



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Retratos fase de sistemas en el plano con parte lineal
cero

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Presenta:

Jocelyn Anaid Castro Echeverría

Director de Tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México, Agosto de 2014

SINODALES

Dr. Fernando Verduzco González
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Baltazar Aguirre Hernández
Universidad Autónoma Metropolitana, México D.F., México

Dr. Daniel Olmos Liceaga
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Agradecimientos

En primer lugar te doy gracias Dios por seguir permitiendo que alcance mis sueños, logre mis metas, objetivos y todo lo que me he propuesto en la vida, poniendo los medios y las condiciones para que cumpla mis anhelos, estoy segura de que me seguirás llevando de la mano, pues el camino que me he trazado es una ruta larga que aún continúa.

Agradezco infinitamente a mi familia, la cual es mi pilar, mi fuerza y mi mayor motivación en la vida, para mi es una enorme dicha poder compartirles cada uno de mis logros y es por ustedes, que espero seguir creciendo, tanto personal como profesionalmente, para que se sientan orgullosos de mi como yo lo estoy de cada uno de ustedes, sin duda son mi tesoro más preciado y lo que mas amo en la vida. Gracias a mis padres Bertha Alicia Echeverría Romero y Roberto Castro Moreno, gracias por apoyarme siempre y darme su amor incondicional, para mi es muy importante saber que puedo contar con ustedes, gracias por luchar por nuestro bienestar, por escucharme, aconsejarme y guiarme por el buen camino, por formar la persona que soy ahora. Gracias a mis queridos hermanos Danya Fabiola Castro Echeverría y Roberto Castro Echeverría, por estar siempre a mi lado, simplemente mi mundo no estaría completo sin ustedes dos, gracias por hacerme reír, por su compañía, por su gran apoyo y sus palabras de aliento en todo momento, juntos somos el mejor equipo que puede afrontar cualquier cosa, gracias por ser los mejores hermanos del mundo. Agradezco también a mi tía Netty Romero Macías por siempre apoyarnos a mi y a mi familia y estar al pendiente de nosotros día a día, demostrándonos tu enorme cariño, sin duda, parte de estos logros también son gracias a ti.

Quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Fernando Verduzco González, por sus enseñanzas, su respaldo y dedicarme su valioso tiempo, realmente es muy grato poder compartir con una persona tan amable, trabajadora y entusiasta. Gracias por el apoyo que me ha brindado todo este tiempo, quiero expresarle mi gran aprecio y admiración.

Muchas gracias a mis sinodales: Dr. Baltazar Aguirre Hernández, Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro y Dr. Daniel Olmos Liceaga, por haber destinado parte de su tiempo a la revisión de esta tesis, gracias por sus observaciones, aportaciones y correcciones que la han enriquecido ampliamente.

Le doy las gracias a todos mis profesores de maestría por ayudarme a fortalecer mis conocimientos y a crecer académicamente, gracias también por su gran amabilidad y disposición, son un ejemplo para mi.

Por último, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido, sin el cual no habría sido posible la realización y culminación de la Maestría en Ciencias (Matemáticas) en la Universidad de Sonora, así como esta tesis.

*Jocelyn Anaid Castro Echeverría
Agosto de 2014*

Índice general

1. Introducción	1
2. Técnicas de Blow-up	3
2.1. Técnicas de Blow-up Homogéneas	3
2.1.1. Blow-up Polar	3
2.1.2. Blow-up Direccional	9
2.2. Técnicas de Blow-up Cuasi-homogéneas	20
2.2.1. Polar Cuasi-homogéneo	20
2.2.2. Direccional Cuasi-homogéneo	21
2.2.3. Polígono de Newton	24
3. Comportamiento en el infinito	35
3.1. La esfera de Poincaré	35
3.2. Ejemplos	42
4. Sistemas con parte lineal cero	55
4.1. P y Q : Polinomios homogéneos del mismo grado	55
4.1.1. Ejemplos	61
4.2. P y Q : Polinomios homogéneos de grado distinto	67
4.2.1. Aproximación de curvas analíticas para el caso $s = 0$	67
4.2.2. Análisis mediante el Blow-up direccional	69
4.2.3. Puntos al infinito	82
5. Conclusiones	93

Capítulo 1

Introducción

El estudio de las Ecuaciones Diferenciales y los Sistemas Dinámicos es de gran importancia, no solo en las Matemáticas Puras, sino también porque estos modelan el comportamiento de diversos fenómenos en la naturaleza que implican cambios, por lo que tienen una enorme aplicación en campos como la Física, la Química, la Biología, la Ingeniería, entre otras. Sin embargo, la mayor parte de las ecuaciones diferenciales no pueden resolverse de manera cuantitativa, por lo que se vuelve importante su estudio de forma cualitativa, analizando el comportamiento y propiedades que poseen las soluciones.

En particular, nos interesa estudiar el comportamiento alrededor de puntos de equilibrio de un sistema dinámico y más específicamente, para sistemas no lineales, pues los sistemas lineales ya están completamente estudiados y sabemos cómo se comportan, sin embargo, para sistemas no lineales, aún tenemos conocimientos de forma parcial; para sistemas no lineales en el plano, los puntos de equilibrio se clasifican, de acuerdo a los valores propios de la matriz Jacobiana del sistema evaluada en el equilibrio, en equilibrios hiperbólicos, si sus valores propios tienen parte real distinta de cero, y no-hiperbólicos, si alguno de ellos tiene parte real cero. En el primer caso, el comportamiento se encuentra totalmente determinado por la parte lineal del sistema, de acuerdo al Teorema de Hartman y Grobman. El caso más interesante entonces, son los equilibrios no hiperbólicos, para los cuales, si bien es cierto que existe ya cierta teoría para determinar cómo es su retrato fase, su comportamiento no ha sido determinado completamente. Si tenemos un solo valor propio igual cero, el retrato fase se determina por medio del teorema de la variedad central, si los valores propios son complejos, sabemos que el equilibrio es monodrómico, pero sigue siendo un problema abierto el distinguir entre focos y centros. Si ambos valores propios son cero pero la parte lineal del sistema no es idénticamente cero, tenemos también ya una clasificación dada en [Andreev, 1958].

El caso más complicado y objeto de nuestro estudio, es el caso en el que el sistema no tiene parte lineal, éste, al igual que el problema de distinguir entre focos y centros, sigue siendo un problema abierto, y solo ha podido ser resuelto para casos particulares, en esta tesis de maestría, hacemos una pequeña contribución al estudio de este tipo de sistemas haciendo uso de la teoría de blow-up y la teoría de puntos al infinito, dicha teoría se presenta en los siguientes dos capítulos para posteriormente pasar al capítulo principal donde estudiamos los sistemas con parte lineal cero.

En el Capítulo 2 presentaremos la técnica de blow-up o explosión, esta técnica es la principal herramienta en el estudio de equilibrios no hiperbólicos y particularmente en el estudio de sistemas con parte lineal cero. El objetivo de esta técnica es llevar los puntos de equilibrio, mediante una transformación, a una curva donde se estudian sus singularidades con el fin de comprender el comportamiento en el equilibrio. Mostraremos los distintos tipos de blow-up existentes, homogéneos y

cuasi-homogéneos, así como la forma de utilizarlos, presentando teoremas, algoritmos y ejemplos detallados, con el objetivo de que estas técnicas sean comprendidas de forma sencilla, para posteriormente emplearlas en el estudio de los sistemas con parte lineal cero.

En el Capítulo 3 de esta tesis, mostraremos la teoría sobre puntos de equilibrio en el infinito, pues además de conocer el comportamiento local alrededor de puntos de equilibrio finitos de un sistema, puede resultar importante estudiar el comportamiento de las soluciones para condiciones iniciales lejanas al origen, por lo que nos interesa conocer lo que ocurre en el infinito, para comprender así, de mejor manera el comportamiento global del sistema. Este estudio se basa en llevar al sistema a la esfera de Poincaré y haciendo coincidir el infinito con el ecuador de la misma, estudiando los equilibrios en él, analizando de este modo la estabilidad de las soluciones en el infinito.

Finalmente, en el Capítulo 4 dedicamos nuestro estudio a sistemas dinámicos con parte lineal cero, en particular, nos enfocamos al caso en el que el sistema tiene por componentes a polinomios homogéneos. En la primera sección de este capítulo analizamos sistemas con polinomios homogéneos del mismo grado, este es un caso presentado en la literatura, mostraremos cómo, por medio del cálculo de una integral, podemos conocer el comportamiento en el equilibrio. En la segunda sección hacemos nuestra aportación al estudio de sistemas con parte lineal cero, estudiando sistemas no lineales cuyas componentes son polinomios homogéneos de grado distinto, haciendo uso de las técnicas de blow up, presentadas en el Capítulo 2, y mediante la búsqueda de curvas analíticas. Presentamos algunos teoremas para distinguir entre equilibrios del tipo monodrómico y nodos no hiperbólicos, mostraremos además un teorema en el cual podemos confirmar, para un caso en específico, que un equilibrio monodrómico es de hecho un centro; y adicionalmente, estableceremos específicamente las expresiones para las aproximaciones de todas las curvas características presentes en los nodos no hiperbólicos. Incluimos algunos ejemplos con el fin de ilustrar cada uno de los teoremas obtenidos y mostramos sus retratos fase, todos ellos simulados mediante el uso del software P4 [Artés et al., 2005]. En la última sección de este capítulo, analizamos los puntos de equilibrio al infinito para sistemas con polinomios homogéneos de grado distinto, encontrando específicamente los puntos de equilibrio al infinito y mostrando algunos ejemplos, con el fin de conocer más acerca del comportamiento global de los sistemas con parte lineal cero.

En esta tesis de maestría hemos hecho una cierta contribución o acercamiento al estudio de sistemas con parte lineal cero, que sigue siendo un problema abierto, así como el de distinguir un foco de un centro, sin embargo, hay mucho que decir y mucho trabajo por hacer al respecto, pues aún no han sido totalmente explorados ni comprendidos, por lo que seguirán siendo un objeto de interés para trabajos futuros.

Capítulo 2

Técnicas de Blow-up

Las técnicas de Blow-up involucran cambios de variables que expanden o explotan un punto de equilibrio no-hiperbólico, suponiendo que el equilibrio es el origen, en una curva donde se encuentra un número finito de singularidades y entonces, para estudiar el equilibrio original, estudiamos los nuevos equilibrios, que pueden resultar ser o no, más simples. Los cambios de coordenadas usados son singulares en el punto de equilibrio ya que asignan una curva a un punto, por lo que estos cambios no son difeomorfismos. Si los nuevos equilibrios resultan ser hiperbólicos determinamos su comportamiento usando el Teorema de Hartman-Grobman, en caso contrario, es necesario repetir el proceso, se puede probar que este proceso iterativo es finito, ver [Dumortier, 1977]. En otras palabras, esta técnica nos permite analizar el comportamiento del origen al hacer una expansión o inflado del mismo a una curva, por ejemplo a una circunferencia o una recta, analizando en ella las singularidades y su comportamiento para posteriormente contraerla nuevamente al origen y obtener así su retrato fase.

Estas técnicas son la herramienta básica para el estudio de equilibrios no-hiperbólicos de sistemas en el plano, en este capítulo haremos una recopilación de los distintos tipos de Blow-up que existen y cómo utilizarlos, para más información puede consultarse [Arrowsmith & Place, 1990], [Álvarez et al., 2010] y [Dumortier et al., 2006]. El ejemplo más sencillo y conocido es el de las coordenadas polares en el plano, el cual analizaremos en la siguiente sección.

2.1. Técnicas de Blow-up Homogéneas

2.1.1. Blow-up Polar

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = X(x), \tag{2.1}$$

con $x \in \mathbb{R}^2$, y supongamos que el origen es un equilibrio aislado del sistema. Este sistema puede ser fácilmente expresado en coordenadas polares (r, θ) en la forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= X_r(r, \theta) \\ \dot{\theta} &= X_\theta(r, \theta), \end{aligned}$$

de este modo el sistema puede ser estudiado ahora en el cilindro $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$, haciendo coincidir 0 con 2π , de modo que el origen es enviado a el círculo con $r = 0$ y el resto del plano es enviado bajo un difeomorfismo al medio cilindro, $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$. El círculo $r = 0$ es llamado el *divisor excepcional*. La aplicación que logra lo anterior es, como esperábamos,

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

y podemos ver este cambio como una expansión del origen del plano al círculo $r = 0$. De modo que para conocer el retrato fase alrededor del origen en el plano x - y , estudiaremos las singularidades pertenecientes al círculo $r = 0$ en $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$.

Una vez que hemos determinado el comportamiento de los equilibrios en el cilindro $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$, la forma usual en la cual se visualiza el círculo $r = 0$ es como se muestra en la figura 2.1, mediante algún difeomorfismo que envíe el cilindro a un plano tal que $r = 0$ se corresponda con un círculo, y aquellos puntos con coordenada $r > 0$ queden en el exterior de él, mientras que los puntos con $r < 0$ quedarán en el interior. Por ejemplo, podemos usar la función $g : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$g(r, \theta) = e^r (\cos \theta, \sin \theta),$$

de esto modo, el círculo $r = 0$ es llevado al círculo unitario.

Es importante destacar que una vez obtenido el retrato fase en estas coordenadas no estaremos interesados en el comportamiento dentro del círculo pues estas soluciones serán correspondientes a $r < 0$, por lo que nuestro objetivo será estudiar lo que ocurre en el exterior, donde r es positiva.

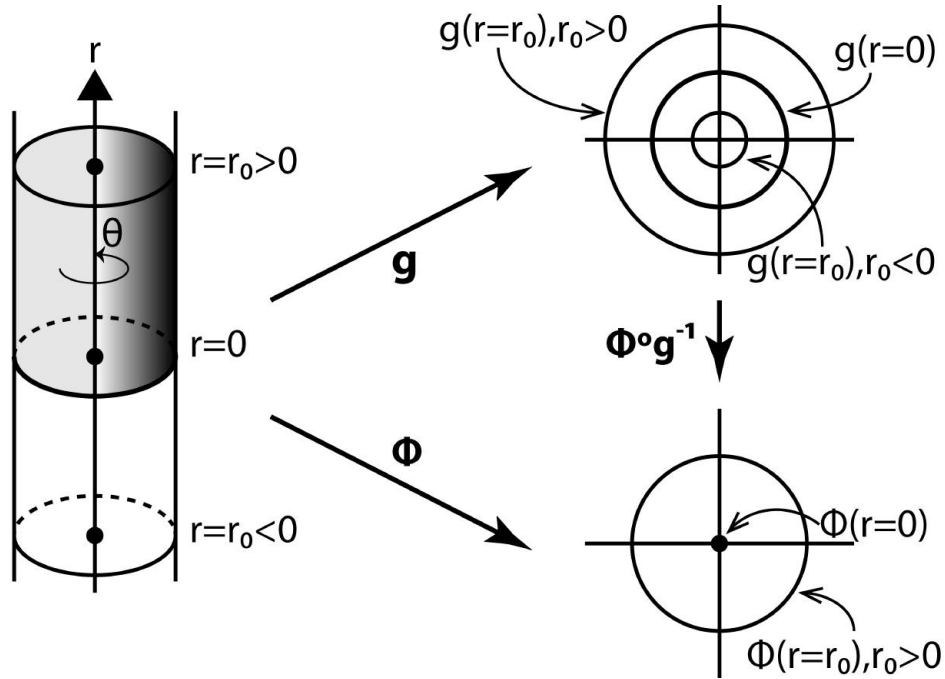


Figura 2.1: Blow-up polar.

Procederemos ahora a hacer el blow up polar para el sistema (2.1). Supongamos que el sistema es de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) = \sum_{m \leq j} P_j(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) = \sum_{m \leq j} Q_j(x, y), \end{aligned}$$

donde P y Q son polinomios que no tienen factores en común (ya que el origen es un equilibrio aislado), los P_j , Q_j , con $j \in \mathbb{N}$, son polinomios homogéneos de grado j , es decir, $P_j(ax, ay) = a^j P_j(x, y)$; y al menos alguno de los polinomios P_m ó Q_m no es idénticamente cero. Haciendo el cambio a coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned}
 r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\
 &= x \sum_{m \leq j} P_j(x, y) + y \sum_{m \leq j} Q_j(x, y) \\
 &= \sum_{m \leq j} [xP_j(x, y) + yQ_j(x, y)] \\
 &= \sum_{m \leq j} r^{j+1} [\cos \theta P_j(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta Q_j(\cos \theta, \sin \theta)] \\
 &= \sum_{m \leq j} r^{j+1} R_j(\theta),
 \end{aligned}$$

donde $R_j(\theta) = \cos \theta P_j(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta Q_j(\cos \theta, \sin \theta)$. Luego,

$$\begin{aligned}
 r^2 \dot{\theta} &= x\dot{y} - y\dot{x} \\
 &= x \sum_{m \leq j} Q_j(x, y) - y \sum_{m \leq j} P_j(x, y) \\
 &= \sum_{m \leq j} [xQ_j(x, y) - yP_j(x, y)] \\
 &= \sum_{m \leq j} r^{j+1} [\cos \theta Q_j(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta P_j(\cos \theta, \sin \theta)] \\
 &= \sum_{m \leq j} r^{j+1} F_j(\theta)
 \end{aligned}$$

donde $F_j(\theta) = \cos \theta Q_j(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta P_j(\cos \theta, \sin \theta)$. Por lo tanto, $\dot{x} = X(x)$ en coordenadas polares tiene la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \sum_{m \leq j} r^j R_j(\theta) \\
 \dot{\theta} &= \sum_{m \leq j} r^{j-1} F_j(\theta),
 \end{aligned}$$

por lo que no siempre podemos obtener información haciendo $r = 0$ directamente.

- Si $F_m \not\equiv 0$, decimos que el origen es un punto singular *no-dicrítico*. En este caso, las curvas solución del sistema anterior están dadas por

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sum_{m \leq j} r^{j-m+1} R_j(\theta)}{\sum_{m \leq j} r^{j-m} F_j(\theta)},$$

es decir, al dividir el sistema por r^{m-1} , obtenemos un sistema topológicamente equivalente,

el sistema

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \sum_{m \leq j} r^{j-m+1} R_j(\theta) = r R_m(\theta) + r^2 R_{m+1}(\theta) + \dots \\ \dot{\theta} &= \sum_{m \leq j} r^{j-m} F_j(\theta) = F_m(\theta) + r F_{m+1}(\theta) + \dots,\end{aligned}\tag{2.2}$$

más aún, como $r^{m-1} > 0$, la orientación de las trayectorias es la misma. El sistema (2.2) es el blow up polar del origen. Si hacemos $r = 0$, los puntos de equilibrio sobre el círculo serán aquellos que cumplan la ecuación

$$F_m(\theta^*) = 0,$$

las soluciones θ^* son las *direcciones características* del sistema. Todas las curvas solución que tienden al origen del sistema original en tiempo positivo o negativo serán tangentes a estas soluciones. F_m es llamado el *polinomio característico* en el origen.

Finalmente podemos usar el Teorema de Hartman y Grobman para estudiar los puntos de equilibrio del nuevo sistema en la circunferencia expandida $r = 0$. Si todos estos puntos son hiperbólicos, podemos obtener el retrato fase local de $\dot{x} = X(x)$ en $x = 0$ contrayendo nuevamente la circunferencia $r = 0$ al origen, de lo contrario será necesario que utilicemos otros blow-up o cálculos de formas normales.

- Si $F_m \equiv 0$ el origen es un punto singular *dicrítico*. En este caso dividimos el sistema por r^m . Notemos que

$$\begin{aligned}F_m(\theta) &\equiv 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta Q_m(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta P_m(\cos \theta, \sin \theta) &\equiv 0 \\ \Leftrightarrow x Q_m(x, y) - y P_m(x, y) &\equiv 0 \\ \Leftrightarrow x (y W_{m-1}(x, y)) - y (x W_{m-1}(x, y)) &\equiv 0,\end{aligned}$$

donde $W_{m-1}(x, y)$ es un polinomio homogéneo de grado $m - 1$ distinto de cero. Si $y - vx$ es un factor de $W_{m-1}(x, y)$ y $v = \tan \theta^*$, entonces decimos que θ^* es una *dirección singular*.

Ejemplo 1. Utilizaremos el blow-up polar para determinar el retrato fase alrededor del origen del siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - 2xy \\ \dot{y} &= y^2 - 2xy.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Para ello, realizamos el cambio del sistema (2.3) a coordenadas polares como se muestra a conti-

nuación:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{1}{r} (x\dot{x} + y\dot{y}) \\
&= \frac{1}{r} (x^3 - 2x^2y + y^3 - 2xy^2) \\
&= r^2 (\cos^3 \theta - 2 (\cos^2 \theta \sin \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) + \sin^3 \theta) \\
\dot{\theta} &= \frac{1}{r^2} (x\dot{y} - y\dot{x}) \\
&= \frac{3}{r^2} (xy^2 - x^2y) \\
&= 3r \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Por lo que al dividir por r , el sistema (2.4) es topológicamente equivalente a

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= r(\cos^3 \theta - 2 (\cos^2 \theta \sin \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) + \sin^3 \theta) \\
\dot{\theta} &= 3 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

haciendo $r = 0$ obtenemos que los puntos críticos del sistema (2.5), sobre el círculo, son aquellos que satisfacen la ecuación

$$\cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) = 0,$$

lo cual se logra para $\theta = 0, \pi, \pi/2, 3\pi/2, \pi/4$ y $5\pi/4$. Luego, la matriz Jacobiana del sistema (2.5), para los puntos $(0, \theta)$ es

$$D\hat{X}(0, \theta) = \begin{pmatrix} \cos^3 \theta - 2 (\cos^2 \theta \sin \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) + \sin^3 \theta & 0 \\ 0 & -3 (\cos^3 \theta - 2 (\cos^2 \theta \sin \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) + \sin^3 \theta) \end{pmatrix},$$

por lo que evaluando en cada uno de los equilibrios obtenemos:

$$D\hat{X}(0, 0) = D\hat{X}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -D\hat{X}(0, \pi) = -D\hat{X}\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D\hat{X}\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = -D\hat{X}\left(0, \frac{5\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

y gracias al Teorema de Hartman y Grobman podemos concluir que cada uno de estos puntos tiene comportamiento tipo silla. Por ejemplo, el punto $(r, \theta) = (0, 0)$ es un equilibrio tipo silla con la variedad inestable en dirección r ; el resto de los equilibrios pueden observarse en la figura 2.2, donde hemos extendido el cilindro $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$.

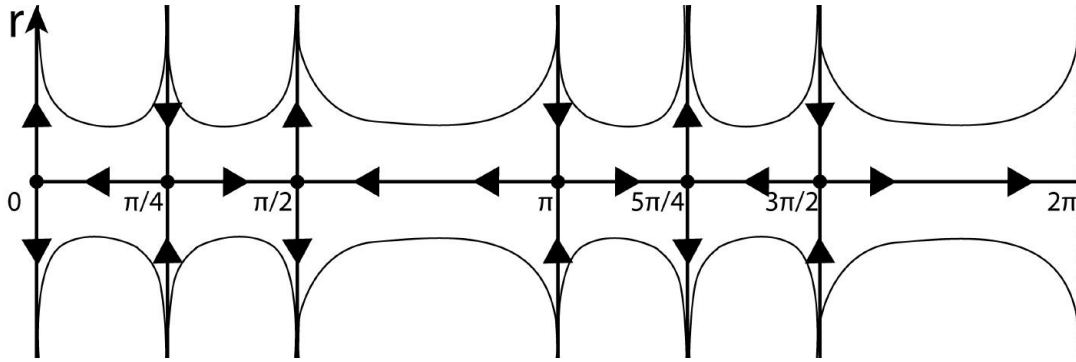


Figura 2.2: Blow-up polar, sistema 2.3 en $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$.

Recordemos que la forma usual en la que se visualiza este blow up es haciendo coincidir 0 y 2π en un círculo de forma tal que las r positivas se correspondan con el exterior del círculo y las negativas con el interior, como se muestra en la figura 2.3 a). Finalmente, contraemos el círculo $r = 0$ al origen para obtener el retrato fase mostrado en la figura 2.3 b).

