



---

---

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**  
**Programa de Posgrado en Matemáticas**

**Controlabilidad y el teorema de Brammer**

**T E S I S**

Que para obtener el grado académico de:

**Maestro en Ciencias**  
(Matemáticas)

Presenta:

Jorge Antonio López Rentería

Director de Tesis: Dr. Martín Eduardo Frías Armenta

Hermosillo, Sonora, México,      13 de Enero del 2009



Dr. Álvaro Alvarez Parrilla  
CICESE, Ensenada, Baja California.

Dr. Baltazar Aguirre Hernández  
UAM-IZTAPALAPA, Cd. de México.

SINODALES Dr. Fernando Verduzco González  
UNISON, Hermosillo, Sonora.

MC. Horacio Leyva Castellanos  
UNISON, Hermosillo, Sonora.



UNIVERSIDAD DE SONORA

Acta de Examen de Grado

En la ciudad de Hermosillo, Sonora, México, siendo las 11:00 horas  
del día 13 de Enero del 2009, se reunieron en:

El Auditorio del Departamento de Matemáticas

de la Universidad de Sonora, los señores:

Mc. Horacio Leyva Castellanos, Dr. Martín Eduardo Frías Armenta,

Dr. Baltazar Aguirre Hernández, Dr. Alvaro Alvarez Parrilla,

Dr. Fernando Verduzco González,  
bajo la Presidencia del primero y fungiendo como Secretario el último, para efectuar el  
Examen de Grado a:

Jorge Antonio López Rentería

de: Maestro en Ciencias (Matemáticas)

quien Presentó el Trabajo de Tesis  
"Controlabilidad y el Teorema de Brammer"



EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI GRANDEZA

Acta No. 7

Foja 1


Libro 1

Exp. No. 200202137

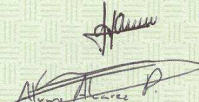
Los sinodales replicaron a 1 sustentante y después de debatir entre sí reservada y  
libremente, 1 o declararon:  
Aprobado por unanimidad

Acto continuo el Presidente del Jurado le hizo saber el resultado de su examen y para  
constancia se levanta la presente, firmando los que intervinieron.

  
Firma del sustentante

  
SECRETARIO

  
PRESIDENTE

  
M. Eduardo Frías A.  
VOCAL





Dr. Fernando Luque Vásquez

Coordinador del Programa de:  
Posgrado en Matemáticas

de la Universidad de Sonora, hace constar que las firmas que anteceden corresponden a los sinodales que intervinieron en el examen que contiene la presente acta.

Hermosillo, Sonora, a 13 de Enero del 2009

  
Dr. Fernando Luque Vásquez  
Coordinador del Programa


  
DIVISIÓN DE CIENCIAS  
EXACTAS Y NATURALES  
COORDINACIÓN  
POSGRADO EN MATEMÁTICAS

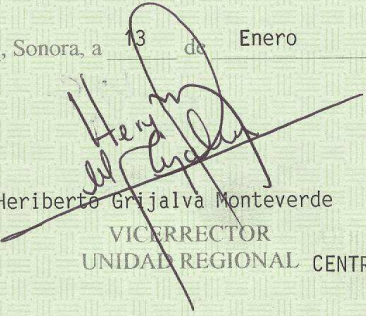
Dr. Heriberto Grijalva Monteverde Vicerrector

de la Unidad Regional Centro de la Universidad de Sonora, hace constar que: Dr. Fernando Luque Vásquez

es a la fecha de expedición d eeste documento, Coordinador del Programa arriba citado y suya la firma que aparece al calce del mismo.

Hermosillo, Sonora, a 13 de Enero del 2009

  
UNIVERSIDAD DE SONORA  
1942  
EL SABER DE MIS HIJOS  
HARA MI GRANDEZA  
UNIDAD REGIONAL  
CENTRO  
VICERRECTORIA

  
Dr. Heriberto Grijalva Monteverde  
VICERRECTOR  
UNIDAD REGIONAL CENTRO

## Agradecimientos

Quiero agradecer a la institución CONACyT por el apoyo que me dio como becario durante mi estancia en el posgrado en matemáticas y en el proyecto “K-comportamiento de las triangulaciones de Whitney de discos y gráficas de sondeo”, con número 79073, a cargo del Dr. Martín Eduardo Frías Armenta. Al Fondo 12918 PIFI para la Consolidación del Cuerpo Académico “Geometría y Sistemas Dinámicos”, por apoyarme como becario durante mi realización del presente trabajo de tesis. También quiero agradecer a la División de Ciencias Exactas y Naturales por apoyarme en el programa de becas de ayudantía.

Quiero presentarle mis agradecimientos a mi director de tesis, al Dr. Martín Eduardo Frías Armenta, que en el transcurso del período de maestría supo dirigirme firmemente para enriquecer mis conocimientos en esta área de matemáticas, y por el enorme apoyo que me brindó como gran amigo que es. Mis agradecimientos también a mis sinodales, el Dr. Fernando Verduzco González, al M.C. Horacio Leyva Castellanos, al Dr. Baltazar Aguirre Hernández y el Dr. Álvaro Alvarez Parrilla, por sus correcciones y críticas que me fueron de gran ayuda, tanto como para la realización de mi tesis como en lo personal. A los que fueron directores del posgrado en matemáticas, al Dr. Rubén Flores Espinoza y el Dr. Fernando Luque Vásquez, por la ayuda que me brindaron a lo largo de la maestría. A todos los maestros que me impartieron su interesante clase, muchas gracias.

Quiero también mostrar mis agradecimientos a mis compañeros del posgrado, Marysol, Jessica, Dalicia, David, Misael, Héctor, Laura, Guadalupe Miguel, Martha Patricia, Adriana, por mencionar algunos con quienes viví la mayor parte de mi tiempo de estudios. Quiero ofrecerle mis agradecimientos a Manuel Ocejo por su valiosa ayuda en la elaboración de este trabajo en el programa  $\text{\LaTeX}$ . A todo el personal académico y administrativo, quienes también me obsequiaron un poco de su valioso tiempo atendiendo mis necesidades.

De manera muy personal, quiero agradecer a toda mi familia, en especial a mi madre Dora Artemiza Renteria, quien ha sido mi gran apoyo moral cuando lo necesito, además de tener una razón de seguir adelante. Al esposo de mi madre, Ramón, por cuidar de ella y así, yo estoy tranquilo. A mi abuelo José Guillermo Renteria, que además de ser siempre mi amigo, es también mi padre y a él le debo todos esos consejos que han hecho evolucionar mi perspectiva de la vida, haciendo de mí un hombre de provecho. A mis hermanos, Ricardo, Brissa, Eloy y Jessica, a mi cuñada Yajaira, esposa de Ricardo; Juliana, esposa de Eloy; Chesua, esposo de Jessica; Mary carmen y Joaquín, hermanos de mi esposa, que de todos ellos también he recibido apoyo moral y ánimos de superación. A mi suegra Mary González, que sus grandes consejos nos han ayudado a mi esposa y a mí en nuestra vida matrimonial. Por último y no menos importante, mis dos razones de ser, mi esposa María de los Ángeles y mi hija Angelita, que gracias a ellas mi vida está llena de felicidad y por ellas, puedo con gusto hacer matemáticas, ya que sin ellas al frente, mi vida fuera sentimentalmente vacía.

A todos aquellos que por descuido no han sido incluidos y estuvieron brindándome su apoyo, mis más sinceras disculpas y mis agradecimientos por todo lo que he recibido de ustedes.





# *Índice general*

<b>1. Álgebra lineal</b>	<b>19</b>
1.1. Polinomios y matrices . . . . .	19
1.2. Vectores propios, valores propios y el polinomio característico . . . . .	21
1.3. Triangulación . . . . .	25
1.4. Descomposición primaria . . . . .	28
1.5. Máximo común divisor y factorización única . . . . .	29
1.6. Aplicación a la descomposición de un espacio . . . . .	32
1.7. La forma normal de Jordan . . . . .	35
<b>2. Ecuaciones diferenciales</b>	<b>45</b>
2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias . . . . .	45
2.2. Sistemas de EDO . . . . .	47
<b>3. Controlabilidad</b>	<b>51</b>
3.1. Controlabilidad . . . . .	51
3.2. El teorema de Brammer . . . . .	58
<b>4. Algunas caracterizaciones de sistemas CCP</b>	<b>71</b>
4.1. Caso real . . . . .	71
4.2. Caso complejo . . . . .	79
<b>5. Teoría de gráficas</b>	<b>93</b>
5.1. Gráficas y subgráficas . . . . .	93
5.2. Conexidad . . . . .	95
5.3. Gráficas dirigidas . . . . .	96
5.4. Búsqueda de valores propios usando técnicas de gráficas . . . . .	99



# Introducción

En el presente trabajo, se hace una revisión principalmente sobre controlabilidad con controles positivos. Particularmente, se presenta una demostración completa del teorema de caracterización de Brammer para sistemas lineales autónomos de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

En el primer capítulo, comenzamos con el espacio de polinomios  $K[t]$ . Sea  $A : V \rightarrow V$  un operador lineal. Existe un polinomio no nulo  $f \in K[t]$  tal que  $f(A) = 0$ . Más aún, existe un vector propio no nulo de  $A$ . Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los  $n$  valores propios distintos de  $A$ , y la multiplicidad algebraica de cada valor propio coincide con su multiplicidad geométrica, entonces es posible encontrar una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de vectores propios, con la cual la matriz asociada con el operador lineal  $A$ , es diagonal. Si la multiplicidad geométrica no coincide con la algebraica, entonces la base está formada de vectores propios generalizados. El subespacio propio  $V_{\lambda_k}$ , es el subespacio de  $V$  generado por los vectores propios asociados a  $\lambda_k$ . El subespacio propio generalizado  $V'_{\lambda_k}$ , es el generado por los vectores propios generalizados asociados a  $\lambda_k$ . Un abanico de  $A$  en  $V$ , es una sucesión de subespacios  $\{V_1, \dots, V_n\}$ , de tal forma que cada  $V_k \subset V_{k+1}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ ; la dimensión de  $V_k$  es  $k$ , y cada  $V_k$  es  $A$  invariante. Una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es de abanico para  $V$ , si  $\{v_1, \dots, v_k\}$  es base de  $V_k$ . Siempre es posible encontrar una base de abanico para  $V$ , si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita sobre los números complejos. Además, la matriz asociada con el operador lineal  $A$ , es una matriz triangular superior. Consecuentemente, tenemos que si  $P(t)$  es el polinomio característico de  $A$ , entonces  $P(A) = 0$  (Teorema de Cayley-Hamilton). Como consecuencia de todo lo anterior, se tiene que si

$$P(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_s)^{m_s}$$

es la factorización del polinomio característico, entonces  $\ker(A - \lambda_k I)^{m_k} = V'_{\lambda_k}$  y

$$V = \bigoplus_{k=1}^s V'_{\lambda_k}.$$

Donde la unión ordenada de las bases de cada subespacio invariante  $V'_{\lambda_k}$ , es una base ordenada para  $V$ , llamada base de Jordan. Luego, con el cambio a la base de Jordan, obtenemos la forma canónica de Jordan.

En el segundo capítulo, definimos los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden  $\dot{x} = Ax$ , para las cuales siempre podemos encontrar una solución de la forma  $x(t) = e^{At}c$ , donde  $c = (c_1, \dots, c_n)$  es un vector constante. Si se presenta el problema con condición inicial  $x(0) = x_0$ , la solución es única y toma la forma  $x(t) = e^{At}x_0$ . Si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  y  $v$  un vector propio

asociado con  $\lambda$ , entonces una solución es de la forma  $x(t) = e^{At}v$ . Más aún, si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son sus distintos valores propios de  $A$  (de multiplicidad uno) con sus respectivos vectores propios  $v_1, \dots, v_n$ , la solución general es de la forma

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t}.$$

Si los valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ,  $s \leq n$ , son tales que  $\lambda_k$  tiene multiplicidad  $m_k \geq 1$ , entonces para cada  $k$ , podemos encontrar  $m_k$  vectores propios generalizados linealmente independientes  $v_{k1}, \dots, v_{km_k}$ , y una solución de la forma

$$e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) v_{kj},$$

donde  $P_{kj}(t)$  son polinomios reales determinados por la multiplicidad geométrica de  $\lambda_k$ . Así que, la solución general es de la forma

$$\sum_{k=1}^s e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) v_{kj}.$$

En el tercer capítulo se trabaja sobre el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$  y  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ .  $x$  es la variable de estado y  $\Omega$  es el conjunto de controles admisibles.  $CH(\Omega)$  es el casco convexo de  $\Omega$ .  $R(t)$  es el conjunto de puntos (estados) que se pueden alcanzar desde un estado inicial  $x_0$  mediante controles admisibles  $u \in \Omega$ , en un intervalo finito de tiempo,  $J : t_0 \leq t \leq t_1$ .  $R(t)$  es compacto, convexo y varía continuamente en  $t_1 > t_0$ . Más aún, si  $\Omega$  se extiende a su casco convexo y  $R_{CH}(t)$  es el conjunto de alcanzabilidad con controles en  $CH(\Omega)$ , entonces  $R_{CH}(t_1) = R(t_1)$ . Consecuentemente, si  $P$  es un punto en  $R(t_1)$ , existe una vecindad  $V$  de  $P$  y  $\delta > 0$  tal que cada  $R(t)$  contiene a  $V$  en su interior, si  $|t_0 - t_1| < \delta$ . Todo esto nos lleva a uno de los resultados más fuertes en teoría de control, se refiere al rango lleno de la matriz de controlabilidad, es decir, el sistema (1) es controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad

$$C(A, B) = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B],$$

tiene rango  $n$ . El sistema (1) es nulo-controlable si existe una vecindad  $V$  del origen, tal que cualquier punto de  $V$  lo podemos dirigir hacia el origen mediante controles admisibles en  $\Omega$ . Si restringimos el conjunto de controles admisibles  $\Omega$  a un cono de  $\mathbb{R}^m$ , con vértice en el origen, decimos que el sistema es positivamente controlable, si es controlable con controles en  $\Omega$ .

El teorema principal sobre controlabilidad positiva, en este trabajo, es el teorema de Brammer. Si existe un control  $u \in \Omega$ , tal que  $Bu = 0$  y  $CH(\Omega) \neq \phi$ , entonces las condiciones necesarias y suficientes para que (1) sea nulo-controlable son

(i)  $\text{rango } C(A, B) = n$

(ii) no exista vector propio  $v$  de  $A^T$  tal que

$$\langle v, Bu \rangle \leq 0, \text{ para toda } u \in \Omega.$$

Como consecuencia tenemos que si  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  es un cono con vértice en el origen con interior distinto del vacío, entonces (i) y (ii) son condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto de alcanzabilidad sea todo  $\mathbb{R}^n$ .

En el cuarto capítulo se presentan algunas caracterizaciones de sistemas con control positivo con la Matriz  $A$  en forma de Jordan ó diagonal por bloques de Jordan, cuyas pruebas se basan en el teorema de Brammer. Si el sistema (1) tiene como matriz  $A$ , un solo bloque de Jordan de tamaño  $n \times n$ , con un sólo valor propio real, de tal forma que su multiplicidad geométrica coincide con la algebraica, entonces el sistema es positivamente controlable con  $n + 1$  controles si y sólo si,  $B$  tiene rango  $n$  y existe una columna  $b_k$  de  $B$  tal que

$$b_k = \sum_{j=1, j \neq k}^{n+1} c_j b_j, \text{ con } c_j < 0.$$

De hecho, no es positivamente controlable con  $n$  o menos controles.

Si (1) tiene a la matriz  $A$  como un solo bloque de Jordan de tamaño  $n \times n$ , con un valor propio real tal que su multiplicidad geométrica es igual a uno, entonces el sistema es positivamente controlable si y sólo si, en el último renglón de  $B$  hay dos entradas distintas de signos opuestos. Más aún, solo se necesitan dos controles para su controlabilidad.

Si la matriz  $A$  del sistema (1) es un solo bloque de Jordan de tamaño  $n \times n$ , con  $n$  valores propios reales distintos, entonces el sistema es controlable con control positivo si sólo si, en cada renglón de  $B$  hay dos entradas de signos opuestos.

Para el caso complejo, la matriz  $A$  del sistema (1) es una matriz real de tamaño  $2n \times 2n$ , como un solo bloque de Jordan de la forma

$$A_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (2)$$

la cual tiene como valores propios complejos  $\lambda = \alpha \pm \beta i$ , de multiplicidad  $n$  cada uno. La complejificación de  $A$ , está definida como la matriz compleja de tamaño  $n \times n$

$$A_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \alpha - i\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha - i\beta \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, la complejificación para un vector real  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_{2n-1}, b_{2n})^T$ , se define como el vector complejo en  $\mathbb{C}^n$

$$b_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} b_1 + ib_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} + ib_{2n} \end{bmatrix}.$$

Entonces el sistema (1) es controlable con control positivo si y sólo si  $\langle B_{\mathbb{C}} \rangle = \mathbb{C}^n$ .

En el quinto capítulo, tratamos un método para encontrar valores propios de matrices de gran tamaño.  $A$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  y  $G(A)$  la gráfica dirigida asociada a  $A$ .  $A_1, \dots, A_r$  son las submatrices de  $A$  asociadas a las componentes cíclicas fuertes de  $G(A)$ , entonces el conjunto

de valores propios de  $A$ , es igual a la unión de los conjuntos de valores propios de  $A_1, \dots, A_r$ , incluyendo multiplicidad. Algunas veces, las submatrices asociadas a las componentes cíclicas, no tienen sus componentes agrupadas en un solo bloque dentro de  $A$ . En este caso, tenemos que separar las componentes cíclicas de las acíclicas (aunque algunas veces una componente acíclica se puede combinar con una cíclica para formar un ciclo más grande). El primer paso es convertir a la matriz  $A$  en su forma booleana, denotada por  $A_B$ , reemplazando todas sus entradas distintas de cero por el número 1, y las entradas cero se mantienen igual a cero. Lo siguiente es encontrar una matriz  $P$  tal que la matriz  $A_B$  sea similar a  $P^{-1}A_BP$ . En nuestro caso, la matriz  $P$  es una matriz de permutación, cuya inversa  $P' = P^T$  coincide con  $P^{-1}$ . Luego, se identifican las componentes cíclicas de  $P'A_BP$  y se separan los respectivos bloques. Se realiza la transformación  $P'AP$  y se separan sus bloques como los de  $P'A_BP$ . Tales bloques con las submatrices  $A_1, \dots, A_r$ . Para encontrar la matriz de similaridad  $P$ , calculamos primero la matriz de alcanzabilidad  $R$  de la digráfica  $G(A)$  como

$$R = A_B^0 \vee A_B^1 \vee \dots \vee A_B^{n-1},$$

donde  $A_B^j = A_B \vee \wedge A_B \vee \wedge A_B \vee \wedge \dots \vee \wedge A_B$ . Enseguida, se calcula la transpuesta de la negación booleana de  $R$ ,  $\overline{R}'$ , y se realiza la multiplicación  $R \wedge \overline{R}'$ . Una vez realizado estas operaciones, realizamos el siguiente algoritmo:

- (1) Suma aritméticamente las entradas de cada columna de  $R \wedge \overline{R}'$ .
- (2) Para formar el vector de posiciones  $V$ , ordena de izquierda a derecha los números de la suma, de mayor a menor.
- (3) Agrupa las posiciones que tengan el mismo valor.
- (4) Repita (2) y (3) hasta agotar las posiciones.

y la matriz resultante es la matriz de permutación  $P$ .



# Introduction

In this work, we principally deal about controllability with positive controllers. Particulary, we present a complete proff of the Brammer's theorem for linear autonomous systems in the form

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

In the first chapter, we begin with the polynomials space  $K[t]$ . Let  $A : V \rightarrow V$  be a linear transformation. There exists a nonzero polynomial  $f \in K[t]$  such that  $f(A) = 0$ . Moreover, there exists a non zero eigenvector of  $A$ . If  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  are the  $n$  distinct eigenvalues of  $A$ , and the each one eigenvalue algebraic multiplicity is equal to the geometric multiplicity, then there exists an eigenvectors base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  which the matrix associated with  $A$  is a diagonal matrix. If the geometric multiplicity no matches the algebraic, then the base is composed by generalized eigenvectors. The eigenspace  $V_{\lambda_k}$  is the subspace of  $V$  generated by eigenvectors, and the generalized eigenspace  $V'_\lambda$  is generated by generalized eigenvectors determined by  $\lambda$ .

A fan of  $A$  on  $V$  is a subspace sequence  $\{V_1, \dots, V_n\}$ , satisfying  $V_k \subset V_{k+1}$ , for all  $k = 1, \dots, n-1$ ; the rank of  $V_k$  is  $k$ ; and every subspace  $V_k$  is  $A$ -invariant. A base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  is a fan base for  $V$  if  $\{v_1, \dots, v_k\}$  is a base for  $V_k$ . We ever can find a fan base for a vector space  $V$  over the complex numbers. Furthermore, the associated matrix with  $A$  is an upper triangular matrix. Consequently, if  $P(t)$  is the characteristic polynomial of  $A$ , then we get the Hamilton-Cayley's Theorem, i. e.,  $P(A) = 0$ .

As a consequence, if the factorization of the characteristic polynomial  $P(t)$  is given by

$$P(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_s)^{m_s},$$

then

$$\ker(A - \lambda_k I)^{m_k} = V'_{\lambda_k},$$

and

$$V = \bigoplus_{k=1}^s V'_{\lambda_k}.$$

Therefore, the ordered bases junction of the eigenspaces  $V'_{\lambda_k}$  is a ordered base for  $V$  called Jordan base. Thus, by changing of base we obtain the Jordan canonic form.

In second chapter, we define the ordinary (linear) diferential equations systems

$$\dot{x} = Ax,$$

which we ever can find a solution in the form  $x(t) = e^{At} \cdot c$ , where  $c = (c_1, \dots, c_n)^T$  is a constant vector. If is presented the bounded problem with bounded value  $x(0) = x_0$ , the solution is uniquely determined and takes the form  $x(t) = e^{At}x_0$ .  $\lambda$  is an eigenvalue of  $A$  and  $v$  an eigenvector determined by  $\lambda$ , then a solution is in the form  $x(t) = e^{At}v$ . Moreover, if  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  are the distinct (with multiplicity one) eigenvalues with respective eigenvectors  $v_1, \dots, v_n$ , the general solution has the form

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t}.$$

If the eigenvalues  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , with  $s \leq n$ , are such that  $\lambda_k$  has multiplicity  $m_k \geq 1$ , then for each  $k$ , we can find  $m_k$  generalized eigenvectors linearly independents  $v_{k1}, \dots, v_{km_k}$  and a solution in the form

$$e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) v_{kj},$$

where  $P_{kj}(t)$  are real polynomials determined by the geometric multiplicity of  $\lambda_k$ . Thus, the general form solution takes the form

$$\sum_{k=1}^s e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) v_{kj}.$$

In the third chapter, we work around the control system

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3}$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$  and  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ .  $x$  is the state variable and  $\Omega$  is the admissible control set.  $CH(\Omega)$  is the convex hull of  $\Omega$ .  $R(t)$  is the set of reachable states which we can reach from an initial state  $x_0$  with controllers  $u(t) \subset \Omega$  on  $\mathcal{J} : t_0 \leq t \leq t_1$ .  $R(t)$  is compact, convex and varies continuously with  $t_1 > t_0$ . Moreover, if  $\Omega$  is relaxed to its convex hull  $CH(\Omega)$  and if  $R_{CH}(t)$  is the corresponding reachability set for all controllers  $u(t) \subset CH(\Omega)$  on  $\mathcal{J}$ , then  $R(t_1) = R_{CH}(t_1)$ . As consequence, if  $P$  lies in  $R(t_1)$ , there exists a neighborhood  $V$  of  $P$  and  $\delta > 0$  such that each  $R(t)$  contains  $V$  if  $|t_0 - t_1| < \delta$ .

All this leads us to one of the strongest result on control theory, which refers to full rank of the controllability matrix  $C(A, B)$ , that means, system (3) is controllable if and only if the controllability matrix

$$C(A, B) = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B]$$

has rank  $n$ . System (3) is null-controllable if there exist an origin neighborhood  $V$  such that any state in  $V$  can be steered to origin with all controllers  $u(t) \subset \Omega$ .

The main theorem on controllability in this work is the Brammer's theorem. If there exists  $u \subset \Omega$  such that  $Bu = 0$  and  $CH(\Omega) \neq \phi$ , then the following conditions are necessary and sufficient for null-controllability of (3):

- (i)  $\text{Rango} C(A, B) = n$
- (ii) there is no real eigenvector  $v$  of  $A^T$  such that

$$\langle v, Bu \rangle \leq 0 \quad \forall u \in \Omega.$$

As an immediate consequence, if  $\Omega$  is any cone (orthant) of  $\mathbb{R}^m$  with vertex at the origin and with interior non empty, then (i) and (ii) are the conditions necessary and sufficient to ensure to  $R_\infty$  be all  $\mathbb{R}^n$ .

On fourth chapter, presents some characterizations of positive control systems with matrix  $A$  in diagonal Jordan form or block Jordan form, and each proff is based on the Brammer's Theorem. Let (first orthant)  $\Omega = \mathbb{R}_+^m$  be the admissible control set, we say the system is controllable positively if it is controllable with controller  $u(t) \subset \Omega$ . If the system (3) has an  $n \times n$  matrix  $A$ , with only once block real eigenvalue which it geometric and algebraic multiplicity are the same, then the system (3) is positively controllable with  $n + 1$  controllers if and only if  $\text{rank}(B) = n$  and there exists a column  $b_k$  in  $B$  such that

$$b_k = \sum_{j=1, j \neq k}^{n+1} c_j b_j, \text{ con } c_j < 0.$$

In fact, is not controllable with  $n$  controllers or less than these.

If the system (3) has an  $n \times n$  matrix  $A$ , with only once block real eigenvalue such that it geometric multiplicity is one, then the system (3) is positively controllable if and only if, in the last line of  $B$ , there are two input with oppossed sign. Moreover, we need only two controls for controllability.

If the system (3) has an  $n \times n$  matrix  $A$ , with  $n$  different eigenvalues, then the system is controllable with positive controllers if and only if, each row of  $B$  has two input with oppossed sign. On complex case, the system (3) has an  $2n \times 2n$  real matrix  $A$  with only once block Jordan repetidely  $n$  times in the form

$$A_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (4)$$

with eigenvalues  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ , each one with multiplicity equal  $n$ . The *Complejificacion* of  $A$  is defined as the complex  $n \times n$  matrix

$$A_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \alpha - i\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha - i\beta \end{bmatrix}.$$

In other hand, the complejificacion for a  $2n$ -vector is defined by the complex  $n$ -vector

$$b_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} b_1 + ib_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} + ib_{2n} \end{bmatrix}.$$

Thus, the system (3) is controllable with positive controls if and only if  $\langle B_{\mathbb{C}} \rangle = \mathbb{C}^n$ .

In the fifth chapter, we deal a method with a view towards finding eigenvalues for long scale matrices. Let  $A$  be an  $n \times n$  matrix and  $G(A)$  being it associated digraph. Let  $A_1, \dots, A_r$  be the submatrices of  $A$  associated to strong aciclic components of  $G(A)$ , and  $E(A_k)$  being the spectrum (eigenvalues set) for each  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, r$ , then the spectrum of  $A$  is given by

$$E(A) = E(A_1) \cup \dots \cup E(A_r)$$

including multiplicity. Sometimes, the entries of some submatrices which represents a strong ciclic component is not agruped on a block. To achieve this, we have to separate the aciclic and the ciclic components (though sometimes they must be combined to achieve a bigger ciclic component). The first step is to change the matrix  $A$  to it boolean form, denoted as  $A_B$ , by replacing all the nonzero entries by the number one, the other zero entries stay there. The following is find a permutation matrix  $P$  such that the matrix  $A_B$  be similar to  $P'A_BP$  and it ciclic components being grouped on blocks. In this case the matrix  $P^{-1}$  matches  $P' = P^T$ . Next, we identify the ciclic components of  $P'A_BP$  and separate their corresponding blocks. Apply the transformation on to  $A$  to obtain  $P'AP$  and separate the blocks as done on  $P'A_BP$ . That blocks are the submatrices  $A_1, \dots, A_r$ . To find the permutation matrix  $P$ , calculate the reachability matrix  $R$  of the digraphic  $G(A)$  as

$$R = A_B^0 \vee A_B^1 \vee \dots \vee A_B^{n-1},$$

where  $A_B^j = A_B \vee \wedge A_B \vee \wedge A_B \vee \wedge \dots \vee \wedge A_B$ . Next, calculate the transpose of the boolean negation of  $R$ , denoted as  $\overline{R}'$ , and by multiplying  $R \wedge \overline{R}'$ . Finally, we follow the following algorithm:

- (1) Sum arithmetically the entries of the columns of  $R \wedge \overline{R}'$ .
- (2) To for the vector of positions  $V$ , write from left to right the numbers of the sum which have the same highest value.
- (3) Group positions which have the same value together.
- (4) Repeat (2) and (3) until full positions.

The matrix arising is the permutation matrix  $P$ .



# Álgebra lineal

Para empezar nuestro análisis objetivo en controlabilidad positiva, es necesario tener en cuenta algunos conceptos básicos de álgebra lineal que serán de bastante utilidad en el transcurso del desarrollo de los temas siguientes. Tales conceptos que nos relacionan a dos tipos de objetos diferentes como lo son los polinomios y los operadores lineales ó sus matrices asociadas. En algunos contextos, no se hará distinción entre un operador lineal y su matriz asociada.

---

## § 1.1. Polinomios y matrices

### 1.1.1. Polinomios

Primero daremos las definiciones y reglas básicas para los polinomios.

$K$  es un campo.

**Definición 1.1.** Definimos un polinomio sobre  $K$ , como una función de  $K$  sobre sí mismo, tal que existen elementos  $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$  tales que

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$$

para todo  $t \in K$ . Al conjunto de polinomios con coeficientes en  $K$  se denota como  $K[t]$ .

Tomemos

$$g(t) = b_m t^m + \dots + b_0$$

en  $K[t]$ , donde  $b_j \in K$ , entonces se puede formar la suma  $f + g$ . Para  $n \geq m$  se puede escribir  $b_j = 0$  cuando  $j > m$ ,

$$g(t) = 0t^n + \dots + b_m t^m + \dots + b_0,$$

entonces se pueden escribir los valores de la suma  $f + g$  como

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &= a_n t^n + \dots + a_0 + b_n t^n + \dots + b_0 \\ &= (a_n + b_n) t^n + \dots + (a_0 + b_0) \\ &= (f + g)(t). \end{aligned}$$

Así,  $f + g$  es de nuevo un polinomio. Si  $c \in K$ , entonces

$$\begin{aligned} c(f(t)) &= c(a_n t^n + \cdots + a_0) \\ &= ca_n t^n + \cdots + ca_0 \\ &= (cf)(t), \end{aligned}$$

y por tanto,  $cf$  es un polinomio. Se puede verificar fácilmente que el conjunto de los polinomios forman un espacio vectorial sobre  $K$ .

El producto de polinomios  $f \cdot g$  es de nuevo un polinomio y está dado por

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &= (a_n t^n + \cdots + a_0)(b_m t^m + \cdots + b_0) \\ &= (a_n b_m) t^{n+m} + \cdots + (a_0 b_0) \\ &= (fg)(t). \end{aligned}$$

Es fácil ver que si  $f(t) = g(t)$ , con  $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_0$  y  $g(t) = b_n t^n + \cdots + b_0$ , entonces  $a_i = b_i$  para toda  $i$ .

A la potencia más grande en  $t$  tal que su coeficiente es distinto de cero se le llama grado de  $f$  y se escribe  $\text{grad}(f)$ . Dado que el término de mayor potencia de  $f(t)g(t)$  es  $a_n b_m t^{n+m}$ , con  $a_n$  y  $b_m$  distintos de cero, concluimos que

$$\text{grad}(fg) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g).$$

Más adelante veremos algunos teoremas relacionados con factorización y raíces de polinomios.

