例10 (2021·浙江6月选考科目试题)如图1-17甲所示，空间站上某种离子推进器由离子源、间距为d的中间有小孔的两平行金属板M、N和边长为L的立方体构成，其后端面P为喷口. 以金属板N的中心O为坐标原点，垂直立方体侧面和金属板建立x、y和z坐标轴，M、N板之间存在场强为E、方向沿z轴正方向的匀强电场；立方体内存在磁场，其磁感应强度沿z方向的分量始终为零，沿x和y方向的分量B_x和B_y随时间周期性变化规律如图乙所示，图中B_0可调. 氙离子(Xe^{2+})束从离子源小孔S射出，沿z方向匀速运动到M板，经电场加速进入磁场区域，最后从端面P射出，测得离子经电场加速后在金属板N中心点O处相对推进器的速度为v_0. 已知单个离子的质量为m、电荷量为$2e$，忽略离子间的相互作用，且射出的离子总质量远小于推进器的质量.

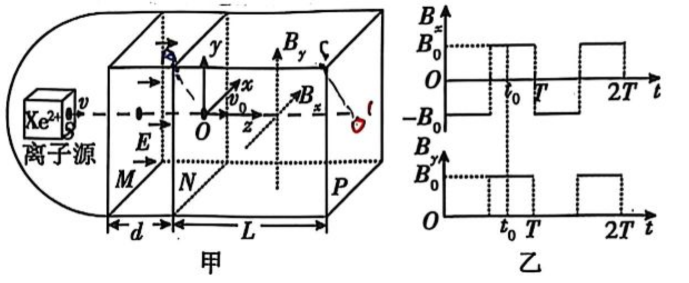


图1-17

(1)求离子从小孔S射出时相对推进器的速度大小v；

(2)不考虑在磁场突变时运动的离子，调节B_0值，使得从小孔S射出的离子均能从喷口后端面P射出，求B_0的取值范围；

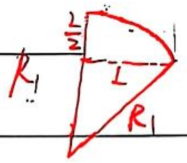
(3)设离子在磁场中的运动时间远小于磁场变化周期T，单位时间从端面P射出的离子数为n，且$B_0=\frac{\sqrt{2}mv_0}{5eL}$，求图乙中$t_0$时刻离子束对推进器作用力沿$z$轴方向的分力.

解：(1) $2eEd=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v=\sqrt{v_0^2-\frac{4eEd}{m}}$

本题中Bx方向周期性变化，看似挺复杂，但(2)(3)问将在磁场突变时运动的离子排除在外，运动便简单了。根据对称性，只研究一个方向即可

(2) 找临界情况，但有两种临界，由By的有无来决定.

①不存在By时，临界为粒子打到下极板边缘（也有上极板边缘，研究一种即可）



有 $(R_1-\frac{L}{2})^2+L^2=R_1^2$　　$\frac{mv_0}{2eB_0}=R_1$

$\Rightarrow B_0=\frac{2mv_0}{5eL}$

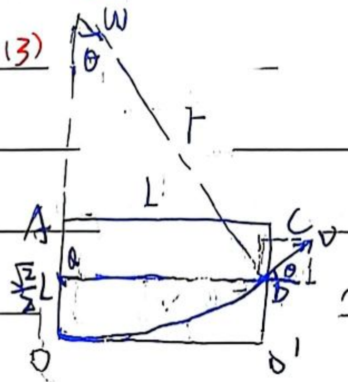
? OO'AC

②存在By时，临界为粒子打到角上. 此时粒子轨迹在OO'PN平面上

类似地，有 $(R_2-\frac{\sqrt{2}}{2}L)^2+L^2=R_2^2$　　$\frac{mv_0}{2\sqrt{2}Be}=R_2 \Rightarrow B_0=\frac{mv_0}{3eL}$

综上　$0<B_0\leq\frac{mv_0}{3eL}$

(3)



如图，粒子在平面OO'CA内运动

$r=\frac{mv_0}{2eB_0}=\frac{5}{4}L$

如图，在Rt△WQD中，$WQ=\sqrt{r^2-L^2}=\frac{3}{4}L$

$\cos\theta=\frac{WQ}{r}=\frac{3}{5}$

$F_z=nmv_0\cos\theta=\frac{3}{5}nmv_0$

[2020 山东 · 17, 14 分, 难度★★★★☆]

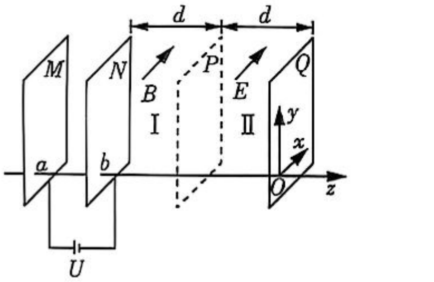
某型号质谱仪的工作原理如图甲所示. M、N 为竖直放置的两金属板，两板间电压为 U，Q 板为记录板，分界面 P 将 N、Q 间区域分为宽度均为 d 的Ⅰ、Ⅱ两部分，M、N、P、Q 所在平面相互平行，a、b 为 M、N 上两正对的小孔. 以 a、b 所在直线为 z 轴，向右为正方向，取 z 轴与 Q 板的交点 O 为坐标原点，以平行于 Q 板水平向里为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，建立空间直角坐标系 $Oxyz$. 区域Ⅰ、Ⅱ内分别充满沿 x 轴正方向的匀强磁场和匀强电场，磁感应强度大小、电场强度大小分别为 B 和 E. 一质量为 m，电荷量为 $+q$ 的粒子，从 a 孔飘入电场（初速度视为零），经 b 孔进入磁场，过 P 面上的 c 点（图中未画出）进入电场，最终打到记录板 Q 上. 不计粒子重力.

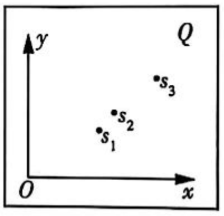
(1) 求粒子在磁场中做圆周运动的半径 R 以及 c 点到 z 轴的距离 L；

(2) 求粒子打到记录板上位置的 x 坐标；

(3) 求粒子打到记录板上位置的 y 坐标（用 R、d 表示）；

(4) 如图乙所示，在记录板上得到三个点 s_1、s_2、s_3，若这三个点是质子 ^1_1H、氚核 ^3_1H、氦核 ^4_2He 的位置，请写出这三个点分别对应哪个粒子（不考虑粒子间的相互作用，不要求写出推导过程）.



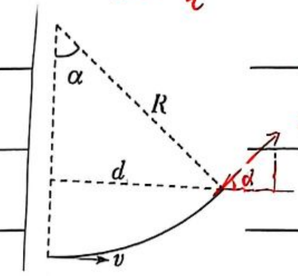


解：很简单的一道高考题

根据运动的独立性，

进行运动的分解即可

(1) $R=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um}{q}}$



$L=R-\sqrt{R^2-d^2}$

$=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um}{q}}-\sqrt{\frac{2Um}{qB^2}-d^2}$

(2) 在电场中，将运动分解

在 y,z 方向上均做匀速直线运动

在 x 方向上做初速度为0的

匀加速直线运动

$v_z=v_0\cos\alpha$ （其中 $v_0=\sqrt{\frac{2qU}{m}}$）

$t=\frac{d}{v_z}$

$x=\frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2=\frac{md^2E}{4mU-2qd^2B^2}$

(3) 在电场中 $\Delta y=d\tan\alpha=\frac{d^2}{\sqrt{R^2-d^2}}$，$y=L+\Delta y=R-\sqrt{R^2-d^2}+\frac{d^2}{\sqrt{R^2-d^2}}$

(4) 看比荷即可. (2)中 $x=\frac{md^2E}{4mU-2qd^2B^2}=\frac{d^2E}{4U-2d^2B^2\cdot\frac{q}{m}}$

比荷越大，x 越大. 故 S_1 为氚核，S_2 为氦核，S_3 为质子.

这个山东题和背面的推进器看上去差不多，其实完全不一样. 山东题是把运动分解到平面上，但背面的离子推进器是找运动的平面，空间性更强.

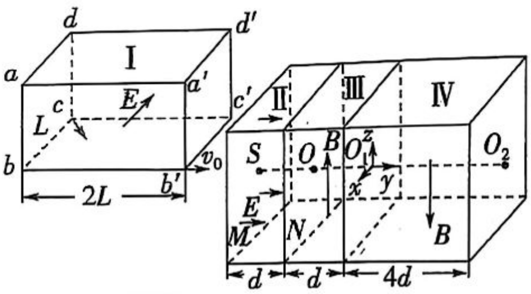
1. (13分)如图所示，在长方体Ⅰ区域内，有垂直平面$abb'a'$的匀强电场，电场强度为E，已知bc长为L，bb'长为$2L$。Ⅱ区为电加速区，由间距为d的正中间有小孔S、O的两个正方形平行金属板M、N构成，金属板边长为$l=\frac{3}{2}\sqrt{3}d$，Ⅲ、Ⅳ区为长方体形状的磁偏转区，水平间距分别为d、$4d$，其竖直截面与金属板形状相同。Ⅳ区左右截面的中心分别为O_1、O_2，以O_1为坐标原点，垂直长方体侧面和金属板建立x、y和z坐标轴。m、n间匀强电场大小为E，方向沿$+y$方向；Ⅲ、Ⅳ区的匀强磁场大小相等、方向分别沿$+z$、$-z$方向。现有一电荷量为$+q$、质量为m的粒子以某一初速度从c点沿平面$cbb'c'$进入电场区域，经b'点垂直平面$a'b'c'd'$由小孔S沿$+y$方向进入Ⅱ区，经过一段时间后恰好能返回到小孔S，不考虑粒子的重力。求：

(1)粒子经过b'点的速度大小v_0；

(2)粒子经过小孔O时的速度大小v；

(3)粒子在磁场中相邻两次经过小孔O时运动的时间及磁感应强度B的大小；

(4)若在Ⅲ区中$+x$方向增加一个附加匀强磁场，可使粒子经过小孔O后恰好不能进入到Ⅳ区，并直接从Ⅲ区前表面（$+x$方向一侧）的P点飞出，求P点坐标(x_p，y_p，z_p)。

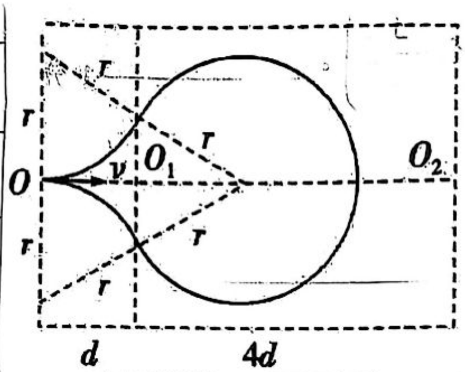


解：(1) $v_0=\sqrt{\frac{2EqL}{m}}$

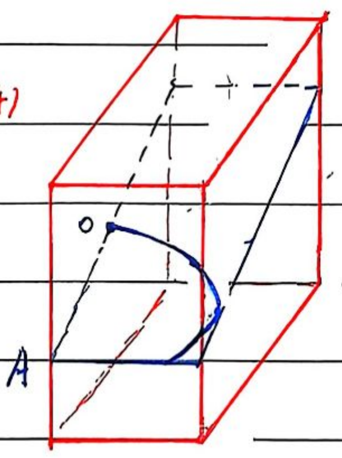
(2) $v=\sqrt{\frac{2Eq(d+L)}{m}}$

(3) $B=d\sqrt{\frac{3Em(d+L)}{2q}}$

$t=\frac{14\pi d}{3}\sqrt{\frac{m}{6Eq(d+L)}}$

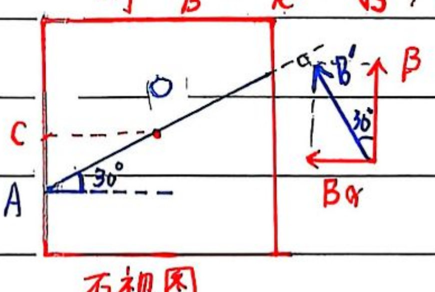


(4)

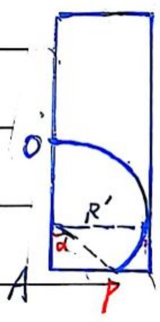


先确定粒子运动的平面α 粒子运动半径$R'=d$

则 $\frac{B'}{B}=\frac{R}{R'}=\frac{2}{\sqrt3}$，由此可确定$B'$的方向和α与底面的夹角.



右视图



$OA=\frac{\frac{l}{2}}{\cos30^\circ}=R'(1+\cos\alpha)$

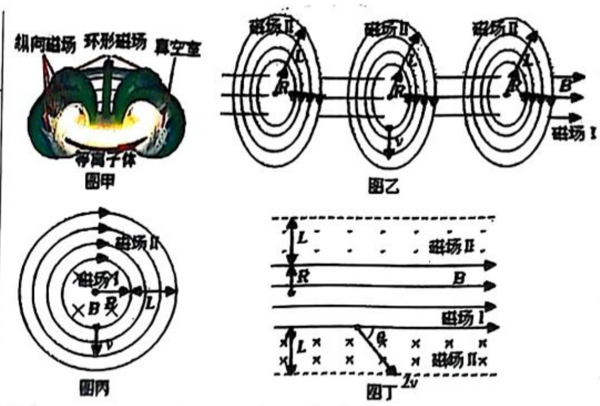
$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}$. $\alpha=60^\circ$

$AC=\frac{l}{2}\tan30^\circ=\frac{3}{4}d$. $AP=R'\sin\alpha=\frac{\sqrt3}{2}d$

5 11 6

$\therefore P\left[\frac{3\sqrt3 d}{4},\ (\frac{\sqrt3}{2}-1)d,\ -\frac{3d}{4}\right]$

我国目前采用的是托卡马克（如图甲）磁约束装置作为核反应“容器”，在2021年5月，中科院合肥物质科学研究院研发的“*EAST*人造太阳”持续“燃烧”了101秒。某实验室简化的模拟磁约束磁场如图乙所示，半径为R的足够长水平圆柱形区域内分布水平向右的匀强磁场Ⅰ，并已知磁感应强度为B；圆柱形磁场区域Ⅰ外侧分布有厚度为L的环形磁场Ⅱ，其磁感应强度大小处处相同，方向与B(磁场Ⅰ)垂直，其左视图与纵截面图分别如图丙、图丁所示。某时刻速度为$v=\dfrac{BqR}{m}$的氘原子核（已知氘原子核质量为m，电荷量为q)从水平磁场Ⅰ最低点竖直向下射入磁场Ⅱ，氘原子核恰不能飞出磁场区域，忽略粒子重力和空气阻力，不考虑相对论效应。求：

