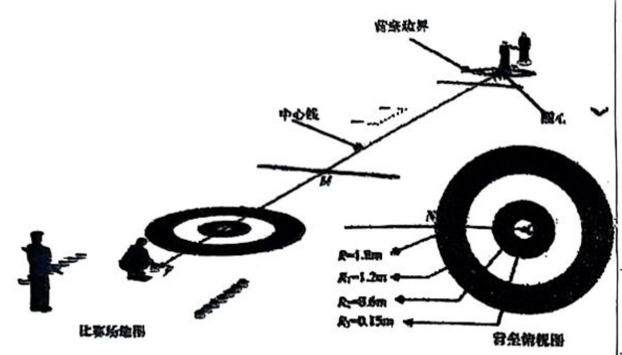
14. （16分）2022年北京冬奥会的冰壶项目被喻为“冰上象棋”．如图，P、M、N为场地中心线上的三个点，一冰壶B静止在半径$R=1.8m$的营垒圆形边界N处．队员使壶A以速度$v_0=\sqrt{2}m/s$从P点沿中心线出发，在与初速度同向恒力$F=5N$作用下，经$s_0=10m$在M处脱手．脱手后，队友用冰刷擦试MN间的冰面，A以速度$v_1=1m/s$在N处与B正碰（碰撞时间极短）．A、B可视为质点，质量均为$m=20kg$．已知未用冰刷擦拭过的冰面动摩擦因数$\mu=0.01$，擦拭后变为$k\mu$．MN间距$L=25m$，重力加速度取$10m/s^2$，不计空气阻力，冰刷始终不接触冰壶．



（1）求MN段冰面k的大小；

（2）第一次碰撞后，B恰好停在营垒中心O处，求碰后A的速度大小v_{A1}；

（3）已知A、B碰撞前后速度均满足比值$\frac{v_{B后}-v_{A后}}{v_{A前}-v_{B前}}$不变．若每次碰后，只擦拭A前方冰面使$k=\frac{1}{3}$．试通过计算说明，最终B将停在营垒的哪个区域？（营垒各区域尺寸见右下图）

解：

(1) $Fs_0-\mu mgs_0-k\mu mgL=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2$

$\Rightarrow k=0.8$

(2) 对B：$\mu mgR=\frac{1}{2}mv_{B_1}^2$

动量守恒：$mv_1=mv_{A_1}+mv_{B_1}$

联立，解得 $v_{A_1}=0.4m/s$，$v_{B_1}=0.6m/s$

(3) $\frac{v_{B_1}-v_{A_1}}{v_1-0}=\frac{1}{5}$

二者都是匀减速的追及问题

首先要判断A追上B时，B是否已停止运动．

假设B已停止运动，则

$x_1=\frac{v_B^2}{2\mu g}=1.8m$

$t_1=\frac{v_B}{\mu g}=6s$

t_1内，$x_A=v_{A_1}t_1-\frac{1}{2}k\mu gt^2=1.8m=x_1$

∴A恰好在B停止运动时追上B

假设以后每次A都能追上B，且追上B时B已停止

研究第n次碰撞前后

$$\begin{cases} mv_{n-1}=mv_{An}+mv_{Bn} \\ \frac{v_{Bn}-v_{An}}{v_{n-1}}=\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{An}=\frac{2}{5}v_{n-1} \\ v_{Bn}=\frac{3}{5}v_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 对B：x_n=\frac{v_{Bn}^2}{2\mu g} \\ 对A：k\mu mgx_n=\frac{1}{2}mv_{An}^2-\frac{1}{2}mv_n^2 \end{cases} \Rightarrow v_n=\sqrt{v_{An}^2-kv_{Bn}^2}=\frac{1}{5}v_{n-1}$$

∴$\{v_n\}$是以v_1为首项，$q=\frac{1}{5}$为公比的等比数列，假设成立

∵ $v_{Bn}=\frac{3}{5}v_{n-1}$，$x_n=\frac{v_{Bn}^2}{2\mu g}$

∴$\{x_n\}$是以x_1为首项，$q=\frac{1}{25}$为公比的等比数列．

$x = x_1 \lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{25}+(\frac{1}{25})^2+\cdots+(\frac{1}{25})^n\right] = x_1 \lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{25})^n}{1-\frac{1}{25}} = 1.875m$

$x - R = 0.075m < 0.15m$

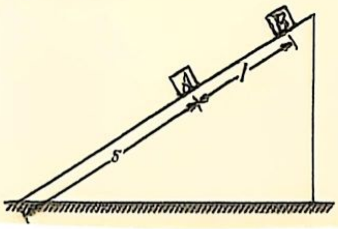
∴ 最终 B 将停在以 O 为中心，$R_3 = 0.15m$ 的圆内.

如图所示，倾角为θ=30°的斜面固定在水平地面上，物块A的质量为M=3kg，静止在斜面上，距斜面底端为s=4m，物块B的质量为m=1kg，在斜面上距物块A上方l=2.5m的位置由静止释放。两物块均可看作质点，物块碰撞时无机械能损失。两物块由不同材料制成，A与斜面之间的动摩擦因数$\mu=\frac{\sqrt{3}}{2}$，B与斜面间的摩擦忽略不计。重力加速度大小g=10m/s²，求：

(1) 发生第一次碰撞后物块A的速度v_{A1}和物块B的速度v_{B1}；

(2) 两物块第一次碰碰与第二次碰撞之间的时间t；

(3) 物块A到达斜面底端的过程中，两物块发生碰撞的总次数n。



解：(1) 设第一次撞前瞬间 B 速度为 v_0

则 $v_0 = \sqrt{2gl\sin\theta} = 5m/s$

$v_{A1} = \frac{1}{2}v_0 = \frac{5}{2}m/s$ 沿斜面向下

$v_{B1} = \frac{1}{2}v_0 = \frac{5}{2}m/s$ 沿斜面向上

(2) 假设 B 第二次撞 A 时 A 已停止

A 运动的距离 $\Delta S_1 = \frac{v_{A1}^2}{2a}$

其中 $a = \mu g\cos\theta - g\sin\theta = 2.5m/s^2$

∴ $\Delta S_1 = \frac{5}{4}m$ $\quad t_A = \frac{v_{A1}}{a} = 1s$

对 B. $\frac{1}{2}g\sin\theta t^2 - v_B t = \Delta S_1$

$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}+1}{2}s > t_A$ 假设成立

∴ $t = \frac{\sqrt{3}+1}{2}s$

(3) 研究第 n 次碰撞前后

$v_{An} = \frac{1}{2}v_{n-1}$ ①, $v_{Bn} = \frac{1}{2}v_{n-1}$ ②, $\Delta S_n = \frac{v_{An}^2}{2a}$ ③, $\frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg\sin\theta\Delta S_n$ ④

联立①②③④ $\Rightarrow v_n^2 = \frac{3}{4}v_{n-1}^2$

∵ $v_{An} = \frac{1}{2}v_{n-1}$, $\Delta S_n = \frac{v_{An}^2}{2a}$

∴ $\Delta S_n = \frac{3}{4}\Delta S_{n-1}$

$S < \Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots + \Delta S_n = \frac{5}{4}\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+\cdots+(\frac{3}{4})^n\right]\Delta S_1$

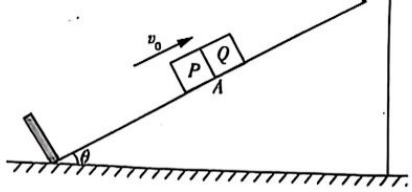
$S \geq \Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots + \Delta S_{n-1} = \frac{5}{4}\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+\cdots+(\frac{3}{4})^{n-1}\right]\Delta S_1$

解得 $n=5$.