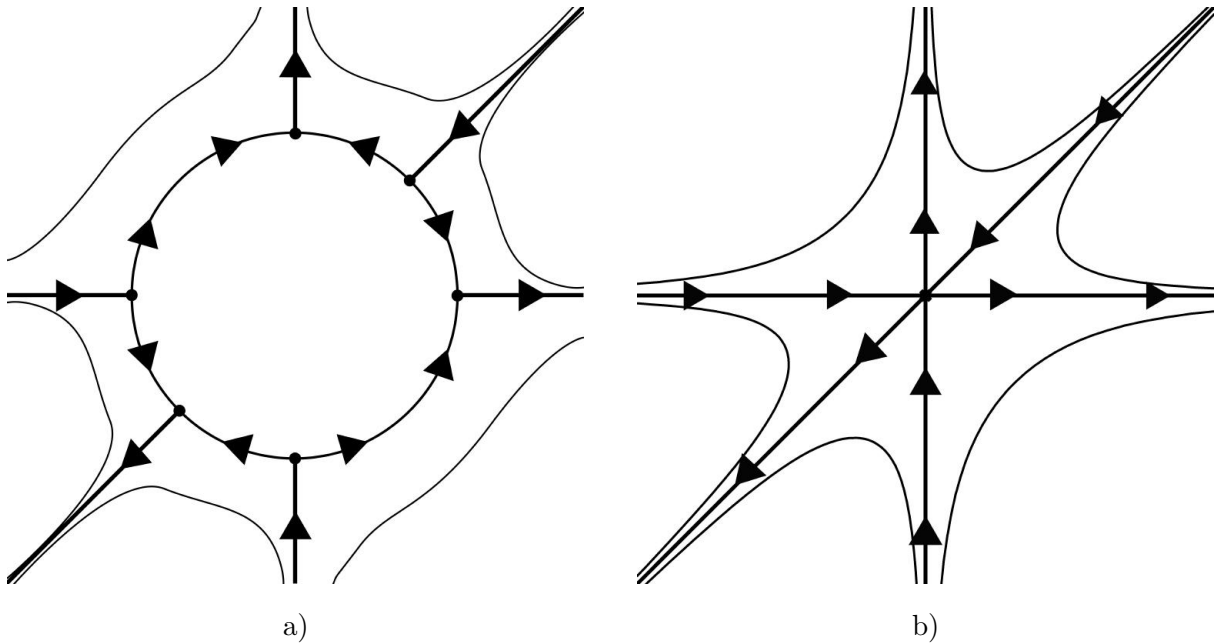


Figura 2.3: En a) se muestra el Blow-up polar en el origen, mientras que en b) tenemos el retrato fase alrededor de él, para el sistema (2.3).

En la siguiente sección estudiaremos cambios de variables equivalentes al blow-up polar, que resultan ser más utilizados en la práctica, pues conllevan cálculos generalmente más sencillos, estos son los llamados blow-up direccionales.

2.1.2. Blow-up Direccional

Considere la función $F : \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (u, v).$$

Esta función es un difeomorfismo, ya que la matriz

$$DF(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ 0 & \sec^2 \theta \end{pmatrix}$$

tiene por determinante a $\sec \theta \neq 0$ para $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Más aún, tenemos que F transforma la media circunferencia $\{(r, \theta) \mid r = 0, -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$ en el eje v , con el punto $(r, \theta) = (0, 0)$ en el origen del plano u - v . La recta $u = 0$ es llamado el *divisor excepcional*.

Notemos además que $DF(0, 0) = I$, por lo que la parte lineal del campo X , en (2.1), será la misma en las coordenadas (r, θ) y (u, v) . Se sigue que podemos obtener la linealización de X en el punto $\theta = 0$ en la circunferencia $r = 0$ considerando la parte lineal de X en el origen del plano u - v . Dicha linealización puede ser obtenida directamente de la forma cartesiana de $\dot{x} = X(x)$.

El cambio de coordenadas $(u, v) \rightarrow (x, y)$ esta dado por la función $\psi = \phi \cdot F^{-1}$, donde

$$\psi(u, v) = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (u, uv).$$

Si nos restringimos a $u > 0$, ψ es un difeomorfismo en el semiplano $x > 0$, ver figura 2.4. El cambio de coordenadas $(x, y) \rightarrow (u, v)$ es llamado el *blow-up en la dirección x* , ya que nos conduce a información sobre la singularidad en la circunferencia $r = 0$ en $\theta = 0$, es decir, en el eje x positivo.

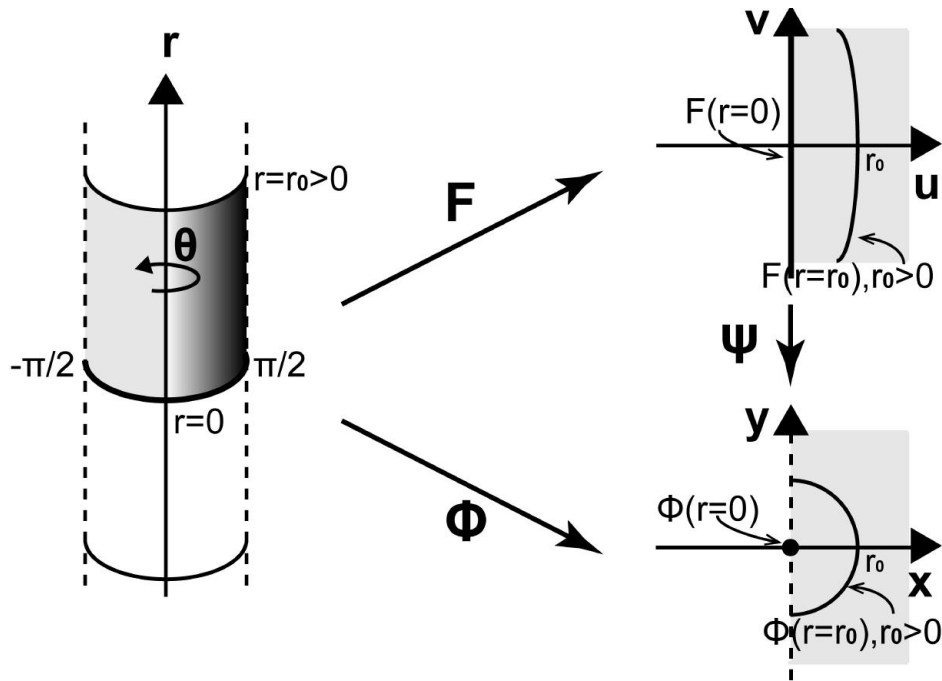


Figura 2.4: Blow-up en dirección x positiva.

Dado que F es un difeomorfismo del medio cilindro $\mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ al semiplano $u > 0$, el blow-up polar y el blow-up direccional son equivalentes en esta parte del plano.

El sistema $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ bajo el cambio de coordenadas es

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \tilde{P}(u, v) = P(u, uv) \\ \dot{v} &= \tilde{Q}(u, v) = \frac{1}{u} [Q(u, uv) - vP(u, uv)].\end{aligned}\tag{2.6}$$

Además, como en el blow-up polar, si $D^l \tilde{X}(0) = 0$, $l < m$ y $D^m \tilde{X}(0) \neq 0$, donde $\tilde{X} = (\tilde{P}, \tilde{Q})^T$, dividimos el sistema anterior por u^{m-1} .

Con una transformación similar, obtenemos un blow-up en la dirección y con el fin de obtener información en $r = 0$ y $\theta = \pi/2$. El cambio de coordenadas que requerimos es

$$(x, y) = \tilde{\psi}(u, v) = (uv, v),$$

mientras que el campo bajo la transformación esta dado por

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \hat{P}(u, v) = \frac{1}{v} [P(uv, v) - uQ(uv, v)] \\ \dot{v} &= \hat{Q}(u, v) = Q(uv, v),\end{aligned}\tag{2.7}$$

dividimos este sistema por v^{m-1} .

El blow up en dirección x presentado anteriormente puede ser también usado para estudiar el medio cilindro $\mathbb{R} \times (\pi/2, 3\pi/2)$, que nos da la información en el lado de $x < 0$, pero en este caso tenemos $\cos \theta < 0$, por lo que $u < 0$, provocando que al dividir por u^{m-1} , las direcciones se inviertan si m es par, una observación similar se tiene en el blow up en dirección y . Además, las soluciones en los cuadrantes segundo y tercero se intercambian entre si en el blow up en dirección x , debido al signo de u en esos cuadrantes, mientras que el blow up en dirección y intercambia el tercero y cuarto cuadrante.

Normalmente resulta más conveniente utilizar el blow-up direccional para investigar las singularidades en la circunferencia $r = 0$ en las direcciones x e y , ya que los cálculos requeridos son más sencillos que en el polar, incluso cuando es necesario aplicar la técnica repetidas ocasiones.

A continuación presentaremos algunos resultados, en los cuales nos referimos al blow up en dirección x , sin embargo, estos también son válidos para la dirección y . Las siguientes proposiciones establecen la relación que existe entre las singularidades en el blow up y el origen, dichos resultados se encuentran en [Andronov et al., 1973].

Proposición 1. *Sea $\varphi_t = (x(t), y(t))$ una trayectoria tendiendo al origen del sistema (2.1), en tiempo positivo o negativo. Supongamos que $F_m \neq 0$ y que φ_t es tangente a alguna de las dos direcciones $\tan \theta = v^*$, $v^* \neq \infty$. Entonces se cumplen los siguientes resultados:*

- (i) *Las dos direcciones angulares $\theta = \arctan v^*$ en $[0, 2\pi)$ son direcciones características.*
- (ii) *El punto $(0, v^*)$ en el plano u - v es un equilibrio aislado del sistema (2.6).*

(iii) La trayectoria φ_t corresponde a una solución del sistema (2.6) tendiendo al punto singular $(0, v^*)$.

(iv) Inversamente, cualquier solución del sistema (2.6) tendiendo al punto singular $(0, v^*)$ en el plano u - v corresponde a una solución del sistema (2.1) tendiendo al origen en alguna de las dos direcciones angulares $\tan \theta = v^*$.

Proposición 2. Consideremos el sistema (2.1) y supongamos que $F_m \equiv 0$. Entonces para toda dirección no singular θ existe exactamente una semi-trayectoria tendiendo al origen en la dirección θ en tiempo positivo o negativo. Si θ^* es una dirección singular, puede no haber semi-trayectorias tendiendo al origen en la dirección θ^* , haber un número finito, ó una infinidad.

Las proposiciones anteriores nos dicen que, para comprender el comportamiento de las soluciones alrededor del origen en el sistema original, basta con estudiar los equilibrios en el blow up. Como mencionamos en el caso polar, en ocasiones estos puntos singulares pueden resultar ser degenerados, por lo que será necesario repetir el proceso.

Ejemplo 2. Consideremos nuevamente el sistema (2.3) y hagamos uso del blow-up direccional en la dirección x .

Bajo el cambio de coordenadas $x = u$, $y = uv$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u^2 - 2u^2v \\ \dot{v} &= \frac{1}{u}(u^2v^2 - 2u^2v - v(u^2 - 2u^2v)),\end{aligned}$$

dividiendo entre u , el sistema que resulta es

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u - 2uv \\ \dot{v} &= 3v(v - 1),\end{aligned}$$

en consecuencia, los puntos de equilibrio sobre la recta $u = 0$ son $(0, 0)$ y $(0, 1)$. Calculamos la matriz Jacobiana

$$D\tilde{X}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - 2v & -2u \\ 0 & -3 + 6v \end{pmatrix}$$

y evaluando en los puntos de equilibrio tenemos

$$D\tilde{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } D\tilde{X}(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

por lo que ambos puntos son tipo silla como se observa en la figura 2.5.

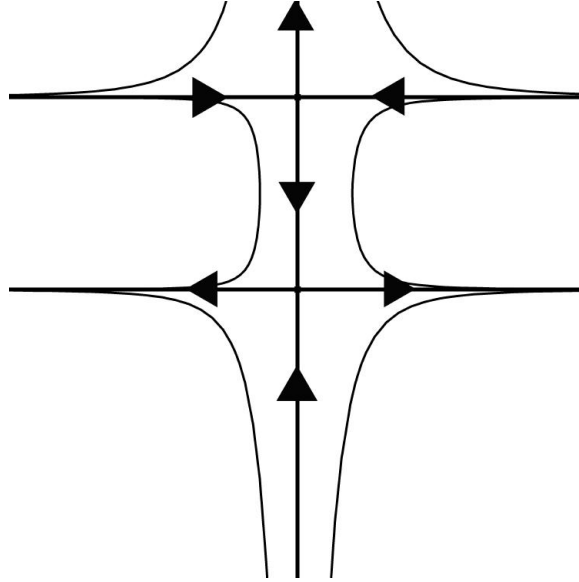


Figura 2.5: Blow-up dirección x del sistema (2.3).

De acuerdo a la Proposición 1, el punto $(0, 1)$ es transformado en una solución que converge al origen con pendiente 1, análogamente con el otro equilibrio.

Ahora aplicaremos el blow-up direccional en dirección y . El sistema es ahora

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{1}{v}(u^2v^2 - 2uv^2 - u(v^2 - 2uv^2)) \\ \dot{v} &= v^2 - 2uv^2,\end{aligned}$$

dividiendo por v , obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 3u(u - 1) \\ \dot{v} &= v(1 - 2u),\end{aligned}$$

en este caso, solo estamos interesados en estudiar el comportamiento del origen, ya que cualquier otra singularidad sobre $v = 0$ se corresponde con alguna singularidad estudiada en el blow-up en dirección x , mientras que el origen se corresponde con la dirección vertical, la cual no ha sido estudiada. La matriz Jacobiana en el origen es

$$D\hat{X}(0,0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto el origen es un punto silla, como se muestra en la figura 2.6.

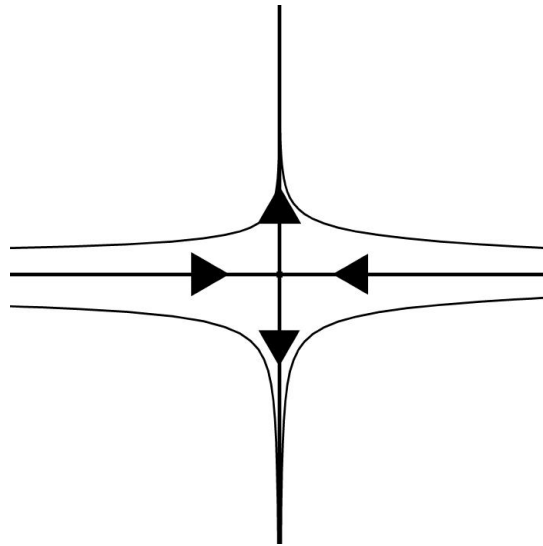


Figura 2.6: Blow-up dirección y del sistema (2.3).

Uniendo la información obtenida tanto en el blow-up en dirección x como en la dirección y , determinaremos cómo es el retrato fase en el sistema original. Recordemos que el blow up en dirección x intercambia las direcciones en el segundo y tercer cuadrante, aportando así una curva horizontal y otra con pendiente 1, como se muestra en la figura 2.7 a), notemos que el eje vertical no aporta curva pues es transformado en el origen; además por haber dividido por el factor u las curvas en $x < 0$ intercambian su sentido. Por otro lado, en la dirección y , la curva horizontal se pierde pues se transforma en el origen, mientras que la vertical se mantiene invirtiendo su sentido cuando $y < 0$, ya que dividimos por el factor v , ver figura 2.7 b).

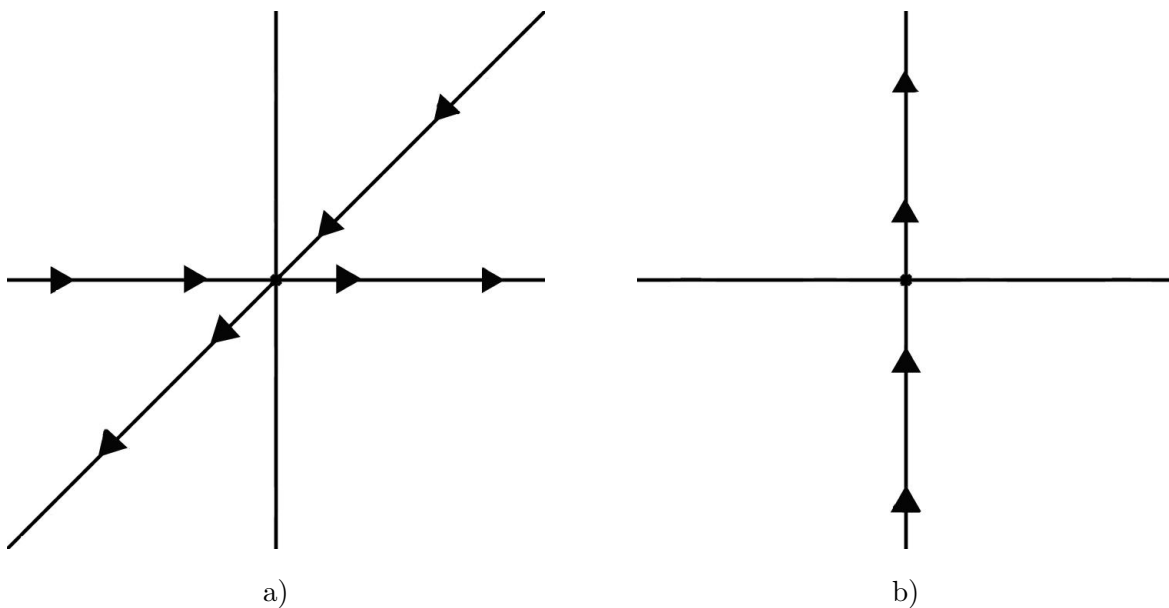


Figura 2.7: En a) mostramos las curvas provenientes del blow-up en dir. x , mientras que en b) se muestra la proveniente de la dirección y .

Uniendo todas las curvas obtenidas con el blow-up en dirección x y dirección y , confirmamos el retrato fase obtenido con el blow-up polar, como se muestra en la figura 2.8.

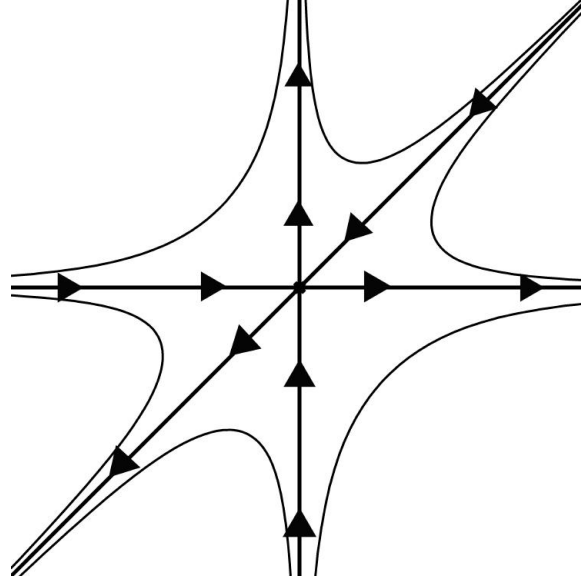


Figura 2.8: Blow-up dirección y del sistema (2.3).

Veremos ahora dos ejemplos para los cuales se tiene $F_m \equiv 0$, con el fin de ilustrar la Proposición 2. El primer ejemplo, de [Andronov et al., 1973], nos muestra que pueden no existir curvas características tendiendo al origen en la dirección singular y en el segundo veremos un ejemplo en el cual, la dirección singular tiene un número finito de curvas tendiendo al origen.

Ejemplo 3. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy + (x+y)^4 \\ \dot{y} &= y^2 - (x+y)^4.\end{aligned}\tag{2.8}$$

El origen es el único punto de equilibrio y es del tipo dicrítico, ya que

$$F_2(\theta) = \cos \theta Q_2(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta P_2(\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta \sin^2 \theta - \sin^2 \theta \cos \theta \equiv 0.$$

Para este caso $W_1(x, y) = y$, por lo que la dirección singular es la horizontal. Para estudiar el origen haremos un blow-up en dirección x , tomando el cambio de coordenadas $x = u$, $y = uv$, y dividiendo el sistema por el factor u^2 , obteniendo así

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v + u^2(1+v)^4 \\ \dot{v} &= -u(1+v)^5,\end{aligned}\tag{2.9}$$

el único punto de equilibrio para el sistema (2.9) es el origen, y la matriz Jacobiana evaluada en él es

$$D\tilde{X}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

los valores propios de esta matriz son $\lambda_{1,2} = \pm i$, por lo que el origen es un foco o un centro, ver [Meiss, 2007]. Se puede probar que el origen es de hecho un centro, ver [Andronov et al, 1973]. El retrato fase del sistema (2.9) se muestra en la figura 2.9 a), mientras que la figura 2.9 b) muestra el retrato fase del sistema original (2.8), al hacer el desinflado. Recordemos que el blow-up en dirección x invierte las curvas del segundo y tercer cuadrante, al pasar del blow-up al retrato fase original, por lo que provoca, no solo que el centro se contraiga, sino además una especie de doblez, como vemos en la figura.

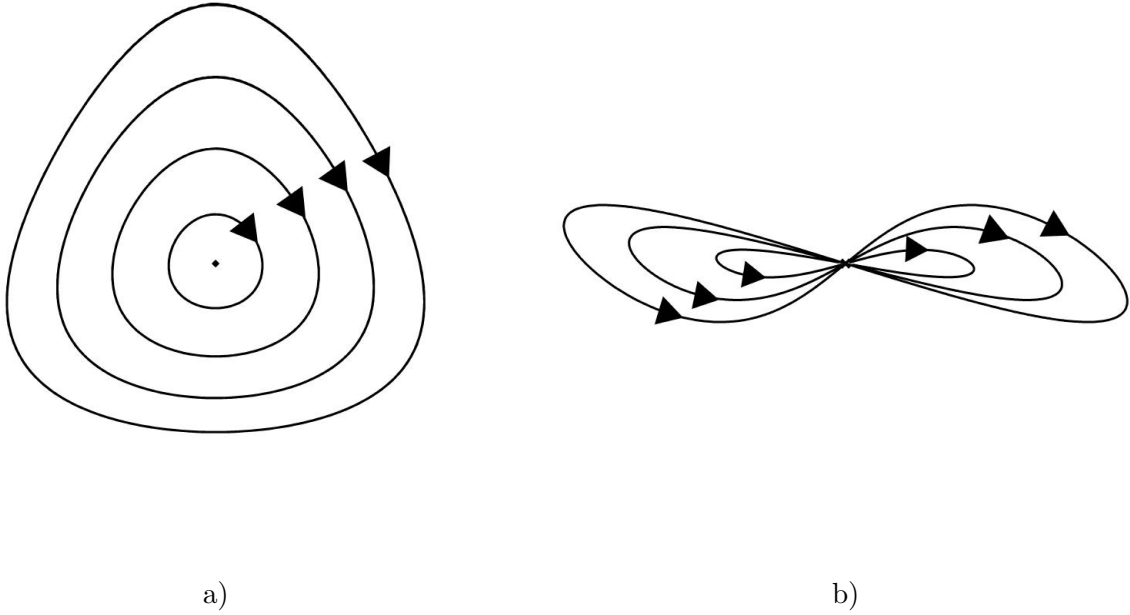


Figura 2.9: a) Blow-up direccional y b) Retrato fase de (2.8) en el origen.

Ejemplo 4. Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(y - x) + y^3 \\ \dot{y} &= y(y - x) + x^3.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Claramente el origen es equilibrio del sistema (2.10) y el polinomio $W_1(x, y) = y - x$, por lo que la dirección singular es $y = x$. Haciendo el blow-up en dirección x mediante el cambio $x = u$, $y = uv$ y dividiendo por u^2 , obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v - 1 + uv^3 \\ \dot{v} &= 1 - v^4,\end{aligned}\tag{2.11}$$

si hacemos $u = 0$, el único punto de equilibrio es $(0, 1)$. La matriz Jacobiana del sistema (2.11) es

$$D\tilde{X}(u, v) = \begin{pmatrix} v^3 & 1 + 3uv^2 \\ 0 & -4v^3 \end{pmatrix},$$

y evaluando en el equilibrio tenemos

$$D\tilde{X}(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -4$; y sus vectores propios son $(1, 0)$ y $(-1, 5)$, por lo tanto, el equilibrio es tipo silla, como se muestra en la figura 2.10 a), sus variedades inestables y estable son $v = 1$ y $v = 1 - 5u + \dots$, respectivamente. Finalmente, el retrato fase del sistema original (2.10) es como se muestra en la figura 2.10 b), donde la dirección singular tiene dos curvas provenientes de las variedades estable e inestable de la silla, las curvas $y = x + \dots$ y $y = x - 5x^2 + \dots$, obtenidas al hacer nuevamente el cambio de variables, notemos que las curvas se ubicaban en el segundo cuadrante en el blow-up han pasado al tercer cuadrante en el retrato fase original.