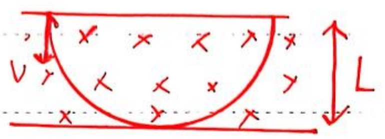


(1)环形磁场Ⅱ的磁感应强度大小；

(2)该氘原子核从出发后到第二次回到水平磁场Ⅰ最低点并且速度方向向下所需要的时间T

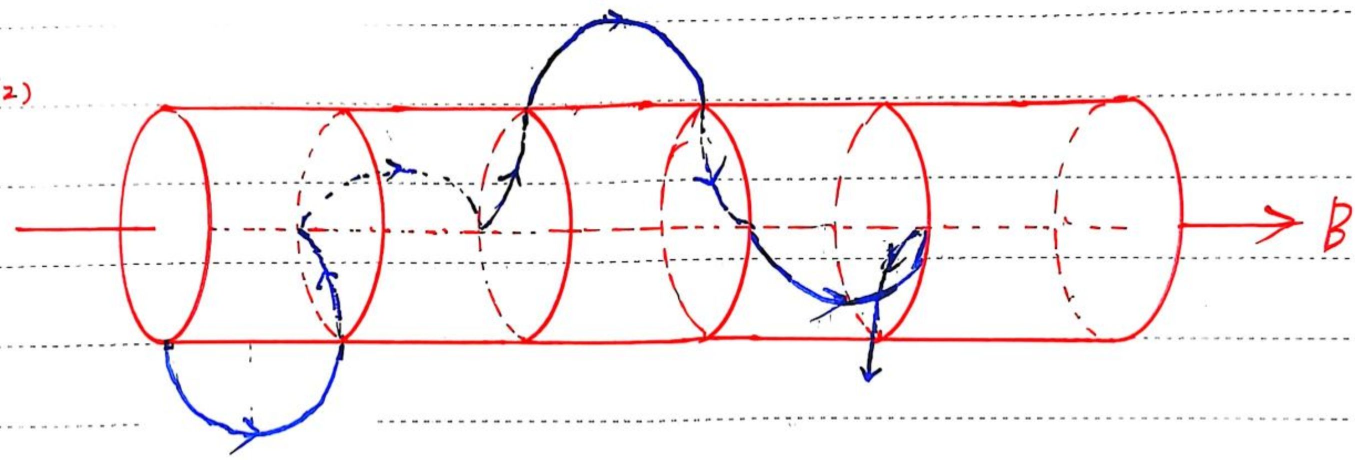
(3)若氘原子核以$2v$的速度在水平磁场Ⅰ最低点射出，在竖直平面内与水平方向成$\theta=60^\circ$角射入磁场Ⅱ(如图丁所示)，则从出发后到第二次回到水平磁场Ⅰ最低点的时间内，氘原子核的水平位移为多少。(且速度向下)

解：(1)



$\dfrac{mv}{qB_2}=L \Rightarrow B_2=\dfrac{B_1R}{L}$

(2)



如图为粒子运动的轨迹，粒子在Ⅰ中运动了4个$\frac{1}{4}$圆周

所以粒子在磁场Ⅰ区域轨迹如图1

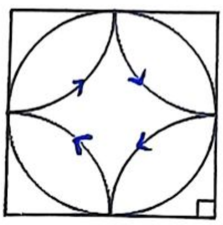


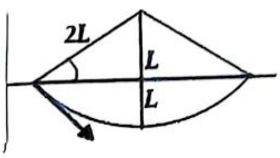
图1

$t_1=\dfrac{2\pi m}{qB}$

粒子在Ⅱ中运动了4个半圆，$t_2=2\cdot\dfrac{2\pi m}{qB_2}=\dfrac{4\pi mL}{qBR}$

$\therefore T=t_1+t_2=\dfrac{2\pi m}{qB}\left(1+\dfrac{2L}{R}\right)$

(3)

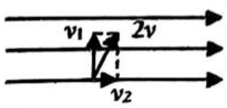


粒子在Ⅱ轨迹如左图，每次在Ⅱ中运动，水平位移$\Delta x_1=2\sqrt{3}$

粒子在Ⅰ中，由于速度与磁场夹角为60°，所以粒子做的是等距螺旋运动。

粒子由磁场Ⅱ进入磁场Ⅰ时，其速度可分解为与磁场Ⅰ垂直的分速度$v_1=\sqrt{3}v$

与磁场Ⅰ平行的分速度$v_2=v$，如图3



粒子以v_1在磁场Ⅰ中做圆周运动轨迹如图4，

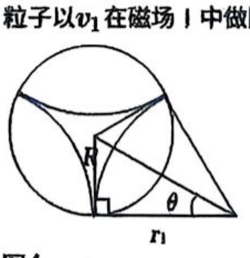


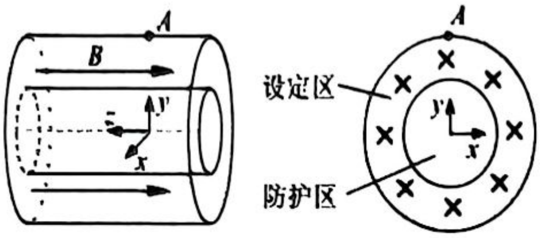
图4

粒子在Ⅰ中的时间 $t'=\frac{3\times 60^\circ}{360^\circ}\cdot\frac{2\pi m}{qB}=\frac{\pi m}{qB}$

Ⅰ中水平位移 $\Delta x_2=v_2t'=\pi R$

$\therefore$ 粒子总水平位移 $x=\Delta x_2+3\Delta x_1=\pi R+6\sqrt{3}L$

由于缺少地磁场的屏蔽作用，高能宇宙射线对航天员的辐射具有非常大的危害.目前，国际上正在积极探索载人航天主动防护的方法，其中某种磁防护方案为在航天器内建立同心圆柱体形屏蔽磁场，磁场分布情况如图所示.设同心圆内径$R_1=R$，外径$R_2=\sqrt{3}R$，轴向足够长.设定区内为匀强磁场，磁场方向与轴平行，设定区外和防护区内无磁场.



(1)一个质子在平行于圆柱横截面的平面内，以速度v_0沿指向圆心方向入射，该粒子恰好打不到防护区内部，求磁感应强度的大小和粒子在设定区内的运动时间。（已知质子的质量为m，电荷量为q）

(2)若宇宙中充满了大量速度大小为v_0，沿任意方向运动的质子，为了使任何质子都打不到防护区内部，求磁感应强度的大小应该满足的条件。

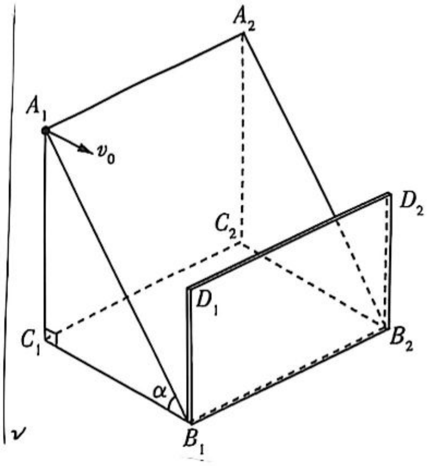
(3)若已知磁感应强度为B，以A点所在截面建立$x-y$坐标系，圆柱轴线为z轴，y轴通过A点.如有一质子以初速度$v=\frac{\sqrt{2}qBR}{m}$从A点射向防护区的C点，已知C点坐标$(0, R, (\sqrt{3}-1)R)$，求质子打到防护区的位置。

(16 分)如图所示,由直三棱柱 $A_1B_1C_1-A_2B_2C_2$ 构成的斜面体固定置于水平面上,$\triangle A_1B_1C_1$ 为直角三角形,其中 $\alpha=53°$,$A_1C_1=A_1A_2=0.4\ \text{m}$,厚度不计的矩形荧光屏 $B_1B_2D_2D_1$ 竖直安置在斜面底端,$B_1D_1=0.2\ \text{m}$。空间中有一竖直向下的匀强电场,场强 $E=2\times10^5\ \text{N/C}$,在 A_1 处可沿各水平方向发射速度大小不同的带正电粒子,粒子的电荷量 $q=2\times10^{-10}\ \text{C}$,质量 $m=5\times10^{-17}\ \text{kg}$,当粒子击中荧光屏时能使其发光,不考虑重力、空气阻力、粒子间相互作用力及粒子反弹后的运动,$\sin53°=0.8$。

(1)求带电粒子在电场中运动的加速度大小;

(2)求能使荧光屏发光的粒子的初速度大小范围;

(3)取(2)问中打到荧光屏上初速度最小的粒子,当其运动到离斜面的距离最远时,突然撤去电场,再加一个垂直于斜面的匀强磁场,要使粒子能击中荧光屏,求所加磁场的方向及磁感应强度的范围。



解:(1) $a=\frac{Eq}{m}=8\times10^{11}\ m/s^2$

(2) 最小速度 v_1,使粒子从 A_1 到 B_1:$\overline{A_1C_1}=\frac{1}{2}at_1^2$ ① $\overline{B_1C_1}=v_0t_1$ ② $\tan\alpha=\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{B_1C_1}}$ ③

联立 ①②③ $\Rightarrow v_1=3\times10^5 m/s$

最大速度 v_2,使粒子从 A_1 到 D_2:$x_2=\sqrt{\overline{B_1C_1}^2+\overline{B_1B_2}^2}=0.5m=v_0t_2$ ④

$y_2=\overline{A_1C_1}-\overline{B_1D_1}=\frac{1}{2}at_2^2$ ⑤,联立 ④⑤ $\Rightarrow v_2=5\sqrt{2}\times10^5 m/s$

$\therefore 3\times10^5 m/s\le v_0\le 5\sqrt{2}\times10^5 m/s$

(3)

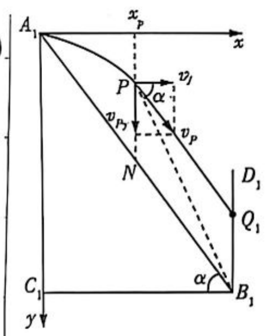


图1

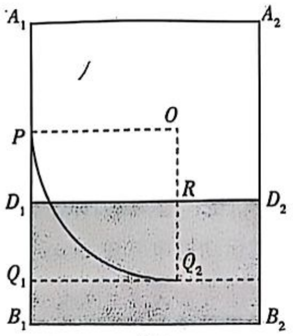


图2

图1为粒子轨迹侧视图

图2为轨沿磁场方向投影图

在最远点P,$\frac{v_{Py}}{v_1}=\tan\alpha$ ⑥,$v_{Py}=at$ ⑦

⑥⑦ $\Rightarrow t=5\times10^{-7}s$

水平位移 $x_P=v_1t=0.15m$

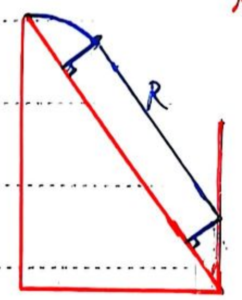
如图:$\overline{AN}=\frac{x_P}{\cos\alpha}=0.25m$,$R=\overline{PQ_1}=\overline{B_1N}=\overline{A_1B_1}-\overline{AN}=0.25m$

在P点 $v_P=\frac{v_1}{\cos\alpha}=5\times10^5 m/s$

$qv_PB_m=m\frac{v_P^2}{R}\Rightarrow B_m=0.5T$

$\therefore 0\le B\le0.5T$,垂直于斜面向下

法二:将运动沿斜面方向和垂直斜面方向分解



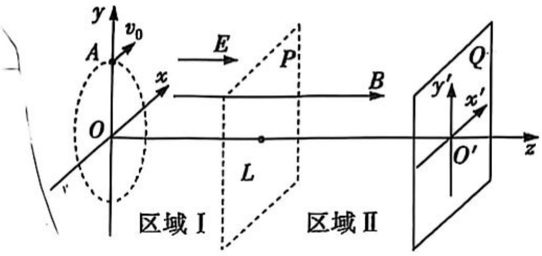
$v_\perp=2.4\times10^5 m/s$ $a_\perp=4.8\times10^{11} m/s$

$v_{//}=1.8\times10^5 m/s$,$a_{//}=6.4\times10^{11} m/s$

$t=\frac{v_\perp}{a_\perp}=5\times10^{-7}s$,$x_\perp=\frac{v_\perp^2}{2a_\perp}=0.06m$. $x_{//}=v_{//}t+\frac{1}{2}a_{//}t^2=0.17m$

$R=\overline{A_1B_1}-x_{//}-\frac{x_\perp}{\tan37°}=0.25m$.

(14 分)如图所示,某粒子分析器由区域Ⅰ、区域Ⅱ和检测器 Q 组成。两个区域以垂直 z 轴的平面 P 为界,其中区域Ⅰ内有沿着 z 轴正方向的匀强磁场和匀强电场,区域Ⅱ内只有沿着 z 轴正方向的匀强磁场,电场强度大小为 E,两个区域内的磁感应强度大小均为 B。当粒子撞击检测器 Q 时,检测器被撞击的位置会发光。检测器中心 O' 在 z 轴上,在检测器所在平面上建立与 xOy 坐标系平行的坐标系 $x'O'y'$。一质量为 m、带电荷量为 q 的带正电粒子从 A 点沿 x 轴正方向以初速度 v_0 射入,若区域Ⅰ内只存在匀强磁场,其轨迹圆圆心恰好是 O 点,平面 P 与 O 点的距离 $L=\frac{2\pi^2 mE}{qB^2}$,运动过程粒子所受重力可以忽略不计。



(1)求 A 点的位置,用坐标 (x,y) 表示;

(2)若区域Ⅰ只有匀强电场 E,当检测器 Q 置于平面 P 处时,求检测器上发光点的位置,用坐标 (x',y') 表示;

(3)当检测器距离 O 点的距离为 d 时,求检测器上发光点的位置,用坐标 (x',y') 表示。

解:(1) $A(0,\frac{mV_0}{qB})$

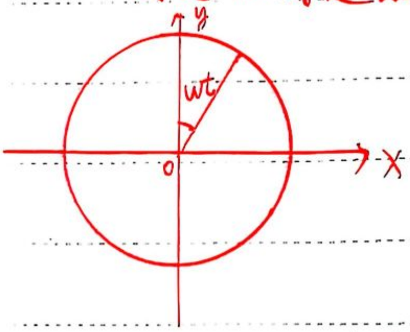
(2) $\frac{1}{2}\cdot\frac{Eq}{m}t^2=L$

$\Rightarrow t=\frac{2\pi m}{qB}$

$x=V_0t=\frac{2\pi mV_0}{qB}$

$(\frac{2\pi mV_0}{qB},\frac{mV_0}{qB})$

(3) 当 $d\le L$ 时,粒子运动分解为 z 方向匀加速直线运动和 xOy 平面内匀速圆周运动。$\frac{1}{2}at_1^2=d\Rightarrow t_1=\sqrt{\frac{2md}{qE}}$



$\omega=\frac{V_0}{r}=\frac{qB}{m}$

$x'=r\sin\omega t_1=\frac{mV_0}{qB}\sin\sqrt{\frac{2md}{qE}}$

$y'=r\cos\omega t_1=\frac{mV_0}{qB}\cos\sqrt{\frac{2md}{qE}}$

$(\frac{mV_0}{qB}\sin\sqrt{\frac{2md}{qE}},\frac{mV_0}{qB}\cos\sqrt{\frac{2md}{qE}})$

当 $d>L$ 时,在区域Ⅰ中运动 $t=\frac{2\pi m}{qB}$,在 P 平面上位置为 $(0,\frac{mV_0}{qB})$,然后在区域Ⅱ中运动,z 方向匀速,xOy 平面内匀速圆周。

z 方向速度 $v=\frac{Eq}{m}\cdot t=\frac{2\pi E}{B}$,从 P 到 Q,$t_3=\frac{d-L}{v}$

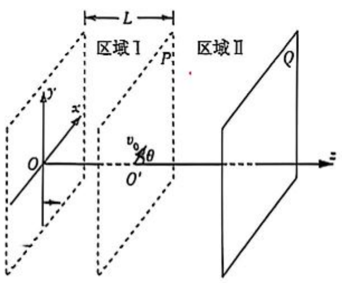
$=\frac{dB}{2\pi E}-\frac{\pi m}{qB}$

$x'=r\sin\omega t_3=\frac{mV_0}{qB}\sin(\frac{dqB^2}{2\pi mE}-\pi)=-\frac{mV_0}{qB}\sin\frac{dqB^2}{2\pi mE}$

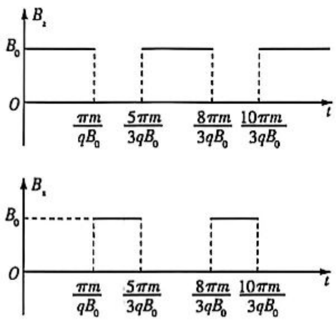
$y'=r\cos\omega t_3=\frac{mV_0}{qB}\cos(\frac{dqB^2}{2\pi mE}-\pi)=-\frac{mV_0}{qB}\cos\frac{dqB^2}{2\pi mE}$

