Preliminares matemáticos

Facultad de Ciencias de la Electrónica

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica

Dr. Fernando Reyes Cortés

Robótica

ftp://ece.buap.mx/pub/profesor/FernandoReyes/Robotica/

Primavera 2020

Parte III

Preliminares Matemáticos

Contenido

1. Funciones definidas positivas
2. Derivada de funciones de energía
3. Jacobiano

Funciones definidas positivas

Las funciones definidas positivas son ampliamente utilizadas en el diseño y desarrollo de algoritmos de control de robots; se interpretan como la inyección de energía aplicada al robot para moverlo desde su posición inicial al punto deseado (punto final).

Definición

Una función definida positiva $V(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisface las siguientes propiedades:

- $V(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$.
- $V(\boldsymbol{x}) > 0$ si $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.
- $V(\boldsymbol{x}) \rightarrow \infty_+$ si $\boldsymbol{x} \rightarrow \infty_+$ o $\boldsymbol{x} \rightarrow \infty_-$, es decir $V(\boldsymbol{x})$ es *radialmente no acotada*.

Ejemplo 1.2:

La siguiente función escalar $V(x) = x^2$ es definida positiva:

- $V(x) = 0 \Leftrightarrow \ x = 0$.
- $V(x) > 0$ si $x \neq 0$.
- $V(\boldsymbol{x}) \rightarrow \infty_+$ si $x \rightarrow \infty_+$ o $x \rightarrow \infty_-$.

A simple vista, el proceso de análisis que determine si una función cuadrática es definida positiva de la forma $V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \left(a_{12} + a_{21}\right) x_1 x_2$ no es trivial: Por ejemplo, la siguiente función ¿Es definida positiva?:

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

Ejemplo 1.3:

Analizar la siguiente función:

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2) \quad = \quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- $V(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \ x = 0.$
- $V(\boldsymbol{x}) = 0$ para $\boldsymbol{x} \neq 0, \boldsymbol{x} = (1, -1)^T$.
- $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 = 0, \ \ \forall x_1 = -x_2.$

Por lo tanto, esta función $V(\boldsymbol{x})$ no es definida positiva.

Notación

Una función cuadrática de la forma $V(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2$ se puede expresar de la forma $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}$:

$$V(\boldsymbol{x}) \quad = \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.4:

$$V(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 33x_1x_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 9 & \frac{33}{2} \\ \frac{33}{2} & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Robótica FCE

BUAP

Dada una función cuadrática $V(x)$ con la siguiente estructura $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}$ se puede analizar si es una función definida positiva mediante el teorema de Sylvester:

Teorema (Teorema de Sylvester)

La función $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}$ es definida positiva si y solo si la matriz P es definida positiva.

Notación

Una matriz P definida positiva será denota como: $P > 0$. En esta representación no deberá interpretarse que *la matriz P es mayor que cero*, esto carece totalmente de sentido cuando se refiere a matrices.

Teorema

El teorema de Sylvester establece que una matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva $P > 0$ si satisface lo siguiente:

- $P = P^T$.
- El primer elemento $p_{11} > 0$.
- Todos los menores principales de la matriz P deben ser positivos.

El requerimiento de que la matriz sea simétrica $P = P^T$ está directamente relacionado con $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \left(P_s + P_{sk}\right) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T P_s \boldsymbol{x}$, puesto que la parte antisimétrica satisface: $\boldsymbol{x}^T P_{sk} \boldsymbol{x} = 0$.

Funciones definidas positivas

Funciones definidas positivas

Ejemplos de funciones definidas positivas en forma global y local.

