



UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Análisis y Control de Bifurcaciones Estacionarias

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

David Baca Carrasco

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México, 23 de Enero de 2009.

SINODALES

Dr. Fernando Verduzco González
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Daniel Olmos Liceaga
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

M.C. Horacio Leyva Castellanos
Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Dr. Luis Aguirre Castillo
Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Iztapalapa, Ciudad de México.

UNIVERSIDAD DE SONORA

Acta de Examen de Grado



En la ciudad de Hermosillo, Sonora, México, siendo las 17:00 horas
del día 23 de Enero del 2009, se reunieron en:
El Auditorio del Departamento de Matemáticas

de la Universidad de Sonora, los señores:

Dr. Fernando Verduzco González

M.C. Horacio Leyva Castellanos, Dr. Luis Aguirre Castillo

Dr. Daniel Olmos Liceaga

bajo la Presidencia del primero y fungiendo como Secretario el último, para efectuar el
Examen de Grado a:
David Baca Carrasco

de: Maestro en Ciencias (Matemáticas)

quien Presentó el trabajo de tesis

Análisis y control de bifurcaciones estacionarias

Acta No. 8

Foja 8

Libro 1

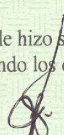
Exp. No. 200201889

Los sinodales replicaron a 1 sustentante y después de debatir entre sí reservada y
libremente, 1 0 declararon:
aprobado por unanimidad

Acto continuo el Presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para
constancia se levanta la presente, firmando los que intervinieron.


Firma del sustentante

Daniel Olmos L.
SECRETARIO


PRESIDENTE

Arbely


VOCAL

Dr. Fernando Luque Vásquez

Coordinador del Programa de:
Posgrado en Matemáticas

de la Universidad de Sonora, hace constar que las firmas que anteceden corresponden a los sinodales que intervinieron en el examen que contiene la presente acta.

Hermosillo, Sonora, a 23 de Enero del 2009.


Dr. Fernando Luque Vásquez
Coordinador del Programa



Dr. Heriberto Grijalva Monteverde Vicerrector

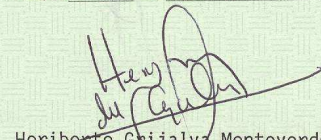
de la Unidad Regional Centro de la Universidad de Sonora, hace constar que: el Dr. Fernando Luque Vásquez

es a la fecha de expedición de este documento, Coordinador del Programa arriba citado y suya la firma que aparece al calce del mismo.

Hermosillo, Sonora, a 23 de Enero del 2009.



EL SABER DE MIS HIJOS
HARA MI GRANDEZA
UNIDAD REGIONAL
CENTRO
VICERRECTORIA


Dr. Heriberto Grijalva Monteverde
VICERRECTOR
UNIDAD REGIONAL CENTRO

Agradecimientos

Le agradezco infinitamente a Dios todas las bendiciones que ha derramado sobre mí, por mantenerme con vida y permitirme realizar mis sueños.

Agradezco a la institución CONACyT por su apoyo económico que me proporcionó durante los semestres 2008 – 1 y 2008 – 2.

Agradezco de manera muy especial a mi director de tesis Dr. Fernando Verduzco González, gracias por compartir sus conocimientos conmigo, por confiar en mí, por su ayuda moral que extendió hacia un servidor, muchas gracias por su amistad. Quiero dar las gracias a los integrantes del comité revisor de este trabajo: Dr. Daniel Olmos Liceaga, M.C. Horacio Leyva Castellanos y Dr. Luis Aguirre Castillo, sin duda, sus correcciones, críticas y consejos me han permitido culminar este trabajo. Gracias también de manera especial al M.C. Francisco Carrillo por tomarse la molestia de revisar y criticar este trabajo de tesis.

Mis agradecimientos al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, especialmente al programa de Posgrado en Matemáticas y sus coordinadores que durante mi estancia lo dirigieron, Dr. Rubén Flores Espinóza y Dr. Fernando Luque Vásquez, gracias a todos los maestros que compartieron sus valiosos conocimientos conmigo y dirigieron mis estudios, a toda la planta docente y administrativa, gracias por compartir conmigo parte de su tiempo.

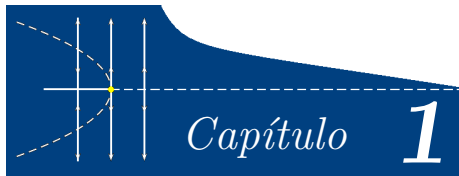
De manera muy especial quiero extender mis agradecimientos a toda mi familia, por su apoyo y la confianza que depositan en mí, son todos el pilar de mi vida, gracias por estar conmigo en los momentos felices así como en los mas difíciles, gracias por darme ánimos para salir adelante y gracias por ser tan amables, cariñosos, gracias por ser mi familia, sepan todos que los amo, mis agradecimientos a mi madre por estar conmigo, y a mi padre, que aunque ya no está entre nosotros, espiritualmente dirige mi vida. Gracias Javier y Gloria por depositar su confianza en mí, espero no defraudarles nunca, gracias a todos mis hermanos, cuñados y sobrinos. Agradezco a mi novia Diana Heledenixa, por tu apoyo, por estar a mi lado, por tu apoyo en

este proyecto de vida que comparto contigo, tus consejos me han sido de gran ayuda, gracias por alegrar mi vida, te amo y eres parte importantísima en ella.

Gracias a todos mis amigos, especialmente a aquellos con quien comparto diariamente momentos de estudio, diversión, tristezas y alegrías, los admiro mucho y su ayuda ha sido invaluable en mi formación, particularmente agradezco a Misael, Jorge, Dalicia, Antonio, Marysol, Jessica, Laura, Guadalupe, Manuel, y si por descuido no menciono a alguno, le ofrezco disculpas y le doy las gracias. A todos aquellos que comparten su tiempo con un servidor, muchas gracias.

Índice General

1	Introducción	5
2	Preliminares	7
2.1	Bifurcaciones Estacionarias	7
2.2	Teorema de la Variedad Central	15
2.3	Teorema de la Variedad Central Dependiendo de Parámetros	15
2.4	Teorema de Sotomayor	16
3	Teorema de Sotomayor para familias m-parametrizadas	19
4	Control de bifurcaciones estacionarias	35
4.1	Planteamiento del problema	35
4.2	Caso escalar	36
4.3	Caso general	39
5	Aplicaciones	63
5.1	El pendubot	63
5.2	Modelo matemático	63
5.3	Control de bifurcaciones	65
6	Conclusiones	71



Introducción

El control de bifurcaciones se refiere a la tarea de designar un control que pueda modificar las propiedades de la bifurcación de un sistema dado, así como alcanzar algún comportamiento deseable en la dinámica.

Los objetivos típicos del control de bifurcaciones incluye el retraso del inicio de una bifurcación inherente introduciendo una nueva bifurcación en un valor de parámetro deseado, cambiando el valor del parámetro en un punto de bifurcación existente, modificando la forma o el tipo de una bifurcación en cadena, estabilizando una solución bifurcada o rama, monitoreando la multiplicidad, amplitud y/o frecuencia de algunos ciclos límite que emergen de bifurcaciones, optimizando el funcionamiento del sistema cerca de un punto de bifurcación, o una combinación de alguno de estos objetivos. Ver [3], [4] y [5].

El control de bifurcaciones no sólo es importante en estos casos, también sugiere una estrategia efectiva para el control del caos puesto que bifurcación y caos son usualmente considerados “gemelos”; en particular, la bifurcación de duplicación de periodo es una ruta típica al caos en muchos sistemas dinámicos no-lineales. Ver [2].

Tanto control de caos como control de bifurcaciones sugieren una nueva tecnología que prometa tener un mejor impacto en muchas áreas, quizá no tan tradicionales, aplicaciones a la ingeniería en tiempo y energía crítica.

Además de la enorme área de usos de control de caos, el control de bifurcaciones juega un papel crucial en el análisis dinámico y control de crisis de muchos sistemas complejos no-lineales. Los ejemplos más conocidos incluyen a circuitos de alto rendimiento, generación de oscilaciones, mezclas de material basadas en vibración, reacciones químicas, predicción y prevención de colapsos en sistemas de poder, diseño de osciladores y pruebas, análisis y modelado de sistemas biológicos (por ejemplo, el cerebro y el corazón), por nombrar sólo algunos. [6].

Hay muchas razones prácticas para controlar varias bifurcaciones. En un sistema donde la respuesta que se bifurca es dañina y peligrosa, debe ser significativamente reducida o completamente suprimida. Este trabajo incluye, por ejemplo, evitar el derrumbe de voltaje y redes de poder, eliminación de arritmias cardíacas, dirección de series de circuito desordenadas (por ejemplo, osciladores multiacoplados y redes neuronales celulares), alcanzar un cierto nivel de formación de un modelo deseable, regulando la respuesta dinámica de algún mecanismo y recursos electrónicos (por ejemplo, diodos, máquinas láser, e instrumentos de máquinas), removiendo vibraciones indeseables, entre otros.

Las bifurcaciones también son usadas y benéficas para algunas aplicaciones especiales, es interesante ver que ha ido creciendo el interés en la utilización de la naturaleza misma de la bifurcación, particularmente en algunas aplicaciones en ingeniería, implicando el análisis y utilización de oscilaciones. Una función prominente de las bifurcaciones está en la relación cerrada que tienen con varias vibraciones (oscilaciones periódicas o ciclos límite), las cuales a veces no son sólo deseadas, si no que actualmente pueden ser necesarias. Vibraciones mecánicas y algunos procesos de mezclas de materiales y líquidos son ejemplos muy buenos en los cuales las bifurcaciones y el caos son deseados. En sistemas biológicos, el control de bifurcaciones parecen ser un mecanismo esencial empleado para el corazón humano en realizar algunas de sus tareas en particular sobre fibrilación atrial. Debido al gran potencial que tiene el control de bifurcaciones en el mundo real, ha proliferado la investigación en esta área, así como también en control de caos.

En el trabajo que a continuación se presenta, se hace un estudio sobre el análisis y el control de las bifurcaciones estacionarias: silla-nodo, transcritical y trípode, las cuales son definidas en el capítulo 2.

En el capítulo 3 abordamos el análisis de las bifurcaciones estacionarias, estableciendo una generalización del teorema de Sotomayor para una familia m -parametrizada de ecuaciones diferenciales,

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}^m$.

En el capítulo 4 estudiamos el problema de controlar las bifurcaciones estacionarias. Dado el sistema de control

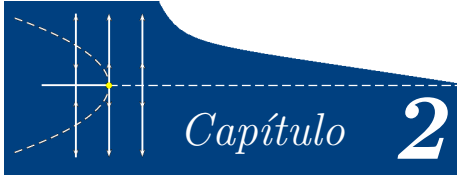
$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

el objetivo es diseñar una ley de control $u(x, \mu)$ tal que el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x, \mu) = F(x, \mu)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$, sea tal que podamos establecer a priori el tipo de bifurcación estacionaria que deseamos que ocurra.

Finalmente, en el capítulo 5, aplicamos el teorema principal del capítulo 4 para controlar las bifurcaciones estacionarias en el pendubot, que es un péndulo subactuado de dos grados de libertad.



Preliminares

En este capítulo se presentan los resultados más importantes utilizados como herramientas para el desarrollo de este trabajo de tesis. Para una mejor comprensión de los mismos, se pueden consultar los textos [7] y [11].

2.1 Bifurcaciones Estacionarias

Sabemos que el comportamiento cualitativo del conjunto solución de un sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (2.1)$$

que depende de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}^m$, cambia cuando el campo vectorial f pasa a través de un punto en el conjunto de puntos de bifurcación o cuando el parámetro μ varía a través de un valor de bifurcación μ_0 . Un valor μ_0 del parámetro μ en la ecuación (2.1) para el cual el campo vectorial $f(x, \mu) \in C^1$ no es estructuralmente estable es llamado un valor de bifurcación.

Los puntos de equilibrio no-hiperbólicos son candidatos a ser puntos de bifurcación, por lo que a continuación definimos ese concepto.

Definición 2.1. *Considere el sistema*

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

El punto (x_0, μ_0) se dice punto de equilibrio no-hiperbólico del sistema si:

A) $f(x_0, \mu_0) = 0$

B) $D_x(f(x_0, \mu_0))$ posee al menos un valor propio con parte real igual a cero

En este trabajo se estudian las bifurcaciones estacionarias, las cuales son: la silla-nodo, la transcrita y la trínche, por ello daremos a continuación una descripción de cada una de ellas y las ilustraremos con un ejemplo.

2.1.1 Bifurcación Silla-Nodo

Este tipo de bifurcación se presenta en un sistema del tipo (2.1) cuando para algún determinado valor crítico μ_0 del parámetro μ el sistema se comporta de la siguiente manera: Para $\mu \neq \mu_0$, supongamos, sin pérdida de generalidad, $\mu < \mu_0$, el sistema no presenta puntos de equilibrio, para $\mu = \mu_0$ el sistema presenta un punto de equilibrio y para $\mu > \mu_0$ el sistema presenta un par de puntos de equilibrio.

El siguiente ejemplo ilustra el comportamiento del sistema cuando experimenta la bifurcación silla-nodo.

Ejemplo 2.1. *Considere el sistema*

$$\dot{x} = \mu + x^2, \quad (2.2)$$

como podemos observar, si $\mu > 0$ entonces $\dot{x} > 0$, y por lo tanto no existe ningún punto de equilibrio, si $\mu = 0$ entonces $x = 0$ es un punto de equilibrio y además $\dot{x} > 0$, por lo que es un equilibrio inestable, ahora, si $\mu < 0$ tenemos lo siguiente

$$\mu + x^2 = 0 \implies x^2 = -\mu \implies x = \pm\sqrt{-\mu}$$

observamos que tenemos dos puntos de equilibrio, analicemos la estabilidad de ellos.

$$\mu + x^2 = x^2 - (\sqrt{-\mu})^2 = (x - \sqrt{-\mu})(x + \sqrt{-\mu})$$

- Si $x < -\sqrt{-\mu} \implies x + \sqrt{-\mu} < 0 \implies \dot{x} > 0$
- Si $x > \sqrt{-\mu} \implies x - \sqrt{-\mu} > 0 \implies \dot{x} > 0$
- Si $-\sqrt{-\mu} < x < \sqrt{-\mu} \implies 0 < x + \sqrt{-\mu} < 2\sqrt{-\mu} \implies -2\sqrt{-\mu} < x - \sqrt{-\mu} < 0 \implies \dot{x} < 0$

Podemos observar que nos genera un punto de equilibrio estable y otro inestable. La figura (2.1) muestra el retrato fase para este ejemplo.

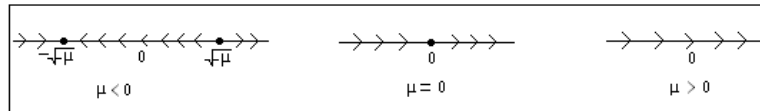


Figura 2.1: Retrato fase para el ejemplo (2.2)

Ahora, si consideramos a μ como una variable de estado más, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu + x^2 \\ \dot{\mu} &= 0\end{aligned}$$

cuyo diagrama de bifurcación se presenta en la figura (2.2).

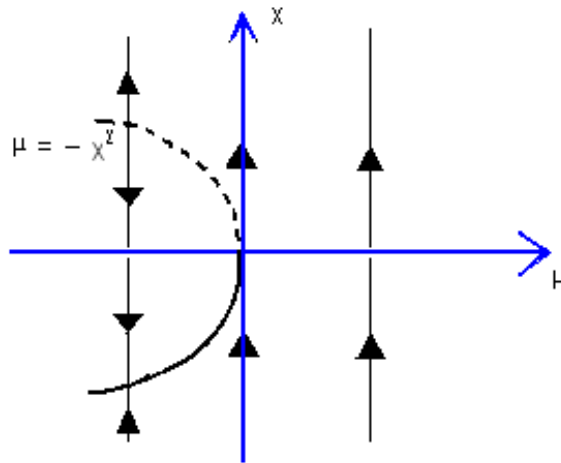


Figura 2.2: Diagrama de bifurcación para el ejemplo (2.2)

2.1.2 Bifurcación Transcritica

Este tipo de bifurcación se presenta en un sistema del tipo (2.1) cuando para algún determinado valor crítico μ_0 del parámetro μ el sistema se comporta de la siguiente manera: Para $\mu \neq \mu_0$, supongamos, sin pérdida de generalidad, $\mu < \mu_0$, el sistema presenta un par de puntos de equilibrio con una determinada estabilidad (distinta), para $\mu = \mu_0$ el sistema presenta un punto de equilibrio y para $\mu > \mu_0$ el sistema presenta un par de puntos de equilibrio con la estabilidad opuesta a la de los puntos de equilibrio cuando $\mu < \mu_0$.

El siguiente ejemplo ilustra el comportamiento del sistema cuando experimenta la bifurcación transcritical.

Ejemplo 2.2. *Considere el sistema*

$$\dot{x} = x(\mu + x). \quad (2.3)$$

Sus puntos de equilibrio son

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= -\mu \end{aligned}$$

Analizando la dinámica tenemos que para $\mu < 0$ pasa lo siguiente:

- Si $x < 0 \implies \dot{x} > 0$
- Si $0 < x < -\mu \implies \mu < x + \mu < 0 \implies \dot{x} < 0$
- Si $x > -\mu \implies x + \mu > 0 \implies \dot{x} > 0$

Para $\mu = 0$ tenemos que el único equilibrio es $x = 0$ y $\dot{x} > 0$.

Para $\mu > 0$ tenemos lo siguiente:

- Si $x < -\mu \implies x + \mu < 0 \implies \dot{x} > 0$
- Si $-\mu < x < 0 \implies x + \mu > 0 \implies \dot{x} < 0$
- Si $x > 0 \implies \dot{x} > 0$

La figura (2.3) muestra el retrato fase de este ejemplo.

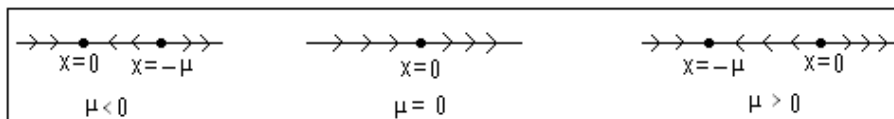


Figura 2.3: Retrato fase para el ejemplo (2.3)

Si consideramos a μ como una variable de estado más moviéndose lentamente tenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\mu + x) \\ \dot{\mu} &= 0\end{aligned}$$

con puntos de equilibrio

$$\begin{aligned}x &= 0 \\ x &= -\mu\end{aligned}$$

cuyo diagrama de bifurcación se presenta en la figura (2.4).

