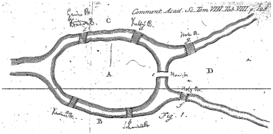
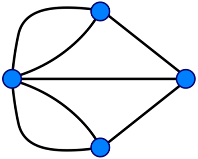




Algoritmica grafurilor

I. Introducere

Mihai Suciu
Facultatea de Matematică și Informatică (UBB)
Departamentul de Informatică

Februarie, 28, 2019

Continut

Organizare

- curs și seminar: Mihai Suciu (*mihai-suciu [at] cs.ubbcluj.ro*, `www.cs.ubbcluj.ro/~mihai-suciu`)
- laborator:
  - Asist. drd. COROIU Adriana (*adrianac [at] cs.ubbcluj.ro*, `http://www.cs.ubbcluj.ro/~adrianac/`)
  - Mihai Suciu
- Pagina web a cursului `www.cs.ubbcluj.ro/~mihai-suciu/graf/`

Structura

- Curs: 2 ore / săptămână
- Seminar: 1 oră / săptămână
- Laborator: 1 oră / săptămână

Orar:

http://www.cs.ubbcluj.ro/files/orar/2018-2/disc/MLR5025.html

Evaluare și cerințe

- Colocviu (C) - examen scris (curs 14)
- Activitate Laborator (L)
  - două teste susținute pe parcursul semestrului:
    - testul 1 - laboratorul 4 (săptămânile 7, 8 de școală)
    - testul 2 - laboratorul 7 (săptămânile 13, 14 de școală)
- Puncte bonus la laborator (B)
  - **1p** (0.2p / laborator)
- nota finala:

$$\mathbf{0.67} * C + \mathbf{0.33} * L + B = 11p$$

- **colocviu** - nota trebuie să fie **minim 5**!!
- **laborator** - media testelor trebuie sa fie **minim 5**!!

Evaluare și cerințe (II)

- problemele primite la laborator trebuie rezolvate în **C/C++** (ca și IDE se recomandă Visual Studio varianta community - `https://visualstudio.microsoft.com/`).
- Activitatea de seminar este OBLIGATORIE în proporție de minim 75% $\longrightarrow$ maxim **2** absențe.
- Activitatea de laborator este OBLIGATORIE în proporție de minim 90% $\longrightarrow$ maxim **1** absențe.

Evaluare și cerințe (III)

- Este necesară participarea studenților la ambele ore de seminar / laborator pentru a fi luată în considerare prezența.
- Studenții cu mai mult de 2 absente **nemotivate** la seminar **sau** laborator nu vor fi primiți la examenul din sesiunea normală și **nici** la examenul din sesiunea de restanțe (acești studenți vor trebui să repete acest curs în anul universitar următor). Sunt exceptați de la această cerință cei scutiți medical care pot dovedi cu acte fiecare absență în parte.

De ce?

Obiective:

- Obținerea unei imagini de ansamblu, cunoașterea și înțelegerea noțiunilor, modelelor generale de probleme și algoritmilor de rezolvare a acestora
- Cunoașterea conceptelor teoretice ale algoritmicii grafurilor și aplicarea acestora în modelarea și rezolvarea problemelor
- Analizarea unui gaf și a problemelor ce țin de grafuri: conectivitate, cel mai scurt drum, drum minim, flux de date, problema comis-voiajorului, etc.
- Cunoașterea implementării algoritmilor într-un limbaj de programare

Conținut curs

1. Noțiuni de bază
2. Studiu aprofundat al reprezentării grafurilor. Drumuri în grafuri.
3. Algoritmul lui Bellman-Kalaba, algoritmul lui Ford, algoritmi matriceali, drum ciclic, drumuri Euleriene, drumuri Hamiltoniene.
4. Conectivitate și probleme de lanț minim. Parcurgeri de graf în lațime și adâncime.
5. Numere fundamentale în teoria grafurilor.
6. Arbori și păduri

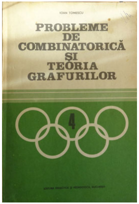
Conținut curs (II)

7. Cuplaje în grafuri
8. Probleme extremale
9. Probleme grele: ciclu Hamiltonian, problema comis-voiajorului. Probleme de numărare și enumerare.
10. Probleme grele: clique, vertex cover, colorare
11. Ciclu elementar Eulerian. Grafuri planare.
12. Rețele de transport.
13. Fluxuri în rețele de transport.
14. Probleme de cuplaj.

