Facultad de Ciencias de la Electrónica

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica

Dr. Fernando Reyes Cortés

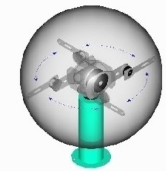
Robótica

ftp://ece.buap.mx/pub/profesor/FernandoReyes/Robotica/

Primavera 2020

Parte IV

Preliminares Matemáticos



Contenido

Sistema dinámico

Un sistema dinámico autónomo de primer orden está dado por:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{x}$ es la variable de estado, la cual proporciona información interna sobre la evolución de los estados internos del sistema; por notación $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}$.

- La naturaleza autónoma significa que el tiempo se encuentra implícito, ya que no aparece de manera explícita en la ecuación diferencial ordinaria de primer orden.
- $\boldsymbol{x}$ es una función continua del tiempo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$.
- La función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ es continua Lipschitz sobre $\mathbb{R}^n$, continua para toda condición inicial $\boldsymbol{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y continuamente diferenciable en t.
- Existe la solución $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden (1), es única, continua en t y diferenciable con respecto al tiempo.
- $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$
- $\boldsymbol{f}$ es un mapa vectorial $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- La ecuación diferencial ordinaria de primer orden (1) representa sistemas dinámicos lineales y no lineales.
- La linealidad y no linealidad es con respecto a la variable de estado $\boldsymbol{x}$.

Robótica FCE

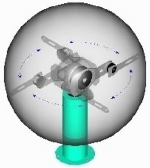
BUAP

Función Lipschitz

- Considérese el sistema dinámico $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}_+$. Si $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \forall t \geq 0$, entonces el sistema se llama ***sistema dinámico autónomo invariante en el tiempo.***
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$, entonces $\boldsymbol{f}$ es ***uniformemente continua*** en $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$, si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\| < \epsilon$, $\forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{D}$, satisface $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta$. Si $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua en $\mathcal{D}$, entonces $\boldsymbol{f}$ es una función continua para cada $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$. Lo contrario de esta afirmación, no necesariamente es verdadero.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, entonces $\boldsymbol{f}$ es una *función continua Lipschitz* en $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}$, si existe una constante *Lipschitz* $l = l(x_0) > 0$ y una vecindad $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ de $\boldsymbol{x}_0$ tal que:

  $$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\| \leq l\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

  $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{N}$.
- $\boldsymbol{f}$ es una***función continua Lipschitz globalmente*** si $\boldsymbol{f}$ es una función *uniformemente Lipschitz* sobre $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$.
- Se tiene un ***conjunto atractor*** $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ del sistema dinámico $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ si existe una vecindad $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ tal que $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{N}$, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{N}$ $\forall t \geq 0$ y $\boldsymbol{x}(t) \to \mathcal{M}$ conforme el tiempo tiende a infinito $t \to \infty$. El ***dominio de atracción*** $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{D}$ del sistema dinámico $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ está dado por $\mathcal{M}_0 = \{\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D} : \text{si } \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}\}$.



Robótica FCE

BUAP

Ejemplo 1.1:

Sistemas dinámicos lineales:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -ax \\
\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.2:

Sistemas dinámicos no lineales:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -ax^3 \\
\dot{\boldsymbol{x}} &= \Delta\, \mathrm{sen}(\boldsymbol{x}) \\
\dot{\boldsymbol{x}} &= \Gamma \cos(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.3:

Sistemas dinámicos no autónomos:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -ax\, \mathrm{sen}(t) \\
\dot{x} &= xe^{-at} \\
\dot{\boldsymbol{x}} &= A(t)\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

Robótica FCE

BUAP

Ejemplo 1.4:

La existencia del punto de equilibrio en sistemas dinámicos lineales se pueden dar dos tipos de posibilidades:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax \\ \dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

- $\exists$ un solo punto de equilibrio (único) si $a \neq 0$ y A^{-1} $\exists$, respectivamente.
- $\exists$ un número infinito de puntos de equilibrio si $a = 0$ y A^{-1} $\nexists$, respectivamente.

Ejemplo 1.5:

La existencia del punto de equilibrio para sistemas dinámicos no lineales tiene más opciones:

- Único punto de equilibrio: $\dot{x} = x^3$.
- Número infinito de puntos de equilibrio: $\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$, $x = \pm n\pi \quad \exists \, \#\infty \; p.e.$
- Número finito de puntos de equilibrio: $\dot{x} = x\,(x-1)$, $x = 0, x = 1$.
- No tiene puntos de equilibrio: $\dot{x} = e^x$.