### 1.1.2. Polinomios de matrices y operadores lineales

$A$  es una matriz cuadrada con coeficientes en  $K$ . Tomemos  $f \in K[t]$  y escribamos

$$f(t) = a_n t^n + \cdots + a_0,$$

con  $a_i \in K$ .

**Definición 1.2.** Se define la evaluación de  $A$  en  $f$  como

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

Por las reglas dadas en la sección anterior

$$\begin{aligned} (f + g)(t) &= f(t) + g(t), \\ (fg)(t) &= f(t)g(t), \\ cf(t) &= (cf)(t), \end{aligned}$$

es fácil ver que

$$\begin{aligned} (f + g)(A) &= f(A) + g(A) \\ (fg)(A) &= f(A)g(A) \\ cf(A) &= (cf)(A). \end{aligned}$$



**Teorema 1.1.** *A es una matriz de  $n \times n$  sobre un campo  $K$ . Entonces existe un polinomio no nulo  $f \in K[t]$ , tal que  $f(A) = 0$ .*

**Demostración.** Dado que el espacio vectorial de matrices sobre  $K$  es de dimensión finita igual a  $n^2$ . Por tanto, las potencias  $I, A, A^2, \dots, A^N$  son linealmente dependientes para  $N > n^2$ . Esto significa que existen números  $a_0, \dots, a_N$  en  $K$  no todos iguales a cero tales que

$$a_N A^N + \dots + a_0 I = 0.$$

Tomando  $f(t) = a_N t^N + \dots + a_0$ , se obtiene lo que se quiere. ■

**Observación 1.2.** *Nótese que si  $f(t) = a_N t^N + \dots + a_0$  y  $f(A) = 0$ , entonces  $cf(A) = 0$ . Si  $a_N \neq 0$ , hagamos  $c = \frac{1}{a_N}$  y  $b_0 = \frac{a_0}{a_N}$ , lo que nos arroja  $g(t) = t^N + \dots + b_0$  que es un polinomio de grado  $N$  con coeficiente inicial igual a 1, además  $g(A) = 0$ .*

---

## § 1.2. Vectores propios, valores propios y el polinomio característico

$V$  es un espacio vectorial sobre un campo  $K$  y  $A : V \rightarrow V$  un operador lineal.

**Definición 1.3.** *Un elemento  $v \in V$  se llama vector propio de  $A$  si existe  $\lambda \in K$  tal que  $Av = \lambda v$ .*

Si  $v \neq 0$ , entonces  $\lambda$  está determinado en forma única, debido a que  $\lambda_1 v = \lambda_2 v$  implica que  $\lambda_1 = \lambda_2$ . En este caso, se dice que  $\lambda$  es *valor propio de  $A$*  correspondiente al vector propio  $v$ .

**Definición 1.4.** *Tomemos  $\lambda \in K$ .  $V_\lambda$  es el subespacio de  $V$  generado por todos los vectores propios de  $A$  que tienen a  $\lambda$  como valor propio. Al subespacio  $V_\lambda$  se le conoce como subespacio propio de  $A$  correspondiente a  $\lambda$ .*

Entonces, todo elemento no nulo de  $V_\lambda$  es vector propio de  $A$  con  $\lambda$  como valor propio, pues si  $v_1, v_2 \in V_\lambda$ , entonces

$$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

y si  $c \in K$ , entonces  $A(cv_1) = c(Av_1) = c\lambda v_1 = \lambda cv_1$ .

Si  $v_1$  y  $v_2$  son vectores propios de  $A$  con correspondientes valores propios  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , entonces  $v_1 + v_2$  no es valor propio de  $A$ . Más formalmente, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.**  *$V$  es un espacio vectorial sobre  $K$  y  $A : V \rightarrow V$  un operador lineal de  $V$ . Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  valores propios distintos de  $A$  con  $v_1, \dots, v_m$  sus correspondientes vectores propios. Entonces,  $v_1, \dots, v_m$  son linealmente independientes.*

**Demostración.** Se hará por inducción sobre  $m$ . Para  $m = 1$  es obvio. para  $m = 2$ , supóngase la relación

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0. \tag{1.1}$$

Debemos probar que  $c_1 = c_2 = 0$ . Multiplíquese (1.1) por  $\lambda_1$  para obtener

$$c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_1v_2 = 0. \quad (1.2)$$

Multipliquemos ahora (1.1) por  $A$  y por linealidad obtenemos

$$Ac_1v_1 + Ac_2v_2 = c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 = 0. \quad (1.3)$$

Restamos (1.2) y (1.3) y obtenemos

$$c_2\lambda_1v_2 - c_2\lambda_2v_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)c_2v_2 = 0.$$

como  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  y  $v_2 \neq 0$ , entonces  $c_2 = 0$ . De aquí que  $c_1 = 0$ .

Supóngase cierto el enunciado para  $m = k - 1$  y mostremos que se cumple para  $m = k$ . Hágase

$$c_1v_1 + \cdots + c_kv_k = 0. \quad (1.4)$$

Debemos mostrar que  $c_i = 0$  para toda  $i = 1, \dots, k$ . Multiplicando (1.4) por  $\lambda_k$ ,

$$c_1\lambda_kv_1 + \cdots + c_k\lambda_kv_k = 0. \quad (1.5)$$

Aplicamos ahora  $A$  a (1.4) y por linealidad se obtiene

$$Ac_1v_1 + \cdots + Ac_kv_k = c_1\lambda_1v_1 + \cdots + c_k\lambda_kv_k = 0. \quad (1.6)$$

Restamos (1.5) y (1.6) para obtener

$$(\lambda_k - \lambda_1)c_1v_1 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_{k-1})c_{k-1}v_{k-1} = 0.$$

Dado que  $\lambda_k \neq \lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, k - 1$ , por hipótesis de inducción se obtiene que  $c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$  y de la ecuación (1.4) nos queda  $c_kv_k = 0$ , de aquí que  $c_k = 0$ , lo que prueba el teorema. ■

**Teorema 1.4.**  *$V$  es un espacio vectorial sobre los números complejos. Supóngase que  $\dim V \geq 1$ .  $A : V \rightarrow V$  es un operador lineal. Entonces existe un vector propio no nulo de  $A$ .*

**Demostración.** Por el teorema 1.1 existe un polinomio no nulo tal que  $f(A) = 0$ . Supóngase que el grado de  $f$  es  $n$ . Por la observación 1.2, se puede suponer que el coeficiente inicial de  $f$  es igual a 1. Por el teorema fundamental del álgebra, existen números complejos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tales que

$$f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n).$$

entonces,

$$0 = f(A) = (A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_n I).$$

No todos los operadores  $A - \lambda_i I$  son invertibles, pues si todas lo fueran entonces  $(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_n I)$  sería invertible, lo que es imposible. Por tanto, para alguna  $i$ , existe un vector  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  tal que  $(A - \lambda_i I)v = 0$ . Luego entonces  $Av = \lambda_i v$ . ■

Nótese que el teorema no es válido si  $V$  es un espacio vectorial sobre  $R$ , en lugar de serlo sobre  $\mathbb{C}$ .

**Definición 1.5.**  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base ordenada para un espacio vectorial  $V$  y  $A : V \rightarrow V$  es un operador lineal, la matriz asociada a  $A$  con respecto a la base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

donde para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

$$Av_i = a_{1i}v_1 + \cdots + a_{ni}v_n.$$

El vector columna  $(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})^T$  se le llama vector de coordenadas de  $Av_i$ .

**Teorema 1.5.**  $V$  es un espacio vectorial sobre un campo  $K$  y  $A : V \rightarrow V$  es un operador lineal. Supóngase que existe una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$  formada solamente de vectores propios de  $A$  con valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  respectivamente. Entonces, la matriz asociada a  $A$  con respecto a esta base es la matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

**Demostración.** Para cada  $i$  se tiene

$$Av_i = \lambda_i v_i = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \iff c_i = \lambda_i,$$

por lo que el vector de coordenadas es  $(0, 0, \dots, \lambda_i, 0, \dots, 0)^T$ . Luego, la matriz asociada se expresa de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Corolario 1.6.**  $V$  es un espacio vectorial sobre  $K$  con dimensión igual a  $n$ .  $A : V \rightarrow V$  es un operador lineal. Supóngase que  $A$  tiene  $n$  valores propios distintos entre sí. Entonces  $V$  tiene una base que consta de vectores propios de  $A$  y, por consiguiente,  $A$  se puede diagonalizar.

**Demostración.** Dado que  $A$  tiene  $n$  valores propios distintos, digamos,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .  $v_1, \dots, v_n$  son vectores propios asociados a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  respectivamente. Por el teorema 1.3 son linealmente independientes y así, forman una base para  $V$ . Por el teorema 1.5 la matriz asociada a  $A$  con respecto a esta base, es una matriz diagonal.  $\blacksquare$

Vamos a ver la importancia y relación del polinomio característico con los valores propios y su propio operador.

**Definición 1.6.**  $A$  es una matriz cuadrada de tamaño  $n \times n$  y  $S_n$  el conjunto de permutaciones de  $n$  elementos. Definimos el determinante de  $A$ , denotado por  $|A|$  o  $\text{Det}(A)$ , como el número

$$\text{Det}(A) = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

donde  $\text{sgn}(\sigma)$  es igual a 1 si la permutación  $\sigma$  se expresa como producto de un número par de transposiciones, y -1 si  $\sigma$  se expresa como producto de un número impar de transposiciones.

**Definición 1.7.**  $A = (a_{ij})$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  sobre un campo  $K$ . El polinomio característico de  $A$  se define como el determinante

$$P_A(t) = \text{Det}(tI - A) = \text{Det} \begin{bmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{bmatrix}.$$

**Teorema 1.7.**  $A$  es una matriz de  $n \times n$  sobre un campo  $K$ . Un elemento  $\lambda \in K$  es un valor propio de  $A$  si y sólo si  $\lambda$  es una raíz del polinomio característico de  $A$ .

**Demostración.** Suponga que  $\lambda$  es valor propio de  $A$ . Entonces  $\text{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\}$ , y así  $\lambda I - A$  es singular. Así que,  $P_A(\lambda) = \text{Det}(\lambda I - A) = 0$ . Luego entonces,  $\lambda$  es raíz del polinomio característico. Inversamente, si  $\lambda$  es raíz del polinomio característico, entonces  $\text{Det}(\lambda I - A) = 0$ , lo que implica que  $\text{Ker}(\lambda I - A) \neq 0$ . Así que existe un vector  $v$  no nulo tal que  $(\lambda I - A)v = 0$ . De aquí que  $\lambda v = Av$ . ■

**Teorema 1.8.**  $A$  y  $B$  son dos matrices de  $n \times n$ . Supóngase que  $B$  es invertible. Entonces el polinomio carácterístico de  $A$  es igual al polinomio carácterístico de  $B^{-1}AB$ .

**Demostración.** Por definición del polinomio característico y por propiedades de los determinantes se tiene

$$\begin{aligned} \text{Det}(tI - B^{-1}AB) &= \text{Det}[B^{-1}(tI - A)B] \\ &= \text{Det}(B^{-1})\text{Det}(tI - A)\text{Det}(B) \\ &= \text{Det}(B^{-1})\text{Det}(B)\text{Det}(tI - A) \\ &= \text{Det}(tI - A) \end{aligned}$$

Lo cual prueba lo deseado. ■

### 1.2.1. Vectores propios generalizados

$A$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  y  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ . El número de veces que aparece  $\lambda$  como valor propio se le llama multiplicidad algebraica. Si  $\lambda$  tiene multiplicidad algebraica  $m < n$ , entonces para  $k = 1, \dots, m$ , cualquier vector  $v \neq 0$  que satisfaga

$$(A - \lambda I)^k v = 0$$

es llamado *vector propio generalizado* de  $A$ . Si

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

es el polinomio característico de  $A$ , con  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  los distintos valores propios de  $A$ . Como ya se dijo en la sección anterior, para cada valor propio  $\lambda_j$ , al subespacio

$$V_{\lambda_j} = \{v \in V | (A - \lambda_j I)(v) = 0\}$$

se le llama subespacio propio  $V_{\lambda_j}$  y sus elementos son vectores propios asociados a  $\lambda_j$ . A la dimensión de  $V_{\lambda_j}$  se le llama multiplicidad geométrica de  $\lambda_j$ . Análogamente, al subespacio

$$\begin{aligned} V'_{\lambda_j} &= \{v \in V | (A - \lambda_j I)^r(v) = 0 \text{ para algun } r \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcup_r \ker(A - \lambda_j I)^r \end{aligned}$$

se le llama *subespacio propio generalizado*  $V'_{\lambda_j}$  y sus elementos son vectores propios generalizados asociados al valor propio  $\lambda_j$ . Veremos más adelante, como consecuencia del teorema 1.23 que

$$V_{\lambda_j} \cap \left( \sum_{l \neq j} V_{\lambda_l} \right) = \{0\}$$

para cada  $j = 1, \dots, k$ .

---

## § 1.3. Triangulación

$V$  es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo  $K$ .  $A : V \rightarrow V$  es un operador lineal.

**Definición 1.8.** Un subespacio  $W$  de  $V$  es invariante ó  $A$ -invariante si  $AW \subset W$ , es decir, si  $w \in W$ , entonces  $Aw \in W$ .

**Definición 1.9.** Un abanico de  $A$  (en  $V$ ) es una sucesión de subespacios  $\{V_1, \dots, V_n\}$  tal que  $V_i \subset V_{i+1}$  para cada  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $\dim V_i = i$ , además, cada  $V_i$  es  $A$ -invariante. Diremos que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de abanico para  $V$  si  $\{v_1, \dots, v_i\}$ , es una base para  $V_i$ .

Observemos que una base de abanico depende tanto de  $V$  como de un operador lineal  $A : V \rightarrow V$ .

**Teorema 1.9.**  $A : V \rightarrow V$  es un operador lineal y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base de abanico para  $V$ . Entonces la matriz asociada a  $A$  con respecto a esa base es una matriz triangular superior.

**Demostración.** Como  $\{v_1, \dots, v_i\}$  es una base para  $V_i$  y  $AV_i \subset V_i$ , entonces existen números  $a_{ij}$  tales que

$$\begin{aligned} Av_1 &= a_{11}v_1 \\ Av_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 \\ &\vdots \\ Av_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n. \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz asociada a  $A$  con respecto a la base de abanico es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

la cual es diagonal superior. ■

El teorema anterior nos proporciona una forma de obtener una matriz triangular, dado que se tiene una base de abanico. La cuestión ahora, es saber si siempre existe una base de abanico ó en debido caso, cuando existe. El siguiente teorema nos proporciona la respuesta.

**Teorema 1.10.**  *$V$  es un espacio vectorial de dimensión finita sobre los números complejos y supóngse que  $\dim V \geq 1$ .  $A : V \rightarrow V$  es un operador lineal. Entonces existe una base en abanico de  $A$  en  $V$ .*

**Demostración.** La prueba se hará por inducción sobre la dimensión de  $V$ . Para  $\dim V = 1$  no hay nada que probar. Supóngase el teorema cierto para  $\dim V = n - 1$ , con  $n > 1$ . Por el teorema 1.4 existe un vector propio no nulo  $v_1$  de  $A$ .  $V_1$  es el subespacio de dimensión 1 generado por  $v_1$ . Entonces  $V$  se puede expresar como suma directa  $V = V_1 \oplus W$ . El problema ahora sería que  $A$  no mapea a  $W$  en sí mismo. Tomemos entonces,  $P_1$  la proyección de  $V$  en  $V_1$  y  $P_2$  la proyección de  $V$  en  $W$ . Entonces  $P_2A$  es un operador lineal de  $V$  en  $V$ , el cual mapea a  $W$  en  $W$ . Por hipótesis de inducción, existe un abanico de  $P_2A$  en  $W$ , digamos  $\{W_1, \dots, W_{n-1}\}$ . Hagamos

$$V_i = V_1 + W_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Entonces  $V_i \subset V_{i+1}$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Además,  $\dim V_i = i$ . Si  $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$  es una base de  $W$  tal que  $\{u_1, \dots, u_j\}$  sea base de  $W_j$ , entonces  $\{v_1, u_1, \dots, u_{i-1}\}$  es base de  $V_i$ , para  $i = 2, \dots, n$ . Para probar que  $\{V_1, \dots, V_n\}$  es un abanico de  $A$  en  $V$ , es suficiente probar que  $AV_i \subset V_i$ . Primero, note que

$$A = AI = (P_1 + P_2)A = P_1A + P_2A.$$

Tomemos  $v \in V_i$ . Tenemos que ver que  $v$  es suma de elementos de una suma directa. Podemos escribir  $v = cv_1 + w_i$ , con  $c \in \mathbb{C}$  y  $w_i \in W_i$ . Entonces  $P_1Av = P_1(Av)$  está en  $V_1$ , y por tanto en  $V_i$ . Más aún,

$$\begin{aligned} P_2Av &= P_2A(cv_1) + P_2Aw_i \\ &= cP_2(Av_1) + P_2Aw_i \end{aligned}$$

Dado que  $v_1$  es vector propio de  $A$ , entonces existe  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$  tal que

$$cP_2Av_1 = cP_2\lambda_1v_1 = c\lambda_1P_2v_1 = 0,$$



pues  $P_2A$  es la proyección sobre  $W_i$  y lo mapea en sí mismo, entonces  $P_2Aw_i$  está en  $W_i$ . Entonces  $P_2Av$  está en  $V_1 + W_i = V_i$ . Así concluimos que  $I Av = P_1Av + P_2Av$  está en  $V_i$ , quedando así probado el teorema. ■

**Teorema 1.11** (De Cayley-Hamilton).  *$V$  es un espacio vectorial de dimension finita,  $\dim V \geq 1$ , sobre  $\mathbb{C}$ .  $A : V \rightarrow V$  es un operador lineal. Si  $P$  es el polinomio característico de  $A$ , entonces  $P(A) = 0$ .*

**Demostración.** Por el teorema anterior, podemos encontrar un abanico para  $A$ , digamos  $\{V_1, \dots, V_n\}$ . Ahora,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es la matriz asociada a  $A$  con respecto a la base de abanico  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , entonces

$$Av_i = a_{1i}v_1 + \cdots + a_{(i-1)i}v_{i-1} + a_{ii}v_i \quad (1.7)$$

$$= a_{ii}v_i + w \quad (1.8)$$

donde  $w = a_{1i}v_1 + \cdots + a_{(i-1)i}v_{i-1}$  es un elemento de  $V_{i-1}$  y así,

$$(A - a_{ii}I)v_i = w \in V_{i-1}. \quad (1.9)$$

Además, el polinomio característico está dado por

$$P(t) = \text{Det}(tI - A) = (t - a_{11})(t - a_{22}) \cdots (t - a_{nn}),$$

así que

$$P(A) = (A - a_{11}I)(A - a_{22}I) \cdots (A - a_{nn}I).$$

Probaremos por inducción que

$$(A - a_{11}I)(A - a_{22}I) \cdots (A - a_{ii}I)v = 0$$

para toda  $v \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  y así veremos que  $\text{Ker}(A - a_{ii}I) \neq 0$  para cada  $i$  y en consecuencia  $P(A) = 0$ . Para  $i = 1$  tenemos que  $(A - a_{11}I)v_1 = Av_1 - a_{11}v_1 = 0$  y caso terminado. Para  $i = 2$ , y  $v \in V_2$  los escribimos  $v = v_1 + cv_2$ . Note que se pueden permutar los factores  $(A - a_{ll}I)(A - a_{rr}I) = (A - a_{rr}I)(A - a_{ll}I)$ , por que se puede hacer en los factores del polinomio  $P(t)$ . Entonces

$$(A - a_{22}I)(A - a_{11}I)v_1 = 0$$

y

$$(A - a_{11}I)(A - a_{22}I)cv_2 = 0.$$

De aquí que,

$$(A - a_{11}I)(A - a_{22}I)v = 0.$$

Supóngase cierta la afirmación para  $i = k - 1$ , y probemosla para  $i = k$ ,  $k > 2$ . Por (1.7), cualquier elemento de  $V_k$  puede escribirse como una suma  $w + cv_k$ , con  $w \in V_{k-1}$  y un escalar  $c$ . Notemos que  $(A - a_{kk}I)w$  está en  $V_{k-1}$ , pues  $AV_{k-1} \subset V_{k-1}$  y  $a_{kk}w \in V_{k-1}$ . Por hipótesis de inducción,

$$(A - a_{kk}I) \cdots (A - a_{k-1, k-1}I)(A - a_{kk})w = 0.$$

Por otro lado, por (1.9), tenemos que

$$(A - a_{kk}I) \cdots (A - a_{k-1, k-1}I)(A - a_{kk})cv_k = 0.$$

Por lo tanto, para cualquier  $v \in V_k$ , tenemos

$$(A - a_{kk}I) \cdots (A - a_{k-1, k-1}I)(A - a_{kk})v = 0,$$

lo que termina la prueba. ■

---

#### § 1.4. Descomposición primaria

A continuación, veremos algunas otras propiedades de los polinomios que aplicaremos en la siguiente sección a los operadores lineales. Empezaremos con el algoritmo Euclideo.

**Teorema 1.12.** *Tomemos  $f, g \in K[t]$  con  $\text{grad}(g) \geq 0$ . Entonces existen  $q, r \in K[t]$  tales que*

$$f(t) = q(t)g(t) + r(t),$$

*con  $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$ . Los polinomios  $q$  y  $r$  son únicos determinados por esas condiciones.*

**Demostración.** Tómesese  $m = \text{grad}(g)$ . Escribamos

$$\begin{aligned} f(t) &= a_n t^n + \cdots + a_0, \\ g(t) &= b_m t^m + \cdots + b_0, \end{aligned}$$

con  $b_m \neq 0$ . si  $n < m$ , sea  $q = 0$  y  $r = f$ . Si  $n \geq m$ , sea

$$f_1 = f(t) - a_n b_m^{-1} t^{n-m} g(t).$$

(El cual es el primer paso de la división sintética). entonces  $\text{grad}(f_1) < \text{grad}(f)$ . Continuando con esta división hacia  $f_1$ , podemos encontrar  $q_1$  y  $r$  tales que

$$f_1 = q_1 g + r,$$

con  $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$ . Entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= a_n b_m^{-1} t^{n-m} g(t) + f_1(t) \\ &= a_n b_m^{-1} t^{n-m} g(t) + q_1(t)g(t) + r(t) \\ &= (a_n b_m^{-1} t^{n-m} + q_1(t))g(t) + r(t) \end{aligned}$$

el cual es un polinomio con la forma deseada. Para probar la unicidad, suponga que

$$f = q_1g + r_1 = q_2g + r_2$$

con  $\text{grad}(r_1, r_2) < g$ . Entonces

$$(q_1 - q_2)g = r_1 - r_2.$$

El grado del lado izquierdo de la igualdad es mayor o igual que el de  $g$  ó cero, mientras que el del lado derecho es menor o igual o cero. Así que la única posibilidad es que ambos tengan grado cero. De aquí que  $q_1 = q_2$  y  $r_1 = r_2$ . ■

**Corolario 1.13.** *Tomemos  $f \in K[t]$  distinto de cero y  $\lambda \in K$  tal que  $f(\lambda) = 0$ . Entonces existe un polinomio  $q(t)$  en  $K[t]$  tal que*

$$f(t) = (t - \lambda)q(t)$$

**Demostración.** Podemos escribir

$$f(t) = (t - \lambda)q(t) + r(t),$$

donde  $\text{grad}(r) < \text{grad}(t - \lambda)$ . Pero  $\text{grad}(t - \lambda) = 1$ , entonces  $r$  es constante. Ahora,

$$0 = f(\lambda) = (\lambda - \lambda)q(\lambda) + r(\lambda) = r(\lambda)$$

de aquí se sigue que  $r = 0$  y se obtiene lo deseado. ■

---

## § 1.5. Máximo común divisor y factorización única

$K$  es un campo y  $K[t]$  es el espacio de polinomios sobre  $K$ .

**Definición 1.10.**  *$I$  es un ideal de  $K[t]$  si*

1. *El polinomio cero está en  $I$ .*
2. *Si  $f, g$  están en  $I$ , entonces  $f + g$  está en  $I$ .*
3. *Si  $f \in I$  y  $g$  es un polinomio arbitrario, entonces  $fg$  está en  $I$ .*

Notemos que  $I$  es algo más que un espacio vectorial, en el sentido de que si  $f \in I$ , la multiplicación por un escalar del campo  $K$ , se cambia por la multiplicación por un polinomio y de nuevo es un elemento del ideal. Un polinomio  $g \in I$  se dice ser generador de  $I$ , si para todo  $f \in I$ , tenemos que  $f = gh$ , para algún  $h \in K[t]$ . El detalle ahora sería, si siempre existe un generador para el ideal. El siguiente teorema nos afirma este último comentario.

**Teorema 1.14.**  *$I$  es un ideal de  $K[t]$ . Entonces existe un polinomio  $g$  el cual es generador de  $I$ .*

**Demostración.** Suponga que  $I$  no es el ideal cero y que  $g$  es un polinomio en  $I$  distinto de cero, y de grado menor que cualquier otro polinomio en  $I$ . Afirmamos que  $g$  es generador para  $I$ . Tomemos  $f \in I$ . Por el algoritmo euclideo podemos encontrar polinomios  $q, r$  tales que  $f = qg + r$ ,  $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$ . Entonces  $r = f - qg$ , y por definición de ideal se sigue que  $r$  está también en  $I$ . Dado que  $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$ , debemos tener que  $r = 0$ . De aquí que  $f = qg$ , y  $g$  es generador de  $I$ , como se quería. ■

**Observación 1.15.**  *$g_1 \neq 0$  es un generador de un ideal  $I$ , y  $g_2$  es otro generador. Entonces existe un polinomio  $q$  tal que  $g_1 = qg_2$ . Dado que*

$$\text{grad}(g_1) = \text{grad}(q) + \text{grad}(g_2),$$

*entonces  $\text{grad}(g_1) \geq \text{grad}(g_2)$ , y con el mismo argumento para  $g_2$ , se llega a que  $\text{grad}(g_2) \geq \text{grad}(g_1)$ . De aquí que,  $\text{grad}(g_1) = \text{grad}(g_2)$ . Luego entonces,  $q$  es constante y escribimos  $g_1 = cg_2$ , con alguna constante  $c$ . Si*

$$g_2 = a_n t^n + \cdots + a_0,$$

*con  $a \neq 0$ . Tomemos  $c = a_n^{-1}$ . Entonces  $cg_2$  es un generador mónico de  $I$ . Más aún, el generador mónico es determinado de manera única.*

$f$  y  $g$  son polinomios distintos de cero. Diremos que  $g$  divide a  $f$ , si existe un polinomio  $q$  tal que  $f = qg$ .  $f_1$  y  $f_2$  son polinomios distintos de cero. Un polinomio  $g$  se dice ser máximo común divisor si,  $g$  divide a  $f_1, f_2$ , y si además,  $h$  es tal que divide a  $f_1, f_2$ , entonces  $h$  divide a  $g$ .

**Teorema 1.16.**  *$f_1, f_2$  son polinomios en  $K[t]$ .  $g$  es un generador para el ideal generado por  $f_1, f_2$ . Entonces  $g$  es máximo común divisor de  $f_1$  y  $f_2$ .*

**Demostración.** Dado que  $f_1$  y  $f_2$  están en el ideal generado por  $f_1, f_2$ , y  $g$  es también generador del mismo, existen polinomios  $q_1, q_2$  tales que  $f_1 = q_1g$  y  $f_2 = q_2g$ . Luego,  $g$  divide a  $f_1, f_2$ . Ahora, si  $h$  es un polinomio que divide a  $f_1$  y  $f_2$ , escribamos  $f_1 = h_1h$  y  $f_2 = h_2h$ , para algunos polinomios  $h_1$  y  $h_2$ . Dado que  $g$  está en el ideal generado por  $f_1$  y  $f_2$ , existen polinomios  $g_1, g_2$  tal que  $g = g_1f_1 + g_2f_2$ . De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} g &= g_1f_1 + g_2f_2 \\ &= g_1h_1h + g_2h_2h \\ &= (g_1h_1 + g_2h_2)h. \end{aligned}$$

De donde  $h$  divide a  $g$ . Luego,  $g$  es máximo común divisor. ■

Diremos que un polinomio  $p \in K[t]$  es irreducible (sobre  $K$ ) si, es de grado  $\geq 1$ , y si, dada una factorización  $p = fg$ , con  $f, g \in K[t]$ , entonces  $\text{grad}(f) = 0$  ó  $\text{grad}(g) = 0$ . Así que los únicos divisores de  $p$  son,  $p$  y 1. Si  $f_1, \dots, f_n$  son polinomios cuyo máximo común divisor es 1, entonces decimos que  $f_1, \dots, f_n$  son primos relativos. En el siguiente resultado nos referimos a la factorización única por medio de factores irreducibles. Para ello requeriremos del siguiente lema.

**Lema 1.17.**  $p, f, g \in K[t]$  son distintos de cero, con  $p$  irreducible. Si  $p$  divide a  $fg$ , entonces  $p$  divide a  $f$  ó  $p$  divide a  $g$ .

**Demostración.** Supóngase que  $p$  no divide a  $f$ . Entonces el máximo común divisor de  $p$  y  $f$  es 1, y existen polinomios  $h_1, h_2 \in K[t]$  tal que

$$1 = h_1p + h_2f.$$

Multiplicamos por  $g$  para obtener

$$g = gh_1p + h_2fg.$$

Pero  $fg = ph_3$ , para algún  $h_3$ , lo que implica que

$$g = (gh_1 + h_2h_3)p,$$

como se quería. ■

**Teorema 1.18** (Factorización única). *Todo polinomio en  $K[t]$  puede ser expresado como un producto  $g_1, \dots, g_m$  de polinomios irreducibles, determinados de manera única, salvo permutaciones y factores constantes distintos de cero.*

**Demostración.** Probemos primero, la existencia de la factorización. Escójase alguna  $f \in K[t]$  de grado finito  $\geq 1$ . Si  $f$  es irreducible, termina la prueba. De otra forma, podemos escribir

$$f = g_1 \cdot g_2$$

con  $\text{grad}(g_1) \leq f$  y  $\text{grad}(g_2) \leq f$ . Si  $g_1$  y  $g_2$  son irreducibles, termina la prueba. Si no, escribimos

$$g_1 = g_{11}g_{12} \quad y \quad g_2 = g_{21}g_{22}.$$

con  $\text{grad}(g_{11}, g_{12}) \leq \text{grad}(g_1)$  y  $\text{grad}(g_{22}, g_{21}) \leq \text{grad}(g_2)$ . Entonces

$$f = g_{11}g_{12} \cdot g_{21}g_{22}.$$

Si  $g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}$  son irreducibles, ya acabamos. Si no, procedemos inductivamente de la misma manera y, dado que el  $\text{grad}(f)$  es finito, tenemos que si reenumeramos las  $g_{l_1} \dots l_s$ , digamos  $g_1, \dots, g_m$ , para algún  $m$ , entonces

$$f = g_1 \cdots g_m.$$

Veamos ahora que la factorización es única.

Si aplicamos el lema 1.17 para cuando  $p$  sea divisor de un producto de polinomios irreducibles  $q_1 \cdots q_s$ , entonces  $p$  divide a  $q_1$  ó  $p$  divide a  $q_2 \cdots q_s$ . Entonces existe una constante  $c$  tal que  $p = cq_1$  ó  $p = cq_2 \cdots q_s$ . Si procedemos inductivamente sobre el segundo caso, nos encontramos que existe una  $i$  tal que  $p$  y  $q_i$  difieren de un factor constante.

