



---

---

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

## Análisis de ondas para una variante de la ecuación KdV no homogénea

### T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias en Matemáticas

Presenta:

Jesús Noyola Rodriguez

Director de Tesis: Georgy Omelyanov

Co-Director de Tesis: Martín Gildardo García A.

Hermosillo, Sonora, México,      Diciembre, 2016



# SINODALES

*Dr. Anatoli Merzón*

Universidad de Michoacán de San Nicolas de Hidalgo, Morelia, Michoacan, México.

*Dr. Martín Gildardo García Alvarado*

Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México.

*Dr. Daniel Olmos Liceaga*

Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México.

*Dr. Georgy Omelyanov*

Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México.

---

# Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias a el apoyo y estímulo de mis asesores, Doctor Georgy Omelyanov y el Doctor Martín Gildardo García Alvarado, bajo cuya supervisión escogí este tema y comencé la tesis.

A todos mis compañeros estudiantes y profesores por sus buenos comentarios y críticas, que sirven para mejorar y seguir adelante en el amplio mundo de las Matemáticas. Hay un pilar que me mantiene estar aquí y ahora. Agradezco infinitamente a Dios por haberme puesto en una buena Familia que me permite seguir adelante.

---

# Resumen

La finalidad de este trabajo es el estudio sobre la existencia y comportamiento de una clase de soluciones llamadas *solitón* para la ecuación de tipo de KdV:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g'(u)}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0, \quad (1)$$

donde  $u \stackrel{def}{=} u(x, t)$ ,  $\varepsilon > 0$  es un parámetro y  $g'(u) \stackrel{def}{=} \partial g(u)/\partial u \in \mathcal{C}^1$  es una función no lineal no necesariamente homogénea con la característica siguiente:  $a_1 u^{1+\delta_1} \leq g'(u) \leq a_2 u^{5-\delta_2}$  donde  $\delta_i$ ,  $a_i$  son constantes positivas. Para la ecuación (1) encontramos las condiciones suficientes que debe satisfacer la no-linealidad  $g'(u)$ , bajo las cuales la ecuación (1) admite soluciones de tipo solitón.

Basados en la teoría de perturbaciones encontramos una solución asintótica de tipo solitón para la ecuación (1) bajo una perturbación, considerando el parámetro  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. También se han encontrado las condiciones suficientes que nos permiten estudiar la amplitud y cola del solitón, que describen el comportamiento de dichas soluciones bajo las perturbaciones.

Se ha construido un esquema en diferencias finitas para resolver la ecuación (1) numéricamente. Además bajo una pequeña modificación al esquema simulamos las ondas perturbadas.

Realizamos varias simulaciones numéricas para diferentes tipos de no linealidades  $g'(u)$  de la ecuación (1). Un ejemplo muy importante de no linealidad es  $g'(u) = u^{3/2} + u^2$ , que aparece en la Física-Matemática en el estudio de plasma.

---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones integrables y no integrables . . . . .	1
1.2. Ecuación GKdV con no linealidad no homogénea . . . . .	6
1.3. Métodos Asintóticos para soluciones de tipo solitón . . . . .	7
<b>2. Existencia de Solución de tipo solitón para la GKdV</b>	<b>9</b>
2.1. El caso homogéneo . . . . .	9
2.2. El caso no homogéneo . . . . .	13
2.3. Descripción numérica . . . . .	29
2.4. Leyes de Conservación . . . . .	30
<b>3. Teoría de Perturbaciones</b>	<b>33</b>
3.1. Perturbación de la ecuación . . . . .	33
3.2. Construcción de la solución asintótica . . . . .	34
3.2.1. Definiciones y notaciones . . . . .	34
3.2.2. Esquema formal y construcción del término principal . . . . .	39
3.2.3. Construcción de la primera corrección . . . . .	42
3.2.4. Existencia de la segunda corrección . . . . .	49
3.2.5. Análisis de la amplitud del solitón . . . . .	51
3.2.6. Análisis de la cola del solitón . . . . .	54
	III

3.2.7. Resultado principal . . . . .	57
3.3. Ejemplo 1: $g'(u) = u^{3/2}$ , $f(u) = u(\mu - \nu u)$ . . . . .	58
<b>4. Esquema Numérico</b>	<b>62</b>
4.1. Diferencias finitas . . . . .	62
4.2. Esquema no lineal preliminar . . . . .	63
4.3. Linealización . . . . .	67
4.4. Algoritmo de la solución . . . . .	69
<b>5. Simulaciones Numéricas</b>	<b>72</b>
5.1. Simulación para la ecuación GKdV-g homogénea . . . . .	72
5.2. Ecuación GKdV-g bajo una perturbación . . . . .	81
5.2.1. Cálculo de la solución asintótica . . . . .	81
5.2.2. Comportamiento de la cola . . . . .	83
5.2.3. Solución numérica directa . . . . .	84
<b>Conclusión</b>	<b>89</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>

---

# Índice de figuras

1.1. Russell y la recreación del momento en el que observa el <i>solitón</i> . . .	3
2.1. Comportamiento de $\omega$ para $\eta \ll 1$ . . . . .	25
2.2. comportamiento de $\omega$ cuando $\eta \gg 1$ . . . . .	26
3.1. Onda de choque suavizada . . . . .	48
3.2. Características para la ecuación (3.49) . . . . .	55
3.3. Comportamiento de la amplitud . . . . .	61
5.1. intersección de las mallas $s_i, x_i$ . . . . .	73
5.2. Solución exacta y numérica para $g' = u^2$ , con amplitud $A = 1.3$ y centradas en $x_{10} = 1$ . . . . .	75
5.3. Solución exacta y numérica para $g' = u^4$ , con amplitud $A = 1.6$ y centradas en $x_{10} = 0$ . . . . .	75
5.4. Solución numérica para $g' = u^{3/2} + u^2$ , con amplitud $A = 1.0$ y cen- trada en $x_{10} = 0$ . . . . .	76
5.5. Un soliton propagandose con amplitud $A = 1$ de la ecuación GKdV- g con $g' = u^{3/2} + u^2$ . . . . .	77
5.6. intersección de las mallas $s_i, x_i$ . . . . .	78
5.7. Dos solitones con amplitudes $A_1 = 1.5$ y $A_2 = 0.5$ para la ecuación GKdV-g con $g' = u^{3/2} + u^2$ . . . . .	79
5.8. Proceso de la interacción de los solitones . . . . .	80
5.9. Figura 5.7 en escala más alta para el tiempo $t_1 = 0.6$ hasta el tiempo $t_2 = 1.48$ . . . . .	80
5.10. Comportamiento de la amplitud para $g'(u) = u^{3/2} + u^2$ . . . . .	83



5.11. Una onda distorsionada con amplitud inicial $A^0 = 3$ para la ecuación (5.2), con $A^0 < A^*$ . . . . .	85
5.12. Una onda distorsionada con amplitud inicial $A^0 = 4$ para la ecuación (5.2) . . . . .	85
5.13. Una onda distorsionada con amplitud inicial $A^0 = 6$ para la ecuación (5.2) . . . . .	86
5.14. Proceso de los solitones, $A_1^0 = 7.0$ , $A_2^0 = 4.5$ para la no-linealidad $g' = u^{3/2} + u^2$ , . . . . .	87
5.15. Proceso de los solitones, $A_1^0 = 7.0$ , $A_2^0 = 4.5$ , $\mu = 2$ , $\nu = 1/2$ , para la no-linealidad $g' = u^{3/2} + u^2$ , . . . . .	87

---

# Índice de Tablas

5.1. Errores máximos para la ecuación (5.1) con $g' = u^2$ y distintos tamaños de paso . . . . .	74
5.2. Errores máximos para la ecuación (5.1) con $g' = u^4$ . . . . .	74
5.3. Error en $T = 0.5$ para la KdV . . . . .	77
5.4. Error en $T = 0.5$ para la GKdV, $m = 4$ . . . . .	77

---

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Ecuaciones integrables y no integrables

Una ecuación diferencial parcial es una ecuación diferencial que contiene como incógnita una función de varias variables junto con sus derivadas parciales. Caso particulares de estas ecuaciones son las ecuaciones diferenciales ordinarias, que contienen funciones de una sola variable y sus derivadas.

**Definición 1.1.** Sea  $u \in \mathcal{C}^m$  una función de  $n$  variables independientes  $x_1, \dots, x_n$ . Consideremos la siguiente ecuación

$$F\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0. \quad (1.1)$$

I. Si  $n = 1$ , la ecuación (1.1) se denomina ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden  $m$ .

II. Si  $n \geq 2$  la ecuación (1.1) se le denomina ecuación diferencial parcial (EDP) de orden  $m$ .

La ecuación (1.1) es lineal si la función  $F$  es lineal respecto a las variables  $u, \partial u / \partial x_1, \dots, \partial^m u / \partial x_n^m$ ; en caso contrario se dice que (1.1) es no lineal. Las EDP se usan para modelar una amplia variedad de fenómenos físicos, tales como la propagación del sonido y del calor, la electrostática, electrodinámica, mecánica cuántica etc. Algunas EDP muy conocidas son la ecuación del calor, de onda, de Laplace etc.

Estas ecuaciones han sido bien estudiadas para los problemas de Cauchy, de frontera, mixtos, usando métodos como separación de variables, transformada de Fourier, método de las características, etc.[11, 27].

El objetivo de este trabajo es el estudio de una clase específica de soluciones llamadas de tipo *solitón* para ciertas clases de EDP no lineales. Como ya es conocido, encontrar soluciones explícitas para las EDP no lineales en general es algo casi imposible, por lo que en la mayoría de los casos, para analizar el comportamiento de las soluciones de una EDP, se recurre a los métodos numéricos y asintóticos.

En matemáticas no hay una manera única para definir un sistema diferencial integrable. Por ejemplo, está la integrabilidad de Frobenius, que se refiere a los sistemas diferenciales sobredeterminados<sup>1</sup>; en la teoría de sistemas dinámicos hamiltonianos existe la noción de integrabilidad de Liouville<sup>2</sup>, etc. En este trabajo diremos que una ecuación diferencial parcial es integrable si es posible encontrar una solución que satisface un problema general de valor inicial para la dicha ecuación. Un descubrimiento importante en los últimos 40 años, es el método de la Transformada de Dispersión Inversa (*Inverse Scattering Transform*, IST). Este método se usa para resolver algunas ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

El método IST fué introducido inicialmente por Gardner, Greene, Kruskal y Miura en 1967 [4], y generalizado después por otros autores, particularmente por Lax (1967), Zakharov y Shabat (1972) [15, 28] etc. La idea básica de este método es la introducción de un operador lineal que está determinado por la posición en el espacio de fase y que evoluciona bajo la dinámica del sistema en cuestión de una manera tal que su espectro (en un sentido adecuadamente generalizado), es invariante bajo la evolución del sistema en el tiempo. Esto proporciona, en ciertos casos suficientes invariantes o integrales de movimiento para hacer que el sistema diferencial sea completamente integrable [8, 21]. Una característica de las soluciones obtenidas por el método IST es la existencia de soluciones de tipo solitón. Las soluciones de tipo *solitón* son un tipo de ondas solitaria que se propaga en el tiempo sin deformarse en un medio dispersivo no lineal, también tienen la propiedad única conocida como *interacción de solitones*.

---

<sup>1</sup>Un sistema sobredeterminado es aquel que tiene un número de ecuaciones mayor al número de incógnitas. El teorema de Frobenius da las condiciones necesarias y suficientes para la búsqueda de un conjunto máximo de soluciones para tales sistemas

<sup>2</sup>Liouville probó que un sistema con  $n$  grados de libertad es integrable si posee  $n$  constantes de movimientos de involución

Esta propiedad se da cuando un solitón de mayor rapidez alcanza a otro solitón en un punto de interacción en el cual llegan a fusionarse, y después de un determinado tiempo éstos vuelven a su forma original excepto por un cambio de fase. El estudio de los solitones se remonta al año 1834, cuando el científico e ingeniero escocés John Scott Russell [24] observó la presencia de un nuevo tipo de ondas en la superficie de una canal con aguas poco profundas, a las que llamó *ondas de traslación*. (Ver Fig. 1.1).

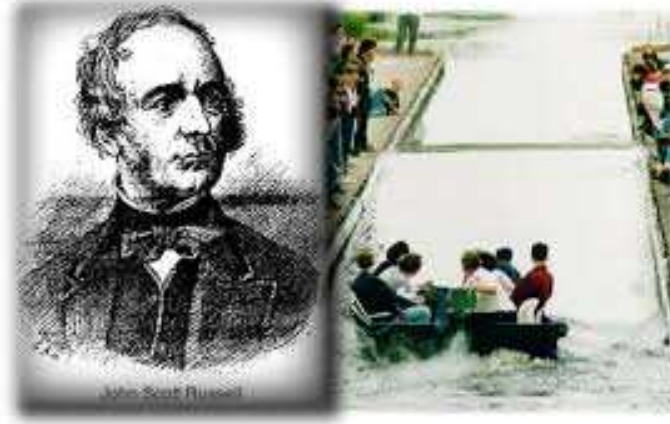


Figura 1.1: Russell y la recreación del momento en el que observa el *solitón*

Rusell realizó muchos experimentos con los solitones y llegó a encontrar empíricamente que la velocidad de propagación de las ondas  $v$  cumplía que

$$v^2 = G(h + a), \quad (1.2)$$

donde  $G$  representa la aceleración de la gravedad,  $h$  la profundidad del agua en un estado de equilibrio y  $a$  la amplitud de la onda. De (1.2) se deduce que a mayor amplitud mayor es la velocidad. Desde sus inicios las observaciones de Rusell fueron muy cuestionadas causando gran controversia entre los científicos de esa época. Todas estas discrepancias se resolvieron en el año 1895, cuando aparece la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) [18], que describe ondas propagándose en superficies de poca profundidad. La ecuación escrita en forma adimensional es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

donde  $u \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t)$  representa el desplazamiento vertical local de la superficie del agua respecto a la posición de equilibrio y  $\varepsilon > 0$  es un parámetro que caracteriza el valor de la dispersión. A las ecuaciones de la forma (1.3) con distintas no linealidades le llamaremos de tipo KdV. En sus trabajos, Korteweg y de Vries encontraron que la ecuación (1.3) admitía soluciones particulares de tipo solitón que cumplieran con lo observado por Russell [24] en 1834. La solución llamada solitón de (1.3) es una familia uniparamétrica (ver, por ejemplo [23]) dada por

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\beta(x - vt)}{2\varepsilon} \right), \quad (1.4)$$

donde  $A$  es un parámetro libre con el sentido físico de la amplitud de onda,  $v$  es la velocidad de propagación y  $\beta \neq 0$  es un parámetro que depende de  $A$  y  $v$ . Así pues, para la existencia de la onda solitaria (solitón) es necesario el término no lineal  $\partial u^2 / \partial x$  y el término dispersivo  $\partial^3 u / \partial x^3$ .

Después de un tiempo, en el año 1955, Enrico Fermi, John Pasta y Stanislaw Ulam (FPU) [2], usaron una de las primeras computadoras (MANIAC) para realizar experimentos numéricos. En ella simulaban la distribución de la energía en una cadena vibratoria sometida a una perturbación. En este experimento demostraron que aparecían los solitones como los que describía Russell [24]. Estos resultados motivaron en 1965 a Zabuski y Kruskal [10] a profundizar en el experimento de (FPU). Observaron que se formaban un tren de ondas solitarias con diferentes amplitudes, donde la más rápida interactuaba con otra más lenta en un determinado tiempo para posteriormente rebasarla y ambas recuperar su forma. Debido a este comportamiento Zabuski y Kruskal denominaron a estas ondas solitarias con el término *solitón*, como los conocemos actualmente, en concordancia con los nombres de partículas elementales como protón, electrón, etc.

Existen problemas que modelan importantes fenómenos físicos cuando la no linealidad en (1.3) es diferente de  $u^2$ ; por ejemplo, si la no linealidad es  $u^3$ , la ecuación (1.3) se conoce como ecuación modificada KdV (MKdV), que modela ondas acústicas en un plasma polvoso [26]; si la no linealidad es  $u^{3/2}$ , (1.3) es la ecuación de Schamel, que modela ondas acústicas de iones en un plasma, [25]. El caso más general se presenta cuando la potencia de la no linealidad de la ecuación (1.3) es sustituida por

una potencia  $m$ ; se le conoce como la ecuación generalizada de tipo KdV denotada como (GKdV). La ecuación GKdV escrita en forma adimensional es la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^m}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0, \quad (1.5)$$

donde  $m$  es un entero  $m \geq 2$ , y el parámetro  $\varepsilon > 0$ .

La existencia y unicidad de soluciones de problemas de Cauchy ( $x \in \mathbb{R}^1$ ) y mixtos ( $x \in [0, 1]$ ) para las ecuaciones GKdV, han sido estudiadas detalladamente usando métodos del Análisis Funcional para distintas clases de valores iniciales (ver [3, 5, 13], [12, 14, 26]).

Notemos, que tales métodos de investigación no obtienen las soluciones, pero describen sus propiedades en el sentido de pertenencia a algunos espacios funcionales. Al contrario, el método IST transforma el proceso de solución de las ecuaciones KdV y MKdV a un problema lineal que simplifica el proceso de estudio de tales soluciones. Además para soluciones específicas (solitones y ondas cnoidales) el método resulta en fórmulas explícitas que describen la interacción de tales ondas. (ver [8, 26, 28]). Al mismo tiempo, para las soluciones de (1.5) se establecieron importantes criterios de estabilidad, en particular para los solitones.

La solución exacta tipo solitón de (1.5) en forma explícita es:

$$u(x, t) = A \cosh^{-2/(m-1)} \left( \beta \frac{x - vt}{\varepsilon} \right), \quad (1.6)$$

donde

$$A = \left( \beta^2 \frac{m+1}{2} \right)^{1/(m-1)}, \quad v = \beta^2,$$

con  $\beta > 0$  un número arbitrario.

**Definición 1.2.** *Se dice que una solución  $u_0$  de un problema es estable respecto a valores iniciales, si para toda solución  $u$  a dicho problema se cumple que*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tal que si} \quad \|(u_0 - u)|_{t=0}\|_{X_1} \leq \varepsilon \quad \text{entonces} \quad \|u_0 - u\|_{X_2} \leq \delta,$$

para  $t > 0$  y algunos espacios normados  $X_1, X_2$

Bajo tales criterios se tienen los siguientes casos

- I. Si  $m = 2, 3, 4$  los solitones de (1.5) son estables. (ver Benjamin[1], Bona[14], [26], [17] y referencias ahí contenidas)
- II. Si  $m > 5$  Bona, Souganidis y Strauss [14] probaron usando tipos de argumentos en [17] la inestabilidad de los solitones. (ver [1], [14], [23] y referencias ahí contenidas)
- III. El caso  $m = 5$  es condicionalmente estable, es decir, la solución es estable si se verifica la condición siguiente:  $\|u_0\|_{L^2}^2 < 3\varepsilon/2\sqrt{5}$  [1, 14, 23]. Notemos que la condición anterior no se verifica para los solitones (1.6), dado que uniformemente en  $A > 0$  tenemos

$$\|u\|_{L^2}^2 = \varepsilon\pi\sqrt{3} > \varepsilon\frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Por tanto los solitones son inestables para todas amplitudes  $A > 0$ . (ver[14], [17] y referencias ahí contenidas)

Al mismo tiempo, para  $m > 3$  no hay todavía fórmulas explícitas para describir la interacción de solitones.

## 1.2. Ecuación GKdV con no linealidad no homogénea

Como ya mencionamos en la sección anterior, la clase de ecuaciones generalizadas Korteweg-de Vries GKdV ya han sido ampliamente estudiadas; además nos han abierto un gran campo de estudio sobre la existencia y estabilidad de los solitones en otras ecuaciones de tipo KdV. En lo sucesivo vamos a tratar la clase de ecuaciones GKdV con no linealidades no homogéneas. Escribimos la ecuación en su forma adimensional como sigue

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g'(u)}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0,} \quad (1.7)$$



donde  $\varepsilon > 0$  es un parámetro y  $g'(u) \in \mathcal{C}^1$  es una función de valores reales no necesariamente homogénea. Aquí  $g'(u) \stackrel{\text{def}}{=} \partial g(u)/\partial u$  y tiene la característica siguiente:  $a_1 u^{1+\delta_1} \leq g'(u) \leq a_2 u^{5-\delta_2}$ , donde  $a_i$  son constantes positivas y  $\delta_i \in (0, 4)$  para  $i = 1, 2$ . Notemos que si  $g'(u) = u$  entonces la ecuación (1.7) no admite soluciones de tipo solitón, y con  $g'(u) = u^5$  se obtiene el caso  $L^2$ -crítico, es decir, los solitones son inestables ya que no satisfacen las condiciones de estabilidad antes mencionadas en la ecuación (1.5). Un caso particular de la ecuación (1.7) se da cuando  $g'(u) = a_1 u^{q_1+1} + a_2 u^{q_2+2}$ . Observemos que si  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = \frac{1}{2}$  y  $a_i > 0$ ,  $i = 1, 2$  constantes, entonces tenemos la ecuación de Schamel-Korteweg- de Vries (S-KdV) que aparece en el estudio de ondas acústicas de un plasma donde esta presente la captura de electrones y el potencial electrostático. Ver [16]

Para la ecuación (1.7) vamos a probar la existencia de soluciones tipo solitón para después estudiar la estabilidad respecto a la parte derecha, mostrando como ejemplo la simulaciones numéricas para la ecuación S-KdV como un caso particular.

### 1.3. Métodos Asintóticos para soluciones de tipo solitón

Una vez probada la existencia de los solitones en las clases de ecuaciones GKdV no homogéneas, estudiamos el comportamiento de estas soluciones sometidas a una pequeña perturbación, usando como herramienta principal la teoría de perturbaciones, [27]. La teoría de perturbaciones es un método que nos permite encontrar una solución aproximada a un problema, partiendo de la solución exacta de un problema más simple relacionado al problema original, [27]

Vamos a considerar la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g'(u)}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = f(u, \varepsilon u_x, \varepsilon^2 u_{xx}, \dots), \quad (1.8)$$

donde  $f \in \mathcal{C}^\infty$  y  $\varepsilon > 0$  se trata como un parámetro pequeño. Usando el método [19] vamos a construir una solución asintótica de tipo solitón para el problema (1.8) con el fin de describir los solitones bajo la perturbación. Además la amplitud, el frente de onda y la velocidad de propagación de la solución asintótica tipo solitón de (1.8) son

funciones que dependen del tiempo. Una solución asintótica mód  $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$  de una ecuación diferencial con parámetro pequeño  $\varepsilon$ , es una función  $y_N = \mathcal{O}(1)$  tal que cuando es sustituida en la parte izquierda de la ecuación (1.8) resulta una función  $Y(x, t, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$  sobre la parte derecha de dicha ecuación. A la función  $y_0 = \mathcal{O}(1)$  tal que  $y_N - y_0 = \mathcal{O}(\varepsilon)$  es denominado el *término principal* de la solución asintótica. El símbolo  $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$  denota una función

$$Y(x, t, \varepsilon) \in C(\mathbb{R}^1 \times [0, T] \times (0, 1]),$$

tal que,

$$|Y(x, t, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^N,$$

uniformemente en  $x, t$ , donde  $M$  es una constante.

El trabajo de esta tesis está distribuido en la manera siguiente: en el capítulo 2 probamos la existencia de la solución tipo solitón para las ecuaciones GKdV no homogéneas (1.7), mostrando resultados para uno de los principales ejemplos como  $g'(u) = (u^{\frac{3}{2}} + u^2)$ . En el capítulo 3 estudiamos la estabilidad asintótica de los solitones sometidos a una perturbación pequeña. En el capítulo 4 mostramos un algoritmo numérico para calcular la solución numérica de el problema (1.7) usando propiedades como las leyes de conservación y probando nuestro algoritmo con ecuaciones que admiten soluciones exactas. Todas estas simulaciones se obtienen usando FORTRAN 90. En el capítulo 5 mostramos los resultados obtenidos.

---

## Capítulo 2

# Existencia de Solución de tipo solitón para la GKdV

### 2.1. El caso homogéneo

Consideremos ecuaciones de tipo GKdV [23], que escribimos en su forma adimensional, como sigue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^{q+1}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad q \in (1, 4), \quad (2.1)$$

donde  $u \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t)$ ,  $t \geq 0$  y  $\varepsilon > 0$ . Por simplicidad supongamos que  $u \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^1$ ,  $t > 0$ .

Para la ecuación (2.1) vamos a recordar algunos hechos bien conocidos respecto al estudio de solitones (ver, por ejemplo [22, 23]). Comenzamos con el cálculo de las soluciones tipo solitón para dicha ecuación.

Buscamos una solución autosimilar para (2.1):

$$u(x, t) = A\omega(\eta), \quad \eta = \frac{\beta}{\varepsilon}(x - vt - x_0), \quad (2.2)$$

donde  $\omega(\eta) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^1)$  es una función par que no depende de la amplitud, con las propiedades siguientes:

$$\omega(0) = 1, \quad \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \omega(\eta) = 0. \quad (2.3)$$

El número  $A > 0$  en (2.2) tiene el sentido de la amplitud de onda, que se define por la condición de normalidad  $\omega(0) = 1$  dada en (2.3),  $v > 0$  y  $x_0$  un valor fijo que representa la posición de la onda.