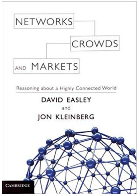
Bibliografie

- Berge C., Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris 1970.
- Berge C., Teoria grafurilor și aplicațiile ei, Ed. Tehnica, 1972
- T. Toadere, Grafe. Teorie, algoritmi și aplicații, Ed. Albastra, Cluj-N (ed. I, II, III), 2002 și 2009
- KÁSA ZOLTÁN, Combinatorică cu aplicații, Presa Universitara Clujeana, 2003.
- Cormen, Leiserson, Rivest, Introducere în algoritmi, Editura Computer Libris Agora, 2000.
- Rosu A., Teoria grafelor, algoritmi, aplicații. Ed. Militară, 1974.
- Ciurea E., Ciupala L., Algoritmi - algoritmii fluxurilor în rețele, Ed. Matrix Rom, 2006.
- CATARANCIUC S., IACOB M.E., TOADERE T., Probleme de teoria grafelor, Lito. Univ. Cluj-Napoca, 1994.
- KÁSA Z., TARTIA C., TAMBULEA L.: Culegere de probleme de teoria grafelor, Lito. Univ. Cluj-Napoca 1979.

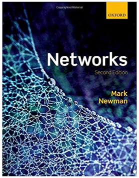
Bibliografie (II)



TOMESCU I., Probleme de combinatorica si teoria grafurilor. Ed. Did. si Pedag. Bucuresti 1981.

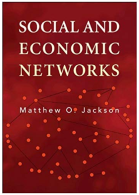


Easley David and Kleinberg Jon. 2010. Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World. Cambridge University Press, New York, NY, USA.

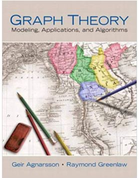


Mark Newman. 2010. Networks: An Introduction. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA

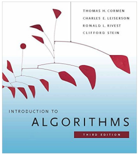
Bibliografie (III)



Matthew O. Jackson. 2008. Social and Economic Networks. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA.

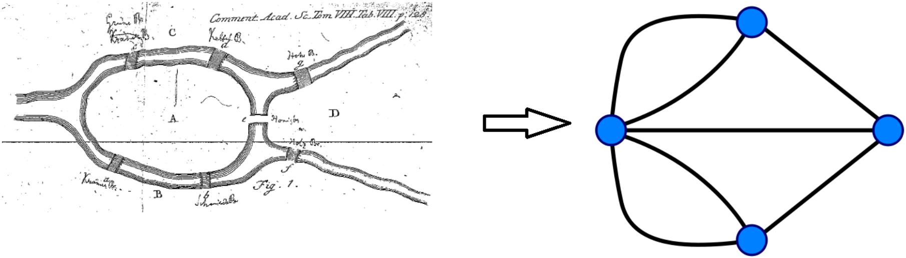


Geir Agnarsson and Raymond Greenlaw. 2006. Graph Theory: Modeling, Applications, and Algorithms. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.

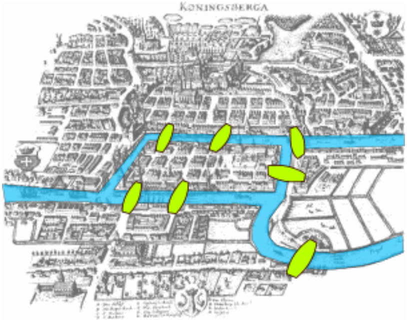


Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. Introduction to Algorithms, Third Edition (3rd ed.). The MIT Press.