Robótica FCE
BUAP

Sistemas lineales

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta u}{s^2 y + \alpha_1 s y + \alpha_0 y} \iff \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta u \iff \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B u \\ y = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{z}} = \Lambda \boldsymbol{z} + \Gamma u \\ y = \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{z} \end{cases}$$

Variable física y
Variable fase $\boldsymbol{x}$
Variable canónica $\boldsymbol{z}$

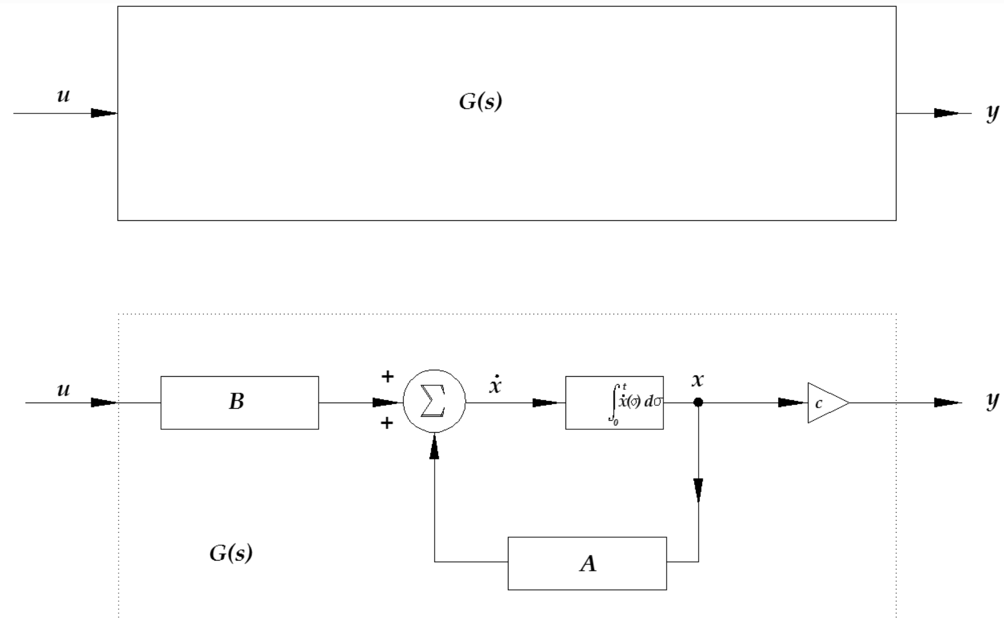


Figura 1: Control clásico $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$ vs control moderno $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + Bu$ $y = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$.

Robótica FCE
BUAP

Sistemas lineales escalares

Función de transferencia es la relación de entrada a salida de un sistema lineal con condiciones iniciales cero.

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{u(s)} &= c\,\frac{b}{s+a} \\ \dot{x}(t) &= -ax(t)+bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned}$$

$s=\frac{d}{dt}$; $\mathcal{L}[\dot{x}(t)]=sx(s)$, $y(t)=x(t)$, $y(s)=x(s)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ax(t)+bu(t) \\ \mathcal{L}[\dot{x}(t)] &= \mathcal{L}[-ax(t)+bu(t)] \Rightarrow \quad \mathcal{L}[\dot{x}(t)]=sx(s) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}[-ax(t)+bu(t)]=\mathcal{L}[-ax(t)]+\mathcal{L}[bu(t)] \\ sx(s) &= -ax(s)+bu(s) \\ x(s)(s+a) &= bu(s) \\ y(s) &= cx(s)=c\frac{b}{s+a}u(s) \\ \frac{y(s)}{u(s)} &= c\frac{b}{s+a}=c\frac{b}{a}\,\frac{1}{\frac{1}{a}s+1} \end{aligned}$$

En el dominio de la frecuencia $s=jw$, a frecuencia de corte, $\frac{b}{a}$ es la ganancia del filtro.

Robótica FCE

BUAP

Sistemas lineales vectoriales

Sistema lineal (modelo dinámico)

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + Bu\\
y &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

donde $\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c}^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$; $y, u \in \mathbb{R}$; $s = \frac{d}{dt}$ (la función de transferencia considera condiciones iniciales cero):

Función de transferencia $\frac{y(s)}{u(s)}$ (condiciones iniciales cero).