Supóngase ahora que se tienen dos productos de polinomios irreducibles

$$p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s.$$

Para  $p_1$  existe una  $k$  tal que  $p_1 = cq_k$ . Se pueden permutar las  $q_j$  tal que  $k = 1$ . Cancelando  $q_1$  obtenemos

$$c_1 p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Repitiendo este argumento inductivamente, nos damos cuenta que para cada  $i$ , existe  $c_i$  tal que  $p_i = c_i q_i$ , después de hacer las permutaciones adecuadas. Esto concluye la prueba. ■

**Corolario 1.19.**  *$f \in K[t]$  es de grado  $\geq 1$ . Entonces  $f$  tiene una factorización única  $f = cp_1 \cdots p_s$ , donde  $p_1, \dots, p_s$  son polinomios irreducibles con coeficiente inicial 1, determinados de manera única, salvo permutaciones.*

Note que podría suceder que  $p_i = p_j$ , con  $i, j = 1, \dots, s$ . Si cada factor  $p_k$  se repite  $m_k$  veces, con  $k < s$ , entonces del lema anterior  $f$  se puede expresar de la forma  $f = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ , con  $m_1 + \cdots + m_r = s$ . Si  $K = \mathbb{C}$ , los polinomios irreducibles son de la forma  $t - \lambda$ . Entonces la factorización de  $f$  sería de la forma

$$f(t) = c(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s},$$

con alguna constante  $c$ .

---

## § 1.6. Aplicación a la descomposición de un espacio

Como ya vimos en la sección de tringulación de matrices, la invarianza de subespacios, en los resultados siguientes veremos la aplicación de la descomposición primaria en operadores lineales de un espacio vectorial y la invarianza de sus subespacios.

**Proposición 1.20.**  *$V$  es un espacio vectorial sobre un campo  $K$ , y  $A : V \rightarrow V$  un operador de  $V$ . Si  $f(t) \in K[t]$  es un polinomio y  $W$  es el kernel de  $f(A)$ . Entonces  $W$  es un subespacio invariante bajo  $A$ .*

**Demostración.** Debemos demostrar que si  $w$  está en  $W$ , entonces  $Aw$  también está en  $W$ . En efecto, supóngase que  $f(A)w = 0$ . Dado que  $tf(t) = f(t)t$ , tenemos que

$$Af(A) = f(A)A,$$

por lo que

$$f(A)(Aw) = f(A)Aw = Af(A)w = 0.$$

Así que,  $Aw$  también está en el kernel de  $f(A)$ . ■

En general, si  $f, g \in K[t]$ , se tiene que  $f(t)g(t) = g(t)f(t)$ , entonces  $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ .

Vamos a describir ahora, como la factorización de un polinomio en dos factores primos relativos, nos lleva a una descomposición de un espacio vectorial, en dos subespacios invariantes.



**Teorema 1.21.**  $f(t) \in K[t]$  es un polinomio. Supóngase que  $f = f_1 f_2$ , donde  $f_1$  y  $f_2$  son primos relativos.  $A : V \rightarrow V$  es un operador. Suponga que  $f(A) = 0$ . Definamos  $W_1 = \ker f_1(A)$  y  $W_2 = \ker f_2(A)$ . Entonces  $V$  es suma directa de  $W_1$  y  $W_2$ .

**Demostación.** Por hipótesis, existen  $g_1, g_2$  tales que

$$g_1(t)f_1(t) + g_2(t)f_2(t) = 1.$$

De aquí que

$$g_1(A)f_1(A) + g_2(A)f_2(A) = I. \quad (1.10)$$

Tomemos  $v \in V$ . Entonces

$$v = g_1(A)f_1(A)v + g_2(A)f_2(A)v.$$

El primer término de la suma está en  $W_2$ , pues

$$\begin{aligned} f_2(A)g_1(A)f_1(A)v &= g_1(A)f_1(A)f_2(A)v \\ &= g_1(A)f(A)v \\ &= 0. \end{aligned}$$

Similarmente, el segundo término está en  $W_1$ . Así que,  $V$  es la suma de  $W_1$  y  $W_2$ . Para mostrar que la suma es directa, debemos probar que la expresión

$$v = w_1 + w_2, \quad (1.11)$$

con  $w_1 \in W_1$  y  $w_2 \in W_2$ , está determinada de manera única por  $v$ . Aplicamos  $g_1(A)f_1(A)$  a (1.11), y se obtiene que

$$g_1(A)f_1(A)v = g_1(A)f_1(A)w_2,$$

pues  $f_1(A)w_1 = 0$ . Por otro lado, si multiplicamos (1.10) por  $w_2$ , se tiene que

$$w_2 = g_1(A)f_1(A)w_2,$$

pues  $f_2(A)w_2 = 0$ . Por tanto,

$$g_1(A)f_1(A)v = w_2,$$

y así  $w_2$  está determinado de manera única. Similarmente, si multiplicamos por  $g_2(A)f_2(A)$  a (1.11) y (1.10) por  $w_1$ , obtenemos  $g_2(A)f_2(A)v = w_1$ . Y así,  $w_1$  está también determinado de manera única y por tanto, es suma directa. ■

El teorema anterior se podría aplicar también cuando  $f = f_1 \cdots f_r$ , donde  $f_1, \dots, f_r$  son primos relativos, y  $W_i = \ker f_i(A)$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Entonces,

$$V = \oplus_{i=1}^r W_i,$$

como lo muestra el siguiente teorema.

**Teorema 1.22.**  *$V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  y  $A : V \rightarrow V$  un operador.  $P(t)$  es un polinomio tal que  $P(A) = 0$ , y*

$$P(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$$

*su factorización, con  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sus distintas raíces. Defínase  $U_i$  como el núcleo de  $(A - \lambda_i I)^{m_i}$ . Entonces  $V$  es suma directa de los subespacios  $U_1, \dots, U_r$ .*

Demostremos una variante de este teorema para nuestros propósitos más adelante. La variante es en el sentido de que si cambiamos el campo de los números complejos por el de los números reales, los polinomios irreducibles serán de la forma  $t - \lambda$  ó  $t^2 - 2\alpha t + \alpha^2 + \beta^2$ , que en el caso complejo, éste último tendría raíces  $\alpha \pm i\beta$ .

**Teorema 1.23.**  *$V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y  $A : V \rightarrow V$  un operador.  $P(t)$  es un polinomio tal que  $\ker P(A) = V$ , y*

$$(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_{r_1})^{m_{r_1}} (t^2 - 2\alpha_{r_1+1}t + \alpha_{r_1+1}^2 + \beta_{r_1+1}^2)^{m_{r_1+1}} \cdots (t^2 - 2\alpha_{r_2}t + \alpha_{r_2}^2 + \beta_{r_2}^2)^{m_{r_2}}$$

*su factorización, donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r_1}, \alpha_{r_1+1} + i\beta_{r_1+1}, \dots, \alpha_{r_2} + i\beta_{r_2}$  son sus distintas raíces, con todas las  $\lambda_j, \alpha_j, \beta_j$  reales. Defínase  $U_j$  como*

$$\ker (A - \lambda_j I)^{m_j} \text{ si } j \in \{1, \dots, r_1\} \quad (1.12)$$

ó

$$\ker (A^2 - 2\alpha_j A + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{m_j} \text{ si } j \in \{r_1 + 1, \dots, r_2\}. \quad (1.13)$$

Entonces

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_{r_1} \oplus U_{r_1+1} \oplus \cdots \oplus U_{r_2}.$$

**Demostración.** La prueba se hará por inducción y utilizaremos el resultado del teorema 1.21 repetidamente en cada paso inductivo.

Llamemos  $f_j(t)$ , a cada factor irreducible de  $P$ , es decir  $f_j(t)$  es igual a  $(t - \lambda_j)^{m_j}$  si  $j \in \{1, \dots, r_1\}$  ó  $(t^2 - 2\alpha_j t + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{m_j}$  si  $j \in \{r_1 + 1, \dots, r_2\}$ .

Para  $j = 1$ , es claro que  $\ker P(A) = \ker f_1(A)$  y aquí acaba la prueba. Si  $j = 2$ , estamos en el caso del teorema 1.21, en la cual  $P(A) = f_1(A)f_2(A)$ , y este caso también termina aquí.

Notemos que  $f_1(A)$  y  $f_2(A)$  pueden ser de cualquiera de las dos formas (como en (1.12) ó (1.13)), dado que son polinomios irreducibles en el campo de los números reales, y además, son primos relativos.

Supóngase el teorema cierto para  $j = k$ . Probemos que se cumple para  $j = k + 1$ . Tenemos que probar que

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_{k+1}.$$

Defínase  $h(t) = f_1(t) \cdots f_k(t)$ ,  $W = \ker h(A)$  y  $U_{k+1} = \ker f_{k+1}(A)$ . Es claro que  $h(t)$  y  $f_{k+1}(t)$  son primos relativos y

$$P(A) = h(A)f_{k+1}(A) = 0.$$

Por el teorema 1.21 se tiene que  $V = W \oplus U_{k+1}$ . Por hipótesis

$$W = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k,$$

por tanto,

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k \oplus U_{k+1},$$

como se quería. ■

**Observación 1.24.** Notemos que los subespacios invariantes  $U_k$ , tienen dimensión  $m_k$ , la cual es la multiplicidad algebraica del valor propio  $\lambda_k$ . Recordando que si la multiplicidad geométrica es igual a la algebraica, entonces el subespacio propio, que tiene dimensión  $m_k$ , es igual al subespacio  $U_k$ . Si la multiplicidad geométrica es menor que la algebraica, entonces es menor que  $m_k$ , y el subespacio que tiene dimensión  $m_k$  es el subespacio propio generalizado, por lo que coincide con la dimensión de  $U_k$ , es decir,  $U_k = V'_{\lambda_k}$ .

---

### § 1.7. La forma normal de Jordan

**Definición 1.11.**  $V$  es un espacio vectorial sobre una campo  $K$ , y  $S$  un conjunto de operadores de  $V$ .  $W$  es un subespacio de  $V$ . Diremos que  $W$  es un subespacio  $S$ -invariante de  $V$  si  $BW$  está contenido en  $W$ , para todo  $B$  en  $S$ .

**Definición 1.12.** Diremos que  $V$  es un  $S$ -espacio simple si  $V \neq 0$  y los únicos subespacios  $S$ -invariantes son  $V$  y el subespacio cero.

**Observación 1.25.**  $A : V \rightarrow V$  es un operador tal que  $AB = BA$  para todo  $B \in S$ . Entonces la imagen y el núcleo de  $A$  son subespacios  $S$ -invariantes de  $V$ , pues si tomamos un elemento en la imagen de  $A$ , digamos  $w = Av$ , para algún  $v \in V$ , entonces  $Bw = BAv = ABv$ , el cual es un elemento en la imagen de  $A$  y así, la imagen de  $A$  es  $S$ -invariante. Ahora, si  $u$  un elemento en el núcleo de  $A$ . Entonces  $ABu = BAu = 0$ . De aquí que  $Bu$  está en el núcleo de  $A$  y por tanto, es  $S$ -invariante. Además, si  $f \in K[t]$ , entonces  $f(A)B = Bf(A)$ , para toda  $B \in S$ .

Cambiemos ahora al campo de los números complejos.  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  y  $A : V \rightarrow V$  un operador lineal.

**Definición 1.13.** Tomemos  $\lambda \in \mathbb{C}$  y  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ . Diremos que  $v$  es  $(A - \lambda I)$ -cíclico, si existe un entero  $r \geq 1$  tal que  $(A - \lambda I)^r v = 0$ . El entero más pequeño con esta propiedad se llama período de  $v$ , relativo a  $A - \lambda I$ . Si  $r$  es el período de  $v$ , entonces  $(A - \lambda I)^k v \neq 0$  para cualquier entero  $0 \leq k < r$ .

**Definición 1.14.** El espacio vectorial  $V$  se dirá cíclico, si existe algún número  $\lambda$  y un elemento  $v \in V$  para los cuales  $V$  el cual es  $(A - \lambda I)$ -cíclico.

**Lema 1.26.**  $v \neq 0$  es  $(A - \lambda I)$ -cíclico, con período  $r$ . Entonces los elementos

$$v, (A - \lambda I)v, (A - \lambda I)^2 v, \dots, (A - \lambda I)^{r-1} v \quad (1.14)$$

son linealmente independientes.

**Demostración.** Por simplicidad, hagamos  $B = A - \lambda I$ . Supóngase que los elementos (1.14) del lema son linealmente dependientes. Entonces, por la dependencia lineal podemos escribir

$$c_1 Bv + \cdots + c_s B^s v = 0.$$

con  $s \leq r - 1$ . Defínase entonces el polinomio

$$f(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_s t^s.$$

Así que,  $f(B)v = 0$ . Por hipótesis se tiene también que  $B^r v = 0$ . Hagamos  $g(t) = t^r$ .  $h$  es el máximo común divisor de  $f$  y  $g$ . Entonces podemos escribir

$$h = f_1 f + g_1 g,$$

para algunos polinomios  $f_1, g_1$ . Así que,

$$h(B)v = f_1(B)f(B)v + g_1(B)g(B)v = 0.$$

Pero como  $h$  divide a  $t^r$  y es de grado  $\leq s \leq r - 1$ , entonces  $h(t) = t^d$ , con  $d < r$ . Lo cual contradice la hipótesis de que  $r$  es el período de  $v$ . Por tanto, los elementos (1.14) son linealmente independientes. ■

El resultado principal en este capítulo era llegar a la forma normal de Jordan y ver de que manera se expresa su matriz asociada. Todo esto se resume en el siguiente teorema.

**Teorema 1.27** (Forma canónica de Jordan).  *$V$  es un espacio vectorial de dimensión finita sobre los números complejos. Supóngase que  $V \neq 0$ .  $A : V \rightarrow V$  es un operador lineal. Entonces  $V$  puede ser expresado como suma directa de subespacios cíclicos  $A$ -invariantes. Además, existe una base de  $V$  tal que la matriz asociada con  $A$  es de la forma*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} \lambda_s & 1 \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_s \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

**Demostración.** Tómesese el polinomio característico  $P(t)$  de  $A$  con factorización

$$P(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}.$$

Por el teorema 1.23 y la observación 1.24 tenemos que

$$V = V'_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V'_{\lambda_s},$$

donde  $V'_{\lambda_k} = \ker(A - \lambda_k I)^{m_k}$ ,  $k = 1, \dots, s$ . Si  $u \in V'_{\lambda_k}$ , entonces  $(A - \lambda_k I)^{m_k} u = 0$ . Además,  $(A - \lambda_k I)^{m_k-1} u \neq 0$ , y así,  $V'_{\lambda_k}$  es cíclico para cada  $k = 1, \dots, s$ . Ahora, es claro que  $A(A - \lambda_k I) = (A - \lambda_k I)A$ , Entonces

$$(A - \lambda_k I)^{m_k} Au = A(A - \lambda_k I)^{m_k} u = 0,$$

lo cual implica que  $Au$  está en  $V'_{\lambda_k} = \ker(A - \lambda_k I)^{m_k}$ . Luego,  $V'_{\lambda_k}$  es  $A$ -invariante para cada  $k = 1, \dots, s$ .

Sólo falta ver la forma matricial asociada con  $A$ .  $v$  es tal que hace a  $V'_{\lambda_k}$  cíclico y  $\dim V'_{\lambda_k} = m_k$ , entonces el lema 1.26 implica que

$$\{(A - \lambda_k I)^{m_k-1} v, \dots, (A - \lambda_k I)v, v\}$$

es una base para  $V'_{\lambda_k}$ . Si aplicamos  $A$  a cada elemento de esta base, vemos que para cada  $j$  se tiene,

$$\begin{aligned} A(A - \lambda_k I)^j v &= (A - \lambda_k I)^j Av \\ &= (A - \lambda_k I)^j (Av - \lambda_k v + \lambda_k v) \\ &= (A - \lambda_k I)^j [(A - \lambda_k I)v + \lambda_k v] \\ &= (A - \lambda_k I)^{j+1} v + \lambda_k (A - \lambda_k I)^j v. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Para  $j = m_k - 1$ , se tiene al primer elemento de la base bajo el operador  $A$ , es decir,

$$\begin{aligned} A(A - \lambda_k I)^{m_k-1} v &= (A - \lambda_k I)^{m_k} v + \lambda_k (A - \lambda_k I)^{m_k-1} v \\ &= \lambda_k (A - \lambda_k I)^{m_k-1} v, \end{aligned}$$

el cual es el primer vector columna (vector de coordenadas)  $(\lambda_k, 0, \dots, 0)^T$  de la matriz asociada con  $A$ .

Si  $j = m_k - 2$  se tiene

$$A(A - \lambda_k I)^{m_k-2} v = (A - \lambda_k I)^{m_k-1} v + \lambda_k (A - \lambda_k I)^{m_k-2} v$$

y el siguiente vector columna es  $(1, \lambda_k, 0, \dots, 0, 0)^T$ . Siguiendo con este proceso hasta  $j = 0$ , se llega a que la matriz es

$$\begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

Como  $V$  se expresa como suma directa de subespacios  $A$ -invariantes

$$V = V'_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V'_{\lambda_s},$$

y para cada  $k = 1, \dots, s$  tenemos una base para cada subespacio  $V'_{\lambda_k}$  de la forma

$$\{(A - \lambda_k I)^{m_k-1} v_k, \dots, (A - \lambda_k I)v_k, v_k\},$$

donde  $v_k$  es vector propio determinado por  $\lambda_k$  de período  $m_k$ . Entonces una base ordenada para  $V$  estará conformada por la unión de las bases ordenadas de los subespacios  $V'_{\lambda_k}$ , y es de la forma

$$\{(A - \lambda_1 I)^{m_1-1} v_1, \dots, (A - \lambda_1 I)v_1, v_1, \dots, (A - \lambda_s I)^{m_s-1} v_s, \dots, (A - \lambda_s I)v_s, v_s\}.$$

Por tanto, la matriz asociada a  $A$  con respecto a esta base es

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix} & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} \lambda_s & 1 \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_s \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

como se quería. ■

Otra versión de éste teorema está dada en [9] y está probado en Coddington and Levinson [C/L] ó en Hirsch and Smale [H/S] y se resume en el siguiente teorema.

**Teorema 1.28** (Forma canónica de Jordan). *A es una matriz real con valores propios reales  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, s$  y valores propios complejos  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$  y  $\bar{\lambda} = \alpha_k - i\beta_k$ ,  $k = j + 1, \dots, n$ . Entonces existe una base*

$$\{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, u_{s+1}, \dots, v_n, u_n\}$$

para  $\mathbb{R}^{2n+s}$ , donde  $v_k$ ,  $k = 1, \dots, s$  y  $w_k$ ,  $k = s + 1, \dots, n$  son vectores propios generalizados de  $A$ ,  $u_k = \text{Re}(w_k)$  y  $v_k = \text{Im}(w_k)$  para  $k = s + 1, \dots, n$ , tal que la matriz

$$P = [v_1 \cdots v_s v_{s+1} u_{s+1} \cdots v_n u_n]$$

es invertible y

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

donde los bloques elementales de Jordan  $B = B_k$ ,  $k = 1, \dots, r$  son de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

para  $\lambda$ , un valor propio real de  $A$ , ó de la forma

$$\begin{bmatrix} D & I_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D & I_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

con

$$D = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

para  $\lambda = \alpha + i\beta$  un valor propio complejo de  $A$ .

Otra forma que utilizaremos (por lo que le llamaremos lema) aparece en [10], página 97, y es la siguiente.

**Lema 1.29.**  *$A$  es una matriz real de  $n \times n$ . Existe una matriz real no singular  $Q$  tal que la matriz  $J = QAQ^{-1}$  es una matriz diagonal por bloques de las siguientes formas:*

(i) *Bloques de tamaño  $q \times q$  correspondiente al divisor  $(\lambda - \lambda_i)^q$*

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

(ii) *Bloques de tamaño  $2r \times 2r$  correspondientes al divisor elemental  $(\lambda^2 - \eta_k \lambda + \gamma)^r$*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \gamma_k \\ 1 & \eta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & \gamma_k \\ 1 & \eta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & & & & \begin{bmatrix} 0 & \gamma_k \\ 1 & \eta_k \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Estas tres formas de Jordan son equivalentes o similares si y sólo si las matrices son del mismo tamaño con el mismo número de bloques (submatrices) y cada bloque con el mismo valor propio  $\lambda_k$  (junto con su conjugado  $\bar{\lambda}_k$ ) para las tres. Además, el subespacio propio generalizado  $V'_{\lambda_k}$  asociado a  $\lambda_k$  tiene la misma dimensión en el bloque correspondiente de cada una de las formas. De igual manera,  $V'_{\bar{\lambda}}$  debe tener la misma dimensión en las tres formas. Es decir, en la forma del teorema

1.27, si un bloque con valor propio  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$  es de tamaño  $r \times r$ , entonces consideraremos también el bloque con valor propio  $\bar{\lambda}_k = \alpha_k - i\beta_k$  y ambos serán un solo bloque de tamaño  $2r \times 2r$ ,

$$J_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_k & 1 \end{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_k & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Los  $r$  vectores propios generalizados de tamaño  $2r$  asociados a  $\lambda_k$  son

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (1.25)$$

Donde el  $r$ -ésimo vector tiene el 1 en la  $k$ -ésima componente. Los  $r$  vectores propios generalizados asociados a  $\bar{\lambda}_k$  son

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad (1.26)$$

donde el primer vector tiene el 1 en la componente  $r + 1$ . Luego, el subespacio propio generalizado  $V'_{\lambda_k}$  asociado a los valores propios  $\lambda_k$ , tiene dimensión  $r$  sobre los números complejos, al igual que  $V'_{\bar{\lambda}_k}$ .

En la forma de Jordan del teorema 1.28, tendremos el bloque correspondiente de tamaño  $2r \times 2r$  con valores propios  $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$  como

$$J_2 = \begin{bmatrix} D_k & I_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D_k & I_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_k & I_k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_k \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

con

$$D_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{bmatrix}, I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$



Los vectores propios generalizados asociados a  $\lambda_k$  son

$$\left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (1.29)$$

y los vectores propios generalizados asociados a  $\bar{\lambda}_k$  son

$$\left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (1.30)$$

Así que, el subespacio propio generalizado  $V'_{\lambda_k}$  asociado a  $\lambda_k$  tiene dimensión  $r$ , al igual que  $V'_{\bar{\lambda}_k}$ .

Finalmente, en la forma del teorema 1.29, el bloque de tamaño  $2r \times 2r$  correspondiente es

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \gamma_k \\ 1 & \eta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & \gamma_k \\ 1 & \eta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & & & & \begin{bmatrix} 0 & \gamma_k \\ 1 & \eta_k \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

donde  $\eta_k = 2\alpha_k$  y  $\gamma_k = -(\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ . Luego, los valores propios son  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$  y  $\bar{\lambda}_k = \alpha_k - i\beta_k$ . Ahora, los vectores propios generalizados asociados con  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$  son

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\alpha_k + i\beta_k \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_k + i\beta_k \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\alpha_k + i\beta_k \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (1.32)$$

y para el valor propio  $\bar{\lambda}_k = \alpha_k - i\beta_k$  los vectores propios generalizados son

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\alpha_k - i\beta_k \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_k - i\beta_k \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\alpha_k - i\beta_k \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (1.33)$$

Luego, el subespacio propio generalizado  $V'_{\lambda_k}$  asociado a  $\lambda_k$  tiene dimensión  $r$  sobre  $\mathbb{C}$ , al igual que  $V'_{\bar{\lambda}_k}$ .

Así que, bajo estas restricciones, para cada  $k$ , las dimensiones de los subespacios propios generalizados  $V'_{\lambda_k}$  y  $V'_{\bar{\lambda}_k}$  coinciden en los tres teoremas. Por tanto, las tres formas de Jordan son similares y así, existen cambios de coordenadas que nos lleven de una forma a otra.

### 1.7.1. Proyecciones

Primero, tomaremos la forma de Jordan del lema 1.29. Para nuestro proposito, agruparemos los bloques de la forma (1.22) con el mismo valor propio real  $\lambda_k$  en un bloque de la forma

$$B_k = \lambda_k I_k + N_k$$

donde  $B_k$  es una matriz  $m_k \times m_k$ , con  $m_k$  como la multiplicidad del valor propio  $\lambda_k$ ,  $I_k$  es la matriz identidad de tamaño  $m_k \times m_k$  y  $N_k$  es una matriz nilpotente de tamaño  $m_k \times m_k$  la cual posiblemente consta sólo de 1's en la supradiagonal.

Además, agruparemos todos los bloques de la forma (1.31) con el mismo valor  $\eta_k$  dentro de un bloque de la forma

$$C_k = \begin{bmatrix} D_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & D_{k_1} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

con  $D_{k_q}$  de la forma (1.31) con el mismo valor  $\eta_k$ . Así, vemos que la matriz  $J$  toma la forma

$$J = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & B_s & \\ & & & C_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & C_p \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Donde los bloques  $B_k$  contienen los  $s$  distintos valores propios reales, y los bloques  $C_k$  contienen los  $p$  distintos valores  $\eta_k$ . Nótese que cada  $\eta_k$  corresponde a una pareja conjugada de valores propios complejos con parte real  $\eta_k/2 = \alpha_k$ .

Hagamos  $B_{k+j} = C_j$ , y definase la  $k + j$  proyección de matrices  $P_i$  como

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & I_i & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

donde  $I_i$  es la matriz identidad de dimensión igual a la del bloque  $B_i$ . Además  $I_i$  aparece en la posición del bloque correspondiente  $B_i$ . No es difícil observar que esas proyecciones satisfacen las siguientes condiciones:

$$\sum_{i=1}^{s+p} P_i = I. \quad (1.37)$$

$$P_i P_j = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } P_i^2 = P_i \text{ para toda } i = 1, \dots, s+p. \quad (1.38)$$

$$P_i J = J P_i \text{ para toda } i = 1, \dots, s+p. \quad (1.39)$$

$$J P_i = (\lambda_i I + N_i) P_i, \text{ donde } N_i \text{ es nilpotente para toda } i = 1, \dots, s. \quad (1.40)$$

$$J P_i = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & B_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Donde  $B_i$  es oscilatoria y todos los valores propios tienen parte real  $\beta_i/2 = \alpha_i$  para toda  $i = s+1, \dots, s+p$ .





## *Ecuaciones diferenciales*

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes  $\dot{x} = Ax$ , se requiere saber como son sus soluciones y como se involucran los valores y vectores propios de la matriz  $A$ . En este capítulo se abordan algunas formas que toman tales soluciones para propósitos del desarrollo de la teoría de control.

---

### § 2.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

El análisis se empezará sobre las ecuaciones diferenciales, cuya expresión general es

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.1)$$

donde  $f$  es continua sobre un abierto  $G \in \mathbb{R}^{n+1}$ , es decir, el mapeo

$$\mathbb{R}^{n+1} \supset G \ni (t, x) \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

es una función continua.

Encontrar una solución de (2.1), es encontrar una función vectorial

$$x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

que es una función continuamente diferenciable y satisface (2.1).

Consideremos primeramente la ecuación diferencial (escalar)

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = ax, \quad a \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

La función  $x(t)$  que satisface (2.2) se encuentra de una manera muy sencilla, al separar variables e integrar obtenemos

$$x(t) = ke^{at}$$

La cual es una familia parametrizada de soluciones de (2.2) con parámetro  $k$ . Una solución particular sería, agregar condiciones iniciales a (2.2), es decir, si se quiere encontrar la solución que pasa por  $x(0) = x_0$ , se tiene

$$x_0 = x(0) = ke^{a \cdot 0} = k$$

lo cual significa que  $x(t) = x_0 e^{at}$  es la solución que pasa por el punto  $x(0) = x_0$ . A estas curvas se les conoce con el nombre de curvas solución, órbitas ó trayectorias, las cuales

- (i) Divergen si  $a > 0$  ( $x(t) \rightarrow \infty$  si  $t \rightarrow \infty$ ).
- (ii) Convergen a 0 si  $a < 0$  ( $x(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ ).
- (iii) son constantes si  $a = 0$  ( $x(t) \rightarrow x_0$  si  $t \rightarrow \infty$ ).

Un caso más general de (2.2) es de la forma

$$\dot{x} = ax + g(t) \quad (2.3)$$

Donde  $g(t)$  es independiente de la variable  $x$ , en cuyo caso las soluciones se obtienen al multiplicar la ecuación por el factor integrante  $\mu = e^{-\int a dt} = e^{-at}$ , a saber

$$e^{-at}(\dot{x} - ax) = e^{-at}g,$$

lo cual implica

$$e^{-at}x = \int_0^t e^{-as}g(s)ds + k.$$

Bajo el problema de condiciones iniciales en  $t = 0$ ,  $x(0) = x_0$ , entonces  $k = x_0$ , así, la solución particular es

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}g(s)ds.$$

Los sistemas de la forma (2.2) son *autónomos* o *invariantes en el tiempo*, mientras que los de la forma (2.3) son sistemas *no-autónomos* o *variantes en el tiempo*.

El siguiente resultado, aunque no lo demostraremos, nos da condiciones para la existencia de las soluciones de los sistemas no-autónomos.

**Teorema 2.1.** *(De existencia y unicidad). Consideremos el problema con condiciones iniciales*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.4)$$

con  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $|t - t_0| \leq a$ ;  $D = \{x : \|x - x_0\| \leq d\}$ ,  $a, d \in \mathbb{R}$  positivos. Si la función vectorial satisface las siguientes condiciones:

- (i)  $f(t, x)$  es continua en  $G = [t_0 - a, t_0 + a] \times D$ .
- (ii)  $f(t, x)$  satisface la condición de Lipschitz en  $x$ , es decir, existe una constante  $K$  tal que

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq K|x - \tilde{x}|.$$

Entonces (2.4) tiene una y solo una solución para  $|t - t_0| \leq \min\{a, \frac{d}{M}\}$ , con

$$M = \sup_G \|f\|$$

Hay varias maneras de demostrar este resultado, dos de estas muy conocidas son, el método de Picard y el método de contracción.

## § 2.2. Sistemas de EDO

En esta sección nos enfocaremos a resultados que tienen que ver con soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

Primeramente hay que destacar que los teoremas para ecuaciones diferenciales escalares, también son válidas para sistemas de ecuaciones diferenciales, en particular, el teorema de existencia y unicidad.

Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n\end{aligned}$$

y escrita en forma matricial

$$\dot{x} = Ax + b \quad (2.5)$$

donde  $\dot{x} = Ax$  es la parte homogénea del sistema.

A continuación daremos una representación del teorema de existencia y unicidad para sistemas de EDO con valores iniciales. Antes requeriremos del siguiente lema.

**Lema 2.2.** *Sea  $A$  una Matriz cuadrada, entonces*

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

**Demostración.** Para probar el lema, requeriremos de un resultado de análisis para calcular la derivada de una función exponencial, intercambiando dos procesos de límites convergentes, cuando uno de ellos es uniformemente convergente (teorema de límite doble [22,pag. 141]). Dado que  $A$  conmuta consigo misma, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \frac{e^{Ah} - I}{h} \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( A + \frac{A^2 h}{2!} + \cdots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\ &= Ae^{At}.\end{aligned}$$

Esta última igualdad se sigue del hecho que la serie cuyo límite es  $e^{Ah}$ , converge uniformemente para  $|h| < 1$  y podemos así intercambiar ambos límites. ■

**Teorema 2.3.** (*Teorema Fundamental Para Sistemas Lineales*).  $A$  es una matriz  $n \times n$ . Entonces para un  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  dado, el problema de valor inicial

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (2.6)$$

tiene solución única dada por  $x(t) = e^{At}x_0$ .

**Demostración.** Por el lema anterior tenemos que si  $x(t) = e^{At}x_0$ , entonces

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(e^{At}x_0) = Ae^{At}x_0 = Ax(t),$$

para toda  $t \in \mathbb{R}$ . También tenemos que  $x(0) = x_0I = x_0$ . Así que  $x(t) = e^{At}x_0$  es solución. Para ver que ésta es solución única, tomemos  $x(t)$  cualquier solución de (2.6) y

$$y(t) = e^{-At}x(t).$$

Aplicando el lema (2.2) junto con el hecho que  $x(t)$  es una solución tenemos

$$\begin{aligned} y'(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}x'(t) \\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para toda  $t \in \mathbb{R}$ , puesto que  $e^{-At}$  y  $A$  conmutan. Por lo que  $y(t)$  es constante. Haciendo  $t = 0$  vemos que  $y(t) = x_0$  y de aquí se sigue que cualquier solución de (2.6) está dada por  $x(t) = e^{At}y(t) = e^{At}x_0$ . Esto completa la prueba. ■

Veamos ahora, la primera caracterización de las soluciones de sistemas lineales, con valores propios distintos. Considérese el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

**Teorema 2.4.** Considere el sistema (2.7).  $v$  es un vector propio de  $A$  correspondiente al valor propio complejo  $\lambda$ . Entonces  $x(t) = ve^{\lambda t}$  es solución de (2.7).

