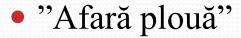
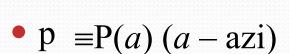
Logică computațională Curs 8

Lector dr. Mihiș Andreea-Diana

Logica predicatelor de ordinul I







- "În fiecare zi plouă afară" $(\forall x) P(x) (x ziua)$

• "Mâine va ploua"

• P(*b*) (*b* − mâine)

- "Acum o lună a plouat"
- P(f(a)) (f(x) := x 30)

Sistemul axiomatic al logicii predicatelor de ordinul I - Alfabetul

- $P=(\sum_{Pr}, F_{Pr}, A_{Pr}, R_{Pr})$
 - $\sum_{\Pr} = Var \cup Const \cup (\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{F}_{j}) \cup (\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{P}_{j}) \cup \mathcal{P}_{0} \cup Conective$ $\cup Cuantif$
 - $Var = \{x, y, z, ...\}$ muţimea *simbolurilor de variabile*
 - $Const = \{a, b, c, ...\}$ muţimea constantelor
 - $\mathcal{F}_j = \{f | f: D^j \to D\}$ muţimea *simbolurilor de funcţii* de aritate "j"
 - $\mathfrak{P}_j = \{ P \mid P: D^j \to \{T, F\} \}$ muţimea simbolurilor de predicate de aritate "j"
 - $\mathfrak{P}_0 = \{p, q, r, ...\} \cup \{T, F\}$ muţimea variabilelor propoziționale şi a valorilor de adevăr
 - Conective = $\{\neg, \land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
 - $Cuantif = \{ \forall (cuantificatorul universal), \exists (cuantificatorul existențial) \}$

TERM, ATOM, Literal

- *TERM* = mulţimea *termenilor*:
 - $Var \subset TERM$
 - $Const \subset TERM$
 - dacă $f \in \mathcal{F}_k$ și $t_1, ..., t_k \in TERM$ atunci $f(t_1, ..., t_k) \in TERM$
- *ATOM* = mulţimea *formulelor atomice* (*atomilor*):
 - T, $F \in ATOM$
 - dacă $P \in \mathcal{P}_k$ și $t_1, ..., t_k \in TERM$ atunci $P(t_1, ..., t_k) \in ATOM$
- Literal = un atom sau negația sa

Formule corect construite

- $\bullet F_{\rm Pr}$ = mulţimea formulelor predicative bine formate
 - $ATOM \subset F_{Pr}$
 - dacă $U \in F_{Pr}$ și $x \in Var$ astfel încât x nu se află deja sub incidența unui cuantificator (nu este legat), atunci:

$$(\forall x) \ U(x) \in \mathcal{F}_{Pr} \ \text{si} \ (\exists x) \ U(x) \in \mathcal{F}_{Pr}$$

• dacă $U, V \in \mathcal{F}_{Pr}$ astfel încât U și V nu conțin aceeași variabilă atât liberă cât și legată, atunci:

$$\neg U \in F_{\operatorname{Pr}}, U \land V \in F_{\operatorname{Pr}}, U \lor V \in F_{\operatorname{Pr}}, U \to V \in F_{\operatorname{Pr}}, U \leftrightarrow V \in F_{\operatorname{Pr}}$$

Axiome

- $\bullet A_{\text{Pr}} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ scheme axiomatice
 - $A_1: U \to (V \to U)$
 - A_2 : $(U \rightarrow (V \rightarrow Z)) \rightarrow ((U \rightarrow V) \rightarrow (U \rightarrow Z))$
 - A_3 : $(U \rightarrow V) \rightarrow (\neg V \rightarrow \neg U)$
 - A_4 : $(\forall x) U(x) \rightarrow U(t)$, unde t este un termen arbitrar
 - A_5 : $(U \to V(y)) \to (U \to (\forall x) \ V(x))$, unde y este o variabilă liberă în V care nu apare în U, iar x nu este variabilă liberă nici în U, nici în V

Reguli de inferență

$$\bullet R_{\rm Pr} = \{mp, gen\}$$

• modus ponens: $U, U \rightarrow V \vdash_{mp} V$

• regula generalizării: $U(x) \vdash_{gen} (\forall x) U(x)$

(x era o variabilă liberă în U)

Definiții

- Variabilele din formulele predicative care se află sub incidența unui cuantificator se numesc *variabile legate*, în caz contrar ele se numesc *variabile libere*.
- O *formulă* predicativă se numește *închisă*, dacă toate variabilele sale sunt legate, iar în caz contrar se numește *deschisă*.