Calculando las derivadas correspondientes, usando la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -A v \frac{\beta}{\varepsilon} \frac{d\omega}{d\eta}, \\ \frac{\partial u^{q+1}}{\partial x} &= (q+1) A^{q+1} \frac{\beta}{\varepsilon} \omega^q \frac{d\omega}{d\eta}, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= A \left( \frac{\beta}{\varepsilon} \right)^3 \frac{d\omega}{d\eta}.\end{aligned}$$

Al sustituir estas derivadas en (2.1) se obtiene

$$-A v \frac{\beta}{\varepsilon} \frac{d\omega(\eta)}{d\eta} + (q+1) A^{q+1} \frac{\beta}{\varepsilon} \omega(\eta)^q \frac{d\omega(\eta)}{d\eta} + A \frac{\beta^3}{\varepsilon} \frac{d^3\omega(\eta)}{d\eta^3} = 0,$$

simplificando tenemos

$$-v \frac{d\omega(\eta)}{d\eta} + A^q \frac{d\omega(\eta)^{q+1}}{d\eta} + \beta^2 \frac{d^3\omega(\eta)}{d\eta^3} = 0.$$

Integrando obtenemos

$$-v \omega(\eta) + A^q \omega(\eta)^{q+1} + \beta^2 \frac{d^2\omega(\eta)}{d\eta^2} = C_1;$$

usando la segunda suposición de (2.3) elegimos la constante de integración  $C_1 = 0$ , lo cual implica

$$-v \omega(\eta) + A^q \omega(\eta)^{q+1} + \beta^2 \frac{d^2\omega(\eta)}{d\eta^2} = 0.$$

Multiplicando la expresión anterior por  $d\omega(\eta)/d\eta$  tenemos

$$-v \omega(\eta) \frac{d\omega(\eta)}{d\eta} + A^q \omega(\eta)^{q+1} \frac{d\omega(\eta)}{d\eta} + \beta^2 \frac{d^2\omega(\eta)}{d\eta^2} \frac{d\omega(\eta)}{d\eta} = 0,$$

reescribiendo la ecuación anterior se obtiene

$$-\frac{v}{2} \frac{d\omega(\eta)^2}{d\eta} + \frac{A^q}{q+2} \frac{d\omega(\eta)^{q+2}}{d\eta} + \frac{\beta^2}{2} \frac{d\left[\left(\frac{d\omega(\eta)}{d\eta}\right)^2\right]}{d\eta} = 0.$$

Integrando obtenemos

$$-\frac{v}{2} \omega(\eta)^2 + \frac{A^q}{q+2} \omega(\eta)^{q+2} + \frac{\beta^2}{2} \left(\frac{d\omega(\eta)}{d\eta}\right)^2 = C_2;$$

otra vez usando la segunda suposición de (2.3) elegimos  $C_2 = 0$ , se sigue

$$-\frac{v}{2} \omega(\eta)^2 + \frac{A^q}{q+2} \omega(\eta)^{q+2} + \frac{\beta^2}{2} \left(\frac{d\omega(\eta)}{d\eta}\right)^2 = 0,$$

despejando obtenemos

$$\frac{\beta}{\sqrt{v}} \frac{d\omega(\eta)}{d\eta} = \pm \omega(\eta) \sqrt{1 - \frac{2}{q+2} \frac{A^q}{v} \omega(\eta)^q}. \quad (2.4)$$

En la ecuación (2.4) el número  $\beta/\sqrt{v}$  es una constante de escala para  $\eta$ ,  $\eta^* = \eta\sqrt{v}/\beta$ , y dado que el parámetro  $\beta$  es libre, elegimos sin pérdida de generalidad

$$\frac{\beta}{\sqrt{v}} = 1, \quad (2.5)$$

por tanto la ecuación (2.4) la escribimos en la manera siguiente:

$$\frac{d\omega(\eta)}{d\eta} = \pm \omega(\eta) \sqrt{1 - \frac{2}{q+2} \frac{A^q}{v} \omega(\eta)^q}. \quad (2.6)$$

**Nota 2.1.** Si  $f$  es una función diferenciable de orden  $n$  y es par entonces todas sus derivadas de orden impar se anulan en el origen.

Esto es claro dado que si  $f$  es par entonces  $f(x) = f(-x)$ , esto implica que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x) = -f^{(n)}(-x), \quad \text{si } n \text{ es impar,}$$

de donde tenemos

$$f^{(n)}(0) = -f^{(n)}(0), \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

Como  $\omega(\eta)$  es una función par, tenemos que  $(d\omega/d\eta)|_{\eta=0} = 0$ . Usando la condición de normalidad (2.3) en (2.6) tenemos:

$$0 = \sqrt{1 - \frac{2}{q+2} \frac{A^q}{v}},$$

de donde obtenemos la relación entre la amplitud y el parámetro  $v$ ,

$$A^q = \frac{q+2}{2}v. \quad (2.7)$$

Usando (2.5) y (2.7) la ecuación (2.6) toma la forma:

$$-\omega(\eta)^2 + \omega(\eta)^{q+2} + \left( \frac{d\omega(\eta)}{d\eta} \right)^2 = 0,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{d\omega(\eta)}{d\eta} &= -\omega(\eta)\sqrt{1 - \omega(\eta)^q}, \quad \eta > 0, \\ \omega(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

El problema (2.8) tiene solución en forma explícita para toda  $q > 0$ . Para encontrarla integramos

$$\eta = - \int_1^\omega \frac{dz}{z\sqrt{1 - z^q}} = \int_\omega^1 \frac{dz}{z\sqrt{1 - z^q}},$$

haciendo el cambio de variable  $1 - z^q = y^2$ , de donde tenemos  $dy = -qz^{q-1}dz/2\sqrt{1 - z^q}$ , se sigue que

$$\eta = \int_{\sqrt{1-\omega^q}}^0 \frac{\frac{-2ydy}{qz^{q-1}}}{zy} = \frac{2}{q} \int_0^{\sqrt{1-\omega^q}} \frac{dy}{1 - y^2}. \quad (2.9)$$

De (2.9) encontramos

$$\omega(\eta) = \left[ \operatorname{sech} \left( \frac{q}{2} \eta \right) \right]^{\frac{2}{q}}. \quad (2.10)$$

Como resultado para la ecuación (2.1) tenemos:

I. Usando (2.10) se obtiene la solución para la ecuación (2.1)

$$u(t, x) = A \left[ \operatorname{sech} \left( \frac{q}{2} \frac{\beta}{\varepsilon} (x - vt - x_0) \right) \right]^{\frac{2}{q}}. \quad (2.11)$$

II. Las siguientes relaciones para los parámetros  $A$ ,  $\beta$  y  $v$

$$v = \beta^2, \quad A = \left( \frac{q+2}{2} \beta^2 \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.12)$$

De las igualdades (2.12) vemos que solamente hay dos relaciones para 3 parámetros, por tanto, la solución (2.11) define una familia de solitones.

## 2.2. El caso no homogéneo

En esta sección vamos a realizar la primera parte de nuestra investigación, la cual, es una generalización de los resultados dados en la sección 2.1, es decir, vamos a probar la existencia de soluciones tipo solitón para la ecuación

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g'(u)}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0,} \quad (2.13)$$

donde  $\varepsilon > 0$  un parámetro,  $g'(u) \in \mathcal{C}^1$  es una función de valores reales generalmente no homogénea, con las característica siguiente:

$$a_1 u^{1+\delta_1} \leq g'(u) \leq a_2 u^{5-\delta_2}, \quad \delta_1, \delta_2 \in (0, 4), \quad (2.14)$$

con  $a_1, a_2$  son constantes positivas y  $g'(u) \stackrel{\text{def}}{=} \partial g(u)/\partial u$ . Es claro que debemos suponer que el signo de  $u$  es tal que  $g'(u)$  es una función de valores reales; sin embargo, por simplicidad supongamos que  $u \geq 0$ .

Para la ecuación (2.13) encontramos las condiciones suficientes que garantizan la existencia de soluciones tipo solitón para dicha ecuación. Al inicio vamos a definir las propiedades de una función para que sea una solución de tipo solitón. Análogamente a los solitones en el caso homogéneo damos la definición siguiente:

**Definición 2.1.** Decimos que una función,  $u \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t, \varepsilon)$  es un solitón, si

$$u = A\omega(\eta, A), \quad \eta = \beta \frac{(x - vt - x_0)}{\varepsilon}, \quad (2.15)$$

donde  $\beta \neq 0$ ,  $v > 0$ ,  $A > 0$  representa la amplitud de onda solitaria, es decir,  $\omega(0, A) = 1$  y  $\omega(\eta, A)$  es una función par,  $\omega(\eta, A) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$  tal que

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \omega(\eta, A) = 0, \quad \forall A > 0, \quad (2.16)$$

donde

$$\omega(\eta, A) \leq Ce^{-c|\eta|}, \quad |\eta| \rightarrow \infty, \quad (2.17)$$

con algunas constantes  $C > 0$  y  $c > 0$ , es decir,  $\omega(\eta, \cdot) \rightarrow 0$  exponencialmente cuando  $|\eta| \rightarrow \infty$ . Además, supondremos que  $\partial\omega(\eta, A)/\partial A$  existe y es continua.

El primer resultado de la tesis contiene las condiciones suficientes para la existencia de solución tipo solitón de la ecuación (2.13), las cuales se enuncian en el teorema siguiente:

**Teorema 2.1.** Supongamos que  $g'(z)$  satisface (2.14) y, además

$$g(z) = z^2 g_1(z), \quad (2.18)$$

$$g_1(z) > 0, \quad g'_1(z) > 0, \quad \forall z > 0 \quad (2.19)$$

donde  $g_1(z) \in C^\infty, \forall z > 0$  y  $g_1(z)$  satisface la condición de Hölder uniformemente en  $z \geq 0$ . Entonces existen soluciones de tipo solitón para la ecuación (2.13).

**Nota 2.2.** Según la suposición (2.14) se tiene que  $g(0) = 0$  y  $g'(0) = 0$ .

A continuación daremos la demostración del Teorema 2.1



*Demostración.* Calculando las respectivas derivadas de (2.13) tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -A v \frac{\beta}{\varepsilon} \frac{d\omega}{d\eta}, \\ \frac{\partial g'(u)}{\partial x} &= A g''(A\omega) \frac{\beta}{\varepsilon} \frac{d\omega}{d\eta}, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= A \left( \frac{\beta}{\varepsilon} \right)^3 \frac{d^3 \omega}{d\eta^3}.\end{aligned}$$

Al sustituir estas derivadas en (2.13) se obtiene

$$0 = -\frac{Av\beta}{\varepsilon} \frac{d\omega}{d\eta} + \frac{A\beta}{\varepsilon} g''(A\omega) \frac{d\omega}{d\eta} + \frac{\varepsilon^2 A \beta^3}{\varepsilon^3} \frac{d^3 \omega}{d\eta^3},$$

simplificando obtenemos

$$0 = -v \frac{d\omega}{d\eta} + g''(A\omega) \frac{d\omega}{d\eta} + \beta^2 \frac{d^3 \omega}{d\eta^3}.$$

La expresión anterior puede ser escrita como sigue

$$0 = -v \frac{d\omega}{d\eta} + \frac{1}{A} \frac{d}{d\eta} \{g'(A\omega)\} + \beta^2 \frac{d^3 \omega}{d\eta^3}.$$

Integrando obtenemos

$$-v\omega + \frac{1}{A} g'(A\omega) + \beta^2 \frac{d^2 \omega}{d\eta^2} = C;$$

usando la segunda suposición de (2.16) y la implicación de la suposición (2.18) tenemos que la constante de integración es cero

$$C = g'(0) = 0. \tag{2.20}$$

Sustituyendo el valor de  $C$  tenemos

$$-v\omega + \frac{1}{A} g'(A\omega) + \beta^2 \frac{d^2 \omega}{d\eta^2} = 0,$$

multiplicar por  $d\omega/d\eta$ , y reescribiendo obtenemos

$$-\frac{v}{2} \frac{d\omega^2}{d\eta} + \frac{1}{A^2} \frac{d}{d\eta} \{g(A\omega)\} + \frac{\beta^2}{2} \frac{d}{d\eta} \left\{ \left( \frac{d\omega}{d\eta} \right)^2 \right\} = 0.$$

Integrando se obtiene

$$-\frac{v}{2} \omega^2 + \frac{1}{A^2} g(A\omega) + \frac{\beta^2}{2} \left( \frac{d\omega}{d\eta} \right)^2 = C_1;$$

otra vez usando (2.16) y la implicación de (2.18) tenemos

$$C_1 = g(0) = 0; \quad (2.21)$$

sustituyendo  $C_1$  se sigue

$$-\frac{v}{2} \omega^2 + \frac{1}{A^2} g(A\omega) + \frac{\beta^2}{2} \left( \frac{d\omega}{d\eta} \right)^2 = 0;$$

despejando obtenemos

$$\frac{\beta^2}{v} \left( \frac{d\omega}{d\eta} \right)^2 = \omega^2 - \frac{2}{A^2} \frac{1}{v} g(A\omega). \quad (2.22)$$

Usando la suposición (2.18) tenemos

$$\frac{\beta}{\sqrt{v}} \frac{d\omega}{d\eta} = \pm \omega \sqrt{1 - \frac{2}{v} g_1(A\omega)}.$$

De manera similar a (2.5) en el caso homogéneo elegimos sin pérdida de generalidad

$$\frac{\beta}{\sqrt{v}} = 1, \quad (2.23)$$

obtenemos

$$\frac{d\omega}{d\eta} = \pm \omega \sqrt{1 - \frac{2}{v} g_1(A\omega)}. \quad (2.24)$$

Usando la condición de normalidad en (2.16) y considerando que  $\omega$  es una función

par de (2.24) tenemos

$$0 = \sqrt{1 - \frac{2}{v}g_1(A)},$$

por tanto

$$v = \beta^2 = 2g_1(A), \quad (2.25)$$

usando (2.23) y (2.25) tenemos

$$\frac{d\omega}{d\eta} = \pm \omega \sqrt{1 - \frac{g_1(A\omega)}{g_1(A)}}, \quad (2.26)$$

donde, para encontrar la solución de tipo solitón, elegimos (+) para  $\eta < 0$  y (-) para  $\eta > 0$ .

De la ecuación (2.26), haciendo  $G(\omega, A) = g_1(A\omega)/g_1(A)$ , tenemos el problema de Cauchy siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\eta} &= F(\omega, A), \quad \eta > 0, \\ \omega(0, A) &= 1, \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde  $F(\omega, A) = -\omega \sqrt{1 - G(\omega, A)}$ .

Está claro que la función  $F(\omega, A)$  en la variable  $\omega$  se satisface lo siguiente:

1.-  $F(\omega, A)$  es continua  $\forall \eta \geq 0$ ; es claro que según el Teorema de Peano [9] la solución al problema (2.27) existe.

2.- Para  $\eta \geq \delta > 0$ , se tiene que  $F(\omega, A) \in C^\infty$ .

Ahora consideramos el problema de Cauchy siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\eta} &= F(\omega, A), \quad \eta > \delta, \\ \omega(\delta, A) &= \omega^0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde  $\omega^0 \in (0, 1)$ . Tenemos de la parte 2 que la solución al problema (2.28) existe y es única.

Ahora vamos a probar una propiedad adicional de  $F(\omega, A)$ .

**Lema 2.1.** *Bajo las condiciones (2.16), (2.18) y (2.19) para la función  $g(u)$ , la*

función  $F(\omega, \cdot)$  satisface la condición de Hölder con índice  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\forall \eta \in [0, \delta]$ ,  $\delta > 0$ .

*Demostración.* Sea  $\omega_2 = \omega(\eta_2, A)$  y  $\omega_1 = \omega(\eta_1, A)$ , tenemos

$$|F(\omega_2, A) - F(\omega_1, A)| = \left| \omega_2 \sqrt{1 - G(\omega_2, A)} - \omega_1 \sqrt{1 - G(\omega_1, A)} \right|,$$

multiplicando por el conjugado del término de la parte derecha tenemos

$$|F(\omega_2, A) - F(\omega_1, A)| = \left| \frac{\omega_2^2 (1 - G(\omega_2, A)) - \omega_1^2 (1 - G(\omega_1, A))}{\sqrt{\omega_2^2 (1 - G(\omega_2, A))} + \sqrt{\omega_1^2 (1 - G(\omega_1, A))}} \right|,$$

usando que  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{|x - y|}$  se sigue

$$|F(\omega_2, A) - F(\omega_1, A)| \leq \left| \frac{\omega_2^2 (1 - G(\omega_2, A)) - \omega_1^2 (1 - G(\omega_1, A))}{\sqrt{|\omega_2^2 (1 - G(\omega_2, A)) - \omega_1^2 (1 - G(\omega_1, A))|}} \right|,$$

de donde tenemos

$$|F(\omega_2, A) - F(\omega_1, A)| \leq \sqrt{|\omega_2^2 (1 - G(\omega_2, A)) - \omega_1^2 (1 - G(\omega_1, A))|}.$$

Usando las condiciones (2.18) y (2.19) obtenemos

$$\begin{aligned} |F(\omega_2, A) - F(\omega_1, A)|^2 &\leq |\omega_2^2 (1 - G(\omega_2, A)) - \omega_1^2 (1 - G(\omega_1, A))| \\ &= \left| \omega_2^2 - \omega_1^2 + \frac{1}{g(A)} (g(A\omega_1) - g(A\omega_2)) \right| \\ &\leq C_1 |\omega_2 - \omega_1| + C_2 |\omega_2 - \omega_1| \\ &= C |\omega_2 - \omega_1|, \end{aligned}$$

dado que  $g(u) \in \mathcal{C}^2$  es Lipschitz y  $C_1 = \max |\omega_1 + \omega_2|$ .

Por tanto

$$|F(\omega_2, A) - F(\omega_1, A)| \leq C |\omega_2 - \omega_1|^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

□

Del problema (2.27) tenemos lo siguiente:

I. El problema (2.27) definido como (2.28) tiene solución y es única para  $\eta \geq \delta$

con  $\omega^0 \in (0, 1)$ . De manera que podemos resolver el problema de Cauchy (2.28) ya sea analítica o numéricamente.

II. Como ya mencionamos anteriormente para  $\eta \leq \delta$ , la solución al problema (2.27) existe, pero no es única.

Ahora vamos a construir la solución al problema (2.27) para  $0 < \eta \leq \delta$  y encontrar  $\omega^0$ . Usando las condiciones (2.15), (2.16) y (2.17) dadas en la definición (2.1), escribimos a  $\omega(\eta, \cdot)$  en su serie Taylor alrededor del cero como:

$$\omega(\eta, \cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{W_{2i}}{(2i)!} \eta^{2i}, \quad \eta > 0, \quad (2.30)$$

donde  $W_{2i}$  representa las derivadas de orden par de  $\omega$

$$W_{2i} = \left. \frac{d^{2i} \omega(\eta, A)}{d\eta^{2i}} \right|_{\eta=0}. \quad (2.31)$$

Usando la ecuación (2.26) calculamos las derivadas de  $\omega$  de todos los ordenes

$$V_0 = \omega,$$

$$V_1 = \frac{d\omega}{d\eta} = -\omega \sqrt{1 - G(\omega, \cdot)},$$

$$V_2 = -\frac{d\omega}{d\eta} \sqrt{1 - G(\omega, \cdot)} + \omega \frac{1}{2\sqrt{1 - G(\omega, A)}} \frac{\partial G}{\partial \omega} \frac{d\omega}{d\eta},$$

simplificando el término  $V_2$  tenemos

$$V_2 = (1 - G(\omega, \cdot))\omega - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial G(\omega, \cdot)}{\partial \omega},$$

a partir de  $V_2$  calculando las demás derivadas bien definidas alrededor del cero

$$V_3 = \frac{dV_2}{d\eta} = \frac{d\omega}{d\eta} \left( 1 - G - 2\omega \frac{\partial G(\omega, \cdot)}{\partial \omega} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^2} \right),$$

$$V_4 = \frac{d^2 \omega}{d\eta^2} \left( 1 - G - 2\omega \frac{\partial G(\omega, \cdot)}{\partial \omega} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^2} \right) +$$

$$+ \left( \frac{d\omega}{d\eta} \right)^2 \left( -3 \frac{\partial G(\omega, \cdot)}{\partial \omega} - 3\omega \frac{\partial^2 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^2} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^3 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^3} \right),$$

$$\begin{aligned} V_5 &= \frac{d^3 \omega}{d\eta^3} \left( 1 - G - 2\omega \frac{\partial G(\omega, \cdot)}{\partial \omega} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^2} \right) + \\ &+ \left( \frac{d^2 \omega}{d\eta^2} \frac{d\omega}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \left[ \left( \frac{d\omega}{d\eta} \right)^2 \right] \right) \left( -3 \frac{\partial G(\omega, \cdot)}{\partial \omega} - 3\omega \frac{\partial^2 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^2} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^3 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^3} \right) + \\ &+ \left( \frac{d\omega}{d\eta} \right)^3 \left( -6 \frac{\partial^2 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^2} - 4\omega \frac{\partial^3 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^3} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^4 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^4} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_6 &= \frac{d^4 \omega}{d\eta^4} \left( 1 - G - 2\omega \frac{\partial G(\omega, \cdot)}{\partial \omega} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^2} \right) + \\ &+ \left\{ \frac{d^3 \omega}{d\eta^3} \frac{d\omega}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{d^2 \omega}{d\eta^2} \frac{d\omega}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \left( \frac{d\omega}{d\eta} \right)^2 \right] \right\} \left( -3 \frac{\partial G(\omega, \cdot)}{\partial \omega} - 3\omega \frac{\partial^2 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^3 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^3} \right) + \left\{ \left( \frac{d^2 \omega}{d\eta^2} \frac{d\omega}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \left[ \left( \frac{d\omega}{d\eta} \right)^2 \right] \right) \frac{d\omega}{d\eta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{d\eta} \left[ \left( \frac{d\omega}{d\eta} \right)^3 \right] \right\} \left( -6 \frac{\partial^2 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^2} - 4\omega \frac{\partial^3 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^3} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^4 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^4} \right) + \\ &+ \left( \frac{d\omega}{d\eta} \right)^4 \left( -10 \frac{\partial^3 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^3} - 5\omega \frac{\partial^4 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^4} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^5 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^5} \right). \end{aligned}$$

Sea  $L = 1 - G(\omega, \cdot) - 2\omega \frac{\partial G(\omega, \cdot)}{\partial \omega} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^2}$ , tenemos

$$\frac{d^n L}{d\eta^n} = \sum_{i=1}^n C_i \left\{ - \binom{i+2}{i} \frac{\partial^i G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^i} - \binom{i+2}{i+1} \frac{\partial^{i+1} G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^{i+1}} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^{i+2} G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^{i+2}} \right\}.$$

De manera que  $V_n$  tiene la forma para  $n \geq 2$

$$V_{n+2} = \frac{d^n \omega}{d\eta^n} L + C \frac{d^{n-1} L}{d\eta^{n-1}}, \quad (2.32)$$

reescribiendo (2.32) obtenemos los términos  $V_n$  para  $n \geq 4$

$$\begin{aligned} V_n = V_{n-2}L - \sum_{i=3}^{n-1} C_i \left\{ \binom{i}{i-2} \frac{\partial^{i-2} G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^{i-2}} + \right. \\ \left. + \binom{i}{i-1} \frac{\partial^{i-1} G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^{i-1}} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^i G(\omega, \cdot)}{\partial \omega^i} \right\}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

ahora usando la ecuación (2.33) y dado que  $g$  es acotada, tenemos

$$|W_n| = |V_n|_{\eta=0} \leq n! C_1 (C_2 A)^n, \quad (2.34)$$

además dado que  $0 < \eta \leq \delta$  tenemos

$$\left| \frac{1}{(2i)!} W_{2i} \eta^{2i} \right| \leq C_1 (C_2 A \delta)^{2i} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } i \rightarrow \infty \quad (2.35)$$

para  $C_2 A \delta < 1$ . Por tanto la serie (2.30) converge para  $\eta \in [0, \delta]$  y  $\delta$  suficientemente pequeño. Ahora podemos definir  $\omega^0$ , que aparece en el problema (2.28), como sigue

$$\omega^0 = \omega(\delta, A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} W_{2i} \eta^{2i} \Big|_{\eta=\delta}. \quad (2.36)$$

**Nota 2.3.** Es sorprendente ver que para la ecuación KdV uno de los casos integrales, no hay unicidad de la solución para  $\eta \in [0, \delta]$ .

Realmente tomando  $g'(u) = u^2$  en la ecuación (2.13) y usando (2.18), (2.25) donde  $g_1(u) = u/3$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\eta} &= -\omega \sqrt{1-\omega}, \quad \eta > 0, \\ \omega(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Es claro que la función  $-\omega \sqrt{1-\omega}$  no satisface la condición de Lipschitz para  $\omega \in [1-\delta, 1]$  con  $0 < \delta \ll 1$ .

Por tanto buscamos la solución al problema (2.37) para  $0 < \eta \ll 1$ , usando la fórmula (2.36).

Usando la fórmula (2.30) calculamos la solución con precisión  $\mathcal{O}(\eta^8)$

$$\omega_{\text{num}} = 1 - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{4!}\eta^4 - \frac{17}{4(6!)}\eta^6 + \mathcal{O}(\eta^8), \quad (2.38)$$

Por otro lado usando (2.10) tenemos la solución exacta al problema (2.37)

$$\omega_{\text{exac}} = \text{sech}^2\left(\frac{\eta}{2}\right). \quad (2.39)$$

Calculando las derivadas de (2.39) y evaluando en cero tenemos

$$\begin{aligned} \omega_{\text{exac}}|_{\eta=0} &= 1, & \left.\frac{d\omega_{\text{exac}}}{d\eta}\right|_{\eta=0} &= 0, & \left.\frac{d^2\omega_{\text{exac}}}{d\eta^2}\right|_{\eta=0} &= -\frac{1}{2}, & \left.\frac{d^3\omega_{\text{exac}}}{d\eta^3}\right|_{\eta=0} &= 0, \\ \left.\frac{d^4\omega_{\text{exac}}}{d\eta^4}\right|_{\eta=0} &= 1, & \left.\frac{d^5\omega_{\text{exac}}}{d\eta^5}\right|_{\eta=0} &= 0, & \left.\frac{d^6\omega_{\text{exac}}}{d\eta^6}\right|_{\eta=0} &= -\frac{17}{4}. \end{aligned}$$

De manera que

$$\omega_{\text{exac}} = 1 - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{4!}\eta^4 - \frac{17}{4(6!)}\eta^6 + \mathcal{O}(\eta^8).$$

De donde vemos que los primeros términos de la serie de Taylor de la solución exacta del problema (2.37), coinciden con la solución numérica dada por la fórmula (2.30).

## Comportamiento de la solución

De el problema (2.27) tenemos

$$\eta = - \int_1^\omega \frac{dz}{z\sqrt{1-G(z,A)}} = \int_\omega^1 \frac{dz}{z\sqrt{1-G(z,A)}}. \quad (2.40)$$

Notemos que la función  $1/z\sqrt{1-G(z,A)}$ , tiene los dos puntos de singularidad siguientes:  $z = 1$  y  $z = 0$ .

Primero para el punto de singularidad  $z = 1$ , vamos a probar que la integral de lado derecho de (2.40) existe, y estudiaremos el comportamiento de la función  $\omega$  cuando  $z$  tiende a las singularidades  $z = 0$  y  $z = 1$ .

1. Según la suposición (2.16) y la fórmula (2.26) se tiene que  $G(z,A) \rightarrow 1$  cuando



$z \rightarrow 1$ .