∴ 最多碰撞 5 次.

【2020 山东·18,6分,难度★★★★★】

如图所示,一倾角为 θ 的固定斜面的底端安装一弹性挡板,P、Q 两物块的质量分别为 m 和 $4m$,Q 静止于斜面上 A 处.某时刻,P 以沿斜面向上的速度 v_0 与 Q 发生弹性碰撞.Q 与斜面间的动摩擦因数等于 $\tan\theta$,设最大静摩擦力等于滑动摩擦力.P 与斜面间无摩擦,与挡板之间的碰撞无动能损失.两物块均可以看作质点,斜面足够长,Q 的速度减为零之前 P 不会与之发生碰撞.重力加速度大小为 g.



(1)求 P 与 Q 第一次碰撞后瞬间各自的速度大小 v_{P1}、v_{Q1};

(2)求第 n 次碰撞使物块 Q 上升的高度 h_n;

(3)求物块 Q 从 A 点上升的总高度 H;

(4)为保证在 Q 的速度减为零之前 P 不会与之发生碰撞,求 A 点与挡板之间的最小距离 s.

解 (1) $V_{P1} = \frac{3}{5}V_0$, $V_{Q1} = \frac{2}{5}V_0$

(2) 研究第 n 次碰撞前后

$\begin{cases} V_{Pn} = \frac{3}{5}V_{n-1} & ① \\ V_{Qn} = \frac{2}{5}V_{n-1} & ② \end{cases}$ $a_Q = g\sin\theta + \mu g\cos\theta = 2g\sin\theta$

$h_n = \frac{V_{Qn}^2}{4g\sin\theta}\cdot\sin\theta = \frac{V_{Qn}^2}{4g}$ ③ $mgh_n = \frac{1}{2}mV_{Pn}^2 - \frac{1}{2}mV_n^2$ ④

联立①②③④ $\Rightarrow$ $V_n = \frac{\sqrt{7}}{5}V_{n-1}$ 也可用还原法,更简单

$\because V_{Qn} = \frac{2}{5}V_{n-1}$, $h_n = \frac{V_{Qn}^2}{4g}$ $\therefore h_n = \frac{7}{25}h_{n-1}$

$\therefore$ $\{h_n\}$ 是以 h_1 为首项,$q = \frac{7}{25}$ 为公比的等比数列

$h_1 = \frac{V_{Q1}^2}{4g} = \frac{V_0^2}{25g}$. $h_n = \frac{V_0^2}{25g}\times\left(\frac{7}{25}\right)^{n-1}$

(3) 碰撞 n 次后上升的总高度

$$h = h_1 + h_2 + \cdots + h_n = \frac{V_0^2}{25g}\left[1 + \frac{7}{25} + \left(\frac{7}{25}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{7}{25}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{V_0^2}{25g}\cdot\frac{1-\left(\frac{7}{25}\right)^{n-1}}{1-\frac{7}{25}} = \frac{V_0^2}{18g}\left[1-\left(\frac{7}{25}\right)^{n-1}\right]$$

$$H = \lim_{n\to\infty} h = \frac{V_0^2}{18g}$$

也可以

(3)当 P、Q 达到 H 时,两物块到此处的速度可视为零,对两物块运动全过程由动能定理得

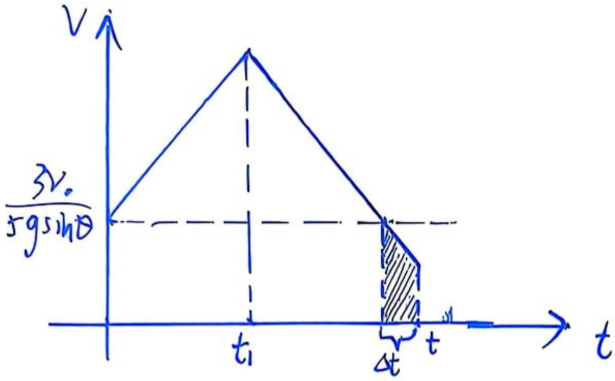
$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -(m+4m)gH - \tan\theta\cdot 4mg\cos\theta\cdot\frac{H}{\sin\theta} \quad ㉔$$

解得 $H = \frac{v_0^2}{18g}$ ㉕

(4) 运算量较大，但可以删除字母以简化运算.

第一次撞后，Q向上运动了 $\frac{v_0^2}{25g\sin\theta}$，时间 $t=\frac{v_0}{5g\sin\theta}$

临界情况下，P恰好在Q停止时撞上Q



先求 Δt. $\frac{3}{5}v_0\Delta t-\frac{1}{2}g\sin\theta\,\Delta t^2=\frac{v_0^2}{25g\sin\theta}$

即 $\frac{3}{5}\Delta t-\frac{1}{2}\Delta t^2=\frac{1}{25}$

$\Rightarrow 25\Delta t^2-30\Delta t+2=0 \Rightarrow \Delta t=\frac{3-\sqrt{7}}{5}$ 或 $\frac{3+\sqrt{7}}{5}$（舍）

$\therefore t_1=\frac{1}{2}(t-\Delta t)=\frac{\sqrt{7}-2}{10}$

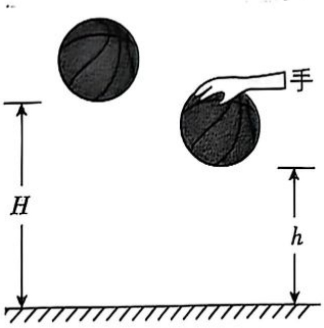
$S=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{7}-2}{10}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{7}-2}{10}\right)^2=\frac{8\sqrt{7}-13}{200}\frac{v_0^2}{g\sin\theta}$

[湖南 2022 · 14,15 分]如图(a),质量为 m 的篮球从离地 H 高度处由静止下落,与地面发生一次非弹性碰撞后反弹至离地 h 的最高处.设篮球在运动过程中所受空气阻力的大小是篮球所受重力的 λ 倍$\left(\lambda\text{ 为常数且 }0<\lambda<\frac{H-h}{H+h}\right)$,且篮球每次与地面碰撞的碰后速率与碰前速率之比相同,重力加速度大小为 g.

