函数项级数:

1. 几个常用级数

① 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ $\begin{cases} 当 |q|<1 时 & 收敛 \\ 当 |q|\geq 1 时 & 发散 \end{cases}$

② P-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ $\begin{cases} 当 p>1 时 & 收敛 \\ 当 p\leq 1 时 & 发散 \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ $(p>0)$

③ 交错 P-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ $\begin{cases} 当 p>1 时. & 绝对收敛 \\ 当 0<p\leq 1 时 & 条件收敛 \\ 当 p<0 时 & 发散 \end{cases}$

2. 函数项级数定义

设 $u_1(x), \cdots u_n(x) \cdots$ 是定义在 $I \subseteq R$ 上的函数, 则称 $\{u_n(x)\}$ 是区间 I 上的函数序列, 简称函数列. 称 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 为定义在 I 上的函数项级数。

eg. 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + \cdots + ax^n + \cdots$ $(a\neq 0)$

当 $x=1$ 时. 发散
当 $x=\frac{1}{2}$ 时. 收敛于 $2a$

函数项级数敛散性与 x 取值有关

3. 如果 $x_0 \in I$, 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛

则称 x_0 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点, 否则称为发散点

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 所有收敛点的全体称为收敛域, 发散点全体称为发散域

No.

DATE / /

4. 在收敛域上，函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$，称为和函数

记 $S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)$，$\{S_n(x)\}$ 为该级数的部分和序列

$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=s(x)$，余项 $r_n(x)=s(x)-S_n(x)$．$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$

eg: 求级数 $\sum\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ 的收敛域

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{|1+x|}=\frac{1}{|1+x|}$

① 当 $\frac{1}{|1+x|}<1$ 即 $x>0$ 或 $x<-2$ 时，原级数绝对收敛

② 当 $\frac{1}{|1+x|}>1$ 即 $-2<x<0$ 时，$|u_{n+1}(x)|>|u_n(x)|$，$|u_n(x)|$ 单增．

所以 $\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ 不趋于0，级数发散

③ 当 $x=0$ 时，$\sum\frac{(-1)^n}{n}$．由 Leibniz 判别法，级数收敛

当 $x=-2$ 时，$\sum\frac{1}{n}$．级数发散

5. $u_n(x)$ 连续/可导/可积 $\not\Rightarrow$ $S(x)$ 连续/可导/可积

$S_n(x)$ 连续/可导/可积 $\not\Rightarrow$

6. 函数序列的一致收敛性

设 $\{f_n(x)\}$ 是 I 上的函数列，若 $\forall x_0\in I$，$\{f_n(x_0)\}$ 收敛，则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上收敛或逐点收敛．

$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$

对 $\forall\varepsilon>0$，若 $\exists$ 与 x 无关的 $N\in N^*$，s.t $n>N$ 时，对一切 $x\in I$，恒有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$

记为 $f_n(x)\xrightarrow{uni}f(x)$，$n\to\infty$．

DATE / /

7. 记 $\beta_n = \sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$

则 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$

eg. 求证 $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛

证：$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，逐点收敛于 $f(x)=0$

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2n|x|}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{2n}$$

$\therefore \beta_n=\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{2n}\longrightarrow 0$

所以 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

eg 判断 $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上是否一致收敛

解. $\forall x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，逐点收敛于 $f(x)=0$

$(1,+\infty)$ 上，$|f_n(x)-f(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}\le\frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}<\frac{1}{n}$

$\beta_n=\sup\limits_{x\in(1,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{n}\to 0$，所以一致收敛

$(0,1)$ 上. $\beta_n=\sup\limits_{x\in(0,1)}|f_n(x)-f(x)|\ge|f_n(\frac{1}{n})-0|=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\not\to 0$

所以在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

8. Cauchy 收敛原理

$\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$，s.t $n>N(\varepsilon)$ 时，$\forall x\in I$，$\forall p\in N^*$.

都有 $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

即 $|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$

DATE / /

必要条件

9. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛，则 $\boxed{\{u_n(x)\}\text{在 I 上一致收敛为 0}}$

10. 若 $u_n(x) \in C[a,b]$，$n=1,2\cdots$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛

则 ① $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 收敛 ② $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛 ✓

必要条件

由①逆否可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$，$x \in (0,2\pi)$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$，$x \in (0,2\pi)$

不一致收敛

函数项级数一致收敛的判别法

1. 优先数判别法(Weirstrass 判别法)　公共的 a_n

若存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, s.t. $\forall x\in I$, 都有 $|u_n(x)| \le a_n$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛

证: 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则由 Cauchy 收敛定理

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时 有 $|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$.

