Capitolo 2

Algebra

17. Se un polinomio $P(x)$ è divisibile per $x^2 - 4$, allora

A. 2 e -2 sono certamente radici di $P(x)$

B. 2 non è una radice di $P(x)$

C. -2 non è una radice di $P(x)$

D. $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ sono certamente radici di $P(x)$

E. $P(x)$ non ha radici reali

Algebra; polinomi.

Per definizione di quoziente e resto nella divisione di polinomi, il testo della domanda significa che

$$P(x) = \left(x^2 - 4\right) Q(x)$$

dove $Q(x)$ è il quoziente nella divisione e il resto è nullo. Poiché 2 e -2 annullano il polinomio $x^2 - 4$, e quindi il secondo membro dell'identità precedente, devono annullare anche il primo, ossia: 2 e -2 sono certamente radici di $P(x)$. Perciò la risposta esatta è la A.

Divisione tra polinomi, radici di un polinomio.

---

18. Sia $x < 2$. Allora l'espressione

$$\sqrt{4(x-2)^2}$$

A. è uguale a $4x - 8$

B. è uguale a $2x - 4$

C. non è definita

D. è uguale a $4 - 2x$

E. è uguale a $8 - 4x$

$|2(x-2)|$

$+2(x-2)$ | $-2(x-2)$

$2x-4$ | $-2x+4$ $\quad 4-2x$

$\cancel{2}x = \cancel{4}\,2$ | $\frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} = \frac{+4}{-2} = -2$

Algebra; calcolo letterale, radicali.

Un'occhiata veloce alle risposte mostra che si chiede di semplificare il radicale $\sqrt{4\,(x-2)^2}$. Occorre ricordare che in generale, detto a un generico numero reale, si ha $\sqrt{a^2} = |a|$ (e non $\sqrt{a^2} = a$ né tantomeno $\sqrt{a^2} = \pm a$, perché a può essere anche negativo e nell'ambito dei numeri reali il simbolo $\sqrt{\cdot}$ indica sempre un numero positivo o nullo). In questo caso è $a = 2\,(x-2)$, perciò $\sqrt{4\,(x-2)^2} = 2\,|x-2|$. A sua volta, l'informazione $x < 2$ implica $2\,|x-2| = 2\,(2-x) = 4-2x$. Perciò la risposta giusta è la D.

Leggiamo le altre risposte: A, B ed E, corrispondono a qualche errore di calcolo o di ragionamento sul valore assoluto; la C deve spingerci a chiederci: siamo sicuri che l'espressione di partenza sia definita? La risposta è: sì, perché il radicando $4\,(x-2)^2$, essendo un quadrato, sicuramente non è negativo.

Definizione di radice quadrata nel campo reale, da cui segue la relazione $\sqrt{a^2} = |a|$. Definizione di valore assoluto e discussione del valore assoluto di un'espressione algebrica.

---

19. Il massimo comune divisore tra i polinomi

$$P(x) = x^3 - x^2 \qquad Q(x) = x^3 - 2x^2 + x \qquad R(x) = x^3 - x$$

è

A. $x^2 (x-1)^2$

B. x

C. x^3

D. $(x^2 - 1)(x^3 - x^2)$

E. $x^2 - x$

$P(x) = x^2(x-1)$

$Q(x) = x(x^2-2x+1) = x(x-1)(x-1)$

$R(x) = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$

$MCD = x(x-1) = x^2 - x$

Algebra; polinomi.

Fattorizziamo ciascun polinomio

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 (x-1) \\ Q(x) &= x\left(x^2 - 2x + 1\right) = x(x-1)^2 \\ R(x) &= x\left(x^2 - 1\right) = x(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Confrontando le tre fattorizzazioni, si vede che il massimo comune divisore è

$$x(x-1)$$

(x e $x-1$ sono gli unici fattori comuni, e sono presi con il minimo esponente con cui compaiono nelle tre fattorizzazioni). La risposta esatta quindi è la E.

Lo studente che ha difficoltà a comprendere il precedente ragionamento, faccia il parallelo con il procedimento che seguirebbe per cercare il massimo comune divisore fra tre numeri interi, es. 24, 21, 81 (scomposizione in fattori primi, ecc.). Ciò che si fa con i polinomi è perfettamente analogo.

