数项级数

一、常数项级数的概念及其收敛性

1. 数列：$x_1, x_2, \cdots x_n \cdots$

将$\boxed{\text{和式 } x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots}$称为一个数项$\boxed{\text{级数}}$，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

其中 x_n 称为级数的通项

对 $\forall n \in N^*$，称级数前 n 个通项的和为 级数前 n 项部分和

$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

2、如果 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，极限 S 叫做 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的和.

常数项级数收敛（发散）$\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在（不存在）.

3 等比级数（几何级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} |q| \geq 1. & \text{发散} \\ |q| < 1. & \text{收敛} \end{cases}$$

4. 常数项级数基本性质

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛.

且 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

② 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = t$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = s \pm t$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n \pm \beta v_n) = \alpha s \pm \beta t.$$

③ 添加、删去或改变级数的有限项不影响级数敛散性、

④ $\boxed{\text{收敛级数}}$满足结合律，即加括号后所成的级数仍然收敛于原来的和、

注意. 发散级数不满足结合律.

eg. $1-1+1-1+\cdots$ 发散

$(1-1)+(1-1)\cdots$ 收敛

⑤ 如果括号中各项符号相同，且加括号后收敛，则原级数也收敛，且和不变

证. $(a_1+a_2+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+(a_{n_{k-2}+1}+\cdots+a_{n_{k-1}})+(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots$

$= b_1+b_2+\cdots+b_k+\cdots$

其中 $b_k=a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$. 各项符号相同

新级数部分和 $U_1, U_2 \cdots U_k \cdots$ 则 $U_k=U_{k-1}+b_k$.

已知新级数收敛 $\lim\limits_{k\to\infty} U_k=\sigma$

设原级数部分和 $S_1, S_2 \cdots S_n \cdots$ $S_n=a_1+\cdots+a_n$

显然 $S_{n_k}=U_k$

要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\sigma$, 当 $n_{k-1}<n\le n_k$ 时.

不妨设 $b_k=a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}\ge 0$. 则 $a_{n_{k-1}+1},\cdots a_{n_k}\ge 0$

则 $U_{k-1}\le S_n\le S_{n_k}=U_k$. 即 $U_{k-1}\le S_n\le U_k$

两边同取极限. 由夹逼定理, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\sigma$.

5. Cauchy 收敛原理.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in N^*$. s.t $n>N$ 时.

$\forall p\in N^*$ 恒有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|<\varepsilon$.

证. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在 $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in N^*$ s.t $n>N$ 时. 对 $\forall p\in N^*$ $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$

即 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|<\varepsilon$.

eg. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n!)}$ 的敛散性

解：$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a\cos k+b\sin k}{k(k+\sin k!)}\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{|a|+|b|}{k(k-1)}\right|$

$\leq (|a|+|b|)(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}) = (|a|+|b|)(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p})$

$\leq \frac{(|a|+|b|)}{n} < \varepsilon$

因此 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\frac{|a|+|b|}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时 对一切 $p\in N^*$，原式 $<\varepsilon$.

由 Cauchy 定理知，该级数收敛

6. 逆定理：

$\exists\varepsilon_0$，$\forall N\in N^*$，s.t $n>N$ 时，$\exists p$ s.t. $|S_{n+p}-S_n|>\varepsilon_0$

eg. 讨论调和级数 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 的敛散性

解：$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\forall N\in N^*$，s.t $n>N$ 时，$\exists p=n$. s.t $|S_{n+p}-S_n|>\frac{1}{2}$

所以该调和级数发散

7. 收敛的必要条件

级数收敛 $\Rightarrow$ 其一般项 x_n 趋于 0，即 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$

eg 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$ 的敛散性.

解：级数通项 $\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\longrightarrow\frac{1}{e}\neq 0$

所以级数发散.

正项级数的比较判别法

1. 正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中各项均有 $u_n \ge 0$.

   特征：$\{S_n\}$ 单增.

2. 定理：

   正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和所成的数列 S_n 有界.

eg. 设 $a_n>0$，求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛. ($S_n=a_1+\cdots+a_n$)

证：∵ $a_n>0$，∴ $S_n\uparrow$. 设 $u_n=\frac{a_n}{S_n^2}>0$

$$u_n=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}\le\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}.$$

$$0<T_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\le u_1+\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)=u_1+\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_n}<\frac{2}{a_1}$$

所以 T_n 有界，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

3. 比较判别法. 可以从某一项开始

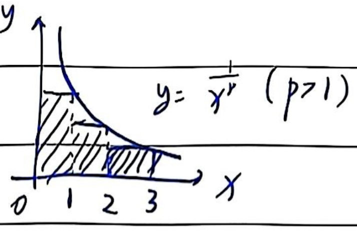
   设 $0\le u_n\le v_n$ 则

   若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

   若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

eg 讨论 p-级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ ($p>0$) 的收敛性.