Partea II

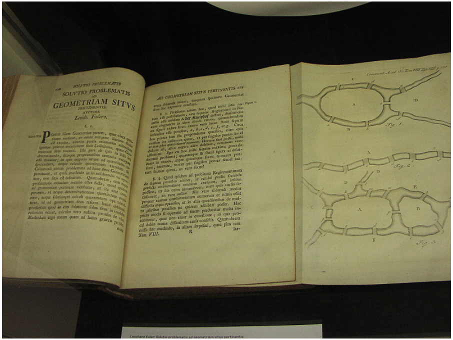


Inceputuri

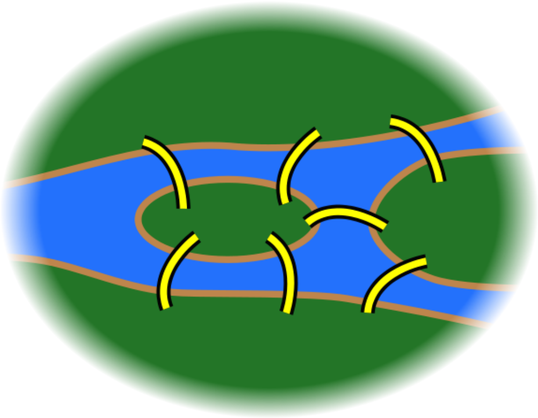


Soluție

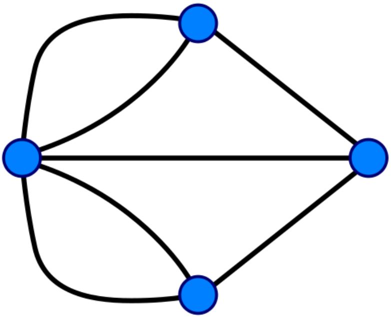
Leonhard Euler (1707-1783)



Podurile din Königsberg



Podurile din Königsberg (II)

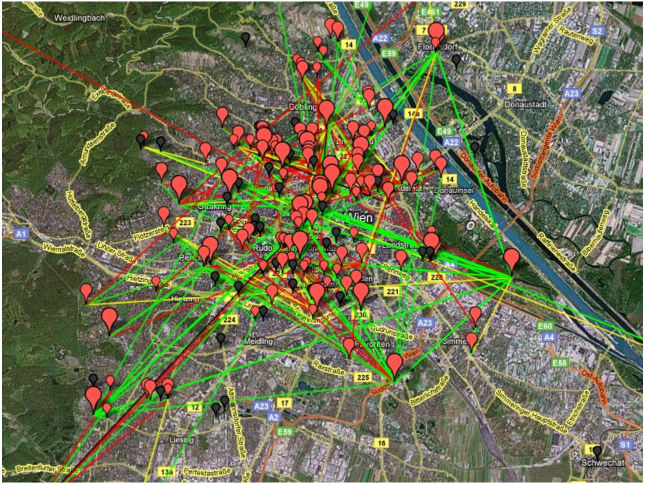


Plecând de la poduri...

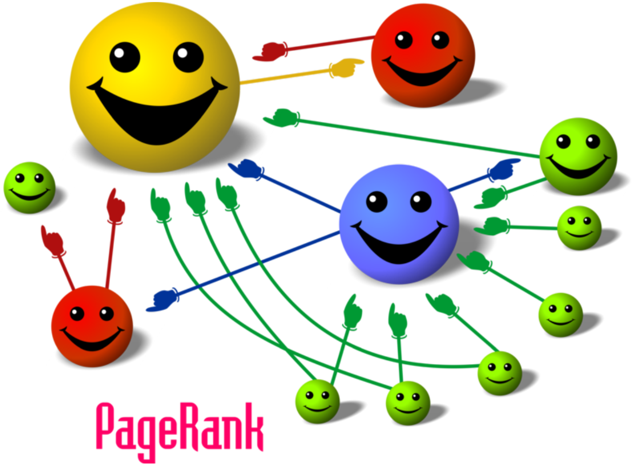
- drumuri și circuite Euleriene - problema poștașului chinezesc, etc.
- drumuri și circuite Hamiltoniene - TSP, rutarea vehiculelor, etc.
- colorarea grafurilor - probleme de planificare / alocare (alocarea regiștrilor CPU), etc.
- cuplaje în grafuri - probleme de asignare, repartizare, admitere în învățământ
- fluxuri în grafuri - reconstrucție de imagini 3D, calcul paralel, etc.
- drumuri de cost minim - harți, algoritmi de compresie, etc.

