引力波的原理和探测简介

Manifold

2025 年 8 月 8 日

摘 要

本文系统介绍了引力波的理论基础、数学描述及其探测方法。首先，从线性引力论出发，通过弱场近似推导了线性爱因斯坦方程，并类比电磁理论引入了洛伦兹规范条件以简化方程。随后，讨论了引力辐射的性质，包括其传播速度 (光速)、偏振状态以及辐射规范的选择。进一步分析了引力波的发射机制，指出引力波中不存在偶极辐射，主要贡献来自四极辐射，并对比了引力波与电磁波的异同。最后，综述了引力波的探测进展，包括间接探测 (如脉冲双星 PSR1913+16 的观测) 和直接探测 (如 LIGO 的激光干涉技术)，并介绍了中国脉冲星测时阵列 (CPTA) 在纳赫兹引力波背景探测中的成果。文章还简要探讨了强引力波的复杂性及其与非线性爱因斯坦方程的关系。

关键词: 引力波; 线性引力论; 爱因斯坦方程; 洛伦兹规范; 四极辐射; LIGO; 脉冲星测时阵列; CPTA

目录

引言

引力场同电磁场的相似之处使人期望广义相对论存在与电磁辐射类似的引力辐射。事实上，爱因斯坦方程存在以光速传播的波动解一事从广义相对论诞生不久就已为人所知，然而在相当一段时间内引力波的真实性一直受到怀疑。Eddington 在 1922 年提出如下疑问：引力波解可能只代表时空坐标的波动，因而没有观测效应。情况从 20 世纪 50 年代开始出现转机。Bondi 及其合作者们借用不依赖于坐标系的手法证明引力波的确携带能量、动量以及系统在发射引力波时质量必然减小，使引力辐射的物理真实性及其可观测性逐渐被普遍接受。

1 线性引力论

爱因斯坦场方程的非线性性给求解以及整个广义相对论带来许多困难。在大多数情况下引力场很弱，这时可用近似处理把场方程变为线性方程，从而使问题大为简化。为此，只须得到 1 阶近似的爱因斯坦张量，再将爱因斯坦张量代入爱因斯坦场方程。

1.1 1 阶近似的爱因斯坦张量

爱因斯坦张量即

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R, \tag{1}$$

考虑到里奇张量 R_{ab} 和标量曲率 R 都是从黎曼曲率张量得到的，黎曼曲率张量又可以由克氏符表示，克氏符又能由度规表示，为了得到弱场近似的爱因斯坦张量，只须将弱场下的 1 阶近似的度规张量代入克氏符，再将克氏符代入黎曼曲率张量，再将黎曼曲率张量作缩并等。下面就是在进行这一工作。

1.1.1 度规张量的 1 阶近似

在 4 维语言中，弱引力场意味着时空度规 g_{ab} 接近闵氏度规 η_{ab}[1]。用下式定义 γ_{ab}：

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}\,, \tag{2}$$

则 γ_{ab}“很小”，其含义是 γ_{ab} 在 η_{ab} 的某个洛伦兹坐标系的分量满足 $|\gamma_{\mu\nu}| \ll 1$，以致 $\gamma_{\mu\nu}$ 的 2 阶和高阶项都可忽略。这一近似条件使 γ_{ab} 可被当作闵氏时空中的某种物理场 (类似于电磁场) 来处理。它和一般物理场的区别在于它与 η_{ab} 之和就是时空度规 g_{ab}，从这一角度来说 (加之 γ_{ab}“很小”)，γ_{ab} 又可看作对 η_{ab} 的一种微扰。

注：为了方便和避免混淆，我们约定

- 张量的指标升降一律用 η^{ab} 和 η_{ab}(而不是 g^{ab} 和 g_{ab}) 进行；
- 只有一个例外，那就是 g^{ab}，它仍代表 g_{ab} 的逆而不是 $\eta^{ac}\eta^{bd}g_{cd}$。

在线性近似下由式(2)不难得知

$$g^{ab} = \eta^{ab} - \gamma^{ab}, \tag{3}$$

因为由此可得 $g^{ab}g_{bc} = \delta^a{}_c - (\gamma\text{的 2 阶项})$。

1.1.2 克氏符的 1 阶近似

设 ∂_a 和 ∇_a 分别是与 η_{ab} 和 g_{ab} 适配的导数算符，则 g_{ab} 在洛伦兹系的克氏符 (亦即 ∂_a 与 ∇_a 之“差”) 为

$$\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})\,, \tag{4}$$

把式(2)和(3)代入上式且只保留 γ_{ab} 的 1 阶项得

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)c}{}_{ab} &= \frac{1}{2}(\eta^{cd} - \gamma^{cd})(\partial_a\gamma_{bd} + \partial_b\gamma_{ad} - \partial_d\gamma_{ab}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{cd}\,(\partial_a\gamma_{bd} + \partial_b\gamma_{ad} - \partial_d\gamma_{ab})\,,\end{aligned} \tag{5}$$