Reescribimos la integral (2.40) en la forma

$$\eta = \left\{ \int_{\omega}^{1-\nu} + \int_{1-\nu}^1 \right\} \frac{dz}{z \sqrt{1 - G(z, A)}}, \quad (2.41)$$

donde  $0 < \nu < 1$  es una constante.

Notemos que la primera integral de (2.41)

$$\int_{\omega}^{1-\nu} \frac{dz}{z \sqrt{1 - G(z, A)}} \quad (2.42)$$

es acotada para todos  $\omega \in (\nu_0, \nu)$  para  $\nu_0 > 0$ .

Sea  $z = 1 - y$ , de (2.41) tenemos

$$\int_{1-\nu}^1 \frac{dz}{z \sqrt{1 - G(z, A)}} = \int_0^{\nu} \frac{dy}{(1-y) \sqrt{1 - G((1-y), A)}}. \quad (2.43)$$

Ahora desarrollando la función  $g_1$  en su serie de Taylor alrededor de  $A$

$$g_1(A(1-y)) = g_1(A) - Ayg'_1(A) + \mathcal{O}(y^2),$$

de donde tenemos

$$\begin{aligned} 1 - G((1-y), A) &= 1 - \frac{1}{g_1(A)} \{g_1(A) - Ayg'_1(A) + \mathcal{O}(y^2)\} \\ &= \frac{Ag'_1(A)}{g_1(A)} y + \mathcal{O}(y^2). \end{aligned}$$

Sustituyendo las identidades anteriores en (2.43) tenemos

$$\int_{1-\nu}^1 \frac{dz}{z \sqrt{1 - G(z, A)}} = \int_0^{\nu} \frac{dy}{(1-y) \sqrt{A \frac{g'_1(A)}{g_1(A)} y + \mathcal{O}(y^2)}}. \quad (2.44)$$

Además veamos que

$$\sqrt{1 - G(z, A)} = \sqrt{A \frac{g_1'(A)}{g_1(A)} y (1 + \mathcal{O}(y))^{1/2}},$$

$$\frac{1}{1 - y} = 1 + \mathcal{O}(y) \quad \text{dado que } y < 1.$$

Por tanto de (2.44) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{1-\nu}^1 \frac{dz}{z \sqrt{1 - G(z, A)}} &= \sqrt{\frac{g_1(A)}{A g_1'(A)}} \int_0^\nu \frac{1}{\sqrt{y}} (1 + \mathcal{O}(y))^{1/2} dy \\ &= \sqrt{\frac{g_1(A)}{A g_1'(A)}} \int_0^\nu \frac{1}{\sqrt{y}} (1 + \mathcal{O}(y)) dy, \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde  $g_1'(A) > 0$ ,  $g_1(A) > 0$ .

Calculando la integral en (2.45) se tiene

$$\int_{1-\nu}^1 \frac{dz}{z \sqrt{1 - G(z, A)}} = C \sqrt{\nu} + \mathcal{O}(\nu^{3/2}). \quad (2.46)$$

Por tanto la segunda integral en (2.41) existe uniformemente en  $\nu \geq 0$ .

2. Consideremos el caso cuando  $\omega \rightarrow 1$ .

Según (2.40) si  $\omega \rightarrow 1 \Rightarrow z \rightarrow 1$ . Repitiendo el cálculo anterior y denotando  $\omega = 1 - \nu$  para  $\nu \ll 1$ , tenemos que la primera integral de (2.41) tiende a cero. Y usando (2.46) de (2.41) tenemos

$$\eta = C \sqrt{1 - \omega} + \mathcal{O}((1 - \omega)^{3/2}) \quad (2.47)$$

De donde tenemos que si  $\omega \rightarrow 1$  entonces  $\eta \rightarrow 0$ , es decir, se verifica la suposición (2.16).

De (2.47) tenemos

$$\left( \frac{\eta}{C} \right)^2 = 1 - \omega + \mathcal{O}((1 - \omega)^2),$$

De aquí se sigue

$$\begin{aligned}\omega &= 1 - \left(\frac{\eta}{C}\right)^2 + \mathcal{O}\left\{1 - \left(1 - \left(\frac{\eta}{C}\right)^2\right)\right\}^2 \\ &= 1 - \left(\frac{\eta}{C}\right)^2 + \mathcal{O}(\eta^4).\end{aligned}$$

Por tanto, sin pérdida de generalidad, se dice que  $\omega \rightarrow 1$  como el polinomio  $1 - \eta^2$ , como se muestra en la figura (2.1) siguiente:

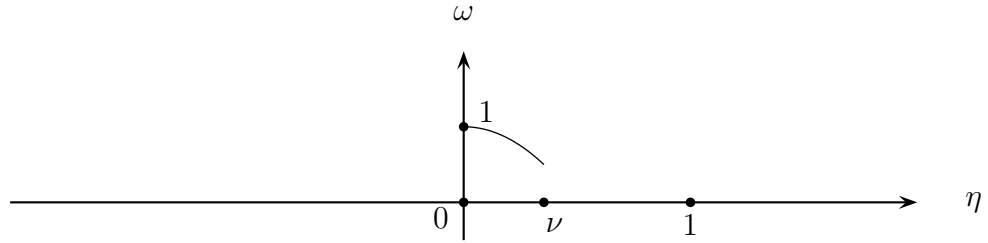


Figura 2.1: Comportamiento de  $\omega$  para  $\eta \ll 1$ .

3. De manera similar al caso 1. anterior, usando las suposiciones (2.16) y la fórmula (2.26), tenemos que  $G(z, A) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow 0$ .

Reescribimos la integral (2.40) como sigue:

$$\eta = \left\{ \int_{\omega}^{\mu} + \int_{\mu}^1 \right\} \frac{dz}{z \sqrt{1 - G(z, A)}}, \quad (2.48)$$

donde  $\mu > 0$  es una constante suficientemente pequeña.

De la ecuación (2.48) tenemos

$$\begin{aligned}\eta &= \int_{\omega}^{\mu} \frac{dz}{z \sqrt{1 - G(z, A)}} + C_{\mu} \\ &\approx \int_{\omega}^{\mu} \frac{dz}{z} + C_{\mu} \\ &\approx C'_{\mu} - \ln \omega;\end{aligned}$$

despejando  $\omega$  se tiene

$$\omega \approx C'_{\mu} e^{-\eta}, \quad (2.49)$$

de donde tenemos que si  $\omega \rightarrow 0$  entonces  $\eta \rightarrow \infty$ , es decir, se verifica la

segunda suposición (2.16). Por tanto, de (2.49) tenemos que  $\omega \rightarrow 0$  de forma exponencial, como se muestra en la figura (2.2) siguiente:

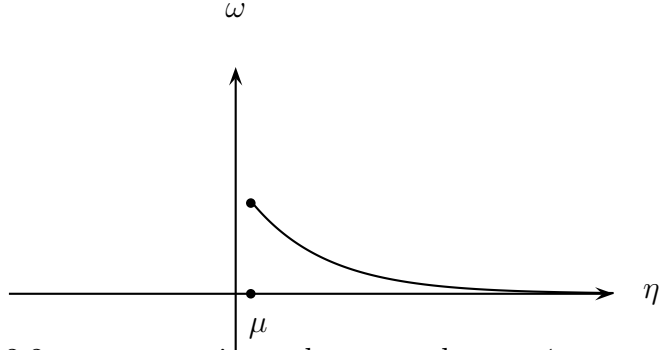


Figura 2.2: comportamiento de  $\omega$  cuando  $\eta \gg 1$ .

Por último, calculamos  $\partial\omega/\partial A$ . Usando la ecuación (2.40) tenemos

$$0 = \frac{\partial}{\partial A} \left\{ \int_{\omega}^1 \frac{dz}{z \sqrt{1 - G(z, A)}} \right\}, \quad (2.50)$$

de donde se sigue

$$\frac{\partial\omega}{\partial A} = \frac{1}{2}\omega \sqrt{1 - G(\omega, A)} \int_{\omega}^1 \frac{1}{z(1 - G(z, A))^{3/2}} \frac{\partial G(z, A)}{\partial A} dz, \quad (2.51)$$

donde

$$\frac{\partial G(z, A)}{\partial A} = \frac{1}{(g_1(A))^2} \left( z g_1(A) g_1'(Az) - g_1'(A) g_1(Az) \right). \quad (2.52)$$

La función  $1/z(1 - G(z, A))^{3/2}$  tiene dos puntos de singularidad:  $z = 0$  y  $z = 1$ . Reescribimos la ecuación (2.51) como sigue

$$\frac{\partial\omega}{\partial A} = \frac{1}{2}\omega \sqrt{1 - G(\omega, A)} \left\{ \int_{\omega}^{1-\mu} + \int_{1-\mu}^1 \right\} \frac{1}{z(1 - G(z, A))^{3/2}} \frac{\partial G(z, A)}{\partial A} dz, \quad (2.53)$$

donde  $0 < \mu < 1$  es una constante.

Notemos que la primera integral de la parte derecha de (2.53) es acotada para todos  $0 < \omega \leq C < 1$ , la representamos

$$\text{In}_1 = \int_{\omega}^{1-\mu} \frac{1}{z(1 - G(z, A))^{3/2}} \frac{\partial G(z, A)}{\partial A} dz < \infty. \quad (2.54)$$

i. Ahora consideremos el punto de singularidad  $z = 1$ .

Representamos

$$\text{In}_2 = \int_{1-\mu}^1 \frac{1}{z(1-G(z,A))^{3/2}} \frac{\partial G(z,A)}{\partial A} dz. \quad (2.55)$$

Sea  $z = 1 - y$ , de (2.55) tenemos

$$\text{In}_2 = \int_0^\mu \frac{1}{(1-y)(1-G((1-y),A))^{3/2}} \frac{\partial G((1-y),A)}{\partial A} dy. \quad (2.56)$$

Desarrollando en serie de Taylor tenemos

$$g_1(A(1-y)) = g_1(A) - Ayg_1'(A) + \mathcal{O}(y^2), \quad (2.57)$$

$$g_1'(A(1-y)) = g_1'(A) - Ayg_1''(A) + \mathcal{O}(y^2). \quad (2.58)$$

De las igualdades (2.57) y (2.58) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G((1-y),A)}{\partial A} &= \\ &= \frac{1}{(g_1(A))^2} \left\{ y \left( A(g_1'(A))^2 - Ag_1(A)g_1''(A) - g_1(A)g_1'(A) \right) + \mathcal{O}(y^2) \right\}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$1 - G((1-y),A) = \frac{Ag_1'(A)}{g_1(A)}y + \mathcal{O}(y^2). \quad (2.60)$$

Sea

$$M = \frac{1}{(g_1(A))^2} \left( A(g_1'(A))^2 - Ag_1(A)g_1''(A) - g_1(A)g_1'(A) \right).$$

Sustituyendo (2.59) y (2.60) en (2.56) tenemos

$$\text{In}_2 = \frac{M}{\sqrt{\frac{Ag_1'(A)}{g_1(A)}}} \int_0^\mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{y}} + \mathcal{O}(y^{1/2}) \right\} dy, \quad (2.61)$$

Análogamente a (2.46) tenemos

$$\text{In}_2 = C\sqrt{\mu} + \mathcal{O}(\mu^{3/2}). \quad (2.62)$$

Por tanto la integral  $\text{In}_2$  es acotada uniformemente en  $\mu \geq 0$ .

ii. Ahora consideremos el caso cuando  $\omega \rightarrow 1$ .

Para  $\mu \ll 1$  tenemos que  $\text{In}_1 \rightarrow 0$ . Por tanto tenemos

$$\frac{\partial \omega}{\partial A} = \frac{\omega}{2} \sqrt{1 - G(\omega, A)} \text{In}_2 = \frac{\omega}{2} \sqrt{1 - G(\omega, A)} (C\sqrt{\mu} + \mathcal{O}(\mu^{3/2})).$$

Y dado que  $\sqrt{1 - G(\omega, A)} \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow 1$  tenemos

$$\frac{\partial \omega}{\partial A} \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow 0.$$

iii. Ahora vamos a estudiar el punto de singularidad  $z = 0$ , es decir cuando  $\omega \rightarrow 0$ .

De manera similar al caso *i*. anterior, representamos la integral (2.55) como sigue

$$\text{In}_3 = \left\{ \int_{\omega}^{\gamma} + \int_{\gamma}^1 \right\} \frac{1}{z(1 - G(z, A))^{3/2}} \frac{\partial G(z, A)}{\partial A} dz, \quad (2.63)$$

donde  $0 < \gamma < 1$  es una constante.

Sea  $\gamma \ll 1$  tenemos

$$\text{In}_3 = C_{\gamma} + \int_{\omega}^{\gamma} \frac{1}{z(1 - G(z, A))^{3/2}} \frac{\partial G(z, A)}{\partial A} dz. \quad (2.64)$$

Como  $g_1(\theta) = \mathcal{O}(\theta^{\delta})$ , para  $0 < \theta \ll 1$  tenemos

$$G(\theta, \cdot) = \mathcal{O}(\theta^{\delta}). \quad (2.65)$$

Usando la derivada de  $G$  dada en (2.59) tenemos

$$\frac{\partial G(z, A)}{\partial A} = \frac{zg_1(A)(Az)^{\delta-1}(1 + o(1)) - g_1'(A)(Az)^{\delta}(1 + o(1))}{(g_1(A))^2}. \quad (2.66)$$

Sustituyendo (2.64) y (2.66) en (2.63) tenemos

$$\text{In}_3 = C_{\gamma} + C \int_{\omega}^{\gamma} z^{\delta-1}(1 + o(z)) dz. \quad (2.67)$$

De donde tenemos que la integral es acotada uniformemente en  $\omega \geq 0$ . Ahora

podemos pasar al límite

$$\frac{\partial \omega}{\partial A} = \frac{\omega}{2} \sqrt{1 - G(\omega, A)} \ln 3 \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \omega \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (2.68)$$

Por tanto, tenemos que  $\partial \omega / \partial A$  es continua en  $A$ . Esto finaliza la prueba del lema 2.1.  $\square$

## 2.3. Descripción numérica

Ahora daremos el algoritmo para obtener la solución numérica de la ecuación (2.27). Uno de los métodos más comunes para calcular la solución numérica de las EDO es el método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4).

Sea el problema de Cauchy siguiente:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad x > x_0, \quad (2.69)$$

El método de RK4 consiste en calcular la solución de (2.69), a través de iteraciones en un determinado intervalo  $I$  como sigue

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.70)$$

donde,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), & k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1 h}{2}\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2 h}{2}\right), & k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3 h). \end{aligned}$$

Ahora reescribiendo el problema (2.27) tenemos

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{d\eta} = F(\omega, A), & \eta > 0 \\ \omega(0, A) = 1. \end{cases} \quad (2.71)$$

donde  $F(\omega, A) = -\omega \sqrt{1 - G(\omega, A)}$ , con  $G(\omega, A) = g_1(A\omega)/g_1(A)$ . Observemos que no podemos aplicar el método de RK4 al problema (2.71) como tal, ya que al aplicarlo

obtenemos

$$\begin{aligned} k_1 &= f(\omega_0) = 0, \\ k_2 &= f(\omega_0) = k_3 = f(\omega_0) = k_4 = f(\omega_0) = 0. \end{aligned}$$

y como consecuencia se tiene  $y_{i+1} = 1 \quad \forall i = 0, \dots, N$ .

Este problema queda resuelto al fijar  $0 < \delta \ll 1$ , y usar RK4 para  $\eta > \delta$  resolviendo el problema (2.28) donde  $\omega^0$  viene dado por la fórmula (2.36) como sigue

$$\omega^0 = 1 - \delta^2 \frac{A}{4} \frac{g_1'(A)}{g_1(A)} + \delta^4 \frac{A}{24} \frac{g_1'(A)}{g_1(A)} \left( A \frac{g_1'(A)}{g_1(A)} + \frac{A^2}{4} \frac{g_1''(A)}{g_1(A)} \right). \quad (2.72)$$

Por tanto, vamos a usar el método RK4 para calcular la solución numérica al problema (2.71), con la condición inicial  $\omega(\delta, A) = \omega^0$ , es decir vamos a resolver numéricamente el problema siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\eta} &= F(\omega, \eta), \quad \eta > \delta \\ \omega(\delta, A) &= \omega^0, \end{aligned}} \quad (2.73)$$

donde  $\omega^0$  se obtiene en (2.72).

## 2.4. Leyes de Conservación

Las leyes de conservación se refieren a las leyes físicas las cuales postulan que durante la evolución temporal de un sistema aislado, ciertas magnitudes tienen un valor constante. La masa se describe mediante la fórmula

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx. \quad (2.74)$$

Y la energía se denota como

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u(x, t))^2 dx. \quad (2.75)$$



Si los solitones satisfacen (2.74) y (2.75) significa que tanto la masa como la energía en un solitón son constantes.

Ahora vamos a probar que las soluciones de (2.13) satisfacen las leyes de conservación como la masa, la energía y algunas otras.

De (2.13) tenemos

$$u_t = -[g'(u)]_x - \varepsilon^2 u_{xxx},$$

usando la suposición (2.14) e integrando tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t dx = -g'(u)|_{-\infty}^{\infty} - \varepsilon^2 u_{xx}|_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (2.76)$$

Para probar que la solución de (2.13) cumple con la ley de conservación de la energía, multiplicamos la ecuación (2.13) por  $u$  y obtenemos

$$uu_t = -u[g'(u)]_x - \varepsilon^2 uu_{xxx}$$

e integrando se sigue

$$\int_{-\infty}^{\infty} uu_t dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \{u[g'(u)]_x + \varepsilon^2 uu_{xxx}\} dx. \quad (2.77)$$

Ahora, integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u[g'(u)]_x dx &= ug'(u)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(u)u_x dx \\ &= \cancel{ug'(u)|_{-\infty}^{\infty}} \xrightarrow{0} - \cancel{g(u)|_{-\infty}^{\infty}} \xrightarrow{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para la segunda integral de (2.77) volvemos a integrar por partes

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u_{xxx}u dx &= \cancel{uu_{xx}|_{-\infty}^{\infty}} \xrightarrow{0} \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}u_x dx \\ &= \frac{1}{2} (u_x)^2|_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto de la ecuación (2.77) tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} uu_t dx = 0. \quad (2.78)$$

## Caso particular: no homogéneo

Para el caso particular no homogéneo de la ecuación (2.13), con  $g'(u) = u^{3/2} + u^2$ , se cumplen las siguientes leyes de conservación

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u dx = 0, \quad (2.79)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx = 0, \quad (2.80)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u^2 + \frac{4}{5} u^{\frac{5}{2}} + (\varepsilon u_{xx})^2 \right\} dx = 0. \quad (2.81)$$

---

## Capítulo 3

# Teoría de Perturbaciones

### 3.1. Perturbación de la ecuación

En este capítulo vamos a realizar la segunda parte de investigación en el trabajo de tesis, la cual consiste en estudiar el comportamiento de las soluciones de tipo solitón bajo una perturbación del lado derecho de la ecuación (2.13).

Estudiamos la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g'(u)}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = f\left(u, \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \varepsilon^K \frac{\partial^K u}{\partial x^K}\right), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

donde  $\varepsilon > 0$  se trata como un parámetro pequeño,  $g'(u) \stackrel{\text{def}}{=} \partial g(u)/\partial u \in \mathcal{C}^1$  una función generalmente no homogénea que satisface la suposición (2.14), la función  $f(u, \varepsilon \partial u/\partial x, \dots, \varepsilon^K \partial^K u/\partial x^K)$  es suficientemente suave la cual es conocida,  $K \geq 0$  y satisface

$$f(0, \dots, 0) = 0. \quad (3.2)$$

La parte derecha de la ecuación (3.1) implica una perturbación pequeña para ondas de variación rápida. Está claro que el cambio  $x' = x/\varepsilon$ ,  $t' = t/\varepsilon$  transforma la ecuación (3.1) a

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + \frac{\partial g'(u)}{\partial x'} + \frac{\partial^3 u}{\partial x'^3} = \varepsilon f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x'}, \dots, \frac{\partial^K u}{\partial x'^K}\right), \quad (3.3)$$

donde vemos que la parte derecha de (3.3) es acotada, si  $u(x', t', \varepsilon)$  es suficientemente suave. Notemos también que para  $f \equiv 0$  la ecuación (3.3) tiene la solución tipo solitón  $u = A\omega(\beta(x' - vt'), A)$  definida en el capítulo anterior.

Usando el método descrito por [19, 20] es posible construir una solución asintótica de tipo solitón para la ecuación (3.1), si  $g'(u)$  es una función homogénea suficientemente suave.

Nuestro resultado obtenido en este capítulo es la construcción de una solución asintótica tipo solitón para la ecuación (3.1), donde la no-linealidad  $g'(u) \in \mathcal{C}^1$  es una función no necesariamente homogénea.

El contenido del capítulo está desarrollado en la manera siguiente:

- I. Se describen las notaciones a usar y recordamos algunas definiciones de espacios de funciones que usaremos al construir la solución asintótica tipo solitón de (3.1).
- II. Construcción formal de la solución asintótica tipo solitón de (3.1).
- III. Análisis de las fórmulas que describen la cola y amplitud de la solución asintótica de tipo solitón de (3.1).

Por último, el resultado final de este capítulo es enunciado en el Teorema 3.1.

## 3.2. Construcción de la solución asintótica

### 3.2.1. Definiciones y notaciones

Comenzamos dando algunas definiciones importantes de espacio de funciones a utilizar.

**Definición 3.1.** Sea  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{R}_\tau^1 \times \mathbb{R}_x^1 \times [0, T])$  para  $T > 0$ , el espacio lineal de funciones  $f(\tau, x, t)$  infinitamente diferenciables, con  $\tau \in \mathbb{R}_\tau^1$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}_x^1 \times [0, T]$ , tal que uniformemente en las variables  $(x, t)$  sobre cada subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}_x^1 \times [0, T]$  se satisfacen las dos condiciones siguientes:

I.

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial \tau^m} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(\tau, x, t) = 0,$$

II. Existen funciones  $f^-(x, t)$  suficientemente suaves tal que

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial \tau^m} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} (f(\tau, x, t) - f^-(x, t)) = 0,$$

donde  $n, m, q, \alpha$  son enteros no negativos y  $(x, t) \in K$ .

**Definición 3.2.** Sea  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}_\tau^1 \times \mathbb{R}_x^1 \times [0, T]) \subset \mathcal{H}$  el subespacio lineal de funciones  $g(\tau, t)$ , tales que, junto con sus derivadas, satisfacen la siguiente condición uniformemente sobre cada conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}_x^1 \times [0, T]$

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} g(\tau, t) = 0.$$

Las funciones de  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{S}$  tienden a cero para  $\tau \rightarrow +\infty$  más rápido que cualquier potencia de  $1/\tau$ . Por ejemplo

$$f(\tau, x, t) = f^*(x, t) (1 - \tanh \tau) \in \mathcal{H},$$

donde  $f^*(x, t)$  es una función suave y acotada.

$$g(\tau, t) = g^*(t) \frac{1}{(\cosh \tau)^k}, \quad k > 0, \quad \in \mathcal{S},$$

donde  $g^*(t)$  una función suave y acotada.

Sea  $u \stackrel{\text{def}}{=} Y_N(s(x, t)/\varepsilon, x, t, \varepsilon)$  expresada en términos de la siguiente expansión en el parámetro pequeño  $\varepsilon \in (0, 1]$ :

$$\begin{cases} u = Y_N\left(\frac{s(x, t)}{\varepsilon}, x, t, \varepsilon\right), \\ Y_N\left(\frac{s(x, t)}{\varepsilon}, x, t, \varepsilon\right) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j U_j\left(\frac{s(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right), \end{cases} \quad (3.4)$$

donde  $N > 0$ ,  $s(x, t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_x^1 \times [0, T])$  es una función de valores reales tal que

$$\left. \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \right|_\Gamma \neq 0, \quad \Gamma = \{(x, t) \in \mathbb{R}_x^1 \times [0, T] : s(x, t) = 0\},$$

las funciones  $u_0, \dots, u_N$  son infinitamente diferenciables,  $U_0(s(x, t)/\varepsilon, x, t) \in \mathcal{S}$  y  $U_k(s(x, t)/\varepsilon, x, t) \in \mathcal{H}$  para  $k = 1, \dots, N$  que satisfacen

$$U_0\left(\frac{s(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right) = \mathcal{O}(\varepsilon^M), |s(x, t)| \geq c\varepsilon^{\delta_1} \quad (3.5)$$

$$U_k\left(\frac{s(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right) = \mathcal{O}(\varepsilon^M), s(x, t) \geq c\varepsilon^{\delta_1}, \quad (3.6)$$

$$U_k\left(\frac{s(x, t)}{\varepsilon}, x, t\right) = u_k^-(x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^M), s(x, t) \leq -c\varepsilon^{\delta_1}, \quad (3.7)$$

donde  $c > 0$ ,  $\delta_1 \in (0, 1]$ ,  $M \geq N$ .

Usando las propiedades (3.5), (3.6) y (3.7) no es difícil probar que para cualquier función  $f(\tau, x, t) \in \mathcal{S}$  y cualquier función suave  $s(x, t)$  tal que  $\partial s(x, t)/\partial x \neq 0$  se verifica lo siguiente:

$$f(\tau, x, t) = f_1\left(\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon \tilde{f}\left(\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, t, \varepsilon\right),$$

donde  $x = \varphi(t)$  es la ecuación de nivel cero de la fase  $s(x, t)$ ,

$$f_1\left(\frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, t\right) = f\left(\frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\varphi(t)} \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, \varphi(t), t\right),$$

y  $\tilde{f}(\tau, t, \varepsilon) \in \mathcal{S}$  depende en la manera regular de  $\varepsilon$ . La demostración de estas propiedades se puede encontrar en [19, 22].