Unde suntem acum?

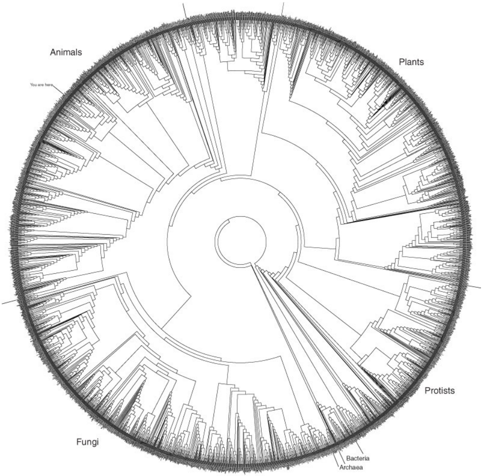
Unde suntem acum? (II)



Unde suntem acum? (III)



Unde suntem acum? (IV)



Definiții

Multigraf neorientat

se numește multigraf orice sistem de forma $G = (V, E, g)$ unde
V - mulțimea vârfurilor, $V \neq \varnothing$
E - mulțimea muchiilor, $V \cap E = \varnothing$
$g : E \rightarrow V \bigotimes V$

Se mai poate scrie

$$G = (V(G), E(G), g(G))$$

Observații:

1. dacă mulțimile V și E sunt finite $\Rightarrow$ multigraful G este finit
2. $AxB = \{(a, b)|a \in A, b \in B\}$ - pereche ordonată de elemente
3. $A \bigotimes B = \{(a, b)|a \in A, b \in B \,\mathrm{sau}\, a \in B, b \in A\}$ - pereche neordonată

Multigraf (n,m)

$n = |V|$ - **ordinul** multigrafului G

$m = |E|$ - **dimensiunea** multigrafului G

- dacă extremitățile unei muchii coincid, muchia se numește **buclă**

$$g(e) = \{a, a\}$$

- dacă

$$g(e_1) = g(e_2)$$

  atunci muchiile e_1 și e_2 sunt paralele

Muchii adiacente

- setul muchiilor ce leagă vârfurile a și b este

$$g^{-1}(a, b) = \{e \in E(G) | g(e) = \{a, b\}\}$$

Muchii adiacente

fie x un vârf din G. $N_G(x)$ sau $N(x)$ este setul muchiilor adiacente lui x:

$$N_G(x) = \{y \in V(G), \exists e \in E(G), g(e) = \{x, y\}\}$$

sau

$$N_G(x) = \{y \in V(G), g^{-1}(x, y) \neq \varnothing\}$$

Muchii incidente

Muchii incidente

intr-un multigraf G, setul muchiilor incidente lui x (care nu sunt bucle) este:

$$I_G(x) = \{e \in E(G), \exists y \in V(G), y \neq x, g(e) = \{x, y\}\}$$

Bucle incidente

setul buclelor incidente nodului x este:

$$L_G(x) = \{e \in E(G), g(e) = \{x, x\}\}$$

Gradul unui vârf

Gradul unui vârf

gradul unui vârf, notat $d(x)$, este numărul muchiilor incidente lui x:

$$d(x) = card(I_G(x)) + 2 * card(L_G(x)).$$

Gradul maxim / minim

vom nota cu $\Delta(G)$ *gradul maxim* al vârfurilor grafului G și cu $\delta(G)$ gradul minim al vârfurilor lui G.

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v), \delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$$

Dacă:

- $d(x) = 0$, x este un vârf izolat
- $d(x) = 1$, x este vârful unei muchii

Graf simplu

Graf simplu

un multigraf fără bucle și muchii paralele se numește **graf simplu**. În acest caz

$$|g^{-1}(a, b)| \leq 1, \forall a, b \in V.$$

Se poate scrie $\{a, b\}$ în loc de $g(e) = \{a, b\}$.
Graful se notează $G = (V, E)$.

