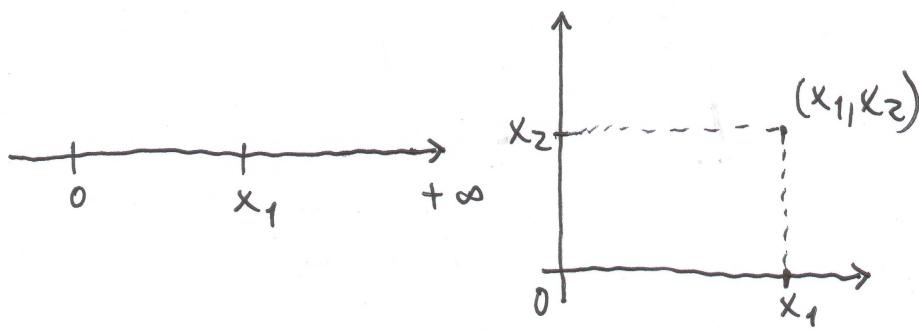


FUNCTII VECTORIALE DE VARIABILĂ VECTORIALĂ

1. Topologia spațiului \mathbb{R}^m

$$m \in \mathbb{N}^*, \mathbb{R}^m = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{m \text{ ori}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}\}$$

Cazuri particulare:



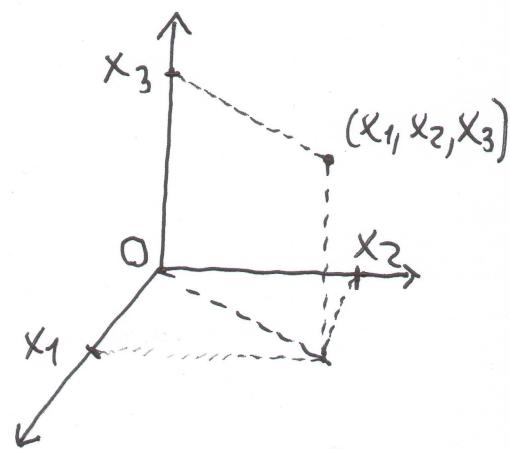
$$m = 1,$$

$$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$$

$$m = 2,$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$m = 3,$$



Def: Elementele mulțimii \mathbb{R}^m se numesc puncte (vectori) cu m componente, iar numerele din \mathbb{R} se numesc scalari.

Def: Definim operații:

$$\text{a)} \quad \forall x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$x + y \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m) \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

numită adunarea vectorilor.

$$\text{b)} \quad \forall x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda x \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

numită mărirea cu scalar.

Obs: Multimea \mathbb{R}^m împreună cu operațiile (1) și (2) formează o structură algebraică de spațiu vectorial real m -dimensional (a se vedea cursul de algebra).

Notă: 1) $0_m = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ vectorul nul.

2) $\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ fie $-x \stackrel{\text{def}}{=} (-x_1, \dots, -x_m) \in \mathbb{R}^m$ numit opusul lui x .

3) $e^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e^2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e^m = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^m$ numiți vectorii canoniici.

Def: $\forall x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ definim operația

$$x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m \in \mathbb{R}$$

numită produsul scalar al vectorilor x și y .

Prop (proprietăți ale produsului scalar)

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem:

$$1^{\circ} x \cdot y = y \cdot x$$

$$2^{\circ} (\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$$

$$3^{\circ} x \cdot x \geq 0$$

Iată: 1^o, 3^o (temă)

$$1^{\circ} x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m), z = (z_1, \dots, z_m)$$

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_m + \beta y_m),$$

$$(\alpha x + \beta y) \cdot z = \sum_{i=1}^m (\alpha x_i + \beta y_i) \cdot z_i = \sum_{i=1}^m (\alpha x_i z_i + \beta y_i z_i) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^m x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^m y_i z_i = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$$

I (inegalitatea lui Cauchy-Schwarz)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^m \text{ arem } |x \cdot y| \leq \sqrt{x \cdot x} \cdot \sqrt{y \cdot y}$$

