

# 广义相对论与施瓦西时空科普

Manifold

版本：2025 年 8 月 8 日

## 目录

1 广义相对论简介	1
2 如何描述弯曲的时空	2
2.1 线元	2
2.2 类时、类空和类光的曲线	3
2.3 平直和弯曲的直观认识	3
2.4 内禀曲率	4
2.5 嵌入图	4
3 施瓦西黑洞	6
3.1 施瓦西坐标系下的奇性	6
3.2 内向 Eddington 坐标系	7
3.3 类光测地线族	7
3.4 黑洞的事件视界	8
3.5 坍缩星的外观	9
3.6 光子球	10
3.7 黑洞阴影	11
3.8 引力透镜	11
3.9 制作小型施瓦西黑洞	12
4 施瓦西时空的延拓	12
4.1 施瓦西时空的 Kruskal 延拓	12
4.2 黑洞、两个全同“宇宙”和白洞	14
5 时空旅行悖论	14
5.1 闭合类时线与因果性疑难	14
5.2 自洽性原则与时间旅行悖论的解决	15

## 1 广义相对论简介

广义相对论是研究弯曲时空 (注意不可说成是“扭曲的时空”，因为联络是无挠的) 的理论，它的灵感主要来源于引力的“普适性 (universality)”，包括两层含义：

(1) 任何物体在引力场中都受引力；

(2) 引力场中任何两个物体，不论其质量和组分如何，只要初始状态 (位置、速度) 相同，而且除引力外不受力，以后每一时刻的位置和速度就必然一样。

这等价于初始位置和速度相同的、除引力外不受力的任何物体在引力场中都“齐步走”。这种毫无个性的集体行为强烈地暗示着引力是整个时空背景的内禀性质，与其他力有实质性的差别。

具体来说，可以做这么一个比喻：物理学是研究物理客体运动 (演化) 规律的学问。物理客体好比演员。正如演员的表演不能没有舞台一样，物理客体的演化也总是在某种舞台 (或背景) 上进行的，这个舞台 (背景) 就是时空。在广义相对论创立前，人们默认相对论的背景时空是闵氏时空。闵氏时空是如此简单，以至人们往往不注意 (忘记) 它的存在。引力场中的“齐步走”现象引起了爱因斯坦对时空背景的注意。假如你看演出时发现某个演员的头顶突然下降了 20cm，你会认为他蹲下了。然而，假如台上所有演员的头顶以及桌面、椅面都同时下降 20cm，那么最大的可能是舞台台面下降所致。

类似地，在引力作用下的“齐步走”现象分明强烈地暗示着引力本身是一种纯时空效应。爱因斯坦于是这样猜测：引力可忽略时，时空是平直的；引力不可忽略时 (例如在必须考虑地球或太阳的引力场时)，时空变得弯曲，弯曲情况取决于产生引力场的物质分布。

## 2 如何描述弯曲的时空

已经提到，广义相对论认为引力的本质是时空的弯曲。为了描述时空的弯曲，需要用到微分几何。初中学平面几何时，人们说：

人生几何，何必死去学几何，学了几何有何用，不学几何奈我何？

现在你可以问，这种微分几何不学你又奈我何？梁灿彬老师的回答是：

你不学几何是无人奈你何，不过一提相对论，保管你差得多。概念易出错，理解难深刻。若想砍柴快，劝君把刀磨。

在这里，我不会完全讲清需要用到的所有微分几何，那样时间根本不够。能通过这一节的讲解，使得听众大概知道弯曲时空是怎么回事，就足够了。

### 2.1 线元

在介绍空间的曲率之前，首先须对空间本身作些介绍：一个流形 (不严格地说，可以理解为一个可配以坐标系的集合) 配以线元就是一个空间。线元严格来说应该叫**度规的线元表达式**，考虑到面向的听众不懂张量，我在此避免引入度规张量，于是仅讲述线元，这种方法虽然会损失些严格性，总归是比大家完全听不懂要好。注意，我在后面有时也会称线元为度规，这是积习难改。

对于一个空间来说，线元是一个很基本的量，常记作  $ds^2$ 。注意，这里的  $ds^2$  并不是某个量  $ds$  的平方，它只是一个记号，可以小于零。线元负责度量空间中的长度，它的绝对值就是“元线段长度”，元线段长度在任何坐标系下都是不变的。下面借助两个简单的例子进行说明。

若在平面上建立直角坐标系，则位于平面内且连接平面上两点  $(x_1, x_2)$  和  $(x'_1, x'_2)$  的曲

线的长度为

$$\int_{(x_1, x_2)}^{(x'_1, x'_2)} \sqrt{dx^2 + dy^2} \equiv \int_{(x_1, x_2)}^{(x'_1, x'_2)} \sqrt{|ds^2|} \quad (1)$$

对于平面这种空间，规定  $ds^2 > 0$ ，于是定出线元  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ 。对于不懂微积分的高中生来说，这里的积分号可以理解为求和号， $dx$  等可以理解为  $\Delta x$ ，只是我们要求  $\Delta x \rightarrow 0$ 。

对于球面，若在球面上建立球坐标，则简单的计算表明，位于球面上且连接球面上两点  $(\theta_1, \varphi_1)$  和  $(\theta_2, \varphi_2)$  的曲线的长度为

$$\int_{(\theta_1, \varphi_1)}^{(\theta_2, \varphi_2)} \sqrt{R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)} \equiv \int_{(\theta_1, \varphi_1)}^{(\theta_2, \varphi_2)} \sqrt{|ds^2|} \quad (2)$$

同样规定  $ds^2 > 0$ ，于是定出球面的线元  $ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ ，其中常数  $R$  是球的半径。

平面和球面本质的区别在于  $ds^2$  的表达式不同。这种不同不仅仅是由于坐标系的选取导致的，它们之间实际上有本质的差异。

## 2.2 类时、类空和类光的曲线

对于实际的 4 维时空， $ds^2$  有时大于 0，有时小于 0，有时等于 0，并且它的值不随坐标系的选取而改变，据此可以定义空间中不同类型的曲线：

- 任一元段都有  $ds^2 > 0$  的曲线称为**类空曲线**；
- 任一元段都有  $ds^2 < 0$  的曲线称为**类时曲线**；
- 任一元段都有  $ds^2 = 0$  的曲线称为**类光曲线**。

