

# Osciladores

Rodrigo de Oliveira

São José SC, Brasil, agosto de 2023

“Tu, porém, Daniel, cerra as palavras  
e sela o livro, até o fim do tempo;  
muitos correrão de uma parte para  
outra, e a ciência se multiplicará.”  
Daniel 12:4

**Versões:**

**Julho de 2017**

**Novembro de 2022**

**Agosto de 2023**

## Sumário

1 - Introdução.....	5
2 – O Oscilador Básico.....	5
2.1 - Princípio Físico.....	5
2.2 - Circuito RLC e a Oscilação.....	7
2.3 - Exemplos de Simulações da Oscilação Básica.....	12
3 - Osciladores Eletrônicos.....	15
4 - Condição de Oscilação.....	17
5 - Osciladores Harmônicos.....	18
5.1 – Rede RC - Ponte de Wien.....	19
5.1.1 - Introdução à Ponte de Wien.....	19
5.1.2 - Modelagem para Projeto.....	20
5.1.3 - Exemplos de Simulações.....	23
5.2 – Redes LC.....	28
5.2.1 – Redes Básicas.....	28
5.2.2 – Ganho e Frequência de Oscilação.....	32
5.2.3 – Simulações de Redes Ideais.....	35
5.2.2 – Simulações com Componentes Eletrônicos.....	40
5.4 – Redes a Cristal.....	43
6 - Oscilador de Relaxação.....	44
6.1 – Princípio.....	44
6.2 – Exemplo de Simulação.....	50
Apêndice.....	52
Referências.....	54

# 1 - Introdução

Osciladores estão presentes em equipamentos eletrônicos em geral com o propósito de gerar sinais periódicos para as mais diversas funções, como clock, modulação, phase locked loop, entre muitas outras. Não entrando no contexto de aplicação, o presente material, antes, procura introduzir conceitos básicos de princípios físicos e modelagem matemática, ilustrados com exemplos de simulação, tal que o leitor possa experimentar os conceitos apresentados. Os itens estão organizados na sequência princípio, modelagem, e simulação procurando cobrir todos os passos necessários para, ao final, ser possível o projeto de cada tópico estudado. O assunto em si é muito amplo, e com o natural desenvolvimento tecnológico levando a novas topologias e técnicas, porém, tendo como base a teoria ora descrita. O objetivo, afinal, é que após o conteúdo ser devidamente trabalhado, seja possível não só a execução de pequenos projetos com os osciladores apresentados, como igualmente fácil compreensão de outros circuitos e literatura deste mesmo assunto.

## 2 – O Oscilador Básico

### 2.1 - Princípio Físico

Oscilação é o movimento periódico de um corpo, ou seja, se repete em um intervalo regular de tempo. A oscilação de um sistema mecânico sempre começará a partir de uma energia potencial inicial aplicada neste. Tomando como exemplo em pêndulo simples, temos que um sistema sem perdas oscilará infinitamente sempre com a mesma amplitude de movimento, Figura 1 (a), alternando entre energia potencial  $E_p$  e cinética  $E_c$ , Tabela 1, respectivamente nos momentos em que para e entra em movimento. O mesmo ocorrendo em um sistema com perdas, evidentemente tendendo a parar, Figura 1 (b).



Figura 1 - Pêndulo (a) sem perdas e (b) com perdas.

Em um sistema elétrico ocorre exatamente o mesmo com a geração de tensão e corrente periódicas, no caso um circuito LC ideal, Figura 2, que pode começar a oscilar ou por uma tensão acumulada no capacitor, ou corrente acumulada no indutor, ou ambas. Os componentes L e C, com alguma energia inicial, Tabela 1, ao serem conectados entre si, iniciarão um processo de alternância de tensão e corrente entre ambos de forma senoidal. A Figura 4 (a) demonstra este efeito onde a tensão é máxima quando a corrente é mínima e vice-versa. Em um sistema real as perdas são representadas por um resistor, Figura 3, ou paralelo ou série, neste caso havendo evanescimento da oscilação, similarmente ao pêndulo com perdas, exemplificado na Figura 4 (b).

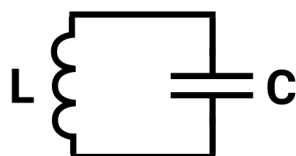


Figura 2 - Circuito LC ideal.

Tabela 1 - Energia nos sistemas mecânico e elétrico.

Pêndulo	Circuito LC
$E_c = \frac{mv^2}{2}$ $E_p = mgh$ Ec: Energia cinética. Ep: Energia potencial. m: massa. v: velocidade. g: força gravitacional. h: altura.	$E_{Cap} = \frac{CV^2}{2}$ $E_I = \frac{LI^2}{2}$ E <sub>Cap</sub> : Energia do capacitor. E <sub>I</sub> : Energia do indutor. C: capacitância. V: tensão. L: indutância. I: corrente.

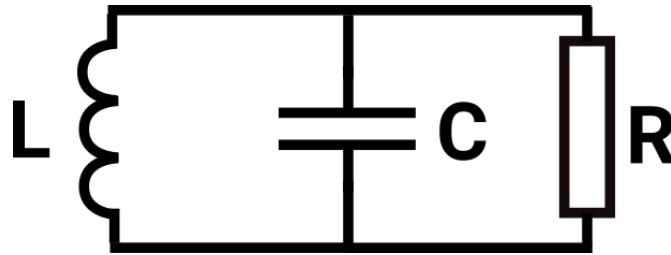


Figura 3 - Circuito RLC paralelo.

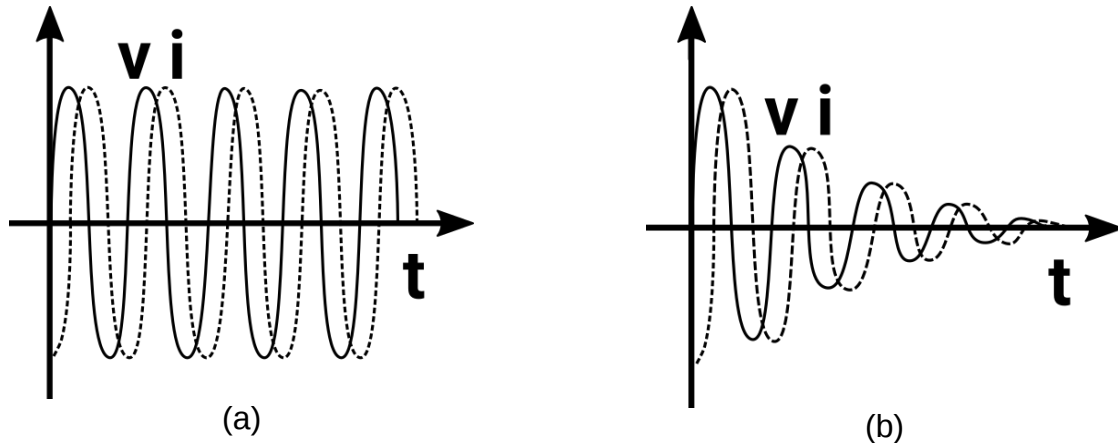


Figura 4 - Tensão nos componentes e corrente no indutor nos circuitos (a) LC e (b) RLC paralelo.

O circuito RLC gera uma oscilação senoidal, e por esse tipo de onda é chamado de oscilador harmônico, diferentemente dos osciladores não senoidais, ou de relaxação, ambos abordados ao longo do texto.

## 2.2 - Circuito RLC e a Oscilação

A modelagem do circuito RLC para análise do comportamento oscilatório é baseada na corrente do capacitor e tensão do indutor conforme a Figura 5, respectivamente Eqs.1 e 2 no domínio do tempo. A resolução é aqui feita no domínio da frequência, Eqs.3 e 4, por transformada de Laplace, aqui abordada de maneira prática por funções de tabelas, sem aprofundamento da transformada em si. As derivadas de tensão e corrente são desenvolvidas a partir da função tabelada Eq.5, que naturalmente torna explícita as condições iniciais de corrente e tensão do domínio do tempo, Eqs.6 e 7. Observando-se a usual convenção das variáveis no domínio do tempo em letras minúsculas e no da frequência em maiúsculas.



Figura 5 - Tensões e correntes no circuito RLC paralelo.

$$i_C = C \frac{dv}{dt} \quad (\text{Eq.1})$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} \quad (\text{Eq.2})$$

$$s = \sigma + j\omega \quad (\text{Eq.3})$$

$$\omega = 2\pi f \quad (\text{Eq.4})$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0) \quad (\text{Eq.5})$$

$$I_C = -I_L - I_R = C[sV_C - v_C(0)] \quad (\text{Eq.6})$$

$$V_L = V_C = L[sI_L - i_L(0)] \quad (\text{Eq.7})$$

Isolando  $I_L$  da Eq.7 resulta na Eq.8, sendo a Eq.9 a combinação das Eqs.6 e 8.

$$I_L = \frac{1}{s} \left[ \frac{V_C}{L} + i_L(0) \right] \quad (\text{Eq.8})$$

$$\frac{1}{s} \left[ \frac{V_C}{L} + i_L(0) \right] + \frac{V_C}{R} = -C[sV_C - v_C(0)] \quad (\text{Eq.9})$$

Obtemos a expressão da tensão do capacitor  $V_C$ , Eq.12, pelo desenvolvimento da Eq.9, com passos intermediários nas Eqs.10 e 11. A resposta para o circuito LC da Figura 2 é encontrada com  $R$  tendendo a infinito, o que elimina o termo  $s/RC$  da Eq.12, logo Eq.13.

$$\frac{V_C}{L} + i_L(0) + s \frac{V_C}{R} = -s^2 C V_C + s C v_C(0) \quad (\text{Eq.10})$$

$$V_C \left[ s^2 C + \frac{s}{R} + \frac{1}{L} \right] = -i_L(0) + s C v_C(0) \quad (\text{Eq.11})$$

$$V_C = \frac{-\frac{i_L(0)}{C} + s v_C(0)}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \quad (\text{Eq.12})$$



$$V_c = \frac{-\frac{i_L(0)}{C} + s v_c(0)}{s^2 + \frac{1}{LC}} \quad (\text{Eq.13})$$

A Eq.13 pode ser desenvolvida para caber nos formatos sen e cos da Tabela 2, resultando nas equações no tempo Eq.15. Para o circuito LC uma corrente inicial  $i_L(0)$  resulta em um seno, enquanto uma tensão inicial  $V_c(0)$  em um cosseno.

$$V_c = -\left[ i_L(0) \sqrt{\frac{L}{C}} \right] \frac{\sqrt{\frac{1}{LC}}}{s^2 + \frac{1}{LC}} + [v_c(0)] \frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}} \quad (\text{Eq.14})$$

$$v_c = -\left[ i_L(0) \sqrt{\frac{L}{C}} \right] \text{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t\right) + [v_c(0)] \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t\right) \quad (\text{Eq.15})$$

A partir das Eqs.8 e 14 encontramos a Eq.16 para a corrente  $i_L$ , que ao ser desenvolvida para os formatos da Tabela 2 resulta na Eq.17, sendo a Eq. 18 a respectiva transformação para o domínio do tempo.

$$I_L = \frac{1}{s} \left[ -\frac{1}{L} \left[ i_L(0) \sqrt{\frac{L}{C}} \right] \frac{\sqrt{\frac{1}{LC}}}{s^2 + \frac{1}{LC}} + \frac{1}{L} [v_c(0)] \frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}} + i_L(0) \right] \quad (\text{Eq.16})$$

$$I_L = -\left[ i_L(0) \frac{1}{LC} \right] \frac{1}{s \left( s^2 + \frac{1}{LC} \right)} + \frac{1}{L} [v_c(0)] \sqrt{LC} \frac{\sqrt{\frac{1}{LC}}}{s^2 + \frac{1}{LC}} + i_L(0) \frac{1}{s} \quad (\text{Eq.17})$$

$$i_L = -[i_L(0)] \left[ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t\right) \right] + [v_c(0)] \sqrt{\frac{C}{L}} \text{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t\right) + i_L(0) u(t) \quad (\text{Eq.18})$$

A transformada de Laplace do circuito RLC, Eq.12, por sua vez, apresenta o termo com expoente  $-\zeta\omega_n$ , Tabela 2 linha 6, igual a  $1/(2RC)$ , ou seja, a resistência faz aparecer o termo que dita o decaimento da oscilação, onde  $\zeta$  é o fator de amortecimento e  $\omega_n$  a frequência angular natural, Tabela 3. Em todos os casos com amplitudes dependendo dos

valores iniciais.

A Figura 6 mostra os polos, raízes do denominador do domínio da frequência, para as respectivas funções da Tabela 2, linhas 5 e 6, e sua relação com  $\zeta$  e  $\omega_n$ .

A Figura 7 relaciona o posicionamento dos polos com a resposta no tempo, na qual na Figura 7 (a), polos à esquerda ou  $\zeta > 0$ , a exponencial é decrescente, na Figura 7 (b), polos no eixo complexo ou  $\zeta = 0$ , o sistema é oscilatório, e na Figura 7 (c), polos à direita ou  $\zeta < 0$ , o sistema é crescente ou instável.

Tabela 2 - Transformadas de Laplace para os sinais de interesse.

	Domínio da Frequência	Domínio do Tempo
1	$\frac{1}{s}$	$u(t)$
2	$\frac{a \omega}{s^2 + \omega^2}$	$a \operatorname{sen}(\omega t)$
3	$\frac{as}{s^2 + \omega^2}$	$a \cos(\omega t)$
4	$\frac{a}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{a}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))$
5	$\frac{a}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$	$a \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t)$
6	$\frac{bs + a}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$	$e^{-\zeta \omega_n t} \left[ \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} (a - b \zeta \omega_n) \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) + b \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right]$

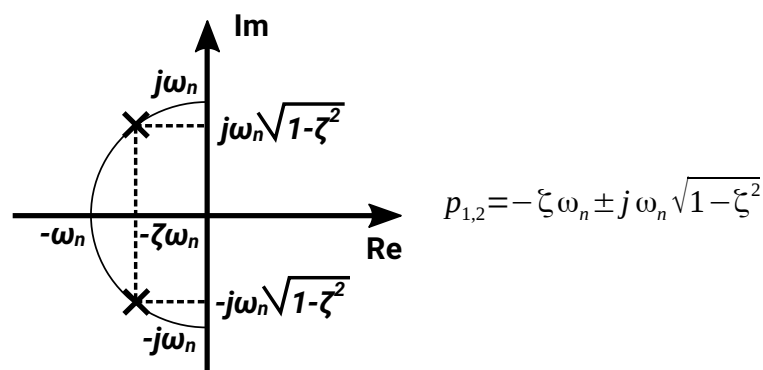


Figura 6 - Polos no plano complexo.

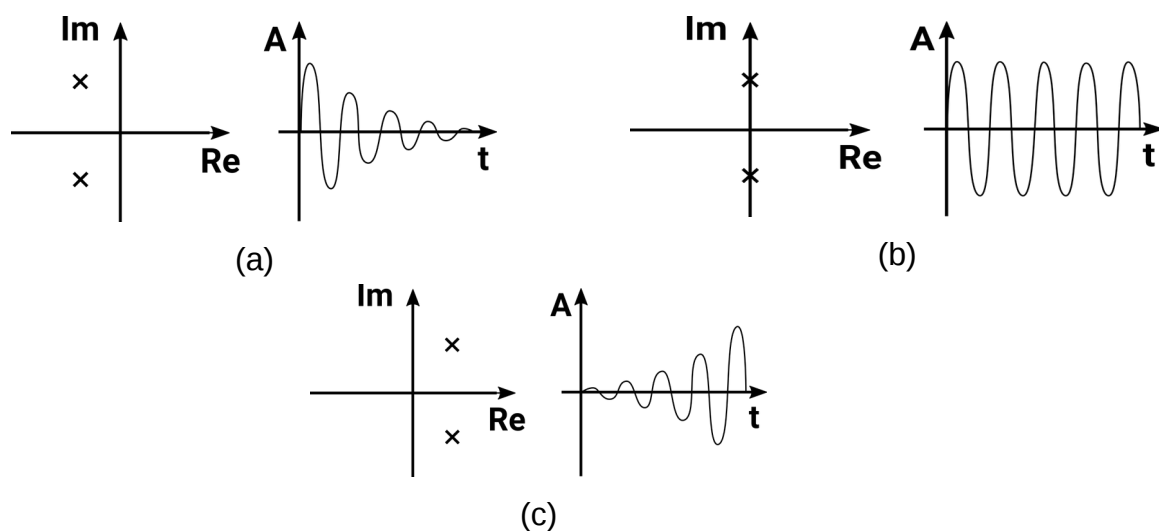


Figura 7 - Polos e resposta no tempo: (a) estável, (b) oscilante e (c) instável.

Tabela 3 - Variáveis da resposta de segunda ordem.

$\zeta$	Fator de amortecimento.
$\omega_n$	Frequência angular natural: frequência de oscilação de transitório para amortecimento nulo.
$\omega_p$	Frequência angular própria: frequência natural amortecida de oscilação.

O modelo com perdas, Eq.12, apresenta o comportamento da Figura 8, agora com decaimento da oscilação conforme o resistor R. A frequência de oscilação é  $\omega_p$  também chamada de frequência própria, Tabela 3. A resposta no tempo é obtida a partir da Eq.19 ao se determinar as constantes para a respectiva equação da Tabela 2.

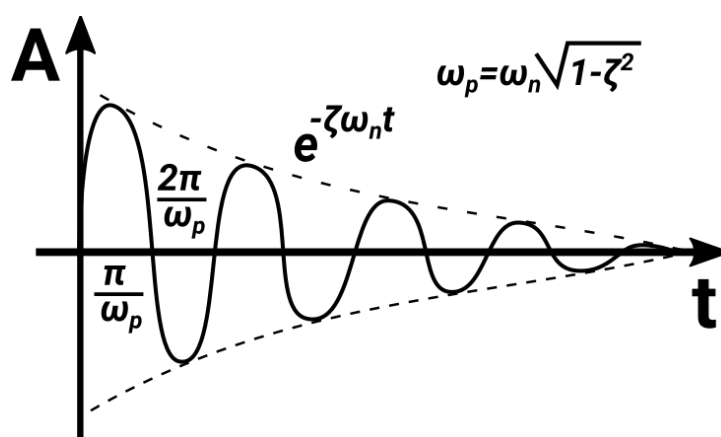


Figura 8 - Oscilação com perdas.

$$V_C = \frac{sv_C(0) - \frac{i_L(0)}{C}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{bs+a}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{Eq.19})$$

As variáveis a e b são respectivamente:

$$a = \frac{-i_L(0)}{C} \quad (\text{Eq.20})$$

$$b = v_C(0) \quad (\text{Eq.21})$$

A frequência  $\omega_n$  é facilmente encontrada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (\text{Eq.22})$$

O fator de amortecimento  $\zeta$  vem das Eqs. 22 e 23, resultando na Eq.24.

$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{RC} \quad (\text{Eq.23})$$

$$\zeta = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{Eq.24})$$

As variáveis a, b,  $\omega_n$  e  $\zeta$  em função dos componentes e condições iniciais agora dão a resposta no tempo da Eq.19 da Tabela 2.

## 2.3 - Exemplos de Simulações da Oscilação Básica

Os conceitos ora apresentados podem ser implementados em simulador, aqui o LTSpice. Na Figura 9 o circuito RLC em que podemos definir condições iniciais de tensão no capacitor e corrente no indutor para iniciar a oscilação em simulação transiente. Na Figura 10 simulações com tensão e corrente inicial com a perda dada pelo resistor, e definindo as respectivas atenuações. Para tensão inicial  $V_C(0)$  de 2V leva a amplitude de mesmo nível, conforme previsto pela Eq.13, bem como a frequência de oscilação  $\omega$  igual a  $\sqrt{LC}$ , ou um período de  $0.628\mu s$ . A Eq.13 é equivalente ao cos da Tabela 2. Para corrente inicial de 1A a frequência de oscilação se mantém, porém com amplitude agora dada por  $I_L(0)\sqrt{L/C}$ , da Eq.13 e o sen da Tabela 2.