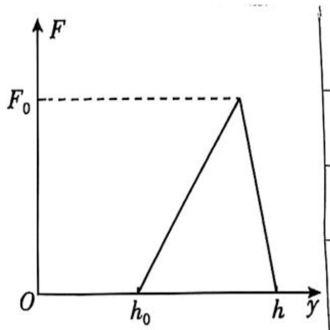
(1)求篮球与地面碰撞的碰后速率与碰前速率之比;

(2)若篮球反弹至最高处 h 时,运动员对篮球施加一个向下的压力 F,使得篮球与地面碰撞一次后恰好反弹至 h 的高度处,力 F 随高度 y 的变化如图(b)所示,其中 h_0 已知,求 F_0 的大小;

(3)篮球从 H 高度处由静止下落后,每次反弹至最高点时,运动员拍击一次篮球(拍击时间极短),瞬间给其一个竖直向下、大小相等的冲量 I,经过 N 次拍击后篮球恰好反弹至 H 高度处,求冲量 I 的大小.



图(a)



图(b)

DATE / /

解:(1) $v_{前}^2 = 2(1-\lambda)gH$

$v_{后}^2 = 2(1+\lambda)gh$

$\Rightarrow \frac{v_{后}}{v_{前}} = \sqrt{\frac{(1+\lambda)h}{(1-\lambda)H}}$ ①

(2) 从最高点到地面

$\frac{1}{2}F_0(h-h_0) + mgh - \lambda mgh = \frac{1}{2}mv_{前}^2$ ②

从地面再到最高点

$mgh + \lambda mgh = \frac{1}{2}mv_{后}^2$ ③

联立①②③ $\Rightarrow$

$F_0 = \frac{2(1-\lambda)mg(H-h)}{h-h_0}$

也可以这样想:从 H 下落可反弹至 h,而现在从 h 下落,在 F 做功下,反弹至 h 则 F 的功弥补了从 H 到 h 的能量差

$\frac{1}{2}F_0(h-h_0) = (1-\lambda)mg(H-h)$

$\Rightarrow F_0 = \frac{2(1-\lambda)mg(H-h)}{h-h_0}$

(3) 与[2020.山东.18]相同的思路

设第 n 次拍击后,篮球反弹至 h_n 处

设 n 次拍击后撞地前速度为 v_1,撞地后速度为 v_2,则 $v_1^2 - \left(\frac{I}{m}\right)^2 = 2(1-\lambda)gh_{n-1}$ ④

$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{(1+\lambda)h}{(1-\lambda)H}}$ ⑤ $v_2^2 = 2(1+\lambda)gh_n$ ⑥

联立④⑤⑥,解得递推关系式: $\boxed{h_n = \frac{h}{H}h_{n-1} + \frac{I^2h}{2(1-\lambda)m^2gH}}$

设 $h_n + x = \frac{h}{H}(h_{n-1}+x) \Rightarrow x = \frac{I^2h}{2(\lambda-1)m^2g(H-h)}$

$n = 1, 2, 3 \cdots$,h_1, h_0 也满足递推关系. $h_0 = h$ 不是(2)中的 h_0

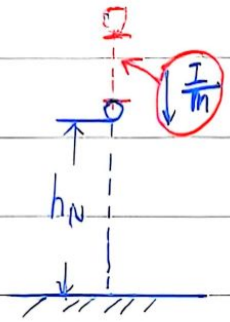
$h_N + x = \left(\frac{h}{H}\right)^N(h_0+x) \Rightarrow h_N = \left(\frac{h}{H}\right)^N h + \left[\left(\frac{h}{H}\right)^N - 1\right]x$

即 $H=\left(\frac{h}{H}\right)^N h+\frac{\left[\left(\frac{h}{H}\right)^N-1\right]I^2 h}{2(\lambda-1)m^2 g(H-h)}$

$$\Rightarrow I=\sqrt{\frac{\left[H-\left(\frac{h}{H}\right)^N h\right]\left[2(\lambda-1)m^2 g(H-h)\right]}{\left[\left(\frac{h}{H}\right)^N-1\right]h}}$$

$$=m\sqrt{\frac{2g(H^{N+1}-h^{N+1})(1-\lambda)(H-h)}{(H^N-h^N)h}}$$

递推式用等效思想来求更简单



篮球在 h_N 处获得初速度 $\frac{I}{m}$

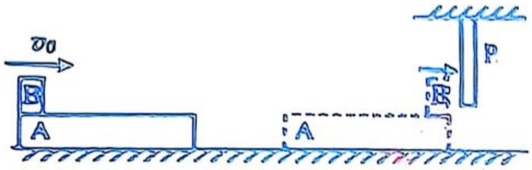
等效于其从 h_N 上方 $\Delta h=\frac{(\frac{I}{m})^2}{2(1-\lambda)g}$ 处由静止开始下落

而前后高度之比为 $\frac{h}{H}$

$\therefore\ h_{N+1}=\frac{h}{H}h_{N等效}=\frac{h}{H}(h_N+\Delta h).$

只要方法选择正确，本题三问可在7min内完成.

如图所示，P 为固定的竖直挡板，质量为 $2m$ 的长木板 A 静置于光滑水平面上（A 的上表面略低于挡板 P 下端），质量为 m 的小物块 B（可视为质点）以水平初速度 v_0 从 A 的左端向右滑上 A 的上表面，经过一段时间 A、B 第一次达到共同速度，此时 B 恰好未从 A 上滑落，然后物块 B 与长木板 A 一起向右运动，在 $t=0$ 时刻，物块 B 与挡板 P 发生了第一次碰撞，经过一段时间物块 B 与长木板 A 第二次达到共同速度，之后物块 B 与挡板 P 发生了很多次碰撞，最终在 $t=t_0$（未知）时恰好相对地面静止。已知 A、B 间的动摩擦因数为 μ，重力加速度为 g，物块与挡板 P 发生碰撞时无机械能损失且碰撞时间极短，求：



（1）木板 A 的长度；

（2）A、B 第二次达到共同速度时 B 离 A 左端的距离；

（3）$0\sim t_0$ 时间内 B 经过的路程；

（4）t_0 的值。

解

(1) $\mu mgL = \frac{1}{2}\cdot\frac{m\cdot 2m}{m+2m}v_0^2$

$\Rightarrow L = \frac{v_0^2}{3\mu g}$.