**Demostración.** Dado que  $v$  es vector propio de  $\lambda$ , entonces  $Av = \lambda v$ . Luego,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \lambda ve^{\lambda t} \\ &= Ave^{\lambda t} \\ &= Ax(t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 2.5.** La solución general del sistema (2.7) es de la forma

$$x(t) = c_1v_1e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_nv_ne^{\lambda_n t},$$

cuando  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sean los valores propios distintos de  $A$ , y  $v_1, \dots, v_n$  los vectores propios correspondientes.



**Demostración.** Derivando  $x(t)$  obtenemos

$$\dot{x}(t) = c_1 \lambda_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \lambda_n v_n e^{\lambda_n t}.$$

Dado que  $Av_i = \lambda_i v_i$  para  $i = 1, \dots, n$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= c_1 A v_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n A v_n e^{\lambda_n t} \\ &= A(c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n v_n e^{\lambda_n t}) \\ &= A x(t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Corolario 2.6.** *Considere el sistema (2.7).  $v$  es un vector propio de  $A$  correspondiente al valor propio complejo  $\lambda$ . Entonces  $x(t) = \bar{v} e^{\bar{\lambda} t}$  es también solución de (2.7).*

Puede suceder que el sistema (2.7) tenga solución real, pero se obtiene un vector propio complejo  $v$  asociado con un valor propio complejo  $\lambda$ , y así, la solución compleja de la forma  $x(t) = v e^{\lambda t}$ . Si  $\lambda = \alpha + i\beta$ , podemos cambiar la forma de la solución a

$$x(t) = v e^{\alpha t} (\cos t + i \sin t)$$

y por el corolario 2.6, también

$$x(t) = \bar{v} e^{\alpha t} (\cos t - i \sin t).$$

Si definimos

$$v_1 = \frac{1}{2}(v + \bar{v}) \quad y \quad v_2 = \frac{i}{2}(-v + \bar{v}) \quad (2.8)$$

son vectores columna reales y, podemos observar que

$$\operatorname{Re}(v) = v_1, \quad \operatorname{Im}(v) = v_2,$$

y llegamos al siguiente teorema:

**Teorema 2.7.** *Considere el sistema (2.7).  $\lambda = \alpha + i\beta$  es un valor propio complejo de  $A$  y  $v$  su correspondiente vector propio.  $v_1$  y  $v_2$  son los vectores columna definidos en (2.8). Entonces*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (v_1 \cos \beta t - v_2 \sin \beta t) e^{\alpha t} \\ x_2(t) &= (v_2 \cos \beta t + v_1 \sin \beta t) e^{\alpha t} \end{aligned}$$

*son soluciones reales linealmente independientes de (2.7).*

El siguiente resultado se encuentra en [8], página 380.

**Teorema 2.8.** *Considere el sistema*

$$\dot{x} = Ax \quad (2.9)$$

*Para cada valor propio  $\lambda_k$  de  $A$  tal que su multiplicidad algebraica  $m_k$  coincide con la geométrica, se tiene una solución de (2.9) de la forma*

$$x_k(t) = c_{k1} v_{k1} e^{\lambda_k t} + \cdots + c_{k m_k} v_{k m_k} e^{\lambda_k t} = e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} c_{kj} v_{kj}$$

donde los  $v_{jl}$  son vectores propios (complejos) linealmente independientes asociados a  $\lambda_k$ . Para los  $\lambda_k$  de multiplicidad  $m_k$  con un sólo vector propio, se pueden encontrar  $m_k$  soluciones linealmente independientes de la forma

$$\begin{aligned} x_{k1}(t) &= v_{k1}e^{\lambda_k t} \\ x_{k2}(t) &= v_{k1}te^{\lambda_k t} + v_{k2}e^{\lambda_k t} \\ &\vdots \\ x_{km_k}(t) &= v_{k1}\frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!}e^{\lambda_k t} + v_{k2}\frac{t^{m_k-2}}{(m_k-2)!}e^{\lambda_k t} + \cdots + v_{km_k}e^{\lambda_k t}, \end{aligned}$$

**Observación 2.9.** La combinación lineal de las soluciones  $x_{kl}(t)$ ,  $l = 1, \dots, m_k$ , es también solución de (2.9) y mediante un reordenamiento adecuado toma la forma

$$\begin{aligned} x_k(t) &= x_{k1}(t) + x_{k2}(t) + \cdots + x_{km_k}(t) \\ &= \sum_{j=1}^{m_k} \frac{t^{m_k-j}}{(m_k-j)!} v_{k1} e^{\lambda_k t} + \sum_{j=2}^{m_k} \frac{t^{m_k-j}}{(m_k-j)!} v_{k2} e^{\lambda_k t} + \cdots + \sum_{j=m_k}^{m_k} \frac{t^{m_k-j}}{(m_k-j)!} v_{km_k} e^{\lambda_k t} \\ &= P_{k1}(t)v_{k1}e^{\lambda_k t} + P_{k2}(t)v_{k2}e^{\lambda_k t} + \cdots + P_{km_k}(t)v_{km_k}e^{\lambda_k t} \\ &= e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t)v_{kj}, \end{aligned}$$

donde los  $v_{kj}$  son vectores propios generalizados complejos determinados por  $\lambda_k$ .

Nótese que la forma de la solución del primer y segundo caso son semejantes, con la salvedad de que en el primero los polinomios son constantes. En cualquiera de los casos, si tomamos la suma sobre todos los valores propios, la solución general es de la forma

$$x(t) = \sum_{k=1}^s e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t)v_{kj}.$$



## Controlabilidad

---

### § 3.1. Controlabilidad

Un sistema de control es un evento natural, ó, dicho en forma coloquial, es una “parte de mundo real” que puede ser influenciado por su entorno a través de las llamadas entradas, y es capaz de modificarlo mediante las llamadas salidas. La manera de como evoluciona su función interna está determinada por sus variables de estado, las cuales son denotadas con  $x$ . Las entradas se dividen en dos grupos: Los controles admisibles, denotados por  $u$ , los cuales podemos manipular, y las perturbaciones, denotadas por  $w$ , este tipo de entradas no las podemos manipular. Al igual que las entradas, las salidas también se dividen en dos grupos: Las salidas medibles, denotadas por  $y$ , como su nombre lo dice, son salidas que podemos medir. En algunas ocasiones se introduce otra variable más, que será la variable de salidas a ser controladas, y se denota con  $z$ .

El modelo matemático general para estos eventos a controlar es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ ,  $C \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ .

Para nuestro interés de controlabilidad, solo trabajaremos con la dinámica entre controles y estados del sistema, es decir, con

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

El conjunto de funciones de control admisibles es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^m$  y se denota por  $\Omega$ .

**Definición 3.1.** Se define el casco convexo de  $\Omega$  como la intersección de todos los conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^m$  que contienen a  $\Omega$  y se denota por  $CH(\Omega)$ .

**Definición 3.2.** El sistema (3.1) con el conjunto admisible  $\Omega$  es llamado completamente controlable si para cada par de puntos  $x_0, x_1$  en  $\mathbb{R}^n$ , existe un control admisible acotado  $u(t)$  en algún intervalo finito  $0 \leq t \leq t_1$  el cual envía  $x_0$  a  $x_1$ . Específicamente, la solución  $x(t, u(\cdot))$  de (3.1), satisface las condiciones a la frontera  $x(0, u(\cdot)) = x_0$  y  $x(t_1, u(\cdot)) = x_1$ .

**Definición 3.3.** El sistema (3.1) se dice que es nulo-controlable si existe un conjunto abierto  $V \in \mathbb{R}^n$  que contenga al origen y para el cual, cualquier  $x_0 \in V$  puede ser controlado a  $x_1 = 0$  en un intervalo de tiempo finito. Diremos que (3.1) es globalmente nulo-controlable si  $V$  puede ser tomado como  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 3.4.** Definiremos el conjunto alcanzable en el tiempo  $t_1$ , como el conjunto de todos los estados hacia los que puede ser dirigido un estado inicial  $x_0$  en el intervalo de tiempo  $t_0 \leq t \leq t_1$  para todos los controles  $u$  en  $\Omega$  y lo denotamos como  $R(t_1)$ .

Si  $x(t)$  denota la solución correspondiente con la condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , el conjunto de alcanzabilidad  $R(t_1)$  es el conjunto de todos los puntos extremos  $x(t_1)$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 3.5.** Definiremos el conjunto alcanzable como la unión sobre los  $t > 0$  de los conjuntos de alcanzabilidad  $R(t)$  y lo denotamos como  $R_\infty$ .

Veamos como deducir una expresión matemática que nos garantice cuando un sistema es controlable, para ello requeriremos de los siguientes resultados.

**Teorema 3.1** ([7, pag. 157]).  $\Omega$  es un conjunto compacto y convexo en  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathcal{F}$  es la familia de todas las funciones vectoriales medibles  $u(t) \in \Omega$  en un intervalo real compacto. Entonces  $\mathcal{F}$  es débilmente compacto (por sucesiones).

**Teorema 3.2.** Considere el sistema de control (3.1) con conjunto admisible compacto  $\Omega$ , estado inicial  $x_0$  y controles  $u(t) \in \Omega$  en  $\mathcal{J} : t_0 \leq t \leq t_1$ . El conjunto de alcanzabilidad  $R(t_1)$  es compacto, convexo y varía continuamente con  $t_1$  en  $t_1 > t_0$ . Más aún, si  $\Omega$  se extiende a su casco convexo  $CH(\Omega)$ , y si  $R_{CH}(t_1)$  es el correspondiente conjunto de alcanzabilidad para controles admisibles en  $CH(\Omega)$  en  $\mathcal{J}$ , entonces  $R_{CH}(t_1) = R(t_1)$ .

**Demostración.** Para probar que  $R(t_1)$  es compacto, probaremos primero que toda sucesión  $\{x_i(t_1)\}$  en  $R(t_1)$  contiene una subsucesión que converge a un punto  $\bar{x}(t_1)$  en  $R(t_1)$ . Considere las soluciones correspondientes  $x_r(t)$  y controles  $u_r(t) \in \Omega$  en  $t_0 \leq t \leq t_1$  para  $r = 1, 2, 3, \dots$ . La fórmula de variación de parámetros establece que

$$x_r(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t-s)}Bu_r(s)ds.$$

Por el teorema 3.1, el conjunto de todos los controles medibles  $u(t) \in \Omega$  es débilmente compacto, así que, existe una subsucesión  $u_{r_i}(t)$  que converge débilmente a un control  $\tilde{u}(t) \in \Omega$  en  $t_0 \leq t \leq t_1$ . El hecho de que  $\Omega$  sea compacto, nos asegura que cada  $u \in \Omega$  es acotada, en particular, la sucesión  $u_{r_i}(t)$  es una sucesión de funciones acotadas. Así que, por el teorema de convergencia dominada, se obtiene que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t-s)}Bu_{r_i}(s)ds = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t-s)}B\tilde{u}(s)ds.$$

Sea  $\tilde{x}(t)$  la solución correspondiente al control  $\tilde{u}(t)$  tal que en  $t_0 \leq t \leq t_1$  tenemos

$$\tilde{x}(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t-s)}B\tilde{u}(s)ds = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{r_i}(t).$$

Así que,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{r_i}(t_1) = \tilde{x}(t_1) \in R(t_1).$$

Notemos que  $e^{At}$  es continua en  $\mathcal{J}$  y  $B$  es constante, por tanto integrable en  $\mathcal{J}$ . Ahora, dado que  $\Omega$  es compacto, se tiene que para toda  $u \in \Omega$ , la solución  $x(t)$  es acotada para toda  $t \in \mathcal{J}$ . De

aquí que,  $R(t_1)$  es acotado. Luego,  $R(t_1)$  es compacto.

La demostración de la convexidad de  $R(t_1)$  la puede ver en [7, pag 165].

Fijaremos ahora la condición inicial  $x(t_0) = x_0$ . Estudiaremos la dependencia del conjunto  $R(t_1)$  en la variable de tiempo final  $t_1 > t_0$ . Si  $r > 0$ , se define la *nube* de  $R(t_1)$  como

$$N_r(R(t_1)) = \{x \in R(t_2) : |x - y| < r, y \in R(t_1)\}.$$

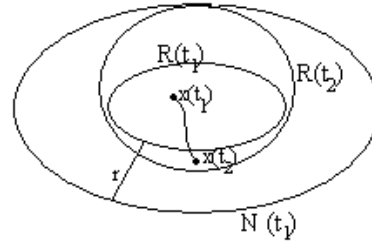
Ahora, es claro que si  $t_1 < t_2$ , entonces  $R(t_1) \subset R(t_2)$ . Se define una distancia entre  $R(t_1)$  y  $R(t_2)$  como

$$d(R(t_1), R(t_2)) = \inf_{r>0} \{R(t_2) \subset N_r(R(t_1))\}.$$

Mostraremos que si  $\epsilon > 0$  arbitrario, entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $d(R(t_1), R(t_2)) < \epsilon$  siempre que  $|t_1 - t_2| < \delta$ ; esto es, mostraremos que la correspondencia

$$t \mapsto R(t), \text{ para } t > 0$$

es un mapeo continuo de la recta real positiva sobre el espacio métrico de todos los subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$ . De aquí que,  $x(t) \in N_r(R(t_1)) \subset N_\epsilon(R(t_1))$  es continua, para  $t_1 \leq t \leq t_2$ , es decir, cada punto de  $R(t_2)$  está  $\epsilon$ -cercano a algún punto de  $R(t_1)$  y también cada punto de  $R(t_1)$  está  $\epsilon$ -cerca de algún punto de  $R(t_2)$ .



La nube de  $R(t_1)$ .

Tomemos un control  $\hat{u}(t) \in \Omega$  con solución  $\hat{x}(t)$  en  $t_0 \leq t \leq t_1 + 1$ . para  $t_0 < t_1, t_2 < t_1 + 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_2) - \hat{x}(t_1) &= e^{At_2}x_0 + e^{At_2} \int_{t_0}^{t_2} e^{-As}B\hat{u}(s)ds - \left( e^{At_1}x_0 + e^{At_1} \int_{t_0}^{t_1} e^{-As}B\hat{u}(s)ds \right) \\ &= e^{At_2}x_0 + e^{At_2} \int_{t_0}^{t_2} e^{-As}B\hat{u}(s)ds - \left( e^{At_1}x_0 + e^{At_1} \int_{t_0}^{t_1} e^{-As}B\hat{u}(s)ds \right) \\ &\quad + e^{At_2} \int_{t_0}^{t_1} e^{-As}B\hat{u}(s)ds - e^{At_2} \int_{t_0}^{t_1} e^{-As}B\hat{u}(s)ds \\ &= e^{At_2}x_0 + e^{At_2} \int_{t_0}^{t_1} e^{-As}B\hat{u}(s)ds - \left( e^{At_1}x_0 + e^{At_1} \int_{t_0}^{t_1} e^{-As}B\hat{u}(s)ds \right) \\ &\quad + e^{At_2} \int_{t_0}^{t_2} e^{-As}B\hat{u}(s)ds - e^{At_2} \int_{t_0}^{t_1} e^{-As}B\hat{u}(s)ds \\ &= (e^{At_2} - e^{At_1}) \left[ x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{-As}B\hat{u}(s)ds \right] + e^{At_2} \int_{t_0}^{t_2} e^{-As}B\hat{u}(s)ds \\ &\quad - e^{At_2} \int_{t_0}^{t_1} e^{-As}B\hat{u}(s)ds. \end{aligned}$$

En el intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1 + 1$  las funciones continuas  $e^{At}$  y  $e^{-At}$  satisfacen las cotas

$$|e^{At}| < C_1, \quad |e^{-At}| < C_1,$$

para alguna constante  $C_1$ . Por la integrabilidad de  $B$  y el hecho de que  $|\hat{u}(t)|$  es acotado, obtenemos la cota

$$|x_0| + \int_{t_0}^{t_1+1} |e^{-As}| |B\hat{u}(s)| ds < C_2.$$

Dado que una integral es una función continua

$$\left| \int_{t_1}^t e^{-As} B\hat{u}(s) ds \right| < \frac{\epsilon}{2C_1}$$

y

$$|e^{At} - e^{At_1}| \leq \left| \int_{t_1}^t A e^{-As} ds \right| < \frac{\epsilon}{2C_2}$$

para un prescrito  $\epsilon > 0$  y  $|t - t_1| < \delta$ . Así que, para  $|t_2 - t_1| < \delta$  tenemos

$$\begin{aligned} |\hat{x}(t_2) - \hat{x}(t_1)| &\leq |e^{At_2}| \cdot \left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-As} B(s) \hat{u}(s) ds \right| \\ &+ |e^{At_2} - e^{At_1}| \left[ \int_{t_0}^{t_1+1} |e^{-As}| \cdot |B(s) \hat{u}(s)| ds + |x_0| \right] \end{aligned}$$

y

$$|\hat{x}(t_2) - \hat{x}(t_1)| < C_1 \cdot \frac{\epsilon}{2C_1} + C_2 \cdot \frac{\epsilon}{2C_2} = \epsilon.$$

Ahora, tomemos  $\hat{x}(t_1) \in R(t_1)$  correspondiente a un control  $\hat{u}(t)$  en  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Defínase  $\hat{u}(t) \in \Omega$  en  $t_0 \leq t \leq t_1 + 1$ , asignándole los valores  $\hat{u}(t) = \hat{u}(t_1)$  en  $t_1 \leq t \leq t_1 + 1$  y tomamos  $\hat{x}(t)$  la solución correspondiente. Entonces  $\hat{x}(t_2) \in R(t_2)$  y

$$|\hat{x}(t_2) - \hat{x}(t_1)| < \epsilon.$$

Por otro lado, si  $\tilde{x}(t_2)$  es un punto en  $R(t_2)$  correspondiente al control  $\tilde{u}(t)$  en  $t_0 \leq t \leq t_2$ , de nuevo extendemos  $\tilde{u}(t) \in \Omega$  al intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1 + 1$  para obtener

$$|\tilde{x}(t_2) - \tilde{x}(t_1)| < \epsilon.$$

La construcción anterior muestra que la distancia entre  $R(t_1)$  y  $R(t_2)$  es menor que  $\epsilon$  siempre que  $|t_1 - t_2| < \delta$ , donde  $0 < \delta < 1$  depende de  $\epsilon$  y  $t_1$ . El mismo procedimiento muestra que la distancia entre  $R(t_0) = x_0$  y  $R(t_1)$  es menor que  $\epsilon$  siempre que  $|t_1 - t_2|$  sea suficientemente pequeño. Así que  $R(t_1)$  varía continuamente con  $t_1 > t_0$ .

Finalmente probaremos que  $R(t_1) = R_{CH}(t_1)$ , más brevemente,  $R = R_{CH}$ . Tenemos que  $R$  y  $R_{CH}$  son conjuntos compactos convexos y  $R \subset R_{CH}$ . Probaremos que  $R$  es denso en  $R_{CH}$  y consecuentemente,  $R = R_{CH}$ .

Primero tomemos  $u_{CH} \subset CH(\Omega)$  una función escalón con un número finito de valores sobre los intervalos disjuntos  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_s$  que componen a  $\mathcal{J}$ . Escribamos

$$u_{CH}(t) = u_{CH1} + u_{CH2} + \dots + u_{CHs},$$

donde  $u_{Hj}$  es constante en el  $j$ -ésimo intervalo  $\mathcal{J}_j \subset \mathcal{J}$  y cero en  $\mathcal{J}_k$ ,  $k \neq j$ . En el primer intervalo  $\mathcal{J}_1 : t_0 \leq t \leq \tau_1$  escribamos

$$u_{CH1} = \lambda_0 u_{01} + \cdots + \lambda_n u_{n1}$$

una combinación constante convexa de vectores  $u_{01}, \dots, u_{n1}$  en  $\Omega$ , donde la suma de los  $\lambda_r$  es igual a uno. Así que, si  $x_{CH1}(\tau)$  es el punto alcanzable correspondiente al control  $u_{CH1}$  en  $\mathcal{J}$ , entonces

$$\begin{aligned} x_{CH1}(\tau_1) &= e^{A\tau_1} x_0 + e^{A\tau_1} \int_{t_0}^{\tau_1} e^{-At} B u_{CH1}(t) dt \\ &= e^{A\tau_1} x_0 + e^{A\tau_1} \int_{t_0}^{\tau_1} e^{-At} B (\lambda_0 u_{01}(t) + \cdots + \lambda_n u_{n1}(t)) dt \\ &= e^{A\tau_1} x_0 + \sum_{r=0}^n \lambda_r e^{A\tau_1} \int_{t_0}^{\tau_1} e^{-At} B u_{r1}(t) dt \\ &= \left( \sum_{r=0}^n \lambda_r \right) e^{A\tau_1} x_0 + \sum_{r=0}^n \lambda_r e^{A\tau_1} \int_{t_0}^{\tau_1} e^{-At} B u_{r1}(t) dt \\ &= \sum_{r=0}^n \lambda_r \left( e^{A\tau_1} x_0 + e^{A\tau_1} \int_{t_0}^{\tau_1} e^{-At} B u_{r1}(t) dt \right). \end{aligned}$$

Dado que  $\sum_{r=0}^n \lambda_r = 1$ , se tiene que  $x_{CH1}$  es una combinación convexa de puntos de  $R$ , el cual es convexo, entonces existe un control  $u_1(t) \subset \Omega$  en  $\mathcal{J}_1$ , el cual dirige  $x_0$  a  $x_{CH}(\tau_1)$  como lo hace  $u_{CH1}$ . Ahora, tomamos  $x_{CH}$  como punto inicial y utilizamos el control  $u_{CH2}$  en  $\mathcal{J}_2 : \tau_1 \leq t \leq \tau_2$  para encontrar un control  $u_2(t) \subset \Omega$  en  $\mathcal{J}_2$  que dirija  $x_{CH}(\tau_1)$  al mismo punto  $x_{CH}(\tau_2)$  como lo hace  $u_{CH2}$ . Continuando con este procedimiento construimos el control

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \cdots + u_s(t) \subset \Omega$$

donde  $u_j(t) \equiv 0$  en  $\mathcal{J}_k$ , para  $k \neq j$ , el cual dirige  $x_0$  al mismo punto  $x_{CH}(t_1)$  como lo hace  $u_{CH}(t)$  en  $\mathcal{J}$ .

Dado que cada función medible  $u_{CH} \subset CH(\Omega)$ , se puede aproximar por medio de una sucesión de funciones simples (escalonadas) de  $CH_\Omega$  [lema 2.11, [17]], es decir, existe una sucesión  $\{u_{CHj}\} \subset CH(\Omega)$  de funciones simples que converge a  $u_{CH}$  en  $CH(\Omega)$ , y por lo hecho arriba, para cada  $j$  existe una función  $u_j$  la cual dirige a los mismos puntos que  $u_{CHj}$  en el mismo intervalo de tiempo. Así que, la sucesión  $\{u_j\}$  también aproxima a  $u_{CH}$ . Más aún, el hecho de ser  $\Omega$  compacto y toda función  $u_j \subset \Omega$  definida en el compacto  $\mathcal{J}$ , la aproximación es uniforme. Ahora, si tomamos las soluciones correspondientes  $x_{CH}(t)$  de  $u_{CH}(t)$  y  $x_j(t)$  de  $u_j(t)$ , por el teorema de convergencia dominada se obtiene que

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} x_j(t) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left( e^{At} x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} B u_j(s) ds \right) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left( e^{At} x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} B u_{CHj}(s) ds \right) \\ &= x_{CH}(t). \end{aligned}$$

De aquí que,  $R$  es denso en  $R_{CH}$ . Luego,  $R = R_{CH}$ . ■

**Corolario 3.3.**  *$P$  es un punto en el interior de  $R(t_0)$ . Existe una vecindad  $V$  de  $P$  y  $\delta > 0$  tal que cada conjunto  $R(t_1)$ , con  $|t_1 - t_0| < \delta$ , contiene a  $V$  en su interior.*

**Demostración.** Escójanse  $x_0(t_0), x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$  como los vértices de un  $n$ -simple  $S$  (el casco convexo de  $n + 1$  puntos independientes) que está en el interior de  $R(t_0)$  y que tiene a  $P$  como su centroide. Tomemos  $N$  en el interior de un simple similar, pero con todas sus longitudes reducidas a la mitad. Sean  $u_0(t), u_1(t), \dots, u_n(t) \subset \Omega$  para el intervalo extendido  $0 \leq t \leq t_0 + 1$ .

Escojemos  $\epsilon > 0$  tal pequeño que toda  $n$ -simple  $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$  con  $|Q_i - x_i(t_0)| < \epsilon$  Sigue conteniendo a  $N$  en su interior. Por el teorema anterior, existe  $\delta > 0$  tal que para  $|t_1 - t_0| < \delta$  tenemos  $|x_i(t_1) - x_i(t_0)| < \epsilon, i = 0, 1, \dots, n$ . Dado que  $R(t_1)$  contiene a  $x_0(t_1), \dots, x_n(t_1)$  y puesto que  $R(t_1)$  es convexo,  $R(t_1)$  contiene a  $N$  en su interior. ■

**Lema 3.4.** *A es una matriz de tamaño  $n \times n$  y B de tamaño  $n \times m$ . Considérese el vector  $v \in \mathbb{R}^n$  y supóngase que*

$$v^T B = v^T AB = \dots = v^T A^{n-1} B = 0. \quad (3.2)$$

Entonces  $v^T A^{n+k} B = 0$ .

**Demostración.** La prueba se hará por inducción sobre  $k$ . Por el teorema de Cailey-Hamilton, la matriz  $A$  anula a su polinomio característico, entonces

$$A^n = c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \dots + c_n I \quad (3.3)$$

para algunos números  $c_1, \dots, c_n$ . Así que

$$v^T A^n B = c_1 v^T A^{n-1} B + \dots + c_n v^T B = 0. \quad (3.4)$$

Ahora, si  $k = 0$ , es obvio por la ecuación (3.4). Si  $k = 1$  se tiene de (3.3) la expresión

$$v^T A^{n+1} B = c_1 v^T A^n B + c_2 v^T A^{n-1} B + \dots + c_n v^T AB, \quad (3.5)$$

por (3.2) y por (3.4) se tiene que cada uno de los términos de la suma en el lado derecho de (3.5) son iguales a cero, y por tanto  $v^T A^{n+1} B = 0$ . Supóngase la hipótesis cierta para  $k = j - 1$ , luego,

$$v^T A^{n+(j-1)} B = c_1 v^T A^{n+(j-2)} B + c_2 v^T A^{n+(j-3)} B + \dots + c_n v^T A^{j-1} B = 0, \quad (3.6)$$

con,  $v^T A^{n+(j-2)} B = v^T A^{n+(j-3)} B = \dots = v^T A^{j-1} B = 0$ . Veamos que se cumple para  $k = j$ ,

$$v^T A^{n+(j)} B = c_1 v^T A^{n+(j-1)} B + c_2 v^T A^{n+(j-2)} B + \dots + c_n v^T A^{n+1} B, \quad (3.7)$$

la cual, por hipótesis de inducción, cada uno de los términos de la suma en el lado derecho de (3.7) son iguales a cero, como se quería. ■

A continuación, presentamos el teorema que nos caracteriza a los sistemas completamente controlables.

**Teorema 3.5.** *El sistema (3.1) es controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad  $C(A, B)$  cuyas columnas son las columnas de  $[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ , tiene rango  $n$ .*

**Demostración.** Supóngase primero que (3.1) es controlable. Cualquier  $x_0$  puede ser dirigido a un arbitrario  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ . Supóngase que  $\text{rango}(C(A, B)) < n$ . entonces las columnas de  $C(A, B)$  son linealmente dependientes así que, existe un vector  $v \neq 0$  tal que  $vC(A, B) = 0$  ó equivalentemente

$$v^T B = v^T AB = \dots = v^T A^{n-1} B = 0. \quad (3.8)$$



Por el lema 3.4 se tiene que  $v^T A^{n+k} B = 0$  para todo  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , por lo que

$$v^T e^{At} B = v^T \left[ I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots \right] B = 0$$

para todo real  $t$ . Ahora, la solución en la condición inicial  $x_0 = 0$  con control  $u(t)$  es

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds.$$

Entonces

$$v^T x(t) = \int_0^t v^T e^{A(t-s)} B u(s) ds = 0$$

para todo control  $u(t)$ . Así que la solución  $x(t)$  yace sobre el hiperplano de  $\mathbb{R}^n$  ortogonal a  $v$ , lo cual contradice la controlabilidad de (3.1). Luego entonces,

$$\text{rango}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B] = n$$

Recíprocamente, supóngase que  $\text{rango}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B] = n$  y mostremos que (3.1) es controlable.  $R'_0(t)$  es el conjunto de puntos desde los cuales el origen puede ser alcanzado en el tiempo  $0 \leq t \leq 1$  con controles restringidos  $|u^i| \leq 1$  para  $i = 1, 2, \dots, m$ . Entonces, por el teorema 3.2,  $R'_0$  es compacto y convexo.

Supóngase que la dimensión de  $R'_0(t)$  es menor que  $n$ . Entonces si  $\hat{x}(t) \in R'_0(t)$  existe un vector unitario  $v$  ortogonal a  $\hat{x}(t)$ , es decir,

$$v^T \hat{x}(t) = \int_0^t v^T e^{A(t-s)} B u(s) ds = 0$$

para todo control  $u$  con la restricción anterior. Así que si hacemos variar  $t$  en  $[0, 1]$ , la integral es siempre cero, por tanto, el integrando  $v^T e^{A(t-s)} B u(s)$  es igual a cero. Tenemos luego que  $v^T e^{A(1-s)} B \in \mathbb{R}^m$  es ortogonal a todas esas  $u$ 's. De aquí, concluimos que  $v^T e^{A(1-s)} B = 0$ . Si  $s = 1$  tenemos que  $v^T B = 0$ . Diferenciando repetidamente  $v^T e^{A(1-s)} B$   $(n-1)$ -veces con respecto a  $s$  y evaluando en  $s = 1$  se tiene que  $v^T AB = v^T A^2 B = \dots = v^T A^{n-1} B = 0$ . Lo que significa que  $\text{rango}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B] < n$  y, contradice nuestra hipótesis. De aquí que,  $\dim R'_0(t) = n$ .

Notemos que el control  $u(t)$  puede ser cambiado por  $-u(t)$ . Así que,  $R'_0(t)$  es simétrico con respecto al origen. Por el teorema 3.2 y el corolario 3.3,  $R'_0(t)$  es compacto, convexo y contiene un abierto, entonces  $R'_0(t)$  debe contener al origen en su interior, luego es no vacío. Más aún, si el control restringido se extiende a  $|u^i| l \leq l$  para todo  $l = 1, 2, 3, \dots$ , entonces

$$(lu_1, \dots, lu_m)^T = l(u_1, \dots, u_m)^T = lu.$$

De aquí que

$$\int_0^t v^T e^{A(1-s)} B l u(s) ds = l \int_0^t v^T e^{A(1-s)} B u(s) ds = l x(t).$$

Por lo que el conjunto de alcanzabilidad correspondiente es  $lR'_0(t)$ . De aquí que el conjunto de alcanzabilidad del origen para todos los controles  $u(t)$  (no acotados) en  $0 \leq t \leq 1$ ,  $R_0(t)$  debe ser todo  $\mathbb{R}^n$ . Para cualquier estado inicial  $x_0$ , el conjunto  $R(t)$  de alcanzabilidad con controles  $u(t)$  en  $0 \leq t \leq 1$  es  $R(t) = e^A x_0 + R_0(t) = \mathbb{R}^n$ . Por tanto, (3.1) es controlable. ■

**Corolario 3.6** ([7, pag 84]). *Considere el sistema (3.1) con conjunto de control admisible  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  tal que contenga a  $u = 0$  en su interior. Entonces el sistema es nulo-controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad  $C(A, B)$  tiene rango  $n$ .*

**Observación 3.7.** *Dado que el rango de  $C(-A, -B)$  es igual al rango de  $C(A, B)$ , el sistema*

$$\dot{x} = -Ax - Bu \quad (3.9)$$

*es nulo-controlable si y sólo si (3.1) es nulo-controlable. Así que,  $u(t)$  envía  $x_0$  de (3.7) a 0 en  $t = t_1$  si y sólo si  $u(t_1 - t)$  envía la solución de (3.1) de 0 a  $x_0$  en  $t = t_1$ . Así, el conjunto alcanzable  $R_\infty$  para (3.1) contiene una vecindad del origen si y sólo si (3.1) es nulo-controlable*

El corolario anterior es típico de los muchos resultados en teoría de control, en el sentido de que se requiere que el origen esté en el interior de  $\Omega$ , o por lo menos en  $CH(\Omega)$ . Sin embargo, las preguntas de controlabilidad se pueden seguir considerando para sistemas en los cuales el origen no esté en el interior de  $CH(\Omega)$ .