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A\boldsymbol{x}(t) + Bu(t)\\
\mathcal{L}[\dot{\boldsymbol{x}}(t)] &= \mathcal{L}[A\boldsymbol{x}(t) + Bu(t)] \Rightarrow \mathcal{L}[A\boldsymbol{x}(t) + Bu(t)] = \mathcal{L}[A\boldsymbol{x}(t)] + \mathcal{L}[Bu(t)]; \qquad \mathcal{L}[\dot{\boldsymbol{x}}(t)] = s\boldsymbol{x}(s).\\
\left[sI - A\right]\boldsymbol{x}(s) &= Bu(s)\\
\boldsymbol{x}(s) &= [sI - A]^{-1}Bu(s)\\
y(s) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{c}^T[sI - A]^{-1}Bu(s)\\
\frac{y(s)}{u(s)} &= \boldsymbol{c}^T[sI - A]^{-1}B
\end{aligned}
$$

En el dominio de la frecuencia $s = jw$.

Sistemas lineales

Sistema lineal de segundo orden

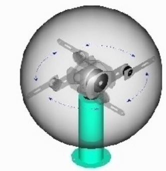
$s = \frac{d}{dt}$; $\dot{x} = sx$, $\ddot{x} = s^2 x$,$y = x_1$ (condiciones iniciales cero):

$$\begin{aligned} \frac{y}{u} &= \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2} \\ w_n^2 u &= \underbrace{\ddot{y}}_{\dot{x}_2} + 2\rho w_n \underbrace{\dot{y}}_{x_2} + w_n^2 \underbrace{y}_{x_1} \end{aligned}$$

$s = \frac{d}{dt}$; $\dot{y} = sy$, $\ddot{y} = s^2 y$,$y = x_1$ (condiciones iniciales cero), w_n es la frecuencia natural de resonancia y ρ es el factor de amortiguamiento:

Variables de estado: variable física $y = y(t)$, $x = x(t)$ variable fase.

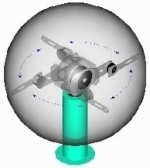
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -w_n^2 x_1 - 2\rho w_n x_2 + w_n^2 u \\ \underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & -2\rho w_n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ w_n^2 \end{bmatrix}}_{B} u \\ y &= [1\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B u \qquad \text{Modelo dinámico en variables fase} \end{aligned}$$



Sistemas lineales

Partiendo del modelo dinámico obtener la función de transferencia: Función de transferencia:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & -2\rho w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_n^2 \end{bmatrix} u \\
y &= [1\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{x} &= [sI - A]^{-1} Bu = \left[s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & -2\rho w_n \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ w_n^2 \end{bmatrix} u \\
&= \begin{bmatrix} s & -1 \\ w_n^2 & s + 2\rho w_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ w_n^2 \end{bmatrix} u = \frac{1}{s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2} \begin{bmatrix} s + 2\rho & 1 \\ -w_n^2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ w_n^2 \end{bmatrix} u = \frac{1}{s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2} \begin{bmatrix} w_n^2 \\ s w_n^2 \end{bmatrix} u \\
y &= \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^T [sI - A]^{-1} Bu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2} \begin{bmatrix} w_n^2 \\ s w_n^2 \end{bmatrix} u = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2} u \\
\frac{y}{u} &= \frac{w_n^2}{s^2 + 2\rho w_n s + w_n^2}
\end{aligned}$$



Teoría de estabilidad de Lyapunov

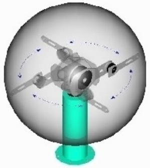
El punto de equilibrio del sistema dinámico $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es estable si:

- Si $\exists\, V(\boldsymbol{x}) > 0$ tal que $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0$.

Teoría de estabilidad de Lyapunov (estabilidad asintótica)

El punto de equilibrio del sistema dinámico $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es asintóticamente estable si:

- Si $\exists$ una función candidata de Lyapunov $V(\boldsymbol{x}) > 0$ tal que $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$, entonces $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$.