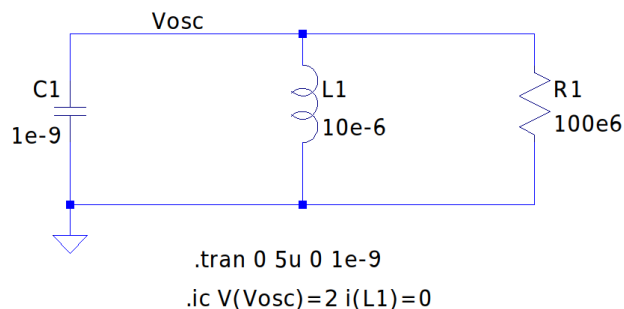


Figura 9 - Circuito LTSpice RLC com tensão e corrente inicial definidas pelas condições iniciais, arquivo LCOscill.asc.

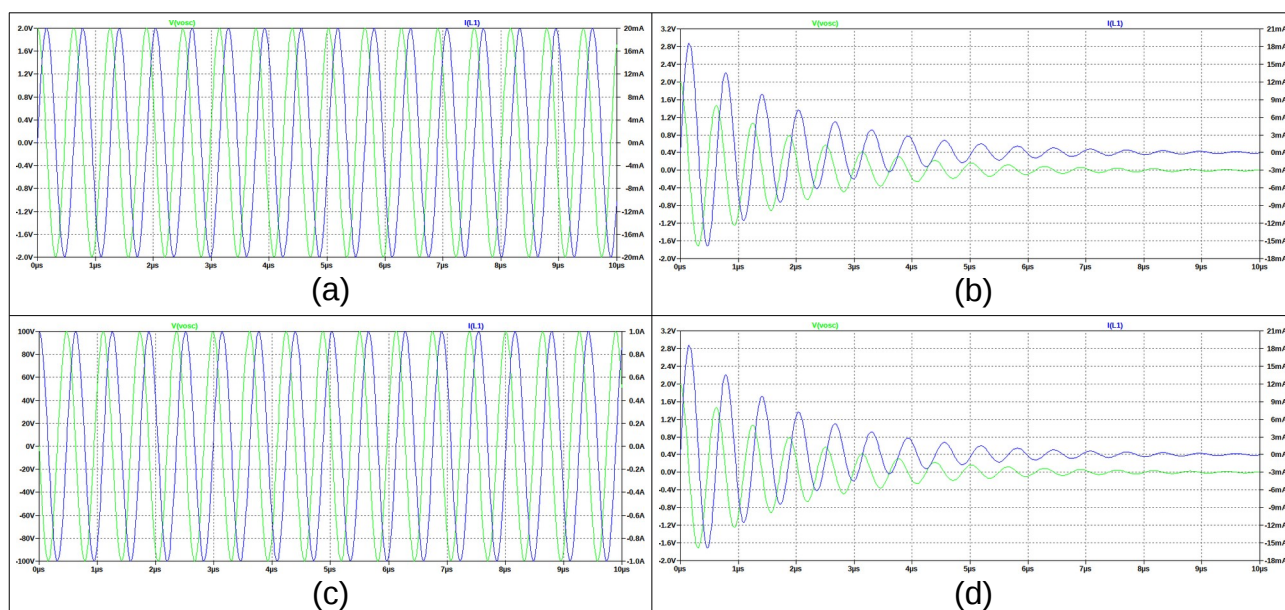


Figura 10 - Tensão no capacitor e corrente no indutor para oscilação por tensão inicial de 2V no capacitor com (a)  $R=100\text{M}\Omega$  e (b)  $R=1\text{k}\Omega$ , e corrente inicial de 1A no indutor com (a)  $R=1\text{M}\Omega$  e (b)  $R=1\text{k}\Omega$ .

Na Figura 11 se encontra o circuito com tensão inicial da fonte V1 de 2V que carrega o capacitor C1 através da chave S1, comandada pela fonte V2, um pulso de 500ns que mantém esta chave fechada neste intervalo de tempo. O capacitor carregado é conectado ao conjunto LR a partir de  $1\mu\text{s}$  ao se fechar a chave S2, assim formando o circuito RLC. As oscilações resultantes estão nas Figuras 13 (a) e (b), a primeira sem atenuação visível pelo uso de R de  $100\text{M}\Omega$ , aqui considerado infinito, já a segunda com forte atenuação devido a R de  $1\text{k}\Omega$ . Note-se que a amplitude de 2V é a mesma da tensão inicial, conforme previsto pela Eq.13, e a frequência de oscilação  $\omega$  igual a  $\sqrt{LC}$ , ou um período de  $0.628\mu\text{s}$ . A Eq.13 é equivalente ao cos da Tabela 2 tal qual os resultados para o circuito da Figura 9.

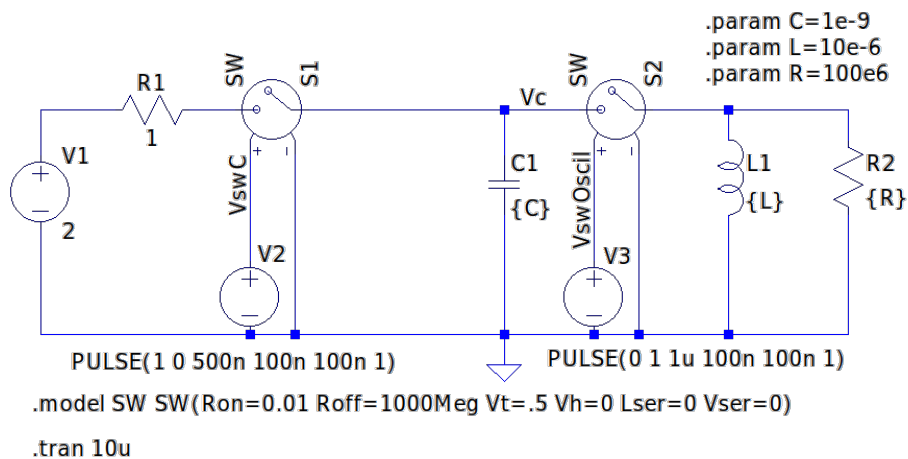


Figura 11 - Circuito LTSpice RLC com tensão inicial, arquivo LCOscillatorVCInitial.asc.

O circuito com corrente inicial de 1A em L1 pela fonte I1 está na Figura 12, aplicada nos primeiros 500ns pela chave S1, fechada neste tempo, sendo acrescentado o capacitor C1 no tempo de 1μs ao se abrir a chave S2. As oscilações conforme os resistores, 1MΩ e 1kΩ, estão nas Figuras 13 (a) e (b), respectivamente em simulação transiente. O primeiro resistor muito grande tal que não haja atenuação visível, o circuito desta forma podendo ser considerado somente LC, já o segundo com uma atenuação bem visível no intervalo de simulação. A frequência de oscilação não muda, com amplitude dada por  $I_L(0)\sqrt{L/C}$ , da Eq.13 e o sen da Tabela 2, o mesmo do circuito com condição inicial da Figura 9.

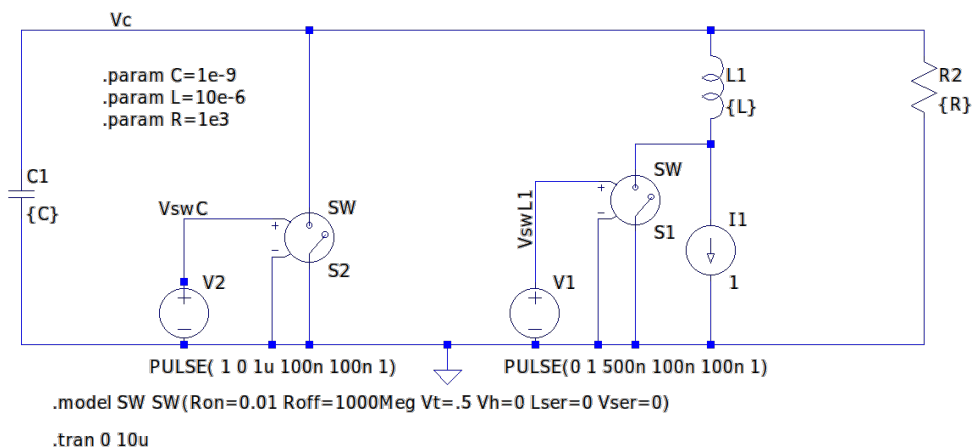


Figura 12 - Circuito LTSpice RLC com corrente inicial, arquivo LCOscillatorILInitial.asc.



Figura 13 - Tensão no capacitor e corrente no indutor baseadas em chaves para oscilação por tensão inicial de 2V no capacitor com (a)  $R=100\text{M}\Omega$  e (b)  $R=1\text{k}\Omega$ , e corrente inicial de 1A no indutor com (a)  $R=1\text{M}\Omega$  e (b)  $R=1\text{k}\Omega$ .

### 3 - Osciladores Eletrônicos

Conceito: são circuitos eletrônicos que produzem um sinal de saída sem a necessidade de um sinal de entrada.

Tipos:

#### a) Osciladores realimentados ou harmônicos – geram sinais senoidais.

Um sistema se mantém em oscilação ou se não tem perdas, o que não ocorre na realidade, ou é injetada energia para compensar as perdas. Em um pêndulo basta um 'empurrão' a cada retorno, nos circuitos eletrônicos o uso de um componente ativo, no caso um amplificador, Figura 14. Ainda fazendo um paralelo mecânico, o novo 'empurrão' do pêndulo a cada ciclo não pode ser muito forte, senão há um aumento da amplitude de oscilação, e nem muito fraco, senão com o tempo tende a parar, enfim, deve ser adequado para se manter constante. Nos circuitos eletrônicos a energia injetada deve ter o mesmo caráter de manter a amplitude máxima constante, ou seja, se muita energia o sistema tende a uma amplitude infinita, ou divergir, e se pouca energia tende a um sinal nulo.

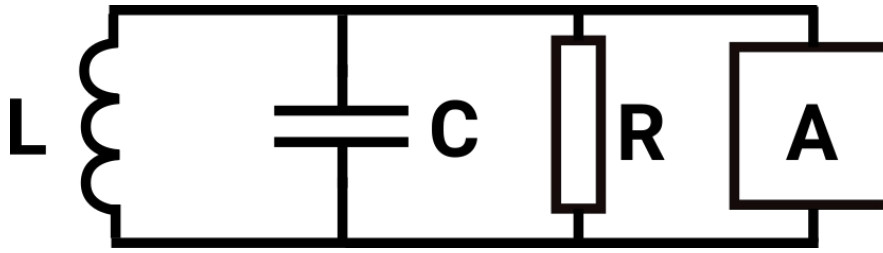


Figura 14 - Circuito RLC e amplificador.

A injeção de energia para compensar as perdas é feita por um bloco amplificador, implementado em um sistema conforme a Figura 15, onde temos o amplificador no bloco A, realimentado por uma rede LC, bloco B, ou seja, a rede LC responsável pela oscilação e o amplificador fazendo o papel de injetar energia. Neste tipo de oscilador a saída é realimentada na entrada tal que o amplificador A, reforça a saída, mantendo a oscilação conforme o bloco de realimentação B. Da Figura 15 vemos que  $V_o = V_o AB$ . Podemos compreender fisicamente que para manter a saída estável o ganho AB deve ser igual a 1, critério de Barkhausen, ou seja, a saída procura seguir a entrada de modo a não haver nem atenuação,  $AB < 1$ , nem aumento infinito,  $AB > 1$ . Portanto uma vez estabelecido ganho unitário e fase  $0^\circ$  no sistema realimentado supracitado, este oscilará com amplitude constante. Observa-se, no entanto, que o critério de Barkhausen se aplica a circuitos lineares com uma malha de realimentação, é uma condição necessária, porém, não suficiente para oscilação, alguns circuitos satisfazem a condição, mas não oscilam. Na prática os osciladores eletrônicos apresentam não linearidades que podem afetar sua correta operação, assunto ainda em estudo.

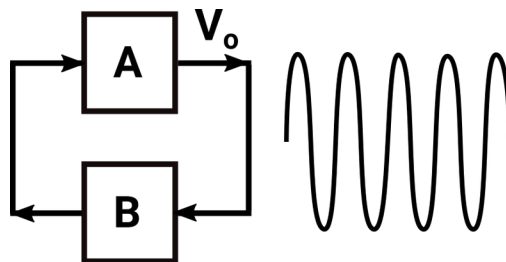


Figura 15 - Sistema realimentado sem entrada.

**b) Osciladores de relaxação - geram sinais não-senoidais.**



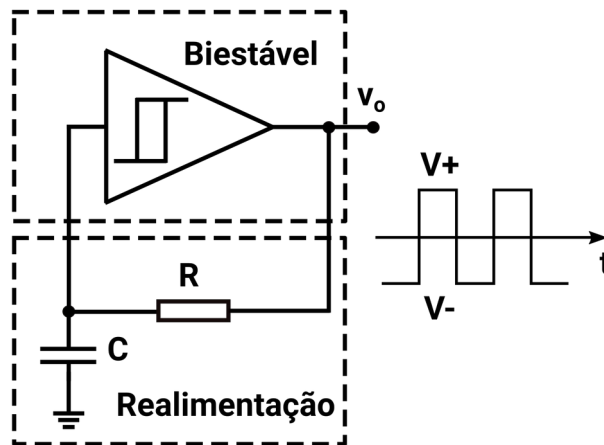


Figura 16 - Oscilador de relaxação.

Aqui a oscilação é gerada através de circuitos RC, como temporizadores, resultando em sinais quadrados ou não senoidais. Usualmente são baseados em Schmitt trigger, ou outros circuitos, que carregam e descarregam capacitores em um resistor.

## 4 - Condição de Oscilação

Partimos da análise geral de um sistema realimentado para a determinação da condição de oscilação. Do diagrama de blocos geral da Figura 17 levantamos a respectiva função de transferência, Eq.25. Sendo o oscilador um sistema sem sinal de entrada, logo temos  $V_i(s)=0$ , Eq.26, o que implica a Eq.27, ou seja, o produto  $A(s)B(s)$  igual a  $\mp 1$ . Este resultado significa o módulo do produto  $A(s)B(s)$  igual a 1, Eq.28, e fase da rede de realimentação de  $180^\circ$  para valor de -1, Eq.29, e  $0^\circ$  para 1, Eq.30, portanto condições de projeto dos circuitos eletrônicos para garantir a oscilação. A Figura 18 ilustra o comportamento dos sinais nos blocos no processo de oscilação onde o sinal na entrada de  $A(s)$  é sempre realimentação positiva, com o sinal do bloco de soma positivo se  $B(s)$  for positivo e negativo se  $B(s)$  for igualmente negativo. A tensão de saída  $V_o(s)$  é atenuada e defasada conforme a realimentação, bloco  $B(s)$  para posterior ganho, lembrando que para o produto  $A(s)B(s)>1$  o sinal tende a crescer infinitamente, na prática saturar, e se  $A(s)B(s)<1$  a oscilação tende ao valor zero. Um sistema eletrônico prático começa a oscilar ao ser ligado e receber energia da alimentação, em um processo de aumento da amplitude até se estabilizar no produto  $|A(s)B(s)|=1$ .

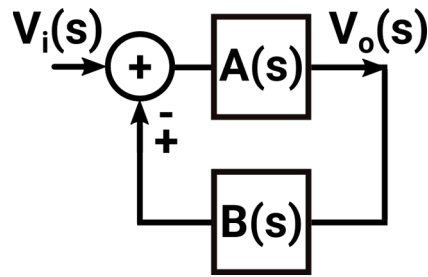


Figura 17 - Sistema realimentado.

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{A(s)}{1 \pm A(s)B(s)} \quad (\text{Eq.25})$$

$$V_i(s) = 0 \quad (\text{Eq.26})$$

$$1 \pm A(s)B(s) = 0 \quad (\text{Eq.27})$$

$$|A(s)B(s)| = 1 \quad (\text{Eq.28})$$

$$\phi[A(s)B(s)] = 180^\circ \quad (\text{Eq.29})$$

$$\phi[A(s)B(s)] = 0^\circ \quad (\text{Eq.30})$$

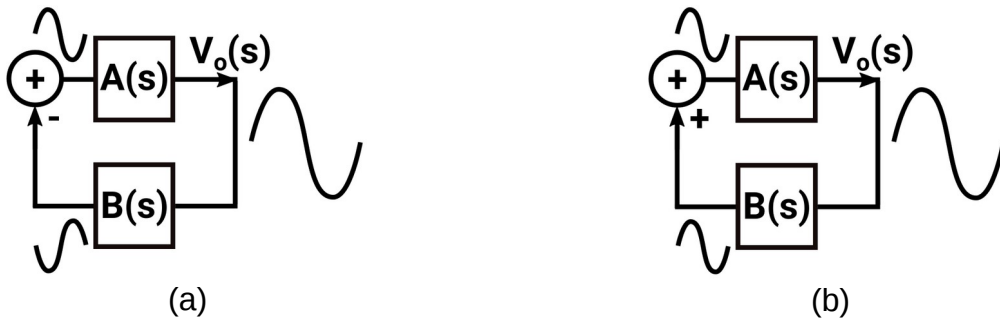


Figura 18 - Sinais do sistema com realimentação sempre positiva em A(s) se o sinal de B(s) for (a) negativo e (b) positivo.

## 5 - Osciladores Harmônicos

Os osciladores harmônicos podem ser divididos em três grupos principais conforme a rede de realimentação [Gil\_UERJ\_Oscil]. A Tabela 4 resume esta classificação, onde vemos além da rede, também as características de frequência e alguns dos circuitos das respectivas redes.

Tabela 4 - Tipos de osciladores de acordo com a rede de realimentação.

Rede de Realimentação	Frequência	Circuito
RC	Baixa (5 a 1 MHz)	Ponte de Wien
LC	Alta/Variável	Hartley Colpitts Clapp
Cristal*	Alta/Fixa	Hartley Colpitts Clapp

\*O componente cristal pode ser implementado em qualquer um dos circuitos de rede LC.

## 5.1 – Rede RC - Ponte de Wien

### 5.1.1 - Introdução à Ponte de Wien

Baseado na ponte de Wheatstone, por isso o nome Wien, trata-se de um circuito de dois estágios, amplificador e rede de realimentação, Figura 19, com boa estabilidade na frequência de ressonância, baixa distorção, e de fácil sintonia, por isso muito utilizado em geradores de áudio comerciais.

A rede de realimentação, Figura 20 (a), consiste de um filtro passa altas, RC série, seguido de um passa baixas, RC paralelo, resultando em um filtro passa banda de alto fator de qualidade  $Q$  na frequência de ressonância  $f_r$ . Esta realimentação forma uma rede de avanço-atraso, lead-lag, com fase  $0^\circ$  na ressonância, bem como ganho de  $1/3$ , conforme mostrado na Figura 20 (b). O circuito entra em oscilação ao se fazer o ganho do amplificador igual a 3, ou seja, produto amplificador e realimentação igual a 1.

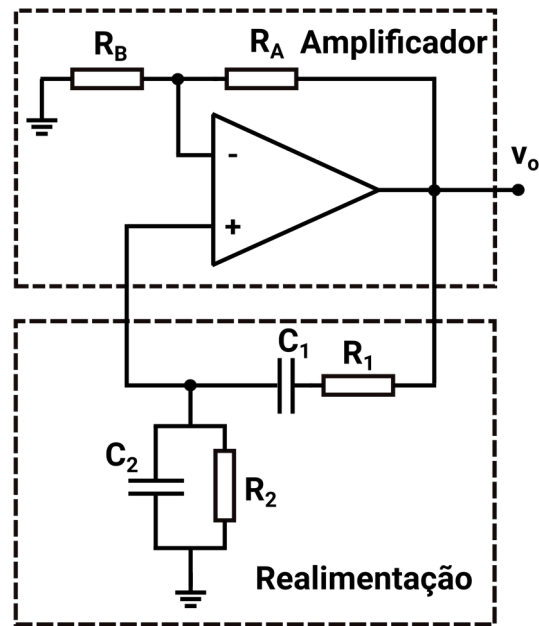


Figura 19 - Circuito da Ponte de Wien.