**Definición 3.6.** *Las matrices que no tienen valores propios reales, sólo complejas, son llamadas matrices oscilatorias.*

El siguiente teorema se probó en [5] para el sistema (3.1) con  $m = 1$  y  $\Omega = [0, 1]$ .

**Teorema 3.8.** *El sistema (3.1) con  $m = 1$  y  $\Omega = [0, 1]$  es nulo-controlable si y sólo si  $C(A, B)$  tiene rango  $n$  y la matriz  $A$  es oscilatoria.*

---

### § 3.2. El teorema de Brammer

En el seguimiento de la teoría, el desarrollo del teorema principal se basará sobre el sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.10)$$

para el cual,

(I) El conjunto  $\Omega$  contiene un vector en el kernel de  $B$  (es decir, existe  $u \in \Omega$  tal que  $Bu = 0$ ).

(II) El conjunto  $CH(\Omega)$  tiene interior distinto del vacío en  $\mathbb{R}^m$ .

Y el desarrollo a seguir será sobre las siguientes condiciones:

(III) La matriz  $C(A, B)$  tiene rango  $n$ .

(IV) No existe vector propio real  $v$  de  $A^T$  tal que  $v^T \cdot Bu \leq 0$  para toda  $u \in \Omega$ ,

Antes, presentaremos algunos lemas previos al resultado principal de esta sección en los cuales analizaremos el comportamiento asintótico del producto interior  $\langle v, e^{At}Bu \rangle$ .

**Lema 3.9.** *A es una matriz real de tamaño  $n \times n$  tal que  $A = \lambda I + N$ , donde  $N$  es nilpotente.  $v \neq 0$  es un vector en  $\mathbb{R}^n$ . La función vectorial  $e^{At}v$  tiene la siguiente forma:*

$$e^{At}v = t^k e^{\lambda t}(z + f(t)), \quad (3.11)$$

donde  $k$  es un entero no negativo,  $f(t)$  tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito, y  $Az = \lambda z$  con  $z \neq 0$ .

**Demostración.** Si  $Nv = 0$ , hacemos  $z = v$ . Dado que  $D = \lambda I + N$ , entonces

$$(\lambda I + N)^s v = \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} \lambda^{s-r} I \cdot N^r v = \lambda^s I \cdot v$$

Así,

$$\begin{aligned} e^{Dt}v &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^s t^s}{s!} v \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda I + N)^s t^s}{s!} v \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^s t^s}{s!} v \\ &= e^{\lambda t} v. \end{aligned}$$

Tomando  $k = 0$  y  $f \equiv 0$  se obtiene la expresión (3.11).

Si  $Nv \neq 0$ , sea  $k$  el entero más grande tal que  $N^k v \neq 0$ . El entero  $k$ , con  $1 \leq k \leq n$ , está bien definido, pues  $N$  es nilpotente. Luego, la función  $e^{At}v$  toma la forma

$$\begin{aligned} e^{At}v &= e^{(\lambda I + N)t}v \\ &= e^{\lambda t I} \cdot e^{Nt}v \\ &= e^{\lambda t} \left( I + Nt + \cdots + \frac{N^k t^k}{k!} \right) v \\ &= e^{\lambda t} \left[ \left( I + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right) v + \frac{N^k t^k}{k!} v \right] \\ &= e^{\lambda t} t^k \left[ \frac{1}{t^k} \left( I + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right) v + \frac{N^k}{k!} v \right] \end{aligned}$$

Haciendo  $z = \frac{N^k v}{k!} \neq 0$  y definimos para  $t > 0$

$$f(t) = \frac{1}{t^k} \left( I + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right) v$$

se obtiene que

$$e^{At}v = e^{\lambda t} t^k (f(t) + z),$$

de donde no es difícil ver que  $f(t)$  tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito, y

$$\begin{aligned} Az &= (\lambda I + N)z \\ &= \lambda z + Nz \\ &= \lambda z + N \cdot \frac{N^k}{k!} v \\ &= \lambda z \end{aligned}$$

como se quería. ■

**Lema 3.10.** Considere el sistema (3.1) con  $A$  una matriz real de tamaño  $2n$  sin valores propios reales,  $v, b$  son vectores en  $\mathbb{R}^{2n}$ . Entonces el producto interior  $\langle v, e^{At}b \rangle$  toma la forma

$$\langle v, e^{At}b \rangle = t^m e^{\rho t} (a(t) + g(t)) \quad (3.12)$$

Donde  $m$  es un entero positivo,  $\rho$  es el máximo de las partes reales de los valores propios de  $A$ ,  $a(t)$  es una suma de términos senoidales (es decir,  $a(t) = \sum_{k \in K} h_k \sin(\omega_k t + \theta_k)$ ), y  $g(t)$  tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito.

**Demostración.** Primero, es claro que si  $v$  y  $b$  son distintos de cero y  $b, Ab, \dots, A^{2n-1}b$  tiene rango  $2n$ , entonces el producto interior  $\langle v, e^{At}b \rangle$  es distinto de cero. Si no, definimos  $W$  como el espacio generado por  $b, Ab, \dots, A^{2n-1}b$ , y  $W^\perp$  el espacio ortogonal a  $W$ . Así que  $v = v_1 + v_2$ , con  $v_1 \in W$  y  $v_2 \in W^\perp$ . Luego, tenemos por linealidad,

$$\langle v, e^{At}b \rangle = \langle v_1 + v_2, e^{At}b \rangle = \langle v_1, e^{At}b \rangle + \langle v_2, e^{At}b \rangle.$$

Donde,  $\langle v_1, e^{At}b \rangle \neq 0$  y  $\langle v_2, e^{At}b \rangle = 0$ . Luego entonces,  $\langle v, e^{At}b \rangle \neq 0$ . Si  $v = v_2$ , entonces  $a(t) \equiv 0$  y  $g(t) \equiv 0$ .

En el producto interior

$$\langle v, e^{At}b \rangle = v^T e^{At}b, \quad (3.13)$$

considere el vector real  $y(t) = e^{At}b$ . El cual es solución del sistema

$$\dot{y} = Ay, \text{ con } y(0) = b. \quad (3.14)$$

Por el teorema 2.8 y la observación 2.9, se tiene que tal solución toma la forma

$$y(t) = \sum_{k=1}^s e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) v_{kj}. \quad (3.15)$$

Donde  $\lambda_k$  son los valores propios de  $A$ ,  $m_k$  es la multiplicidad algebraica de  $\lambda_k$ ,  $v_{kj}$  son vectores propios generalizados (complejos) y  $P_{kj}(t)$  son polinomios en  $t$  determinados por  $\lambda_k$ . Para cada  $k$  definamos

$$r_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) (v_{kj} + \bar{v}_{kj}) = \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) \operatorname{Re}(v_{kj})$$

y

$$s_k(t) = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) (-v_{kj} + \bar{v}_{kj}) = \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) \operatorname{Im}(v_{kj}).$$

Si  $\lambda_k = \rho_k + i\omega_k$ , entonces  $e^{\lambda_k t} = e^{\rho_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t)$ , y lo sustituimos en (3.15) para obtener

$$y = \sum_{k=1}^s e^{\rho_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t) \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) v_{kj}.$$

Tenemos luego, por el teorema 2.7 que

$$y_1(t) = \operatorname{Re}(y(t)) = \sum_{k=1}^s e^{\rho_k t} (r_k(t) \cos \omega_k t - s_k(t) \sin \omega_k t), \quad (3.16)$$

$$y_2(t) = \text{Im}(y(t)) = \sum_{k=1}^s e^{\rho_k t} (s_k(t) \cos \omega_k t + r_k(t) \sin \omega_k t), \quad (3.17)$$

son soluciones reales de (3.14). Entonces la solución general real es combinación lineal de (3.16) y (3.17), y toma la forma

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \\ &= c_1 \sum_{k=1}^s e^{\rho_k t} (r_k(t) \cos \omega_k t - s_k(t) \sin \omega_k t) + c_2 \sum_{k=1}^s e^{\rho_k t} (s_k(t) \cos \omega_k t + r_k(t) \sin \omega_k t) \\ &= \sum_{k=1}^s e^{\rho_k t} [(c_1 r_k(t) + c_2 s_k(t)) \cos \omega_k t + (c_2 r_k(t) - c_1 s_k(t)) \sin \omega_k t] \\ &= \sum_{k=1}^s e^{\rho_k t} \left[ \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) [c_1 \text{Re}(v_{kj}) + c_2 \text{Im}(v_{kj})] \cos \omega_k t \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) [c_2 \text{Re}(v_{kj}) - c_1 \text{Im}(v_{kj})] \sin \omega_k t \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

De (3.13) y (3.18) se obtiene

$$\begin{aligned} v^T e^{At} b &= v^T \sum_{k=1}^s e^{\rho_k t} \left[ \sum_{i=1}^{m_k} P_{ki}(t) [c_1 \text{Re}(v_{ki}) + c_2 \text{Im}(v_{ki})] \cos \omega_k t \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) [c_2 \text{Re}(v_{kj}) - c_1 \text{Im}(v_{kj})] \sin \omega_k t \right] \\ &= \sum_{k=1}^s e^{\rho_k t} \left[ \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) [c_1 v^T \text{Re}(v_{kj}) + c_2 v^T \text{Im}(v_{kj})] \cos \omega_k t \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}(t) [c_2 v^T \text{Re}(v_{kj}) - c_1 v^T \text{Im}(v_{kj})] \sin \omega_k t \right] \\ &= \sum_{k=1}^s e^{\rho_k t} (R_k(t) \cos \omega_k t + S_k(t) \sin \omega_k t), \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde para cada  $k$ ,  $R_k(t)$  y  $S_k(t)$  son polinomios reales en  $t$ . Definamos  $\rho = \max \{\rho_1, \dots, \rho_s\}$  y  $m = \max \{m_k\} - 1$  sobre los índices  $k$  en los cuales  $\rho_k$  es igual a  $\rho$ ,  $k = 1, \dots, s$ . Ahora, de (3.19) factoricemos  $t^m e^{\rho t}$ ,

$$v^T e^{At} b = t^m e^{\rho t} \left[ \sum_{k=1}^s e^{(\rho_k - \rho)t} t^{-m} (R_k(t) \cos \omega_k t + S_k(t) \sin \omega_k t) \right]. \quad (3.20)$$

Si separamos los términos de los índices en los cuales  $\rho = \rho_k$  de los que  $\rho > \rho_k$  obtenemos

$$\begin{aligned} v^T e^{At} b &= t^m e^{\rho t} \left[ \sum_{k \in L} (t^{-m} R_k(t) \cos \omega_k t + t^{-m} S_k(t) \sin \omega_k t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in L^c} e^{(\rho_k - \rho)t} t^{-m} (R_k(t) \cos \omega_k t + S_k(t) \sin \omega_k t) \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde  $L \subset \{1, 2, \dots, s\}$  es el subconjunto de índices en los cuales  $\rho_k = \rho$  y  $L^C$  son los índices en los cuales  $\rho_k < \rho$ . Así que, sobre  $L$ , existen algunos índices  $k$  sobre los cuales  $R_k(t)$  y  $S_k(t)$  tienen exponente máximo  $m$ . Sea  $K \subset J$  tal conjunto de índices. Luego, podemos expresar  $R_k(t)$  y  $S_k(t)$  de la forma

$$R_k(t) = t^m \gamma_k + t^m h_{k1}(t)$$

y

$$S_k(t) = t^m \zeta_k + t^m h_{k2}(t),$$

donde  $h_{k1}(t)$  y  $h_{k2}(t)$  tienden a cero cuando  $t$  tiende a infinito. En el conjunto de índices  $k \in K^C$ ,  $R_k(t)$  y  $S_k(t)$  tienen exponente menor que  $m$ , entonces  $t^{-m} R_k(t)$  y  $t^{-m} S_k(t)$  tienden a cero cuando  $t$  tiende a infinito. Si separamos ambos casos de la primer suma de (3.21) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k \in L} (t^{-m} R_k(t) \cos \omega_k t + t^{-m} S_k(t) \sen \omega_k t) &= \sum_{k \in K} (\gamma_k \cos \omega_k t + \zeta_k \sen \omega_k t) \\ &+ \sum_{k \in K^C} (h_{k1}(t) \cos \omega_k t + h_{k2}(t) \sen \omega_k t). \end{aligned}$$

Luego, (3.21) se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} v^T e^{At} b &= t^m e^{\rho t} \left[ \sum_{k \in K} (\gamma_k \cos \omega_k t + \zeta_k \sen \omega_k t) + \sum_{k \in K^C} (h_{k1}(t) \cos \omega_k t + h_{k2}(t) \sen \omega_k t) \right. \\ &+ \left. \sum_{k \in L^C} e^{(\rho_k - \rho)t} t^{-m} (R_k(t) \cos \omega_k t + S_k(t) \sen \omega_k t) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Definamos

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k \in K^C} (h_{k1}(t) \cos \omega_k t + h_{k2}(t) \sen \omega_k t) \\ &+ \sum_{k \in L^C} e^{(\rho_k - \rho)t} t^{-m} (R_k(t) \cos \omega_k t + S_k(t) \sen \omega_k t). \end{aligned}$$

Es claro que  $g(t)$  converge a cero cuando  $t$  tiende a infinito. Así pues, (3.13) toma la forma

$$v^T e^{At} b = t^m e^{\rho t} \left[ \sum_{k \in K} (\gamma_k \cos \omega_k t + \zeta_k \sen \omega_k t) + g(t) \right]. \quad (3.23)$$

Aplicamos la identidad

$$a \cos x + b \sen x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sen \left( x + \arctan \frac{a}{b} \right)$$

a (3.23) para obtener

$$v^T e^{At} b = t^m e^{\rho t} \left[ g(t) + \sum_{k \in K} \sqrt{\gamma_k^2 + \zeta_k^2} \cdot \left( \sen(\omega_k t + \arctan \frac{\gamma_k}{\zeta_k}) \right) \right].$$

Finalmente, hacemos  $h_k = \sqrt{\gamma_k^2 + \zeta_k^2}$  y  $\theta_k = \arctan\left(\frac{\gamma_k}{\zeta_k}\right)$ , y se obtiene

$$v^T e^{At} b = t^m e^{\rho t} \left( g(t) + \sum_{k \in K} h_k \text{sen}(\omega_k t + \theta_k) \right),$$

lo cual concluye la prueba. ■

**Lema 3.11.** *El producto interior  $\langle v, e^{At} Bu \rangle$  puede escribirse de la forma*

$$\begin{aligned} \langle v, e^{At} Bu \rangle = & \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) \\ & + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j, \end{aligned} \quad (3.24)$$

satisfaciendose las siguientes condiciones:

- (a) Los  $\lambda_i$  son los  $k$  distintos valores propios reales de la matriz  $A$  y,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ .
- (b)  $A^T z_i = \lambda_i z_i$ .
- (c) Si  $z_i = 0$ , entonces  $f_i(t) \equiv 0$ .
- (d) Los  $j_i$  y  $r_{ij}$  son enteros no negativos.
- (e) Las funciones  $f_i(t)$  y  $g_{ij}(t)$  tienden a cero cuando  $t$  tiende a infinito.
- (f) Las funciones  $a_{ij}(t)$  son sumas de términos senoidales.
- (g) Si  $a_{ij}(t) \equiv 0$ , entonces  $g_{ij}(t) \equiv 0$ .
- (h) Los  $\rho_i$  son los  $p$  distintas partes reales de los valores propios complejos de la matriz  $A$  y,  $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_p$ .
- (i) Los  $u_j$  son los componentes del  $m$ -vector  $u^T = (u_1, \dots, u_m)$ .
- (j) Si (II) y (III) se satisfacen y si  $v \neq 0$ , entonces existe  $u \in \Omega$  para el cual (3.24) no es idénticamente cero.

**Demostración.** Primero, nótese que es suficiente probar el lema en sistemas de coordenadas en la cual la matriz  $A^T$  tiene la forma  $J$ . De no ser así, existe una matriz invertible  $Q$  tal que al realizar el cambio de coordenadas, se tiene que  $Q^{-1} A^T Q = J$ . Del teorema 1.8 se tiene que los valores propios de  $A$  son los mismos valores propios de  $J$ . Así, el producto interior se expresa como

$$\begin{aligned} \langle v, e^{At} Bu \rangle &= v^T e^{At} Bu \\ &= v^T (Q^{-1})^T e^{J^T t} Q^T Bu \\ &= \langle Q^{-1} v, e^{J^T t} Q^T Bu \rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Redefiniendo  $\tilde{v} = Q^{-1} v$  y  $\tilde{B} = Q^T B$ , entonces el producto interior (3.25) se escribe de la forma

$$\langle \tilde{v}, e^{J^T t} \tilde{B} u \rangle = \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, \tilde{B} u \rangle + \langle f_i(t), \tilde{B} u \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (\tilde{a}_{ij}(t) + \tilde{g}_{ij}(t)) u_j.$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned}\langle z_i, \tilde{B}u \rangle &= \langle z_i, Q^T B u \rangle \\ &= \langle Q z_i, B u \rangle \\ &= \langle \tilde{z}_i, B u \rangle\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle f_i(t), \tilde{B}u \rangle &= \langle f_i(t), Q^T B u \rangle \\ &= \langle Q f_i(t), B u \rangle \\ &= \langle \tilde{f}_i(t), B u \rangle\end{aligned}$$

De esta última no es difícil ver que  $\tilde{f}_i(t) = Q f_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Veamos ahora que  $\tilde{z}_i = Q z_i$  es vector propio de  $A^T$ . Observemos que

$$\begin{aligned}A^T \tilde{z}_i = A^T Q z_i &= Q J Q^{-1} Q z_i \\ &= Q J z_i \\ &= \lambda_i Q z_i = \lambda_i \tilde{z}_i.\end{aligned}$$

Por lo que (3.25) se escribe de la forma

$$\begin{aligned}\langle v, e^{A^T t} B u \rangle &= \langle \tilde{v}, e^{J^T t} \tilde{B}u \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k t^{\tilde{j}_i} e^{\lambda_i t} (\langle \tilde{z}_i, B u \rangle + \langle \tilde{f}_i(t), B u \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{\tilde{r}_{ij}} (\tilde{a}_{ij}(t) + \tilde{g}_{ij}(t)) u_j.\end{aligned}$$

En la suma del lado derecho, se cumplen las condiciones sobre  $\tilde{r}_{ij}$ ,  $\tilde{a}_{ij}(t)$  y  $\tilde{g}_{ij}(t)$ , por el hecho de que  $A^T P_i = Q J Q^{-1} P_i$ ,  $i = k+1, \dots, k+p$ , es oscilatoria, como se requiere en el lema 3.10.

Así que, podemos suponer que  $A^T$  está en forma de Jordan y así tendremos las proyecciones  $P_i$  dadas en (1.36) inducidas por  $A^T$ . Utilizando tales proyecciones  $P_i$  tenemos

$$\begin{aligned}e^{A^T t} v &= \sum_{i=1}^{k+p} e^{A^T t} P_i v = \sum_{i=1}^k e^{A^T t} P_i v + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{A^T t} P_i v \\ &= \sum_{i=1}^k e^{A^T P_i t} P_i v + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{A^T P_i t} P_i v,\end{aligned}\tag{3.26}$$

esto último se justifica por el hecho de que  $P_i^2 = P_i$  y

$$\begin{aligned}e^{A^T t} P_i &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(A^T t)^s}{s!} P_i = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(A^T t)^s}{s!} P_i^2 \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(A^T P_i t)^s}{s!} P_i = e^{A^T P_i t} P_i v.\end{aligned}$$

Aplicando (1.40) y el lema 3.9 a la primer suma de (3.26) se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k e^{A^T P_i t} P_i v &= \sum_{i=1}^k \exp[(\lambda_i I + N_i) P_i t] P_i v = \sum_{i=1}^k \exp[(\lambda_i I + N_i) t] P_i v \\ &= \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (z_i + f_i(t)).\end{aligned}\tag{3.27}$$



Es posible hacer un reacomodo adecuado en la suma, de tal forma que  $\lambda_1 > \dots > \lambda_k$ . Multiplicar ambas ecuaciones de (3.27) al lado izquierdo por  $P_i$ , nos lleva a la relación  $P_i z_i = z_i$ , pues  $z_i$  es el valor propio correspondiente a  $B_i$  y  $P_i$  es la identidad de tamaño y posición de  $B_i$ . Más aún, de la prueba del lema 3.9 tenemos que  $N_i z_i = 0$ . Así que,

$$\begin{aligned} A^T z_i &= A^T P_i z_i \\ &= (\lambda I + N) P_i z_i \\ &= (\lambda_i I + N_i) z_i \\ &= \lambda_i z_i. \end{aligned}$$

Luego, de (3.26) y (3.27) se obtiene,

$$e^{A^T t} v = \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (z_i + f_i(t)) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{A^T P_i t} P_i v.$$

Por lo que

$$\langle e^{A^T t} v, Bu \rangle = \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} \langle e^{A^T P_i t} P_i v, Bu \rangle. \quad (3.28)$$

Esto prueba (a), (b), (c), y la primera parte de (d) y (e).

Ahora, considere la segunda suma de (3.28). Dado que

$$Bu = \sum_{j=1}^m b_j u_j,$$

donde los  $b_i$  son los vectores columna de  $B$ , y los  $u_j$  son las componentes de  $u$ , tenemos la siguiente doble suma,

$$\sum_{i=k+1}^{k+p} \langle e^{A^T P_i t} P_i v, Bu \rangle = \sum_{i=k+1}^{k+p} \sum_{j=1}^m \langle e^{A^T P_i t} P_i v, b_j \rangle u_j. \quad (3.29)$$

Considere el producto interior  $\langle e^{A^T P_i t} P_i v, b_j \rangle$ . En general, la matriz  $A^T P_i$  no es oscilatoria. Sin embargo, si  $A^T P_i$  es considerada como una transformación lineal restringida a la imagen de  $\mathbb{R}^n$  bajo  $P_i$ ,  $A^T P_i$  es oscilatoria. Es decir, el producto interior  $\langle e^{A^T P_i t} P_i v, P_i b_j \rangle$  puede ser considerado como una restricción al subespacio de  $P_i$ . Así que, del lema 3.10 se obtiene

$$\langle e^{A^T P_i t} P_i v, b_j \rangle = e^{\rho_i t} t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) \quad (3.30)$$

Nótese que todos los parámetros del lado derecho dependen de  $i$  y  $j$ , excepto  $\rho_i$ , el cual sólo depende de  $i$ . Esto es debido a que  $\rho_i$  es posiblemente solo la parte real de un valor propio de  $A^T P_i$ . De aquí se sigue que

$$\sum_{j=1}^m \langle e^{A^T P_i t} P_i v, b_j \rangle u_j = e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \quad (3.31)$$

y de (3.28) se obtiene

$$\langle e^{A^T t} v, Bu \rangle = \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j.$$

Esto concluye las pruebas de (d) hasta (i).

Ahora, si  $\langle v, e^{At}Bu \rangle$  es idénticamente cero en  $t$  para toda  $u \in \Omega$ . Entonces haciendo  $t = 0$ ,  $\langle v, Bu \rangle = 0$  para toda  $u \in \Omega$ . Además, diferenciando sucesivamente y evaluando en  $t = 0$  se tiene que

$$\langle v, ABu \rangle = 0, \langle v, A^2Bu \rangle = 0, \dots, \langle v, A^{n-1}Bu \rangle = 0,$$

para toda  $u \in \Omega$ . Transponiendo obtenemos

$$\langle B^T v, u \rangle = 0, \dots, \langle B^T (A^T)^{n-1} v, u \rangle = 0$$

para toda  $u \in \Omega$ . Dado que  $CH(\Omega)$  tiene interior distinto de vacío, se sigue que cada vector  $B^T v, \dots, B^T (A^T)^{n-1} v$  es perpendicular a  $m$  vectores linealmente independientes, entonces  $B^T v = 0, \dots, B^T (A^T)^{n-1} v = 0$ , de aquí que  $v^T C(A, B) = 0$ . Es decir,  $v \in \text{Ker } C(A, B)$ . Dado que  $v \in \mathbb{R}^n$  no es cero,  $C(A, B)$  no puede tener rango  $n$ , lo cual contradice (III). En resumen, si  $CH(\Omega)^\circ \neq 0$  y  $\text{Rango}(C(A, B)) = n$  ((II) y (III) respectivamente), entonces existe  $u \in \Omega$  tal que  $\langle v, e^{At}Bu \rangle$  no es idénticamente cero para toda  $t$ . Con esto termina la prueba del lema. ■

**Observación 3.12.** Note que si  $z_i$  es cero, entonces  $f_i(t) \equiv 0$ . Así que, el  $i$ -ésimo término, es cero y no contribuye a la primer suma en (3.28). Si algún  $z_i = 0$ , para propósitos de resultados, podemos ignorar los  $\lambda_i$  correspondientes. Puede pasar que todos los  $z_i$  sean cero, y, ese caso puede ser considerado por separado. Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que todas las  $z_i$  son distintas de cero. De la misma manera, si (3.31) es idénticamente cero para toda  $t > 0$  y para toda  $u \in \Omega$ , entonces se puede seleccionar  $u = (u_1, \dots, u_m)^T$  tal que  $a_{ij}$  y  $g_{ij}$  son idénticamente cero para toda  $j = 1, \dots, m$ . Por tanto, en los teoremas a seguir,  $\lambda_1$  nos referiremos al valor propio más grande para el cual se le asocia el vector propio  $z$  de (3.28) que es distinto de cero. Si todos los  $z_i$  son cero, entonces haremos  $\lambda_i = -\infty$ . En el mismo sentido  $\rho_1$  es la parte real más grande de los valores propios complejos para el cual

$$\sum_{j=1}^m t^{k_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \neq 0.$$

Si todos esos términos son cero, hacemos  $\rho_1 = -\infty$ .

**Definición 3.7.** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es casi periódica si, es continua y para todo  $\epsilon > 0$  existe  $L(\epsilon) > 0$  con la propiedad de que en cualquier intervalo de longitud  $L(\epsilon)$  hay un número  $s$  tal que

$$|f(t+s) - f(t)| < \epsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Las funciones  $a_{ij}(t)$  en el lema 3.11 son ejemplos de funciones casi periódicas, dado que combinaciones lineales de funciones casi periódicas, son casi periódicas.

**Lema 3.13.** [5,6] Para cualquier función casi periódica  $f$ , el límite

$$M(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

existe. Si  $M(f) = 0$ , y si  $f(t) \leq |h(t)|$ , donde  $h$  es cualquier función que desaparece cuando  $t$  tiende a infinito, entonces  $f(t) \equiv 0$ .

Finalmente, notemos que  $-v$  es vector propio de  $-A^T$  si y sólo si  $v$  es vector propio de  $A^T$ , y que  $\langle -v, -Bu \rangle \leq 0$  si y sólo si  $\langle v, Bu \rangle \leq 0$  para toda  $u \in \Omega$ . Además,  $C(-A, -B)$  tiene rango  $n$  si y sólo si  $C(A, B)$  tiene rango  $n$ . Así que, (3.9) satisface (I) y (II), si y sólo si (3.1) los satisface. Así, de la observación 3.7, para probar (III) y (IV), es necesario y suficiente mostrar que  $R(t)$  contiene un intervalo abierto alrededor del origen para algún  $t > 0$ . Más aún, por el lema 3.2,  $R(t)$  es un conjunto convexo para toda  $t > 0$ . Así que, el conjunto alcanzable  $R_\infty$  es la union de una colección creciente de conjuntos convexos, y es así, un conjunto convexo que contiene al origen. Si el origen está en el interior de  $R_\infty$ , entonces existen  $n + 1$  puntos en  $R_\infty$  cuyo casco convexo contienen al origen como un punto interior. Se sigue que esos  $n + 1$  deben estar contenidos en  $R(t)$  para algún  $t > 0$  puesto que esos conjuntos son crecientes. Así que, el origen está en el interior de  $R_\infty$  si y sólo si el origen está en el interior de  $R(t)$  para algún  $t > 0$ . De lo establecido arriba concluimos que probar (III) y (IV) son necesarios y suficientes para asegurar que el origen está en el interior de  $R_\infty$  y obtenemos el siguiente lema.

**Lema 3.14.** *Considere el sistema (3.1). Si el conjunto de controles admisibles  $\Omega$  cumple con las condiciones (I) y (II), entonces el sistema (3.1) es controlable si y sólo si no existe vector  $v \neq 0$  tal que*

$$\langle v, e^{(t-s)A} Bu(s) \rangle \leq 0 \quad \forall t > 0 \quad y \quad \forall u \in \Omega.$$

**Demostración.** Si el origen no está en el interior de  $R_\infty$ , entonces existe un hiperplano que contiene al origen y un vector normal  $v$  tal que  $\langle v, x(t, u(\cdot)) \rangle \leq 0$  para todo  $t > 0$  y todo control admisible  $u$ . Dado que

$$x(t, u(\cdot)) = \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds,$$

el vector  $v$  satisface

$$\left\langle v, \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds \right\rangle \leq 0.$$

Por continuidad de la solución podemos encontrar un control  $u_0(t) \subset \Omega$  definido en un subintervalo  $[t_0, t_1]$  de  $[0, t]$  que dirija a  $x(t)$  tal que

$$\langle v, e^{A(t-s)} Bu_0(s) \rangle \leq 0 \quad en \quad [t_0, t_1]. \quad (3.32)$$

Recíprocamente, si el origen está en el interior de  $R_\infty$ , es claro que ningún vector distinto de cero satisface (3.32), con lo que obtenemos controlabilidad. ■

El teorema principal sobre controlabilidad en esta sección, es el teorema de Brammer, el cual se presenta en el siguiente enunciado.

**Teorema 3.15** (Teorema de Brammer). *Considere el sistema de control (3.1) tal que el conjunto de control admisible satisface (I) y (II). Entonces las condiciones (III) y (IV) son necesarias y suficientes para la nulo-controlabilidad de (3.1).*

**Demostración.** La prueba se dividirá en dos partes, de necesidad y de suficiencia.

*Prueba de necesidad.* Probaremos primero que (III) y (IV) son necesarias para la nulo-controlabilidad de (3.1). Específicamente, mostraremos que si no se satisfacen (III) y (IV), entonces se cumple (3.32).

Supóngase que  $C(A, B)$  no tiene rango  $n$ . Entonces existe un vector  $v \neq 0$  tal que  $v^T C(A, B) = 0$ . Esto implica que  $v^T e^{At} B = 0$ . De aquí que  $\langle v, e^{At} Bu \rangle = 0$  para todo  $t > 0$  y para toda  $u \in \Omega$ . Ahora supóngase que no se satisface (IV). El producto interior

$$\langle v, e^{At} Bu \rangle = \langle e^{A^T t} v, Bu \rangle = e^{\lambda t} \langle v, Bu \rangle \leq 0$$

para toda  $t$  y toda  $u \in \Omega$ .

*Prueba de suficiencia.* Mostraremos que (III) y (IV) son suficientes para la nulo-controlabilidad de (3.1). Específicamente, mostraremos que si (III) y (IV) se satisfacen, entonces no existe vector  $v \neq 0$  que satisfaga (3.32).