则 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon \quad \forall x\in I, \forall p$.

称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的 优级数、强级数、控制级数

eg. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致收敛性

解: $|u_n(x)| \le \frac{1}{n^2}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以原级数一致收敛

eg. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^\alpha e^{-nx}$ $(\alpha>0)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性

解: $u_n(x)=x^\alpha e^{-nx}$, $u'(x)=x^{\alpha-1}e^{-nx}(\alpha-nx)$

则 $u_n(x)$ 在 $(0,\frac{\alpha}{n}]$ 上单增, 在 $[\frac{\alpha}{n},+\infty)$ 上单减

$0\le u_n(x) \le u_n(\frac{\alpha}{n}) = (\frac{\alpha}{e})^\alpha \frac{1}{n^\alpha}$

当 $\alpha>1$ 时. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\alpha}{e})^\alpha \frac{1}{n^\alpha}$ 收敛. 原级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

当 $0<\alpha\le 1$ 时

由 $u_n(x)$ 单减性, $\forall n>0$, 可得

$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+n}(x)| = x^\alpha\left[e^{-(n+1)x}+\cdots+e^{-2nx}\right] \ge n x^\alpha e^{-2nx}$

取 $\varepsilon_0=e^{-2}$, 则 $\forall N>0$, 都可以取 $n>N$, 及 $p=n$, $x_0=\frac{1}{n}\in[0,+\infty)$

s.t. $\left|\sum_{i=1}^{p} u_{n+i}(x_0)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} u_{i+1}(\frac{1}{n})\right| \ge n(\frac{1}{n})^\alpha e^{-2} \ge e^{-2}=\varepsilon_0$

所以不一致收敛

Cauchy 收敛定理的逆否命题:

No.
DATE / /

$\exists \varepsilon_0>0$, $\forall N>0$, $\exists n, p\in N^*$, $x_0\in[0,+\infty)$, s.t.
$|u_{n+1}(x_0)+\cdots+u_{n+p}(x_0)|\ge \varepsilon_0$ $\Rightarrow$ 级数不一致收敛.

2. 设 $\{f_n(x)\}$ 定义在 I 上，若给定 $x\in I$，$\exists M(x)>0$.
s.t $\forall n$，有 $|f_n(x)|\le M(x)$ 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上逐点有界
若可找到一个公共的 M. 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致有界

3. Dirichlet 判别法：
设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 满足下列条件 注意是关于 n 单调.（常值也可以）
① $\{b_n(x)\}$ 对固定的 x 单调，并在 I 上 $\boxed{\text{一致收敛于 0}}$
② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的 $\boxed{\text{部分和序列}}$ 在 I 上 $\boxed{\text{一致有界}}$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛

eg 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛

证：设 $a_n=\cos nx$. $b_n(x)=\frac{1}{n}$，则 $b_n(x)$ 单减且一致趋于 0
且 $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$，一致有界.
所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛

4. Abel 判别法.
设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 满足
① $\{b_n(x)\}$ 对固定 x 单调，且在 I 上一致有界
② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛

No.

DATE / /

eg 讨论 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2+x^n)}{\ln n(1+x^n)} \arctan nx$ 在 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解. 记 $a_n(x)=\frac{(-1)^n}{\ln n}$，由 Leibniz 判别法，$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 一致收敛.

令 $b_n=\frac{2+x^n}{1+x^n}=1+\frac{1}{1+x^n}$，$\forall x\in[0,1]$，$b_n(x)$ 关于 n 单增，$\forall x\in(1,+\infty)$，$b_n(x)$ 关于 n 单减

显然 $|b_n(x)|\le b_n(0)=2$，即 $b_n(x)$ 单调且一致有界

由 Abel 判别法，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(2+x)^n}{\ln n(1+x^n)}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

$\forall x$，$\{\arctan xn\}$ 单增 且 $|\arctan nx|\le\frac{\pi}{2}$，一致有界.

所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{2+x^n}{1+x^n}\arctan nx$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

No.

