Généralités sur les graphes

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2008/2009

Table des matières

Table des figures

En préliminaire :

Exercice : A et B[1] page 208 [Déclic]

Activité 1 (Vocabulaire les graphes) : Des schémas...

1 Notion de graphe

1.1 Un peu de vocabulaire

- Un **graphe** est un schéma constitué de **sommets**, dont certains sont reliés par des **arêtes**.
- Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées (fléchées). On distingue alors le sommet **origine** de l'arête et son **extrémité**.
- Deux sommets reliés par au moins une arête sont dits **adjacents**.
- Une arête partant et arrivant au même sommet est appelée **boucle**.

1.2 Ordre d'un graphe, degré des sommets

Activité 2 (Vocabulaire sur les graphes) : Graphe non orienté.

Définitions :
- L'**ordre d'un graphe** est le nombre de sommets de ce graphe.
- Dans un graphe, le **degré de chaque sommet** est le nombre d'arêtes dont il est l'*une des extrémités*.

Remarque : Attention ! Il ne faut pas oublier de compter *deux fois* les boucles, car le sommet est deux fois l'extrémité de cette arête.

Exemple : Dans le graphe de la figure 1, le degré du sommet A est 4.

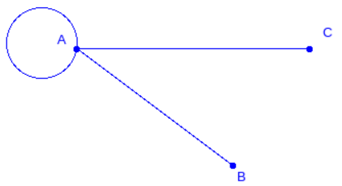

Fig. 1 – Un graphe contenant une boucle

Propriété : La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égal au *double* du nombre total d'arêtes de ce graphe.
En particulier, c'est un nombre pair.

Remarque : Pour une idée de la démonstration de cette propriété, voir l'activité 2 de la feuille polycopiée.

1.3 Graphe simple, graphe complet

Définition : On ne considère que des graphes non orientés.
Un **graphe simple** est un graphe *sans boucle* dont chaque couple de sommets est relié par *au plus* une arête.

Exemples :
- Les graphes des figures 2 et 3 sont des graphes simples.

FIG. 2 – Un exemple de graphe simple

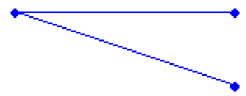

FIG. 3 – Un autre exemple de graphe simple

– Le graphe de la figure 1 et de la figure 4 ne sont pas des graphes simples.

Attention !
Dans le cas des graphes orientés, la définition d'un graphe simple est légèrement différente. Ainsi, le graphe de le figure 5 est simple car les deux arêtes les deux sommets *ne sont pas les mêmes.*
Par contre, le graphe de la figure 6 n'est pas simple (deux fois la même arête) et celui de la figure 7 non plus (contient une boucle).

Définition : On ne considère que des graphes non orientés.
Un **graphe complet** est un graphe *simple* dont tous les sommets sont adjacents.

Remarques : A l'ordre près des sommets, pour un ordre donné, il n'existe qu'un seul graphe non orienté complet.

Exemples :

1. Le graphe de la figure 2 est *le* graphe complet d'ordre 2.
2. Le graphe de la figure 3 n'est pas complet car il manque une arête.
3. Le graphe de la figure 4 n'est pas complet car il n'est pas simple.
4. Le graphe de la figure 8 est *le* graphe complet d'ordre 3.
5. Le graphe de la figure 9 est *le* graphe complet d'ordre 4.
6. Le graphe de la figure 10 est *le* graphe complet d'ordre 5.

Attention !
Dans le cas des graphes orientés, la définition d'un graphe complet est légèrement différente. Ainsi, le graphe de le figure 5 est complet car il est *simple* et contient *toutes les arêtes possibles* entre les deux sommets.

Propriété : Dans le graphe non orienté complet d'ordre n, tous les sommets sont de degré $n - 1$.

Exercices : 1, 2 page 223[2] – 4, 6 page 223[3] – 7, 8, 10 page 223[4] – 14, 15 page 224[5] – 18 page 224[6] [Déclic]

[1] Révisions sur les matrices.
[2] QCM – Vrai-faux.
[3] Vocabulaire sur les graphes.
[4] Existence de graphes donnés.
[5] Construction de graphes.
[6] Un jeu de plage...

