一种 (或许) 新的李导数理解方法

Manifold

日期：2025 年 8 月 8 日

摘　要

本文提出了一种新的李导数的理解和定义方法，旨在简化传统定义导致的在定理证明中的复杂拉回和推前映射操作。通过引入单参微分同胚群的概念，我们首先尝试定义流形上的导数，但发现初步尝试存在张量性质的问题。随后，我们详细讨论了微分同胚流形间与单参微分同胚群相关的拉回和推前映射的定义，并基于这些映射严格定义了李导数。我们证明了李导数在标量场上的作用等价于切矢，并推导出李导数在适配坐标系中的分量表达式。本文的新方法使李导数的定义和相关定理更加直观和易于理解。尽管作者对微分几何的理解尚浅，但本文仍希望为读者提供一种新的视角来认识李导数。

关键词： 李导数, 单参微分同胚群, 拉回映射, 推前映射, 微分同胚

1　前言

众所周知，李导数的定义及相关的定理均涉及多次拉回和推前映射，并且常常有主动和被动语言的混杂，导致人们理解上有十分大的困难。然而，笔者在学习的过程中发现了一种非常清楚自然的理解方式，按这种路子走下去，各种证明起来非常弯弯绕绕的定理都变得清楚异常，因此在下文中详细介绍。

但仍须注意，即使是简化后的理解，仍然不是轻易能够读清楚的。若想清楚本文的想法，须尽可能读明白 §2.2 中对各种推前映射和拉回映射的定义。

2　李导数溯源

2.1　单参微分同胚群、对流形上的导数定义的初次尝试

常规的导数我们已经非常清楚，现在的需求是在微分流形上定义出与之类似的导数运算。已经知道，M 上的一个光滑矢量场 v^a 给出一个单参微分同胚群 ϕ，[1]该群的群元 ϕ_t 可实现对流形上张量场的场点的“转移”。具体来说，可以使得流形上的张量场沿着由光滑矢量场确定的积分曲线 (轨道) 转移，ϕ_t 的下标 t 即为场点对应的曲线参数的增量。若觉得不够直观，可以参照 图 **1**。

受上述内容启发，我们第一个自然的想法就是，定义

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}|_{\phi_t(p)} - T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}|_p) \tag{1}$$

为流形 M 上 p 点处的导数。但这种定义立刻就反映出一个严重的问题，即，这样的表达式还是不是张量？如果是的话，它究竟是 $\phi(p)$ 点的张量还是 p 点的张量？实际上，它显然不再是张量了，你压根写不出其在某个坐标基矢下的分量表达式。这就意味着式(1)不是一个好的定义，但不可否认的是，这种想法是后面严格定义的基础。

[1]若 v^a 不完备，则只能给出单参微分同胚局部群。现在我们只考虑局部性质，无须明确区分局部和整体。

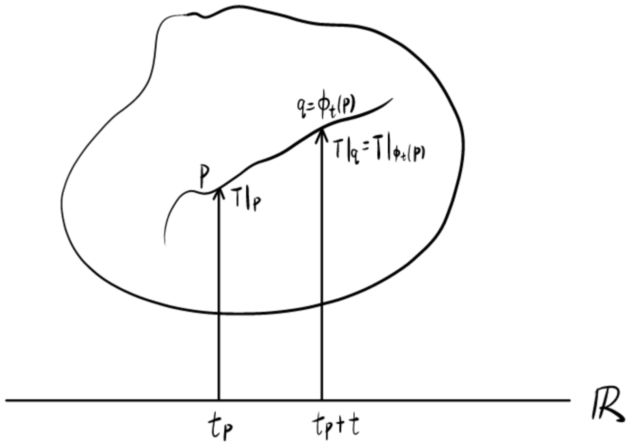

图 1: 单参微分同胚群的作用示意

2.2 理论准备：微分同胚流形间与 ϕ_t 有关的映射的定义

现在我们“否定”了前面的(1)的形式，但仍然想要利用其中的思想，因为式(1)看起来很自然，只须稍作改动即可得到最佳的定义。考虑流形间映射，我们想到可以把 $\phi_t(p)$ 点的张量值带给 p 点的张量 $\phi_t^* T|_p$，从而使得导数定义兼具自然性与张量性。具体来说，我们可以定义 M' 为流形 M 的微分同胚，ϕ_t^* 为拉回映射，ϕ_{t*} 为推前映射，f 为微分同胚映射，如图 2所示。