**Definición 3.3.** Se dice que  $u = Y_N(s(x, t)/\varepsilon, x, t, \varepsilon)$  de la forma (3.4) es una solución asintótica mód  $o(\varepsilon^N)$  tipo solitón de (3.1) si el término principal  $U_0(s(x, t)/\varepsilon, t_0)$  con  $t_0$  constante, es la solución explícita de tipo solitón de la ecuación (2.13) y, se satisface

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial g'(u)}{\partial x} + \varepsilon^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \varepsilon f = o(\varepsilon^N), \quad (3.8)$$

donde  $o(\varepsilon^N)$  denota una función  $Q(s(x, t)/\varepsilon, x, t, \varepsilon)$  tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-N} \sup_{x \in \mathbb{R}^1, t \in [0, T]} \left| Q\left(\frac{s(x, t)}{\varepsilon}, x, t, \varepsilon\right) \right| = 0.$$

Para funciones de la forma (3.4) obtenemos las derivadas en la manera siguiente:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} Y_N \left( \frac{s}{\varepsilon}, x, t, \varepsilon \right) = \left\{ s_t \frac{\partial Y_N(\tau, x, t)}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial Y_N(\tau, x, t)}{\partial t} \right\} \Big|_{\tau=s/\varepsilon}, \quad (3.9)$$

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} Y_N \left( \frac{s}{\varepsilon}, x, t, \varepsilon \right) = \left\{ s_x \frac{\partial Y_N(\tau, x, t)}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial Y_N(\tau, x, t)}{\partial x} \right\} \Big|_{\tau=s/\varepsilon}, \quad (3.10)$$

donde  $s \stackrel{\text{def}}{=} s(x, t)$ . Sea  $\Gamma$  el frente de onda de la solución (3.4) dada por  $x = \varphi(t)$  donde  $\varphi(t)$  es una función suave para todo  $t \in [0, T]$ . Es posible escribir la fase en la forma

$$s(x, t) = x - \varphi(t).$$

De hecho

**Lema 3.1.** [19]. *Existen funciones  $\Phi_0(\tau, t) \in \mathcal{S}$  y  $\Phi_k(\tau, x, t) \in \mathcal{H}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) tal que la función tipo-soliton en (3.4) puede ser representada por la expresión*

$$u(x, t, \varepsilon) = \Phi_0 \left( \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, t \right) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j \Phi_j \left( \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, x, t \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}). \quad (3.11)$$

**Nota 3.1.** *Existen distintos casos en los que podemos aplicar el método [19] para construir la solución asintótica a la ecuación (3.8):*

- I. *Si la no-linealidad  $g'(u) \in \mathcal{C}^\infty([0, C])$ ,  $C > 0$  entonces aplicando el método [19] podemos construir una solución asintótica para la ecuación (3.8) con una precisión  $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$ , para  $0 < A < C$  y  $N > 0$  arbitrarios.*
- II. *Si la no-linealidad  $g'(u) \in \mathcal{C}^k([0, C])$ ,  $C > 0$ ,  $k > 2$  aplicando el método [19] podemos construir una solución asintótica para (3.8) con precisión  $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$  para  $0 < A < C$  y  $N \leq k + 1$ .*
- III. *En este trabajo vamos a considerar detalladamente el caso en el que la no-linealidad de (3.8) es una función  $g'(u) \in \mathcal{C}^1$ . Probamos que en este caso es posible construir una solución asintótica tipo soliton a la ecuación (3.8) donde el fondo regular de desplazamiento de onda  $\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j u_j(x, t) = 0$  con una precisión*

de  $o(\varepsilon^2)$ . Además recordando la propiedad (2.18) del lema (2.1) en el capítulo 2 para  $g$  tenemos

$$g(z) = z^2 g_1(z), \quad g_1(z) = c z^\delta (1 + \mathcal{O}(z^{\delta_1})), \quad (3.12)$$

donde  $0 < \delta < 1$ ,  $\delta_1 > 0$  y  $g_1(z)$  satisface la condición de Hölder.

Por último enunciemos la serie de Taylor con residuo de Peano.

**Lema 3.2** (Taylor con residuo de Peano). *Sea  $k \geq 1$  un entero, y sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $k$ -veces diferenciable en el punto  $a \in \mathbb{R}$  entonces*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^k)$$

*Esta expansión es llamada serie de Taylor con el resto de Peano.*

*Demostración.* [9] Sea  $f(x) = P(x) + h_k(x)(x-a)^k$  donde  $P(x)$  es la expansión en serie de Taylor, de manera que solo basta probar que  $\lim_{x \rightarrow a} h_k(x) = 0$ , sin pérdida de generalidad podemos escribir

$$h_k(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Ahora usando la regla de L'Hôpital tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} h_k(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^k} \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(k-1)}(x) - P^{(k-1)}(x)}{(x-a)} \\ &= \frac{1}{k!} (f^{(k)}(a) - P^{(k)}(a)) = 0. \end{aligned}$$

□



### 3.2.2. Esquema formal y construcción del término principal

Ahora procedemos a construir la solución asintótica tipo solitón para la ecuación (3.8). Nosotros consideramos el caso maximalmente complicado, es decir, la no linealidad  $g'(u) \in \mathcal{C}^1$  no homogénea. De acuerdo a lo expuesto en el capítulo 2, supongamos que la función  $g(u)$  satisface las condiciones (2.14), (2.18) y (2.19). De (3.4) escribimos el *ansatz* de la solución asintótica como sigue

$$Y(\tau, x, t, \varepsilon) = U_0(\tau, t) + \varepsilon U_1(\tau, x, t) + \varepsilon^2 U_2(\tau, x, t) + o(\varepsilon^2), \quad (3.13)$$

donde  $U_0 \in \mathcal{S}$ ,  $U_1, U_2 \in \mathcal{H}$  son funciones desconocidas a determinar. Las funciones  $u_1^-(x, t)$  y  $u_2^-(x, t)$  denotan el límite de  $U_1(\tau, x, t)$  y  $U_2(\tau, x, t)$  cuando  $\tau \rightarrow -\infty$  respectivamente, y

$$\tau = \frac{x - \varphi(t, \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \varphi(t) = \varphi_0(t) + \varepsilon \varphi_1(t). \quad (3.14)$$

De las fórmulas (3.9) y (3.10) tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} Y(\tau, x, t, \varepsilon) &= \left\{ -\varphi_t \frac{\partial Y(\tau, x, t, \varepsilon)}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial Y(\tau, x, t, \varepsilon)}{\partial t} \right\} \Bigg|_{\tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}}, \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} Y(\tau, x, t, \varepsilon) &= \left\{ \frac{\partial Y(\tau, x, t, \varepsilon)}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial Y(\tau, x, t, \varepsilon)}{\partial x} \right\} \Bigg|_{\tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}}, \end{aligned}$$

y

$$\varepsilon^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} Y(\tau, x, t, \varepsilon) = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right)^3 Y(\tau, x, t, \varepsilon) \Bigg|_{\tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}}.$$

Usando estas fórmulas, y para reducir la notación, hagamos  $Y \stackrel{def}{=} Y(\tau, x, t, \varepsilon)$ , calculamos las derivadas correspondientes a la función (3.13) obteniendo

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} Y = -\varphi_t \frac{\partial U_0}{\partial \tau} + \varepsilon \left( -\varphi_t \frac{\partial U_1}{\partial \tau} + \frac{\partial U_0}{\partial t} \right) + \varepsilon^2 \left( -\varphi_t \frac{\partial U_2}{\partial \tau} + \frac{\partial U_1}{\partial t} \right), \quad (3.15)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} g'(Y) = \frac{\partial g'(U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2)}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial g'(U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2)}{\partial x}, \quad (3.16)$$

$$\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} Y\right)^3 = \frac{\partial^3 U_0}{\partial \tau^3} + \varepsilon \frac{\partial^3 U_1}{\partial \tau^3} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^3 U_2}{\partial \tau^3} + 3 \frac{\partial^3 U_1}{\partial \tau^2 \partial x} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.17)$$

Por último desarrollamos la expresión para  $\varepsilon f$ . Sean

$$v_k = \varepsilon^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} Y = \frac{\partial^k U_0}{\partial \tau^k} + \varepsilon \frac{\partial^k U_1}{\partial \tau^k} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^k U_2}{\partial \tau^k} + k \frac{\partial^k U_1}{\partial \tau^{k-1} \partial x} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad \forall k \geq 0,$$

de donde se sigue

$$\begin{aligned} \varepsilon f(v_0, v_1, \dots, v_k) &= \varepsilon f \left( U_0, \frac{\partial U_0}{\partial \tau}, \dots, \frac{\partial^K U_0}{\partial \tau^K} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \sum_{k=0}^K \frac{\partial^k U_1}{\partial \tau^k} \frac{\partial f}{\partial v_k} \left( U_0, \frac{\partial U_0}{\partial \tau}, \dots, \frac{\partial^K U_0}{\partial \tau^K} \right) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Primero analizamos el comportamiento de  $g'(Y)$  cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$ .

Si  $\tau \rightarrow \infty$  entonces  $Y \rightarrow 0$  como una exponencial, por tanto

$$\varepsilon \frac{\partial g'(Y)}{\partial x} \bigg|_{\tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}} = \mathcal{O}(\varepsilon^M), \quad (3.19)$$

para  $M > 0$  arbitrario.

Si  $\tau \rightarrow -\infty$  tenemos

$$\varepsilon \frac{\partial g'(Y)}{\partial x} = \varepsilon g''(\varepsilon u_1^- + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \left( \varepsilon \frac{\partial u_1^-}{\partial x} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right). \quad (3.20)$$

Usando la suposición (3.12) para  $g(z)$  con  $z \ll 1$  obtenemos

$$g''(z) = c_1 z^\delta (1 + \mathcal{O}(z^{\delta_1})) = o(z).$$

De manera que para el término (3.20) tenemos

$$\varepsilon \frac{\partial g'(Y)}{\partial x} = o(\varepsilon^2), \quad \text{para } x < \varphi(t) - c\varepsilon^{1-\delta_0}, \quad (3.21)$$

donde  $0 < \delta_0 < 1$ .

Si  $x \in (\varphi - c\varepsilon^{1-\delta_0}, \varphi + c\varepsilon^{1-\delta_0})$ , podemos desarrollar  $g'(Y)$  en su serie de Taylor,

$g'(Y) = g'(U_0) + \varepsilon U_1 g''(U_0) + \varepsilon^2 U_2 g''(U_0) + o(\varepsilon^2)$  y obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} g'(Y) &= \frac{\partial g'(Y)}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial g'(Y)}{\partial x} \\ &= g''(Y) \frac{\partial Y}{\partial \tau} + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Por tanto de (3.19), (3.21) y (3.22) tenemos

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} g'(Y) = \frac{\partial}{\partial \tau} g'(U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2) + o(\varepsilon^2), \quad (3.23)$$

uniformemente en  $x$ .

Ahora sustituyendo las derivadas (3.15), (3.17), (3.23), (3.18) en la ecuación (3.8), y considerando la segunda propiedad en (3.14) dada para  $\varphi(t)$ , tenemos

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{d\varphi_0}{dt} U_0 + g'(U_0) + \frac{\partial^2 U_0}{\partial \tau^2} \right) \right. \\ &+ \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{d\varphi_0}{dt} U_1 + U_1 g''(U_0) + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{\partial U_0}{\partial t} - \frac{d\varphi_1}{dt} \frac{\partial U_0}{\partial \tau} - f \left( U_0, \frac{\partial U_0}{\partial \tau}, \dots \right) \right] \\ &+ \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{d\varphi_0}{dt} U_2 + U_2 g''(U_0) + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \tau^2} \right) + \frac{\partial U_1}{\partial t} + 3 \frac{\partial^3 U_1}{\partial \tau^2 \partial x} \right. \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ g'(U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2) - g'(U_0) - \varepsilon U_1 g''(U_0) - \varepsilon^2 U_2 g''(U_0) \right\} \\ &\left. \left. - \frac{d\varphi_1}{dt} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - \sum_{k=0}^K \frac{\partial^k U_1}{\partial \tau^k} \frac{\partial f}{\partial v_k} \left( U_0, \frac{\partial U_0}{\partial \tau}, \dots \right) \right] \right\} \Big|_{\tau=(x-\varphi(t))/\varepsilon} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por tanto si  $\tau \rightarrow \infty$  vemos que cada término de (3.24) tiende a cero. Por otro lado obtenemos para  $u_1^-$  la ecuación siguiente

$$\frac{\partial u_1^-(x, t)}{\partial t} = u_1^-(x, t) \frac{\partial f}{\partial v_0}(0, \dots, 0), \quad x < \varphi(t). \quad (3.25)$$

Recordemos que  $\tau = (x - \varphi(t))/\varepsilon$  y  $\tau \rightarrow -\infty$  para  $x < \varphi_0(t) - c\varepsilon^{1-\delta_0}$ ,  $t > 0$  y  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Por eso definimos  $u_1^-$  como una solución de la ecuación (3.25) con  $x < \varphi_0(t)$ , y  $t > 0$ .

Ahora tomando la ecuación correspondiente a  $\varepsilon^0$  de (3.24) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ -\frac{d\varphi_0}{dt} U_0 + g'(U_0) + \frac{\partial^2 U_0}{\partial \tau^2} \right\} = 0. \quad (3.26)$$

Para la ecuación (3.26) buscamos una solución con parámetros variables en la forma

$$U_0(\tau, t) = A\omega(\eta, A) \in \mathcal{S}, \quad \eta = \beta\tau, \quad \tau = \frac{x - \varphi_0}{\varepsilon}, \quad (3.27)$$

donde  $A = A(t)$ ,  $\beta = \beta(t)$ ,  $\varphi_0 = \varphi_0(t)$  y la función  $\omega = \omega(\eta, A)$  satisface las propiedades (2.16) dadas en la definición 2.1.

Del lema 2.1, la solución tipo solitón de la ecuación (3.26) existe. Además, para los parámetros variables  $A$ ,  $\beta$ ,  $\varphi$  obtenemos la relación siguiente:

$$\beta^2 = 2g_1(A), \quad \frac{d\varphi_0}{dt} = 2g_1(A). \quad (3.28)$$

De las relaciones (3.28) tenemos 2 ecuaciones para 3 incógnitas, de manera que nos falta obtener una ecuación más para el parámetro variable independiente, la cual obtendremos más adelante.

### 3.2.3. Construcción de la primera corrección

Realizamos la construcción de la primera corrección  $U_1(\tau, x, t)$  en dos etapas como sigue

A). Inicialmente vamos a buscar la función  $U_1(\tau, x, t)$  sobre el frente de onda. Denotamos

$$\check{U}_1 \stackrel{def}{=} \check{U}_1(\tau, t) = U_1(\tau, x, t)|_{x=\varphi(t)}.$$

De la ecuación (3.24) obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\{ \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{d\varphi_0}{dt} \check{U}_1 + \check{U}_1 g''(U_0) + \frac{\partial^2 \check{U}_1}{\partial \tau^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial U_0}{\partial t} - \frac{d\varphi_1}{dt} \frac{\partial U_0}{\partial \tau} - f \left( U_0, \frac{\partial U_0}{\partial \tau}, \dots \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{d\varphi_0}{dt} U_2 + U_2 g''(U_0) + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \tau^2} \right) + \frac{\partial U_1}{\partial t} + 3 \frac{\partial^3 U_1}{\partial \tau^2 \partial x} \right. \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ g'(U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2) - g'(U_0) - \varepsilon U_1 g''(U_0) \right. \\
& - \varepsilon^2 U_2 g''(U_0) \left. \right] + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \left( -\frac{d\varphi_0}{dt} + g''(U_0) \right) (U_1 - \check{U}_1) \right. \\
& + \left. \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U_1 - \check{U}_1) \right] - \frac{d\varphi_1}{dt} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - U_1 \frac{\partial f}{\partial v_1} \left( U_0, \frac{\partial U_0}{\partial \tau}, \dots \right) \\
& \left. - \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \frac{\partial f}{\partial v_2} \left( U_0, \frac{\partial U_0}{\partial \tau}, \dots \right) \right] \Big|_{\tau=(x-\varphi)/\varepsilon} = o(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Ahora igualando a cero el término multiplicado por  $\varepsilon$  en la ecuación (3.29) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{d\varphi_0}{dt} \check{U}_1 + \check{U}_1 g''(U_0) + \frac{\partial^2 \check{U}_1}{\partial \tau^2} \right) = F_1(\tau, t), \tag{3.31}$$

donde

$$F_1(\tau, t) = \frac{d\varphi_1}{dt} \frac{\partial U_0}{\partial \tau} + f \left( U_0, \frac{\partial U_0}{\partial \tau}, \dots \right) - \frac{\partial U_0}{\partial t}.$$

Notemos que la ecuación (3.31) está bien definida cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$ .

Entonces integrando (3.31) obtenemos

$$\left( -\frac{d\varphi_0}{dt} + g''(U_0) \right) \check{U}_1 + \frac{\partial^2 \check{U}_1}{\partial \tau^2} = \int_{-\infty}^{\tau} F_1(\tau', t) d\tau' + C. \tag{3.32}$$

Haciendo  $\tau \rightarrow \infty$  encontramos la constante de integración

$$C = - \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau', t) d\tau',$$

donde  $C < \infty$  dado que  $F_1(\tau, t) \in \mathcal{S}$ . Además sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\tau} F_1(\tau', t) d\tau' - \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau', t) d\tau' = - \int_{\tau}^{\infty} F_1(\tau', t) d\tau'.$$

Ahora definimos el operador  $\hat{L} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  como

$$\hat{L} = -\frac{d\varphi_0}{dt} + g''(U_0) + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}.$$

Por tanto de (3.31) tenemos

$$\hat{L}\check{U}_1 = - \int_{\tau}^{\infty} F_1(\tau', t) d\tau'. \quad (3.33)$$

De la ecuación (3.33) se tiene que

$$\hat{L}\check{U}_1 = 0, \quad \text{si } \tau \rightarrow \infty,$$

y si  $\tau \rightarrow -\infty$  obtenemos para  $\check{u}_1^-$  la ecuación siguiente:

$$-\frac{d\varphi_0}{dt} \check{u}_1^- = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial U_0}{\partial t} - f\left(U_0, \frac{\partial U_0}{\partial \tau'}, \dots\right) \right) d\tau. \quad (3.34)$$

Por tanto, para  $u_1^-$  sobre el frente de la onda tenemos la ecuación siguiente:

$$\check{u}_1^-(t) = \frac{1}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( f(U_0, U_{0\tau}, \dots) - \frac{\partial U_0}{\partial t} \right) d\tau, \quad x = \varphi_0(t). \quad (3.35)$$

Dado que nuestro operador lineal  $\hat{L}$  es el ordinario diferencial de segundo orden, la solución general al problema (3.33) tiene la forma  $\check{U}_1 = U_H + U_P$ , donde  $U_H = U_H(\tau, t)$  es la solución general de (3.33) con la parte derecha igual a cero y  $U_P = U_P(\tau, t)$  es una solución particular de (3.33). El operador  $\hat{L}$  es simétrico pero no autoadjunto.

De la ecuación (3.26) tenemos

$$\begin{aligned} \hat{L} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \tau} \right) &= -\frac{d\varphi_0}{dt} \frac{\partial U_0}{\partial \tau} + g''(U_0) \frac{\partial U_0}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 U_0}{\partial \tau^3} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ -\frac{d\varphi_0}{dt} U_0 + g'(U_0) + \frac{\partial^2 U_0}{\partial \tau^2} \right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir,  $\partial U_0 / \partial \tau \in \ker \hat{L}$ . El segundo elemento del núcleo formal de  $\hat{L}$  es una función par, que se encuentra mediante la fórmula [7], como sigue

$$Z(\tau, t) = \frac{\partial U_0}{\partial \tau} \int_0^{\tau} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \tau} \right)^{-2} d\tau', \quad \tau > 0. \quad (3.36)$$

Vamos a analizar el comportamiento de la solución  $Z(\tau, t)$  para  $\tau \gg 1$ .

Usando la ecuación (2.26) del capítulo 2 tenemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial U_0}{\partial \tau} \right)^{-2} d\tau &= \frac{1}{\omega^2 (1 - G(\omega, \cdot))} d\eta \\ &= \frac{-1}{\omega^3 (1 - G(\omega, \cdot))^{3/2}} d\omega. \end{aligned}$$

Por tanto escribimos la solución  $Z(\tau, t)$  como sigue

$$Z(\tau, t) = \omega \sqrt{1 - G(\omega, \cdot)} \int_{\omega}^1 \frac{1}{z^3 (1 - G(z, \cdot))^{3/2}} dz,$$

donde  $0 < \omega < 1$ . Sea  $\nu \ll 1$  entonces

$$Z(\tau, t) = \omega \sqrt{1 - G(\omega, \cdot)} \left\{ \int_{\omega}^1 + \int_{\nu}^1 \right\} \frac{1}{z^3 (1 - G(z, \cdot))^{3/2}} dz.$$

Tenemos

$$\int_{\nu}^1 \frac{1}{z^3 (1 - G(z, \cdot))^{3/2}} dz < \infty.$$

Para considerar la integral de  $\omega$  a  $\nu$ , desarrollamos  $g_1$  en serie de Taylor y obtenemos

$$\begin{aligned} z^3 \left( 1 - \frac{g_1(Az)}{g_1(A)} \right)^{3/2} &= z^3 \left\{ 1 - \frac{1}{g_1(A)} (g_1(A) - z g_1'(A) + \mathcal{O}(z^2)) \right\}^{3/2} \\ &= c z^{3+3/2} (1 + \mathcal{O}(z))^{3/2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \omega \left( 1 - \frac{g_1(A\omega)}{g_1(A)} \right)^{1/2} &= \omega \left\{ 1 - \frac{1}{g_1(A)} (g_1(A) - \omega g_1'(A) + \mathcal{O}(\omega^2)) \right\}^{1/2} \\ &= c \omega^{3/2} (1 + \mathcal{O}(\omega))^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando (3.37) y (3.39) tenemos

$$Z(\tau, t) = c_1(t) + c_2(t) \omega^{-2} + \mathcal{O}(\omega^2) \rightarrow \infty, \quad \omega \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

donde  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  son funciones suficientemente suaves. Por tanto vemos que

$Z(\tau, t) \notin \ker \hat{L} \cap \mathcal{H}'$  dado que  $Z(\tau, t) \rightarrow \infty$  como una exponencial cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Por esa razón obtenemos la solución para la ecuación homogénea en  $\mathcal{H}$  como sigue  $U_H = C \partial U_0 / \partial \tau$ , para  $C = C(t)$  arbitrario.

La solución particular de (3.33) se obtiene mediante la fórmula [7]

$$U_P(\tau, t) = \frac{\partial U_0}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{\partial U_0}{\partial \tau}(\tau', t) \int_{-\infty}^{\tau'} \frac{\partial U_0}{\partial \tau}(\tau'', t) \Phi_1(\tau'', t) d\tau'' d\tau', \quad (3.39)$$

donde

$$\Phi_1(\tau, t) = - \int_\tau^\infty F_1(\tau', t) d\tau'.$$

Como  $F_1(\tau, t) \in \mathcal{S}$  tenemos que para la solubilidad del operador (3.33) en el espacio  $\mathcal{H}$  es necesaria y suficiente la condición siguiente:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial U_0}{\partial \tau} \Phi_1 d\tau = 0. \quad (3.40)$$

La condición (3.40) se le llama de ortogonalidad la cual está bien definida dado que  $\Phi_1$  contiene la función libre  $d\varphi_1/dt$ , para su demostración (ver, por ejemplo [19, 22]). Bajo esta condición tenemos que existe  $\check{U}_1 \in \mathcal{H}$ .

Por tanto usando (3.34), (3.35) y (3.40) para la ecuación (3.33) podemos representar la solución  $\check{U}_1$  en la forma

$$\check{U}_1(\tau, t) = \check{u}_1^-(t) \chi(\tau, t) + W_1(\tau, t), \quad (3.41)$$

donde  $W_1(\tau, t) \in \mathcal{S}$  y  $\chi(\tau, t) \in \mathcal{H}$ , tal que  $\chi(\tau, t) \rightarrow 1$  si  $\tau \rightarrow -\infty$ . Por ejemplo, podemos definir

$$\chi(\tau, t) = \int_\tau^\infty U_0(\tau', t) d\tau' / \int_{-\infty}^\infty U_0(\tau', t) d\tau'.$$

Ahora vamos a analizar la condición de ortogonalidad (3.40), e integrando por partes dicha condición tenemos

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial U_0}{\partial \tau} \Phi_1(\tau, t) d\tau = \int_{-\infty}^\infty F_1(\tau, t) U_0(\tau, t) d\tau = 0. \quad (3.42)$$



Sustituyendo la función  $F_1$  en (3.42) probamos el comportamiento de la amplitud  $A$  y de la velocidad  $\varphi_{0t}$  no depende de la función libre  $\varphi_{1t}$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau, t) U_0(\tau, t) d\tau &= \frac{1}{2} \frac{d\varphi_1}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U_0^2}{\partial \tau} d\tau \xrightarrow{0} \int_{-\infty}^{\infty} f U_0 d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U_0^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Usando (3.27) en (3.43) obtenemos la ecuación que falta siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{A(t)^2}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 d\eta \right\} = \frac{2A(t)}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} f \left( A(t)\omega, A(t)\beta \frac{d\omega}{d\eta}, \dots \right) \omega d\eta. \quad (3.44)$$

Además, usando la ecuación (2.26) y el hecho de que  $\omega$  es una función par tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 d\eta &= -2 \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\sqrt{1 - G(\omega, A(t))}} \frac{d\omega}{d\eta} d\eta \\ &= 2 \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1 - G(z, A)}} dz. \end{aligned} \quad (3.45)$$

**Nota 3.2.** Podemos representar la función  $f = f(U_0(\tau, t), dU_0(\tau, t)/d\tau, \dots)$  como suma  $f = F_p(\omega, t) + F_i(\tau, t)$ , donde  $F_p = F_p(\omega(\tau, A), t)$  es una función par respecto de  $\tau$  y  $F_i$  una función impar.

Usando esta nota y la ecuación (2.26) tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega f \left( A\omega, A\beta \frac{d\omega}{d\eta}, \dots \right) d\eta = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - G(z, A)}} F_p(z, t) dz. \quad (3.46)$$

Por tanto existen 2 ecuaciones (3.28) y (3.44) para 2 desconocidas  $\varphi_0(t)$  y  $A(t)$ . Al mismo tiempo la segunda corrección  $\varphi_1(t)$  para la fase es desconocida.