Dem:

$x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, inegalitatea se scrie

$$|x_1 y_1 + \dots + x_m y_m| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_m^2} \quad (*)$$

Considerăm funcția $f(t) = \sum_{i=1}^m (x_i t + y_i)^2 \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$f(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot t^2}_{\geq 0} + 2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^m x_i \cdot y_i \cdot t}_{\text{termen mijlociu}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m y_i^2}_{\geq 0}.$$

cas I: $\sum_{i=1}^m x_i^2 = 0 \Rightarrow x = 0_m \Rightarrow (*)$ este adevărată cu egalitate.

cas II: $\sum_{i=1}^m x_i^2 > 0 \Rightarrow f(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ este o inecuație de gradul 2.

$$\begin{aligned} \Delta_t &= \left(2 \sum_{i=1}^m x_i \cdot y_i \right)^2 - 4 \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^m y_i^2 \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^m x_i \cdot y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^m y_i^2 \stackrel{!}{\Rightarrow} (*) \end{aligned}$$

Def: $\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ definim numărul real pozitiv

$$\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$$

numit normă (lungimea) euclidiană a vectorului x .

Prop: (proprietăți ale normei)

$\forall x, y \in \mathbb{R}^m$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ au loc:

$$1^{\circ} \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_m$$

$$2^{\circ} \| \alpha x \| = |\alpha| \cdot \| x \|$$

$$3^{\circ} \| x+y \| \leq \| x \| + \| y \| \quad (\text{inegalitatea triunghiului})$$

Dem: $1^{\circ}, 2^{\circ}$ (temă)

$$\begin{aligned} 3^{\circ} \| x+y \|^2 &= (x+y) \cdot (x+y) = x \cdot x + \underline{x \cdot y} + \underline{y \cdot x} + y \cdot y = \\ &= \| x \|^2 + 2(x \cdot y) + \| y \|^2 \leq \| x \|^2 + 2|x \cdot y| + \| y \|^2 \stackrel{c-s}{\leq} \\ &\leq \| x \|^2 + 2\| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \| x+y \| \leq \| x \| + \| y \| \end{aligned}$$

Def: $\forall x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ numărul real pozitiv

$$\| x-y \| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_m-y_m)^2}$$

este numit distanță euclidiană de la x la y .

Obs: $x-y = x+(-y) = (x_1-y_1, \dots, x_m-y_m)$

Prop: (proprietăți ale distanței)

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m$ au loc:

$$1^{\circ} \| x-y \| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$2^{\circ} \| x-y \| = \| y-x \|$$

$$3^{\circ} \| x-y \| \leq \| x-z \| + \| z-y \|$$

Dem: $1^{\circ}, 2^{\circ}$ (temă)

$$3^{\circ} \| x-y \| = \| \underline{x-z} + \underline{z-y} \| \leq \| x-z \| + \| z-y \|.$$

Def: Fie $x^0 \in \mathbb{R}^m$ și $r > 0$. Multimea

a) $B(x^0, r) = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid \| x-x^0 \| < r \}$ se numește

bila deschisă de centru x^0 și rază r .

b) $\bar{B}(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x^0\| \leq r\}$ se numește
bilă închisă de centru x^0 și rază r

Cazuri particulare:

$m=1$: $x \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$, $x^0 \in \mathbb{R}$
 $\|x - x^0\| < r \Leftrightarrow |x - x^0| < r \Leftrightarrow x \in (x^0 - r, x^0 + r)$
deci $B(x^0, r) = (x^0 - r, x^0 + r)$, $\bar{B}(x^0, r) = [x^0 - r, x^0 + r]$.

