由微分同胚映射诱导的坐标变换

Manifold

日期：2025 年 8 月 8 日

摘　要

本文研究了微分同胚映射及其诱导出的坐标变换。首先基于光滑映射条件下拉回和推前映射的最大延拓，讨论了在一般光滑映射下将场映射为场时遇到的困难。随后，利用微分同胚映射的性质，定义了对任意型张量场的推前和拉回映射，并推导了其具体形式。进一步，分析了微分同胚映射诱导的坐标变换，包括其主动和被动观点，并给出了坐标变换后新坐标的张量分量表达式。最后，通过对比两种观点，验证了其在实用上的等价性。本文的研究为理解洛伦兹变换等物理应用提供了有益的数学基础。

关键词： 微分同胚；坐标变换；张量场；推前映射；拉回映射；主动与被动观点

目录

1　前情提要

利用光滑映射的条件，已经实现了拉回映射和推前映射的最大延拓，如定义 1.1和定义1.2所述。

1.1　光滑映射条件下拉回映射的最大延拓

定义 1.1. 拉回映射可按如下方式延拓至 $\phi^* : \mathscr{F}_N(0,l) \to \mathscr{F}_M(0,l)$：$\forall T \in \mathscr{F}_N(0,l)$，定义 $\phi^* T \in \mathscr{F}_M(0,l)$ 为

$$\begin{gathered}(\phi^* T)_{a_1\cdots a_l}|_p (v_1)^{a_1}\cdots(v_l)^{a_l} := T_{a_1\cdots a_l}|_{\phi(p)}(\phi_* v_1)^{a_1}\cdots(\phi_* v_l)^{a_l}, \\ \forall p \in M, v_1,\cdots,v_l \in V_p.\end{gathered} \tag{1}$$

1.2 光滑映射条件下推前映射的最大延拓

定义 1.2. $\forall p \in M$，推前映射 ϕ_* 可按如下方式延拓至 $\phi_* : \mathscr{T}_{V_p}(k,0) \to \mathscr{T}_{V_{\phi(p)}}(k,0)$ [即 ϕ_* 是把 p 点的 $(k,0)$ 型张量变为 $\phi(p)$ 点的同型张量的映射]：$\forall T \in \mathscr{T}_{V_p}(k,0)$，其像 $\phi_* T \in \mathscr{T}_{V_{\phi(p)}}(k,0)$ 由下式定义：

$$\begin{gathered}(\phi_* T)^{a_1\cdots a_k}(\omega^1)_{a_1}\cdots(\omega^k)_{a_k} := T^{a_1\cdots a_k}(\phi^*\omega^1)_{a_1}\cdots(\phi^*\omega^k)_{a_k},\\ \forall\omega^1,\cdots,\omega^k \in V^*{}_{\phi(p)},\end{gathered} \tag{2}$$

其中 $(\phi^*\omega)_a$ 定义为 $(\phi^*\omega)_a v^a := \omega_a(\phi_* v)^a, \quad \forall v^a \in V_p$。

这一部分不是本文的重点，所有详细的延拓过程在梁老师的书上都很清楚，但为了让后面的内容看起来不是那么无迹可寻，特将上述两定义粘贴于此。

2 微分同胚下对任意型张量场的推前和拉回映射

2.1 光滑映射条件下利用推前映射将场映射为场时遇到的困难

对于任意的流形 M,N，拉回映射 ϕ^* 能把 N 上的 $(0,l)$ 型张量场变为 M 上的同型张量场，是场变为场的映射；而推前映射 ϕ_* 只能把 M 中一点 p 的 $(k,0)$ 型张量变为其像点 $\phi(p)$ 的同型张量。可否将 ϕ_* 延拓为把 M 上的 $(k,0)$ 型张量场变为 N 上的同型张量场的映射？

在一般情况下不能。以矢量场为例。关键在于，给定 M 上一个矢量场 v 后，要定义 N 上的像矢量场 $\phi_* v$ 就要对 N 的任一点 q 定义一个矢量，而这势必涉及 q 点的逆像 $\phi^{-1}(q)$[1]。如果 ϕ 不是到上映射，则 $\phi^{-1}(q)$ 可能不存在，从而无法用 $\phi^{-1}(q)$ 点的 v 作为式 $(\phi_* v)(f) := v(\phi^* f)$ 右边的 v；如果 ϕ 不是一一映射，则逆像 $\phi^{-1}(q)$ 可能多于一点，从而无从确定该用哪一逆像点的 v 作为式 $(\phi_* v)(f) := v(\phi^* f)$ 右边的 v。这暗示，如果 ϕ 只是光滑映射，则 ϕ_* 未必能把场推前为场。