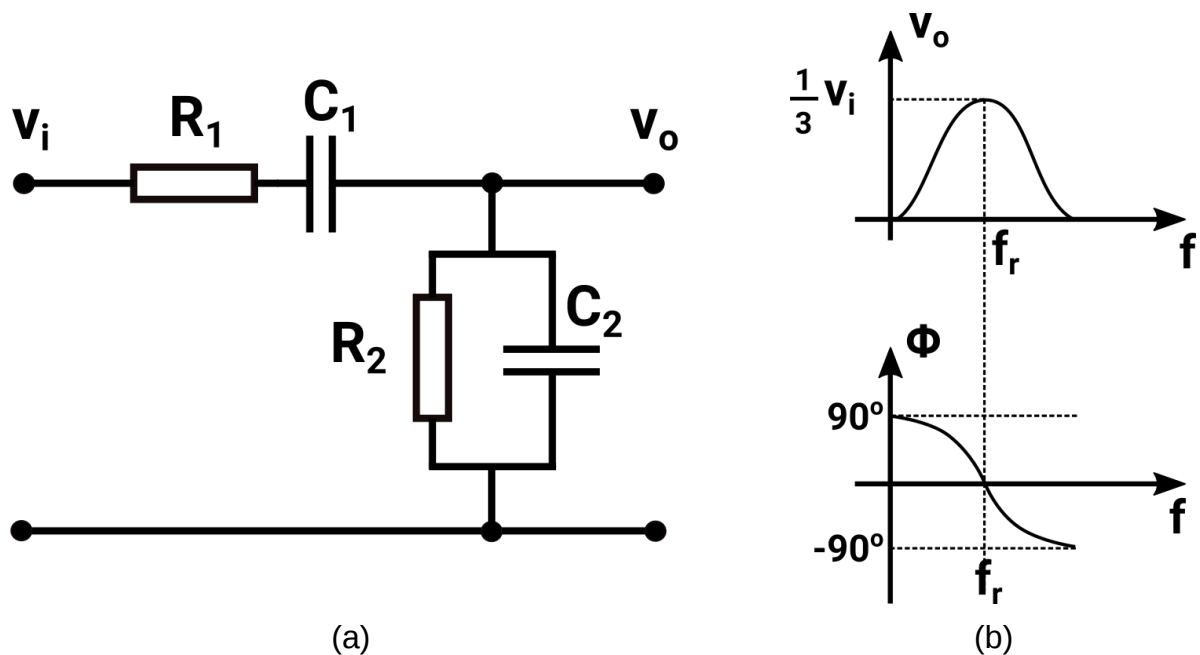


Figura 20 - (a) Rede RC de realimentação e (b) resposta em frequência.

### 5.1.2 - Modelagem para Projeto

A frequência de ressonância e ganho da rede de realimentação podem facilmente ser encontrados por sua análise de circuito [Wien] baseada em transformada de Laplace. Inicialmente utilizamos um valor comum para os resistores, Eq.31, bem como para os capacitores, Eq.32, com respectivas impedâncias série e paralela pelas Eqs.33 e 34.

$$R_1 = R_2 = R \quad (\text{Eq.31})$$

$$C_1 = C_2 = C \quad (\text{Eq.32})$$

$$Z_1 = R + \frac{1}{sC} \quad (\text{Eq.33})$$

$$Z_2 = \frac{R}{1 + sRC} \quad (\text{Eq.34})$$

O ganho de tensão da rede  $A_{Vrede}$  é dado pela Eq.35, a qual ao serem substituídos  $Z_1$  e  $Z_2$  pelas respectivas expressões, resulta na Eq.36, cujo desenvolvimento com  $j\omega$  no lugar de  $s$ , Eq.37, nos leva ao ganho da rede em função da frequência, Eq.38.

$$\frac{V_o}{V_i} = A_{Vrede} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (\text{Eq.35})$$

$$A_{Vrede} = \frac{\frac{R}{1 + sRC}}{R + \frac{1}{sC} + \frac{R}{1 + sRC}} \quad (\text{Eq.36})$$

$$s = j\omega \quad (\text{Eq.37})$$

$$A_{Vrede} = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC - (\omega RC)^2} \quad (\text{Eq.38})$$

A Eq.39 é a condição para a fase de  $A_{Vrede}$  ser  $0^\circ$ , basicamente eliminar a parte real do denominador. Desta condição aparecem a frequência de ressonância, Eq.40 e o ganho de 1/3 da rede, Eq.41.

$$1 - (\omega RC)^2 = 0 \quad (\text{Eq.39})$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi RC} \quad (\text{Eq.40})$$

$$A_{Vrede} = \frac{1}{3} \quad (\text{Eq.41})$$

O ganho do amplificador operacional para a configuração não inversora é dado pela Eq.42, e sendo o ganho do amplificador e rede igual 1 pelo critério de Barkhausen e realimentação positiva, Eq.43, facilmente encontramos o ganho de 3 como o necessário para o circuito oscilar.

$$A_{vamp} = 1 + \frac{R_A}{R_B} \quad (\text{Eq.42})$$

$$A_{vamp} A_{vrede} = 1 \quad (\text{Eq.43})$$

$$A_{vamp} = 1 + \frac{R_A}{R_B} = 3 \quad (\text{Eq.44})$$

Portando sendo as Eqs.40, 41 e 44 as utilizadas para o projeto deste oscilador.

A amplitude de oscilação pode ser estabilizada por redes não lineares, como por exemplo diodos, conforme a Figura 21 mostra, neste caso a Ponte de Wien com diodos. Com a amplitude de saída limitada pela tensão de alimentação e os resistores  $R_C$  e  $R_D$ , conforme as Equações 45 a 51. Nestas o ganho de  $1/3$ , Eq.45, é combinado com a tensão  $v_a$ , Eq.46, a uma aproximação de superposição das tensões dos divisores resistivos de  $V_{CC}$  ( $v_o=0V$ ) e  $v_o$  ( $V_{CC}=0V$ ), sabendo que a diferença entre  $v_i$  e  $v_a$  é  $0.7V$  de queda do diodo. Sendo a condução do diodo para  $v_o$  negativo, usamos  $v_o$  conforme a Eq.48. Desenvolvendo este sistema, Eqs.49 e 50, chegamos a expressão da amplitude conforme a Eq.51, agora não mais dependente da tensão de alimentação somente, antes ajustável de acordo com  $R_C$  e  $R_D$ .

$$v_i = \frac{v_o}{3} \quad (\text{Eq.45})$$

$$v_a = \frac{V_{cc} R_D}{R_C + R_D} + \frac{v_o R_C}{R_C + R_D} \quad (\text{Eq.46})$$

$$v_i - v_a = 0.7 \quad (\text{Eq.47})$$

$$v_o = -\hat{v}_o \quad (\text{Eq.48})$$

$$-\frac{\hat{v}_o}{3} - \frac{V_{cc} R_D}{R_C + R_D} + \frac{\hat{v}_o R_C}{R_C + R_D} = 0.7 \quad (\text{Eq.49})$$

$$-\hat{v}_o (R_C + R_D) - 3 V_{cc} R_D + 3 \hat{v}_o R_C = 2.1 (R_C + R_D) \quad (\text{Eq.50})$$

$$\hat{v}_o = \frac{3 V_{cc} R_D + 2.1 (R_C + R_D)}{2 R_C - R_D} \quad (\text{Eq.51})$$

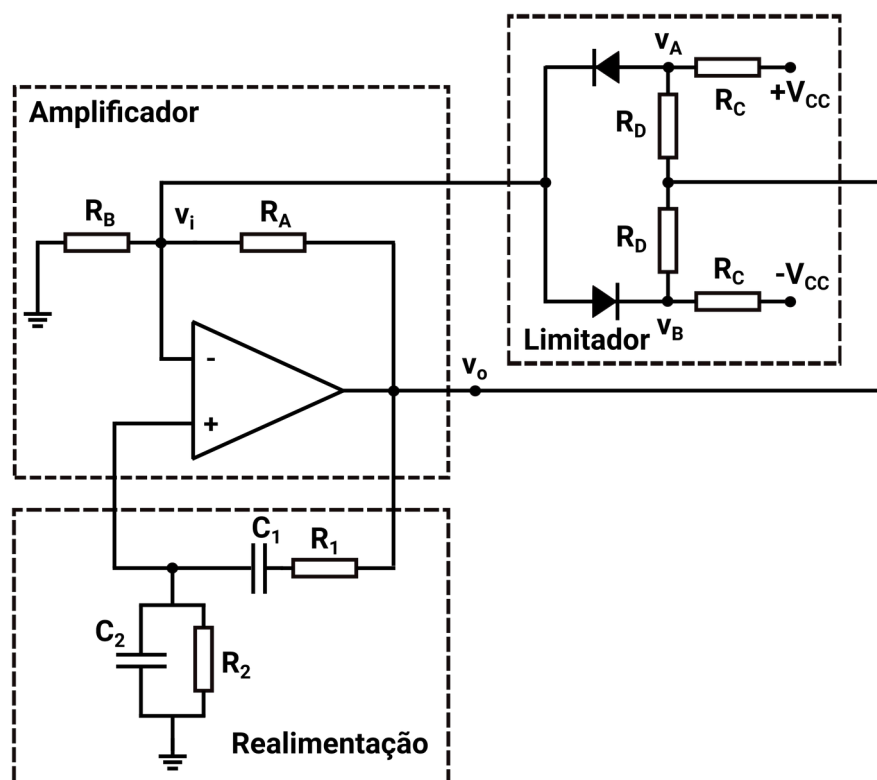


Figura 21 - Circuito da Ponte de Wien com limitador.

### 5.1.3 - Exemplos de Simulações

Na Figura 22 o amplificador operacional, LT1001A, na configuração não inversora utilizada no oscilador, cujo o ganho de tensão é verificado por varredura DC de 0 a 5V de  $V_i$ . O resultado é uma saída com tensão 3 vezes à da entrada, Figura 23, conforme o projeto, limitada pela alimentação DC de 15V menos 1V.

Na Figura 24 a rede de realimentação e na Figura 25 a respectiva resposta em frequência em simulação AC. A fonte AC é de 1V resultando em um pico de 1/3V e fase  $0^\circ$  em 1kHz, como esperado, na Figura 25.

A Figura 26 mostra o projeto em simulador de um oscilador em Ponte de Wien para uma frequência de 1kHz. Os resistores  $R_A$  e  $R_B$  tem uma relação de 2 para 1, logo o desejado ganho de 3 do bloco operacional. O resistor  $R_{tol}$  (tolerância) é para forçar um ganho pouco acima de 1 e garantir a oscilação. Sendo arbitrado um capacitor  $C$  de 10nF, e conseqüentemente o resistor  $R$  de 15.9k $\Omega$ , de acordo com a Eq.40. É importante observar que as fontes de alimentação são do tipo step, partindo de 0V, pois se trata de simulação transiente, uma fonte DC não funciona neste caso.

Para a mesma ponte de Wien, agora com limitador, usamos  $R_C=400k\Omega$  e  $R_D=100k\Omega$ , com  $V_{CC}$  de 15V, o que resulta em  $v_o=7.93V$ . As simulações transiente se encontram na Figura 28. A tensão simulada apresenta  $v_o=6.97V$ , cerca de 1V de erro devido ao modelo ser aproximado, no caso a aproximação de superposição.

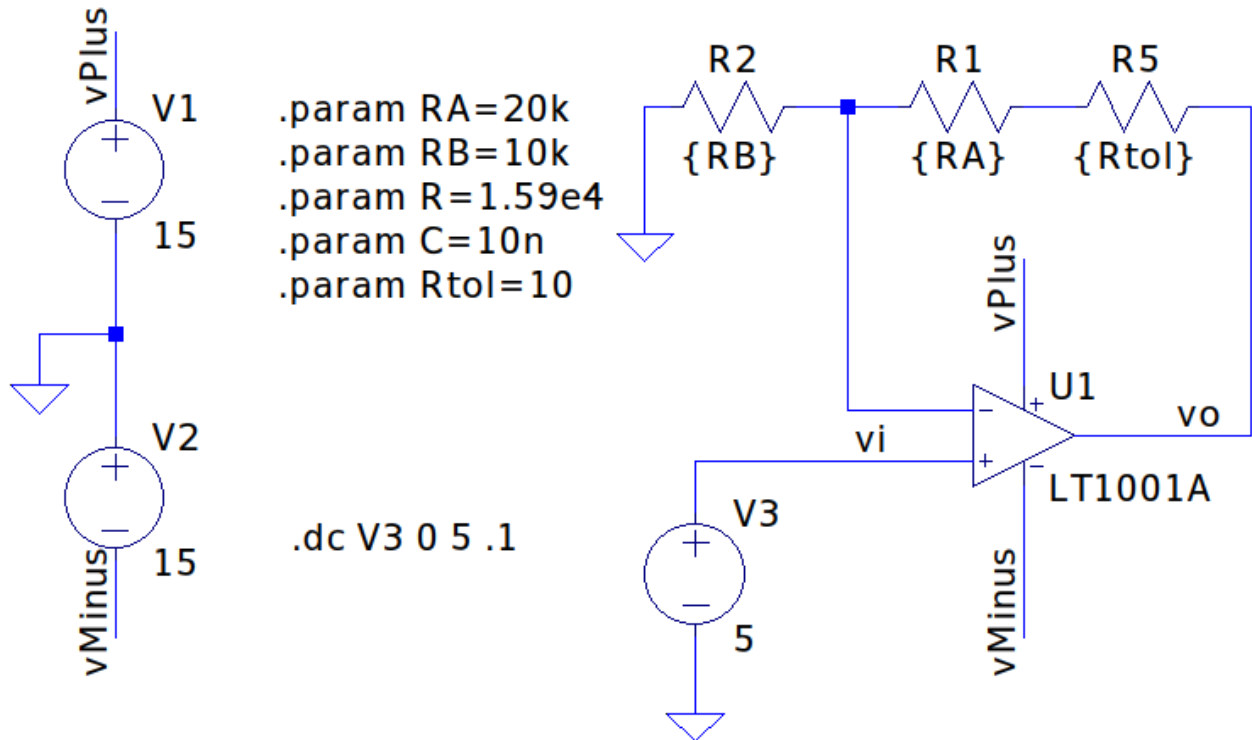


Figura 22 - Amplificador Operacional LTSpice, arquivo OpAmp.asc.

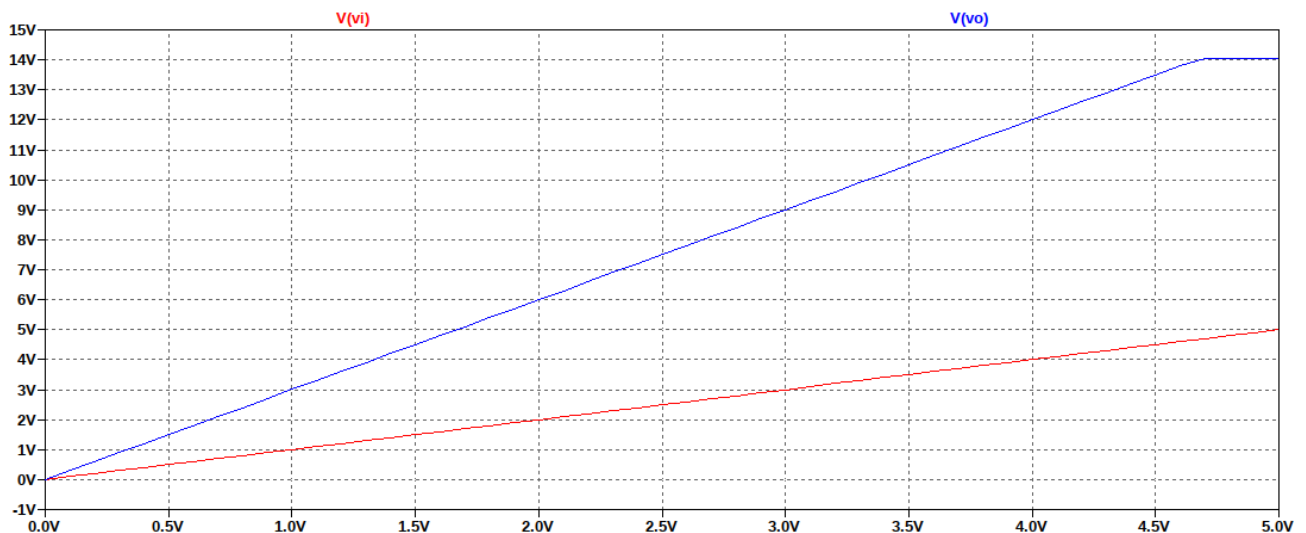


Figura 23 - Curva de transferência do amplificador operacional.



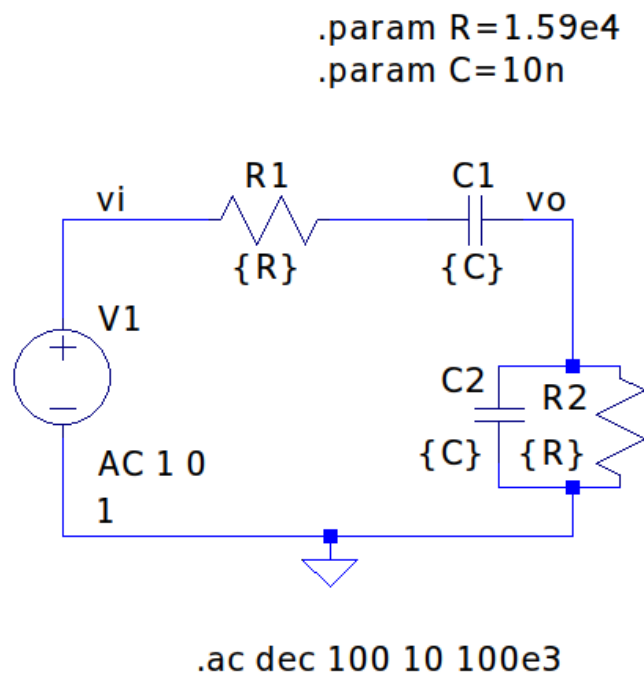


Figura 24 - Rede de realimentação da ponte de Wien LTSpice, arquivo WienBridgeNetwork.asc.

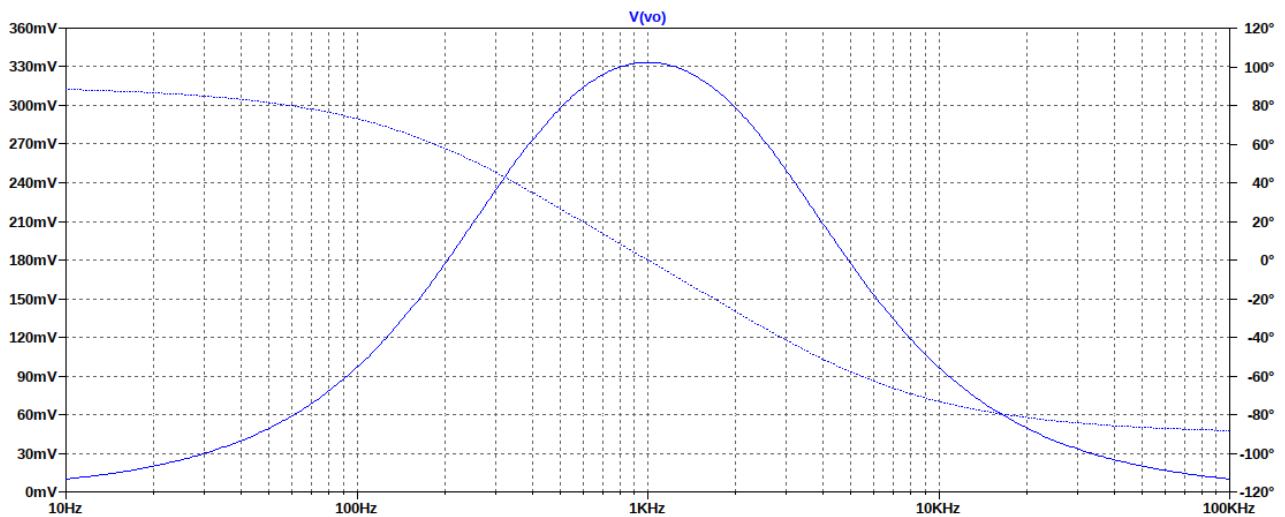


Figura 25 - Resposta em frequência da ponte de Wien LTSpice.