在时空中，有质量的物质走类时曲线，光子走类光曲线。类空曲线则代表超光速粒子的世界线，这在相对论里是不被容许的。

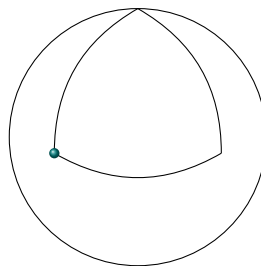
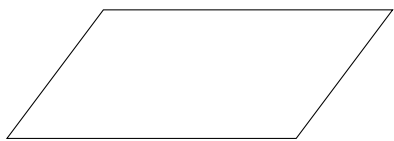
**测地线**是连接两点间的所有曲线中，线长取极值的那条曲线。自由粒子（包括有质量和无质量的粒子）走（类时或类光）测地线。考虑到类光曲线一定是类光测地线，也可以直接说光子走类光测地线。

注意到，类光曲线（类光测地线）正好分隔了类时和类空的区域，类时的区域包含有质量粒子的过去和未来，类空区域则是实际的粒子无法到达的区域，于是可以说类光曲线圈定了有质量粒子世界线的范围，这一点在后面分析黑洞时格外有用：我们可以通过求解类光测地线，从而知道类时粒子的运动需要满足何种限制。

## 2.3 平直和弯曲的直观认识

弯曲时空与平直时空可以形象地类比为平面和球面：直观上，平面是平直的，球面是弯曲的。这种认识实际上隐含了一个前提：你是在更高维的空间来看的，如果作为一个小人，身处球面之上，你就没有办法直接判断出它的平直和弯曲。球面和平面本来都是 2 维的空间，将它们绘制到 3 维的空间中，你才能“看出”它们的平直和弯曲。

这种把空间镶嵌到更高维空间的办法看起来虽很直观，但遇到现实的 4 维时空时就不再好用了：我们无法在 5 维空间中绘制出 4 维的时空，然后以 5 维的眼光“看出”4 维时



空是否弯曲。这实际上启示我们，需要定义出一种依赖于空间本身的内禀的曲率来描述其弯曲，使得我们能够“身在此山中”，仍能识得“庐山真面目”。

## 2.4 内禀曲率

这里有两张图，显示了内禀曲率定义的灵感。注意到，平面上的矢量沿其上的一

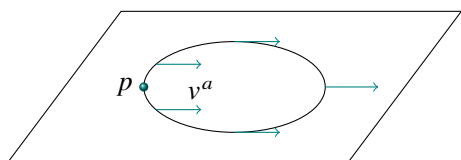


图 1: 矢量  $v^a$  沿平面上的闭合曲线平行移动，在返回时， $v^a$  指向与原先相同的方向。

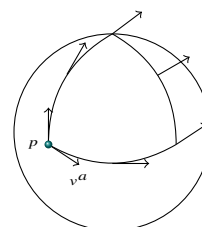


图 2: 向量  $v^a$  在球面上沿闭合曲线的平行移动。此处所示的闭合曲线由三段相互正交的大圆弧组成，向量  $v^a$  最终旋转了  $90^\circ$  回到初始位置。

条闭合曲线平行移动<sup>1</sup>再返回后不发生改变，球面上的矢量平行移动再回到原位置时，会改变它的方向。推而广之：平直空间是矢量发生任何平行移动后再返回后不变的空间，否则是弯曲空间。

据此，数学家们定义了黎曼曲率张量(场)来定量地表述在空间中任一点处矢量绕这点附近的闭合小曲线圈平行移动一圈后的变化量。空间各点曲率均为零则意味着平行移动后矢量不改变，是平直空间，否则为弯曲空间。

自然地要问，如何计算空间的曲率呢？由线元  $ds^2$  就可以计算出空间的曲率，因此我们说，空间弯曲与否，关键在线元。

实际上，我们在分析时空时，用的更多的是线元而不是曲率。逻辑是这样的，我们在求解爱因斯坦场方程(其中就有曲率)时，常常先用线元表示曲率，然后求解出线元，接下来的分析基本就没有曲率什么事情了。你求出线元后再费半天劲把线元代入曲率求出“时空的弯曲”<sup>2</sup>，还是不能得知粒子如何运动，而借由空间的线元就足以算出测地线，即自由粒子的世界线。

## 2.5 嵌入图

不少文献、教材和科普著作喜欢用嵌入图来直观描述球对称时空的弯曲。本小节对嵌入图做一介绍。既是为了讲述嵌入图背后的原理，也是为了增进听众对线元的理解。

<sup>1</sup>平行移动(parallel transport)并非平移，它是指矢量移动过程中始终切于该曲面。

<sup>2</sup>这实际上是一个相当复杂的  $(1,3)$  型张量，它有  $n^2(n^2 - 1)/12$  个独立分量，其中  $n$  是空间的维数。对于实际的 4 维时空，它有 20 个独立分量。

以静态球对称恒星为例。由爱因斯坦场方程求得的静态球对称恒星内部的度规在任一等  $t$  面  $\Sigma_t$  上的诱导线元为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3)$$

以  $R$  代表恒星半径, 若令  $m(r)$  在  $r \geq R$  时取常值  $M \equiv m(R)$ , 则上式对恒星内外都适用。这是一个弯曲线元。

由于球对称性, 可只考虑  $\Sigma_t$  中  $\theta = \pi/2, \varphi = \text{const}$  的截面 (记作  $S$ ), 其诱导线元为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (4)$$

以  $g_{ab}$  代表这个线元对应的度规, 则  $(S, g_{ab})$  是 1 维黎曼空间。在  $S$  上取一径向元线段, 首末点  $p, p'$  的  $r$  值之差为  $dr$  (见图3左)。若把这线段平移至  $S$  上  $r$  值不同之处, 则新旧两

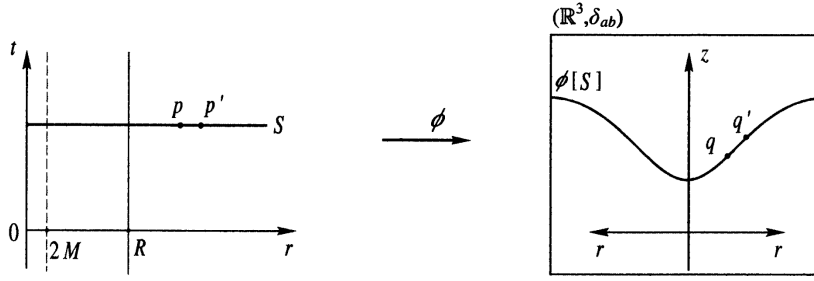


图 3: 从静态球对称恒星时空中的  $S$  面到  $(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$  的嵌入映射