- La estabilidad no se refiere al sistema, es una propiedad exclusiva del punto de equilibrio.
- En este marco, frases comunes como *el sistema es estable* no tienen sentido dentro del contexto de la teoría de estabilidad de Lyapunov.
- La función candidata de Lyapunov satisface los siguientes requisitos:
  - $V(x) > 0$ es una función definida positiva.
  - $\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$ $\exists$ y es una función continua con respecto a $\boldsymbol{x}$.
  - La derivada con respecto al tiempo $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ $\exists$ y es una función continua con respecto a $\boldsymbol{x}$.
- Si la propuesta de una función definida positiva $V(\boldsymbol{x}) > 0$ es tal que $\dot{V}(x) > 0$, no se puede concluir absolutamente nada sobre la estabilidad del punto de equilibrio. En tal caso, significa que la función $V(\boldsymbol{x})$ está mal propuesta y es necesario mejorar la estructura matemática.
- Si la función candidata de Lyapunov $V(\boldsymbol{x}) > 0$ tal que $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$, entonces se habrá demostrado categóricamente estabilidad asintótica del punto de equilibrio.

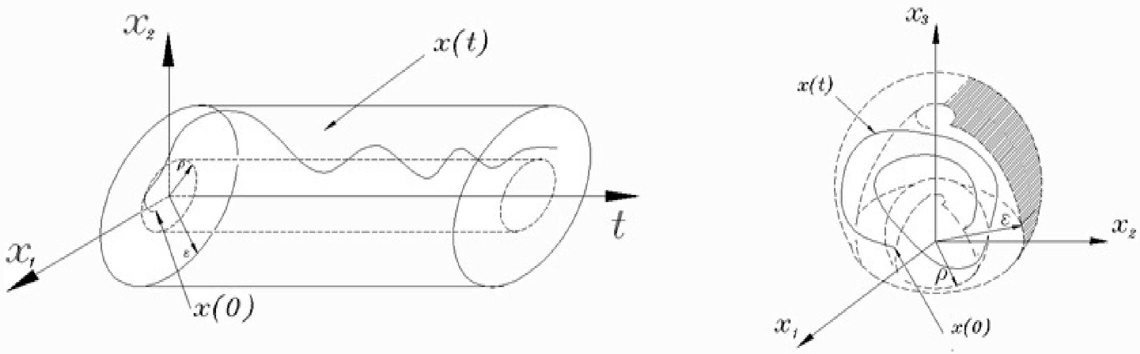


Figura 2: Estabilidad del punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$.

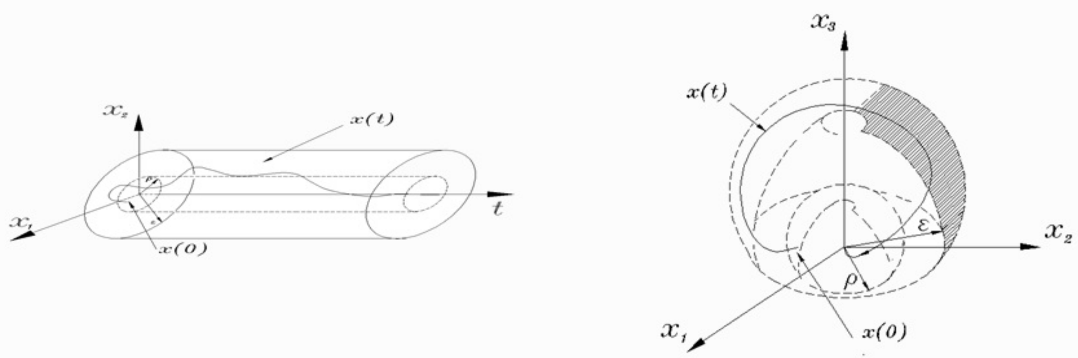


Figura 3: Estabilidad asintótica del punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$.