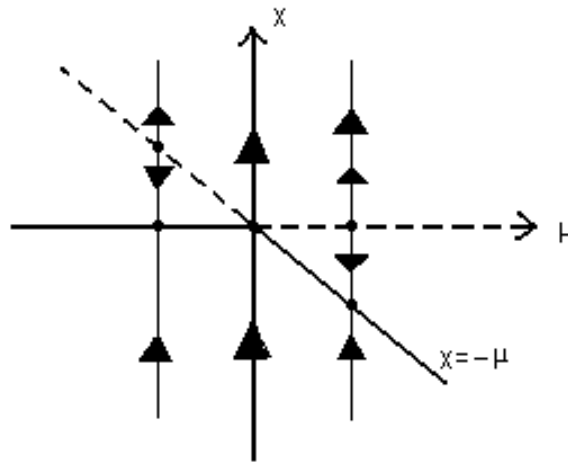


Figura 2.4: Diagrama de bifurcación para el ejemplo (2.3)

2.1.3 Bifurcación trinche

Este tipo de bifurcación se presenta en un sistema del tipo (2.1) cuando para algún determinado valor crítico μ_0 del parámetro μ el sistema se comporta de la siguiente manera: Para $\mu \neq \mu_0$, supongamos, sin pérdida de generalidad, $\mu < \mu_0$, el sistema presenta un sólo punto de equilibrio con una determinada estabilidad, para $\mu = \mu_0$ el sistema preserva el punto de equilibrio y para $\mu > \mu_0$ el sistema presenta tres puntos de equilibrio, dos externos y un central, donde la estabilidad de los externos es la misma y la del central es la opuesta.

El siguiente ejemplo ilustra el comportamiento del sistema cuando experimenta la bifurcación trinche.

Ejemplo 2.3. Considere el sistema

$$\dot{x} = x(\mu + x^2), \quad (2.4)$$

sus puntos de equilibrio son

$$\begin{aligned}x &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{-\mu}, \text{ si } \mu \leq 0.\end{aligned}$$

Haciendo un análisis similar a los dos ejemplos anteriores para conocer la estabilidad del sistema tenemos que para $\mu < 0$ ocurre lo siguiente:

- Si $x < -\sqrt{-\mu}$ entonces $\dot{x} < 0$,
- Si $-\sqrt{-\mu} < x < 0$ entonces $\dot{x} > 0$,
- Si $0 < x < \sqrt{-\mu}$ entonces $\dot{x} < 0$,
- Si $x > \sqrt{-\mu}$ entonces $\dot{x} > 0$

Para $\mu = 0$, el único punto de equilibrio es $x = 0$ y es fácil ver que es un repulsor. Para $\mu > 0$, también el único equilibrio es $x = 0$ y conserva la misma estabilidad, sigue siendo un repulsor. La figura (2.5) muestra el retrato fase de este ejemplo.

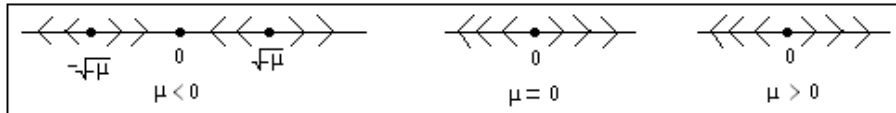


Figura 2.5: Retrato fase para el ejemplo (2.4)

El diagrama de bifurcación para este sistema, considerando a μ como una variable de estado mas, se presenta en la figura 5.

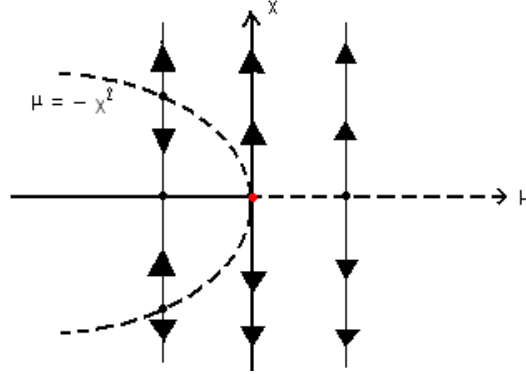


Figura 2.6: Diagrama de bifurcación para el ejemplo (2.4)

El siguiente teorema establece condiciones suficientes bajo las cuales un sistema en \mathbb{R} experimenta las bifurcaciones estacionarias.

Teorema 1. (Teorema de las Bifurcaciones Estacionarias.) Considere el sistema suficientemente suave

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

donde x es la variable de estado y μ es un parámetro. Asumimos que $(0,0)$ es un punto de equilibrio no-hiperbólico, es decir, $f(0,0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

a) El sistema sufre una bifurcación silla-nodo en $(0,0)$ si

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) &\neq 0 \text{ y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &\neq 0. \end{aligned}$$

b) El sistema sufre una bifurcación transcritical en $(0,0)$ si

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) &\neq 0 \text{ y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &\neq 0. \end{aligned}$$

c) El sistema sufre una bifurcación trinche en $(0,0)$ si

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) &\neq 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= 0 \text{ y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) &\neq 0.\end{aligned}$$

Observación 1. Para cada bifurcación estacionaria es posible tener cuatro posiciones o direcciones diferentes, las cuales dependen del signo de las parciales del campo vectorial $f(x, \mu)$ que son diferentes de cero. La siguiente figura muestra como ejemplo las cuatro direcciones en que puede ocurrir la bifurcación silla-nodo.

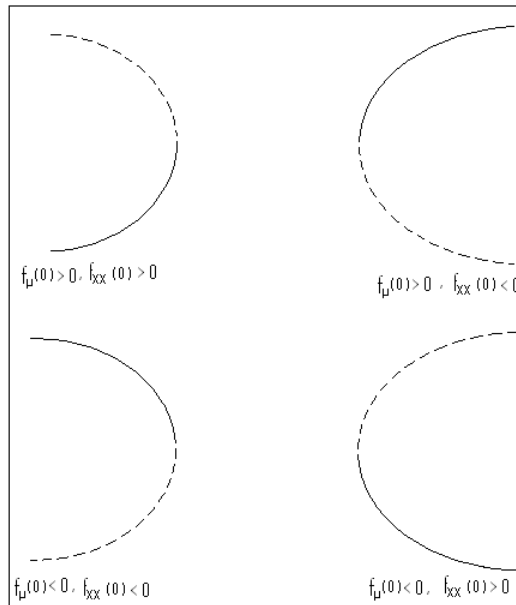


Figura 2.7: Direcciones posibles para la silla-nodo

2.2 Teorema de la Variedad Central

Considere el sistema

$$\dot{\xi} = F(\xi) \quad (2.5)$$

con $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $F \in C^r$, para r suficientemente grande, tal que

$$F(0) = 0 \text{ y } DF(0) \sim \begin{pmatrix} A_{n_1 \times n_1} & 0 \\ 0 & B_{n_2 \times n_2} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

donde A sólo posee valores propios con parte real cero y B sólo posee valores propios con parte real negativa. El símbolo “ \sim ” denota similitud entre matrices.

Existe un cambio de coordenadas que nos permite descomponerlo en dos bloques de Jordan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Definición 2.2. . Una variedad invariante se llama variedad central de (2.6), si puede ser representada de la forma:

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} | y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}$$

Para δ suficientemente pequeño.

Teorema 2. Considere el sistema (2.6)

(i) Existe una variedad central, alrededor de $\xi = 0$,

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} | y = h(x)\}$$

(ii) La dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x))$$

(iii) La función $h : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ puede ser aproximada utilizando la ecuación

$$Dh(x)(Ax + f(x, h(x))) - Bh(x) - g(x, h(x)) \equiv 0.$$

2.3 Teorema de la Variedad Central Dependiendo de Parámetros

Considere el sistema

$$\dot{\xi} = F(\xi, \mu) \quad (2.7)$$

con $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ y $F \in C^r$, para r suficientemente grande, tal que

$$F(0,0) = 0 \text{ y } DF(0,0) \sim \begin{pmatrix} A_{n_1 \times n_1} & 0 \\ 0 & B_{n_2 \times n_2} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

donde A sólo posee valores propios con parte real cero y B sólo posee valores propios con parte real negativa. El símbolo “ \sim ” denota similitud entre matrices.

Existe un cambio de coordenadas que nos permite descomponerlo en el siguiente sistema extendido

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{\mu} &= 0 \\ \dot{y} &= By + g(x, y) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Definición 2.3. . Una variedad invariante se llama variedad central de (2.8), si puede ser representada de la forma:

$$W^c(0) = \{ (x, y, \mu) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^p \mid y = h(x, \mu), |x| < \delta, |\mu| < \bar{\delta}, \\ h(0,0) = 0, Dh(0,0) = 0 \}$$

Para δ y $\bar{\delta}$ suficientemente pequeñas.

Teorema 3. Considere el sistema (2.7)

(i) Existe una variedad central, alrededor de $(\xi, \mu) = (0, 0)$,

$$W^c(0) = \{ (x, y, \mu) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^p \mid y = h(x, \mu), |x| < \delta, |\mu| < \bar{\delta}, h(0,0) = 0, \\ Dh(0,0) = 0 \}$$

(ii) La dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x, \mu), \mu)$$

(iii) La función $h : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ puede ser aproximada utilizando la ecuación

$$Dh_x(x, \mu) (Ax + f(x, h(x, \mu), \mu)) - Bh(x, \mu) - g(x, h(x, \mu), \mu) \equiv 0.$$

2.4 Teorema de Sotomayor

En [7] aparece la siguiente versión del teorema de Sotomayor, el cual nos dá condiciones suficientes para que una familia uni-parametrizada de campos vectoriales presente las bifurcaciones estacionarias.

Teorema 4. Considere el sistema parametrizado

$$\dot{\eta} = F(\eta, \nu) \tag{2.9}$$

con $\eta \in \mathbb{R}^n$ y $\nu \in \mathbb{R}$. Supongamos que existe (η_0, ν_0) tal que

$$H1) F(\eta_0, \nu_0) = 0$$

$$H2) \sigma(A) = \{\lambda_1 = 0, \text{ y } \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, j = 2, 3, \dots, n\}$$

donde $A \equiv (DF(\eta_0, \nu_0))_{n \times n}$. Sean v_0 y ω_0 los vectores propios derecho e izquierdo respectivamente de A correspondientes al valor propio $\lambda_1 = 0$.

Si

$$\begin{aligned} \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) &\neq 0 \quad \text{y} \\ (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Entonces, el sistema (2.9) experimenta una bifurcación silla-nodo en el punto de equilibrio $\eta = \eta_0$ cuando el parámetro ν pasa a través del valor de bifurcación $\nu = \nu_0$.

Si

$$\begin{aligned} \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) &= 0, \\ (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) &\neq 0, \\ v_0^T (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))^T &\neq 0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

entonces el sistema (2.9) experimenta una bifurcación transcítica en el punto de equilibrio $\eta = \eta_0$ cuando el parámetro ν varía a través del valor de bifurcación $\nu = \nu_0$.

Si

$$\begin{aligned} \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) &= 0, \\ (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) &= 0 \\ v_0^T (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))^T &\neq 0 \\ (\omega_0^T D^3 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0, v_0) &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

entonces el sistema (2.9) experimenta una bifurcación trinche en el punto de equilibrio $\eta = \eta_0$ cuando el parámetro ν varía a través del valor de bifurcación $\nu = \nu_0$.



Teorema de Sotomayor para familias m -parametrizadas

El teorema de Sotomayor nos dá condiciones suficientes para que una familia uni-parametrizada de ecuaciones diferenciales experimente las bifurcaciones estacionarias: silla-nodo, transcritical y trinché. En este capítulo se presenta la demostración de este teorema para una familia m -parametrizada de ecuaciones diferenciales. La idea de la demostración se basa en buscar la expresión de la variedad central y analizar en ella la dinámica del sistema.

Previo al enunciado y demostración del teorema, se presentan los siguientes lemas, los cuales los utilizaremos durante el desarrollo de la demostración.

Considere el sistema parametrizado

$$\dot{\eta} = F(\eta, \nu) \quad (3.1)$$

con $\eta \in \mathbb{R}^n$ y $\nu \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que existe (η_0, ν_0) tal que

$$\text{H1)} \quad F(\eta_0, \nu_0) = 0$$

$$\text{H2)} \quad \sigma(A) = \{\lambda_1 = 0, \text{ y } R(\lambda_j) \neq 0, \text{ } j = 2, 3, \dots, n\}$$

donde

$$A \equiv (DF(\eta_0, \nu_0))_{n \times n}.$$

Lema 1. *Con el cambio de variables y parámetros*

$$\begin{aligned} \xi &= P^{-1}(\eta - \eta_0) \\ \mu &= \nu - \nu_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

el sistema (3.1) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= J\xi + P^{-1}F_{\nu}(\eta_0, \nu_0)\mu + \frac{1}{2}P^{-1}D^2F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi) + P^{-1}F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, P\xi) \\ &\quad + \frac{1}{6}P^{-1}D^3F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi, P\xi) + \dots \end{aligned}$$

Demostración. Por el teorema de Jordan, existe una matriz P , invertible, tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}$$

de tal manera que la matriz P y su inversa, P^{-1} , están formadas por los vectores propios (generalizados) asociados a los valores propios de la matriz A , es decir,

$$P = \begin{pmatrix} v_0 & P_0 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_0^T \\ Q_0 \end{pmatrix}$$

donde v_0 y ω_0 son los vectores propios derecho e izquierdo respectivamente, asociados al valor propio $\lambda_1 = 0$, tal que

$$\begin{aligned} Av_0 &= 0 \\ \omega_0^T A &= 0, \end{aligned}$$

y $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n-1}$, $Q_0 \in \mathbb{R}^{n-1 \times n}$. El cambio de variables (3.2) traslada nuestro punto de equilibrio al origen y también ortogonaliza el eigenspacio central con los eigenspacios estable e inestable.

Antes de introducir las nuevas variables, hacemos un desarrollo de Taylor del campo $F(\eta, \nu)$ alrededor del punto de equilibrio (η_0, ν_0) , quedándonos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} F(\eta, \nu) &= F(\eta_0, \nu_0) + DF(\eta_0, \nu_0)(\eta - \eta_0) + F_\nu(\eta_0, \nu_0)(\nu - \nu_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}D^2F(\eta_0, \nu_0)(\eta - \eta_0, \eta - \eta_0) + F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\nu - \nu_0, \eta - \eta_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}F_{\nu\nu}(\eta_0, \nu_0)(\nu - \nu_0, \nu - \nu_0) \\ &\quad + \frac{1}{6}D^3F(\eta_0, \nu_0)(\eta - \eta_0, \eta - \eta_0, \eta - \eta_0) + \dots \end{aligned}$$

Entonces (3.1) se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= DF(\eta_0, \nu_0)(\eta - \eta_0) + F_\nu(\eta_0, \nu_0)(\nu - \nu_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}D^2F(\eta_0, \nu_0)(\eta - \eta_0, \eta - \eta_0) + F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\nu - \nu_0, \eta - \eta_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}F_{\nu\nu}(\eta_0, \nu_0)(\nu - \nu_0, \nu - \nu_0) + \frac{1}{6}D^3F(\eta_0, \nu_0)(\eta - \eta_0, \eta - \eta_0, \eta - \eta_0) + \dots \end{aligned}$$

Para hacer el cambio de variables propuesto, consideraremos primero la siguiente notación:

$$F(\eta, \nu) = \begin{pmatrix} F_1(\eta, \nu) \\ F_2(\eta, \nu) \\ \vdots \\ F_n(\eta, \nu) \end{pmatrix}, \quad DF(\eta_0, \nu_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \eta}(\eta_0, \nu_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial \eta}(\eta_0, \nu_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial \eta}(\eta_0, \nu_0) \end{pmatrix}_{n \times n} = A,$$

$$F_\nu(\eta_0, \nu_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \nu}(\eta_0, \nu_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial \nu}(\eta_0, \nu_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial \nu}(\eta_0, \nu_0) \end{pmatrix}_{n \times m}, \quad D^2 F(\eta_0, \nu_0) = \begin{pmatrix} (D^2 F_1(\eta_0, \nu_0))_{n \times n} \\ (D^2 F_2(\eta_0, \nu_0))_{n \times n} \\ \vdots \\ (D^2 F_n(\eta_0, \nu_0))_{n \times n} \end{pmatrix},$$

$$F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0) = \begin{pmatrix} (F_{1\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))_{m \times n} \\ (F_{2\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))_{m \times n} \\ \vdots \\ (F_{n\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))_{m \times n} \end{pmatrix}, \quad D^3 F(\eta_0, \nu_0) = \begin{pmatrix} D^3 F_1(\eta_0, \nu_0) \\ D^3 F_2(\eta_0, \nu_0) \\ \vdots \\ D^3 F_n(\eta_0, \nu_0) \end{pmatrix}.$$

Luego, de (3.2) tenemos que

$$\dot{\xi} = P^{-1}\dot{\eta}, \quad \eta - \eta_0 = P\xi, \quad \nu - \nu_0 = \mu,$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= P^{-1}[AP\xi + F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu + \frac{1}{2}D^2 F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi) \\ &\quad + F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, P\xi) + \frac{1}{6}D^3 F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi, P\xi) + \dots] \\ &= J\xi + P^{-1}F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu + \frac{1}{2}P^{-1}D^2 F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi) \\ &\quad + P^{-1}F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, P\xi) + \frac{1}{6}P^{-1}D^3 F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi, P\xi) + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

■

Ya teniendo el sistema en las nuevas variables, necesitamos ponerlo en forma vectorial y definir la variable que nos determina la variedad central, para ello, cada uno de los términos del sistema (3.3) los pondremos en forma vectorial de tal manera que se puedan observar explícitamente las entradas de cada uno de los vectores, nos interesa en particular la primera entrada de cada vector, ya que es la que le corresponde al valor propio cero y es la que nos dará la dinámica del sistema sobre la variedad central. El siguiente lema nos dice como hacer dicho cálculo.