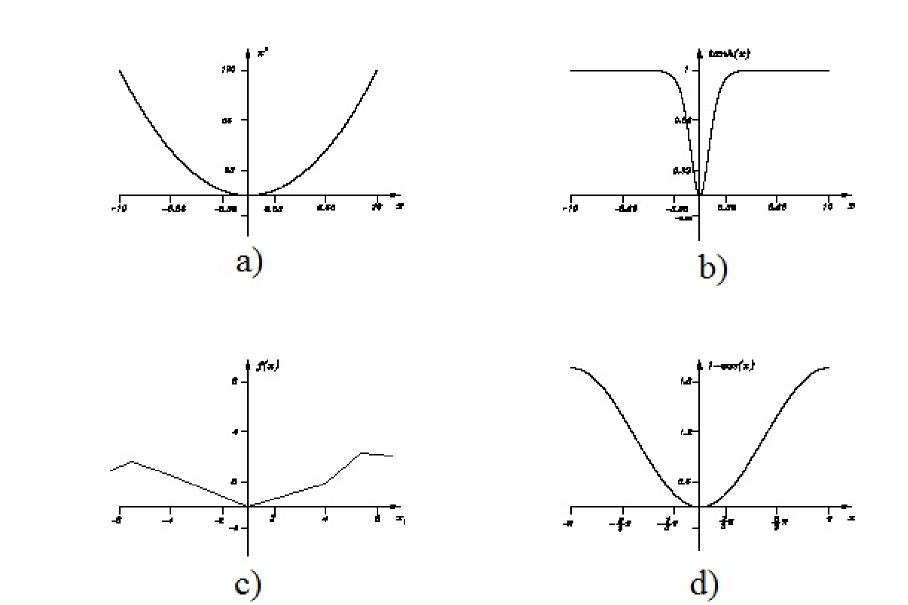


Figura 1: Funciones definidas positivas.

Propiedades de una matriz definida positiva $P > 0$

- Una matriz definida positiva $P > 0$ es invertible, es decir existe la matriz inversa P^{-1} y también es definida positiva $P^{-1} > 0$.
- Sea $\alpha \in \mathbb{R}_+$, entonces αP resulta una matriz definida positiva $\alpha P > 0$.
- Si P y Q son matrices definidas positivas $P > 0,\ Q > 0$, entonces se cumple que $(P + Q) > 0$.
- Si $PQ = QP$, entonces el producto $PQ > 0$.

Corolario

Si P es una matriz diagonal

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

tal que $p_{ii} > 0$, con $i = 1, 2, \cdots, n$, entonces P es definida positiva $P > 0$.

Robótica FCE BUAP

Propiedades de funciones definidas positivas

Funciones definidas positivas

La función definida positiva sólo puede ser cero cuando su argumento es cero, para cualquier otro valor de su argumento la función $V(\boldsymbol{x})$ siempre será positiva. Cuando la función cumple con todos esos requisitos en el espacio de su argumento $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces se le denomina **función definida positiva global**.

Funciones definidas positivas

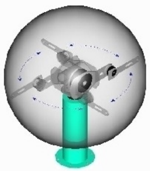
Si la función $V(\boldsymbol{x})$ es definida positiva sólo para una parte acotada de su argumento, es decir $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| < \rho,\ \rho \in \mathbb{R}_+)$, se le denomina **función definida positiva local** y en este caso satisface lo siguiente:

- $V(\boldsymbol{x}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$
- $\exists \rho > 0, \gamma > 0 :\ 0 < V(\boldsymbol{x}) < \gamma \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ y $\|\boldsymbol{x}\| < \rho$.

Funciones definidas positivas

La notación $V(\boldsymbol{x}) > 0$ debe leerse $V(\boldsymbol{x})$ es una función definida positiva.
Si la función $V(\boldsymbol{x})$ es definida positiva sólo para una parte acotada de su argumento, es decir $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| < \rho,\ \rho \in \mathbb{R}_+)$, se le denomina **función definida positiva local** y en este caso satisface lo siguiente:

- $V(\boldsymbol{x}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$
- $\exists \rho > 0, \gamma > 0 :\ 0 < V(\boldsymbol{x}) < \gamma \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ y $\|\boldsymbol{x}\| < \rho$.



Robótica FCE

BUAP

Funciones definidas negativas

Funciones definidas negativas

- La función definida negativa es cero sólo si el argumento $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$
- Para cualquier otro valor de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ la función $V(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_-$ siempre será negativa.
- Cuando la función cumple con todos esos requisitos en el espacio de su argumento $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces se le denomina **función definida negativa global**.

Funciones definidas negativas

La notación $V(\boldsymbol{x}) < 0$ debe leerse función $V(\boldsymbol{x})$ definida negativa.

- $V(\boldsymbol{x}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$
- Si $-V(\boldsymbol{x}) > 0 \;\Leftrightarrow V(\boldsymbol{x}) < 0$.

Funciones semidefinidas (positiva y negativa)

Función semidefinida positiva

- La notación para una función semidefinida positiva es: $V(\boldsymbol{x}) \geq 0$.
- La función semidefinida positiva $V(\boldsymbol{x}) \geq 0$ es cero no sólo cuando el argumento $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, también $V(\boldsymbol{x}) = 0$ para algunos valores $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- Para ciertos valores de $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, la función semidefinida positiva será $V(\boldsymbol{x}) > 0$; y también existen algunos valores $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ que harán $V(\boldsymbol{x}) = 0$.