Robótica FCE
BUAP

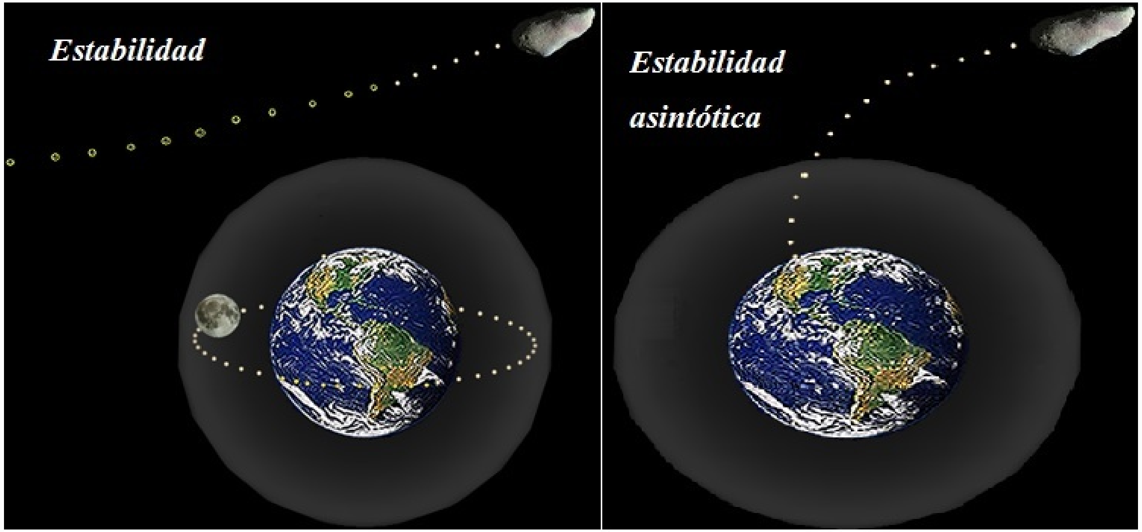


Figura 4: Punto de equilibro estable y asintóticamente estable del sistema $\dot{x} = f(x)$.

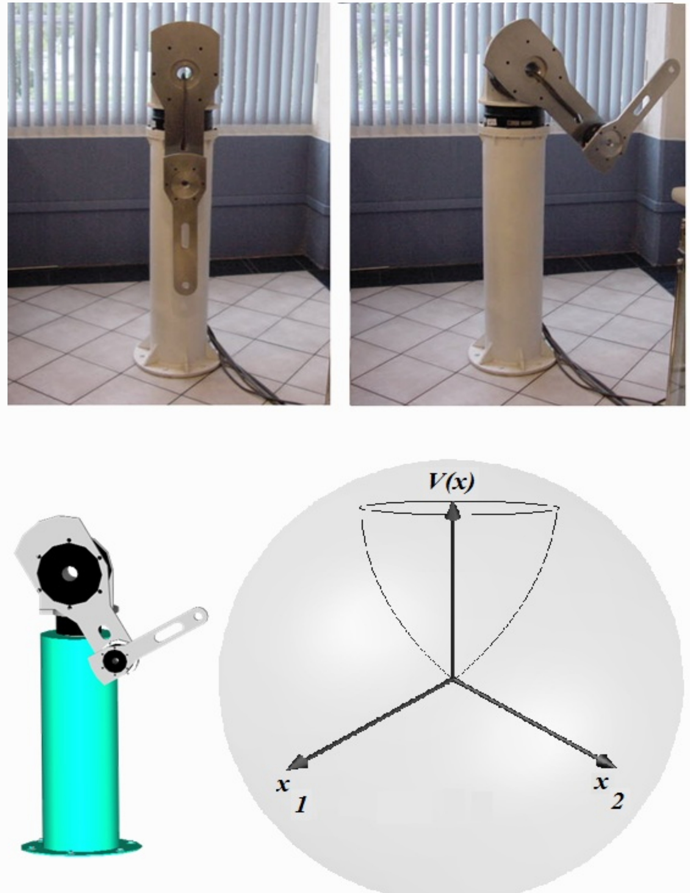


Figura 5: Estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado en robótica.

Ejemplo 3.1:

Considere el siguiente sistema: $\dot{x} = -ax$, donde $a \in \mathbb{R}_+$, analizar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio.
Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

- $V(x) = \frac{1}{2}x^2$.
- $\dot{V}(x) = x\dot{x} = x\left(-ax\right) = -ax^2 \Rightarrow -\dot{V}(x) = ax^2 > 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) \to 0$.
- La función de Lyapunov no es única: $V(x) = \frac{1}{2m}x^{2m}$, con $m \in N$.
- $\dot{V}(x) = x^{2m-1}\dot{x} = x^{2m-1}\left(-ax\right) = -ax^{2m} \Rightarrow -\dot{V}(x) = ax^{2m} > 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) \to 0$.

Ejemplo 3.2:

Sea el siguiente sistema: $\dot{x} = -\operatorname{sen}(x)$, analizar la estabilidad asintótica local del punto de equilibrio.
Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

- $V(x) = 1 - \cos(x)$.
- $\dot{V}(x) = \operatorname{sen}(x)\dot{x} = \operatorname{sen}(x)\left(-\operatorname{sen}(x)\right) = -\operatorname{sen}(x)^2 \Rightarrow -\dot{V}(x) = \operatorname{sen}(x)^2 > 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) \to 0$.
- Estabilidad asintótica en forma local $x \in (-\pi, \pi)$.

