Seminar 2

1. Fie $(G,\cdot)$ grup și $x, y \in G$ a.î. $xy = yx$ și $ord(x) < \infty$, $ord(y) < \infty$.

   a) Arătați că $ord(xy) < \infty$ și $ord(xy) \mid$ c.m.m.m.c $[ord(x), ord(y)]$

   b) Dacă $(ord(x), ord(y)) = 1$ atunci $ord(xy) = ord(x) \cdot ord(y)$.

   c) Pentru $k \in \mathbb{Z}$ avem $ord(x^k) = \dfrac{ord(x)}{(ord(x), k)}$

2. Demonstrați că proprietatea de comutativitate $xy = yx$ este esențială pentru concluzia a) de la ex. 1.

   Indicație. În grupul $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Se arată că $ord(A) < \infty$, $ord(B) < \infty$ dar $ord(AB) = \infty$.

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup și $x, y \in G$. Să se arate că $ord(xy) = ord(yx)$.

4. Determinați ordinele tuturor elementelor din grupurile $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, $(U(\mathbb{Z}_{18}), \cdot)$, D_3, D_4, D_n.

5. Determinați toate grupurile cu 4 elemente (până la un izomorfism)

6. Fie G un grup finit.

   a) Demonstrați că nr. elementelor lui G de ordin 3 este par.

   b) Generalizare: Numărul elementelor lui G de ordin p (p este un nr. prim) este un multiplu de $p-1$.