

# Logică computațională

## Curs 3

Lector dr. Mihiș Andreea-Diana

# Logica propozițiilor

? Propoziție

Propozițiile logice sunt modele ale afirmațiilor propoziționale care sunt fie *adevărate*, fie *false*.



Sintaxa

=” SINTĂXĂ s. f. 1. parte a gramaticii care studiază **regulile** privitoare la îmbinarea **cuvintelor** în propoziții și a propozițiilor în fraze.” (\*)

Semantica

= ”SEMĂNTICĂ s. f. I. 1. Ramură a lingvisticii care se ocupă cu studierea **sensurilor** cuvintelor și a evoluției acestor sensuri” (\*)

(\*) = <http://dexonline.ro>

# Sintaxa logicii propozițiilor

- alfabetul

- $\Sigma_p = Var\_propoz \cup Conective \cup \{ ( , ) \}$
- $Var\_propoz = \{ p, q, r, p_1, p_2, \dots \}$
- $Conective = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$

- regulile de formare a Formulelor propoziționale

- $F_p$  = mulțimea formulelor propoziționale corect construite

= cea mai mică mulțime de formule ce se poate construi cu regulile:

- *baza*:  $p_i \in F_p$ ,  $i=1,2,\dots$
- *inducția*: dacă  $U, V \in F_p$  atunci:

$$\neg U \in F_p, U \wedge V \in F_p, U \vee V \in F_p, U \rightarrow V \in F_p, U \leftrightarrow V \in F_p$$

- *închiderea*: toate formulele din  $F_p$  se obțin doar prin aplicarea regulilor precedente de un număr finit de ori.





# Exercițiu de modelare

Clientul i-a spus dezvoltatorului:

Dacă furnizorul aduce marfă, atunci dacă este loc în magazin întreaga marfă se va pune pe raft, altfel întreaga marfă va ajunge în depozit.

$$p \rightarrow ( (q \rightarrow r) \vee (\neg q \rightarrow d) )$$



# Semantica logicii propoziționale

- Propozițiile logice sunt modele ale afirmațiilor propoziționale care sunt fie *adevărate*, fie *false*.
- **Scopul** definirii semanticii logicii propoziționale este de a **atribui** un înțeles, o **valoare de adevăr**, formulelor propoziționale.
- Domeniul semantic:  
 $\{F(\text{fals}), T(\text{true, adevărat})\}$  a.î.  $\neg F=T, \neg T=F$

# Semantica conectivelor

$p$	$\neg p$
T	F
F	T

$\uparrow$  - nand  $p \uparrow q := \neg (p \wedge q)$

$\downarrow$  - nor  $p \downarrow q := \neg (p \vee q)$

$\oplus$  - xor  $p \oplus q := \neg (p \leftrightarrow q)$

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$	$p \oplus q$
T	T	T	T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T	F

# Interpretarea (Def.)

- O *interpretare* a formulei  $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$  este o funcție  $i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$  care asignează valori de adevăr variabilelor propoziționale și poate fi extinsă la o funcție  $i: F_P \rightarrow \{T, F\}$  folosind relațiile:  
$$i(\neg p) = \neg i(p) \qquad i(p \wedge q) = i(p) \wedge i(q)$$
$$i(p \vee q) = i(p) \vee i(q) \quad i(p \rightarrow q) = i(p) \rightarrow i(q) \quad i(p \leftrightarrow q) = i(p) \leftrightarrow i(q)$$
- Interpretările evaluează formulele propoziționale conform semanticii conectivelor componente, atribuindu-le valori de adevăr.
- Tabela de adevăr a unei formule propoziționale  $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$  corespunde evaluărilor formulei în toate cele  $2^n$  interpretări.

# Concepte semantice (Def.)

Fie formula propozițională  $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$ .

- O interpretare  $i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$  care evaluează formula  $U$  ca adevărată,  $i(U)=T$ , se numește ***model*** al formulei.
- O interpretare  $i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$  care evaluează formula  $U$  ca falsă,  $i(U)=F$ , se numește ***anti-model*** al formulei.

