DATE / /

物理中的数列题型及方法总结. 2022.10.

主要考察的是等差数列和等比数列，后者更为常见，在高考题中出现多次，并且情境多样。

一、直接归纳：

有些题目情境简单，一个公式或者利用图像便可找到规律，可直接采用归纳法（不需要很严谨，直接得出规律即可）.

二、递推法 —— 此二者在等比数列中完全相通.

有些题目情境没那么简单，这时可采取递推法，研究从第n-1次到第n次，找到所求物理量的递推关系。

优点是：① 研究一次过程就够了，计算量更少

② 能够解决类等比数列：$a_n = pa_{n-1} + q$ 的题目.

应用：[2015.天津] [2020.山东] [2022.湖南].

三、还原法

将第一次运动所得到的结果视为初始条件的函数，然后将第二次运动等效还原至初始，与第一次的初始进行比较，得到初始条件的递推关系及所求结果的递推关系.

比研究第n-1次到第n次更为巧妙.

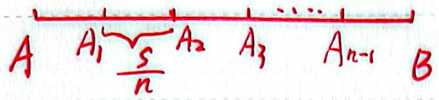
四. 能量恢复系数类

输入的能量按质量决定的比例传递.

通常使用累乘法.

1. 一固定直线轨道上 A、B 两点间距 s，将 s 作 n 等分，令质点从 A 出发由静止开始以加速度 a（常量）向 B 运动，当质点到达每一等分末端时，其加速度便增加 $\frac{a}{n}$，试求质点到达 B 时速度 v_B

解：



$$\begin{cases} v_1^2 - 0 = 2a\frac{s}{n} \\ v_2^2 - v_1^2 = 2\left(a + \frac{a}{n}\right)\cdot\frac{s}{n} \\ v_3^2 - v_2^2 = 2\left(a + \frac{2a}{n}\right)\cdot\frac{s}{n} \\ \cdots\cdots \\ v_B^2 - v_{n-1}^2 = 2\left[a + \frac{(n-1)a}{n}\right]\cdot\frac{s}{n} \end{cases}$$

累加：$v_B^2 = 2a\frac{s}{n} + 2\left(a+\frac{a}{n}\right)\frac{s}{n} + \cdots + 2\left[a+\frac{(n-1)a}{n}\right]\frac{s}{n}$

$= 2a\frac{s}{n}\cdot n + 2a\frac{s}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)$

$= as\left(3-\frac{1}{n}\right)$

$\therefore v_B = \sqrt{as\left(3-\frac{1}{n}\right)}$

2

质点以加速度 a 从静止出发做直线运动，在某时刻 t，加速度变为 $2a$；在时刻 $2t$，加速度变为 $3a$；...；在 nt 时刻，加速度变为 $(n+1)a$，求：

(1) nt 时刻质点的速度；

(2) nt 时间内通过的总路程。

解：通过递推关系求通项

(1) $v_n - v_{n-1} = nat$

$v_n = at + 2at + 3at + \cdots + nat$

$= \frac{n(n+1)}{2}at$

(2) $S_n - S_{n-1} = v_{n-1}t + \frac{1}{2}nat^2 = \frac{n^2}{2}at^2$

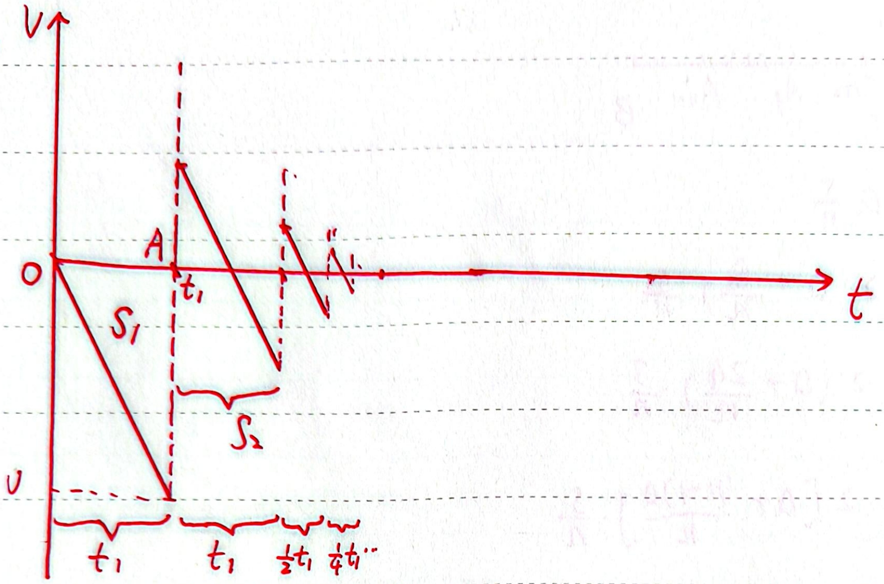
$S_n = \frac{1}{2}at^2\left(1+2^2+3^2+\cdots+n^2\right) = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)at^2$

3. 小球从高 $h_0=120m$ 处自由落下，着地后跳起，又落下。每与地面相碰一次，速度减少 $\frac{1}{2}$。

(1) 作出小球的 $v-t$ 图像（向上为正方向）

(2) 求小球从下落到停止的总时间和总路程.

