aligned} x^2 - x &= [0, 25] - [-2, 5] \\ &= [-5, 27] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(x - 1) &= [-2, 5] \times [-3, 4] \\ &= [-15, 20] \end{aligned}$$

Dépend de l'écriture (valeur réelle $[-0.25, 20]$)

Consistance

Opérateurs ensemblistes

- $[a, b] \cap [c, d] = [\max(a, c), \min(b, d)]$
- $[a, b] \cup [c, d] = [\min(a, c), \max(b, d)]$

Opérateurs inverses

On considère 3 intervalles u, v et r

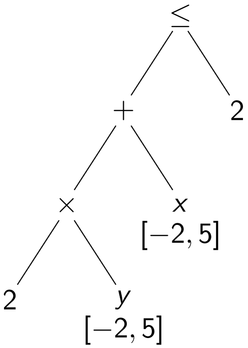
- $u + v = r$
  $\Rightarrow u = u \cap r - v$
  $\Rightarrow v = v \cap r - u$
- $u - v = r$
  $\Rightarrow u = u \cap r + v$
  $\Rightarrow v = v \cap u - r$

HC4 principe

Pour une contrainte

Revisiting Hull and Box Consistency [Benhamou et al., 1999]

$$x \in [-2, 5]$$
$$y \in [-2, 5]$$
$$2y + x \leq 2$$



HC4 principe

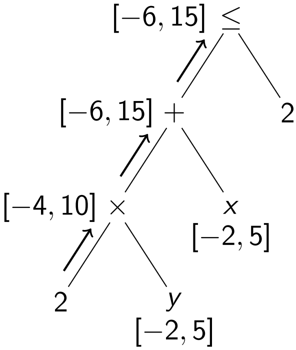
Pour une contrainte

Revisiting Hull and Box Consistency [Benhamou et al., 1999]

$$x \in [-2, 5]$$
$$y \in [-2, 5]$$

$$2y + x \leq 2$$

Montée : opérateurs arithmétiques



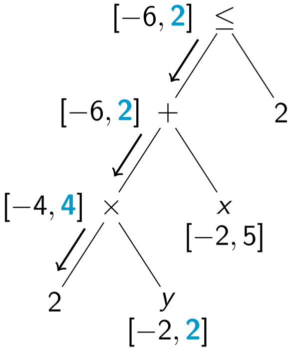
HC4 principe

Pour une contrainte

Revisiting Hull and Box Consistency [Benhamou et al., 1999]

$$x \in [-2, 5]$$
$$y \in [-2, \mathbf{2}]$$
$$2y + x \leq 2$$

Descente : opérateurs inverses



HC4 principe

Pour une contrainte

Exercice

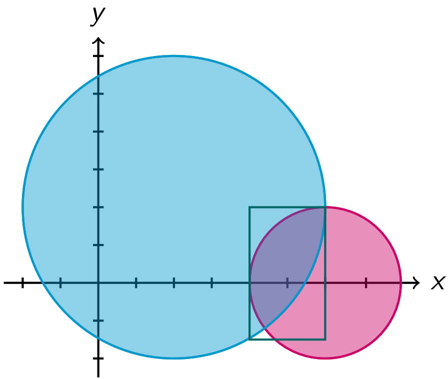
$x \in [-2, 5]$
$y \in [-3, 7]$
$z \in [4, 9]$

Quel est le résultat de la consistance pour chacune des contraintes ?

- $x + y - z = 5 \rightarrow x \in [2, 5], y \in [4, 7], z \in [4, 7]$
- $y + z \geq 10 \rightarrow x \in [-2, 5], y \in [1, 7], z \in [4, 9]$
- $x + 2y \leq 5 \rightarrow x \in [-2, 5], y \in [-3, 3.5], z \in [4, 9]$