$(-\frac{mV_0}{qB}\sin\frac{dqB^2}{2\pi mE},-\frac{mV_0}{qB}\cos\frac{dqB^2}{2\pi mE})$

(16 分)如图甲所示的空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中,分界面 P、荧光屏 Q 均与平面 xOy 平行,分界面 P 把空间分为区域Ⅰ和区域Ⅱ两部分,分界面 P 与平面 xOy 间的距离为 L,z 轴与分界面 P 相交于 O'。区域Ⅰ空间中分布着沿 y 轴正方向的匀强电场,区域Ⅱ空间中分布着沿 x 轴正方向和 z 轴正方向的交替出现的磁场,磁感应强度大小均为 B_0,变化规律如图乙所示。电荷量为 q、质量为 m 的带正电粒子在 y 轴负半轴上的某点沿 z 轴正方向射出,经过区域Ⅰ,到达 O' 点时速度大小为 v_0,方向与 z 轴正方向成 $\theta=60°$ 角;以带电粒子在 O' 点的时刻为 $t=0$ 时刻,再经过区域Ⅱ打在荧光屏 Q 上,其速度方向恰好与经过 O' 点时速度的方向相同。粒子所受重力忽略不计,不考虑场的边缘效应及相对论效应。求:



图甲



图乙

(1)区域Ⅰ内电场强度 E 的大小;

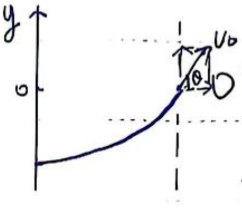
(2)$t=\dfrac{\pi m}{qB_0}$时刻粒子的速度 v_1 的大小与方向;

(3)分界面 P 与荧光屏 Q 之间的距离 d;

(4)粒子打在荧光屏上的 x 坐标。

解:立体情境,分解运动

(1)



$V_z=\frac{1}{2}V_0$

$V_y=\frac{\sqrt{3}}{2}V_0$

$t=\frac{L}{V_z}=\frac{2L}{V_0}$

$\frac{Eq}{m}\cdot t=V_y \Rightarrow E=\frac{\sqrt{3}mV_0^2}{4qL}$

(2)前 $\frac{\pi m}{qB_0}$,将粒子速度分解,

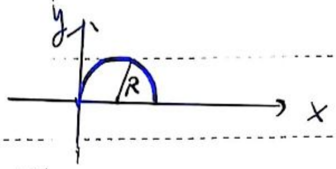
粒子在 z 方向做匀速直线运动

在 xOy 平面做匀速圆周运动

(合运动为等距螺旋线运动)

$T=\frac{2\pi m}{qB_0}$,则 $t=\frac{\pi m}{qB_0}$ 时,粒子 xOy 平面上恰好转过了半周

V_y 反向

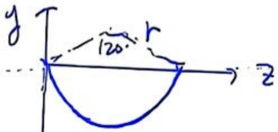


则 $V_1=V_0$,与 z 轴正半轴成 60°

与 y 轴负半轴成 30°,与 x 轴垂直

(3)在 $\frac{\pi m}{qB_0}\sim\frac{5\pi m}{3qB_0}$ 内,粒子在 yOz 平面内做匀速圆周距离,$\Delta t=\frac{2\pi m}{3qB_0}$

粒子转过 120° 角,轨迹如图,且 $t=\frac{5\pi m}{3qB_0}$ 时,速度与经过 O' 时相同。



则粒子至少经 $\frac{5\pi m}{3qB_0}$ 时间,速度方向与经过 O' 时相同

$0-\frac{\pi m}{qB_0}$ 内,z 方向位移 $z_1=\frac{V_0}{2}\cdot\frac{\pi m}{qB_0}$

$\frac{\pi m}{qB_0}\sim\frac{5\pi m}{3qB_0}$ 内,z 方向位移 $z_2=\sqrt{3}r=\frac{\sqrt{3}mV_0}{qB_0}$

$d=n(z_1+z_2)=n\left(\frac{\pi mV_0}{qB_0}+\frac{\sqrt{3}mV_0}{qB_0}\right)$,$(n=1,2,3\cdots)$

(4)每 $\frac{5\pi m}{3qB_0}$ 时间,粒子沿 x 轴正向推进一个半圆

$x=n\cdot 2R=n\cdot\frac{\sqrt{3}mV_0}{2qB_0}=\frac{\sqrt{3}nmV_0}{qB_0}$ $(n=1,2,3\cdots)$

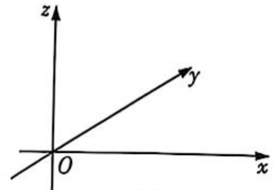
(16 分)如图甲所示,在 $O-xyz$ 空间直角坐标系的空间内有平行 z 轴向上且交替变化的匀强电场、匀强磁场,电场、磁场随时间变化的规律分别如图乙、丙所示,$t=0$ 时,一带正电的粒子以初速度 v_0 从 O 点沿 x 轴正方向射入,在 $t=\frac{L}{v_0}$ 时粒子恰经过点 $P(L,0,L)$(图中未画出)。已知电场强度大小为 E_0,磁感应强度大小为 $\frac{3\pi E_0}{2v_0}$,粒子重力不计,求:

(1)粒子的比荷;

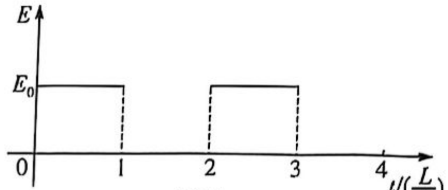
(2)粒子在 $t=\frac{2L}{v_0}$ 时的位置坐标;

(3)粒子在 $t=\frac{3L}{v_0}$ 时的速度;

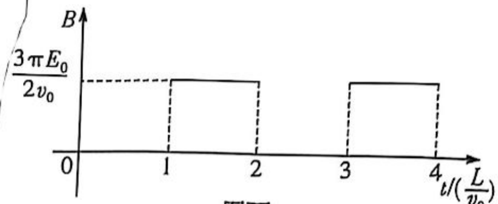
(4)$t=\frac{nL}{v_0}$(n 为整数)时,粒子所处位置的 z 轴坐标值 z_n。



图甲



图乙



图丙

解:(1) $0-\frac{L}{v_0}$ 内. $\frac{1}{2}at^2=L$,① $a=\frac{Eq}{m}$ ②

联立①② $\Rightarrow$ $\frac{q}{m}=\frac{2v_0^2}{E_0L}$

(2) $\frac{L}{v_0}\sim\frac{2L}{v_0}$ 内,粒子 z 方向匀速直线运动,xOy 平面内匀速圆周运动

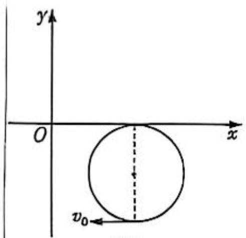


图1

$v_{z_1}=\frac{Eq}{m}t_1=2v_0$. xOy 平面内仍为 v_0

$r=\frac{mv_0}{qB}=\frac{L}{3\pi}$, $T=\frac{2\pi r}{v_0}=\frac{2L}{3v_0}$, $\Delta t=\frac{L}{v_0}$ 恰为 $\frac{3}{2}T$

$t=\frac{2L}{v_0}$ 时, $z=L+v_z\Delta t=3L$, 如图1 $x=L$, $y=-2R=-\frac{2L}{3\pi}$

∴ 坐标为 $(L, -\frac{2L}{3\pi}, 3L)$

(3) 每段电场作用,都使 v_z 增加 $\Delta v_z=2v_0$. $t=\frac{3L}{v_0}$ 时, $v_{z_2}=4v_0$

$v=\sqrt{v_{z_2}^2+v_0^2}=\sqrt{17}v_0$, 方向在 xOy 平面内,指向 z 轴左侧,与 z 轴成

$\tan\theta=\frac{v_0}{v_{z_2}}=\frac{1}{4}$

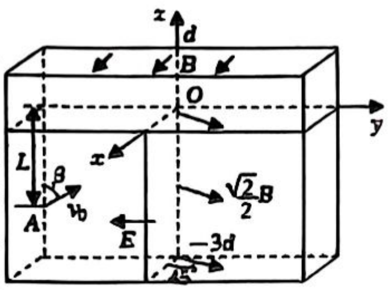
(4) 每段电场作用时,z 方向为匀加速直线运动,位移依次为 L、3L、5L…

每段磁场作用时,z 方向为匀速直线运动,位移依次为 2L、4L、6L

∴ 粒子在 $\frac{nL}{v_0}$ 时间内沿 z 轴方向位移

$z_n=L+2L+3L+4L+\cdots+nL=\frac{n(1+n)L}{2}$

中国“人造太阳”在核聚变实验方面取得新突破，该装置中用电磁场约束和加速高能离子，其部分电磁场简化模型如图所示，在三维坐标系$Oxyz$中，$0 < z \leqslant d$空间内充满匀强磁场Ⅰ，磁感应强度大小为B，方向沿x轴正方向；$-3d \leqslant z < 0$，$y \geqslant 0$的空间内充满匀强磁场Ⅱ，磁感应强度大小为$\frac{\sqrt{2}}{2}B$，方向平行于xOy平面，与x轴正方向夹角为$45°$；$z < 0$，$y \leqslant 0$的空间内充满沿y轴负方向的匀强电场，质量为m，带电量为$+q$的离子，从yOz平面第三象限内距y轴为L的点A以一定速度出射，速度方向与z轴正方向夹角为β，在yOz平面内运动一段时间后，经坐标原点O沿z轴正方向进入磁场Ⅰ，不计离子重力。

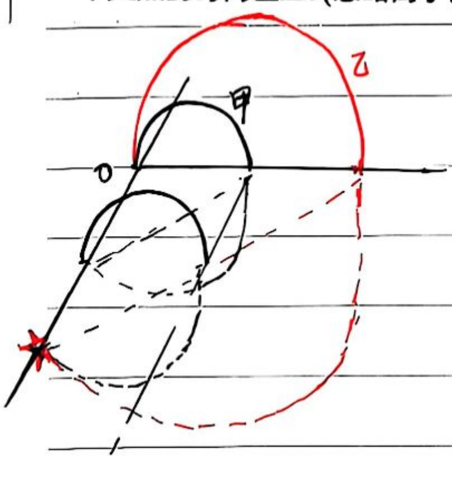


(1)当离子甲从A点出射速度为v_0时，求电场强度的大小E；

(2)若使离子甲进入磁场后始终在磁场中运动，求进入磁场时的最大速度v_m；

(3)离子甲以$\frac{qBd}{2m}$的速度从O点沿z轴正方向第一次穿过xOy面进入磁场Ⅰ，求第四次穿过xOy平面的位置坐标（用d表示）；

(4)当离子甲以$\frac{qBd}{2m}$的速度从O点进入磁场Ⅰ时，质量为$4m$，带电量为$+q$的离子乙，也从O点沿z轴正方向以相同的动能同时进入磁场Ⅰ，求两离子进入磁场后，到达它们运动轨迹第一个交点的时间差Δt（忽略离子间相互作用）。



解：看似是复杂的立体运动
其实运动都在平面上

(1) 将离子甲从A点出射速度为v_0分解到沿y轴方向和z轴方向，如图1所示

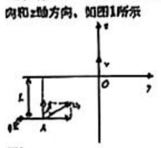


图1

$$\begin{cases} v_0\cos\beta \cdot t = L \\ \frac{Eq}{m}t = v_0\sin\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = \frac{mv_0^2\sin\beta\cos\beta}{qL}$$

(2)离子从坐标原点O沿Z轴正方向进入磁场Ⅰ中，作出粒子甲的轨迹如图所示

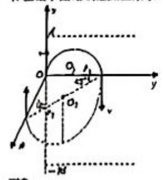


图2

$$\begin{cases} r_1 = \frac{mv}{qB} \leqslant d \\ r_2 = \frac{mv}{q\frac{\sqrt{2}}{2}B} \leqslant 3d \end{cases}$$

$$\Rightarrow v \leqslant \frac{qBd}{m}$$

(3)

作出离子从O点第一次穿过到第四次穿过xOy平面 如图3

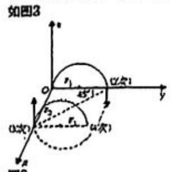


图3

$r_1 = \frac{d}{2}$，$r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}d$

如图，由几何关系得第4次穿过xOy平面时的坐标为(d, d, 0)

(4) $\frac{1}{2}mv_甲^2 = \frac{1}{2}mv_乙^2 \Rightarrow v_乙 = \frac{1}{2}v_甲$

由$r = \frac{mv}{qB}$得，在同一磁场中

$r_乙 = 2r_甲$，作出两粒子轨迹如图

☆为轨迹相交点

甲在Ⅰ中运动周期$T_{甲Ⅰ} = \frac{2\pi m}{qB}$

在Ⅱ中运动周期$T_{甲Ⅱ} = \frac{2\pi m}{q\frac{\sqrt{2}}{2}B} = \frac{2\sqrt{2}\pi m}{qB}$

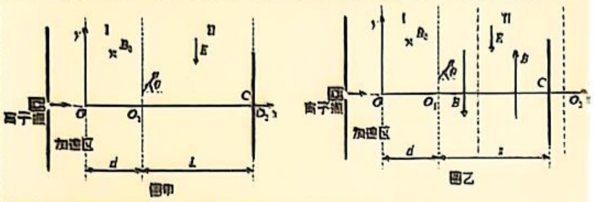
$T_{乙Ⅰ} = 4T_{甲Ⅰ}$ $T_{乙Ⅱ} = 4T_{甲Ⅱ}$

由轨迹图知

$$\Delta t = \frac{1}{2}(T_{乙Ⅰ} + T_{乙Ⅱ}) - (T_{甲Ⅰ} + T_{甲Ⅱ})$$

$$= \frac{(2+2\sqrt{2})\pi m}{qB}$$

某离子束实验装置的基本原理如图甲所示。Ⅰ区宽度为d，左边界与x轴垂直交于坐标原点O，其内充满垂直于xOy平面向里的匀强磁场，磁感应强度大小为B_0；Ⅱ区宽度为L，左边界与x轴垂直交于O_1点，右边界与x轴垂直交于O_2点，其内充满沿y轴负方向的匀强电场。测试板垂直x轴置于Ⅱ区右边界，其中心C与O_2点重合。从离子源不断飘出电荷量为q、质量为m的正离子，加速后沿x轴正方向过O点，依次经Ⅰ区、Ⅱ区，恰好到达测试板中心C。已知离子刚进入Ⅱ区时速度方向与x轴正方向的夹角为θ。忽略离子间的相互作用，不计重力。



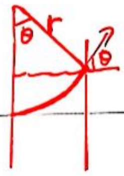
(1)求离子在Ⅰ区中运动时速度的大小v；

(2)求Ⅱ区内电场强度的大小E；

(3)保持上述条件不变，将Ⅱ区分为左右两部分，分别填充磁感应强度大小均为B(数值未知)、方向相反且平行y轴的匀强磁场，如图乙所示。为使离子的运动轨迹与测试板相切于C点，需沿x轴移动测试板，求移动后C到O_1的距离s。

解：

(1)



$$r=\frac{mv}{qB}=\frac{d}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow v=\frac{qBd}{m\sin\theta}$$

(2)

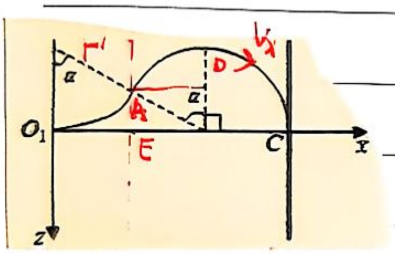
$$\begin{cases}\Delta x=v\cos\theta\cdot t=L\\ \Delta y=\frac{Eq}{2m}t^2-v\sin\theta t=r(1-\cos\theta)\end{cases}$$

$$\Rightarrow E=\frac{2qB_0^2d^2}{mL^2\tan^2\theta}\left(L\tan\theta+\frac{d}{\sin\theta}-\frac{d}{\tan\theta}\right)$$