解：(1)



(2) 由三角形相似关系知，A点之后时间为公比 $q=\frac{1}{2}$ 的等比数列

$$t = t_1 + t_1 + \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{4}t_1 = t_1 + t_1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

$$= t_1 + t_1 \cdot \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3t_1$$

其中 $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{6}\ s$. 所以 $t = 6\sqrt{6}\ s$

A点之后路程为公比 $q=\frac{1}{4}$ 的等比数列

$$s = s_1 + s_2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$$

$$= s_1 + s_2 \cdot \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = s_1 + \frac{4}{3}s_2$$

其中 $s_1 = h_0 = 120m$. $s_2 = \frac{1}{2}s_1 = 60m$

所以 $s = 200m$

【例题 3-6】 如图 3-例 6 所示，厚度不计的圆环套在粗细均匀、长度为 l 的圆柱上端，两者质量均为 m。圆环与圆柱的最大静摩擦力等于滑动摩擦力，大小为 kmg（$k>1$，常数）。圆柱能沿光滑竖直细杆 AB（B 端固定在地面上）上下滑动，圆柱与地碰撞时触地时间极短，且无动能损耗。设圆柱从其下端距地高度为 h 处由静止自由下落，与地经 n 次碰撞后圆环从圆柱上滑脱。试确定 h 应满足的条件

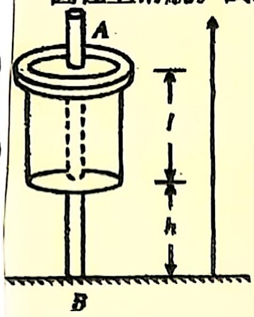


图 3-例 6

解：设竖直向下为正方向，第一次碰撞前，二者有共同速度 $v_0=\sqrt{2gh}$

第一次碰撞后，环 $v_1=\sqrt{2gh}$，加速度 $a_1=(1-k)g$

柱 $v_2=-\sqrt{2gh}$，加速度 $a_2=(1+k)g$

二者有相对滑动。假设在柱第二次落地前，二者相对滑动已停止，

则所需时间 t_1 有：$v_1+a_1t_1=v_2+a_2t_2 \Rightarrow t_1=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

再假设一直存在相对滑动

则柱从第一次撞后至上升最高点所用时间 $t_2=\frac{0-v_2}{a_2}=\frac{1}{k+1}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

柱从第一次撞后至第二次碰撞所用时间 $t_3=\frac{-v_2-v_2}{a_2}=\frac{2}{k+1}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

易知 $t_1>t_2$。再作差比较 t_1与t_3。$t_1-t_3=\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}=\frac{1-k}{(k+1)k}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

∵ $k>1$ ∴ $t_1-t_3<0$，∴ $t_2<t_1<t_3$

∴ 相对滑动停止，环柱再次共速时，恰好是二者一起下落。

此时速度 $u=v_1+a_1t_1=\frac{1}{k}\sqrt{2gh}$，$h'=\left|v_2t_1+\frac{1}{2}a_2t_1^2\right|=\frac{h}{k}\cdot\frac{k-1}{k}$

为了寻找递推关系，我们要把此时转化为第一次碰撞前的情境

相当于是从 $h_2=h'+\frac{u^2}{2g}=\frac{h}{k}$ 处同时释放环柱，然后柱与地面的碰撞恰好与第二次碰撞相同。

$\{h_n\}$ 的递推关系已经找到，最后只需确定每次碰撞间隔中，

环与柱的相对位移，只需找第一次撞后到第二次撞

为简便计算，我们换以柱为参考系（当然可以分别计算柱、环位移，但稍微有些麻烦）

以柱为系，看环 $v'=2\sqrt{2gh}$，$a'=a_{环对地}+a_{地对柱}$

$=(1-k)g-(1+k)g=-2kg$

$\Delta S_1=\frac{0-v'^2}{2a'}=\frac{2}{k}h$

已求得 $\{h_n\}$ 是 $h_1=h$ 为首项，$q=\frac{1}{k}$ 为公比的等比数列

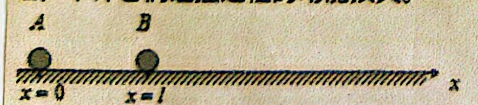
$\therefore S_n=\Delta S_1+\Delta S_2+\cdots\Delta S_n=\frac{2}{k}(h_1+h_2+\cdots+h_n)$

$=\frac{2}{k}\cdot\frac{h[1-(\frac{1}{k})^n]}{1-\frac{1}{k}}$

$S_{n-1}<l\le S_n$

$\Longrightarrow \frac{(k-1)l}{2(1-\frac{1}{k^n})}\le h<\frac{(k-1)l}{2(1-\frac{1}{k^{n-1}})}$

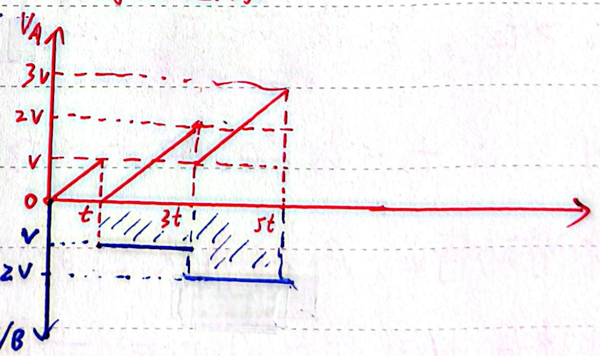
.如图所示，质量均为m大小相同的小球A、B(都可视为质点）静止在光滑水平面内的x轴上，它们的位置坐标分别为$x=0$和$x=l$.现沿x轴方向加一个力场，该力场只对小球A产生沿x轴正方向大小为F的恒力，以后两小球发生正碰过程时间很短，不计它们碰撞过程的动能损失。