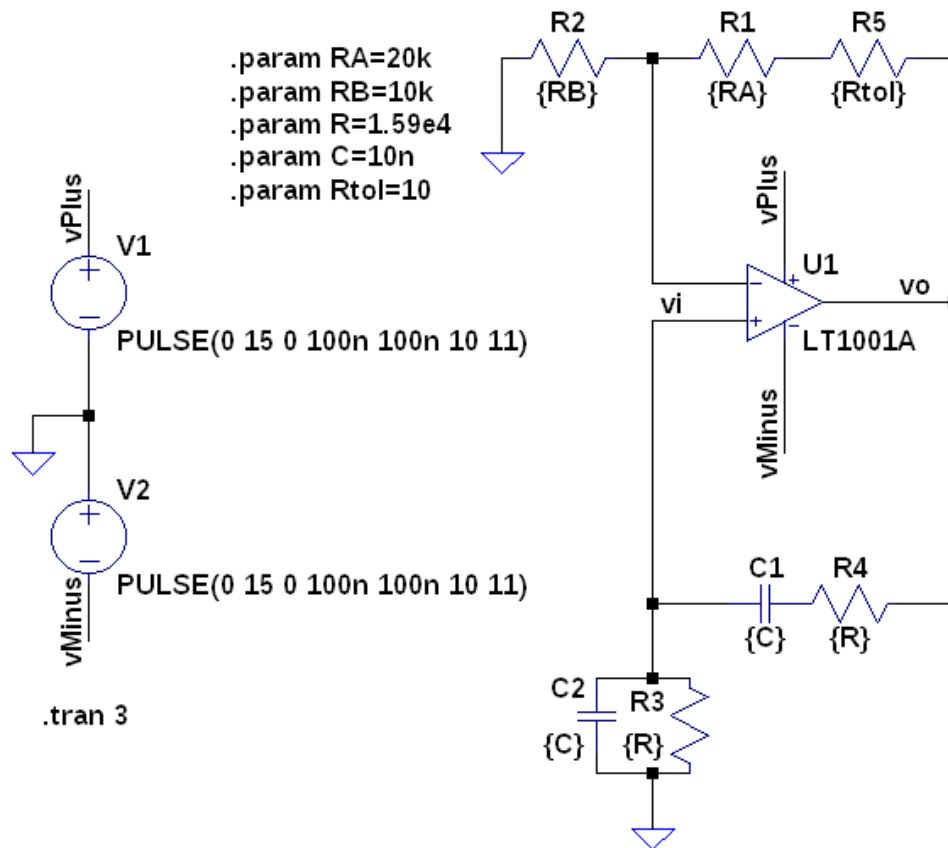


Figura 26 - Ponte de Wien LTSpice, arquivo WienBridge.asc.

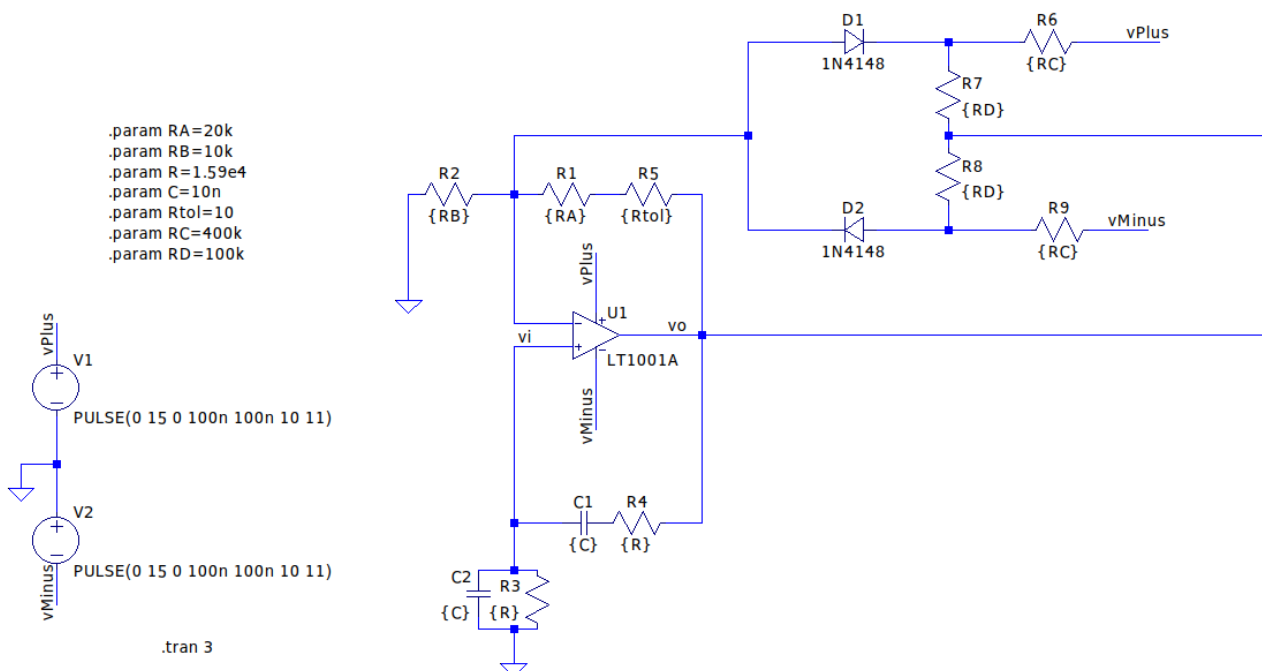


Figura 27 - Ponte de Wien com limitador LTSpice, arquivo WienBridgeLimiter.asc.

A oscilação resultante do circuito da Figura 26, sem limitador, se encontra na Figura 28 (a), tanto para a tensão na saída do amplificador operacional,  $V_o$ , quanto na entrada,  $V_i$ . Uma visão aproximada se encontra na Figura 28 (b) onde verificamos a frequência de oscilação projetada de 1kHz. A simulação com limitador na Figura 29(a),e respectivo zoom na 29(b).

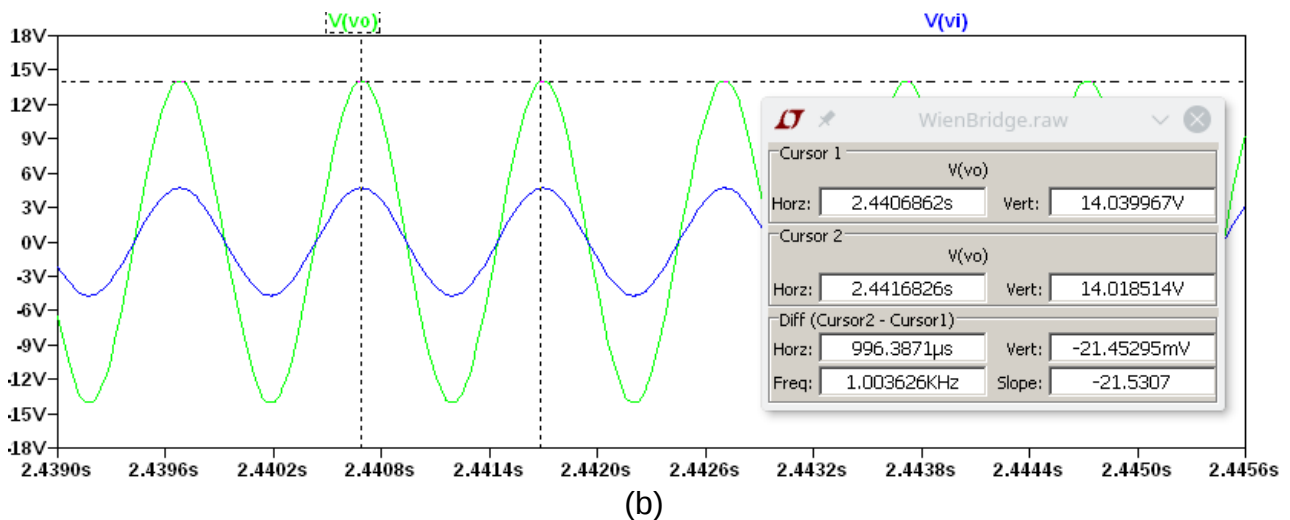
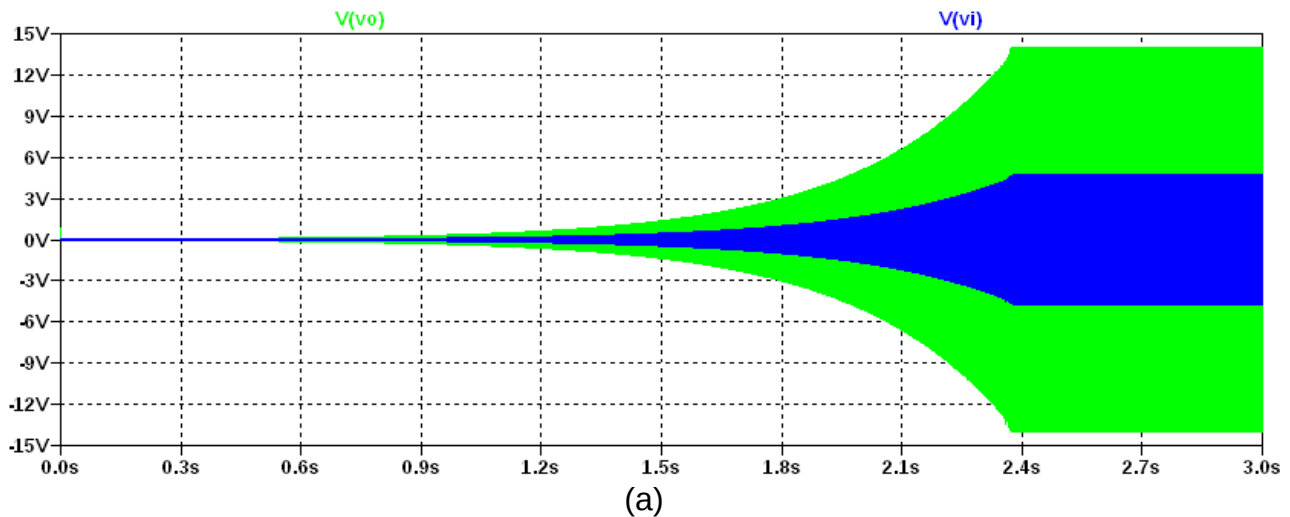


Figura 28 - Tensões de saída  $v_o$  e realimentada  $v_i$  da ponte de Wien:  
(a) simulação completa e (b) zoom da simulação.

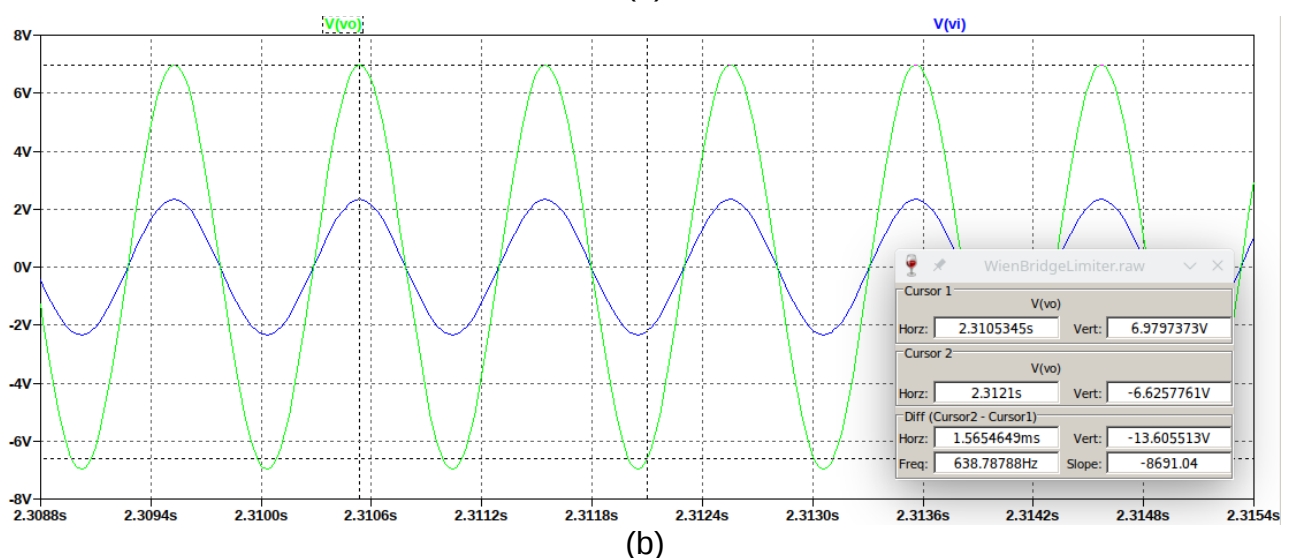
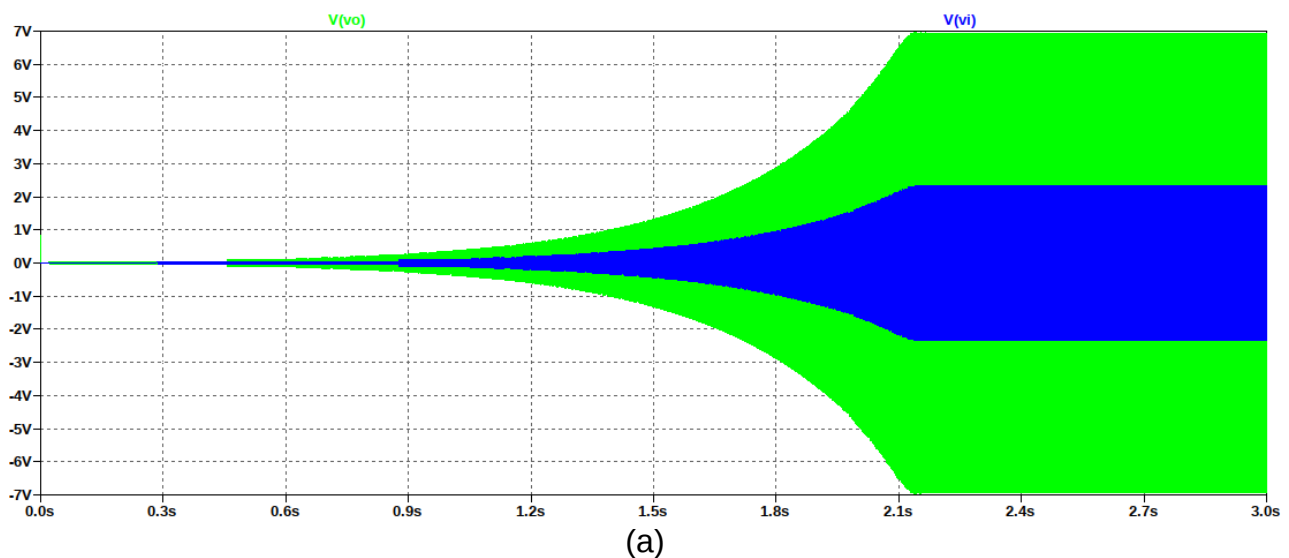


Figura 29 - Tensões de saída  $v_o$  e realimentada  $v_i$  da ponte de Wien com limitador:  
(a) simulação completa e (b) zoom da simulação.

## 5.2 – Redes LC

### 5.2.1 – Redes Básicas

Aqui trataremos das redes de realimentação de três elementos [Gil\_UERJ\_Oscil], Figura 30, tendo como base duas configurações: Hartley e Colpitts, Figuras 31 (a) e (b). A configuração Clapp, Figuras 31 (c) é uma derivação do Colpitts para osciladores de frequência variável, variable frequency oscillator VFO, onde o capacitor correspondente a reatância  $X_{2b}$  é variável, evitando usar os capacitores relativos a  $X_1$  e  $X_2$  para tanto, uma vez que causariam igualmente variação da tensão de realimentação [WikiClapp].

A configuração Hartley é composta por dois indutores (“Hartlei” com o som “y=l” de indutor), enquanto a Colpitts por dois capacitores (“Colpitts” com C de capacitor). Ambas as redes provêm realimentação para oscilação, porém o Colpitts apresenta vantagens por não ter problema de indutância mútua, bem como melhor sinal senoidal devido a baixa impedância dos capacitores em alta frequência [Colpitts].

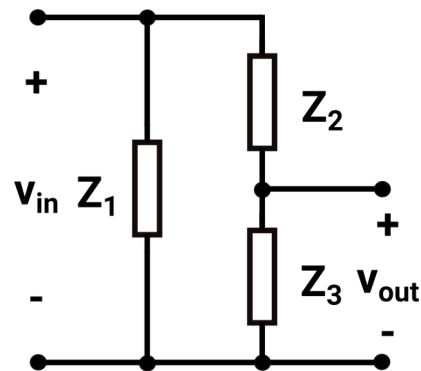


Figura 30 - Rede LC geral.

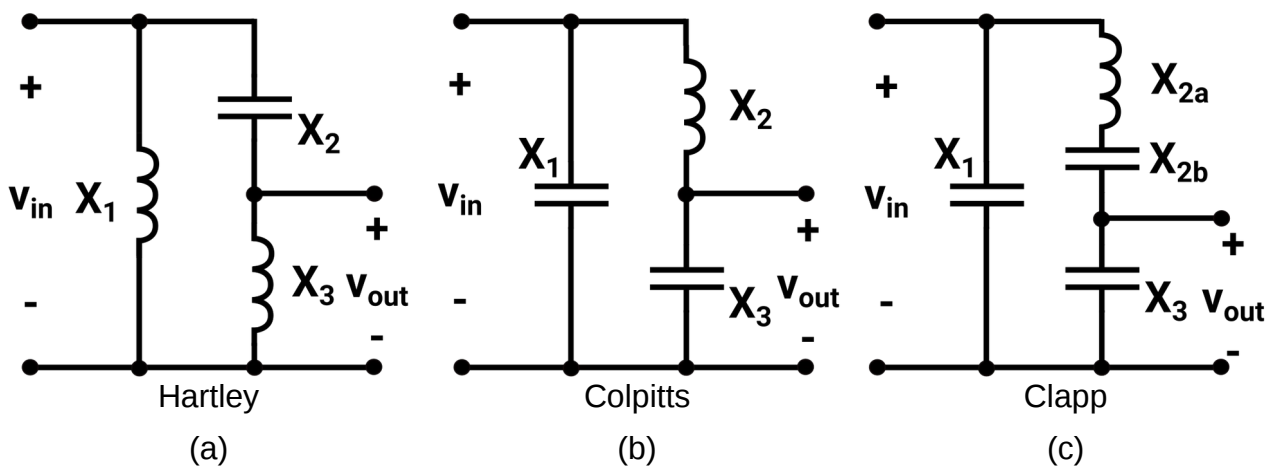


Figura 31 - Redes LC específicas.