解.



由图. $\frac{1}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\le 1+\int_1^n\frac{dx}{x^p}=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}$$

即 S_n 有界. p-级数收敛

$$p\text{-级数}\begin{cases}\text{当 } p>1 \text{ 时 收敛}\\ \text{当 } p\le 1 \text{ 时. 发散}\end{cases}$$

eg. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，反之不成立。

证）由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

当 $n > N$ 时，$u_n < 1 \Rightarrow u_n^2 \leq u_n$

由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

反之，举反例：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

4 比较判别法的极限形式

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，

则
① $0 < l < \infty$ 时 同敛散
② $l = 0$ 时 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
③ 当 $l = +\infty$ 时 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

推论：① 如果 $\lim_{n\to\infty} n u_n = l > 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} n u_n = +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

② 如果 $p > 1$，且 $\lim_{n\to\infty} \underline{n^p u_n}$ 存在，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

和 p 级数同敛散

eg. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性。

不妨取 $p = \frac{3}{4}$，则 $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{-\frac{1}{4}}} = +\infty$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 发散

eg 判断下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

解. $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \sim \frac{1}{n}$. 该级数发散

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln n}}$

解: $[\ln(\ln n)]^{\ln n} = [e^{\ln\ln\ln n}]^{\ln n} = [e^{\ln n}]^{\ln\ln\ln n} = n^{\ln\ln\ln n}$

$\exists N$, s.t. $n > N$ 时 $\ln\ln\ln n > 2$

$\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}} < \frac{1}{n^2}$ ∴ 收敛.

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln\frac{n+1}{n-1} \quad (p>0)$

解) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln\frac{n+1}{n-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^p \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{2}{n}$

$= 2^{1-p}\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{p}{2}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{p}{2}}} = 2^{1-p}$ ∴ $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛.

eg 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 的收敛性

解) 本题、$\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的麦克劳林展开式为

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$a_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$. 故原级数收敛

eg. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ $(a>0)$ 的敛散性

解：记 $u=\frac{1}{1+a^n}$

① $a<1$ 时 $\lim_{n\to\infty} u=1\neq 0$ 级数发散.

② $a=1$ 时 $\lim_{n\to\infty} u=\frac{1}{2}\neq 0$ 级数发散

③ $a>1$ 时 $u_n<\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$ 几何级数收敛

eg. 设 $a_n>0$. $\{na_n\}$ 有界，判断 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 的收敛性

解：$\because$ na_n 有界 且 $a_n>0$，所以 $\exists M>0$. s.t. $na_n\leq M$

则 $a_n\leq\frac{M}{n}$. 于是 $0<a_n^2<\frac{M^2}{n^2}$ 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

eg. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ $(a>0)$

解 ① $0<a<1$ 时. 有 $0<u_n<a^n$ 几何级数收敛

② $a\geq 1$ 时. $0<u_n<\frac{1}{(1+a)\cdots(1+a^{n-1})}<\frac{1}{2^{n-1}}$ 级数收敛.

5. Cauchy 判别法

① 若 $\exists 0<q<1$. s.t. $n>N$ 时，有 $\boxed{\sqrt[n]{a_n}\leq q<1}$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

② 若对无穷多个 n. 有 $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

证：① $\sqrt[n]{a_n}\leq q \Rightarrow a_n\leq q^n$ 级数收敛.

② 因为有无穷多个，所以 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$, 级数发散

6. Cauchy 判别法的极限形式

设 $a_n>0$ 且 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q$，则

(1) 当 $q<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。 (2) 当 $q>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

（$q=1$ 时判别法失效）。

eg. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ 的敛散性

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{e}{3}<1$

故原级数收敛。

eg. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性，其中 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n^2}. & 奇\\ \frac{1}{n} & 偶\end{cases}$.

解 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$. Cauchy 判别法失效

但注意到 $S_{2n}=\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right]+\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]$

$\geq\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\to+\infty$. 因此级数发散.

7. D'Alembert 判别法.（比值判别法）

引理：设 $a_n\geq0$. $b_n\geq0$. $\exists n_0$ s.t. $n\geq n_0$ 时，有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}$

① 若 $\sum b_n$ 收敛. 则 $\sum a_n$ 收敛

② 若 $\sum a_n$ 发散. 则 $\sum b_n$ 发散.

大敛则小敛

小散则大散

证：当 $n\geq n_0$ 时，有 $\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\leq\frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}$，$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\leq\frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}$，$\cdots$ $\frac{a_n}{a_{n-1}}\leq\frac{b_n}{b_{n-1}}$

上述不等式相乘. 得 $\frac{a_n}{a_{n_0}}\leq\frac{b_n}{b_{n_0}}$ 即 $a_n\leq\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}b_n$. 再比较判别法即可

No.