线段虽然  $dr$  相同, 但线长一般不等 [见式(4)], 这是  $(S, g_{ab})$  内禀弯曲的一种重要表现。

为了直观地表现其内禀弯曲情况, 可把它镶嵌进高一维的欧氏空间  $(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$  中, 即考虑嵌入映射  $\phi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ , 利用  $\phi[S]$  在  $\mathbb{R}^2$  中的外部弯曲情况直观地反映  $(S, g_{ab})$  的内禀弯曲情况。令  $q \equiv \phi(p), q' \equiv \phi(p')$ , 只要画图时保证元段  $qq'$  与  $pp'$  线长相等, 则  $\phi[S]$  在  $\mathbb{R}^2$  中的外部弯曲情况就反映  $(S, g_{ab})$  的上述内禀弯曲性。这就是嵌入图的绘制原则。据此便可找到曲面  $\phi[S]$  的方程, 从而画出  $\phi[S]$ 。

一个方便的办法是在 2 维欧氏空间中建立一个如图所示的坐标系  $\{r, z\}$ , 它实际上是 3 维柱坐标系压缩掉一维的结果。嵌入映射就使得  $S$  中  $r$  处的点映射到  $\mathbb{R}^2$  中  $r$  处的点。2 维欧氏度规  $\delta_{ab}$  在该坐标系  $\{z, r, \varphi\}$  的线元表达式为

$$ds^2 = dz^2 + dr^2. \quad (5)$$

按照前面所述的绘制原则, 只须令

$$dz^2 + dr^2 = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (6)$$

于是

$$\left[\frac{dz(r)}{dr}\right]^2 + 1 = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}, \quad \text{即} \quad \frac{dz(r)}{dr} = \sqrt{\frac{2m(r)}{r - 2m(r)}}, \quad (7)$$

故

$$z(r) = \int_0^r \sqrt{\frac{2m(r')}{r - 2m(r')}} dr' \quad (\text{对 } 0 < r < \infty), \quad (8)$$

因为对  $r \geq R$  有  $m(r) = M$ , 所以

$$z(r) = \sqrt{8M(r - 2M)} + C \quad (\text{对 } r \geq R), \quad (9)$$

其中

$$C \equiv -\sqrt{8M(R - 2M)} + \int_0^R \sqrt{\frac{2m(r)}{r - 2m(r)}} dr \quad (10)$$

为常数。虽然对  $r < R$  的点  $z(r)$  取决于  $m(r)$  的函数形式, 但  $r > 2m(r)$  保证  $z(r)$  是单调

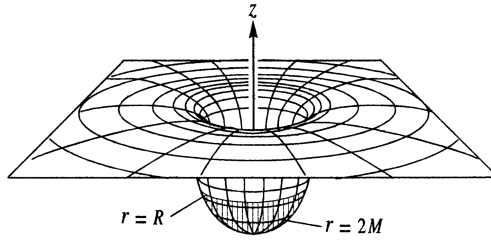


图 4: 球对称恒星的嵌入图 (压缩掉一维)

常增函数。 $\phi[S]$  在  $r > R$  时为抛物线, 于是有图 4 那样的嵌入图 (对  $r < R$  只是定性地画出)。请注意, 嵌入图的背景欧氏空间  $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$  只是为表现  $\phi[S]$  而人为引入的, 真正有物理意义的点只是  $\phi[S]$  上的点 (不要以为“草帽里”可以装入什么东西)。

### 3 施瓦西黑洞

演化后期的球对称恒星要想维持内部流体静力学平衡, 其质量必须小于中子星质量上限。初始质量大于这一上限的恒星如果不能在演化中抛出足够质量从而成为稳定的白矮星或中子星, 就根本没有稳定状态可言, 只能不断坍缩而成为体积为零, 密度无限大的黑洞。

#### 3.1 施瓦西坐标系下的奇性

施瓦西坐标系与球坐标系很像, 由时间坐标  $t$ , 径向距离  $r$ , 极角  $\theta$  和方位角  $\varphi$  构成。 $r$  描述了空间点到球心的距离,  $\theta, \varphi$  则描述了空间点的角度方位。

求解爱因斯坦场方程得知, 球对称的质量外部的时空由施瓦西真空度规描述, 它在施瓦西坐标系  $\{t, r, \theta, \varphi\}$  下的线元为<sup>3</sup>

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (11)$$

其中  $M$  代表几何单位制下的质量。注意到, 当  $r = 2M$  时 (称为施瓦西半径),  $g_{11} = \infty$  (无意义); 当  $r = 0$  时,  $g_{00}$  和  $g_{11}$  都无意义。 $r = 0$  和  $r = 2M$  处都被称为该时空的奇点。

<sup>3</sup>注意,  $r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$  是球对称度规的标准角度结构, 不会破坏球对称性。

一般情况下，在星体外部往往满足  $r \gg 2M$ <sup>4</sup>，于是该度规的定义域根本无法覆盖到  $r \leq 2M$  的区域，这种奇点处不连续性也就不必担心。然而，若是考虑黑洞这种半径为零的极端星体，施瓦西外解的适用区域就包括  $r = 2M$ ，此时就需要考察奇点处的情况。

注意到， $r = 2M$  处时空度规是不连续的，这是不容许的，因为爱因斯坦场方程要求度规分量（即线元的系数）必须 2 阶可微。这是否意味着  $r \leq 2M$  的时空没有意义呢？后续的研究中可以发现， $r = 2M$  处的奇性仅仅是因为坐标系的选取不当，只要采取适当的坐标变换就可以消除这一奇性，从而将时空的定义域延拓到施瓦西半径以内。至于  $r = 0$  处的奇性，仍然是广义相对论的“老大难”问题，众说纷纭，也都讲不清楚。

### 3.2 内向 Eddington 坐标系

前面提到，考虑到时空流形的连续性，采用施瓦西坐标时其定义域只能覆盖  $r > 2M$  或者  $0 < r < 2M$ ，因而不能表现恒星晚期坍缩为施瓦西黑洞的全过程。因此，我们采用另一坐标系——内向 Eddington 坐标系  $\{v, r, \theta, \varphi\}$ 。该系的  $r, \theta, \varphi$  与施瓦西系的对应坐标相同，但

$$v := t + r_*, \quad \text{其中 } r_* := r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (12)$$

