对 $\mathrm{d}f$ 的三层理解

Manifold

版本：2025 年 8 月 19 日

摘 要

本文梳理了符号 $\mathrm{d}f$ 在三种不同历史阶段的数学体系中的含义与演化。首先回顾莱布尼茨时代：$\mathrm{d}f$ 被当作“无限小非零变化量”，兼具非零性与可忽略性，虽直观却因逻辑缺陷备受争议。接着阐述了柯西—魏尔斯特拉斯的经典严格化：通过极限概念，$\mathrm{d}f$ 被重新定义为线性主部 $f'(x)\mathrm{d}x$，成为对增量 Δf 的一阶近似，解决了无限小的逻辑困境。最后介绍近代微分几何的视角：$\mathrm{d}f$ 不再是数，而是流形上取值于余切空间的对偶矢量场，将全微分思想严格化为线性映射 $v \mapsto v(f)$，从而在几何语言中统一并推广了经典微分概念。文章通过比较三种解释，揭示了符号 $\mathrm{d}f$ 从直观无限小到线性映射的严谨化历程。

关键词：莱布尼茨微积分；无限小量；微分；导数；极限理论；微分几何；对偶矢量场

1 莱布尼茨微积分中的 $\mathrm{d}f$

在莱布尼茨最初发展的微积分学中，主要有三个核心概念：**微分**，**导数**和**积分**：

(1) **微分**：形如 $\mathrm{d}f$，是函数[1] $f(x)$ 的“无限小变化量”；

(2) **导数**：定义为微分之商 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$，莱布尼茨称其为“差分比”；

(3) **积分**：定义为“无限小”微元的求和，用长 S 符号 (sum 的首字母) $\int_a^b f\mathrm{d}x$ 表示。

注意到，莱布尼茨的所有学问都建立在“无限小变化量”这一概念上，这一“无限小变化量”具有**非零性**和**可忽略性**：

(1) **非零性**：$\mathrm{d}f \neq 0$，可以作分母 (如 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$)；

(2) **可忽略性**：$\mathrm{d}f$ 无限小，在合适的时候可以被略去不计 (看作 0)。

这种“无限小的非零量”是一个非常微妙的概念，涉及许多逻辑问题。莱布尼茨在提出和使用这一概念时曾受到同时代许多数学家的非议，至今还有数学家不以为然。

小结 $\mathrm{d}f$ 在莱布尼茨的微积分学中代表“无限小变化量”，这种概念在逻辑上有致命的缺陷，但在现代仍常常被物理学家和不追求严谨的数学家使用。

[1] 在莱布尼茨的时代，没有形成函数的严格定义，$f(x)$ 只须理解作“一个取值依赖于 x 的值的变数”。

2 近代经典微积分中的 $\mathrm{d}f$

为了解决莱布尼茨理论的逻辑问题，柯西、魏尔斯特拉斯等数学家用极限替代了含混的无限小概念，将微积分学进行了严格化：

(1) **导数**：定义函数[2] $f(x)$ 的导数为 $f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(h)}{h}$；

(2) **积分**：定义积分为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum f(x_i)\Delta x_i$，其中 $\|P\| = \max \Delta x_i$ 为分割模；

(3) **微分**：考虑函数 $f(x)$，设自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx 时函数 $f(x)$ 的相应增量为 Δf。若 Δf 可以写成 $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon$，并且 ε 满足：

- 当 $f(x)$ 为线性函数，即 $y = ax + b(a, b$ 为常数) 时，$\varepsilon = 0$；
- 当 $f(x)$ 为非线性函数时，$\varepsilon \neq 0$ 且在 Δx 趋于零时是比 Δx 高阶的无限小[3]，

则函数 $f(x)$ 称为**可微的**，并且称 $f'(x_0)\Delta x$ 为函数的 **微分**，记作 $\mathrm{d}f$。若把 x 看作 x 的函数，显然有 $\mathrm{d}x = \Delta x$，于是 $\mathrm{d}f = f'(x_0)\mathrm{d}x$。注意到，$\mathrm{d}f$ 不会是一个确定的值，而是取决于 Δx (或 $\mathrm{d}x$) 的值，在现代的语言中可以被看作从实数到实数的映射。当 Δx 比较小时，$\mathrm{d}f$ 近似是函数 $f(x)$ 与 Δx 相应的增量 Δf(因为可微性的第二点要求)。

这仅仅是一个非常简要并且不太严谨的介绍，但想必已经足够看出大概的思路。注意到，这一时期的数学家 (甚至现代的人) 仍然沿用了莱布尼茨的 $\mathrm{d}f, \mathrm{d}x, \int$ 等记号，这些记号具有直观、清晰的优势，但对于不太懂微积分的人来说也容易招致误解。

另外，这里只对近代经典微积分中的一元微积分进行了讨论，多元函数微积分的思想基本一致，仿此易得，从略。

小结 $\mathrm{d}f$ 在柯西的微积分中代表微分，这是一个将 Δx 变为实数 $f(x)\Delta x$ 的映射，在 Δx 比较小时，$\mathrm{d}f$ 近似等于函数 $f(x)$ 与 Δx 相应的增量 Δf。