$m=2$: $x = (x_1, x_2)$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$.

$$\|x - x^0\| < r \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 < r^2.$$

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ o multime nereidă.

a). $\text{int } A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists r > 0 \text{ a.ș. } B(x, r) \subseteq A\}$ se numește
multimea punctelor interioare ale lui A .

b). $A' = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall r > 0 : B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset\}$
se numește multimea punctelor de acumulare ale lui A .

c). $\text{fr } A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ și } B(x, r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset\}$
se numește multimea punctelor frontiere ale lui A .

d). A se numește multime deschisă dacă $\forall x \in A, \exists r > 0$ a.ș.
 $B(x, r) \subseteq A$.

e). A se numește multime închisă dacă $\mathbb{R}^m \setminus A$ este deschisă.

Obs: Prin convenție, \mathbb{R}^m este atât o multime deschisă cât și
o multime închisă.

Prop: (caracterizarea mulțimilor deschise și închise cu ajutorul punctelor frontierei)

Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^m$ este o mulțime necidă atunci

1°. A este deschisă $\Leftrightarrow A \cap \text{fr}A = \emptyset$

2° A este închisă $\Leftrightarrow \text{fr}A \subseteq A$.

Dem: 1°. " \Rightarrow "

Presupunem prin absurd că $A \cap \text{fr}A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A \cap \text{fr}A$

$x \in A \Rightarrow \exists \eta_0 > 0$ a.î. $B(x, \eta_0) \subseteq A$

$x \in \text{fr}A \Rightarrow \forall \eta > 0 : B(x, \eta) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset$, adică $B(x, \eta) \not\subseteq A$.

-absurd $\Rightarrow A \cap \text{fr}A = \emptyset$

" \Leftarrow "

Fie $x \in A \Rightarrow x \notin \text{fr}A \Rightarrow \exists \eta > 0$ a.î. $\underbrace{B(x, \eta) \cap A = \emptyset}$ sau
nu este aderată

$B(x, \eta) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) = \emptyset$

$\Rightarrow B(x, \eta) \subseteq A \Rightarrow A$ deschisă.

2°. " \Rightarrow "

Fie $x \in \text{fr}A \Rightarrow \forall \eta > 0 : B(x, \eta) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \eta > 0 : B(x, \eta) \not\subseteq \mathbb{R}^m \setminus A$.

Presupunem prin absurd că $x \notin A \Rightarrow x \in \mathbb{R}^m \setminus A$.

A închisă $\Rightarrow \mathbb{R}^m \setminus A$ deschisă $\Rightarrow \exists \eta_0 > 0$ a.î. $B(x, \eta_0) \subseteq \mathbb{R}^m \setminus A$.

-absurd $\Rightarrow x \in A$, deci $\text{fr}A \subseteq A$.

" \Leftarrow "

Anătăim că $\mathbb{R}^m \setminus A$ este deschisă.

Presupunem prin absurd că $\mathbb{R}^m \setminus A$ nu este deschisă \Rightarrow

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^m \setminus A$ a.î. $\forall \eta > 0 : B(x, \eta) \not\subseteq \mathbb{R}^m \setminus A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^m \setminus A \text{ a.i. } \forall r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \left. \begin{array}{l} \text{Dar } x \in B(x, r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \text{fr } A$$

(7)

$\Rightarrow x \in A$ - absurd.

Cons: În \mathbb{R}^m au loc afirmațiile:

- 1°. Bilele deschise sunt multimi deschise
- 2°. Bilele închise sunt multimi închise.

Prop: Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^m$ este multime reeață atunci au loc:

- 1°. $\text{int } A \subseteq A$
- 2°. $A' \subseteq A \cup \text{fr } A$
- 3°. $\text{int } A = A \setminus \text{fr } A$
- 4°. $\text{fr } A = \text{fr}(\mathbb{R}^m \setminus A)$
- 5°. $\text{int } A \cup \text{fr } A \cup \text{int } (\mathbb{R}^m \setminus A) = \mathbb{R}^m$
- 6°. $\text{int } A$ este multime deschisă
- 7°. $\text{fr } A$ este multime închisă

Dem: (la semință)

Ex: Fie $A = (a, b] \subseteq \mathbb{R}$

$$\text{int } A = (a, b)$$

$$A' = [a, b]$$

$$\text{fr } A = \{a, b\}$$

A nu este nici deschisă, nici închisă.