Aplicando el lema 3.11 a (3.32) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \geq \langle v, e^{At} Bu \rangle = & \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) \\ & + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j. \end{aligned} \quad (3.33)$$

La prueba se dividirá en tres casos:

$$\lambda_1 > \rho_1 \text{ o } \lambda_1 = \rho_1 \text{ y } j_1 > \max_j r_{1j} \equiv r_1, \quad (3.34)$$

$$\lambda_1 < \rho_1 \text{ o } \lambda_1 = \rho_1 \text{ y } j_1 < \max_j r_{1j} \equiv r_1, \quad (3.35)$$

$$\lambda_1 = \rho_1 \text{ y } j_1 = \max_j r_{1j} \equiv r_1. \quad (3.36)$$

*Prueba para (3.34).* Si  $t > 0$ , dividimos ambos lados de (3.33) por  $t^{j_1} e^{\lambda_1 t}$

$$\begin{aligned} 0 & \geq \frac{1}{t^{j_1} e^{\lambda_1 t}} \langle v, e^{At} Bu \rangle \\ & = \langle z_1, Bu \rangle + \langle f_1(t), Bu \rangle + \frac{1}{t^{j_1} e^{\lambda_1 t}} \left[ \sum_{i=2}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) \right] \\ & = \langle z_1, Bu \rangle + F(t). \end{aligned}$$

Por las hipótesis de (3.34), se tiene que  $F(t)$  tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito, para toda  $u$  en  $\Omega$ . Esto implica que  $\langle z_1, Bu \rangle \leq 0$  para toda  $u$  en  $\Omega$ , el cual contradice (IV).

*Prueba para (3.35).* Para  $t > 0$ , dividimos ambos lados de (3.33) por  $t^{r_1} e^{\rho_1 t}$ , a saber

$$\begin{aligned} 0 & \geq \frac{1}{t^{r_1} e^{\rho_1 t}} \langle v, e^{At} Bu \rangle \\ & = \frac{1}{t^{r_1} e^{\rho_1 t}} \left[ \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \right] \\ & = \sum_{l_j} (a_{1l_j}(t) + g_{1l_j}(t)) u_{l_j} + G(t), \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde

$$G(t) = \frac{1}{t^{r_1} e^{\rho_1 t}} \left[ \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + e^{\rho_1 t} \sum_{l_s} t^{r_{1l_s}} (a_{1l_s}(t) + g_{1l_s}(t)) u_{l_s} \right. \\ \left. + \sum_{i=k+2}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \right],$$

y los  $l_j$  son los índices en los que posiblemente se alcanza el máximo  $r_1 = r_{1j}$ , pues puede suceder que  $r_1 = r_{1l_1} = r_{1l_2}$  para dos índices distintos  $l_1$  y  $l_2$ . Los  $l_s$  son los índices menores que el máximo  $r_1$ . La función  $G(t)$  es análoga a  $F(t)$  y converge a cero cuando  $t$  tiende a infinito, para toda  $u$  en  $\Omega$ . Recordemos que las funciones  $a_{ij}(t)$  son sumas de términos senoidales y de aquí que son funciones casi periódicas en  $t$ . Así que, si la desigualdad (3.37) se satisface, tenemos que

$$\sum_{l_j} a_{1l_j}(t) u_{l_j} \leq |H(t)|,$$

donde,

$$H(t) = G(t) + \sum_{l_j} g_{1l_j}(t) u_{l_j}.$$

Por una elección especial de  $u$ , se sigue que cada  $a_{1l_j} \equiv 0$ , la cual contradice la definición de  $r_1$  (es decir, si todo  $a_{1l_j}$  son triviales, entonces los términos que involucran a  $r_1$  son todos cero, así que no deberían ser considerados).

*Prueba para (3.36).* Para  $t > 0$  dividase (3.33) por  $t^{j_1} e^{\lambda_1 t} = t^{r_1} e^{\rho_1 t}$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{t^{j_1} e^{\lambda_1 t}} \langle v, e^{At} Bu \rangle \\ &= \frac{1}{t^{j_1} e^{\lambda_1 t}} \left[ \sum_{i=1}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+1}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \right] \\ &= \frac{1}{t^{j_1} e^{\lambda_1 t}} \left[ t^{j_1} e^{\lambda_1 t} (\langle z_1, Bu \rangle + \langle f_1(t), Bu \rangle) + e^{\rho_1 t} \sum_{j=1}^m t^{r_{1j}} (a_{1j}(t) + g_{1j}(t)) u_j \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+2}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \right] \\ &= \langle z_1, Bu \rangle + \langle f_1(t), Bu \rangle + \sum_{l_j} (a_{1l_j}(t) + g_{1l_j}(t)) u_{l_j} + \sum_{l_s} \frac{t^{l_s}}{t^{r_1}} (a_{1l_s}(t) + g_{1l_s}(t)) u_{l_s} \\ &\quad + \frac{1}{t^{j_1} e^{\lambda_1 t}} \left[ \sum_{i=2}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+2}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t)) u_j \right] \\ &= \langle z_1, Bu \rangle + \sum_{l_j} a_{1l_j}(t) u_{l_j} + J(t), \end{aligned} \tag{3.38}$$

con

$$J(t) = \langle f_1(t), Bu \rangle + \sum_{l_j} g_{1l_j}(t)u_{l_j} + \sum_{l_s} \frac{t^{l_s}}{t^{r_1}}(a_{1l_s}(t) + g_{1l_s}(t))u_{l_s} \\ + \frac{1}{t^{j_1}e^{\lambda_1 t}} \left[ \sum_{i=2}^k t^{j_i} e^{\lambda_i t} (\langle z_i, Bu \rangle + \langle f_i(t), Bu \rangle) + \sum_{i=k+2}^{k+p} e^{\rho_i t} \sum_{j=1}^m t^{r_{ij}} (a_{ij}(t) + g_{ij}(t))u_j \right].$$

Obsérvese que  $J(t)$  tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito, para toda  $u$  en  $\Omega$ .

Para  $t > 0$  arbitrariamente grande,  $J(t)$  es arbitrariamente pequeño y se puede despreciar su valor medio, lo que nos deja sólo el análisis en

$$\langle z_1, Bu \rangle + \sum_{l_j} a_{1l_j}(t)u_{l_j} \leq 0.$$

Ahora, dado que  $a_{1l_j}$  son sumas de puros términos senoidales, que son funciones periódicas, se tiene que  $M(\sum_{l_j} a_{1l_j}(t)u_{l_j}) = 0$  para toda  $u$  en  $\Omega$ . Así que,  $\langle z_1, Bu \rangle \leq 0$  para toda  $u$  en  $\Omega$ , lo cual contradice (IV).

Observe que hemos asumido que el último término no es cero. Sin embargo, las suposiciones (I) y (II) sobre  $\Omega$  y la condición (III) se aseguran por la prueba de (j) en el lema 3.11. ■

El teorema 3.8 se sigue como corolario.



## Algunas caracterizaciones de sistemas CCP

### § 4.1. Caso real

El teorema (3.15) nos da una caracterización completa de los sistemas controlables. En los siguientes resultados se trabaja con el teorema de Brammer como una potente herramienta para caracterizar algunos sistemas en forma particular. Estos sistemas tienen a la matriz  $A$  en alguna de las formas de Jordan.

Dado el sistema de control (3.1), se darán condiciones necesarias y suficientes sobre la matriz  $B$ , para asegurar la controlabilidad positiva, donde la matriz  $A$ , tomará alguna de las siguientes tres formas, las cuales se demostrarán, para cada caso, utilizando la primera y segunda condición del teorema de Brammer (III y IV respectivamente):

- (i) un valor propio real repetido en forma diagonal

$$A = \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

- (ii) un valor propio real repetido

$$A = \lambda I + N = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

- (iii)  $n$  valores propios reales diferentes

$$A = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Considere el sistema de control (3.1). Al conjunto

$$\mathbb{R}_+^m = \{(u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m | u_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$$

se le llama *primer ortante* de  $\mathbb{R}^m$ .

**Definición 4.1.** Diremos que el sistema (3.1) es controlable con control positivo (CCP), si es controlable con controles  $u(t)$  en  $\Omega = \mathbb{R}_+^m$ . En este caso se diremos que el control es positivo.

En adelante, al mencionar el conjunto de control admisible  $\Omega$ , nos estaremos refiriendo al conjunto  $\mathbb{R}_+^m$ .

**Observación 4.1.** Note que (IV) es equivalente a decir que existen  $u_1$  y  $u_2$  en  $\Omega$  tales que

$$v^T B u_1 < 0 \text{ y } v^T B u_2 > 0,$$

para todo vector propio real  $v$  de  $A^T$ . Es decir, no exista vector propio real  $v$  de  $A^T$  tal que mantenga fijo el signo de  $v^T B u$  para toda  $u \in \Omega$ .

**Teorema 4.2.** Consideremos el sistema (3.1) con  $A = \lambda I$ , de tamaño  $n \times n$ , y conjunto de control  $\Omega$ . Entonces el sistema es positivamente controlable con  $n+1$  controles si y sólo si  $B$  tiene rango  $n$  y existe una columna  $b_k$  de  $B$  tal que

$$b_k = \sum_{j=1, j \neq k}^{n+1} c_j b_j, \text{ con } c_j < 0.$$

De hecho, no es positivamente controlable con  $n$  o menos controles.

**Demostración.** Probaremos la primera implicación ( $\Rightarrow$ ). Obsérvese que

$$A^k B = \lambda^k B$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Rango}(C) &= \text{Rango}(BAB \cdots A^{n-1}B) \\ &= \text{Rango}(B\lambda B \cdots \lambda^{n-1}B) \\ &= \text{Rango}(B) \end{aligned} \tag{4.4}$$

luego,  $\text{Rango}(B) = n$ ; así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las primeras  $n$  columnas de  $B$  son linealmente independientes, entonces

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^n c_j b_j. \tag{4.5}$$

Probaremos por contradicción que,  $b_{n+1}$  es una combinación lineal negativa del resto de las columnas de  $B$ . Supóngase que existe un  $c_j \geq 0$  en (4.5). Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que  $c_n \geq 0$ . Sea  $W$  el espacio generado por  $\{b_1, \dots, b_{n-1}\}$ , y sea  $v \in \mathbb{R}^n$  un vector no nulo en el espacio ortogonal de  $W$  tal que  $v \cdot b_n \neq 0$ . Dado que  $v \cdot b_j = 0$  para  $j = 1, \dots, n-1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} v \cdot B u &= v \cdot \left( \sum_{j=1}^{n+1} u_j b_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} u_j (v \cdot b_j) \\ &= u_n (v \cdot b_n) + u_{n+1} (v \cdot b_{n+1}) \\ &= u_n (v \cdot b_n) + u_{n+1} \left( v \cdot \left( \sum_{j=1}^n c_j b_j \right) \right) \\ &= u_n (v \cdot b_n) + u_{n+1} (v \cdot c_n b_n) \\ &= (u_n + c_n u_{n+1}) v \cdot b_n. \end{aligned}$$



Por la forma de  $A$ , todo vector de  $\mathbb{R}^n$  es vector propio de  $A^T$ , y dado que  $u_n + c_n u_{n+1}$  es siempre positivo, se tiene que se ha encontrado un vector propio real  $v$  de  $A^T$  tal que  $v \cdot Bu$  no cambia de signo para toda  $u \in \Omega$ , y por la observación 4.1, se contradice el hecho de que nuestro sistema es positivamente controlable.

( $\Leftarrow$ ) De (4.4) se sigue que  $\text{Rango}(C) = n$ . Solo falta probar la segunda condición de controlabilidad positiva (IV). Sin pérdida de generalidad, supóngase que

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^n c_j b_j \quad \text{con } c_j < 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ahora bien, la colección  $\{b_1, \dots, b_n\}$  es linealmente independiente, pues el rango de  $B$  es  $n$ . Tomemos  $v \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\begin{aligned} v \cdot Bu &= v \cdot \left( \sum_{j=1}^{n+1} u_j b_j \right) \\ &= v \cdot \left( \sum_{j=1}^n u_j b_j + u_{n+1} b_{n+1} \right) \\ &= v \cdot \left( \sum_{j=1}^n u_j b_j + u_{n+1} \sum_{j=1}^n c_j b_j \right) \\ &= v \cdot \left( \sum_{j=1}^n (u_j + c_j u_{n+1}) b_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (u_j + c_j u_{n+1}) v \cdot b_j. \end{aligned}$$

Como la colección  $\{b_1, \dots, b_n\}$  es linealmente independiente, existe  $b_k$  tal que  $v \cdot b_k \neq 0$ . Diseñamos  $u$  tal que  $u_j = -c_j u_{n+1}$  para  $j \neq k$ , y  $u_k \neq -c_k u_{n+1}$ . Esto nos permite diseñar controles tal que  $v \cdot Bu$  tenga cualquier signo. Por tanto, no existe vector propio de  $A^T$  que mantenga fijo el signo de  $v \cdot Bu$  para toda  $u$ .

Probaremos ahora, que el sistema no es positivamente controlable con  $n$  o menos controles. Sabemos que  $\text{Rango}(C) = \text{Rango}(B)$ , por lo tanto, para que el sistema sea positivamente controlable, necesariamente  $\text{Rango}(B) = n$ , es decir, se necesitan al menos  $n$  controles. Veamos que  $n$  controles no son suficientes. Hagamos  $W$  igual al espacio generado por las primeras  $n-1$  columnas de  $B$  y, consideremos  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $v$  es ortogonal a  $W$ , es decir,  $v \cdot b_j = 0$ , para  $j = 1, \dots, n-1$ , y  $v \cdot b_n \neq 0$ , luego

$$\begin{aligned} v \cdot Bu &= v \cdot \left( \sum_{j=1}^n u_j b_j \right) \\ &= u_n v \cdot b_n \end{aligned}$$

el cual no cambia de signo para toda  $u$ . ■

**Ejemplo 4.1.1.** Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} u.$$

Podemos notar que la matriz  $A$  del sistema tiene forma de Jordan como lo requiere el teorema. Podemos ver también que

$$\text{Rango}[B \ AB] = \text{Rango}[B] = 2$$

por lo que el sistema es controlable. Sin embargo, ninguna columna de  $B$  es combinación lineal negativa de las otras dos, por tanto, el control no es positivo.  $\square$

**Teorema 4.3.** *Cosidérese el sistema (3.1) con  $A = \lambda I + N$  de tamaño  $n \times n$  y conjunto de control  $\Omega$ . Entonces el sistema es controlable con control positivo (CCP) si y sólo si, en el último renglón de  $B$  hay dos entradas de signos opuestos.*

**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ) se hará por contradicción. supongamos que todas las entradas del último renglón de  $B$  tienen el mismo signo. Para este caso, los vectores propios reales de  $A^T$ , son todos aquellos vectores cuya última entrada es diferente de cero, y el resto son cero, pues si  $v = (v_1, \dots, v_n)$ ,

$$(A^T - \lambda I) \cdot v = (0, v_2, \dots, v_{n-1}) = 0$$

lo cual implica que  $v_i = 0$  para  $i = 1, \dots, n-1$  y  $v_n \neq 0$ . Luego entonces, si  $b_j = (b_{1j}, \dots, b_{nj})$  son las columnas de  $B$  y  $v = (0, \dots, 0, 1)^T$ , entonces

$$\begin{aligned} v \cdot Bu &= v \cdot \sum_{j=1}^n u_j b_j \\ &= \sum_{j=1}^n u_j (v \cdot b_j) \\ &= \sum_{j=1}^n u_j b_{nj}, \end{aligned}$$

el cual no cambia de signo para toda  $u$ , por lo que contradice el hecho de que el sistema es positivamente controlable.

( $\Leftarrow$ ) Probaremos primero que  $\text{Rango}(C) = n$ . Por hipótesis, existen al menos dos columnas de  $B$  cuya última entrada es diferente de cero, supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $b_1$  es una de ellas. Probaremos que las siguientes  $n$  columnas de  $C$  son linealmente independientes:  $\{b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1\}$ . Observemos primero que  $A = \lambda I + N$ , donde  $I$  es la matriz identidad en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , y  $N$  es una matriz nilpotente con las siguientes propiedades:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$N^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad y \quad N^n = 0.$$

Ahora bien, del teorema del binomio de Newton,

$$A^k = (\lambda I + N)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j, \quad (4.6)$$

donde  $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ . Supongamos que

$$\sum_{i=1}^n c_i A^{i-1} b_1 = 0$$

para algunas constantes  $c_i$ . Pero

$$\sum_{i=1}^n c_i A^{i-1} b_1 = \left( \sum_{i=1}^n c_i A^{i-1} \right) b_1 = 0,$$

pero la última entrada de  $b_1$  es diferente de cero, por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^n c_i A^{i-1} = 0,$$

Ahora bien, usando (4.6) y cambiando el orden en las sumas, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n c_i A^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \left( \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \lambda^{i-1-j} N^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} N^j \left( \sum_{i=j+1}^n \binom{i-1}{j} c_i \lambda^{i-1-j} \right) \end{aligned}$$

Por las propiedades de la matriz nilpotente  $N$ , enunciadas arriba, se sigue que

$$\sum_{i=j+1}^n \binom{i-1}{j} c_i \lambda^{i-1-j} = 0$$

para toda  $j = 0, \dots, n-1$ . Para  $j = n-1$  obtenemos la ecuación

$$c_n = 0$$

Para  $j = n-2$  obtenemos la ecuación

$$c_{n-1} + (n-1)c_n \lambda = 0,$$

pero como  $c_n = 0$ , entonces  $c_{n-1} = 0$ ; siguiendo con este proceso obtenemos que  $c_i = 0$  para toda  $i = 1, \dots, n$ .

Probaremos ahora la segunda condición de controlabilidad. Tomemos un vector propio de  $A^T$ , digamos  $v = (0, \dots, 0, v_0)$ , luego entonces

$$\begin{aligned} v \cdot Bu &= v \cdot \sum_{j=1}^n u_j b_j \\ &= \sum_{j=1}^n u_j (v \cdot b_j) \\ &= v_0 \sum_{j=1}^n u_j b_{nj} \end{aligned}$$

Sabemos que existen  $j_1$  y  $j_2$  tales que  $b_{nj_1}$  y  $b_{nj_2}$  tienen signos opuestos, por lo tanto, esto nos permite diseñar controles que hagan que  $v \cdot Bu$  posea el signo que queramos, satisfaciéndose entonces (IV). ■

**Observación 4.4.** *En este caso sólo son necesarios dos controles para conseguir la controlabilidad del sistema (1).*

**Ejemplo 4.1.2.** *Consideremos el sistema de control*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} u.$$

*Es claro que  $\text{Rango}[B \ AB] = 2$ . Además, en la segunda (última) columna de  $B$ , las entradas  $b_{22}$  y  $b_{23}$  tienen signo opuesto, por lo tanto, el sistema es controlable con control positivo.* □

Para el siguiente caso, requeriremos del siguiente lema.

**Lema 4.5.** *Considere el sistema de control (3.1) con  $A$  de la forma (4.3). Si la matriz  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  es tal que  $b_j$  posee todas sus entradas diferentes de cero, entonces la colección  $\{b_j, Ab_j, \dots, A^{n-1}b_j\}$  es linealmente independiente.*

**Demostración.** Supongamos que

$$c_1 b_j + c_2 A b_j + \dots + c_n A^{n-1} b_j = 0,$$

Debemos probar entonces que  $c_i = 0$  para toda  $i = 1, \dots, n$ . Considere el polinomio de grado  $n - 1$

$$f(x) = c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1} = 0,$$

y sea  $b_j = (b_{1j}, \dots, b_{nj})^T$ . Obsérvese que

$$A^k b_j = (\lambda_1^k b_{1j}, \dots, \lambda_n^k b_{nj})^T,$$

luego entonces para cada  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k A^{k-1} b_j &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n c_k \lambda_i^{k-1} b_{ij} &= 0 \\ \Leftrightarrow b_{ij} \left( \sum_{k=1}^n c_k \lambda_i^{k-1} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow b_{ij} f(\lambda_i) &= 0 \end{aligned}$$

lo que implica que  $f(x)$  posee  $n$  soluciones diferentes, pero  $f(x)$  es un polinomio de grado  $n - 1$ , por lo tanto, del teorema fundamental del álgebra,  $f(x) \equiv 0$ , es decir,

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0. \quad \blacksquare$$

**Teorema 4.6.** *Considere el sistema de control (3.1), con  $A = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  y conjunto de control  $\Omega$ . Entonces el sistema es controlable con control positivo si y sólo si en cada renglón de  $B$  hay dos entradas de signos opuestos.*

**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ) Lo haremos por contradicción. Supongamos que el sistema es controlable con control positivo, y que existe un renglón de  $B$ , el  $k$ -ésimo, con todas sus entradas del mismo signo. Probaremos que existe un vector propio real  $v$  de  $A^T$ , tal que  $v \cdot Bu$  no cambia de signo para todo control positivo  $u \in \mathbb{R}_+^m$ .

Por la forma de la matriz  $A$ , los vectores propios de  $A^T$  son todos aquellos vectores que coinciden con las direcciones de los ejes coordenados. Definamos  $R_k = (r_{k1}, \dots, r_{km})$  como el renglón  $k$ -ésimo de la matriz  $B$  y tomemos un vector propio  $v$  de  $A^T$  con un uno en la posición  $k$ -ésima y cero en el resto. Así pues,

$$v \cdot Bu = \sum_{i=1}^m r_{ki} u_i$$

no cambia de signo, pues  $u_i > 0$  y las  $r_{ki}$  son del mismo signo para toda  $i = 1, \dots, m$ .

( $\Leftarrow$ ) Probemos primero, que el rango de la matriz de controlabilidad es  $n$ . Sea  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ . Si  $B$  posee una columna con todas sus entradas diferentes de cero, del lema 4.5 se sigue lo deseado. Supongamos que  $B$  no posee columnas con todas entradas diferentes de cero. seleccionaremos  $r$  columnas de  $B$ , con  $r > 1$ , de la siguiente forma: llamemos  $k_1$  al número de entradas diferentes de cero en  $b_1$ ,  $k_2$  el número de entradas de  $b_2$  que son diferentes de cero, y que son cero en las respectivas entradas de  $b_1$ . En general llamaremos  $k_j$  el número de entradas de  $b_j$  que son diferentes de cero y que además son cero en las respectivas entradas de  $b_1, b_2, \dots, b_{j-1}$ . Tenemos entonces, por definición, que existe  $r$  tal que  $k_j = 0$  para toda  $j > r$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $k_j \neq 0$  para  $j \leq r$ . Obsérvese que  $n - k_1$  es el número de ceros de la primera columna,  $n - k_1 - k_2$  representa el número de ceros de la segunda columna y que son cero en la primera columna, se procede así hasta que se termine, es decir, hasta la columna  $b_r$ , por lo que  $n - k_1 - \dots - k_r = 0$ , es decir,  $k_1 + \dots + k_r = n$ . Considere la siguiente colección de columnas de la matriz de controlabilidad:  $b_1, Ab_1, \dots, A^{k_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{k_2-1}b_2, \dots, b_r, Ab_r, \dots, A^{k_r-1}b_r$ . Probaremos que la colección es linealmente independiente. Supongamos que

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} A^{j-1} b_i = 0 \quad (4.7)$$

para algunas constantes  $c_{ij}$ . Debemos probar que  $c_{ij} = 0$  para toda  $i, j$ . Sabemos que

$$A^{j-1}b_i = (\lambda_1^{j-1}b_{1i}, \dots, \lambda_n^{j-1}b_{ni})^T,$$

luego entonces, la ecuación vectorial (4.7) es equivalente al siguiente sistema de  $n$  ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_1^{j-1} b_{1i} &= 0 \\ \vdots & \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_n^{j-1} b_{ni} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^r b_{1i} (\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_1^{j-1}) &= 0 \\ \vdots & \\ \sum_{i=1}^r b_{ni} (\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_n^{j-1}) &= 0 \end{cases}$$

Por la forma en que se escogieron las columnas  $b_1, \dots, b_r$ , es posible descomponer el sistema anterior en  $r$  subsistemas con  $k_1, \dots, k_r$  ecuaciones cada uno. Hagamos una partición del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  en los siguientes subconjuntos

$$\{l_1^1, \dots, l_{k_1}^1\} \cup \{l_1^2, \dots, l_{k_2}^2\} \cup \dots \cup \{l_1^r, \dots, l_{k_r}^r\}$$

donde  $l_j^i$  es el número de renglón donde su  $i$ -ésima entrada es diferente de cero y todas sus anteriores entradas son cero, para  $1 \leq j \leq k_i$ . Esto nos permite reescribir el sistema anterior en la siguiente forma

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r b_{l_s^1, i} (\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_{l_s^1}^{j-1}) &= 0 & s = 1, \dots, k_1 \\ \vdots & \\ \sum_{i=1}^r b_{l_s^{r-1}, i} (\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_{l_s^{r-1}}^{j-1}) &= 0 & s = 1, \dots, k_{r-1} \\ \sum_{i=1}^r b_{l_s^r, i} (\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_{l_s^r}^{j-1}) &= 0 & s = 1, \dots, k_r \end{cases}$$

Considere el último subsistema. De nuevo, por construcción

$$\begin{aligned} b_{l_s^r, r} &\neq 0 \text{ para toda } s = 1, \dots, k_r \\ b_{l_s^r, i} &= 0 \text{ para } i = 1, \dots, r-1, \end{aligned}$$

luego entonces,

$$\sum_{i=1}^r b_{l_s^r, i} \left( \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_{l_s^r}^{j-1} \right) = 0 \Leftrightarrow b_{l_s^r, r} \left( \sum_{j=1}^{k_r} c_{rj} \lambda_{l_s^r}^{j-1} \right) = 0, \quad s = 1, \dots, k_r. \quad (4.8)$$

Defínase

$$f_r(x) = \sum_{j=1}^{k_r} c_{rj} x^{j-1}$$

un polinomio de grado  $k_r - 1$ . De (4.8) concluimos que  $f_r(\lambda_{l_s^r}) = 0$  para  $s = 1, \dots, k_r$ , lo que implica que  $f_r(s) \equiv 0$ , es decir,  $c_{rj} = 0$  para  $j = 1, \dots, k_r$ . Consideremos ahora el penúltimo subsistema

$$\sum_{i=1}^{r-1} b_{l_s^{r-1}, i} \left( \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_{l_s^{r-1}}^{j-1} \right) = 0 \quad s = 1, \dots, k_{r-1}$$

en donde hemos hecho  $c_{rj} = 0$ , para  $j = 1, \dots, k_r$ . Por construcción,

$$\begin{aligned} b_{l_s^{r-1}, r-1} &\neq 0, \text{ para toda } s = 1, \dots, k_{r-1}, \\ b_{l_s^{r-1}, i} &= 0, \text{ para cada } i = 1, \dots, r-2, \end{aligned}$$

por lo que tenemos que

$$\sum_{i=1}^{r-1} b_{l_s^{r-1}, i} \left( \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_{l_s^{r-1}}^{j-1} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_{l_s^{r-1}, r-1} \left( \sum_{j=1}^{k_{r-1}} c_{r-1, j} \lambda_{l_s^{r-1}}^{j-1} \right) = 0 \quad (4.9)$$

para  $s = 1, \dots, k_{r-1}$ .

Tomemos

$$f_{r-1}(x) = \sum_{j=1}^{k_{r-1}} c_{r-1, j} x^{j-1}$$

un polinomio de grado  $k_{r-1} - 1$ . De (4.9) concluimos que  $f_{r-1}(x)$  posee  $k_{r-1}$  soluciones, luego entonces  $c_{r-1, j} = 0$  para  $j = 1, \dots, k_{r-1}$ . Continuando de esta forma, concluimos que  $c_{ij} = 0$  para toda  $i, j$ . ■

**Ejemplo 4.1.3.** Considere el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} u.$$

Dado que la matriz  $A$  del sistema no tiene forma de Jordan, calcularemos la matriz  $P$  de cambio de coordenadas. Los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = 1$ . Un vector propio asociado con  $\lambda_1$  es  $v_1 = (1, 2)^T$ , y un vector propio asociado con  $\lambda_2$  es  $v_2 = (6, 1)^T$ . La matriz de cambio de coordenadas es

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así que el sistema en las nuevas coordenadas se expresa de la forma

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} & 0 & -\frac{7}{4} \end{bmatrix} u.$$

No es difícil ver que el rango de  $[B \ AB]$  es dos, esto implica que el sistema es controlable. Dado que los renglones de  $B$  poseen dos entradas de signo opuesto, se tiene por el teorema 4.6, que el sistema es controlable con control positivo. □

---

## § 4.2. Caso complejo

En este caso se hace referencia a las características de las matrices del sistema de control (3.1), cuya matriz  $A$  tiene como valor propio un número complejo y su conjugado y es diagonal por submatrices dadas en bloques de Jordan. Las condiciones que se establecen para controlar al sistema con estas características, caen sobre la matriz  $B$  y se hace un análisis del espacio de vectores columna de ésta.

El sistema controlable de estudio tiene la matriz  $A$  como en la siguiente definición.

**Definición 4.2.** Consideremos la matriz oscilatoria de la forma

$$A_{2n \times 2n} = \text{diag} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Definimos la complejificación de  $A$  como la matriz compleja de tamaño  $n \times n$

$$A_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \alpha - i\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha - i\beta \end{bmatrix},$$

Mientras que para un vector columna  $b = (b_1, b_2, \dots, b_{2n-1}, b_{2n})^T$  en  $\mathbb{R}^{2n}$ , definimos su complejificación como

$$b_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} b_1 + ib_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} + ib_{2n} \end{bmatrix},$$

el cual es un vector en  $\mathbb{C}^n$ .

Antes de enunciar y demostrar el resultado principal en esta sección, presentaremos una serie de lemas que se requieren para el propósito.

**Lema 4.7.** Considérense  $z = \alpha + i\beta$  y

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A^k = \begin{bmatrix} \text{Re}(z^k) & \text{Im}(z^k) \\ -\text{Im}(z^k) & \text{Re}(z^k) \end{bmatrix}.$$

**Demostración.** Primero, dado que  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ , con  $|z| = r$  y  $\theta = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$ , por la fórmula de D'Moivre se obtiene que

$$z^k = r^k(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)).$$

Además, podemos escribir

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \alpha/r & \beta/r \\ -\beta/r & \alpha/r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Vamos a probar por inducción sobre  $k$ , la conclusión del lema. Para  $n = 2$  se tiene

$$A^2 = r^2 \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

Atendiendo a las identidades

$$\sin\theta_1\cos\theta_2 \pm \cos\theta_1\sin\theta_2 = \sin(\theta_1 \pm \theta_2) \quad (4.11)$$



$$\cos\theta_1\cos\theta_2 \mp \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1 \pm \theta_2). \quad (4.12)$$

Cuando  $\theta_1 = \theta_2$ , se concluye que

$$A^2 = r^2 \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z^2) & \operatorname{Im}(z^2) \\ -\operatorname{Im}(z^2) & \operatorname{Re}(z^2) \end{bmatrix}.$$

Para  $n = 3$  se tiene

$$\begin{aligned} A^3 = A^2 \cdot A &= r^2 \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix} \cdot r \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= r^3 \begin{bmatrix} \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta & \cos(2\theta)\sin\theta + \sin(2\theta)\cos\theta \\ -(\cos(2\theta)\sin\theta + \sin(2\theta)\cos\theta) & \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por las identidades (4.11) y (4.12) se obtiene

$$A^3 = r^3 \begin{bmatrix} \cos(3\theta) & \sin(3\theta) \\ -\sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z^3) & \operatorname{Im}(z^3) \\ -\operatorname{Im}(z^3) & \operatorname{Re}(z^3) \end{bmatrix}.$$

Ahora, suponemos que se cumple para  $n = k$ , es decir

$$A^k = \begin{bmatrix} r^k \cos(k\theta) & r^k \sin(k\theta) \\ -r^k \sin(k\theta) & r^k \cos(k\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z^k) & \operatorname{Im}(z^k) \\ -\operatorname{Im}(z^k) & \operatorname{Re}(z^k) \end{bmatrix}.$$

Probaremos que se cumple para  $n = k + 1$ . A saber,

$$\begin{aligned} A^{k+1} = A^k \cdot A &= r^k \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix} \cdot r \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= r^{k+1} \begin{bmatrix} \cos(k\theta)\cos\theta - \sin(k\theta)\sin\theta & \cos(k\theta)\sin\theta + \sin(k\theta)\cos\theta \\ -(\cos(k\theta)\sin\theta + \sin(k\theta)\cos\theta) & \cos(k\theta)\cos\theta - \sin(k\theta)\sin\theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y de nuevo, por las identidades (4.11) y (4.12) se concluye que

$$A^{k+1} = r^{k+1} \begin{bmatrix} \cos[(k+1)\theta] & \sin[(k+1)\theta] \\ -\sin[(k+1)\theta] & \cos[(k+1)\theta] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z^{k+1}) & \operatorname{Im}(z^{k+1}) \\ -\operatorname{Im}(z^{k+1}) & \operatorname{Re}(z^{k+1}) \end{bmatrix}$$

lo cual prueba el lema. ■

**Lema 4.8.** Consideremos  $A$  de la forma (4.10) Con  $\beta \neq 0$  y  $b = (b_1, b_2, \dots, b_{2n})^T$  un vector real distinto de cero. Entonces  $\{b, Ab\}$  son linealmente independientes mientras que  $\{b, Ab, A^k b\}$  no lo son para  $k \geq 2$ .