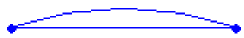

Fig. 4 – Un exemple de graphe non simple

Fig. 5 – Un graphe orienté simple

Fig. 6 – Un graphe orienté non simple

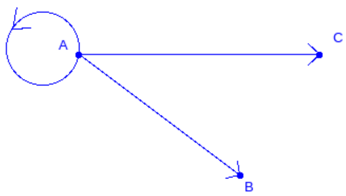

Fig. 7 – Graphe orienté contenant une boucle

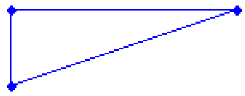

Fig. 8 – Le graphe complet d'ordre 3

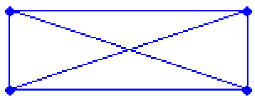

Fig. 9 – Le graphe complet d'ordre 4

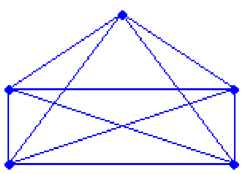

Fig. 10 – Le graphe complet d'ordre 5

2 Matrice associée à un graphe

Activité 3 (Vocabulaire sur les graphes) : Matrice associée à un graphe

2.1 Définitions

Définition 1 :
La **matrice associée à un graphe *non orienté*** d'ordre n est une matrice d'ordre n.
Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au nombres d'arêtes reliant le sommet i du graphe au sommet j.

Exemple : La matrice associée au graphe de la figure 11 est :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

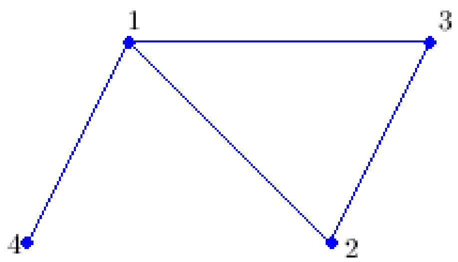

FIG. 11 – Matrice associée à un graphe non orienté

Remarques :

1. La matrice associée à un graphe *non orienté* est toujours une matrice symétrique.
2. On peut retrouver le degré d'un sommet à partir de la matrice associée au graphe. Pour un graphe non orienté *ne comportant pas de boucle*, il suffit de faire la somme des coefficients sur la ligne (ou sur la colonne) correspondante au sommet.

Exercice : Comment retrouver le sommet si à celui-ci correspond une (ou plusieurs) boucle(s) ?

Définition 2 :
La **matrice associée à un graphe *orienté*** d'ordre n est une matrice d'ordre n.
Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au nombres d'arêtes d'origine le sommet i du graphe et d'extrémité sommet j.

Exemple : La matrice associée au graphe de la figure 12 est :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarques :

1. La matrice associée à un graphe *orienté* n'est pas nécessairement une matrice symétrique.

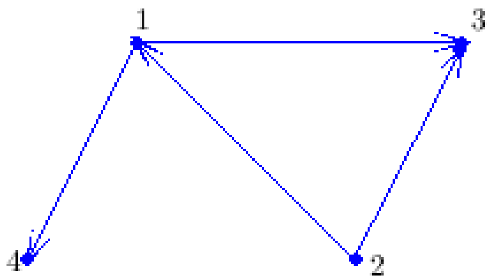

Fig. 12 – Matrice associée à un graphe orienté

2. On peut retrouver le degré d'un sommet à partir de la matrice associée au graphe. Pour un graphe orienté, il suffit de faire la somme des coefficients sur la ligne et sur la colonne correspondants au sommet (il faut compter deux fois les coefficients de la diagonale, qui correspondent aux boucles).
3. Chaque arête d'un graphe orienté apparaît une fois et une seule dans la matrice associée. Pour obtenir le nombre d'arêtes *d'un graphe orienté*, il suffit donc de faire la somme des coefficients de la matrice associée.