Robótica FCE
BUAP

Análisis de estabilidad de sistemas lineales

Sea el siguiente sistema dinámico autónomo lineal

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$$

donde los vectores de estados $\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$; matriz de parámetros del sistema dinámico $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- El punto de equilibrio $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n \ \exists$ si $A^{-1} \ \exists$ (por ejemplo, es suficiente con que $\det[A] \neq 0$).
- Proponer una función candidata de Lyapunov $V(\boldsymbol{x}) > 0$, tal que:
  - $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$, entonces $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n, \ \forall\, t \geq 0$ (estabilidad asintótica).
  - $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0$ (estabilidad).
- Metodología para propones la estructura de la función candidata de Lyapunov:

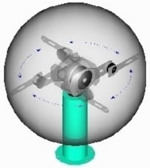
$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}$$

donde $P \in \mathbb{R}^{n\times n}, P > 0$.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x}\right] = \dot{\boldsymbol{x}}^T P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T P\dot{\boldsymbol{x}} = \Bigg[\underbrace{A\boldsymbol{x}}_{\dot{\boldsymbol{x}}}\Bigg]^T P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T P \underbrace{A\boldsymbol{x}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} \\
&= \boldsymbol{x}^T A^T P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}PA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\left[A^T P + PA\right]\boldsymbol{x} \\
&= \boldsymbol{x}^T\left[A^T P + PA\right]\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} < 0 \ \ \Leftrightarrow Q > 0
\end{aligned}$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de diseño $Q > 0$ (matriz definida positiva).

$$A^T P + PA = -Q < 0$$



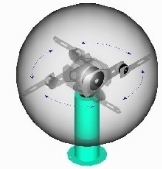
Robótica FCE
BUAP

Ejemplo 1:

Considere el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \pi\\ -e^{\pi} & -\frac{\pi}{88}e^{-\pi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Analizar la estabilidad del punto de equilibrio.



$$P = \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix};\ p_{11} > 0,\ \det[P] = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0 \quad (2)$$

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x} \quad (3)$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\left[A^T P + PA\right]\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} \quad (4)$$

$$A^T P + PA = -Q < 0$$

$$\begin{bmatrix}0 & \pi\\ -e^{\pi} & -\frac{\pi}{88}e^{-\pi}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \pi\\ -e^{\pi} & -\frac{\pi}{88}e^{-\pi}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha_0 & 0\\ 0 & \alpha_1\end{bmatrix};\ \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}_+$$

$$\begin{bmatrix}0 & -e^{\pi}\\ \pi & -\frac{\pi}{88}e^{-\pi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \pi\\ -e^{\pi} & -\frac{\pi}{88}e^{-\pi}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha_0 & 0\\ 0 & \alpha_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-e^{\pi}p_{21} & -e^{\pi}p_{22}\\ \pi p_{11} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{21} & \pi p_{12} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-p_{12}e^{\pi} & \pi p_{11} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{12}\\ -e^{\pi}p_{22} & \pi p_{21} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{22}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha_0 & 0\\ 0 & \alpha_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-e^{\pi}p_{21} - p_{12}e^{\pi} & -e^{\pi}p_{22} + \pi p_{11} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{12}\\ \pi p_{11} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{21} - e^{\pi}p_{22} & \pi p_{12} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{22} + \pi p_{p21} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{22}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha_0 & 0\\ 0 & \alpha_1\end{bmatrix}$$

Robótica FCE

BUAP

$$\begin{bmatrix} -2e^{\pi}p_{12} & \pi p_{11} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{12} - e^{\pi}p_{22} \\ \pi p_{11} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{11} - e^{\pi}p_{22} & 2\pi p_{12} - 2\frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Se generan un conjunto de ecuaciones para encontrar los valores de p_{ij}, para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$.

$$\begin{aligned} -2e^{\pi}p_{12} &= -\alpha_0 \Rightarrow p_{12} = \frac{\alpha_0}{2e^{\pi}} \\ \pi p_{11} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{12} - e^{\pi}p_{22} &= 0 \Rightarrow p_{11} = \frac{1}{88}\frac{\alpha_0}{2e^{2\pi}} + \frac{88}{2\pi^2}e^{2\pi}\left[\alpha_1 + \pi\frac{\alpha_0}{e^{\pi}}\right] \\ 2\pi p_{12} - 2\frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{22} &= -\alpha_1 \Rightarrow p_{22} = \frac{88}{2\pi}e^{\pi}\left[\alpha_1 + \pi\frac{\alpha_0}{e^{\pi}}\right] \end{aligned}$$