（1）小球A、B在第一次碰撞后的速度大小各是多少？

（2）如果该力场的空间范围是$0\leqslant x\leqslant L\,(L>l)$，求为使$A$、$B$恰好在其中发生完成10次碰撞，$L$的取值

解：利用好图像



(1) $v_A=0$，$v_B=\sqrt{\frac{2Fl}{m}}$

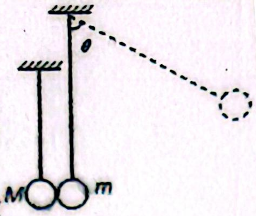
(2) $L=x_B+l$

$x_B=v\cdot2t+2v\cdot2t+\cdots+9v\cdot2t=(1+2+\cdots+9)\cdot v\cdot2t=90\,vt$

而 $\frac{1}{2}vt=l$

代入，$L=181\,l$

如图所示，质量为m的由绝缘材料制成的球与质量为$M=19m$的金属球并排悬挂。现将绝缘球拉至与竖直方向成$\theta=60°$的位置自由释放，下摆后在最低点与金属球发生弹性碰撞。在平衡位置附近存在垂直于纸面的磁场。已知由于磁场的阻尼作用，金属球将于再次碰撞前停在最低点处。求经过几次碰撞后绝缘球偏离竖直方向的最大角度将小于45°。



解：每次碰撞，m的速率与原来的比

$$\eta = \left|\frac{m-M}{m+M}\right| = \frac{9}{10}$$

则其动能与原来的比为 $\eta^2=\frac{81}{100}$

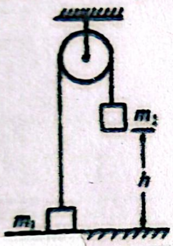
设n次碰撞后，最大偏角小于45°

则 $(\eta^2)^n mgl(1-\cos60°) < mgl(1-\cos45°)$

$$(0.81)^n < 2-\sqrt{2} \Longrightarrow n > 2.53795264$$

∴要经过3次碰撞

如图所示，一轻绳穿过光的定滑轮，两端各拴一小物块，它们的质量分别为m_1、m_2，已知$m_2=3m_1$，起始时m_1放在地上，m_2离地面高度为h=1.00 m，绳子处于拉直状态，然后放手，设物块与地面相碰时完全没有弹起（地面为水平沙地），绳不可伸长，绳中各处拉力均相同，在突然提拉物块时绳的速度与物块相同，试求m_2所走的全部路程（取三位有效数字）.



解：m_2碰地后速度为0，m_1竖直上抛，绳松弛。m_1到达最高点后再加速下降，直至绳绷紧，m_2被m_1拉起来，由于$m_2>m_1$，故都减速运动，直至m_2到达最高处h_2，之后重复此情境

m_2从释放到第一次落地

有 $(m_2-m_1)gh_1=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$ ①

碰地后m_2速度为0，m_1速度仍为v。m_1竖直上抛再回原处，速度大小仍为v。然后绳绷紧，m_2被提起，有$m_1v=(m_1+m_2)v'$ ②，再到m_2到达h_2处

有 $\frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2=(m_2-m_1)gh_2$ ③，联立①②③得 $h_2=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2h_1$

同理，有 $h_3=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2h_2$，…… $h_n=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2h_{n-1}$ ……

等比数列$\{h_n\}$的公比 $q=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2=\frac{1}{16}$

m_2走过的全部路程为

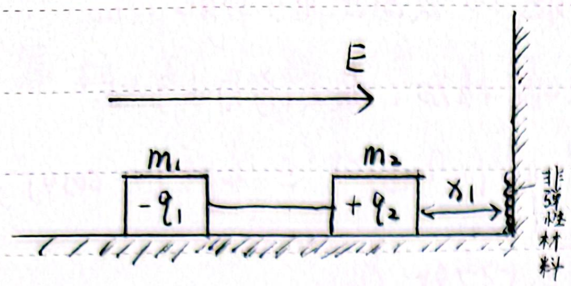
$$\lim_{n\to\infty}(h_1+2h_2+2h_3+\cdots+2h_n)=1+2\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{16}+\left(\frac{1}{16}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{16}\right)^n\right]$$

$$=1+2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{16}\left[1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{16}}=\frac{17}{15}\approx1.13\text{ m}$$

上一个题是在重力场和定滑轮的作用下进行的运动

也可以换成电场的情境如图

($q_2 > q_1$)



$$(Eq_2 - Eq_1)x_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \quad ①$$

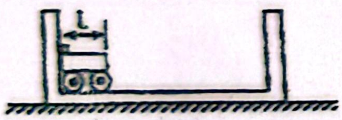
$$m_1 v = (m_1 + m_2)v' \quad ②$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = (Eq_2 - Eq_1)x_2 \quad ③$$

联立①②③：$x_2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 x_1$

可见，公比还是 $\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2$，与 q_1、q_2 大小无关

如图所示，一小物体放在小车上，它们一起在水平放置的箱子中运动，小车长为L，小车质量为M，小物体质量为$m = \frac{M}{2}$，小物体与小车间的动摩擦因数为μ，小车与箱底之间无摩擦，箱子固定于水平地面上，小车与箱子两壁碰后，速度反向，速率不变，开始时小车靠在箱子的左壁，小物体位于小车的最左端，小车与小物体以共同速度v_0向右运动，已知箱子足够长，试求：



（1）小物体不从小车上掉落下的条件；

（2）若上述条件满足，求小车与箱壁第$n+1$次碰撞前系统损失的机械能；

（3）小物体相对于小车滑过的总路程；

（4）若$m = 2M$，则小物体不从小车上掉落下的条件.

（1）小物体一箱壁第1次碰撞到小物体与小车有共同速度v_1.取向左为正方向，根据动量守恒定律和能量守恒定律得：

$Mv_0 - mv_0 = (M+m)v_1$①

$\mu mgx_1 = \frac{1}{2}(M+m)v_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)v_1^2$ ②

将$m = \frac{M}{2}$，代入解得：

$v_1 = \frac{M-m}{M+m}v_0 = \frac{1}{3}v_0$

第一次碰后，小物体相对小车向右滑行的距离

$x_1 = \frac{4v_0^2}{3\mu g}$

同理，第二次碰后，小物体相对小车向左滑行的距离$x_2 = \frac{4v_1^2}{3\mu g} = \frac{1}{9} \cdot \frac{4v_0^2}{3\mu g} < x_1$

所以第一次碰撞后小物体不落下，以后都不会掉落下，即小物体不掉落下小车的条件是：$x_1 \leqslant L$

解得：$L \geqslant \frac{4v_0^2}{3\mu g}$.