其中第一个等号用到了 $\partial_a\eta_{bd} = 0$，等等。第二个等号是将两阶小省去。

1.1.3 黎曼张量的 1 阶近似

把式(5)代入式

$$R_{abc}{}^d = -2\partial_{[a}\Gamma^d{}_{b]c} + 2\Gamma^e{}_{c[a}\Gamma^d{}_{b]e}, \tag{6}$$

[1] 在线性引力论中通常只讨论背景流形为 $\mathbb{R}^4$ 的时空，即 $(\mathbb{R}^4, g_{ab})$，因此闵氏度规 η_{ab} 有意义。

可得 g_{ab} 的黎曼张量的 1 阶近似

$$
\begin{aligned}
R^{(1)\ \ d}_{abc} &= -2\partial_{[a}\Gamma^{d}{}_{b]c} \\
&= -\eta^{de}\left(\partial_{[a}\partial_{b]}\gamma_{ce} + \partial_{[a}\partial_{|c|}\gamma_{b]e} - \partial_{[a}\partial_{|e|}\gamma_{b]c}\right) \\
&= -\eta^{de}\left(\partial_{c}\partial_{[a}\gamma_{b]e} - \partial_{e}\partial_{[a}\gamma_{b]c}\right) \\
&= \partial^{d}\partial_{[a}\gamma_{b]c} - \partial_{c}\partial_{[a}\gamma_{b]}{}^{d}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中第一个等号用到了 $\Gamma^{(1)c}{}_{ab}$ 本身为 1 阶小的性质，第二个等号用到了 $\partial_a\eta_{de} = 0$(因此可直接将 ∂_a 作用到 $\partial_b\gamma_{ce}$)，第三个等号利用了 $\partial_a\partial_b$ 的对称性。降并变换指标后可以得到

$$
R^{(1)}_{acbd} = \partial_d\partial_{[a}\gamma_{c]b} - \partial_b\partial_{[a}\gamma_{c]d}\,. \tag{8}
$$

此即 1 阶近似的黎曼张量，也称为线性黎曼张量。

1.1.4 里奇张量的 1 阶近似

将式(7)变换指标 (即 $R^{(1)\ \ d}_{abc}$ 改为 $R^{(1)\ \ d}_{acb}$) 后进行 1、3 缩并可得 g_{ab} 的里奇张量的 1 阶近似 (线性里奇张量)

$$
\begin{aligned}
R^{(1)}_{ab} = R^{(1)\ \ c}_{acb} &= \partial^{c}\partial_{[a}\gamma_{c]b} - \partial_{b}\partial_{[a}\gamma_{c]}{}^{c} \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial^{c}\partial_{a}\gamma_{cb} - \partial^{c}\partial_{c}\gamma_{ab} - \partial_{b}\partial_{a}\gamma_{c}{}^{c} + \partial_{b}\partial_{c}\gamma_{a}{}^{c}\right) \\
&= \partial^{c}\partial_{(a}\gamma_{b)c} - \frac{1}{2}\partial^{c}\partial_{c}\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\partial_{a}\partial_{b}\gamma\,,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

其中 $\gamma \equiv \gamma^{a}{}_{a} = \eta^{ab}\gamma_{ab}$。第二行中 $\partial_b\partial_c\gamma_a{}^c$ 可以换成 $\partial_c\partial_b\gamma_a{}^c = \partial^c\partial_b\gamma_{ac} = \partial^c\partial_b\gamma_{ca}$($\gamma$ 关于下标是对称的)，从而与 $\partial^c\partial_a\gamma_{cb}$ 构成关于指标 a, b 的全对称。

1.1.5 标量曲率的 1 阶近似

现在我们来计算标量曲率 R 的 1 阶近似，只须求式(9)中里奇张量的迹：

$$
\begin{aligned}
R^{(1)} = \eta^{ab}R^{(1)}_{ab} &= \eta^{ab}\partial^{c}\partial_{(a}\gamma_{b)c} - \frac{1}{2}\partial^{c}\partial_{c}\eta^{ab}\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta^{ab}\partial_{a}\partial_{b}\gamma \\
&= \eta^{ab}\partial^{c}\partial_{a}\gamma_{bc} - \frac{1}{2}\partial^{c}\partial_{c}\gamma - \frac{1}{2}\partial^{b}\partial_{b}\gamma \\
&= \partial^{c}\partial^{b}\gamma_{cb} - \partial^{c}\partial_{c}\gamma.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

至此已经得到了组成线性爱因斯坦张量所需的全部 1 阶近似量。

1.1.6 爱因斯坦张量的 1 阶近似

将前面计算得到的 1 阶近似的里奇张量和标量曲率代入爱因斯坦张量的表达式，并将度规 g_{ab} 替换为 η_{ab}，就得到爱因斯坦张量的 1 阶近似 (称为线性爱因斯坦张量)

$$\begin{aligned} G_{ab}^{(1)} &= R_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{ab}R^{(1)} \\ &= \partial^c\partial_{(b}\gamma_{a)c} - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma - \frac{1}{2}\eta_{ab}(\partial^c\partial^d\gamma_{cd} - \partial^c\partial_c\gamma)\ . \end{aligned} \tag{11}$$