2.2 利用微分同胚要求定义对任意型张量场的推前和拉回映射

然而，如果 $\phi : M \to N$ 是微分同胚映射，则上述困难不复存在，推前映射 ϕ_* 可看作把 M 上 $(k,0)$ 型张量场变为 N 上同型张量场的映射，即 $\phi_* : \mathscr{F}_M(k,0) \to \mathscr{F}_N(k,0)$：

$$(\phi_* T)^{a_1\cdots a_k}|_{\phi(p)}(\omega^1)_{a_1}\cdots(\omega^k)_{a_k} := T^{a_1\cdots a_k}|_p(\phi^*\omega^1)_{a_1}\cdots(\phi^*\omega^k)_{a_k}, \quad \forall p \in M, \omega^i \in V^*{}_{\phi(p)}, \tag{3}$$

再者，由于 ϕ^{-1} 存在而且光滑，其拉回映射 ϕ^{-1*} 把 $\mathscr{F}_M(0,l)$ 映到 $\mathscr{F}_N(0,l)$，这可看作 ϕ 的推前映射 ϕ_*，于是 ϕ_* 又可进一步推广为 $\phi_* : \mathscr{F}_M(k,l) \to \mathscr{F}_N(k,l)$：

$$\begin{aligned}&(\phi_* T)^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\,|_{\phi(p)}\,(\omega_1)_{a_1}\cdots(\omega_k)_{a_k}(v_1)^{b_1}\cdots(v_l)^{b_l}\\ :=&T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\,|_p\,(\phi^*\omega_1)_{a_1}\cdots(\phi^*\omega_k)_{a_k}(\phi^* v_1)^{b_1}\cdots(\phi^* v_l)^{b_l},\\ &\forall p \in M, \omega_i \in V^*_{\phi(p)}, v^j \in V_{\phi(p)},\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $(\phi^* v)^b$ 应理解为 $(\phi_*^{-1} v)^b$。同理，拉回映射也可推广为 $\phi^* : \mathscr{F}_N(k,l) \to \mathscr{F}_M(k,l)$：

$$\begin{aligned}&(\phi^* T)^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}|_p(\omega_1)_{a_1}\cdots(\omega_k)_{a_k}(v_1)^{b_1}\cdots(v_l)^{b_l}\\ :=&T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}|_{\phi(p)}(\phi_*\omega_1)_{a_1}\cdots(\phi_*\omega_k)_{a_l}(\phi_* v_1)^{b_1}\cdots(\phi_* v_l)^{b_l},\\ &\forall p \in M, \omega_i \in V^*_p, v^j \in V_p.\end{aligned} \tag{5}$$

推广后的 ϕ_* 和 ϕ^* 仍为线性映射，而且互逆。

[1] ϕ^* 可把 N 上的场 T 变为 M 上的场 $\phi^* T$，而为了定义 $\phi^* T$ 在 M 的任一点 p 的值，自然要用到 T 在 $\phi(p)$ 点的值。

3 坐标变换

3.1 诱导坐标变换的具体形式

设 $\phi: M \to N$ 是微分同胚，$p \in M$，$\{x^\mu\}$ 和 $\{y^\mu\}$ 分别是 M 和 N 的局部坐标系，坐标域 O_1 和 O_2 满足 $p \in O_1, \phi(p) \in O_2$。于是 $p \in \phi^{-1}[O_2]$。ϕ 为微分同胚保证 M 和 N 维数相等，故 $\{x^\mu\}$ 和 $\{y^\mu\}$ 的 μ 都是从 1 到 n。

微分同胚本是点的变换，但也可等价地看作坐标变换，因为可用 $\phi: M \to N$ 在 $\phi^{-1}[O_2]$ 上定义一组新坐标 $\{x'^\mu\}$ 如下：

$$\forall q \in \phi^{-1}[O_2],\ \text{定义}\ x'^\mu(q) := (\phi^* y^\mu)(q) = y^\mu(\phi(q)). \tag{6}$$

可见微分同胚映射 ϕ 在 p 的邻域 $O_1 \cap \phi^{-1}[O_2]$ 上自动诱导出一个坐标变换 $x^\mu \mapsto x'^\mu$。考虑 N 上的任意标量场 f，$\forall q \in O_1 \cap \phi^{-1}[O_2]$ 有

$$\{\phi_*[(\partial/\partial x'^\mu)^a|_q]\}|_{\phi(q)}(f) = (\partial/\partial x'^\mu)^a|_q(\phi^* f) = (\partial/\partial y^\mu)^a|_{\phi(q)}(f) \tag{7}$$

由于标量场的任意性，可得

$$\phi_*[(\partial/\partial x'^\mu)^a|_q] = (\partial/\partial y^\mu)^a|_{\phi(q)}\,, \tag{8}$$