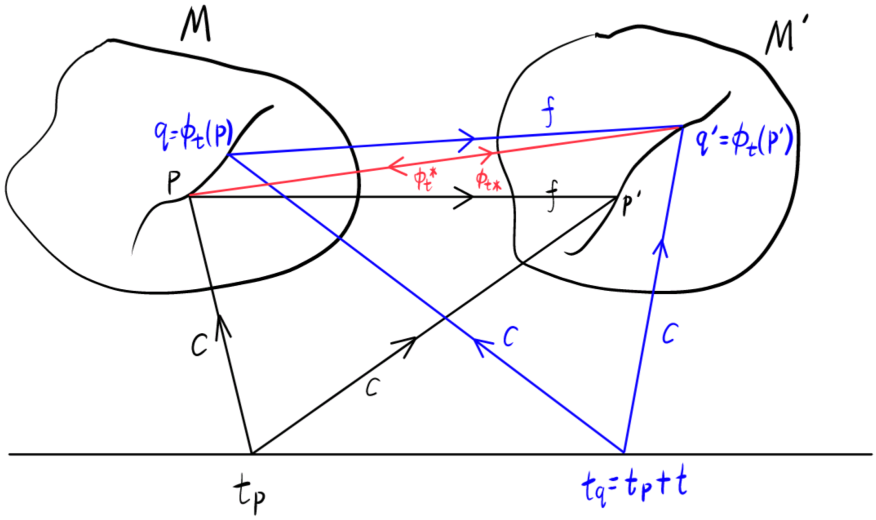

图 2: 微分同胚间的映射

现在我们基于常规的情况来定义 ϕ_t 相关的拉回映射 ϕ_t^* 和推前映射 ϕ_{t*}。具体地，拉回映射 $\phi_t^* : \mathscr{F}_{M'} \to \mathscr{F}_M$ 定义为

$$(\phi_t^* f)|_p := f|_{\phi_t(p')}, \quad \forall f \in \mathscr{F}_{M'}, p \in M, \tag{2}$$

即 $\phi^* f = f \circ \phi$。

考虑微分同胚性，对 M 还可定义矢量场的推前映射 $\phi_{t*} : \mathscr{F}(1,0)_M \to \mathscr{F}(1,0)_{M'}$ 如下：$\forall v^a \in \mathscr{F}(1,0)_M$，定义其像 $\phi_{t*} v^a \in \mathscr{F}(1,0)_{M'}$ 为

$$(\phi_{t*} v)|_p(f) := v|_{\phi(p')}(\phi_t^* f), \quad \forall f \in \mathscr{F}_{M'}. \tag{3}$$

利用式(2)和(3)，并且考虑微分同胚性，接着可定义推前映射对对偶矢量场的作用 $\phi_{t*} : \mathscr{F}(0,1)_M \to$

$\mathscr{F}(0,1)_{M'}$ 如下：$\forall \omega_a \in \mathscr{F}(0,1)_M$，定义其像 $\phi_{t*}\omega_a \in \mathscr{F}(0,1)_{M'}$ 为

$$(\phi_{t*}\omega)(\phi_{t*}v) := \omega(v), \quad \forall v \in \mathscr{F}(1,0)_M. \tag{4}$$