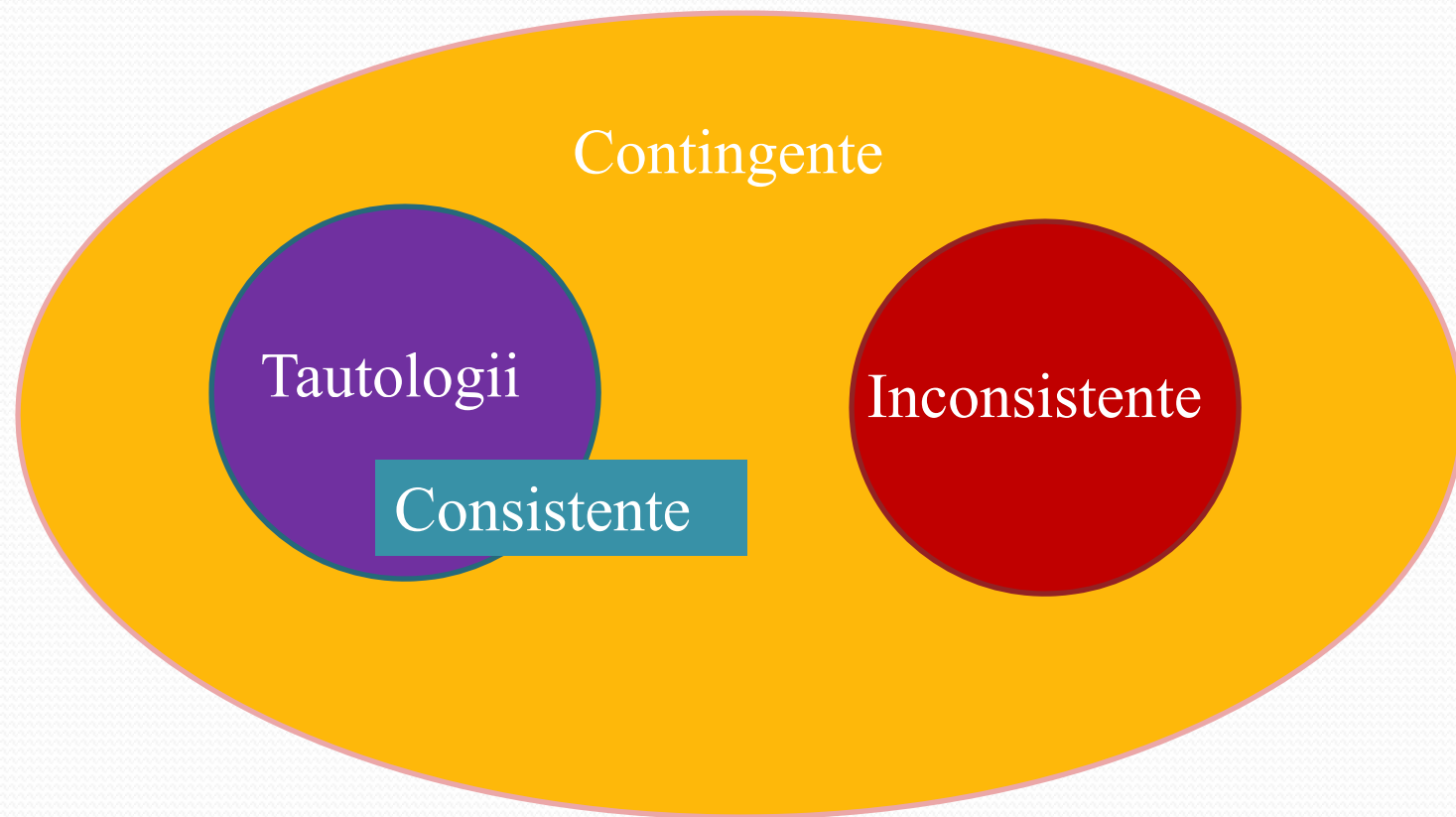


# Concepte semantice (Def.) – cont.

Fie formula propozițională  $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$ .