只须将  $dt$  对  $dv$  和  $dr$  的依赖关系代入施瓦西度规，即得到内向 Eddington 系下的施瓦西线元表达式。由于  $dt$  不会与  $d\theta, d\varphi$  扯上关系，最终改变的只是线元的前两维。

考虑到听众对微积分都知之甚少，具体的计算过程就此省略。总之，在此坐标变换下，施瓦西度规的前两维线元写作

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2dv dr. \quad (13)$$

此即施瓦西系的前两维线元在内向 Eddington 系的表达形式。由上式知非零分量  $g_{vv} = -(1 - 2M/r)$ ,  $g_{vr} = 1$  及行列式  $g = -1$  在  $r = 2M$  处皆表现良好，故  $r = 2M$  不再是奇点。

### 3.3 类光测地线族

现在已经完成了消除线元在  $r = 2M$  处的坐标奇性的工作，下面只须在新的坐标系下求解出测地线，即可得知粒子在时空中的运动情况。

- 由于我们看重的是粒子在径向的运动，可以先计算径向测地线，即  $\theta, \varphi$  坐标均不变化的测地线。
- 考虑类光测地线计算简单，且类光测地线是有质量粒子的类时曲线的极限，可以先计算类光测地线。

总之，一个自然的入手点是计算径向类光测地线。

利用类光测地线的类光条件  $ds^2 = 0$  和式(13)，可以很容易地计算出该坐标系下的类光测地线。直观起见，作变换  $\tilde{t} := v - r$ ，则两族类光测地线在坐标系  $\{\tilde{t}, r\}$  中分别是：

<sup>4</sup>你可能会对这一结论产生怀疑。在国际单位制下，地球的质量大概是  $10^{24}\text{kg}$ ，半径则是  $10^7\text{m}$ ，显然不会有  $r \gg 2M$ ，这是怎么回事呢？实际上是因为我们使用的并不是国际单位制，而是几何单位制，如果把几何单位制下的  $2M$  换算到国际单位制，它大约是  $10^{-28}M_{\text{国}}$ ，其中  $M_{\text{国}}$  是国际单位制下的质量数，这是一个极小的值， $r \gg 2M$  也就不难理解了。

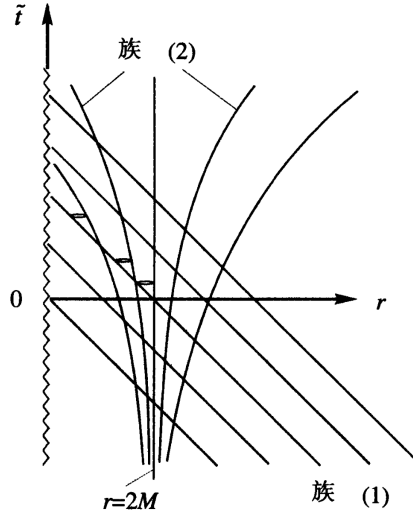


图 5: 2 维施瓦西时空两族类光测地线在  $\{\tilde{t}, r\}$  坐标系的表现

(1) (内向族) 的方程为  $d\tilde{t}/dr = -1$ , 因而是斜率为  $-1$  的平行直线族;

(2) (外向族) 的方程为

$$d\tilde{t}/dr = (r + 2M)/(r - 2M), \quad (14)$$

如图 5 所示。其表现颇为特别: 除一条为竖直线 ( $r = 2M$ ) 外都是曲线, 在竖直线以右的线的  $r$  值随仿射参数  $\lambda$  的增大而增大 (真正外向), 但在竖直线以左的线的  $r$  值却随  $\lambda$  增大而减小 (实际上内向, 但仍属外向族。)

内向类光测地线族即指向中心发射的光子所走的轨迹, 外向类光测地线族即背离中心发射的光子所走的轨迹。有质量的粒子无论如何也不可能“快得过”光子, 它们走类时线, 类时线一定是“夹在”内向和外向类光测地线之间的。当然, 这里的类时线也是指径向的。如何推广至非径向的情况, 暂且不去管它。

### 3.4 黑洞的事件视界

根据前面对黑洞外时空的类光测地线的分析, 我们可以知道, 在  $r = 2M$  (事件视界) 以内的任何光子都不能穿越视界而到达洞外 ( $r > 2M$ ), 它们的  $r$  值只能不断减小至零。

由两族类光测地线可方便地画出各点的光锥, 这对分析质点的运动大有帮助, 因为质点的世界线为类时线, 线上每点的切矢必须限于该点的光锥之内。由此可知事件视界外的质点可穿越视界进入黑洞, 而一旦进入就无法退出, 只能掉入奇点。

为便于理解, 讨论以下假想实验 (“假想” 包括忽略潮汐力的后果)。设某观者坐着燃料充足的飞船做黑洞探险。如果他不启动发动机, 飞船将自由下落, 必然穿过事件视界进入黑洞并葬身奇点。如果他在到达视界前“悬崖勒马”, 掉转船头, 开足马力 (即在  $r$  尚未小到  $2M$  时就让  $r$  重新变大), 是可以安全返航并提交探险报告的。然而, 如果他多走一步到达视界 (须知当他的世界线与视界相交时他并无特殊感觉), 就将“一失足成千古恨”, 因为由视界上的光锥可知一到视界就无法逆转, 就连向远方朋友打个无线电话也传不出去, 因为在视界上所发出的“外向”光子只能沿视界竖直向上 ( $r$  值保持为  $2M$ )。



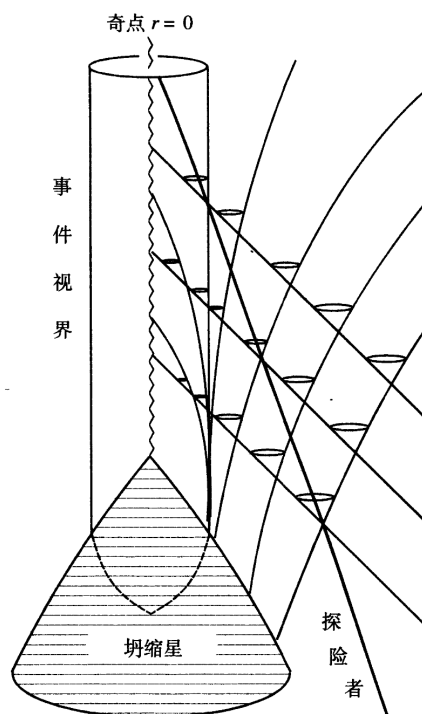


图 6:  $\{t, r\}$  系中恒星坍缩为黑洞的时空图。黑洞探险者在到达视界前如不掉转船头势必掉入奇点

### 3.5 坍缩星的外观

下面再讨论坍缩星的外观。图 7 示出星体表面所发的外向光子到达外部静态观者的情况。由于视界以内的星体表面所发光子不能到达视界以外，外部观者似乎会看到星体逐渐变小，忽然消失。