**Demostración.** Desarrollando la combinación lineal  $c_1b + c_2Ab = 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 0 &= c_1 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n} \end{bmatrix} \\
 &= c_1 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \alpha b_1 + \beta b_2 \\ -\beta b_1 + \alpha b_2 \\ \vdots \\ \alpha b_{2n-1} + \beta b_{2n} \\ -\beta b_{2n-1} + \alpha b_{2n} \end{bmatrix} \\
 &= c_1 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n} \end{bmatrix} + c_2 \left( \begin{bmatrix} \alpha b_1 \\ \alpha b_2 \\ \vdots \\ \alpha b_{2n-1} \\ \alpha b_{2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta b_2 \\ -\beta b_1 \\ \vdots \\ \beta b_{2n} \\ -\beta b_{2n-1} \end{bmatrix} \right) \\
 &= c_1 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \\ b_{2n} \end{bmatrix} + c_2 \alpha \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \\ b_{2n} \end{bmatrix} + c_2 \beta \begin{bmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ \vdots \\ b_{2n} \\ -b_{2n-1} \end{bmatrix} \\
 &= (c_1 + c_2 \alpha) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \\ b_{2n} \end{bmatrix} + c_2 \beta \begin{bmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ \vdots \\ b_{2n} \\ -b_{2n-1} \end{bmatrix} \\
 &= (c_1 + c_2 \alpha)b + c_2 \beta b' = 0
 \end{aligned}$$

observemos que  $b$  y  $b'$  son ortogonales, luego, son linealmente independientes, por tanto, para que ésta ecuación sea cero,  $c_1 + c_2 \alpha = 0$  y  $c_2 \beta = 0$ , pero  $\beta \neq 0$ , entonces  $c_2 = 0$ , así  $c_1 = 0$ .

Falta probar que  $b, Ab, A^k b$  no son linealmente independientes para  $k \geq 2$ . Se tiene por el lema 4.7 que

$$A^k = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z^k) & \operatorname{Im}(z^k) & \cdots & 0 & 0 \\ -\operatorname{Im}(z^k) & \operatorname{Re}(z^k) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \operatorname{Re}(z^k) & \operatorname{Im}(z^k) \\ 0 & 0 & \cdots & -\operatorname{Im}(z^k) & \operatorname{Re}(z^k) \end{bmatrix},$$

con  $z = \alpha + i\beta$ , por tanto,

$$\begin{aligned}
 A^k b &= \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z^k)b_1 + \operatorname{Im}(z^k)b_2 \\ -\operatorname{Im}(z^k)b_1 + \operatorname{Re}(z^k)b_2 \\ \vdots \\ \operatorname{Re}(z^k)b_{2n-1} + \operatorname{Im}(z^k)b_{2n} \\ -\operatorname{Im}(z^k)b_{2n-1} + \operatorname{Re}(z^k)b_{2n} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z^k)b_1 \\ \operatorname{Re}(z^k)b_2 \\ \vdots \\ \operatorname{Re}(z^k)b_{2n-1} \\ \operatorname{Re}(z^k)b_{2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \operatorname{Im}(z^k)b_2 \\ -\operatorname{Im}(z^k)b_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Im}(z^k)b_{2n} \\ -\operatorname{Im}(z^k)b_{2n-1} \end{bmatrix} \\
 &= \operatorname{Re}(z^k)b + \operatorname{Im}(z^k)b'.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, al expresar como combinación lineal  $b$  y  $Ab$  se obtiene

$$\begin{aligned}
 c_1 b + c_2 Ab &= c_1 b + c_2(\alpha b + \beta b') \\
 &= c_1 b + c_2 \alpha b + c_2 \beta b' \\
 &= (c_1 + c_2 \alpha) b + c_2 \beta b'.
 \end{aligned}$$

Si hacemos  $c_2 = \operatorname{Im}(z^k)$  y  $c_1 = \operatorname{Re}(z^k) - \operatorname{Im}(z^k)\alpha$ , concluimos que  $A^k b$  se puede expresar como combinación lineal de  $b$  y  $Ab$ . Por tanto  $b, Ab, A^k b$  no son linealmente independientes para  $k \geq 2$ . ■

**Lema 4.9.** Consideremos  $A$  de la forma (4.10) y  $b = (b_1, b_2, \dots, b_{2n})^T$  un vector real. Entonces  $[Ab]_{\mathbb{C}} = A_{\overline{\mathbb{C}}} b_{\mathbb{C}}$ .

**Demostración.** Dado que

$$Ab = \begin{bmatrix} \alpha b_1 + \beta b_2 \\ -\beta b_1 + \alpha b_2 \\ \vdots \\ \alpha b_{2n-1} + \beta b_{2n} \\ -\beta b_{2n-1} + \alpha b_{2n} \end{bmatrix},$$

entonces

$$[Ab]_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \alpha b_1 + \beta b_2 + i(-\beta b_1 + \alpha b_2) \\ \vdots \\ \alpha b_{2n-1} + \beta b_{2n} + i(-\beta b_{2n-1} + \alpha b_{2n}) \end{bmatrix}.$$

Por otro lado tenemos que

$$b_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} b_1 + ib_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} + ib_{2n} \end{bmatrix}$$

y la multiplicación

$$\begin{aligned} A_{\overline{\mathbb{C}}} b_{\mathbb{C}} &= \begin{bmatrix} \alpha - i\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha - i\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 + ib_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} + ib_{2n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha b_1 + i\alpha b_2 - i\beta b_1 + \beta b_2 \\ \vdots \\ \alpha b_{2n-1} + i\alpha b_{2n} - i\beta b_{2n-1} + \beta b_{2n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha b_1 + \beta b_2 + i(-\beta b_1 + \alpha b_2) \\ \vdots \\ \alpha b_{2n-1} + \beta b_{2n} + i(-\beta b_{2n-1} + \alpha b_{2n}) \end{bmatrix} = [Ab]_{\mathbb{C}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Observación 4.10.** Nótese que  $\langle BAB \rangle = \langle BB' \rangle$  (es decir, el espacio generado por las columnas de  $[BAB]$  es igual al espacio generado por las columnas de  $[BB']$ ), pues si elegimos un elemento  $b$  de  $B$  y  $Ab$  de  $AB$  y los expresamos como combinación lineal se tiene

$$c_1 b + c_2 Ab = c_1 b + c_2(b + b') = (c_1 + c_2)b + c_2 b'$$

la cual, la parte derecha es una combinación lineal de elementos de  $[BB']$  (es decir  $b \in B$  y  $b' \in B'$ ).

**Lema 4.11.** Consideremos  $A$  de la forma (4.10) y  $B$  una matriz de  $2n \times m$  tal que  $\text{Rango}[BAB] = 2n$ . Entonces existen  $n$  vectores  $b_{j_1}, \dots, b_{j_n}$ , tales que  $b_{j_1}, b'_{j_1}, \dots, b_{j_n}, b'_{j_n}$  son linealmente independientes, donde

$$b_{j_k} = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)k} \\ b_{(2n)k} \end{bmatrix} \quad y \quad b'_{j_k} = \begin{bmatrix} b_{2k} \\ -b_{1k} \\ \vdots \\ b_{(2n)k} \\ -b_{(2n-1)k} \end{bmatrix},$$

Para  $j_k = 1, \dots, n$ .

**Demostración.** Podemos elegir  $b_1$  de  $C = [B \ AB]$  y su correspondiente  $b'_1$  también en  $C$ , éstos son linealmente independientes, pues  $b_1 \perp b'_1$ . Ahora elegimos un  $b_2$  tal que sea linealmente independiente con  $b'_1$  y  $b_1$ . Elegimos el  $b'_2$  correspondiente a  $b_2$  y formamos la matriz

$$\tilde{C} = [b_1 \ b'_1 \ b_2 \ b'_2] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{12} & b_{22} \\ b_{21} & -b_{11} & b_{22} & -b_{12} \\ b_{31} & b_{41} & b_{32} & b_{42} \\ b_{41} & -b_{31} & b_{42} & -b_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{(2n-1)1} & b_{(2n)1} & b_{(2n-1)2} & b_{(2n)2} \\ b_{(2n)1} & -b_{(2n-1)1} & b_{(2n)2} & -b_{(2n-1)2} \end{bmatrix}.$$

Por definición,  $\tilde{C}$  tiene asociada una transformación lineal  $T$ , con respecto a una base  $\mathcal{B}$ . Además, existe una base  $\mathcal{B}'$  tal que al realizar el cambio de coordenadas, la matriz queda expresada de la forma

$$\tilde{C}_{\mathcal{B}'} = [\tilde{b}_1 \ \tilde{b}'_1 \ \tilde{b}_2 \ \tilde{b}'_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b'_{12} & b'_{22} \\ 0 & 1 & b'_{22} & -b'_{12} \\ 0 & 0 & b'_{32} & b'_{42} \\ 0 & 0 & b'_{42} & -b'_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b'_{(2n-1)2} & b'_{(2n)2} \\ 0 & 0 & b'_{(2n)2} & -b'_{(2n-1)2} \end{bmatrix}$$

$\tilde{b}_1$  y  $\tilde{b}'_1$  de esta forma, pues  $b_1$  y  $b'_1$  son ortogonales, lo mismo con  $\tilde{b}_2$  y  $\tilde{b}'_2$ . Así al expresar  $\tilde{b}_1, \tilde{b}'_1, \tilde{b}_2$  y  $\tilde{b}'_2$  como combinación lineal tenemos

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} b'_{12} \\ b'_{22} \\ b'_{32} \\ b'_{42} \\ \vdots \\ b'_{(2n-1)2} \\ b'_{(2n)2} \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} b'_{22} \\ -b'_{12} \\ b'_{42} \\ -b'_{32} \\ \vdots \\ b'_{(2n)2} \\ -b'_{(2n-1)2} \end{bmatrix} = 0.$$

Teniendo que resolver el sistema

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 b'_{12} + c_4 b'_{22} &= 0 \\ c_2 + c_3 b'_{22} - c_4 b'_{12} &= 0 \\ c_3 b'_{32} + c_4 b'_{42} &= 0 \\ c_3 b'_{42} - c_4 b'_{32} &= 0 \\ &\vdots \\ c_3 b'_{(2n-1)2} + c_4 b'_{(2n)2} &= 0 \\ c_3 b'_{(2n)2} - c_4 b'_{(2n-1)2} &= 0. \end{aligned}$$

Dado que la independencia lineal queda invariante bajo el cambio de base, tenemos que  $\tilde{b}_1, \tilde{b}'_1$  y  $\tilde{b}_2$  son linealmente independientes. Entonces, algún  $b'_{i2} \neq 0$  con  $i = 3, \dots, 2n$ . Sin pérdida de generalidad,

podemos suponer que  $b'_{32} \neq 0$ . De la cuarta ecuación tenemos

$$c_4 = c_3 \frac{b'_{42}}{b'_{32}}.$$

Sustituyéndola en la tercera ecuación tenemos

$$c_3 \left( b'_{32} + \frac{(b'_{42})^2}{b'_{32}} \right) = 0.$$

Entonces

$$b'_{32} + \frac{(b'_{42})^2}{b'_{32}} \neq 0. \quad (4.13)$$

De no ser así, tendríamos que

$$(b'_{32})^2 = -(b'_{42})^2,$$

y así

$$b'_{32} = \sqrt{-(b'_{42})^2},$$

el cual es un número complejo y contradice la naturaleza de  $b'_{32}$ . Por tanto,  $c_3 = 0$ . Así,  $c_4 = 0$  y  $c_1 = c_2 = 0$ . Así  $\tilde{b}_1, \tilde{b}'_1, \tilde{b}_2$  y  $\tilde{b}'_2$  son linealmente independientes, por tanto  $b_1, b'_1, b_2$  y  $b'_2$  son linealmente independientes.

De nuevo, podemos elegir un  $b_3$  de tal forma que sea linealmente independiente con  $b_1, b'_1, b_2$  y  $b'_2$ , tomamos su ortogonal  $b'_3$  y formamos la matriz

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= [b_1 \ b'_1 \ b_2 \ b'_2 \ b_3 \ b'_3] \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{12} & b_{22} & b_{13} & b_{23} \\ b_{21} & -b_{11} & b_{22} & -b_{12} & b_{23} & -b_{13} \\ b_{31} & b_{41} & b_{32} & b_{42} & b_{33} & b_{43} \\ b_{41} & -b_{31} & b_{42} & -b_{32} & b_{43} & -b_{33} \\ b_{51} & b_{61} & b_{52} & b_{62} & b_{53} & b_{63} \\ b_{61} & -b_{51} & b_{62} & -b_{52} & b_{63} & -b_{53} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{(2n-1)1} & b_{(2n)1} & b_{(2n-1)2} & b_{(2n)2} & b_{(2n-1)3} & b_{(2n)3} \\ b_{(2n)1} & -b_{(2n-1)1} & b_{(2n)2} & -b_{(2n-1)2} & b_{(2n)3} & -b_{(2n-1)3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bajo el mismo argumento, tenemos que  $\tilde{C}$  tiene asociada una transformación lineal  $T$  (no necesariamente la misma) con respecto a una base  $\mathcal{B}$ . Así, existe una base  $\mathcal{B}'$  tal que al realizar el cambio de coordenadas, la matriz se expresa de la forma

$$\tilde{C} = [\tilde{b}_1 \ \tilde{b}'_1 \ \tilde{b}_2 \ \tilde{b}'_2 \ \tilde{b}_3 \ \tilde{b}'_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b'_{13} & b'_{23} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b'_{23} & -b'_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b'_{33} & b'_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b'_{43} & -b'_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_{53} & b'_{63} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_{63} & -b'_{53} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_{(2n-1)3} & b'_{(2n)3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_{(2n)3} & b'_{(2n-1)3} \end{bmatrix},$$

y al expresar los vectores como combinación lineal

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_5 \begin{bmatrix} b'_{13} \\ b'_{23} \\ b'_{33} \\ b'_{43} \\ b'_{53} \\ b'_{63} \\ \vdots \\ b'_{(2n-1)3} \\ b'_{(2n)3} \end{bmatrix} + c_6 \begin{bmatrix} b'_{23} \\ -b'_{13} \\ b'_{43} \\ -b'_{33} \\ b'_{63} \\ -b'_{53} \\ \vdots \\ b'_{(2n)3} \\ -b'_{(2n-1)3} \end{bmatrix} = 0.$$

Entonces, el sistema a resolver es

$$\begin{aligned} c_1 + c_5 b'_{13} + c_6 b'_{23} &= 0 \\ c_2 + c_5 b'_{23} - c_6 b'_{13} &= 0 \\ c_3 + c_5 b'_{33} + c_6 b'_{43} &= 0 \\ c_4 + c_5 b'_{43} - c_6 b'_{33} &= 0 \\ c_5 b'_{53} + c_6 b'_{63} &= 0 \\ c_5 b'_{63} - c_6 b'_{53} &= 0 \\ &\vdots \\ c_5 b'_{(2n-1)3} + c_6 b'_{(2n)3} &= 0 \\ c_5 b'_{(2n)3} - c_6 b'_{(2n-1)3} &= 0. \end{aligned}$$

Como la independencia lineal permanece invariante mediante el cambio de coordenadas, tenemos que  $\tilde{b}_3$  es linealmente independiente con  $\tilde{b}_1, \tilde{b}'_1, \tilde{b}_2$  y  $\tilde{b}'_2$ , entonces algún  $b'_{i3} \neq 0$ , para  $i \geq 5$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $b'_{53} \neq 0$ . Así, de la sexta ecuación tenemos

$$c_6 = c_5 \frac{b'_{63}}{b'_{53}}$$

y sustituyéndola en la tercera ecuación se obtiene

$$c_5 \left( b'_{53} + \frac{(b'_{63})^2}{b'_{53}} \right) = 0.$$

Por el mismo argumento de (4.15), se obtiene que  $c_5 = 0$ . Así,  $c_6 = 0$  y  $c_4 = c_3 = c_2 = c_1 = 0$ . Así,  $\tilde{b}_1, \tilde{b}'_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}'_2, \tilde{b}_3$  y  $\tilde{b}'_3$  son linealmente independientes, por tanto  $b_1, b'_1, b_2, b'_2, b_3, b'_3$  son linealmente independientes.

Procediendo con ésta elección inductivamente, suponemos que  $b_1, b'_1, \dots, b_{n-1}, b'_{n-1}$  son linealmente independientes. Tomemos  $b_n$  linealmente independiente con  $b_1, b'_1, \dots, b_{n-1}, b'_{n-1}$ . Entonces, sea  $b'_n$  el correspondiente ortogonal a  $b_n$  y formamos la matriz

$$\begin{aligned}
 \tilde{C} &= [b_1 \ b'_1 \ \cdots \ b_n \ b'_n] \\
 &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{1(n-1)} & b_{2(n-1)} & b_{1n} & b_{2n} \\ b_{21} & -b_{11} & \cdots & b_{2(n-1)} & -b_{1(n-1)} & b_{2n} & -b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{(2n-3)1} & b_{(2n-2)1} & \cdots & b_{(2n-3)(n-1)} & b_{(2n-2)(n-1)} & b_{(2n-3)n} & b_{(2n-2)n} \\ b_{(2n-2)1} & -b_{(2n-3)1} & \cdots & b_{(2n-2)(n-1)} & -b_{(2n-3)(n-1)} & b_{(2n-2)n} & -b_{(2n-3)n} \\ b_{(2n-1)1} & b_{(2n)1} & \cdots & b_{(2n-1)(n-1)} & b_{(2n)(n-1)} & b_{(2n-1)n} & b_{(2n)n} \\ b_{(2n)1} & -b_{(2n-1)1} & \cdots & b_{(2n)(n-1)} & -b_{(2n-1)(n-1)} & b_{(2n)n} & -b_{(2n-1)n} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como se hizo anteriormente, ésta matriz tiene asociada una transformación lineal  $T$  con respecto a una base  $\mathcal{B}$ . Así, existe una base  $\mathcal{B}'$ , para el cual el cambio de coordenadas permite expresar la matriz de la forma

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} &= [\tilde{b}_1 \ \tilde{b}'_1 \ \cdots \ \tilde{b}_n \ \tilde{b}'_n] \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_{1n} & b'_{2n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & b'_{2n} & -b'_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & b'_{(2n-3)n} & b'_{(2n-2)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b'_{(2n-2)n} & -b'_{(2n-3)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_{(2n-1)n} & b'_{(2n)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_{(2n)n} & -b'_{(2n-1)n} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Expresando los vectores como combinación lineal

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + c_{n-3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_{n-2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_{n-1} \begin{bmatrix} b'_{1n} \\ b'_{2n} \\ \vdots \\ b'_{(2n-3)n} \\ b'_{(2n-2)n} \\ b'_{(2n-1)n} \\ b'_{(2n)n} \end{bmatrix} + c_n \begin{bmatrix} b'_{2n} \\ -b'_{1n} \\ \vdots \\ b'_{(2n-2)n} \\ -b'_{(2n-3)n} \\ b'_{(2n)n} \\ -b'_{(2n-1)n} \end{bmatrix} = 0.$$

Por tanto, el sistema que tenemos que resolver es

$$\begin{aligned}
 c_1 + c_{n-1}b'_{1n} + c_nb'_{2n} &= 0 \\
 c_2 + c_{n-1}b'_{2n} - c_nb'_{1n} &= 0 \\
 &\vdots \\
 c_{n-3} + c_{n-1}b'_{(2n-3)n} + c_nb'_{(2n-2)n} &= 0 \\
 c_{n-2} + c_{n-1}b'_{(2n-2)n} - c_nb'_{(2n-3)n} &= 0 \\
 c_{n-1}b'_{(2n-1)n} + c_nb'_{(2n)n} &= 0 \\
 c_{n-1}b'_{(2n)n} - c_nb'_{(2n-1)n} &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo dicho anteriormente, el cambio de coordenadas conserva independencia lineal, por tanto los vectores  $\tilde{b}_1, \tilde{b}'_1, \dots, \tilde{b}_n$  son linealmente independientes. Esto implica que,  $b'_{(2n-1)n} \neq 0$  ó bien



$b'_{(2n)n} \neq 0$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $b'_{(2n-1)n} \neq 0$ . De la  $2n$ -ésima ecuación tenemos

$$c_n = c_{n-1} \frac{b'_{(2n)n}}{b'_{(2n-1)n}}$$

y sustituyéndola en la  $(2n-1)$ -ésima ecuación tenemos

$$c_{n-1} \left( b'_{(2n-1)n} + \frac{(b'_{(2n)n})^2}{b'_{(2n-1)n}} \right) = 0.$$

De nuevo, por el argumento de (4.15), se tiene que  $c_{n-1} = 0$ . Entonces  $c_n = 0$ , y así  $c_1 = \dots = c_{n-2} = 0$ .

Por tanto, el conjunto maximal linealmente independientes de  $C(A, B)$  es

$$\{b_1, b'_1, \dots, b_n, b'_n\}. \quad \blacksquare$$

Estos resultados son suficientes para la demostración del teorema principal, el cual se enuncia como sigue.

**Teorema 4.12.** *Consideremos  $A$  de la forma (4.10) y  $B$  una matriz real de tamaño  $n \times m$ . El sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$  es controlable y CCP si y sólo si  $\langle B_{\mathbb{C}} \rangle = \mathbb{C}^n$ .*

**Demostración.** Utilizando el teorema de Brammer, nos enfocaremos solo en (III), pues (IV) implica la no existencia de vectores propios reales y, el sistema en cuestión arroja vectores propios complejos. Tenemos que demostrar que el rango (real) de  $C = [BAB \dots A^k B]$  es igual a  $2n$  si y sólo si el rango (complejo) de  $B_{\mathbb{C}}$  es igual a  $n$ .

Supongamos primero que el rango de  $B_{\mathbb{C}}$  es  $n$ .

Sean  $b_{1\mathbb{C}}, b_{2\mathbb{C}}, \dots, b_{n\mathbb{C}}$  los  $n$  vectores complejificados linealmente independientes. Enseguida, tomamos los vectores cuya complejificación es la de estos y formamos el conjunto  $\{b_1, Ab_1, b_2, Ab_2, \dots, b_n, Ab_n\}$ . Ahora, para ver que son linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ , tomamos una combinación lineal

$$c_{11}b_1 + c_{12}Ab_1 + c_{21}b_2 + c_{22}Ab_2 + \dots + c_{n1}b_n + c_{n2}Ab_n = 0.$$

Al complejificar, por el lema 4.9 tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= c_{11}b_{1\mathbb{C}} + c_{12}[Ab_1]_{\mathbb{C}} + c_{21}b_{2\mathbb{C}} + c_{22}[Ab_2]_{\mathbb{C}} + \dots + c_{n1}b_{n\mathbb{C}} + c_{n2}[Ab_n]_{\mathbb{C}} \\ &= c_{11}b_{1\mathbb{C}} + c_{12}A_{\overline{\mathbb{C}}}b_{1\mathbb{C}} + c_{21}b_{2\mathbb{C}} + c_{22}A_{\overline{\mathbb{C}}}b_{2\mathbb{C}} + \dots + c_{n1}b_{n\mathbb{C}} + c_{n2}A_{\overline{\mathbb{C}}}b_{n\mathbb{C}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

dado que

$$A_{\overline{\mathbb{C}}} = \begin{bmatrix} \alpha - i\beta & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha - i\beta \end{bmatrix} = (\alpha - i\beta)I_{n \times n}$$

y  $b_{j\mathbb{C}}, j = 1, \dots, n$ , es un vector de  $n$  entradas, entonces se tiene que

$$A_{\overline{\mathbb{C}}}b_{j\mathbb{C}} = (\alpha - i\beta)b_{j\mathbb{C}}.$$

Factorizando (4.14) obtenemos

$$[c_{11} + c_{12}(\alpha - i\beta)]b_{1\mathbb{C}} + \dots + [c_{n1} + c_{n2}(\alpha - i\beta)]b_{n\mathbb{C}} = 0$$

como los vectores  $b_{j\mathbb{C}}$ ,  $j = 1, \dots, n$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{C}$ , se tiene que

$$c_{j1} + c_{j2}(\alpha - i\beta) = 0.$$

Así que,

$$c_{j1} = -c_{j2}(\alpha - i\beta). \quad (4.15)$$

Por otro lado tenemos que  $c_{j1}, c_{j2} \in \mathbb{R}$  y  $\beta \neq 0$  y para que (4.15) se cumpla  $c_{j2}$  tiene que ser complejo, lo que es una contradicción. Por tanto,  $c_{j2} = 0$  en  $\mathbb{R}$  y en consecuencia,  $c_{j1} = 0$ . Así, se concluye que  $b_1, Ab_1, b_2, Ab_2, \dots, b_n, Ab_n$  son linealmente independientes en  $\mathbb{R}$ .

Supóngase ahora que la matriz de controlabilidad  $C(A, B)$  tiene rango  $2n$ . Tenemos, por el lema 4.11 que, los  $2n$  vectores linealmente independientes son  $b_1, b'_1, \dots, b_n, b'_n$ , de los cuales tomaremos  $b_1, \dots, b_n$ , donde

$$b_k = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)k} \\ b_{(2n)k} \end{bmatrix},$$

para  $k = 1, \dots, n$ . Al complejificar

$$b_{\mathbb{C}k} = \begin{bmatrix} b_{1k} + ib_{2k} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)k} + ib_{(2n)k} \end{bmatrix}$$

Tomemos  $z_1, \dots, z_n$  números en  $\mathbb{C}$  y expresamos como combinación lineal los vectores complejificados

$$z_1 \begin{bmatrix} b_{11} + ib_{21} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)1} + ib_{(2n)1} \end{bmatrix} + \dots + z_n \begin{bmatrix} b_{1n} + ib_{2n} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)n} + ib_{(2n)n} \end{bmatrix} = 0.$$

Así que, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{aligned} z_1(b_{11} + ib_{21}) + \dots + z_n(b_{1n} + ib_{2n}) &= 0 \\ \vdots & \\ z_1(b_{(2n-1)1} + ib_{(2n)1}) + \dots + z_n(b_{(2n-1)n} + ib_{(2n)n}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Si  $z_k = \alpha_k + i\beta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , entonces (4.16) es igual a

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + i\beta_1)(b_{11} + ib_{21}) + \dots + (\alpha_n + i\beta_n)(b_{1n} + ib_{2n}) &= 0 \\ \vdots & \\ (\alpha_1 + i\beta_1)(b_{(2n-1)1} + ib_{(2n)1}) + \dots + (\alpha_n + i\beta_n)(b_{(2n-1)n} + ib_{(2n)n}) &= 0. \end{aligned}$$

Para cada  $j = 1, \dots, n$  y  $k = 1, \dots, n$ , se tiene la siguiente multiplicación de los números complejos

$$(\alpha_k + i\beta_k)(b_{(2j-1)k} + ib_{(2j)k}) = (\alpha_k b_{(2j-1)k} - \beta_k b_{(2j)k}) + i(\alpha_k b_{(2j)k} + \beta_k b_{(2j-1)k})$$

así, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\alpha_k b_{1k} - \beta_k b_{2k}) &+ i(\alpha_k b_{2k} + \beta_k b_{1k}) = 0 \\ &\vdots \\ \sum_{k=1}^n (\alpha_k b_{(2n-1)k} - \beta_k b_{(2n)k}) &+ i(\alpha_k b_{(2n)k} + \beta_k b_{(2n-1)k}) = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pero tenemos que si  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z = 0$ , entonces  $Re(z) = 0$  y  $Im(z) = 0$ . Así, separamos la parte real y la parte compleja de (4.17) para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\alpha_k b_{1k} - \beta_k b_{2k}) &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{k=1}^n (\alpha_k b_{(2n-1)k} - \beta_k b_{(2n)k}) &= 0 \\ \sum_{k=1}^n (\alpha_k b_{2k} + \beta_k b_{1k}) &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{k=1}^n (\alpha_k b_{(2n)k} + \beta_k b_{(2n-1)k}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde las primeras  $n$  ecuaciones son la parte real de (4.17) y las  $n$  restantes son la parte imaginaria del mismo. Ahora, reacomodamos los renglones de (4.18) y obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\alpha_k b_{1k} - \beta_k b_{2k}) &= 0 \\ \sum_{k=1}^n (\alpha_k b_{2k} + \beta_k b_{1k}) &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{k=1}^n (\alpha_k b_{(2n-1)k} - \beta_k b_{(2n)k}) &= 0 \\ \sum_{k=1}^n (\alpha_k b_{(2n)k} + \beta_k b_{(2n-1)k}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Esto es

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{(2n-1)k} \\ b_{(2n)k} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^n \beta_k \begin{bmatrix} b_{2k} \\ -b_{1k} \\ \vdots \\ b_{(2n)k} \\ -b_{(2n-1)k} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k + \sum_{k=1}^n \beta_k b'_k$$

Dado que  $b_1, b'_1, \dots, b_n, b'_n$  son linealmente independientes, se obtiene que  $\alpha_k = \beta_k = 0$  para  $k = 1, \dots, n$ , esto es  $z_k = \alpha_k + i\beta_k = 0$  para  $k = 1, \dots, n$ . Por tanto  $b_{\mathbb{C}k}$ ,  $k = 1, \dots, n$  son linealmente independientes, luego  $\langle B_{\mathbb{C}} \rangle = \mathbb{C}^n$ . ■





## Teoría de gráficas

En este capítulo se mostrará un criterio para la determinación de controlabilidad para sistemas lineales descritos por la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con  $x$ ,  $A$ ,  $B$  y  $u$  con las dimensiones establecidas al principio de este trabajo.

Mostraremos algunas definiciones generales de teoría de gráficas, mismas que se utilizarán en el contexto de teoría de control para sistemas lineales de la forma (5.1).

---

### § 5.1. Gráficas y subgráficas

Se presentará primero, la definición formal abstracta de una *gráfica* y cada una de sus componentes, así también, la definición de una *digráfica* ó *gráfica dirigida*.

**Definición 5.1.** Una *gráfica abstracta*  $G(V, E)$ , o simplemente *gráfica*  $G$ , consiste de un conjunto de elementos  $V$  llamados *nodos*, junto con un conjunto  $E$  de parejas no ordenadas  $(i, j)$  o  $(j, i)$ , con  $i, j \in V$ , llamadas *aristas* de  $G$ . Los nodos  $i$  y  $j$  son llamados *puntos finales* de  $(i, j)$ .

Otros nombres comunmente usados para un nodo son *vértice*, *punto*, *cruce*, *0-simplex*, *0-celda* y *elemento*. Similarmente, para arista se tienen los nombres *línea*, *borde*, *rama*, *arco*, *1-simplex*, y *elemento*. Decimos que la arista  $(i, j)$  está conectada con los nodos  $i$  y  $j$ , y que  $(i, j)$  es incidente con los nodos  $i$  y  $j$ , y recíprocamente,  $i$  y  $j$  son incidentes con  $(i, j)$ . En las aplicaciones, una gráfica es usualmente representada equivalentemente a un *diagrama geométrico* en el cual los nodos están indicados por pequeños círculos o puntos, mientras que para cualesquier par de ellos,  $i$  y  $j$ , son unidos por una curva continua o algunas veces por una línea recta, entre  $i$  y  $j$  si y sólo si  $(i, j)$  está en  $E$ .