（2）与①式同理可得，第二次碰后小物体与小车有共同速度$v_2 = \frac{M-m}{M+m}v_1 = \frac{1}{3^2}v_0$

...

第n次碰后小物体与小车有共同速度$v_n = \frac{1}{3^n}v_0$

...

所以，小车与箱壁第$n+1$次碰撞前系统损失的机械能

$\triangle E = \frac{1}{2}(M+m)v_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)v_n^2$

$= \frac{3}{4}Mv_0^2\left(1 - \frac{1}{9^n}\right)$

（3）当经过无数次碰撞后，小物体和小车最终将停在箱子左壁处，根据功能关系得

$\mu mgs = \frac{1}{2}(M+m)v_0^2$

解得，小物体相对于小车滑过的总路程$s = \frac{3v_0^2}{2\mu g}$

（4）若$m = 2M$，每一次碰后小物体均向右滑行一段距离，经过无数次碰撞后，小车最终将停在箱子右壁处，再由功能关系得

$\mu mgs = \frac{1}{2}(M+m)v_0^2$

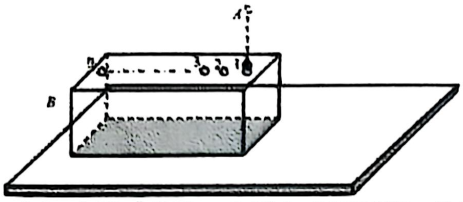
将$m = 2M$，代入解得$s = \frac{3v_0^2}{4\mu g}$

小物体不掉落的条件为：$L \geqslant s$

即得$L \geqslant \frac{3v_0^2}{4\mu g}$

本题(4)中，小车与右壁碰撞后的各次路程成等比数列

如图所示，B为位于水平地面上的质量为M的长方形空心盒子，盒内存在着竖直向上场强大小为$E=\frac{2mg}{q}$的匀强电场.A为位于一定高度处的质量为m、带电荷量为$+q$的小球，且$M=2m$，盒子与地面间的动摩擦因数$\mu=0.2$，盒外没有电场.盒子的上表面有一些略大于小球直径的小孔，孔间距满足一定的关系，使得小球进出盒子的过程中始终不与盒子接触.当小球A以$1m/s$的速度从孔1进入盒子的瞬间，盒子B恰以$v_B=6m/s$的速度向右滑行.已知盒子通过电场对小球施加的作用力与小球通过电场对盒子施加的作力大小相等方向相反.设盒子足够长，取重力加速度$g=10m/s^2$，小球恰能顺次从各个小孔进出盒子.试求：



(1) 小球A从第一次进入盒子到第二次进入盒子所经历的时间；

(2) 盒子上至少要开多少个小孔，才能保证小球始终不与盒子接触；

(3) 从小球第一次进入盒子至盒子停止运动的过程中，盒子通过的总路程.

解：

(1) 在电场中运动时 $a_{球}=\frac{Eq}{m}-g=10m/s^2$

$t_1=\frac{2v}{a_{球}}=0.2s$

在盒外竖直上抛时 $t_2=\frac{2v}{g}=0.4s$

$T=t_1+t_2=0.4s$

(2) 小球在电场中运动时

盒的加速度 $a_1=\frac{\mu(Mg+Eq)}{M}=4m/s^2$

$\Delta v_1=a_1t_1=0.8m/s$

小球在盒外运动时

盒的加速度 $a_2=\mu g=2m/s$

$\Delta v_2=a_2t_2=0.4m/s$

∴一个周期内盒速度减小 $\Delta v=\Delta v_1+\Delta v_2=1.2m/s$

∴需经过 $n=\frac{v_B}{\Delta v}=5$ 个周期，盒子停下

小孔数：$2n+1=11$个

(3) 设盒子在第k个周期中初速度为v_k，$(k\geq2)$

$S_k=v_kt_1-\frac{1}{2}a_1t_1^2+(v_k-\Delta v_1)t_2-\frac{1}{2}a_2t_2^2$

则 $S_{k-1}=v_{k-1}t_1-\frac{1}{2}a_1t_1^2+(v_{k-1}-\Delta v_1)t_2-\frac{1}{2}a_2t_2^2$

则 $S_k-S_{k-1}=(v_k-v_{k-1})(t_1+t_2)=-\Delta v(t_1+t_2)=-0.48m$

$S_1=v_1t_1-\frac{1}{2}a_1t_1^2+(v_1-\Delta v_1)t_2-\frac{1}{2}a_2t_2^2=2.12m$

∴$\{S_k\}$是以S_1为首项，$d=-0.48m$为公差的等差数列.

$S_k=S_1+(k-1)d$， ∴末项 $S_5=S_1+4d=0.2m$

总路程 $S=\frac{S_1+S_5}{2}\times5=5.8m$

一组滑轮由一个定滑轮和三个动滑轮组成(图 4.88)，为支持重为G的物体，应以多大的力F施于绳端？每个动滑轮的重均为G_0，绳子重力和绳子与滑轮间的摩擦力均可不计. 试对n个动滑轮的情况做出推论.