B). En la segunda etapa vamos a buscar la corrección  $U_1(\tau, x, t)$  para  $\forall x \in \mathbb{R}^1$ ; más detalladamente, buscamos  $U_1(\tau, x, t)$  como una onda de choque suavizada  $\forall x \in \mathbb{R}^1$ . Por tanto usando las propiedades de  $\check{U}_1$  definimos  $U_1(\tau, x, t)$  como sigue

$$U_1 = u_1^-(x, t) \chi(\tau, t) + W_1(\tau, t), \quad (3.47)$$

donde  $W_1 \in \mathcal{S}$  definido por (3.39),  $\chi \rightarrow 1$  si  $\tau \rightarrow -\infty$ ,  $\chi \rightarrow 0$  si  $\tau \rightarrow \infty$  y

$$u_1^-(x, t)|_{x=\varphi(t)} = \check{u}_1^-(t). \quad (3.48)$$

Por tanto, la función  $U_1$  en el exterior de frente de onda  $x = \varphi(t)$  se comporta como una onda de choque suavizada, como se muestra en la figura (3.1).

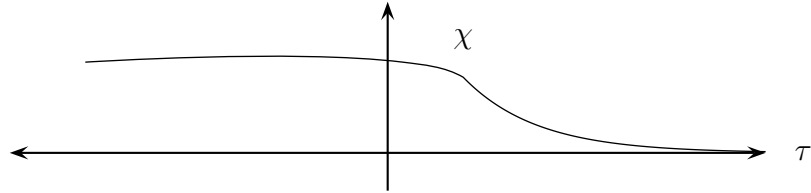


Figura 3.1: Onda de choque suavizada

Ahora vamos a probar la existencia y unicidad de la función  $u_1^-(x, t)$ . De las ecuaciones (3.25) y (3.48) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^-}{\partial t} &= u_1^- \frac{\partial f}{\partial v_0}(0), \quad x \leq \varphi(t), \quad t > 0, \\ u_1^-|_{\gamma} &= \nu(x), \quad x \in \gamma \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, T] \text{ tal que :} \\ &\quad (x, t) = (x, 0) \forall x < \varphi(0) \vee (x, t) = (\varphi(t), t) \forall x \geq \varphi(0), t > 0\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

la función  $\nu(x)$  es tal que

$$\nu(x)|_{x=\varphi(t)} = \check{u}_1^-(t).$$

Para el caso  $x < \varphi(0)$  podemos tomar a  $x$  como parámetro y calculando el Jacobiano tenemos

$$J = \left| \frac{dx}{dx} \right| = 1, \quad (3.51)$$

y para  $x \geq \varphi(0)$  tomamos  $t$  como parámetro, obtenemos

$$J = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi(t)}{dt} & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (3.52)$$

De (3.28), (3.52) y las suposiciones de  $g_1$  dadas en (3.12) tenemos que  $J \neq 0$  para todo  $t \geq 0$ . Por tanto la solución de (3.49) existe y es única.

### 3.2.4. Existencia de la segunda corrección

De (3.29) tenemos

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{d\varphi_0}{dt} U_2 + U_2 g''(U_0) + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \tau^2} \right) - F_2(\tau, x, t, \varepsilon) \right\} \Big|_{\tau = \frac{x - \varphi}{\varepsilon}} = o(\varepsilon^2), \quad (3.53)$$

donde

$$\begin{aligned} -F_2(\tau, x, t, \varepsilon) = & \frac{\partial U_1}{\partial t} + 3 \frac{\partial^3 U_1}{\partial \tau^2 \partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \tau} G(\tau, x, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{L}(U_1 - \check{U}_1) - \\ & - \frac{d\varphi_1}{dt} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - \sum_{k=0}^K \frac{\partial^k U_1}{\partial \tau^k} \frac{\partial f}{\partial v_k} \left( U_0, \frac{\partial U_0}{\partial \tau}, \dots, \frac{\partial^K U_0}{\partial \tau^K} \right), \end{aligned}$$

y

$$G(\tau, x, t, \varepsilon) = g'(U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2) - g'(U_0) - \varepsilon U_1 g''(U_0) - \varepsilon^2 U_2 g''(U_0).$$

Vamos a probar que los términos que aparecen en (3.53) multiplicados por  $\varepsilon^{-1}$  y  $\varepsilon^{-2}$  tienden a cero cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . De (3.53) tenemos para  $\tau \gg 1$  que  $G(\tau, x, t, \varepsilon) \rightarrow 0$  como  $ce^{-\beta\tau} \rightarrow 0$ , por tanto, si  $\tau \rightarrow \infty$  tenemos

$$F_2(\tau, x, t, \varepsilon) = Ce^{-\beta\tau} \Big|_{\tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}} = \mathcal{O}(\varepsilon^M), \quad \forall M > 1. \quad (3.54)$$

Por otro lado, si  $\tau \rightarrow -\infty$ , tenemos

$$F_2(\tau, x, t, \varepsilon) = u_1^- \frac{\partial f}{\partial v_1}(0) - \frac{\partial u_1^-}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} G(\tau, x, t, \varepsilon) \right\} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varphi_0}{dt} \frac{\partial}{\partial \tau} \{U_1 - \check{U}_1\}. \quad (3.55)$$

De (3.25) se obtiene que

$$\frac{\partial u_1^-}{\partial t} - u_1^- \frac{\partial f}{\partial v_0}(0) = 0. \quad (3.56)$$

Dado que  $G(\tau, x, t, \varepsilon) \in \mathcal{H}$  entonces  $\partial G(\tau, x, t, \varepsilon)/\partial \tau \rightarrow 0$  como  $ce^{\beta\tau} \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow -\infty$ .

Además

$$\varepsilon^{-2} \frac{\partial G(\tau, x, t, \varepsilon)}{\partial \tau} \Big|_{\tau = \frac{x - \varphi_0(t)}{\varepsilon}} = \mathcal{O}(\varepsilon^M), \quad \forall M > 0. \quad (3.57)$$

Por último tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \{U_1 - \check{U}_1\} = (u_1^-(x, t) - \check{u}_1(\varphi_0, t)) \chi_\tau.$$

Desarrollando  $u_1^-$  en serie de Taylor en el punto  $x = \varphi_0(t)$  tenemos

$$u_1^-(x, t) = \check{u}_1(\varphi_0(t), t) + (x - \varphi_0(t)) \frac{\partial u_1^-}{\partial x}(\varphi_0(t), t) + \mathcal{O}((x - \varphi_0)^2),$$

de donde se sigue

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \{U_1 - \check{U}_1\} = (u_1^- - \check{u}_1^-) \chi_\tau = \varepsilon (\tau + \varphi_1) \frac{\partial u_1^-}{\partial x} \Big|_{x=\varphi_0} \chi_\tau.$$

De aquí se sigue

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{L} (U_1 - \check{U}_1) = (\tau + \varphi_1) \frac{\partial u_1^-}{\partial x} \Big|_{x=\varphi_0(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{L} \chi = \mathcal{O}(1). \quad (3.58)$$

De (3.54), (3.56), (3.57) y (3.58) tenemos que  $F_2(\tau, x, t, \varepsilon)$  es acotada uniformemente en  $\varepsilon$ . Además  $F_2 \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow \pm\infty$  exponencialmente.

Por tanto, tenemos para  $U_2$  modulo  $o(\varepsilon^2)$ , la ecuación siguiente:

$$\hat{L}U_2 = \Phi_2(\tau, x, t, \varepsilon), \quad (3.59)$$

donde

$$\Phi_2 = \int_{\tau}^{\infty} F_2(\tau', x, t, \varepsilon) d\tau'$$

es una función acotada uniformemente en  $\tau, x, t$ .

De manera similar al caso anterior para la solubilidad de la ecuación (3.59) con precisión  $o(\varepsilon^2)$ , necesitamos la condición de ortogonalidad siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U_0}{\partial \tau} \Phi_2(\tau, x, t) d\tau = 0, \quad (3.60)$$

la cual está bien definida, dado que  $\Phi_2$  contiene la variable libre  $\varphi_{1t}$ .

Luego para  $u_2^-$  definimos la ecuación siguiente:

$$u_2^-(x, t) = \left( \frac{d\varphi_0}{dt} \right)^{-1} \Phi_2^-(x, t, \varepsilon), \quad (3.61)$$

donde

$$\Phi_2^-(x, t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\tau, x, t, \varepsilon) d\tau.$$

Ahora vemos que la ecuación (3.56) implica que  $F_2(\tau, x, t, \varepsilon) \in \mathcal{S}$  y, dado que la función  $F_2$  contiene la variable libre  $\varphi_{1t}$  se satisface la condición de ortogonalidad (3.60). Por tanto, tenemos que existe una función acotada  $U_2 = U_2(\tau, x, t, \varepsilon) \in \mathcal{H}$  la cual nos permite construir la solución asintótica tipo solitón con precisión  $o(\varepsilon^2)$  descrita en (3.13).

### 3.2.5. Análisis de la amplitud del solitón

Como ya hemos obtenido la ecuación que describe la amplitud del solitón, debemos probar la solubilidad de dicha ecuación. Inicialmente para poder calcular la amplitud de (3.44) necesitamos la condición siguiente:

$$I_A = \frac{d}{dA} \left\{ \frac{A^2}{\beta} a_2 \right\} \neq 0, \quad (3.62)$$

donde

$$a_2 = 2 \int_0^1 \frac{z dz}{\sqrt{1 - G(z, A)}}, \quad G(z, A) = \frac{g_1(Az)}{g_1(A)}, \quad \beta = \sqrt{2g_1(A)}.$$

Desarrollando (3.62) obtenemos

$$I_A = \frac{d}{dA} \left\{ \frac{A^2}{\beta} a_2 \right\} = 2 \frac{A}{\beta} a_2 + a_2 A^2 \frac{d}{dA} \left( \frac{1}{\beta} \right) + \frac{A^2}{\beta} \frac{d}{dA} (a_2),$$

y dado que

$$\frac{d}{dA} \left( \frac{1}{\beta} \right) = -\frac{g'_1(A)}{\beta 2g_1(A)}, \quad \frac{d}{dA} (a_2) = \int_0^1 \frac{z}{(1 - G(z, A))^{3/2}} \frac{\partial G}{\partial A} dz,$$

tenemos

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{A}{\beta} \left\{ \int_0^1 \frac{4z dz}{(1 - G)^{1/2}} - \frac{A g'_1(A)}{g_1(A)} \int_0^1 \frac{z dz}{(1 - G)^{1/2}} + A \int_0^1 \frac{z G'_A dz}{(1 - G)^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{A}{\beta} \int_0^1 \frac{z}{(1 - G)^{3/2}} \left\{ (1 - G) \left[ 4 - \frac{A g'_1(A)}{g_1(A)} \right] + A G'_A \right\} dz, \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde

$$G'_A = \frac{\partial G}{\partial A} = \frac{z g'_1(Az)}{g_1(A)} - \frac{g_1(Az) g'_1(A)}{g_1^2(A)}.$$

Notése que

$$\begin{aligned} &\left( 1 - \frac{g_1(Az)}{g_1(A)} \right) \left[ 4 - \frac{A g'_1(A)}{g_1(A)} \right] + A \left[ \frac{z g'_1(Az)}{g_1(A)} - \frac{g_1(Az) g'_1(A)}{g_1^2(A)} \right] = \\ &= \frac{1}{g_1(A)} \left\{ 4(g_1(A) - g_1(Az)) - (A g'_1(A) - A z g'_1(Az)) \right\}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

**Lema 3.3.** *Sea*

$$\mathcal{K}_1 \stackrel{def}{=} \int_0^1 z \frac{\left\{ 4[1 - G(z, A)] - \frac{\tilde{g}_1(A)}{g_1(A)} [1 - \tilde{G}(z, A)] \right\}}{(1 - G(z, A))^{3/2}} dz \neq 0, \quad (3.65)$$

donde

$$\tilde{G}(z, A) = \frac{\tilde{g}_1(Az)}{\tilde{g}_1(A)}, \quad \tilde{g}_1(\zeta) = \zeta g'_1(\zeta), \quad \forall 0 < \zeta < A.$$

Entonces  $I_A \neq 0, \forall t \in (0, T)$ .

*Demostración.* De (3.63) y (3.64) tenemos

$$I_A = 2 \frac{A}{\beta^3} \int_0^1 \frac{z}{(1-G)^{3/2}} \left\{ 4g_1(A) - Ag_1'(A) - 4g_1(Az) + Azg_1'(Az) \right\} dz;$$

factorizando  $g_1(A)$  tenemos

$$I_A = \frac{A}{\beta} \int_0^1 \frac{z}{(1-G(z,A))^{3/2}} \left\{ 4 \left( 1 - \frac{g_1(Az)}{g_1(A)} \right) - \frac{Ag_1'(A)}{g_1(A)} \left( 1 - \frac{Azg_1'(Az)}{Ag_1'(A)} \right) \right\} dz,$$

es decir

$$I_A = \frac{A}{\beta} \int_0^1 \frac{z}{(1-G(z,A))^{3/2}} \left\{ 4 [1 - G(z,A)] - \frac{\tilde{g}_1(A)}{g_1(A)} [1 - \tilde{G}(z,A)] \right\} dz. \quad (3.66)$$

Por tanto, tenemos que  $I_A \neq 0$ . □

**Nota 3.3.** Para satisfacer la condición (3.65) dada en el lema 3.3 es suficiente suponer que se verifica la desigualdad siguiente:

$$4g_1(A) - Ag_1'(A) \neq 4g_1(Az) - Azg_1'(Az), \quad \forall 0 < z < 1. \quad (3.67)$$

**Nota 3.4.** Si  $g_1(z) = \sum_{i=1}^K c_i z^{\delta_i}$  entonces es suficiente suponer que  $c_i > 0$ , para que la desigualdad (3.67) se verifique, es decir, tenemos

$$\begin{aligned} 4[g_1(A) - g_1(Az)] - [Ag_1'(A) - Azg_1'(Az)] &= \\ &= \sum_{i=1}^K c_i \{ A^{\delta_i} (4 - \delta_i) - (Az)^{\delta_i} (4 - \delta_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^K c_i (4 - \delta_i) A^{\delta_i} (1 - z^{\delta_i}), \quad z \in (0, 1) \end{aligned}$$

Como  $\delta_i < 4, \forall i$ , vemos que (3.67) se verifica para toda  $c_i > 0$ . Y claramente se satisface para el caso homogéneo cuando  $K = 1$ .

**Nota 3.5.** Sea  $g_1(A)$  una función de valores reales si y solo si  $A \geq 0$ . Como  $A(0) > 0$ , la suposición  $I_A \neq 0$  implica la existencia de un  $t^* > 0$  tal que  $A(t) > 0$  para  $t < t^*$ .

Por tanto  $A(t)$  existe para  $t \in [0, t^*)$ .

**Lema 3.4.** Sea  $A(0) > 0$  y se satisface la condición (3.65). Entonces existe un  $t^* > 0$  tal que el problema

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = 2g_1(A), \quad \varphi_0|_{t=0} = \varphi_0^0, \quad (3.68)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{4}{\mathcal{K}_1} \int_0^1 \frac{F_p(z, t)}{\sqrt{1 - G(z, t)}} dz, \quad A|_{t=0} = A^0, \quad (3.69)$$

tiene la solución tal que  $A(t) > 0$  para  $t \in [0, t^*]$ . Aquí  $F_p$  es la parte par de la función  $f$ .

### 3.2.6. Análisis de la cola del solitón

Ahora vamos a probar la solubilidad de la ecuación (3.49) la cual describe la cola del solitón.

**Lema 3.5.** La ecuación (3.49) para  $u_1^-$  tiene solución, a la izquierda de la curva inicial  $\gamma = \{(x, 0), x < \varphi_0(0)\} \cup \{(\varphi_0(t), t), t \geq 0\}$ . Dicha solución crece como una exponencialmente.

*Demostración.* Usamos el método de las características para resolver la ecuación  $au_x + bu_t = c$ , con condición inicial  $u|_\gamma = \nu$ , donde  $\gamma = \{x = x^0(\xi), t = t^0(\xi)\}$  y  $\xi$  es el parámetro de la curva  $\gamma$ . Para el caso  $x \geq \varphi_0(0)$ , de (3.49) tomando  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = u \partial f / \partial v_0$ ,  $x^0 = \varphi_0(\xi)$  y  $t^0 = \xi$ ,  $\xi \geq 0$ . De (3.51) y (3.52) tenemos que el Jacobiano es distinto de cero, por tanto obtenemos las siguientes ecuaciones características

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\tau} &= 1, & T|_{\tau=0} &= \xi, \\ \frac{dX}{d\tau} &= 0, & X|_{\tau=0} &= \varphi_0(\xi), \\ \frac{dU}{d\tau} &= U f'_0, & U|_{\tau=0} &= \nu(\xi), \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde  $f'_0 = \partial f / \partial v_0$  evaluada en cero. De (3.70) obtenemos las características

$$t = T = \tau + \xi, \quad x = X = \varphi_0(\xi), \quad u_1^- = U = \nu(\xi) e^{\xi f'_0}, \quad \xi \geq 0.$$



Por tanto, las características de la ecuación (3.49) no se intersectan, como se muestra en la figura siguiente:

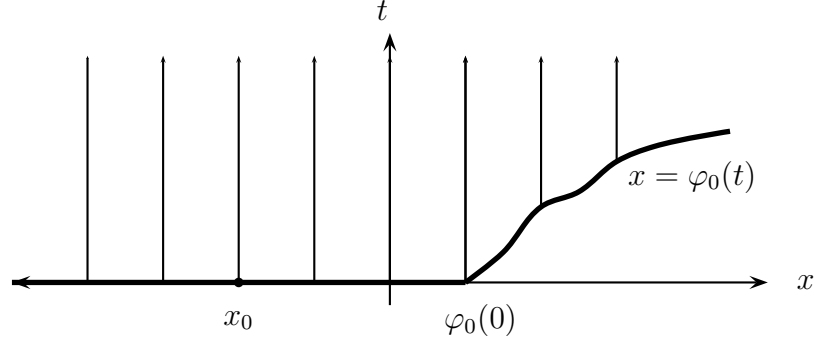


Figura 3.2: Características para la ecuación (3.49)

Otra vez usando la propiedad  $\varphi_0' > 0$  para  $\forall t > 0$ , tenemos que la ecuación  $x = \varphi_0(\xi)$  tiene solución y la denotamos  $\xi = \varphi_0^{-1}(x)$ . Por tanto la solución para (3.75) se obtiene

$$u_1^-(x, t) = \nu(\xi) e^{(t-\xi)f_0'} \Big|_{\xi=\varphi_0^{-1}(x)}, \quad x \geq \varphi_0(0). \quad (3.71)$$

De manera similar al caso anterior si  $x < \varphi_0(0)$ , tomando  $x^0 = \xi$  y  $t^0 = 0$  es decir sólo cambiamos la condición inicial en (3.62) obtenemos la solución

$$u_1^-(x, t) = \nu(x) e^{tf_0'}, \quad x < \varphi_0(0). \quad (3.72)$$

Por tanto, tenemos que la solución al problema (3.49) existe.  $\square$

Si la suposición de que  $g_1(u)$  es una función de valores reales, implica que  $u$  debe ser una función no negativa, entonces se aparece la condición adicional

$$u_1^-(x, t) \geq 0. \quad (3.73)$$

Las igualdades (3.71) y (3.72) se verifican (3.73) si  $\nu(x) \geq 0$ .

Para  $x < \varphi_0(0)$ ,  $\nu(x)$  se define como una función arbitraria no negativa. Si  $x \geq \varphi_0(0)$

entonces de la ecuación (3.35) tenemos

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1^- &= \left( \frac{d\varphi_0(t)}{dt} \right)^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d\varphi_1}{dt} \frac{\partial U_0}{\partial \tau} + f(U_0, U_{0\tau}, \dots) - \frac{\partial U_0}{\partial t} \right) d\tau \right\} \\ &= \left( \frac{d\varphi_0(t)}{dt} \right)^{-1} \left\{ 2 \int_0^{\infty} F_p(U_0, \dots) d\tau - \frac{d}{dt} \left( \frac{A}{\beta} a_1 \right) \right\},\end{aligned}\quad (3.74)$$

donde  $F_p$  es una función par conocida y

$$a_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\eta = 2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - G(z, A)}}.$$

Ahora desarrollamos el término siguiente

$$\begin{aligned}I_B &= \frac{d}{dA} \left\{ \frac{A}{\beta} a_1 \right\} = a_1 A \frac{d}{dA} \left( \frac{1}{\beta} \right) + \frac{A}{\beta} \frac{d}{dA} a_1 + \frac{a_1}{\beta} \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{1}{(1 - G)^{3/2}} \left\{ \frac{-A g_1'(A)}{g_1(A)} (1 - G) + A \frac{\partial G}{\partial A} + 2(1 - G) \right\} dz.\end{aligned}$$

Simplificando el siguiente término

$$\begin{aligned}&\frac{-A g_1'(A)}{g_1(A)} (1 - G) + A \frac{\partial G}{\partial A} + 2(1 - G) \\ &= \frac{-A g_1'(A)}{g_1(A)} \left( 1 - \frac{g_1(Az)}{g_1(A)} \right) + A \left( \frac{z g_1'(Az)}{g_1(A)} - \frac{g_1(Az)}{g_1^2(A)} g_1'(A) \right) + 2 \left( 1 - \frac{g_1(Az)}{g_1(A)} \right) \\ &= \frac{1}{g_1(A)} \left\{ 2g_1(A) - 2g_1(Az) - \left( A g_1'(A) - A z g_1'(Az) \right) \right\}\end{aligned}$$

De donde tenemos

$$I_B = \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{1}{(1 - G)^{3/2}} \left\{ 2(1 - G) - \frac{\tilde{g}_1(A)}{g_1(A)} (1 - \tilde{G}) \right\} dz. \quad (3.75)$$

Por tanto tenemos

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{A}{\beta} a_1 \right\} = \frac{1}{\beta} \frac{dA}{dt} \mathcal{K}_2, \quad (3.76)$$

donde

$$\mathcal{K}_2 = \int_0^1 \frac{1}{(1 - G)^{3/2}} \left\{ 2(1 - G) - \frac{\tilde{g}_1(A)}{g_1(A)} (1 - \tilde{G}) \right\} dz.$$

Ahora desarrollando la integral para  $F_p$  tenemos

$$\int_0^\infty F_p d\tau = \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{F_p}{z\sqrt{1-G}} dz.$$

Entonces es necesaria la condición siguiente:

$$\int_0^1 \frac{F_p}{\sqrt{1-G}} \left( \frac{1}{z} - 2 \frac{\mathcal{K}_2}{\mathcal{K}_1} \right) dz \geq 0. \quad (3.77)$$

Por tanto, de (3.77) tenemos

$$\check{u}_1^- = \frac{2}{\beta^3} \left\{ \int_0^1 \frac{F_p}{z\sqrt{1-G(z,A)}} dz - \frac{2\mathcal{K}_2}{\mathcal{K}_1} \int_0^1 \frac{F_p}{\sqrt{1-G}} dz \right\} \geq 0. \quad (3.78)$$

### 3.2.7. Resultado principal

Para la ecuación (3.1) hemos probado que es posible construir una solución asintótica con una precisión  $o(\varepsilon^2)$  que describe el comportamiento de la onda perturbada, como se enuncia en el Teorema siguiente:

**Teorema 3.1.** *Supongamos que se satisfacen las condiciones del Lema 3.4 y se verifica la condición (3.78). Entonces para  $t \in [0, t^*)$  existe la solución asintótica mód  $o(\varepsilon^2)$  tipo solitón de la ecuación (3.1), la cual tiene la forma*

$$u(x, t, \varepsilon) = \{U_0(\tau, t) + \varepsilon (u_1^-(x, t)\chi(\tau, t) + W_1(\tau, t)) + \varepsilon^2 U_2(\tau, x, t, \varepsilon)\} \Big|_{\tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}} + o(\varepsilon^2), \quad (3.79)$$

donde

$$U_0(\tau, t) = A\omega \left( \beta \left( \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon} \right), A \right)$$

es el término principal de la solución,  $A$  es la amplitud,  $\beta = \sqrt{2g_1(A)}$ ,  $d\varphi_0/dt = \beta^2$ ,  $W_1 \in \mathcal{S}$  y  $U_2 \in \mathcal{H}$ ,  $\chi \rightarrow 0$  si  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $\chi \rightarrow 1$  si  $\tau \rightarrow -\infty$ .

**Nota 3.6.** *No consideramos el problema de Cauchy con valores iniciales arbitrarios, pero construimos una solución asintótica en la clase de funciones de tipo solitón. Eso implica que el valor inicial  $u|_{t=0}$  no es arbitrario, sino que debe tener una forma*

especial; ver (3.79):

$$u|_{t=0} = \left\{ U_0(\tau, 0) + \varepsilon \left( u_1^-|_{t=0} \chi(\tau, 0) + W_1(\tau, 0) \right) + \varepsilon^2 U_2(\tau, x, 0, \varepsilon) \right\} \Big|_{\tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}} + o(\varepsilon^2). \quad (3.80)$$

Además dado que  $u_1^-(x, 0)|_{x=\varphi(0)} = \nu(\varphi(0)) = \check{u}_1^-(0)$  implica que la función  $u_1^-(x, 0)$  no es libre para  $x = \varphi(0)$ , pero para  $x < \varphi(0)$ , la función  $u_1^-(x, 0) = \nu(x) \geq 0$ , es una función arbitraria.

**Nota 3.7.** La corrección  $\varphi_1(t)$  para la fase es desconocida en la precisión  $o(\varepsilon^2)$ . En [19] se describe cómo encontrar la corrección  $\varphi_1(t)$  en el caso de no linealidades más suaves.

El teorema 3.1 nos dice que el término principal  $U_0(\tau, t)$  está bien definido y estable bajo las condiciones  $I_A \neq 0$  y  $A(t) > 0$ . Al mismo tiempo, la amplitud de la cola del solitón  $\varepsilon u_1^-$  crece exponencialmente respecto a  $t$ . Por tanto,  $\varepsilon u_1^-$  no es pequeño para  $T \approx \ln(1/\varepsilon) \rightarrow \infty$ , pero es acotado solamente para  $T \leq \text{const}$ . Eso implica que la solución asintótica tipo solitón conserva su forma salvo pequeñas oscilaciones a la derecha del frente de onda.