Fattorizzazione di polinomi, concetto di massimo comune divisore.

---

20. Sia m un parametro reale. Se il resto della divisione del polinomio

$$2x^4 - mx^3 + x^2 - 7$$

per il binomio

$$x + 2$$ $\Rightarrow x = -2$

è 5, allora

$2(-2)^4 - m(-2)^3 - 3$

$2(16) - m(-8) - 3$

$29 + 8m \Rightarrow 8m = -29 + 5$

$\cancel{8}m = \frac{-24}{\cancel{8}} - 3$

A. occorre che sia $m = -3$

B. occorre che sia $m = 3$

C. non esiste nessun m per cui ciò sia possibile

D. m può assumere qualunque valore

E. occorre che sia $m = 0$

Algebra; polinomi.

Per definizione di quoziente e resto nella divisione di polinomi, il testo della domanda significa

$$2x^4 - mx^3 + x^2 - 7 = (x + 2)\,Q(x) + 5$$

dove $Q(x)$ è il polinomio quoziente, che avrà grado 3. (Parallelo con la divisione tra numeri interi: ad es., il resto della divisione di 37 per 9 è 1, il che significa $37 = 9 \times 4 + 1$ dove 4 è il quoziente.) Se nell'identità precedente poniamo $x = -2$, otteniamo

$$32 + 8m + 4 - 7 = 0 + 5$$

equazione di primo grado in m la cui soluzione è

$$m = -3$$

La risposta esatta è quindi la A.

Lo studente che volesse avere una riprova di non avere sbagliato i calcoli, può ora eseguire la divisione

$$\left(2x^4 + 3x^3 + x^2 - 7\right) : (x + 2)$$

trovando quoziente $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 6$ e resto 5.

Definizione di quoziente e resto nella divisione tra polinomi.

---

21. L'equazione algebrica

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

$t = x^2$

con $a > 0$, b reale e $c < 0$

$at^2 + bt + c = 0$

A. non ammette radici reali

$\Delta = b^2 - 4(ac) > 0$

B. ammette un'unica radice reale

$b^2 + 4(ac) > 0$ $\Delta \geq 0$

C. ammette due radici reali

$x_{1,2}$

D. ammette tre radici reali

E. ammette quattro radici reali

Algebra; equazioni algebriche.

Ricordiamo che un'equazione algebrica di quarto grado a coefficienti reali può avere da 0 a 4 soluzioni reali: senza qualche calcolo o considerazione su questa *specifica* equazione, quindi, non è possibile scegliere una risposta tra quelle proposte. Questa equazione di quarto grado è *biquadratica*, cioè riconducibile a un'equazione di secondo grado tramite l'introduzione dell'incognita ausiliaria $t = x^2$

$$at^2 + bt + c = 0$$

Tale equazione in t ha discriminante $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ perché si sa che $a > 0$ e $c < 0$, quindi essa ha due radici reali distinte, t_1 e t_2. Che segno hanno tali radici? Se $b = 0$ le radici hanno segni opposti perché $t_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a}$. Se $b \neq 0$, applichiamo la "Regola di Cartesio":

> "L'equazione $at^2 + bt + c = 0$ (a, b, c non nulli, $\Delta \geq 0$) ha tante radici positive (negative) quante sono le variazioni (permanenze) di segno dei coefficienti"

Essendo $a > 0$ e $c < 0$, la nostra equazione presenta una permanenza e una variazione, quindi le due radici hanno sempre segni opposti, diciamo $t_1 > 0$ e $t_2 < 0$.

Tornando all'incognita x, dobbiamo infine determinare gli x per cui è $x^2 = t_1$ o $x^2 = t_2$. Ora, l'equazione $x^2 = t_1$ ha due soluzioni reali e distinte (perché $t_1 > 0$), mentre l'equazione $x^2 = t_2$ non ha soluzioni reali (perché $t_2 < 0$). Di conseguenza la risposta esatta è la C.

Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado; equazioni biquadratiche; regola di Cartesio; radice quadrata di un numero reale.