Observații:

- pentru un graf simplu gradul unui nod este:

$$d(x) = |N_G(x)|$$

Definiții

graf regular

graf în care toate vârfurile au același grad.
Graf k-regular, toate vârfurile au gradul k

$$d(x) = k, \forall x \in V(G).$$

Graf complet

un graf pentru care toate perechile de vârfuri sunt adiacente se numește **graf complet**. Un graf complet de ordinul n se notează K_n.

Exemple

Definiții (II)

graful $G' = (V', E')$ este complementul grafului $G = (V, E)$, dacă $V' = V$ și $E' = \{\{a, b\} | \{a, b\} \notin E\}$.

- dacă G este un graf de ordinul n atunci $E(G) \cup E(G') = E(K_n)$.

Izomorfism

Izomorfism multigraf

multigrafurile G_1 și G_2 sunt izomorfe dacă există bijecțiile $f : V_1 \to V_2$ și $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel ca:

$$(i, j, k) \in E_1 \Leftrightarrow (f(i), f(j), g(k)) \in E_2.$$

Izomorfism (II)

Izomorfism graf simplu

două grafuri G_1 și G_2 sunt izomorfe dacă există funcția bijectivă $f : V_1 \to V_2$ astfel ca:

$$(a, b) \in E_1 \Leftrightarrow (f(a), f(b)) \in E_2.$$

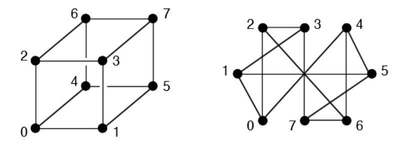
sau

Izomorfism graf simplu

un graf $G_1 = (V_1, E_1)$ este izomorf cu un graf $G_2 = (V_2, E_2)$ dacă există o corespondență binunivocă între mulțimile vârfurilor V_1 și V_2 și o corespondență biunivocă între mulțimile muchiilor E_1 și E_2 în așa fel încât dacă e_1 ese o muchie cu extremitățile u_1 și v_1 în graful G_1, atunci muchia corespondentă e_2 a grafului G_2 are extremitățile în vârfurile u_2 și v_2 din V_2, vârfuri care corespund cu u_1 și v_1.

Izomorfism (III)

Exemplu izomorfism



Teoremă

relația de izomorfism în mulțimea grafurilor este o relație de echivalență.

Exemple de grafuri

- graf nul
- graf linie
- graf ciclu
- graf complet
- graf bipartit complet

hand-shaking

pentru un graf G avem

$$\sum_{u \in V(G)} d_G(u) = 2|E(G)|.$$

corolar

într-un graf există întotdeauna un număr par de vârfuri ce au grad impar

corolar

fiecare graf k-regular pe n vârfuri are $\frac{kn}{2}$ muchii, în particular K_n are $\frac{n(n-1)}{2}$ muchii.

Subgraf

Definiție

pentru multigraful $G_1 = (V_1, E_1, g_1)$ și $G = (V, E, g)$ spunem că G_1 este subgraf al lui G dacă
$V_1 \subseteq V$
$E_1 \subseteq E$
$g_1(e) = g(e), \forall e \in E_1$
se notează $G_1 \subseteq G$

Multigraf, graf orientat

Multigraf orientat

se numește multigraf orientat orice sistem de forma $\vec{G} = (V, E, \eta)$ unde
V este mulțimea vârfurilor, $V \neq \emptyset$
E este mulțimea **arcelor**, $V \cap E = \emptyset$
$\eta : E \to VxV$

- $\eta(e) = \{u, v\}$ arcul este **incident spre exterior** vârfului u, arcul este **incident spre interior** vârfului v
- $\eta(e) = \{u, u\}$ - arc buclă
- $\eta(e_1) = \eta(e_2)$ - arce paralele
- un **graf orientat simplu** se definește în mod similar unui graf neorientat

Subgrad interior, exterior

Definiție

fie multigraful $G = (V, E, \eta)$ și vârful $x \in V$

- se numește subgradul interior, se notează $d^-(x)$, numărul arcelor incidente spre interior vârfului x:

$$d^-(x) = |\{e \in E | \eta(e) = \{y, x\}, \forall y \in V\}| = |N^{in}_{\vec{G}}(x)|$$