上面在把 $R^{(1)}$ 代入时将其中的指标 b 改成了 d。

1.2 线性爱因斯坦方程

将 1 阶近似的爱因斯坦张量代入爱因斯坦方程

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{12}$$

就得到

$$\partial^c\partial_{(a}\gamma_{b)c} - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma - \frac{1}{2}\eta_{ab}(\partial^c\partial^d\gamma_{cd} - \partial^c\partial_c\gamma) = 8\pi T_{ab} \tag{13}$$

称为线性爱因斯坦方程 (linearized Einstein equation)。令

$$\bar{\gamma}_{ab} \equiv \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma\ , \tag{14}$$

则线性爱因斯坦方程又简化为

$$-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab} + \partial^c\partial_{(a}\bar{\gamma}_{b)c} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\bar{\gamma}_{cd} = 8\pi T_{ab}\ . \tag{15}$$

用 $\partial^b \equiv \eta^{bc}\partial_c$ 作用于上式左边，结果为零，可见上式保证 $\partial^b T_{ab} = 0$。这有重要物理意义，它表明线性引力论中的能动张量的散度为零，从而保证能量、动量、角动量等守恒律在线性引力论 (作为一种物理理论) 中也成立。

1.3 用洛伦兹规范条件简化线性爱因斯坦方程

1.3.1 复习电磁波的洛伦兹规范条件

式(15)还可简化，为此先复习一个很有启发性的例子。闵氏时空的麦氏方程 $\partial^a F_{ab} = -4\pi J_b$ 可用电磁 4 势 A_a 表为

$$\partial^a\partial_a A_b - \partial_b\partial^a A_a = -4\pi J_b\ . \tag{16}$$

设 χ 为任一标量场，则 A_a 的如下变换

$$\tilde{A}_a = A_a + \partial_a\chi \tag{17}$$

叫规范变换，因为 $\tilde{A}_a$ 与 A_a 对应着相同的 F_{ab}。选择洛伦兹规范

$$\partial^a A_a = 0, \tag{18}$$

则式(16)简化为

$$\partial^a \partial_a A_b = -4\pi J_b \,. \tag{19}$$

在线性引力论中也存在十分类似的规范自由性，如下。

1.3.2 线性引力论的洛伦兹规范条件

设 ξ^a 是任意无限小矢量场 (“无限小”是指 ξ^a 的分量 ξ^μ 足够小，以致其自我乘积或与 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的乘积都可看作 2 阶量而略去。)，γ_{ab} 的如下变换

$$\tilde{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a \tag{20}$$

叫线性引力论的规范变换，因为由 ∂_a 同 ∂_b 的可交换性不难验证 $\eta_{ab} + \tilde{\gamma}_{ab}$ 与 $\eta_{ab} + \gamma_{ab}$ 有相同的线性黎曼张量。$R^{(1)}_{abcd}$ 的不变性导致 $R^{(1)}_{ab}$ 和 $G^{(1)}_{ab}$ 的不变性。因此，若 γ_{ab} 是线性爱因斯坦方程 (13)的解，则 $\tilde{\gamma}_{ab}$ 也是。

规范不变性使我们可从众多等价的 γ_{ab} 中选一适当者 (即选适当规范) 来简化线性爱因斯坦方程(13)。仿照 A_a 选择洛伦兹规范 (18)的做法，可以证明，在等价类中存在一个子类，其中任一 γ_{ab} 对应的 $\bar{\gamma}_{ab}$ 满足下式：

$$\partial^b \bar{\gamma}_{ab} = 0 \quad (\text{称为线性引力论的洛伦兹规范条件}). \tag{21}$$

具体地，式(21)总可通过选择 ξ^a 得到满足。设 $\bar{\gamma}_{ab}$ 不满足式(21)，欲选 ξ^a 使由式(20)决定的 $\tilde{\gamma}_{ab}$ 对应的

$$\bar{\tilde{\gamma}}_{ab} = \tilde{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\tilde{\gamma} \quad (\tilde{\gamma} \equiv \eta^{ab}\tilde{\gamma}_{ab}). \tag{22}$$

满足式(21)。由式(20)出发的简单计算表明 $\partial^b \bar{\tilde{\gamma}}_{ab} = \partial^b \bar{\gamma}_{ab} + \partial^b \partial_b \xi_a$，因此，只要选 ξ_a 满足

$$\partial^b \partial_b \xi_a = -\partial^b \bar{\gamma}_{ab} \,, \tag{23}$$

便能保证 $\partial^b \bar{\tilde{\gamma}}_{ab} = 0$。满足式(23)的 ξ_a 必定存在，因为在惯性坐标系中写为分量形式后就是如下的熟知方程：

$$-\frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial z^2} = -\partial^\nu \bar{\gamma}_{\mu\nu}, \tag{24}$$