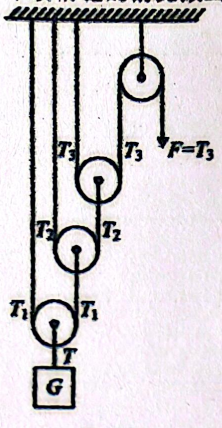


图 4.88

解：构造等比数列

$$T_n=\frac{1}{2}T_{n-1}+\frac{1}{2}G_0$$

$$\Rightarrow T_n-G_0=\frac{1}{2}(T_{n-1}-G_0)$$

$$T_1-G_0=\frac{1}{2}G-\frac{1}{2}G_0$$

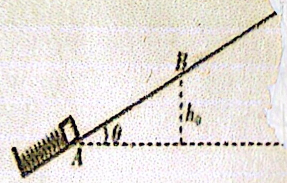
$\therefore \{T_n-G_0\}$ 是以 $\frac{1}{2}(G-G_0)$ 为首项

$q=\frac{1}{2}$ 的等比数列

$$T_n-G_0=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}(G-G_0)$$

$$\Rightarrow T_n=\frac{G}{2^n}+G_0\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

如图，一劲度系数很大的轻弹簧一端固定在倾角$\theta=30^\circ$的斜面底端，将弹簧压缩至A点锁定，然后将一质量为m的小物块紧靠弹簧放置，物块与斜面间动摩擦因数$\mu=\frac{\sqrt{3}}{6}$.解除弹簧锁定，物块恰能上滑至B点，A、B两点的高度差为h_0，已知重力加速度为g，斜面足够长



(1)求弹簧锁定时具有的弹性势能E_p；

(2)若每当物块离开弹簧后就将弹簧压缩到A点并锁定物块返回A点时立刻解除锁定.求物块从A到B的时间t_1与从B返回到A的时间t_2之比(第一次)

(3) 求物块到达的第n个最高点高度h_n，

(4) 求物块所能到达的最大高度h_m

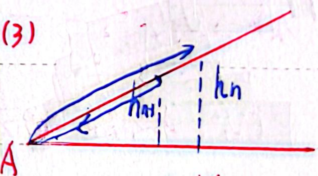
解：(1) $E_p=mgh_0+\mu mg\cos\theta\cdot\frac{h_0}{\sin\theta}$

$$=\frac{3}{2}mgh_0$$

(2) $\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\mu\cos\theta)g\,t_1^2=S_{AB}\\ \frac{1}{2}(1-\mu\cos\theta)g\,t_2^2=S_{AB}\end{cases}\Rightarrow \frac{t_1}{t_2}=\sqrt{\frac{1-\mu\cos\theta}{1+\mu\cos\theta}}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(3)



研究物块从 h_{n-1} 到 h_n

每次物块回到 A 点，

弹簧都会输入能量 E_p

$$mgh_{n-1}-\mu mg\cos\theta\frac{h_{n-1}}{\sin\theta}+E_p-\mu mg\cos\theta\frac{h_n}{\sin\theta}=mgh_n$$

整理得 $h_{n-1}+3h_0=3h_n \Rightarrow h_n-\frac{3}{2}h_0=\frac{1}{3}\left(h_{n-1}-\frac{3}{2}h_0\right)$

$\therefore \{h_n-\frac{3}{2}h_0\}$ 是以 $h_1-\frac{3}{2}h_0=-\frac{1}{2}h_0$ 为首项，公比 $q=\frac{1}{3}$ 的等比数列

$$h_n-\frac{3}{2}h_0=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}h_0\right)\Rightarrow h_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{2}h_0\right)+\frac{3}{2}h_0$$

(4)足够长时间后，上升的最大高度是h_m，则由功能关系，来回克服阻力做的功等于补充的弹性势能：

$$2f\bullet\frac{h_m}{\sin\theta}=E_P$$

解得：$h_m=\frac{3}{2}h_0$

也可以对 (3) 中所得通式取极限.

【例题 5-9】 在一光滑水平长直轨道上，等距离地放置足够多的完全相同的长方形木块，木块质量均为 m，木块依次编排，如图 5-例 9 所示。

在木块 1 之前放置一个质量 $M=4m$ 的大木块，它离木块 1 的间距，与各相邻小木块的间距相同，均为 l。开始，系统中各木块均静止，而后以一恒力 F 沿轨道方向作用在大木块 M 上，一路上与各木块相碰撞，设所有的碰撞都是完全非弹性的。问：第几块小木块被碰撞之前瞬间，大木块及与之结合的各小木块会达到整个过程中的最大速度？此速度为多大？

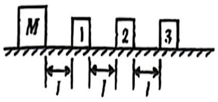


图 5-例 9

袁子轩

能量恢复系数

解：设某时刻整个物块质量为 nm，速度为 v_n，动能为 E_{kn}

下一次碰撞后形成的新物块质量为 $(n+1)m$，速度为 v_{n+1}，动能为 E_{kn+1}

则 $nmv_n=(n+1)mv_{n+1} \Rightarrow v_{n+1}=\frac{n}{n+1}v_n$

$E_{kn}=\frac{1}{2}nmv_n^2 \qquad E_{kn+1}=\frac{1}{2}(n+1)mv_{n+1}^2$

则 $\frac{E_{kn+1}}{E_{kn}}=\frac{n}{n+1}$，定义为能量恢复系数，本题中能量源于各段 Fl

则第 $n-3$ 个小木块被碰撞前瞬间，整体质量为 nm，总能量为

$$\left(Fl\cdot\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\right)+\left(Fl\cdot\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\right)+\cdots+\left(Fl\cdot\frac{n-1}{n}\right)+Fl$$

$$=Fl\cdot\frac{4}{n}+Fl\cdot\frac{5}{n}+\cdots+Fl\cdot\frac{n-1}{n}+Fl$$

$$=\frac{Fl}{n}(4+5+6+\cdots+n-1+n)=\frac{Fl(n+4)(n-3)}{2n}=\frac{1}{2}nmv^2$$

$$\Longrightarrow v=\sqrt{\frac{Fl(n+4)(n-3)}{mn^2}}$$

令 $f(n)=\frac{(n+4)(n-3)}{n^2}=\frac{-12}{n^2}+\frac{1}{n}+1$

二次函数，当 $\frac{1}{n}=\frac{1}{24}$ 即 $n=24$ 时，速度最大

∴ 第 21 块小木块被碰之前瞬间，速度最大

$$v_{max}=\sqrt{\frac{49Fl}{48m}}$$

雨滴在穿过云层的过程中，不断与漂浮在云层中的小水珠相遇并结合为一体，其质量逐渐增大.现将上述过程简化为沿竖直方向的一系列碰撞.已知雨滴的初始质量为m_0，初速度为v_0，下降距离l后与静止的小水珠碰撞且合并，质量变为m_1.此后每经过同样的距离l后，雨滴均与静止的小水珠碰撞且合并，质量依次变为m_2、$m_3 \dots m_n \dots$(设各质量为已知量)。不计空气阻力.