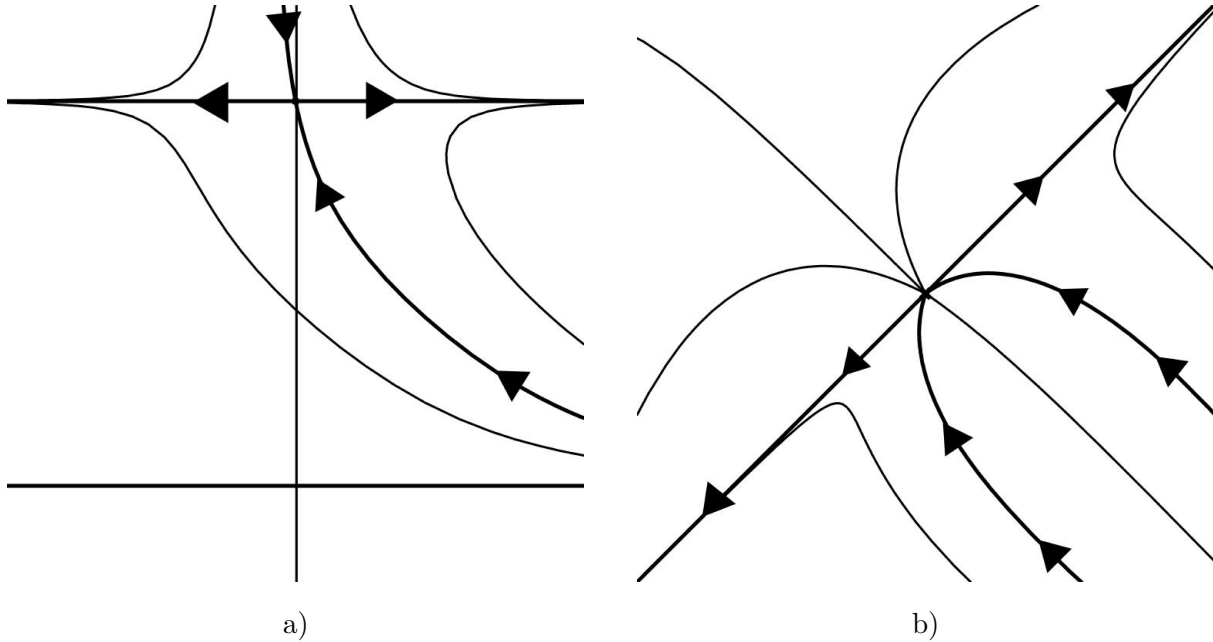


Figura 2.10: a) Blow-up direccional y b) Retrato fase de (2.10), en el origen.

A continuación estudiaremos un ejemplo clásico en el cual, no basta con realizar un solo blow-up del sistema, como en el caso anterior, sino que será necesario repetir el proceso para conocer el retrato fase en el origen.

Ejemplo 5. Consideremos el sistema cuadrático

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 + xy.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Claramente, el origen es el único equilibrio del sistema, sin embargo, éste es del tipo no-hiperbólico. Notemos que $F_1(\theta) = -\sin^2 \theta$, por lo que las únicas direcciones características son $\theta = 0, \pi$, es decir la dirección horizontal, en consecuencia, solo será necesario realizar el blow-up en dirección x , para ello tomaremos el cambio $x = u$, $y = uv$, obteniendo así el sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= uv \\ \dot{v} &= \frac{1}{u} (u^2 + u^2v - uv^2) = u + uv - v^2,\end{aligned}\tag{2.13}$$

nuevamente el origen es el único equilibrio sobre el eje $u = 0$ y es no-hiperbólico, por lo que será necesario hacer un nuevo blow-up al sistema (2.13). Para este sistema tenemos $F_1(\theta) = \cos^2 \theta$, así que la dirección característica es la vertical y entonces solo es necesario hacer el blow-up en dirección y . Haciendo $u = wz$ y $v = z$, tenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \frac{1}{z} [wz^2 - w(wz + wz^2 - z^2)] = w(2z - w - wz) \\ \dot{z} &= wz + wz^2 - z^2 = z(w + wz - z),\end{aligned}\quad (2.14)$$

el único equilibrio tal que $z = 0$ es el origen, que resulta de hecho, ser otra vez no-hiperbólico, por lo que un nuevo blow-up será requerido. Esta vez, el polinomio característico de (2.14) es

$$\begin{aligned}F_2(\theta) &= \cos \theta (\cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta) - \sin \theta (2 \cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) \\ &= \cos \theta \sin \theta (2 \cos \theta - 3 \sin \theta),\end{aligned}$$

esto significa, que tanto la dirección horizontal como la vertical son características, por lo tanto, requeriremos hacer el blow-up en la dirección x y en la dirección y . Comenzaremos con el blow-up en la dirección x , tomando el cambio $w = \eta$, $z = \eta\rho$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= 2\eta^2\rho - \eta^2 - \eta^3\rho = \eta^2(2\rho - 1 - \eta\rho) \\ \dot{\rho} &= \frac{1}{\eta} [\eta\rho(\eta + \eta^2\rho - \eta\rho) - \rho\eta^2(2\rho - 1 - \eta\rho)] = 2(\eta\rho + \eta^2\rho^2) - 3\rho^2\eta,\end{aligned}$$

dividiendo por η , obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \eta(2\rho - 1 - \eta\rho) \\ \dot{\rho} &= \rho(2 + 2\eta\rho - 3\rho),\end{aligned}\quad (2.15)$$

los puntos de equilibrio sobre el eje ρ son aquellos que cumplen la ecuación $\rho(2 - 3\rho) = 0$, es decir, los puntos $(0, 0)$ y $(0, 2/3)$. La matriz Jacobiana del sistema (2.15) es

$$D\tilde{X}(\eta, \rho) = \begin{pmatrix} 2\rho - 1 - 2\eta\rho & 2\eta - \eta^2 \\ 2\rho^2 & 2 + 4\eta\rho - 6\rho \end{pmatrix},$$

luego, al evaluar en los puntos de equilibrio obtenemos

$$D\tilde{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad y \quad D\tilde{X}(0, 2/3) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 8/9 & -2 \end{pmatrix},$$

por lo que ambos equilibrios son tipo silla, como se muestra en la figura 2.11 a).

Finalmente, hacemos el blow-up en dirección y , tomando $w = \xi\zeta$ y $z = \zeta$, obteniendo así el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{1}{\zeta} [2\xi\zeta^2 - \xi^2\zeta^2 - \xi^2\zeta^3 - \xi\zeta^2(\xi + \xi\zeta - 1)] = 3\xi\zeta - 2\xi^2\zeta - 2\xi^2\zeta^2 \\ \dot{\zeta} &= \zeta(\xi\zeta + \xi\zeta^2 - \zeta) = \zeta^2(\xi + \xi\zeta - 1),\end{aligned}$$

dividiendo por ζ tenemos

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \xi(3 - 2\xi - 2\xi\zeta) \\ \dot{\zeta} &= \zeta(\xi + \xi\zeta - 1),\end{aligned}$$

el origen es un equilibrio para este sistema, cuya matriz Jacobiana es $D\hat{X}(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, por lo que el origen es un punto silla, que podemos observar en la figura 2.11 b).

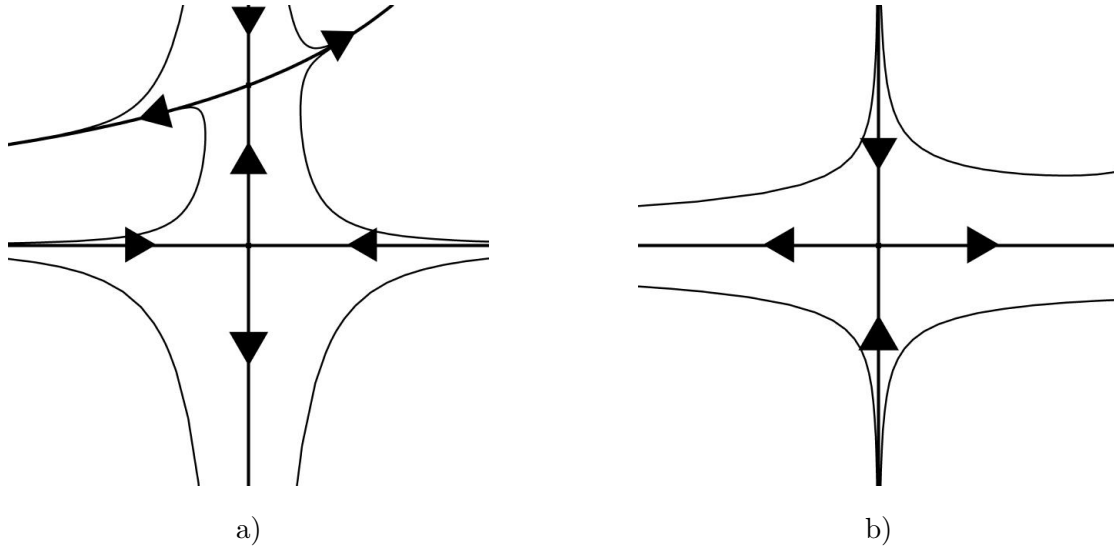


Figura 2.11: Retratos fases: a) en el plano η - ρ y b) en el plano ξ - ζ .

Dicho lo anterior, tenemos la información suficiente para determinar el comportamiento del origen en el sistema original. El retrato fase en el plano w - z se obtiene a partir de la información en los planos η - ρ y ξ - ζ . El equilibrio $(0, 2/3)$ en 2.11 a) se corresponde con una curva en (2.12) de la forma $z = 2/3w + \dots$, notemos que esta curva cambia del segundo al tercer cuadrante, mientras que el eje η se transforma en el eje w y el eje ρ desaparece como curva característica. Del plano ξ - ζ , tenemos el eje ζ , que se transforma en el eje z , mientras que la curva $\zeta = 0$ desaparece. Recordemos que dividimos el sistema en las variables w - z , por z , por lo que las direcciones se invierten para $z < 0$. De lo anterior, obtenemos el retrato fase observado en la figura 2.12.

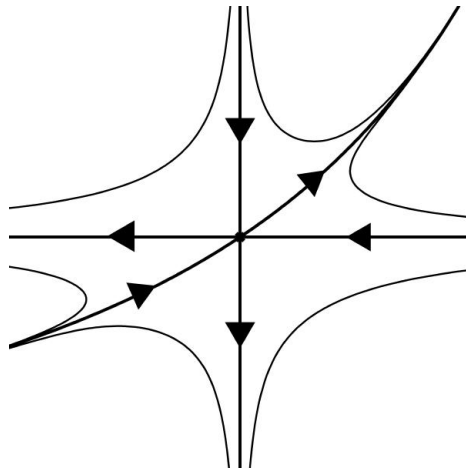


Figura 2.12: Retrato fase en el plano w - z .

A su vez, el retrato fase en el plano $w-z$, nos proporciona la información para obtener el retrato fase en el plano $u-v$, ver figura 2.13. La curva $z = 2/3w + \dots$, bajo el cambio de coordenadas se transforma en $v = 2u/3v + \dots$, esto es, la curva $v = \pm\sqrt{2u/3} + \dots$ (notemos que la curva cambia del tercero al cuarto cuadrante como esperábamos), la curva $w = 0$ se transforma en el eje v y la curva $z = 0$, deja de ser curva característica.

Finalmente,

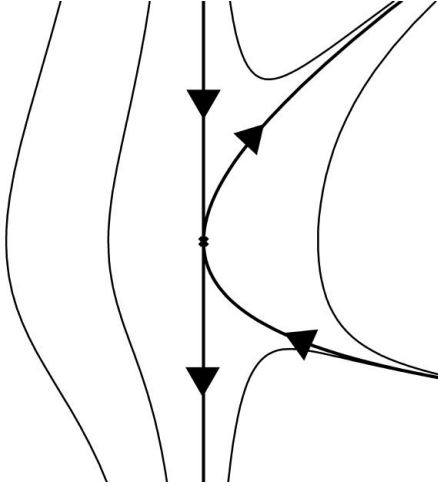


Figura 2.13: Retrato fase en el plano $u-v$.

obtenemos el retrato fase original del sistema en las variables $x-y$, a partir del plano $u-v$. La curva $v = \pm\sqrt{2u/3} + \dots$ se transforma en $y = \pm\sqrt{2x^3/3} + \dots$, mientras que la curva $u = 0$ desaparece, obteniendo así el retrato fase mostrado en la figura 2.14.

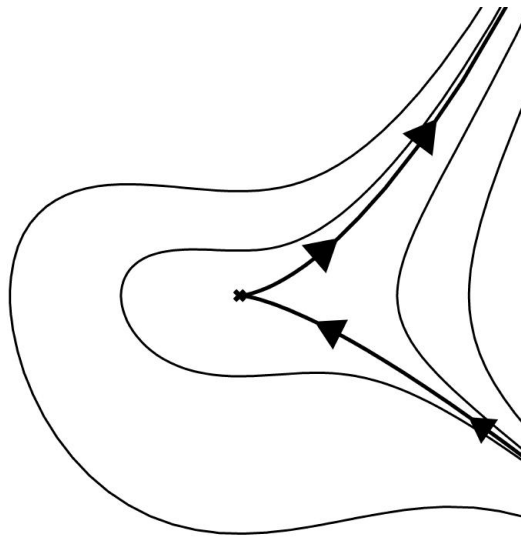


Figura 2.14: Retrato fase del sistema (2.12).

2.2. Técnicas de Blow-up Cuasi-homogéneas

Los cambios mostrados anteriormente son llamados blow-ups homogéneos, como pudimos percatarnos, en ocasiones es necesario hacer uso de ellos repetidas veces, lo cual puede dificultar los cálculos o requerir mucho tiempo, a continuación mostraremos una extensión de ellos, los cuales pueden resultar de gran ayuda para estos casos pues requieren un menor número de pasos, estos son los llamados (α, β) -blow up o blow-up cuasi-homogéneos. Aunque el método de blow-ups homogéneos sucesivos es suficiente para estudiar puntos de equilibrio aislados en un campo vectorial, nos resultará mucho más eficiente incluir blow-ups cuasi-homogéneos.

2.2.1. Polar Cuasi-homogéneo

Sea el origen un punto de equilibrio de un campo vectorial suave $X \in \mathbb{R}^2$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r^\alpha \cos \theta, r^\beta \sin \theta), \end{aligned}$$

para alguna pareja $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ adecuada. Exactamente como en el caso homogéneo, cuando $(\alpha, \beta) = (1, 1)$, podemos definir un campo vectorial de acuerdo a un cambio de variables y posteriormente dividirlo por r^k , para algún $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$, con la finalidad de que obtengamos un nuevo campo, lo menos degenerado posible, sobre el círculo invariante $r = 0$.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y), \end{aligned} \tag{2.16}$$

si tomamos el cambio $x = r^\alpha \cos \theta$, $y = r^\beta \sin \theta$, entonces

$$\dot{x} = \alpha r^{\alpha-1} \cos \theta \dot{r} - r^\alpha \sin \theta \dot{\theta} \tag{2.17}$$

$$\dot{y} = \beta r^{\beta-1} \sin \theta \dot{r} + r^\beta \cos \theta \dot{\theta}, \tag{2.18}$$

luego,

$$\begin{aligned} r^\beta \cos \theta \dot{x} &= \alpha r^{\alpha+\beta-1} \cos^2 \theta \dot{r} - r^{\alpha+\beta} \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \\ r^\alpha \sin \theta \dot{y} &= \beta r^{\alpha+\beta-1} \sin^2 \theta \dot{r} + r^{\alpha+\beta} \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\dot{r} = \frac{r^\beta \cos \theta P(r^\alpha \cos \theta, r^\beta \sin \theta) + r^\alpha \sin \theta Q(r^\alpha \cos \theta, r^\beta \sin \theta)}{r^{\alpha+\beta-1} (\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta)},$$

similarmente, multiplicando (2.17) por $\beta r^\beta \sin \theta$ y (2.18) por $-\alpha r^\alpha \cos \theta$, obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{\alpha r^\alpha \cos \theta Q(r^\alpha \cos \theta, r^\beta \sin \theta) - \beta r^\beta \sin \theta P(r^\alpha \cos \theta, r^\beta \sin \theta)}{r^{\alpha+\beta} (\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta)},$$

obteniendo así la expresión del campo sobre el cilindro $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$. Al igual que en el blow-up polar homogéneo, dividimos el sistema por un factor común r^d , para una d conveniente.

2.2.2. Direccional Cuasi-homogéneo

Como en el caso homogéneo, los blow-ups cuasi-homogéneos más utilizados en la práctica son los direccionales, ya que estos implican, generalmente, cálculos más sencillos que el polar, y de hecho, el blow up polar cuasi-homogéneo y los blow-up direccionales cuasi-homogéneos son también equivalentes. Los blow-up direccionales cuasi-homogéneos son los siguientes:

- Dirección x positiva $(x, y) \mapsto (u^\alpha, u^\beta v)$.
- Dirección x negativa $(x, y) \mapsto (-u^\alpha, u^\beta v)$.
- Dirección y positiva $(x, y) \mapsto (uv^\alpha, v^\beta)$.
- Dirección y negativa $(x, y) \mapsto (uv^\alpha, -v^\beta)$.

Estos cambios de coordenadas nos llevan a otro sistema, el cual posteriormente dividiremos según nos convenga para llevar a cabo nuestro análisis y finalmente contraer el espacio para obtener el retrato fase para el sistema original.

Analicemos primero el blow-up en dirección x positiva:

$$\begin{aligned} x &= u^\alpha \\ y &= u^\beta v, \end{aligned} \tag{2.19}$$

éste se obtiene mediante la función $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$\psi(u, v) = \phi \circ F^{-1}(u, v) = (x, y) = (r^\alpha \cos \theta, r^\beta \sin \theta) = (u^\alpha, u^\beta v)$$

donde $F : \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ se define como

$$F(r, \theta) = \left(r(\cos \theta)^{\frac{1}{\alpha}}, \sin \theta (\cos \theta)^{-\frac{\beta}{\alpha}} \right) = (u, v),$$

luego,

$$\begin{aligned} DF(r, \theta) &= \begin{pmatrix} (\cos \theta)^{\frac{1}{\alpha}} & -\frac{r}{\alpha} (\cos \theta)^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin \theta \\ 0 & (\cos \theta)^{1-\frac{\beta}{\alpha}} + \frac{\beta}{\alpha} (\cos \theta)^{-1-\frac{\beta}{\alpha}} \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos \theta)^{\frac{1}{\alpha}} & -\frac{r}{\alpha} (\cos \theta)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \sin \theta \\ 0 & \frac{(\cos \theta)^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}}{\alpha} (\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y su determinante es

$$|DF(r, \theta)| = \frac{(\cos \theta)^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}}{\alpha} (\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta) \neq 0,$$

para $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, por lo que F (como en el caso homogéneo) es un difeomorfismo del medio cilindro $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ al plano $u-v$, que transforma el medio círculo $r = 0$ en el eje v , por lo que el blow-up

direccional cuasi-homogéneo es equivalente al blow-up polar cuasi-homogéneo. Nuevamente, si nos restringimos a $u > 0$, ψ es un difeomorfismo sobre el semiplano $x > 0$.

El diagrama de la figura 2.15 muestra como se transforman semi-círculos del medio cilindro $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, bajo las transformaciones F y ϕ , estos semi-círculos se trasforman en elipses al pasar al plano $x-y$.

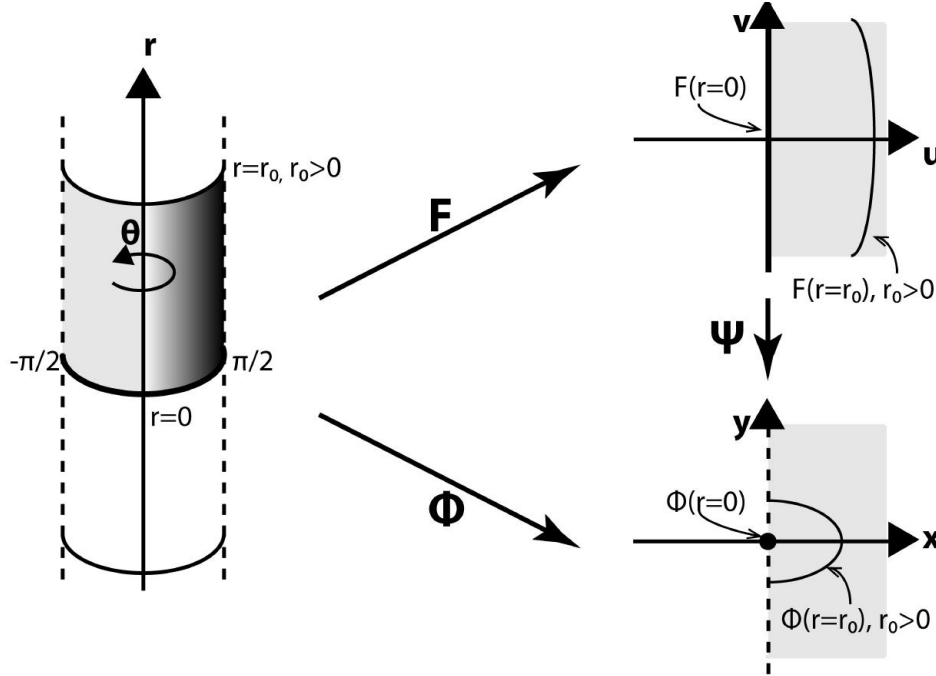


Figura 2.15: Blow-up dirección x positiva.

El sistema (2.16) se transforma bajo el blow-up en dirección x positiva en

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{\alpha u^{\alpha-1}} P(u^\alpha, u^\beta v) \\ \dot{v} &= \frac{1}{u^\beta} \left[Q(u^\alpha, u^\beta v) - \frac{\beta}{\alpha} u^{\beta-\alpha} v P(u^\alpha, u^\beta v) \right], \end{aligned}$$

Después de este blow-up se debe dividir el sistema por u^d , para alguna d conveniente. Si α es impar, el blow-up en la dirección x positiva nos proporciona también información de la dirección negativa, sin necesidad de repetir los cálculos. Más aún, si β es impar el blow-up intercambia las soluciones entre el segundo y tercer cuadrante del plano.

Si α es par, es necesario hacer el blow-up en dirección negativa, el cual al igual que la dirección positiva proviene de un difeomorfismo del medio cilindro $\mathbb{R} \times (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ al plano $u-v$.

Como mencionamos anteriormente el blow-up en la dirección x negativa es el cambio $x = -u^\alpha$, $y = u^\beta v$, dicho cambio puede ser obtenido con la función $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\psi(u, v) = \phi \circ F^{-1}(u, v) = (-u^\alpha, u^\beta v)$$

donde $F : (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la función definida como

$$F(r, \theta) = \left(r(-\cos \theta)^{\frac{1}{\alpha}}, \sin \theta (-\cos \theta)^{-\frac{\beta}{\alpha}} \right) = (u, v),$$

la cual es nuevamente un difeomorfismo, como en el caso anterior, llevando al medio círculo $r = 0$ al eje v . Si nos restringimos a $u > 0$, ψ resulta ser un difeomorfismo que transforma el semiplano $u > 0$ al semiplano $x < 0$, como podemos observar en la figura 2.16.

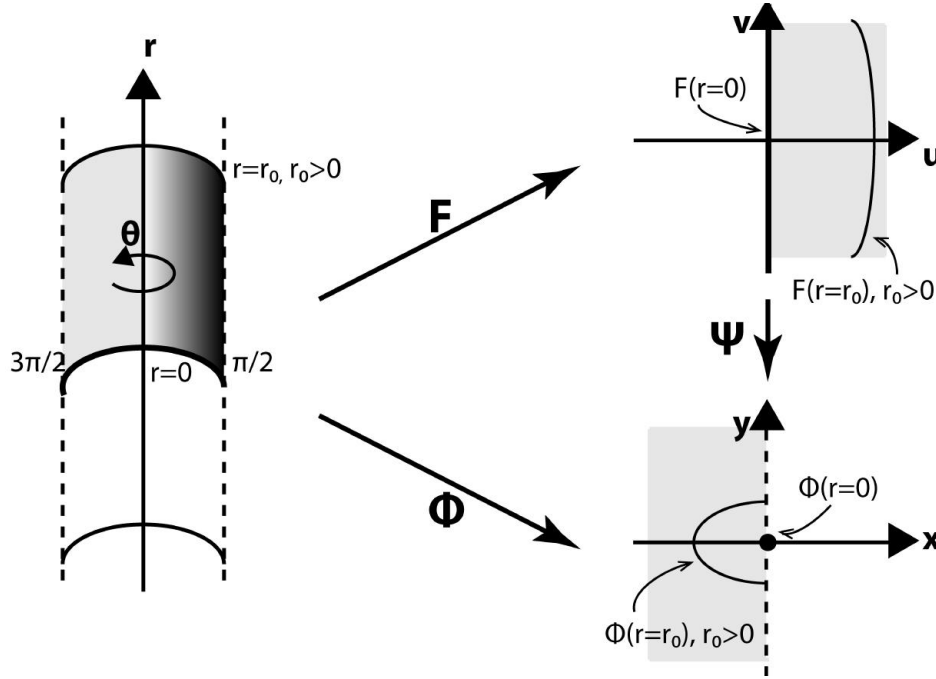


Figura 2.16: Blow-up dirección x negativa.

El sistema (2.16) bajo el blow-up en dirección x negativa es ahora

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{\alpha u^{\alpha-1}} P(u^\alpha, u^\beta v) \\ \dot{v} &= \frac{1}{u^\beta} \left[Q(u^\alpha, u^\beta v) + \frac{\beta}{\alpha} u^{\beta-\alpha} v P(u^\alpha, u^\beta v) \right], \end{aligned}$$

nuevamente, se requiere dividir el sistema por un factor común u^d , para una d adecuada.