然而，细观图 7 可知情况并非如此。由于视界以外的外向光子世界线越靠近视界越陡，在视界上完全竖直（躺在视界上），外部观者将永远（无论其固有时  $\tau'$  为多大）无法收到视界上的星体表面所发的光。他会感到星体的收缩越来越慢，星体越来越趋于某一大小，即感到星体半径以越来越小的速率趋于  $2M$  并将“冻结”在这一大小。

现在来考虑引力场中的钟慢效应。在比较钟速时首先要确定比较的具体办法：在图 7 的情况下，我们约定把两条相邻的径向光子世界线在星体表面观者和外部观者世界线上分别定出的固有时间  $\Delta\tau$  和  $\Delta\tau'$  作为比较对象。计算表明  $\Delta\tau' > \Delta\tau$ ，而且若  $\Delta\tau_2 = \Delta\tau_1$  则  $\Delta\tau'_2 > \Delta\tau'_1$ ，即  $\Delta\tau'/\Delta\tau$  随  $\tau$  增加而增加，所以外部观者认为星体表面的标准钟不但比自己的钟慢，而且越走越慢。

这种钟慢效应的另一表现就是红移。把两条相邻径向类光测地线看作两个相邻波峰的世界线， $\Delta\tau$  和  $\Delta\tau'$  便分别是星体表面观者和外部观者测得光波的周期， $\Delta\tau' > \Delta\tau$  便说明外部观者收到的光波有较大波长，即有红移；而  $\Delta\tau'/\Delta\tau$  随  $\tau$  增加而增加则说明红移越来越甚。

注：外部观者收到的光波存在越来越严重的红移。因此，只有假定（理论上）观者对任何波长和强度的光都能感受，他才会有前面提到的那种星体半径以越来越小的速率趋于  $2M$  并将“冻结”在这一大小的感觉。

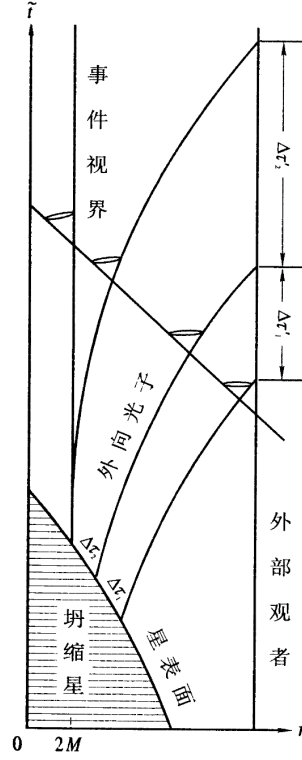


图 7: 外部观者原则上可永远收到视界外的星体表面所发的光。\$\Delta\tau\_1' > \Delta\tau\_1\$ 表明存在红移；\$\Delta\tau\_2 = \Delta\tau\_1\$ 而 \$\Delta\tau\_2' > \Delta\tau\_1'\$ 表明红移越来越甚

### 3.6 光子球

光子球是施瓦西黑洞周围的一个特殊区域，位于黑洞的事件视界之外。在光子球上，光子可以沿着圆形轨道围绕黑洞运动，既不落入黑洞，也不逃逸到无穷远。光子球的半径被称为光子球半径。

前面注意到，在事件视界上的外向光子也可以维持  $r = 2M$  不变，但这与光子球并不一样。事件视界上的外向光子只能“固定”在  $r = 2M$  且  $\theta, \varphi$  均不变的点上，光子球上的光子却可以绕黑洞转动。

按照文献<sup>[2]</sup> 给出的计算方式，可以得到施瓦西黑洞的光子球半径满足

$$\begin{aligned}
 \kappa_g(r = r_{ph}) &= \left[ \frac{g_{tt}(r)}{2\bar{g}_{\phi\phi}(r)} \cdot \sqrt{-\frac{g_{tt}(r)}{g_{rr}(r)}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\bar{g}_{\phi\phi}(r)}{g_{tt}(r)} \right) \right]_{r=r_{ph}} \\
 &= \frac{-(1-2M/r)}{2r^2} \cdot (1-2M/r) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{-(1-2M/r)} \right) \\
 &= \frac{1}{r^2}(r-3M) = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

这就是说，施瓦西黑洞的光子球的半径  $r_{ph} = 3M$ 。

问 如果你在光子球上行走，你会看到什么？

### 3.7 黑洞阴影

黑洞阴影是黑洞在明亮背景下的暗色轮廓，其大小和形状不仅取决于黑洞的参数，还取决于观测者的位置。在本节中将考虑观测者位于无穷远处，且在观测者和中心黑洞之间没有光源的情况。在这种情况下，观测者探测到的黑洞阴影的半径正是碰撞参数的临界值  $b_{\text{critical}}$ 。在引力场中，从无穷远处发射的碰撞参数为  $b = b_{\text{critical}}$  的光束将正好到达不稳定的光子球，如图8所示。