### 3.3. Ejemplo 1: $g'(u) = u^{3/2}$ , $f(u) = u(\mu - \nu u)$

Ahora vamos a estudiar la solución asintótica de un ejemplo, el caso particular cuando  $g'(u) = u^{3/2}$ ,  $f(u) = u(\mu - \nu u)$ . Estudiamos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^{3/2}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u(\mu - \nu u), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0. \quad (3.81)$$

Tomando en cuenta que  $g(u) = u^2 g_1(u)$  donde  $g_1(u) = (2/5)\sqrt{u}$ , usando (3.26) obtenemos el término principal de la solución asintótica

$$U_0(\tau, t) = A \cosh^{-4}(\beta\tau/4).$$

De (3.68) obtenemos para  $\varphi_0$  la ecuación siguiente

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{4}{5}\sqrt{A}. \quad (3.82)$$

De (3.69) tenemos

$$\mathcal{K}_1 = \frac{7}{2} \int_0^1 \frac{z dz}{\sqrt{1 - \sqrt{z}}}.$$

Como  $F_p = A\omega(\mu - \nu A\omega)$  calculamos

$$\int_0^1 \frac{F_p(z, t)}{\sqrt{1 - G(z, A)}} dz = A\mu \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1 - \sqrt{z}}} dz - A^2 \nu \int_0^1 \frac{z^2}{\sqrt{1 - \sqrt{z}}} dz.$$

Haciendo el cambio de variables  $\sqrt{x} = u^2 - 1$  tenemos

$$\int_0^1 \frac{z dz}{\sqrt{1 - \sqrt{z}}} = 4 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{u(u^2 - 1)(u^4 - 2u^2 + 1)}{\sqrt{2 - u^2}} du = \frac{64}{35}.$$

$$\int_0^1 \frac{z^2 dz}{\sqrt{1 - \sqrt{z}}} = 4 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{u(u^2 - 1)(u^4 - 2u^2 + 1)^2}{\sqrt{2 - u^2}} du = \frac{1024}{693}.$$

Por tanto obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{8}{7}\mu A - \frac{8}{7}\nu A^2 \frac{80}{99} \quad (3.83)$$

La ecuación (3.83) es de Bernoulli por tanto bajo la condición inicial  $A|_{t=0} = A^0$ , tenemos la solución explícita

$$A(t) = A^0 \frac{e^{\theta_1 t}}{1 + A^0 \frac{\theta_2}{\theta_1} (e^{\theta_1 t} - 1)}, \quad \forall \mu \neq 0, \quad (3.84)$$

donde  $\theta_1 = 8\mu/7$ ,  $\theta_2 = 640\nu/693$ .

De la ecuación (3.83) tenemos el siguiente punto de equilibrio

$$A^* = \frac{99\mu}{80\nu} = \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

La función (3.84) la podemos reescribir en la manera siguiente:

$$A(t) = \frac{A^*}{1 + C e^{-\theta_1 t}}, \quad (3.85)$$

donde  $C = (A^*/A^0) - 1$ . De (3.85) tenemos que  $A$  es una función monótona.

I. Sea  $A^0 = A^*$ . De (3.85) tenemos

$$A(t) = A^*,$$

es decir,  $A$  es una constante para todo  $t \geq 0$ .

II. Sea  $A^0 > A^*$

$$\frac{dA}{dt} = C A^* \theta_1 \frac{e^{-\theta_1 t}}{(1 + C e^{-\theta_1 t})} < 0. \quad (3.86)$$

De (3.86) tenemos que  $A$  es decreciente para todo  $t \geq 0$ , dado que  $C < 0$ . Por tanto (3.85) y (3.86) implican

$$A \downarrow A^*, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

como una exponencial.

III. Si  $A^0 < A^*$ . De manera similar al caso anterior tenemos que  $dA/dt > 0$ , es decir,  $A$  es creciente para todo  $t \geq 0$ . Por tanto (3.85) y (3.86) implican

$$A \uparrow A^*, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

como una exponencial.

En la figura 3.3 se muestra el comportamiento de la función  $A(t)$  para los valores,  $\mu = 2$ ,  $\nu = 1$ ,  $A^* = 2.475$ , y diferentes valores iniciales  $A^0$ .

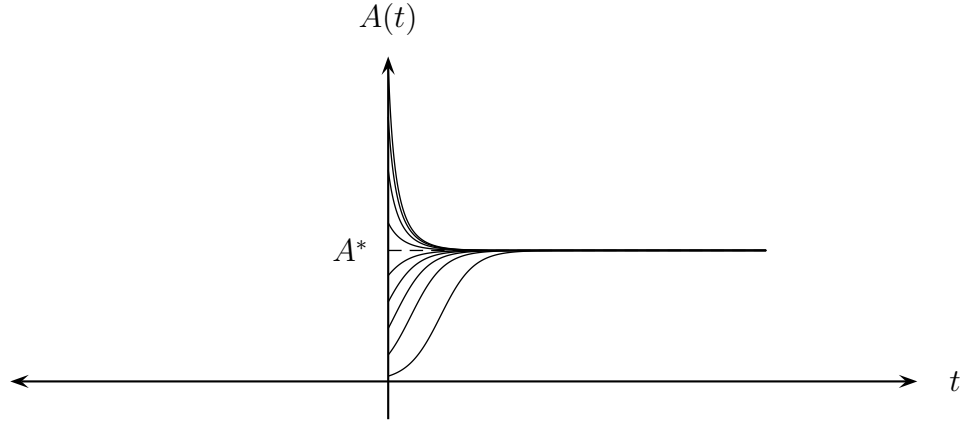


Figura 3.3: Comportamiento de la amplitud

Ahora usando (3.76) calculamos los términos correspondientes a  $\check{u}_1^-$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{z}}} dz.$$

$$\int_0^1 \frac{F_p}{z\sqrt{1-G}} dz = A\mu \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{z}}} dz - A^2 \nu \int_0^1 \frac{z}{\sqrt{1-\sqrt{z}}} dz.$$

Calculando la integral

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{1/2}}} = 4 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{u(u^2-1)}{\sqrt{2-u^2}} du = \frac{8}{3},$$

tenemos

$$\int_0^1 \frac{F_p}{z\sqrt{1-G}} dz = 2\mu A \frac{1}{\beta} \frac{8}{3} - \nu A^2 \frac{1}{\beta} \frac{64}{35}.$$

Por tanto, obtenemos

$$\check{u}_1^- = \left( \frac{2}{\beta^3} \right) \left\{ A\mu \left( \frac{8}{3} - \frac{2560}{1120} \right) + \mu A \left( \frac{40960}{22176} - \frac{64}{35} \right) \right\} \geq 0. \quad (3.87)$$

---

## Capítulo 4

# Esquema Numérico

En este capítulo vamos a construir un esquema de diferencias finitas estable para la simulación de la dinámica de los solitones de la ecuación (2.13). Para ello nos basamos en el esquema descrito en [23].

### 4.1. Diferencias finitas

Vamos a realizar la simulación numérica de la ecuación (2.13) sobre un intervalo de  $x$  cerrado, es decir  $x \in [0, X]$ ,  $X > 0$ . Por esto simulamos la ecuación (2.13) con el problema mixto:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g'(u)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x \in [0, X], \quad t \in (0, T), \quad (4.1)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=X} = u_x|_{x=X} = 0, \quad u|_{t=0} = u^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (4.2)$$

donde  $u^0$  es una función suficientemente suave. En particular elegimos  $u^0$  como una onda solitaria descrita en el lema 2.1, la cual se obtiene de manera exacta o numérica según sea la suavidad de la función  $g'(u)$ . Además, para el dominio  $Q_T = (0, X) \times (0, T)$  sean  $X$ ,  $T$  y  $u^0$  tales que, uniformemente en  $t \leq T$ ,

$$\left| u(x, t)|_{x \in [0, \delta]} \right| \leq c\varepsilon^2, \quad \left| u(x, t)|_{x \in [X-\delta, X]} \right| \leq c\varepsilon^2 \quad (4.3)$$



para algún  $0 < \delta \ll 1$ . Es suficiente tomar la condición inicial  $u^0$  como una combinación de solitones con posiciones iniciales dentro del intervalo  $(0, X)$  tal que la trayectoria del frente de onda durante el intervalo  $t \in (0, T)$  permanece dentro del intervalo  $[0, X]$  para asegurar las condiciones (4.3).

Es imposible crear un esquema de diferencias finitas para el problema (4.1) y (4.2) que permanezca estable uniformemente para  $x \in [0, 1]$  y  $t \in (0, T)$ ,  $T = \text{const.}$ , puesto que (4.1) es una ecuación perturbada singular y tiende a la ecuación de primer orden con  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Por esa razón trataremos a  $\varepsilon$  como un valor suficientemente pequeño pero fijo.

Para plantear nuestro esquema de diferencias finitas al problema (4.1) debemos elegir aproximaciones apropiadas para los términos diferenciales lineales, y elegir una manera de linealizar el término no-lineal. Para lograrlo tratamos el término no-lineal por separado.

## 4.2. Esquema no lineal preliminar

De manera usual para la discretización de la ecuación (4.1), primero definimos una malla  $Q_{T,h,\tau} = \{(x_i, t_j) \stackrel{\text{def}}{=} (ih, j\tau), i = 0, \dots, N+1, j = 0, \dots, J\}$  sobre el dominio  $Q_T$ , y denotamos

$$\begin{aligned} y_i^j &\stackrel{\text{def}}{=} u(x_i, t_j), \quad y_{i,x}^j \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x y_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h}, \quad y_{i,\bar{x}}^j \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\bar{x}} y_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h}, \\ y_{i,\dot{x}}^j &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\dot{x}} y_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (y_{i,x}^j + y_{i,\bar{x}}^j), \quad y_{i,\bar{t}}^j \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\bar{t}} y_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau}, \quad y_{i,x\bar{x}}^j = (y_{i,x}^j)_{\bar{x}}. \end{aligned}$$

Siguiendo [23], para el problema (4.1)-(4.2) escribimos un esquema en diferencias finitas en la forma

$$y_{i,\bar{t}}^j + Q(y_i^j) + \varepsilon^2 (\alpha y_{i,x\bar{x}}^j + h\beta y_{i,x\bar{x}}^j) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, J \quad (4.4)$$

$$y_r^j = 0, \quad y_{N+1-r}^j = 0, \quad r = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (4.5)$$

$$y_i^0 = u^0 \left( \frac{x_i}{\varepsilon} \right), \quad i = 0, \dots, N+1, \quad (4.6)$$

donde  $\alpha + h\beta = 1$ ,  $\beta > 0$  es un número arbitrario. El término  $h\beta y_{i,x\bar{x}}^j$  con  $\beta > 0$  representa la “regularización parabólica” de las ecuaciones tipo GKdV (4.1), dado

que implica algunas propiedades de ecuaciones parabólicas (ver, por ejemplo [22, 23] y la estimación (4.23) que se obtiene al final de esta sección). Además la aproximación (4.4) ocurre con una precisión local de  $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ .

La aproximación del término no-lineal de (4.1) depende de las propiedades de  $g'(u)$ :

I. Si la función  $g'(u)$  tiene la forma:

$$g'(u) = \sum_{k=1}^K c_k u^{m_k}, \quad m_k \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq m_k \leq 4, \quad (4.7)$$

entonces el término no-lineal se aproxima con la función

$$Q(y) = \sum_{k=1}^K \frac{2}{m_k + 1} \sum_{j=1}^{m_k} y^{m_k-j} (y^j)_{\dot{x}},$$

con esta aproximación se verifican las propiedades:

$$h \sum_{i=1}^N Q(y_i) = 0, \quad h \sum_{i=1}^N y_i Q(y_i) = 0. \quad (4.8)$$

Además el esquema (4.4) es estable y tiene una única solución,[23].

II. Por otro parte si la función  $g'(u)$  tiene la forma:

$$g'(u) = \sum_{k=1}^K c_k u^{q_k+1}, \quad q_k \in \mathbb{R}^1, \quad \delta_1 \leq q_k \leq 4 - \delta_2, \quad (4.9)$$

con al menos un  $q_k$  no entero y algunas  $\delta_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ ,

entonces para aproximar la no-linealidad de (4.1) usamos la función

$$Q(y) = C \left\{ (g'(y))_{\dot{x}} + \frac{g'(y)}{y} y_{\dot{x}} \right\}. \quad (4.10)$$

De manera más explícita, para funciones de la forma (4.9) la función  $Q(y)$  es la siguiente:

$$Q(y) = \sum_{k=1}^K c_k \frac{q_k + 1}{q_k + 2} \{ (y^{q_k+1})_{\dot{x}} + y^{q_k} y_{\dot{x}} \}. \quad (4.11)$$

Considerando la forma simplificada (4.10) para la aproximación del término no-lineal, vamos a probar que se verifica

$$h \sum_{i=1}^N y Q(y) = 0, \quad (4.12)$$

para después probar que la ecuación (4.4) satisface el equivalente a la ley de la energía.

Para simplificar la notación hagamos

$$y \stackrel{def}{=} y_i^j, \quad \tilde{y} \stackrel{def}{=} y_i^{j-1}. \quad (4.13)$$

Ahora para la derivada discreta tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} y_x g + g_x y - (yg)_x &= \frac{1}{h} \{g_i (y_{i+1} - y_i) - g_{i+1} (y_{i+1} - y_i)\} \\ &= -h y_x g_x, \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$(yg)_x = y_x g + g_x y + h y_x g_x. \quad (4.14)$$

De manera similar a (4.14) obtenemos

$$(yg)_{\bar{x}} = y_{\bar{x}} g + g_{\bar{x}} y - h y_{\bar{x}} g_{\bar{x}}. \quad (4.15)$$

$$(yg)_{\dot{x}} = y_{\dot{x}} g + g_{\dot{x}} y + \frac{h^2}{2} (y_x g_x)_{\bar{x}}. \quad (4.16)$$

Además para funciones  $f, g$  que satisfacen la propiedad (4.3) se tiene

$$f|_{x=-h} = f|_{x=X+h} = g|_{x=-h} = g|_{x=X+h} = 0, \quad (4.17)$$

Por tanto para tales funciones se satisface

$$\begin{aligned} h \sum_{i=0}^N f_i g_{ix} &= \sum_{i=0}^N f_i (g_{i+1} - g_i) \\ &- \left( \sum_{i=0}^N f_i g_i - \sum_{i=1}^{N+1} f_{i-1} g_i \right) = - \sum_{i=1}^{N+1} g_i (f_i - f_{i-1}), \end{aligned}$$

de aquí, redefiniendo el índice para la parte derecha y considerando la propiedad (4.17), tenemos

$$h \sum_{i=1}^N f_i g_{ix} = -h \sum_{i=1}^N g_i f_{i\bar{x}}. \quad (4.18)$$

Usando la propiedad (4.16) se obtiene que

$$\begin{aligned} h \sum_{i=1}^N y Q(y) &= C h \sum_{i=1}^N (y g'_x + g' y_x) \\ &= C h \sum_{i=1}^N \left\{ (y g)_{\dot{x}} - \frac{h}{2} (g'_x y_x)_{\bar{x}} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ahora usando (4.19) y (4.18) obtenemos

$$h \sum_{i=1}^N y y_{x\bar{x}\dot{x}} = -h \sum_{i=1}^N y_{x\bar{x}} y_{\dot{x}} = h \sum_{i=1}^N y_x y_{x\dot{x}} = 0. \quad (4.20)$$

Por último, calculamos el término

$$h \sum_{i=1}^N y y_{x\bar{x}x} = -h \sum_{i=1}^N y_{\bar{x}} y_{\bar{x}x},$$

de las fórmulas (4.15), (4.16) haciendo  $f = y_{\bar{x}}$  se tiene la igualdad

$$f f_x = \frac{1}{2} (f^2)_x - \frac{h}{2} (f_x)^2,$$

de donde obtenemos

$$h \sum_{i=1}^N y y_{x\bar{x}x} = \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^N (y_{\bar{x}x})^2. \quad (4.21)$$

Ahora multiplicando (4.4) por  $hy$  y sumando sobre los índices tenemos

$$h \sum_{i=1}^N y y_t + h \sum_{i=1}^N y Q(y) + \varepsilon^2 \alpha h \sum_{i=1}^N y y_{x\bar{x}\dot{x}} + \varepsilon^2 \beta h^2 \sum_{i=1}^N y y_{y\bar{x}x} = 0;$$

usando (4.14)-(4.21) tenemos

$$\frac{1}{2} \left\{ \left( h \sum_{i=1}^N y^2 \right)_{\bar{t}} + \tau h \sum_{i=1}^N (y_t)^2 + \varepsilon^2 h^3 \sum_{i=1}^N (y_{\bar{x}x})^2 \right\} = 0. \quad (4.22)$$

Ahora consideremos  $L_h^2[0, X]$  como el espacio de funciones  $y = \{y_i^j\}_{i=1}^{N+1}$ , sobre el cual podemos definir la norma

$$\|y\| = \sqrt{h \sum_{i=1}^N y_i^2}.$$

Por tanto de (4.22) obtenemos

$$\partial_{\bar{t}} \|y\|^2 + \tau \|y_{\bar{t}}\|^2 + \beta h^2 \varepsilon^2 \|y_{x\bar{x}}\|^2 = 0. \quad (4.23)$$

### 4.3. Linealización

Ahora usando la notacion dada en (4.11), reescribimos la ecuación (4.4) en la forma

$$y + \tau Q(y) + \varepsilon^2 \tau (\alpha y_{x\bar{x}\dot{x}} + h\beta y_{x\bar{x}x}) = \check{y}, \quad j \geq 1. \quad (4.24)$$

Nos interesa la solubilidad de la ecuación (4.24), y una manera de linealizar del término no-lineal. Para lograrlo construimos una sucesión de funciones  $\varphi(s) \stackrel{def}{=} \{\varphi_i(s)\}_{i=0}^N$ , para  $s \geq 0$ , tal que

$$\varphi(0) = \check{y}, \quad (4.25)$$

y

$$\varphi(s) \rightarrow y, \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty. \quad (4.26)$$

Para encontrar una ecuación lineal para  $\varphi(s)$  consideramos primero el caso (4.7). Sea  $W = \varphi - \bar{\varphi}$  donde  $\varphi = \varphi(s)$ ,  $\bar{\varphi} = \varphi(s-1)$ , de donde se obtiene para  $Q(\varphi)$  el desarrollo siguiente:

$$Q(\varphi) = Q(\bar{\varphi} + W) = Q(\bar{\varphi}) + R_1(\bar{\varphi}, W) + R_2(\bar{\varphi}, W) + \cdots + R_{m_K}(\bar{\varphi}, W), \quad (4.27)$$

donde  $R_k(\bar{\varphi}, W)$ ,  $k = 1, \dots, m_K$ , denota un polinomio homogéneo de grado  $k$  en  $W$ , es decir,  $R_k(\bar{\varphi}, \lambda W) = \lambda^k R_k(\bar{\varphi}, W)$ .

Si la sucesión  $\varphi$  converge entonces  $W(s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ , de manera que podemos escribir

$$Q(\varphi) = Q(\bar{\varphi}) + R_1(\bar{\varphi}, W) + \mathcal{O}(W^2), \quad (4.28)$$

donde  $R_1(\bar{\varphi}, W)$  es la función lineal respecto a  $W$  y  $\mathcal{O}(W^2)$  es el error de cambio. Dado que (4.28) linealiza la ecuación (4.24), la ecuación a resolver para  $\varphi$  es la siguiente:

$$\varphi + \tau R_1(\bar{\varphi}, W) + \varepsilon^2 \tau (\alpha \varphi_{x\bar{x}\dot{x}} + h\beta \varphi_{x\bar{x}x}) = \check{y} - \tau Q(\bar{\varphi}), \quad s \geq 1. \quad (4.29)$$

Para la ecuación KdV es posible probar que la sucesión  $\varphi(s)$  se converge fuertemente en el sentido  $C(\mathbb{R}^1)$  y por tanto el cambio para  $Q(\varphi)$  dado en (4.28) es adecuado, ver [23]. Para funciones  $g'(y) \in \mathcal{C}^2$  podemos seguir los mismos pasos para encontrar la ecuación linealizada en la forma (4.29).

Por otro lado si  $g'(y) \in \mathcal{C}^1$ , no podemos usar la fórmula (4.28) ya que el término  $R_1(\bar{\varphi}, W)$  no es continuo en  $W$ . Por esa razón para aproximar el término  $Q(\varphi)$  usamos la expresión

$$R(\bar{\varphi}, \varphi) = C \left\{ \left( \varphi \frac{g'(\bar{\varphi})}{\bar{\varphi}} \right)_{\dot{x}} + \frac{g'(\bar{\varphi})}{\bar{\varphi}} \varphi_{\dot{x}} \right\}. \quad (4.30)$$

De manera similar a (4.11) escribimos  $R(\bar{\varphi}, \varphi)$  más explícitamente como

$$R(\bar{\varphi}, \varphi) = \sum_{k=1}^K c_k \frac{q_k + 1}{q_k + 2} \{(\varphi \bar{\varphi}^{q_k})_{\dot{x}} + \bar{\varphi}^{q_k} \varphi_{\dot{x}}\}. \quad (4.31)$$

Por tanto de (4.31) obtenemos la ecuación (4.24) en su forma linealizada para funciones  $g'$  dadas en (4.9)

$$\varphi + \tau R(\bar{\varphi}, \varphi) + \tau \varepsilon^2 (\alpha \varphi_{x\bar{x}\dot{x}} + h\beta \varphi_{x\bar{x}x}) = \check{y}, \quad s \geq 1. \quad (4.32)$$

Los sistemas (4.29) y (4.32) tienen solución para  $\tau/h \ll 1$  y  $\tau \varepsilon^2/h^3 \ll 1$ . La prueba de solubilidad de (4.29) para  $\tau$  y  $h$ , los cuales no tienden a cero, puede ser probada teóricamente, ver [23]. Para el caso (4.32), se linealiza de manera similar. Ver el capítulo próximo.

## 4.4. Algoritmo de la solución

Una vez que obtenemos nuestra ecuación linealizada (4.32), se realiza un algoritmo para solucionar el sistema (4.1)-(4.2), para no linealidades  $g'(u)$  dada en (4.9). Discretizando los términos de (4.32) tenemos

$$\varphi_{x\bar{x}\dot{x}} = \frac{1}{2h^3} (\varphi_{i+2} - 2\varphi_{i+1} + 2\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}),$$

$$\varphi_{x\bar{x}x} = \frac{1}{h^3} (\varphi_{i+2} - 3\varphi_{i+1} + 3\varphi_i - \varphi_{i-1}),$$

$$R(\bar{\varphi}, \varphi) = \left\{ \sum_{k=1}^K \frac{c_k}{2h} \frac{q_k + 1}{q_k + 2} (\bar{\varphi}_{i+1}^{q_k} + \bar{\varphi}_i^{q_k}) \right\} \varphi_{i+1} - \left\{ \sum_{k=1}^K \frac{c_k}{2h} \frac{q_k + 1}{q_k + 2} (\bar{\varphi}_i^{q_k} + \bar{\varphi}_{i-1}^{q_k}) \right\} \varphi_{i-1},$$

denotamos las constantes en la manera siguiente:

$$c_1 = \frac{\tau \varepsilon^2 (\alpha + 3h\beta)}{h^3}, \quad c_2 = \frac{\tau \varepsilon^2 (\alpha - h\beta)}{h^3}, \quad c_3 = 1 + \frac{3\varepsilon^2 \beta \tau}{h^2},$$

$$c_4 = \frac{\tau \varepsilon^2 (\alpha + 2h\beta)}{2h^3}, \quad c_5 = \frac{\varepsilon^2 \alpha \tau}{2h^3},$$

ahora definimos los coeficientes como sigue

$$\begin{aligned}
 \rho_i &= c_2 - \frac{\tau}{2h} \sum_{k=1}^K c_k \frac{q_k + 1}{q_k + 2} (\bar{\varphi}_i^{q_k} + \bar{\varphi}_{i-1}^{q_k}), \\
 \sigma_i &= c_3, \\
 \theta_i &= \frac{\tau}{2h} \sum_{k=1}^K c_k \frac{q_k + 1}{q_k + 2} (\bar{\varphi}_{i+1}^{q_k} + \bar{\varphi}_i^{q_k}) - c_1, \\
 u_i &= c_4, \\
 l_i &= -c_5, \\
 z_i &= \tilde{y},
 \end{aligned}$$

de donde obtenemos el siguiente sistema

$$l_i \varphi_{i-2} + \rho_i \varphi_{i-1} + \sigma_i \varphi_i + \theta_i \varphi_{i+1} + u_i \varphi_{i+2} = z_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.33)$$

usando las propiedades (4.17) tenemos  $\varphi_{-1} = \varphi_0 = \varphi_{N+1} = \varphi_{N+2} = 0$ , entonces el sistema que hay que resolver iteradamente es

$$A\vec{\varphi} = \vec{z} \quad (4.34)$$

donde  $\vec{\varphi}$  y  $\vec{z}$  son vectores columna con índices de 1 a  $N$ , y  $A$  es la matriz de  $N \times N$  siguiente:

$$A = \begin{pmatrix}
 \sigma_1 & \theta_1 & u_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_2 & \sigma_2 & \theta_2 & u_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 l_3 & \rho_3 & \sigma_3 & \theta_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & l_4 & \rho_4 & \sigma_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-3} & \theta_{N-3} & u_{N-3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho_{N-2} & \sigma_{N-2} & \theta_{N-2} & u_{N-2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{N-1} & \rho_{N-1} & \sigma_{N-1} & \theta_{N-1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & l_N & \rho_N & \sigma_N
 \end{pmatrix},$$



la cual consta de 5 diagonales no-triviales. Existen diferentes métodos para resolver el sistema (4.34); en este algoritmo usaremos el método de reducción de Gauss-Jordan. En realidad usar el método de Gauss-Jordan de forma general nos llevaría mucho tiempo, ya que la dimensión de la matriz es  $O(N^2)$ , donde  $N \equiv 1/h \gg 1$ . Por esta razón utilizaremos una versión de este método ajustada para este tipo de matrices. La modificación que se realiza al método es tal que para pasar de la etapa  $t_j$  a  $t_{j+1}$  se hace, con un número de operaciones del orden  $O(N)$  en vez de  $O(N^2)$  como se hace generalmente. A los algoritmos que usan  $O(N)$  operaciones para pasar de un paso  $t = t_j$  a otro  $t = t_{j+1}$  se llaman algoritmos económicos. La forma del coeficiente en la diagonal principal  $\sigma_i$  asegura la solubilidad del sistema (4.34) para  $\tau/h^3$  suficientemente pequeño analíticamente. Los resultados numéricos muestran la solubilidad de dicho sistema para valores de  $\tau/h^3$  adecuados.