Un análisis semejante se sigue para el blow-up en dirección y , tanto negativa como positiva. Al aplicar el blow-up en dirección y , el sistema (2.16) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{v^\alpha} \left[P(uv^\alpha, \pm v^\beta) \mp \frac{\alpha}{\beta} v^{\alpha-\beta} u Q(uv^\alpha, \pm v^\beta) \right] \\ \dot{v} &= \pm \frac{1}{\beta v^{\beta-1}} Q(uv^\alpha, \pm v^\beta), \end{aligned}$$

donde \pm el blow-up en dirección x positiva o negativa, respectivamente. Será necesario cancelar un factor v^d en el sistema, de acuerdo a la d que convenga. Similarmente al blow-up en dirección x , para este caso, si β es impar el blow-up en la dirección y positiva, también nos proporciona la información de la dirección negativa, además si α es impar, entonces la soluciones en el tercer y cuarto cuadrante se intercambian.

2.2.3. Polígono de Newton

En esta sección presentaremos una técnica con la cual podemos encontrar los parámetros α , β y d , que servirán, tanto para el blow-up polar como para el direccional, cuasi-homogéneo. La técnica, presentada en [Pelletier, 1994], se basa en encontrar el *polígono de Newton* asociado al sistema, como se muestra a continuación.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) = \sum_{i+j \geq m} a_{i,j} x^i y^j \\ \dot{y} &= Q(x, y) = \sum_{i+j \geq m} b_{i,j} x^i y^j,\end{aligned}\tag{2.20}$$

y definamos el conjunto

$$N = \{(i-1, j) : a_{i,j} \neq 0\} \cup \{(i, j-1) : b_{i,j} \neq 0\},$$

por ejemplo, el punto $(-1, j)$ estará asociado al término $a_{0,j}y^j$. Si el origen es degenerado, el punto $(0, 0) \notin N$, ya que sería el asociado a $a_{1,0}x$ ó $b_{0,1}y$.

Definamos ahora el *polígono de Newton* de (2.20) como el contorno convexo del conjunto

$$P = \bigcup_{(r,s) \in N} \{(r', s') : r' \geq r, s' \geq s\},$$

llamaremos γ_k a cada uno de los segmentos de este polígono. Si uno de estos segmentos se encuentra completamente en $i \leq 0$ en el plano i - j , lo llamaremos γ_0 y si alguno se encuentra completamente en $j \leq 0$, lo llamaremos γ_{n+1} . Al resto de los segmentos los denotaremos por $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, nombrando de izquierda a derecha. Como el origen es una singularidad aislada, tenemos al menos uno de los puntos $(-1, s)$ ó $(0, s)$, y al menos uno de los puntos $(r, 0)$ ó $(r, -1)$, perteneciendo al conjunto N , para algún r y s . Por lo tanto, siempre existe al menos un segmento γ_1 .

Para $k = 1, \dots, n$, el segmento γ_k satisface la ecuación de la recta

$$\alpha_k i + \beta_k j = \delta_k,$$

para alguna α_k y alguna β_k , primas relativas entre sí, y alguna δ_k . Elegimos los parámetros buscados α , β , d , a nuestra conveniencia, del conjunto

$$\{(\alpha_k, \beta_k, \delta_k) : k = 1, \dots, n\},$$

dados por los correspondientes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Notemos que si $(i, j) \in N$, entonces podemos tener a $a_{i+1,j}x^{i+1}y^j$ como término de P ó a $b_{i,j+1}x^iy^{j+1}$ como término de Q . Llamaremos a $\delta = \alpha i + \beta j$, el cuasi-grado de tipo (α, β) de estos términos. Denotaremos

$$P^\delta(x, y) = a_{i+1,j}x^{i+1}y^j \quad \text{y} \quad Q^\delta(x, y) = b_{i,j+1}x^iy^{j+1},$$

entonces,

$$\begin{aligned} P^\delta(r^\alpha x, r^\beta y) &= a_{i+1,j} (r^\alpha x)^{i+1} (r^\beta y)^j \\ &= a_{i+1,j} r^{\alpha i + \beta j + \alpha} x^{i+1} y^j \\ &= r^{\delta + \alpha} P^\delta(x, y), \end{aligned}$$

análogamente, $Q^\delta(r^\alpha x, r^\beta y) = r^{\delta + \beta} Q^\delta(x, y)$. Por lo tanto, si $X = (P, Q)$ podemos descomponerlo en sus componentes cuasi-homogéneas de tipo (α, β) como

$$X = \sum_{\delta \geq d} X^\delta,$$

donde $X^\delta = (P^\delta, Q^\delta)$ y $d = \min \{\delta : \delta = \alpha i + \beta j, (i, j) \in N\}$.

Si hacemos el blow-up direccional cuasi-homogéneo en dirección x positiva, tenemos $x = u^\alpha$, y $y = u^\beta v$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{\alpha u^{\alpha-1}} P(u^\alpha, u^\beta v) \\ &= \frac{1}{\alpha u^{\alpha-1}} \sum_{\delta \geq d} P^\delta(u^\alpha, u^\beta v) \\ &= \frac{1}{\alpha u^{\alpha-1}} \sum_{\delta \geq d} u^{\delta + \alpha} P^\delta(1, v) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{\delta \geq d} u^{\delta + 1} P^\delta(1, v) \\ \\ \dot{v} &= \frac{1}{u^\beta} \left[Q(u^\alpha, u^\beta v) - \frac{\beta}{\alpha} u^{\beta - \alpha} v P(u^\alpha, u^\beta v) \right] \\ &= \frac{1}{u^\beta} \left[\sum_{\delta \geq d} Q^\delta(u^\alpha, u^\beta v) - \frac{\beta}{\alpha} u^{\beta - \alpha} v \sum_{\delta \geq d} P^\delta(u^\alpha, u^\beta v) \right] \\ &= \frac{1}{u^\beta} \left[\sum_{\delta \geq d} u^{\delta + \beta} Q^\delta(1, v) - \frac{\beta}{\alpha} u^{\beta - \alpha} v \sum_{\delta \geq d} u^{\delta + \alpha} P^\delta(1, v) \right] \\ &= \sum_{\delta \geq d} u^\delta \left[Q^\delta(1, v) - \frac{\beta}{\alpha} v P^\delta(1, v) \right], \end{aligned}$$

multiplicando por αu^{-d} , obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \sum_{\delta \geq d} u^{\delta+1-d} P^\delta(1, v) \\ \dot{v} &= \sum_{\delta \geq d} u^{\delta-d} \left[\alpha Q^\delta(1, v) - \beta v P^\delta(1, v) \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

por lo que las singularidades de (2.21) sobre $u = 0$ están dadas por la ecuación

$$\alpha Q^d(1, v) - \beta v P^d(1, v) = 0. \quad (2.22)$$

Un análisis semejante se sigue para el blow-up en la dirección x negativa. Finalmente, requerimos hacer el blow-up en la dirección y positiva y negativa con el fin de determinar si existe una curva tendiendo al origen (en tiempo positivo o negativo) en dirección vertical, de ser así, tendríamos al origen como singularidad del blow-up en dirección y , y por lo tanto, es el único equilibrio en el que estamos interesados ya que los demás fueron estudiados en el blow-up en dirección x . Si $(0, 0)$ no es singularidad significa que este blow-up no es necesario.

Tomemos entonces el cambio $x = uv^\alpha$, $y = v^\beta$, por lo que el sistema (2.20) ahora puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \sum_{\delta \geq d} v^\delta \left[P^\delta(u, 1) - \frac{\alpha}{\beta} u Q^\delta(u, 1) \right] \\ \dot{v} &= \frac{1}{\beta} \sum_{\delta \geq d} v^{\delta+1} Q^\delta(u, 1), \end{aligned}$$

multiplicando por βv^{-d} , obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \sum_{\delta \geq d} v^\delta \left[\beta P^\delta(u, 1) - \alpha u Q^\delta(u, 1) \right] \\ \dot{v} &= \frac{1}{\beta} \sum_{\delta \geq d} v^{\delta-d+1} Q^\delta(u, 1). \end{aligned}$$

Así, $(0, 0)$ será un equilibrio del sistema si y solo si $P^d(0, 1) = 0$, lo cual implica que $P^d(x, y) = x \bar{F}(x, y)$. Lo anterior nos dice que el segmento elegido γ correspondiente a $\alpha i + \beta j = d$ se encuentra totalmente contenido en el semiplano $i \geq 0$ (ya que i es al menos 0). Esto prueba la siguiente proposición establecida en [Pelletier, 1995].

Proposición 3. *La dirección vertical $x = 0$ es una dirección característica de X^{d_k} si y solo si γ_k no contiene puntos con abscisa negativa (si y solo si $x \mid P^{d_k}$).*

Dicho de otra forma, si el segmento γ_k contiene algún punto con abscisa negativa, no es necesario hacer el blow-up en la dirección y , una vez realizado el blow-up en dirección x .

A continuación mostramos algunos ejemplos para ilustrar como funcionan los blow-up cuasi-homogéneos, así como el polígono de Newton permitiendo que se disminuya el número de cálculos.

Ejemplo 6. Consideremos nuevamente el sistema del ejemplo (2.12)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 + xy.\end{aligned}$$

El conjunto N asociado a este sistema es

$$N = \{(-1, 1), (2, -1), (1, 0)\},$$

podemos observar en la figura 2.17 que el polígono de Newton del sistema (2.12) solo contiene un segmento γ_1 , con extremos $(-1, 1)$ y $(2, -1)$, por lo que la recta que lo contiene es $2i + 3j = 1$, entonces nuestros parámetros son $\alpha = 2$, $\beta = 3$ y $d = 1$.

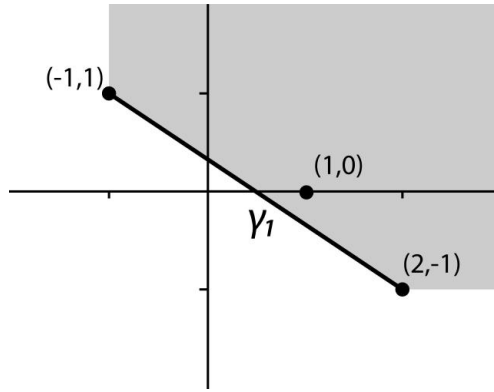


Figura 2.17: Polígono de Newton de (2.12).

Notemos que γ_1 contiene puntos con $i < 0$, por lo tanto, solo es necesario hacer el blow-up en la dirección x . Comenzaremos con la dirección x positiva haciendo el cambio $x = u^2$, $y = u^3v$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{1}{2u} (u^3v) = \frac{1}{2}u^2v \\ \dot{v} &= \frac{1}{u^3} (u^4 + u^5v - \frac{3}{2}u^4v^2) = u + u^2v - \frac{3}{2}uv^2,\end{aligned}$$

dividiendo por $u^d = u$, obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{1}{2}uv \\ \dot{v} &= 1 + uv - \frac{3}{2}v^2,\end{aligned}\tag{2.23}$$

si $u = 0$, los puntos de equilibrio son $(0, \pm\sqrt{2/3})$. La matriz Jacobiana del sistema (2.23) es

$$D\tilde{X}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v & \frac{1}{2}u \\ v & u - 3v \end{pmatrix},$$

entonces al evaluar en los equilibrios obtenemos

$$D\tilde{X}(0, \pm\sqrt{2/3}) = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{2}\sqrt{2/3} & 0 \\ \pm\sqrt{2/3} & \mp 3\sqrt{2/3} \end{pmatrix},$$

por lo que ambos equilibrios son tipo silla, como se muestra en la figura 2.18 b). Las curvas características correspondientes a cada equilibrio son

$$v = \pm\sqrt{2/3} + \dots,$$

haciendo el cambio de coordenadas, obtenemos las curvas características que se encuentran en el semi-plano $x > 0$, éstas son

$$\begin{aligned} \frac{y}{u^3} &= \pm\sqrt{2/3} + \dots \\ \Rightarrow y &= \pm\sqrt{2/3}x^{3/2} + \dots \end{aligned}$$

Ahora, para el blow-up en dirección x negativa tomamos $x = -u^2$, $y = u^3v$, transformando el sistema en

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2}u^2v \\ \dot{v} &= u + u^2v + \frac{3}{2}uv^2, \end{aligned}$$

dividiendo por $u^d = u$, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2}uv \\ \dot{v} &= 1 + uv + \frac{3}{2}v^2, \end{aligned} \tag{2.24}$$

notemos que si $u = 0$, el sistema (2.24) no tiene puntos de equilibrio, como podemos ver en la figura 2.18 a), en consecuencia, no aporta curvas características en el semi-plano $x < 0$.

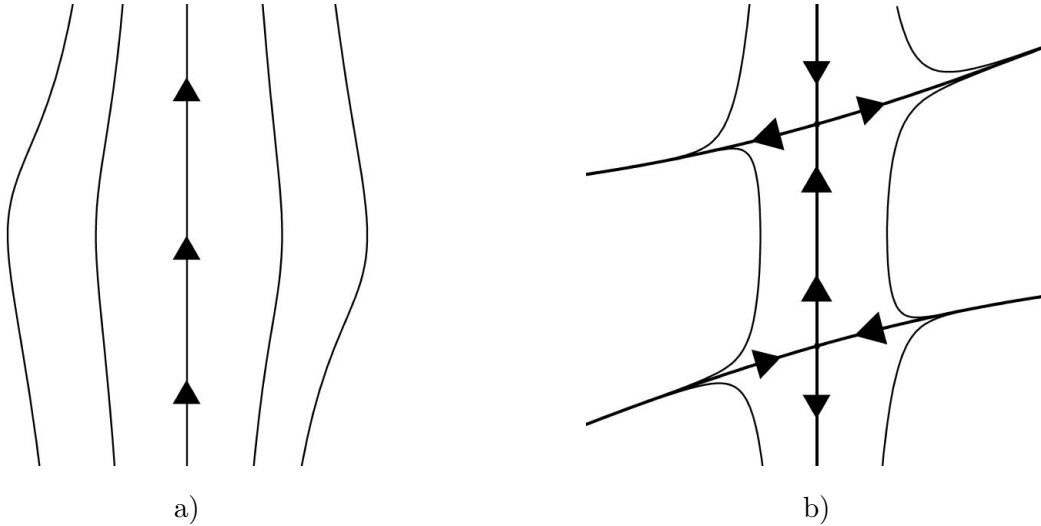


Figura 2.18: a) Blow-up en dirección x negativa. b) Blow-up en dirección x positiva.

Finalmente, obtenemos el retrato fase del sistema (2.12) mostrado en la figura 2.19, claramente, éste coincide con el obtenido en nuestro análisis previo.

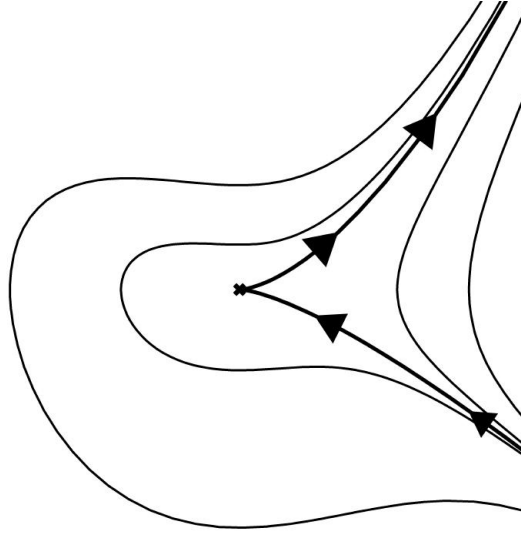


Figura 2.19: Retrato fase del sistema (2.12).

Recordemos que se necesitaron tres blow-up direccionales del tipo homogéneo para poder determinar el comportamiento en el origen para el ejemplo anterior, en este caso, al usar el blow-up direccional cuasi-homogéneo solo fue necesario utilizar uno, por lo que nos resultó mas eficiente. Sin embargo, habrá ocasiones en las que, aún con los cuasi-homogéneos, también se requiera hacer el blow-up varias veces.

Ejemplo 7. *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(y^2 - x^2) \\ \dot{y} &= x^4. \end{aligned} \tag{2.25}$$

El conjunto N para este sistema es

$$N = \{(1, 1), (-1, 3), (4, -1)\},$$

por lo que el polígono de Newton es como se muestra en la figura 2.20, claramente tenemos dos segmentos γ_1 y γ_2 , cuyas rectas que los contienen son $i + j = 2$ y $2i + 3j = 5$, respectivamente, así que podemos elegir nuestros parámetros α , β y d del conjunto

$$\{(1, 1, 2), (2, 3, 5)\},$$

dado que el segmento γ_1 contiene puntos con abscisa negativa, elegiremos los parámetros $\alpha = 1$, $\beta = 1$, y $d = 2$, con el fin de evitar el blow-up en la dirección y , sin embargo, el segmento γ_2 también funciona.

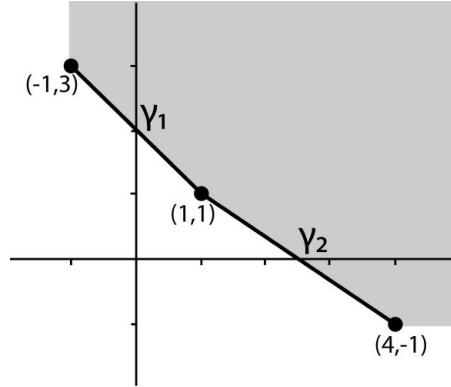


Figura 2.20: Polígono de Newton de (2.25).

Haremos entonces el blow-up en dirección x positiva, como α es impar, el blow-up en la dirección positiva nos proporcionará también la información de la dirección negativa. Tomemos $x = u$, $y = uv$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{u} &= uv(u^2v^2 - u^2) &= u^3v(v^2 - 1) \\ \dot{v} &= \frac{1}{u} [u^4 - u^3v^2(v^2 - 1)] &= u^2[u - v^2(v^2 - 1)], \end{aligned}$$

dividiendo por u^2 , obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= uv(v^2 - 1) \\ \dot{v} &= u - v^2(v^2 - 1), \end{aligned} \tag{2.26}$$

entonces, los equilibrios tales que $u = 0$ serán aquellos que cumplan la ecuación $v^2(v^2 - 1) = 0$, es decir, los puntos $(0, 0)$ y $(0, \pm 1)$. La matriz Jacobiana del sistema (2.26) es

$$D\tilde{X}(u, v) = \begin{pmatrix} v(v^2 - 1) & 3v^2u - u \\ 1 & -4v^3 + 2v \end{pmatrix},$$

luego,

$$D\tilde{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\tilde{X}(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \mp 2 \end{pmatrix},$$

por lo que los tres puntos de equilibrio resultan ser no-hiperbólicos. Por lo tanto, en el caso del origen será necesario que hagamos un nuevo blow-up para conocer su comportamiento, mientras que, para los puntos $(0, \pm 1)$ podemos hacer uso del Teorema de la variedad central como mostraremos a continuación.

Los puntos $(0, \pm 1)$, tienen como valores propios asociados a su matriz Jacobiana a $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = \mp 2$, respectivamente, por lo que cada punto tiene asociado una variedad central, debida al valor propio cero. Comenzaremos calculando la variedad central para el punto $(0, 1)$, para ello proponemos la curva $v = h(u) = 1 + a_1u + \dots$, luego, por ser una solución del sistema (2.26), esta deberá cumplir la ecuación homológica $\dot{v} = h'(u)\dot{u}$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{v} &= h'(u)\dot{u} \\ \Leftrightarrow u - (1 + a_1u + \dots)^2((1 + a_1u + \dots)^2 - 1) &\equiv (a_1 + \dots)u(1 + a_1u + \dots) \\ &\quad \quad \quad ((1 + a_1u + \dots)^2 - 1) \\ \Leftrightarrow (1 - 2a_1)u + \dots &\equiv 0, \end{aligned}$$

de donde concluimos que, $a_1 = 1/2$. En consecuencia, la variedad central asociada a $(0, 1)$ es la curva $v = h(u) = 1 + \frac{1}{2}u + \dots$, resta analizar la dinámica sobre ella, ésta se obtiene sustituyendo h en \dot{u} , esto es

$$\dot{u}|_h = u \left(1 + \frac{1}{2}u + \dots \right) \left[\left(1 + \frac{1}{2}u + \dots \right)^2 - 1 \right] = u^2 + \dots,$$

por lo que el flujo sobre la variedad central se mueve siempre hacia la derecha. Análogamente se obtiene que la variedad central asociada al punto $(0, -1)$ es la curva $v = g(u) = -1 - \frac{1}{2}u + \dots$, al evaluarla en \dot{u} tenemos

$$\dot{u}|_g = u \left(-1 - \frac{1}{2}u + \dots \right) \left[\left(-1 - \frac{1}{2}u + \dots \right)^2 - 1 \right] = -u^2 + \dots,$$

en este caso el flujo es hacia la izquierda.

Ahora, resta analizar el origen del sistema (2.26), para ello emplearemos la técnica nuevamente, empezando por determinar el polígono de Newton. Para el sistema (2.26), tenemos el conjunto

$$N' = \{(0, 3), (0, 1), (1, -1)\},$$

por lo que el polígono de Newton es como se muestra en la figura 2.21, claramente solo tenemos un segmento γ'_1 , cuya recta que lo contiene es $2i + j = 1$, por lo tanto, tomaremos $\alpha' = 2$, $\beta' = 1$ y $d' = 1$.

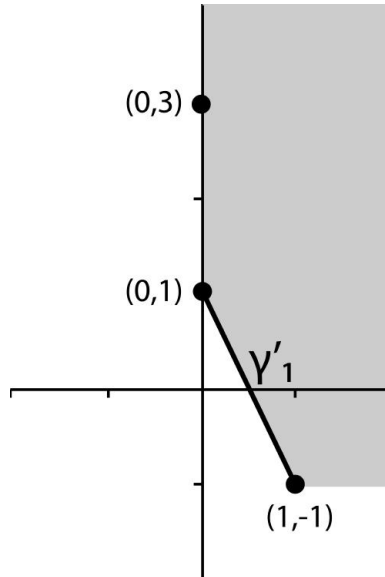


Figura 2.21: Polígono de Newton de (2.26).

Calculando el polinomio característico (como mostramos en la sección del blow-up polar homogéneo) del sistema (2.26), tenemos $F_1(\theta) = \cos^2 \theta$, por lo que la dirección horizontal no es característica, entonces, solo será necesario hacer el blow-up en dirección y . Como β' es impar, bastará con hacer

solo la dirección positiva. Tomemos $u = wz^2$, y $v = z$, luego

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \frac{1}{z^2} [wz^3(z^2 - 1) - 2wz(wz^2 - z^2(z^2 - 1))] = 3wz^3 - 3wz - 2w^2z \\ \dot{z} &= wz^2 - z^2(z^2 - 1) = z^2[w - z^2 + 1],\end{aligned}$$

al dividir por z obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{w} &= 3wz^2 - 3w - 2w^2 \\ \dot{z} &= z[w - z^2 + 1],\end{aligned}\tag{2.27}$$

sobre $z = 0$, los puntos de equilibrio son los que cumplen la ecuación $w(3 + 2w) = 0$, estos son $(0, 0)$ y $(-3/2, 0)$. La matriz Jacobiana del sistema (2.27) es

$$D\hat{X}(w, z) = \begin{pmatrix} 3z^2 - 3 - 4w & 6wz \\ z & w - 3z^2 + 1 \end{pmatrix},$$

al evaluar en los equilibrios tenemos

$$D\hat{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D\hat{X}(-3/2, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, ambos equilibrios son tipo silla como se muestra en el retrato fase de la figura 2.22 a).

Al regresar al retrato fase del sistema (2.26) en el origen, la curva $z = 0$ deja de ser curva característica pues se transforma en el origen; la curva $w = 0$, se transforma en $u = 0$ (intercambiando la dirección para $v < 0$) y por último, el punto $(-3/2, 0)$ nos aporta la curva $w = -3/2 + \dots$, esta se transforma en $v = \pm\sqrt{-2u/3} + \dots$, para $u < 0$, ya que $w = u/v^2$, nuevamente intercambiando la dirección para $v < 0$. Recordemos que también tenemos las curvas $v = 1 + \frac{1}{2}u + \dots$ y $v = -1 - \frac{1}{2}u + \dots$, correspondientes a los equilibrios $(0, \pm 1)$, respectivamente. Por lo tanto, el retrato fase en el plano $u-v$ es como se muestra en la figura 2.22 b).