在 $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ 给定后，其解不但存在，而且很多。

由式(21)可知这类 $\bar{\gamma}_{ab}$ 的线性爱因斯坦方程(15)右边第二、三项为零，于是简化为

$$\boxed{\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab},} \tag{25}$$

与式(19)十分相似。

2 引力辐射

现在在线性引力近似下对引力辐射问题做一简要讨论。

2.1 复习电磁辐射的辐射规范

线性引力论的洛伦兹规范条件 $\partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0$ 是受电磁场的洛伦兹规范 $\partial^a A_a = 0$ 启发而得的。然而，条件 $\partial^a A_a = 0$ 并未把 A_a 完全确定，因为如果令 $A'_a = A_a + \partial_a \chi$，其中 χ 满足 $\partial^a \partial_a \chi = 0$，则 A'_a 也满足洛伦兹条件 $\partial^a A'_a = 0$。在讨论电磁辐射时可以利用这一剩余规范自由性来选择 A'_a 使其在某惯性系 $\{x^0 \equiv t, x^i\}$ 中的 A'_0 在无源 $(J^a = 0)$ 区为零[2]。具体做法如下：设 A_a 是满足 $\partial^a A_a = 0$ 的任一 4 势，其分量为 $(A_0, \vec{a})$。设 Σ_0 是 $t = t_0$ 的超曲面，对 χ 的初值 $\chi|_{\Sigma_0}$ 及 $\partial\chi/\partial t|_{\Sigma_0}$ 提出如下要求：

$$\nabla^2 \chi \;|_{\Sigma_0} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{a} \;|_{\Sigma_0}, \tag{26}$$

$$\partial\chi/\partial t|_{\Sigma_0} = -A_0|_{\Sigma_0}. \tag{27}$$

$\vec{a}|_{\Sigma_0}$ 给定后，$\vec{\nabla} \cdot \vec{a}|_{\Sigma_0}$ 为为 Σ_0 上的已知函数，Σ_0 上满足方程(26)的函数 χ 存在且很多。令 χ 为方程 $\partial^a \partial_a \chi = 0$ 在初始条件式(26)、(27)下的解 (方程 $\partial^a \partial_a \chi = 0$ 在任意指定初值 $\chi|_{\Sigma_0}$ 和 $\partial\chi/\partial t|_{\Sigma_0}$ 下的解的存在唯一性早已在数学上证明)。我们来证明由 χ 和 A_a 按照 $A'_a = A_a + \partial_a \chi$ 构造的 A'_a 在无源区果然满足 $A'_0 = 0$。首先，由 $A'_a = A_a + \partial_a \chi$ 可知 A'_0 满足

$$\partial^a \partial_a A'_0 = \partial^a \partial_a A_0 + \partial_0 \partial^a \partial_a \chi = \partial^a \partial_a A_0 = -4\pi J_0, \tag{28}$$

以及

$$A'_0|_{\Sigma_0} = A_0|_{\Sigma_0} + \partial\chi/\partial t|_{\Sigma_0} = 0 \tag{29}$$

其中第二步用到式(27)。令式(29)对 t 求偏导还可以得到

$$\partial A'_0/\partial t|_{\Sigma_0} = \partial A_0/\partial t|_{\Sigma_0} + \partial^2\chi/\partial t^2|_{\Sigma_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}|_{\Sigma_0} + \nabla^2 \chi|_{\Sigma_0} = 0\,. \tag{30}$$

其中第三步用到式(26)，第二步是由于 $0 = \partial^a A_a = -\partial A_0/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ 导致 $\partial A_0/\partial t = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ 以及 $0 = \partial^a \partial_a \chi = -\partial^2 \chi/\partial t^2 + \nabla^2 \chi$ 导致 $\partial^2 \chi/\partial t^2 = \nabla^2 \chi$。

对无源电磁场，式(28)成为 $\partial^a \partial_a A'_0 = 0$，而此方程满足初始条件式(29)、(30)的唯一解是 $A'_0 = 0$。可见 A'_a 是既满足洛伦兹条件 $\partial^a A'_a = 0$ 又满足 $A'_0 = 0$ 的规范，这称为辐射规范 (radiation gauge)。

[2]实际上只能在无源区的这样一些点 (例如 p) 上做到 $A_{0'=0}$：过 p 的光锥在 p 和 Σ_0 之间的部分都在无源区中，后面说到线性引力论中的无源区时指的也是这个意思。

2.2 线性引力论的辐射规范

2.2.1 辐射规范简介

线性引力论的情况与此非常类似：洛伦兹规范条件式(21)并未把 $\bar{\gamma}_{ab}$ 完全确定，因为如果令

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a, \tag{31}$$

其中 ξ_a 满足

$$\partial^b \partial_b \xi_a = 0, \tag{32}$$

则 $\bar{\gamma}'_{ab}$ 也满足方程(25)和条件式(21)。仿照电磁场的做法，可以利用这一剩余规范自由性选择 γ'_{ab} 使其在某惯性系 $\{x^0 \equiv t, x^i\}$ 的分量在无源区 $(T_{ab} = 0)$ 满足 $\gamma' = 0, \gamma'_{0i} = 0, i = 1, 2, 3$。为此，从满足式 (21)的任一 γ_{ab} 出发，以 ξ_0 和 $\vec{\xi}$ 分别代表 ξ_a 在该系的时、空分量，要求初值 $\xi_0|_{\Sigma_0}, \vec{\xi}|_{\Sigma_0}, \partial\xi_0/\partial t|_{\Sigma_0}, \partial\xi_i/\partial t|_{\Sigma_0}$ 满足如下方程：