(2) 撞前二者共速 $\frac{v_0}{3}$（记为 v_1），撞后二者相对速度为 $\frac{2v_0}{3}$

$\mu mg\Delta x = \frac{1}{2}\frac{m\cdot 2m}{m+2m}\left(\frac{2}{3}v_0\right)^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{4v_0^2}{27\mu g}$

B距A左端 $L-\Delta x = \frac{5v_0^2}{27\mu g}$

(3) 设第n次撞前二者速度为 v_n，则 $2mv_n - mv_n = 3mv_{n+1} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

$\{v_n\}$ 公比为 $\frac{1}{3}$

设从第n次相撞到第n+1次相撞，B经过的路程为 S_n

则 $S_1 = 2\cdot\frac{v_1^2}{2\mu g} = \frac{v_0^2}{9\mu g}$ ∵ $S_n \propto v_n^2$ ∴ $\{S_n\}$ 公比为 $\frac{1}{9}$

总路程 $S = \frac{S_1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{v_0^2}{8\mu g}$

(4) 法一：等比数列求和

设从第n次相撞到第n+1次相撞，B所用时间为 t_n

则 t_1 可分为两段：B先匀变速，后与A共匀速

设匀变速时间为 t_1'，则 $\frac{1}{3}v_0 - \frac{1}{2}\mu g t_1' = \mu g t_1' - \frac{1}{3}v_0 \Rightarrow t_1' = \frac{4v_0}{9\mu g}$

此过程中B的位移为 $x_1 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2\mu g} = \frac{4v_0^2}{81\mu g}$

匀速运动时间 $t_1'' = \frac{x_1}{v_2} = \frac{4v_0}{9\mu g}$

∴ $t_1 = t_1' + t_1'' = \frac{8v_0}{9\mu g}$. $t_n \propto v_n$ ∴ $\{t_n\}$ 公比为 $\frac{1}{3}$

No.
DATE / /

巧妙

法二、取 t_n 进行研究，依然分为 t_n' 和 t_n''

则 $v_n - \frac{1}{2}\mu g t_n' = \mu g t_n' - v_n \Rightarrow t_n' = \frac{4v_n}{3\mu g}$. $v_共 = \frac{1}{3}v_n$

此过程中 B 的位移 $x_n = v_n t_n' - \frac{1}{2}\mu g t_n'^2 = \frac{4v_n^2}{9\mu g}$

$$t_n'' = \frac{x_n}{v_共} = \frac{4v_n^2}{3\mu g} = t_n'$$

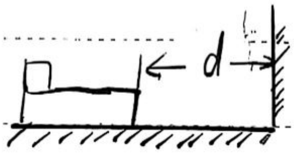
∴ 全过程匀变速时间与匀速时间相同，都是 $\frac{t_0}{2}$

而 A 的匀变速全是匀减速，将其累加起来

就是 A 从 $\frac{1}{3}v_0$，经 $\frac{t_0}{2}$ 时间速度减为 0

则 $\frac{1}{3}v_0 = \frac{1}{2}\mu g \cdot \frac{t_0}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{4v_0}{3\mu g}$

如图所示，质量为M的木板置于光滑水平面上，右端距墙壁的距离为d，左端放有一质量为m的小物块。现将水平向右的恒力F_1作用在木板上，水平向右的恒力F_2作用在物块上，由静止同时释放，运动过程中，木板与墙壁发生多次弹性碰撞，且每次碰撞时间均极短。已知$M=4m$，$F_1=4F_2=4mg$，物块和木板间滑动摩擦力大小为$4mg$，其中g为重力加速度大小，不计空气阻力。

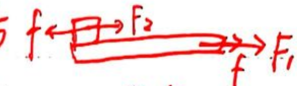


(1) 求木板第一次与墙壁碰后瞬间，木板和物块各自加速度

(2) 木板第一次与墙壁碰后，向左运动的过程中，物块没有从木板上滑下，求木板向左运动的最大距离。

(3) 木板第二次与墙壁碰撞向左运动的过程中，物块仍未从板上滑下，求木板长度应满足的条件。

解：(1) 在第一次碰撞之前，易知二者之间不存在摩擦力，则二者以共同的加速度g向右运动，碰撞前瞬间二者速度为$\sqrt{2gd}$，记为v_0。

碰后 

，板加速度 $a_1 = \frac{F_1+f}{M} = 2g$，水平向右

物块加速度 $a_2 = \frac{f-F_2}{m} = 3g$，水平向左

(2) 木板向左匀减速，物块向右匀减速。假设木板在速度减为0前始终未与物块共速，即木板以a_1加速度减速为0，则所用时间

$t_1 = \frac{v_0}{2g} = \sqrt{\frac{gd}{2}}$，物块速度为 $v_0 - 3gt_1 = \sqrt{2gd} - \sqrt{\frac{9}{2}gd} < 0$，则物块速度已向左，故假设不成立。

所以木板、物块先分别以a_1、a_2达共速，之后摩擦力消失，二者以共同的加速度g向左匀减速。

设达共速所用时间为t，以向右为正，则

$-\sqrt{2gd} + 2gt = \sqrt{2gd} - 3gt \Rightarrow t = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2d}{g}}$，$v_共 = -\frac{1}{5}\sqrt{2gd}$

木板位移 $x_1 = \frac{v_0^2 - v_共^2}{2a_1} = \frac{12}{25}d$. 之后共减速，$x' = \frac{v_共^2 - 0}{2a_1} = \frac{1}{25}d$

∴木板向左的最大距离是 $x_1 + x' = \frac{13}{25}d$.

(3) 第一次碰撞后，共速前，物块的位移为$x_2=\frac{v_0^2-v_共^2}{2a_2}=\frac{8}{25}d$. 水平向右.

∴ 二者第一次碰撞到第二次碰撞后，相对位移为$x_1+x_2=\frac{4}{5}d$

得到第一次的相对位移 $\Delta x=\frac{4}{5}d$

这既是Δx的具体数值，也可以看作是个函数关系

既每次碰撞后二者相对位移Δx是碰前速度为0时离右壁的距离.

D的$\frac{4}{5}$倍，即 $\Delta x_n=\frac{4}{5}D_n$

这里D_n即第n-1次碰撞后向左的最大距离 $(n\geq 2)$，$D_0=d$

同样地，第二问给出的也是一个函数关系，而且是一个递推关系

即 $D_n=\frac{13}{25}D_{n-1}$，$n\geq 1$

∴ $\{D_n\}$是以$D_0=d$为首项，公比为$\frac{13}{25}$的等比数列

$\{\Delta x_n\}$是以$x_1=\frac{4}{5}d$为首项，公比为$\frac{13}{25}$的等比数列

题目所求的 $L\geq x_1+x_2=\frac{4}{5}d+(\frac{4}{5}\times\frac{13}{25})d=\frac{152}{125}d$.

乘胜追击：

(4) 若物块始终未从板上落下，则木板向左运动的总距离S

及木板长度最小值T为多少？

解：$S=\lim\limits_{n\to\infty}(D_1+D_2+\cdots+D_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{D_1(1-q^n)}{1-q}$

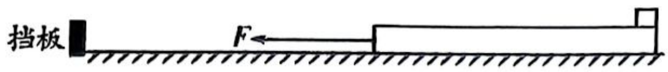
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{13}{25}d\left[1-(\frac{13}{25})^n\right]}{1-\frac{13}{25}}=\frac{13}{12}d$

$T=\lim\limits_{n\to\infty}(\Delta x_1+\Delta x_2+\cdots+\Delta x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Delta x_1(1-q^n)}{1-q}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{5}d\left[1-(\frac{13}{25})^n\right]}{1-\frac{13}{25}}=\frac{5}{3}d$.