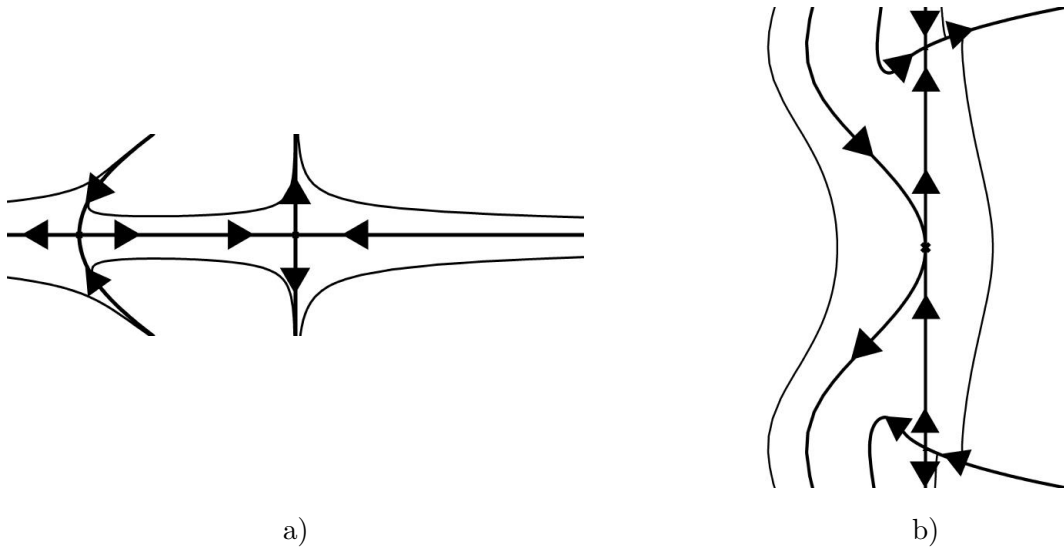


Figura 2.22: a) Retrato fase en el plano $w-z$. b) Retrato fase en el plano $u-v$.

Finalmente, obtenemos el retrato fase del sistema (2.25) a partir del plano $u-v$. La curva $u = 0$, se transforma en el origen; las curvas $v = \pm\sqrt{-2u/3} + \dots$, son transformadas en $y = \pm\sqrt{-2x^3/3} + \dots$ para $x < 0$ e intercambiadas del segundo al tercer cuadrante (ya que α es impar); y por último las curvas asociadas a los puntos $(0, \pm 1)$ nos proporcionan las curvas $y = \pm x + \dots$, ver figura 2.23.

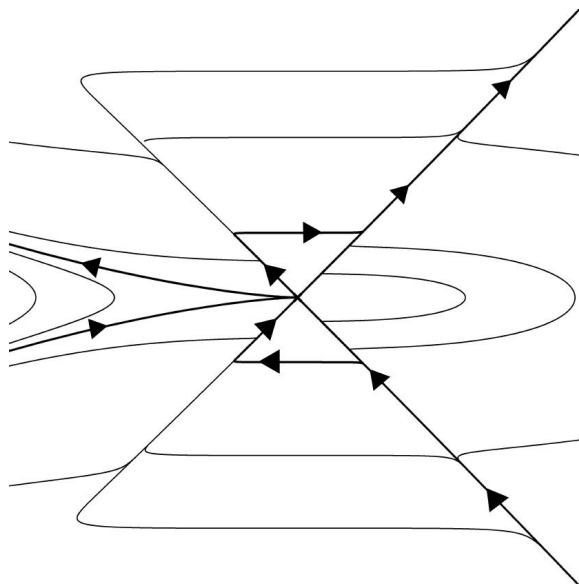


Figura 2.23: Retrato fase del sistema (2.25).

Capítulo 3

Comportamiento en el infinito

Para realizar el análisis del comportamiento local de puntos de equilibrio, contamos con herramientas, como el Teorema de Hartman y Grobman, para equilibrios hiperbólicos en sistemas no lineales, así como diversos teoremas que nos ayudan a determinar el retrato fase para equilibrios no-hiperbólicos, según su clasificación. Sin embargo, en algunas ocasiones se vuelve importante el estudio de las soluciones que se encuentran a grandes distancias del origen, ya que nos permite tener una mayor comprensión sobre el comportamiento global del sistema. Por tal motivo, en este capítulo estudiaremos el comportamiento de los puntos de equilibrio al “infinito”.

Bendixson tuvo la idea de estudiar el comportamiento en el infinito utilizando la proyección estereográfica, la cual proyecta un punto de la esfera, desde uno de los polos, al plano cartesiano que se encuentra en el ecuador de la misma. Por lo que estudiar el comportamiento cerca del punto al “infinito” sería equivalente a estudiar el comportamiento cerca del polo, sobre la esfera. La esfera, incluyendo el punto al infinito, es conocida como la esfera de Bendixson. Sin embargo, al usar este tipo de proyección, tanto el punto crítico al infinito como el flujo inducido sobre la esfera resultan muy complicados de estudiar. Un análisis menos complejo se logra utilizando la llamada esfera de Poincaré (Fig. 3.1), como estudiaremos a lo largo de este capítulo.

3.1. La esfera de Poincaré

Poincaré presentó un estudio más sencillo que el de Bendixson, ver [Poincaré, 1881], el cual se hace sobre la llamada esfera de Poincaré (Fig. 3.1), donde la proyección se realiza desde el centro del hemisferio superior de la esfera unitaria,

$$\mathbb{S}^{2+} = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, Z \geq 0\},$$

hacia el plano (x, y) , tangente a \mathbb{S}^{2+} en el polo norte. La ventaja de este tipo de proyección central es que los puntos críticos al infinito se encuentran distribuidos sobre el ecuador de la semiesfera y resultan ser más simples que los de la esfera de Bendixson, aunque pueden seguir resultando bastante complicados. Ver [Meiss, 2007] y [Perko, 2001].

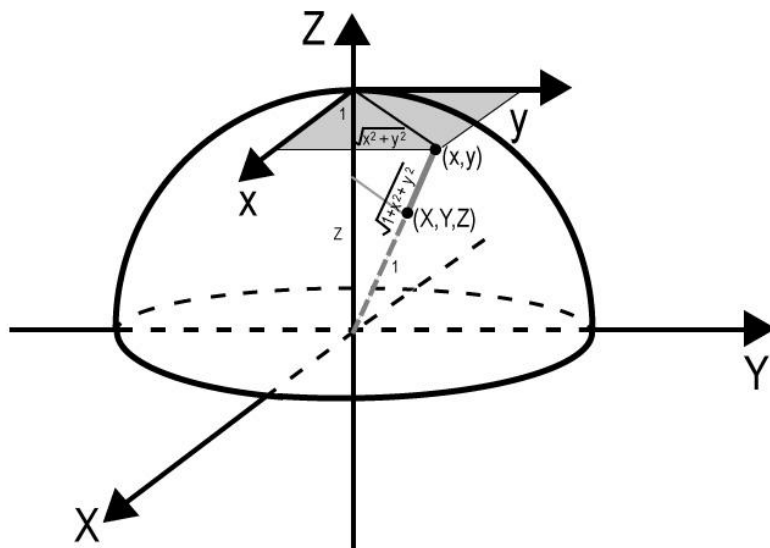


Figura 3.1: La esfera de Poincaré.

Si proyectamos \mathbb{S}^{2+} en el plano (x, y) , se sigue de la semejanza de triángulos (figura 3.2), que las ecuaciones que definen (x, y) en términos de (X, Y, Z) están dadas por

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}. \quad (3.1)$$

Note que “infinito” ahora corresponde al círculo ecuatorial, $Z = 0$.

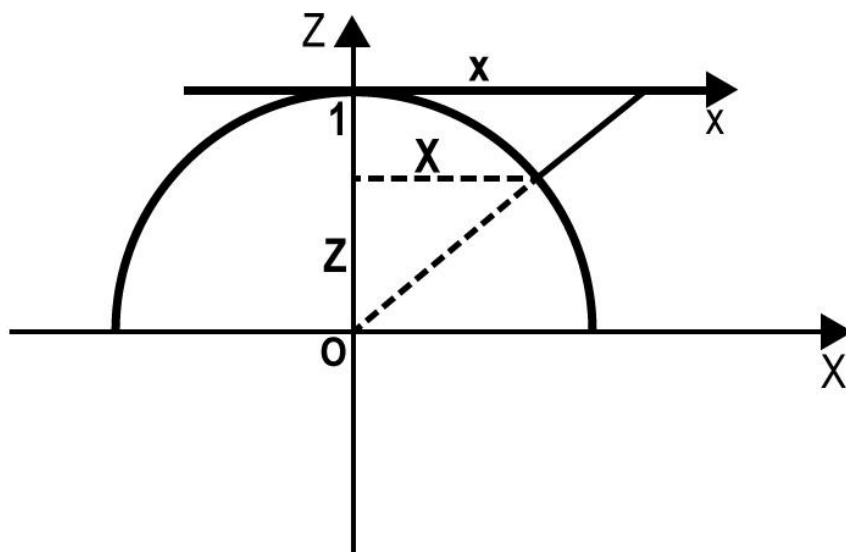


Figura 3.2: Sección transversal de la esfera de Poincaré.

Similarmente, por semejanza (ver fig. 3.1), tenemos que

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

se sigue de (3.1), que las ecuaciones que definen (X, Y, Z) en términos de (x, y) están dadas por

$$X = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}. \quad (3.2)$$

Ahora, si consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y), \end{aligned} \quad (3.3)$$

al hacer el cambio de coordenadas (3.2), obtenemos el sistema que representa el movimiento sobre la superficie de la esfera de Poincaré:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \frac{x(\dot{x} + y\dot{y})}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = Z[(1-X^2)P - XYQ] \\ \dot{Y} &= Z[(1-Y^2)Q - XYP] \\ \dot{Z} &= -Z^2[XP + YQ], \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde P y Q se encuentran evaluadas en $(X/Z, Y/Z)$. Notemos que estas ecuaciones son invariantes sobre la esfera, ya que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(X^2 + Y^2 + Z^2) &= 2(X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}) \\ &= 2(XZ[(1-X^2)P - XYQ] + YZ[(1-Y^2)Q - XYP] \\ &\quad - Z^3[XP + YQ]) \\ &= (1 - X^2 - Y^2 - Z^2)(XZP + YZQ) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que el sistema (3.4) tiene una ecuación innecesaria, pues tenemos tres ecuaciones para un movimiento sobre una superficie.

Las propiedades topológicas del flujo cerca del infinito corresponden a las del flujo cercano a $Z = 0$ en (3.4). Notemos que $Z = 0$ es singularidad del sistema, por lo que haremos un reescalamiento del tiempo que nos permita estudiar el flujo cercano. Sea m el grado mayor en P y Q , observemos que tanto \dot{X} como \dot{Y} tienen como factor a Z^{m-1} , podemos obtener un sistema topológicamente equivalente a (3.4) que no contenga este factor, definiendo el reescalamiento

$$\tau = \int Z^{1-m} dt \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = Z^{1-m} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = Z^{m-1} \quad (3.5)$$

para $Z > 0$. Notemos que $\tau(t)$ es monótona creciente, por lo que resulta una transformación apropiada para la equivalencia. Cuando $Z = 0$, la transformación ya no es una equivalencia, sin embargo,

nos permite obtener un sistema cuyas curvas soluciones cuando $Z \rightarrow 0$ son las mismas (salvo su velocidad, ya que hemos modificado el tiempo).

Definamos las funciones

$$\begin{aligned} P^*(X, Y, Z) &= Z^m P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), \\ Q^*(X, Y, Z) &= Z^m Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), \end{aligned}$$

luego, de (3.4) y (3.5) obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= \frac{dX}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \dot{X} Z^{m-1} = (1 - X^2) P^* - XY Q^* = (Y^2 + Z^2) P^* - XY Q^* \\ \frac{dY}{d\tau} &= (X^2 + Z^2) Q^* - XY P^* \\ \frac{dZ}{d\tau} &= -Z (XP^* + YQ^*). \end{aligned} \tag{3.6}$$

El ecuador ya no es una singularidad sino una circunferencia invariante. Más aún, para $Z = 0$ todos los términos en las ecuaciones para P^* y Q^* son cero, excepto el de orden mayor, ya que si

$$P(x, y) = P_1(x, y) + P_2(x, y) + \dots + P_m(x, y),$$

entonces

$$\begin{aligned} P^*(X, Y, Z) &= Z^m P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \\ &= Z^m P_1\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) + Z^m P_2\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) + \dots + Z^m P_m\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \\ &= Z^{m-1} P_1(X, Y) + Z^{m-2} P_2(X, Y) + \dots + P_m(X, Y), \end{aligned}$$

donde P_m es el término de grado m en P . Análogamente para Q^* . Se sigue que

$$P^*(X, Y, 0) = P_m(X, Y), \quad y \quad Q^*(X, Y, 0) = Q_m(X, Y).$$

Por lo tanto, el movimiento (X, Y) sobre el círculo $Z = 0$ viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= -Y(XQ_m - YP_m) \\ \frac{dY}{d\tau} &= X(XQ_m - YP_m). \end{aligned}$$

“El infinito” se ha convertido en una variedad invariante, un círculo, con dinámica no trivial. Del sistema anterior concluimos que existirán equilibrios al infinito solo cuando se cumplan

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= 1 \\ XQ_m - YP_m &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Notemos que X y Y no pueden ser cero simultáneamente. La velocidad angular en el círculo está dada por

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \frac{1}{r^2} [X\dot{Y} - Y\dot{X}] \\
 &= \frac{1}{r^2} [X^2 (XQ_m - YP_m) + Y^2 (XQ_m - YP_m)] \\
 &= \frac{1}{r^2} (X^2 + Y^2) (XQ_m - YP_m) \\
 &= \frac{1}{r^2} (XQ_m - YP_m),
 \end{aligned}$$

por lo que el movimiento es contra-reloj cuando $XQ_m - YP_m > 0$, y en sentido del reloj en caso contrario.

Otra propiedad importante es, que si (X, Y) es un equilibrio, entonces su reflejado $(-X, -Y)$ también lo es, ya que

$$\begin{aligned}
 &XQ_m(X, Y) - YP_m(X, Y) = 0 \\
 \Leftrightarrow &(-1)^{m+1} (XQ_m(X, Y) - YP_m(X, Y)) = 0 \\
 \Leftrightarrow &-X(-1)^m Q_m(X, Y) - (-Y)(-1)^m P_m(X, Y) = 0 \\
 \Leftrightarrow &-XQ_m(-X, -Y) - (-Y)P_m(-X, -Y) = 0.
 \end{aligned}$$

Más aún, el signo de $XQ_m - YP_m$ se invierte al reflejarse si m es par, pero tiene el mismo signo si m es impar. Por esta razón, los puntos diametralmente opuestos en el círculo al infinito, tienen el mismo comportamiento topológico cuando m es impar, pero es opuesto cuando m es par.

Una forma de conocer el movimiento cerca de un equilibrio en el infinito es hacer un nuevo cambio de coordenadas tal que el equilibrio está situado en el origen del nuevo sistema. Lo que haremos es hacer otra proyección de Poincaré sobre un plano tangente a la esfera de Poincaré, ya sea en el eje X ó en el eje Y .

Haremos primero la proyección sobre el plano $Y = 1$, la cual usaremos si el equilibrio ocurre para algún $Y > 0$. Por semejanza de triángulos (ver figura 3.3) tenemos que la transformación que proyecta (X, Y, Z) sobre el plano (ξ, ζ) es

$$\xi = \frac{X}{Y}, \quad \zeta = \frac{Z}{Y}.$$

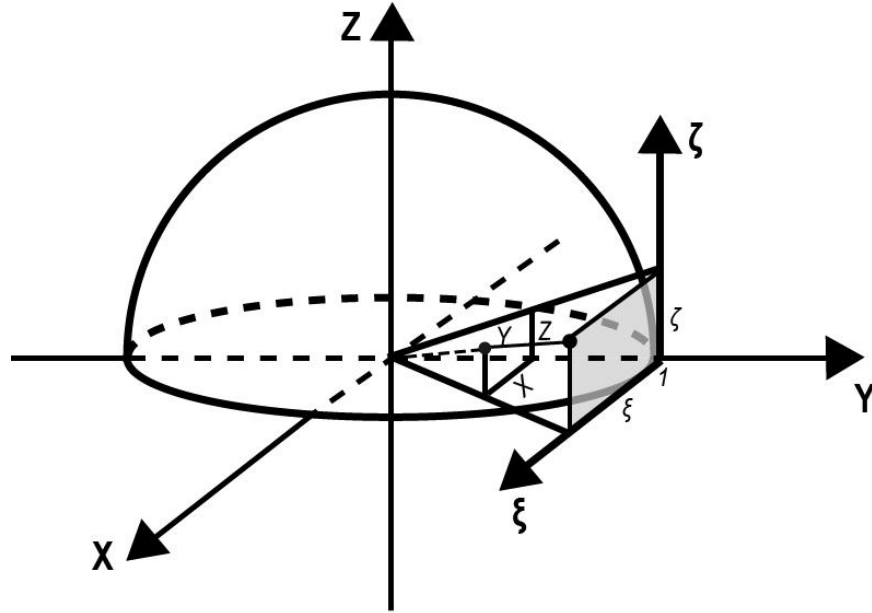


Figura 3.3: Plano tangente a la esfera de Poincaré en $Y = 1$.

Las ecuaciones diferenciales en el nuevo cambio de coordenadas se transforman como

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= \frac{\dot{X}Y - \dot{Y}X}{Y^2} \\
 &= \frac{1}{Y} \left[(Y^2 + Z^2)P^* - XYQ^* - \frac{X}{Y} (-XYP^* + (X^2 + Z^2)Q^*) \right] \\
 &= \frac{1}{Y} \left[(X^2 + Y^2 + Z^2)P^* - \left(XY + \frac{X}{Y}(1 - Y^2) \right) Q^* \right] \\
 &= \frac{1}{Y} \left(P^* - \frac{X}{Y} Q^* \right) \\
 &= \frac{1}{Y} (P^* - \xi Q^*) \\
 \\
 \dot{\zeta} &= \frac{\dot{Z}Y - \dot{Y}Z}{Y^2} \\
 &= -\frac{Z}{Y} \left[(XP^* + YQ^*) + \frac{1}{Y} (-XYP^* + (1 - Y^2)Q^*) \right] \\
 &= -\frac{Z}{Y^2} Q^* \\
 &= -\frac{1}{Y} \zeta Q^*.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Recordemos que

$$P^*(X, Y, X) = Z^m P(X/Z, Y/Z) = Y^m \zeta^m P(X/Z, Y/Z)$$

y similarmente para Q^* , por lo que cada una de las ecuaciones en (3.8) tiene un factor de Y^{m-1} , el cual puede ser eliminado reescalando el tiempo nuevamente, tomando el cambio

$$\tau^* = \int Y^{m-1} d\tau \Rightarrow \frac{d\tau}{d\tau^*} = Y^{1-m},$$

luego,

$$\frac{X}{Z} = \frac{\xi}{\zeta} \quad y \quad \frac{Y}{Z} = \frac{1}{\zeta}.$$

Por lo tanto, el nuevo sistema (renombrando) es

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{d\xi}{d\tau} \frac{d\tau}{d\tau^*} \\ &= \frac{Y^{1-m}}{Y} \left[Y^m \zeta^m P\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}\right) - \xi Y^m \zeta^m Q\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}\right) \right] \\ &= \zeta^m P\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}\right) - \xi \zeta^m Q\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}\right) \\ \dot{\zeta} &= -\zeta^{m+1} Q\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Un equilibrio con $Y < 0$ puede ser tratado con la misma definición de ξ y ζ , en este caso las ξ positivas se corresponderán con las X negativas, como la proyección es a través del origen, los equilibrios diametralmente opuestos serán topológicamente equivalentes. Finalmente, como el tiempo ha sido reescalado para eliminar el factor Y^{m-1} , cuando m es par este factor es negativo, por lo que la dirección es en reversa (ya que invierte el signo del tiempo).

Si existe un equilibrio en $Y = 0$, podemos hacer la proyección de la esfera de Poincaré al plano $X = 1$, en este caso el cambio de coordenadas es

$$\eta = \frac{Y}{X}, \quad \zeta = \frac{Z}{X},$$

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \zeta^m Q\left(\frac{1}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right) - \eta \zeta^m P\left(\frac{1}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right) \\ \dot{\zeta} &= -\zeta^{m+1} P\left(\frac{1}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Una vez que hemos analizado la dinámica de los equilibrios al infinito, en alguno de los planos, ya sea en $X = 1$ ó $Y = 1$, la dinámica global sobre la esfera de Poincaré puede ser resumida con un dibujo, mirando desde el polo norte de la esfera hacia abajo, para ver el plano (X, Y) . Esto nos da una imagen del plano completo, junto con el círculo al infinito, como se muestra en la figura 3.4.

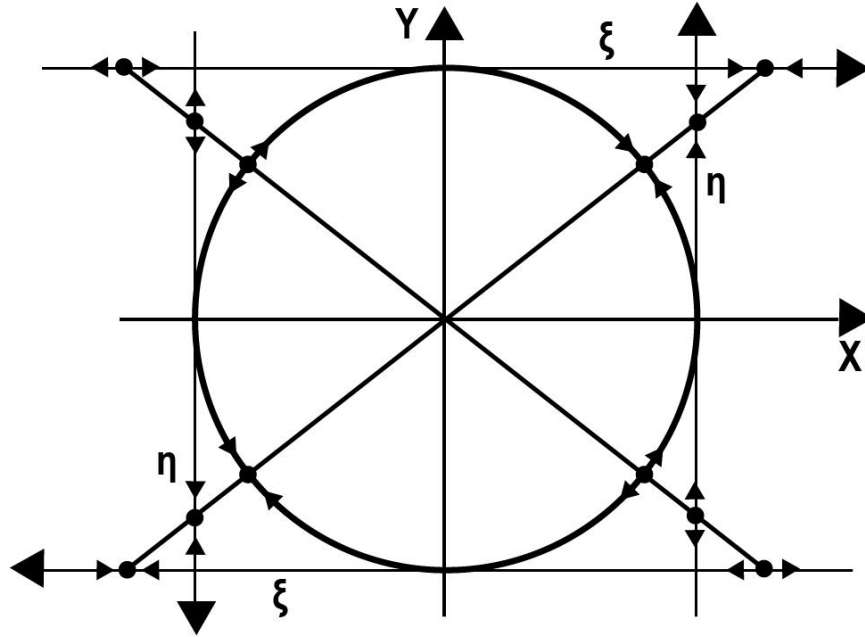


Figura 3.4: Retrato fase global visto desde el polo norte, cuando m es impar.

3.2. Ejemplos

Ejemplo 8. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy,\end{aligned}\tag{3.11}$$

cuyos puntos de equilibrio están determinados por la intersección entre las rectas $ax + by = 0$ y $cx + dy = 0$.

Para conocer los puntos al infinito tenemos la ecuación

$$\begin{aligned}XQ_1(X, Y) - YP_1(X, Y) &= 0 \\ \Leftrightarrow X(cX + dY) - Y(aX + bY) &= 0 \\ \Leftrightarrow cX^2 + (d - a)XY - bY^2 &= 0,\end{aligned}\tag{3.12}$$

las intersecciones de esta curva con el círculo unitario $X^2 + Y^2 = 1$, nos darán los equilibrios al infinito, sin embargo la expresión en general no es sencilla, por lo que mostraremos algunos casos particulares.

Tomemos $a = 1$, $d = -1$ y $b = c = 0$, entonces el sistema es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -y,\end{aligned}\tag{3.13}$$

el cual tiene al origen como único equilibrio, y claramente, éste es un punto silla, ya que $DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Analicemos ahora los puntos de equilibrio al infinito sobre la esfera de Poincaré. De (3.12), tenemos que los puntos al infinito están determinados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} -2XY &= 0 \\ X^2 + Y^2 &= 1, \end{aligned}$$

por lo que los puntos de equilibrio en el infinito son $(0, \pm 1, 0)$ y $(\pm 1, 0, 0)$.

Primero estudiaremos el equilibrio $(0, 1, 0)$, con la proyección del sistema en la esfera de Poincaré, hacia el plano $Y = 1$, dicho sistema sobre el plano es

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \zeta \left(\frac{\xi}{\zeta} \right) - \xi \zeta \left(-\frac{1}{\zeta} \right) = 2\xi \\ \dot{\zeta} &= -\zeta^2 \left(-\frac{1}{\zeta} \right) = \zeta, \end{aligned} \tag{3.14}$$

el origen (que es la proyección de $(0, 1, 0)$) es el único equilibrio del sistema y la matriz Jacobiana del sistema (3.14) evaluada en él es $D\hat{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, lo cual significa que el equilibrio en este plano es un nodo inestable, ver fig. 3.5 a), y por lo tanto, también lo será en punto $(0, 1, 0)$ sobre la esfera de Poincaré. Como el grado mayor del sistema es 1, impar, el equilibrio diametralmente opuesto $(0, -1, 0)$, tendrá el mismo comportamiento topológico, es decir, también será un nodo inestable.