22. Sia K un parametro reale. Allora la seguente equazione nell'incognita reale x

$$x^2 - (K-2)\,x + K - 1 = 0$$

ha soluzioni opposte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $b=0$

Non può essere poichè b deve essere uguale a 0

A. per ogni valore di K

~~B.~~ solo se $(K-2)^2 - 4\,(K-2) = 0 \Rightarrow K^2+4-4K-4K+8 \Rightarrow K^2-8K+12$

$\Delta = 64-4(12) = 16$ $\quad K_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 6,\ 2$ NO

~~C.~~ per $K=1 \Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x=0,\ x=-1$ NO

~~D.~~ per $K=2 \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ NO

E. per nessun valore di K

Algebra; equazioni algebriche con parametro.

Chiediamoci quando un'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ ha soluzioni opposte. Ricordiamo che la somma delle radici dell'equazione è $-b/a$; le radici sono *opposte* se e solo se la loro somma è zero, ossia se e solo se $b=0$.
(Alla stessa conclusione si può arrivare scrivendo la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

e imponendo che $x_1 = -x_2$.)
Imponiamo dunque la condizione $b=0$ alla nostra equazione e otteniamo

$$K-2=0, \qquad \text{ossia} \quad K=2$$

Sembrerebbe quindi di dover concludere che la risposta esatta sia la D. Tuttavia, per $K=2$ l'equazione diventa

$$x^2+1=0$$

che in effetti non ha alcuna soluzione reale! Il ragionamento precedente non è errato: le soluzioni dell'equazione $x^2+1=0$ sono $\pm i$, con i unità immaginaria, e sono effettivamente opposte tra loro; tuttavia *non sono reali.* Poiché la domanda parlava di *equazione nell'incognita reale* x, la risposta esatta è la E.

In generale, dovendo rispondere a una domanda sul numero di soluzioni di un'equazione, è fondamentale tenere ben presente *qual è l'insieme numerico in cui si cercano tali soluzioni.*

Risoluzione delle equazioni algebriche di secondo grado, relazioni tra le radici e i coefficienti dell'equazione.

$1, -2, \frac{4}{3}, \sqrt{4}$

23. L'equazione nell'incognita razionale x

$$\left(4x^2 - 25\right)\left(x^3 + 9\right) = 0$$

A. non ammette soluzioni

$1)\ 4x^2 - 25 \Rightarrow \cancel{4}x^2 = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = \pm 2{,}5$ RAZ.

B. ammette tre soluzioni distinte

$2)\ x^3 + 9 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{9}$ IR.

C. ammette due soluzioni distinte

D. ammette cinque soluzioni

E. non si può risolvere, perché è di quinto grado

Algebra; equazioni algebriche.

Poiché il prodotto $(4x^2 - 25)(x^3 + 9)$ si annulla se e solo se si annulla uno dei suoi fattori ("Legge di annullamento di un prodotto"), l'equazione è soddisfatta se

$$x^2 = \frac{25}{4}, \qquad \text{cioè} \qquad x = \pm\frac{5}{2}$$

o se

$$x^3 = -9, \qquad \text{cioè} \qquad x = -\sqrt[3]{9}$$

Poiché i numeri $\pm\, 5/2$ sono razionali (quozienti fra numeri interi), mentre il numero $-\sqrt[3]{9}$ è irrazionale, l'equazione ha due soluzioni razionali distinte. Quindi la risposta esatta è la C.

Per affermare che $\sqrt[3]{9}$ (e quindi il suo opposto) è irrazionale, lo studente può ricordare il seguente fatto generale:

> "La radice n-esima di un numero intero (con $n \geq 2$) è un numero intero oppure è un numero irrazionale"

Poiché $2^3 = 8 < 9$ e $3^3 = 27 > 9$, non esiste alcun numero intero il cui cubo sia 9, dunque $\sqrt[3]{9}$ non è intero, e perciò è irrazionale.

In questo quesito è importante la precisazione (sottolineata nel testo!) che le soluzioni si cercano nell'insieme dei numeri razionali. Chi non avesse notato questa precisazione (ma avesse fatto comunque dei calcoli esatti), avrebbe scelto la risposta B, errata. Come già osservato nel quesito n° 22, dovendo rispondere a una domanda sul numero di soluzioni di un'equazione, è fondamentale tenere ben presente qual è l'insieme numerico in cui si cercano tali soluzioni.