Definiția deducției

- Fie formulele $U_1, U_2, ..., U_n$ numite ipoteze și V formulă propozițională. Spunem că V este deductibilă din $U_1, U_2, ..., U_n$ și notăm $U_1, U_2, ..., U_{n-1}, U_n | V$, dacă există o secvență de formule $(f_1, f_2, ..., f_m)$ astfel încât $f_m = V$ și $\forall i \in \{1, ..., m\}$ avem:
 - $f_i \in A_{\operatorname{Pr}}$;
 - $f_i \in \{U_1, U_2, ..., U_n\};$
 - f_j , $f_k \vdash_{mp} f_i$, j < i\$\fi k < I
 - $f_i \vdash_{gen} f_i, j < i$
- Secvența $(f_1, f_2, ..., f_m)$ se numește deducția lui V din $U_1, U_2, ..., U_n$.

Definiția teoremei

• O formulă $U \in F_{\Pr}$, astfel încât $\varnothing \vdash U$ (sau $\vdash U$) se numește *teoremă*.

Semantica logicii predicatelor de ordinul I

- realizează legătura dintre
 - constantele,
 - simbolurile de funcții,
 - simbolurile de predicate respectiv

constantele, funcțiile și predicatele din conceptualizarea universului modelat

• este furnizat un înțeles în termenii universului modelat pentru orice formulă din limbaj

Definiția interpretării

- O *interpretare* pentru un limbaj L al calculului predicatelor este o pereche I=<D, m>, unde :
 - D este o mulțime nevidă numită domeniu al interpretării.
 - *m* este o funcție care asociază:
 - o valoare fixă m(c) din domeniul D unei constante c.
 - o funcție $m(f): D^n \to D$ fiecărui simbol de funcție f de aritate n;
 - un predicat $m(P): D^n \to \{T, F\}$ fiecărui simbol de predicat P de aritate n.

Notații

pentru interpretarea *I*=<*D*, *m*>:

- |I| = D este domeniul interpretării I
- I|X| = m(X) unde X este constantă, simbol de funcție sau simbol de predicat.
- As(*I*) mulțimea funcțiilor de asignare de variabile peste domeniul interpretării I.
 - O funcție $a \in As(I)$ este definită astfel a: $Var \rightarrow |I|$.
- $[a]_x = \{a' \mid a' \in As(I) \text{ si } a'(y) = a(x), \text{ pentru orice } y \neq x\}.$

Definiția funcției de evaluare

Fie o interpretare I și $a \in As(I)$. Se definește inductiv funcția de evaluare v_a^I :

- $\mathbf{v}^{I}_{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in Var;$
- $v_a^I(c) = I|c|, c \in Const;$
- $\mathbf{v}_{a}^{I}(f(t_{1}, ..., t_{n})) = I|f|(\mathbf{v}_{a}^{I}(t_{1}), ..., \mathbf{v}_{a}^{I}(t_{n})), f \in \mathcal{F}_{k}, n > 0;$
- $v_a^I(P(t_1, ..., t_n)) = I|P|(v_a^I(t_1), ..., v_a^I(t_n)), P \in \mathcal{P}_k, n > 0;$
- $\mathbf{v}_{a}^{I}(\neg A) = \neg \mathbf{v}_{a}^{I}(A)$; $\mathbf{v}_{a}^{I}(A \land B) = \mathbf{v}_{a}^{I}(A) \land \mathbf{v}_{a}^{I}(B)$
- $v_a^I(A \vee B) = v_a^I(A) \vee v_a^I(B); v_a^I(A \to B) = v_a^I(A) \to v_a^I(B)$
- $v_a^I((\exists x)A(x))=T$ dacă și numai dacă $v_a^I(A(x))=T$ pentru o funcție $a' \in [a]_x$
- $v_a^I((\forall x)A(x))=T$ dacă și numai dacă $v_a^I(A(x))=T$ pentru orice funcție $a' \in [a]_x$