Para conocer el comportamiento de los otros dos equilibrios al infinito, como $Y = 0$, ahora proyectaremos sobre el plano $X = 1$, para analizar a $(1, 0, 0)$. El sistema en este plano es

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \zeta \left(-\frac{\eta}{\zeta} \right) - \eta \zeta \left(\frac{1}{\zeta} \right) = -2\eta \\ \dot{\zeta} &= -\zeta^2 \left(\frac{1}{\zeta} \right) = -\zeta, \end{aligned} \tag{3.15}$$

cuyo equilibrio es el origen y la Jacobiana evaluada en él es $D\bar{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, por lo tanto, es un nodo estable, ver fig. 3.5 b) y dado que el grado mayor del sistema (3.13) es 1, tanto $(1, 0, 0)$ como $(-1, 0, 0)$, serán nodos estables.

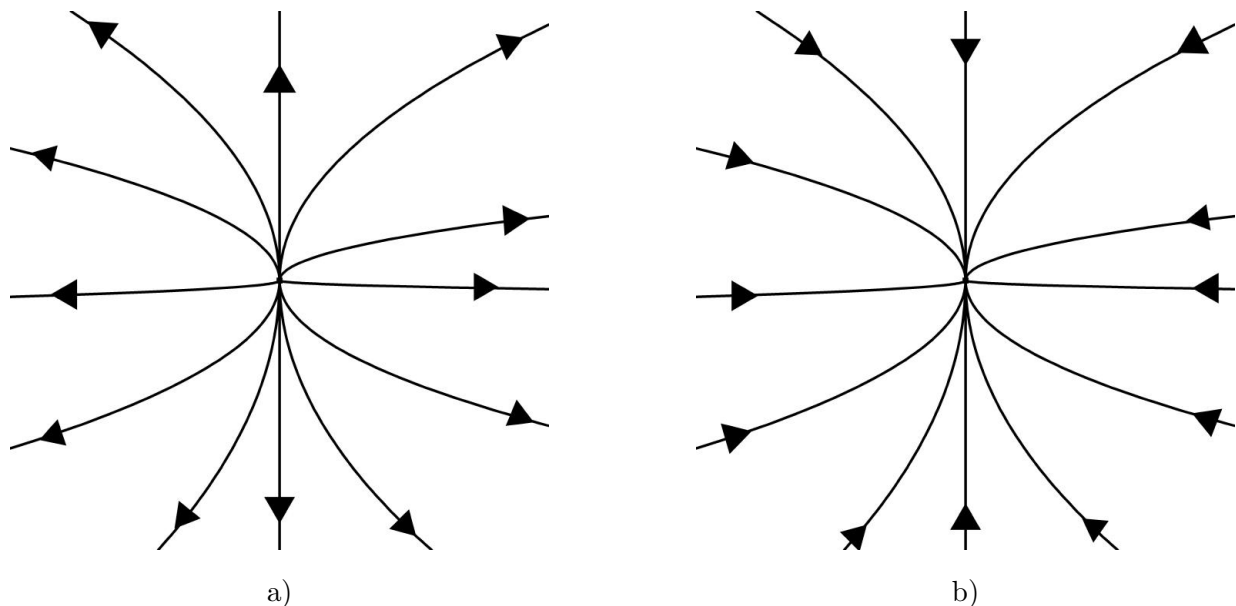


Figura 3.5: a) Proyección de $(0, 1, 0)$ sobre $Y = 1$. b) Proyección de $(1, 0, 0)$ sobre $X = 1$.

Del sistema original (3.13), es fácil ver que los ejes son las variedades invariantes de la silla, el eje x es el inestable y el y el estable, esto de forma global, por lo que los ejes conectan al origen con los equilibrios al infinito, por lo tanto el retrato fase del sistema (3.13) conteniendo puntos al infinito se ve como en la figura 3.6.

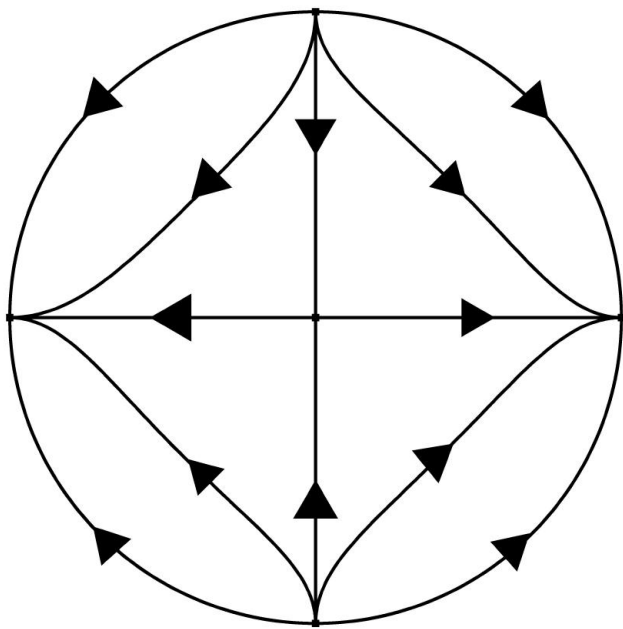


Figura 3.6: Retrato fase global del sistema, incluyendo puntos al infinito.

Ejemplo 9. Tomemos ahora las constantes $a = d = -1$ y $b = c = 0$ en el sistema (3.11) del ejemplo anterior.

Entonces nuestro sistema será

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}\tag{3.16}$$

En este caso, el origen es nuestro único equilibrio finito, cuya Jacobiana evaluada en él es:

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

por lo que el origen es un nodo estable. Más aún, todas las rectas que pasan por el origen son invariantes, ya que si tomamos un punto de la forma $\begin{pmatrix} a \\ ka \end{pmatrix}$, donde $a, k \in \mathbb{R}$, entonces obtenemos un vector sobre la misma recta, como se muestra a continuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Big|_{(a,ka)^T} = \begin{pmatrix} -a \\ -ka \end{pmatrix}.$$

Los puntos de equilibrio al infinito deberán existir cuando se cumplan simultáneamente la ecuación (3.12) y la ecuación del círculo unitario $X^2 + Y^2 = 1$, pero la ecuación

$$cX^2 + (d - a)XY - bY^2 = 0,$$

se cumple, dadas nuestras constantes, para toda X y toda Y sobre el círculo unitario, es decir, todos los puntos del círculo unitario forman un continuo de puntos de equilibrio al infinito, esto tiene sentido, pues las rectas que pasan por el origen, cubren completamente el plano.

Para conocer el comportamiento cerca del círculo al infinito hagamos primero la proyección al plano $X = 1$, para ver que sucede en una vecindad de los equilibrios con $X > 0$. El sistema proyectado es:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \zeta \left(-\frac{\eta}{\zeta} \right) - \eta \zeta \left(-\frac{1}{\zeta} \right) = 0 \\ \dot{\zeta} &= -\zeta^2 \left(-\frac{1}{\zeta} \right) = \zeta,\end{aligned}\tag{3.17}$$

las soluciones del sistema son líneas verticales, con flujo positivo si $\zeta > 0$ y negativo en caso contrario, por lo tanto, el eje $\zeta = 0$ será un continuo de equilibrios inestable, todo de acuerdo a como se esperaba. Si proyectamos sobre el plano $Y = 1$ obtenemos el mismo sistema, por lo que el punto $(0, 1, 0)$ también es inestable. Finalmente, como el grado mayor del sistema es uno, todo el semicírculo opuesto será también inestable.

El retrato fase global, con el continuo de equilibrios al infinito se muestra en la figura 3.7.

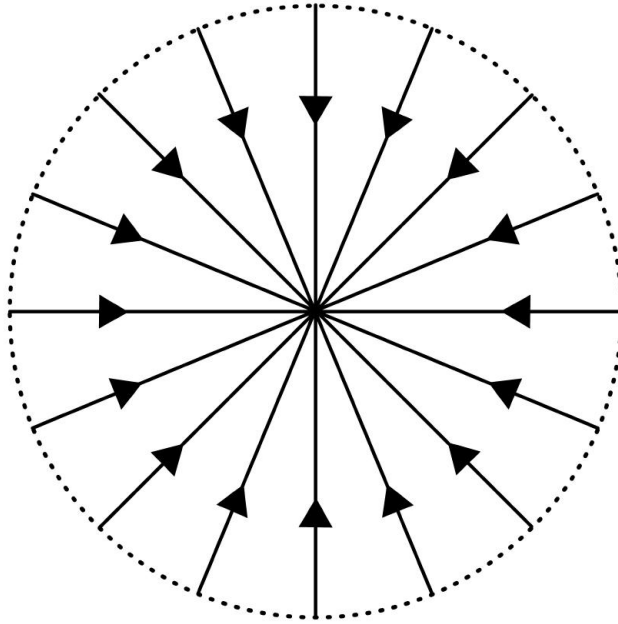


Figura 3.7: Continuo de equilibrios al infinito, ejemplo 3.16.

Ejemplo 10. *Analicemos el retrato fase global del sistema cuadrático*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} &= 5(xy - 1).\end{aligned}\tag{3.18}$$

Notemos que si $x = 0$ no tenemos equilibrios finitos del sistema, por lo que supondremos que $x \neq 0$, entonces para buscar equilibrios debemos hacer $y = 1/x$, luego

$$\begin{aligned}x^2 + (1/x)^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow w^2 - w + 1 &= 0,\end{aligned}$$

donde $w = x^2$, las soluciones de esta ecuación son $w = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, por lo que no hay soluciones reales, es decir, no tenemos puntos de equilibrios finitos del sistema (3.18).

Los puntos de equilibrio al infinito satisfacen las ecuaciones $X^2 + Y^2 = 1$ y

$$X(5XY) - Y(X^2 + Y^2) = Y(4X^2 - Y^2) = 0,$$

si $Y = 0$ obtenemos los puntos $(\pm 1, 0, 0)$ y si sustituimos $Y^2 = 4X^2$ tenemos los equilibrios $(\pm 1/\sqrt{5}, \pm 2/\sqrt{5}, 0)$, obteniendo seis equilibrios al infinito para este sistema. Ya que tenemos dos

equilibrios con $Y = 0$, emplearemos la proyección sobre el plano $X = 1$. El sistema en este plano es

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= 5\zeta^2 \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\eta}{\zeta} - 1 \right) - \eta \zeta^2 \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{\eta^2}{\zeta^2} - 1 \right) \\ &= -\eta^3 + \zeta^2(\eta - 5) + 4\eta \\ \dot{\zeta} &= -\zeta^3 \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{\eta^2}{\zeta^2} - 1 \right) \\ &= \zeta^3 - \zeta(1 + \eta^2),\end{aligned}\tag{3.19}$$

cuyos puntos de equilibrio tales que $\zeta = 0$ quedan determinados por $\eta(4 - \eta^2) = 0$, obteniendo los puntos $(0, 0)$ y $(\pm 2, 0)$. La matriz Jacobiana para el sistema (3.19) es

$$D\bar{F}(\eta, \zeta) = \begin{pmatrix} -3\eta^2 + \zeta^2 + 4 & -10\zeta \\ 2\zeta\eta & -(1 + \eta^2) + 3\zeta^2 \end{pmatrix},$$

se sigue que

$$D\bar{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D\bar{F}(\pm 2, 0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, el origen es un punto silla y los otros dos puntos son nodos estables, como se muestra en la figura 3.8.

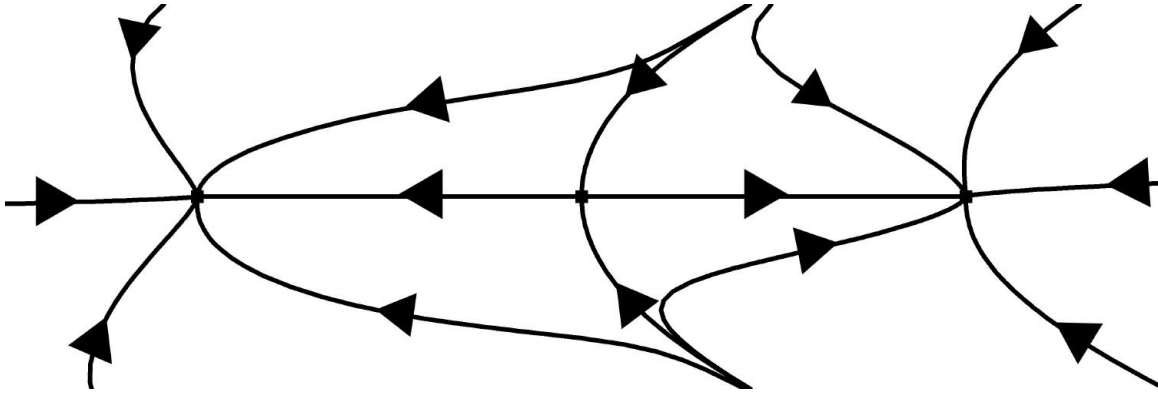


Figura 3.8: Retrato fase local en el plano $X = 1$, simulado con $-3 \leq \eta \leq 3$, $-1 \leq \zeta \leq 1$.

Como el grado mayor del sistema (3.18) es $m = 2$, el cual es par, el comportamiento de los equilibrios opuestos será en reversa. El retrato fase global del sistema se muestra en la figura 3.9.

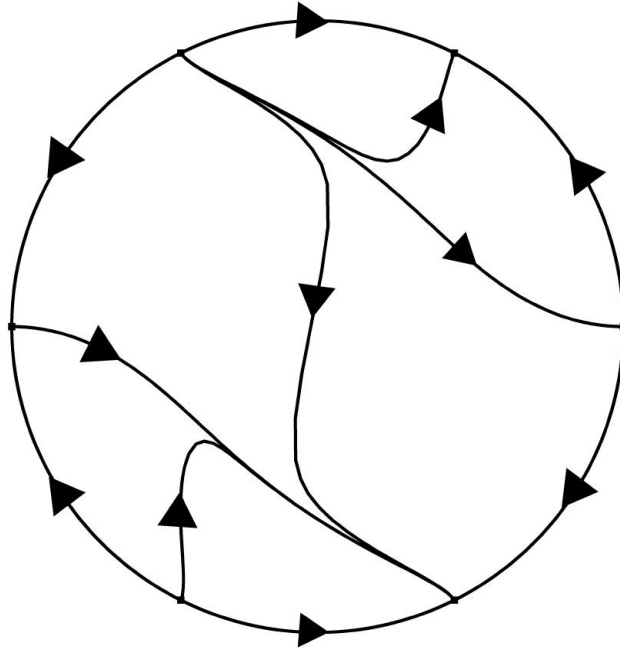


Figura 3.9: Retrato fase global, sistema 3.18.

Ejemplo 11. *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -4y + 2xy - 8 \\ \dot{y} &= 4y^2 - x^2.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Para encontrar los puntos de equilibrio finitos del sistema (3.20) hacemos $\dot{y} = 0$, entonces $x = \pm 2y$; tomemos primero $x = 2y$, sustituyendo en $\dot{x} = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}-4y + 2xy - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow -4y + 4y^2 - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (y + 1)(y - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= -1, \text{ ó } y = 2.\end{aligned}$$

Si $x = -2y$, no tenemos soluciones reales para y . Por lo que los puntos de equilibrio finitos del sistema (3.20) son $(-2, -1)$ y $(4, 2)$. La matriz Jacobiana del sistema en general es

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & -4 + 2x \\ -2x & 8y \end{pmatrix},$$

entonces,

$$DF(-2, -1) = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -8 \end{pmatrix},$$

los valores propios de esta matriz están dados por la ecuación $\lambda^2 + 10\lambda + 48 = 0$, cuyas soluciones son $\lambda_{1,2} = -5 \pm i\sqrt{23}$, por lo tanto, el equilibrio $(-2, -1)$ es un foco estable.

Luego, evaluamos en el otro equilibrio:

$$DF(4, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 16 \end{pmatrix},$$

los valores propios de esta matriz son las soluciones de la ecuación $\lambda^2 - 20\lambda + 96 = 0$, éstas son $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = 12$, ya que ambos valores propios son reales positivos, el equilibrio $(4, 2)$ es un nodo inestable. El retrato fase local con ambos equilibrios se muestra en la figura 3.10.

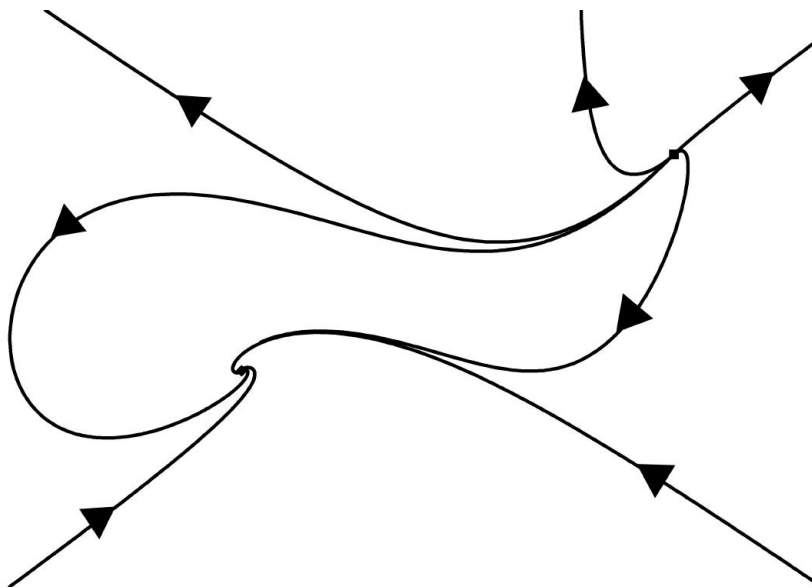


Figura 3.10: Equilibrios finitos, simulado con $-6 \leq x \leq 6$, $-4 \leq y \leq 4$.

Ahora estudiaremos los equilibrios al infinito para este sistema:

$$\begin{aligned} XQ_2(X, Y) - YP_2(X, Y) &= X(4Y^2 - X^2) - Y(2XY) \\ &= X(2Y^2 - X^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

entonces, si $X = 0$ obtenemos los equilibrios $(0, \pm 1, 0)$ y si $X^2 = 2Y^2$, de la ecuación para círculo unitario, se sigue que $3Y^2 = 1$, de donde resultan los equilibrios $(\pm\sqrt{2/3}, \pm\sqrt{1/3}, 0)$, por lo que tenemos seis equilibrios en total. Dado que todos los equilibrios tienen su coordenada $Y \neq 0$, tomaremos la proyección de la esfera de Poincaré al plano $Y = 1$, el sistema proyectado sobre este

plano es:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= \zeta^2 \left(-\frac{4}{\zeta} + 2\frac{\xi}{\zeta^2} - 8 \right) - \xi\zeta^2 \left(\frac{4}{\zeta^2} - \frac{\xi^2}{\zeta^2} \right) \\
 &= \xi^3 - 8\zeta^2 - 2\xi - 4\zeta \\
 \dot{\zeta} &= -\zeta^3 \left(\frac{4}{\zeta^2} - \frac{\xi^2}{\zeta^2} \right) \\
 &= \zeta (\xi^2 - 4),
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ya que buscamos los equilibrios tales que $\zeta = 0$, requerimos $\xi(\xi^2 - 2) = 0$ y así, obtenemos los equilibrios $(0, 0)$ y $(\pm\sqrt{2}, 0)$. Para conocer su comportamiento calculamos la matriz Jacobiana del sistema (3.21), esta es

$$D\hat{F}(\xi, \zeta) = \begin{pmatrix} 3\xi^2 - 2 & -16\zeta - 4 \\ 2\zeta\xi & \xi^2 - 4 \end{pmatrix},$$

y al evaluar en los equilibrios tenemos

$$D\hat{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad D\hat{F}(\pm\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

en consecuencia, el origen es un nodo estable y los otros dos equilibrios son puntos silla (figura 3.11).

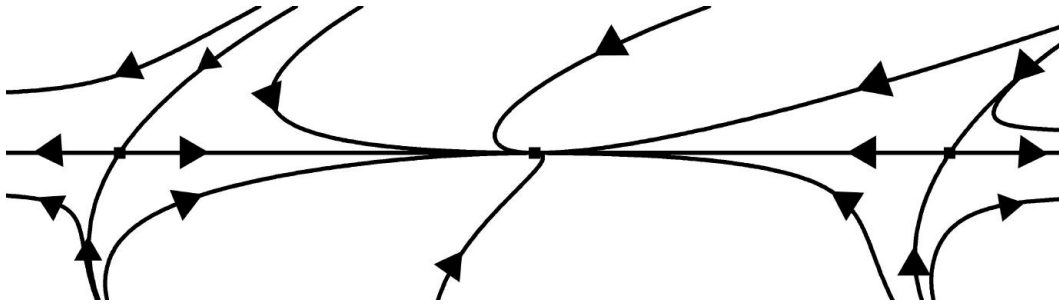


Figura 3.11: Retrato fase proyectado en $Y = 1$, con $-1.8 \leq \xi \leq 1.8$, $-0.5 \leq \zeta \leq 0.5$.

Para terminar, observemos que el grado mayor del sistema original (3.20) es el número par 2, por lo que los equilibrios diametralmente opuestos a los analizados, tendrán el mismo comportamiento topológico que su reflejado, pero en sentido opuesto.

Concluimos que el retrato fase global del sistema (3.20) es como se muestra en la siguiente figura.

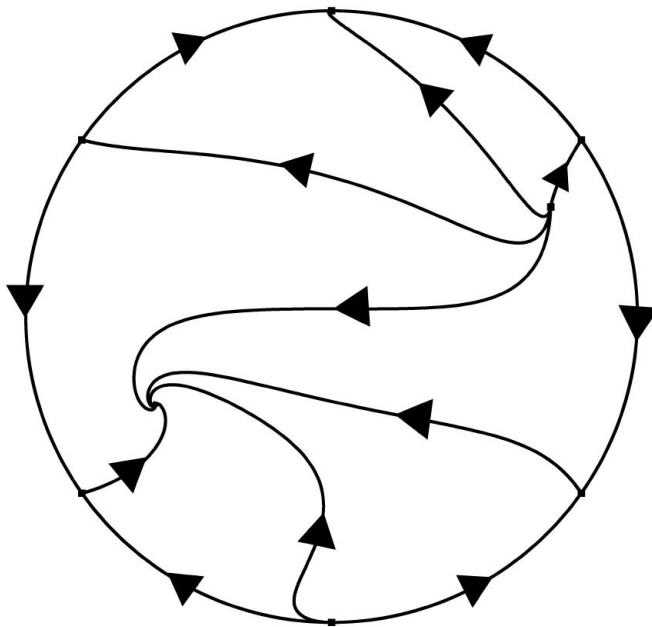


Figura 3.12: Retrato fase global del ejemplo 3.20.

En los ejemplos anteriores hemos estudiado sistemas tales que, tanto sus puntos de equilibrio finitos como los equilibrios al infinito, han resultado ser del tipo hiperbólico, sin embargo, pueden presentarse situaciones más complicadas en las que los equilibrios finitos no sean hiperbólicos, y más aún, que no lo sean los equilibrios al infinito. El siguiente ejemplo nos muestra una de estas situaciones problemáticas.

Ejemplo 12. *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x^5.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Claramente el origen es el único equilibrio finito del sistema. Si calculamos la matriz Jacobiana del sistema (3.22) obtenemos

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + 3y^2 \\ -5x^4 & 0 \end{pmatrix},$$

que evaluada en el origen es la matriz

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que el origen es un equilibrio no hiperbólico, donde ambos valores propios de la matriz son

cero. Con el fin de estudiar al origen calcularemos la velocidad angular:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \frac{1}{r^2} (x\dot{y} - y\dot{x}) \\
 &= \frac{1}{r^2} (-x^6 - y^2(x^2 + y^2)) \\
 &= -\frac{1}{r^2} (r^6 \cos^6 \theta + r^4 \sin^2 \theta) \\
 &= -(r^4 \cos^6 \theta + r^4 \sin^2 \theta) \\
 &< 0,
 \end{aligned}$$

se sigue que las soluciones del sistema (3.22) giran alrededor del origen en el sentido de las manecillas del reloj.

Ahora, si hacemos la transformación $(t, x, y) \mapsto (-t, -x, y)$, con el objetivo de saber si las soluciones son simétricas con respecto al eje y , éstas serán simétricas pero en sentido contrario, si el sistema cumple que $\dot{x}(t) = \dot{x}(-t)$, y $\dot{y}(t) = -\dot{y}(-t)$. Haciendo la transformación tenemos

$$\begin{aligned}
 P(-x, y) &= y((-x)^2 + y^2) = P(x, y) \\
 Q(-x, y) &= -(-x)^5 = -Q(x, y),
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

por lo que el sistema (3.22) es simétrico con respecto al eje y . Conociendo lo anterior, y sabiendo que las soluciones siempre giran alrededor del origen, tenemos entonces que las soluciones que crucen el eje negativo y cruzarán también el eje positivo, y como el sistema es simétrico con respecto al eje y no les queda más que ser órbitas cerradas, concluyendo que el origen es un centro del sistema. En el siguiente capítulo estudiaremos estas transformaciones llamadas “reversores” con un poco más de detalle.