$$2\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi} - \partial\xi_0/\partial t\right)|_{\Sigma_0} = -\gamma|_{\Sigma_0}, \tag{33}$$

$$2\left[-\nabla^2\xi_0 + \vec{\nabla}\cdot(\partial\vec{\xi}/\partial t)\right]_{\Sigma_0} = -\partial\gamma/\partial t|_{\Sigma_0}, \tag{34}$$

$$[(\partial\xi_i/\partial t) + (\partial\xi_0/\partial x^i)]_{\Sigma_0} = -\gamma_{0i}|_{\Sigma_0}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{35}$$

$$\left[\nabla^2\xi_i + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial t}\right)\right]_{\Sigma_0} = -\left.\frac{\partial\gamma_{0i}}{\partial t}\right|_{\Sigma_0}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{36}$$

令 $\xi_\mu(\mu = 0, 1, 2, 3)$ 为方程 $\partial^b\partial_b\xi_\mu = 0$ 在初始条件式(33)~(36)下的解，则仿照电磁场的讨论不难证明由 $\xi_a \equiv \xi_\mu(\mathrm{d}x^\mu)_a$ 及 γ_{ab} 按式(31)构造的 γ'_{ab} 在无源区既满足洛伦兹规范条件 $\partial^a\bar{\gamma}'_{ab} = 0$ 又满足 $\gamma' = 0$ 和 $\gamma'_{0i} = 0, i = 1, 2, 3$。

2.2.2 利用辐射规范拆解线性爱因斯坦方程

从现在起把满足上述条件的 γ'_{ab} 简记为 γ_{ab}。由 $\gamma = 0$ 可知 $\bar{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab}$，于是洛伦兹条件 $\partial^a\gamma_{ab} = 0$ 与 $\gamma_{0i} = 0$ 结合导致

$$\begin{aligned}\partial^a\gamma_{ab} &= \partial^0\gamma_{0b} + \partial^1\gamma_{1b} + \partial^2\gamma_{2b} + \partial^3\gamma_{3b}\\ &= \partial^0\gamma_{00} + \partial^1\gamma_{1b} + \partial^2\gamma_{2b} + \partial^3\gamma_{3b}\\ &= \frac{\partial\gamma_{00}}{\partial t}(\mathrm{d}t)_b + \partial^1\gamma_{1b} + \partial^2\gamma_{2b} + \partial^3\gamma_{3b}\\ &= 0\,.\end{aligned} \tag{37}$$

由 $\gamma_{0i} = 0$ 还能知道 $\partial^1\gamma_{1b} + \partial^2\gamma_{2b} + \partial^3\gamma_{3b}$ 不能有 t 分量，前后两部分是线性独立的，于是得到

$$\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial t} = 0 \quad 和 \quad \partial^1\gamma_{1b} + \partial^2\gamma_{2b} + \partial^3\gamma_{3b} = 0. \tag{38}$$

从而线性爱因斯坦方程(25)在无源区给出

$$
\begin{aligned}
\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab} = \partial^c\partial_c\gamma_{ab} &= \left(\eta^{00}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \eta^{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta^{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \eta^{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\gamma_{\mu\nu}\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_a\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b \\
&= \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\gamma_{\mu\nu}\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_a\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b = 0
\end{aligned}
\tag{39}
$$

将该式分离成分量形式，并考虑 $\gamma_{0i} = 0$ 和 $\partial\gamma_{00}/\partial t = 0$，就得到

$$
\partial^c\partial_c\gamma_{00} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\gamma_{00} = \nabla^2\gamma_{00} = 0\,. \tag{40}
$$

和

$$
\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\gamma_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{41}
$$

如果在全时空都无源，则方程(40)在无限远表现良好的解就只能是 $\gamma_{00} =$ 常数。

2.3 单色平面波形式的引力辐射

2.3.1 补充规范和单色平面波解

可以证明，通过进一步的规范变换可把 γ_{00} 变为零，同时保留前面所有既得成果。因此，在这一新规范中有

$$
\gamma = 0,\ \gamma_{0i} = 0\ (i = 1, 2, 3)\ \text{以及}\ \gamma_{00} = 0. \tag{42}
$$

我们就在这一规范下讨论线性引力论的引力辐射。

所须求解的方程就是真空线性爱因斯坦方程 $\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab} = 0$(已附加洛伦兹规范) [3]，在规范 $\gamma = 0$ 下，它变为 $\partial^c\partial_c\gamma_{ab} = 0$，单色平面波是该方程的最简单解，它可表为

$$
\gamma_{ab} = H_{ab}\cos(K_\mu x^\mu), \tag{43}
$$

其中 H_{ab} 是对称常张量场（“常”是指 $\partial_c H_{ab} = 0$)，代表波的振幅，亦称偏振张量；K^μ 是常矢量场 K^a(4 波矢) 的分量。这种单色平面波解具有一些很好的性质，如下所述。

