Preliminares matemáticos

Facultad de Ciencias de la Electrónica

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica

Dr. Fernando Reyes Cortés

Robótica

ftp://ece.buap.mx/pub/profesor/FernandoReyes/Robotica/

Primavera 2020

Parte IX

Análisis de estabilidad por Lyapunov

Contenido

Péndulo

Considere como planta de estudio a un péndulo que se mueve en un plano vertical $x - y$ bajo la acción de la gravedad como se muestra en la figura 1. El péndulo consiste de un servomotor y una barra metálica (por ejemplo de aluminio) acoplada mecánicamente al rotor del servomotor. El movimiento del péndulo se realiza sobre un plano vertical xy, el eje z es perpendicular al plano de la hoja y la posición de casa $q_1 = 0$ es sobre el eje y_-; movimiento positivos corresponden al sentido en contra de las manecillas del reloj y para movimientos negativos se determinan en el sentido de las manecillas del reloj.

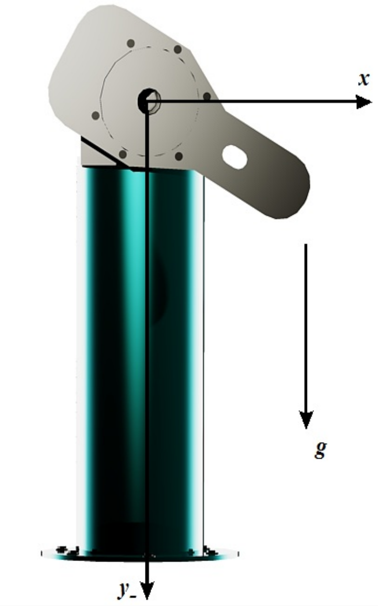

Figura 1: Péndulo.

Péndulo

El modelo dinámico del péndulo está dado por la siguiente ecuación:

$$\tau = I\ddot{q} + mgl_c \operatorname{sen}(q) + b\dot{q}$$

donde:

- $I \in \mathbb{R}_+$ es el momento de inercia del péndulo.
- $m \in \mathbb{R}_+$ es la masa (del servomotor más la barra metálica).
- g es la constante de aceleración gravitacional $g = 9.81$ m/seg^2.
- l_c es el centro de masa.
- b es el coeficiente de fricción viscosa.
- $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}$ son la posición, velocidad y aceleración articular del péndulo, respectivamente.
- τ representa la entrada o energía aplicada al servomotor.

En el modelo dinámico del péndulo sólo fue considerado el fenómeno de fricción viscosa, mientras que la fricción de Coulomb y estática se omitieron.

$$
\begin{aligned}
\tau &= I\ddot{q} + b\dot{q} + mgl_c \operatorname{sen}(q) \\
\tau &= k_p\tilde{q} - k_v\dot{q} + mgl_c \operatorname{sen}(q) \\
\tilde{q} &= q_d - q(t)
\end{aligned}
$$

La ecuación en lazo cerrado:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{q}\\ \dot{q}\end{bmatrix}}_{\dot{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix}-\dot{q}\\ \frac{1}{I}\left[k_p\tilde{q} - k_v\dot{q} - b\dot{q}\right]\end{bmatrix}}_{f(x)} \\
x &= \begin{bmatrix}\tilde{q}\\ \dot{q}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(\tilde{q},\dot{q}) &= \frac{1}{2}I\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\tilde{q}^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\tilde{q}\\ \dot{q}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}k_p & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{q}\\ \dot{q}\end{bmatrix} \\
\dot{V}(\tilde{q},\dot{q}) &= \begin{bmatrix}\tilde{q}\\ \dot{q}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}k_p & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dot{q}\\ \ddot{q}\end{bmatrix} \\
&= I\dot{q}\ddot{q} - k_p\tilde{q}\dot{q} = \cancel{I}\dot{q}\frac{1}{\cancel{I}}\left(k_p\tilde{q} - (b+k_v)\dot{q}\right) - k_p\tilde{q}\dot{q} \\
&= \cancel{\dot{q}k_p\tilde{q}} - (b+k_v)\dot{q}^2 - \cancel{k_p\tilde{q}\dot{q}} \\
&= -(b+k_v)\dot{q}^2 \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{q} = 0 \wedge \tilde{q} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Ejercicios en clase

Análisis de estabilidad: ejemplos adicionales.

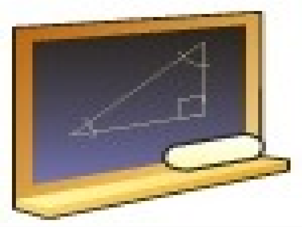

Figura 2: Desarrollo en clase.