DATE / /

8. D'Alembert 判别法：设 $a_n>0$

① 若存在 $0<q<1$，s.t. $n\geq n_0$ 时，有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

② 当 $n>N$ 时 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$. 则 $\sum a_n$ 发散

证：① 由引理. 取 $b_n=q^n$ 即可

②. 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$ 则 $a_{n+1}\geq a_n$，则 $a_n \nrightarrow 0$，级数发散

D'Alembert 判别法的极限形式.

设 $u_n>0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

则 ① $\rho<1$ 时级数收敛 ② $\rho>1$ 时级数发散 ③ $\rho=1$ 时失效.

eg. 判断级数敛散性. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{10}\to+\infty$. 级数发散

eg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\,2n}{2n\,(2n+1)}=1$. 比值判别法失效.

$u_n=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{4n^2}$ 级数收敛

eg 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}=0$

证. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}$. 级数收敛 $\Rightarrow$ 通项极限为0

eg. 设 $x\in(0,+\infty)$，讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ 敛散性

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{x}{e}$

① $0<x<e$ 时 级数收敛

② $x>e$ 时 级数发散

③ $x=e$ 时，失效，但 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1 \Rightarrow \{a_n\}\uparrow$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$，级数发散.

也可利用 Stirling 公式：$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}$

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2\pi n}\neq 0$

9 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ 时，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$.

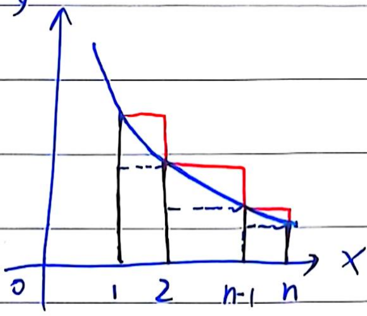
10 Cauchy 积分判别法

设在 $[1,+\infty)$ 时 $f(x)$ 非负、连续、递减

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ 同敛散

且级数收敛时有 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}f(n)\le\int_1^{+\infty}f(x)\,dx\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$

证明时 利用 $\sum\limits_{k=2}^{n}f(k)\le\int_1^{n}f(x)\,dx\le\sum\limits_{k=1}^{n-1}f(k)$



No.

DATE / /

eg. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 的敛散性.

解: 考虑 $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^p} d(\ln x)$

$p>1$ 时, 级数收敛; $p \le 1$ 时, 级数发散

小定理: 任给一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 可以构造另一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. s.t. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

证: 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

令 $C_n = S - S_n$, $b_n = \sqrt{C_{n-1}} - \sqrt{C_n}$, $C_0 = S$

因为 $C_{n-1} \ge C_n$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数

令 $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $T_n = \sqrt{S} - \sqrt{C_n}$. $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{S} - \sqrt{C_n}) = \sqrt{S}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_{n-1} - C_n}{\sqrt{C_{n-1}} - \sqrt{C_n}} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{C_{n-1}} + \sqrt{C_n}) = 0.$$

得证

一般项级数的收敛性

1. 设 $\{a_n\}$ 单减 且 $a_n>0$.

则若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\Rightarrow$ 有 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ ☆☆☆

反之不成立. 如 $a_n = \frac{1}{n\ln n}$

2. 正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

定理: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 称为绝对收敛.

证: 方法①: 设 $v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$, 则 $0<v_n\le|u_n|$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

方法②: Cauchy 收敛原理.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in N^*$. s.t $n>N$ 时, $\forall p\in N^*$. 有 $|u_{n+1}|+\cdots+|u_{n+p}|<\varepsilon$

而 $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\le|u_{n+1}|+\cdots+|u_{n+p}|<\varepsilon$. 所以收敛

3. Leibniz 判别法.

定义: 设 $u_n>0$. 级数 $u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$ 称为交错数级.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$

Leibniz 定理:

如果交错级数满足条件 $\begin{cases} ① \ u_n>u_{n+1} \\ ② \ \lim_{n\to\infty}u_n=0 \end{cases}$ 都可以从某一项开始.

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,

称之为莱布尼茨级数.

证 Cauchy 收敛原理

$\forall \varepsilon, p>0$. $\exists N\in N^*$ s.t $n>N$ 时

No.

DATE / /

p为偶数时.

$$|S_{n+p}-S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k-1}a_k\right| = |(a_{n+1}-a_{n+2})+(a_{n+3}-a_{n+4})+\cdots+(a_{n+p-1}-a_{n+p})|$$

$$=(a_{n+1}-a_{n+2})+\cdots+(a_{n+p-1}-a_{n+p})$$

$$=a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-\cdots-(a_{n+p-2}-a_{n+p-1})-a_{n+p} \le a_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

p为奇数时同.