[2022·潍坊二模]

（16分）如图所示，质量 $M=1\text{kg}$ 的平板置于光滑的水平面上，板上最右端放一质量 $m=1\text{kg}$ 可视为质点的小物块，平板与物块间的动摩擦因数 $\mu=0.5$，距平板左端 $L=0.8\text{m}$ 处有一固定弹性挡板，平板撞上挡板后会原速率反弹。现对平板施一水平向左的恒力 $F=5\text{N}$，物块与平板一起由静止开始运动，已知重力加速度 $g=10\text{m/s}^2$，整个过程中物块未离开平板。求：



（1）第一次碰撞过程中，平板所受合外力对平板的冲量；

（2）第三次碰撞时物块离平板右端的距离；

（3）物块最终离木板右端的距离；

（4）若将恒力 F 撤去，调节初始状态平板左端与挡板的距离 L，仅给小物块一个水平向左的初速度 $v_0=10\text{m/s}$，使得平板与挡板只能碰撞6次，求 L 应满足的条件。（假设平板足够长）

解：(1) 假设二者能共速，则 $a_共 = \frac{F}{M+m} = 2.5m/s^2 < \mu g$，假设成立

$FL = \frac{1}{2}(M+m)v_1^2 \Rightarrow v_1 = 2m/s$

$I = 2Mv = 4N\cdot s$

(2)(3) 使用还原法

第一次碰撞之后，M向右减速，m向左减速，至二者共速。

$a_M = \frac{F+\mu mg}{M} = 10m/s^2$　　$a_m = \mu g = 5m/s^2$

$a_M > a_m$，所以M先减速为0，之后反向加速，最后与m共速向左。

设第一次撞后经过t达共速，则 $a_M t - v = v - a_m t$

$\Rightarrow t = \frac{4}{15}s$，$v_共 = \frac{2}{3}m/s$

此时 $x_m = \frac{v^2 - v_共^2}{2a_m} = \frac{16}{45}m$，向左，$x_M = \frac{v^2 - v_共^2}{2a_M} = \frac{8}{45}m$，向右

物块离木板右端的距离 $\Delta x_1 = x_m + x_M = \frac{8}{15}m$

之后二者以 $v_共 = \frac{2}{3}m/s$ 向左运动，这个状态等效于二者从该点右边的 $x = \frac{v_共^2}{2a_共} = \frac{4}{45}m$ 处由静止共加速而来

于是等效还原：第二次碰撞前，两物块从 $L_2 = x_M + x = \frac{4}{15}m$ 处由静止开始运动，由上面的计算过程知 $\Delta x \propto v^2 \propto L$

所以 $\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{3}$，$\{\Delta x_n\}$ 为公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列。

(2) 所求的 $S_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x_1 + \frac{1}{3}\Delta x_1 = \frac{32}{45}m$

(3) 所求的 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{8}{15}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{5}m$

(3) 先想一下. 假设L很大，第一次碰前二者已共速. 则碰后二者总动量为0，很快便都静止，无法进行下一次碰撞。

而题中却碰撞了6次。说明前5次碰前二者从未共速过，第6次碰前二者共速，碰后动量相反，所以无法进行第7次碰撞。

木板第一次到达挡板时 $v_1=\sqrt{2\mu gL}$，碰后速度反向，由于一直受向左的摩擦力，所以第二次碰时 $v_2=\sqrt{2\mu gL}$，前5次都这样。

相邻两次碰撞间隔中，木板 $\Delta p=2\sqrt{2\mu gL}$，则木块的速度减小 $2\sqrt{2\mu gL}$. 木块第一次碰后速度为 $10-\sqrt{2\mu gL}$ (m/s)

则如果不共速，第n次碰时木块速度 $v_n'=10-(2n-1)\sqrt{2\mu gL}$

~~则临界①~~ 第6次碰时恰好共速：$\sqrt{2\mu gL}=10-11\sqrt{2\mu gL}$

$\Rightarrow L=\frac{5}{72}m$

临界②：第5次碰时恰好共速：$\sqrt{2\mu gL}=10-9\sqrt{2\mu gL}$

$\Rightarrow L=\frac{1}{10}m$

∴ L应满足的条件是 $\frac{5}{72}m<L<\frac{1}{10}m$

(16分)如图所示，水平地面上有一个质量为$M=3\text{kg}$、左端带有固定挡板的长木板A，其上表面O点左侧光滑、右侧粗糙，O点距右端的距离$l_1=8\text{m}$，距左端挡板的距离$l_2=4\text{m}$，下表面与地面间的动摩擦因数为$\mu_1=0.2$。长木板右端放置一个可视为质点的小滑块B，其质量为$m=1\text{kg}$，B与木板间的动摩擦因数$\mu_2=0.1$，初始时滑块和长木板均静止。现给长木板A大小为$v_0=8\text{m/s}$、水平向右的初速度；当B相对于长木板滑至O点时，给长木板施加一水平向右、大小为$F=14\text{N}$的恒力。经过一段时间，滑块与挡板发生第一次弹性碰撞；此后的运动过程中，滑块B与挡板发生多次弹性碰撞，所有碰撞过程时间极短可以忽略，g取10 m/s^2。求：

(1)从开始运动到滑块相对于长木板向左滑至O点的过程中，长木板A的位移；

(2)滑块B与挡板发生第一次碰撞后的瞬间，长木板A和滑块B的速度大小；

(3)滑块B与挡板发生第一次碰撞后到第二次碰撞前的时间间隔；

(4)滑块B与挡板发生第n次碰撞前拉力F的总功。

解：(1) $a_A=\dfrac{\mu_2 mg+\mu_1(M+m)g}{M}=3\text{m/s}^2$ $a_B=\mu_2 g=1\text{m/s}^2$

$l_1=v_0t-\frac{1}{2}a_At^2-\frac{1}{2}a_Bt^2 \Rightarrow t=2\text{s}$

$x_A=v_0t-\frac{1}{2}a_At^2=10\text{m}$

(2) 第(1)问之后，B匀速向左，A以加速度a_1匀加速向右，设经过t_1碰撞

$v_{B_0}=a_Bt=2\text{m/s}$ $v_{A_0}=v_0-a_At=2\text{m/s}$，$a_1=\dfrac{F-\mu_1(m+M)g}{M}=2\text{m/s}^2$

$l_2=v_{A_0}t+\frac{1}{2}a_1t_1^2-v_Bt_1 \Rightarrow t_1=2\text{s}$

此时 $v_{A_1}=v_{A_0}+a_1t_1=6\text{m/s}$ $v_{B_1}=v_{B_0}=2\text{m/s}$，然后碰撞

$$\begin{cases} Mv_{A_1}+mv_{B_1}=Mv_{A_1}'+mv_{B_1}' \\ \frac{1}{2}Mv_{A_1}^2+\frac{1}{2}mv_{B_1}^2=\frac{1}{2}Mv_{A_1}'^2+\frac{1}{2}mv_{B_1}'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} v_{A_1}'&=\frac{M-m}{M+m}v_{A_1}+\frac{2m}{M+m}v_{B_1}=4\text{m/s} \\ v_{B_1}'&=\frac{m-M}{M+m}v_{B_1}+\frac{2M}{M+m}v_{A_1}=8\text{m/s} \end{aligned}$$

(3) 设经过t_2后B到达O点，则 $l_2=v_{B_1}'t_2-v_{A_1}'t_2-\frac{1}{2}a_1t_2^2 \Rightarrow t_2=2\text{s}$