Ahora podemos dar paso a paso el desarrollo del algoritmo para pasar de  $y^{j-1}$  a  $y^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$  como sigue

- I. Fijar las condiciones a la frontera:  $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_{n-1} = \varphi_n = 0$
- II. Escoger  $n$  (numero de subintervalos  $[x_{min}, x_{max}]$ );  
hacer  $x_i = x_{min} + ih$ , con  $h = (x_{max} - x_{min})/n$ ,  $i=0,1,\dots,n$
- III. Construir la condición inicial:  $y_i = \omega(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , (ésta es la etapa  $y_i = y^0$ )
- IV. Hacer la asignación  $\bar{\varphi} \leftarrow y$
- V. Construir la matriz  $A = A(\bar{\varphi})$  y el vector  $\bar{z}$
- VI. Resolver el sistema (4.34)
- VII. Hacer  $\bar{\varphi} \leftarrow \varphi$
- VIII. Ir al paso V y repetir los pasos VI, VII dos o tres veces
- IX. Hacer  $y \leftarrow \varphi$  y guardar  $y$  (esta es la etapa siguiente)
- X. Hacer la asignación  $\bar{\varphi} \leftarrow y$
- XI. Repetir los pasos V – X

---

## Capítulo 5

# Simulaciones Numéricas

### 5.1. Simulación para la ecuación GKdV- $g'$ homogénea

En este capítulo se muestran los resultados de las simulaciones numéricas para la ecuación GKdV- $g'$  (4.1)-(4.2), dicha simulación se realiza en la manera siguiente: Primero describimos el error para la ecuación diferencial ordinaria (2.27) comparando con la solución exacta para casos particulares de  $g'$ , de manera similar describimos el error para la ecuación (4.1). Luego simulamos la ecuación (4.1) con  $g'(u) = u^{3/2} + u^2$ . Por último modificando un poco el código, se muestra la simulación para la onda distorsionada.

#### Ecuación ordinaria asociada a la GKdV- $g'$

Como ya vimos en el capítulo anterior para usar el algoritmo descrito en (4.32) para simular la ecuación (4.1), necesitamos la función  $u^0$  suficientemente suave con las propiedades (4.3). Por esta razón necesitamos resolver la ecuación diferencial ordinaria (2.27) asociada a la ecuación GKdV- $g'$  dada en (2.13). La complejidad de encontrar la solución a la ecuación (2.27) depende de la función  $g'$ , de manera que para no limitarnos al análisis de las simulaciones, damos un algoritmo para resolver (2.27) numéricamente usando el método Runge-Kutta de orden 4 (RK-4.) Partiendo del problema (2.28) y haciendo  $\eta = \beta s$  donde  $s = (x - vt - x_0)/\varepsilon$ ,

obtenemos el problema siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{ds} &= -\beta\omega\sqrt{1-G(\omega, A)}, \quad s > h_s, \\ \omega|_{s=h_s} &= \sum_{i=0}^2 \frac{1}{(2i)!} W_{2i} \beta^{2i} h_s^{2i}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde  $W_{2i}$ ,  $G(\omega, A)$  descritas en (2.27) y  $s$  es equivalente a la variable  $\tau$ . Usamos RK-4 para el problema (5.1). Después del cálculo numérico, usando las propiedades de  $\omega$  definimos  $\omega(0, \cdot) = 1$ ,  $\omega(-s, \cdot) = \omega(s, \cdot)$ . La solución numérica se obtiene para la variable  $s$ , por tanto para pasar de la variable  $s$  a las variables  $x, t$  debemos encontrar la relación de los tamaños de paso entre tales variables.

Sea  $h_s$  el incremento para la variable  $s$ ,  $h$  el incremento para la variable  $x$  tenemos

$$h_s = s_{i+1} - s_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\varepsilon} = \frac{h}{\varepsilon}.$$

Con esta relación entre los tamaños de paso, se obtiene la intersección de las mallas  $s_i$  para  $i = 0, \dots, N$  y  $x_i$  para  $i = 0, \dots, 2N$ , como se muestra en la siguiente figura 5.1.

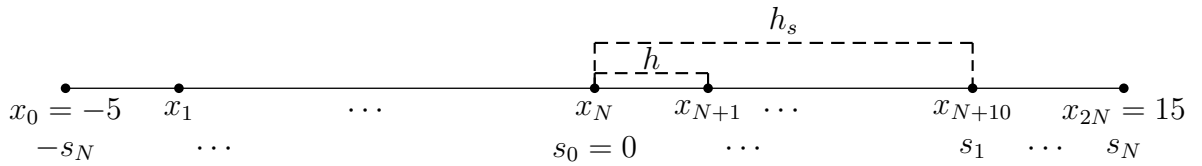


Figura 5.1: intersección de las mallas  $s_i$ ,  $x_i$

Para analizar la ecuación (5.1) con  $g'$  una función no homogénea y encontrar una forma confiable de elegir  $h_s$ , nos basamos en las ecuaciones ordinarias asociadas a las ecuaciones GKdV con  $g'$  una función homogénea, por ejemplo tomando  $g' = u^{q+1}$  el problema (5.1) toma la forma del problema (2.8) descrito en el capítulo 2 el cual

tiene solución explícita para toda  $q > 0$ . Por tanto calculando la solución numérica en el intervalo  $I = [-5, 15]$ , con  $\varepsilon = 0.1$  y comparando con la solución explícita tipo solitón obtenemos las tablas 5.1, 5.2 donde vemos el comportamiento del error para diferentes funciones  $g'$  homogéneas y diferentes tamaños de paso  $h_s$ .  $EM$  denota el error máximo entre la solución exacta y la numérica para algún  $s_k = kh_s$  donde  $k \in \{0, \dots, N\}$ , es decir:

$$EM = \max_{k \in \{0, \dots, N\}} |u_{\text{exac}}(s_k) - u_{\text{num}}(s_k)|,$$

donde  $u_{\text{exac}}$  denota la solución exacta y  $u_{\text{num}}$  la solución numérica.

Si  $g'(u) = u^2$  tenemos

$h_s$	0.020	0.018	0.016	0.0099	0.0066	0.0049	0.0028	0.0025
$EM (\times 10^{-5})$	2.41	2.19	2.01	1.21	0.81	0.61	0.35	0.31

Tabla 5.1: Errores máximos para la ecuación (5.1) con  $g' = u^2$  y distintos tamaños de paso

Si  $g'(u) = u^4$  tenemos

$h_s$	0.020	0.018	0.016	0.0099	0.0066	0.0049	0.0028	0.0025
$EM (\times 10^{-5})$	2.72	2.48	2.28	1.38	0.91	0.68	0.39	0.35

Tabla 5.2: Errores máximos para la ecuación (5.1) con  $g' = u^4$

De las tablas 5.1 y 5.2 vemos que para  $h_s \approx c \times 10^{-2}$  tenemos que  $EM$  es suficiente pequeño, es decir, el cambio del solitón explícito al solitón numérico implica el error entre  $c_1 \times 10^{-5}$  y  $c_2 \times 10^{-4}$ . ver las figuras 5.2 y 5.3.

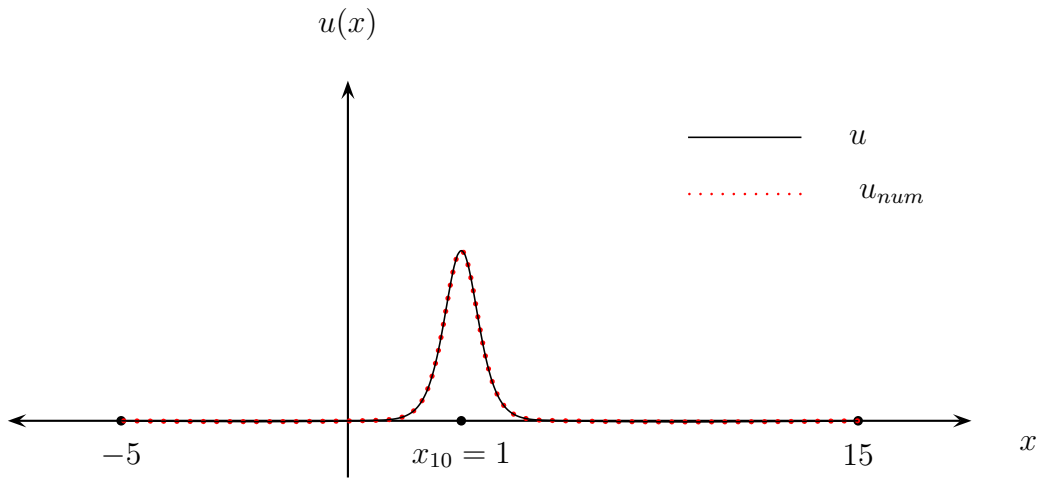


Figura 5.2: Solución exacta y numérica para  $g' = u^2$ , con amplitud  $A = 1.3$  y centradas en  $x_{10} = 1$

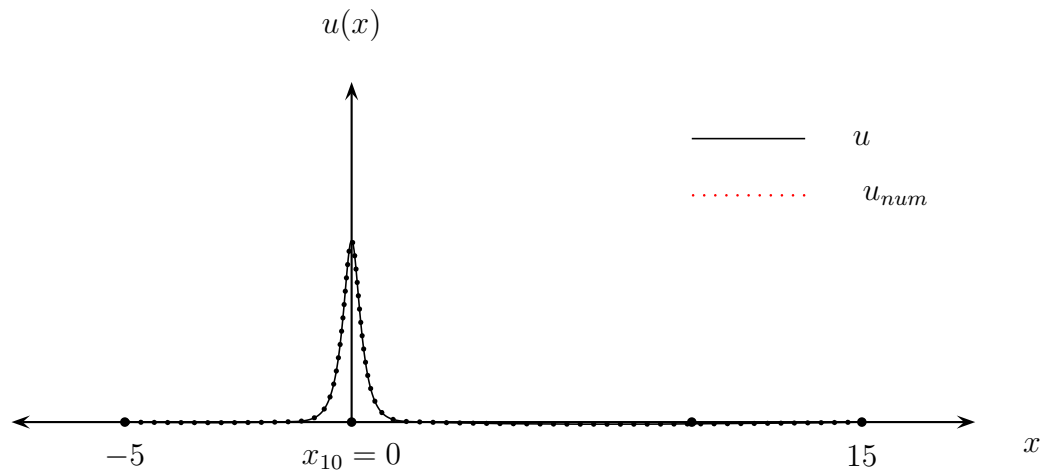


Figura 5.3: Solución exacta y numérica para  $g' = u^4$ , con amplitud  $A = 1.6$  y centradas en  $x_{10} = 0$

Por tanto para calcular la solución numérica tipo solitón del problema (5.1) con  $g' = u^{3/2} + u^2$  usamos  $h_s \approx c \times 10^{-2}$ . En principio podemos elegir  $h_s$  tan pequeño

como queramos para obtener el solitón numéricamente de la ecuación (5.1), pero considerando la relación entre  $h_s$  y  $h$  más adelante justificaremos por que es suficiente elegir  $h_s \approx c \times 10^{-2}$  para calcular la solución numérica tipo solitón del problema (5.1), ver la figura 5.4. En lo sucesivo en todos nuestros cálculos numéricos usaremos el valor fijo  $\varepsilon = 0.1$

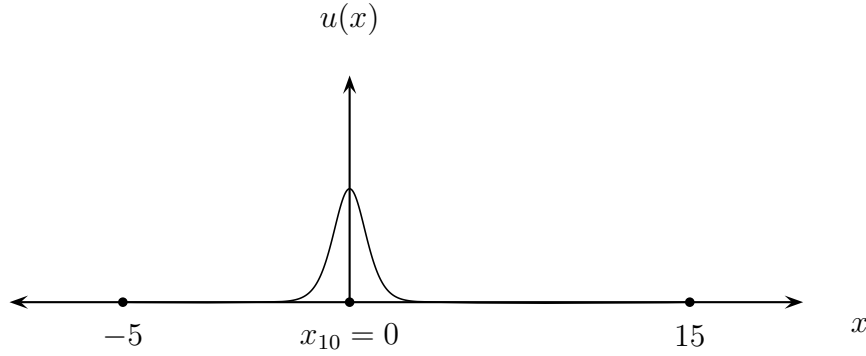


Figura 5.4: Solución numérica para  $g' = u^{3/2} + u^2$ , con amplitud  $A = 1.0$  y centrada en  $x_{10} = 0$ .

## Ecuación GKdV- $g$ homogénea

Ahora vamos a calcular la solución numérica de la ecuación GKdV- $g$  para no linealidades de la forma  $g' = u^{q+1}$ , usando el esquema numérico descrito en (4.32). Además dado que para este tipo de no linealidades tenemos solución explícita calculamos el error máximo como sigue:

$$EM = \max_{i \in \{0, \dots, N\}, j \in \{0, \dots, J\}} |u_{\text{exact}}(x_i, t_j) - u_{\text{num}}(x_i, t_j)|.$$

Si  $g'(u) = u^2$  y  $\tau = h^2$  el tamaño de paso en el tiempo, tenemos

$h$	0.0020	0.0019	0.0017	0.0016	0.0015	0.0011
$EM (\times 10^{-4})$	1.37	0.75	3.04	1.70	4.41	7.97

Tabla 5.3: Error en  $T = 0.5$  para la KdV

Si  $g'(u) = u^4$ ,  $\tau = h^2$  tenemos

$h$	0.0020	0.0018	0.0017	0.0016	0.0015	0.0014
$EM (\times 10^{-4})$	2.12	3.57	3.85	1.32	2.81	13.31

Tabla 5.4: Error en  $T = 0.5$  para la GKdV,  $m = 4$ 

De las tablas 5.3 y 5.4 vemos que el error máximo es pequeño cuando  $h \approx c \times 10^{-3}$  y éste crece cuando  $h$  es más pequeño. Por tanto elegimos  $h = \varepsilon h_s \approx c \times 10^{-3}$ ; esta es la razón por la cual elegimos  $h_s \approx c \times 10^{-2}$ .

Una vez que ya probamos numéricamente que nuestro esquema (4.32) es adecuado, calculamos la solución numérica tipo solitón para otras no linealidades  $g'$  del problema (4.1)-(4.2) como se muestra en la figura siguiente.

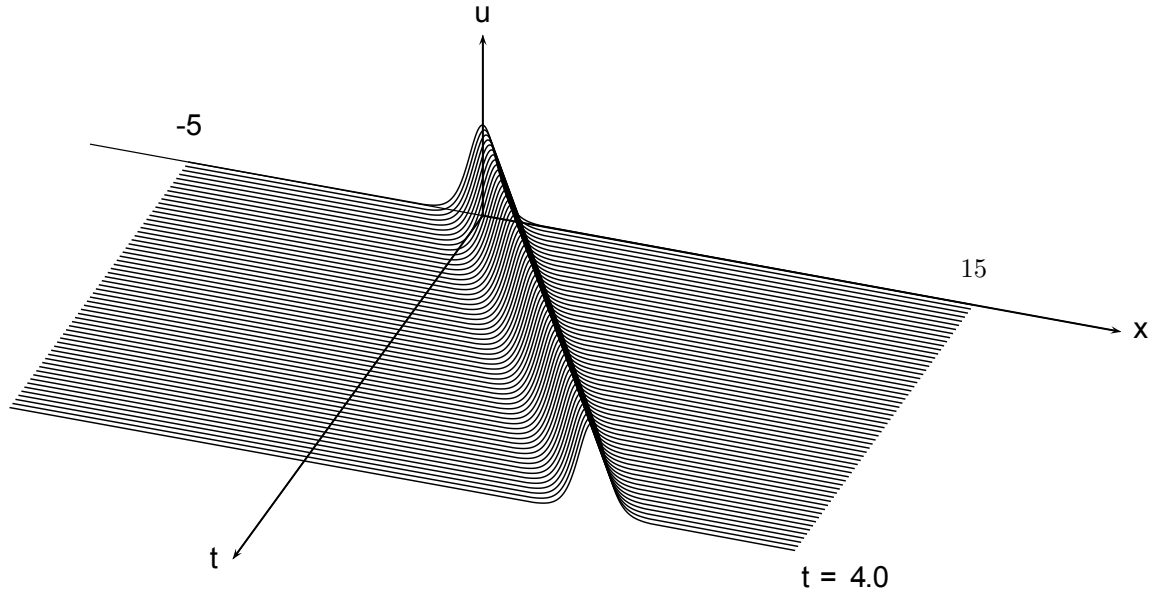


Figura 5.5: Un soliton propagándose con amplitud  $A = 1$  de la ecuación GKdV- $g$  con  $g' = u^{3/2} + u^2$

En la figura se muestra el gráfico de la solución numérica tipo solitón con una amplitud  $A = 1.0$ , posicionada en el punto  $x_{10} = 0$  cuando  $t = 0$ , se usó el tamaño de paso en el tiempo  $\tau = h^2$  con  $h = 0.0017$ , los intervalos de descripción son  $x \in [-5, 15]$  y  $t \in [0, 2]$ . Como vemos en el gráfico el comportamiento de la solución es el esperado de una onda solitaria la cual se propaga en el tiempo con velocidad constante  $v = 4/5 + 2/3$ , preservando su forma, velocidad y amplitud.

## Dos solitones

Para el estudio de la interacción de dos solitones de la ecuación (5.2) homogénea, es decir, con la parte derecha igual a cero, usaremos el algoritmo numérico descrito en (4.29). Sabemos el comportamiento de la onda solitaria de la ecuación (5.2) con condición inicial obtenida de la ecuación (5.1). Ahora veamos el comportamiento de la solución usando como condición inicial una combinación de funciones que satisfacen la ecuación (5.1), es decir, la suma de dos solitones.

Cuando calculamos un solitón numéricamente consideramos la relación entre los tamaños de pasos  $h_s$  y  $h$  como vimos en la figura 5.1, ahora basados en esa relación veamos como sumar dos solitones que se obtienen numéricamente. Supongamos que tenemos un solitón centrado en  $x_{10}$  y un segundo solitón centrado en  $x_{20}$  entonces para ambos solitones tenemos las siguientes mallas

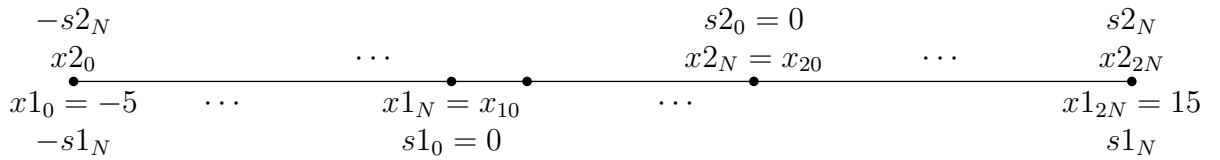


Figura 5.6: intersección de las mallas  $s_i$ ,  $x_i$

Donde  $x_1$  representa la malla para el primer solitón y  $x_2$  representa la malla para el segundo solitón, ahora considerando que  $s_1 = (x - x_{10})/\varepsilon$  y  $s_2 = (x - x_{20})/\varepsilon$



tenemos que las mallas en la figura 5.6 se recorren  $k$  índices, donde  $k = (x_{20} - x_{10})/h$ , de manera que para sumar los dos solitones recorreremos  $n - k$  índices. Así obtenemos la solución para dos solitones como se muestra en el gráfico siguiente:

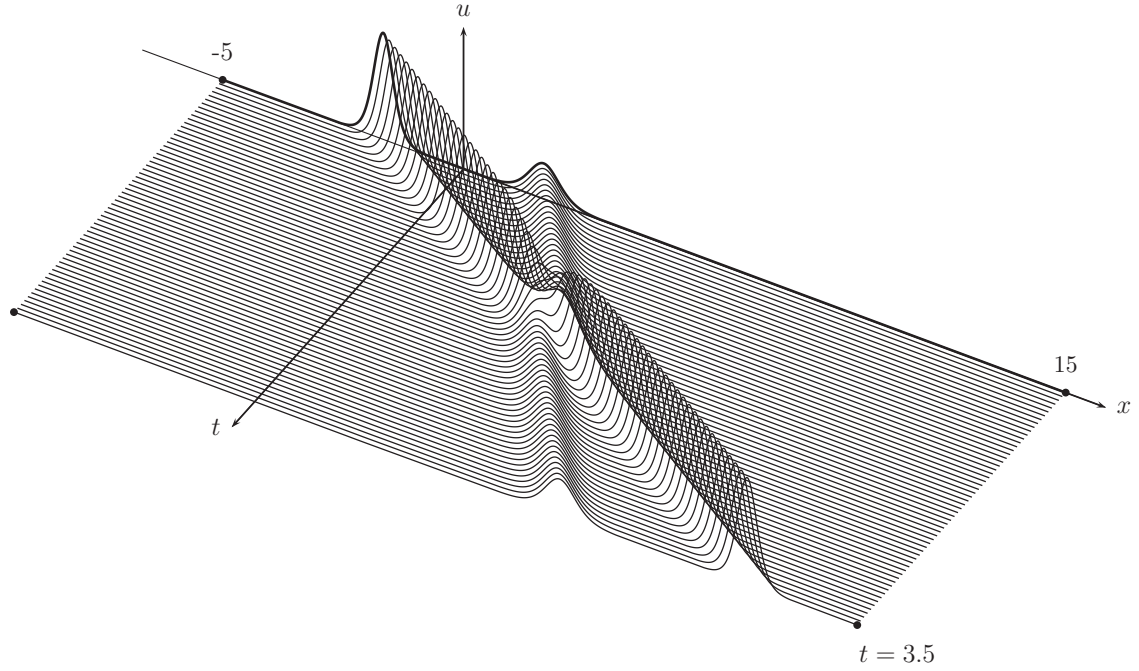


Figura 5.7: Dos solitones con amplitudes  $A_1 = 1.5$  y  $A_2 = 0.5$  para la ecuación GKdV- $g$  con  $g' = u^{3/2} + u^2$

En la figura 5.7 se muestra el gráfico de la solución numérica en la cual se usó como condición inicial la combinación de dos solitones, el primer solitón está centrado en  $x_{10} = -1$  el cual tiene una amplitud  $A_1 = 1.5$  y el segundo solitón con amplitud  $A_2 = 0.5$  está centrado en  $x_{20} = 1$ . Como vemos el primer solitón viaja sobre su trayectoria con una velocidad constante  $v_1 = \sqrt{24}/5 + 1$  y el segundo con una velocidad  $v_2 = \sqrt{8}/5 + 1/3$ , por tanto dado que  $x_{20} > x_{10}$ ,  $A_1 > A_2 > 0$  existe un  $t^* = 1.86$  en el cual las trayectorias de las ondas solitarias se intersectan. Sobre el instante  $t^*$  hay una vecindad  $B_r(t^*)$ ,  $r > 0$  donde los solitones interactúan. A partir de la interacción la solución será de nuevo la superposición de solitones con mismas amplitudes y las velocidades de movimientos. A éste fenómeno se le conoce como *Proceso de interacción de solitones*. El desplazamiento de trayectorias de los solitones

donde se observa el proceso de solitones se muestra en la figura siguiente:

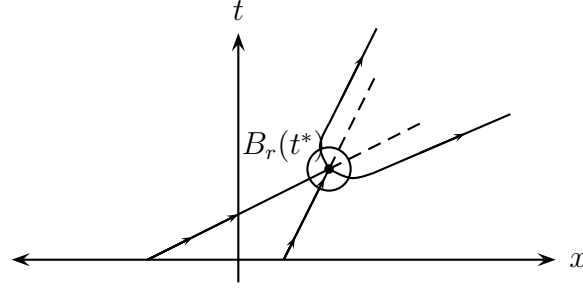


Figura 5.8: Proceso de la interacción de los solitones

Es importante mencionar que la figura 5.7 está dibujado a una escala normal y para valores  $y(x_i) \geq 0.05$ , es por eso que se observa el gráfico muy suave después de la interacción de ondas; por tanto si graficamos más puntos y hacemos un cambio de escala, observamos pequeñas oscilaciones después de la interacción de los solitones, como vemos en la figura 5.9

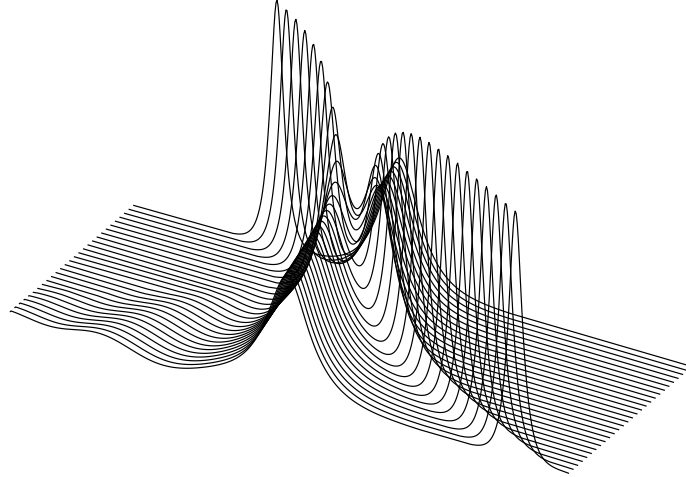


Figura 5.9: Figura 5.7 en escala más alta para el tiempo  $t_1 = 0.6$  hasta el tiempo  $t_2 = 1.48$ .

El fenómeno que presenciamos en la figura 5.9, donde vemos que la aparición de una cola pequeña pasa a la izquierda después de la interacción de solitones, es el que se presenta en los casos no integrables.

## 5.2. Ecuación GKdV- $\bar{g}$ bajo una perturbación

En esta sección se muestra la simulación de la ecuación GKdV- $\bar{g}$  con  $g' = u^{3/2} + u^2$  bajo la perturbación  $f(u) = u(\mu - \nu u)$ , es decir, obtendremos la solución numérica de la ecuación:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (u^{3/2} + u^2) + \varepsilon^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \varepsilon u(\mu - \nu u), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0, \quad (5.2)$$

donde  $\varepsilon = 0.1$ .