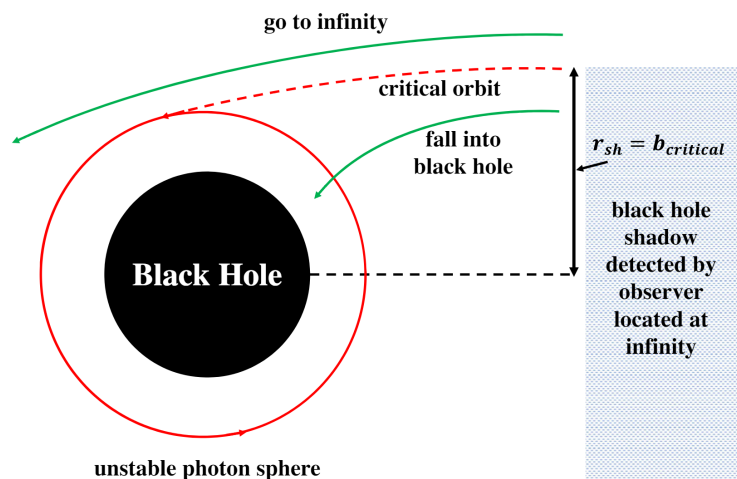


图 8: 这幅图展示了黑洞阴影与不稳定光子球面之间的联系。图中用黑色表示球对称黑洞的内部。从无穷远处以临界碰撞参数  $b = b_{\text{critical}}$  发出的光束会精确地到达不稳定光子球面。而以  $b < b_{\text{critical}}$  发出的光束则会落入黑洞。

按照文献<sup>[2]</sup>中给出的光学几何方法，施瓦西黑洞的黑洞阴影半径为

$$r_{\text{sh}} = \sqrt{-\frac{\bar{g}_{\phi\phi}(r)}{g_{tt}(r)}} \Big|_{r=r_{\text{unstable}}} = \sqrt{-\frac{r_{\text{ph}}^2}{-(1 - 2M/r_{\text{ph}})}} = \sqrt{\frac{9M^2}{1 - \frac{2}{3}}} = 3\sqrt{3}M. \quad (16)$$

可见阴影半径是大于光子球半径的。

### 3.8 引力透镜

在科普作品中，常见的黑洞图片如图9所示。这实际上是一种轴对称的黑洞，显示出的

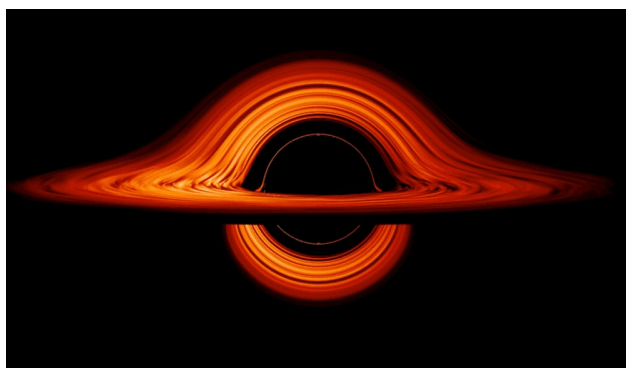


图 9: 轴对称黑洞示意

亮光是它的吸积盘。一个自然的问题是，吸积盘只是一个环绕着中心的圆环，为什么会呈现出平行于纸面的另一个圆环呢？

这是因为黑洞的强引力场会弯曲周围的时空，导致光线发生偏折。吸积盘发出的光在靠近黑洞时，会被引力场弯曲，甚至绕黑洞多次旋转后才逃逸出来。这种引力透镜效应使得吸积盘的光线在观测者眼中形成一个亮环。

### 3.9 制作小型施瓦西黑洞

首先，我们须将施瓦西半径的表达式化为国际单位制。施瓦西半径在几何制的表达式为  $r_S = 2M$ ，换算到国际制，即为  $r_S = 2GM/c^2$ 。

现在设想制作一个半径为 1m 的黑洞，需要多大的质量。将  $r_S = 1\text{m}$ ,  $G = 6.67430 \times 10^{-11}\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ,  $c = 3 \times 10^8\text{m/s}$  代入  $r_S = 2GM/c^2$ ，得

$$M = \frac{r_S c^2}{2G} = \frac{1 \times 9 \times 10^{16}}{2 \times 6.67430 \times 10^{-11}} = 6.74228 \times 10^{26}\text{kg}. \quad (17)$$

而地球的质量约为  $5.972 \times 10^{24}\text{kg}$ ，这意味着，只需将 113 个地球的半径压缩到 1m 以内，就可以制造出施瓦西黑洞。

## 4 施瓦西时空的延拓

### 4.1 施瓦西时空的 Kruskal 延拓

作坐标变换

$$V = \exp[(r_* + t)/4M], \quad U = -\exp[(r_* - t)/4M], \quad (18)$$

其中  $r_* := r + 2M \ln(\frac{r}{2M} - 1)$ 。显然  $0 < V < \infty$ ,  $-\infty < U < 0$ 。此时施瓦西度规线元式的前两维 (记作  $d\hat{s}^2$ ) 可以写作

$$d\hat{s}^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dV dU. \quad (19)$$

上式表明度规分量在  $r = 2M$  处不再奇异。

现在可把  $V, U$  的取值范围延拓至  $V \leq 0$  和  $U \geq 0$  的区域。式(19)表明  $r = 0$  仍是奇点，故  $r$  的范围只能限于  $r > 0$ ，可见  $V$  和  $U$  的取值并非毫无限制，它们的搭配必须满足  $r > 0$  的条件。再令

$$T := \frac{1}{2}(V + U), \quad X := \frac{1}{2}(V - U), \quad (20)$$

并补上后两维，便得施瓦西度规在 Kruskal 坐标系  $\{T, X, \theta, \varphi\}$  中的线元表达式

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (21)$$

上式表明施瓦西度规可以定义在一个比原来定义域 ( $r > 2M$ ) 大得多的流形上。

一般地说，时空  $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$  称为时空  $(M, g_{ab})$  的一个延拓 (extension)，若  $M \subset \tilde{M}$  且  $\tilde{g}_{ab}|_M = g_{ab}|_M, \forall p \in M$ 。现在所得到的原始施瓦西时空的延拓称为 Kruskal 延拓 [Kruskal(1960)]。

在这一延拓中, 坐标  $T, X$  可取遍  $r > 0$  所允许的一切值。线元式(21) 中的  $r$  应看作坐标  $T$  和  $X$  的函数, 此函数由下式定义 (不难由新旧坐标的关系证明):

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = X^2 - T^2. \quad (22)$$

由于有球对称性, 可以只画前两维的时空图, 把图10中的每点想像为一个  $S^2$  (2 维球面) 就得到 4 维时空。式(21)的因子  $-dT^2 + dX^2$  表明, 在以  $T, X$  为坐标轴的 2 维施瓦西时空图中, (径向) 类光曲线都是  $\pm 45^\circ$  斜直线。这为讨论提供很大方便。