Exercices : 40, 42 page 227[7] – 43, 45 page 227[8] – 47 page 227[9] [Déclic]

2.2 Chaînes d'un graphe

Définitions :
- Dans un graphe *non orienté*, une **chaîne** est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets du graphe.
- Dans un graphe *orienté*, une **chaîne** est une suite d'arêtes orientées telles que l'extrémité de l'une est l'origine de l'autre.
- Un **cycle** est une chaîne dont les extrémités coïncident, et qui est composée d'arêtes toutes distinctes (on peut par contre passer plusieurs fois par le même sommet).
- La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui la constituent.

Remarque : Une chaîne est notée par la liste des sommets par laquelle elle passe, reliés par un segment ou par une flèche lorsque le graphe est orienté.

Exemples :

1. Quelques chaînes du graphe de la figure 11 :
   4 – 1 – 3 – 2 (longueur 3)
   1 – 2 – 3 (longueur 2)
   4 – 1 – 2 –3 – 2 (longueur 4)
   1 – 2 – 3 – 1 (cycle de longueur 3)
2. Une chaîne du graphe de la figure 12 : $2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 4$.

Propriété : Soit A la matrice associée à un graphe G et p un nombre entier naturel.
Le coefficient de A^p situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au nombre de chaînes de longueur p reliants le sommet i au sommet j.

Remarque : Pour une idée de la démonstration (basée sur le produit de matrices), voir l'Activité 3 de la feuille polycopiée.

Exercices : 41 page 227[10] – 50, 51, 54, 55 page 228[11] – 59 page 229[12] [Déclic]

[7] QCM – Vrai-faux.
[8] Matrice à partir du graphe.
[9] Propriétés du graphe à l'aide de sa matrice.
[10] QCM.
[11] Chaînes de longueur p.
[12] Plus difficile.

3 Théorème d'Euler

Dans toute cette section , tous les graphes considérés seront *non orientés*.

3.1 Graphe connexe

Activité 1 (Connexité, théorème d'Euler) : Liaisons dans un réseau

Définition : Un graphe est **connexe** si on peut relier deux *quelconques* de ses sommets par une chaîne (éventuellement réduite à une arête).

Exemples :

1. On se réfère au graphe de la figure 13.

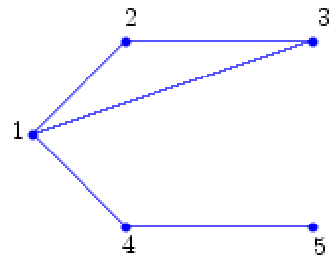

Fig. 13 – Un graphe connexe

Paire de sommets	Chaîne
1 ; 2	1 – 2
1 ; 3	1 – 3
1 ; 4	1 – 4
1 ; 5	1 – 4 – 5
2 ; 3	2 – 3
2 ; 4	2 – 1 – 4
2 ; 5	2 – 1 – 4 – 5
3 ; 4	3 – 1 – 4
3 ; 5	3 – 1 – 4 – 5
4 ; 5	4 – 5

Le graphe de la figure est donc connexe.

2. On se réfère au graphe de la figure 14. Il n'y a pas de chaîne entre les sommets 1 et 4, le graphe n'est donc pas connexe.

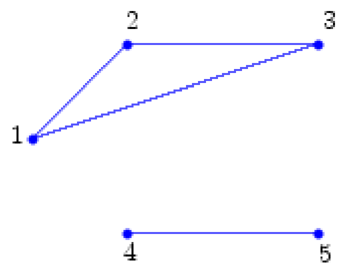

Fig. 14 – Un graphe non connexe

Remarques :

1. Tout graphe complet est connexe.
2. Si un graphe n'est pas connexe, il ne peut pas être complet.

Exercices : 31, 32 page 226[13] [Déclic]

Définitions : Soit G un graphe connexe.

1. On appelle **distance** entre deux sommets du graphe la longueur de la plus courte chaîne qui relie ces deux sommets.
2. On appelle **diamètre du graphe** la plus grande distance constatée entre deux sommets quelconques du graphe.

Exemple : Dans le graphe de la figure 13, le diamètre est de 3 (voir le tableau de l'exemple précédent).