此时 $v_{A_1}''=v_{A_1}'+a_1t=8\text{m/s}=v_{B_1}''$，B恰好不会滑到O右端部分

之后设经过t_3发生第2次碰撞，则 $l_2=v_{A_1}''t_3+\frac{1}{2}a_1t_3^2+v_B''t_3 \Rightarrow t_3=2\text{s}$

所以时间间隔为 $t_2+t_3=4\text{s}$，记为T_1

(4) 第2次碰撞时，$v_{A_2}=v_{A_1}'+a_1T_1=12\text{m/s}$. $v_{B_2}=v_{B_1}'=8\text{m/s}$

$$\begin{cases} Mv_{A_2}+mv_{B_2}=Mv_{A_2}'+mv_{B_2}' \\ \frac{1}{2}Mv_{A_2}^2+\frac{1}{2}mv_{B_2}^2=\frac{1}{2}Mv_{A_2}'^2+\frac{1}{2}mv_{B_2}'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} v_{A_2}'&=10\text{m/s} \\ v_{B_2}'&=14\text{m/s} \end{aligned}$$

与(3)同理，求得 $T_2=4\text{s}$ 后发生第3次碰撞，撞前$\begin{cases} v_{A_3}=18\text{m/s} \\ v_{B_3}=14\text{m/s} \end{cases}$，撞后$\begin{cases} v_{A_3}'=16\text{m/s} \\ v_{B_3}'=20\text{m/s} \end{cases}$

归纳得出规律 $\{V_{An}'\}$ 是以 $V_{A1}'=4m/s$，公差为 $\Delta V=6m/s$ 的等差数列

从第 n 碰撞到第 n+1 碰撞，设 A 的位移为 x_n

则 $x_n=V_{An}'\tau_n+\frac{1}{2}a_1\tau_n^2$，$x_{n-1}=V_{An-1}'\tau_{n-1}+\frac{1}{2}a_1\tau_{n-1}^2$。归纳知 $\tau_n=4s$

$\therefore\ x_n-x_{n-1}=(V_{An}'-V_{An-1}')\tau_n=24\ m$

$\{x_n\}$ 是以 $x_1=V_{A1}'\tau_n+\frac{1}{2}a_1\tau_1^2=32m$ 为首项，公差为 $\Delta x=24m$ 的等差数列

从第1次撞后到第 n 次撞前，共 (n-1) 项

$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}=\frac{\Delta x}{2}(n-1)^2+(x_1-\frac{\Delta x}{2})(n-1)=(12n+8)(n-1)\ m$

从 O 点到第1次撞前，$x_0=\frac{V_{A1}^2-V_0^2}{2a_1}=8m$

A 的总位移 $X=x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_0$

F 做的功 $W=FX=(168n^2-56n)\ J$

以上对于"$\{V_{An}'\}$ 是等差数列"是用归纳的方法得出的，因为 A、B 的运动对初始条件有极高的敏感性。

如果直接递推，会得到 $\begin{cases}V_{An}'=\frac{1}{2}V_{An}+\frac{1}{2}V_{Bn}\\V_{Bn}'=\frac{3}{2}V_{An}-\frac{1}{2}V_{Bn}\end{cases}$ ✗

若不加以初始条件控制，接下来的分析将杂乱无章，连 B 能否超过 O 点也无法判断

赋予其条件：$V_{An}'+4=V_{Bn}'$，设经过 t_1' 后 B 到达 O 点

则 $l_2=V_{Bn}'t_1'-V_{An}'t_1'-\frac{1}{2}a_1t_1'^2\ \Rightarrow\ t_1'=2s$

此时 $V_{An}''=V_{An}'+a_1t_1=V_{Bn}'$，设经过 t_2' 后发生第 n+1 次碰撞

$V_{An}''t_2'+\frac{1}{2}a_1t_2'^2-V_{Bn}'t_2'=l_2\quad t_2'=2s$

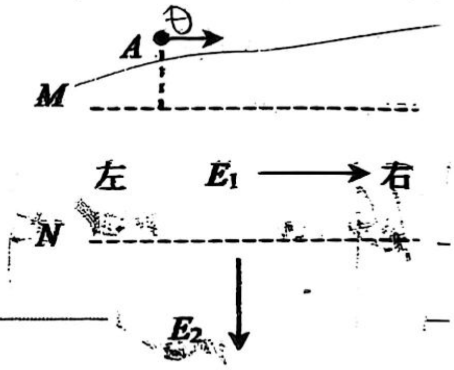
$\therefore T=t_1'+t_2'=4s$ 此时 $\begin{cases}V_{An+1}=V_{An}'+a_1T=V_{An}'+8\\V_{Bn+1}=V_{Bn}'=V_{An}'+4\end{cases}$

代入✗，得 $V_{An+1}'=V_{An}'+6$

隔项等差数列前n项和在电场中的应用

例题：2020年潍坊高一下学期物理18题

（16分）如图，间距为$H=2.4m$的M、N两水平面（虚线）之间存在方向水平向右的匀强电场E_1。水平面N下方存在竖直向下的匀强电场$E_2=9.0\times10^4 V/m$。M上方高$h=0.8m$的A点以$v_0=4.0m/s$的初速度将一带电小球沿平行于电场E_1的方向射出，小球质量为$m=0.01kg$、电荷量为$q=-2.0\times10^{-6}C$。小球在重力作用下进入该区域，并垂直于下边界进入电场E_2。不计空气阻力，重力加速度大小为$g=10m/s^2$。求：



（1）小球进入匀强电场E_1时的速度v_1；

（2）匀强电场E_1的大小；

（3）第7次经过水平面M时距离A点的水平位移。

解：(1) 从A到M，$mgh=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_1=4\sqrt{2}m/s$

(2) 从M到N，竖直方向上，$v_m t+\frac{1}{2}gt^2=H$ ①　　$v_m^2+v_0^2=v_1^2$ ②

联立①②解得$t=0.4s$

∵垂直于下边界进入电场E_2，所以水平方向速度减为0.