Legge di annullamento di un prodotto; radicali; razionalità o irrazionalità della radice n-esima di un intero.

---

24. Il seguente sistema nelle incognite reali x ed y

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

ammette

$\begin{cases} x^3 - y^3 = 1 \\ x = y + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} (y+1)^3 - y^3 = 1 \\ // \end{cases}$ $\begin{cases} \cancel{y^3} + \cancel{1} + 3y - \cancel{(y^3)} = \cancel{1} \\ // \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3y}{3} = \frac{0}{3}\ 0 \\ \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 + 1 \end{cases}$

A. due soluzioni

B. nessuna soluzione

C. una soluzione

D. quattro soluzioni

E. più di quattro soluzioni

Algebra; sistemi di equazioni.

Usando il prodotto notevole $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, riscriviamo il sistema come

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

e quindi, ricavando $y = x - 1$ dalla seconda equazione e sostituendo nella prima, troviamo l'equazione di secondo grado in x

$$x^2 + x(x - 1) + (x - 1)^2 = 1, \qquad \text{cioè} \qquad 3x^2 - 3x = 0$$

che dà $x = 0$, $x = 1$. Risostituendo nell'equazione $y = x - 1$ abbiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

La risposta esatta quindi è la A.

Si ricordi che *una* soluzione di un sistema di equazioni in *due* incognite x ed y è *una coppia* (ordinata) di valori che, attribuiti rispettivamente alle incognite, rendono ciascuna equazione del sistema un'identità. Lo studente che non avesse avuto ben chiara in mente questa definizione, avrebbe potuto indicare erroneamente come giusta la risposta D anzichè la A.

Risoluzione dei sistemi di due equazioni in due incognite, prodotti notevoli.

---

25. Indicare quante coppie ordinate (m, n) di interi positivi m ed n verificano la condizione

$$(m+n)^2 = (m-n)^2 + 64$$

$$= \cancel{m^2}+\cancel{n^2}+2mn = \cancel{m^2}+\cancel{n^2}-2mn+64$$

$$= \frac{\cancel{4}mn}{\cancel{4}} = \frac{64}{4} \Rightarrow mn = 16$$

1 (1;16) 2 (16;1) 3 (2;8) 4 (8;2) 5 (4;4)

A. Nessuna

B. Cinque

C. Sei

D. Dieci

E. Infinite

Algebra; equazioni algebriche.

Sviluppando i quadrati e semplificando, riscriviamo l'uguaglianza di partenza nella forma

$$2mn = -2mn + 64$$

ossia

$$mn = 16$$

Chiediamoci ora quante sono le coppie (m, n) di interi positivi il cui prodotto è 16. Si elencano facilmente:

$$(1, 16)\,, \quad (2, 8)\,, \quad (4, 4)\,, \quad (8, 2)\,, \quad (16, 1)$$

La risposta esatta quindi è la B.

È fondamentale la precisazione (contenuta nella domanda) che m ed n siano *interi positivi*: le soluzioni *reali* x ed y dell'equazione $xy = 16$ sono ovviamente infinite!

Calcolo letterale; calcolo con gli interi.

---

26. Indicare quante coppie ordinate (x, y) di numeri reali positivi x ed y verificano la condizione

$$x + y = xy$$

$x>0$; $y>0$

$x = xy - y \Rightarrow \frac{\cancel{x} = y(x-\cancel{1})}{x} \Rightarrow \frac{y(x-1)}{x}$

Dominio $x>0$

A. Nessuna

B. Una sola

C. Un numero pari di coppie

D. Infinite

E. Il problema non ha soluzione

Algebra; equazioni.

Un'equazione in due incognite reali è *in generale* indeterminata (cioè ha infinite soluzioni); occorre però capire come la restrizione $x > 0$, $y > 0$, richiesta nella domanda, condiziona il problema. Ricaviamo allora y in funzione di x

$$y\,(x - 1) = x$$

e quindi (non potendo essere $x = 1$, perché in tal caso l'equazione dà $y \times 0 = 0 = x$, assurdo)

$$y = \frac{x}{x - 1}$$

Allora $y > 0$ se e solo se $\dfrac{x}{x-1} > 0$, il che è vero per $x < 0$ (da scartare) oppure $x > 1$ (accettabile). Perciò la coppia di numeri positivi $(x, y) = \left(x, \dfrac{x}{x-1}\right)$ soddisfa l'equazione di partenza per ogni $x > 1$. La risposta esatta è quindi la D: le soluzioni sono infinite.