Exercices : 52, 53 page 228[14] [Déclic]

3.2 Chaîne eulérienne, cycle eulérien

Définition 1 : Une **chaîne eulérienne** est une chaîne satisfaisant aux conditions suivantes :
- elle contient toutes les arêtes du graphe ;
- chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.

Remarque : On peut donc passer plusieurs fois par le même sommet, mais pas par la même arête.

Exemple : Dans le graphe de la figure 15, la chaîne $2 - 1 - 4 - 3 - 2 - 5 - 3$ est une chaîne eulérienne.

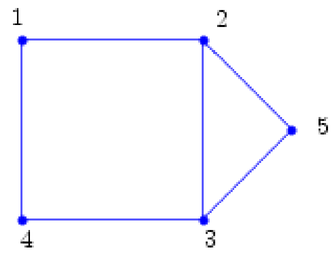

Fig. 15 – Graphe contenant une chaîne eulérienne

Définition 2 : Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne dont le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont les mêmes.

Exemple : Dans le graphe de la figure 16, le cycle $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1$ est un cycle eulérien.

Exercices : 23, 24 page 225[15] [Déclic]

Définition 3 : On appelle **graphe eulérien** un graphe que l'on peut dessiner sans jamais lever le crayon et sans passer deux fois par la même arête.

Propriété : Un graphe est eulérien *si et seulement si* il contient une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien.

[13] Graphes connexes.
[14] Diamètre d'un graphe.
[15] Vrai - Faux.

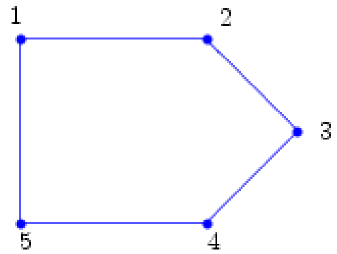

FIG. 16 – Graphe contenant un cycle eulérien

3.3 Théorème d'Euler

Activité 2 (Connexité, théorème d'Euler) : Circulation sur un graphe

Théorème d'Euler :

1. Un graphe admet un cycle eulérien *si et seulement si* il est connexe et n'a aucun sommet de degré impair.
2. Un graphe admet une chaîne eulérienne entre les sommets x et y *si et seulement si* il est connexe et si x et y sont les deux seuls sommets de degré impair.

Remarque : Ce théorème donne donc deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un graphe soit eulérien.

3.4 Algorithme d'Euler

Méthode : Détermination pratique d'une chaîne eulérienne.

On considère le graphe de la figure 17.

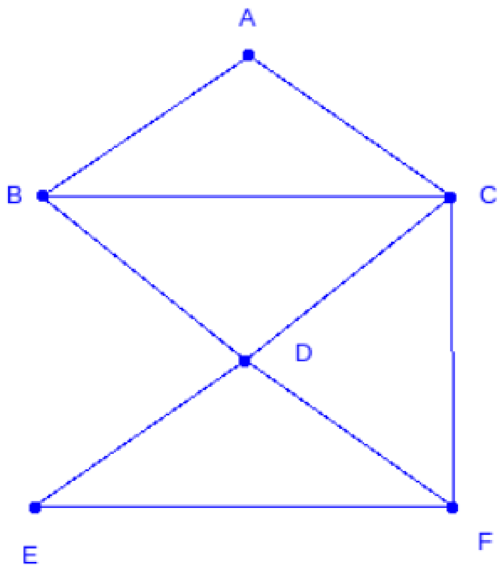

FIG. 17 – Détermination pratique d'une chaîne eulérienne (1)

Il est connexe. Le tableau suivant donne les degrés des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	2	3	4	4	2	3

Il a seulement deux sommets de degré impair : le sommet B et le sommet F.
Il existe donc une chaîne eulérienne entre les sommets B et F.
Pour la déterminer, on suit les étapes suivantes :