Concepte semantice

- O formulă A este realizabilă (consistentă) dacă și numai dacă există o interpretare I și o funcție $a \in As(I)$ astfel încât $v_a^I(A)$ =T. În caz contrar formula se numește nerealizabilă (inconsistentă).
- Formula A este adevărată în interpretarea I dacă și numai dacă pentru orice funcție $a \in As(I)$ de asignare avem $v_a^I(A)$ =T și notăm = IA, iar I se numește model al lui A.
- Interpretarea I se numește *anti-model* da formulei predicative A dacă A este evaluată ca falsă în I, adică: $\forall a \in As(I)$ are loc $v^I_a(A)$ =F.
- Formula A este validă (tautologie) dacă și numai dacă A este adevărată în orice interpretare și se notează: =A.
- Două formule A și B sunt logic echivalente dacă $v_a^I(A) = v_a^I(B)$ pentru orice interpretare I și funcție a de asignare. Notație $A \equiv B$.
- O mulțime S de formule implică logic o formulă A dacă toate modelele mulțimii (adică modelele conjuncției formulelor din S) sunt modele ale formulei. Spunem că A este o consecință logică a mulțimii de formule S și notăm $S \models A$.
- O *mulțime de formule* predicative este *consistentă* dacă formula obținută prin conjuncția elementelor sale este consistentă, adică are cel puțin un model.
- O *mulțime de formule* este *inconsistentă* dacă nu există nici un model pentru formula obținută prin conjuncția elementelor sale.

Observații

- Evaluarea unei formule A închise depinde doar de interpretarea în care se evaluează formula, notându-se $v^I(A)$.
- Dacă interpretarea are domeniu finit:
 - o formulă cuantificată *universal* este înlocuită cu *conjuncția* instanțelor acesteia folosind toate elementele domeniului de interpretare
 - o formulă cuantificată *existențial* este înlocuită cu *disjuncția* instanțelor acesteia folosind toate elementele domeniului de interpretare

Echivalențe logice în calculul predicatelor

• Legile de expansiune

$$(\forall x) A(x) \equiv (\forall x) A(x) \land A(t), t - \text{termen oarecare } t \neq x$$

 $(\exists x) A(x) \equiv (\exists x) A(x) \lor A(t), t - \text{termen oarecare } t \neq x$

• Legile infinite ale lui DeMorgan

$$\neg (\exists x) A(x) \equiv (\forall x) \neg A(x)$$

$$\neg (\forall x) A(x) \equiv (\exists x) \neg A(x)$$

• Legile de interschimbare a cuantificatorilor

$$(\exists x) (\exists y) A(x, y) \equiv (\exists y) (\exists x) A(x, y)$$

$$(\forall x) (\forall y) A(x, y) \equiv (\forall y) (\forall x) A(x, y)$$

Legi de extragere

• Legile de extragere a cuantificatorilor în fața formulei

$$A \lor (\exists x) B(x) \equiv (\exists x) (A \lor B(x))$$

$$A \lor (\forall x) B(x) \equiv (\forall x) (A \lor B(x))$$

$$A \wedge (\exists x) B(x) \equiv (\exists x) (A \wedge B(x))$$

$$A \wedge (\forall x) B(x) \equiv (\forall x) (A \wedge B(x))$$

unde formula A nu conține pe x ca variabilă liberă sau legată

$$(\exists x) A(x) \lor B \equiv (\exists x) (A(x) \lor B)$$

$$(\forall x) A(x) \lor B \equiv (\forall x) (A(x) \lor B)$$

$$(\exists x) A(x) \land B \equiv (\exists x) (A(x) \land B)$$

$$(\forall x) A(x) \land B \equiv (\forall x) (A(x) \land B)$$

unde formula B nu conține pe x ca variabilă liberă sau legată

Legile distributivității

• ∃ față de ∨:

$$(\exists x) (A(x) \lor B(x)) \equiv (\exists x) A(x) \lor (\exists x) B(x)$$

• ∀ faţă de ∧ :

$$(\forall x) (A(x) \land B(x)) \equiv (\forall x) A(x) \land (\forall x) B(x)$$

Semidistributivități

• ∃ față de ∧ :

$$\models (\exists x) (A(x) \land B(x)) \rightarrow (\exists x) A(x) \land (\exists x) B(x)$$

• ∀ faţă de ∨ :

$$\models (\forall x) A(x) \lor (\forall x) B(x) \to (\forall x) (A(x) \lor B(x))$$

Forme normale ale formulelor predicative

- O formulă U predicativă este în *forma normală prenexă* dacă ea este de forma $(Q_1x_1)...(Q_nx_n)$ M, unde Q_i ,i=1,...,n sunt cuantificatori logici, iar M nu conține cuantificatori. Secvența se numește *prefixul formulei* U, iar M este *matricea formulei* U.
- O formulă *U* predicativă este în *forma normală prenexă* conjunctivă dacă ea este în formă normală prenexă, iar matricea este în FNC.

