

真空中的光线偏折与由球对称质量引起的微引力透镜效应

Manifold

2025 年 8 月 8 日

摘 要

本文详细探讨了真空中的光线偏折现象以及由球对称质量引起的微引力透镜效应。首先，通过施瓦西坐标系定义了静态球对称时空的度规，并推导出类光测地线的方程。在此基础上，求解了光线在施瓦西度规下的偏折角，并给出了广义相对论对星光偏折角的定量预言。接着，本文进一步讨论了球对称小质量 (恒星量级) 的引力透镜方程，定义了爱因斯坦半径，并推导出透镜方程的最终表达式。最后，分析了不同位置源星体的成像情况，包括源星体位于观测者与透镜星体连线上的情况、偏离连线但仍处于临界源平面内的情况、部分超出临界源平面的情况以及完全超出临界源平面的情况。通过这些分析，本文为理解引力透镜效应及其在天文学中的应用提供了坚实的理论基础。

关键词：真空中的光线偏折；施瓦西坐标系；类光测地线；微引力透镜效应；爱因斯坦半径；成像情况

1 真空中的光线偏折

1.1 施瓦西坐标系

在进行讨论之前，我们需要先定义出坐标系。对于静态球对称时空 (M, g_{ab}) ，只有一个超曲面正交的类时 Killing 矢量场 $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$ ，且其等度规群中与 $SO(3)$ 同构的子群 G_3 的所有轨道球面与 ξ^a 正交。因此 t 坐标可以用 ξ^a 的积分曲线的参数 t 来定义。现在只须说明如何定义等 t 面 Σ 上的 3 维局域坐标系 $\{x^1, x^2, x^3\}$ 。

具体地，设 Σ 是与 ξ^a 正交的超曲面， x^1 可用轨道球面的半径定义：每一点的 x^1 就定义为它所在的轨道球面的半径 r 。 x^2 和 x^3 则可用如下的“携带法”定义：设 \mathcal{S} 是 Σ 中的某一轨道球面，则它是 Σ 中的 (2 维) 超曲面，其上有切于 Σ 的归一法矢量场 n^a 。由于过 Σ 的任一点都有一个躺在 Σ 上的轨道球面， n^a 是定义在 Σ 上的矢量场，其积分曲线处处与轨道球面正交。在 \mathcal{S} 上任选球坐标 θ, φ ，就可用 n^a 的积分曲线把这两个坐标“携带”到

其他轨道球面 (即令每条积分曲线上各点的 θ, φ 值都等于该线与 \mathcal{S} 交点的 θ, φ 值), Σ 上便有局域坐标系 $\{r, \theta, \varphi\}$ 。

1.2 施瓦西真空度规

对于真空静态球对称时空, 其度规在施瓦西坐标系下可以写作

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1)$$

式中的 M 就称为星体的质量。

1.3 施瓦西度规下的类光测地线

以 $\gamma(\tau)$ 表示类时测地线。欲求 $\gamma(\tau)$ 的参数表达式 $x^\mu(\tau)$, 一般应求解如下微分方程组:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (2)$$

由于各未知函数 $x^\mu(\tau)$ 及其导数在各方程中互相耦合, 求解一般并不简单。但可以证明, 总可以这样选择施瓦西坐标, 使 $\gamma(\tau)$ 的 θ 值永为 $\pi/2$, 在这样的施瓦西坐标下, 测地线 $\gamma(\tau)$ 的参数表达式为

$$t = t(\tau), \quad r = r(\tau), \quad \theta = \pi/2, \quad \varphi = \varphi(\tau). \quad (3)$$

设 $U^a \equiv (\partial/\partial\tau)^a$ 为 $\gamma(\tau)$ 的切矢, 定义 $\kappa := -g_{ab}U^aU^b$, 则 $\kappa = 0$ (对类光测地线), 且

$$\begin{aligned} -\kappa &= g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b = g_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + g_{11} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + g_{22} \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + g_{33} \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2, \end{aligned} \quad (4)$$