所以由 Cauchy 收敛原理知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛

eg 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 的敛散性. $(p>0)$

解: $u_n=\frac{1}{n^p}\to 0$. 且单减. 故 $\sum$ 级数收敛.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ $\begin{cases}\text{绝对收敛} & p>1\\ \text{条件收敛} & p\le 1\end{cases}$

4. 分部求和公式.

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 为两个实数列, 则对 $\forall n\in N^*$ 有

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})+S_nb_n}$$

其中 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$, $S_0=0$

5. 引理一

设 $\{b_n\}$ 为单调数列. $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$

若 $|S_k|\le M$. $k=1,2,\cdots n$. 则 $\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right| \le M(|b_1|+2|b_n|)$

6. Dirichlet 判别法

设 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 为两个数列，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

如果它们满足 $\begin{cases} ① \ \{a_n\} \text{ 的部分和数列 } \{S_n\} \text{ 有界} \\ ② \ \{b_n\} \text{ 单调且 } \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \end{cases}$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

证：设 $|S_n| \le M$，则由引理 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le M(|b_{n+1}| + 2|b_n|)$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N^*$，s.t $n > N$ 时

$|b_{n+1}| < \varepsilon$ 且 $|b_{n+p}| < \varepsilon$.

所以也 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le M(\varepsilon + 2\varepsilon) = 3M\varepsilon$. 所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛

7. Abel 判别法

设 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 是两个实数列，满足 $\begin{cases} ① \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \\ ② \ \{b_n\} \text{ 单调有界.} \end{cases}$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

证：$\because$ $\{b_n\}$ 单调有界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 存在，所以 $\{b_n - b\}$ 单调 $\to 0$.

因为 $\{a_n\}$ 收敛，所以 $\{S_n\}$ 有界，由 Dirichlet 判别法.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ 收敛. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 故收敛

eg. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^p}$ $(0 < x < \pi,\ p > 0)$ 的敛散性.

解：① $\left\{\dfrac{1}{n^p}\right\} \downarrow \to 0$

$\forall x \in (0, 2\pi)$，$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx \cdot \sin\dfrac{x}{2}\right|$

而 $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx \sin\dfrac{x}{2} = \sin\dfrac{x}{2}(\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx)$ 　积化和差.

$= \sin\frac{x}{2}\sin x + \sin\frac{x}{2}\sin 2x + \cdots + \sin\frac{x}{2}\sin nx$

$= \dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{3x}{2} + \cos\dfrac{3x}{2} - \cos\dfrac{5x}{2} + \cdots - \cos\dfrac{(n+1)x}{2}\right] = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(n+1)x}{2}}{2}$

$\therefore \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin\frac{x}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{(n+1)x}{2}\right|\right| \leq 1$

所以 $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

由Dirichlet判别法知原级数收敛

(同理可证 $\sum_{n=1} \frac{\cos nx}{n^p}$，$x \neq 2k\pi$ 收敛)

② 讨论绝对收敛还是条件收敛.

当 $p>1$ 时，有 $\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| \leq \frac{1}{n^p}$ $(n=1,2\cdots)$ 绝对收敛.

当 $0<p\leq 1$ 时 $\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos 2nx}{2n^p}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^p}$ 发散. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 收敛. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|$ 发散.

原级数条件收敛

2. 定理：若 $\{a_n\}$ 具有性质 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 对 $\forall x \in (0, 2\pi)$ 都收敛

eg. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性

解：$(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = (-1)^n \frac{1}{2n} + (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{n}$

由莱布尼茨判别法 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n}$ 收敛.

又 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[2n+(n+1)\pi]}{n}$ 收敛.

所以原级数收敛.

但 $|a_n| = \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2n}{2n}$ 发散.

故原级数条件收敛.

DATE / /

eg. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n$ 的敛散性

解) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}$ 收敛、 $(1+\frac{1}{n})^n$ 单调有界

由 Abel 判别法知原级数收敛

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{\cos 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n\right|}{\left|\frac{\cos 3n}{n}\right|}=e$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n\right|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos 3n}{n}\right|$ 同敛散

因为后者发散，所以前者发散，所以原级数条件收敛

eg. 讨论 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n(5-\arctan n)$ 的敛散性

解: 由 Leibniz 判别法，$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$ 收敛.

而 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调有界，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛 (Abel)

又 $\{5-\arctan n\}$ 单调有界，所以原级数收敛 (Abel)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n(5-\arctan n)\right|}{\frac{1}{\ln n}}=(5-\frac{\pi}{2})e$

所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n(5-\arctan n)\right|$ 与 $\frac{1}{\ln n}$ 同敛散，即发散，

所以原级数条件收敛