HC4 Principe

Pour plusieurs contraintes



HC4 est généralement rapide mais ne donne pas forcément la plus petite boîte

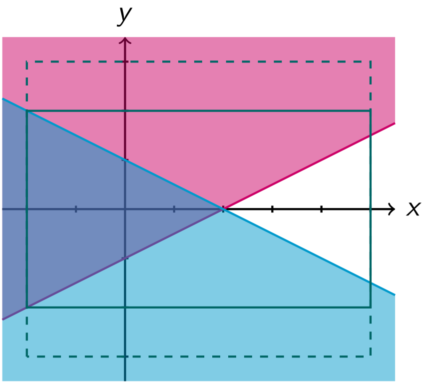
HC4

Exercice

- $\mathcal{V} = \{x, y\}$
- $D_x = [-2, 5]$
  $D_y = [-3, 3]$
- $C_1 : x - 2y \leq 2$
  $C_2 : x + 2y \leq 2$

Solution

- $C_1 : x - 2y \leq 2$
  $\Rightarrow D_x = [-2, 5], D_y = [-2, 3]$
- $C_2 : x + 2y \leq 2$
  $\Rightarrow D_x = [-2, 5], D_y = [-2, 2]$
- $C_1 : x - 2y \leq 2$
  $\Rightarrow D_x = [-2, 5], D_y = [-2, 2]$



HC4

Exercice

- $\mathcal{V} = \{x, y\}$
- $D_x = [0, 8]$
  $D_y = [-1, 3]$
- $C_1 : x + 4y = 8$
  $C_2 : x + 2y = 6$

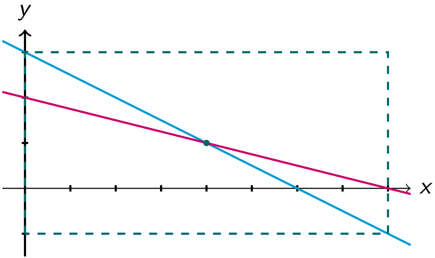
Solution

- $C_1 : x + 4y = 8$
  $\Rightarrow D_x = [0, 8], D_y = [0, 2]$
- $C_2 : x + 2y = 6$
  $\Rightarrow D_x = [2, 6], D_y = [0, 2]$
- $C_1 : x + 4y = 8$
  $\Rightarrow D_x = [2, 6], D_y = [0.5, 1.5]$
- $C_2 : x + 2y = 6$
  $\Rightarrow D_x = [3, 5], D_y = [0.5, 1.5]$

Solution

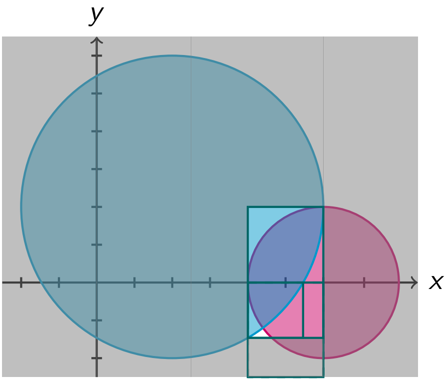
- $C_1 : x + 4y = 8$
  $\Rightarrow D_x = [3, 5], D_y = [0.75, 1.25]$
- $C_2 : x + 2y = 6$
  $\Rightarrow D_x = [3.5, 4.5], D_y = [0.75, 1.25]$
- $C_1 : x + 4y = 8$
  $\Rightarrow D_x = [3.5, 4.5], D_y = [0.875, 1.125]$

  ...

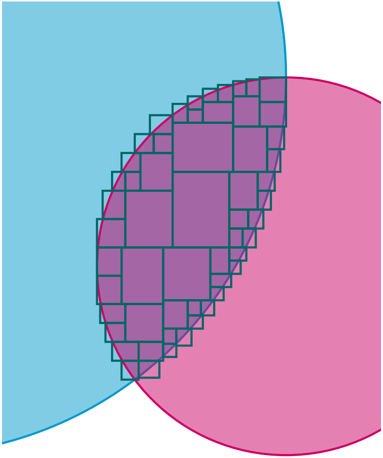


Shaving

Consistency Techniques for Numeric CSPs [Lhomme, 1993]



Résolution



Benhamou, F., Goualard, F., Granvilliers, L., and Puget, J.-F. (1999).
Revisiting hull and box consistency.
In *Proceedings of the 16th International Conference on Logic Programming*, pages 230–244.

Lhomme, O. (1993).
Consistency techniques for numeric csps.
In *Proceedings of the 12th International Joint Conference on Artificial intelligence (IJCAI'93)*, pages 232–238.