Función semidefinida negativa

La notación $V(\boldsymbol{x}) \leq 0$ corresponde a una función semidefinida negativa.

- La función semidefinida negativa $V(\boldsymbol{x}) \leq 0$ es cero no sólo cuando el argumento $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, también $V(\boldsymbol{x}) = 0$ para algunos valores $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- Si $V(\boldsymbol{x}) \leq 0 \Leftrightarrow -V(\boldsymbol{x}) \geq 0$.
- También se cumple si $V(\boldsymbol{x}) \geq 0 \Leftrightarrow -V(\boldsymbol{x}) \leq 0$.

Robótica FCE

BUAP

Ejemplo 1.8:

Considere la siguiente función:

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Esta función es semidefinida positiva $V(x_1, x_2) \geq 0$ puesto que: $V(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^2$.
- Cuando $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$: $V(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$. Por ejemplo, $V(3,-3) = 0$, $V(10,-10) = 0$, $V(1000,-1000) = 0$, $V(-1000, 1000) = 0$, etc.
- Observe que $V(\boldsymbol{x}) \geq 0 \Leftrightarrow -V(\boldsymbol{x}) \leq 0$. Es decir:

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq 0 \qquad \text{Función semidefinida positiva.}$$

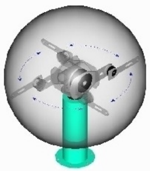
$$-V(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 = -(x_1+x_2)^2 = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq 0 \qquad \text{Función semidefinida negativa.}$$

Robótica FCE
BUAP

Algunos tipos de funciones

Conceptos de funciones

- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces $\boldsymbol{f}$ es una función acotada sobre $\mathcal{D}$ si existe una constante $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tal que $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\| \leq \alpha, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$.
- Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$, entonces $\boldsymbol{f}$ es una función continua en $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$, si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, existe $\delta = \delta(\epsilon, \boldsymbol{x}) > 0$, tal que $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\| < \epsilon, \ \forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{D}$, satisface $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta$.
- $V(\boldsymbol{x}) \rightarrow \infty$, cuando $\|\boldsymbol{x}\| \rightarrow \infty_+$, es decir $V(\boldsymbol{x})$ es *radialmente no acotada*.
- Una función $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$ es una función discontinua en $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$ si $\boldsymbol{f}$ no es continua en $\boldsymbol{x}$.
- Sea $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, y sea $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$. La función f es estrictamente creciente sobre $\mathcal{I}$, si para cada $(x, y) \in \mathcal{I}$ $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. La función es creciente (no decreciente) sobre el conjunto $\mathcal{I}$ si para cada $(x, y) \in \mathcal{I}$ $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. f es una función estrictamente decreciente sobre $\mathcal{I}$ si para cada $x, y \in \mathcal{I}$ $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- f es decreciente (no creciente) sobre $\mathcal{I}$ si para cada $x, y \in \mathcal{I}$ $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- Sea $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, y sea $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$. La función f es monótona sobre $\mathcal{I}$ si es creciente o decreciente. Nótese que si la función f es creciente, entonces $-f$ es decreciente.
- Convergencia monótona de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para una función decreciente (creciente) sobre $\mathbb{R}$. Asúmase que existe un escalar $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq \gamma$ ($f(x) \leq \gamma$), entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe.



Robótica FCE

BUAP

Derivada temporal de una función de energía $V(x) = x^T P x$

$$\frac{d}{dt} V(\boldsymbol{x}) \quad = \quad 2\boldsymbol{x}^T P \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}^T \dot{P} \boldsymbol{x}$$

- Se ha considerado que $P = P^T$, ya que $\left(P\boldsymbol{x}\right)^T = \boldsymbol{x}^T P^T = \boldsymbol{x}^T P$.