$at=0-v_0$ ③　　$a=\frac{qE_1}{m}$ ④

联立③④解得$E_1=5\times10^4 N/C$

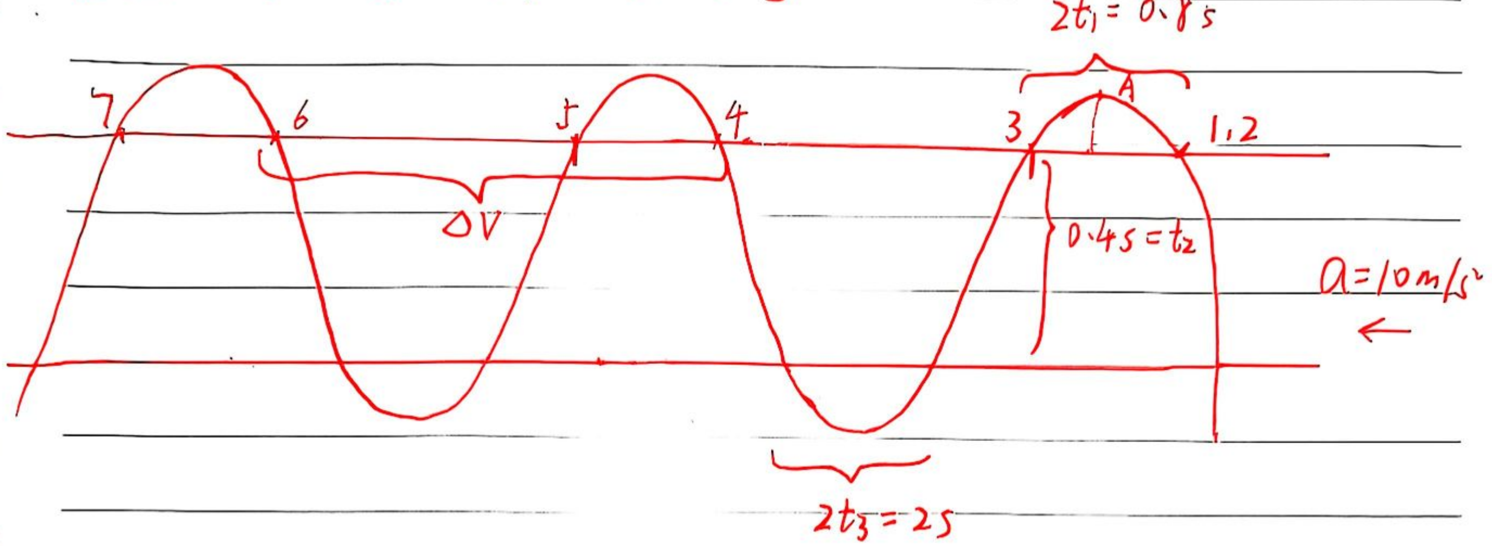
(3) 可以采用归纳法，通过找规律来找通式，见十号错题本

但极其耗费时间，少不了一个小时。

最好的办法是利用等差数列。

在本题中，第一个困难就是毫无头绪，不知道该怎么去设变量，如何去找等差数列。第二个困难是找到的并非严格的等差数列，是隔项等差的，要分奇偶讨论。第三个困难是前n项和公式如何求。总而言之，这个题难度低于奥赛，但又远超平常训练的题目，难度上与2020山东卷18题相当，甚至比第(2)问还复杂

[2020. 潍坊高一期末、18、(3)]



可以把电场E_1中的运动等效成不间断的匀加速直线运动

直接用运动学公式一次性求出。然后再求上下段的匀速，

从第3次开始求，先求n为奇数时离3的位移

奇：E_1中的匀加速用了 $T=(n-3)t_2$

匀加速位移 $x_{n_1}=V_3T+\frac{1}{2}aT^2=0.8n^2-3.2n+2.4$ (m)

第3次至第5次，匀速的位移 $\Delta x_1=(V_3+at_2)t_3+(V_3+2at_2)t_4$

$=25.6m$

第5次到第7次，第7次到9次……第n-2次到第n次，上方的水平位移成公差为$\Delta V\cdot 2t_1$的等差数列（$\Delta V=2at_2=8m/s$），下方的水平位移成公差为$\Delta V\cdot 2t_3$的等差数列。所以其匀速位移成公差为$\Delta V(2t_2+2t_3)$的等差数列。

$d=\Delta V(2t_2+2t_3)=22.4$ m

从第3次到第n次，项数为 $\frac{n-3}{2}$，首项为 $\Delta x_1=25.6m$

则末项 $\Delta x_末=25.6+\left(\frac{n-3}{2}-1\right)\times 22.4$ (m)

~~匀速位移求和：~~ $x_{n_2}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_末}{2}\cdot\frac{n-3}{2}=$ ~~$2.8n^2-9.6n+3.6$ (m)~~

∴第n次经过水平面M时距离第3次的位移 $S=x_{n_1}+x_{n_2}=$

DATE / /

$3.6n^2-12.8n+6$ (m)

而第3次离A点的水平位移 $\Delta x=v_3t_1=1.6m$

∴第n次经过水平面M时距离A点的水平位移为

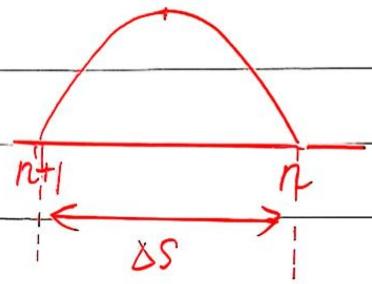
$x_n=S+\Delta x=3.6n^2-12.8n+7.6$ (m)

检验知 $n=1$ 时也符合该式

(其实本身就可以从第1次开始求，但不太好看，不如从第3次开始求方便)

下面再求 n 为偶数时的水平位移

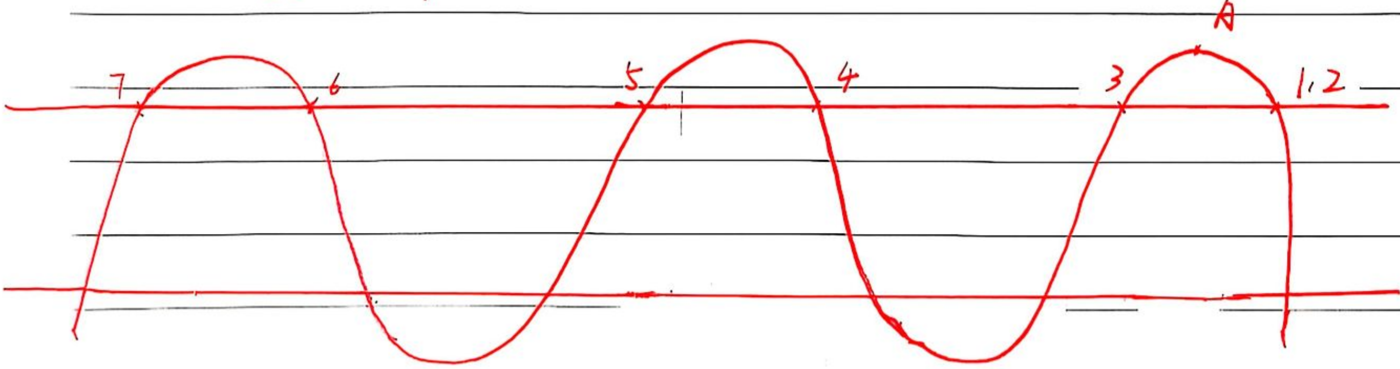
偶



n 为偶数，则 $n+1$ 为奇数

$x_n=x_{n+1}-\Delta S$.