其中最后一步用到 $\theta = \pi/2$ 。注意到 $(\partial/\partial t)^a$ 和 $(\partial/\partial\varphi)^a$ 是 Killing 矢量场, 因此

$$E := -g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b = -g_{00} \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (5)$$

$$L := g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b = g_{33} \frac{d\varphi}{d\tau} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}, \quad (6)$$

在测地线 $\gamma(\tau)$ 上是常量。再把式(5)、(6)代入式(4)得

$$-\kappa = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2}. \quad (7)$$

这方程只含未知函数 $r(\tau)$ 及其 1 阶导数，原则上可以求解。把求得的 $r(\tau)$ 代入方程(5)、(6)，原则上便可解出未知函数 $t(\tau)$ 和 $\varphi(\tau)$ ，从而得到 $\gamma(\tau)$ 的参数表达式。

令 $\kappa = 0$ (类光测地线)，将式 (7)除以 $(d\varphi/d\tau)^2$ ，利用式(6)经计算得

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - \frac{E^2 r^4}{L^2} + r^2 \left(1 + \frac{r^2}{L^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0. \quad (8)$$

仍设 $\mu \equiv r^{-1}$ ，则上式化为

$$\left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2 + \mu^2 = \frac{E^2}{L^2} + 2M\mu^3. \quad (9)$$

对 φ 求导得

$$\frac{d^2\mu}{d\varphi^2} + \mu = 3M\mu^2. \quad (10)$$

当 $M = 0$ 时 (平直时空)，方程(10)的通解为

$$\mu(\varphi) = \frac{1}{l} \sin(\varphi + \alpha), \quad (11)$$

其中 l 和 α 为积分常数。设 $\varphi = 0$ 时光子在无限远，即 $\mu(0) = 1/r(0) = 0$ ，则 $\alpha = 0$ ，故

$$\mu(\varphi) = \frac{1}{l} \sin \varphi. \quad (12)$$

这是 2 维欧氏空间中用极坐标 $\{r, \varphi\}$ 表示的直线方程。要看出这点，取 $r = 0$ 为笛卡儿坐标系 $\{x, y\}$ 的原点，则

$$x = r \cos \varphi, \quad (13)$$

$$y = r \sin \varphi = \frac{1}{\mu} \sin \varphi = l = \text{常数}, \quad (14)$$

其中第三步用到式(12)。可见光子的空间轨迹是与原点距离为 l 的直线 (见图1)。注意， r 和 φ 沿该直线都在变化 (不变的是 y)。由于 r 的取值范围为 $(0, \infty)$ ，式(13)表明 x 的取值范围是 $(-\infty, \infty)$ 。要讨论星光偏折当然不能取 $M = 0$ 。但因 $M/r \ll 1$ ，求一级近似解 $\mu_1(\varphi)$ 便足够。把式(12)的 $\mu(\varphi)$ 看作零级近似解 $\mu_0(\varphi)$ 代入式(10) 右边便得 $\mu_1(\varphi)$ 满足的微分

方程

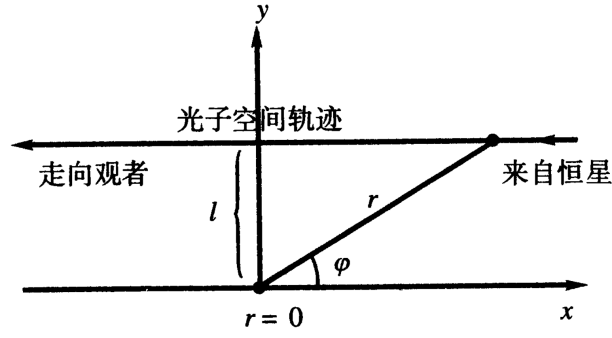


图 1: 平时空中光子的空间轨迹

图片来源: 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论 (上册·第二版), 2006, 320. [1]

$$\frac{d^2\mu_1}{d\varphi^2} + \mu_1(\varphi) = \frac{3M}{l^2} \sin^2 \varphi. \quad (15)$$

不难验证下式是方程(15)的解

$$\mu_1(\varphi) = \frac{1}{l} \sin \varphi + \frac{M}{l^2} (1 - \cos \varphi)^2. \quad (16)$$