Una forma típica de seleccionar a la matriz Q es que $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Por lo tanto,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{88}\frac{1}{2e^{2\pi}} + \frac{88}{2\pi^2}e^{2\pi}\left[1 + \pi\frac{1}{e^{\pi}}\right] & \frac{\alpha_0}{2e^{\pi}} \\ \frac{\alpha_0}{2e^{\pi}} & \frac{88}{2\pi}\left[\alpha_1 + \pi\frac{\alpha_0}{e^{\pi}}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2711.4 & 0.021607 \\ 0.021607 & 368.1 \end{bmatrix}$$

Robótica FCE

BUAP

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \pi\\ -e^{\pi} & -\frac{\pi}{88}e^{-\pi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pi x_2\\ -e^{\pi}x_1 - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
V(x_1,x_2) &= \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}2711.4 & 0.021607\\ 0.021607 & 368.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\\
\dot{V}(x_1,x_2) &= 2\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2711.4 & 0.021607\\ 0.021607 & 368.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}\\
&= 2\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2711.4 & 0.021607\\ 0.021607 & 368.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\pi x_2\\ -e^{\pi}x_1 - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}x_2\end{bmatrix}\\
&= -x_1^2 - x_2^2 = -\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}^T\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{Q}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Otro método:

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2 \\
\dot{V}(x_1, x_2) &= 2p_{11}x_1\dot{x}_1 + 2p_{22}x_2\dot{x}_2 + 2p_{12}\dot{x}_1x_2 + 2p_{12}x_1\dot{x}_2 \\
&= 2p_{11}x_1\,\pi x_2 + 2p_{22}x_2\left[-e^{\pi}x_1 - \tfrac{\pi}{88}e^{-\pi}x_2\right] + 2p_{12}\pi x_2^2 + 2p_{12}x_1\left[-e^{\pi}x_1 - \tfrac{\pi}{88}e^{-\pi}x_2\right] \\
&= -2p_{12}e^{\pi}x_1^2 - \left[2p_{22}e^{\pi} + 2p_{12}\tfrac{\pi}{88}e^{-\pi} - 2p_{11}\pi\right]x_1x_2 - \left[2\tfrac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{22} - 2\pi p_{12}\right]x_2^2 \\
&= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2e^{\pi}p_{12} & \pi p_{11} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{12} - e^{\pi}p_{22} \\ \pi p_{11} - \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{11} - e^{\pi}p_{22} & 2\pi p_{12} - 2\frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 2e^{\pi}p_{12} & e^{\pi}p_{22} + \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{12} - \pi p_{11} \\ e^{\pi}p_{22} + \frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{12} - \pi p_{11} & 2\frac{\pi}{88}e^{-\pi}p_{22} - 2\pi p_{12} \end{bmatrix}}_{A^TP+PA=-Q} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Robótica FCE

BUAP

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ -e^{\pi} & -\frac{\pi}{88}e^{-\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}\beta_0 x_1^2 + \frac{1}{2}\beta_1 x_2^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \beta_0 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \dot{V}(x_1, x_2) &= \beta_0 x_1 \dot{x}_1 + \beta_1 x_2 \dot{x}_2 = \beta_0 \pi x_1 x_2 + \beta_1 x2 \left[-e^{\pi} x_1 - \tfrac{\pi}{88} e^{-\pi} x_2 \right] \\ &= \beta_0 \pi x_1 x_2 - \beta_1 e^{\pi} x_1 x_2 - \beta_1 \frac{\pi}{88} e^{-\pi} x_2^2 \\ &= -\beta_0 \frac{\pi^2}{88} e^{-2\pi} x_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

donde $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}_+$, y el parámetro β_1 se puede elegir en función de β_0, por ejemplo: $\beta_1 = e^{-\pi}\beta_0\pi$. De esta forma, se asigna libremente (a conveniencia el valor de β_0).

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 \frac{\pi^2}{88} e^{-2\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \leq 0$$

Por lo que se demuestra únicamente estabilidad del punto de equilibrio.