DATE / /

一致收敛函数列与一致收敛项级数的分析性质

1. 定理：设函数列 $f_n(x)$, $n=1,2\cdots$ 在 I 上都连续，且 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 I 上连续

定理：设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$，若 $u_n(x)$ 都连续，则 $S(x)$ 连续

1. 证：即证 $\forall x_0 \in I$，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)|$$

因为 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$，所以 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，s.t. $\forall n>N$，$\forall x \in I$，有

$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$，$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ 成立

取定一个 $n>N$，由 $f_n(x)\in C$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\therefore |f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$，得证

以上两定理简述为：一致收敛条件下：

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} S_n(x)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x)$$

可交换次序

eg. 已知 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$，求 $\lim_{x\to 1} S(x)$

随便取一个包含 x_0 的 I 即可

解：$|u(x)| \le \left|\left(\frac{x}{3}\right)^n\right|$，所以当 $|x|<2$ 时，$|u(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛

所以由优先数判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[-2,2]$ 上一致收敛，且 $u_n(x)$ 都连续

所以 $S(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续

$$\lim_{x\to 1} S(x) = \lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{n\to 1} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}$$

eg. 证明 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续

证：虽然 $S_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛（$\lim_{n\to\infty} U_n(0)\neq 0$）

但任取 $\delta>0$，$S_n(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛 且 $U_n(x)$ 连续

因此 $S(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上连续，由于 δ 的任意性，因此 $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续

2. 内闭一致收敛性

函数项级数在 (a,b) 上不一致收敛，但若在该区间内任取闭区间 $[c,d]\subset(a,b)$，函数项级数都一致收敛，则称函数项级数在 (a,b) 上是内闭一致收敛的。

只要 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛，则和函数 $S(x)$ 在 (a,b) 上连续

3. Dini 定理

① 设 $f_n(x)\in C[a,b]$，$n=1,2\cdots$ 如 $\forall$ 给定 $x\in[a,b]$，$f_n(x)$ 关于 n 递减趋于 0，则 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 0

② 设 $f_n(x)\in C[a,b]$ $n=1,2\cdots$ 且收敛于 $f(x)$，$f(x)\in C[a,b]$，若对于 $\forall$ 给定 x，$\{f_n(x)\}$ 单调，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$

③ 设 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，且 $U_n(x)\in C[a,b]$ $U_n(x)\geq 0$

若和函数 $S(x)\in C[a,b]$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛

4. 定理：可积性

设 $f_n(x)\in C[a,b]$ $n=1,2\cdots$ 且 $\{f_n(x)\}\xrightarrow{uni} f(x)$

则 $f(x)\in R[a,b]$，且 $\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx}$ 极限与积分交换

eg 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$，求 $\int_0^{\pi}f(x)dx$

解：$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $[0,\pi]$ 上一致收敛，且 $\frac{\cos nx}{n^2}\in C[0,\pi]$，$n=1,2\cdots$

故在 $[0,\pi]$ 上可逐项积分。于是

$$\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-\sin nx)\Big|_0^{\pi}=0$$

eg 证明：当 $x\in(-1,1)$ 时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots=\arctan x$$

解. ① 显然 $x=0$ 时等式成立

② 当 $x\in(0,1)$ 时，$\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=\int_0^x(-1)^{n-1}t^{2n-2}dt$

$\forall t\in[0,x]$，$|(-1)^{n-1}t^{2n-2}|\leq t^{2n-2}$ 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n-2}$ 收敛，所以

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{2n-2}$ 在 $[0,x]$ 上一致收敛，又 $\because (-1)^{n-1}t^{2n-2}$ 连续

故求和与积分可以互换.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}t^{2n-2}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{2n-2}\right)dt$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$$

$x\in(-1,0)$ 时同理.

可导

定理：设 $\{f_n(x)\}$，$n=1,2\ldots$ 在 $[a,b]$ 上可导，且满足

① $f_n'(x)\in C[a,b]$ ② $\{f_n'(x)\}$，$n=1,2$ 在 $[a,b]$ 上 $\boxed{一致收敛}$ 于 $g(x)$.

③ 至少存在一点 x_0，s.t. $\boxed{\{f_n(x_0)\}}$ 收敛

则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于某函数 $f(x)$，且 $\forall x\in[a,b]$，$f'(x)=g(x)$

$$\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]'=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$$

证明函数项级数的和函数可导：$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

① 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在某点处收敛

② 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 一致收敛

也证明了逐项可导

也证明了导函数连续

6. 函数项级数形式：

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. $x\in[a,b]$

若 ① $u'(x)\in C[a,b]$.