再考虑 N 上的任意矢量场 v^a，仿照式(4)还可以得到

$$\{\phi_*[(\mathrm{d}x'^\mu)_a\,|_q]\}|_{\phi(q)}(v^a) = (\mathrm{d}x'^\mu)_a\,|_q\,(\phi^* v^a) = (\mathrm{d}y^\mu)_a\,|_{\phi(q)}\,(v^a) \tag{9}$$

由于矢量场的任意性，可得

$$\phi_*[(\mathrm{d}x'^\mu)_a\,|_q] = (\mathrm{d}y^\mu)_a\,|_{\phi(q)}\,. \tag{10}$$

式(8)和式(10)也可以等价地写成

$$\phi^*[(\partial/\partial y^\mu)^a|_{\phi(q)}] = (\partial/\partial x'^\mu)^a|_q, \quad \phi^*[(dy^\mu)_a|_{\phi(q)}] = (dx'^\mu)_a|_q. \tag{11}$$

3.2 微分同胚映射的主动和被动观点

由于微分同胚映射可以自然地诱导一个坐标变换，对微分同胚映射 $\phi: M \to N$ 就存在在两种观点：

(1) 主动观点 (active viewpoint)，它如实地认为 ϕ 是点的变换 [把 p 变为 $\phi(p)$] 以及由此导致的张量变换 [把 p 点的张量 T 变为 $\phi(p)$ 点的张量 $\phi_* T$]；

(2) 被动观点 (passive viewpoint)，它认为点 p 及其上的所有张量 T 都没变，$\phi: M \to N$ 的后果是坐标系有了变换 (从 $\{x^\mu\}$ 变为 $\{x'^\mu\}$)。

这两种观点虽然似乎相去甚远，但在实用上是等价的。

3.3 坐标变换后新坐标的张量分量

现在依据式(8)和式(10)，我们来看诱导出的坐标变换 $x'^\mu(q) := y^\mu(\phi(q))$ 有怎样的特点。对于 $p \in M$ 点的 $T \in \mathscr{F}_M(k,l)$，经过微分同胚的推前映射后变为 $\phi(p) \in N$ 点的 $\phi_* T \in \mathscr{F}_N(k,l)$，于是用坐标系展开成分量形式

$$\begin{aligned}
T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_p =& T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}(\mathrm{d}x'^{\mu_1})_{a_1}|_p\cdots(\mathrm{d}x'^{\mu_k})_{a_k}|_p \left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu_1}}\right)^{b_1}\Bigg|_p \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu_l}}\right)^{b_l}\Bigg|_p \\
=& T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\phi^*[(\mathrm{d}y^{\mu_1})_{a_1}|_{\phi(p)}]\cdots\phi^*[(\mathrm{d}y^{\mu_k})_{a_k}|_{\phi(p)}]\phi^*\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_1}}\right)^{b_1}\Bigg|_{\phi(p)}\right]\cdots\phi^*\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_l}}\right)^{b_l}\Bigg|_{\phi(p)}\right] \\
=& (\phi_* T)^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}(\mathrm{d}y^{\mu_1})_{a_1}|_{\phi(p)}\cdots(\mathrm{d}y^{\mu_k})_{a_k}|_{\phi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_1}}\right)^{b_1}\Bigg|_{\phi(p)}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_l}}\right)^{b_l}\Bigg|_{\phi(p)} \\
=& (\phi_* T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_{\phi(p)}
\end{aligned} \tag{12}$$

即

$$(\phi_* T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_{\phi(p)} = T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_p, \quad \forall T \in \mathscr{F}_M(k,l), \tag{13}$$

式中左边是新点 $\phi(p)$ 的新张量 $\phi_* T$ 在老坐标系 $\{y^\mu\}$ 的分量，右边是老点 p 的老张量 T 在新坐标系 $\{x'^\mu\}$ 的分量。该式是一个实数等式，左边可以看作是由主动观点 (认为点和张量变了而坐标系没变) 得的数，右边则可看作是由被动观点 (认为点和张量没变但坐标系变了) 所得的数。两边相等就表明两种观点在实用上等价。

4 结语

本文的主要工作是写出了微分同胚映射条件下的对于任意型张量场的推前映射和拉回映射的定义式，并研究了由这些微分同胚映射诱导出的坐标变换，利用这些定义写出了新坐标系下坐标分量的表达式。很多定义和计算是笔者自己完成，因此可能会有一些错误，但想必大方向是对的。

另外，通过研究微分同胚映射的主动和被动观点，对于理解洛伦兹变换是 boost 具有很好的助益作用。

参考文献

[1] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论上册. 2 版. 北京: 科学出版社, 2006. Print.