Seminar 3

1. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, a, b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2 \neq 0 \right\}$

   a) Arătați că G este un grup în raport cu înmulțirea matricilor

   b) Găsiți un izomorfism între G și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

2. Demonstrați că rezultatul compunerii a două morfisme este morfism.

3. Demonstrați că următoarele (perechi de) grupuri nu sunt izomorfe:

   (a) $(\mathbb{C}, +)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

   (b) $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

   (c) $(\mathbb{Q}, +)$ și $(\mathbb{Q}^*_+, \cdot)$

   (d) $(\mathbb{Q}, +)$ și $(\mathbb{Z}, +)$

   (e) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

   (f) $(\mathbb{Q}, +)$ și $(\mathbb{R}, +)$

4. a) Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se determine $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G)$. (v. nota)

   Indicație: Se arată că $f: \mathbb{Z} \to G$ este morfism între $(\mathbb{Z}, +)$ și $(G, \cdot)$ ddacă $\exists\, g \in G$ astfel încât $f(n) = g^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

   b) Să se determine $\mathrm{End}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ (operația este adunarea)

   Indicație: Se arată că $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ este morfism între $(\mathbb{Q}, +)$ și $(\mathbb{Q}, +)$ ddacă $\exists\, \alpha \in \mathbb{Q}$ a.i. $f(x) = \alpha x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

5. a) Demonstrați că grupurile $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ și $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, +)$ sunt izomorfe.

   b) Generalizare: Dacă $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ și $(m, n) = 1$ atunci $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

6. a) Determinați $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_9)$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_3)$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_5)$

   b) Generalizare: Determinați $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$

Notă: În cele de mai sus am folosit următoarele notații:

Dacă G și H sunt grupuri atunci definim

- $\mathrm{Hom}(G, H) = \{ f: G \to H \,/\, f \text{ morfism} \}$ mulțimea morfismelor de la G la H
- $\mathrm{End}(G) = \mathrm{Hom}(G, G)$ mulțimea endomorfismelor lui G.