由上式知 $\mu_1(0) = 0$, 即 $r(0) = \infty$, 说明光子的 φ 坐标为零时离星体无限远 (远方恒星的 r 可看作 ∞), 但式(16)与(12) 的不同表明光子经过星体附近又离星体而去时的“去向”不同: 由式(12) 知 $\mu(\pi) = 0$, 表明光子远离“星体” (这“星体”的 $M = 0$) 而去时 φ 坐标为 π ; 而

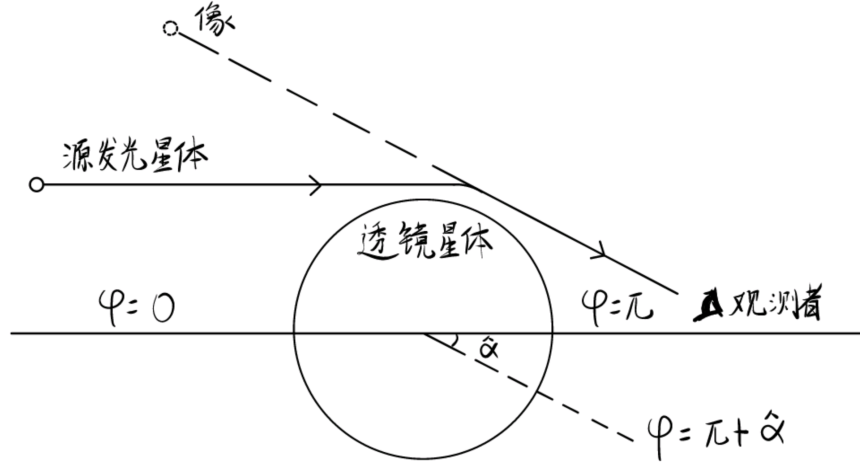


图 2: 星体使时空弯曲, 星光的空间轨迹受偏折, 偏折角 $\hat{\alpha}$ 明显夸大

由式(16)却有 $\mu_1(\pi) \neq 0$, 我们预期它沿一个与 π 略有差别的方向 $\pi + \hat{\alpha}$ 远离星体而去 (见图 2), 即 $\mu_1(\pi + \hat{\alpha}) = 0$ 。为求偏折角 $\hat{\alpha}$, 把 $\varphi = \pi + \hat{\alpha}$ 代入式(16)并利用 $\mu_1(\pi + \hat{\alpha}) = 0$ 得

$$0 = \mu_1(\pi + \hat{\alpha}) = \frac{1}{l} \sin (\pi + \hat{\alpha}) + \frac{M}{l^2} [1 - \cos (\pi + \hat{\alpha})]^2. \quad (17)$$

$\hat{\alpha}$ 很小导致 $\sin(\pi + \hat{\alpha}) \cong -\hat{\alpha}$, $\cos(\pi + \hat{\alpha}) \cong -1$, 代入上式便得

$$\hat{\alpha} \cong 4M/l. \quad (18)$$

上式表明偏折角 $\hat{\alpha}$ 随 l 的减小而增大。 l 的最小值等于星体半径。补上物理常数 G 和 c 后的式(18)成为

$$\hat{\alpha} \cong 4GM/lc^2, \quad (19)$$

这就是广义相对论对星光偏折角的定量预言。

2 球对称小质量的引力透镜方程

注意,我们所说的小质量是指恒星量级。现在须明确的是我们应如何研究像的位置。具体来说,在每个截切平面内,我们只须考虑能够到达观测者的那一束“窄”平行光的轨迹,而不必担心其他方向的光束的像点,因为我们的望远镜在宇观下直径太过小。形象的表示见图3。