(1)若不计重力，求第n次碰撞后雨滴的速度v_n；

(2)若考虑重力的影响，a.求第1次碰撞前、后雨滴的速度v_1和v_1'；b.求第n次碰撞后雨滴的动能$\frac{1}{2}m_n v_n'^2$.

解：

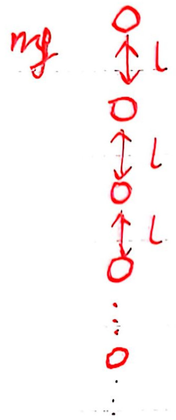
(1) $m_0 v_0 = m_n v_n \Rightarrow v_n = \frac{m_0 v_0}{m_n}$

(2) a: $mgl = \frac{1}{2}m_0 v_1^2 - \frac{1}{2}m_0 v_0^2$

$\Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gL}$

b: 与背面题同理，采用能量恢复系数

本题中能量恢复系数 $Y = \frac{m_{n-1}}{m_n}$



$$\left(\frac{1}{2}m_0 v_0^2 + m_0 gL\right)\cdot\left(\frac{m_0}{m_1}\cdot\frac{m_1}{m_2}\cdots\frac{m_{n-1}}{m_n}\right)$$

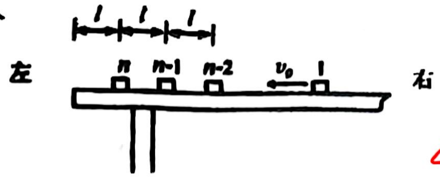
$$+\ m_1 gl\cdot\left(\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{m_2}{m_3}\cdots\frac{m_{n-1}}{m_n}\right) + \cdots\cdots$$

$$+\ m_{n-1} gl\cdot\left(\frac{m_{n-1}}{m_n}\right)$$

$$= \frac{m_0^2 v_0^2}{2m_n} + m_0 gl\cdot\frac{m_0}{m_n} + m_1 gl\cdot\frac{m_1}{m_n} + \cdots + m_{n-1} gl\cdot\frac{m_{n-1}}{m_n}$$

$$= \frac{m_0^2 v_0^2}{2m_n} + \frac{gl}{m_n}\sum_{i=0}^{n-1} m_i^2$$

如图所示，n个相同的木块（可视为质点），每块的质量都是m，



从右向左沿同一直线排列在水平桌面上，相邻木块间的距离均为l，第n个木块到桌边的距离也是l，木块与桌面间的动摩擦因数为μ.开始时，第1个木块以初速度v_0向左滑行，其余所有木块都静止，在每次碰撞后，发生碰撞的木块都粘在一起运动.最后第n个木块刚好滑到桌边而没有掉下.

(1)求在整个过程中因碰撞而损失的总动能.

(2)求第i次$(i \leqslant n-1)$碰撞中损失的动能与碰撞前动能之比.

(3)若$n=4$，$l=0.10m$，$v_0=3.0m/s$，重力加速度$g=10m/s^2$，求μ的数值.

解：(1) 摩擦力做功损失的动能

$$\Delta E_{k1} = \mu mgl + 2\mu mgl + \cdots + n\mu mgl = \frac{n(n+1)\mu mgl}{2}$$

因碰撞损失的动能

$$\Delta E_{k2} = E_{k0} - \Delta E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{n(n+1)\mu mgl}{2}$$

(2) $\frac{1}{i+1}$ $(i \leqslant n-1)$

(3) 考察袁子轩能量恢复系数Y

与前几个题不同，本题并没有恒力F做正功，而是各段摩擦力做负功。但仍然可以使用Y解题，可以理解为输入负能量。

碰完A后的动能 $E_{kn} = (\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgl)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n} - 2mgl\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}$

$$- (n-1)mgl\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{mv_0^2}{2n} - \left[\frac{\mu mgl}{n} + \frac{4\mu mgl}{n} + \frac{9\mu mgl}{n} + \cdots + \frac{(n-1)^2\mu mgl}{n}\right]$$

$$= \frac{mv_0^2}{2n} - \frac{\mu mgl}{n}\left[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\right]$$? 漏了一项？

$$= \frac{mv_0^2}{2n} - \frac{\mu mgl(n-1)n(2n-1)}{n\times 6} = \frac{mv_0^2}{2n} - \frac{\mu mgl(n-1)(2n-1)}{6}$$

当$n=4$时

$$E_{k4} - 4\mu mgl = 0$$

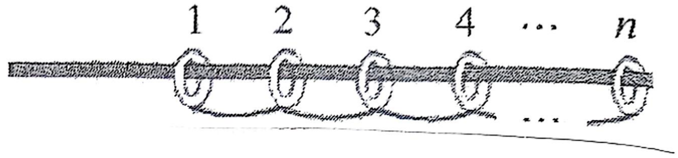
代入数据 解得 $\mu=0.15$

15．(20 分)某根水平固定的长滑竿上有 $n(n\geqslant 3)$个质量相同的滑扣(即可以滑动的圆环)，每相邻的两个滑扣(极薄)之间有不可伸长的柔软轻质细线相连，细线长度均为 L，滑扣在滑竿上滑行的阻力大小恒为滑扣对滑竿正压力大小的μ倍。开始时所有滑扣可近似地看成挨在一起(但未相互挤压)；今给第 1 个滑扣一个初速度使其在滑竿上开始向左滑行(平动)；在滑扣滑行的过程中，前、后滑扣之间的细线拉紧后都以共同的速度向前滑行，但最后一个(即第 n 个)滑扣固定在滑竿边缘。已知从第 1 个滑扣开始的$(n-1)$个滑扣相互之间都依次拉紧，继续滑行距离 $l(0<l<L)$后静止，且所有细线拉紧过程的时间间隔极短。求