- se numește subgradul exterior, notat d^+, numărul arcelor incidente spre exterior nodului x:

$$d^+(x) = |\{e \in E | \eta(e) = \{x, y\}, \forall y \in V\}| = |N^{out}_{\vec{G}}(x)|$$

- $$d(x) = d^-(x) + d^+(x)$$

Subgrad interior, exterior (II)

Teoremă

pentru un multigraf orientat avem:

$$\sum_{x \in V(\vec{G})} d^-(x) = \sum_{x \in V(\vec{G})} d^+(x) = |E(\vec{G})|$$

Multigraf ponderat

Multigraf ponderat

se numește multigraf ponderat orice sistem de forma $G = (V, E, g, W)$

V - mulțimea vârfurilor, $V \neq \varnothing$

E - mulțimea muchiilor, $V \cap E = \varnothing$

$g : E \to V \bigotimes V$

$W : E \to \mathbb{R}$ - ponderea muchiilor

Multigraf ponderat orientat

se numește multigraf ponderat orientat orice sistem de forma

$\vec{G} = (V, E, \eta, W)$ unde

V este mulțimea vârfurilor, $V \neq \varnothing$

E este mulțimea **arcelor**, $V \cap E = \varnothing$

$\eta : E \to V \ x \ V$

$W : E \to \mathbb{R}$ - ponderea arcelor

Drumuri în grafuri

Drum

fiind dat un graf orientat $G = (V, E)$, prin **drum** în graful G înțelegem o succesiune de arce cu proprietatea că extremitatea terminală a unui arc al drumului coincide cu extremitatea inițială a arcului urmator din drum.

- drum = o succesiune de vârfuri care sunt extremități ale arcelor ce compun drumul
- un drum μ este $\{e_1, e_2, ..., e_q\}$ fie $\{i_0, i_1, ..., i_q\}$ cu proprietatea că $e_j = (i_{j-1}, i_j) \in E$ pentru $j = 1, 2, ..., q$

Drumuri în grafuri (II)

Lungimea unui drum

lungimea unui drum este numărul arcelor care compun drumul respectiv.

Un drum într-un graf este:

- **simplu** dacă nu folosește de două ori un același arc
- **compus** dacă nu este simplu
- **elementar** dacă nu conține (trece) de două ori un același vârf
- **circuit** dacă extremitatea inițială a drumului coincide cu cea finală
- **eulerian** dacă este simplu și trece prin toate arcele grafului
- **hamiltonian** dacă este elementar și trece prin toate vârfurile grafului

Drumuri în grafuri neorientate

- corespunzător noțiunilor de drum si circuit în grafurile neorientate sunt noțiunile de **lanț** și **ciclu**

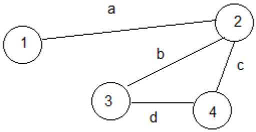
Lanț

un **lanț** este o succesiune de muchii cu proprietatea că oricare muchie are o extremitate comună cu muchia precedentă și cealaltă extremitate este comună cu muchia următoare.

Ciclu

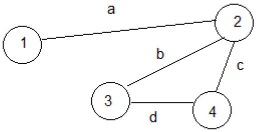
dacă extremitățile lanțului coincid, atunci lanțul se numește **ciclu**.

Exemplu



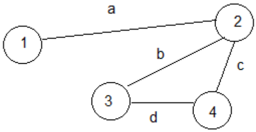
- Lanț:

Exemplu



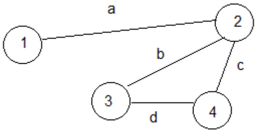
- Lanț: 1a2c4d3b2c4

Exemplu



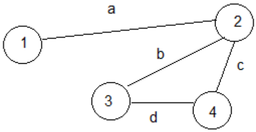
- Lanț: 1a2c4d3b2c4
- Lanț simplu:

Exemplu



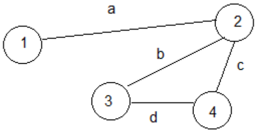
- Lanț: 1a2c4d3b2c4
- Lanț simplu: 2b3d4c2