Extenderemos el concepto de gráfica, permitiendo a un par de nodos ser conectados por varias aristas y se indica por los símbolos  $(i, j)_1, (i, j)_2, \dots, (i, j)_k$ ; éstas son llamadas *aristas paralelas* si  $k \geq 2$ . Si ninguna Arista en particular es especificada,  $(i, j)$  denota a cualquiera, pero de un modo fijo, las aristas paralelas entre  $i$  y  $j$ . También admitimos aristas que tengan un mismo punto final. Tal arista  $(i, i)$  la llamaremos *auto lazo*. Si hay dos o más auto lazos en un nodo de  $G$ , serán también referidos como aristas paralelas de  $G$ . En el diagrama geométrico, las aristas paralelas pueden ser representadas por líneas continuas conectadas entre el mismo par de nodos, y una auto lazo  $(i, i)$  puede ser introducido por un arco circular que retorna al nodo  $i$  sin pasar por los demás nodos.

Como una ilustración consideremos la gráfica  $G(V, E)$  en la cual

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (4, 4)_1, (4, 4)_2, (4, 3), (2, 3)_1, (2, 3)_2, (6, 7)_1, (6, 7)_2, (6, 7)_3\}$$

La gráfica geométrica correspondiente se muestra en la figura 1, en la cual se tiene una auto lazo en el nodo 1, dos auto lazos en el nodo 4, dos aristas paralelas conectadas entre los nodos 2 y 3, y tres aristas paralelas conectadas entre los nodos 6 y 7. Enfatizaremos que en una gráfica, el orden de los nodos  $i$  y  $j$  es irrelevante. De hecho consideramos  $(i, j) = (j, i)$ , por ejemplo  $(1, 2) = (2, 1)$ ,  $(6, 7)_2 = (7, 6)_2$ .

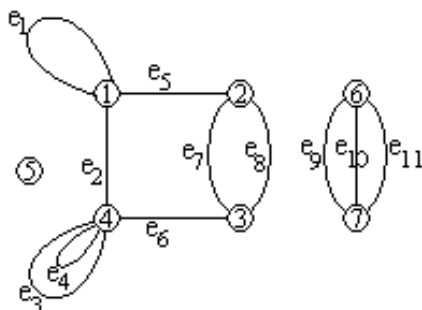


Figura 1. Una gráfica geométrica.

Una gráfica  $G(V, E)$  se llama finita si  $V$  y  $E$  son finitas. En este trabajo sólo abordaremos gráficas finitas.

**Definición 5.2.** Una subgráfica de una gráfica  $G(V, E)$  es una gráfica  $G_s(V_s, E_s)$  en los cuales  $V_s$  y  $E_s$  son subconjuntos de  $V$  y  $E$  respectivamente. Si  $V_s$  o  $E_s$  son subconjuntos propios, la subgráfica es llamada subgráfica propia de  $G$ . Si  $V_s = V$ , nos referiremos a la subgráfica como una subgráfica generadora de  $G$ . Si  $V_s$  o  $E_s$  son el vacío, la subgráfica es llamada subgráfica nula. La gráfica nula es considerada como una subgráfica de toda gráfica y es denotada por  $\phi$ .

**Definición 5.3.** Un nodo que no incide a alguna arista es llamado nodo aislado.

En aplicaciones prácticas, algunas veces es conveniente representar las aristas de una gráfica por letras  $e_k$ . En este sentido, una subgráfica que no tenga nodos aislados puede ser expresado por yuxtaposición de sus aristas designadas por estos símbolos, como en la figura 1.

**Definición 5.4.** Dos gráficas  $G_1$  y  $G_2$  se dicen ser isomorfas, denotadas por  $G_1 = G_2$ , si existe una correspondencia uno a uno entre los elementos de su conjunto de nodos tal que las aristas correspondientes son incidentes con los nodos correspondientes.

En otras palabras, en dos gráficas isomorfas, los nodos correspondientes son conectados por aristas en una, si y sólo si, están también conectados con el mismo número de aristas en la otra. La definición 5.4 establece dos requerimientos sobre isomorfismo entre dos gráficas. Primera, deben tener el mismo número de nodos y aristas. Segunda, se debe preservar la relación de incidencia.

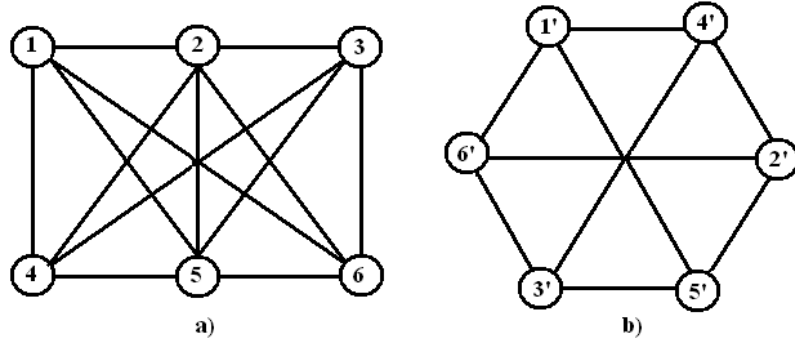


Figura 2. Dos gráficas isomorfas.

---

## § 5.2. Conexidad

Sucesiones de aristas las cuales forman rutas continuas forman un papel importante en la teoría de gráficas. En una gráfica geométrica, una sucesión de aristas puede visualizarse como una serie de aristas conectadas en una manera continua. Mas formalmente la definiremos como sigue.

**Definición 5.5.** Una sucesión de aristas de longitud  $k - 1$  en una gráfica  $G$ , es una sucesión finita de aristas de la forma

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k), \quad (5.1)$$

$k \geq 2$  en  $G$ . La sucesión de aristas se dice ser cerrada si  $i_1 = i_k$ , y abierta en otro caso. En una sucesión abierta, el nodo  $i_1$  es llamado nodo inicial y  $i_k$  es el nodo terminal de la sucesión de aristas. Éstos son llamados puntos extremos de la sucesión de aristas.

Mencionamos específicamente que no todos los nodos en (5.1) son necesariamente distintos y la misma arista puede aparecer varias veces en la sucesión de aristas. Por ejemplo,

$$(4, 2), (2, 6), (6, 3), (3, 5), (5, 4), (4, 2), (2, 7),$$

es una sucesión de aristas abierta de longitud 7. El nodo 4 es el nodo inicial y el nodo 7 es el nodo terminal.

**Definición 5.6.** Si todas las aristas que aparecen en una sucesión de aristas son distintos, ésta es llamada tren arista.

Así que, un tren arista puede ir a través de un nodo más de una vez, pero no puede retrazar sobre sus partes, como lo puede hacer una sucesión de aristas.

**Definición 5.7.** Un tren arista en el cual todos sus nodos  $i_1, i_2, \dots, i_k$  son distintos, es llamado camino de longitud  $k - 1$ . Un nodo aislado es considerado como un camino de longitud cero. Un tren arista cerrado en el cual todos sus nodos  $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$  son distintos, en este caso  $i_1 = i_k$ , es llamado circuito de longitud  $k - 1$ .

Así, una auto lazo es un circuito de longitud uno. Comunmente nos referiremos a un circuito como lazo o ciclo. Una gráfica que no contenga ciclos es una gráfica acíclica.

**Definición 5.8.** Una gráfica se dice ser conexa si todo par de nodos están conectados por un camino.

En otras palabras, una gráfica es conexa si consta de una sola pieza.

**Definición 5.9.** Una componente de una gráfica es una subgráfica conexa que contiene el número maximal de aristas, es decir, todo par de nodos es incidido por al menos una arista.

Un nodo aislado es una componente.

**Definición 5.10.**  $G(V, E)$  es una gráfica que consta de  $n$  nodos,  $b$  aristas y  $c$  componentes. Se define el rango  $r$  de  $G$  como el número  $r = n - c$ , y la nulidad de  $G$  como el número  $m = b - n + c (= b - r)$ .

El término de nulidad es también conocido por los nombres *rango del circuito*, *número ciclomático*, *rango del ciclo*, *conectividad*, y *primer número de Betti*. La razón por la cual se eligieron los nombres de rango y nulidad, es por que son el rango y nulidad de la *matriz de incidencia* asociada a la gráfica, la cual veremos más adelante.

### § 5.3. Gráficas dirigidas

En esta sección estudiaremos un tipo de gráficas en particular, las cuales tienen un vínculo estrecho con sistemas dinámicos. Tales gráficas son las llamadas *digráficas* o *gráficas dirigidas*, que definiremos a continuación.

**Definición 5.11.** Una digráfica  $G_d(V, E)$  es una gráfica en la cual toda arista  $(i, j)$  de  $G_d$  tiene una dirección asignada.

Si las aristas de la gráfica no son dirigidas, diremos simplemente que la gráfica es *no dirigida*. Si una gráfica está compuesta de gráficas dirigidas y gráficas no dirigidas, la llamaremos gráfica mixta.

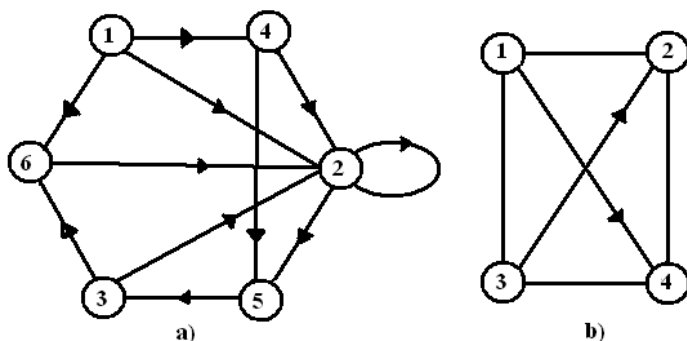


Figura 3. a) Digráfica, b) Gráfica mixta.

En adición a los términos de sucesión de aristas, tren de aristas, camino, y ciclo, definidos para una gráfica dirigida  $G_d$ , también necesitamos subclases especiales de esas subgráficas conocidas como sucesión de aristas dirigidas, tren de aristas dirigidas, caminos dirigidos y ciclos dirigidos.

**Definición 5.12.** Para una gráfica dirigida  $G_d$ , una sucesión de aristas dirigidas de tamaño  $k - 1$  de  $G_d$ , es una sucesión de aristas de la forma

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k),$$

$k \geq 2$ . La sucesión de aristas dirigidas se dice cerrada si  $i_1 = i_k$ , y abierta en otro caso.



**Definición 5.13.** Si todas las aristas que aparecen en la sucesión de aristas dirigidas son distintas, la sucesión de aristas dirigidas se llama tren de aristas dirigidas.

**Definición 5.14.** Un tren abierto dirigido, en el cual sus nodos  $i_1, i_2, \dots, i_k$  son distintos, es llamado camino dirigido de longitud  $k - 1$ . Si  $i_1 = i_k$  el tren de aristas dirigidas es llamado ciclo dirigido de longitud  $k - 1$ .

Así que, un auto lazo es un es una gráfica dirigida y es también un ciclo dirigido de longitud uno. Un nodo aislado es un camino dirigido de longitud cero.

**Definición 5.15.** Una componente cíclica es aquella en la cual todos los nodos son mutuamente alcanzables a través de un camino natural dirigido y, una componente acíclica es aquella en la que esto no es posible.

**Definición 5.16.** Una gráfica dirigida se dice fuertemente conectada, o más brevemente fuerte, si para todo par distinto de nodos  $i$  y  $j$ , existe un camino dirigido de  $i$  hasta  $j$ , o bien, de  $j$  hasta  $i$ .

**Definición 5.17.** Una componente fuerte de una gráfica dirigida, es una subgráfica fuerte maximal.

### 5.3.1. Matrices y gráficas dirigidas

La orientación de las aristas de una gráfica dirigida, en algunas aplicaciones, es una orientación “verdadera” en el sentido de que el sistema representado por la gráfica dirigida exhibe algunas propiedades unilaterales. Una gráfica dirigida sin auto lazos está completamente determinada por su matriz de incidencia.

**Definición 5.18.** La matriz de incidencia nodo-arista, o simplemente matriz de incidencia, denotada por el símbolo  $A_a$ , de una gráfica dirigida  $G$ , es una matriz de orden  $n \times b$  tal que si  $A_a = (a_{ij})$ , entonces

- $a_{ij} = 1$  si la arista  $e_j$  es incidente en el nodo  $i$  y es dirigido fuera del nodo  $i$ ,
- $a_{ij} = -1$  si la arista  $e_j$  es incidente en el nodo  $i$  y es dirigido hacia el nodo  $i$ ,
- $a_{ij} = 0$  si la arista  $e_j$  no es incidente en el nodo  $i$ ,

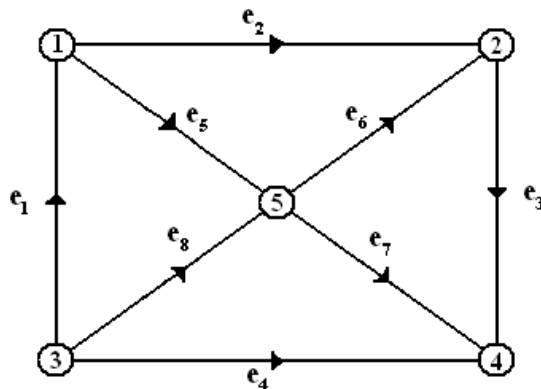


Figura 4. Digráfica para una matriz de incidencia.

**Ejemplo 5.3.1.** Considere la digráfica de la figura 4. La matriz de incidencia de  $G$  está dada por

$$A_a = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (5.2)$$

□

Note que en la definición de la matriz  $A_a$  no se consideran las digráficas que contienen auto lazos. Consideraremos este caso en las líneas siguientes.

Así como hemos asociado una matriz de incidencia a una digráfica, es obvio que podemos hacerlo de manera recíproca, es decir, asignarle una digráfica a una matriz.

Note que no hemos hecho referencia sobre las entradas de la matriz a la cual le asociaremos una gráfica dirigida, sin embargo el análisis sobre esta es el mismo, pues la incidencia sobre nodos y aristas, está dada por entradas distintas de cero en la matriz dada. Para este caso, la forma en la cual trataremos las gráficas dirigidas, será por incidencia nodo-nodo y eliminaremos el signo menos  $(-)$  en el proceso.

Dada cualesquier matriz  $A$  de tamaño  $n \times m$ , reemplazaremos todas sus entradas distintas de cero por la unidad (1), y preservando las entradas iguales a cero como tales. A esta matriz se le conoce como la *forma Booleana* de la matriz  $A$ , y se denota por  $A_B$ . La digráfica  $G$  representada por  $A_B$  constará de  $r = \max\{n, m\}$  nodos.

Si el elemento  $a_{ij}$  de  $A_B$  es igual a 1, trazaremos una arista dirigida desde el nodo  $i$  hacia el nodo  $j$ . Obsérvese que  $i$  puede ser igual a  $j$ . En este caso tendríamos un lazo (auto arista) en el nodo  $i = j$ . Ilustraremos este procedimiento con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.3.2.** Considérese la matriz de tamaño  $4 \times 4$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

entonces su forma booleana es

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

y la representación digráfica se muestra en la figura 5. □

**Definición 5.19.** Para una matriz arbitraria  $F$  de orden  $p \times q$  y de rango  $p$ , una submatriz mayor de  $F$  es una submatriz no singular de orden  $p$ .

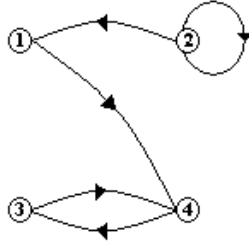


Figura 5. Digráfica representada por  $A_B$ .

---

#### § 5.4. Búsqueda de valores propios usando técnicas de gráficas

Necesitamos ahora, definir una submatriz  $A_i$  de una matriz  $A$ , que corresponda a la  $i$ -ésima componente fuerte de  $G(A)$ .

Recordemos, según la definición 1.6, que el determinante de una matriz cuadrada  $A$  está dado por el número

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

donde  $S_n$  es el conjunto de permutaciones de  $n$  elementos y  $\text{sgn}(\sigma)$  es igual a 1 si la permutación  $\sigma$  se expresa como producto de un número par de transposiciones, y -1 si  $\sigma$  se expresa como producto de un número impar de transposiciones.

**Definición 5.20.** Denotemos por  $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots, p_{k_{n_i}}$ , los puntos de la  $i$ -ésima componente fuerte de  $G(A)$ . Entonces la matriz  $A_i$  de  $A$  asociada con la  $i$ -ésima componente fuerte consiste de la intersección de todos los renglones enumerados por  $k_j$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , con las columnas que tienen los mismos números.

Así que,  $A_i$  es una matriz cuadrada de tamaño  $n_i \times n_i$ .

**Definición 5.21.** Una matriz  $A$  es llamada reducible si puede ser partida en submatrices

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

tal que  $A_{11}$  y  $A_{22}$  son matrices cuadradas, y al menos una de las matrices  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  consiste sólo de ceros en sus entradas.

Extenderemos esta definición para incluir también como matrices reducibles, a aquellas que puedan ser transformadas en la partición de matriz con las propiedades anteriores, involucrando simultáneamente la misma permutación de los subíndices  $1, 2, \dots, n$  en los renglones y las columnas. En otras

palabras,  $A$  es reducible si y sólo si para alguna matriz de permutación  $P$ , la matriz  $P^{-1}AP$  tiene la forma de la partición de la definición.

Una consecuencia inmediata de la definición del determinante de una matriz reducible  $A$  se presenta en la siguiente proposición.

**Proposición 5.1.**  *$A$  es una matriz reducible como en la definición 5.21. Entonces*

$$|A| = |A_{11}| \cdot |A_{22}|.$$

Veamos ahora, un teorema que envuelve la búsqueda de valores propios en este mismo contexto. Para ello, necesitaremos de los siguientes lemas.

**Lema 5.2.** *Las flechas de  $G(A)$ , que corresponden a las entradas de  $A$  cuyo producto es un término distinto de cero en  $|A|$ , constituyen una colección ajena de ciclos en la gráfica dirigida  $G(A)$ .*

**Demostración.** Si  $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  es cualquier término distinto de cero en la expansión de  $|A|$ . Entonces, las aristas correspondientes de  $G(A)$  son

$$\overrightarrow{p_1 p_{j_1}}, \overrightarrow{p_2 p_{j_2}}, \dots, \overrightarrow{p_n p_{j_n}}.$$

La colección de ciclos en la cual la permutación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

es descompuesta induce una colección disjunta de ciclos dirigidos de  $G(A)$ , en las cuales cada punto  $p_i$  se produce una sola vez. ■

**Lema 5.3.** *Toda flecha de  $G(A)$  que ocurra en un ciclo dirigido, aparece en una componente fuerte de  $G(A)$ .*

**Demostración.**  $\overrightarrow{p_i p_j}$  es cualquier flecha de  $G(A)$  que pertenece a un ciclo dirigido. Entonces el ciclo que contiene esta flecha, es una subgráfica fuerte de  $G(A)$ , y es por tanto, una subgráfica de una componente fuerte de  $G(A)$ . ■

**Lema 5.4.** *Cada flecha de  $G(A)$ , la cual no pertenezca a alguna componente fuerte de  $G(A)$  está coordinada con una entrada de  $A$  la cual no ocurre en ningún término distinto de cero de  $|A|$ .*

**Demostración.**  $\overrightarrow{p_i p_j}$  es cualquier flecha de  $G(A)$  que no pertenece a ninguna componente fuerte. Por el lema 5.3, esa flecha no está en ningún ciclo dirigido de  $G(A)$ . Así que, por el lema 5.2 la flecha  $\overrightarrow{p_i p_j}$  corresponde al término  $a_{ij}$  de  $A$ , el cual ocurre sólo en términos igual a cero de  $A$ . ■

**Lema 5.5.**  *$A$  es una matriz reducible. Entonces el producto de los determinantes de las submatrices de  $A$ , asociadas con las componentes fuertes de  $G(A)$ , es igual al determinante de  $A$ , salvo signo.*

**Demostración.** por la extensión de la definición 5.21, tenemos las submatrices  $A_1, A_2, \dots, A_r$  asociadas a las  $r$  componentes fuertes de  $G(A)$ , realizaremos las siguientes permutaciones de renglones y columnas de  $A$ . Reetiquetamos los puntos de  $G(A)$  de tal forma que los puntos de la primer componente fuerte sean  $p_1, p_2, \dots, p_{n_1}$ ; los puntos de la segunda componente fuerte son  $p_{n_1+1}, p_{n_1+2}, \dots, p_{n_2}$ . Entonces cuando la permutación  $\sigma$  inducida de los enteros  $1, 2, \dots, n$  se aplica a los renglones y las columnas, obtenemos una matriz  $\overline{A}$ , tal que  $\text{sgn}(\sigma)|\overline{A}| = |A|$ , donde  $\text{sgn}(\sigma)$  es determinado por la paridad del número de transposiciones de  $\sigma$ . Más aún, por la proposición 5.1, obtenemos

$$|A| = \text{sgn}(\sigma)|A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_r|. \quad \blacksquare$$

Veamos ahora el teorema que envuelve la búsqueda de valores propios en matrices reducibles.

**Teorema 5.6.** *Consideremos la construcción de las submatrices  $A_i$  de  $A$ , dadas por la definición 5.21. Definamos como  $E(A)$  al conjunto de valores propios de  $A$ . Entonces*

$$E(A) = E(A_1) \cup E(A_2) \cup \cdots \cup E(A_r),$$

*incluyendo multiplicidades.*

En otras palabras, el conjunto de valores propios de cualquier matriz es la unión de los conjuntos de valores propios (incluyendo multiplicidad) de las submatrices correspondientes a las componentes fuertes de la gráfica dirigida de la matriz.

**Demostración.**  $A$  es una matriz separada de la forma

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

donde al menos una de las submatrices  $A_{12}, A_{21}$  consiste sólo de entradas igual a cero. entonces por el la proposición 5.1 tenemos que

$$|A - \lambda I| = |A_{11} - \lambda I_{11}| \cdot |A_{22} - \lambda I_{22}|.$$

De aquí que,  $E(A) = E(A_{11}) \cup E(A_{22})$ , incluyendo multiplicidad. Ahora, del lema 5.5 tenemos que  $E(A)$  es la unión de  $E(A_1)$  con los valores propios de la submatriz de  $A$  resultante de eliminar los renglones y las columnas de  $A_1$ . Repitiendo este proceso, vemos que  $E(A)$  es la unión de  $E(A_1), E(A_2), \dots, E(A_r)$  (incluyendo multiplicidades).

#### 5.4.1. Técnica de descomposición

En esta sección se mostrará una técnica de teoría de gráficas para encontrar valores propios de una matriz cuadrada. En este contexto es muy útil cuando tratamos con matrices a gran escala. El método se centra en la agrupación de las componentes fuerte de la digráfica representante de la matriz booleana y agrupar de la misma manera en la matriz original.

**Definición 5.22.** *Definimos el producto de matrices booleanas, a la operación consistente en realizar el producto ordinario de matrices sustituyendo el producto de números por la conjunción lógica  $\wedge$  y la suma por la disyunción lógica  $\vee$ .*

Es decir, dadas dos matrices booleanas  $A$  y  $B$  de tamaño  $n \times n$ , el producto de estas es la matriz booleana  $C$  que tiene por entradas

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^n (a_{ik} \wedge b_{kj}).$$

Así que,  $A \wedge A = A^2$ .

**Definición 5.23.** *La matriz de alcanzabilidad  $R$  para una digráfica representada por una matriz de ocurrencia (matriz incidente)  $A_B$  está definida por*

$$R = A_B^0 \vee A_B^1 \vee \cdots \vee A_B^{n-1},$$

donde  $A_B^j = A_B \vee \wedge A_B \vee \wedge A_B \vee \cdots \vee \wedge A_B$ .

**Definición 5.24.** *Definimos la negación booleana de una matriz  $A$  como  $\bar{A} = I_1 - A$ , donde  $I_1$  es la matriz con todas sus entradas iguales a uno.*

**Ejemplo 5.4.1.** En la matriz (5.3), la cual tiene como matriz booleana (5.4), tenemos que su negación booleana es

$$\begin{aligned}\overline{A_B} = I_1 - A_B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \square\end{aligned}$$

Daremos a continuación la técnica para descomponer la matriz representante de una digráfica.

**Definición 5.25.** Una gráfica fuertemente conectada cuyas aristas de un camino dirigido conectan todos los nodos una y sólo una vez, se dice *Hamiltoniana*.

El método requiere encontrar una matriz de permutación  $P$  tal que  $P'AP$  sea una transformación que preserve valores propios, rango y también el rango termino, donde  $P'$  es la matriz transpuesta de  $P$ . Entonces la transformación  $P'AP = P^{-1}AP$  es una *transformación de similaridad*, donde  $P' = P^{-1}$ . Así que, si

$$L_B = P' \vee \wedge A_B \vee \wedge P,$$

entonces,  $TR(L_B) = TR(A_B)$ , y podemos ver esta transformación puramente como un reordenamiento el cual preserva estructura.

Toda gráfica descomponible tiene una matriz booleana  $A_B$  la cual posee al menos una matriz permutación, la cual descompone explícitamente a la matriz  $A_B$ , por una transformación de similaridad, y de aquí que descompone la digráfica asociada en sus componentes cíclicas y acíclicas. La matriz transformada es un bloque inferior en forma diagonal y todas sus componentes cíclicas son fácilmente identificadas.

La matriz permutación requerida  $P$  es generada por  $R \wedge \overline{R}'$ . El algoritmo es esencialmente el siguiente:

- (1) Suma aritméticamente las entradas de cada columna de  $R \wedge \overline{R}'$ .
- (2) Para formar el vector de posiciones  $V$ , ordena de izquierda a derecha los números de la suma, de mayor a menor.
- (3) Agrupa las posiciones que tengan el mismo valor.
- (4) Repita (2) y (3) hasta agotar las posiciones.

El vector  $V = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  nos indica la incidencia que habrá entre el nodo  $j$  y el nodo  $s_j$ . Esta incidencia es de los elementos distintos de cero de la matriz de permutación  $P$ . Ilustraremos esta técnica con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.4.2.** Considere la matriz  $A$  en el ejemplo 5.3.2,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

con

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para la cual, la matriz de alcanzabilidad

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

y

$$\overline{R}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$R \wedge \overline{R}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \overline{1} \quad \overline{0} \quad \overline{2} \quad \overline{2}.$$

Los números 1,0,2,2 son la suma de las entradas de las columnas 1,2,3 y 4 respectivamente. Con respecto a paso (2) y (3), el valor más alto es 2, el cual se obtuvo de las columnas 3 y 4. Le sigue el 1 con la posición 1 y, finalmente cero, con posición 2. Así que, el vector de posiciones es  $V = (3412)$ . La incidencia es, en la columna (nodo) 1 colocaremos un 1 en la entrada (nodo) 3; en la columna 2 colocaremos un 1 en la posición 4; en la columna 3 colocamos un 1 en la posición 1; y finalmente, en la columna 4 colocaremos un 1 en la posición 2. Por tanto, la matriz de permutación  $P$  es

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$P' \vee \wedge A_B \vee \wedge P = \begin{bmatrix} |0 & 1| & 0 & 0 \\ |1 & 0| & 0 & 0 \\ 0 & 1 & |0| & 0 \\ 0 & 0 & 1 & |1| \end{bmatrix}.$$

Por lo que los bloques marcados serán los que agruparemos en la transformación de  $A$ , es decir

$$P' \vee \wedge A \vee \wedge P = \begin{bmatrix} | & 0 & 4| & 0 & 0 \\ | & -1 & 0| & 0 & 0 \\ 0 & 2 & |0| & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & | & -3| \end{bmatrix}.$$

Se puede ver inmediatamente como las eigenpropiedades son descompuestas, dado que  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ ,  $\lambda_3 = 0$  y  $\lambda_4 = -3$ . Además,

$$(A - \lambda I) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 12\lambda,$$

la cual es igual a

$$\text{Det}(\lambda I_1 - A_1) \times \text{Det}(\lambda I_2 - A_2) \times \text{Det}(\lambda I_3 - A_3) = (\lambda^2 + 4) \cdot (\lambda) \cdot (\lambda + 3). \quad \square$$

**Definición 5.26.** Una gráfica se dice descomponible si su matriz de alcanzabilidad no está llena.

**Observación 5.7.** En algunos casos puede ser necesario que alguna componente acíclica se combine con otra componente cíclica existente, resultando una componente cíclica de orden más alto.



# *Bibliografía*

- [1] Serge Lang. “Álgebra Lineal”, Versión en Español. Yale University. Fondo educativo interamericano.
- [2] W. R. Derrick, S. I. Grossman. “Ecuaciones diferenciales con aplicaciones”, versión en español. University of Montana. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.
- [3] F. Verduzco G. “Tópicos de Control Lineal”. Universidad de Sonora. Notas de clase. verano 2000.
- [4] G. Dávila, R. Flores E., Vorobiev Iouri Mikhailovich. “Álgebra lineal: Teoría y Problemas”. Universidad de Sonora. Colección de textos académicos.
- [5] S. Saperstone and J. Yorke. “Controllability of linear oscillatory systems using positive controls”. SIAM J. Control, 9 (1971). pp. 253-262.
- [6] S. Saperstone. “Global Controllability of Linear Systems Using Positive Controls”. SIAM J. Control, vol. 9, 2, 253-262.
- [7] E. Lee and L. Markus. “Foundations of Optimal Control Theory”. John Wiley. New York, 1967.
- [8] Dennis G. Zill. “Ecuaciones diferenciales con aplicaciones”, séptima edición. Grupo editorial iberoamericana.
- [9] Lawrence Perko. “Differential equations and dynamical systems”. Texts in applied mathematics 7. third edition. Editorial Springer.
- [10] R. F. Brammer. “Controllability in linear autonomous systems with positive controllers”. SIAM J. Control, vol. 10, issue 2, 1972. pp. 329-353.
- [11] M. E. Frías, F. Verduzco, H. Leyva, F. A. Carrillo. “Sobre sistemas controlables con control positivo”. AMCA. Memorias, 2004. México, D. F.
- [12] M. E. Frías, F. Verduzco, H. Leyva, F. A. Carrillo. “On controllability of linear systems with positive controls”. Int. J. Control. IFAC. 2005. República Checa.
- [13] H. Leyva, F. A. Carrillo. “Estabilización global de sistemas lineales con control positivo”. XI congreso latinoamericano de control automático. La Habana, Cuba. 2004.
- [14] Korobov V. I. “A geometrical criterion for local controllability of dynamical systems with restrictions on controls”. Diff Uravn., Vol. 15, no. 9, pp. 1592-1599.

- [15] Jaydev P. Desai, James P. Ostrowski, V. Kumar. "Modeling and control of formations of non-holonomic mobile robots". IEEE Transactions on robotics and automation, vol. 17, No. 6, December 2001. pp. 905-908.
- [16] Jorge A. López R. "Sistemas controlables con un valor propio complejo y su conjugado". Tesis de licenciatura. Universidad de Sonora. Diciembre 2006.
- [17] Robert G. Bartle. "The elements of integration". John Wiley & Sons. 1996. English edition.
- [18] Wai-Kai Chen. "Graph theory and its engineering applications". Published by World Scientific, 1997.
- [19] Harary, F. "A graph theoretic method for the complete reduction of a matrix with view towards finding it eigenvalues". J. Math. Phys., 1959, 38, pp. 19-20.
- [20] Evans, F. J., Schizas, C., and Chan, J. "Control system design using graphical decomposition techniques". IEE Proc. D, Control Theory and appl., 1981, 128, (3), pp. 77-84
- [21] Schizas, C., and Evans, F. "APL and a graph theory in dynamic systems analysis". IEE PROC., Vol. 128, Pt. D, No. 3, May 1981. pp. 85-91.