- $U$  se numește **consistentă (realizabilă)** dacă și numai dacă are cel puțin un model, deci poate fi evaluată ca adevărată:  
 $\exists i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}$  astfel încât  $i(U) = T$ .
- $U$  se numește **validă (tautologie)**, notație:  $\models U$ , dacă și numai dacă  $U$  este evaluată ca adevărată în orice interpretare, adică:  
 $\forall i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}, i(U) = T$ . Toate interpretările formulei  $U$  sunt modele ale formulei.
- Formula  $U$  se numește **inconsistentă (nerealizabilă)** dacă și numai dacă  $U$  nu are niciun model, adică  $U$  este interpretată totdeauna ca falsă:  $\forall i: \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \rightarrow \{T, F\}, i(U) = F$ .
- Formula  $U$  se numește **contingentă** dacă și numai dacă este consistentă, dar nu este validă.

# Tipuri de formule



# Metasimboluri – relații semantice între formule

- Formula  $V$  este **consecință logică** a formulei  $U$ ,  
notație:  $U \models V$ , dacă și numai dacă  $\forall i: F_P \rightarrow \{T, F\}$  astfel  
încât  $i(U)=T$ , are loc  $i(V)=T$ .
- Formulele  $U(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$  și  $V(p_1, p_2, \dots, p_n) \in F_P$  sunt  
**logic echivalente**, notație:  $U \equiv V$ , dacă și numai dacă  
tabelele lor de adevăr sunt identice, adică:  $\forall i: F_P \rightarrow \{T, F\}$ ,  
 $i(U) = i(V)$ .

# Exemplu

- $U(p,q,r) = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p),$
- $V(p,q,r) = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$
- $p \uparrow \neg p$
- $p \downarrow \neg p$

# Tabela de adevăr

	$p$	$q$	$r$	$\neg p \vee q$	$r \vee p$	$U(p,q,r)$	$V(p,q,r)$	$p \uparrow \neg p$	$p \downarrow \neg p$
$i_1$	T	T	T	T	T	T	T	T	F
$i_2$	T	T	F	T	T	T	T	T	F
$i_3$	T	F	T	F	T	F	F	T	F
$i_4$	T	F	F	F	T	F	F	T	F
$i_5$	F	T	T	T	T	T	T	T	F
$i_6$	F	T	F	T	F	F	F	T	F
$i_7$	F	F	T	T	T	T	T	T	F
$i_8$	F	F	F	T	F	F	F	T	F

$$U(p,q,r) = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p),$$

$$V(p,q,r) = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$$

# Observații

- modele pt.  $U$ :  $i_1, i_2, i_5$  și  $i_7$   
 $i_1 : \{p, q, r\} \rightarrow \{T, F\}$  ,  $i_1(p)=T$ ,  $i_1(q)=T$ ,  $i_1(r)=T$  și  $i_1(U)=T$
- anti-modele pt.  $U$ :  $i_3, i_4, i_6$  și  $i_8$
- $p \uparrow \neg p$  - tautologie
- $p \downarrow \neg p$  – inconsistentă
- $U \equiv V$
- $U \models \neg p \vee q$

# Concepte semantice pentru mulțimi de formule

- O **mulțime**  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  de formule se numește **consistentă** (**realizabilă**) dacă și numai dacă formula  $U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n$  este consistentă, adică:  $\exists i: F_p \rightarrow \{T, F\}$  astfel încât  $i(U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n) = T$ ,  $i$  se numește **model** al mulțimii  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ .
- O **mulțime**  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  de formule se numește **inconsistentă** (**nerealizabilă, contradictorie**) dacă și numai dacă formula  $U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n$  este inconsistentă, adică,  $\forall i: F_p \rightarrow \{T, F\}$  astfel încât  $i(U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n) = F$ ,  $i$  se numește **anti-model** al mulțimii  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ .
- Formula  $V$  este **consecință logică** a mulțimii de formule  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  și se notează  $U_1, U_2, \dots, U_n \models V$ , dacă și numai  $\forall i: F_p \rightarrow \{T, F\}$  astfel încât  $i(U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n) = T$ , are loc  $i(V) = T$ .  
Formulele  $U_1, U_2, \dots, U_n$  se numesc *premize, ipoteze, fapte*, iar  $V$  se numește *concluzie*.