Ejemplo 2.1:

Sea $V(x_1, x_2) = 14x_1^2 + 8x_2^2 + 22x_1x_2$, obtener la derivada con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{d}{dt} V(x_1, x_2) = \frac{d}{dt}\left(14x_1^2 + 8x_2^2 + 22x_1x_2\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(14x_1^2\right) + \frac{d}{dt}\left(8x_2^2\right) + \frac{d}{dt}\left(22x_1x_2\right) = 28x_1\dot{x}_1 + 16x_2\dot{x}_2 + 22\dot{x}_1x_2 + 22x_1\dot{x}_2 \\
&= 2\left[14x_1\dot{x}_1 + 8x_2\dot{x}_2 + \tfrac{22}{2}\dot{x}_1x_2 + \tfrac{22}{2}x_1\dot{x}_2\right] = 2\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}^T}\underbrace{\begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}}_{P=P^T}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} = 2\boldsymbol{x}^T P \dot{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}$$

Observe que $\dot{P} = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Derivada temporal de una función de energía $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}$

La derivada con respecto al tiempo de una función de energía $V(\boldsymbol{x})$ se obtiene de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}) &= \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}\right) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}^T\left(P\boldsymbol{x}\right) + \boldsymbol{x}^T\frac{d}{dt}P\boldsymbol{x} + \left(\boldsymbol{x}^T P\right)\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} \\
&= \dot{\boldsymbol{x}}^T P \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \dot{P} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T P \dot{\boldsymbol{x}} \\
&= 2\boldsymbol{x}^T P \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}^T \dot{P} \boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

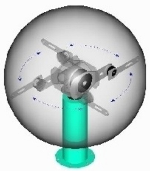
Se ha empleado la propiedad $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{y}$. Por lo tanto, $\underbrace{\dot{\boldsymbol{x}}^T}_{\boldsymbol{y}^T}\underbrace{P\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{z}} = \underbrace{\boldsymbol{x}^T}_{\boldsymbol{z}^T}\underbrace{P\dot{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{y}}$. Además se ha considerado que $P = P^T$, ya que $\left(P\boldsymbol{x}\right)^T = \boldsymbol{x}^T P^T = \boldsymbol{x}^T P$.

El operador escalar $\frac{d}{dt}$ tiene movilidad interna dentro de la estructura de $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}$.

Ejemplo 2.2:

Sea $V(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 33x_1x_2$, obtener la derivada con respecto al tiempo:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{d}{dt}V(x_1, x_2) = \frac{d}{dt}\left(9x_1^2 + 7x_2^2 + 33x_1x_2\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(9x_1^2\right) + \frac{d}{dt}\left(7x_2^2\right) + \frac{d}{dt}\left(33x_1x_2\right) = 18x_1\dot{x}_1 + 14x_2\dot{x}_2 + 33\dot{x}_1x_2 + 33x_1\dot{x}_2 \\
&= 2\left[9x_1\dot{x}_1 + 7x_2\dot{x}_2 + \tfrac{33}{2}\dot{x}_1x_2 + \tfrac{33}{2}x_1\dot{x}_2\right] = 2\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}^T}\underbrace{\begin{bmatrix} 9 & \frac{33}{2} \\ \frac{33}{2} & 7 \end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} \qquad \text{observe que } \dot{P} = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}.
\end{aligned}
$$



Robótica FCE

BUAP

Notación

La notación del gradiente es la siguiente:

$$\nabla V(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

donde $V(\boldsymbol{x})$ es una función escalar $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$.

El gradiente es la derivada parcial de una función escalar $V(\boldsymbol{x})$ con respecto a un vector $\boldsymbol{x}$, el resultado es un vector.
El gradiente se emplea en la obtención de la derivada temporal de una función escalar $V(\boldsymbol{x})$:

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dt} V(\boldsymbol{x}) = \nabla V(\boldsymbol{x})^T \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}^T \dot{\boldsymbol{x}}$$

Robótica FCE

BUAP

Derivada temporal de una función de energía $V(x) = x^T P x$ por medio del gradiente

La derivada con respecto al tiempo de una función de energía $V(\boldsymbol{x})$ se puede obtener mediante el cálculo del gradiente de la siguiente forma:
Para propósitos ilustrativos considere la función $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{y}$, donde $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \nabla V(\boldsymbol{x})^T \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}^T \dot{\boldsymbol{x}} \\ \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left(\boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{y} \right) = \frac{\partial \boldsymbol{x}^T}{\partial \boldsymbol{x}} (P\boldsymbol{y}) + \frac{\partial \boldsymbol{y}^T}{\partial \boldsymbol{x}} (P\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

El operador vectorial $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}$ es estático, es decir no tiene movilidad interna como el caso del operador escalar $\frac{d}{dt}$.
Cuando $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} &= 2P\boldsymbol{x} \\ \dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \frac{d}{dt} V(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}^T P \dot{\boldsymbol{x}} \end{aligned}$$