(1)滑扣 1 的初速度的大小；

(2)整个过程中克服摩擦力所做的功；

(3)整个过程中仅仅由于细线拉紧引起的总动能损失。



解：本题与背面题完全一样，只是情境不同而已

(1) $\frac{1}{2}mv_0^2\cdot\frac{1}{n-1}-\mu mgL\frac{1}{n-1}-2\mu mgL\frac{2}{n-1}-\cdots-(n-2)\mu mgL\frac{n-2}{n-1}-(n-1)\mu mgl=0$

$\frac{1}{2}mv_0^2=(n-1)\mu mgl+\frac{\mu mgL}{n-1}\left[1^2+2^2+\cdots+(n-2)^2\right]$

$\Longrightarrow v_0=\sqrt{\left[\frac{(n-2)(2n-3)}{3}L+2(n-1)l\right](n-1)\mu g}$

(2) $W=\mu mgL(1+2+3+\cdots+n-2)+\mu(n-1)mgl$

$=\left[\frac{(n-2)}{2}L+l\right](n-1)\mu mg$

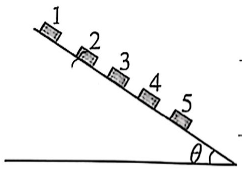
(3) $\Delta E=E_{k0}-W=\left[\frac{(n-2)(n-3)}{3}L+(n-2)l\right](n-1)\mu mg$

[山东济南十一校 2022 开学考]如图所示，有 5 个可视为质点的物块 1、2、3、4、5 放在倾角为 θ 的足够长斜面上，其中物块 1 的质量为 m，物块 2、3、4、5 的质量均为 $2m$，物块 1 与斜面间光滑，其他物块与斜面间动摩擦因数 $\mu=\tan\theta$. 物块 2、3、4、5 的间距均为 L，物块 1、2 的间距为 $\frac{9}{8}L$. 开始时用手固定物块 1，其余各物块都静止在斜面上. 现在释放物块 1，使其自然下滑并与物块 2 发生碰撞，接着陆续发生其他碰撞. 假设各物块间的碰撞时间极短且都是弹性碰撞，最大静摩擦力等于滑动摩擦力，重力加速度为 g. 求：

(1) 物块 1、2 第一次碰后瞬间的速度大小；

(2) 从释放物块 1 到物块 1、2 发生第五次碰撞所需时间；

(3) 从释放物块 1 到物块 1、2 发生第五次碰撞，所有物块与斜面间摩擦产生的总热量.



解

(1) 撞前 1 的速度 $v_0=\frac{3}{2}\sqrt{gL\sin\theta}$

$v_1=\frac{1}{2}\sqrt{gL\sin\theta}$ $\quad v_2=\sqrt{gL\sin\theta}$

(2) 第 1 次碰后，对物块 2 根据牛顿第二定律有 $2mg\sin\theta-\mu\cdot 2mg\cos\theta=2ma_1$，解得 $a_1=0$，物块 2 将以速度 $v_{21}=\sqrt{gL\sin\theta}$ 向下匀速运动直到与物块 3 碰撞，物块 2、3 质量相等且发生弹性碰撞，碰后交换速度，物块 3 继续向下匀速运动与物块 4 碰撞后交换速度，物块 4 继续向下运动与物块 5 碰撞后交换速度，物块 5 以速度 $\sqrt{gL\sin\theta}$ 向下匀速运动.

假设物块 2 静止后物块 1 再与之发生第 2 次碰撞，对物块 1 分析有 $mgL\sin\theta=\frac{1}{2}mv_{02}^2-\frac{1}{2}mv_{11}^2$，

解得 $v_{02}=\frac{3}{2}\sqrt{gL\sin\theta}$，

在斜面上由牛顿第二定律有 $mg\sin\theta=ma_2$，则物块 1 的加速度 $a_2=g\sin\theta$，运动时间 $t_1=\frac{v_{02}-v_{11}}{a_2}=2\sqrt{\frac{L}{g\sin\theta}}$. 对物块 2 分析，$t_2=\frac{L}{v_{21}}=\sqrt{\frac{L}{g\sin\theta}}$，由于 $t_1>t_2$，故假设成立. 因为 $v_{02}=v_{01}$，所以第 2 次碰撞将重复第 1 次的运动，物块 2 以速度 $v_{21}=\sqrt{gL\sin\theta}$ 向下匀速运动，设物块 1 从释放到第 1 次碰撞用时为 t_0，则 $t_0=\frac{v_{01}}{a_2}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{L}{g\sin\theta}}$，第 1 次到 2 次，第 2 次到 3 次，第 3 次到 4 次碰撞用时均为 $t_1=2\sqrt{\frac{L}{g\sin\theta}}$. 第 4 次到第 5 次碰撞用时为 t_3，$v_{21}t_3=v_{11}t_3+\frac{1}{2}a_2t_3^2$，$t_3=3\sqrt{\frac{L}{g\sin\theta}}$. 从释放物块 1 到物块 1、2 发生第五次碰撞所需时间 $t=t_0+3t_1+t_3=\frac{21}{2}\sqrt{\frac{L}{g\sin\theta}}$.