Lema 2. *El sistema (3.3) puede reescribirse como*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0))\mu + \frac{1}{2}a_1x^2 + B_1(x, y) + \frac{1}{2}C_1(y, y) + (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))(\mu, \nu_0)x \\ &\quad + (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))(\mu, P_0y) + \frac{1}{6}qx^3 + \dots \\ \dot{y} &= J_sy + (Q_0F_\nu(\eta_0, \nu_0))\mu + \frac{1}{2}A_2x^2 + B_2(x, y) + \frac{1}{2}C_2(y, y) + (Q_0F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))(\mu, \nu_0)x \\ &\quad + (Q_0F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))(\mu, P_0y) + \frac{1}{6}Qx^3 + \dots\end{aligned}$$

donde $x = \omega_0^T(\eta - \eta_0) \in \mathbb{R}$, $y = Q_0(\eta - \eta_0) \in \mathbb{R}^{n-1}$ y

$$\begin{aligned}a_1 &= (\omega_0^T D^2F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0) \\ B_1 &= (\omega_0^T D^2F(\eta_0, \nu_0))(v_0, P_0) \\ C_1 &= (\omega_0^T D^2F(\eta_0, \nu_0))(P_0, P_0) \\ A_2 &= (Q_0 D^2F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0) \\ B_2 &= (Q_0 D^2F(\eta_0, \nu_0))(v_0, P_0) \\ C_2 &= (Q_0 D^2F(\eta_0, \nu_0))(P_0, P_0) \\ q &= (\omega_0^T D^3F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0, v_0)\end{aligned}$$

Demostración. De (3.2) tenemos

$$\xi = P^{-1}(\eta - \eta_0) = \begin{pmatrix} \omega_0^T \\ Q_0 \end{pmatrix} (\eta - \eta_0) = \begin{pmatrix} \omega_0^T(\eta - \eta_0) \\ Q_0(\eta - \eta_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con $x \in \mathbb{R}$, e $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned}J\xi &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ J_S y \end{pmatrix}, \\ P^{-1}F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu &= \begin{pmatrix} \omega_0^T \\ Q_0 \end{pmatrix} F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu = \begin{pmatrix} \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu \\ Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu \end{pmatrix}, \\ P^{-1}(D^2F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi)) &= \begin{pmatrix} \omega_0^T \\ Q_0 \end{pmatrix} (D^2F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi)) \\ &= \begin{pmatrix} \omega_0^T (D^2F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi)) \\ Q_0 (D^2F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi)) \end{pmatrix}, \\ P^{-1}F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, P\xi) &= \begin{pmatrix} \omega_0^T \\ Q_0 \end{pmatrix} F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, P\xi) \\ &= \begin{pmatrix} \omega_0^T (F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, P\xi)) \\ Q_0 (F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, P\xi)) \end{pmatrix}, \\ P^{-1}D^3F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi, P\xi) &= \begin{pmatrix} \omega_0^T \\ Q_0 \end{pmatrix} (D^3F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi, P\xi)) \\ &= \begin{pmatrix} (\omega_0^T D^3F(\eta_0, \nu_0))(P\xi, P\xi, P\xi) \\ (Q_0 D^3F(\eta_0, \nu_0))(P\xi, P\xi, P\xi) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Entonces, el sistema (3.3) en forma vectorial nos queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ J_S y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) \mu \\ Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) \mu \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_0^T (D^2 F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi)) \\ Q_0 (D^2 F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi)) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \omega_0^T (F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, P\xi)) \\ Q_0 (F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, P\xi)) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (\omega_0^T D^3 F(\eta_0, \nu_0))(P\xi, P\xi, P\xi) \\ (Q_0 D^3 F(\eta_0, \nu_0))(P\xi, P\xi, P\xi) \end{pmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

En el sistema (3.4), las nuevas variables aún no aparecen en todos los términos, por tal motivo, desarrollaremos cada una de las entradas de los términos del sistema en los cuales no aparecen las nuevas variables.

Ahora, considerando que la segunda derivada se puede ver como un operador bilineal tenemos que

$$\begin{aligned} D^2 F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi) &= D^2 F(\eta_0, \nu_0)(v_0 x + P_0 y, v_0 x + P_0 y) \\ &= D^2 F(\eta_0, \nu_0)(v_0 x, v_0 x) + D^2 F(\eta_0, \nu_0)(v_0 x, P_0 y) \\ &\quad + D^2 F(\eta_0, \nu_0)(P_0 y, v_0 x) + D^2 F(\eta_0, \nu_0)(P_0 y, P_0 y). \end{aligned}$$

Desarrollando cada uno de los términos de la expresión inmediata anterior tenemos:

- $D^2 F(\eta_0, \nu_0)(v_0 x, v_0 x) = (D^2 F(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0))x^2$,
donde

$$D^2 F(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0) = \begin{pmatrix} v_0^T D^2 F_1(\eta_0, \nu_0) v_0 \\ v_0^T D^2 F_2(\eta_0, \nu_0) v_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_0^T D^2 F_n(\eta_0, \nu_0) v_0 \end{pmatrix}$$

•

$$\begin{aligned} D^2 F(\eta_0, \nu_0)(v_0 x, P_0 y) &= (v_0 x)^T D^2 F(\eta_0, \nu_0) P_0 y \\ &= x (v_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0) P_0) y \\ &= (D^2 F(\eta_0, \nu_0)(v_0, P_0))(x, y) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
D^2F(\eta, \nu_0)(P_0y, v_0x) &= \begin{pmatrix} (P_0y)^T D^2F_1(\eta_0, \nu_0)v_0x \\ (P_0y)^T D^2F_2(\eta_0, \nu_0)v_0x \\ \vdots \\ (P_0y)^T D^2F_n(\eta_0, \nu_0)v_0x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (v_0x)^T D^2F_1(\eta_0, \nu_0)P_0y \\ (v_0x)^T D^2F_2(\eta_0, \nu_0)P_0y \\ \vdots \\ (v_0x)^T D^2F_n(\eta_0, \nu_0)P_0y \end{pmatrix} \\
&= D^2F(\eta_0, \nu_0)(v_0x, P_0y) \\
&= (D^2F(\eta_0, \nu_0)(v_0, P_0))(x, y),
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
D^2F(\eta_0, \nu_0)(P_0y, P_0y) &= \begin{pmatrix} y^T P_0^T D^2F_1(\eta_0, \nu_0)P_0y \\ y^T P_0^T D^2F_2(\eta_0, \nu_0)P_0y \\ \vdots \\ y^T P_0^T D^2F_n(\eta_0, \nu_0)P_0y \end{pmatrix} \\
&= y^T \begin{pmatrix} P_0^T D^2F_1(\eta_0, \nu_0)P_0 \\ P_0^T D^2F_2(\eta_0, \nu_0)P_0 \\ \vdots \\ P_0^T D^2F_n(\eta_0, \nu_0)P_0 \end{pmatrix} y \\
&= y^T (D^2F_n(\eta_0, \nu_0)(P_0, P_0))y \\
&= (D^2F(\eta_0, \nu_0)(P_0, P_0))(y, y).
\end{aligned}$$

De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned}
D^2F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi) &= (D^2F(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0))x^2 \\
&\quad + 2(D^2F(\eta_0, \nu_0)(v_0, P_0))(x, y) \\
&\quad + (D^2F(\eta_0, \nu_0)(P_0, P_0))(y, y).
\end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando por ω_0^T tenemos

$$\begin{aligned}\omega_0^T (D^2 F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi)) &= \omega_0^T (D^2 F(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0)) x^2 \\ &\quad + 2\omega_0^T (D^2 F(\eta_0, \nu_0)(v_0, P_0)(x, y)) \\ &\quad + \omega_0^T (D^2 F(\eta_0, \nu_0)(P_0, P_0)(y, y)) .\end{aligned}$$

Ahora bien, si $\omega_0^T = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, entonces

$$\begin{aligned}\omega_0^T (D^2 F(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0)) &= (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \begin{pmatrix} v_0^T D^2 F_1(\eta_0, \nu_0)v_0 \\ v_0^T D^2 F_2(\eta_0, \nu_0)v_0 \\ \vdots \\ v_0^T D^2 F_n(\eta_0, \nu_0)v_0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i (v_0^T D^2 F_i(\eta_0, \nu_0)v_0) \\ &= v_0^T \left(\sum_{i=1}^n \omega_i D^2 F_i(\eta_0, \nu_0) \right) v_0 \\ &= (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) .\end{aligned}$$

Análogamente se puede demostrar que

$$\begin{aligned}\omega_0^T (D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0)(x, y) &= (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0)(x, y), \\ \omega_0^T (D^2 F(\eta_0, \nu_0)(P_0, P_0))(y, y) &= (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (P_0, P_0)(y, y)\end{aligned}$$

Entonces, conociendo ya cada uno de los términos concluimos que

$$\begin{aligned}\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi) &= (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0)x^2 \\ &\quad + 2 (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0)(x, y) \\ &\quad + (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (P_0, P_0)(y, y) .\end{aligned}$$

Denotando por

$$a_1 = (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0)$$

$$B_1 = (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0)$$

$$C_1 = (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (P_0, P_0)$$

obtenemos que

$$\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi) = a_1 x^2 + 2B_1(x, y) + C_1(y, y) .$$

Haciendo un análisis similar al anterior, tenemos que en el sistema (3.4), el término

$$Q_0(D^2F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi)) = A_2x^2 + 2B_2(x, y) + C_2(y, y)$$

donde

$$A_2 = (Q_0 D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0)$$

$$B_2 = (Q_0 D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0)$$

$$C_2 = (Q_0 D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (P_0, P_0),$$

Denotemos por

$$Q_0 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & \dots & q_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\begin{aligned} Q_0 D^2 F(\eta_0, \nu_0) &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & \dots & q_{n-1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^2 F_1(\eta_0, \nu_0) \\ D^2 F_2(\eta_0, \nu_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D^2 F_n(\eta_0, \nu_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n q_{1j} D^2 F_j(\eta_0, \nu_0) \\ \sum_{j=1}^n q_{2j} D^2 F_j(\eta_0, \nu_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{j=1}^n q_{n-1,j} D^2 F_j(\eta_0, \nu_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con esto terminamos de analizar los términos $\xi^T \xi$. Consideremos ahora los términos $\mu_i \xi_j$. Obsérvese que

$$\begin{aligned} \omega_0^T (F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, P\xi)) &= \omega_0^T (F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, v_0x + P_0y)) \\ &= \omega_0^T (F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, v_0)x) + \omega_0^T (F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, P_0y)) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \omega_j F_{j\nu\eta}(\eta_0, \nu_0) \right) (\mu, v_0)x + \left(\sum_{j=1}^n \omega_j F_{j\nu\eta}(\eta_0, \nu_0) \right) (\mu, P_0y) \\ &= (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)) (\mu, v_0)x + (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)) (\mu, P_0y). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$Q_0 F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)(\mu, P\xi) = (Q_0 F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))(\mu, v_0)x + (Q_0 F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))(\mu, P_0y).$$

El desarrollo de los dos términos anteriores de (3.4) nos dá los términos cuadráticos que necesitamos para buscar la presencia de de las bifurcaciones silla-nodo y transcrítica, el resultado siguiente nos dará los términos cúbicos que nos permitirán identificar la bifurcación trinche. Sabemos que,

$$D^3 F(\eta_0, \nu_0) = \begin{pmatrix} D^3 F_1(\eta_0, \nu_0) \\ D^3 F_2(\eta_0, \nu_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ D^3 F_n(\eta_0, \nu_0) \end{pmatrix}$$

donde

$$D^3 F_i(\eta_0, \nu_0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1} (D^2 F_i(\eta_0, \nu_0)) \right)_{n \times n} \\ \left(\frac{\partial}{\partial \eta_2} (D^2 F_i(\eta_0, \nu_0)) \right)_{n \times n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial}{\partial \eta_n} (D^2 F_i(\eta_0, \nu_0)) \right)_{n \times n} \end{pmatrix}$$

Entonces, el término del sistema (3.4) que nos interesa lo obtenemos haciendo el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} D^3 F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi, P\xi) &= D^3 F(\eta_0, \nu_0)(v_0x + P_0y, v_0x + P_0y, v_0x + P_0y) \\ &= D^3 F(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0, v_0)x^3 + \dots, \end{aligned}$$

donde

$$D^3 F(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0, v_0) = \begin{pmatrix} D^3 F_1(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0, v_0) \\ D^3 F_2(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0, v_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ D^3 F_n(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0, v_0) \end{pmatrix}$$

con

$$D^3 F_i(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0, v_0) = v_0^T \begin{pmatrix} v_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1} (D^2 F_i(\eta_0, \nu_0)) \right) v_0 \\ v_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \eta_2} (D^2 F_i(\eta_0, \nu_0)) \right) v_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \eta_n} (D^2 F_i(\eta_0, \nu_0)) \right) v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R},$$

luego entonces

$$\begin{aligned}
\omega_0^T (D^3 F(\eta_0, \nu_0)(P\xi, P\xi, P\xi)) &= \omega_0^T (D^3 F(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0, v_0)x^3) + \dots \\
&= \left(\sum_{j=1}^n \omega_j D^3 F_j(\eta_0, \nu_0)(v_0, v_0, v_0) \right) x^3 + \dots \\
&= (\omega_0^T D^3 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0, v_0)x^3 + \dots \\
&= qx^3 + \dots
\end{aligned}$$

donde

$$q = (\omega_0^T D^3 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0, v_0).$$

■

El siguiente lema nos dá la expresión de la variedad central, así como la dinámica del sistema sobre ella.

Lema 3. *La dinámica sobre la variedad central para el sistema (3.1) está dada por la expresión*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (\omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0)) \mu + \left(\frac{1}{2} (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) \right) x_1^2 \\
&+ \left[- (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0) J_S^{-1} Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + v_0^T (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))^T \right] \mu x_1 \\
&+ \left[\frac{1}{6} (\omega_0^T D^3 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0, v_0) \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0) J_S^{-1} (Q_0 D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) \right] x_1^3 + \dots,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $x_1 = \omega_0^T (\eta - \eta_0)$.

Demostración. Teniendo el sistema (3.3) ya en las variables x e y buscaremos la expresión de la variedad central, para ello consideraremos al parámetro μ como otra variable de estado más y con esto extenderemos el sistema quedando de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mu} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(x, \mu, y) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(x, \mu, y) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x, \mu, y) &= \frac{1}{2} a_1 x^2 + B_1(x, y) + \frac{1}{2} C_1(y, y) + (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)) (\mu, v_0) x \\
&+ (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)) (\mu, P_0 y) + \frac{1}{6} q x^3 + \dots \\
\mathcal{F}_2(x, \mu, y) &= \frac{1}{2} A_2 x^2 + B_2(x, y) + \frac{1}{2} C_2(y, y) + (Q_0 F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)) (\mu, v_0) x \\
&+ (Q_0 F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)) (\mu, P_0 y) + \frac{1}{6} Q x^3 + \dots.
\end{aligned}$$

Ahora, calcularemos la variedad central pero llevando el sistema (3.6) a una forma más conveniente siguiendo las ideas de las formas de Jordan. Para ello, debemos buscar una matriz \mathcal{P} tal que

$$\mathcal{P}^{-1}\bar{A}\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & L_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_S \end{pmatrix} = \bar{J},$$

donde $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) & J_S \end{pmatrix}$, L_0 se determinará y lo necesitaremos para garantizar que en la dinámica de la variedad central aparezca el termino lineal en μ , ya que es necesario para que ocurra la bifurcación silla-nodo. Sea \mathcal{P} la matriz

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & I_m & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

entonces $\bar{A}\mathcal{P} = \mathcal{P}\bar{J}$ equivale a

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_0^T L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_0 L & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & I_m & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & I_m & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_S \end{pmatrix}$$

entonces, multiplicando las matrices e igualando los términos y considerando que J_S no tiene valores propios cero y por lo tanto es invertible, tenemos que una solución está dada por

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -J_S^{-1}Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) & I_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & J_S^{-1}Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) & I_{n-1} \end{pmatrix} \quad y$$

$$L_0 = \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0).$$

Ahora hacemos el siguiente cambio de coordenadas,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \mu \\ y_1 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ \mu \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ \mu \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} x_1 \\ \mu \\ y_1 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$x = x_1$$

$$\mu = \mu$$

$$y = y_1 - J_S^T Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\mu} \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} &= \mathcal{P} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mu} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \left[\bar{A} \begin{pmatrix} x \\ \mu \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(x, \mu, y) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(x, \mu, y) \end{pmatrix} \right] \\
&= \mathcal{P}^{-1} \bar{A} \mathcal{P} \begin{pmatrix} x_1 \\ \mu \\ y_1 \end{pmatrix} + \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(x, \mu, y) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(x, \mu, y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \mu \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_1(x_1, \mu, y_1) \\ 0 \\ \tilde{\mathcal{F}}_2(x_1, \mu, y_1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{\mathcal{F}}_i(x_1, \mu, y_1) = \mathcal{F}_i(x_1, \mu, y_1 - (J_S^T Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0))), \quad i = 1, 2$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{F}}_1(x_1, \mu, y_1) &= \frac{1}{2} a_1 x_1^2 + B_1(x_1, -J_S^T Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + y_1) \\
&\quad + \frac{1}{2} C_1(-J_S^T Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + y_1, -J_S^T Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + y_1) \\
&\quad + (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)) (\mu, \nu_0) x_1 \\
&\quad + (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)) (\mu, P_0(-J_S^T Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + y_1)) + \frac{1}{6} q x_1^3 + \dots \\
\tilde{\mathcal{F}}_2(x_1, \mu, y_1) &= \frac{1}{2} A_2 x_1^2 + B_2(x_1, -J_S^T Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + y_1) \\
&\quad + \frac{1}{2} C_2(-J_S^T Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + y_1, -J_S^T Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + y_1) \\
&\quad + (Q_0 F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)) (\mu, \nu_0) x_1 \\
&\quad + (Q_0 F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0)) (\mu, P_0(-J_S^T Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + y_1)) + \frac{1}{6} Q x_1^3 + \dots
\end{aligned}$$

Ya con el sistema en una forma más adecuada podemos continuar con el cálculo de la variedad central.

Sea

$$y_1 = h(x_1, \mu) = \bar{A}_1 x_1^2 + \mu^T \bar{A}_2 x_1 + \bar{A}_3(\mu, \mu)$$

la expresión para la variedad central, donde estaremos interesados en determinar \bar{A} , y cuya ecuación homológica es

$$\dot{y}_1 = \frac{\partial h(x_1, \mu)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial h(x_1, \mu)}{\partial \mu} \dot{\mu}$$

entonces, como $\dot{\mu} = 0$, tenemos

$$\dot{y}_1 = (2\bar{A}_1 x_1 + \mu^T \bar{A}_2) \dot{x}_1$$

de tal manera que

$$J_S y_1 + \tilde{\mathcal{F}}_2(x_1, \mu, y_1) \equiv (2\bar{A}_1 x_1 + \mu^T \bar{A}_2)(\omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu + \tilde{\mathcal{F}}_1(x_1, \mu, y_1))$$

entonces

$$\begin{aligned} J_S y_1 + \tilde{\mathcal{F}}_2(x_1, \mu, y_1) &\equiv 2\bar{A}_1 x_1 \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu + 2\bar{A}_1 x_1 \tilde{\mathcal{F}}_1(x_1, \mu, y_1) \\ &\quad + \bar{A}_2 \mu^T \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu + \mu^T \bar{A}_2 \tilde{\mathcal{F}}_1(x_1, \mu, y_1). \end{aligned}$$

Haciendo las sustituciones y analizando el hecho de que el término que nos interesa de la expresión de la variedad central es solo el primero, podemos observar que los términos que sobreviven de la expresión inmediata anterior ya desarrollada son

$$J_S \bar{A}_1 x_1^2 + \frac{1}{2} A_2 x_1^2 + \dots \equiv 0$$

y esto implica que

$$\bar{A}_1 = -\frac{1}{2} J_S^{-1} A_2,$$

por lo tanto, la expresión de la variedad central finalmente es

$$h(x_1, \mu) = -\frac{1}{2} J_S^{-1} A_2 x_1^2 + \dots \quad (3.7)$$

y la dinámica sobre (3.7) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu + \tilde{\mathcal{F}}_1(x_1, \mu, h(x_1, \mu)) \\ &= \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu + \frac{1}{2} a_1 x_1^2 + B_1(x_1, -J_S^T Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu + h(x_1, \mu)) \\ &\quad + (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))(\mu, \nu_0)x_1 + \frac{1}{6} q x_1^3 + \dots \\ &= (\omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0))\mu + \frac{1}{2} a_1 x_1^2 + [B_1(x_1, -J_S^T Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu) \\ &\quad + (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))(\mu, \nu_0)x_1] + \left[B_1(x_1, h(x_1, \mu)) + \frac{1}{6} q x_1^3 \right] + \dots \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que

$$B_1 = (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0))(\nu_0, P_0)$$

entonces,

$$B_1(x_1, -J_S^{-1} Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu) = -\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)(\nu_0, P_0) J_S^{-1} Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0)\mu x_1$$

ahora,

$$(\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))(\mu, \nu_0) = ((\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))(\mu, \nu_0))^T = \nu_0^T (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))^T \mu$$

Por lo tanto, la dinámica del sistema sobre la variedad central es

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (\omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0)) \mu + \left(\frac{1}{2} (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) \right) x_1^2 \\
&+ \left[- (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0) J_S^{-1} Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + v_0^T (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))^T \right] \mu x_1 \\
&+ \left[\frac{1}{6} (\omega_0^T D^3 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0, v_0) \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0) J_S^{-1} (Q_0 D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) \right] x_1^3 + \dots
\end{aligned} \tag{3.8}$$

■

Con los tres lemas anteriores, hemos demostrado el teorema principal de este capítulo.