1. On choisit une chaîne d'origine le sommet B et d'extrémité le sommet F, **ne contenant jamais deux fois le même arête**.
   Ici, la chaîne B – D – F convient (en rouge sur la figure 18).
2. On choisit un sommet de la chaîne précédente et, à partir de ce sommet, on adjoint un **cycle** (donc une chaîne fermée ne contant pas deux fois la même arête) **ne contenant pas des arêtes déjà utilisées**.
   Ici, on peut choisir le sommet B et le cycle B – A – C – B (en vert sur la figure 18).
   On obtient alors la chaîne B – A – C – B – D – F, qui vérifie les hypothèses de départ :
   - elle a comme origine B et comme extrémité F ;
   - elle ne contient pas deux fois la même arête.
3. On réitère l'étape 2 sur la chaîne obtenue jusqu'à avoir utilisé toutes les arêtes du graphe. La chaîne obtenue est alors par construction eulérienne.
   Ici, on choisit ensuite le sommet C et on adjoint le cycle C – D – E – F – C (en bleu sur la figure 18)

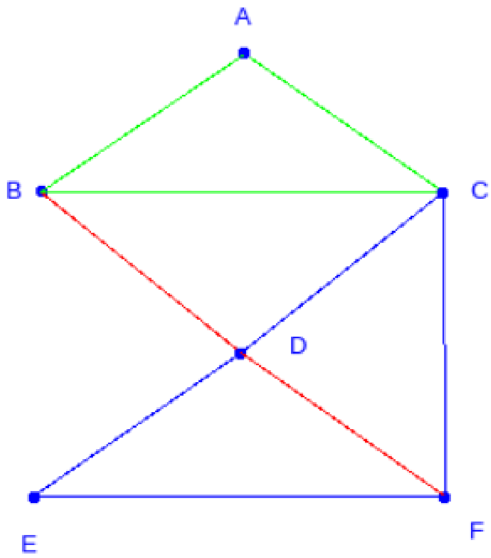

FIG. 18 – Détermination pratique d'une chaîne eulérienne (2)

On obtient la chaîne B – A – C – D – E – F – C– B – D – F. On a utilisé toutes les arêtes du graphe. Cette chaîne est donc eulérienne.

Remarques :

1. Il n'est pas toujours nécessaire d'employer cet algorithme pour déterminer une chaîne eulérienne.
2. Il n'y a pas unicité de la chaîne eulérienne trouvée.
3. Pour un cycle eulérien, il suffit de suivre la même méthode en partant à l'étape 1 d'un cycle à partir d'un des sommets quelconque du graphe.

Exercices : 25, 27, 28 page 225[16] – 29 page 225 et 34 page 226[17] – 36 page 226 et 60 page 229[18] [Déclic]

4 Coloriage des sommets d'un graphe

Dans toute cette section , tous les graphes considérés seront *non orientés*.

[16]Détermination de chaîne ou cycle eulérien.
[17]Problèmes concrets.
[18]Problèmes type BAC.

4.1 Notion de sous-graphe

Définition : Un **sous graphe** d'un graphe G est un graphe constitué de *certains* sommets de G et de *toutes* les arêtes qui les relient.

Exemple : Si G est le graphe complet d'ordre 4 (voir figure 9), alors le graphe de la figure 19 est un sous-graphe de G mais le graphe de la figure 20 n'en est pas un.

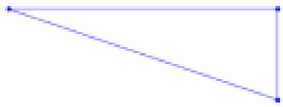

FIG. 19 – Un sous-graphe du graphe complet d'ordre 4

FIG. 20 – Pas un sous-graphe du graphe complet d'ordre 4

Définition : Un sous-graphe **stable** est un sous-graphe sans arête.

4.2 Nombre chromatique

Activité : 4 page 211[19] [Déclic]

Définitions :

1. **Colorier** un graphe consiste à affecter une couleur à chacun des sommets de sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur.
2. Le nombre chromatique d'un graphe G est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour le colorier. On le note $\gamma(G)$.

Remarque : Si plusieurs sommets d'un graphe sont de la même couleur, aucune arête ne les joignent. Ils forment donc un sous-graphe stable.
Colorier un graphe revient donc à le partitionner en sous-graphes stables.

Propriété : Soit D le degré maximal des sommets du graphe G.
Alors : $\gamma(G) \leq 1 + D$.