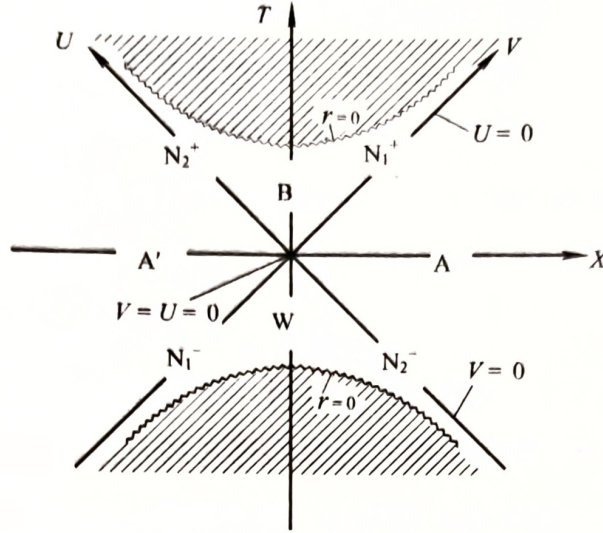


图 10: 施瓦西时空的 Kruskal 最大延拓

由式(22)可知  $r = \text{常数}$  对应于  $X^2 - T^2 = \text{常数}$ , 即  $T \sim X$  面中的双曲线 ( $r = 2M$  时为一条斜直线), 补上后两维就是旋转双曲面 (4 维流形中的超曲面), 其中两个特例很重要:

- (1)  $r = 0$  对应于  $X^2 - T^2 = -1$ 。可见 Kruskal 延拓的限制范围  $r > 0$  也可用坐标表为

$$X^2 - T^2 > -1. \quad (23)$$

可以证明, 时空不能再延拓至  $r = 0$  及其以外 ( $r < 0$ ), 说明  $r = 0$  是时空奇点, Kruskal 延拓是施瓦西时空的**最大延拓 (maximal extension)**。图 10 的阴影部分对应于  $r < 0$ , 不属于延拓后的时空。两条锯齿状双曲线代表时空奇性  $r = 0$  所在处 (“奇点”在 4 维时空中不是一个点)。

- (2)  $r = 2M$  对应于  $X^2 - T^2 = 0$ , 即  $T = \pm X$ , 在 2 维图中代表两条过原点的  $45^\circ$  斜直线 [图 10 的  $N_1$  和  $N_2$ ], 在 4 维时空中是两个 3 维面 (类光超曲面), 它们把时空分成 4 个开区域: A 区由  $X > 0$  及  $X^2 > T^2$  (即  $V > 0, U < 0$ ) 表征, 由式(22)可知 A 区相当于  $r > 2M$  的时空区, 是原始的  $\{t, r\}$  坐标系的坐标域, 也是 Kruskal 延拓的出发区 (“根据地”)。把图 10 的流形看作前面关于延拓时空的一般定义中的  $\tilde{M}$ , 其度规  $\tilde{g}_{ab}$  由线元式(21) 描述; 把 A 区看作流形  $M$ , 其度规  $g_{ab}$  由原始线元式描述。线元式(21)无非是原始线元做坐标变换的结果, 两者在 A 区内代表相同度规场  $g_{ab}$ , 故  $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$  的确是  $(A, g_{ab})$  (原始的施瓦西时空) 的一个延拓。

## 4.2 黑洞、两个全同“宇宙”和白洞

本小节开始时讲过, 根据施瓦西原始线元, 一方面不允许取  $r = 2M$ , 另一方面也不允许既取  $r > 2M$  又取  $0 < r < 2M$  (否则不连通)。但有了 Kruskal 延拓就不同。这一延拓表明施瓦西度规在 A, B 区及其交界  $N_1^+$  (在其上  $r = 2M, t = \infty$ ) 都有定义,  $A \cup N_1^+ \cup B$  是一个连通流形。由 A 区中任一点出发的“内向”(指  $r$  值不断减小)的、指向未来的类光或类时曲线将不可避免地穿越  $N_1^+$  进入 B 区。反之, B 区中任一点发出的指向未来的类时或类光曲线都不可能穿越  $N_1^+$  进入 A 区, 它们的必然归宿是掉进奇点。奇点不属于时空, “掉进奇点”的准确含义是指该世界线的  $r$  值越来越小, 无限逼近于 0。对类时测地线, 掉进奇点意味着它所代表的自由下落观者从固有时达到某值开始从时空中消失, 这实在奇得不可思议。这表明  $N_1^+$  是个“有进无出”的“单向膜”, A 区中的任何物体 (连同光子) 一旦穿过它而进入 B 区就永远不能回到 A 区 (只能掉进奇点)。因此 B 区叫**黑洞 (black hole)**,  $N_1^+$  叫**事件视界 (event horizon)**。考虑到图 10 中的每点代表一个 2 维球面, 可知黑洞是个 4 维时空区域, 而事件视界则是个 (3 维) 类光超曲面。

A' 区由  $X < 0$  及  $X^2 > T^2$  表征, 它也有  $r > 2M$ , 事实上它与 A 区有完全一样的性质, 包括它与黑洞 B 的关系也类似于 A 区与 B 区的关系, 故  $N_2^+$  是 A' 区的事件视界。但 A' 与 A 区之间没有任何因果联系: 从 A 出发的任一类时或类光曲线都不能进入 A' 区, 反之亦然。在这个意义上也常把 A 与 A' 区称为两个 (互相不关联的) “宇宙”。

W 区由  $T < 0$  及  $X^2 < T^2$  表征, 它也有  $r < 2M$ 。W 区与 A(或 A') 区也只有“一膜之隔”, 这“膜”就是类光超曲面  $N_2^-$ (或  $N_1^-$ )。  $N_2^-$  和  $N_1^-$  都是“有出无进”的“单向膜”, W 区中任一指向未来的类时或类光曲线都将穿越  $N_2^-$ (或  $N_1^-$ ) 而进入 A(或 A') 区。既然 B 区叫黑洞, W 区自然叫 **白洞 (white hole)**。

以上是在全时空为真空的前提下得到的施瓦西最大延拓。虽然这一延拓包含了黑洞、白洞、事件视界以及两个全同“宇宙”等诱人术语, 其物理存在性 (真实性) 却还须另做讨论。从初值问题的角度考虑, 整个时空存在的可能性很小, 但其中的一部分 (包括 A, B 区及其间的事件视界的一部分) 却很有意义。