Teorema 5. *Considere el sistema parametrizado*

$$\dot{\eta} = F(\eta, \nu) \tag{3.9}$$

con $\eta \in \mathbb{R}^n$ y $\nu \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que existe (η_0, ν_0) tal que

$$H1) F(\eta_0, \nu_0) = 0$$

$$H2) \sigma(A) = \{\lambda_1 = 0, \text{ y } \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, j = 2, 3, \dots, n\}$$

donde

$$A \equiv (DF(\eta_0, \nu_0))_{n \times n}.$$

Sean v_0 y ω_0 los vectores propios derecho e izquierdo respectivamente de A correspondientes al valor propio $\lambda_1 = 0$. Entonces,

Caso 1 . Si

$$\omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) \neq 0 \quad \text{y} \tag{3.10}$$

$$(\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) \neq 0$$

Entonces, el sistema (3.9) experimenta una bifurcación silla-nodo en el punto de equilibrio $\eta = \eta_0$ cuando el parámetro ν pasa a través del valor de bifurcación $\nu = \nu_0$. Además, la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x} = \beta_1 + ax^2 + \dots \tag{3.11}$$

donde

$$\begin{aligned}
x &= \omega_0^T (\eta - \eta_0), \\
\beta_1 &= \omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) (\nu - \nu_0), \text{ y} \\
a &= \frac{1}{2} (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0).
\end{aligned}$$

Caso 2 . Si

$$\begin{aligned}\omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) &= 0, \\ (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) &\neq 0, \\ -(\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0) J_s^{-1} Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + v_0^T (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))^T &\neq 0,\end{aligned}\tag{3.12}$$

entonces el sistema (3.1) experimenta un bifurcación transcítica en el punto de equilibrio $\eta = \eta_0$ cuando el parámetro ν varía a través del valor de bifurcación $\nu = \nu_0$. Además, la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x} = ax^2 + \beta_2 x + \dots\tag{3.13}$$

donde

$$\beta_2 = [- (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0) J_s^{-1} Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + v_0^T (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))^T] (\nu - \nu_0).$$

Caso 3 . Si

$$\begin{aligned}\omega_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) &= 0, \\ (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) &= 0 \\ -(\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0) J_s^{-1} Q_0 F_\nu(\eta_0, \nu_0) + v_0^T (\omega_0^T F_{\nu\eta}(\eta_0, \nu_0))^T &\neq 0 \\ \frac{1}{6} (\omega_0^T D^3 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0, v_0) & \\ -\frac{1}{2} (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0) J_s^{-1} (Q_0 D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) &\neq 0\end{aligned}\tag{3.14}$$

entonces el sistema (3.1) experimenta un bifurcación trinche en el punto de equilibrio $\eta = \eta_0$ cuando el parámetro ν varía a través del valor de bifurcación $\nu = \nu_0$. Además, la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x}_1 = \beta_2 x + bx^3 + \dots\tag{3.15}$$

donde

$$\begin{aligned}b &= \left[\frac{1}{6} (\omega_0^T D^3 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0, v_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\omega_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, P_0) J_s^{-1} (Q_0 D^2 F(\eta_0, \nu_0)) (v_0, v_0) \right]\end{aligned}$$

Observación 2. Podemos observar que para el caso $m = 1$, el resultado anterior corresponde al teorema de Sotomayor.



Control de bifurcaciones estacionarias

En el capítulo anterior se abordó el análisis de bifurcaciones en una familia m -parametrizada de ecuaciones diferenciales, obteniéndose un teorema para el caso de las bifurcaciones estacionarias. En este capítulo abordaremos el control de las bifurcaciones estacionarias en sistemas de control utilizando el teorema demostrado en el capítulo anterior, para el caso $m = 1$, el cual es conocido como el Teorema de Sotomayor. Este problema ha sido abordado en [1], [9] y [10], utilizando distintas herramientas y metodologías.

4.1 Planteamiento del problema

Considere el sistema de control,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.1)$$

con $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos suaves y $u \in \mathbb{R}$. Supongamos que existe x_0 tal que

$$H1) f(x_0) = 0 \quad (4.2)$$

$$H2) \sigma(Df(x_0)) = \{\lambda_1 = 0, \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, j = 2, \dots, n\}.$$

Nos interesa diseñar una ley de control $u = u(x, \mu, \gamma)$, con $\mu \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}^2$, tal que el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x, \mu, \gamma) = F(x, \mu, \gamma) \quad (4.3)$$

experimente las bifurcaciones estacionarias, y además, sea posible establecer *a priori* las distintas direcciones de las bifurcaciones mediante la manipulación de γ . Llamaremos a μ parámetro artificial de bifurcación y a γ el vector de parámetros artificiales de control. Aunque tanto μ como γ son parámetros de control, haremos una distinción entre ellos, μ será el parámetro de bifurcación, y nos permitirá controlar el “lado” en el que queremos estar dentro de la dinámica de la bifurcación, mientras que las entradas de γ nos permitirán controlar la dirección de las bifurcaciones.

4.2 Caso escalar

Considere el sistema de control escalar

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.4)$$

con $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}$. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $x_0 = 0$. Luego, desarrollando en serie de Taylor alrededor del origen los campos f y g , (4.4) se transforma en

$$\dot{x} = a_1x^2 + a_2x^3 + \dots + (b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots)u(x, \mu, \gamma). \quad (4.5)$$

Como queremos que ocurran las bifurcaciones estacionarias, la ley de control la pondremos de acuerdo con los términos que generan dichas bifurcaciones. Considere la ley de control

$$u = c_1x + c_2\mu + c_3x^2 + c_4\mu x + c_5x^3 \quad (4.6)$$

con $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1 \dots 5$. Sustituyendo (4.6) en (4.5), desarrollando las operaciones indicadas y agrupando términos semejantes, obtenemos el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} = & (b_1c_1)x + (b_1c_2)\mu + (a_1 + b_1c_3 + b_2c_1)x^2 + (b_1c_4 + b_2c_2)\mu x \\ & + (a_2 + b_1c_5 + b_2c_3 + b_3c_1)x^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $a_1 = \frac{1}{2}D^2f(0)$, $b_1 = g(0)$ y $b_2 = Dg(0)$. De esta manera, si $b_1 \neq 0$, las condiciones para que ocurran las bifurcaciones estacionarias son:

1) Bifurcación silla- nodo:

$$\begin{aligned} b_1c_1 &= 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ b_1c_2 &\neq 0 \Rightarrow c_2 \neq 0 \\ a_1 + b_1c_3 + b_2c_1 &\neq 0 \Rightarrow c_3 \neq -\frac{a_1}{b_1} \end{aligned}$$

de esta manera, nuestra ley de control esta dada por $u(x, \mu, \gamma) = l_1\mu + l_2x^2$, donde $l_1 = c_2$ y $l_2 = c_3$ y entonces el sistema

$$\dot{x} = (b_1l_1)\mu + (a_1 + b_1l_2)x^2 + \dots$$

experimenta la bifurcación silla-nodo, además, tenemos la posibilidad de manipular l_1 y l_2 de tal manera que podemos controlar con ello, la dirección de la bifurcación.

2) Bifurcación transcítica:

$$\begin{aligned} b_1c_1 &= 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ b_1c_2 &= 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ a_1 + b_1c_3 + b_2c_1 &\neq 0 \Rightarrow c_3 \neq -\frac{a_1}{b_1} \\ b_1c_4 + b_2c_2 &\neq 0 \Rightarrow c_4 \neq 0 \end{aligned}$$

por lo tanto si $u(x, \mu, \gamma) = l_1x^2 + l_2\mu x$, donde $l_1 = c_3$ y $l_2 = c_4$, entonces el sistema

$$\dot{x} = (a_1 + b_1l_1)x^2 + (b_1l_2)\mu x + \dots$$

experimenta una bifurcación transcítica, y podemos también controlar la dirección de la misma debido a que podemos manipular l_1 y l_2 .

3) Bifurcación trinche:

$$b_1 c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$b_1 c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$a_1 + b_1 c_3 + b_2 c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = -\frac{a_1}{b_1}$$

$$b_1 c_4 + b_2 c_2 \neq 0 \Rightarrow c_4 \neq 0$$

$$a_2 + b_1 c_5 + b_2 c_3 + b_3 c_1 \neq 0 \Rightarrow c_5 \neq \frac{-a_2 - b_2 c_3}{b_1} \Rightarrow c_5 \neq \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1^2}$$

por lo tanto si $u(x, \mu, \gamma) = -\frac{a_1}{b_1} x^2 + l_1 \mu x + l_2 x^3$, donde $l_1 = c_4$ y $l_2 = c_5$, entonces el sistema

$$\dot{x} = (b_1 l_1) \mu x + \left(a_2 + b_1 l_2 - \frac{a_1 b_2}{b_1} \right) x^3 + \dots$$

experimenta una bifurcación trinche, y podemos también controlar la dirección de la misma ya que tenemos la posibilidad de manipular el valor de l_1 y l_2 .

Como podemos observar, en los tres casos analizados se estableció la hipótesis $b_1 \neq 0$. Analizaremos ahora el caso en que $b_1 = 0$, entonces, el sistema (4.7) se reduce a

$$\dot{x} = (a_1 + b_2 c_1) x^2 + (b_2 c_2) \mu x + (a_2 + b_2 c_3 + b_3 c_1) x^3 + \dots \quad (4.8)$$

Podemos observar que en este caso la bifurcación silla-nodo no puede ocurrir, por lo que veremos las condiciones bajo las cuales ocurren la bifurcación transcítica y la trinche.

Para que ocurra la bifurcación transcítica necesitamos que

$$a_1 + b_2 c_1 \neq 0 \Rightarrow c_1 \neq -\frac{a_1}{b_2}, \text{ con } b_2 \neq 0$$

$$b_2 c_2 \neq 0 \Rightarrow c_2 \neq 0$$

por lo tanto la ley de control esta dada por

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1 x + l_2 \mu,$$

donde $l_1 = c_1$ y $l_2 = c_2$, y la dinámica del sistema (4.8) está dada por

$$\dot{x} = (a_1 + b_2 c_1) x^2 + (b_2 c_2) \mu x + \dots$$

Para que ocurra la bifurcación trinche necesitamos que

$$a_1 + b_2 c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{a_1}{b_2},$$

$$b_2 c_2 \neq 0 \Rightarrow c_2 \neq 0,$$

$$a_2 + b_2 c_3 + b_3 c_1 \neq 0 \Rightarrow c_3 \neq \frac{-a_2 - b_3 c_1}{b_2} \Rightarrow c_3 \neq \frac{a_1 b_3 - a_2 b_2}{b_2^2}$$

por lo tanto la ley de control está dada por

$$u(x, \mu, \gamma) = -\frac{a_1}{b_2} x + l_1 \mu + l_2 x^2$$

donde $l_1 = c_2$ y $l_2 = c_3$, y la dinámica del sistema (4.8) está dada por

$$\dot{x} = (b_2 l_1) \mu x + \left(a_2 + b_2 l_2 - \frac{a_1 b_3}{b_2} \right) x^3 + \dots$$

dándonos así la posibilidad de controlar su ocurrencia, así como también la dirección de la misma ya que tenemos la posibilidad de manipular l_1 y l_2 . Se observa que aparece otra restricción sobre $g(x)$, en este caso $b_2 \neq 0$. Supongamos ahora que $b_2 = 0$, entonces el sistema (4.7) se reduce a

$$\dot{x} = a_1 x^2 + (a_2 + b_3 c_1) x^3 + \dots,$$

y como podemos ver, no satisface ninguna de las hipótesis del Teorema de las bifurcaciones estacionarias, por lo que no podemos establecer condiciones suficientes para que ocurra alguna bifurcación estacionaria.

De esta manera tenemos que si $b_1 \neq 0$ ocurren las tres bifurcaciones estacionarias y las podemos controlar, mientras que si $b_1 = 0$ y $b_2 \neq 0$ ocurren sólo la transcritical y la trínche, y también las podemos controlar.

Es importante mencionar que, aunque un sistema no cumpla con estas condiciones, debido a que sólo son condiciones suficientes, es posible que el sistema presente las bifurcaciones y que se puedan controlar.

Una vez concluido el análisis para el caso escalar, podemos resumir todos los resultados en el siguiente teorema, cuya demostración es precisamente el análisis hecho anteriormente.

Teorema 6. *Considere el sistema de control escalar*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.9)$$

con $x \in \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Supongamos que $f(0) = Df(0) = 0$.

Caso 1. Si $g(0) \neq 0$, entonces

i) La ley de control

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1 \mu + l_2 x^2$$

es tal que el sistema en lazo cerrado (4.9) experimenta la bifurcación sillanodo y la dinámica está dada por

$$\dot{x} = l_1 g(0) \mu + \left(\frac{1}{2} D^2 f(0) + l_2 g(0) \right) x^2 + \dots$$

ii) La ley de control

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1 x^2 + l_2 \mu x$$

es tal que el sistema en lazo cerrado (4.9) experimenta la bifurcación transcritical y la dinámica está dada por

$$\dot{x} = \left(\frac{1}{2} D^2 f(0) + l_1 g(0) \right) x^2 + (l_2 g(0)) \mu x + \dots$$

iii) La ley de control

$$u(x, \mu, \gamma) = -\frac{D^2 f(0)}{2g(0)}x^2 + l_1\mu x + l_2x^3$$

es tal que el sistema en lazo cerrado (4.9) experimenta la bifurcación trinche y la dinámica está dada por

$$\dot{x} = (l_1g(0))\mu x + \left(\frac{1}{6}D^3f(0) + l_2g(0) - \frac{D^2f(0)Dg(0)}{2g(0)}\right)x^3 + \dots$$

Caso 2. Si $g(0) = 0$ y $Dg(0) \neq 0$, entonces

i) La ley de control

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1x + l_2\mu$$

es tal que el sistema en lazo cerrado (4.9) experimenta la bifurcación transcrítica y la dinámica está dada por

$$\dot{x} = \left(\frac{1}{2}D^2f(0) + l_1Dg(0)\right)x^2 + (l_2Dg(0))\mu x + \dots$$

ii) La ley de control

$$u(x, \mu, \gamma) = -\frac{D^2f(0)}{2Dg(0)}x + l_1\mu + l_2x^2$$

es tal que el sistema en lazo cerrado (4.9) experimenta la bifurcación trinche y la dinámica está dada por

$$\dot{x} = (l_1Dg(0))\mu x + \left(\frac{1}{6}D^3f(0) + l_2Dg(0) - \frac{D^2f(0)D^2g(0)}{4Dg(0)}\right)x^3 + \dots$$

4.3 Caso general

A continuación, haremos un estudio similar al realizado en el caso escalar, pero ahora para campos vectoriales en \mathbb{R}^n .

Considere el sistema de control

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.10)$$

con $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, campos vectoriales suficientemente suaves y $u \in \mathbb{R}$. Como en el caso escalar, supongamos que $x_0 = 0$.

Como f y g son campos vectoriales suaves, los podemos desarrollar en series de Taylor alrededor de x_0 , entonces el sistema (4.10) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x} = & Df(0)x + \frac{1}{2}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{6}D^3f(0)(x, x, x) + \dots \\ & + (b + Dg(0)x + \frac{1}{2}D^2g(0)(x, x) + \dots)u \end{aligned} \quad (4.11)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $b = g(0)$. Considere la ley de control

$$u = l\mu + L_1^T x + \mu L_2^T x + Q(x, x) + C(x, x, x) \quad (4.12)$$

donde, $l \in \mathbb{R}$, $L_1^T, L_2^T \in \mathbb{R}^n$, $Q(x, x)$ representa términos cuadráticos y $C(x, x, x)$ representa términos cúbicos.

Sustituyendo la ley de control (4.12) en el sistema (4.11), tenemos el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Df(0)x + \frac{1}{2}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{6}D^3f(0)(x, x, x) + \dots \\ &\quad + (b + Dg(0)x + \frac{1}{2}D^2g(0)(x, x) + \dots)(l\mu + L_1^T x + \mu L_2^T x + Q(x, x) + C(x, x, x)) \\ &= Df(0)x + bL_1^T x + bl\mu + \frac{1}{2}D^2f(0)(x, x) + Dg(0)xL_1^T x + bQ(x, x) + Dg(0)xl\mu \quad (4.13) \\ &\quad + b\mu L_2^T x + \frac{1}{6}D^3f(0)(x, x, x) + \frac{1}{2}D^2g(0)(x, x)L_1^T x + Dg(0)xQ(x, x) + bC(x, x, x) + \dots \end{aligned}$$

Los siguientes lemas nos permitirán reescribir algunos términos del sistema en lazo cerrado (4.13).