2.3.2 引力波以光速传播

由 $\partial^c\partial_c\gamma_{ab} = 0$ 可知

$$
\begin{aligned}
\partial^c\partial_c\gamma_{ab} &= H_{ab}\partial^c\partial_c\cos(K_\mu x^\mu) \\
&= H_{ab}\partial^c\left[-K_c\sin(K_\mu x^\mu)\right] \\
&= -H_{ab}K^cK_c\cos(K_\mu x^\mu) = 0,
\end{aligned}
\tag{44}
$$

[3]我们当然也可以从式(41)开始求解，该式相当于是洛伦兹规范下的真空爱因斯坦方程利用辐射规范和补充规范化简后的结果。但本小节中仍是从头出发，逐步利用辐射规范和补充规范条件，这是为了更好地展示这种 4 维波动方程求解的办法。

这表明

$$K_\mu K^\mu \equiv \eta_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = 0\,, \tag{45}$$

即 K^a 是类光矢量场。把 K^a 做 3+1 分解：

$$K^a = \omega(\partial/\partial t)^a + k^a\,, \tag{46}$$

则 ω 和 $\vec{k} \equiv k^a$ 可分别解释为波的角频率和 3 波矢，且由式(45)可知

$$K^a K_a = \omega^2 (\partial/\partial t)^a\,(\mathrm{d}t)_a + k^a k_a = -\omega^2 + k^a k_a 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = k^a k_a \equiv k^2\,. \tag{47}$$

即 $\omega = \pm k$，在国际单位制中，该式写作 $\omega = vk = \pm ck$，其中 v 是波速，c 是光速，这表明引力波同电磁波一样以光速传播。从这段推导也可以看出，只要波矢 K^a 类光，就代表波速为光速，这是一个重要的结论。

2.3.3 振幅与波矢正交

式(43)同洛伦兹条件 $\partial^a \gamma_{ab} = 0$ 结合得

$$\partial^a \gamma_{ab} = H_{ab} \partial^a \cos(K_\mu x^\mu) = -H_{ab} K^a \sin(K_\mu x^\mu) = 0 \tag{48}$$

由此知

$$H_{\mu\nu} K^\nu = 0\,, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{49}$$

这反映单色平面引力波的 4 维振幅 H_{ab} 同时空传播方向 K^a 正交。

2.3.4 偏振状态

式(43)同 $\gamma_{0\nu} = 0$ 和 $\gamma = 0$ 结合则给出

$$H_{0\nu} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{50}$$

和

$$H \equiv \eta^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = 0\,. \tag{51}$$

由 $H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}$ 可知 H_{ab} 至多有 10 个独立分量，但它们还受式(49)、(50)和(51)的限制，共含 $4+4+1=9$ 个方程，但式(49)中的方程 $H_{0\nu}K^\nu = 0$ 是式(50)的结果，这表明 9 个方程中只有 8 个独立。因此 H_{ab} 只有 $10-8=2$ 个独立分量，它们在物理上代表平面引力波的两种独立偏振态 (偏振模式)。

3 引力波的发射

前面已经介绍了引力波在远场真空中的可能存在形式——单色平面波，但我们还不知道引力波是如何发射的，其中包含哪些种类的辐射。下面简介引力波的发射。

先与电磁波做一对比。如果系统的带电粒子做变速运动 (相对于惯性系)，它便发射电磁波。众所周知，对辐射场的主要贡献来自电偶极辐射，其次 (弱得多) 是磁偶极辐射和电

四极辐射 (两者量级相同)。类似地，在牛顿近似下，如果系统的质点做变速运动，它便发射引力波。

3.1 对应于电偶极辐射的引力偶极辐射

与电偶极矩对应的是质量偶极矩 (mass dipole moment)

$$\vec{D} = \sum_{\text{质点}P} m_P \vec{r}_P \,, \tag{52}$$

其中 m_P 和 $\vec{r}_P$ 分别是质点 P 的质量和矢径，上式右边要对系统中的所有质点求和。由于电偶极辐射的强度正比于电偶极矩对时间的 2 阶导数的平方，可以预期由质量偶极矩贡献的引力辐射强度正比于 $\ddot{\vec{D}}^2$。然而，由式(52)可知 $\dot{\vec{D}} = \sum_{\text{质点}P} m_P \dot{\vec{r}}_P$ 等于系统的总动量 $\vec{p}$，而由动量守恒律可知 $\dot{\vec{p}} = 0$，因此 $\ddot{\vec{D}} = 0$，即引力波中不含对应于电偶极辐射的引力偶极辐射。