• Teoremă:

Orice formulă din calculul predicatelor poate fi transformată într-o forma normală prenexă logic echivalentă cu ea.

Algoritmul de aducere la forma normală prenexă

- **Pas 1:** Se înlocuiesc conectivele \rightarrow şi \leftrightarrow folosind \neg , \land , \lor .
- Pas 2: Se aplică legile finite și infinite ale lui DeMorgan astfel încât cuantificatorii să nu fie precedați de negație.
- **Pas 3:** Se redenumesc variabilele legate astfel încât ele să fie distincte.
- Pas 4: Se utilizează echivalențele logice care reprezintă legile de extragere a cuantificatorilor în fața formulei. !!! Ordinea de extragere a cuantificatorilor este arbitrară.

Forma normală Skolem

- Fie *U* o formulă predicativă, iar $U^P = (Q_1 x_1)...(Q_n x_n) M$ una dintre formele sale normale prenexe.
- Formulei U îi corespunde o formulă în *forma normală Skolem* notată U^S care se obține astfel: pentru fiecare cuantificator existențial Q_r din prefix se aplică următoarea transformare:
 - dacă înaintea simbolului Q_r nu apare niciun cuantificator universal, atunci se alege o constantă notată \mathbf{a} , diferită de toate constantele care apar în M și se înlocuiesc toate aparițiile variabilei x_r în M cu \mathbf{a} . Se șterge $(Q_r x_r)$ din prefixul formulei.
 - dacă înaintea simbolului Q_r apar cuantificatorii universali $Q_{s_1}, ..., Q_{s_m}$, unde $1 \le s_1 < ... < s_m < r$, atunci alegem un simbol f de funcție de m variabile, diferit de celelalte simboluri de funcții și se înlocuiește fiecare apariție a variabilei în M cu $f(x_{s_1}, ..., x_{s_m})$. Se șterge $(Q_r x_r)$ din prefixul formulei.
- Constantele și funcțiile folosite pentru a înlocui variabilele existențiale se numesc *constante Skolem* și *funcții Skolem*.

Forma normală clauzală

- Formulei U îi corespunde o formulă în forma normală Skolem fără cuantificatori notată U^{Sq} care se obține prin eliminarea cuantificatorilor universali din U^{S} .
- Formulei U îi corespunde o formulă în forma normală clauzală notată U^c care se obține din U^{Sq} prin aducerea la FNC.
- Obs.: Transformările utilizate în procesul de Skolemizare nu păstrează echivalența logică, dar păstrează inconsistența

Teoremă

Fie $U_1, U_2, ..., U_n, V$ formule predicative.

- V inconsistentă **ddacă** V^P inconsistentă **ddacă** V^S inconsistentă **ddacă** V^{Sq} inconsistentă **ddacă** V^C inconsistentă.
- $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ inconsistentă **ddacă** $\{U_1^C, U_2^C, ..., U_n^C\}$ inconsistentă.

Proprietățile logicii predicatelor de ordinul I

- Teorema de completitudine și corectitudine Fie S o mulțime de formule predicative, iar A o formulă predicativă.
 - completitudinea: dacă $S \models A$ atunci $S \models A$.
 - corectitudinea: dacă $S \mid -A$ atunci $S \mid = A$.

• Teorema respingerii

Fie S o mulțime de formule predicative, iar A o formulă predicativă. Dacă $S \cup \{\neg A\}$ este inconsistentă atunci $S | \neg A$.

Teorema de deducție

Fie S o mulţime de formule predicative, iar A o formulă predicativă. Dacă $S \cup \{\neg A\} \mid \neg B$ atunci $S \mid \neg A \rightarrow B$.

Teorema lui Church 1936

- Problema validității unei formule în calculul predicatelor de ordinul I este *nedecidabilă*. Mulțimea formulelor valide din acest sistem logic este recursiv numărabilă, adică există o procedură P care, având ca intrare o formulă A din limbaj, are următorul comportament:
 - dacă formula A este validă, P se termină și furnizează răspunsul corespunzător;
 - dacă formula *A* nu este validă, P se termină cu răspunsul corespunzător *sau* execuția procedurii nu se încheie niciodată.
- Calculul predicatelor este **semi-decidabil**.