A Figura 32 mostra a estrutura geral onde o amplificador pode tanto ser um transistor quanto um amplificador operacional. Na Figura 33 (a) temos o modelo pequeno sinal do transistor bipolar, BJT, e na Figura 33 (b) o transistor de efeito de campo, FET, por exemplo JFET ou MOSFET. Para o BJT, em especial, é usado o modelo de transcondutância baseado na Eq.52. Já para o amplificador operacional pode ser utilizada a configuração inversora, Figura 34 (a), com modelo equivalente na Figura 34 (b), a partir das equações de ganho e impedância de entrada, Eqs.43 e 44.

$$g_m v_{be} = g_m r_{\pi} i_b = \beta_o i_b \quad (\text{Eq.52})$$

$$A_{vampop} = \frac{-R_A}{R_B} \quad (\text{Eq.53})$$

$$Z_{Iampop} = R_B \quad (\text{Eq.54})$$

As implementações dos osciladores Hartley e Colpitts, BJT e amplificador operacional, estão nas Figuras 35 e 36, o Clapp na Figura 37. Aqui são exemplificadas algumas versões destes osciladores, uma vez que existem na literatura um grande número de outras variações destes mesmos osciladores.

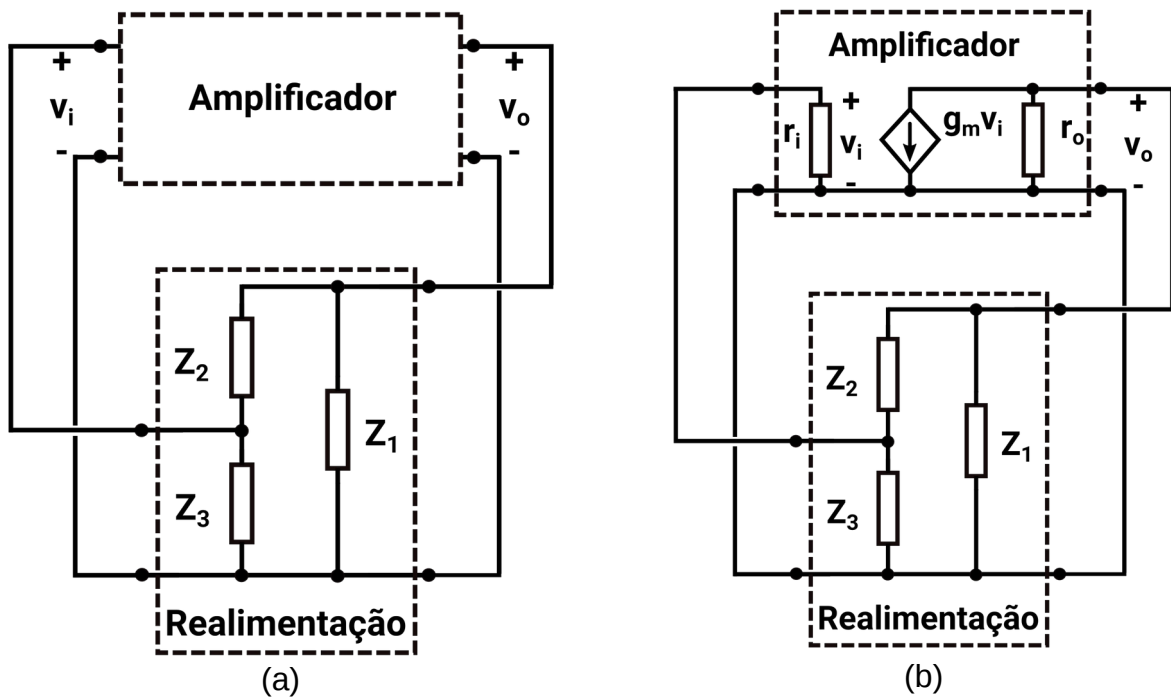


Figura 32 - Sistema realimentado (a) geral e (b) modelo de transcoduntância.

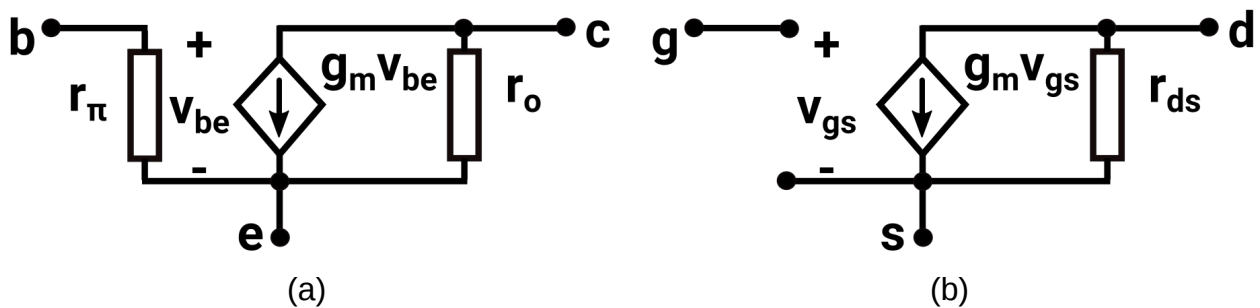
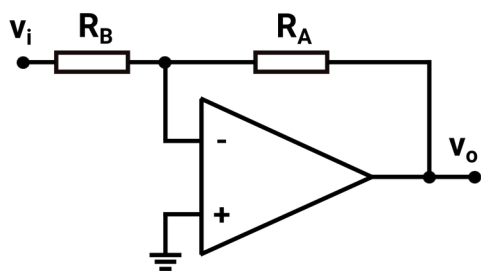
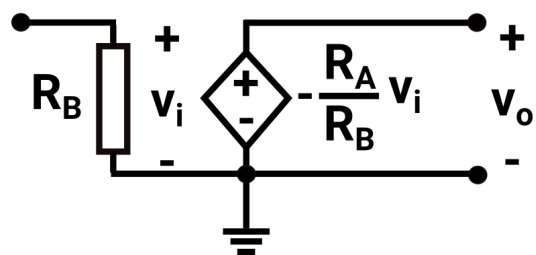


Figura 33 - Modelo pequeno sinal (a)BJT e (b)FET.

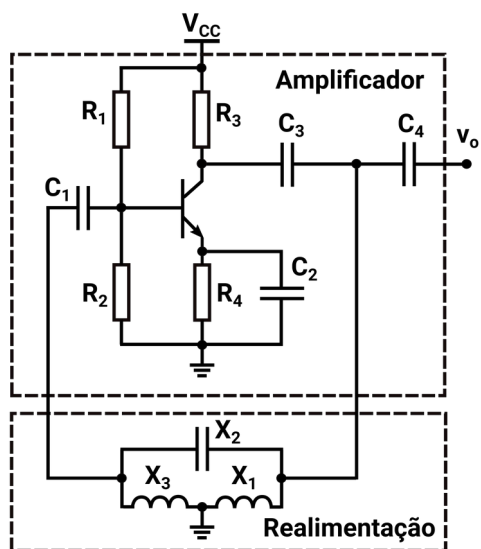


(a)

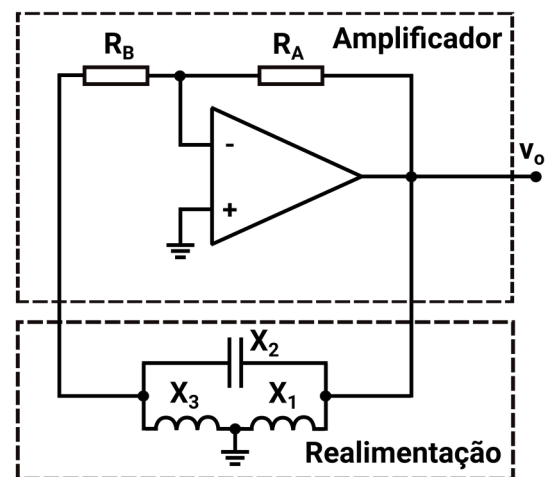


(b)

Figura 34 - (a) Amplificador operacional inversor, e (b) circuito equivalente.

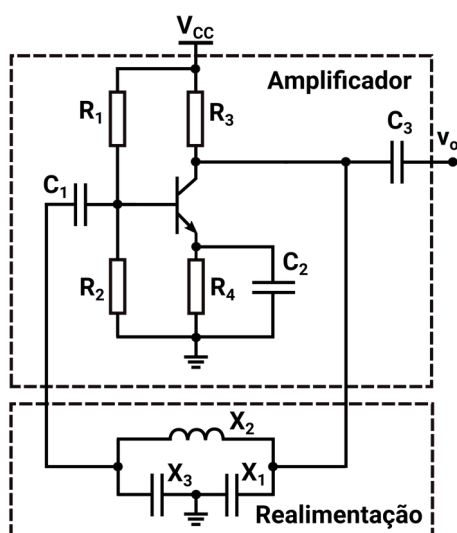


(a)

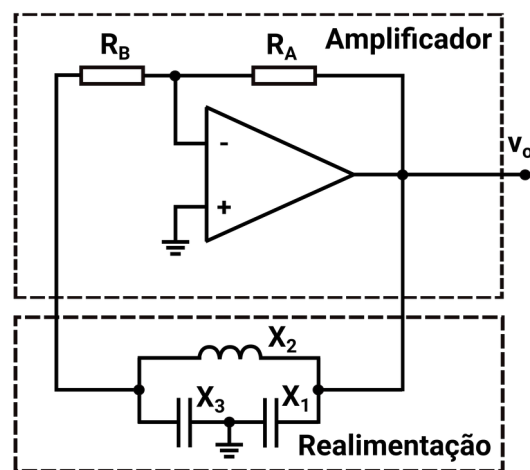


(b)

Figura 35 - Oscilador Hartley (a) BJT e (b) amplificador operacional.



(a)



(b)

Figura 36 - Oscilador Colpitts(a) BJT e (b) amplificador operacional.

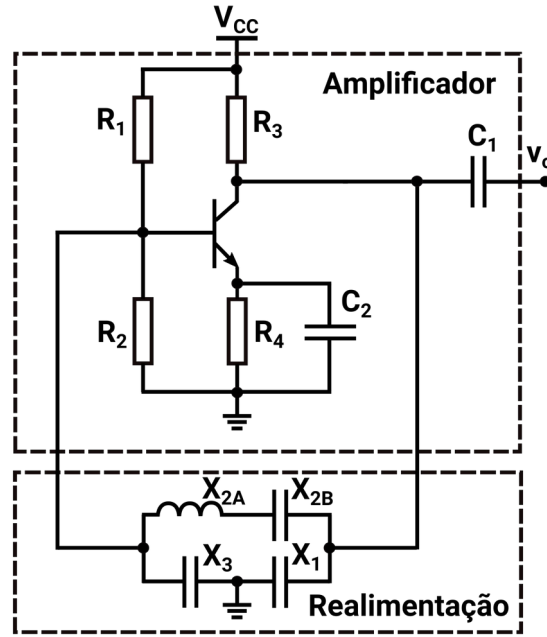


Figura 37 - Oscilador Clapp

### 5.2.2 – Ganho e Frequência de Oscilação

A partir da análise do circuito da Figura 32 encontramos o ganho e frequência de oscilação. Aqui consideraremos a resistência  $r_i$  de valor infinito. O ganho e impedância de entrada da rede de realimentação são dados pelas Eqs.55 e 56. O ganho do amplificador com a impedância da realimentação se encontra na Eq.57. Com a condição de ganho unitário para os ganhos de amplificador e realimentação, Eq.58, chegamos à Eq.59, cujo desenvolvimento, Eqs. 60 e 61, resulta na Eq.62.

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = A_{Vrede} = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad (\text{Eq.55})$$

$$Z_{EQrede} = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad (\text{Eq.56})$$

$$\frac{v_o}{v_i} = A_{Vamp} = -g_m \frac{r_o Z_{EQrede}}{r_o + Z_{EQrede}} \quad (\text{Eq.57})$$

$$A_{Vamp} A_{Vrede} = 1 \quad (\text{Eq.58})$$



$$A_{Vamp} A_{Vrede} = -g_m \frac{r_o \frac{Z_1(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3}}{r_o + \frac{Z_1(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3}} \frac{Z_3}{Z_2+Z_3} \quad (\text{Eq.59})$$

$$A_{Vamp} A_{Vrede} = -g_m \frac{r_o Z_1 Z_3}{r_o(Z_1+Z_2+Z_3) + Z_1(Z_2+Z_3)} \quad (\text{Eq.60})$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= jX_1 \\ Z_2 &= jX_2 \\ Z_3 &= jX_3 \end{aligned} \quad (\text{Eq.61})$$

$$A_{Vamp} A_{Vrede} = -g_m \frac{-r_o X_1 X_3}{jr_o(X_1+X_2+X_3) - X_1(X_2+X_3)} \quad (\text{Eq.62})$$

A condição de ganho unitário, agora, passa pela eliminação do termo imaginário do denominador da Eq.62, ou seja, a Eq.63, que leva às Eqs.64 e 65, respectivamente para a condição de ganho, Eq.66, e frequências de oscilação, Tabela 5.

$$\boxed{X_1 + X_2 + X_3 = 0} \quad (\text{Eq.63})$$

$$A_{Vamp} A_{Vrede} = -g_m \frac{r_o X_3}{X_2 + X_3} \quad (\text{Eq.64})$$

$$X_2 + X_3 = -X_1 \quad (\text{Eq.65})$$

$$\boxed{A_{Vamp} A_{Vrede} = g_m \frac{r_o X_3}{X_1}} \quad (\text{Eq.66})$$

Desta última derivamos os ganhos do amplificador e da realimentação na oscilação, Eqs.67 e 68.

$$A_{Vamp} = -g_m r_o \quad (\text{Eq.67})$$

$$A_{Vrede} = \frac{-X_3}{X_1} \quad (\text{Eq.68})$$

Para o amplificador operacional, Figura 37 (a), o ganho é dado pela Eq.69, com o produto dos ganhos pela Eq.70.

$$A_{vampop} = \frac{-R_A}{R_B} \quad (\text{Eq.69})$$

$$A_{vampop} A_{vrede} = \frac{R_A X_3}{R_B X_1} \quad (\text{Eq.70})$$

A partir da Eq. 63 é possível se determinar as frequências de oscilação do Hartley, Eqs.71 e 72, e do Colpitts, Eqs.73 e 74.

$$j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_2} + j\omega L_3 = 0 \quad (\text{Eq.71})$$

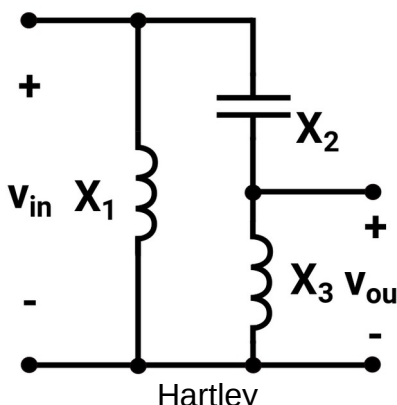
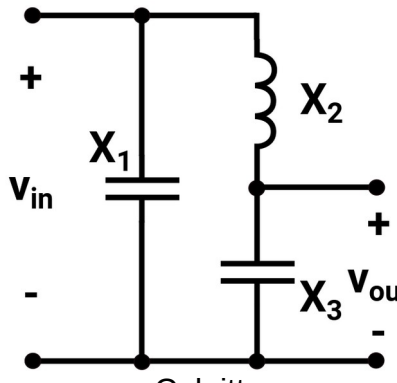
$$f_{osc} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_3)C_2}} \quad (\text{Eq.72})$$

$$-j\frac{1}{\omega C_1} + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_3} = 0 \quad (\text{Eq.73})$$

$$f_{osc} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} L_2}} \quad (\text{Eq.74})$$

A Tabela 5 resume as características das topologias Hartley e Colpitts, com as reatâncias específicas para cada caso, resultando nas expressões de ganho e frequência de oscilação. Detalhe para o ganho maior que 1, isto ocorre pois, na prática, o ganho deve ser o suficiente para iniciar e manter o processo de oscilação, com o próprio sistema garantindo a saturação no caso dos sistemas reais.

Tabela 5 - Ganho e frequência de oscilação para o Hartley e Colpitts.

Redes de Realimentação	Reatâncias	$g_m \frac{r_o X_3}{X_1} > 1$ ou $\frac{R_A X_3}{R_B X_1} > 1$	$X_1 + X_2 + X_3 = 0$
 <p>Hartley</p>	$X_1 = \omega L_1$ $X_2 = \frac{-1}{\omega C_2}$ $X_3 = \omega L_3$	$g_m \frac{r_o L_3}{L_1} > 1$ ou $\frac{R_A L_3}{R_B L_1} > 1$	$f_{osc} = \frac{1}{2\pi \sqrt{(L_1 + L_3) C_2}}$
 <p>Colpitts</p>	$X_1 = \frac{-1}{\omega C_1}$ $X_2 = \omega L_2$ $X_3 = \frac{-1}{\omega C_3}$	$g_m \frac{r_o C_1}{C_3} > 1$ ou $\frac{R_A C_1}{R_B C_3} > 1$	$f_{osc} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} L_2}}$

### 5.2.3 – Simulações de Redes Ideais

Aqui é feita a verificação desta base teórica simulando o modelo ideal, Figura 32, para o Hartley, Figura 38, e Colpitts, Figura 39. Os componentes utilizados estão na Tabela 6, bem como o ganho simulado, e frequências de oscilação calculadas e simuladas, com os valores praticamente exatos. O ganho, em particular, se refere ao caso de oscilação estável.

A simulação do oscilador Hartley, Figura 38, começa com a carga do capacitor C2 pela chave S1 nos primeiros 300ns, em seguida sendo aberta e o oscilador sendo iniciado em 1µs pelas chaves S2 e S3. As formas de onda para três valores do resistor R1 em simulação transiente podem ser vistas nas Figuras 40 (a), (b) e (c), no caso R1 para o

ganho menor, igual e maior que 1, oscilação decrescente, constante, e crescente.

A simulação do Coplitts, Figura 39, é semelhante a do Hartley, com a chave S1 carregando os capacitores C1 e C3 até 300ns, com S2 iniciando o processo de oscilação em 1μs. Os gráficos resultantes das simulações transiente também para ganho menor, igual e maior que 1 encontram-se nas Figuras 41 (a), (b) e (c).

Os modelos ideais, portanto, corroboram a teoria a respeito de osciladores baseados em amplificadores realimentados.

Tabela 6 - Osciladores ideais: cálculo e simulação.