4.3 Algorithme de Welsh-Powell

Exemple : On reprend le dernier graphe de l'activité 4 page 211 [Déclic] (voir figure 21)

1. On range les sommets du plus haut degré au plus petit :
   - Sommet P : degré 3
   - Sommet A : degré 5
   - Sommet D : degré 2
   - Sommet E : degré 2
   - Sommet I : degré 1

[19] Coloriage.

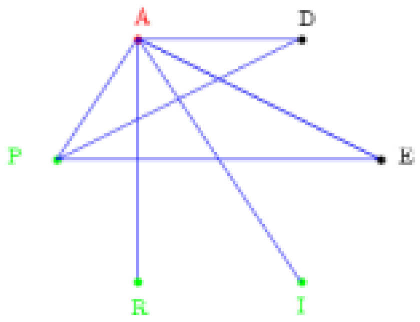

Fig. 21 – Coloriage d'un graphe

– Sommet R : degré 1

d'où la liste ordonnée des sommets :

Sommet	A	P	D	E	I	R
Degré	5	3	2	2	1	1

2. On choisit une couleur pour le premier sommet (ici, le sommet A)
3. On colorie de la même couleur tous les sommets non adjacents au sommet A et qui ne sont pas adjacents entre eux. Ici, il n'y en a pas.
4. On réitère ce procédé avec une autre couleur pour le premier sommet non colorié de la liste : ici, le sommet P, et on peut colorier de la même couleur les sommets R et I.
5. On recommence jusqu'à épuisement des sommets : ici, on choisit une couleur pour le sommet D et on peut colorier le sommet E de la même couleur.

Remarque : L'algorithme de Welsh-Powell ne donne pas nécessairement le nombre minimal de couleurs. Ici, on a pu colorier ce graphe avec trois couleurs, on peut donc en déduire uniquement que $\gamma(G) \leq 3$.

Exercices : 65 page 230 et 68 page 231[20] [Déclic]

4.4 Cas d'un graphe complet

Dans un graphe complet, comme tous les sommets sont adjacents, il faut une couleur différente par sommet. On en déduit le résultat suivant :

Propriété : Le nombre chromatique d'un graphe complet est égal à l'ordre de ce graphe.

En conséquence, on a, dans un graphe quelconque :

Propriété : Le nombre chromatique d'un graphe G est supérieur ou égal à l'ordre du sous-graphe complet de G le plus grand.

Exemple : On reprend le graphe de la figure 21.
Le sous-graphe PAD est complet d'ordre 3, par suite $\gamma(G) \geq 3$.
Or, on a déjà vu grâce à l'algorithme de Welsh-Powell que $\gamma(G) \leq 3$.
On a donc $\gamma(G) = 3$.

Remarques :

1. Ceci donne une méthode pratique de détermination du nombre chromatique :
   – trouver un sous-graphe complet donne un minorant du nombre chromatique ;
   – colorier le graphe grâce à l'algorithme de Welsh-Powell donne un majorant du nombre chromatique ;
   – si ce minorant et ce majorant sont égaux, il s'agit du nombre chromatique.

[20] Coloriage de graphes.

2. La détermination du nombre chromatique permet, entre autres, de partitionner de manière *optimale* un graphe en sous-graphe stables donc de régler des problèmes de compatibilité/incompatibilité (voir exercices).

Module : activité 5 page 211[21] [Déclic]

Exercices : 61, 63 page 230[22] – 64, 66 page 230[23] – 69, 70, 73 page 231[24] – 67 page 230[25] [Déclic]

Exercices de synthèse : 74, 75 page 232, 79 page 233 et 84, 85 page 235[26] – 77 page 232 et 78 page 233[27] [Déclic]

Références

[Déclic] DÉCLIC Terminale ES, *enseignement obligatoire et option*, HACHETTE ÉDUCATION, 2006.

3, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 14

[21] Compatibilité/incompatibilité.
[22] Sous-graphes complets.
[23] Détermination de nombre chromatique.
[24] Compatibilité, incompatibilité.
[25] Autre application du coloriage.
[26] Type BAC.
[27] Retour sur les graphes orientés.