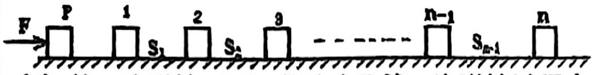
(3) 每次 2 获得速度之后，由于之后的碰撞速度被传递了，且各物块相同。所以等效于每次碰撞后，都有一个 $2m$ 的物块以该速度在该斜面上开始一直匀速直线运动。

所有该等效物块的速度都是 $\sqrt{gL\sin\theta}=v$

所有等效物块的总路程 $s=v\left[(t-t_0)+(t-t_0-t_1)+(t-t_0-2t_1)+(t-t_0-3t_1)\right]=24L$

$Q=\mu 2mg\cos\theta s=48mg\sin\theta L$

在光滑的水平面上沿直线按不同的间距依次排列着质量均为m的滑块，1、2、3、…$(n-1)$、n，滑块P的质量也为m. P从静止开始在大小为F的水平恒力作用下向右运动，经时间T与滑块1碰撞，碰撞后滑块便粘连在一起.以后每经过时间T就与下一滑块碰撞一次，每次碰撞后均粘连在一起，每次碰撞时间极短，每个物块都可简化为质点.求



(1) 第一次碰撞后瞬间的速度及第一次碰撞过程中产生的内能；

(2) 发生第n次碰撞后瞬间的速度v_n为多大；

(3) 第$n-1$个滑块与第n个滑块间的距离s_{n-1}.

解：

本题看似与前面利用能量恢复系数的题很像，其实完全不一样。这个题利用的是动量定理，非常简单。

(1) $FT = mV_0 \Rightarrow V_0 = \frac{FT}{m}$

$mV_0 = 2mV_1$

$\Delta E_k = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}\cdot 2mV_1^2 = \frac{F^2T^2}{4m}$

(2) $nFT = (n+1)mV_n \Rightarrow V_n = \frac{nFT}{(n+1)m}$

(3) $V_{n-1} = \frac{(n-1)FT}{nm}$

$S_{n-1} = V_{n-1}T + \frac{1}{2}\cdot\frac{F}{nm}T^2 = \frac{(2n-1)FT^2}{2nm}$

如图所示，在一光滑的长直轨道上，放着若干完全相同的小木块，每个小木块的质量均为m，且体积足够小均能够看成质点，其编号依次为0、1、2、…n…，相邻各木块之间的距离分别记作：l_1，l_2，…l_n….在所有木块都静止的初始条件下，有一个沿轨道方向水平向右的恒力F持续作用在0号小木块上，使其与后面的木块连接发生碰撞，假如所有碰撞都是完全非弹性的（碰后合为一体共速运动）。求：

在已知$F=10N$，$l_1=1m$条件下，保持正在运动的物块系统在每次碰撞前的瞬间其总动能都为一个恒定的数值。求从初始到第n个物块开始运动时，整个系统产生的热量（由碰撞产生）为多少？

解：设第$n-1$号木块与第n号木块距离为l_n

根据题中约束条件，设碰完第$n-1$号木块后整体总动能为$E_{k_{n-1}}$

则有 $\frac{n-1}{n}E_{k_{n-1}} + Fl_n = E_{k_n} = E_{k_{n-1}}$

$\Rightarrow l_n = \frac{E_{k_{n-1}}}{Fn}$

而 $E_{k_{n-1}} = E_{k_1} = Fl_1$

$\therefore l_n = \frac{l_1}{n} = \frac{1}{n}$ m

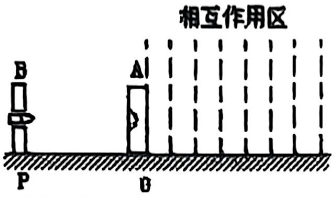
碰完1后，F所做的功一部分弥补碰1时损失的动能，其余全部转化为后来碰撞产生的热量

$Q = Fl_2 + Fl_3 + \cdots + Fl_n$

$= \frac{Fl_1}{2} + \frac{Fl_1}{3} + \cdots + \frac{Fl_1}{n}$

$= 10\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ (J)

如图所示，质量$M=0.40$kg的靶盒A位于光滑水平导轨上，开始时静止在O点，在O点右侧有范围很广的“相互作用区域”，如图中的虚线区域.当靶盒A进入相互作用区域时便有向左的水平恒力$F=20N$作用.在P处有一固定的发射器B，它可根据需要瞄准靶盒每次发射一颗水平速度$V_0=50m/s$、质量$m=0.10$kg的子弹，当子弹打入靶盒A后，便留在盒内，碰撞时间极短.若每当靶盒A停在或到达O点时，就有一颗子弹进入靶盒A内，求：



（1）当第一颗子弹进入靶盒A后，靶盒A离开O点的最大距离.

（2）当第三颗子弹进入靶盒A后，靶盒A从离开O点到又回到O点所经历的时间

（3）当第100颗子弹进入靶盒时，靶盒已经在相互作用区中运动的时间和.

解：

(1) $mv_0=(M+m)v_1$

$a=\frac{F}{M+m}$

$x=\frac{v_1^2}{2a}=1.25\ m$

(2) 靶盒A第一次进入相互作用区时，动量为子弹射出时的动量，返回O点时动量不变，大小相反

此时第二颗子弹射入A，根据动量守恒

$mv_0-mv_0=0$，盒A停在O点，

然后第三颗子弹射入A，……如此往复

设第n颗子弹射入A后，总质量为M'，速度为v'（n为奇数）

则 $mv_0=M'v'$ ①，之后在相互作用区运动时间$\Delta t=\frac{2v'}{a'}$ ②

其中 $a'=\frac{F}{M'}$ ③　　联立①②③ ⇒ $\Delta t=0.5s$

∴ 不管射入了多少颗子弹，盒每次在相互作用区运动的时间都是$\Delta t=0.5s$

(3) 盒A在相互作用区共运动了50次。$t=50\Delta t=25s$