② $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(x)$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 至少在一点 x_0 处收敛.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，其和 $S(x)\in C[a,b]$，

且 $S'(x)=g(x)$. 即 $\left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right]'=\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$. $\boxed{\text{逐项可导}}$

注意 ① 定理逆命题不成立.

② 级数一致收敛并不能保证可以逐项求导

eg 证明 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续二阶导，求 $f''(x)$

解：$u'(x)=\frac{\cos nx}{n^3}$. $u''(x)=-\frac{\sin nx}{n^2}$

$\left|\frac{\sin nx}{n^4}\right|\le\frac{1}{n^4}$, $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$, $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$

由优先数判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ …… 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

① $u'(x)=\frac{\cos nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续

② $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ 在 R 上一致收敛

③ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)=0$ 收敛

$\Rightarrow f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$

…… $f''(x)$ 在 R 上连续. $f''(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$

No.

DATE / /

eg 证明$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$[1,+\infty)$上有任意阶连续导数

证：① $\forall x_0\in(1,+\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_0}}$ 收敛.

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$上逐点收敛

但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 不收敛，故原级数不一致收敛

② $\forall[a,b]\in(1,+\infty)$. $a>1$. $\forall x\in[a,b]$. 有 $\left|\frac{1}{n^x}\right|<\left|\frac{1}{n^a}\right|$

$$|u_n'(x)|=\frac{\ln n}{n^x}\le\frac{\ln n}{n^a}$$

$a>1$. 所以 $\exists p$ 满足 $a>p>1$. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\ln n}{n^a}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{a-p}}=0$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^a}$收敛。由优级数判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$[a,b]$上一致收敛

(内闭一致收敛)

所以$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$[a,b]$上连续

又因为 $u'(x)\in C[a,b]$，

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{\infty}u'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}\text{在}[a,b]\text{上一致收敛}\\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}\text{ 收敛}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}\text{在}[a,b]\text{上连续}$$

由$[a,b]$的任意性. $f(x)$. $f'(x)$在$(1,+\infty)$连续

其他阶导数连续性类似可证。

幂级数及其收敛性质

1. 形如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 的级数称为幂级数

a_n 称为幂级数系数

2. Abel 定理

① 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0$ 处收敛，则它在满足 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 处绝对收敛

② 如果 ∵ 在 x_0 处发散，∴ $|x|>|x_0|$ 的一切 x 处都发散

3. 推论：

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必存在一个完全确定的正数 R 存在，且有以下性质：

$$\begin{cases} |x|<R \text{ 时，幂级数绝对收敛} \\ |x|>R \text{ 时，发散} \\ |x|=R \text{ 时，可能发散也可能收敛} \end{cases}$$

推论 ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0$ $(x_0 \neq 0)$ 处收敛，则对 $\forall$ 闭区间 $I \subseteq (-|x_0|, |x_0|)$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 I 上一致收敛

② 设 $R = \sup\{x \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 的收敛点}\}$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, +R)$ 上收敛，在 $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ 上发散

4. 正数 R 称为幂级数的收敛半径，幂级数收敛域称为其收敛区间。

$(-R, R)$，$[-R, R)$ $(-R, R]$ $[R, R]$

规定两种特殊情况 $\begin{cases} \text{① 只在 } x=0 \text{ 处收敛，则 } R=0\text{，收敛区间 } x=0 \\ \text{② 对一切 } x \text{ 都收敛，则 } R=+\infty\text{，收敛区间 } (-\infty, +\infty) \end{cases}$

5. 定理：Cauchy - Hadamard 公式

对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$a_n \neq 0$ 则

设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ （或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$）

则 ① 当 $\rho \neq 0$ 时，$R = \frac{1}{\rho}$

② 当 $\rho = 0$ 时，$R = +\infty$

③ 当 $\rho = +\infty$ 时，$R = 0$

eg. 求收敛区间

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{x^n}{n}$

解：$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$，所以 $R=1$

当 $x=1$ 时 $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；当 $x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛

所以收敛区间为 $[-1, 1)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$

解：$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2$，$\therefore R = \frac{1}{2}$

即 $|x-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ 收敛，即 $x \in (0, 1)$ 收敛

当 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散；当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛

所以收敛区间为 $(0, 1]$

6. eg 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$ 的收敛区间

解：缺少偶次幂项，无法使用 Cauchy-Hadamard 公式。

用达朗贝尔判别法。

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{1}{2}x^2$，
当 $\frac{1}{2}x^2 < 1$，即 $|x| < \sqrt{2}$ 时，级数收敛
$\quad > 1$ $\quad > \sqrt{2}$ 发散
$\quad = 1$ $\quad = \pm\sqrt{2}$ 时，$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 发散

收敛区间 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

7. eg. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{5^n n^2}$ 的收敛区间

解. 设 $y=x^2$. 则原级数写作 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{5^n n^2}$.