Lema 4.

$$Dg(0)xL_1^T x = L_1 Dg(0)(x, x)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} Dg(0)xL_1^T x &= \begin{pmatrix} (L_1^T x)Dg_1(0)x \\ (L_1^T x)Dg_2(0)x \\ \vdots \\ \vdots \\ (L_1^T x)Dg_n(0)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^T(L_1 Dg_1(0))x \\ x^T(L_1 Dg_2(0))x \\ \vdots \\ \vdots \\ x^T(L_1 Dg_n(0))x \end{pmatrix} \\ &= x^T \begin{pmatrix} L_1 Dg_1(0) \\ L_1 Dg_2(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ L_1 Dg_n(0) \end{pmatrix} x = x^T(L_1 Dg(0))x \\ &= L_1 Dg(0)(x, x) \end{aligned}$$

■

Lema 5.

$$bQ(x, x) = x^T \begin{pmatrix} b_1 Q \\ b_2 Q \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n Q \end{pmatrix} x$$

Demostración. Sea

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

entonces

$$\begin{aligned} bQ(x, x) &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} x^T Qx \\ &= \begin{pmatrix} b_1 x^T Qx \\ b_2 x^T Qx \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n x^T Qx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^T b_1 Qx \\ x^T b_2 Qx \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^T b_n Qx \end{pmatrix} = x^T \begin{pmatrix} b_1 Q \\ b_2 Q \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n Q \end{pmatrix} x \\ &= bQ(x, x) \end{aligned}$$

■

Lema 6.

$$\frac{1}{2} D^2 g(0)(x, x) L_1^T x = \frac{1}{2} \mathcal{L}(x, x, x).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D^2 g(0)(x, x) L_1^T x &= \frac{1}{2} x^T L_1 D^2 g(0)(x, x) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^T L_1 D^2 g_1(0)(x, x) \\ x^T L_1 D^2 g_2(0)(x, x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^T L_1 D^2 g_n(0)(x, x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ahora, analizaremos la i -ésima coordenada de la matriz inmediata anterior que es

$$x^T L_1 D^2 g_i(0)(x, x) = (x^T L_1)(x^T D^2 g_i(0)x)$$

sea $L_1^T = (l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1n})$, entonces

$$\begin{aligned}
 (x^T L_1)(x^T D^2 g_i(0)x) &= x^T \begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ l_{1n} \end{pmatrix} (x^T D^2 g_i(0)x) \\
 &= x^T \begin{pmatrix} l_{11} x^T D^2 g_i(0)x \\ l_{12} x^T D^2 g_i(0)x \\ \cdot \\ \cdot \\ l_{1n} x^T D^2 g_i(0)x \end{pmatrix} = x^T \begin{pmatrix} x^T (l_{11} D^2 g_i(0))x \\ x^T (l_{12} D^2 g_i(0))x \\ \cdot \\ \cdot \\ x^T (l_{1n} D^2 g_i(0))x \end{pmatrix} \\
 &= \mathcal{L}_i(x, x, x)
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} D^2 g(0)(x, x) L_1^T x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1(x, x, x) \\ \mathcal{L}_2(x, x, x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathcal{L}_n(x, x, x) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \mathcal{L}(x, x, x)
 \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathcal{L}_n \end{pmatrix}$$

■

Lema 7.

$$Dg(0)xQ(x, x) = \mathcal{M}(x, x, x).$$

Demostración.

$$Dg(0)xQ(x, x) = Dg(0)xx^T Qx = x^T Qx Dg(0)x$$

consideremos

$$Dg(0)x = \begin{pmatrix} Dg_1(0) \\ Dg_2(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ Dg_n(0) \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} Dg_1(0)x \\ Dg_2(0)x \\ \cdot \\ \cdot \\ Dg_n(0)x \end{pmatrix}$$

entonces

$$x^T Q x Dg(0)x = \begin{pmatrix} x^T Q x Dg_1(0)x \\ x^T Q x Dg_2(0)x \\ \vdots \\ x^T Q x Dg_n(0)x \end{pmatrix}$$

analicemos lo que sucede en el i -ésimo renglón

$$x^T Q x Dg_i(0)x = x^T (x^T (Dg_i(0))^T Q x)$$

sea $Q = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix}_{n \times n}$, entonces, $Qx = \begin{pmatrix} q_1^T x \\ q_2^T x \\ \vdots \\ q_n^T x \end{pmatrix}$,

entonces

$$x^T (Dg_i(0))^T Q x = \begin{pmatrix} x^T (Dg_i(0))^T q_1^T x \\ x^T (Dg_i(0))^T q_2^T x \\ \vdots \\ x^T (Dg_i(0))^T q_n^T x \end{pmatrix} = x^T \begin{pmatrix} (Dg_i(0))^T q_1^T \\ (Dg_i(0))^T q_2^T \\ \vdots \\ (Dg_i(0))^T q_n^T \end{pmatrix} x$$

esto implica que

$$x^T (x^T (Dg_i(0))^T Q x) = \mathcal{M}_i(x, x, x) \in \mathbb{R}$$

donde

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} (Dg_i(0))^T q_1^T \\ (Dg_i(0))^T q_2^T \\ \vdots \\ (Dg_i(0))^T q_n^T \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$x^T Q x (Dg(0))x = \mathcal{M}(x, x, x)$$

donde

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{M}_n \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

■

Lema 8.

$$bC(x, x, x) = \mathcal{N}(x, x, x).$$

Demostración. Sea $C(x, x, x) = x^T \begin{pmatrix} C_1(x, x) \\ C_2(x, x) \\ \vdots \\ C_n(x, x) \end{pmatrix}$ con $C_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, luego

$$bC(x, x, x) = \begin{pmatrix} b_1 C(x, x, x) \\ b_2 C(x, x, x) \\ \vdots \\ b_n C(x, x, x) \end{pmatrix}$$

tomemos la i -ésima componente,

$$b_i C(x, x, x) = x^T \begin{pmatrix} x^T (b_i C_1)_{n \times n} x \\ x^T (b_i C_2)_{n \times n} x \\ \vdots \\ x^T (b_i C_n)_{n \times n} x \end{pmatrix} = \mathcal{N}_i(x, x, x)$$

donde

$$\mathcal{N}_i = \begin{pmatrix} b_i C_1 \\ b_i C_2 \\ \vdots \\ b_i C_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} b_1 C(x, x, x) \\ b_2 C(x, x, x) \\ \vdots \\ b_n C(x, x, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_1(x, x, x) \\ \mathcal{N}_2(x, x, x) \\ \vdots \\ \mathcal{N}_n(x, x, x) \end{pmatrix} = \mathcal{N}(x, x, x)$$

donde

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_1 \\ \mathcal{N}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{N}_n \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

■

Tenemos entonces que el sistema en lazo cerrado (4.13) puede escribirse como

$$\dot{x} = (A + bL_1)x + bl\mu + \tilde{f}_2(x) + \tilde{L}_2\mu x + \tilde{f}_3(x) + \dots \quad (4.16)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= Df(0) \\ \tilde{L}_2 &= Dg(0)l + bL_2^T \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\tilde{f}_2(x) = \frac{1}{2}(D^2f(0) + 2L_1Dg(0) + 2bQ)(x, x) \quad (4.18)$$

$$\tilde{f}_3(x) = \frac{1}{6}(D^3f(0) + 3\mathcal{L} + \mathcal{M} + 6\mathcal{N})(x, x, x) \quad (4.19)$$

Ya teniendo el sistema en lazo cerrado (4.16), aplicaremos el teorema de Sotomayor y analizaremos las condiciones bajo las cuales podemos controlar la ocurrencia de las bifurcaciones estacionarias.

Observando la parte lineal en (4.16), vemos la conveniencia de considerar dos casos: $L_1 = 0$ y $L_1 \neq 0$.

Sea $L_1 = 0$, entonces (4.16) se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bl\mu + \left(\frac{1}{2}(D^2f(0) + 2bQ) \right) (x, x) + (Dg(0)l + bL_2)\mu x \\ &\quad + \left(\frac{1}{6}(D^3f(0) + \mathcal{M} + 6\mathcal{N}) \right) (x, x, x) + \dots \end{aligned} \quad (4.20)$$

Observemos que la parte lineal en (4.20) satisface las hipótesis del teorema de Sotomayor, es decir, A posee un único valor propio cero, luego entonces, aplicaremos el mencionado teorema para tratar de controlar las bifurcaciones estacionarias. Siguiendo con la misma notación, sean v_0 y ω_0 los vectores propios derecho e izquierdo respectivamente, asociados al valor propio $\lambda_1 = 0$.

El sistema (4.20) experimentará la bifurcación silla-nodo si se satisfacen (3.10), es decir, si

$$\omega_0^T bl \neq 0 \quad y \quad r = \omega_0^T (D^2f(0) + 2bQ)(v_0, v_0) \neq 0 \quad (4.21)$$

Observe que l y Q son parámetros artificiales de control, es decir, tenemos la libertad de asignarles cualquier valor conveniente. Ahora bien, la primera condición se cumplirá si establecemos la hipótesis $\omega_0^T b \neq 0$ y cualquier $l \neq 0$.

Obsérvese que

$$r = \omega_0^T D^2f(0)(v_0, v_0) + 2(\omega_0^T b)Q(v_0, v_0),$$

luego, el primer sumando es un escalar fijo dado por el sistema, mientras que el segundo sumando se puede manipular ya que a $Q(v_0, v_0)$ le podemos asignar cualquier valor.

Lema 9. *Dado un escalar α , existe $Q = (q_{ij})$ una matriz $n \times n$ tal que $Q(v_0, v_0) = \alpha$, donde v_0 es un vector propio de A .*

Demostración. Como $v_0 \neq 0$, existe al menos una entrada diferente de cero, digamos la p -ésima, $v_{0p} \neq 0$. Luego, si hacemos $q_{pp} \neq 0$ y $q_{ij} = 0$, para $i, j \neq p$ entonces $Q(v_0, v_0) = q_{pp}v_{0p}^2 = \alpha$ si $q_{pp} = \frac{\alpha}{v_{0p}^2}$.

■

Tenemos entonces que

$$r = \omega_0^T D^2 f(0)(v_0, v_0) + 2(\omega_0^T b)v_{0p}^2 q_{pp}.$$

Resumiendo, las condiciones (4.21) se cumplen si $\omega_0^T b \neq 0$, para cualquier

$$l \neq 0 \quad y \quad q_{pp} \neq -\frac{(\omega_0^T D^2 f(0)(v_0, v_0))}{2(\omega_0^T b)v_{0p}^2},$$

es decir, el sistema (4.20) experimentará la bifurcación silla-nodo si aplicamos la ley de control (ver (4.12))

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1 \mu + l_2 x_p^2,$$

donde x_p es la p -ésima componente del vector de estados x . Siguiendo el teorema de Sotomayor, la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x}_1 = \omega_0^T b l \mu + \frac{1}{2} r x_1^2 + \dots,$$

donde $x_1 = \omega_0^T x$, $l_1 = l$ y $l_2 = q_{pp}$. Tenemos demostrado entonces el siguiente lema

Lema 10. *Considere el sistema de control*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

donde $x_0 = 0$ satisface $H1)$ y $H2)$. Sean v_0 y ω_0 vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de $A = Df(0)$ asociados a $\lambda_1 = 0$. Supongamos que la p -ésima entrada de v_0 es diferente de cero. Si $\omega_0^T g(0) \neq 0$, entonces la ley de control

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1 \mu + l_2 x_p^2,$$

donde x_p es la p -ésima coordenada de x , provoca en el sistema en lazo cerrado la bifurcación silla-nodo, y la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x}_1 = \omega_0^T b l_1 \mu + \frac{1}{2} (a + 2\omega_0^T b v_{0p}^2 l_2) x_1^2 + \dots,$$

donde $x_1 = \omega_0^T x$ y $a = \omega_0^T D^2 f(0)(v_0, v_0)$.

Ahora bien, el sistema (4.20) experimentará la bifurcación transcítica si se satisfacen (3.12), es decir, si

$$\begin{aligned} \omega_0^T b l = 0, \quad r \neq 0, \quad s = & (\omega_0^T (D^2 f(0) + 2bQ)(v_0, P_0))(-J_S^{-1} Q_0 b l) \\ & + (\omega_0^T (Dg(0)l + bL_2^T))v_0 \neq 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Seguiremos suponiendo que $\omega_0^T b \neq 0$, luego la primera condición en (4.22) se cumple si $l = 0$, sabemos que la segunda se cumple para Q dada por el lema 9. Para la tercera condición en (4.22), obsérvese que, al hacer $l = 0$, se reduce a

$$s = \omega_0^T b L_2^T v_0,$$

pero sabemos que la p -ésima entrada de v_0 es diferente de cero, entonces hagamos $L_2^T = (0, \dots, 0, l_{2p}, 0, \dots, 0)$, entonces

$$s = \omega_0^T b v_{0p} l_{2p} \neq 0 \quad \text{si} \quad l_{2p} \neq 0.$$

Resumiendo, las condiciones (4.22) se cumplen si $\omega_0^T b \neq 0$, para

$$l = 0, \quad q_{pp} \neq -\frac{(\omega_0^T D^2 f(0)(v_0, v_0))}{2(\omega_0^T b)v_{0p}^2}, \quad \text{y cualquier } l_{2p} \neq 0,$$

es decir, el sistema (4.20) experimentará la bifurcación transcítica si aplicamos la ley de control (ver(4.12))

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1 \mu x_p + l_2 x_p^2,$$

donde x_p es la p -ésima componente del vector de estados x , $l_1 = l_{2p}$, $l_2 = q_{pp}$ y la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x}_1 = \omega_0^T b l_1 \mu x_1 + \frac{1}{2} (a + 2\omega_0^T b v_{op}^2 l_2) x_1^2 + \dots.$$

Hemos demostrado entonces el siguiente resultado:

Lema 11. *Considere el sistema de control*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

donde $x_0 = 0$ satisface las condiciones dadas en (4.2). Sean v_0 y ω_0 vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de $A = Df(0)$ asociados a $\lambda_1 = 0$. Si $\omega_0^T g(0) \neq 0$, entonces la ley de control

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1 \mu x_p + l_2 x_p^2,$$

donde x_p es la p -ésima coordenada de x , es tal que el sistema en lazo cerrado experimenta la bifurcación transcítica, y la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x}_1 = \omega_0^T b l_1 \mu x_1 + \frac{1}{2} (a + 2\omega_0^T b v_{op}^2 l_2) x_1^2 + \dots,$$

donde $x_1 = \omega_0^T x$ y $a = \omega_0^T D^2 f(0)(v_0, v_0)$.

Por último, el sistema (4.20) experimentará la bifurcación trinche si se satisfacen (3.14), es decir

$$\omega_0^T b l = 0, \quad r = 0, \quad s \neq 0 \text{ y } k \neq 0, \quad (4.23)$$

donde

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{6} \omega_0^T ((D^3 f(0) + \mathcal{M} + 6\mathcal{N})(v_0, v_0, v_0)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\omega_0^T (D^2 f(0) + 2bQ)(v_0, P_0)(J_S^{-1})) (Q_0(D^2 f(0) + 2bQ)(v_0, v_0)). \end{aligned}$$

Seguimos suponiendo que $\omega_0^T b \neq 0$, entonces, la primera condición en (4.23) se satisface si $l = 0$. Además, es claro que $r = 0$ si y sólo si $q_{pp} = -\frac{(\omega_0^T D^2 f(0)(v_0, v_0))}{2(\omega_0^T b)v_{0p}^2}$. Por otro lado, $s \neq 0$ para cualquier $l_{2p} \neq 0$. Ahora bien, obsérvese que

$$k = \omega_0^T \mathcal{N}(v_0, v_0, v_0) + c_0,$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{6} \omega_0^T ((D^3 f(0) + \mathcal{M})(v_0, v_0, v_0)) - \frac{1}{2} (\omega_0^T (D^2 f(0) + 2bQ)(v_0, P_0)(J_S^{-1})) (Q_0(D^2 f(0) + 2bQ)(v_0, v_0)).$$

Nuestro problema se reduce entonces a buscar \mathcal{N} tal que $k \neq 0$. Pero, del lema 8, sabemos que $\omega_0^T \mathcal{N}(v_0, v_0, v_0) = \omega_0^T b \mathcal{C}(v_0, v_0, v_0)$, luego, basta seleccionar términos cúbicos $\mathcal{C}(x, x, x)$ en la ley de control (4.12) tales que

$\mathcal{C}(v_0, v_0, v_0) \neq 0$. Sabemos que la p -ésima coordenada de v_0 es diferente de cero, entonces, hagamos $C_i = 0$ para $i \neq p$, y definimos $C_p = (c_{ij}^p)_{n \times n}$ como $c_{ij}^p = 0$ para toda $i, j \neq p$, entonces

$$\mathcal{C}(v_0, v_0, v_0) = v_0^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ C_p(v_0, v_0) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = v_{0p} C_p(v_0, v_0) = v_{0p}^3 c_{pp}^p$$

Resumiendo, las condiciones (4.23) se cumplen si $\omega_0^T b \neq 0$, para

$$l = 0, \quad q_{pp} = -\frac{(\omega_0^T D^2 f(0)(v_0, v_0))}{2(\omega_0^T b)v_{0p}^2}, \quad l_{2p} \neq 0, \quad c_{pp}^p \neq 0,$$

es decir, el sistema (4.20) experimentará la bifurcación trinche si aplicamos la ley de control (ver(4.12))

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1 \mu x_p - \alpha_0 x_p^2 + l_2 x_p^3,$$

donde x_p es la p -ésima componente del vector de estados x , $\alpha_0 = \frac{(\omega_0^T D^2 f(0)(v_0, v_0))}{2(\omega_0^T b)v_{0p}^2}$, $l_1 = l_{2p}$, $l_2 = c_{pp}^p$ y la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x}_1 = \omega_0^T b l_1 \mu x_1 + (\omega_0^T b l_2 + c_0) x_1^3 + \dots.$$

Tenemos entonces el siguiente

Lema 12. *Considere el sistema de control*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

donde $x_0 = 0$ satisface las condiciones dadas en (4.2). Sean v_0 y ω_0 vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de $A = Df(0)$ asociados a $\lambda_1 = 0$. Si $\omega_0^T g(0) \neq 0$, entonces la ley de control

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1 \mu x_p - \alpha_0 x_p^2 + l_2 x_p^3,$$

donde x_p es la p -ésima coordenada de x , $\alpha_0 = \frac{(\omega_0^T D^2 f(0)(v_0, v_0))}{2(\omega_0^T b)v_{0p}^2}$, es tal que el sistema en lazo cerrado experimenta la bifurcación trinche, y la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x}_1 = \omega_0^T b l_1 \mu x_1 + (\omega_0^T b l_2 + c_0) x_1^3 + \dots.$$

donde $x_1 = \omega_0^T x$.

Resumimos los lemas anteriores en el siguiente resultado:

Teorema 7. *Considere el sistema de control*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

donde $x_0 = 0$ satisface las condiciones dadas en (4.2). Sean v_0 y ω_0 vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de $A = Df(0)$ asociados a $\lambda_1 = 0$. Sea $b = g(0)$. Supongamos que $\omega_0^T b \neq 0$, entonces

(i) *La ley de control*

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1 \mu + l_2 x_p^2,$$

donde x_p es la p -ésima coordenada de x , es tal que el sistema en lazo cerrado experimenta la bifurcación silla-nodo, y la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x}_1 = \omega_0^T b l_1 \mu + \frac{1}{2} (a + 2\omega_0^T b v_{0p}^2 l_2) x_1^2 + \dots,$$

donde $x_1 = \omega_0^T x$ y $a = \omega_0^T D^2 f(0)(v_0, v_0)$.