3.2 对应于磁偶极辐射的引力偶极辐射

根据电磁辐射理论，磁偶极辐射的强度正比于磁偶极矩对时间的 2 阶导数的平方。引力系统与磁偶极矩对应的量为

$$\vec{\mu} = \sum_{\text{质点}P} (P\text{的矢径}) \times (P\text{贡献的流矢量}) = \sum_{\text{质点}P} \vec{r}_p \times (m_p \vec{u}_p) \,, \tag{53}$$

其中 $\vec{u}_P$ 是质点 P 的速度。上式右边无非是系统的总角动量。由角动量守恒律可知 $\dot{\vec{\mu}} = 0$，因此引力波中也不含对应于磁偶极辐射的引力偶极辐射。

简言之，引力波中不含偶极辐射。只有转而研究四极辐射才会得到非零结果 [详见 Misner et al. (1973)P.974~978]。由于四极辐射在量级上小于偶极辐射，引力系统发射的引力波在量级上弱于条件类似的电磁系统发射的电磁波。

引力波的发射这一节的介绍非常简略，这就导致在本文并没有完整地求解出线性引力论下的引力波方程，只是大概讲述了求解的思路。

4 引力波的探测

4.1 引力波探测遇到的困难

既然广义相对论预言了引力辐射的物理存在性，引力波的探测就成为十分重要的课题。由于到达太阳系的引力波的波源都很遥远，被探测的引力波完全可以看作平面波，并且弱得使线性近似适用，这使引力波的探测理论比发射理论简单。然而，引力波的直接探测在实验上有很高难度：

(1) 微弱的被测对象对探测仪器的灵敏度提出很高要求；

(2) 探测实验需要随时等待较近处较剧烈的天体过程带来较强的引力波。

Weber 于 1966 年在 Maryland 大学开拓性地建立了世界上第一个引力波探测器 (一根悬挂着的长 153cm，直径 66cm 的铝棒及其附加装置)，经过数年不懈努力，他宣布在两地探测器上同时测得引力波脉冲。遗憾的是其他引力波探测者对此都未予认证。例如，Tyson 的探测器比 Weber 的探测器有更高的灵敏度，却丝毫未收到类似脉冲 [见 Ohanian(1976)；刘辽 (1987)]。

1987 年 2 月，地球上的天文学家观测到离银河系最近的河外星系“大麦哲伦云”中爆发的一颗超新星 (SN1987A，距地球只有 16 万光年。)，国外一个小组于 1987 年宣称接收到来自该超新星的引力辐射，但也未取得世界上其他 (为数不多的) 引力波探测器的认证。

4.2 基于脉冲星周期变化的间接探测方法

4.2.1 探测原理

对脉冲星由于发射引力波对自身运动的影响的观测异军突起地取得突破性成果。脉冲星 (pulsar) 是一种快速自转的中子星，由于某种机制而不断发射电磁波。如果地球位于波束扫射范围之内，就会按准确周期接收到射电脉冲信号。由两颗恒星组成的近似孤立的引力系统叫做双星，这两颗恒星称为子星。子星围绕系统的质心公转。

根据广义相对论，子星的这种加速运动会因发射引力波而损失能量，后果是轨道变小和公转周期变短。与剧烈变化的天体物理过程不同，双星系的引力场很弱，可用线性引力论计算其引力波带走的能量及由此导致的轨道周期变化。要使这些效应能被测量，至少应满足两个条件：

(1) 轨道非常小 (两子星足够近)，以使广义相对论效应足够明显；

(2) 有一种精度很高的轨道周期测量方法。

如此，测量出轨道周期的变化后，与线性引力论的四极辐射公式计算的理论值对照，即可验证引力波理论。

4.2.2 Hulse 和 Taylor 的探测成果

Hulse 和 Taylor 在 1974 年发现的脉冲双星 PSR1913 +16 正好满足这些条件 [脉冲双星 (binary pulsar) 是指一个子星为脉冲星的双星，PSR 是脉冲星的识别符，1913 和 + 16 分别代表它的赤经和赤纬 (角度坐标)。]。该双星的两子星的最大距离只有 10^9m 的量级 (约 1 个太阳半径)，一个子星为脉冲星则使条件 (2) 得以满足：由于脉冲星所发脉冲的周期被誉为“钟一般地准确”，Taylor 及其合作者们便能以异常高的精度观测，从而推算轨道周期变化率。经过 4 年来上千次的观测，他们于 1978 年宣布了对轨道周期变化率的观测结果，与线性引力论的四极辐射公式计算的理论值吻合得很好。这是引力波理论提出 60 年来关于引力波携带能量的第一个定量观测证据，虽然只是间接的证据。他们后来又对这一脉冲双星继续观测并取得进步，终于获得 1993 年诺贝尔物理奖。

4.3 基于激光干涉的直接探测方法

4.3.1 探测原理

LIGO(激光干涉引力波天文台) 利用激光干涉技术来探测引力波。其基本原理是通过两个相互垂直的长臂 (干涉臂) 来测量引力波引起的微小长度变化。当引力波穿过地球时，它会使空间发生微小的拉伸和压缩，导致干涉臂的长度发生变化。这种变化可以通过测量干涉图样的变化来检测。具体来说，LIGO 使用高功率稳定激光器产生纯净的相干光波，激光束被分束器分成两束，沿互相垂直的、数公里长的真空臂传播，被末端反射镜反射回来重新干涉。引力波导致两臂长度发生极其微小的差异变化，从而改变两束激光返回后的干涉光强。通过监测干涉图样的变化来探测引力波信号。