用 Cauchy-Hadamard 公式求出 $R=5$

$|y|<5$ 即 $|x|<\sqrt{5}$ 时. 原级数收敛

又 $x=\pm\sqrt{5}$ 时也收敛. 所以收敛区间为 $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$

8. 代数运算

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 收敛半径分别为 R_1, R_2

记 $R=\min\{R_1,R_2\}$. 和函数分别为 $s(x)$, $\sigma(x)$

则 (1) 加减法: $\sigma(x)\pm s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$. $x\in(-R,R)$

(2) 乘法: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 上收敛

即 $\sigma(x)\cdot s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$. $x\in(-R,R)$

9. 内闭一致收敛性.

定理: 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径 R, $0<R\leq+\infty$

则在 $(-R,R)$ 内的任何闭子区间 $[a,b]$ 上一致收敛

10. Abel 第二定理. (连续性定理)

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 收敛半径为 R, $0<R<+\infty$.

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n R^n$ 收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $[0,R]$ 上一致收敛.

且 $\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n$

② ... $(-R)$ ... $[0,-R]$ .. $\lim_{x\to R+0}$ ... $(-R)$.

11. 逐项求导.

设 $\sum_{n=1} a_n x^n$ 收敛半径为 R. 和函数为 $S(x)$

则 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 有任意阶导数

和的导数 = 导数的和

(求导后收敛域可能会变小, 不会变大)

指端点取不到了. R不变

eg. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$. $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$. $f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n}$

R都为1. 但收敛域分别为 $[-1,1]$, $[-1,1)$, $(-1,1)$

12. 逐项积分.

$(-R,R)$ 内:

积分后 R不变, 但端点收敛性可能改变, 只可能由开到闭.

eg 已知 $1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in(-1,1)$

则 $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\int_0^x(1-x^2+x^4-x^6\cdots)dx=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}=\arctan x$

$x\in[-1,1]$

eg 求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的和函数

解. $R=1$

显然 $S(0)=0$

$S'(x)=1-x+x^2-\cdots=\frac{1}{1+x}$ $(-1<x<1)$

两边积分 $S(x)-S(0)=\ln(1+x)\Rightarrow S(x)=\ln(1+x)$ $-1<x<1$

又 $x=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛

$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\ln2$

综上. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)$ $(-1<x\le1)$

(3). 常用已知和函数的幂级数 $(|x|<1)$

① $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ② $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$

③ $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ ④ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$

eg 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数

解. $R=1$.

在 $(-1,1)$ 上. $s(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{x} f(x)$

$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. $f'(0)=1$. $f(0)=0$

则 $f'(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x)$. $f(0)=0$

$f(x) = \int_0^x -\ln(1-t)dt = \int_0^x \ln(1-t)\,d(1-t) = (1-x)\ln(1-x)+x$

所以 $|x|<1$ 且 $x\neq 0$ 时

$s(x) = \frac{1}{x}[(1-x)\ln(1-x)+x] = 1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x)$

$x=\pm1$ 时. 级数为 $\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, 收敛. 所以 $s(x)$ 在 ±1 处单侧连续

所以 $s(x) = \begin{cases} 1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x), & |x|\leq 1 \text{ 且 } x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

eg 求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数

解: $R=1$

设 $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$, 则 $T(x) = \frac{1}{1-x} - 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$, $|x|<1$

DATE / /

幂级数的展开

1. 定理：如果 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内具有任意阶导数，

且 $\boxed{\text{在 } U_\delta(x_0) \text{ 内能展开成 } (x-x_0) \text{ 的幂级数}}$

即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

则其系数 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ $(n=0,1,\cdots)$ 且展开式唯一

定义：若 $f(x)$ 在 x_0 处任意阶可导，则

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒级数

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为 $f(x)$ 的麦克劳林级数

但注意：$\boxed{\text{不一定有 } f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+R_n(x)$$ ✓

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}S_{n+1}(x)=f(x)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0}$$

2. 定理：

设 $f(x)$ 在 (x_0-R,x_0+R) 内有任意阶导数，则

$f(x)$ 在 (x_0-R,x_0+R) 内能展开为 Taylor 级数的充要条件是

$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$, $\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$

（即 Taylor 级数收敛，并且收敛至 $f(x)$）.