(3) 立体运动，将速度分解为v_x、v_y

粒子受洛伦兹力在垂直于y轴平面内做圆周运动，在y轴方向运动与(2)中一致，二者相互独立

作出俯视图，即xOz平面内轨迹



如图所示，只有这样才能切于C点

左有 $\overset{\frown}{O_1A}=\overset{\frown}{AD}$，则 $AE=\frac{r'}{2}$ $\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}$

则 $s=r(1+2\sin\alpha)=(\sqrt{3}+1)r$

只需求r

考虑y方向运动与(2)一致，则欲运动至C点，y方向位移也与(2)中一致，则时间t也与(2)中一致

(2)中，$v_x\cdot t=L$，本题中v_x为xOz平面中匀速圆周运动的速度

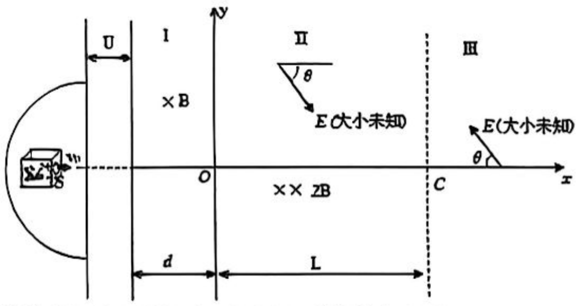
则从O_1到C的弧长也为L

$$\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)r=L \Rightarrow r=\frac{6}{7\pi}L$$

$$\therefore s=\frac{6(\sqrt{3}+1)}{7\pi}L$$

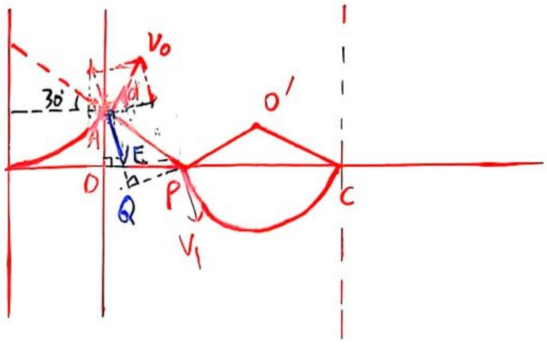
某离子实验装置的基本原理如图所示，I区宽度为d，右边界为y轴，其内充满垂直于xOy平面向里的匀强磁场，磁感应强度大小为B。II区左边界为y轴，右边界与x轴垂直交于C点，其内$y>0$区域内充满与x轴正方向夹角为$\theta=60^\circ$的匀强电场E(大小未知)；$y<0$区域内充满垂直于xOy平面向里的匀强磁场，磁感应强度大小为$2B$。III区左边界与II区右边界重合，其内充满匀强电场，场强与II区场强的大小相等，方向相反。

氙离子(Xe^{2+})束从离子源小孔S射出，沿x轴正方向经电压为U的加速电场加速后穿过I区，经A点进入II区电场区，再经x轴上的P点（未画出）进入磁场，又经C点进入III区，后经D点（未画出）进入II区。已知单个离子的质量为m、电荷量为$2e$，刚进入II区时速度方向与x轴正方向的夹角为$\theta=60^\circ$，在II区域电场中的位移方向与y轴负方向夹角为$\theta=60^\circ$。忽略离子间的相互作用，不计重力。



(1)求氙离子进入加速电场时的速度大小v_s；
(2)求II区域电场强度E的大小；
(3)求II区宽度L；
(4)保持上述条件不变，撤掉III区中电场，并分为左右两部分，分别填充磁感应强度大小均为B'；方向相反且平行y轴的匀强磁场，氙离子仍能经D点进入II区，求磁感应强度大小B'。

解:



(1) 设射入I时速度为v_0

如图 $r=\dfrac{d}{\cos30^\circ}=\dfrac{mv_0}{qB}$

$\Rightarrow v_0=\dfrac{2\sqrt{3}Bqd}{3m}$

$Uq=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}mv_s^2$

$\Rightarrow v_s=2\sqrt{\dfrac{4B^2e^2d^2}{3m^2}-\dfrac{eU}{m}}$

(2)在I区，设A点纵坐标为y_A，得

$$y_A=\frac{d}{sin\theta}-\frac{d}{tan\theta}$$

根据在II区电场中运动位移方向分析，设P点横坐标为x_p，得

$$x_p=y_A\tan\theta$$

在II区电场中，进行运动分析，设运动时间为t，达到P点时，y轴分位移

$$y_A=-vt\sin\theta+\frac{eEsin\theta}{m}t^2$$

达到P点时，x轴分位移

$$x_p=vt\cos\theta+\frac{eEcos\theta}{m}t^2$$

联立解得

$$E=\frac{16B^2ed}{m}$$

← 答案是将v_0、E都在x、y方向上正交分解解析程十分麻烦. 因此.我采用了如图所示的.将v_0沿电场方向分解. 由几何关系: $OA=\frac{\sqrt{3}}{3}d$ 则 $OP=d$. 又易证$\triangle OAP\cong\triangle QPA$

$\therefore QP=OA=\frac{\sqrt{3}}{3}d$. $AQ=OP=d$。 如图. 分解速度时 $\alpha=30^\circ$

$$\begin{cases}QP=\frac{\sqrt{3}}{3}d=v_0\cos\alpha\cdot t\\ AQ=d=\frac{1}{2}\frac{Eq}{m}t^2-v_0\sin\alpha\cdot t\end{cases}\Rightarrow E=\frac{8B^2qd}{m}=\frac{16B^2ed}{m}$$

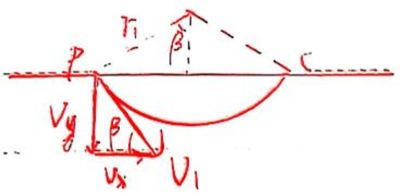
(3) 设出电场时速度为v_1 正交分解为$v_{\parallel}$、$v_{\perp}$

则 $\begin{cases}v_{\perp}=v_0\cos\alpha=\dfrac{Bqd}{m}\\ v_{\parallel}=\dfrac{Eq}{m}\cdot t-v_0\sin\alpha=\dfrac{7\sqrt{3}Bqd}{3m}\end{cases}\Rightarrow v_1=\sqrt{v_{\parallel}^2+v_{\perp}^2}=\dfrac{2\sqrt{39}Bqd}{3m}$

这个数非常麻烦，更别提找角度关系了

欲求 v_1 与x轴角，免不了求 v_x、v_y

$$\begin{cases} v_x = v\cos\theta + \dfrac{Eq}{m}\cos\theta \cdot t = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\dfrac{Bqd}{m} \\ v_y = -v\sin\theta + \dfrac{Eq}{m}\sin\theta \cdot t = 3\dfrac{Bqd}{m} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\dfrac{52}{3}}\dfrac{Bqd}{m} = \dfrac{2\sqrt{39}}{3}\dfrac{Bqd}{m}$$



$$\tan\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

$$\Rightarrow \sin\beta = \sqrt{\frac{27}{52}}$$

$$r_1 = \frac{mv_1}{q2B} = \frac{\sqrt{39}}{3}\frac{Bqd}{m}$$

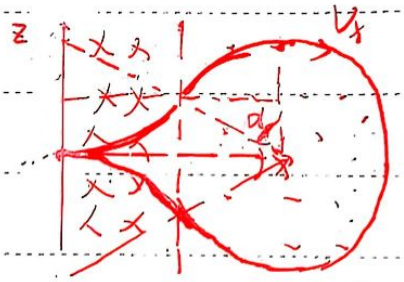
$PC = 2r_1\sin\beta = 3d$

则 $L = OP + PC = 4d$

(4) 先从存在电场的情境中找到D点，设运动时间为 t'

则 $\begin{cases} 2v_x = \dfrac{Eq\cos\theta}{m} \cdot t' \\ y_D = v_y t + \dfrac{1}{2}\dfrac{Eq\sin\theta}{m} t'^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow y_D = \frac{20\sqrt{3}}{3}d$$



换成磁场后，俯视，不妨左边磁场向纸内

将粒子速度分解为 v_x、v_y 后，磁场会使粒子在 xOz 平面中做圆周运动，轨迹如图

知 $\alpha = 60°$

在y轴方向，用时 $t = \dfrac{y_D}{v_y} = \dfrac{20\sqrt{3}m}{9Bq}$

则 xOy 平面内，粒子转过了 $\frac{7}{3}\pi$、

$$\therefore t = \frac{7}{6}T = \frac{7}{6}\cdot\frac{2\pi m}{qB'} = \frac{7\pi m}{6qB'}$$

解得 $B' = \dfrac{7\sqrt{3}}{20}B$

利用电磁学原理设计离子喷涂设备，如图1所示，离子从离子源A“漂”出，经加速电压U加速后沿直线进入$B=0.1T$的匀强磁场，经磁场偏转半个周期后离子打在CD喷涂区，实现离子喷涂。为了实现平面喷涂，在磁场区域再加上一个垂直于纸面的电场E_2（图中未标出），平面待喷涂件放在CD直线上，且与磁场平行。离子的质量$m=1.6\times10^{-27}kg$，电荷量$q=1.6\times10^{-19}C$。离子进入加速电场的速度不计，加速电压随时间的周期性变化如图2所示，离子源离子随时间均匀进入电场，粒子在电场及磁场中运动的时间远小于电压的变化周期。不考虑相对论效应及离子间的相互作用，不考虑电场变化产生的磁场，取$\pi^2=10$。

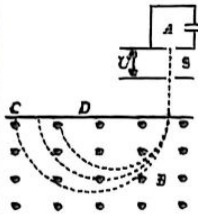


图1

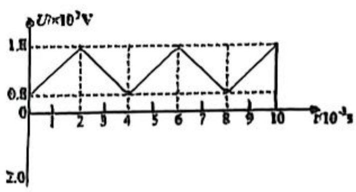


图2

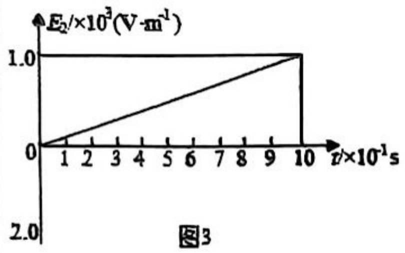


图3

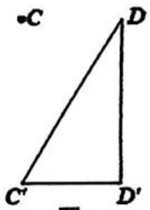


图4

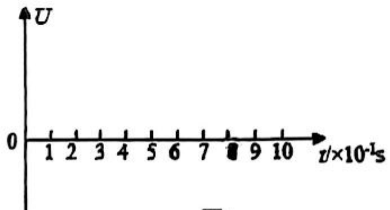


图5

(1)如果不加电场E_2，求离子在CD处喷涂的长度；

(2)电场E_2随时间变化如图3所示（垂直纸面向里为正）求此过程中离子喷涂的面积；

(3)第2问中喷涂区域的离子厚度是否均匀分布，如果是，请说明理由；如果不是，CD哪一侧厚一些；

(4)若要实现如图4所示的三角形区域的喷涂，E_2随时间变化如图3所示，请在图5中定性地画出加速电压随时间变化的图像。

解：

(1) $r=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um}{q}}$

代入 $U_{max}=1.8\times10^3V$, $U_{min}=0.8\times10^3V$

得 $r_{max}=0.06m$, $r_{min}=0.04m$

$L=2(r_{max}-r_{min})=0.04m$

(2)由图1可知离子在磁场中顺时针偏转，根据左手定则判断，离子带正电。

在磁场区域加入电场E_2后，离子一方面沿电场方向（即垂直CD向里）做加速运动，因粒子在磁场中运动的时间远小于电压的变化周期，所以可认为每个粒子经电场E_2加速时电场强度E_2是不变的，故离子沿电场方向做匀加速直线运动。设此方向上的加速度为a_x，由牛顿第二定律得：

$qE_2=ma_x$

另一方面离子做匀速圆周运动，其周期$T=\frac{2\pi m}{qB}$

离子在磁场中运动时间：$t=\frac{1}{2}T=\frac{\pi m}{qB}$

沿电场方向离子运动的位移大小为：$x=\frac{1}{2}a_xt^2$

解得：$x=\frac{\pi^2m}{2qB^2}\cdot E_2=5\times10^{-6}\times E_2$

可见每个粒子在喷涂区域垂直CD方向的位移大小正比于场强的E_2大小。

由图2与图3可知，加速电压的周期为$4\times10^{-3}s$，而电场E_2的存在时间为$10\times10^{-1}s=1s$，即电场E_2的变化的时间远大于加速电场的周期，可认为在加速电压的半个周期内场强E_2不变，则喷涂区域的形状为矩形。

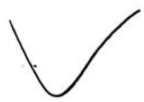
垂直CD方向的最大位移为：

$x_m=5\times10^{-6}\times E_{2m}=5\times10^{-6}\times1.0\times10^3m=5\times10^{-3}m$

喷涂的面积为：

$S=Lx_m=0.04\times5\times10^{-3}m^2=2\times10^{-4}m^2$

电压的变化周期远小于E_2的变化，因此可认为E_2的

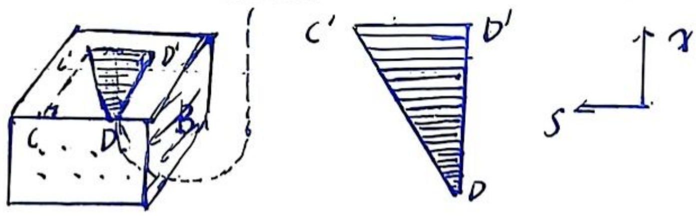


(3) 由(1)知 $r\propto\sqrt{U}$，$U\propto t$ (2s内)

r随t的增长速度越来越慢

故C侧更厚一些

(4)

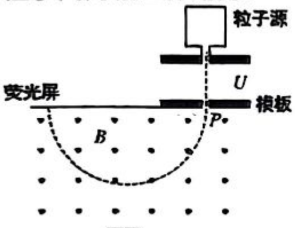


如图，随着x增大，即E_2的增大，粒子在CD方向上的喷涂量S正比增大

S的长度由该时刻的电压峰值U_m决定（U反复变化，且变化周期远小于E_2变化）

$\because S\propto E_2\propto t$，又$S\propto\sqrt{U_m}$ $\therefore U_m\propto t^2$，$\therefore$图像如下

质谱仪是一种利用电磁场测量带电粒子质量或者分析同位素的重要工具．一台质谱仪的简化结构如图甲所示，粒子源不断产生出大量质量为m、电量为q、初速度不计的粒子“飘入”加速电场中，经电压U加速后，经小孔P沿垂直极板方向进入垂直纸面的磁感应强度为B的匀强磁场中，旋转半周后打在荧光屏上形成亮点．不计粒子重力和粒子间的相互作用力．



图甲

1

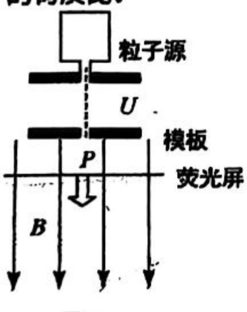
若单位时间内从小孔P射出的粒子个数为n，求粒子刚射出时速度大小v_0以及粒子击中荧光屏时对屏的平均作用力大小（击中屏后粒子不反弹）．

2

受加速场实际结构的影响，从小孔P处射出的粒子方向会有微小角度的发散，现在只讨论在纸面内有相对极板垂线左右相等的微小角度的发散（但速度大小都为v_0），光屏上会出现亮线．若粒子源产生的粒子电量均为q，但质量有m_1、m_2两种（$m_2 > m_1$），小孔P处粒子速度方向相对极板垂线最大发散角度满足什么条件时两种粒子在屏上形成的亮线恰能重合，并求出这种情况下两种粒子形成亮线的总宽度Δx．