La igualdad se establece solo para el caso donde la matriz P es constante $\dot{P} = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Robótica FCE
BUAP

Ejemplo 2.3:

Sea $V(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 33x_1x_2$, obtener la derivada con respecto al tiempo usando la técnica del gradiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(9x_1^2 + 7x_2^2 + 33x_1x_2\right) \\ \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(9x_1^2 + 7x_2^2 + 33x_1x_2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18x_1 + 33x_2 \\ \\ 14x_2 + 33x_1 \end{bmatrix} \\
\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \nabla V(\boldsymbol{x})^T \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 18x_1 + 33x_2 & 14x_2 + 33x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\
&= 18x_1\dot{x}_1 + 33x_2\dot{x}_1 + 14x_2\dot{x}_2 + 33x_1\dot{x}_2 \\
&= 2\left[9x_1\dot{x}_1 + \tfrac{33}{2}x_2\dot{x}_1 + 7x_2\dot{x}_2 + \tfrac{33}{2}x_1\dot{x}_2\right] = 2\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & \frac{33}{2} \\ \frac{33}{2} & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.4:

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{x}) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2 \\
\nabla V(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2\right)}{\partial \boldsymbol{x}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 16x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Notación

En este curso, usaremos las siguientes notaciones para representar el gradiente:

$$\nabla V(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} V = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$$

donde $V(\boldsymbol{x})$ es una función escalar $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$.

El gradiente es la derivada parcial de una función escalar $V(\boldsymbol{x})$ con respecto a un vector $\boldsymbol{x}$, el resultado es un vector.
El gradiente se utiliza para obtener la derivada temporal de una función escalar $V(\boldsymbol{x})$:

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}) = \nabla V(\boldsymbol{x})^T \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}^T \dot{\boldsymbol{x}}$$

En el área de robótica el gradiente $\nabla_{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}$ se utiliza en:

- Moldeo de energía.
- Diseño de esquemas de control.
- Teoría de estabilidad de Lyapunov.

Derivada temporal de una función de energía $V(x) = x^T P x$ por medio del gradiente

La derivada con respecto al tiempo de una función de energía $V(\boldsymbol{x})$ se puede obtener mediante el cálculo del gradiente. Para propósitos prácticos considere la función $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $P = P^T$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}) = \dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \nabla V(\boldsymbol{x})^T\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}^T\dot{\boldsymbol{x}} \\
\nabla V(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} &= 2\underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{x}^T}{\partial \boldsymbol{x}}}_{I}(P\boldsymbol{x}) \qquad \text{matriz identidad } I = \frac{\partial \boldsymbol{x}^T}{\partial \boldsymbol{x}} \\
\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= 2\boldsymbol{x}^T P\dot{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}) &= 2\boldsymbol{x}^T P\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}^T\dot{P}\boldsymbol{x} \qquad \text{Método del operador escalar } \frac{d}{dt} \\
\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}) &= \nabla V(\boldsymbol{x})^T\dot{\boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{x}^T P\dot{\boldsymbol{x}} \qquad \text{Método del gradiente } \nabla V(x)
\end{aligned}
$$

La igualdad matemática entre los métodos de los operadores escalar y gradiente se establece únicamente cuando la matriz P es una constante, es decir: $\dot{P} = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Robótica FCE

BUAP

Ejemplo 2.5:

Sea $V(x_1, x_2) = 10x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2$, obtener la derivada con respecto al tiempo usando la técnica del gradiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(10x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2\right) \\ \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(10x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20x_1 + 8x_2 \\ \\ 10x_2 + 8x_1 \end{bmatrix} \\
\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \nabla V(\boldsymbol{x})^T \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 20x_1 + 8x_2 & 10x_2 + 8x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\
&= 20x_1\dot{x}_1 + 8x_2\dot{x}_1 + 10x_2\dot{x}_2 + 8x_1\dot{x}_2 \\
&= 2\left[10x_1\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_1 + 5x_2\dot{x}_2 + 4x_1\dot{x}_2\right] = 2\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}}_{P=P^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} = 2\boldsymbol{x}^T P \dot{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}
$$

Robótica FCE

BUAP

Ejemplo 2.6:

Obtener la derivada temporal de $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2$:

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{x}) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{V}(\boldsymbol{x}) = \nabla V(\boldsymbol{x})^T \dot{\boldsymbol{x}} \\
\nabla V(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2 \right)}{\partial \boldsymbol{x}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2 \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 16x_2 \end{bmatrix} \\
\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \nabla V(\boldsymbol{x})^T \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 16x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 8x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = 2 \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\
&= 2\boldsymbol{x}^T P \dot{\boldsymbol{x}} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Robótica FCE

BUAP

El siguiente programa en **MATLAB** ilustra como obtener el gradiente de una función en forma simbólica:

Código MATLAB 1: ejemolo8.m

Robótica, Período de primavera (9 de enero de 2020). Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica.
Dr. Fernando Reyes Cortés. Facultad de Ciencias de la Electrónica, BUAP.

ejemolo8.m .m	MATLAB 2019a

```
clc;
clear all;
close all;
format short
syms x1 x2 ;
```

% Ejemplo 1: $V(\boldsymbol{x}) = 10x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2$

```
Vx=10*x1^2+5*x2^2+8*x1*x2;
```

$$\%\nabla_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(10x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(10x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(10x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20x_1 + 8x_2 \\ 10x_2 + 8x_1 \end{bmatrix}$$

```
nabla=gradient(Vx, [x1, x2]);
```

% Ejemplo 2: $V_1(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2$

```
V1x=x1^2+2*x1*x2+8*x2^2;
```

$$\%\nabla_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 16x_2 \end{bmatrix}$$

```
nabla1=gradient(V1x, [x1, x2]);
```

Robótica FCE

BUAP

Jacobiano

Sea $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

La matriz jacobiano $J(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se define de la siguiente manera:

$$J(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y})}{\partial x_1} & \frac{\partial \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{y})}{\partial x_1} & \frac{\partial \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{y})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{y})}{\partial x_1} & \frac{\partial \boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{y})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.1:

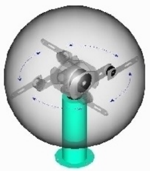
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} x_1^2 + 2x_1x_2 \\ \mathrm{sen}(x_1)\cos(x_2) \end{bmatrix}$$

$$J(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1^2+2x_1x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_1^2+2x_1x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\mathrm{sen}(x_1)\cos(x_2))}{\partial x_1} & \frac{\partial(\mathrm{sen}(x_1)\cos(x_2))}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 & 2x_1 \\ \cos(x_1)\cos(x_2) & -\mathrm{sen}(x_1)\,\mathrm{sen}(x_2) \end{bmatrix}$$

Jacobiano

Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$, la matriz jacobiano: $J(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se define de la siguiente manera:

$$
J(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y})}{\partial x_1} & \frac{\partial \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{y})}{\partial x_1} & \frac{\partial \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{y})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{y})}{\partial x_1} & \frac{\partial \boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{y})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{y})^T \\ \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{y})^T \\ \vdots \\ \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{y})^T \end{bmatrix}
$$



Ejemplo 3.2:

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} x_1^2 + 2x_1x_2 \\ \operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2) \end{bmatrix}
$$

$$
J(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1^2+2x_1x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_1^2+2x_1x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2))}{\partial x_1} & \frac{\partial(\operatorname{sen}(x_1)\cos(x_2))}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 & 2x_1 \\ \cos(x_1)\cos(x_2) & -\operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2) \end{bmatrix}
$$

En robótica el Jacobiano se utiliza en control y análisis de singularidades:

- Jacobiano del robot.
- Singularidades.
- Control Cartesiano: fuerza, impedancia, visual servoing.

Robótica FCE

BUAP

El siguiente programa en **MATLAB** ilustra como obtener el jacobiano de una función vectorial en forma simbólica:

Código MATLAB 2: ejemolo9.m

Robótica, Período de primavera (9 de enero de 2020). Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica.
Dr. Fernando Reyes Cortés. Facultad de Ciencias de la Electrónica, BUAP.

ejemolo9.m .m — **MATLAB** 2019a

```
clc;
clear all;
close all;
format short
syms x1 x2 ;
```

y=[x1*x1+2*x1*x2; sin(x1)*cos(x2)]; % $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1^2 + 2x_1x_2 \\ \mathrm{sen}(x_1)\cos(x_2) \end{bmatrix}$

J=jacobian(y, [x1; x2]); % $J(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 & 2x_1 \\ \cos(x_1)\cos(x_2) & -\mathrm{sen}(x_1)\,\mathrm{sen}(x_2) \end{bmatrix}$