DATE / /

3. 定理. 设 $f(x)$ 在 (x_0-R, x_0+R) 内有任意阶导数.
如果 $\{|f^{n}(x)|\}$ 在 (x_0-R, x_0+R) 上一致有界
即 $\exists M$. s.t $|f^{(n)}(x)|<M$ 对所有 n 和 $x\in(x_0-R, x_0+R)$ 成立,
则 $f(x)$ 在 (x_0-R, x_0+R) 内能展成 Taylor 级数

4. 常见幂级数展开:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad |x|<1 \\ \frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad |x|<1 \end{aligned}}$$

5. 幂级数展开方法、一 展开法
(1) 求 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
(2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 的收敛区间 I
(3) 证明在 I 内有 $\lim_{n\to\infty}R_n=0$ 或 $|f^{(n)}(x)|\le M$
则级数在收敛区间内收敛于 $f(x)$

eg 将 $f(x)=e^x$ 展成麦克劳林级数.

解, $f^{n}(x)=e^x$. $f^{n}(0)=1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$. 收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 有 $|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$

(ξ 在 0 和 x 之间)

研究 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$. 由达朗贝尔,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{|x|}|x|^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+2}=0$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 收敛. 所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0$

No.

DATE / /

由夹逼知 $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$

所以 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ 收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$

6. 幂级数展开 — 间接法：变量代换，求导积分等

eg、将 $f(x)=\frac{x-1}{4-x}$ 在 $x=1$ 处展开为泰勒级数 并求 $f^{(n)}(1)$

解 $\frac{1}{4-x}=\frac{1}{3-(x-1)}=\frac{1}{3(1-\frac{x-1}{3})}$

$=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x-1}{3}+\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x-1}{3}\right)^n+\cdots\right]$ $|x-1|<3$

原式 $=\frac{1}{3}(x-1)+\frac{(x-1)^2}{3^2}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{3^n}+\cdots$ $|x-1|<3$

于是 $\frac{f^{n}(1)}{n!}=\frac{1}{3^n} \Rightarrow f^{(n)}(1)=\frac{n!}{3^n}$

eg $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 在 $x=0$ 处展开.

解: $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\frac{1}{1+\frac{x}{3}}$.

eg: $\ln x$ 在 $x_0=2$ 展开

解. $\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln\left[2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)\right]=\ln 2+\boxed{\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)}$.

函数的 Fourier 级数展开

1. 一个比较复杂的周期运动可看作一系列不同频率的简谐振动的叠加。

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

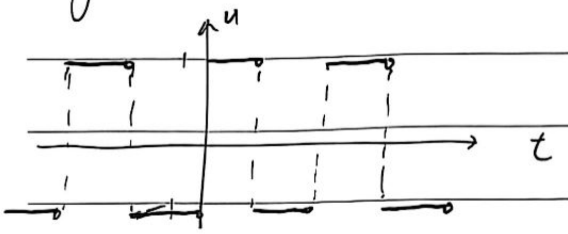
$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t \right)$$

令 $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_n = A_n \sin\varphi_n$, $b_n = A_n \cos\varphi_n$, $\omega t = x$

则 原式 $= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$　　三角级数

$\sin x$ 称为基波，其他成分的频率为基波整数倍

eg. 矩形波.



$$u(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots \right) \quad (-\pi < t < \pi,\ t \neq 0)$$

2. 三角函数系.

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \cdots \cos nx, \sin nx$.