(ii) *La ley de control*

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1 \mu x_p + l_2 x_p^2,$$

donde x_p es la p -ésima coordenada de x , es tal que el sistema en lazo cerrado experimenta la bifurcación transcítica, y la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x}_1 = \omega_0^T b l_1 \mu x_1 + \frac{1}{2} (a + 2\omega_0^T b v_{0p} l_2) x_1^2 + \dots.$$

(iii) *La ley de control*

$$u(x, \mu, \gamma) = l_1 \mu x_p - \alpha_0 x_p^2 + l_2 x_p^3,$$

donde x_p es la p -ésima coordenada de x , $\alpha_0 = \frac{(\omega_0^T D^2 f(0)(v_0, v_0))}{2(\omega_0^T b) v_{0p}^2}$, es tal que el sistema en lazo cerrado sufre la bifurcación trinche, y la dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x}_1 = \omega_0^T b l_1 \mu x_1 + (\omega_0^T b l_2 + c_0) x_1^3 + \dots.$$

En el análisis anterior se trabajó bajo la hipótesis de que $\omega_0^T b \neq 0$, en esta segunda parte analizaremos el caso cuando $\omega_0^T b = 0$.

Considere el sistema (4.16)

$$\dot{x} = (A + bL_1)x + bl\mu + \tilde{f}_2(x) + \tilde{L}_2\mu x + \tilde{f}_3(x) + \dots$$

donde \tilde{L}_2 , $\tilde{f}_2(x)$ y $\tilde{f}_3(x)$ estan dadas por (4.17), (4.18) y (4.19) respectivamente. Sea

$$\omega_0^T b = 0 \tag{4.24}$$

donde $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \bar{b} \end{pmatrix}$ y $L_1^T = (\bar{l}_1 \quad \bar{L}_1)$, $b_1, \bar{l}_1 \in \mathbb{R}$, $\bar{b}, \bar{L}_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Sin pérdida de generalidad, supondremos que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix}$. Sea ω_0 vector propio izquierdo de A , luego, es claro que podemos hacer $\omega_0^T = e_1^T = (1, 0, \dots, 0)$.
Si $\bar{A} = A + bL_1$, entonces

$$\omega_0^T \bar{A} = \omega_0^T A + \omega_0^T b L_1 = 0$$

por lo que ω_0 es también vector propio izquierdo de \bar{A} . Por otro lado, la condición (4.24) implica que $b_1 = 0$ por lo que $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b} \end{pmatrix}$. Además, si hacemos $\bar{L}_1 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b} \end{pmatrix} (\bar{l}_1 \quad 0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{b}\bar{l}_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{b}\bar{l}_1 & J_S \end{pmatrix} \end{aligned}$$

como podemos observar, \bar{A} es una matriz triangular por lo que sus valores propios aparecen en los bloques de la diagonal, observamos que son los mismos que posee la matriz A , por lo que \bar{A} cumple también con las hipótesis del teorema de Sotomayor. Para continuar con el análisis necesitamos conocer también el vector propio derecho de \bar{A} , sea este $\bar{v}_0 = \begin{pmatrix} \bar{v}_{01} \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix}$, con $\bar{v}_{01} \in \mathbb{R}$, $\tilde{v}_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, entonces $\bar{A}\bar{v}_0 = 0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{b}\bar{l}_1 & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_{01} \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b}\bar{l}_1\bar{v}_{01} + J_S\tilde{v}_0 \end{pmatrix} = 0$$

entonces

$$\bar{b}\bar{l}_1\bar{v}_{01} + J_S\tilde{v}_0 = 0 \Rightarrow J_S\tilde{v}_0 = -\bar{v}_{01}\bar{l}_1\bar{b} \Rightarrow \tilde{v}_0 = -\bar{v}_{01}\bar{l}_1J_S^{-1}\bar{b}$$

entonces

$$\bar{v}_0 = \begin{pmatrix} \bar{v}_{01} \\ -\bar{v}_{01}\bar{l}_1J_S^{-1}\bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_{01} \\ \bar{v}_{01}\bar{l}_1\hat{v}_0 \end{pmatrix}$$

donde $\hat{v}_0 = -J_S^{-1}\bar{b}$, como podemos observar, \bar{v}_{01} queda libre, entonces consideremos que $\bar{v}_{01} = 1$, por lo tanto,

$$\bar{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{l}_1\hat{v}_0 \end{pmatrix}.$$

Ya teniendo los vectores propios asociados a los valores propios de \bar{A} , por el teorema de Jordan existe una matriz $\bar{P} = (\bar{v}_0 \quad \bar{P}_0)$ y su inversa $\bar{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_0^T \\ \bar{Q}_0 \end{pmatrix}$ tal que

$$\bar{P}^{-1}\bar{A}\bar{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{J}_S \end{pmatrix}$$

que en nuestro caso, $\bar{J}_S = J_S$.

Ya con estos datos podemos aplicar el teorema de Sotomayor al sistema (4.16) y ver de qué manera actúa la condición (4.24) en la ocurrencia y en el control de las bifurcaciones estacionarias.

Primeramente podemos observar que por la condición (4.24) la bifurcación silla-nodo no puede ocurrir, esto debido a que la primera condición que pide Sotomayor para que ocurra esta bifurcación es que $\omega_0^T bl \neq 0$.

Analicemos ahora las condiciones que pide Sotomayor para la ocurrencia de la bifurcación trancrítica;

- Por hipótesis la primera condición se cumple

$$\omega_0^T bl = 0.$$

- La segunda condición es

$$\bar{r} = \frac{1}{2} \omega_0^T (D^2 f(0) + 2L_1 Dg(0) + 2bQ) (\bar{v}_0, \bar{v}_0) \neq 0$$

entonces

$$\bar{r} = \frac{1}{2} \omega_0^T (D^2 f(0)) (\bar{v}_0, \bar{v}_0) + \omega_0^T (L_1 Dg(0) + bQ) (\bar{v}_0, \bar{v}_0)$$

Analicemos por separado cada uno de los sumandos, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega_0^T (D^2 f(0)) (\bar{v}_0, \bar{v}_0) &= \frac{1}{2} \omega_0^T \begin{pmatrix} \bar{v}_0^T D^2 f_1(0) \bar{v}_0 \\ \bar{v}_0^T D^2 f_2(0) \bar{v}_0 \\ \vdots \\ \bar{v}_0^T D^2 f_n(0) \bar{v}_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\bar{v}_0^T D^2 f_1(0) \bar{v}_0) \end{aligned}$$

ahora, sea

$$D^2 f(0) = \begin{pmatrix} \alpha & c^T \\ d & B \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, $d, c \in \mathbb{R}^{n-1}$, y $B \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, entonces

$$\begin{aligned} \bar{v}_0^T D^2 f_1(0) \bar{v}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & \tilde{v}_0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & c^T \\ d & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha + \tilde{v}_0^T d, c^T + \tilde{v}_0^T B) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha + \tilde{v}_0^T d) + (c^T + \tilde{v}_0^T B) \tilde{v}_0 \\ &= \alpha + \bar{l}_1 \hat{v}_0^T d + (c^T + \bar{l}_1 \hat{v}_0^T B) \bar{l}_1 \hat{v}_0 \\ &= \alpha + \bar{l}_1 (\hat{v}_0^T d + c^T \hat{v}_0) + \bar{l}_1^2 (\hat{v}_0^T B \hat{v}_0). \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2}(\bar{v}_0^T D^2 f_1(0) \bar{v}_0) = \frac{1}{2}\alpha + \bar{l}_1(\frac{1}{2}\hat{v}_0^T d + \frac{1}{2}c^T \hat{v}_0) + \bar{l}_1^2(\frac{1}{2}\hat{v}_0^T B \hat{v}_0) \quad (4.25)$$

Por otro lado, el segundo sumando de \bar{r} es

$$\begin{aligned} \omega_0^T (L_1 Dg(0) + bQ) (\bar{v}_0, \bar{v}_0) &= \omega_0^T \begin{pmatrix} \bar{v}_0^T (L_1 Dg_1(0) + b_1 Q) \bar{v}_0 \\ \bar{v}_0^T (L_1 Dg_2(0) + b_2 Q) \bar{v}_0 \\ \vdots \\ \bar{v}_0^T (L_1 Dg_n(0) + b_n Q) \bar{v}_0 \end{pmatrix} \\ &= \bar{v}_0^T (L_1 Dg_1(0)) \bar{v}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \bar{l}_1 \hat{v}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{l}_1 \\ 0 \end{pmatrix} (Dg_1(0)) \bar{v}_0 \\ &= \bar{l}_1 Dg_1(0) \bar{v}_0. \end{aligned}$$

Sea $Dg_1(0) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_1 & \bar{g}_1 \end{pmatrix}$, por lo tanto

$$\omega_0^T (L_1 Dg(0) + bQ) (\bar{v}_0, \bar{v}_0) = \bar{l}_1 \tilde{g}_1 + \bar{l}_1^2 \bar{g}_1 \hat{v}_0 \quad (4.26)$$

Entonces, sumando (4.25) y (4.26) tenemos que

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\alpha + \bar{l}_1(\frac{1}{2}\hat{v}_0^T d + \frac{1}{2}c^T \hat{v}_0 + \tilde{g}_1) + \bar{l}_1^2(\frac{1}{2}\hat{v}_0^T B \hat{v}_0 + \bar{g}_1 \hat{v}_0).$$

donde

$$Dg_1(0) = (\tilde{g}_1 \quad \bar{g}_1)$$

Sea

$$\tilde{a} = \frac{1}{2}\hat{v}_0^T d + \frac{1}{2}c^T \hat{v}_0 + \tilde{g}_1 \quad (4.27)$$

$$\tilde{b} = \frac{1}{2}\hat{v}_0^T B \hat{v}_0 + \bar{g}_1 \hat{v}_0 \quad (4.28)$$

entonces

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\alpha + \tilde{a}\bar{l}_1 + \tilde{b}\bar{l}_1^2 \quad (4.29)$$

Como podemos observar tenemos una cuadrática en la variable de control, por lo que el siguiente lema nos dá la posibilidad de controlar tanto que se cumpla la condición como el signo de \bar{r} .

Lema 13. *Considere la expresión (4.29), si*

$$\tilde{a}^2 - 4\alpha\tilde{b} > 0 \quad (4.30)$$

entonces, existen \hat{l}_1 y \tilde{l}_1 tal que $\tilde{r}(\hat{l}_1)\tilde{r}(\tilde{l}_1) < 0$.

Demostración. Supongamos que se cumple (4.30), entonces, si $\tilde{b} \neq 0$, (4.29) es una parábola con dos raíces reales y si $\tilde{b} = 0$ entonces $\tilde{a} \neq 0$ y por lo tanto tenemos una recta que intersecta al eje l_1 , por lo que existen \hat{l}_1 y \tilde{l}_1 .



- La tercera condición para que ocurra la bifurcación transcritica es

$$\begin{aligned} & [\omega_0^T ((D^2 f(0) + 2L_1 Dg(0) + 2bQ)(\bar{v}_0, \bar{P}_0))] (-J_S^{-1} \bar{Q}_0 b l) \\ & + \omega_0^T (Dg(0)l + bL_2^T) \bar{v}_0 \neq 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Haremos un análisis de esta condición con la finalidad de simplificarla y luego ver la forma en que podemos manipularla para tener su control. Entonces

$$\begin{aligned} & [\omega_0^T (\bar{v}_0^T (D^2 f(0) + 2L_1 Dg(0) + 2bQ) \bar{P}_0)] (-J_S^{-1} \bar{Q}_0 b l) \\ & + \omega_0^T (Dg(0)l + bL_2^T) \bar{v}_0 \\ = & [\omega_0^T (\bar{v}_0^T (D^2 f(0) + 2L_1 Dg(0)) \bar{P}_0 + \bar{v}_0^T (2bQ) \bar{P}_0)] (-J_S^{-1} \bar{Q}_0 b l) \\ & + \omega_0^T (Dg(0)l + bL_2^T) \bar{v}_0 \\ = & [\omega_0^T (\bar{v}_0^T (D^2 f(0) + 2L_1 Dg(0)) \bar{P}_0)] (-J_S^{-1} \bar{Q}_0 b l) + l Dg_1(0) \bar{v}_0 \end{aligned}$$

se llegó a la última igualdad vía los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \omega_0^T (\bar{v}_0^T (2bQ) \bar{P}_0) &= 2\omega_0^T \begin{pmatrix} \bar{v}_0^T (b_1 Q) \bar{P}_0 \\ \bar{v}_0^T (b_2 Q) \bar{P}_0 \\ \vdots \\ \bar{v}_0^T (b_n Q) \bar{P}_0 \end{pmatrix} = 2\omega_0^T \begin{pmatrix} b_1 \bar{v}_0^T Q \bar{P}_0 \\ b_2 \bar{v}_0^T Q \bar{P}_0 \\ \vdots \\ b_n \bar{v}_0^T Q \bar{P}_0 \end{pmatrix} \\ &= 2\omega_0^T b \bar{v}_0^T Q \bar{P}_0 = 0 \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \omega_0^T (Dg(0)l + bL_2^T) \bar{v}_0 &= \omega_0^T \begin{pmatrix} Dg_1(0)l + 0 \\ Dg_2(0)l + b_2 L_2^T \\ \vdots \\ Dg_n(0)l + b_n L_2^T \end{pmatrix} \bar{v}_0 \\ &= l \begin{pmatrix} \tilde{g}_1 & \bar{g}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \\ &= l(\tilde{g}_1 + \bar{g}_1 \tilde{v}_0) \\ &= l(\tilde{g}_1 + \bar{l}_1 \bar{g}_1 \hat{v}_0) \\ &= l Dg_1(0) \bar{v}_0 \end{aligned}$$

de esta manera, la tercera condición queda de la siguiente manera:

$$\bar{s} = \tilde{s}l$$

donde

$$\tilde{s} = [\omega_0^T (\bar{v}_0^T (D^2 f(0) + 2L_1 Dg(0)) \bar{P}_0)] (-J_S^{-1} \bar{Q}_0 b) + Dg_1(0) \bar{v}_0 \quad (4.32)$$

para hacer más simple la expresión para \tilde{s} haremos lo siguiente. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{P}^{-1} \bar{A} \bar{P} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix} \\ \bar{P}^{-1} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix} \bar{P}^{-1} \\ \begin{pmatrix} \omega_0^T \\ \bar{Q}_0 \end{pmatrix} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0^T \\ \bar{Q}_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \omega_0^T \bar{A} \\ \bar{Q}_0 \bar{A} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ J_S \bar{Q}_0 \end{pmatrix} \\ \bar{Q}_0 \bar{A} &= J_S \bar{Q}_0 \end{aligned}$$

multiplicando por la izquierda la expresión anterior por J_S^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} \bar{Q}_0 &= J_S^{-1} \bar{Q}_0 \bar{A} \\ &= J_S^{-1} \bar{Q}_0 (A + bL_1^T) \end{aligned}$$

ahora, multiplicando esta expresión por la izquierda por \bar{P}_0 tenemos

$$\bar{P}_0 \bar{Q}_0 = (\bar{P}_0 J_S^{-1} \bar{Q}_0) A + (\bar{P}_0 J_S^{-1} \bar{Q}_0 b) L_1^T \quad (4.33)$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{P} \bar{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} \bar{v}_0 & \bar{P}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0^T \\ \bar{Q}_0 \end{pmatrix} \\ I_n &= \bar{v}_0 \omega_0^T + \bar{P}_0 \bar{Q}_0 \\ &= \begin{pmatrix} \bar{v}_0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} + \bar{P}_0 \bar{Q}_0 \end{aligned}$$

entonces,

$$\bar{P}_0 \bar{Q}_0 = I - \begin{pmatrix} \bar{v}_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - \bar{v}_0 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

igualando las expresiones (4.33) y (4.34) tenemos

$$(\bar{P}_0 J_S^{-1} \bar{Q}_0) A + (\bar{P}_0 J_S^{-1} \bar{Q}_0 b) L_1^T = \begin{pmatrix} e_1 - \bar{v}_0 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Nos interesa trabajar con la primera columna de cada una de las matrices de la igualdad (4.35), por tal motivo ubicaremos la primer columna de las matrices de ambos lados de la igualdad, iniciamos con el lado izquierdo de (4.35), entonces

$$(\bar{P}_0 J_S^{-1} \bar{Q}_0) \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{P}_0 J_S^{-1} \bar{Q}_0 \end{pmatrix}$$

podemos observar que la primer columna es cero, ahora analicemos el segundo sumando del lado izquierdo, entonces

$$(\bar{P}_0 J_S^{-1} \bar{Q}_0 b) \begin{pmatrix} \bar{l}_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{l}_1 \bar{P}_0 J_S^{-1} \bar{Q}_0 b & 0 \end{pmatrix}$$

Ya teniendo la primera columna de las matrices identificadas las igualamos y tenemos lo siguiente

$$\bar{P}_0 J_S^{-1} \bar{Q}_0 b = \frac{1}{\bar{l}_1} (e_1 - \bar{v}_0) \quad (4.36)$$

Sustituyendo (4.36) en la expresión (4.32) tenemos que

$$\tilde{s} = \left[\omega_0^T \left(\bar{v}_0^T (D^2 f(0) + 2L_1 Dg(0)) \frac{1}{\bar{l}_1} (e_1 - \bar{v}_0) \right) \right] + Dg_1(0) \bar{v}_0 \neq 0$$

Con la finalidad de simplificar \tilde{s} , hacemos el siguiente desarrollo del primer sumando de la expresión anterior. Tenemos

$$\begin{aligned} & \omega_0^T \left(\bar{v}_0^T (D^2 f(0) + 2L_1 Dg(0)) \frac{1}{\bar{l}_1} (e_1 - \bar{v}_0) \right) \\ &= \bar{v}_0^T (D^2 f_1(0) + 2L_1 Dg_1(0)) \frac{1}{\bar{l}_1} (e_1 - \bar{v}_0) \\ &= \bar{v}_0^T (D^2 f_1(0) + 2L_1 Dg_1(0)) \frac{1}{\bar{l}_1} (e_1) - \frac{1}{\bar{l}_1} \bar{v}_0^T (D^2 f_1(0) + 2L_1 Dg_1(0)) \bar{v}_0 \\ &= \frac{1}{\bar{l}_1} \begin{pmatrix} 1 & \bar{v}_0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & c^T \\ d & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\bar{v}_0^T L_1 \begin{pmatrix} \tilde{g}_1 & \bar{g}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\bar{l}_1} \bar{r} \\ &= \frac{1}{\bar{l}_1} \begin{pmatrix} \alpha + \tilde{v}_0^T d & c^T \tilde{v}_0^T B \end{pmatrix} + 2\tilde{g}_1 - \frac{1}{\bar{l}_1} \bar{r} \\ &= \frac{1}{\bar{l}_1} (\alpha + \tilde{v}_0^T d) + 2\tilde{g}_1 - \frac{1}{\bar{l}_1} \bar{r} \\ &= \frac{1}{\bar{l}_1} \alpha_1 + \hat{v}_0^T d + 2\tilde{g}_1 - \frac{1}{\bar{l}_1} \tilde{r} \end{aligned}$$

Entonces

$$\tilde{s} = Dg_1(0) \bar{v}_0 - \frac{1}{\bar{l}_1} \alpha - \hat{v}_0^T d - 2\tilde{g}_1 + \frac{1}{\bar{l}_1} \bar{r}$$

Ahora, sustituyendo (4.29) en la expresión anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= Dg_1(0) \bar{v}_0 - \frac{1}{\bar{l}_1} \alpha - \hat{v}_0^T d - 2\tilde{g}_1 \\ &\quad + \frac{1}{\bar{l}_1} \left(\frac{1}{2} \alpha + \bar{l}_1 \left(\frac{1}{2} \hat{v}_0^T d + \frac{1}{2} c^T \hat{v}_0 + 2\tilde{g}_1 \right) + \bar{l}_1^2 \left(\frac{1}{2} \hat{v}_0^T B \hat{v}_0 + 2\bar{g}_1 \hat{v}_0 \right) \right) \\ &= \tilde{g}_1 + \bar{l}_1 \bar{g}_1 \hat{v}_0 - \frac{1}{\bar{l}_1} \alpha - \hat{v}_0^T d - 2\tilde{g}_1 + \frac{1}{2\bar{l}_1} \alpha_1 + \frac{1}{2} \hat{v}_0^T d \\ &\quad + \frac{1}{2} c^T \hat{v}_0 + 2\tilde{g}_1 + \frac{1}{2} \bar{l}_1 \hat{v}_0^T B \hat{v}_0 + 2\bar{l}_1 \bar{g}_1 \hat{v}_0 \\ &= \tilde{g}_1 + 3\bar{l}_1 \bar{g}_1 \hat{v}_0 - \frac{1}{2\bar{l}_1} \alpha_1 - \frac{1}{2} \hat{v}_0^T d + \frac{1}{2} c^T \hat{v}_0 + \frac{1}{2} \bar{l}_1 \hat{v}_0^T B \hat{v}_0 \end{aligned}$$

entonces

$$\tilde{s} = \tilde{g}_1 - \frac{1}{2}\hat{v}_0^T d + \frac{1}{2}c^T \hat{v}_0 - \frac{1}{2\bar{l}_1}\alpha + \bar{l}_1(3\bar{g}_1\hat{v}_0 + \frac{1}{2}\hat{v}_0^T B\hat{v}_0) \quad (4.37)$$

Por lo que, la condición (4.31) se reduce a

$$\tilde{s}l \neq 0$$

y por lo tanto, si $\tilde{s} \neq 0$ entonces la condición (4.31) se satisface y la variable de control l nos permite controlar el signo de esta condición.