# Teoremă

- Fie  $S = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  o mulțime de formule propoziționale.
  1. Dacă  $S$  este o mulțime consistentă, atunci  $\forall j, 1 \leq j \leq n$ ,  $S - \{U_j\}$  este o mulțime consistentă.
  2. Dacă  $S$  este o mulțime consistentă și  $V$  este o formulă validă, atunci mulțimea  $S \cup \{V\}$  este consistentă.
  3. Dacă  $S$  este o mulțime inconsistentă, atunci  $\forall V \in F_p$  mulțimea  $S \cup \{V\}$  este inconsistentă.
  4. Dacă  $S$  este o mulțime inconsistentă și  $U_j$  este o formulă validă, unde  $1 \leq j \leq n$ , atunci mulțimea  $S - \{U_j\}$  este inconsistentă.



# Teoremă

- Fie  $U_1, U_2, \dots, U_n, U, V$  formule propoziționale.
- $\models U$  **dacă și numai dacă**  $\neg U$  este inconsistentă (O formulă este tautologie **dacă și numai dacă** negația sa este o formulă inconsistentă).
- $U \models V$  **dacă și numai dacă**  $\models U \rightarrow V$  **dacă și numai dacă** mulțimea  $\{U, \neg V\}$  este inconsistentă.
- $U \equiv V$  **dacă și numai dacă**  $\models U \leftrightarrow V$ .
- $U_1, U_2, \dots, U_n \models V$  **dacă și numai dacă**  $\models U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n \rightarrow V$  **dacă și numai dacă** mulțimea  $\{U_1, U_2, \dots, U_n, \neg V\}$  este inconsistentă.

# Echivalențe logice în logica propozițională

- Legile lui DeMorgan

$$\neg(U \wedge V) \equiv \neg U \vee \neg V \quad \text{și} \quad \neg(U \vee V) \equiv \neg U \wedge \neg V$$

- Legile de absorbție

$$U \wedge (U \vee V) \equiv U \quad \text{și} \quad U \vee (U \wedge V) \equiv U$$

- Legile de comutativitate

$$U \wedge V \equiv V \wedge U \quad \text{și} \quad U \vee V \equiv V \vee U$$

- Legile de asociativitate

$$U \wedge (V \wedge Z) \equiv (U \wedge V) \wedge Z \quad \text{și} \quad U \vee (V \vee Z) \equiv (U \vee V) \vee Z$$

- Legile de distributivității

$$U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge V) \vee (U \wedge Z) \quad \text{și} \quad U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee V) \wedge (U \vee Z)$$

- Legile de idempotență

$$U \wedge U \equiv U \quad \text{și} \quad U \vee U \equiv U$$

# Alte echivalențe logice

- Legile de simplificare

$$\neg\neg U \equiv U \quad U \rightarrow U \equiv T$$

$$U \wedge \neg U \equiv F \quad U \vee \neg U \equiv T$$

$$T \wedge U \equiv U \quad F \vee U \equiv U$$

$$U \rightarrow T \equiv T \quad U \rightarrow F \equiv \neg U$$

$$T \rightarrow U \equiv U \quad F \rightarrow U \equiv T$$

$$U \leftrightarrow T \equiv U \quad U \leftrightarrow F \equiv \neg U$$

$$U \oplus T \equiv \neg U \quad U \oplus F \equiv U$$

$$U \leftrightarrow U \equiv T \quad U \oplus U \equiv F$$

- Definirea conectivelor

$$U \rightarrow V \equiv \neg U \vee V \quad U \rightarrow V \equiv \neg(U \wedge \neg V)$$

$$U \rightarrow V \equiv U \leftrightarrow (U \wedge V) \quad U \rightarrow V \equiv V \leftrightarrow (U \vee V)$$

$$U \leftrightarrow V \equiv (U \rightarrow V) \wedge (V \rightarrow U)$$

$$U \oplus V \equiv \neg(U \rightarrow V) \vee \neg(V \rightarrow U)$$

$$U \leftrightarrow V \equiv (U \vee V) \rightarrow (U \wedge V)$$

$$U \vee V \equiv \neg(\neg U \wedge \neg V) \quad U \wedge V \equiv \neg(\neg U \vee \neg V)$$

$$U \vee V \equiv \neg U \rightarrow V \quad U \wedge V \equiv \neg(U \rightarrow \neg V)$$

$$\neg U \equiv U \uparrow U \equiv U \downarrow U$$

$$U \vee V \equiv (U \uparrow U) \uparrow (V \uparrow V) \equiv (U \downarrow V) \downarrow (U \downarrow V)$$

$$U \wedge V \equiv (U \downarrow U) \downarrow (V \downarrow V) \equiv (U \uparrow V) \uparrow (U \uparrow V)$$