3

利用小孔P处射出的粒子方向微小角度发散的现象可以测定粒子的荷质比，其原理可以粗略地按以下模型讨论；若粒子源产生的是同一种粒子，将磁场的方向改为垂直极板方向（如图乙），把荧光屏从紧靠极板位置开始在磁场中逐渐向下缓慢平移，屏上出现亮斑先变大，后变小的现象，当屏与极板距离为d时，亮斑第一次收缩为一个亮点，求该粒子的荷质比．



图乙

例1　如图1所示，四块无限大的金属板 M、N、P、Q 按图示方向接入电动势为 E 的电源，M 与 N、N 与 P、P 与 Q 之间的距离分别为 d、$2d$、d，N 与 P 之间存在磁感应强度大小为 B 水平向右的匀强磁场，现有一块折成直角的硬质塑料板 abc（不带电，宽度很窄，厚度不计，截面图如图1）放在 N 与 P 之间，贴近 M 有一质量为 m、电荷量为 $+q$ 的粒子（重力不计），从静止开始运动，经过小孔 O_1 和小孔 O_2 后又回到金属板 M 附近。假设粒子与硬质塑料板相碰后，速度大小不变，方向变化遵守光的反射定律。求粒子在金属板 M 与金属板 Q 之间的区域中运动的周期。

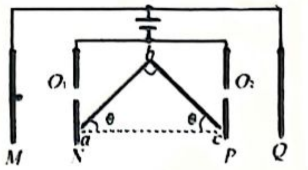


图1

解：

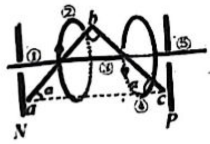


图2

解析　此题是带电粒子在电场和磁场中运动的问题，在电场中的加速和减速情景比较清晰，最重要的运动过程出现在金属板 N 和金属板 P 之间。当由电场加速进入匀强磁场后，其运动分为五个阶段：①刚进入时不受洛伦兹力而做匀速直线运动，直至与塑料板 ab 发生碰撞；②碰撞之后速度竖直向上，此时受到的洛伦兹力刚好垂直直面向里，刚好做完一个完整的圆周运动到塑料板 ab 的下端与之发生碰撞；③碰撞后速度又变为水平向右，匀速运动直至与塑料板 bc 发生碰撞；④碰后速度变成竖直向下，此时受到垂直直面向外的洛伦兹力，刚好做完一个完整的圆周运动到塑料板 bc 的上表面与之发生碰撞；⑤碰撞结束后速度沿水平向右匀速直线运动，从金属板 P 中穿出（运动的轨迹如图2所示）。最后在金属板 P 和 Q 中的电场中做匀减速刚好到金属板 Q 附近速度为零，然后微粒从金属板 Q 附近开始做对称的运动回到金属板 M 附近。

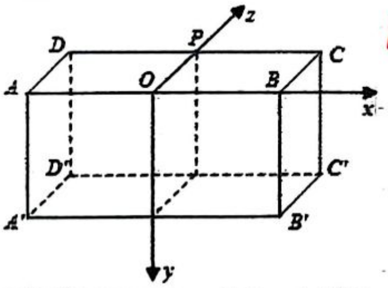
假设微粒在电场中加速运动的时间为 t_1，根据动能定理：

$$Eqd = \frac{1}{2}mv^2,\quad t_1 = \frac{2d}{v},$$

在磁场中运动的时间 $t_2 = \frac{2d}{v} + 2\times\frac{2\pi m}{qB}$，电场中减速的时间也为 t_1。所以运动的周期

$$T = 2(t_1+t_2) = 6\sqrt{\frac{2md}{Eq}} + \frac{4\pi m}{qB}$$

如图所示为一长方体为



$ABCD-A'B'C'D'$ 空间区域，AD、AA' 边长均为 d，AB 边长为 $\sqrt{3}d$，以 AB 边中点 O 为原点，建立如图所示坐标系，y 轴交 $A'B'$ 边于 O' 点，z 轴交 CD 边于 P 点。一质量为 m、电荷量为 q 的带正电粒子，以初速度 v_0 沿 x 轴正方向从 AB 的中点 O 点射出。粒子重力不计，场的边缘效应和粒子的相对论效应均可忽略。

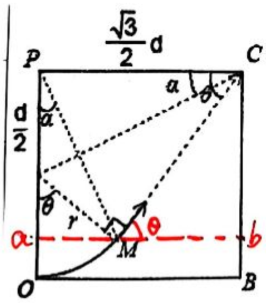
(1)若空间区域内存在沿 y 轴正方向的匀强磁场，粒子恰好经过 P 点在 xOz 平面内做完整的圆周运动，求该匀强磁场的磁感应强度大小 B；

(2)若空间区域内存在沿 y 轴正方向的匀强电场，要使粒子恰好能经过 B' 点，求该匀强电场的场强大小 E；

(3)先在空间区域内加上（1）中的匀强磁场，撤去磁场后随即加上满足（2）中条件的匀强电场，粒子恰能经过 C' 点，求粒子从 O 到 C' 的运动时间。

解：(1) $r = \frac{d}{2} = \frac{mv_0}{qB} \Rightarrow B = \frac{2mv_0}{qd}$

(2) $\begin{cases} v_0 t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}d \\ \frac{Eq}{2m}t_1^2 = d \end{cases} \Rightarrow E = \frac{mv_0^2}{3qd},\quad t_1 = \frac{\sqrt{3}d}{2v_0}$



(3) 粒子轨迹在面OBCP上投影如左图所示

OM段为匀速圆周运动

MC段为类平抛

根据(2)，为使类平抛打到C点，有 $\overline{MC} = \overline{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}d$

$ab = \frac{\sqrt{3}}{2}d = r\sin\theta + \overline{MC}\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

圆周运动时间 $t_2 = \frac{\pi r}{3v_0} = \frac{\pi d}{6v_0}$

$t = t_1 + t_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\frac{d}{v_0}$

(14 分)在如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，水平线 OQ 与 x 轴正方向之间的夹角为 15°，过 OQ 的竖直平面将 xOz 平面右侧区域分为Ⅰ、Ⅱ两部分，区域Ⅰ中有竖直向上的匀强磁场，磁感应强度大小为 B_1，区域Ⅱ中有竖直向下的匀强磁场，xOz 平面左侧 xOy 平面下方存在匀强电场。一质量为 m、电荷量为 $+q$ 的液滴从 $P(0,-2l,l)$ 处由静止自由下落，进入电场后做曲线运动（液滴在竖直方向做加速度为 g 的匀减速运动），后由 O 点进入 x 轴右侧区域，重力加速度为 g。求：

(1)带电液滴在电场中运动的时间；

(2)匀强电场的电场强度沿 y 轴和 x 轴方向的分量之比；

(3)带电液滴在区域Ⅰ中运动的半径是多少？要想使带电液滴在运动过程中不离开磁场，区域Ⅱ中磁感应强度的最小值为多少？

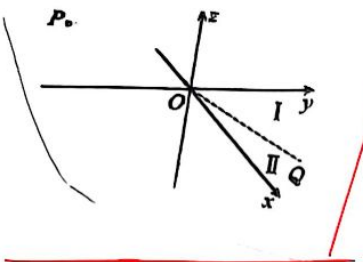
解：(1) 进入电场时 $v_0=\sqrt{2gl}$

竖直方向上，$t=\frac{2v_0}{g}=2\sqrt{\frac{2l}{g}}$

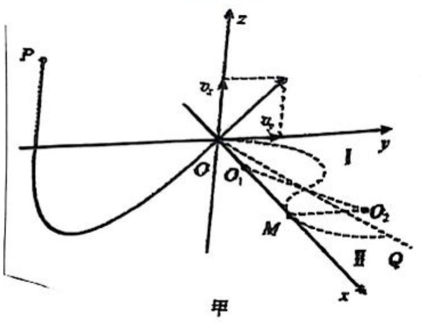
(2) $E_y q = 2mg$

$\frac{1}{2}\frac{E_x q}{m}t^2 = 2l \Rightarrow E_x = \frac{1}{2}mg$

$\frac{E_x}{E_y}=\frac{1}{4}$

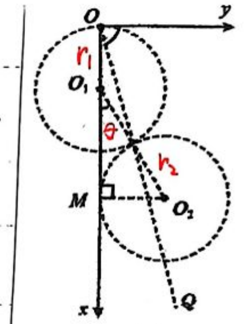


(3) 虽然是立体运动，但将速度分解后，根本不用理会竖直方向的运动，只关注水平方向的圆周运动即可



甲

← 临界的水平方向投影 →



乙

$\theta = 30°$

$(r_1+r_2)\sin\theta = r_2$

$\Rightarrow r_1 = r_2$

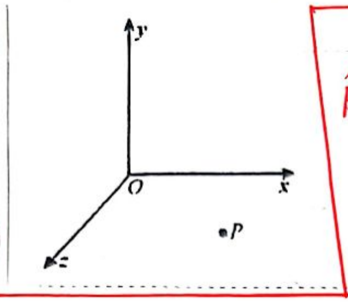
∴ Ⅱ 磁感应强度最小值是 B_1

如图所示，在正交坐标系 $Oxyz$ 中，分布着电场和磁场(图中未画出)。在 Oyz 平面的左方空间内存在沿 y 轴负方向、磁感应强度大小为 B 的匀强磁场；在 Oyz 平面右方、Oxz 平面上方的空间内分布着沿 z 轴负方向、磁感应强度大小也为 B 匀强磁场；在 Oyz 平面右方、Oxz 平面下方分布着沿 y 轴正方向的匀强电场。在 $t=0$ 时刻，一个微粒的质量为 m、电荷量为 q 的微粒从 P 点静止释放，已知 P 点的坐标为 $(5a,-2a,0)$，电场强度大小为 $\frac{aqB^2}{4m}$，不计微粒的重力。求：

(1)微粒第一次到达 x 轴的速度大小 v 和时间 t_1；

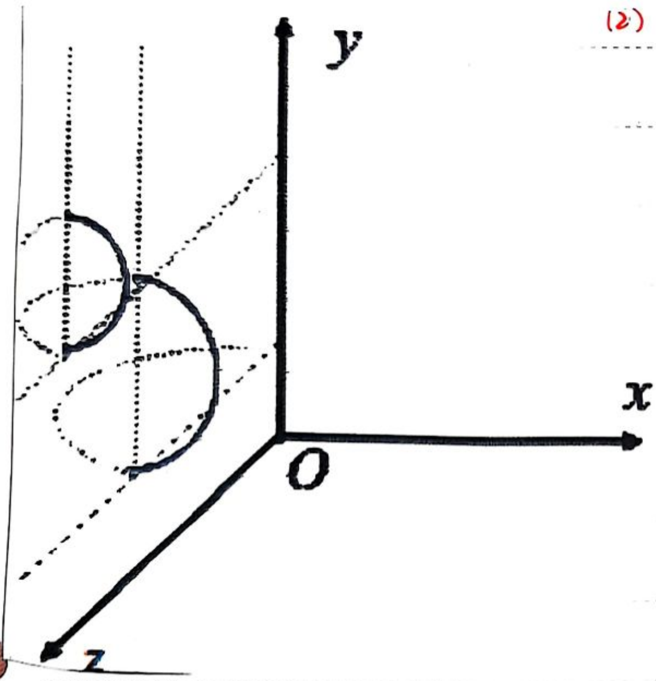
(2)微粒第一次到达 y 轴的坐标和时间 t_2；

(3)假设在平面 Oyz 存在一层特殊物质，使微粒每次经过 Oyz 平面时，速度大小总变为原来的 $\frac{1}{2}$，求在时刻 $t_3=t_2+\frac{4\pi m}{qB}$ 时，电荷所在位置的坐标。

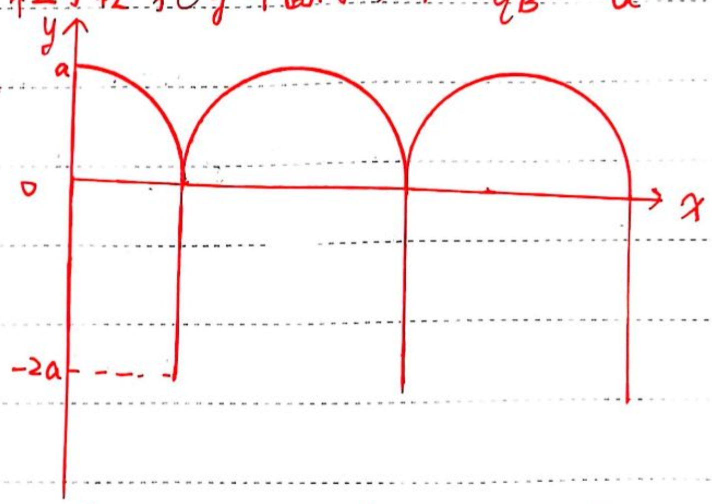


解：(1) $v=\sqrt{2\frac{Eq}{m}\cdot 2a}=\frac{aqB}{m}$

$t_1=\frac{2\times 2a}{v}=\frac{4m}{qB}$



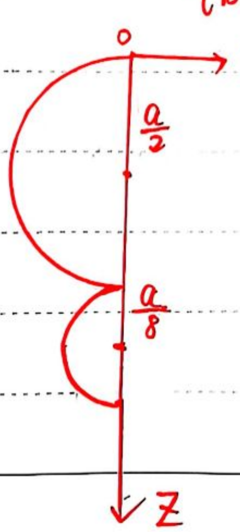
(2) 粒子在 xOy 平面内，$r=\frac{mv}{qB}=a$

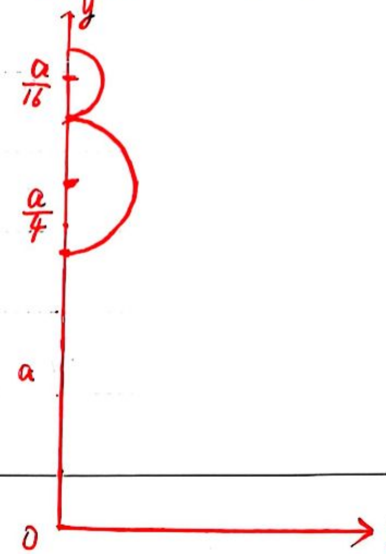


$t_2=\frac{5}{4}T+5t_1=(20+\frac{5}{2}\pi)\frac{m}{qB}$

(3) 粒子轨迹如上图所示

$t_3=t_2+\frac{4\pi m}{qB}$ 即 t_2 之后，粒子又运动了4个半圆周





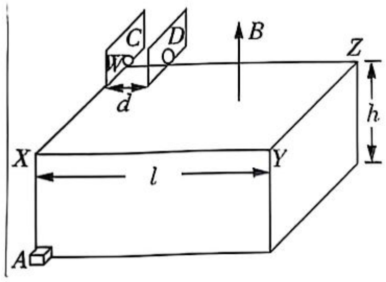
粒子坐标为 $(0,\frac{21}{16}a,\frac{5}{8}a)$

10.（2013 年清华夏令营）如图所示，正方形绝缘光滑水平台面 $WXYZ$ 边长 $l=1.8$ m，距地面 $h=0.8$ m．平行板电容器的极板 CD 间距 $d=0.1$ m 且垂直放置于台面．C 板位于边界 WX 上，D 板与边界 WZ 相交处有一小孔．电容器外的台面区域内有磁感应强度 $B=1$ T、方向竖直向上的匀强磁场．电荷量 $q=5\times10^{-13}$ C 的微粒静止于 W 处，在 CD 间加上恒定电压 $U=2.5$ V，板间微粒经电场加速后由 D 板所开小孔进入磁场（微粒始终不与极板接触），然后由 XY 边界离开台面．在微粒离开台面瞬时，静止于 X 正下方水平地面上 A 点的滑块获得一水平速度，在微粒落地时恰好与之相遇．假定微粒在真空中运动，极板间电场视为匀强电场，滑块视为质点．滑块与地面间的动摩擦因数 $\mu=0.2$，取 $g=10\ \text{m/s}^2$．