Exemplu



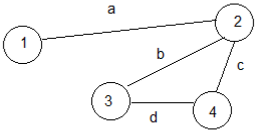
- Lanț: 1a2c4d3b2c4
- Lanț simplu: 2b3d4c2
- Lanț elementar:

Exemplu



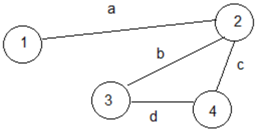
- Lanț: 1a2c4d3b2c4
- Lanț simplu: 2b3d4c2
- Lanț elementar: 1a2b3

Exemplu



- Lanț: 1a2c4d3b2c4
- Lanț simplu: 2b3d4c2
- Lanț elementar: 1a2b3
- Ciclu simplu:

Exemplu



- Lanț: 1a2c4d3b2c4
- Lanț simplu: 2b3d4c2
- Lanț elementar: 1a2b3
- Ciclu simplu: 2b3d4c2

Graf tare conex, conex

Graf tare conex

un graf orientat este **tare conex** dacă între oricare două vârfuri ale grafului există un drum.

- graf tare conex - prin oricare două vârfuri trece ce puțin un circuit

Graf conex

un graf neorientat este **conex** dacă între oricare două vârfuri ale grafului există un lanț.

Reprezentarea matriceală

Pentru exemplele date grafurile au fost reprezentate grafic, pentru un program scris această reprezentare nu este suficientă.

Un graf poate fi reprezentat folosind:

- **matricea de adiacență**

  $A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, ..., n$ unde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in E \\ 0, & (i,j) \notin E \end{cases}$$

Reprezentarea matriceală

Pentru exemplele date grafurile au fost reprezentate grafic, pentru un program scris această reprezentare nu este suficientă.

Un graf poate fi reprezentat folosind:

- **matricea de adiacență**
  $A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, ..., n$ unde
  $$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in E \\ 0, & (i,j) \notin E \end{cases}$$
- **matricea de incidență** - se atașează grafurilor simple a căror mulțime de arce s-a ordonat, linia i corespunde vârfului i iar coloana j corespunde arcului e, matricea este de tipul nxm. Elementele matricii:
  $$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \exists j \in V | e = (i,j), \\ -1, & \exists j \in V | e = (j,i), i \in V, e \in E \\ 0, & altfel \end{cases}$$

Reprezentarea matriceală

Pentru exemplele date grafurile au fost reprezentate grafic, pentru un program scris această reprezentare nu este suficientă.

Un graf poate fi reprezentat folosind:

- **matricea de adiacență**
  $A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, ..., n$ unde
  $$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in E \\ 0, & (i,j) \notin E \end{cases}$$
- **matricea de incidență** - se atașează grafurilor simple a căror mulțime de arce s-a ordonat, linia *i* corespunde vârfului *i* iar coloana *j* corespunde arcului *e*, matricea este de tipul *nxm*. Elementele matricii:
  $$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \exists j \in V | e = (i,j), \\ -1, & \exists j \in V | e = (j,i), i \in V, e \in E \\ 0, & altfel \end{cases}$$
- **listă**

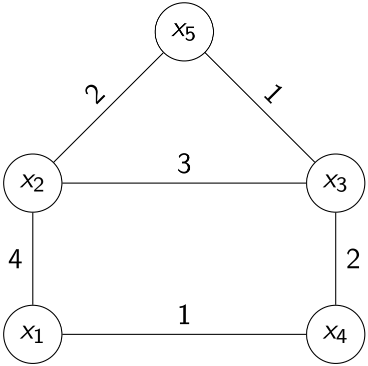
Determinarea matricei distanțelor

algoritmul Warshall

$\textsc{Warshall}(D_0)$
1. $D := D_0$
2. **for** $k := 1$ **to** n **do**
3.   **for** $i := 1$ **to** n **do**
4.   **for** $j := 1$ **to** n **do**
5. $d_{ij} := \min(d_{ij}, d_{ik} + d_{kj})$
6. **return** D

Exemplu

Fie graful ponderat



Matricea distanțelor

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 0 & 4 & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$