# Principiul dualității

- Pentru orice echivalență logică  $U \equiv V$  care conține doar conectivele  $\neg, \wedge, \vee, \uparrow, \downarrow$  există o altă echivalență logică,  $U' \equiv V'$ , unde  $U', V'$  sunt formule obținute din  $U, V$  prin interschimbarea conectivelor logice duale:  $(\wedge, \vee)$ ,  $(\uparrow, \downarrow)$  și a valorilor de adevăr: T, F.
- *Conective duale*:  $(\wedge, \vee)$ ,  $(\uparrow, \downarrow)$ ,  $(\leftrightarrow, \oplus)$ .
- *Valori de adevăr duale*: T și F.
- *Concepte duale*: tautologie și formulă inconsistentă.

# Forme normale în logica propozițiilor

1. Un *literal* este o variabilă propozițională sau negația sa.
2. O *clauză* este disjuncția unui număr finit de literali.
3. Un *cub* este conjuncția unui număr finit de literali.
4. *Clauza vidă*, simbolizată prin  $\square$ , este clauza fără literal, fiind singura clauză inconsistentă.
5. O formulă este în *formă normală disjunctivă (FND)*, dacă aceasta este scrisă ca o disjuncție de cuburi  $\bigvee_{i=1}^p (\bigwedge_{j=1}^{q_i} l_{ij})$   
unde  $l_{ij}$  sunt literali.
6. O formulă este în *formă normală conjunctivă (FNC)*, dacă aceasta este scrisă ca o conjuncție de clauze:  $\bigwedge_{i=1}^n (\bigvee_{j=1}^{m_i} l_{ij})$   
unde  $l_{ij}$  sunt literali.

# Proprietate

Fie mulțimea de literali  $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- clauza  $\bigvee_{i=1}^n l_i$  este o validă;
- cubul  $\bigwedge_{i=1}^n l_i$  este inconsistent;
- în mulțimea  $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$  există cel puțin o pereche de literali opuși, adică:  $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}$  astfel încât  $l_i = \neg l_j$ .



# Teoremă

- *Orice formulă admite o formă normală conjunctivă și o formă normală disjunctivă logic echivalente cu ea.*

# Algoritmul de normalizare

## Pas1:

Înlocuirea formulelor de tip  $U \rightarrow V$  cu forma echivalentă:  $\neg U \vee V$

Înlocuirea formulelor de tip  $U \leftrightarrow V$  cu forma echivalentă:

$$(\neg U \vee V) \wedge (\neg V \vee U).$$

## Pas2:

Aplicarea legilor lui **DeMorgan** (se recomandă aplicarea dinspre exterior spre interior)  $\implies$  negația va preceda doar variabilele propoziționale.

Eliminarea negațiilor multiple folosind echivalența logică:  $\neg \neg U \equiv U$ .

## Pas3: Aplicarea legilor **distributivității**.

Pentru FND

FNC

$$U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge V) \vee (U \wedge Z) \quad \text{respectiv} \quad U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee V) \wedge (U \vee Z)$$

**Pas4:** Simplificarea formei obținute folosind alte echivalențe logice: legile de simplificare, legile absorbției, legile de idempotență.





# Teoremă

- *O formulă în forma normală conjunctivă (FNC) este tautologie dacă și numai dacă toate clauzele sale sunt valide.*
- *O formulă în forma normală disjunctivă (FND) este inconsistentă dacă și numai dacă toate cuburile sale sunt inconsistente.*



# Observații

- Prima parte a teoremei furnizează o *metodă directă* de rezolvare a problemei decizionale (verificarea dacă o formulă este tautologie) în logica propozițiilor.
- FND a unei formule propoziționale furnizează toate modelele formulei inițiale, prin găsirea interpretărilor care evaluează cuburile componente ca adevărate.
- FNC a unei formule propoziționale furnizează toate anti-modelele formulei inițiale prin găsirea interpretărilor care evaluează clauzele componente ca false.
- Cele două formulări din teorema precedentă sunt afirmații duale.