Componentes	$g_m \frac{r_o X_3}{X_1} > 1$	$f_{osc}$ cálculo	$f_{osc}$ simulação
<p>Hartley</p> <p><math>g_m=0.05</math> S (Dado)</p> <p><math>g_m \frac{r_o L_3}{L_1} = 1</math> e <math>L_1=L_3 \Rightarrow r_o=20 \Omega</math></p> <p><math>L_1=L_3=2.2</math>mH (Dado)</p> <p><math>f_{osc}=20</math>kHz (Dado)</p> <p><math>C_2 = \frac{1}{(L_1+L_3)(2\pi f_{osc})^2} \Rightarrow C_2=14.4</math>nF</p> <p><math>C_2=13.8</math>nF (Ajuste)</p>	1	20.425 kHz	20.667 kHz
<p>Colpitts</p> <p><math>g_m=0.5</math> S (Dado)</p> <p><math>C_1=13.8</math>nF (Dado)</p> <p><math>L_2=2.2</math>mF (Dado)</p> <p><math>f_{osc}=30</math>kHz (Dado)</p> <p><math>C_3 = \frac{1}{L_2(2\pi f_{osc})^2 - \frac{1}{C_1}} \Rightarrow C_3=175.3</math>nF</p> <p><math>C_3=120</math>nF (Ajuste)</p> <p><math>g_m \frac{r_o C_3}{C_1} = 1 \Rightarrow r_o=17.4 \Omega</math></p>	1.0005	30.5 kHz	31.6 kHz

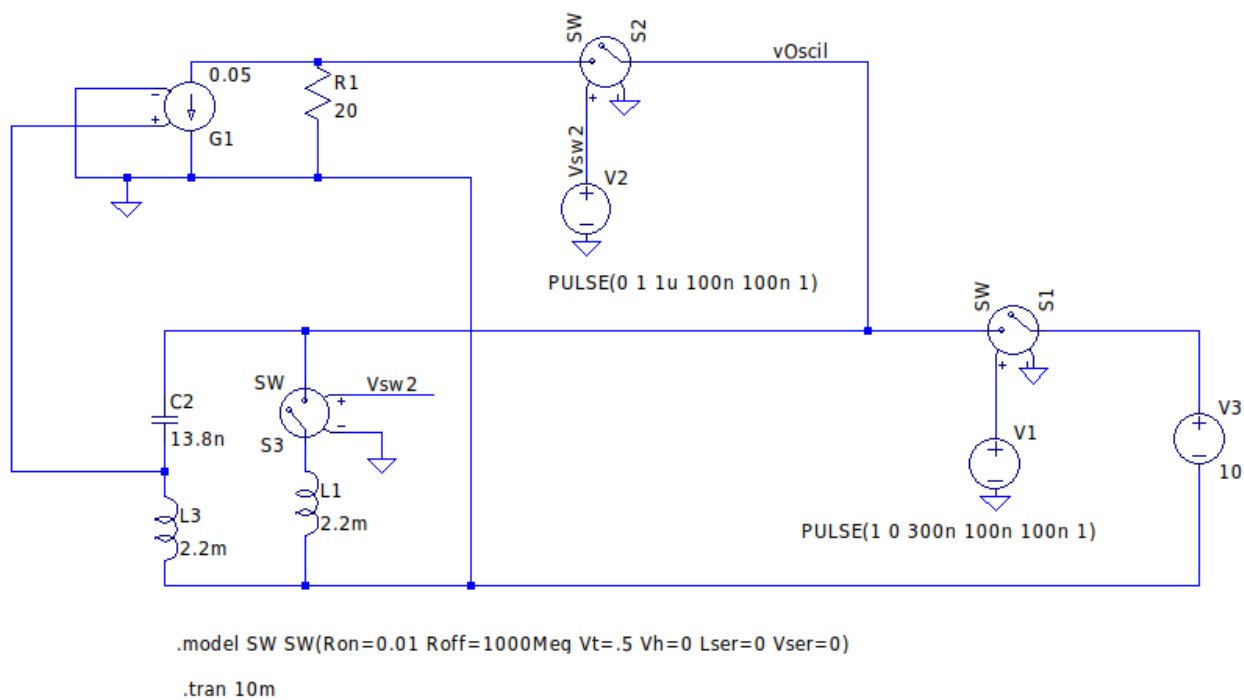


Figura 38 - Hartley ideal LTSpice, arquivo HartleyIdeal.asc.

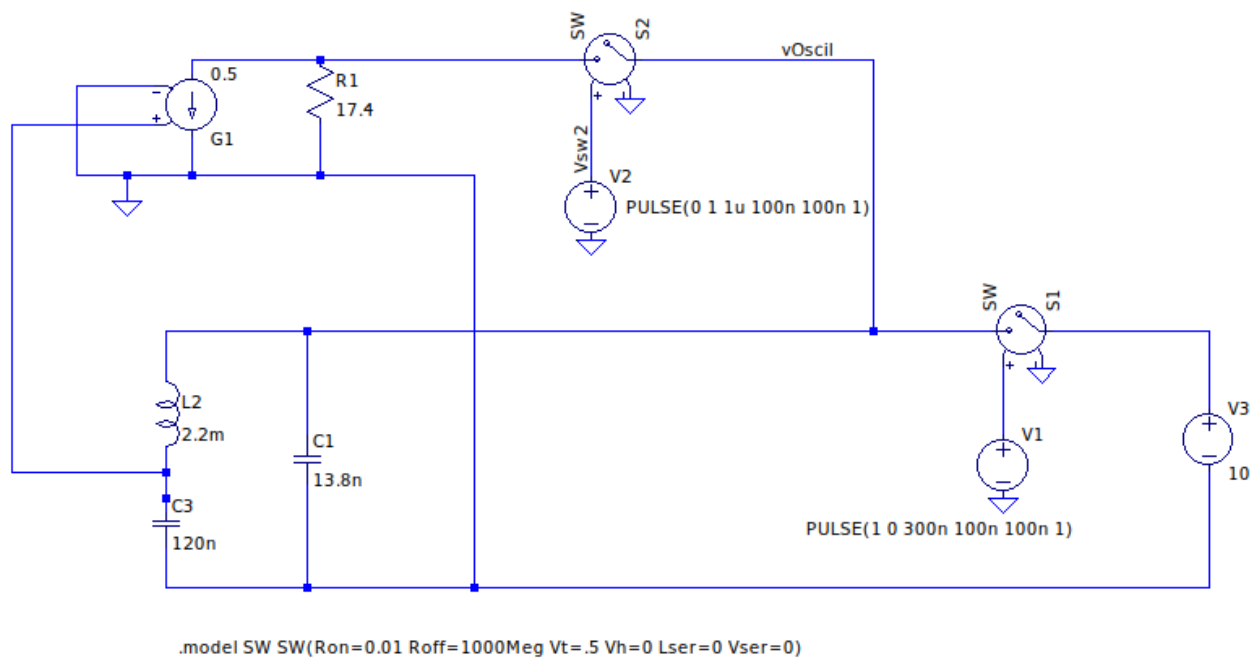
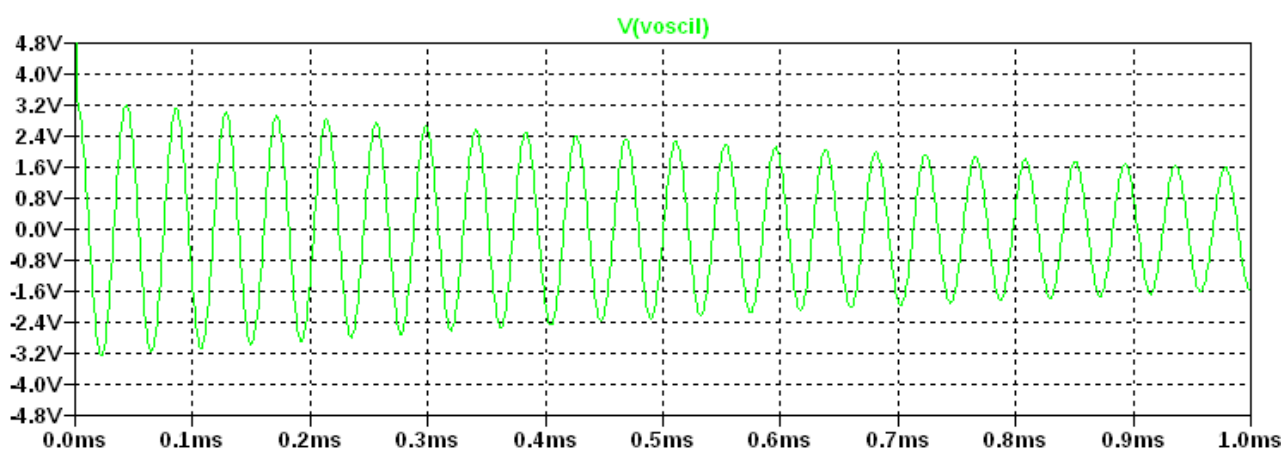
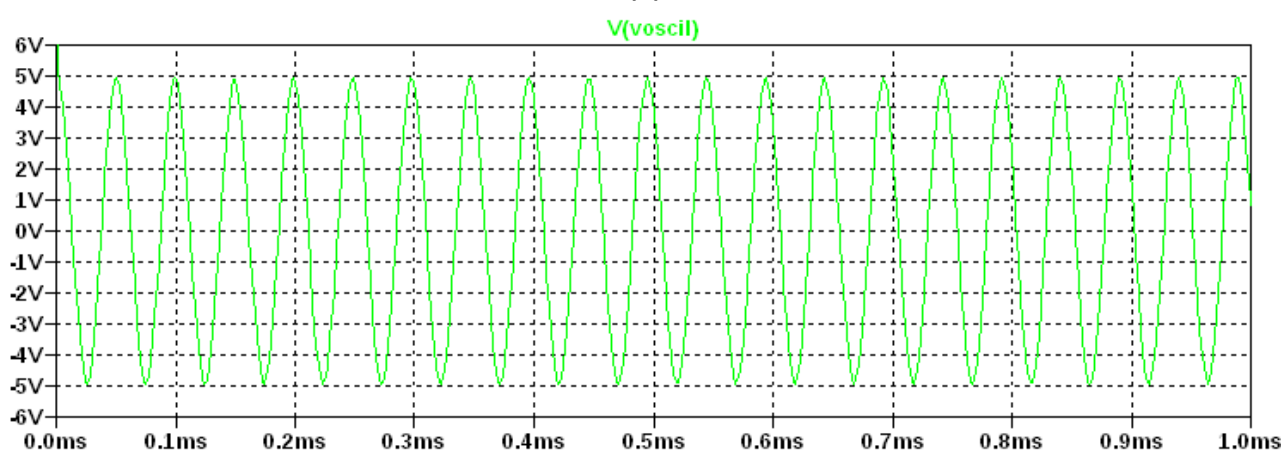


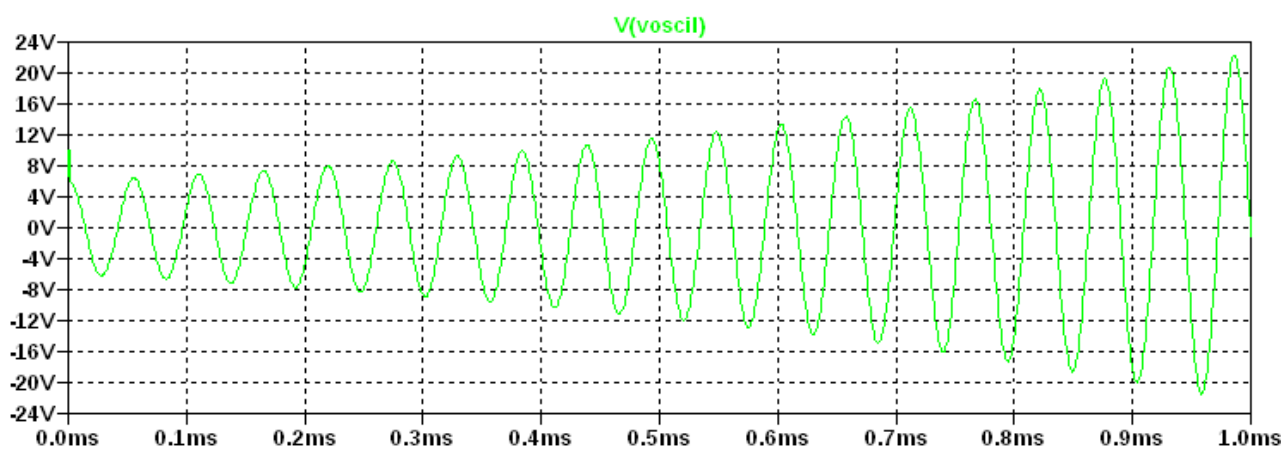
Figura 39 - Colpitts ideal LTSpice, arquivo ColpittsIdeal.asc.



(a)

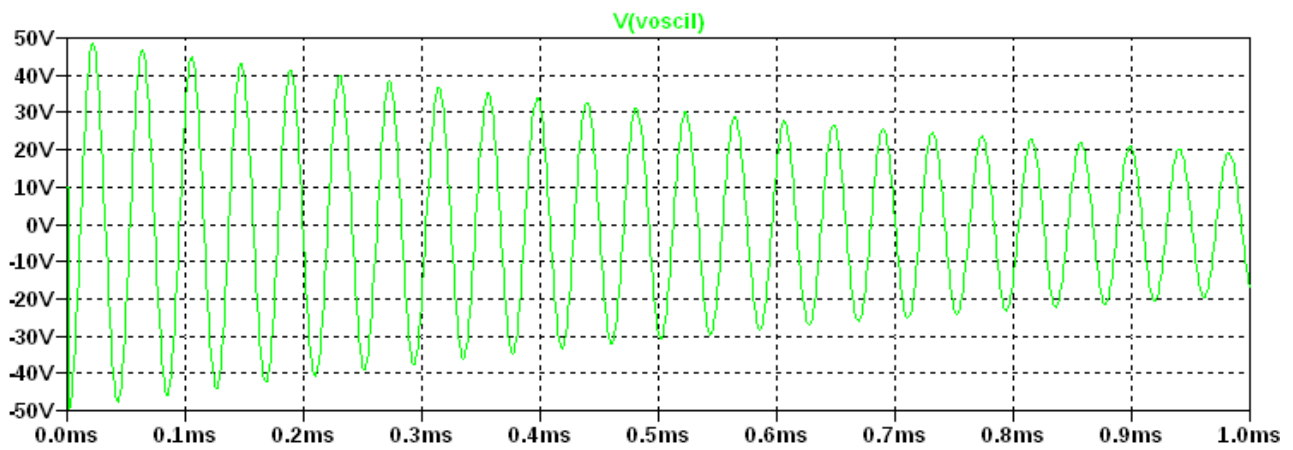


(b)

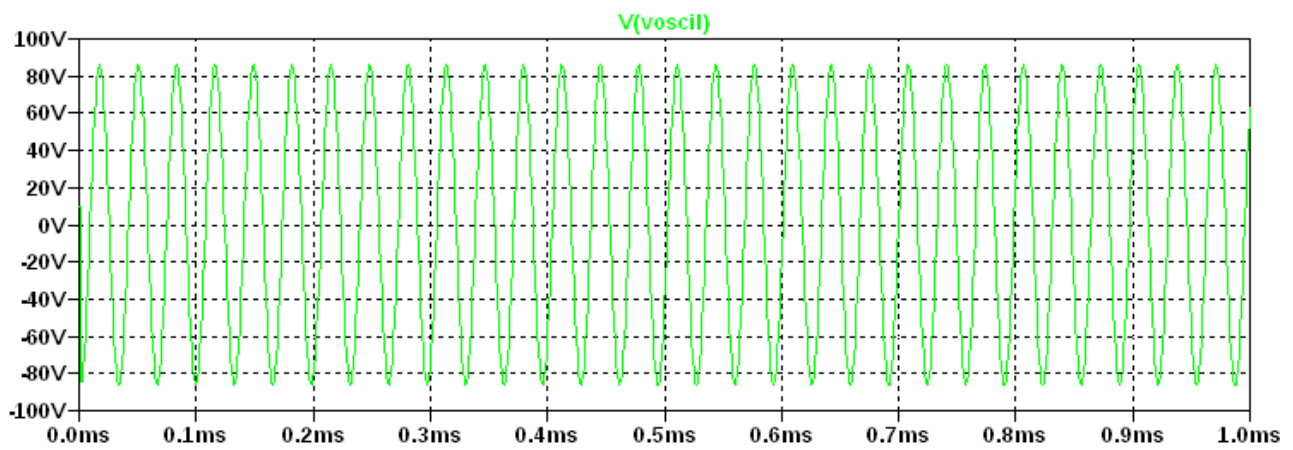


(c)

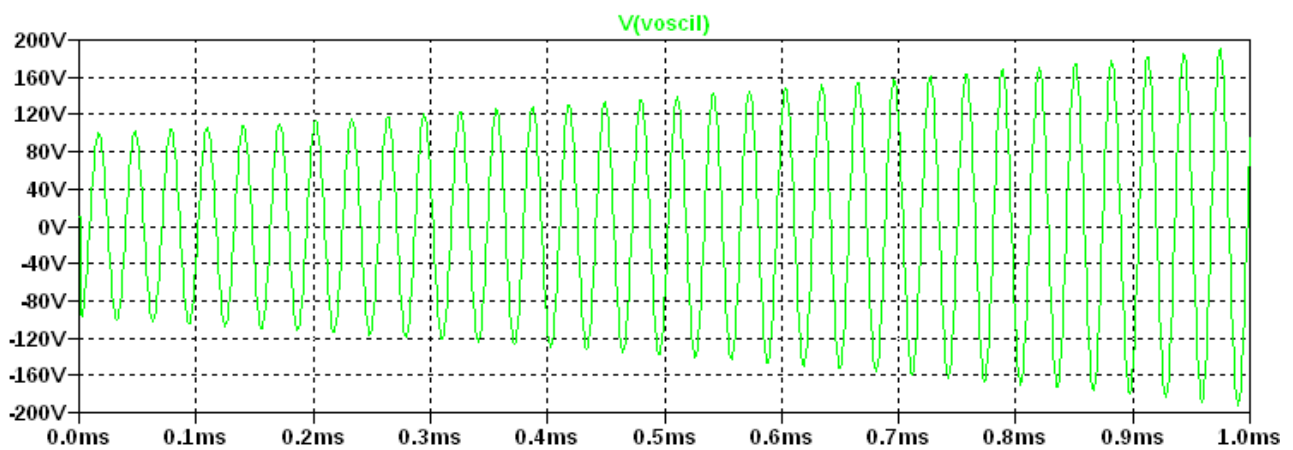
Figura 40 - Hartley ideal (a)  $R1=10\Omega$  (b)  $R1=20\Omega$  (c)  $R1=30\Omega$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 41 - Colpitts ideal (a)  $R1=10\Omega$  (b)  $R1=17.4\Omega$  (c)  $R1=20\Omega$ .

## 5.2.2 – Simulações com Componentes Eletrônicos

Na Figura 42 podemos ver o oscilador Hartley implementado com um amplificador operacional, aqui adotado esta versão em função de sua simplicidade de projeto se comparado com qualquer topologia a base de transistor, como na Figura 35 (a). Neste circuito as fontes de alimentação são degraus de tensão a fim de iniciar a oscilação, uma fonte DC simples pode não iniciar este processo. O operacional utilizado é o LT1001A aqui apresentando bons resultados, Figuras 43 (a) e (b), simulação transiente. Note-se que este circuito utiliza os mesmos componentes do caso ideal, por isso esperada a mesma frequência de oscilação, aqui um pouco abaixo conforme a Figura 43 (b) demonstra. O resistor Rtol (tolerância) serve para ajustar o nível de distorção da forma de onda, sendo ajustado manualmente.

O oscilador Colpitts, Figura 44, também utiliza os componentes do exemplo ideal, portanto com a mesma frequência de oscilação. O operacional, agora, é o LT1022A para garantir oscilação na frequência projetada, uma vez que o LT1001A não alcança esta frequência nesta topologia. Na Figura 45(a) e (b) temos a simulação completa e aproximação com leitura da frequência resultante, respectivamente. O resumo destas simulações encontra-se na Tabela 7.

Nestas versões eletrônicas vemos a questão prática da velocidade do operacional, que pode estar aquém da frequência desejada, funcionando ou em uma frequência menor, ou gerando uma onda triangular, uma vez que não consegue gerar uma senoide.

Tabela 7 - Osciladores eletrônicos: cálculo e simulação.