Ahora, nos dispondremos a buscar puntos de equilibrio en el infinito:

$$XQ_5(X, Y) - YP_5(X, Y) = -X^6 = 0,$$

por lo que los equilibrios al infinito son los puntos $(0, \pm 1, 0)$. Dado que $X = 0$, usaremos la proyección sobre el plano $Y = 1$. El sistema en este plano es

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= \zeta^5 \left[\frac{1}{\zeta} \left(\frac{\xi^2}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^2} \right) \right] - \xi \zeta^5 \left(-\frac{\xi^5}{\zeta^5} \right) = \zeta^2(\xi^2 + 1) + \xi^6 \\
 \dot{\zeta} &= -\zeta^6 \left(-\frac{\xi^5}{\zeta^5} \right) = \zeta \xi^5,
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

cuyo único equilibrio es el origen. La matriz Jacobiana del sistema (3.24) en general es

$$D\hat{F}(\xi, \zeta) = \begin{pmatrix} 6\xi^5 + 2\zeta^2\xi & 2\zeta(\xi^2 + 1) \\ 5\zeta\xi^4 & \xi^5 \end{pmatrix},$$

y al evaluar en el origen obtenemos

$$D\hat{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nuevamente la matriz cero, por lo que el equilibrio al infinito es también del tipo no hiperbólico. Sin embargo, por nuestro análisis anterior sabemos que el origen es centro global del sistema 3.22, pues todo el análisis se sigue en general, por lo que tendremos una infinidad de órbitas cerradas, y por lo tanto no habrá curvas que entren a los equilibrios al infinito fuera del círculo $Z = 0$. Sobre el círculo, sabemos que la velocidad angular está determinada por

$$\dot{\theta}^* = \frac{1}{r^2}(XQ_5(X, Y) - YP_5(X, Y)) = -\frac{1}{r^2}X^6 < 0,$$

por lo que el flujo sobre el círculo unitario es en el sentido de las manecillas del reloj (como era de esperarse). Finalmente, el retrato fase global del sistema (3.22) se muestra en la figura 3.13.

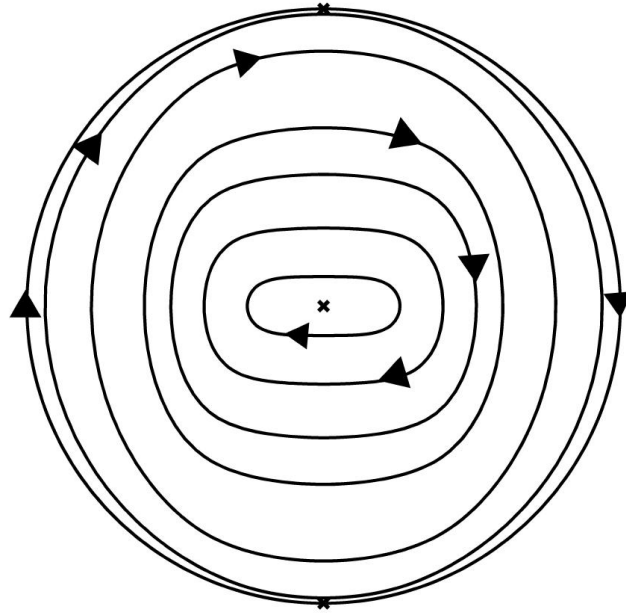


Figura 3.13: Retrato fase global del ejemplo 3.22.

Notemos que para la figura 3.13 hemos utilizado la información proporcionada por el método propuesto en esta tesis, así como la que se obtiene de utilizar las ecuaciones originales (ver (3.23)).

Capítulo 4

Sistemas con parte lineal cero

El objetivo de este capítulo es estudiar sistemas dinámicos en el plano con parte lineal cero, pues la información que tenemos acerca de ellos es escasa, ya que su estudio es un problema abierto. En la primera parte de este capítulo, estudiaremos un caso que ya está completamente trabajado en la literatura, el caso en el que tenemos dos polinomios homogéneos del mismo grado, veremos una forma sencilla de distinguir entre focos, centros y nodos no-hiperbólicos. Mientras que en la segunda parte, haremos un análisis para el caso en el que tenemos polinomios homogéneos de grado distinto, realizaremos el análisis haciendo uso de las técnicas de blow-up y haremos nuestra contribución a este problema abierto estableciendo condiciones necesarias para distinguir entre equilibrios del tipo monodrómico y nodos no hiperbólicos. En el caso de los nodos no-hiperbólicos presentamos un Teorema que nos permitirá calcular las curvas características para el origen y en el caso de los equilibrios monodrómicos presentaremos un caso bajo el cual podemos afirmar que el equilibrio es un centro. Finalmente, estudiaremos cómo son los puntos al infinito para este tipo de sistemas con el fin de conocer más sobre su dinámica global.

4.1. P y Q: Polinomios homogéneos del mismo grado

Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Como un caso simple, supondremos que P y Q son polinomios homogéneos de grado n en sus argumentos, con $n \geq 2$, esto es $P(ax, ay) = a^n P(x, y)$ y similarmente para Q . El análisis de este caso puede ser encontrado en [Meiss, 2007]. Claramente, el origen es un equilibrio del sistema y la matriz Jacobiana del sistema (4.1) es

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La herramienta principal para estudiar el comportamiento en una vecindad del equilibrio es el uso de una simple transformación a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{cases}\tag{4.2}$$

Las derivadas respecto al tiempo de (r, θ) se encuentran usando la regla de la cadena en (4.2):

$$\begin{aligned} 2r\dot{r} &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \Rightarrow \sec^2 \theta \dot{\theta} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta} [x\dot{y} - \dot{x}y], \end{aligned}$$

por lo que el sistema(4.1) bajo el cambio de coordenadas es

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) \\ \dot{\theta} = \frac{1}{r^2}(x\dot{y} - y\dot{x}), \end{cases} \quad (4.3)$$

con $r \neq 0$. Sustituyendo (4.2) y (4.3) en el sistema (4.1) y eliminando x e y de r y θ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{r} [xP(r \cos \theta, r \sin \theta) + yQ(r \cos \theta, r \sin \theta)] \\ &= P(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r^2} [xQ(r \cos \theta, r \sin \theta) - yP(r \cos \theta, r \sin \theta)] \\ &= \frac{1}{r} [Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - P(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dividiendo la ecuación \dot{r} por $\dot{\theta}$ tenemos la ecuación para las curvas del retrato fase

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{P(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta}{Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - P(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta}. \quad (4.5)$$

$$(4.6)$$

En este caso, $P(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^n P(\cos \theta, \sin \theta)$, entonces de (4.5) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= r \frac{r^n [P(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta]}{r^n [Q(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta]} \\ &= r \frac{P(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta}{Q(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta} \end{aligned}$$

y separando variables tenemos,

$$\frac{dr}{r} = \frac{P(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta}{Q(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta} d\theta = g(\theta) d\theta,$$

con

$$g(\theta) = \frac{P(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta}{Q(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta}.$$

Integrando ambos lados de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} &= \int_{\theta_0}^{\theta} g(\phi) d\phi \\ \Rightarrow \ln r - \ln r_0 &= \int_{\theta_0}^{\theta} g(\phi) d\phi \\ \Rightarrow r(\theta, (r_0, \theta_0)) &= r_0 e^{\int_{\theta_0}^{\theta} g(\phi) d\phi}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si el equilibrio fuera asintóticamente estable, entonces para todo (r_0, θ_0) , $r(t, r_0) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para que esto ocurra, la integral de la función g debe converger a menos infinito. Note que $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$, entonces una cantidad importante a considerar es

$$G = \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta. \quad (4.8)$$

Estudiaremos tres casos: $G = 0$, $G \neq 0$ y que G no exista, es decir, que la integral no converja.

Teorema 1. *Sea el origen un punto de equilibrio aislado del sistema (4.1). Si $G = 0$ entonces, localmente, el origen es un **centro topológico**.*

Demostración:

$r(\theta) = r_0 e^{\int_{\theta_0}^{\theta} g(\phi) d\phi} \Rightarrow r(\theta_0 + 2\pi) = r_0 e^{\int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} g(\phi) d\phi}$. Por otro lado tenemos que

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} g(\phi) d\phi = \int_{\theta_0}^{2\pi} g(\phi) d\phi + \int_{2\pi}^{\theta_0 + 2\pi} g(\phi) d\phi.$$

Hacemos el cambio de variable $\omega = \phi - 2\pi$ y notemos que $g(\omega) = g(\phi)$, por lo que

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} g(\phi) d\phi = \int_{\theta_0}^{2\pi} g(\phi) d\phi + \int_0^{\theta_0} g(\omega) d\omega = \int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi = G = 0.$$

Por lo tanto,

$$r(\theta_0 + 2\pi) = r_0 e^{\int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} g(\phi) d\phi} = r_0 e^0 = r_0 = r(\theta_0)$$

■

Teorema 2. *Sea el origen un punto de equilibrio aislado del sistema (4.1). Si G existe y es distinta de cero entonces, localmente, el origen es un **foco no-hiperbólico**.*

Demostración:

Supongamos que $0 < \omega < \theta_0 < 2\pi$, como $r(\omega) = r_0 e^{\int_{\theta_0}^{\omega} g(\phi) d\phi}$, tenemos que

$$\begin{aligned} r(\omega + 2\pi) &= r_0 e^{\int_{\theta_0}^{\omega + 2\pi} g(\phi) d\phi} \\ &= r_0 e^{\int_{2\pi}^{\omega + 2\pi} g(\phi) d\phi + \int_{\theta_0}^{2\pi} g(\phi) d\phi} \\ &= r_0 e^{\int_0^{\omega} g(\phi) d\phi + \int_{\theta_0}^{2\pi} g(\phi) d\phi} \\ &= r_0 e^{-\int_{\omega}^{\theta_0} g(\phi) d\phi} e^{\int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi} \\ &= r(\omega) e^G \end{aligned}$$

■

Si $G > 0$, la curva forma una espiral hacia afuera (creciendo), como se muestra en la figura 4.1 b). En caso contrario, forma una espiral hacia adentro (decreciendo) como se muestra en la figura 4.1 a).

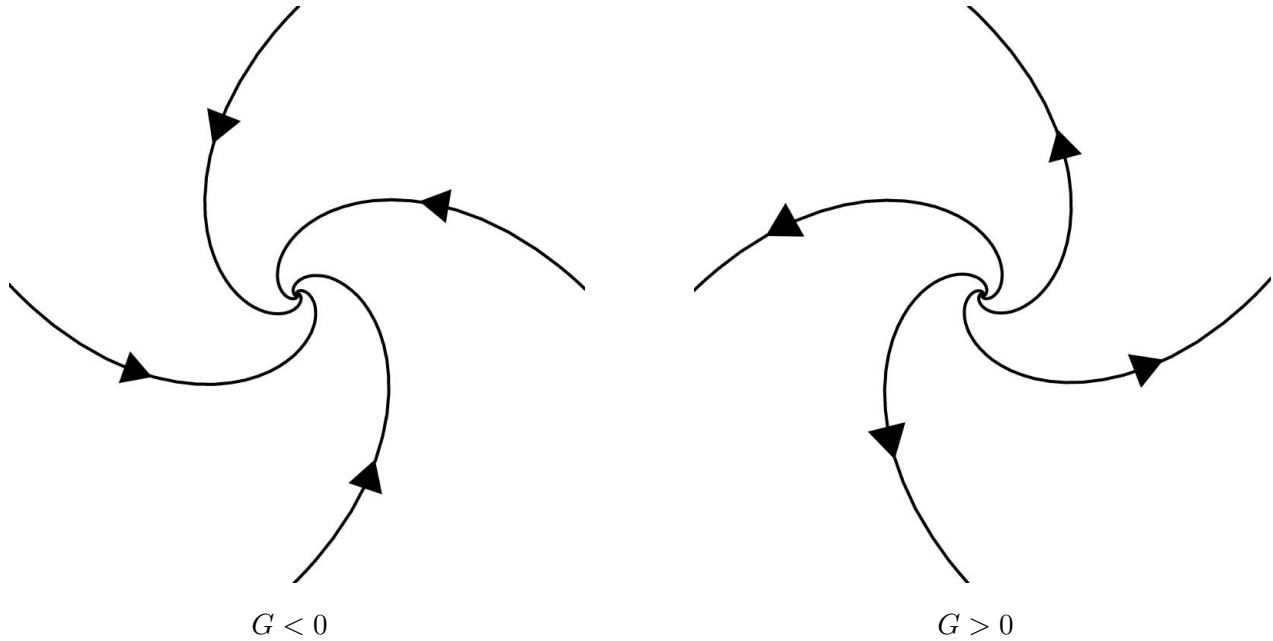


Figura 4.1: Foco no-hiperbólicos.

Antes de estudiar el caso en el que G no existe, presentaremos las siguientes definiciones.

Definición 1. Sea p un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$. Una **curva característica** $\gamma(t)$ en p , es una órbita tendiendo a p en tiempo positivo (o negativo), con una pendiente bien definida, es decir, $\gamma(t) \rightarrow p$ cuando $t \rightarrow \infty$ (ó $t \rightarrow -\infty$) y el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t) - p}{\|\gamma(t) - p\|},$$

(respectivamente $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\gamma(t) - p}{\|\gamma(t) - p\|}$) existe.

Definición 2. Un punto de equilibrio p es llamado **monodrómico** si no tiene curvas características.

En los casos anteriores, en los que G existe, los equilibrios son del tipo monodrómico. Cuando existen curvas características se definen los siguientes:

Definición 3.

- a) **Sector hiperbólico:** acotado por una curva característica convergente y una divergente, en el sector las órbitas divergen alejándose del equilibrio.
- b) **Sector parabólico:** se encuentra acotado por dos curvas características, ambas convergen al equilibrio o ambas divergen, las curvas en el sector convergen en tiempo positivo ó negativo.

c) **Sector elíptico:** acotado por una curva convergente y una divergente, las curvas en el sector convergen al equilibrio p en tiempo positivo y negativo.

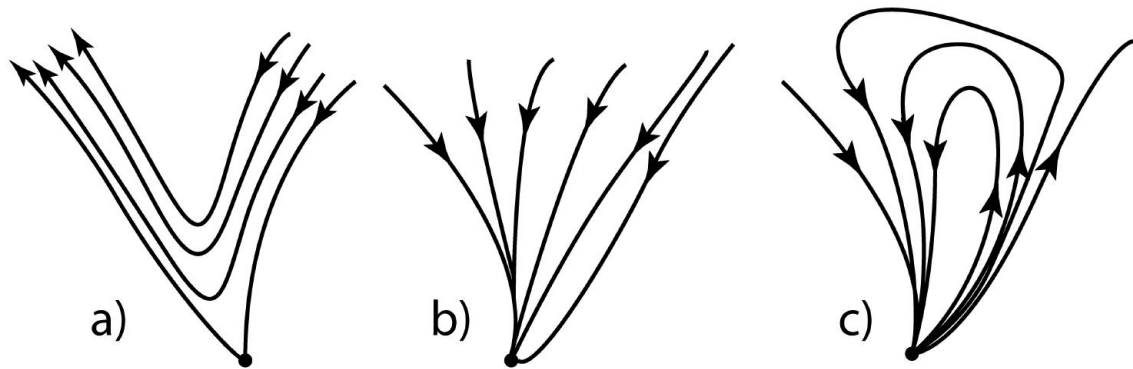


Figura 4.2: Sectores: a) hiperbólico, b) parabólico, c) elíptico.

Para decidir si un sector es hiperbólico o elíptico es necesario conocer como es la velocidad angular para conocer como se mueven las trayectorias en el sector, para la figura 4.2 se consideró $\dot{\theta} > 0$.

Definición 4. Un **nodo no hiperbólico** es un equilibrio cuya vecindad esta conformada por sectores.

Ejemplos de nodos no hiperbólicos, son los equilibrios tipo silla y los tipo cúspide.

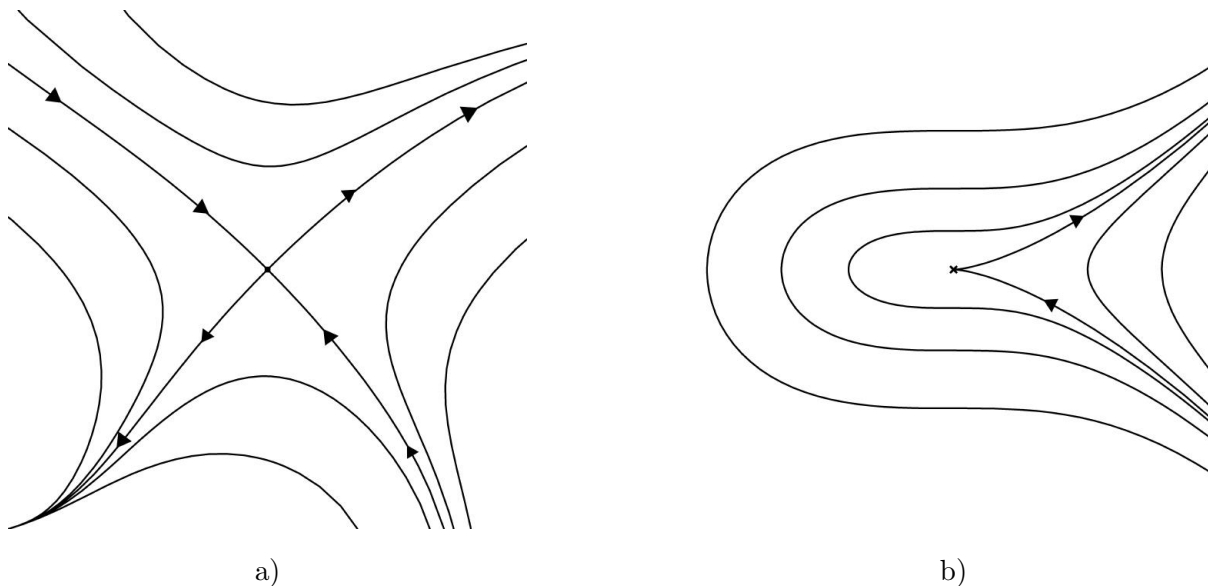


Figura 4.3: Ejemplos de nodos no-hiperbólicos: a) Silla y b) Cúspide.

Teorema 3. *Sea el origen un punto de equilibrio aislado del sistema (4.1). Si G no esta definida, el origen es un **nodo no-hiperbólico**.*

Demostración:

Si G no existe, entonces g tiene una singularidad no integrable en algún punto θ_c donde el denominador es igual a cero.

$$D(\theta_c) = Q(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \cos \theta_c - P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \sin \theta_c = 0,$$

esto es $\dot{\theta} = 0$. En este caso, la integral en (4.7) no está acotada cuando $\theta \rightarrow \theta_c$. Este ángulo define una dirección asintótica de aproximación al origen cuando $t \rightarrow \pm\infty$ ($t \rightarrow -\infty$ si es inestable y $t \rightarrow \infty$ si es estable), es decir, definirá una curva característica. ■

Lema 1. *Si θ_c es tal que $D(\theta_c) = 0$ entonces $D(\theta_c + \pi) = 0$.*

Demostración:

Dado que $\cos(\theta_c + \pi) = -\cos \theta_c$ y $\sin(\theta_c + \pi) = -\sin \theta_c$, y que estamos suponiendo que P y Q son homogéneos, tenemos

$$Q(-\cos \theta_c, -\sin \theta_c) = (-1)^n Q(\cos \theta_c, \sin \theta_c),$$

análogamente para P . Entonces,

$$\begin{aligned} D(\theta_c + \pi) &= Q(\cos(\theta_c + \pi), \sin(\theta_c + \pi)) \cos(\theta_c + \pi) \\ &\quad - P(\cos(\theta_c + \pi), \sin(\theta_c + \pi)) \sin(\theta_c + \pi) \\ &= Q(-\cos \theta_c, -\sin \theta_c)(-\cos \theta_c) - P(-\cos \theta_c, -\sin \theta_c)(-\sin \theta_c) \\ &= (-1)^{n+1} Q(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \cos \theta_c - (-1)^{n+1} P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \sin \theta_c \\ &= (-1)^{n+1} [Q(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \cos \theta_c - P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \sin \theta_c] \\ &= (-1)^{n+1} D(\theta_c) \end{aligned}$$

Así que, si existe una dirección asintótica de aproximación al origen, entonces existen dos direcciones, en una línea recta que cruza por el origen con pendiente $\tan \theta_c$. La velocidad en r sobre una dirección asintótica θ_c queda determinada por

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r^n [P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \cos \theta_c + Q(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \sin \theta_c] \\ &= r^n \left[P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \cos \theta_c + \frac{P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \sin \theta_c}{\cos \theta_c} \sin \theta_c \right] \\ &= r^n \left[\frac{P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \cos^2 \theta_c + P(\cos \theta_c, \sin \theta_c) \sin^2 \theta_c}{\cos \theta_c} \right] \\ \Rightarrow \frac{dr}{dt} &= \frac{r^n P(\cos \theta_c, \sin \theta_c)}{\cos \theta_c}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde $D(\theta_c) = 0$ fue utilizado para eliminar Q . En consecuencia, r crece o decrece asintóticamente dependiendo del signo de (4.9), implicando que el rayo $\theta = \theta_c$ es una dirección asintóticamente estable o inestable. Note que $\text{sgn}\left(\frac{dr}{dt}\right)$ para $\theta_c + \pi$ es $(-1)^{n+1}$ el de θ_c . Entonces cuando P y Q tienen un grado par en r , un signo nos da aproximación y el otro divergencia, pero si tiene grado impar tienen el mismo comportamiento.

4.1.1. Ejemplos

Procederemos a ver algunos ejemplos donde se muestra los distintos casos para G .

Ejemplo 13. *Considere el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^2y - y^3 \\ \dot{y} &= x^3 + xy^2.\end{aligned}\tag{4.10}$$

En coordenadas polares, usando (4.3), el sistema (4.10) se transforma en

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{1}{r} (-x^3y - x^3 + yx^3 + xy^3) \\ &= 0 \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{r^2} (x^4 + x^2y^2 + x^2y^2 + y^4) \\ &= \frac{1}{r^2} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \\ &= \frac{1}{r^2} (x^2 + y^2)^2 \\ &= \frac{(r^2)^2}{r^2},\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0 \\ \dot{\theta} &= r^2,\end{aligned}$$

por lo que tenemos que

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{0}{r^2} \Rightarrow \frac{dr}{r} = 0 \, d\theta,$$

de donde se tiene

$$g(\theta) \equiv 0 \Rightarrow G = \int_0^{2\pi} 0 \, d\theta = 0.$$

En consecuencia, el origen es un centro topológico; además, toda órbita periódica fuera del origen tiene un periodo $T = 2\pi/r^2$, lo cual se obtiene de $\dot{\theta}$. La figura 4.4 nos muestra el retrato fase del sistema (4.10).

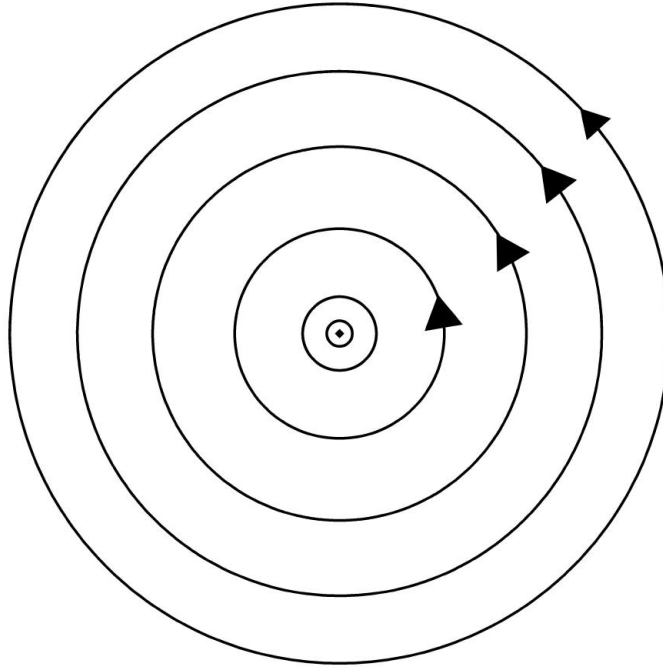


Figura 4.4: Retrato fase del sistema (4.10), simulado con $-0.5 \leq x, y \leq 0.5$.