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，若内积 $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx = 0$.
则称 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上正交

eg: $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$

三角级数：$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

3. 由 M-判别法，以及 $|\cos kx|\le 1$，$|\sin kx|\le 1$. 可得

定理：如果级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)$ 收敛

则三角级数在实数域上 绝对收敛 并且一致收敛

4. 定理：设 f 为周期为 2π 的函数，在整个数轴上

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$，且等式右边级数一致收敛

则 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)$

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \end{cases} \quad (n=1,2\cdots)$$

（或把上下限改为 $0-2\pi$）

证明：利用一致收敛 ⇒ 逐项积分

① 求 a_0：$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx$

$=\pi a_0+0+0=\pi a_0$

$\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)$

② 求 a_n：$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]\cos nx\,dx$

$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx$

$=0+(0+0+\cdots+a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx+0+0+\cdots)+0=a_n\pi$

$\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx.$

No.
DATE / /

若f无界，则其瑕积分绝对可积

5. 定理（傅里叶系数和傅里叶级数）

设 $T=2\pi$ 的 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或 $\boxed{\text{绝对可积}}$，则称

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{cases} \quad n=(0,1,2\cdots) \text{ 为 } f(x) \text{ 的傅里叶系数}$$

并称以 a_n, b_n 为系数的三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 为

$f(x)$ 的傅里叶级数．记作 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

6. 定理：

若 f 以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积，则其傅里叶系数满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

eg $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 系数不趋0．故不是傅里叶级数

傅里叶级数是收敛的三角级数

但收敛的三角级数未必是傅里叶级数

7eg 设 $f(x)$ 以 2π 为 T．在 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$

求 $f(x)$ 的傅里叶级数

解：$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx=0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$

$$=\begin{cases}\frac{4}{n\pi}, & n=1,3,5\cdots\\ 0, & n=2,4,6\cdots\end{cases}$$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=0$

所以 $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x$.

DATE / /

8. 定义：分段可微

设 f 定义在 $[a,b]$ 上，若 ∃ $[a,b]$ 的一个分割

$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$.

$$\text{s.t. } g_i(x)=\begin{cases} f(t_{i-1}+0), & x=t_{i-1} \\ f(x), & x\in(t_{i-1},t_i) \\ f(t_i-0), & x=t_i \end{cases},\quad i=1,2\cdots n.$$

在相应区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上可微（端点单侧）.

则称 f 在 $[a,b]$ 上分段可微.

（$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至多有 有限个第一类间断点和角点）

9. 定理 . Dirichlet 定理.

若 $f(x)$ 的 $T=2\pi$，且在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可微

则当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时. $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛于 $f(x)$ 左右极限的平均值

即 $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{ 为间断点} \end{cases}$$

10. 定理：Fourier 级数的逐项积分定理

$f(x)$ 的 $T=2\pi$，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积

其 Fourier 级数为 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

对 $\forall x, c\in[-\pi,\pi]$，有

$$\int_c^x f(t)dt=\int_c^x\frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_c^x\cos nt\,dt+b_n\int_c^x\sin nt\,dt\right)$$

无论傅里叶级数是否收敛. 总可以逐项积分

Fourier 级数特有性质.

11. 对于非周期函数，若 $f(x)$ 只是在 $[-\pi,\pi]$ 上有定义，且满足狄氏条件，则也可展开为傅里叶级数

作法：周期延拓，令 $F(x)$ 的 $T=2\pi$，$F(x)=f(x)$，$(-\pi,\pi)$，
展开 $F(x)$，也就展开了 $f(x)$

12. eg. 设 $f(x)$ $T=2\pi$，在 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)=x^2$
则 $f(x)$ 可展成傅里叶级数，并且证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

解. 其傅里叶系数

分部积分

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=(-1)^n\frac{4}{n^2}\quad n\neq 0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx=0$$

奇函数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2.$$

因为 $f(x)$ 为连续函数，所以 $f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$

令 $x=\pi$，则有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

eg 已知 $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4} & -\pi<x<0\\ \frac{\pi}{4} & 0\leq x<\pi\end{cases}$ 的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

则 $A=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}\cdots=(\quad)$

解 $f(\frac{\pi}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}\cdots=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{1}{3}f(\frac{\pi}{2})$

所以 $A=f(\frac{\pi}{2})+\frac{1}{3}f(\frac{\pi}{2})=\frac{4}{3}f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{3}$

DATE / /

eg. 设 $T=2\pi$ 的 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 内表达式为

$$f(x)=\begin{cases} bx, & -\pi\le x<0 \\ ax, & 0\le x<\pi \end{cases} \quad (a>b>0)$$

求其傅里叶级数的和函数 $S(x)$, $S(6)\cdot S(5\pi)$

解: 函数满足 Dirichlet 充分条件, 且仅在 $x=(2k+1)\pi$ 处不连续

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\ne(2k+1)\pi \\ \frac{(a-b)\pi}{2} & x=(2k+1)\pi \end{cases}$$

$$S(6)\cdot S(5\pi)=\frac{b(6-2\pi)(a-b)\pi}{2}$$

13. 正弦级数和余弦级数.