(1)求微粒在极板间所受电场力的大小并说明两板的极性；

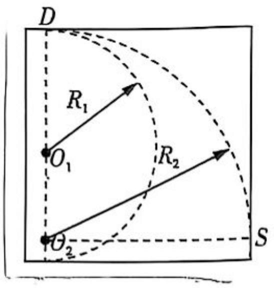
(2)求由 XY 边界离开台面的微粒的质量范围；

(3)若微粒质量 $m_0=1\times10^{-13}$ kg，求滑块开始运动时所获得的速度．



解：(1) $Eq=\frac{U}{d}q=1.25\times10^{-11}$ N

(2) 两个临界如图所示

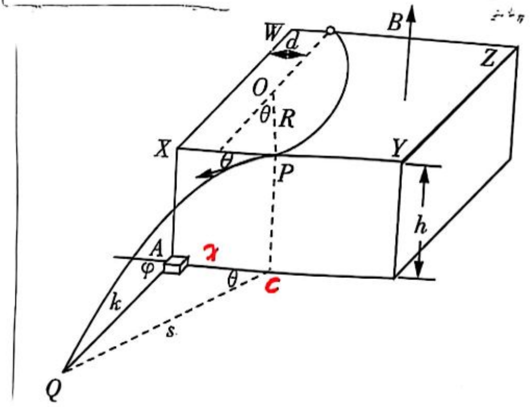


$$R_1<R=\frac{mv_0}{qB}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um}{q}}<R_2$$

$$R_1=\frac{L}{2}\quad.\quad R_2=L-d$$

解得 8.1×10^{-14} kg $<m<2.89\times10^{-13}$ kg

(3) $v_0=\sqrt{\frac{2Uq}{m}}=5$ m/s，$R=\frac{mv_0}{qB}=1$ m



如图. $\cos\theta=\frac{L-R}{R}=0.8\Rightarrow\theta=37°$

微粒平抛和滑块匀速直线运动所用时间

$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=0.4$ m

水平位移 $s=v_0t=2$ m

$x=\overline{AC}=\overline{XP}=d+R\sin\theta=0.7$ m

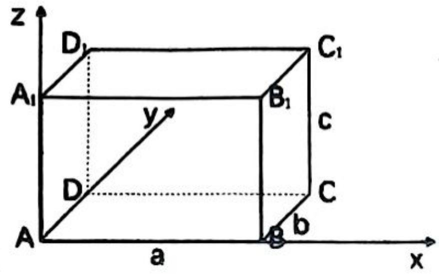
在 $\triangle QAC$ 中，$K^2=x^2+s^2-2xs\cos\theta=2.25$ m²

$\Rightarrow K=1.5$ m

设滑块初速度为 v. 则 $vt-\frac{1}{2}\mu gt^2=K\Rightarrow v=1.5$ m/s

由正弦定理. $\frac{S}{\sin(\pi-\varphi)}=\frac{K}{\sin\theta}\Rightarrow\sin\varphi=0.8\Rightarrow\varphi=53°$

以A为原点建立如图所示的空间直角坐标系。



(1)设$a=L$，$c=H$，在$0\leqslant x\leqslant a$范围内有沿$+y$方向的匀强磁场，磁感应强度B_0，在A点沿$+z$方向射入质量为m，电荷量为$-q$的粒子，若粒子恰好经过BB_1靠近B_1的三等分点，试求粒子入射的速度和在磁场内运动轨迹上的点到直线A_1B_1的最小距离；

(2)设$a=4L$，$b=\dfrac{\sqrt{26}}{2}L$，$c=\dfrac{\sqrt{10}}{2}L$，在四边形AD_1C_1B内（含边界）有垂直于平面AD_1C_1B斜向下的匀强磁场，磁感应强度B_0，在A点沿$+x$方向射入质量为m，电荷量为$+q$的粒子1，若粒子1恰好经过D_1C_1中点，试求粒子1在磁场内运动轨迹上的点到C点的最小距离；

(3)在（2）的条件下，当粒子1距离C点最近时，与速度为v_1的不带电的粒子2发生弹性正碰，且发生碰撞时粒子1在前，粒子2在后。已知碰撞时两粒子发生电荷转移，且碰撞后电荷量与质量成正比，若发生碰撞后粒子1恰不离开磁场（不考虑与粒子2再次碰撞的情况），试求粒子2的质量M。（忽略粒子重力和相对论效应）

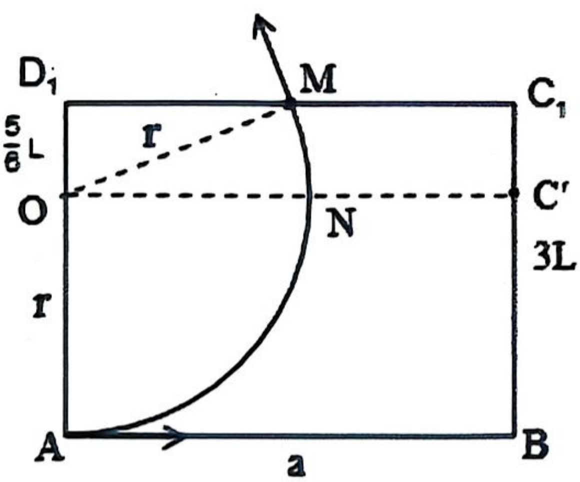


图2

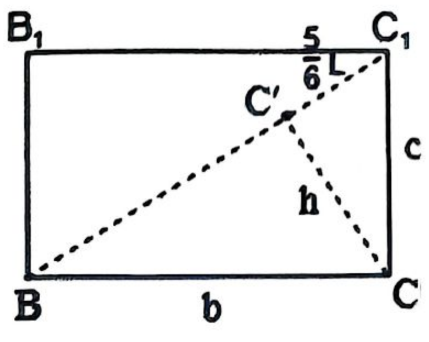


图3

解：

(1)

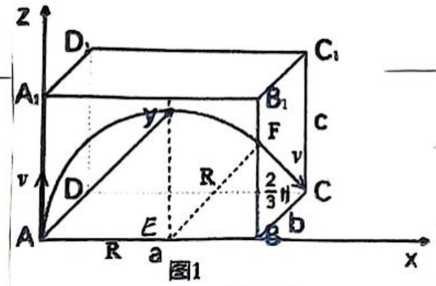
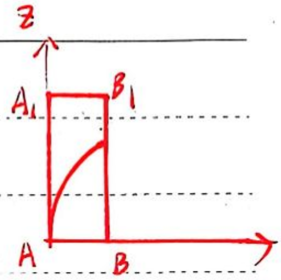


图1



若粒子轨迹如右图所示，则最小距离 $S=\dfrac{H}{3}$

若粒子轨迹如左图所示。

在Rt△EFB中 $(L-R)^2+\left(\dfrac{2}{3}H\right)^2=R^2$

$\Rightarrow R=\dfrac{2H^2}{9L}+\dfrac{L}{2}$

$S=H-R=H-\dfrac{2H^2}{9L}-\dfrac{L}{2}$

(2) 过点C作$CC'\perp BC_1$，面AD_1C_1B上任意一点P到点C的距离$l=\sqrt{\overline{PC'}^2+\overline{CC'}^2}$

故只需找$\overline{C'P}$的最小值。如图2所示

连接OC'交轨迹于N。$\overline{CN}$即最小距离

圆外一点到圆上一点距离的最小

在Rt△OD_1M中 $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+(c-r)^2=r^2\Rightarrow r=\dfrac{13}{6}L$

$\Rightarrow OD_1=\dfrac{5}{6}L$

如图三所示，$\overline{BC_1}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CC_1}^2}=3L$

$S_{\triangle BCC_1}=\dfrac{1}{2}\overline{BC_1}\cdot\overline{CC'}=\dfrac{1}{2}\overline{CC_1}\cdot\overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{CC'}=\dfrac{\sqrt{65}}{6}L$

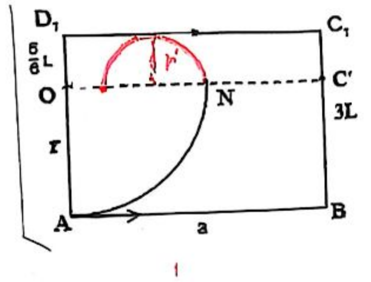
$\overline{C'C_1}=\sqrt{c^2-\overline{CC'}^2}=\dfrac{5}{6}L$

∴ OD_1C_1C'为矩形，$OC'=D_1C_1=4L$

$C'N=OC'-r=\dfrac{11}{6}L$

$\overline{CN}=\sqrt{\overline{C'N}^2+\overline{CC'}^2}=\dfrac{\sqrt{186}}{6}L$

∴ 粒子1在磁场内运动轨迹上的点到C点的最小距离是$\dfrac{\sqrt{186}}{6}L$



解: $r' = \frac{5}{6}L$

设撞前粒子1速度和电荷量为 v_0、q_0，撞后为 v'、q'

则 $r = \frac{mv_0}{qB}$ ①，$r' = \frac{mv'}{q'B}$ ②，$q' = \frac{m}{M+m}q_0$ ③

联立①②③ $\Rightarrow v' = \frac{5mv_0}{13(M+m)}$ ④

碰撞过程中，设撞后粒子2速度为 v_2

则 $\begin{cases} mv_0 + Mv_1 = mv' + Mv_2 \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}mv' + \frac{1}{2}Mv_2^2 \end{cases}$

$\Rightarrow v' = \frac{2M}{m+M}v_1 + \frac{m-M}{m+M}v_0$ ⑤

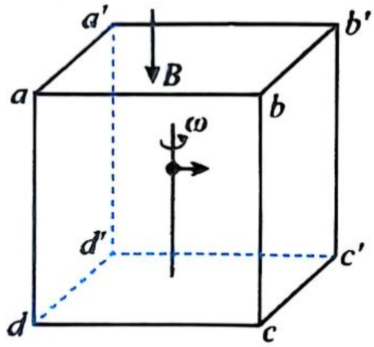
联立④⑤ $\Rightarrow M = \frac{8mqLB_0}{13qLB_0 - 12mv_1}$

如图为一种新型粒子收集装置，一个绕竖直轴以速度$\omega = 20\pi rad/s$逆时针转动的粒子源放置在边长为$L = 0.1m$的立方体$abcda'b'c'd'$的中心，立方体四个侧面均为荧光屏，上下底面$acbb'$、$cc'dd'$为空，立方体处在竖直向下的磁感应强度$B = 0.2T$匀强磁场中。在$t = 0$时刻，粒子源的发射方向恰好水平向右指向$bb'cc'$的中心，并发射一种比荷为$\frac{q}{m} = 1 \times 10^8 C/kg$带正电粒子。已知每秒发射粒子总数为$n_0$，粒子源发射的粒子数量随速度均匀分布，即不同速度的粒子数量相同。粒子打到荧光屏上后被荧光屏所吸收，不考虑粒子间的相互作用和荧光屏吸收粒子后的电势变化，不考虑粒子源的尺寸大小，重力忽略不计。

(1)若无粒子打到荧光屏上，求粒子源发射的粒子的速度大小范围；

(2)若使粒子源发射粒子全部打在荧光屏上，求粒子源发射粒子的速度大小范围；

(3)撤去磁场，在立方体内施加一个竖直向下的匀强电场，电场强度为$E = 750N/C$，若粒子源发射的粒子速度范围为$5 \times 10^4 m/s \leqslant v_0 \leqslant 1 \times 10^5 m/s$，求每秒打在荧光屏上的粒子数量$n$。



解：

(1) 粒子的运动轨迹圆直径为$\frac{L}{2}$时，离子恰好能打到荧光屏上，设速度为v_1

则 $\frac{mv_1}{qB} = \frac{L}{4} \Rightarrow v_1 = 5\times10^5 m/s$

$\therefore v < 5\times10^5 m/s$

(2)

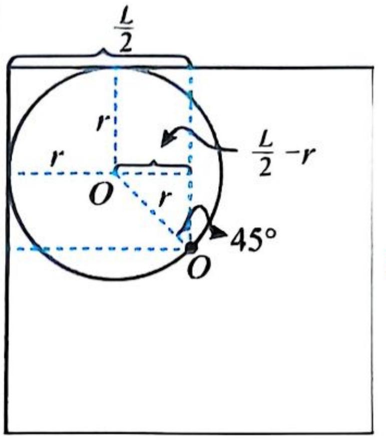


图1

如图是粒子能全部打在荧光屏上的临界，设速度为v_2

则 $\frac{mv_2}{qB}(\sqrt{2}+1) = \frac{L}{2}$

$\Rightarrow v_2 \approx 5.86\times10^5 m/s$

$\therefore v > 5.86\times10^5 m/s$

(3)

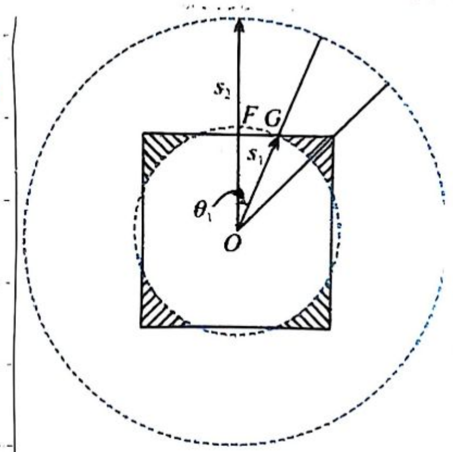


图2

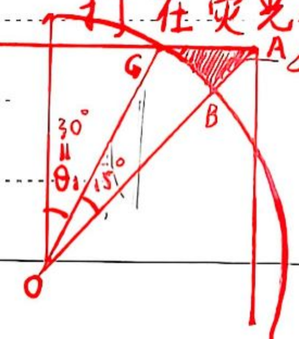
设粒子运动时间为t，则 $\frac{1}{2}\frac{Eq}{m}t^2 = \frac{L}{2} \Longrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{15}\times10^{-5}s$

若无立方体阻挡，水平射程 $s = vt$ 与初速度成正比，粒子随射程均匀分布

$v = 5\times10^4 m/s$时，$s_1 = \frac{\sqrt{3}}{30}m = \frac{\sqrt{3}}{3}L > \frac{L}{2}$

$v = 1\times10^5 m/s$时 $s_2 = \frac{\sqrt{3}}{15}m = \frac{2\sqrt{3}}{3}L$，俯视图如图所示

用圆环面积，减去4个阴影部分面积，再除以圆环面积，即打在荧光屏上的粒子所占的比例η



$\Delta S = S_{\triangle OGA} - S_{扇OGB} = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} - s_1\sin\theta_1\right)\cdot\frac{L}{2} - \frac{1}{24}\pi s_1^2 = \frac{9-3\sqrt{3}-\pi}{72}$

$S_{环} = \pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}L\right)^2 - \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}L\right)^2 = \pi L^2$

$n = \eta n_0 = \frac{S_{环} - 8\Delta S}{S_{环}} n_0 = \left(\frac{10}{9} + \frac{\sqrt{3}-3}{3\pi}\right)n_0$