4.3.2 激光干涉引力波天文台 (LIGO) 的探测成果

2015 年 9 月 14 日，LIGO 首次直接探测到引力波，这一信号来自约 13 亿光年外两个质量约为太阳 20 至 30 倍的黑洞合并。这一发现不仅验证了爱因斯坦广义相对论中关于引力波的预言，还开启了天文学的新时代。此后，LIGO 又探测到多次引力波事件，其中包括 2017 年 8 月 17 日的中子星合并事件 GW170817，这一事件不仅被 LIGO 和 Virgo 探测到，还被全球 70 多个望远镜合作组观测到，标志着多信使引力波天文学时代的到来。

4.4 基于脉冲星测时阵列技术的探测方法

4.4.1 探测原理

脉冲星发出的电磁脉冲信号在传播过程中会受到引力波的影响，导致其到达时间发生微小变化。通过精确测量这些变化，可以验证引力波的存在。

脉冲星测时阵列 (Pulsar Timing Array, PTA) 利用一群高自转稳定性的毫秒脉冲星作为探测器。这些脉冲星的电磁脉冲信号被高精度的射电望远镜接收并记录。当引力波穿过地球和脉冲星之间的空间时，会导致时空的微小形变，从而改变脉冲星信号到达地球的时间。这种变化可以通过高精度的脉冲星测时观测来检测。

4.4.2 中国脉冲星测时阵列 (CPTA) 的探测成果

中国脉冲星测时阵列 (CPTA) 在寻找纳赫兹随机引力波背景方面取得了重要进展。CPTA 利用中国的射电望远镜，特别是五百米口径球面射电望远镜 (FAST)，对一批高自转稳定性的毫秒脉冲星进行了长期的观测和精确测时。通过分析这些脉冲星的到达时间数据，CPTA 团队在 2023 年发布的数据中发现了与引力波背景相关的信号。

CPTA 的观测数据覆盖了从 2019 年 4 月到 2022 年 9 月的时间段。通过对 57 颗毫秒脉冲星的高精度测时，CPTA 团队在统计推断中发现了一个与引力波背景相关的相关信号，其幅度为 $\log A_c = -14.4^{+1.0}_{-2.8}$，并且在频率约为 14 纳赫兹处发现了 Hellings-Downs(HD) 相关曲线的证据，统计显著性达到了 4.6σ。这一结果表明，CPTA 已经能够探测到纳赫兹频段引力波背景的信号，为未来进一步提高探测精度和验证引力波理论奠定了坚实的基础。

5 关于强引力波的讨论

前面所讨论的所有内容都是基于弱引力波的，采用了线性近似的办法。但须注意，爱因斯坦方程是非线性方程，广义相对论是非线性理论。虽然在许多情况下可用弱场近似，但在强引力场情况下必须对非线性性给予充分注意，这是引力波与 (闵氏时空的) 电磁波的重要不同。麦氏方程是线性方程，叠加原理对电磁场适用，同一空间传播的两列电磁波互不影响。反之，一般而言，两列引力波之间存在相互作用 (散射)。

一般认为强引力波的发射源都同剧烈变化的天体物理过程有关，例如星体晚期的急剧的非球对称引力坍缩、超新星爆发以及活动星系核中的剧烈扰动等。这时引力场不弱，线性近似不适用。对这些过程的严格处理必然涉及在非球对称情况下求解非线性爱因斯坦方程这一艰巨课题，人们对强引力波的发射问题的了解至今还很不完善。

另外，值得注意的是，根据 Birkhoff 定理，球对称星体的任何球对称演化 (例如坍缩或振荡) 无论多么剧烈都不会发射引力波，正如麦氏理论中不存在球对称电磁波那样 [电偶极振子在远区的球面波并非球对称电磁波，因为场量 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 并无球对称性。事实上，球对称电磁波相当于电单极矩 (monopole) 贡献的辐射，麦氏理论中不存在这种辐射。]。

结语

引力波作为广义相对论的重要预言，其存在和性质经过长期的理论探索与实验验证，已成为现代天体物理学的重要研究领域。从弱场近似的线性理论到强引力场的非线性效应，引力波研究不仅深化了对时空本质的理解，还开辟了多信使天文学的新时代。未来，随着探测技术的进步和理论模型的完善，引力波将继续为揭示宇宙的奥秘提供独特视角。

参考文献

[1] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论上册. 2 版. 北京: 科学出版社, 2006. Print.

[2] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016), `https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.061102`.

[3] Heng Xu, Siyuan Chen, Yanjun Guo, et al., *Searching for the Nano-Hertz Stochastic Gravitational Wave Background with the Chinese Pulsar Timing Array Data Release I*, *Res. Astron. Astrophys.* **23**, 075024 (2023).