(1) 对 $T=2\pi$ 的奇函数 $f(x)$.

$$\begin{cases} a_n=0 \\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx \end{cases}$$

傅里叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$ 称为正弦级数

(2) 对 $T=2\pi$ 的偶函数 $f(x)$.

$$\begin{cases} a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx \\ b_n=0 \end{cases}$$

傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 称为余弦级数

14. 在 $[0,\pi]$ 上的函数展成正弦级数与余弦级数.

$f(x)$, 定义于 $[0,\pi]$, 延拓为 $T=2\pi$ 的 $F(x)$

令 $F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le\pi \\ g(x), & -\pi<x<0 \end{cases}$ 且 $F(x+2\pi)=F(x)$

有如下两种情况 $\begin{cases} \text{奇延拓} \\ \text{偶延拓} \end{cases}$.

(1) 奇延拓

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x\leq\pi \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

正弦级数：$f(x) \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (0<x<\pi)$

注意端点！ 在端点处是否成立依赖于 $F(x)$ 在端点处是否连续

(2) 偶延拓

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0\leq x\leq\pi \\ f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

余弦级数：$f(x) \leftrightarrow \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (0\leq x\leq\pi)$.

eg 对 $f(x)=x+1 \ (0\leq x\leq\pi)$ 分别展开为正弦级数和余弦级数

解：① 正弦级数：

奇延拓，得 $F(x)$.（在 $k\pi$ 点不连续）.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,dx=\frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi+2}{n} & n=2k-1 \\ -\frac{2}{n} & n=2k\end{cases}$$

所以 $x+1=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\cdots\right] \quad (0<x<\pi)$

② 余弦级数

偶延拓

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & n=2k \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n=2k-1\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,dx=\pi+2$$

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\cdots+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right] \quad (0\leq x\leq\pi)$$

No.
DATE / /

15、 $T=2l$ 的 $f(x)$. 傅里叶级数展开

变量代换 令 $z=\frac{\pi x}{l}$

⇓

$T=2\pi$ 的 $F(z)$

定理：若 $f(x)$ 满足狄氏条件，且 $T=2l$

则 $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$，$x$ 是 $f(x)$ 的连续点

其中
$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \\ a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx. \end{cases}$$
$n=0,1,2\cdots$

eg 将函数 $f(x)=10-x$ $(5<x<15)$ 展成傅氏级数

解：作 $T=10$ 的延拓得 $F(x)$. 在 $(-5,5)$ 内 $F(x)=-x$ $(-5<x<5)$

满足收敛定理条件，且展开式在 $(5,15)$ 内收敛于 $f(x)$

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5(-x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx=(-1)^n\frac{10}{n\pi}.$$

所以 $F(x)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$ $x\neq5(2k+1)$, $k\in Z$

$\therefore 10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$ $(5<x<15)$

1.6 eg. 如何将定义在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的可积函数 $f(x)$ 延拓

s.t $f(x)$ 的 Fourier 级数有展开 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x$

$$\frac{2n\pi x}{T} = nx \Rightarrow T = 2\pi$$

解: $f(x)$ 缺少 $\sin nx$ 项, 因此一定是 $T=2\pi$ 的偶函数 $F(x)$

$a_{2n} = 0$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\cos 2nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(x)\cos 2nx\,dx\right]$$

$$0 = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-u)\cos 2n(\pi-u)\,du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(x)\cos 2nx\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[f(\pi-x)+F(x)\right]\cos 2nx\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right],\ F(x) = -f(\pi-x)$$

DATE / /

eg $f(x)=\begin{cases} x & 0<x\le \frac{1}{2} \\ 2-2x & \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$ 的傅里叶展开式为

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\pi x$$

其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx$.

解：由 $b_n=0$，$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx$ 知是偶延拓. $T=2$

$S(-\frac{11}{2})=S(-\frac{11}{2}+3T)=S(\frac{1}{2})$

$x=\frac{1}{2}$ 是不连续点，　$S(\frac{1}{2})\neq f(\frac{1}{2})$

由 Dirichlet 定理. $S(\frac{1}{2})=\frac{f(\frac{1}{2}+0)+f(\frac{1}{2}-0)}{2}=\frac{3}{4}$