最终，利用式(3)和(4)，定义拉回映射 ϕ_t^* 对任意张量场的作用 $\phi_t^* : \mathscr{F}(k,l)_M \to \mathscr{F}(k,l)_{M'}$ 如下：

$$\begin{aligned}
&(\phi_t^* T'|_{\phi_t(p')})^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}|_p(\omega^1)_{a_1}\cdots(\omega^k)_{a_k}(v_1)^{b_1}\cdots(v_l)^{b_l} \\
=&T'^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}|_{\phi_t(p)}(\phi_{t*}\omega^1)_{a_1}\cdots(\phi_{t*}\omega^l)_{a_k}(\phi_{t*}v_1)^{b_1}\cdots(\phi_{t*}v_l)^{b_l}, \\
&\forall v \in \mathscr{F}(1,0)_M, \quad \omega \in \mathscr{F}(0,1)_M.
\end{aligned} \tag{5}$$

显然，此时定义出的 $\phi_t^* T'$ 是 M 中的张量场，$\phi_t^* T'|_{\phi_t(p')}$ 是 M 中 p 点处的张量。

2.3 李导数的定义

注意到 p 处张量 $\phi_t^* T'|_{\phi_t(p')}$ 在此处的坐标基矢下的分量与 T' 在 $\phi_t(p')$ 处的对应坐标基矢下的分量相等，又考虑到微分同胚性，将 T 在 $\phi_t(p)$ 处对应坐标基矢下的分量与 T' 在 $\phi_t(p')$ 处的对应坐标基矢下的分量认同，便知 p 处张量 $\phi_t^* T'|_{\phi_t(p')}$ 在此处的坐标基矢下的分量等于 T 在 $\phi_t(p)$ 处对应坐标基矢下的分量。受此启发，再将 $\phi_t^* T'|_{\phi_t(p')}$ 与 $\phi_t^* T|_{\phi_t(p)}$ 认同，结合式(1)，可定义出流形上的李导数为

$$\mathscr{L}_v T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} := \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\phi_t^* T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} - T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}) \tag{6}$$

由于李导数中涉及的曲线取决于矢量场 v^a，因此更准确地，上式应称为张量场 $T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 沿矢量场 v^a 的李导数。

3 李导数的意义

3.1 李导数对标量场的作用等价于切矢

将 f 替换式(6)中的 T，考虑式2和微分同胚间的认同，得到

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_v f|_{t=t_0} &= \lim_{t\to 0}(\phi_t^* f - f)|_{t=t_0} = \lim_{t\to 0}(f(\phi(C(t_0))) - f(C(t_0))) \\
&= \lim_{t\to 0}(f(C(t_0+t)) - f(C(t_0))) \\
&= \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=t_0} = v(f)|_{t=t_0}.
\end{aligned} \tag{7}$$

可见李导数算符在对标量场的作用结果与 v^a 积分曲线上参数 t_0 对应点切矢量对标量场的作用结果相同。若选定后面所说的适配坐标系，则也可以说其作用效果等价于偏导数算符：

$$\mathscr{L}_v f = \partial_{x^1} f. \tag{8}$$

但应注意，不能说其作用等价于普通导数算符，因为普通导数算符对标量场的作用结果是一个张量，李导数的作用结果只是其一个分量 (实数)。

3.2 李导数在适配坐标系的分量

求李导数时总要给定矢量场 v^a，可以选定它的积分曲线为 x^1 坐标线 (t 充当 x^1)，再相当任意地选定另一组与这组曲线横截 (即交点上两线切矢不平行) 的曲线作为 x^2 坐标线，这样得到的坐标系称为矢量场 v^a 的适配坐标系。

由式(6)可知，李导数对张量的作用仍是张量，写成分量式即为

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_v T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} &:= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\phi_t^* T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} - T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}) \\
&= \frac{\partial T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}}{\partial t} = \frac{\partial T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}}{\partial x^1}.
\end{aligned} \tag{9}$$

此即李导数在适配坐标系的分量表达式。之所以不能写成张量表达式 (抽象指标)，是因为上式左边在坐标变换时满足张量变换律而右边不满足。

4 结语

在本文中我们提供一种新的认识李导数的思路，在这种思路下，§3 中的结论变得无比自然，而不是晦涩难懂，弯弯绕绕。另外，值得注意的是，笔者对微分几何还只是初学者，难免有细节上的错误甚至是根本性的错误，望读者见谅。

参考文献

[1] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论上册. 2 版. 北京: 科学出版社, 2006. Print.