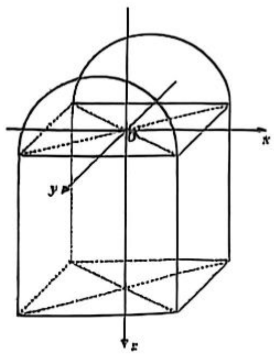
（10分）为了研究带电粒子在磁场中的运动情况，设计了如图甲所示的封闭装置。该装置由一个边长为 L 的立方体和一个直径、高均为 L 的半圆柱叠加而成，半圆柱的正方形平面与正方体的上表面重合，装置内部是空心的。以正方体上表面中心 O 为坐标原点，分别沿正方体的三个侧面分别建立 x、y、z 坐标轴。装置内部存在磁场，磁感应强度沿 x、y、z 方向的分量 B_x、B_y、B_z 随时间变化的规律如图乙所示，B_0 已知。O 处有一正离子源，该离子源以同一速率不断沿 x 轴正方向发射电荷为 $+q$、质量为 m 的离子。已知 $t=0$ 时刻发射的离子恰好沿 x 轴负方向射出装置内壁，$T=\frac{2\pi m}{qB_0}$，不考虑离子间的碰撞、相互作用及离子重力，也不考虑因磁场突变所产生的电场对离子运动的影响，离子碰到装置内壁后立即被吸收。

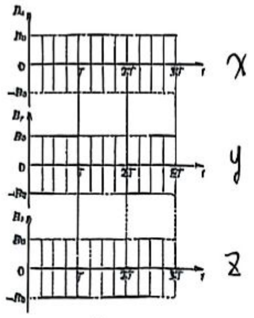
（1）求离子发射时的速率 v；

（2）求 $t=\frac{T}{2}$ 时刻发射的离子

①在 $t=T$ 时刻的位置，用坐标 (x, y, z) 表示；

②在磁场中做匀速直线运动的时间。

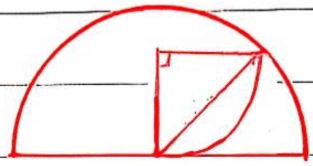

甲



乙

解

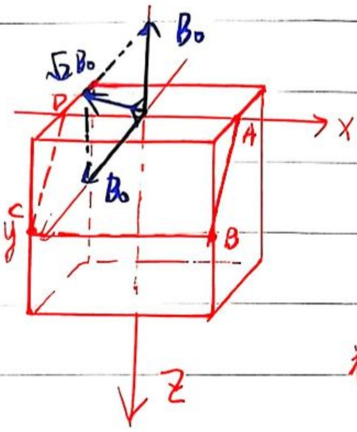
(1)



$$r_0=\frac{mv}{qB_0}=\frac{\sqrt{2}}{4}L$$

$$\Rightarrow v=\frac{\sqrt{2}qB_0L}{4m}$$

(2)



① $\frac{T}{2}\sim T$ 内，磁场为 y 方向与 z 方向磁场的合成

如图所示

粒子运动的平面是 ABCD

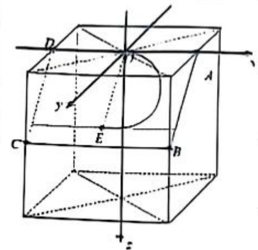
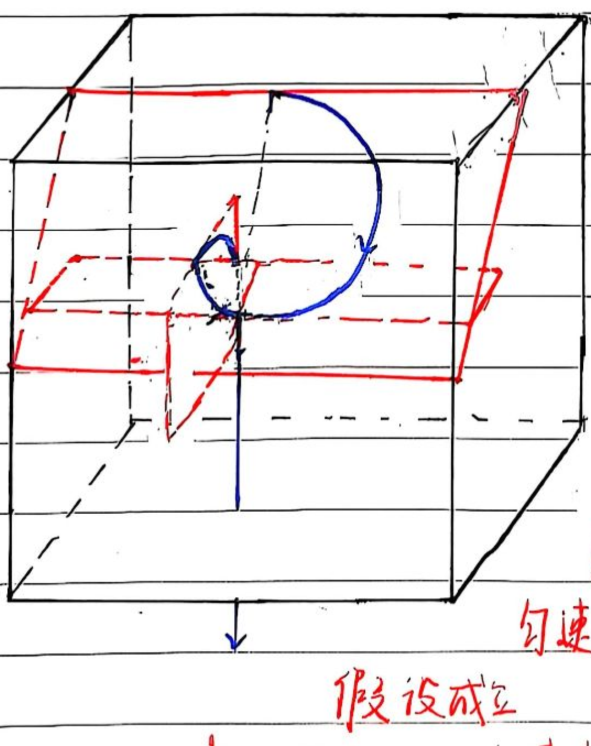


图1

$$r=\frac{mv}{q\sqrt{2}B_0}=\frac{1}{4}L \quad 则\ \overline{DE}=2r=\frac{1}{2}L$$

E 的坐标是 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}L, \frac{\sqrt{2}}{4}L\right)$

② 如图为粒子轨迹



$\frac{T}{2}-T$ 先在倾斜平面上运动一个半圆

$T-\frac{5}{4}T$ 再在与 xOy 平面平行方向上运动一个四分之一圆

$\frac{5}{4}T-\frac{3}{2}T$ 再在与 yOz 平面平行方向上运动一个四分之一圆

$\frac{3}{2}T$ 后，沿 z 轴正向做匀速直线运动，假设粒子匀速直线运动时穿出磁场

粒子 $\frac{3}{2}T$ 时离下表面距离

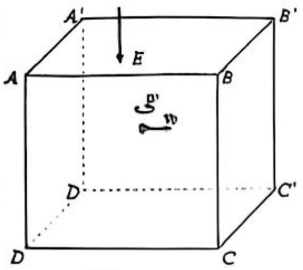
$$h=L-\frac{\sqrt{2}}{4}L-r_0=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)L$$

匀速穿出磁场时间 $t=\frac{h}{v}=\frac{2(\sqrt{2}-1)m}{qB_0}<\frac{T}{2}$

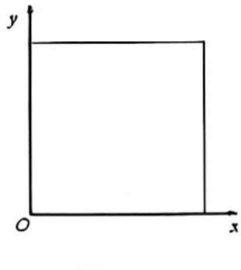
假设成立

粒子在磁场中匀速直线运动时间为 $\frac{2(\sqrt{2}-1)m}{qB_0}$

如图为一种粒子收集装置，一个绕竖直轴以角速度$\omega = 20\pi rad/s$逆时针转动的粒子源放置在立方体$ABCDA'B'C'D'$的中心。粒子源可以向水平各方向均匀地发射一种带正电粒子，粒子比荷为$\frac{q}{m} = 1\times10^8 C/kg$。立方体处在竖直向下的匀强电场中，场强$E = 1\times10^3 N/C$，立方体除了上下底面$AA'BB'$、$CC'DD'$为空外，其余四个侧面均为荧光屏，立方体边长为$L = 0.1m$。在$t = 0$时刻，粒子源的发射方向恰好水平向右指向$BB'C'C$的中心。不考虑粒子间的相互作用，粒子打到荧光屏上后被荧光屏所吸收，不考虑荧光屏吸收粒子后的电势变化，粒子源可看作质点。



图(a)

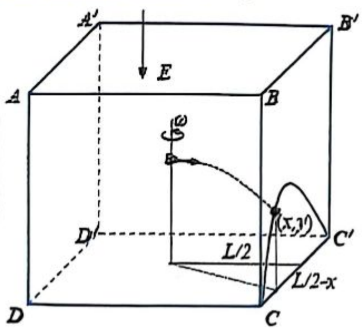


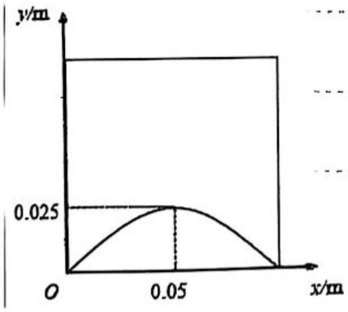
图(b)

(1)若无粒子打到荧光屏上，求粒子源发射的粒子的速度范围；

(2)若粒子源发射的速率为$v_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\times10^5 m/s$，求每秒打在荧光屏上的粒子数占每秒发射粒子数的比例；

(3)若粒子源发射的速率为某一临界值时，恰好所有粒子均打在荧光屏上，任取一侧面荧光屏，建立如图(b)所示的坐标系，求屏上形成的发光曲线的坐标y与x之间的关系，并在答题纸图(b)中定性画出其形状。





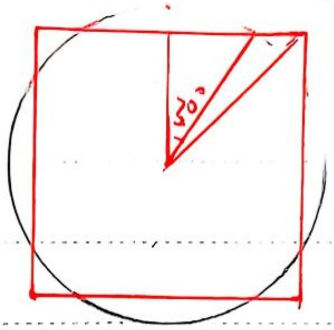
解:

(1) 设临界速度为v_1，则有

$$\begin{cases} v_1 t_1 = \frac{L}{2} \\ \frac{1}{2}\frac{Eq}{m}t_1^2 = \frac{L}{2} \end{cases} \Rightarrow v_1 = 5\times10^4 m/s$$

∴ $0 < v < 5\times10^4 m/s$

(2) 与上一道题相同



$$\eta = \frac{30^\circ}{45^\circ} = \frac{2}{3}$$

(3) 粒子的速度v使其恰好能击中下顶角

$$\begin{cases} v t_2 = \sqrt{2}L \\ \frac{1}{2}\frac{Eq}{m}t_2^2 = \frac{L}{2} \end{cases} \Rightarrow v = 5\sqrt{2}\times10^4 m/s$$

如图，由几何关系得

对于荧光屏上的(x, y)点，

粒子的水平位移

$s = vt = \sqrt{(\frac{L}{2}-x)^2 + (\frac{L}{2})^2}$ ①

竖直位移 $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{L}{2} - y$ ②

联立①②，得 $y = -\frac{1}{L}x^2 + x$

$= -10x^2 + x$

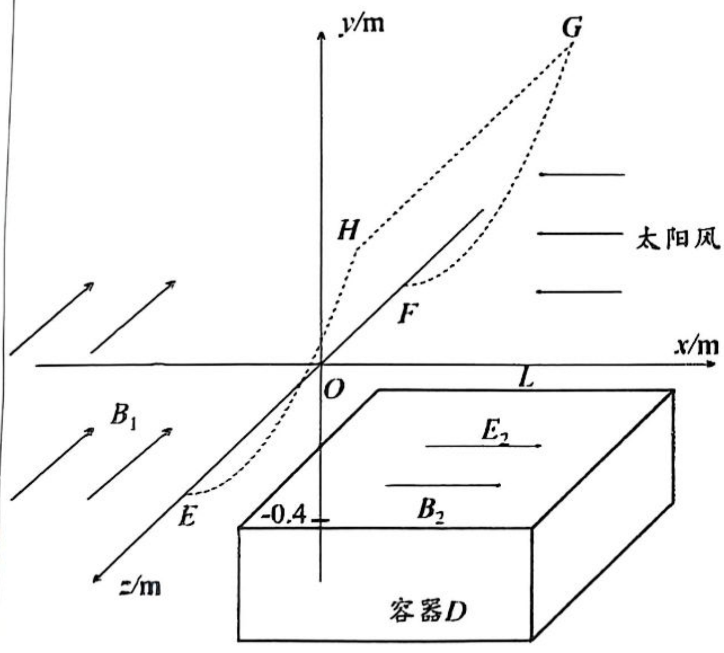
18. （16 分）从日冕发出的太阳风是由质子和电子组成的高速等离子体，人类可以利用太阳风的动力进行星际航行。科学家设计了如图甲所示的模拟实验装置，整个装置处于真空中。实验中模拟的太阳风在 $y>0$ 的范围内，以 $v_0=4.0\times10^5$m/s 的速度沿 x 轴负方向运动，图甲中虚拟曲面 ***EFGH*** 与 ***xoz*** 平面相切于 ***oz*** 轴，该曲面与 ***xoy*** 平面的交线是一条抛物线 ***OM***，其抛物线方程满足 $y=\frac{3}{2}x^2$，其中 $0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$m。曲面与平面yOz 间存在沿 y 轴负方向的匀强电场，其电场强度 $E_1=5.01\times10^3$N/C。在 yoz 平面左侧空间某区域有沿 z 轴负方向的匀强磁场 B_1，能把质子约束到（$x=0, y=-0.4$）直线处，质子经过该直线后，进入左端开口的容器 D。容器 D 的长度 L=15m，整个装置在 xoy 平面内的截面图如图乙所示，已知质子的质量和电量分别为 $m=1.67\times10^{-27}$kg、$e=1.6\times10^{-19}$C，不计离子间的相互作用。

（1） 证明在 xoy 平面内通过抛物线 OM 进入电场区域的质子均经过原点 O；

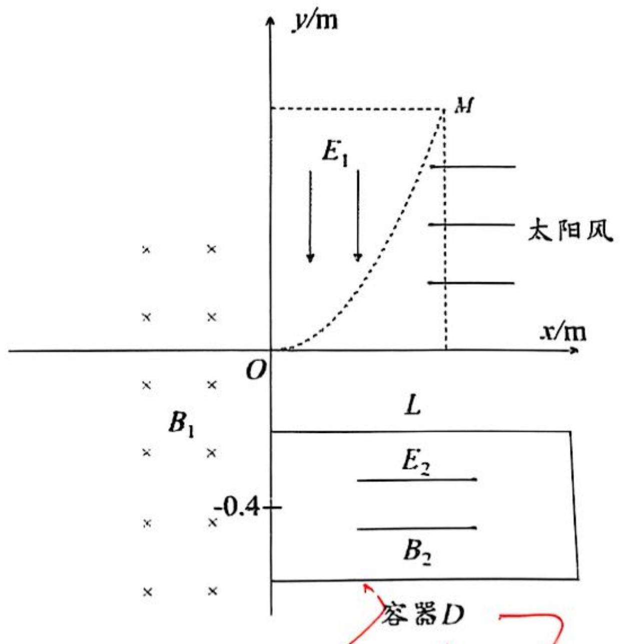
（2） 求匀强磁场 B_1 的大小；

（3） 求匀强磁场 B_1 的区域在 xoy 平面内的最小截面积；

（4） 在 xoy 平面内，单位时间内通过抛物线 OM 的质子数 $n=1\times10^{22}$ 个，容器内同时存在沿 x 轴正方向的匀强电场 E_2 和匀强磁场 B_2，可使这些质子均能与容器右侧面发生弹性碰撞，已知所加电场的电场强度 E_2=167N/C。求该状态下通过 O 点的质子对容器产生的推力 F。



图甲



图乙

解：模仿22年山东卷17题，有很大的信息量。

(1) 设粒子进入抛物线时坐标为 (x, y)，假设其能够打在O点，则有

$x=v_0t$，　$y=\frac{E_1q}{2m}t^2$　$\Rightarrow y=\frac{E_1q}{2mv_0^2}x^2=\frac{3}{2}x^2$

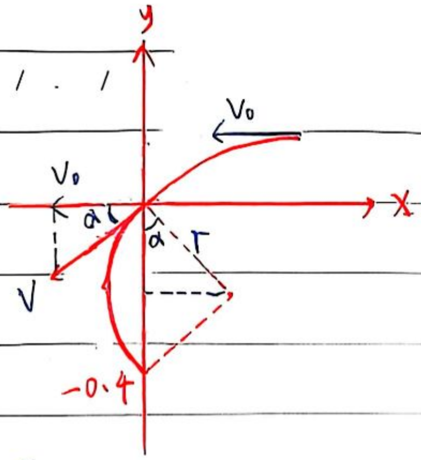
粒子入射点的轨迹方程恰好是抛物线OM

∴ 在xoy平面内通过抛物线OM进入电场区域的质子均经过原点O。

No.