De esta manera podemos concluir que si se cumplen las restricciones (4.30) y $\tilde{s} \neq 0$, bajo la hipótesis (4.24) y con la ley de control dada por

$$u(x, \mu) = l\mu + l_1x_1$$

el sistema (4.16) experimenta la bifurcación transcítica y tenemos la posibilidad de controlarla.

Ya teniendo la ley de control, analizaremos la dinámica sobre la variedad central del sistema (4.16), el cual, al momento de cerrar el lazo, para este caso queda de la siguiente manera:

$$\dot{x} = (A + bL_1)x + bl\mu + \frac{1}{2}(D^2f(0) + 2L_1^T Dg(0))(x, x) + lDg(0)\mu x + \dots$$

La dinámica de un sistema parametrizado que cumple con las hipótesis del teorema de Sotomayor está dada por (3.5), supongamos que x_1 es la variable que se relaciona con el eigenspacio central, entonces al aplicarla a nuestro sistema tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{2}\omega_0^T [(D^2f(0) + 2L_1 Dg(0))(\bar{v}_0, \bar{v}_0)] x_1^2 \\ &\quad + [\omega_0^T ((D^2f(0) + 2L_1 Dg(0))(\bar{v}_0, \bar{P}_0))] (-J_s^{-1}\bar{Q}_0 bl) + (\omega_0^T (Dg(0)l)\bar{v}_0) \mu x_1 + \dots \end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{x}_1 = \bar{r}x_1^2 + \tilde{s}l\mu x + \dots \quad (4.38)$$

El desarrollo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema 8. *Considere el sistema parametrizado (4.16)*

$$\dot{x} = (A + bL_1^T)x + bl\mu + \tilde{f}_2(x) + \tilde{L}_2\mu x + \tilde{f}_3(x) + \dots$$

Sea $\omega_0^T b = 0$. Si

$$\begin{aligned} \tilde{s} &\neq 0 \\ \tilde{a}^2 - 4\alpha_1\tilde{b} &> 0 \end{aligned}$$

donde \tilde{s} es dado por (4.37)

$$\tilde{s} = \tilde{g}_1 - \frac{1}{2}\hat{v}_0^T d + \frac{1}{2}c^T \hat{v}_0 - \frac{1}{2\bar{l}_1}\alpha + \bar{l}_1(3\bar{g}_1\hat{v}_0 + \frac{1}{2}\hat{v}_0^T B\hat{v}_0),$$

\tilde{a} y \tilde{b} estan dados por (4.27) y (4.28) respectivamente

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \frac{1}{2}\hat{v}_0^T d + \frac{1}{2}c^T \hat{v}_0 + \tilde{g}_1 \\ \tilde{b} &= \frac{1}{2}\hat{v}_0^T B \hat{v}_0 + \tilde{g}_1 \hat{v}_0\end{aligned}$$

Entonces, con la ley de control dada por

$$u(x, \mu) = l\mu + \bar{l}_1 x_1$$

el sistema (4.16) experimenta la bifurcación trancrítica y la dinámica del sistema sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x}_1 = \bar{r}x_1^2 + \tilde{s}l\mu x + \dots$$

donde \bar{r} está dado por (4.29)

Ahora haremos el análisis para la bifurcación trinche, las condiciones dadas por el teorema de Sotomayor para que ocurra esta bifurcación son:

- Por la hipótesis (4.24) se cumple la condición

$$\omega_0^T b l = 0$$

- La segunda condición es:

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\omega_0^T (D^2 f(0) + 2L_1 Dg(0) + 2bQ) (\bar{v}_0, \bar{v}_0) = 0$$

donde, como sabemos,

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\alpha + \tilde{a}\bar{l}_1 + \tilde{b}\bar{l}_1^2$$

con

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \frac{1}{2}\hat{v}_0^T d + \frac{1}{2}c^T \hat{v}_0 + \tilde{g}_1 \text{ y} \\ \tilde{b} &= \frac{1}{2}\hat{v}_0^T B \hat{v}_0 + \tilde{g}_1 \hat{v}_0\end{aligned}$$

entonces, el *lema* 10 nos dá la restricción sobre las variables de control que nos permite controlar la ocurrencia de esta condición.

- La tercera condición es:

$$\tilde{s}l = \left(\tilde{g}_1 - \frac{1}{2}\hat{v}_0^T d + \frac{1}{2}c^T \hat{v}_0 - \frac{1}{2\bar{l}_1}\alpha + \bar{l}_1(3\tilde{g}_1 \hat{v}_0 + \frac{1}{2}\hat{v}_0^T B \hat{v}_0) \right) l \neq 0$$

entonces, si $\tilde{s} \neq 0$, se satisface esta condición y tenemos control sobre el signo de la misma.

- La cuarta y última condición para que ocurra la bifurcación trinche es:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} [\omega_0^T (D^3 f(0) + 3\mathcal{L} + \mathcal{M} + 6\mathcal{N})(\bar{v}_0, \bar{v}_0, \bar{v}_0)] \\
& - \frac{1}{2} [\omega_0^T (D^2 f(0) + 2L_1 Dg(0) + 2bQ)(\bar{v}_0, \bar{P}_0)(J_S^{-1})] \\
& [\bar{Q}_0 (D^2 f(0) + 2L_1 Dg(0) + 2bQ)(\bar{v}_0, \bar{v}_0)] \neq 0
\end{aligned} \tag{4.39}$$

En esta expresión, el segundo término que depende de L_1 ya está fijo debido a que L_1 ya lo utilizamos para que se cumplieran las condiciones anteriores así como también $3\mathcal{L}$ que también depende de L_1 , el término que nos dará el control sobre esta condición será \mathcal{M} .

Entonces, sabiendo por (4.14) que

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathcal{M}_n \end{pmatrix}$$

y que

$$\mathcal{M}_i(\bar{v}_0, \bar{v}_0, \bar{v}_0) = \bar{v}_0^T \begin{pmatrix} \bar{v}_0^T (Dg_i(0))^T q_1^T \bar{v}_0 \\ \bar{v}_0^T (Dg_i(0))^T q_2^T \bar{v}_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{v}_0^T (Dg_i(0))^T q_n^T \bar{v}_0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \omega_0^T \mathcal{M}(\bar{v}_0, \bar{v}_0, \bar{v}_0) &= \omega_0^T \left(\begin{array}{c} \bar{v}_0^T \begin{pmatrix} \bar{v}_0^T (Dg_1(0))^T q_1^T \bar{v}_0 \\ \bar{v}_0^T (Dg_1(0))^T q_2^T \bar{v}_0 \\ \vdots \\ \bar{v}_0^T (Dg_1(0))^T q_n^T \bar{v}_0 \end{pmatrix} \\ \bar{v}_0^T \begin{pmatrix} \bar{v}_0^T (Dg_2(0))^T q_1^T \bar{v}_0 \\ \bar{v}_0^T (Dg_2(0))^T q_2^T \bar{v}_0 \\ \vdots \\ \bar{v}_0^T (Dg_2(0))^T q_n^T \bar{v}_0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \bar{v}_0^T \begin{pmatrix} \bar{v}_0^T (Dg_n(0))^T q_1^T \bar{v}_0 \\ \bar{v}_0^T (Dg_n(0))^T q_2^T \bar{v}_0 \\ \vdots \\ \bar{v}_0^T (Dg_n(0))^T q_n^T \bar{v}_0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
 &= \bar{v}_0^T \begin{pmatrix} \bar{v}_0^T (Dg_1(0))^T q_1^T \bar{v}_0 \\ \bar{v}_0^T (Dg_1(0))^T q_2^T \bar{v}_0 \\ \vdots \\ \bar{v}_0^T (Dg_1(0))^T q_n^T \bar{v}_0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Considere $q_1^T = (\tilde{q}_1 \ 0)$ y $q_i^T = 0$ para $i = 2, 3, \dots, n$, entonces

$$\begin{aligned}
\omega_0^T \mathcal{M}(\bar{v}_0, \bar{v}_0, \bar{v}_0) &= \bar{v}_0^T \begin{pmatrix} \bar{v}_0^T (Dg_1(0))^T \bar{q}_1^T \bar{v}_0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \bar{v}_0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{g}_1 \\ \bar{g}_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v}_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \bar{v}_0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{g}_1 \tilde{q}_1 & 0 \\ \bar{g}_1^T \tilde{q}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v}_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{g}_1 \tilde{q}_1 + \bar{v}_0^T \bar{g}_1^T \tilde{q}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v}_0 \end{pmatrix} \\
&= \tilde{g}_1 \tilde{q}_1 + \bar{v}_0^T \bar{g}_1^T \tilde{q}_1 \\
&= \tilde{g}_1 \tilde{q}_1 + \bar{g}_1 \bar{v}_0 \tilde{q}_1 \\
&= (\tilde{g}_1 + \bar{g}_1 \bar{v}_0) \tilde{q}_1 \\
&= (Dg_1(0) \bar{v}_0) \tilde{q}_1
\end{aligned}$$

entonces,

$$\omega_0^T \mathcal{M}(\bar{v}_0, \bar{v}_0, \bar{v}_0) = (Dg_1(0) \bar{v}_0) \tilde{q}_1 \quad (4.40)$$

Ahora, la variable de control \tilde{q}_1 es la que nos dará la posibilidad de controlar este término y con ello la condición completa, entonces, para utilizar a \tilde{q}_1 le pediremos al sistema cumpla con la siguiente restricción:

$$Dg_1(0) \bar{v}_0 \neq 0 \quad (4.41)$$

De esta manera tenemos que si $\tilde{s} \neq 0$, donde \tilde{s} está dado por (4.37), y (4.41) se cumplen, bajo la hipótesis (4.24) y con la ley de control dada por

$$u(x, \mu) = l\mu + \bar{l}_1 x_1 + \tilde{q}_1 x_1^2$$

el sistema (4.16) experimenta la bifurcación trinche y es posible controlar el signo de la misma.

Ya teniendo la ley de control, analizaremos la dinámica sobre la variedad central del sistema (4.16), el cual, al momento de cerrar el lazo, para este caso queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (A + bL_1^T)x + bl\mu + \frac{1}{2}(D^2f(0) + 2L_1Dg(0) + 2bQ)(x, x) + lDg(0)\mu x \\
&\quad + \frac{1}{6}(D^3F(0) + 3\mathcal{L} + \mathcal{M})(x, x, x) + \dots
\end{aligned}$$

La dinámica de un sistema parametrizado que cumple con las hipótesis del teorema se Sotomayor está dada por (3.5), supongamos que x_1 es la variable que se relaciona con el eigenspacio central, entonces al aplicarla a nuestro sistema tenemos

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 = & \frac{1}{2}\omega_0^T + [(D^2f(0) + 2L_1Dg(0) + 2bQ)(\bar{v}_0, \bar{v}_0)] x_1^2 \\ & + [\omega_0^T ((D^2f(0) + 2L_1Dg(0) + 2bQ)(\bar{v}_0, \bar{P}_0))] (-J_S^{-1}\bar{Q}_0bl) \\ & + (\omega_0^T(Dg(0)l)\bar{v}_0)\mu x + \frac{1}{6}[\omega_0^T(D^3f(0) + 3\mathcal{L} + \mathcal{M})(\bar{v}_0, \bar{v}_0, \bar{v}_0)] \\ & - \frac{1}{2}[\omega_0^T(D^2f(0) + 2L_1Dg(0) + 2bQ)(\bar{v}_0, \bar{P}_0)(J_S^{-1})] \\ & [\bar{Q}_0(D^2f(0) + 2L_1Dg(0) + 2bQ)(\bar{v}_0, \bar{v}_0)] x_1^3 + \dots\end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{x}_1 = \bar{r}x_1^2 + \tilde{s}l\mu x_1 + (\tilde{k}_0 + Dg_1(0)\bar{v}_0\tilde{q}_1)x_1^3 + \dots \quad (4.42)$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{k}_0 = & \frac{1}{6}[\omega_0^T(D^3f(0) + 3\mathcal{L})(\bar{v}_0, \bar{v}_0, \bar{v}_0)] \\ & - \frac{1}{2}[\omega_0^T(D^2f(0) + 2L_1Dg(0) + 2bQ)(\bar{v}_0, \bar{P}_0)(J_S^{-1})] \\ & [\bar{Q}_0(D^2f(0) + 2L_1Dg(0) + 2bQ)(\bar{v}_0, \bar{v}_0)]\end{aligned}$$

y

$$\frac{1}{6}\mathcal{M}(\bar{v}_0, \bar{v}_0, \bar{v}_0) = Dg_1(0)\bar{v}_0\tilde{q}_1.$$

El desarrollo echo anteriormente se resume en el siguiente teorema.

Teorema 9. *Considere el sistema parametrizado (4.16)*

$$\dot{x} = (A + bL_1^T)x + bl\mu + \tilde{f}_2(x) + \tilde{L}_2\mu x + \tilde{f}_3(x) + \dots$$

Sea $\omega_0^T b = 0$. Si

$$\begin{aligned}\bar{r} &= 0, \\ \tilde{s} &\neq 0, \quad y \\ Dg_1(0)\bar{v}_0 &\neq 0\end{aligned}$$

donde \bar{r} es dado por (4.29)

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\alpha + \tilde{a}\bar{l}_1 + \tilde{b}\bar{l}_1^2,$$

\tilde{s} está dado por (4.37)

$$\tilde{s} = \tilde{g}_1 - \frac{1}{2}\hat{v}_0^T d + \frac{1}{2}c^T \hat{v}_0 - \frac{1}{2\bar{l}_1}\alpha + \bar{l}_1(3\bar{g}_1\hat{v}_0 + \frac{1}{2}\hat{v}_0^T B\hat{v}_0)$$

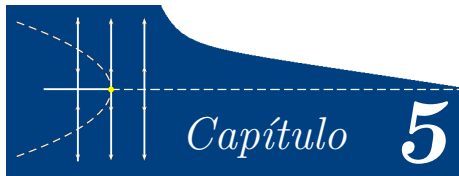
y $Dg_1(0)\bar{v}_0$ está dado por (4.40), \tilde{a} y \tilde{b} estan dados por (4.27) y (4.28) respectivamente.

Entonces, con la ley de control dada por

$$u(x, \mu) = l\mu + \bar{l}_1 x_1 + \tilde{q}_1 x_1^2$$

el sistema (4.16) experimenta la bifurcación trinche y la dinámica del sistema sobre la variedad central está dada por

$$\dot{x}_1 = \tilde{s}l\mu x_1 + (\tilde{k}_0 + Dg_1(0)\bar{v}_0\tilde{q}_1)x_1^3 + \dots$$



Aplicaciones

5.1 El pendubot

En este capítulo aplicaremos los resultados obtenidos en el capítulo anterior a un sistema mecánico subactuado de dos grados de libertad llamado pendubot. Ver figura 5.1.

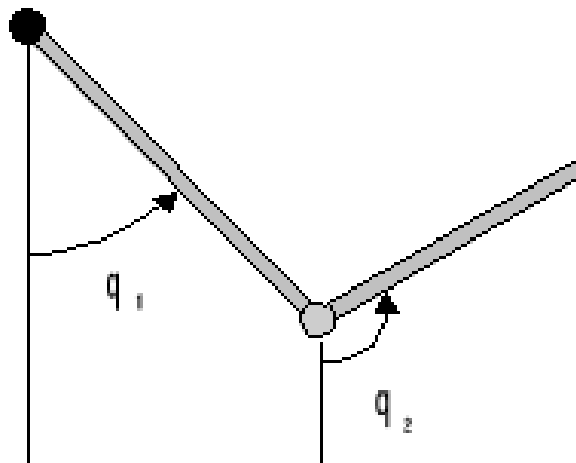


Figura 5.1: Pendubot

5.2 Modelo matemático

Las ecuaciones del movimiento pueden ser expresadas mediante la formulación hamiltoniana. El hamiltoniano asociado al pendubot está dado por la suma de las energías

cinética y potencial del sistema,

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + U(q),$$

donde $q = (q_1, q_2)^T$ y $p = (p_1, p_2)^T$ son las posiciones y los momentos generalizados, respectivamente, $M(q)$ es la matriz de inercias y $U(q)$ es la energía potencial, y están dadas por

$$M(q) = \begin{pmatrix} r_3 & r_5 \cos(q_2 - q_1) \\ r_5 \cos(q_2 - q_1) & r_4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U(q) = r_1(1 - \cos q_1) + r_2(1 - \cos q_2),$$

donde $r_1 = (m_1 l_{c_1} + m_2 \bar{l}_1)g$, $r_2 = m_2 l_{c_2} g$, $r_3 = m_1 l_{c_1}^2 + m_2 \bar{l}_1^2 + I_1$, $r_4 = m_2 l_{c_2}^2 + I_2$, y $r_5 = m_2 \bar{l}_1 l_{c_2}$, donde m_i , \bar{l}_i , l_{c_i} y I_i son la masa, longitud, centro de masa e inercia del eslabón i , respectivamente, y g es la aceleración de la gravedad. No se considera ningún tipo de fricción, y el par aplicado es $\tau = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, el primer eslabón está actuado por u , mientras que el segundo está libre. Entonces las ecuaciones hamiltonianas de movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} + \tau. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Nuestro objetivo es diseñar una ley de control u tal que el sistema (5.1) presente las bifurcaciones estacionarias y sea posible controlarlas, alrededor del punto de equilibrio $(\pi, \pi, 0, 0)^T$, utilizando el Teorema 7.