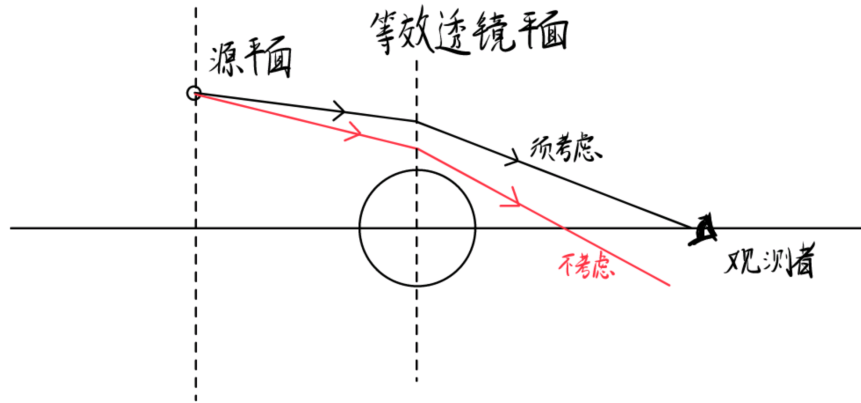


图 3: 不必考虑能观测的平行光之外的光

图3中黑色光线的反向延长线与源平面的交点即可视为像的位置。将引力透镜系统沿某一平面切出,得到示意图,如图 4 所示。我们规定 D_d 为透镜天体到观测者的角直径距离, D_s 为源平面和像平面到观测者的角直径距离, D_{ds} 为像平面和源平面之间的角直径距离 ($D_s \neq D_d + D_{ds}$), β 为源与观测者连线相对光轴的夹角, $\hat{\alpha}$ 为光线的偏折角, θ 为光线到达透镜平面的位置与观测者连线相对光轴的夹角。

由图 3 中所展示的几何关系可以得到如下等式

$$D_s \theta = D_s \beta + D_{ds} \hat{\alpha} \quad (20)$$

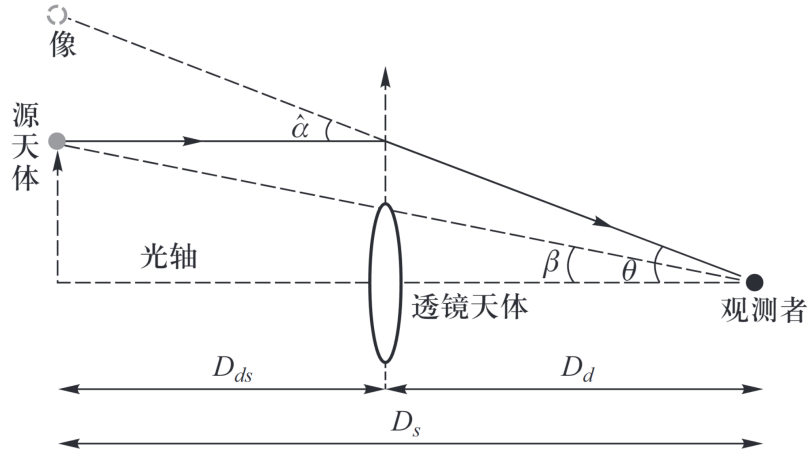


图 4: 引力透镜系统示意图

图片来源: 陈品健, 刘海程, 李向华: 基于坐标变换的引力透镜模拟. 大学物理, 2023, 42, 54^[2]

进一步我们定义约化偏折角 α 为

$$\alpha = \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\alpha} \quad (21)$$

将式(21)代入(20)得到反映源位置 β 和像位置 θ 的方程

$$\beta = \theta - \alpha \quad (22)$$

这就是所说引力透镜的透镜方程。将偏折角 $\hat{\alpha}$ (即式(19)) 代入式(21), 得到

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 l} \frac{D_{ds}}{D_s} = \frac{4GM}{c^2 D_d \theta} \frac{D_{ds}}{D_s}, \quad (23)$$

将式(23)代入式(22), 得到

$$\beta = \theta - \frac{4GM}{c^2 \theta} \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \quad (24)$$

定义爱因斯坦半径 (Einstein radius)

$$\theta_E \equiv \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}}, \quad (25)$$