DATE / . /

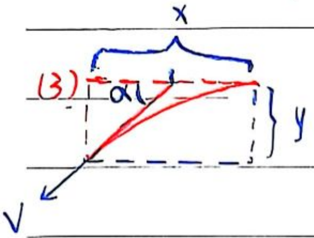
(2)



$$\Delta y = 0.4 = 2r\cos\alpha = \frac{2mv\cos\alpha}{qB} = \frac{2mV_0}{qB_1}$$

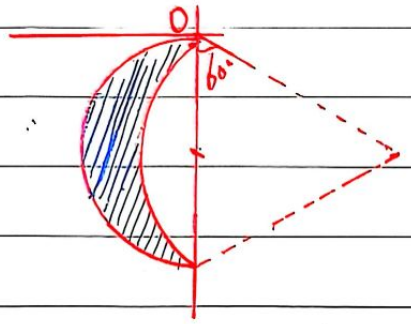
$$\Rightarrow B_1 = 2.0875 \times 10^{-2}\,T$$

(3)



由类平抛运动推论得

$$\tan\alpha = \frac{2y}{x} = 3x \in [0, \sqrt{3}]$$



如图，蓝色阴影面积即最小截面积、

记 $r_0 = 0.2m$

则 $S = \frac{1}{2}\pi r_0^2 - \left[\frac{1}{6}\pi(2r_0)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(2r_0)^2\right]$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{25} - \frac{\pi}{150}\right) m^2$$

(4) 进入容器的粒子，在x方向上做匀加速直线运动，在垂直于x方向上做匀速圆周运动。弹碰时，粒子仅x方向速度发生改变，故只需研究x方向.

$$V_{末x}^2 - V_0^2 = 2\frac{E_2 q}{m}L \Rightarrow V_末 = 8\times10^5\,m/s$$

$$F\Delta t = 2n\Delta t\, mV_{末x} \Rightarrow F = 26.72N，沿x轴正向$$

No.
DATE / /

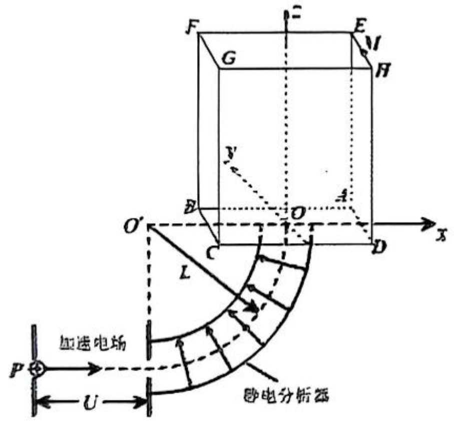
（16分）如图甲所示，位于 P 处的粒子源不断产生初速度为零的带正电的粒子，粒子经两板间匀强电场加速后沿图中 $\frac{1}{4}$ 圆弧虚线通过静电分析器，从 O 点垂直 xOy 平面向上进入长方体有界匀强磁场区域，恰好打在 EH 的中点 M。加速电场的电压为 U，两板间距为 L。静电分析器通道内有均匀辐向分布的电场，圆弧虚线的半径为 L。磁场区域的磁感应强度 B_0（大小未知）的方向沿 y 轴负方向（图中未画出）；磁场区域的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}L$，底面 $ABCD$ 为正方形，位于 xOy 平面内，边长为 L、中心为 O，AB 边与 x 轴平行；长方体上表面 $EFGH$ 为一荧光屏。粒子质量为 m，电荷量为 q，不计粒子重力。求：

（1）辐向电场中虚线处的电场强度 E 的大小；

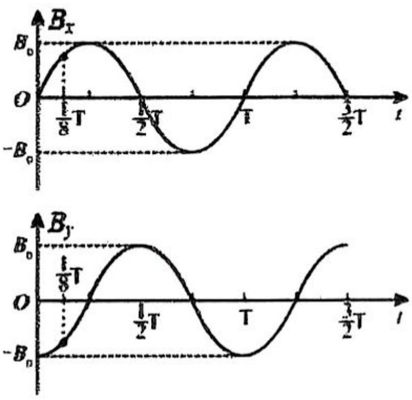
（2）磁感应强度 B_0 的大小；

（3）粒子从 P 运动到 M 的时间 t；

（4）若 x、y 方向的磁场按如图乙所示随时间周期性变化，其中 $B_x = B_0 \sin\frac{2\pi}{T}t$，$B_y = -B_0 \cos\frac{2\pi}{T}t$，磁场变化的周期为 T。不计粒子间的相互作用，粒子在磁场中运动的时间远小于磁场变化的周期，不考虑磁场变化产生的电场对粒子的影响。试确定一个周期内粒子在荧光屏上留下的光斑轨迹形状，并写出轨迹方程（用 x，y，z 坐标表示）。



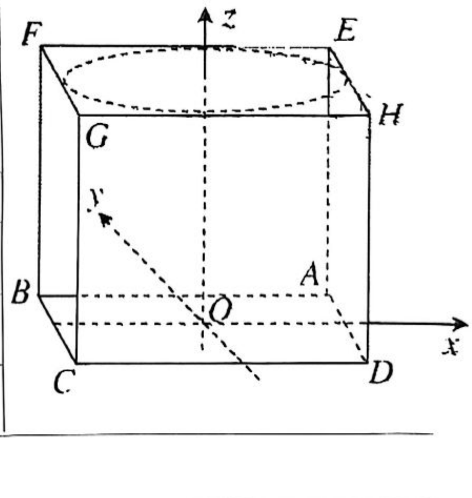
甲



乙

(1) $E=\frac{2U}{L}$　　(2) $B_0=\frac{1}{L}\sqrt{\frac{2Um}{q}}$

(3)



(4)长方体中的磁感应强度为 $B=\sqrt{B_x^2+B_y^2}=B_0$ ……………………（1分）

所以所有粒子在磁场中的运动轨迹半径均为 L。……………………（1分）

由几何关系可知，一个周期内粒子在荧光屏上留下的光斑轨迹是以 $r=\frac{L}{2}$ 为半径，以坐标为 $(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}L)$ 的点为圆心的圆（如图所示）。……………………（1分）

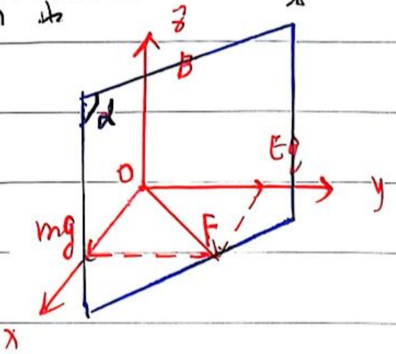
轨迹方程为 $x^2+y^2=\frac{L^2}{4}$，$z=\frac{\sqrt{3}}{2}L$ ……………………（1分）

【题 6】设空间存在三个相互垂直的已知场：电场强度为 E 的匀强电场，磁感应强度为 B 的匀强磁场和重力加速度为 g 的重力场．一质量为 m、电荷量为 q 的带正电的质点在此空间运动，已知在运动过程中，质点速度大小恒定不变．

（1）试通过论证，说明此质点作何运动(不必求出运动的轨迹方程)．

（2）若在某一时刻，电场和磁场突然全部消失，已知此后该质点在运动过程中的最小动能为其初始动能（即电场和磁场刚要消失时的动能）的一半，试求在电场、磁场刚要消失时刻该质点的速度在三个场方向的分量．

解：



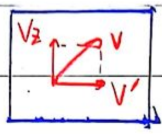
(1) 将 mg 与 Eq 合成为F，设粒子速度大小为V

为使F不做功，粒子仍须始终在与F垂直的平面中运动。记该平面为α

在α中，将粒子速度沿 z轴方向和垂直于z轴方向正交分解。(固定分速度方向)

因为 V_z 方向上没有任何力，所以 V_z 恒定不变

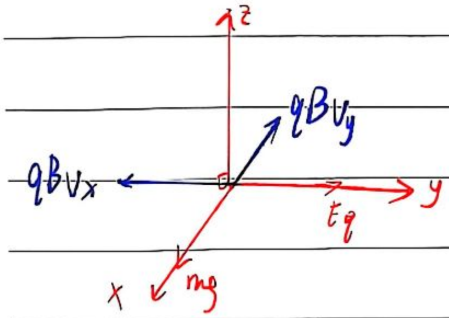
而 $|V| = \sqrt{V_z^2+V'^2}$ 恒定不变 所以 V' 恒定不变



所以 V 大小、方向恒定不变．质点做匀速直线运动．

(2) 粒子做斜上抛运动，动能最小时 $V_x = 0$

则 $\frac{1}{2}mV^2 = 2\times\frac{1}{2}m(V_y^2+V_z^2) \Rightarrow V_y^2+V_z^2 = V_x^2$



$qBV_x = Eq \Rightarrow V_x = \frac{E}{B}$

$qBV_y = mg \Rightarrow V_y = \frac{mg}{qB}$

则 $V_z = \sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 - \left(\frac{mg}{qB}\right)^2}$

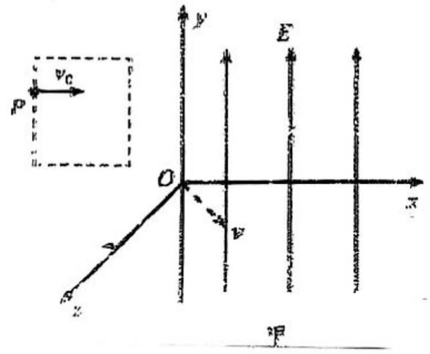
C(11

如图甲，三维坐标系中yoz平面的左侧虚线区域内存在一未知电场，yoz平面的右侧存在平行z轴方向周期性变化的磁场B_1和沿y轴正方向竖直向上的匀强电场，电场强度$E=0.4\text{N/C}$。一质量$m=4\times10^{-6}\text{kg}$、电荷量$q=1\times10^{-4}\text{C}$的带正电液滴，从$xoy$平面内的$P$点沿$x$轴方向以$v_0=1\text{m/s}$的初速度进入未知电场区域，经过0.1s到达原点$O$第1次经过$x$轴，此时速度大小$v=2\sqrt{2}\text{m/s}$，方向在$xoy$平面内与$x$轴正向成45°角斜向下。把液滴到达原点$O$的时刻记为$t=0$，此时磁场沿$z$轴负方向，磁场$B_1$随时间变化的关系如图乙所示，其中$B_0=0.4\text{T}$、$t_0=\frac{\pi}{20}\text{s}$，重力加速度$g=10\text{m/s}^2$。

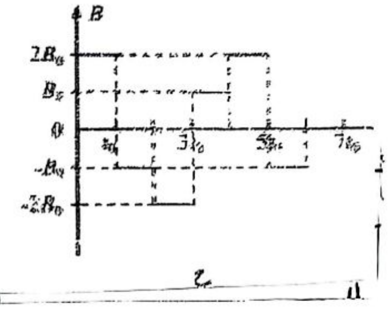
（1）求液滴从P点到原点O的过程中，受到的电场力的冲量大小；

（2）求液滴从第1次到第4次经过x轴的时间间隔；

（3）在$t=6t_0$时刻撤去电场E和磁场B_1，同时在整个空间区域加上竖直向上的匀强磁场，磁感应强度$B_2=\frac{3\pi}{5}\text{T}$，求液滴继续运动过程中达到最大高度时的位置坐标。



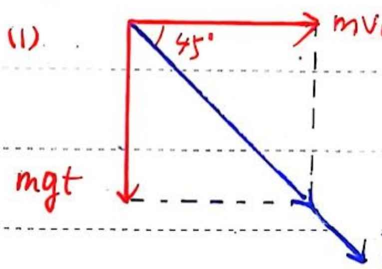
甲



乙

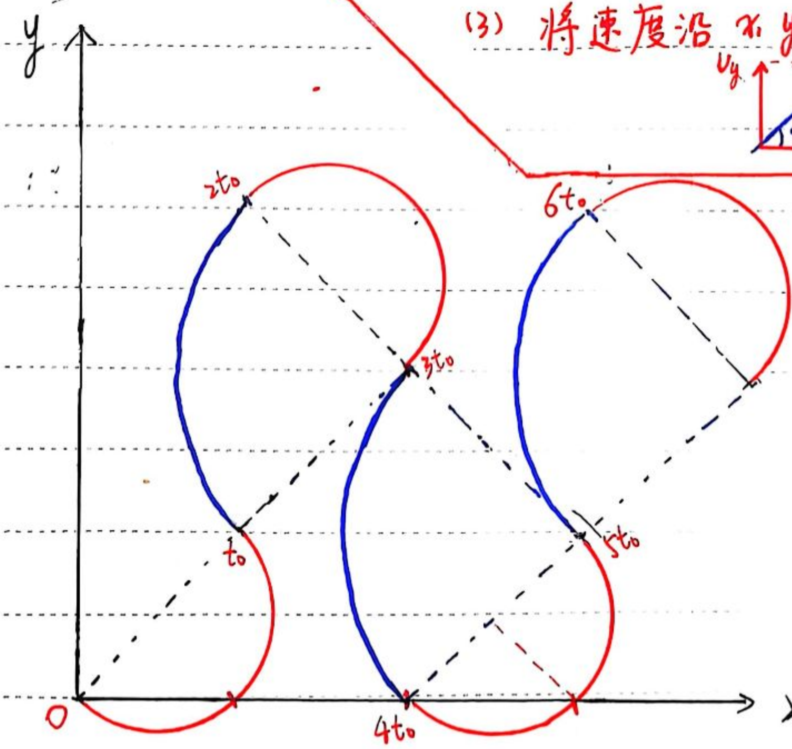
解：$mv_0=mgt$，I_E沿v方向

(1)

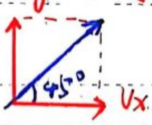


$I_E=mv-\frac{mv_0}{\cos45°}=4\sqrt{2}\times10^{-6}\text{N}\cdot\text{s}$

(2) 粒子轨迹如图 $\Delta t=4t_0+\frac{1}{2}t_0=\frac{9}{2}t_0=\frac{9}{40}\pi\ \text{s}$



(3) 将速度沿x、y方向分解：



y方向做竖直上抛运动

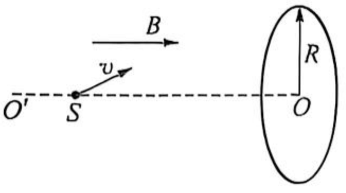
xOy平面方向做匀速圆周运动

到达最高点时间$t=\frac{v\sin45°}{g}$

$=0.2\text{ s}$

圆周运动周期$T=\frac{2\pi m}{qB_2}=$

11. 如图题 11 所示，S 为一离子源，它能机会均等地向各个方向持续大量地发射正离子。离子的质量、电量和速率均为 m、q 和 v。在离子源的右侧有一半径为 R 的圆屏。OO' 是通过屏中心 O 并垂直于屏面的轴线，S 位于轴线上。空间有一平行于轴线向右的匀强磁场，磁感应强度为 B，发射的离子中，有的离子不论 SO 的距离如何，总能打在圆屏上。求这类离子占离子总数的比例(不考虑离子间的碰撞及相互作用)。



图题 11

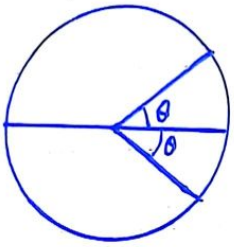
解

设 v 与水平方向夹角为 θ

$\frac{mv\sin\theta}{qB} \leq R$

认为放射源 S 周围密度均匀，取一个如图第 11 题所示半径为 a 的球面，这样的离子从面积为 $2\pi a^2(1-\cos\theta)$(利用球冠面积公式 $S_{冠}=2\pi Rh$)球面上通过，故与总发射离子数之比为 $k=\frac{2\pi a^2(1-\cos\theta)}{4\pi a^2}=\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{qBR}{2mv}\right)^2}}{2}$。

不能取截面，得出 $\eta=\frac{\theta}{\pi}$ 尽管截面旋转后成为球，



但旋转后 η 不再是 $\frac{\theta}{\pi}$

类比线段 AC，蓝色部分 AB = 红色部分 BC

绕 A 点旋转一周成圆后

$S_{蓝}:S_{红}=1:3$.