## 5 时空旅行悖论

### 5.1 闭合类时线与因果性疑难

通常认为闭合类时线的存在会导致因果性疑难: 设观者  $\gamma$  的世界线  $\gamma(\tau)$  含有一个闭合段, 则存在  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$  满足  $\gamma(\tau_1) = \gamma(\tau_2)$ 。假定  $\tau_1$  代表观者  $\gamma$  为 15 岁的时刻,  $\tau_2 - \tau_1 = 50$ (年), 则他在 65 岁时与 15 岁时属于同一事件! 这虽然看来十分不可能, 但理论上 (至少广义相对论) 对此还无法排除。事实上, 通过“时空虫洞”制造时间机器的可能性从 1988 年起正式登入科学研究殿堂, 成为广义相对论学家的一个严肃的研究课题。

关于时间机器 (存在闭合类时线) 的常见悖论是: “如果我通过时间隧道回到我出生之前并杀死我娘, 那么还有我吗? 既然没有我, 我又怎能回去杀死我娘?” 这被称为“弑母悖论”。但后面的分析会表明, 即使承认时空旅行的存在性, 这种悖论也是可以避免的。

## 5.2 自洽性原则与时间旅行悖论的解决

弑母悖论的提出反映这样一种信念：闭合类时线的存在使人们可以改变过去，从而造成因果性的严重疑难。其实并非如此。弑母悖论是人们想象的一个非自洽过程，它（以及人们能想出的所有非自洽过程）的成因是没有考虑未来对过去的影响。为了避免矛盾，应该要求所有过程都遵守自洽性原则：闭合类时线段上任意两个事件都以自洽的方式互相影响（自动调整到这样的方式）：每个（物理）事件只发生一次而且不会被改变。

下面的有趣例子有助于理解这一问题 [Novikov(1992)]。一根 Y 形管以图 11(a) 的方式与虫洞的两个洞口相连，管的内壁非常光滑，使管内的活塞得以无摩擦地运动。选择初始位置和速率使活塞沿路径  $\alpha$  和  $\alpha'$  到达洞口 A，穿过虫洞后从洞口 B 出来（回到过去），继续沿路径  $\beta$  运动并赶在“较年轻”的自己到达之前占领接头 J，挡住“较年轻”的自己，使之不能到达洞口 A。这显然是一个与弑母现象类似的非自洽过程。然而计算表明在任意给定的初始条件下的确存在自洽过程（运动方程的自治解），大意是 [图 11(b)]：活塞从与图 11(a) 相同的初始位置和速率出发，将近到达接头 J 时恰被从洞口 B 出来的“较老”的自己轻轻一碰（“较老”的活塞的头部与“较年轻”的活塞的侧面发生摩擦），因而速率略有减小。它以这较小的速率走过  $\alpha'$ ，从 A 进洞再从 B 复出。由于速率较小，它不能抢先挡住“较年轻”的自己的去路，只能对它轻轻一碰。这显然是一个自洽的演化过程。

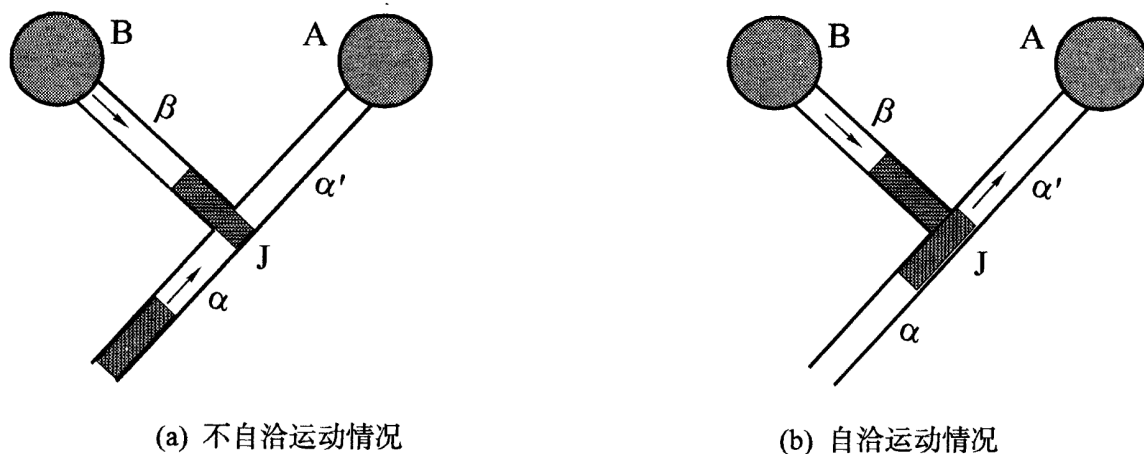


图 11: 管内活塞穿过虫洞的两种运动情况 (A、B 是虫洞的两个洞口)

图片来源: 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论 (中册·第二版), 2006, 17.

图 11 只是许多类似例子中的一个。事实上，Thorne 及其合作者研究的第一个例子是台球从洞口 A 进虫洞再从洞口 B 出来并与“较年轻”的自己相碰的情况（由 Bolchinski 首先提出的一个佯谬）。在证明给定初始条件必有自洽解的同时，他们发现对同一初始条件竟有无数自洽解。这种怪事在无闭合类时线的情况下决不可能出现。自然要问：给定初始条件后，台球到底按哪个自洽解运动？他们最后求助于量子力学（反正广义相对论最终必须与量子理论结合）。在量子理论中每种轨道都有一定的概率，我们无须像在经典理论中那样被迫回答“到底台球走哪条轨道？”的问题。

总得来说，Thorne 认为满足自洽性原则的闭合类时线解是存在的，尽管同一初始条件可能对应多个自洽解。这意味着时空旅行在广义相对论看来并没有被否定。

然而，值得注意的是，即使真的能够进行时间旅行，也不会如我们凭空想象的那般随心地改变过去，过去和未来必须以自洽的方式相互影响。这同时也表明，承认这种自洽的时空旅行的存在并不会导致悖论，我们也不能仅凭所谓“时空旅行悖论”(如祖父悖论、祖母悖论、弑母悖论等)就轻而易举地否认时空旅行的可能性。

## 参考文献

- [1] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论上册. 2 版. 北京: 科学出版社, 2006. Print.
- [2] C.-K. Qiao, “*Curvatures, photon spheres, and black hole shadows,*” *Phys. Rev. D* **106**, 084060 (2022).