Componentes	$\frac{R_A X_3}{R_B X_1} > 1$	f <sub>osc</sub> - cálculo	f <sub>osc</sub> - simulação
Hartley L1=2.2mH C2=13.8nF L3=2.2mH	$\frac{R_A L_3}{R_B L_1} = 1.5$ RA=15kΩ RB=10kΩ	20.425 kHz	17.997 kHz
Colpitts C1=13.8nF L2=2.2mF C3=120nF	$\frac{R_A C_3}{R_B C_1} = 1$ RA=87kΩ RB=10kΩ	30.5 kHz	31.667 kHz



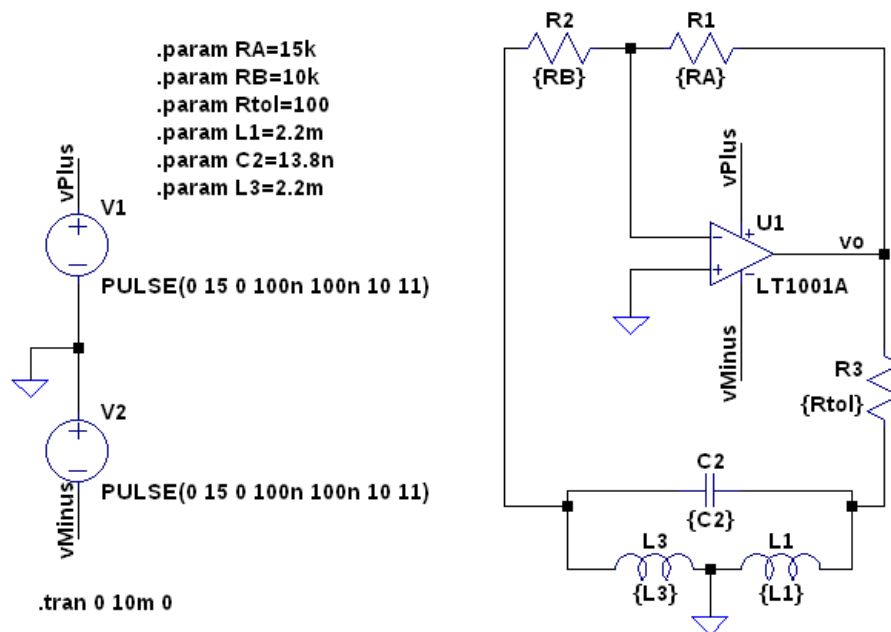
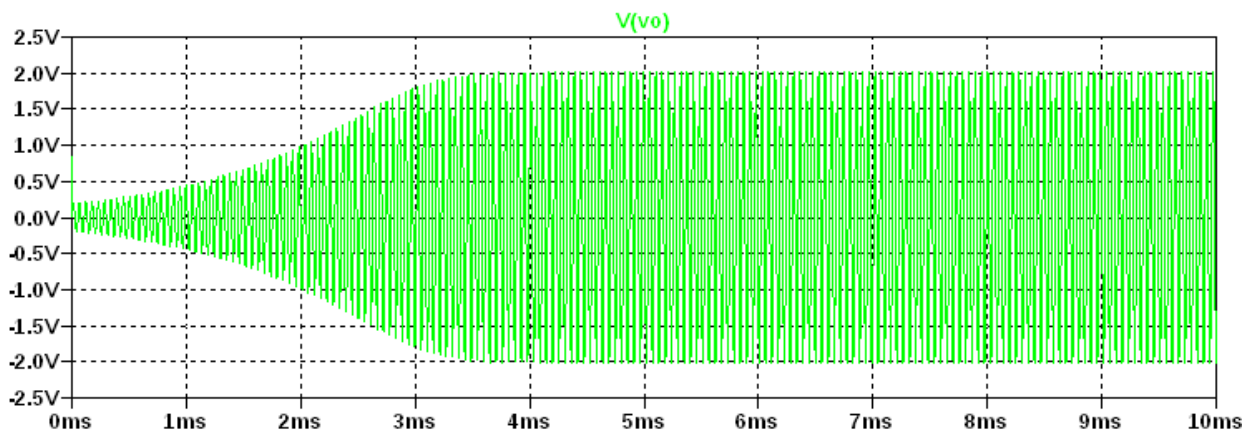
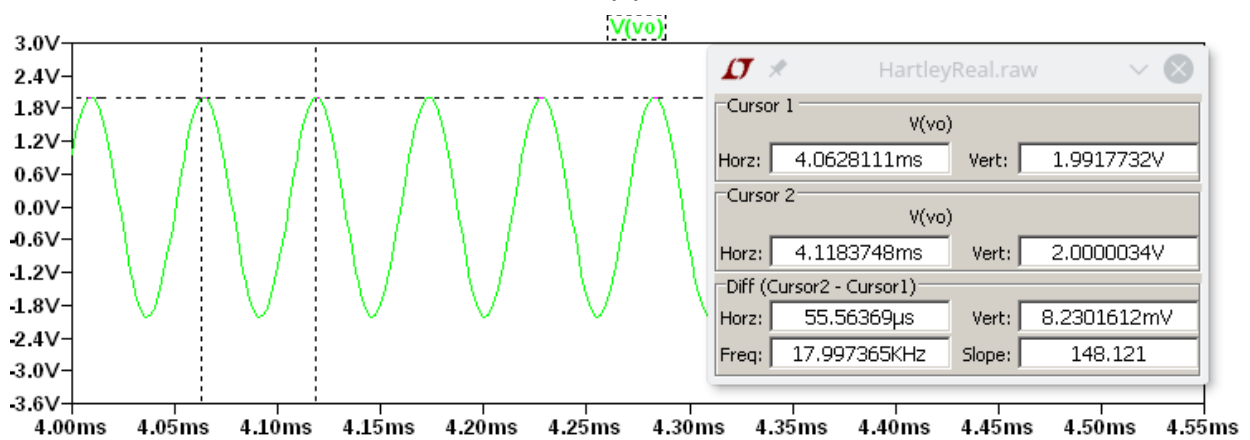


Figura 42 - Hartley eletrônico LTSpice, arquivo HartleyReal.asc.



(a)



(b)

Figura 43 - Hartley eletrônico: (a) simulação completa e (b) zoom da simulação.

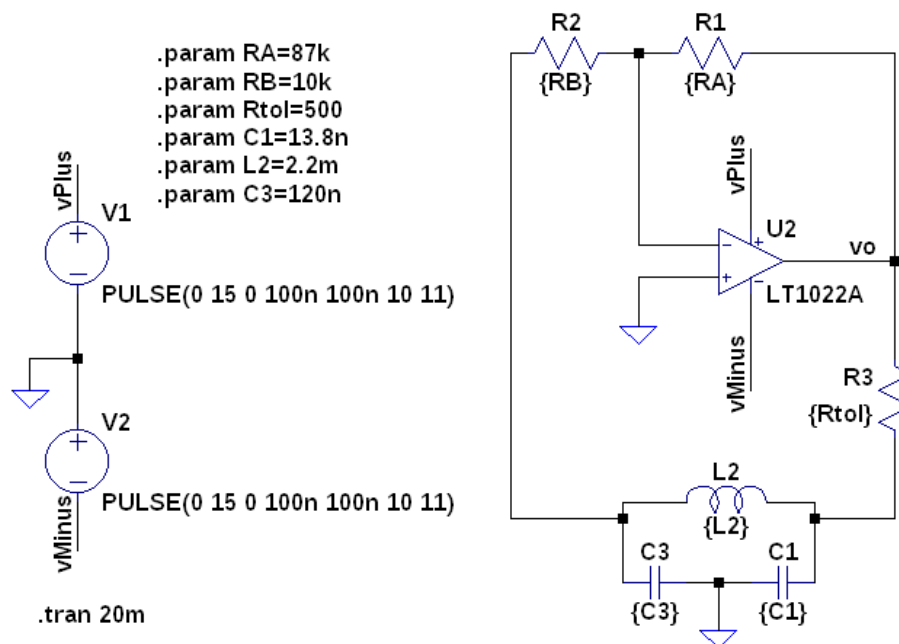


Figura 44 - Colpitts eletrônico LTSpice, arquivo ColpittsReal.asc.

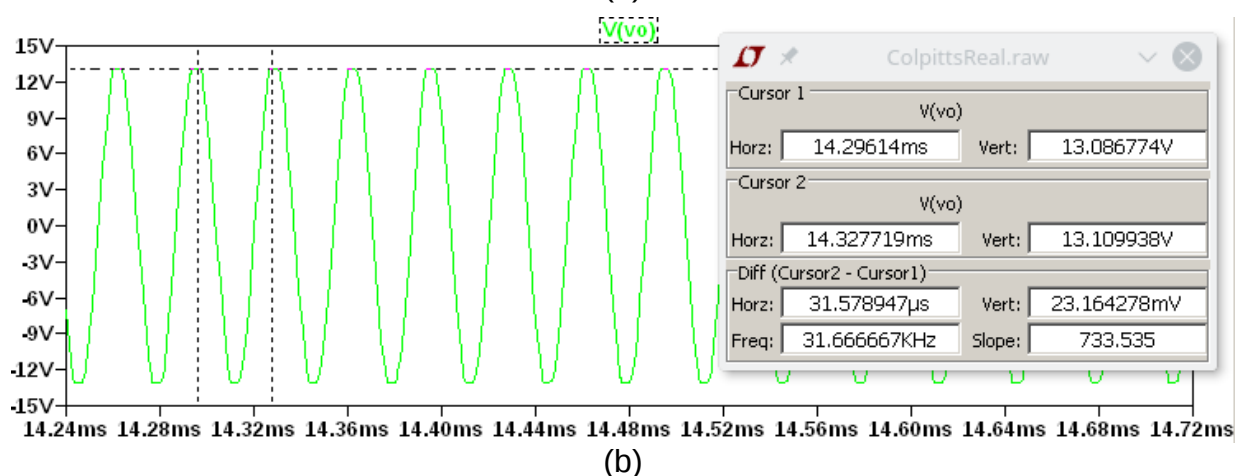
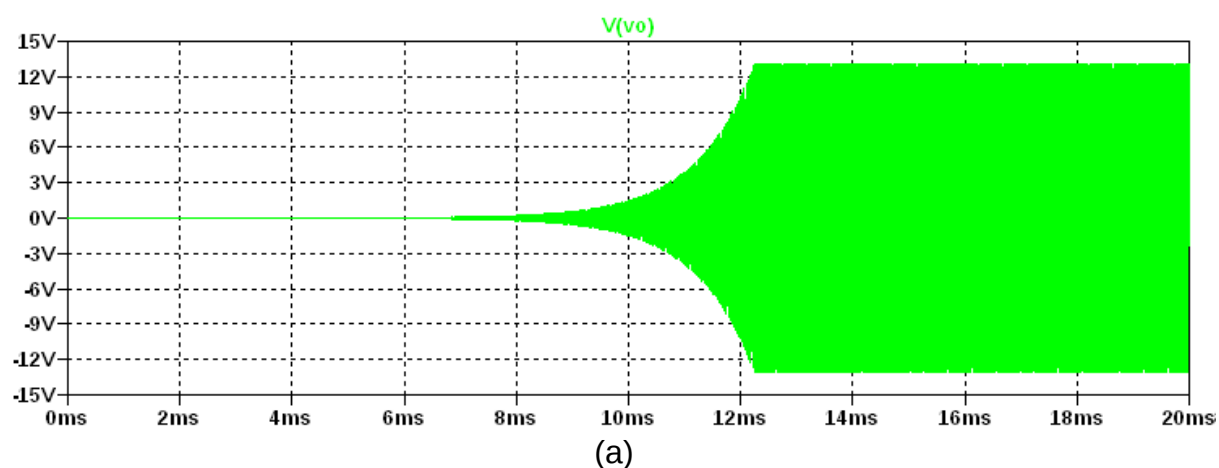


Figura 45 - Colpitts eletrônico: (a) simulação completa e (b) zoom da simulação.

## 5.4 – Redes a Cristal

Cristais piezoelétricos, como cristal de quartzo, exibem propriedades eletromecânicas muito estáveis com tempo e temperatura, além de alta seletividade, ou fator de qualidade  $Q$  muito alto [SEDRA], por isso utilizados quando precisão e estabilidade de frequência de oscilação são necessários. Na Figura 46 vemos sua simbologia, modelos completo e reduzido [Gil\_UERJ\_Oscil], este último utilizado para projeto e simulação. A Figura 47 mostra um oscilador Colpitts com um cristal no lugar do indutor, a análise para projeto tem a mesma sistemática do Colpitts convencional, mas agora empregando o modelo simplificado, Figura 47 (c). As simulações de um circuito a cristal também utilizam o modelo simplificado com os respectivos parâmetros de componentes, resistência, indutância e capacitâncias, do cristal empregado.

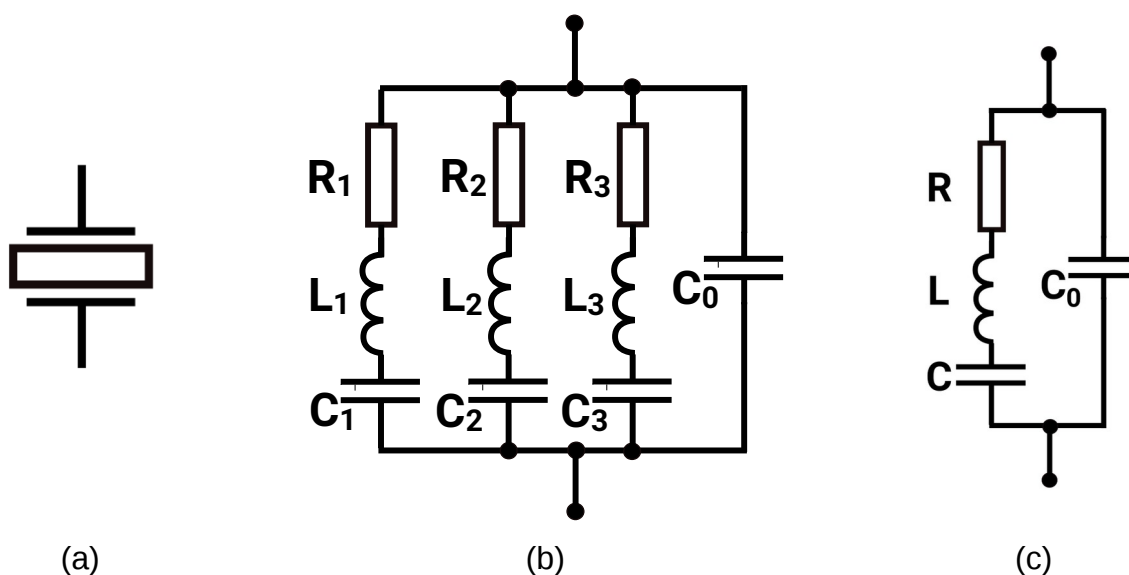


Figura 46 - (a) Simbologia do cristal, (b) modelo completo e (c) modelo reduzido (em torno das frequências de comportamento indutivo) [Gil\_UERJ\_Oscil].

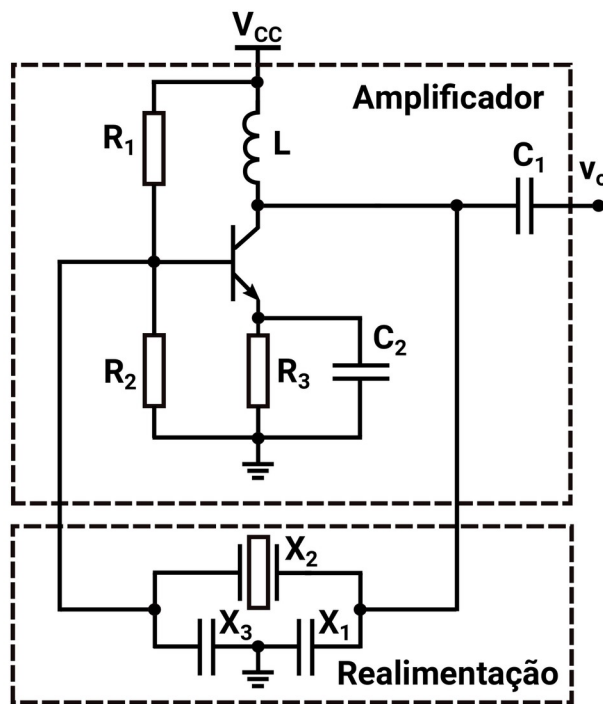


Figura 47 - Oscilador Colpitts a cristal.

## 6 - Oscilador de Relaxação

### 6.1 – Princípio

Oscilador de relaxação ou multivibrador astável, é baseado em carga e descarga de capacitor. O assunto multivibradores, no entanto, é um pré-requisito para este tipo de oscilador.

Multivibradores é uma classe de circuitos usados para implementar sinais de dois estados, níveis lógicos baixo e alto. Podem ser:

**-Monoestável:** É um circuito que ao ser disparado mantém um estado lógico temporário. Por exemplo, circuitos temporizadores. Pode ser comparado ao pêndulo com perdas, que para de oscilar após receber energia.

**-Biestável:** Só muda de estado lógico ao receber um pulso de gatilho, o flip-flop é um caso. Seria um pêndulo que repousa em dois extremos de sua trajetória.

**-Astável:** Muda de estado ao longo do tempo sem qualquer pulso de gatilho. Como exemplo: circuitos de clock. É similar ao pêndulo sem perdas.

Podemos ver na Tabela 8 um resumo com a ilustração de cada um destes multivibradores.

A Figura 48 mostra a implementação de um circuito biestável com amplificador operacional, basicamente o uso de realimentação positiva, o que resulta em uma curva de transferência com histerese, Figura 48 ao lado de cada amplificador conforme a entrada.  $V_{TH}$  e  $V_{TL}$  são as tensões limites, threshold, e  $V+$  e  $V-$  a máxima amplitude de saída do operacional. Circuito também chamado de Schmitt Trigger. Para o circuito inversor Figura 48 (a), a tensão de threshold  $V_T$  é dada pelo divisor resistivo composto por  $R_A$  e  $R_B$ , Eq.75, tensão que varia conforme  $V_O$  muda entre alto e baixo, por isso a histerese no gráfico de transferência. Para o Schmitt Trigger não inversor, a tensão de transição ocorre quando  $v_t$  atinge  $v_t=0V$  do terra virtual, Eq.78 resultado das Eqs.76 e 77, das tensões em  $R_A$  e  $R_B$ .

O oscilador, o astável, aqui é composto por um biestável com uma rede realimentação, ou seja, ao ser ligado assume um de seus estados máximos carregando o capacitor  $C$ , tal que ao atingir a tensão de disparo, muda de estado iniciando a descarga até a nova troca de estado, e assim sucessivamente. Vemos na Figura 49 o circuito completo com os blocos biestável e realimentação do astável devidamente destacados, bem como as formas de onda na entrada e saída do operacional. A frequência de oscilação é determinada pelas Eqs.79 e 91.

Temporizadores integrados também implementam as funções de multivibradores supracitadas, um deles é o circuito integrado 555, capaz de operar como monostável, biestável e astável.

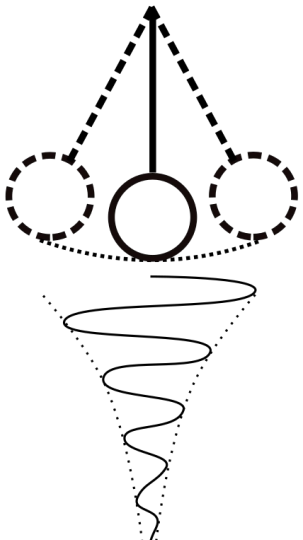
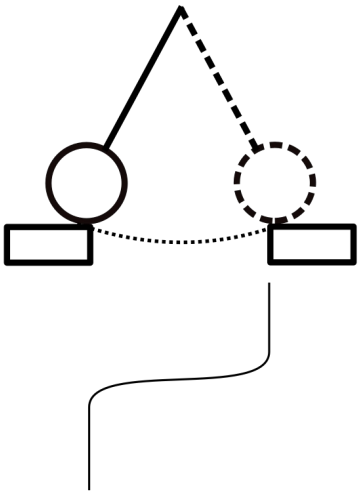
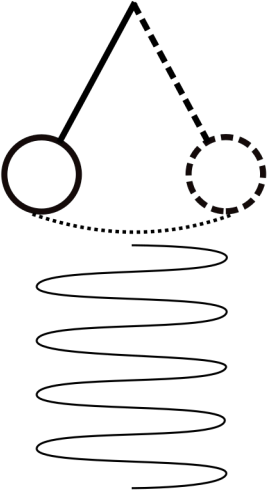
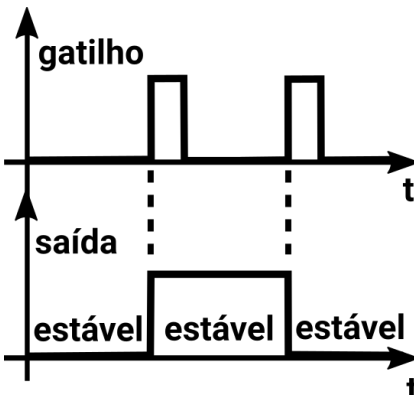
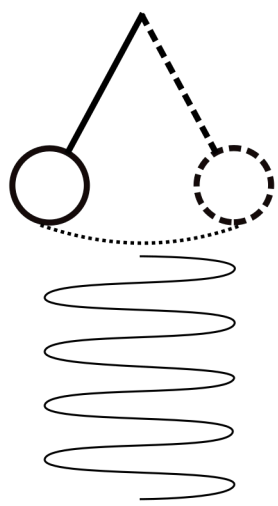
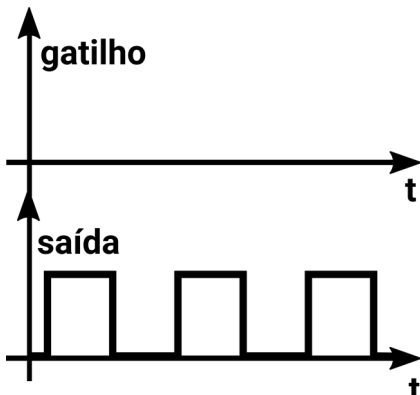
$$V_T = \frac{R_B}{R_A + R_B} \quad (\text{Eq.75})$$

$$I = \frac{v_o}{R_A} \quad (\text{Eq.76})$$

$$v_t = R_B I \quad (\text{Eq.77})$$

$$v_t = v_o \frac{R_B}{R_A} \quad (\text{Eq.78})$$

Tabela 8 - Tipos de multivibradores.