则

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}. \quad (26)$$

式(26)即为透镜方程的最终表达式。分析该式可知, 若给定源星体、透镜星体和观测者 (即给出 β 和 θ_E), 式(26)成为一个一元二次方程

$$\theta^2 - \beta\theta - \theta_E^2 = 0, \quad (27)$$

其中

$$\Delta = \beta^2 + 4\theta_E^2 > 0, \quad (28)$$

其对应的两个根为

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right), \quad (29)$$

由于 $\Delta > 0$ 时，两个根均为实根，这意味着可以有两束来自同一源星体的光经引力透镜作用到达观测者，如图5所示。

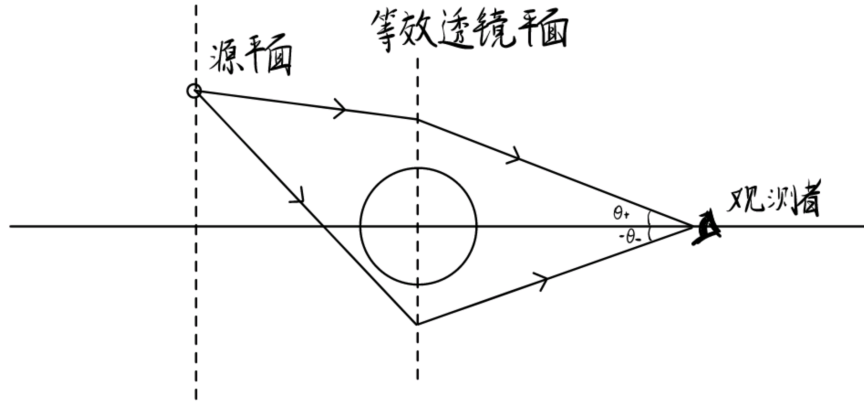


图 5: 当 $\Delta > 0$ 时有两束来自同一源星体的光经引力透镜作用到达观测者

但注意，我们前面的计算没有考虑某些角度的光会被透镜星体挡住的情况。若考虑透镜星体的半径 R ，则须对 β 作出一些限制，如图6所示。

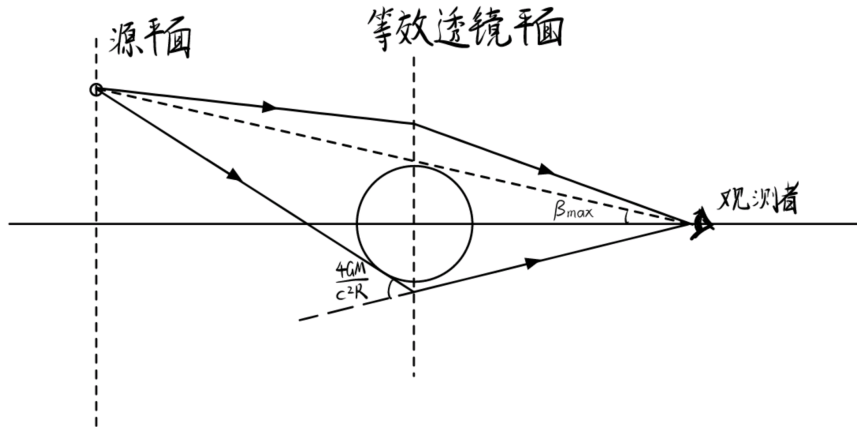


图 6: 当 β 过于大时，源星体发射出的光会被透镜星体直接挡住

可见， β 越大，光线就越难以达到观测者，因此须对 β 作出如下限制

$$-\beta_{\max} \leq \beta \leq \beta_{\max}, \quad (30)$$

其中 β_{\max} 是满足图6中情况的角度。一旦 β 不处于上述范围，可能就只有一束光甚至没有光到达观测者。你可能会想，我们只需假设透镜星体的质量足够大，就可以避免这一问题。实际上，这是不合理的，因为式(19)的前提就是偏移角不太大，一旦假设透镜星体质量过大，导致偏折角过大，我们就要重新计算前面的各种结果。

3 球对称小质量的引力透镜对不同位置源星体的成像情况

我们前面已经详尽地讨论了某一个平面内的光的成像情况，将其应用到整个源平面，即可得到实际的成像情况，其中很重要的一点就是考虑(30) 中对 β 的限制。具体地，源星体因位置不同会成如图7所示的 4 种性质的像^[3]。