Per capire come una restrizione sui valori delle incognite possa condizionare il numero di soluzioni dell'equazione, si noti che se fosse stato richiesto $x < 0$ e $y < 0$ al posto di $x > 0$ e $y > 0$, allora evidentemente non ci sarebbe stata nessuna soluzione in quanto $x + y < 0$ e $xy > 0$.

Tecniche di base per la risoluzione di equazioni e disequazioni algebriche.

---

27. Due numeri reali x ed y verificano le condizioni

$$x > y \qquad \text{e} \qquad xy > 0$$

$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}y} > \frac{\cancel{y}}{x\cancel{y}} \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

Si può allora concludere che

$1;\ 2$ $\qquad -1;\ -2$

A. $\boxed{\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}}$ $\Rightarrow 1 < 0.5$ $\qquad -1 < -0.5$

B. $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ $\Rightarrow 1 > 0.5$ $\qquad$ X

C. $x^2 > y^2$ $\Rightarrow 1 > 4$ $\qquad$ X

D. $x > 0 \quad$ e $\quad y > 0$ ✓ $\qquad$ X

E. $x > 0 \quad$ o $\quad y > 0$ ✓ $\qquad$ X

Algebra; sistemi di disequazioni.

La condizione $xy > 0$ significa che x ed y hanno lo stesso segno. Distinguiamo i due casi. Se x e y sono positivi, $x > y$ equivale a $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$ (come afferma la A); se invece x e y sono negativi, $x > y$ equivale a

$$1 < \frac{y}{x}$$

e quindi a

$$\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$$

che è ancora la A. Quindi la A è vera.

☞ Le risposte sbagliate riflettono altrettanti errori di calcolo. Così, la C riproduce l'errore frequente secondo cui da $x > y$ segue sempre $x^2 > y^2$, il che è vero se y (e quindi x) è positivo, ma in generale è falso se y è negativo (nella domanda si intende che x e y siano *generici* numeri reali: leggere attentamente il testo!). Ad es., si pensi a $3 > -4$ ($9 > 16$ è falso) oppure a $-2 > -3$ ($4 > 9$ è falso). Lo studente si convinca attraverso semplici controesempi che anche B, D ed E sono errate.

⚓ *Tecniche di base per la risoluzione di disequazioni algebriche.*

---

28. Il polinomio

RUFFINI

$$x^3 + 3x^2 - 4x$$

è divisibile per

A) $\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & -4 & 0 \\ -2 & & -2 & -2 & +12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \end{array}$

B) $\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & & 4 & & \\ \hline & 1 & 11 & & \end{array}$

C) $\boxed{\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & -4 & 0 \\ -4 & & -4 & 4 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & \end{array}}$

A. $x + 2$

B. $x - 4$

C. $\boxed{x + 4}$

D. x^3

E. $x + 1$

👁 *Algebra; polinomi.*

✎ Scomponiamo il polinomio in fattori di primo grado

$$x^3 + 3x^2 - 4x = x\left(x^2 + 3x - 4\right) = x\,(x - 1)\,(x + 4)$$

Perciò la risposta esatta è la C.

Notiamo che, dopo aver raccolto la x, il trinomio $x^2 + 3x - 4$ è stato decomposto "a occhio", data la semplicità dei coefficienti; volendo procedere più sistematicamente, si osservi che

1. la somma dei coefficienti è zero, quindi $x = 1$ è una radice del trinomio (questa è una proprietà generale: sostituendo $x = 1$ in $ax^2 + bx + c = 0$ si trova $a + b + c = 0$), quindi (teorema di Ruffini) il trinomio è divisibile per $x - 1$, e a questo punto lo si scompone;

2. oppure, in alternativa, si può risolvere l'equazione di secondo grado $x^2 + 3x - 4 = 0$ e, trovate le due soluzioni $x = 1$ e $x = -4$, ancora per il teorema di Ruffini decomporre il trinomio.