Si $x = (q, p)^T$, entonces reescribimos (5.1) como

$$\dot{x} = X_H(x) + cu, \quad (5.2)$$

donde $X_H(x) = (\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, -\frac{\partial H}{\partial q_2})$, y $c = (0, 0, 1, 0)^T$. Si $x_0 = (\pi, \pi, 0, 0)^T$, observe que $X_H(x_0) = 0$ y la jacobiana

$$DX_H(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{r_4}{\delta} & -\frac{r_5}{\delta} \\ 0 & 0 & -\frac{r_5}{\delta} & \frac{r_3}{\delta} \\ r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\delta = r_3 r_4 - r_5^2 > 0$, tiene dos valores propios negativos y dos positivos, por lo que no es posible usar el Teorema 7, pues no tenemos un valor propio cero. Sin embargo, obsérvese que al sustituir la ley de control

$u = h(x) + v = s_1(q_1 - \pi) + s_2(q_2 - \pi) + s_3 p_1 + s_4 p_2 + v$, en (5.2) obtenemos

$$\dot{x} = X_H(x) + c(h(x) + v) = F(x) + G(x)v,$$

donde $F(x) = X_H(x) + ch(x)$ y $G(x) = c$. Además, $F(x_0) = 0$, y si $s_1 = -r_1$, $s_2 = \frac{r_2 r_3 + 11\delta}{r_5}$, $s_3 = -6$, y $s_4 = \frac{6(r_2 r_3 + \delta)}{r_2 r_5}$, entonces $A = DF(x_0)$ tiene los valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -2$ y $\lambda_4 = -1$. Después de algunos cálculos, encontramos que los valores propios derecho e izquierdo de A están dados por $v_0 = (1, 0, 0, 0)^T$ y $\omega_0 = (1, \frac{r_2 + r_4}{r_5}, -\frac{r_2}{6\delta}, \frac{r_2 r_3 + 11\delta}{6r_5 \delta})$, respectivamente, entonces $\omega_0^T G(x_0) = -\frac{r_2}{6\delta} \neq 0$, por lo tanto, del teorema 7, concluimos que es posible controlar las tres bifurcaciones estacionarias.

5.3 Control de bifurcaciones

En esta sección seguiremos el teorema 7 para diseñar leyes de control que nos permitan provocar las bifurcaciones estacionarias en el pendubot. Obsérvese que $a = \frac{1}{2}r_0 D^2 F(x_0)(v_0, v_0) = 0$.

5.3.1 Control de la bifurcación silla-nodo

La ley de control

$$u = s_1(q_1 - \pi) + s_2(q_2 - \pi) + s_3 p_1 + s_4 p_2 + l_1 \mu + l_2 (q_1 - \pi)^2, \quad (5.3)$$

es tal que el sistema en lazo cerrado (5.1)-(5.3) experimenta la bifurcación silla-nodo. La figura 5.2 nos muestra el diagrama de bifurcación para los parámetros de control $l_1 = 1$ y $l_2 = 1$, mientras que las figuras 5.3 y 5.4 muestran algunas simulaciones del sistema.

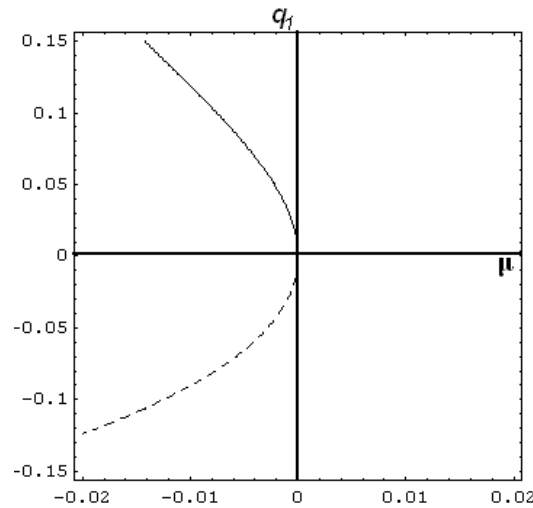


Figura 5.2: Bifurcación silla-nodo. $l_1 = 1$, $l_2 = 1$.

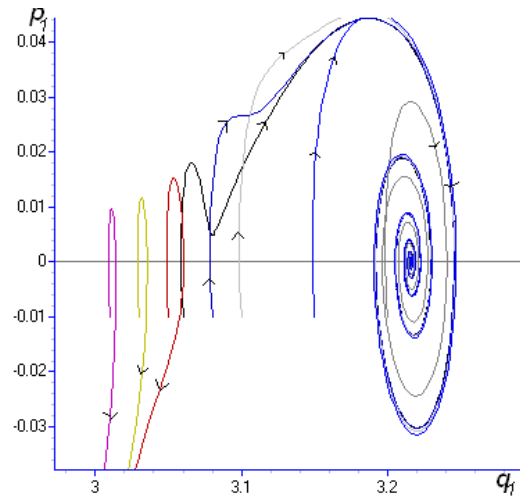


Figura 5.3: Dinámica del sistema en lazo cerrado (5.1)-(5.3) para $\mu = -0.01$.

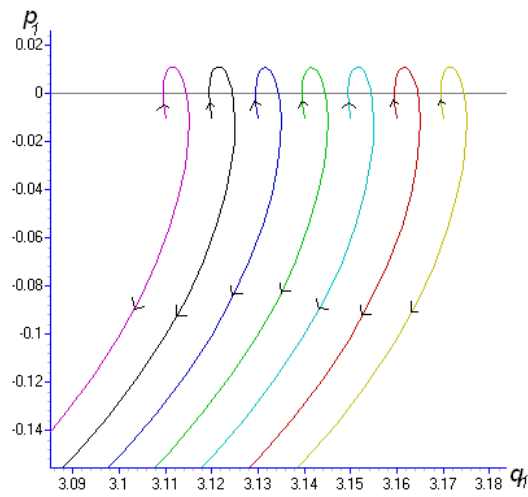


Figura 5.4: Dinámica del sistema en lazo cerrado (5.1)-(5.3) para $\mu = 0.01$.

Observación 3. En [9] se estudia el control de bifurcaciones estacionarias en el pendubot, encontrándose, por ejemplo, que la ley de control

$$u = s_1(q_1 - \pi) + s_2(q_2 - \pi) + s_3p_1 + s_4p_2 + l_1\mu + l_2 \left((q_1 - \pi) + \frac{r_2 + r_4}{r_5}(q_2 - \pi) - \frac{r_2}{6\delta}p_1 + \frac{r_2r_3 + 11\delta}{6r_5\delta}p_2 \right)^2,$$

permite controlar la bifurcación silla-nodo. Obsérvese la simplificación que se obtiene en nuestra ley de control (5.3) al controlar el mismo sistema.

5.3.2 Control de la bifurcación transcítica

La ley de control

$$u = s_1(q_1 - \pi) + s_2(q_2 - \pi) + s_3p_1 + s_4p_2 + l_1\mu(q_1 - \pi) + l_2(q_1 - \pi)^2, \quad (5.4)$$

es tal que el sistema en lazo cerrado (5.1)-(5.4) experimenta la bifurcación transcítica. La figura 5.5 nos muestra el diagrama de bifurcación para los parámetros de control $l_1 = 1$ y $l_2 = 1$, mientras que las figuras 5.6 y 5.7 muestran algunas simulaciones del sistema.

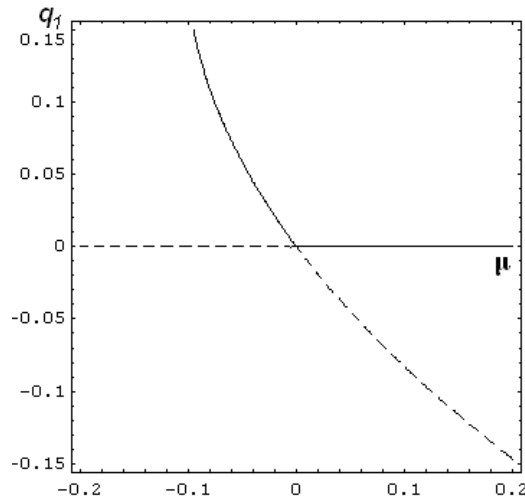


Figura 5.5: Bifurcación transcítica. $l_1 = 1$, $l_2 = 1$.

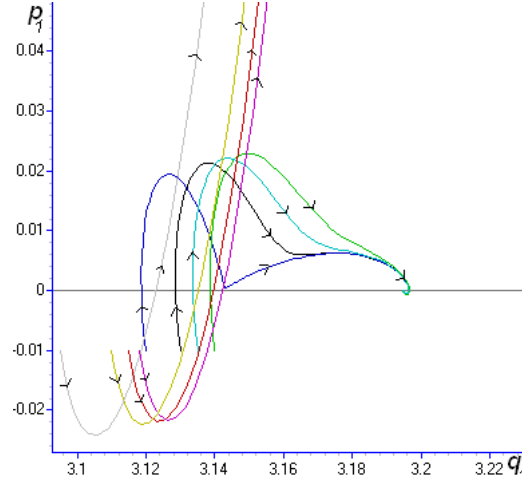


Figura 5.6: Dinámica del sistema en lazo cerrado (5.1)-(5.4) para $\mu = -0.1$.

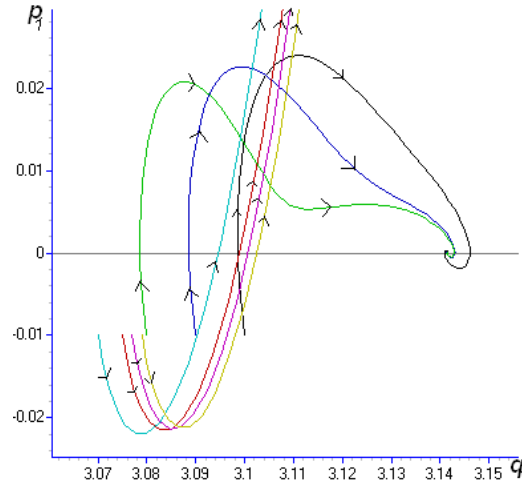


Figura 5.7: Dinámica del sistema en lazo cerrado (5.1)-(5.4) para $\mu = 0.1$.

Observación 4. En [9] se estudia el control de bifurcaciones estacionarias en el pendubot, encontrándose, por ejemplo, que la ley de control

$$\begin{aligned}
 u = & s_1(q_1 - \pi) + s_2(q_2 - \pi) + s_3p_1 + s_4p_2 \\
 & + l_1\mu \left((q_1 - \pi) + \frac{r_2 + r_4}{r_5}(q_2 - \pi) - \frac{r_2}{6\delta}p_1 + \frac{r_2r_3 + 11\delta}{6r_5\delta}p_2 \right) \\
 & + l_2 \left((q_1 - \pi) + \frac{r_2 + r_4}{r_5}(q_2 - \pi) - \frac{r_2}{6\delta}p_1 + \frac{r_2r_3 + 11\delta}{6r_5\delta}p_2 \right)^2,
 \end{aligned}$$

permite controlar la bifurcación transcítica. Obsérvese la simplificación que se obtiene en nuestra ley de control (5.4) al controlar el mismo sistema.

5.3.3 Control de la bifurcación trinche

La ley de control

$$u = s_1(q_1 - \pi) + s_2(q_2 - \pi) + s_3p_1 + s_4p_2 + l_1\mu(q_1 - \pi) + l_2(q_1 - \pi)^3. \quad (5.5)$$

es tal que el sistema en lazo cerrado (5.1)-(5.5) experimenta la bifurcación trinche. La figura 5.8 nos muestra el diagrama de bifurcación para los parámetros de control $l_1 = 1$ y $l_2 = 6$, mientras que las figuras 5.9 y 5.10 muestran algunas simulaciones del sistema.

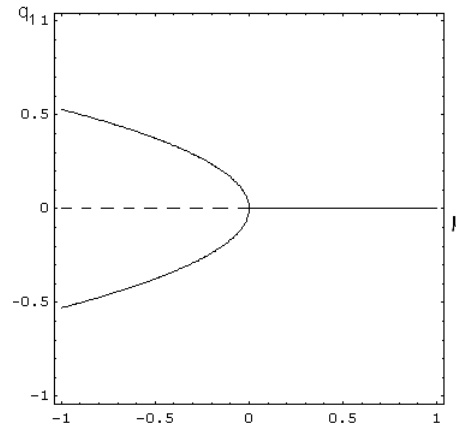


Figura 5.8: Bifurcación trinche. $l_1 = 1$, $l_2 = 6$.

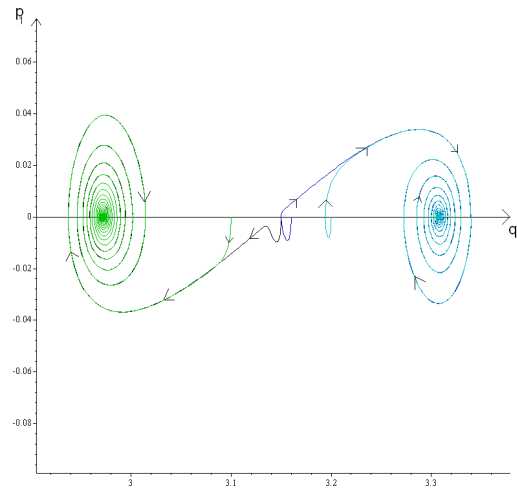


Figura 5.9: Dinámica del sistema en lazo cerrado (5.1)-(5.5) para $\mu = -0.1$.

Observación 5. En [9] se estudia el control de bifurcaciones estacionarias en el

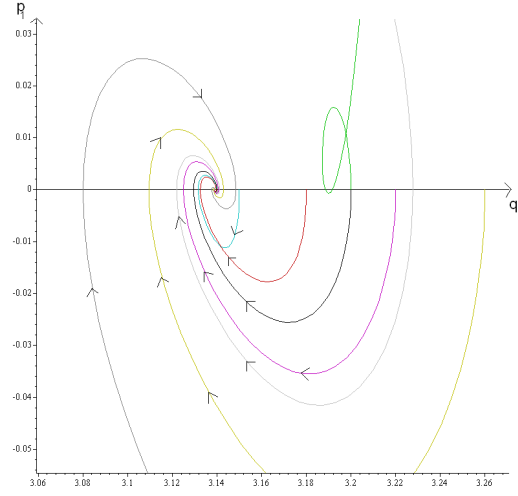
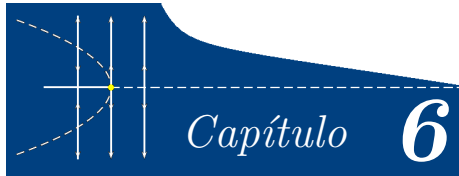


Figura 5.10: Dinámica del sistema en lazo cerrado (5.1)-(5.5) para $\mu = 0.1$.

pendubot, encontrándose, por ejemplo, que la ley de control

$$\begin{aligned}
 u = & s_1(q_1 - \pi) + s_2(q_2 - \pi) + s_3p_1 + s_4p_2 \\
 & + l_1\mu \left((q_1 - \pi) + \frac{r_2 + r_4}{r_5}(q_2 - \pi) - \frac{r_2}{6\delta}p_1 + \frac{r_2r_3 + 11\delta}{6r_5\delta}p_2 \right) \\
 & + l_2 \left((q_1 - \pi) + \frac{r_2 + r_4}{r_5}(q_2 - \pi) - \frac{r_2}{6\delta}p_1 + \frac{r_2r_3 + 11\delta}{6r_5\delta}p_2 \right)^3,
 \end{aligned}$$

permite controlar la bifurcación trinche. Obsérvese la simplificación que se obtiene en nuestra ley de control (5.5) al controlar el mismo sistema.



Conclusiones

En el trabajo presentado previamente, se ha hecho un estudio del control de las bifurcaciones estacionarias en un sistema de control

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

con $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, y $u \in \mathbb{R}$. Para tal estudio, se realizó una generalización del teorema de Sotomayor, demostrándolo para familias m -parametrizadas de ecuaciones diferenciales, y se utilizó dicho resultado para analizar la ocurrencia de las bifurcaciones estacionarias en el sistema de control. Se diseñaron las leyes de control $u(x, \mu, \lambda)$ para el control de cada una de las bifurcaciones estacionarias, silla-nodo, transcítica y trinche. Podemos observar que dichas leyes de control resultan muy simples debido a que para controlar la ocurrencia de las bifurcaciones sólo se necesita uno de los n estados del sistema y se aplican dichos resultados al modelo matemático del pendubot, péndulo subactuado de dos grados de libertad, con la finalidad de corroborar la validez de los resultados presentados, encontrando que, efectivamente, con las leyes de control diseñadas es posible controlar la ocurrencia de cada una de las bifurcaciones estacionarias en dicho modelo.

Bibliografía

- [1] E.H. Abed, J.H. Fu. “Local feedback stabilization and bifurcation control, II. Stationary bifurcation”. *Systems & Control Letters*, 8(1987). 467-473.
- [2] E.H. Abed, H.O. Wang, A. Tesi. “Control of bifurcation and chaos”, in *The Control Handbook*, W.S. Levine, Ed. Boca Raton, FL. CRC Press, 1995. 951-966.
- [3] F. Colonius, L. Grüne (Eds.) “Dynamics, Bifurcations and Control”. Lecture Notes in Control and Information Sciences 273. Springer. 2002.
- [4] G. Chen, D.J. Hill, X. Yu (Eds.) “Bifurcation Control, Theory and Applications”. Lecture Notes in Control and Information Sciences 293. Springer. 2003.
- [5] G. Chen, J.L. Moiola, H.O. Wang. “Bifurcation control: theories, methods, and applications”, *Int. J. Bif. Chaos*, vol. 10, No. 3, 511-548. 2000.
- [6] G. Chen (Ed.) “Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems”. CRC Press, 2000.
- [7] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer. 1998.
- [8] J. Sotomayor. “Generic bifurcation of dynamical system”. In *Dynamical Systems*, M.M. Peixoto (ed.), pp549-560. Academic Press, N.Y. 1973.
- [9] F. Verduzco, E. Frias-Armenta, H. Leyva. “Stationary bifurcation control with applications. ”. *Acta Applicandae Mathematicae*, Aceptado. 2008.
- [10] F. Verduzco. “Control of codimension one stationary bifurcations”. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, Vol. 17, No. 2, pp. 575-582. 2007.
- [11] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics, Vol. 2. Springer-Verlag. 1990.