ΔS 即第 n 次到第 $n+1$ 次的上方匀速位移



首项：$\Delta S_1=v_3\cdot 2t_1=3.2m$

公差：$d'=\Delta v\cdot 2t_1=6.4m$

项序数：$\frac{n}{2}$

∴ $\Delta S_n=\Delta S_1+(\frac{n}{2}-1)d'=3.2n-3.2$ (m)

$x_n=x_{n+1}-\Delta S_n=3.6(n+1)^2-12.8(n+1)+7.6-(3.2n-3.2)$

$=3.6n^2-8.8n+1.6$

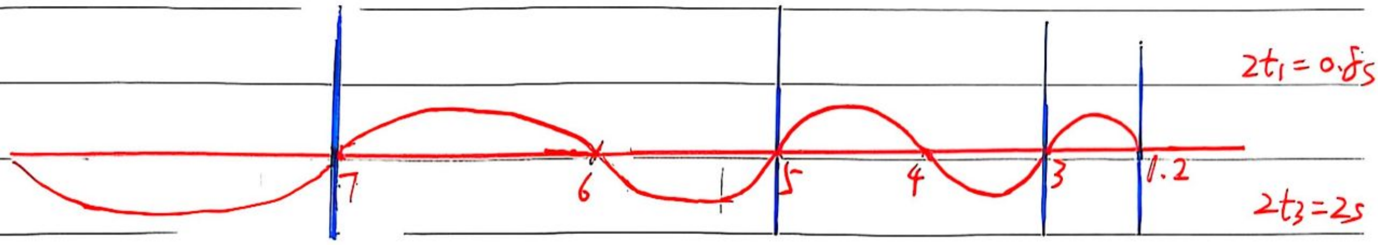
综上所述：

第n次经过水平面M时距离A点的水平位移

$$x_n = \begin{cases} 3.6n^2 - 12.8n + 7.6 \ (m), & n为奇数 \\ 3.6n^2 - 8.8n + 1.6 \ (m), & n为偶数. \end{cases}$$

先研究匀速过程

为便于观察，不画出在E_1中的轨迹



相邻两段匀速过程的速度差 $\Delta v = 2at_2 = 8m/s$

上方各段位移公差 $d_1 = \Delta v \cdot 2t_1 = 6.4m$

下方各段位移公差 $d_2 = \Delta v \cdot 2t_3 = 16m$

以“ ”为一项，则其公差 $d = d_1 + d_2 = 22.4m$

首项为 $x_{13} = 3.2m$. n为奇数时，项数为 $\frac{n-1}{2}$

则求和得 $x_{1n} = \frac{d}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \left(x_{13} - \frac{d}{2}\right)\frac{n-1}{2} = 2.8n^2 - 9.6n + 6.8$

n为偶数时，研究上方位移，首项为 $x_{23} = 3.2m$. $d_1 = 6.4m$

$x_{n\sim n+1}$ 为第 $\frac{n}{2}$ 项，则 $x_{n\sim n+1} = 3.2 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)6.4 = 3.2(n-1)m$

再研究匀加速过程

初速度 $V_0 = -4m/s$，加速度 $a = 10m/s^2$

n为奇数时，从1到n，共加速 $(n-1)t_2 = 0.4(n-1)$

则 $x_{1n}' = V_0(n-1)t_2 + \frac{1}{2}a(n-1)^2 t_2^2 = 0.8n^2 - 3.2n + 2.4$

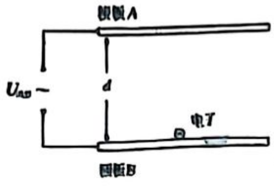
No.

DATE / /

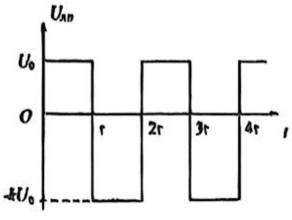
所以 $x_n = \underset{-1.6}{\overset{\shortparallel}{x_1}} + x_{1n} + x_{1n}' = 3.6n^2 - 12.8n - 7.6 \quad (m)$

n为偶数时 $x_n = x_{n+1} - x_{n \to n+1} = 3.6n^2 - 8.8n + 1.6 \quad (m)$

制备纳米薄膜装置的工作电极可简化为真空中间距为d的两平行极板，如图甲所示，加在极板A、B间的电压U_{AB}作周期性变化，其正向电压为U_0，反向电压为$-kU_0\ (k>1)$，电压变化的周期为2τ，如图乙所示.在$t=0$时，极板B附近的一个电子，质量为m、电荷量为e，受电场作用由静止开始运动.若整个运动过程中，电子未碰到极板A，且不考虑重力作用.



（图甲）



（图乙）

（1）若$k=\frac{5}{4}$，电子在$0-2\tau$时间内不能到达极板A，求d应满足的条件；

（2）若电子在$0-200\tau$时间未碰到极板B，求此运动过程中电子速度v随时间t变化的关系；

（3）若电子在第N个周期内的位移为零，求k的值.

解：

(1) $0\sim\tau$内，$a_1=\frac{eU_0}{md}$

$x_1=\frac{1}{2}a_1\tau^2=\frac{eU_0\tau^2}{2md}$

$v_1=a_1\tau=\frac{eU_0\tau}{md}$

$\tau-2\tau$内，$a_2=\frac{5eU_0}{4md}$ 向下

匀减速阶段位移

$x_2=\frac{v_1^2}{2a_2}=\frac{2eU_0\tau^2}{5md}$

$d>x_1+x_2=\frac{9eU_0^2\tau^2}{10md}\Rightarrow d>\sqrt{\frac{9eU_0T^2}{10m}}$

(2) 在 $2n\tau\sim(2n+1)\tau$ $(n=0,1,2\cdots99)$

时间内，$a_2'=\frac{ekU_0}{md}$，速度变化量 $\Delta v_2=-\frac{ekU_0}{md}\tau$

在$(2n-1)\tau-2n\tau$内，速度变化量 $\Delta v_1=\frac{eU_0}{md}\tau$

当 $2n\tau\le t<(2n+1)\tau$ 时，$v=n\Delta v_1+n\Delta v_2+a_1(t-2n\tau)$

解得 $v=[t-(k+1)n\tau]\frac{ekU_0}{md}$ ①

当 $(2n+1)\tau\le t<(2n+2)\tau$ 时，$v=(n+1)\Delta v_1+n\Delta v_2-a_2'[t-(2n+1)\tau]$

解得 $v=[(n+1)(k+1)\tau-kt]\frac{eU_0}{md}$ ② $(n=0,1,2\cdots99)$

(3) 2τ为一个周期T，第N个周期为 $2(N-1)\tau\sim2N\tau$

电子在 $2(N-1)\tau\sim(2N-1)\tau$内

代入$t=(2N-2)\tau$，$n=N-1$

$x_{2N-1}=v_{2N-2}\tau+\frac{1}{2}a_1\tau^2$，其中由①知，$v_{2N-2}=(N-1)(1-k)\frac{eU_0\tau}{md}$

电子在 $(2N-1)\tau\sim2N\tau$内

代入$t=(2N-1)\tau$，$n=N-1$

$x_{2N}=v_{2N-1}\tau-\frac{1}{2}a_2'\tau^2$，其中由 知，$v_{2N-1}=(N-Nk+k)\frac{eU_0\tau}{md}$

又有 $x_{2N-1}+x_{2N}=0$

解得 $k=\frac{4N-1}{4N-3}$