Due altri possibili strade per la risoluzione sono le seguenti.

1. Eseguire direttamente la divisione del polinomio dato per ciascuno di quelli proposti nelle varie risposte; la risposta esatta è l'unica per la quale il resto della divisione è zero. Questo metodo però è sconsigliabile perché può richiedere di dover fare fino a quattro divisioni prima di riuscire a trovare la risposta giusta.

2. Usare la seguente proprietà dei polinomi:

> "un polinomio è divisibile per il binomio $x - a$ se e solo se $x = a$ è una sua radice"

Questo metodo è molto veloce. Ad esempio, la risposta A risulta sbagliata perché $x = -2$ non è radice del polinomio (sostituendo $x = -2$, si trova $-8+12+8 = 12 \neq 0$), mentre la risposta C è giusta perché $x = -4$ è una radice (sostituendo, si trova $-64+48+16 = 0$).

Scomposizione di un polinomio e teorema di Ruffini; trinomio di secondo grado.

---

29. L'equazione nell'incognita reale x

$$\frac{x^2 - 3x}{3 - x} = -2$$

DOMINIO

$-x + 3 \neq 0$

$\boxed{x \neq +3}$

$$\frac{x(x-3)}{3-x} = -2 \Rightarrow -\frac{\cancel{x(x-3)}}{\cancel{x-3}} = 2$$

$-x = 2$

$x = 2$

A. non ha soluzioni

B. ha due soluzioni

C. ~~ha l'unica soluzione $x = 3$~~ $D(x) \neq 3$

D. ha un'unica soluzione la quale è diversa da 3

E. ha più di due soluzioni

Algebra; equazioni razionali fratte.

Riscriviamo l'equazione come

$$\frac{x\,(x-3)}{3-x} = -2$$

Ora: se $x = 3$, l'equazione perde significato; se invece $x \neq 3$, si può semplificare per $x-3$, ottenendo il valore $x = 2$, che è una soluzione accettabile. Quindi l'equazione ha un'unica soluzione, $x = 2$.

Leggendo a questo punto le affermazioni contenute nelle risposte, si vede che l'unica vera è la D (anche se questa *non dice* quale sia la soluzione).

La risposta B può trarre in inganno chi, per risolvere l'equazione, ne moltiplica ambo i membri per $3-x$, ottenendo (dopo semplici calcoli) l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

che ha le radici $x = 2$ e $x = 3$. Ma ora bisogna osservare che le soluzioni non sono entrambe accettabili, perché per $x = 3$ l'equazione di partenza non ha senso, e quindi la risposta esatta è la D e non la B.

Risoluzione di equazioni razionali fratte.

---

30. Sia K un parametro reale. Allora l'equazione nell'incognita reale x

$$\overset{a}{\boxed{x^2}} + \overset{b}{\boxed{(K+2)}}\,x + \overset{c}{\boxed{K^2}} = 0$$

non ha soluzioni

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow (K^2+4K+4) - 4(1)(K^2)$

$K^2 + 4K + 4 - 4K^2$

$-3K^2 + 4K + 4 < 0$

$\Delta = 16 - 4(-3)(4) = 16 - 48 =$ Negativo

A. per un unico valore di K

B. per due soli valori di K

C. per ogni valore negativo di K

D. per nessun valore di K

E. per infiniti valori di K

Algebra; equazioni algebriche con parametro.

Per ogni valore di K, l'equazione è di secondo grado in x (perché il coefficiente di x^2 è 1). Perciò l'equazione *non ha soluzioni reali* se e solo se il suo discriminante è negativo, ossia

$$(K+2)^2 - 4K^2 < 0$$

Riscrivendo questa disequazione nella forma

$$3K^2 - 4K - 4 > 0$$

si vede subito che essa ha infinite soluzioni, perché il coefficiente di K^2 e il termine noto sono discordi, quindi il discriminante è positivo, e la disequazione è soddisfatta per tutti i valori K di un certo intervallo, che non ci interessa determinare esplicitamente. Concludendo, per infiniti valori di K l'equazione in x non ha soluzioni reali. Quindi la risposta esatta è la E.

Risoluzione di equazioni e disequazioni algebriche di secondo grado.