### 5.2.1. Cálculo de la solución asintótica

En el capítulo 3 obtuvimos la solución asintótica para (5.2) de manera general y la ecuación que describe el comportamiento de la amplitud. Por tanto usando la fórmula (3.69) obtenemos que la amplitud de la ecuación (5.2) se describe mediante la ecuación siguiente:

$$\frac{dA}{dt} = 4 \frac{M}{\mathcal{K}_1}, \quad A|_{t=0} = A^0, \quad (5.3)$$

donde

$$M = A\mu \int_0^1 \frac{z \, dz}{\sqrt{1 - C \left( \frac{2}{5}\sqrt{Az} + \frac{1}{3}Az \right)}} - A^2\nu \int_0^1 \frac{z^2 \, dz}{\sqrt{1 - C \left( \frac{2}{5}\sqrt{Az} + \frac{1}{3}Az \right)}},$$

$$\mathcal{K}_1 = 4 \int_0^1 \frac{z \, dz}{\sqrt{1 - C \left( \frac{2}{5}\sqrt{Az} + \frac{1}{3}Az \right)}} - C \int_0^1 \frac{z \left\{ \frac{\sqrt{A}}{5} (1 - \sqrt{z}) + \frac{A}{3} (1 - z) \right\} \, dz}{\left( 1 - C \left( \frac{2}{5}\sqrt{Az} + \frac{1}{3}Az \right) \right)^{3/2}}$$

y

$$C = 1 \left/ \left( \frac{2}{5}\sqrt{A} + \frac{1}{3}A \right) \right.$$

Como vemos, para resolver las integrales  $M$  y  $\mathcal{K}_1$  en términos de funciones elementales se vuelve un proceso más complicado que el caso cuando  $g'$  es homogénea. Por tanto para calcular dichas integrales usaremos métodos numéricos. Ahora para calcular numéricamente las integrales  $M$  y  $\mathcal{K}_1$  usamos uno de los métodos conocidos como método adaptativo para integrales impropias, [6].

Si la función  $f$  tiene una singularidad en  $x = a$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r \rightarrow a} \int_r^b f(x)dx,$$

podemos calcular la integral  $\int_r^b f(x)dx$  para algún  $r > a$ . Para elegir el valor de  $r$  no tenemos un criterio general, para nuestros cálculos elegiremos la forma

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{r_1}^b f(x)dx + \sum_{n=1}^m \int_{r_{n+1}}^{r_n} f(x)dx, \quad (5.4)$$

para  $r_n = a + (b - a)/2^n$  y podemos elegir  $m$  tal que

$$\left| \int_{r_m}^{r_{m-1}} f(x) \right| < \varepsilon. \quad (5.5)$$

Basandonos en este método resolvemos la ecuación (5.3).

Usando (5.4), (5.5) y el método RK-4, resolvemos la ecuación (5.3) como sigue

- I. Fijamos un intervalo  $t \in [0, 5]$  donde  $t_i = ih_t$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ , y los valores  $\mu = 2$ ,  $\nu = 1/2$ ,  $A^0$  un valor fijo mayor que cero.
- II. De (5.4) tenemos que  $r_m = 1 - 1/2^m$ , usando el método de integración numérica del punto medio, elegimos  $m$  como sigue

$$\left| \frac{C}{2\varepsilon} \right| \leq 2^m, \quad (5.6)$$

donde  $|f(-1/2^{m+1})| \leq |C|$ ,  $f$  es la función a integrarse en  $M$  y  $\mathcal{K}_1$ .

- III. Calculamos las integrales  $M$  y  $\mathcal{K}_1$  en  $A^0$
- IV. Calculamos los coeficientes  $k_1, k_2, k_3, k_4$  y el siguiente valor de la amplitud  $A_1$ .
- V. Ahora elegimos  $A_1$  en lugar de  $A_0$  y repetimos los pasos III – IV  $n$  veces.

En la figura 5.10 se muestra el comportamiento de la solución del problema (5.3), donde obtuvimos un valor crítico numérico de  $A^* = 4.9012$ .

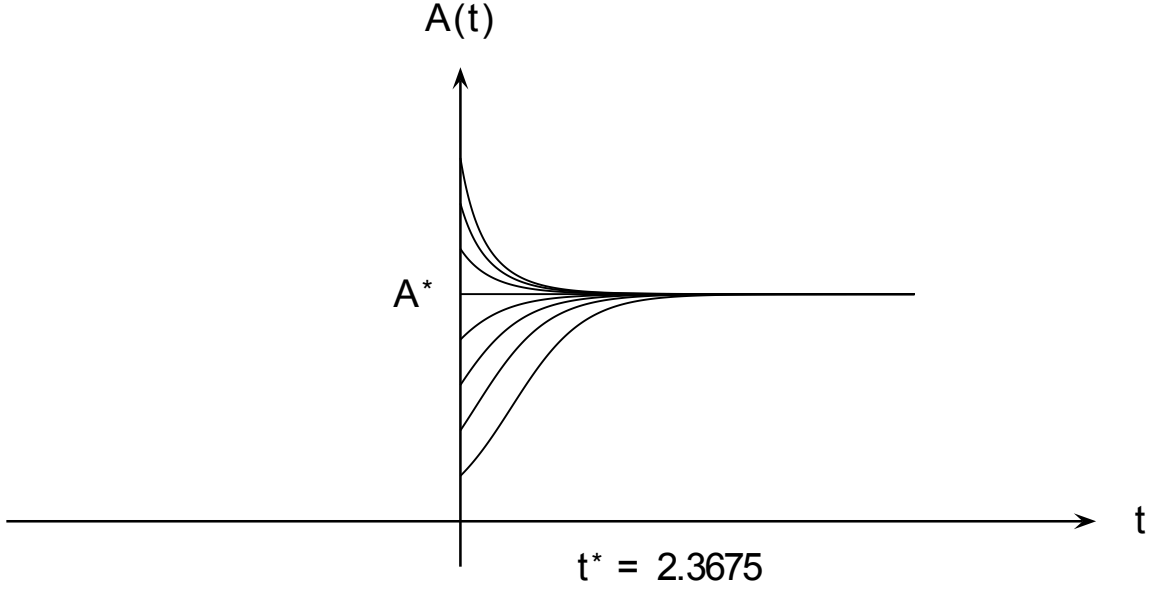


Figura 5.10: Comportamiento de la amplitud para  $g'(u) = u^{3/2} + u^2$

### 5.2.2. Comportamiento de la cola

Ahora vamos a estudiar el comportamiento de la cola del solitón de la ecuación (5.2), basandonos en las fórmulas obtenidas en la construcción de la solución asintótica en el capítulo 3. De las fórmulas (3.35) y (3.78) tenemos para  $\tilde{u}_1^-(t)$  la ecuación siguiente:

$$\tilde{u}_1^-(t) = \frac{2}{\beta^3} \left( A\mu \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - C \left( \frac{2}{5}\sqrt{Az} + \frac{1}{3}Az \right)}} - A^2\nu \int_0^1 \frac{zdz}{\sqrt{1 - C \left( \frac{2}{5}\sqrt{Az} + \frac{1}{3}Az \right)}} - \frac{2\mathcal{K}_2}{\mathcal{K}_1} M \right), \quad (5.7)$$

donde  $A = A(t)$ ,  $\mathcal{K}_1$ ,  $M$ ,  $C$  están definidos en (5.3),  $\beta = \sqrt{4\sqrt{A}/5 + 2A/3}$  y

$$\mathcal{K}_2 = 2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - C \left( \frac{2}{5}\sqrt{Az} + \frac{1}{3}Az \right)}} - C \int_0^1 \frac{\left\{ \frac{\sqrt{A}}{5} (1 - \sqrt{z}) + \frac{A}{3} (1 - z) \right\} dz}{\left\{ 1 - C \left( \frac{2}{5}\sqrt{Az} + \frac{1}{3}Az \right) \right\}^{3/2}}.$$

### 5.2.3. Solución numérica directa

Ahora se muestran los resultados de la simulación numérica para la ecuación perturbada, usando el esquema descrito en (4.9) para la ecuación (5.2) con la parte derecha igual a cero. La modificación al esquema para simular la perturbación de la ecuación es mínima ya que tratamos el lado derecho de la ecuación (5.2) como una perturbación en todo momento del tiempo, por tanto, sólo necesitamos redefinir el lado derecho de la ecuación (4.9) como  $z_i = \check{y}_i + \tau \bar{\varphi}_i (\mu - \nu \bar{\varphi}_i)$ . Para describir la dinámica de la onda distorsionada tomamos como condición inicial

$$u^0 = A(0)\omega((x - \varphi(0))/\varepsilon, A(0)), \quad (5.8)$$

entonces la onda distorsionada genera una cola oscilatoria llamada *radiación* (ver, por ejemplo [22, 23]).

El cálculo numérico para la onda distorsionada da los resultados siguientes:

- I. Si la amplitud inicial  $A^0$  de la onda inicial (5.8) es menor que el valor crítico  $A^*$ , entonces la amplitud de la onda crece hasta el valor  $A^*$ , al mismo tiempo la amplitud de la radiación crece hasta un valor grande y destruye toda la solución numérica, dado que la vecindad de la estabilidad del esquema es acotado respecto a las amplitudes de perturbaciones, ver figura 5.11
- II. Si  $A^0$  está cerca del valor crítico  $A^*$  entonces después de un tiempo muy corto la amplitud de la onda pasa al valor crítico donde permanece constante, por esta razón la amplitud de la radiación no crece lo suficiente como para destruir la onda. ver Fig. 5.12
- III. Si  $A^0 > A^*$  como vimos en la figura 5.10 en este caso  $A^0 \rightarrow A^*$  de manera más rápida que en el caso cuando  $A^0 < A^*$ . Además en el cálculo numérico tenemos que la amplitud inicial de la onda (5.8) decrece al valor crítico  $A^*$  y la amplitud de la radiación es suficientemente pequeña, ver figura 5.13

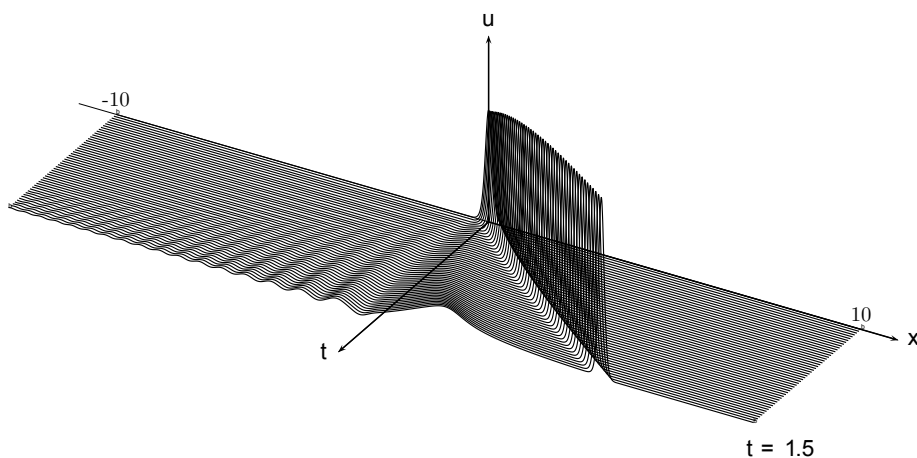


Figura 5.11: Una onda distorsionada con amplitud inicial  $A^0 = 3$  para la ecuación (5.2), con  $A^0 < A^*$ .

En la figura 5.11 se muestra una onda distorsionada de la ecuación 5.2 con  $\mu = 2$  y  $\nu = 1/2$  hasta el tiempo  $t = 1.7$ , usando el algoritmo para resolver la ecuación 5.3 obtenemos un punto crítico para la amplitud  $A^* \approx 4.9$ , de donde vemos que en el tiempo que transcurre la onda con amplitud inicial  $A^0 = 3$  hasta tomar el valor crítico, la amplitud de las radiaciones crece, de manera que tal comportamiento puede provocar inestabilidad para la onda distorsionada.

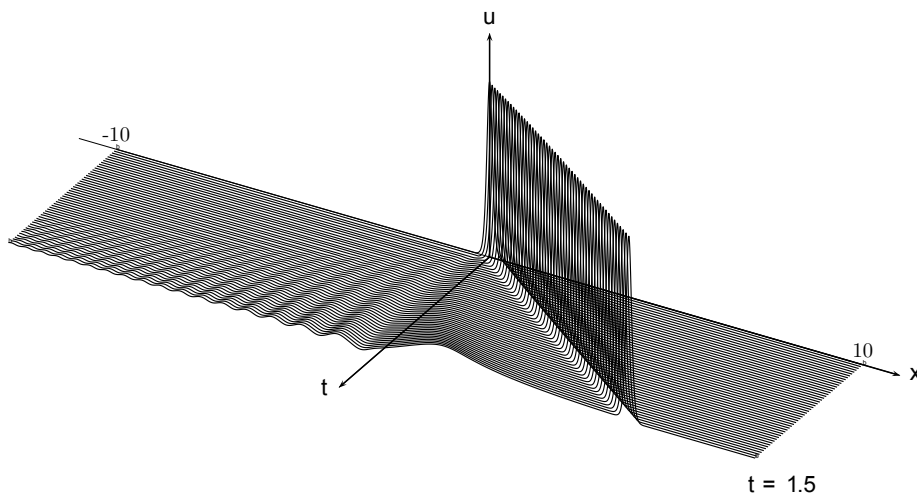


Figura 5.12: Una onda distorsionada con amplitud inicial  $A^0 = 4$  para la ecuación (5.2)

En la figura 5.12 se muestra la onda distorsionada en la cual se tomó como condición inicial  $A^0 = 4.5$ ; en este caso la amplitud del solitón tiende al valor crítico  $A^*$  de manera mas rápida. Además vemos que la amplitud de la radiación es más suave, es decir, la onda distorsionada tiene más tiempo de estabilidad.

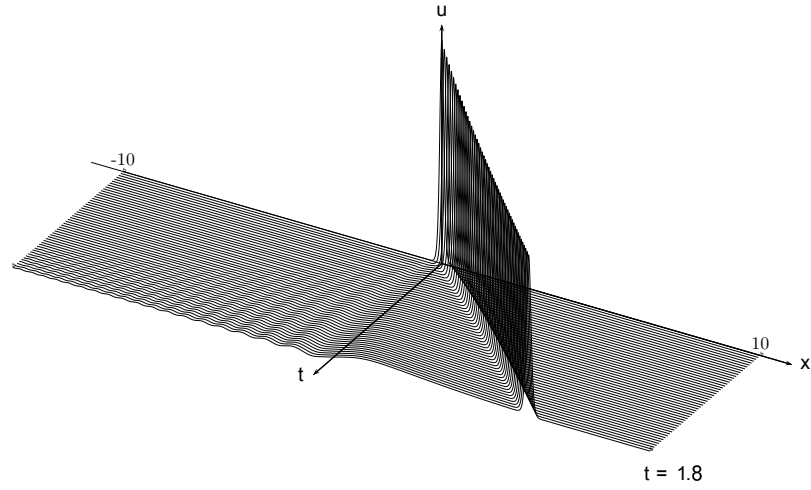


Figura 5.13: Una onda distorsionada con amplitud inicial  $A^0 = 6$  para la ecuación (5.2)

Por otro lado si tomamos la amplitud inicial del solitón mayor que el punto crítico  $A^*$ , vemos que la onda distorsionada es casi estable ya que la amplitud de la radiación  $\varepsilon u_1^-$  crece de manera muy lenta, como se muestra en la figura 5.13. El valor exacto de la amplitud inicial es  $A^0 = 7.0$  el cual decrece hasta el valor crítico  $A^* = 4.9$ .

Numéricamente presenciamos el comportamiento de dos solitones para la ecuación (5.2) con la parte derecha igual a cero, donde vemos que el de mayor amplitud y velocidad rebasa a el otro de menor amplitud. Y como ya vimos más detalladamente en el ejemplo anterior (ver Fig.5.7) donde tales solitones interactúan dejando una cola. Ahora simulamos la interacción de solitones con otras amplitudes, como se muestra el figura siguiente:



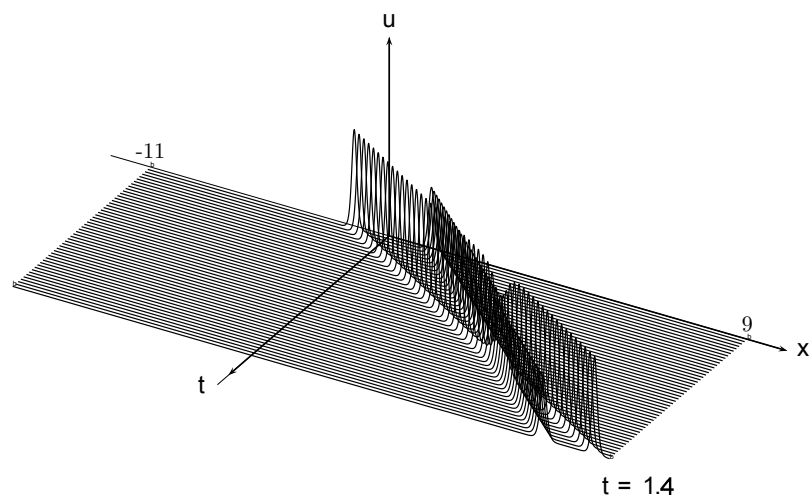


Figura 5.14: Proceso de los solitones,  $A_1^0 = 7.0$ ,  $A_2^0 = 4.5$  para la no-linealidad  $g' = u^{3/2} + u^2$ ,

Ahora considerando la perturbación para los solitones con mismas amplitudes que aparecen en la figura 5.14, vemos que el efecto es tal que el proceso de interacción de solitones no ocurre. Esto es debido a que las amplitudes tienden al mismo valor crítico  $A^* = 4.91$  antes de interactuar, de manera que a partir de ese punto viajan de forma paralela y a la misma velocidad. (ver Fig. 5.15)

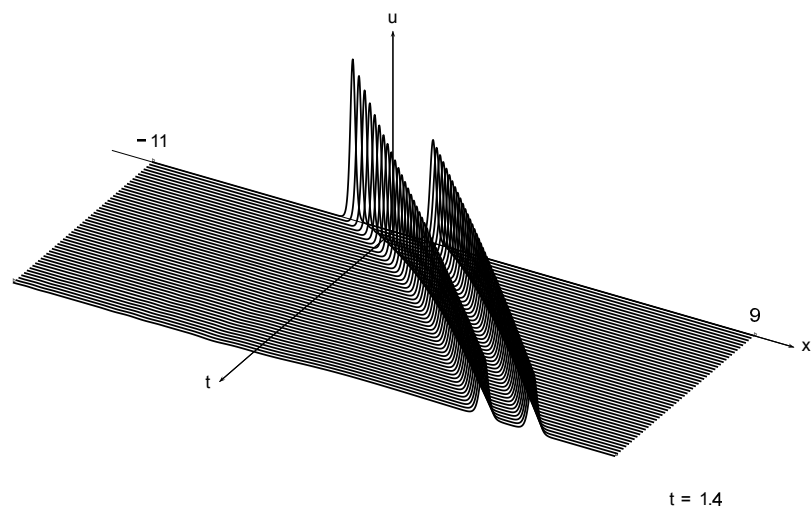


Figura 5.15: Proceso de los solitones,  $A_1^0 = 7.0$ ,  $A_2^0 = 4.5$ ,  $\mu = 2$ ,  $\nu = 1/2$ , para la no-linealidad  $g' = u^{3/2} + u^2$ ,

La solución asintótica del capítulo 3 implica un valor inicial de forma especial dado en (5.8). Por tanto dicha solución asintótica no describe explícitamente la solución del problema (5.2)-(5.8). Pero describe suficientemente bien la tendencia del comportamiento de la solución del problema (5.2)-(5.8). Realmente la amplitud del solitón se cambió en la manera misma según las fórmulas (3.69) y (5.3). ver Fig.5.10 y como se muestra en las figuras 5.11-5.13. Luego la cola que aparece según la perturbación, está “localizada” solamente a la derecha respecto de la dirección de propagación del solitón y se propaga a la derecha. La amplitud de la onda crece con el tiempo. Aquí debemos tomar en cuenta que la solución asintótica se ha construido bajo la suposición de que  $\varepsilon$  es un parámetro pequeño, es decir,  $\varepsilon$  es menor que cualquier número pequeño positivo. Y por tanto el tiempo crítico  $t^* \approx (\ln(1/\varepsilon))/\mu \gg 1$ . En el cálculo numérico  $\varepsilon$  es una constante, en realidad  $\varepsilon = 0.1$ . Por tanto el tiempo crítico  $t^*$  es lo suficientemente pequeño, para  $\varepsilon = 0.1$  y  $\mu = 2$ , es decir,  $t^* \approx 4.91$ . El esquema numérico nos sirve para describir la estabilidad respecto al tiempo crítico. Para diferentes valores de  $\mu$  y  $\nu$  podemos ya sea maximizar o minimizar el tiempo crítico. Fijando  $\mu$  y cambiando valores de  $\nu$  la amplitud de la onda tienen el mismo comportamiento descrito para diferentes valores de  $A^*$ .

---

# Conclusión

En la tesis se obtienen los resultados siguientes:

- I. Se encuentran las condiciones suficientes para la existencia de soluciones tipo solitón para la ecuación de tipo KdV (2.13) con no-linealidad  $g'(u) \in \mathcal{C}^1$  generalmente no homogénea. Además tenemos que el conjunto de no linealidades de la ecuación (2.13) es no vacío ya que las funciones de la forma:

$$g'(u) = \sum_{i=1}^K a_i u^{q_i+1}, \quad (5.9)$$

donde  $a_i \geq 0$ ,  $q_i \in (0, 4)$  y  $K \in \mathbb{N}$  satisfacen dichas condiciones.

- II. Se construye una solución asintótica mód  $o(\varepsilon^2)$  de tipo solitón para la ecuación de tipo KdV perturbada, es decir, para la ecuación (3.1), donde no linealidad es una función de clase  $\mathcal{C}^1$  no necesariamente homogénea. Además se han encontrado las ecuaciones que describen la evolución de la onda perturbada durante un tiempo  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ .

- III. Se crea un algoritmo en diferencias finitas para obtener la solución numérica de la ecuación (2.13). Y bajo una pequeña modificación al esquema estudiamos la solución numérica de dicha ecuación bajo la perturbación, es decir, para la ecuación (3.1).

Se realizan varios experimentos numéricos; en particular, se muestran los resultados de la dinámica de los solitones para la ecuación de tipo KdV con no-linealidad  $g'(u) = u^2 + u^{3/2}$ .

Por tanto basados en el análisis teórico y numérico hemos probado para el caso maximalmente complicado la existencia de los solitones, el comportamiento de los

solitones bajo una perturbación y el efecto que producen tales perturbaciones en la onda solitaria.

Como línea de investigación futura se planea el estudio teórico y numérico del proceso de interacción de solitones para modelos con no linealidades no homogéneas de clase  $\mathcal{C}^1$ .

---

# Bibliografía

- [1] Benjamin T. B. The stability of solitary waves. *Proc. Roy. Soc. London A* 328, pp. 153-183, 1972.
- [2] Fermi E., Pasta J., y Ulam S. Studies in nonlinear problems. *Document LA-1940, Los Alamos National Laboratory*, May, 1955.
- [3] A.V. Faminskii. Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation and its generalizations. *Journal of Soviet Mathematics*, Vol:50, Pag:1381-1420, 1990.
- [4] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, y R. M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equations. *Phys Rev. Lett.* 19, 1095-1097, 1967.
- [5] J. Ginibre y Y. Tsutsumi. Uniqueness of solutions for the generalized Korteweg-de Vries equation. *SIAM J. Math. Anal.*, v.20, pp.1388-1425, 1989.
- [6] Seymour Haber. Adaptive Integration and Improper Integrals. *Mathematics of computation*, v. 29, pp. 806-809, 1975.
- [7] Philip Hartman. Ordinary differential equations. Second Edition, v.38, 1982.
- [8] Ablowitz M. J. y Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. *SIAM, Studies in Applied Mathematics*, v.4, 1981.
- [9] Murray Francis J. y Miller Kenneth S. Existence theorems for ordinary differential equations. *New York: New York University Press*, 1954.
- [10] Zabusky N. J. y Kruskal M. D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys Rev Lett*, Vol:15, pp.240-3, 1965.

- 
- [11] Fritz John. Partial differential equations. *Springer Verlag*, Vol. 1, 1957.
- [12] C. Kenig, G. Ponce, y L. Vega. Well-posedness and Scattering result for the generalized Korteweg-de Vries equation via contraction principle. *Communication in Pure and Applied Mathematics*, v. XLVI, pp. 527-620, 1993.
- [13] S.N. Kruzhkov y A.V. Faminskii. Generalized solutions of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation. *Math. USSR-Sbornik*, Vol. 48, pp. 391-421, 1984.
- [14] Bona J. L., Souganidis P. E., y Strauss W. Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type. *Proc. R. Soc. London Ser. A* 411, v. 411, pp. 395-412, 1987.
- [15] P. D. Lax. A hamiltonian approach to the KdV and other equations. *Academic Press, New York*, pp. 207-244, 1978.
- [16] Jonu Lee y Rathinasamy S. Exact travelling wave solutions of the Schamel-Korteweg-de Vries equation. *reports on mathematical physics*, v. 68, pp. 153-161, 2010.
- [17] Grillakis M., Shatah J., y Strauss W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. *J. Funct. Anal.*, v. 20, pp. 160-197, 1987.
- [18] Miura R. M. Korteweg-de-Vries equation and generalizations, a remarkable explicit nonlinear transformation. *J. Math Phys*, v.9, pp.1201-1204, 1968.
- [19] V. P. Maslov y G. A. Omelyanov. Asymptotic soliton-form solutions of equations with small dispersion. *Russian Math. Surveys*, v.36, pp. 73-149, 1981.
- [20] V. P. Maslov y G. A. Omelyanov. Geometric asymptotic for nonlinear, PDE. I. *American Mathematical Society*, Vol. 202, 2001.
- [21] S. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii, y V.E. Zakharov. Theory of solitons: The Inverse Scattering method. *Plenum Publishing, New York, Springer*, 1984.

- 
- [22] G. A. Omelyanov y M. A. Valdez-Grijalva. Asymptotics for a  $C^1$ -version of the KdV equation, nonlinear phenomena in complex systems. Vol.17, N2,106-115, 2014.
- [23] G. A. Omelyanov y M. G. García. Interaction of solitary waves for the generalized KdV equation. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, v.17, pp. 3904-3918, 2011.
- [24] Rusell J. S. Report of the 14th meeting of the british association for the advancement of science. *John Murray, London*, 1844.
- [25] H. Schamel. Modified Korteweg-de Vries equation for ion acoustic waves due to resonant electrons. *J. Plasma Phys*, v.9, pp.377-387, 1973.
- [26] N. F. Smyth y A. L. Worthy. Solitary wave evolution for MKdV equations. *ELSEVIER, Wave Motion*, v. 21, pp. 263-275, 1995.
- [27] Ferdinand Verhulst. Methods and applications of singular perturbations. *Springer*, Vol. 47, 2005.
- [28] V. E. Zakharov y A. B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet Phys. JETP*, v. 34, pp. 62-69, 1972.