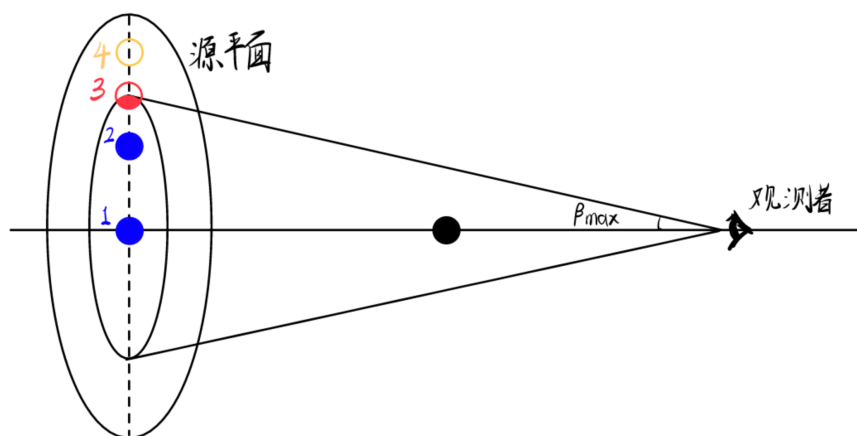


图 7: 源星体的 4 种位置

3.1 源星体位于观测者与透镜星体连线上的情况

显然，成像应该是轴对称的。方便起见，仍截取一过对称轴的平面研究，如图8所示。

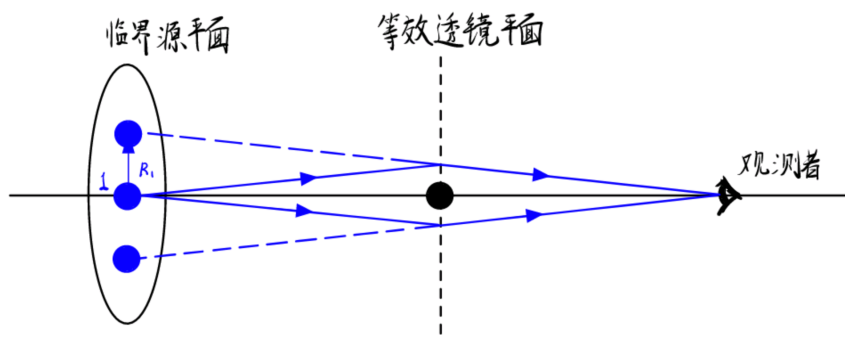


图 8: 源星体位于对称轴上的情况

显然，在此截面内，会成两个关于中轴对称的像。但千万不要认为最终成像结果就只

有这两个点。因为在每个过对称轴的截面内都会如此成像，因此最终观察者看到的应该是图中的半径为 R_1 的圆周，如图9所示。

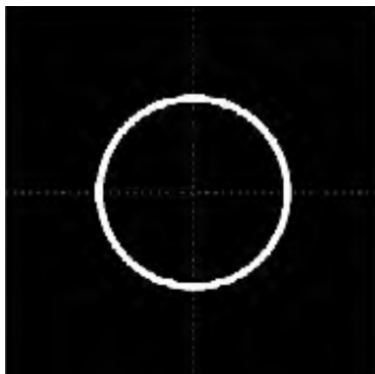


图 9: 源星体位于对称轴上的成像示意

图片来源: 陈品健, 刘海程, 李向华: 基于坐标变换的引力透镜模拟. 大学物理, 2023, 42, 54^[2]