Multivibradores		
Monoestável	Biestável	Astável
 	 	 

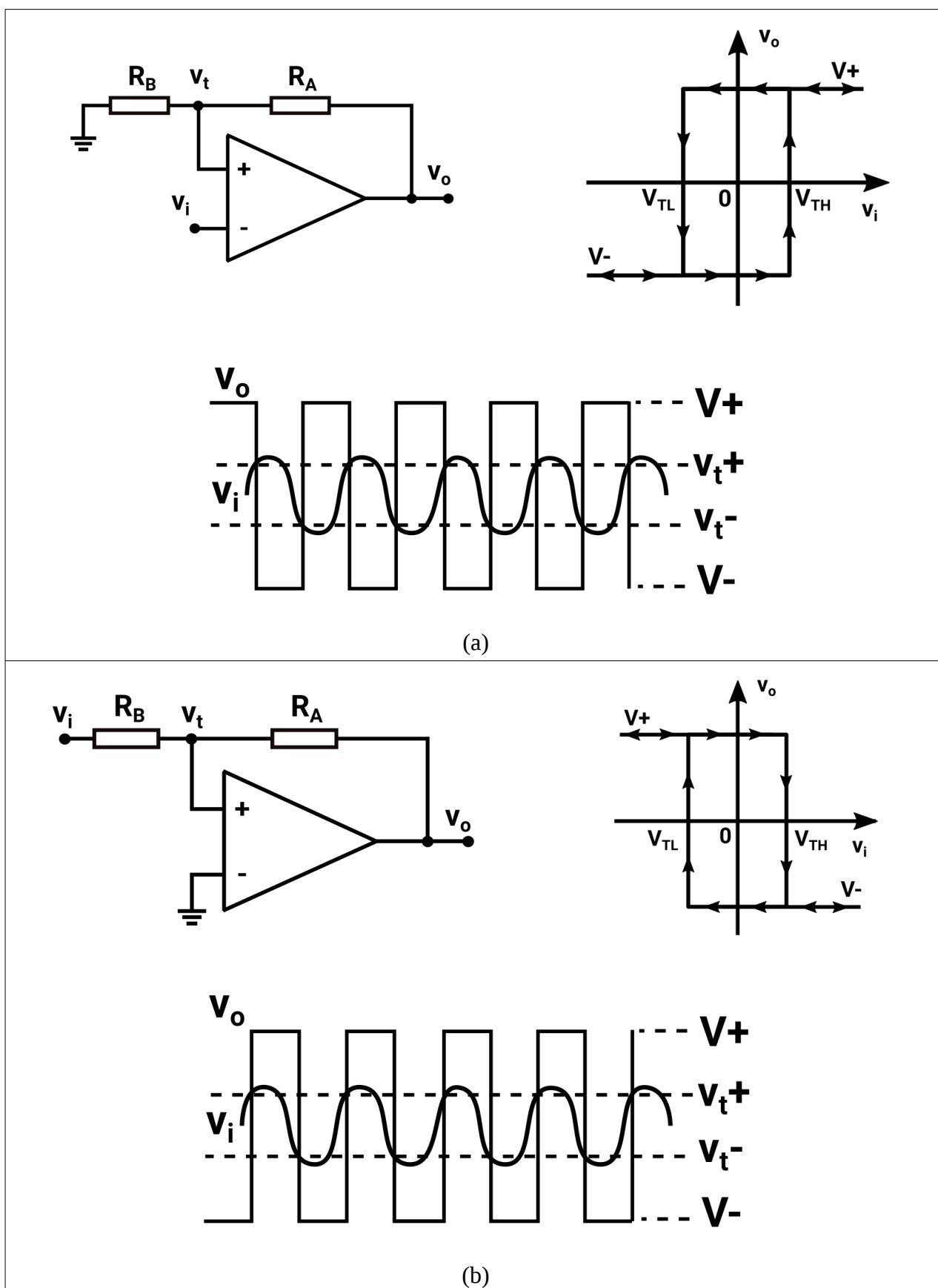


Figura 48 - Amplificador operacional como biestável e sua função de transferência:  
(a) não inversor e (b) inversor.

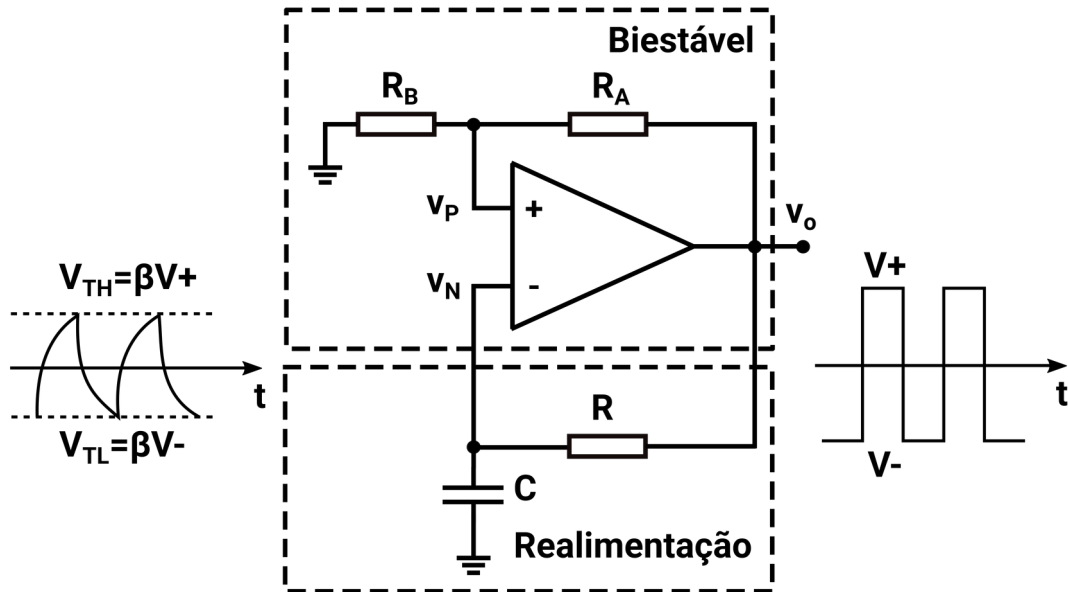


Figura 49 - Oscilador de onda quadrada baseado em multivibrador astável.

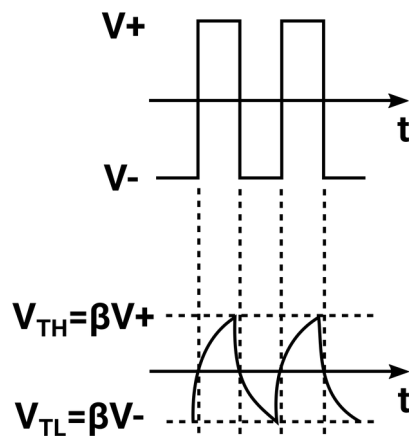


Figura 50 - Formas de onda na saída e na entrada inversora do operacional.

O divisor resistivo formado por  $R_A$  e  $R_B$  definem a tensão  $v_P$  que será comparada com  $v_N$ .

$$\beta = \frac{R_B}{R_A + R_B} \quad (\text{Eq.79})$$

Desenvolvemos as expressões de carga, Eq.80, e descarga, Eq.81 que seguem a Figura 50 [SEDRA], a partir da Eq.114, apêndice.



$$v_n = (V+) - ((V+) - \beta(V-))e^{-t/RC} \quad (\text{Eq.80})$$

$$v_n = (V-) - ((V-) - \beta(V+))e^{-t/RC} \quad (\text{Eq.81})$$

Desenvolvendo com os intervalos de tempo T1 para carga, e T2 para descarga:

$$\frac{(V+) - v_n}{(V+) - \beta(V-)} = e^{-T1/RC} \quad (\text{Eq.82})$$

$$\frac{(V-) - v_n}{(V-) - \beta(V+)} = e^{-T2/RC} \quad (\text{Eq.83})$$

Para a carga  $v_n = \beta V+$  e descarga  $v_n = \beta V-$ :

$$T1 = -RC \ln \frac{(V+) - \beta(V+)}{(V+) - \beta(V-)} \quad (\text{Eq.84})$$

$$T2 = -RC \ln \frac{(V-) - \beta(V-)}{(V-) - \beta(V+)} \quad (\text{Eq.85})$$

Dividindo pelas tensões de alimentação  $V+$  e  $V-$ , bem como acertando os sinais dos logaritmos:

$$T1 = RC \ln \frac{1 - \beta(V+/V-)}{1 - \beta} \quad (\text{Eq.86})$$

$$T2 = RC \ln \frac{1 - \beta(V-/V+)}{1 - \beta} \quad (\text{Eq.87})$$

Com alimentação simétrica  $V+ = -(V-)$  temos:

$$T1 = RC \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (\text{Eq.88})$$

$$T2 = RC \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (\text{Eq.89})$$

Para o intervalo completo  $T = T1 + T2$ :

$$T = 2RC \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (\text{Eq.90})$$

A frequência de oscilação simplesmente por:

$$f_{osc} = \frac{1}{2RC \ln \left[ \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right]} \quad (\text{Eq.91})$$

## 6.2 – Exemplo de Simulação

A Figura 51 exibe o oscilador de relaxação em simulador, com as respectivas formas de onda na Figura 52 em simulação transiente. Um resumo do cálculo e simulação se encontra na Tabela 9, com as diferenças devido a limitações do operacional.

Tabela 9 - Oscilador de onda quadrada: cálculo e simulação.

	Cálculo	Simulação
$f_{osc}$	274.24 Hz	311.67 Hz

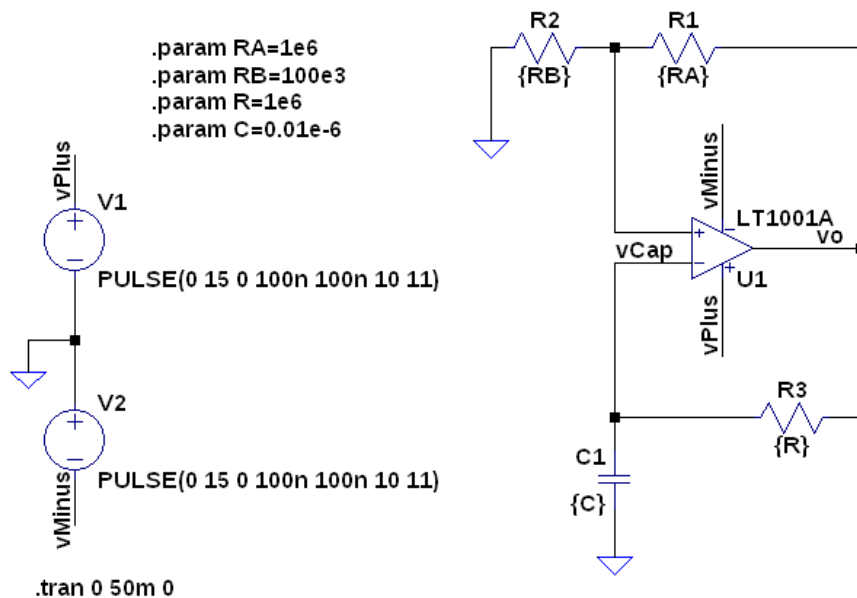


Figura 51 - Oscilador de onda quadrada LTSpice, arquivo SquareWaveOscillator.asc.

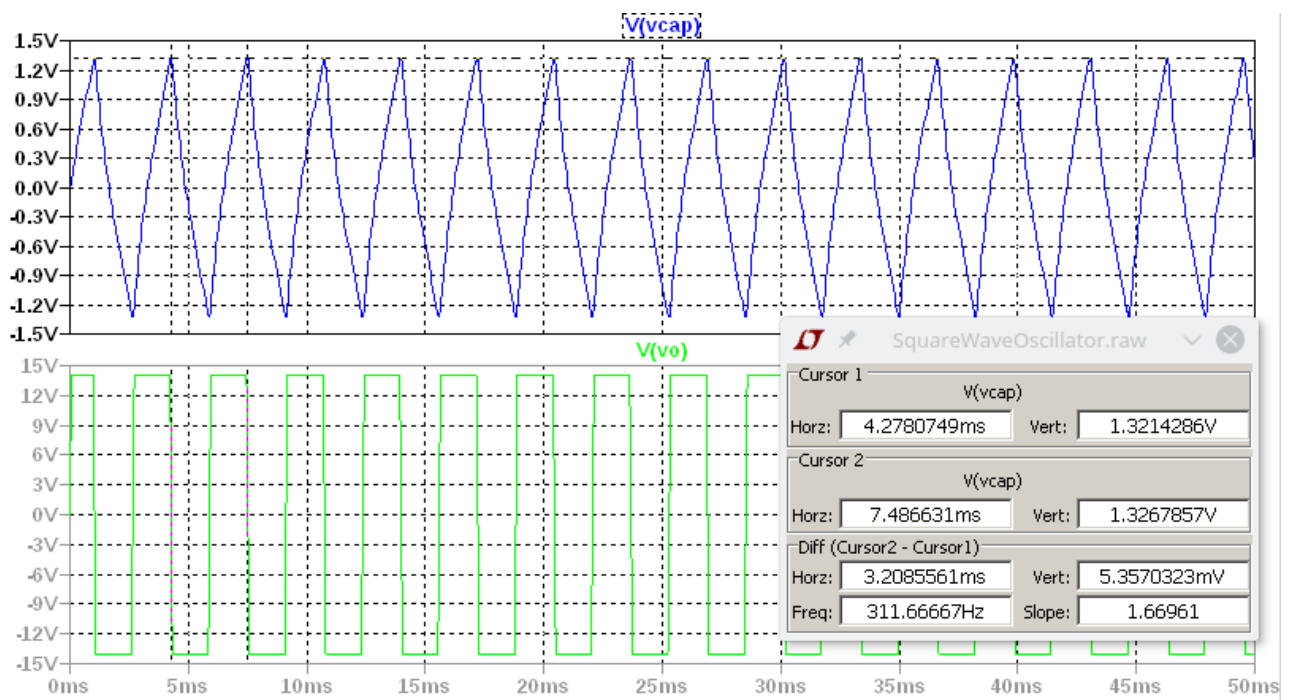


Figura 52 - Oscilador de onda quadrada.

## Apêndice

Nesta seção encontramos a forma geral de resposta ao degrau unitário, Figura 53, para sistemas de primeira ordem. Dado um sistema com entrada  $x(t)$ , saída  $y(t)$  e função de transferência  $H(s)$  [UnitStep].

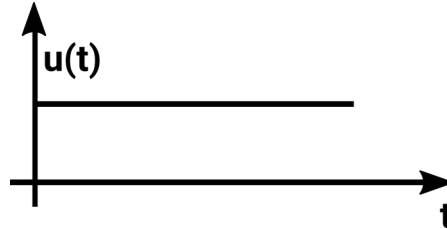


Figura 53 - Degrau unitário.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (\text{Eq.92})$$

A saída com condições iniciais zero (ou seja, a saída do estado zero) é simplesmente dada por:

$$Y(s) = X(s) H(s) \quad (\text{Eq.93})$$

Então a resposta ao degrau unitário,  $Y_y(s)$ , é:

$$Y_y(s) = \frac{1}{s} H(s) \quad (\text{Eq.94})$$

Determinamos duas características da resposta ao degrau unitário, os valores inicial e final, da resposta ao degrau invocando os teoremas do valor inicial, Eq.95, e final Eq.96.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (\text{Eq.95})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (\text{Eq.96})$$

Portanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} y_y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY_y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s) \quad (\text{Eq.97})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) \quad (\text{Eq.98})$$

Simplificando

$$y_y(0)=H(\infty) \text{ (Eq.99)}$$

$$y_y(\infty)=H(0) \text{ (Eq.100)}$$

Aplicando estes conceitos em um sistema de primeira ordem:

$$H(s)=\frac{bs+c}{s+a} \text{ (Eq.101)}$$

Neste as variáveis a, b e c são números reais arbitrários e b ou c (mas não ambos) podem ser zero. Para encontrar a resposta ao degrau unitário, multiplicamos H(s) por 1/s:

$$Y_y(s)=\frac{1}{s}H(s)=\frac{1}{s}\frac{bs+c}{s+a} \text{ (Eq.102)}$$

Separando em frações parciais e desenvolvendo

$$Y_y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+a} \text{ (Eq.103)}$$

$$Y_y(s)=\frac{As+As+Bs}{s(s+a)} \text{ (Eq.104)}$$

$$Aa=c \text{ (Eq.105)}$$

$$s(A+B)=sb \text{ (Eq.106)}$$

$$A=\frac{c}{a} \text{ (Eq.107)}$$

$$B=b-A=b-\frac{c}{a} \text{ (Eq.108)}$$

$$Y_y(s)=\frac{c}{a}\frac{1}{s}+\left(b-\frac{c}{a}\right)\frac{1}{s+a} \text{ (Eq.109)}$$

$$y_y(t)=\frac{c}{a}+\left(b-\frac{c}{a}\right)e^{at}, t>0 \text{ (Eq.110)}$$

Observando algumas características desta equação chegamos a:

$$y_y(0)=H(\infty)=b \quad (\text{Eq.111})$$

$$y_y(\infty)=H(0)=\frac{c}{a} \quad (\text{Eq.112})$$

$$\tau=\frac{1}{a} \quad (\text{Eq.113})$$

Assim, podemos escrever a forma geral da resposta ao degrau unitário como:

$$y_y(t)=y_y(\infty)+(y_y(0)-y_y(\infty))e^{-t/\tau} \quad (\text{Eq.114})$$

$$y_y(t)=H(0)+(H(\infty)-H(0))e^{-t/\tau} \quad (\text{Eq.115})$$

## Referências

- [Asad\_Oscil] S. M. Asad, Oscillators.  
<http://faculty.mu.edu.sa/public/uploads/1400394697.1447Ch16%20-%20Oscillators.pdf>
- [Colpitts] <http://www.electronics-tutorials.ws/oscillator/colpitts.html>
- [Gil\_UERJ\_Oscil] G. Pinheiro, Osciladores- slides, UERJ, FEN, DETEL.  
<http://www.lee.eng.uerj.br/~gil/circom/Osciladores.pdf>
- [Wien] <http://vlabs.iitb.ac.in/vlab/electrical/exp7/Theory.pdf>
- [WikiClapp] [https://en.wikipedia.org/wiki/Clapp\\_oscillator](https://en.wikipedia.org/wiki/Clapp_oscillator)
- [SEDRA] SEDRA, S.; SMITH, K.. Microeletronics. 3ª. Edição, Saunders College Publishing.
- [UnitStep] <https://lpsa.swarthmore.edu/Transient/TransInputs/TransStep.html>