3 近代微分几何对 $\mathrm{d}f$ 的解释

近代微分几何对函数的微分 $\mathrm{d}f$ 赋予了一种严谨的全新解释：$\mathrm{d}f$ 是意义十分明确的对偶矢量场。现在讲述这种新定义的灵感来源。

设 $\{x^\mu\}$ 是流形 M 的一个坐标系，坐标域为 O，f 是 M 上的函数，即 $f: M \to \mathbb{R}$，则 f 诱导出一个 n 元函数 $f(x^1, \cdots, x^n)$。为使得新定义更有用，我们还须从经典微积分的定义出发：设 $p \in O$，经典微积分把 $\mathrm{d}f|_p$ 定义作 p 点的函数值的一个增量，但这个增量取决于 Δx，若推广到经典多元微积分，则是取决于动点 (自变点) 从 p 出发“沿什么方向走多远”。既然 p 点的一个矢量 v 反映“从 p 出发沿什么方向走多远”，给定 $v \in V_p$ 便可使 $\mathrm{d}f|_p$ 真正“成为”一个实数 (增量)。既然我们想让 $\mathrm{d}f|_p$ 在给定 v 后能给出一个实数，$\mathrm{d}f|_p$ 就应定义作从 p 点的切空间 V_p 到 $\mathbb{R}$ 的映射。为使 $\mathrm{d}f|_p$ 具有经典微积分中的微分的性质，还应要求这个映射为线性，于是 $\mathrm{d}f|_p$ 就是 V_p 上的一个对偶矢量，$\mathrm{d}f$ 就是 O 上的一个对偶矢量场，这是对 $\mathrm{d}f$ 的最明确和最准确的解释。

[2] 在柯西时代，函数定义为：“当变量 x 的每个取值都对应变量 $f(x)$ 的唯一确定值时，称 $f(x)$ 是 x 的函数，$f(x)$ 仍然是数值而不是映射。

[3] 这里的“高阶的无限小”却不会有莱布尼茨理论中含糊不清的问题，翻译成数学语言就是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta x} = 0$，显然是能说清楚的。

现在我们来看一看近代微分几何对 $\mathrm{d}f$ 的定义与经典微积分中定义的相似之处。设曲线 $C(t)$ 满足 $C(0)=p, (\partial/\partial t)|_p = v, q = C(\alpha)$ 且 α 足够小，则 $\mathrm{d}f|_p$ 对 αv 作用的结果为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f\,|_p(\alpha v) &= \alpha v(f) = \alpha \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_p (f) = \alpha \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{f[C(\Delta t)] - f[C(0)]\} \\ &\cong \alpha\frac{1}{\alpha}[f(q)-f(p)] = f(q)-f(p) \equiv \Delta f, \end{aligned} \tag{1}$$

可见 $\mathrm{d}f|_p$(作用于 αv 后) 也近似给出 Δf。

物理学家往往对 $\mathrm{d}f$ 和 Δf 不加区别，喜欢说“$\mathrm{d}f|_p$ 等于 $f(q)-f(p)$，这当然是不准确的。然而，由于物理上常常允许一定的近似，把比较小的 Δf 近似看作 $\mathrm{d}f$ 的做法不但允许而且往往相当有用。爱因斯坦说过：“只要数学规律涉及现实，它们就不是确凿的；只要它们是确凿的，它们就不涉及现实。”对于物理学家来说，采用以 Δf 近似代替 $\mathrm{d}f$ 的做法并不过分。

参考文献

[1] Leibniz, G. W. (1684). *Nova Methodus pro Maximis et Minimis*. Acta Eruditorum. （莱布尼茨首次发表微积分的原始论文）

[2] Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris: Imprimerie Royale. pp. 32-35, 43-47（函数定义与极限理论）

[3] Cauchy, A.-L. (1823). *Résumé des Leçons sur le Calcul Infinitésimal*. Paris: De Bure. （积分严格定义与微积分基本定理）

[4] Riemann, B. (1854). *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*. Göttingen: Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften. （黎曼积分理论原始文献）

[5] Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis*. Amsterdam: North-Holland. （非标准分析严格化无穷小）

[6] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed.*. New York: McGraw-Hill. pp. 120-125（现代积分理论对比）

[7] Kleiner, I. (2004). *The Evolution of the Function Concept: A Brief Survey*. The College Mathematics Journal, 35(4), 292-300. （函数概念历史演变的权威综述）

[8] Alexander, A. (2014). *Infinitesimal: How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World*. New York: Farrar, Straus and Giroux. （无穷小争议的社会史）

[9] Calinger, R. (2016). *Leonhard Euler: Mathematical Genius in the Enlightenment*. Princeton: Princeton University Press. pp. 210-215（欧拉函数记号演变）

[10] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论（上册）. 2 版. 北京: 科学出版社, 2006. Print.（近代微分几何解释）