---

31. L'equazione nell'incognita reale x

$$2 + 3|x-3| = 13 - x$$

A. ha un'unica soluzione

B. non ha soluzioni

C. ha due soluzioni positive

D. ha due soluzioni di segno opposto

E. ha infinite soluzioni

$+ \; [x \geq 3]$

$2+3(x-3)=13-x$

$2+3x-9=13-x$

$4x=9+13-2$

$\frac{4x}{4}=\frac{20}{4} \quad 5 \quad x=5$

Acc.

$[x \leq 3]$

$2+3(-x+3)=13-x$

$2-3x+9=13-x$

$-2x=13-9-2$

$-\frac{2x}{2}=\frac{2}{2}$

$x=-1$

Acc.

Algebra; equazioni con termini in valore assoluto.

Risolviamo l'equazione discutendo il modulo.

Se $x \geq 3$ l'equazione si riscrive come

$$\begin{aligned} 2+3(x-3) &= 13-x \\ 4x &= 20 \\ x &= 5 \qquad \text{accettabile} \end{aligned}$$

Se $x \leq 3$ l'equazione si riscrive come

$$\begin{aligned} 2 + 3(3 - x) &= 13 - x \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \qquad \text{accettabile} \end{aligned}$$

Quindi l'equazione ha due soluzioni, di segno opposto, e la risposta esatta è la D.

Risoluzione di equazioni contenenti valori assoluti, con discussione del modulo.

---

32. Siano a e b due numeri reali tali che $a < 3$ e $b \leq 0$. Allora

A. $ab \leq 3b$

B. $\boxed{ab \geq 3b}$

C. $ab > 3b$

D. $ab < 3b$

E. $ab \geq 0$

var <0

A) $a < 3 \rightarrow a(-b) < 3(-b) \rightarrow -ab < -3b \rightarrow \boxed{ab > 3b}$

var $=0$

B) $a \cdot 0 < 3 \cdot 0 \simeq 0 = 0$

Visto che b deve essere maggiore o uguale a 0 allora $ab \geq 3b$

Algebra; disuguaglianze.

Per sfruttare le note regole sulle disuguaglianze, occorre distinguere il caso $b < 0$ dal caso $b = 0$.

Se $b < 0$, dalla relazione $a < 3$ segue $ab > 3b$.
(Ricordiamo che: "moltiplicando ambo i membri di una disuguaglianza per una stessa quantità negativa, si ottiene una disuguaglianza equivalente pur di cambiare il verso della disuguaglianza".)

Se $b = 0$, si ha $ab = 0$.

In entrambi i casi la risposta B è vera: infatti se $b < 0$, allora $ab > 3b$ e in particolare $ab \geq 3b$ è vera, mentre se $b = 0$ la relazione $ab \geq 3b$ significa $ab \geq 0$, che è vera perché in questo caso $ab = 0$. Quindi la risposta esatta è la B.

Se x è un numero, affermare che $x \geq 0$ significa dire che x è un numero positivo ($x > 0$) oppure nullo ($x = 0$). Quindi, se è vera la disuguaglianza "stretta" $x > 0$, è vera anche la disuguaglianza "debole" $x \geq 0$ (ad es., $2 \geq 0$ è vera), ma non viceversa.

Proprietà delle disuguaglianze.

---

33. Se x è un numero reale *negativo*, allora

A. $x\,|x| > 0$ $\Longrightarrow -1 \cdot \cancel{1} > 0$ F

B. $\dfrac{x}{|x|} > 0$ $\Longrightarrow \dfrac{-1}{\cancel{1}} > 0$ F

C. $x + |x| > 0$ $\Rightarrow -\cancel{1} + \cancel{1} > 0 \rightarrow 0 > 0$ F

D. $\boxed{x - |x| < 0}$ $\Rightarrow -1 - (1) < 0 \rightarrow -2 < 0$ V

E. $-x\,|x| < 0$ $\Rightarrow +1(1) < 0 \rightarrow 2 < 0$ F

Algebra; valore assoluto di un numero.