3.2 源星体偏离观测者与透镜星体的连线，但仍处于临界源平面内的情况

此时实际上仍然能成关于中轴对称的像，但注意，现在并不是所有的过中轴的截面内都能成像，而是只有过源星体的那部分可以，如图10所示。

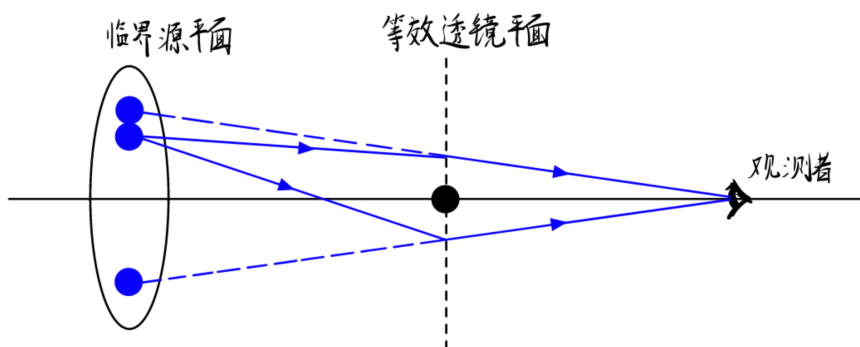


图 10: 源星体偏离对称轴但仍在临界源平面内的情况

显然地，此时成的像应该如图11所示。

3.3 源星体偏离观测者与透镜星体的连线且部分超出临界源平面的情况

也就是图7中的第三种情况，此时源星体的一部分能够在两侧成像，一部分只能在一侧成像，因此相比第二种情况，只是两部分像的亮度不同且像的长度均变短，如图12所示。

3.4 源星体偏离观测者与透镜星体的连线且完全超出临界源平面的情况

显然只能成一个像，如图13所示。

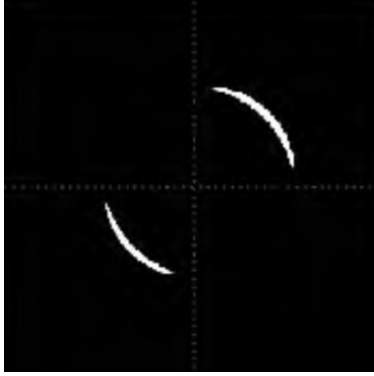


图 11: 源星体偏离对称轴但仍在临界源平面内的成像示意
 图片来源: 陈品健, 刘海程, 李向华: 基于坐标变换的引力透镜模拟. 大学物理, 2023, 42, 54^[2]

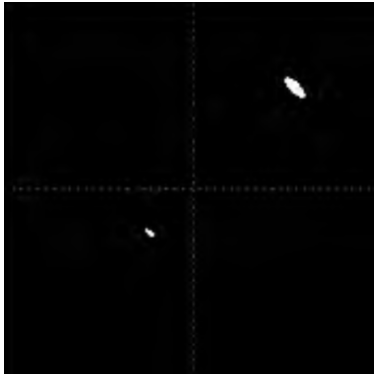


图 12: 源星体偏离对称轴且部分超出临界源平面时的成像示意
 图片来源: 陈品健, 刘海程, 李向华: 基于坐标变换的引力透镜模拟. 大学物理, 2023, 42, 54^[2]

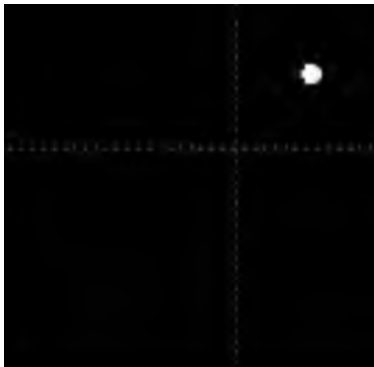


图 13: 源星体偏离对称轴且完全超出临界源平面时的成像示意
 图片来源: 陈品健, 刘海程, 李向华: 基于坐标变换的引力透镜模拟. 大学物理, 2023, 42, 54^[2]

4 结语

本文通过对真空中的光线偏折和球对称质量引起的微引力透镜效应的深入研究，详细探讨了引力透镜方程及其在不同源星体位置下的成像情况。未来的研究可以进一步探索更复杂的引力透镜系统，如非球对称质量分布和多天体系统中的引力透镜效应，以期在更广泛的宇宙学背景下应用这些理论。

另外，感谢朱业峰的文章^[3]，笔者从中获取了许多灵感。

参考文献

- [1] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论上册. 2 版. 北京: 科学出版社, 2006. Print.
- [2] 陈品健, 刘海程, 李向华: 基于坐标变换的引力透镜模拟. 大学物理, 2023, 42, 54.
- [3] 朱业峰: 关于引力透镜现象的分析讨论. 未发表, 2024.