Se $x < 0$, allora $|x| = -x$. Di conseguenza

A. $x\,|x| = x\,(-x) = -x^2 < 0$ falso;

B. $\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{-x} = -1 < 0$ falso;

C. $x + |x| = x + (-x) = 0$ falso;

D. $x - |x| = x - (-x) = 2x < 0$ vero;

E. $-x\,|x| = -x\,(-x) = x^2 > 0$ falso.

La risposta esatta quindi è la D.

Definizione di valore assoluto di un numero.

---

34. Dire per quali valori di x è verificata la disequazione

$$\frac{x+2}{x+1} \geq 1$$

DOMINIO

$x+1 \neq 0$
$x \neq -1$

A. Per qualunque x reale

B. Per qualunque x reale, diverso da -1

C. Per x maggiore di -1

D. Per x maggiore di -1 oppure minore o uguale di -2

E. Per x minore o uguale di -2

Algebra; disequazioni razionali fratte.

Imponiamo $x \neq -1$ e portiamo tutto a primo membro facendo denominatore comune

$$\frac{x+2-x-1}{x+1} \geq 0$$

ossia

$$\frac{1}{x+1} \geq 0$$

verificata per $x > -1$. La soluzione esatta è la C.

Tecniche di base per la risoluzione di disequazioni razionali fratte.

---

35. La soluzione dell'equazione

$$x^3 = \frac{81}{10}$$

$$\sqrt[3]{x^{\cancel{3}}} = \sqrt[3]{\frac{81}{10}}$$

$$\begin{array}{r|l} 81 & 9 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array} \qquad 3^4$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{3^4}{10}}$$

$$x = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{10}}$$

è

A. $2 \times \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

B. $2 + \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

C. $3 \times \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

D. $3 + \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$

E. $3 \times \sqrt[3]{\frac{3}{10}}$

Algebra; radicali.

Risolviamo

$$x = \sqrt[3]{\frac{81}{10}} = \sqrt[3]{\frac{3^4}{10}} = \sqrt[3]{\frac{3^3 \times 3}{10}} = 3 \times \sqrt[3]{\frac{3}{10}}$$

La risposta esatta è la E.

Proprietà di potenze e radicali.

---

36. La disequazione

$$(x-1)(x-2)(x-3) > 0$$

è verificata se e solo se

$X > 1 \; ; x > 2 \; ; x > 3$

A. $x > 1$

B. $x > 3$

C. $1 < x < 2$ oppure $x > 3$

D. $x < 1$ oppure $x > 3$

E. x è diverso da 1, da 2 e da 3

	1		2		3	
−		+		+		+
−		−		+		+
−		−		−		+
−		$\boxed{+}$		−		$\boxed{+}$

$1 < x < 2 \vee x >$

Algebra; disequazioni algebriche.

Il primo membro è un prodotto di tre fattori, il cui segno si studia con la regola dei segni. Uno schema del tipo

	1		2		3		
−	•	+		+		+	$(x-1)$
−		−	•	+		+	$(x-2)$
−		−		−	•	+	$(x-3)$
−	•	+	•	−	•	+	$(x-1)(x-2)(x-3)$

ci dice che la disequazione è soddisfatta per $1 < x < 2$ oppure per $x > 3$. Quindi la risposta esatta è la C.

Risoluzione di disequazioni algebriche; regola dei segni.

37. La disequazione

$$x^3 \leq x^4$$

è verificata se e solo se

A. $x \geq 0$

B. $x \geq 1$

C. $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$

D. $x \leq 0$ oppure $x \geq 1$

E. x è un numero reale qualunque

Portare tutto al 1° membro.

$x^3 - x^4 \leq 0$

$x^3(1-x) \leq 0$

$x^3 \leq 0 \quad x \leq 0$

$-x \leq -1 \to x \geq 1$

Algebra; disequazioni algebriche.

Riscriviamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned} x^3 - x^4 &\leq 0 \\ x^3(1-x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Ora è sufficiente studiare il segno del prodotto con la regola dei segni. Lo schema seguente

	0		1		
$-$	$\bullet$	$+$		$+$	(x^3)
$+$		$+$	$\bullet$	$-$	$(1-x)$
$-$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$-$	$x^3(1-x)$

mostra che la disequazione è verificata se $x \leq 0$ oppure per $x \geq 1$. La risposta esatta quindi è la D.

Risoluzione di disequazioni algebriche; regola dei segni.