Ejemplo 14. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(x^2 + y^2)(x + y) \\ \dot{y} &= (x^2 + y^2)(x - y).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Observe que

$$\begin{aligned}r\dot{r} &= -x(x^2 + y^2)(x + y) + y(x^2 + y^2)(x - y) \\ &= (x^2 + y^2)(-x^2 - xy + xy - y^2) \\ &= -r^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r^2\dot{\theta} &= x(x^2 + y^2)(x - y) + y(x^2 + y^2)(x + y) \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - xy + xy - y^2) \\ &= r^4,\end{aligned}$$

por lo que el sistema en coordenadas polares se transforma en

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^3 \\ \dot{\theta} = r^2 \end{cases},$$

luego, $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^3}{r^2} = -r$ y separando variables obtenemos,

$$\frac{dr}{r} = -1d\theta \Rightarrow g(\theta) \equiv -1.$$

Por lo que $G = \int_0^{2\pi} g(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} (-1) d\phi = -2\pi$. Por lo tanto, el origen es un foco no-hiperbólico, estable ya que $G < 0$. En este caso, todas las trayectorias giran en espiral alrededor del origen infinitas veces cuando $t \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow 0$. La figura 4.5 nos muestra el retrato fase para este ejemplo.

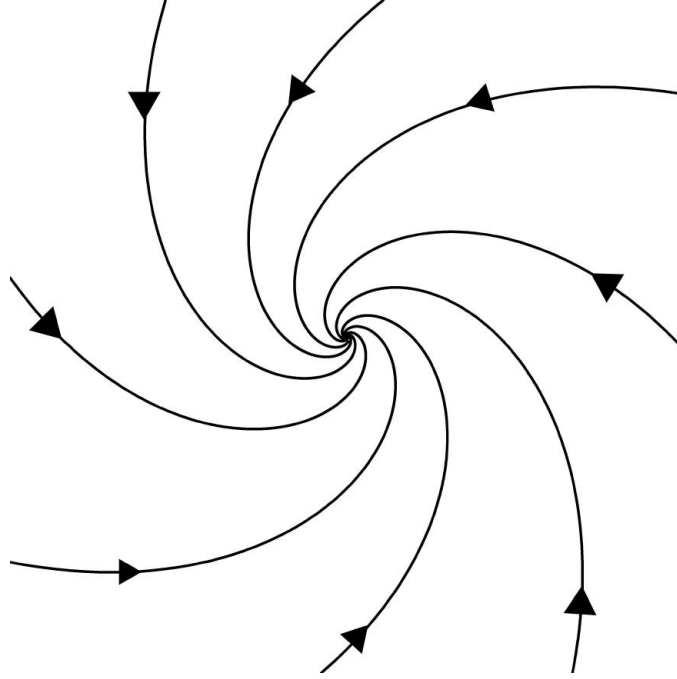


Figura 4.5: Retrato fase del sistema (4.11), simulado con $-0.5 \leq x, y \leq 0.5$.

Ejemplo 15. Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^2 - x^2 \\ \dot{y} &= -2xy.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Aplicando la transformación a coordenadas polares a este sistema tenemos

$$\begin{aligned}r\dot{r} &= xy^2 - x^3 - 2xy^2 = -xy^2 - x^3 = -x(x^2 + y^2) = -r^3 \cos \theta \\ \Rightarrow \dot{r} &= -r^2 \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r^2\dot{\theta} &= -2x^2y - y^3 + yx^2 = -y(x^2 + y^2) = -r^3 \sin \theta \\ \Rightarrow \dot{\theta} &= -r \sin \theta,\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-r^2 \cos \theta}{-r \sin \theta} = r \cot \theta \Rightarrow \frac{dr}{r} = \cot \theta d\theta$$

$$\Rightarrow g(\theta) = \cot \theta.$$

Lo cual implica que $g(\theta) = \cot(\theta)$ tiene una singularidad en $\theta = 0$ y π . Por lo tanto, toda trayectoria que se aproxime al origen lo debe de hacer a lo largo del eje x y el origen es un nodo no-hiperbólico. Note que $\dot{r} < 0$ en $\theta = 0$ y $\dot{r} > 0$ en $\theta = \pi$. Entonces el eje x positivo es estable y el eje x negativo inestable, lo cual es fácil de ver si restringimos el sistema a $y = 0$, entonces $\dot{x} = -x^2$ por lo que el origen es semiestable. Notemos además que $\dot{\theta} = -r \sin \theta < 0$ para $\theta \in (0, \pi)$, por lo que el flujo en el semiplano superior es en el sentido de las manecillas del reloj, en consecuencia, éste es un sector elíptico. Análogamente, $\dot{\theta} > 0$ si $\theta \in (\pi, 2\pi)$, obteniendo nuevamente un sector elíptico en el semiplano inferior. El retrato fase del sistema (4.12) se observa en la figura 4.6.

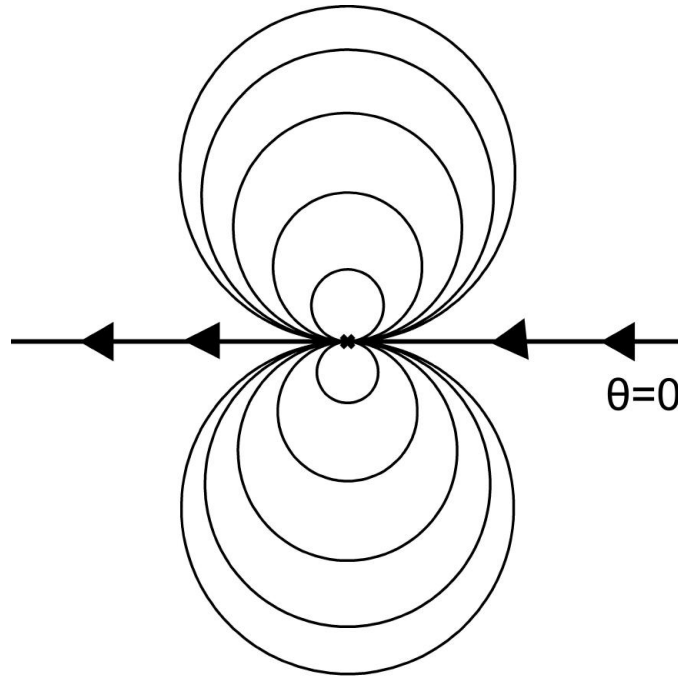


Figura 4.6: Retrato fase del sistema (4.12), simulado con $-0.5 \leq x, y \leq 0.5$.

Ejemplo 16. *Estudiamos el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^2x - x^2y \\ \dot{y} &= x^3 + y^3.\end{aligned}\tag{4.13}$$

En coordenadas polares es

$$\begin{aligned}r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} &= y^2x^2 - x^3y + yx^3 + y^4 = r^4 \sin^2(\theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^4 \sin^2 \theta \\ r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x} &= x^4 + xy^3 - y^3x + x^2y^2 = r^4 \cos^2(\theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^4 \cos^2 \theta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = r^3 \sin^2 \theta \\ \dot{\theta} = r^2 \cos^2 \theta, \end{cases}$$

entonces se sigue que

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^3 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta} = r \tan^2 \theta \Rightarrow \frac{dr}{r} = \tan^2 \theta d\theta.$$

Por lo tanto, $g(\theta) = \tan^2 \theta$, cuyas singularidades son $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$. En ambos casos, $\dot{r} > 0$ cuando $r \rightarrow 0$. En consecuencia, los sectores definidos por $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ son ambos parabólicos. Este retrato fase es mostrado en la figura 4.7.

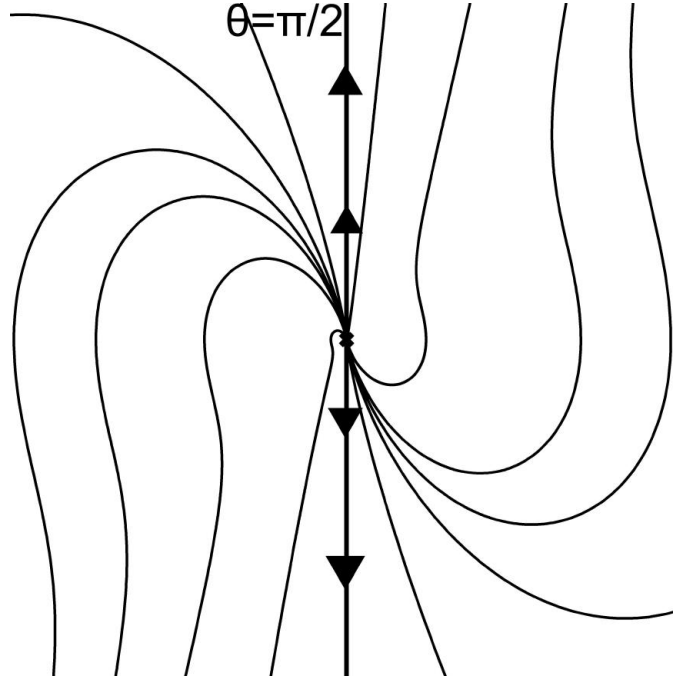


Figura 4.7: Retrato fase del sistema (4.13), simulado con $-0.5 \leq x, y \leq 0.5$.

Ejemplo 17. Analicemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2(y - x) \\ \dot{y} = y^2(y - 2x). \end{cases} \quad (4.14)$$

Pasando a coordenadas polares se obtiene

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x^3(y - x) + y^3(y - 2x) = r^4 [\cos^3 \theta \sin \theta - \cos^4 \theta + \sin^4 \theta - 2 \cos \theta \sin^3 \theta] \\ &= r^4 [\sin \theta \cos \theta [\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta] + [\sin^2 \theta - \cos^2 \theta]] \\ &= r^4 \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \left[-\frac{1}{2} \sin^2 \theta - \frac{3}{2} \sin^2 \theta + \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right] - \cos(2\theta) \right] \\ &= r^4 \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos(2\theta) \right] - \cos(2\theta) \right] \\ \Rightarrow \dot{r} &= \frac{r^3}{4} [(3 \sin(2\theta) - 4) \cos(2\theta) - \sin(2\theta)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r^2 \dot{\theta} &= xy^2(y - 2x) - yx^2(y - x) = r^4 [\cos \theta \sin^3 \theta - 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin \theta \cos^3 \theta] \\
&= 2r^4 \sin \theta \cos \theta \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta - \frac{3}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right] \\
&= r^4 \sin(2\theta) \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin \theta \cos \theta \right] \\
\Rightarrow \dot{\theta} &= \frac{r^2}{4} \sin(2\theta) [2 - 3 \sin(2\theta)]
\end{aligned}$$

entonces $\dot{\theta} = 0$ para $\theta = \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $\theta^* = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \approx 20.9^\circ$ y $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta^* \approx 69.1^\circ$. A lo largo del eje x y, en θ^* y $\theta^* + \pi$, $\dot{r} < 0$; mientras que a lo largo del eje y y en $\frac{\pi}{2} - \theta^*$, $\dot{r} > 0$. El sector $(0, \theta^*)$ es parabólico, al igual que su opuesto $(\pi, \pi + \theta^*)$, ya que ambas curvas características son convergentes. El sector $(\theta^*, \frac{\pi}{2} - \theta^*)$ es elíptico ya que $\dot{\theta} < 0$ en el sector. Luego, tanto el sector $(\frac{\pi}{2} - \theta^*, \frac{\pi}{2})$ como el $(\frac{3\pi}{2} - \theta^*, \frac{3\pi}{2})$ son parabólicos, pues sus curvas características limitantes son ambas inestables, y finalmente, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ es hiperbólico ya que en este sector $\dot{\theta} < 0$. El análisis para el resto de los sectores se realiza de forma semejante. Esto nos da la configuración mostrada en la figura 4.8.

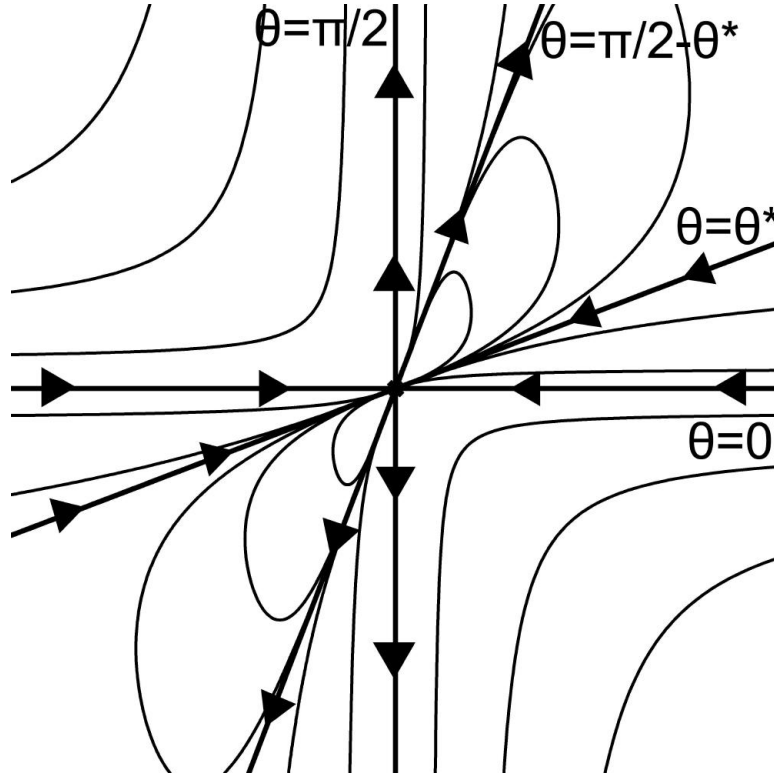


Figura 4.8: Retrato fase del sistema (4.14), simulado con $-0.5 \leq x, y \leq 0.5$.

4.2. P y Q: Polinomios homogéneos de grado distinto

Consideremos el siguiente sistema con el origen como equilibrio aislado. Supongamos que P y Q son polinomios homogéneos de grado n y m respectivamente, con $2 \leq n < m$, es decir,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) = a_s x^{n-s} y^s + a_{s+1} x^{n-s-1} y^{s+1} + \dots + a_n y^n \\ \dot{y} &= Q(x, y) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + b_2 x^{m-2} y^2 + \dots + b_m y^m\end{aligned}\quad (4.15)$$

con $a_s \neq 0$, es decir, a_s es el primer coeficiente distinto de cero.

Notemos que el origen es un equilibrio no hiperbólico del sistema, por lo que se presentarán algunos teoremas que nos permitirán determinar su comportamiento local, estableciendo las condiciones para la existencia de nodos no hiperbólicos o puntos monodrómicos.

El caso en el que $n > m$ puede ser analizado mediante una rotación del sistema y todo el análisis se sigue de la misma forma.

Con el fin de estudiar el comportamiento en el origen, comenzaremos con el caso más sencillo, $s = 0$, mediante la búsqueda de curvas analíticas, y posteriormente haremos uso de las técnicas de blow up direccionales para completar el estudio. Ambos análisis se describen en las siguientes secciones.

4.2.1. Aproximación de curvas analíticas para el caso $s = 0$

Realizaremos un análisis con la finalidad de encontrar curvas características analíticas del sistema, cuando $s = 0$, como se muestra a continuación.

Primero proponemos una curva en serie de Taylor tal que $y = h(x)$ y $h(0) = 0$ como sigue

$$y = h(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots = xg(x)$$

donde

$$g(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots$$

Si $y = h(x)$ es solución de (4.15), entonces satisface la ecuación homológica

$$\dot{y} \equiv h'(x)\dot{x},$$

luego,

$$\begin{aligned}\dot{y} - h'(x)\dot{x} &= 0 \\ Q(x, h(x)) - h'(x)P(x, h(x)) &= 0 \\ x^m Q(1, g(x)) - h'(x)x^n P(1, g(x)) &= 0 \\ x^n [x^{m-n} Q(1, g(x)) - h'(x)P(1, g(x))] &= 0 \\ x^k Q(1, g(x)) - h'(x)P(1, g(x)) &= 0,\end{aligned}\quad (4.16)$$

donde $k = m - n$, y

$$\begin{aligned}P(1, g(x)) &= a_0 + a_1 g(x) + a_2 g^2(x) + \dots + a_n g^n(x) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_2 x^2 + \dots, \\ Q(1, g(x)) &= b_0 + b_1 g(x) + b_2 g^2(x) + \dots + b_m g^m(x) = \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 x + \tilde{b}_2 x^2 + \dots\end{aligned}$$

Entonces de (4.16) tenemos

$$\begin{aligned}
 0 &= x^k Q(1, g(x)) - h'(x) P(1, g(x)) \\
 0 &= x^k \left(\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 x + \tilde{b}_2 x^2 + \dots \right) - (\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \dots) (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_2 x^2 + \dots) \\
 0 &= -\alpha_1 \tilde{a}_0 - (\alpha_1 \tilde{a}_1 + 2\alpha_2 \tilde{a}_0) x - (\alpha_1 \tilde{a}_2 + 2\alpha_2 \tilde{a}_1 + 3\alpha_3 \tilde{a}_0) x^2 - \dots \\
 &\quad - (\alpha_1 \tilde{a}_{k-1} + 2\alpha_2 \tilde{a}_{k-2} + \dots + k\alpha_k \tilde{a}_0) x^{k-1} \\
 &\quad + (\tilde{b}_0 - \alpha_1 \tilde{a}_k - 2\alpha_2 \tilde{a}_{k-1} - \dots - (k+1)\alpha_{k+1} \tilde{a}_0) x^k + \dots
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Se sigue que $\alpha_1 \tilde{a}_0 = 0$, por lo que tenemos dos caminos: $\alpha_1 = 0$ ó $\tilde{a}_0 = P(1, \alpha_1) = 0$.

- Si $\alpha_1 = 0$ entonces $\tilde{a}_0 = P(1, 0) = a_0 \neq 0$. De (4.17) se sigue claramente que

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0,$$

y que además,

$$\begin{aligned}
 \tilde{b}_0 - (k+1)\alpha_{k+1}\tilde{a}_0 &= 0 \\
 \Leftrightarrow b_0 - (k+1)\alpha_{k+1}a_0 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \alpha_{k+1} &= \frac{b_0}{(k+1)a_0},
 \end{aligned}$$

dicho coeficiente es distinto de cero si $b_0 \neq 0$, obteniendo así la curva característica

$$y = \alpha_{k+1} x^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2}).$$

Si $b_0 = 0$, podemos observar directamente del sistema (4.15) que la curva característica es, de hecho, el eje horizontal.

- Si $\tilde{a}_0 = 0$, entonces deberán existir soluciones reales $\bar{\alpha}_i$ a la ecuación

$$P(1, \alpha_1) = a_0 + a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_1^n = 0,$$

con $i = 1, 2, \dots, q$, donde q es el número de raíces reales distintas del polinomio. Estas soluciones serán distintas de cero ya que $a_0 \neq 0$ por hipótesis. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, sabemos que existen a lo más n soluciones reales a la ecuación, por lo que tenemos a lo más n curvas características para este caso, las cuales son de la forma

$$y = \bar{\alpha}_i x + \mathcal{O}(|x|^2)$$

Notemos que si $a_n = 0$, se requiere que $b_m \neq 0$, ya que estamos suponiendo que el origen es un equilibrio aislado, de otro modo, tendríamos al eje y como un continuo de equilibrios. Si $a_n = 0$ y $b_m \neq 0$, entonces el eje y también es una curva característica.

Del análisis anterior queda demostrado el siguiente Teorema:

Teorema 4. *Sea el origen un punto de equilibrio aislado para el sistema (4.15) y sea $s = 0$, entonces el origen es un **nodo no-hiperbólico**, cuyas aproximaciones analíticas de sus curvas características se encuentran determinadas como sigue:*

$$(i) \quad y = \alpha_{k+1}x^{k+1} + \mathcal{O}(|x|^{k+2}),$$

con $\alpha_{k+1} = \frac{b_0}{(k+1)a_0}$, si $b_0 \neq 0$. Si $b_0 = 0$ entonces $y = 0$ es una curva característica.

$$(ii) \quad y = \bar{\alpha}_i x + \mathcal{O}(|x|^2),$$

donde $\bar{\alpha}_i$ es un número real que satisface

$$P(1, \bar{\alpha}_i) = 0.$$

(iii) Si $a_n = 0$ y $b_m \neq 0$, el eje vertical también es una curva característica.

El Teorema anterior nos permite determinar las aproximaciones analíticas de las curvas características cuando $s = 0$, basta con sustituir nuestra aproximación $y = h(x)$, para cada curva, en \dot{x} para conocer la dirección del flujo sobre ellas.

En la siguiente sección ampliaremos nuestro estudio para encontrar el resto de las curvas características alrededor del origen para cualquier s , haciendo uso de las técnicas de blow-up.

4.2.2. Análisis mediante el Blow-up direccional

El análisis anterior solo nos permitió detectar las aproximaciones analíticas de las curvas características que pasan por el origen cuando $s = 0$, por lo que es necesario emplear otras herramientas que nos permitan determinar el comportamiento alrededor del equilibrio de forma más general, para ello haremos uso de las técnicas de blow-up direccionales.

Consideremos nuevamente el sistema (4.15):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) = a_s x^{n-s} y^s + a_{s+1} x^{n-s-1} y^{s+1} + \dots + a_n y^n \\ \dot{y} &= Q(x, y) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + b_2 x^{m-2} y^2 + \dots + b_m y^m \end{aligned}$$

con $a_s \neq 0$, $2 \leq n < m$ y el origen un equilibrio aislado.

Notemos primero que el polinomio característico, estudiado en la sección 2.1, para el sistema (4.15) es

$$F_n(\theta) = -\sin \theta P(\cos \theta, \sin \theta),$$

si hacemos $\cos \theta = 0$, entonces $\sin \theta \neq 0$ por lo que $F(\theta) = 0$ si y solo si $P(0, \sin \theta) = 0$, lo cual ocurre solo si $a_n = 0$. Por lo tanto, la dirección vertical será una dirección característica, si y solo si $a_n = 0$, en cuyo caso la curva característica es justamente el eje y , esto se observa directamente del campo. Dicho lo anterior, solo será necesario hacer el blow-up en la dirección x .

Hagamos entonces el blow-up direccional homogéneo en dirección x , tomando $x = u$, $y = uv$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \dot{x} = P(u, uv) = u^n P(1, v) \\ \dot{v} &= \frac{\dot{y} - v\dot{u}}{u} = \frac{Q(u, uv) - vu^n P(1, v)}{u} = u^{m-1} Q(1, v) - vu^{n-1} P(1, v),\end{aligned}$$

dividiendo el sistema por u^{n-1} , obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= uP(1, v) \\ \dot{v} &= u^k Q(1, v) - vP(1, v),\end{aligned}\tag{4.18}$$

donde $k = m - n$. Los equilibrios de este nuevo sistema (4.18) tales que $u = 0$, son aquellos tales que $vP(1, v) = 0$, es decir, el origen y aquellos equilibrios de la forma $(0, v_i)$ tales que $P(1, v_i) = 0$ y $v_i \neq 0$.

La matriz Jacobiana del sistema (4.18) es

$$D\bar{X}(u, v) = \begin{pmatrix} P(1, v) & u \frac{\partial P}{\partial y}(1, v) \\ ku^{k-1} Q(1, v) & u^k \frac{\partial Q}{\partial y}(1, v) - P(1, v) - v \frac{\partial P}{\partial y}(1, v) \end{pmatrix},$$

luego, para los puntos $(0, v_i)$, con v_i raíz de $P(1, v_i)$,

$$D\bar{X}(0, v_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k(0)^{k-1} b_0^m & -v_i \frac{\partial P}{\partial y}(1, v_i) \end{pmatrix},$$

recordemos que $v_i \neq 0$, por lo que si se cumple $\frac{\partial P}{\partial y}(1, v_i) \neq 0$, podemos concluir por el Teorema de la Variedad Central que estos equilibrios serán tipo silla, nodo o silla nodo; y su variedad central será una curva de la forma $v = v_i + \dots$, así, al volver al plano x - y , están curvas serán de la forma

$$y = v_i x + \dots,$$

coincidiendo con el análisis obtenido en la sección anterior.

Por otro lado, evaluando la matriz Jacobiana en el origen obtenemos,

$$D\bar{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} P(1, 0) & 0 \\ k(0)^{k-1} Q(1, 0) & -P(1, 0) \end{pmatrix},$$

por lo tanto:

- Dado que $P(1, 0) = a_0 \neq 0$ si $s = 0$, entonces el origen será un punto silla, cuyas variedades estables e inestables serán tangentes a los ejes. De hecho $u = 0$ es una curva característica del origen en el sistema (4.18), la cual al regresar al plano x - y se transforma en el origen original, por lo que solo nos queda la curva con pendiente horizontal, las correspondientes a las raíces de $P(1, v_i) = 0$ y posiblemente el eje vertical, como habíamos concluido en el Teorema 4, por lo que no existen más curvas además de las encontradas previamente.

- Si $s > 0$, el origen es un equilibrio no-hiperbólico, por lo que será necesario hacer un nuevo blow-up en el sistema (4.18) como mostraremos a continuación.

Comenzaremos calculando el polígono de Newton para el sistema (4.18). El conjunto N para este sistema es tal que $N \subset N_1 \cup N_2$, donde

$$N_1 = \{(0, s), (0, s+1), \dots, (0, n)\}, \quad N_2 = \{(k, -1), (k, 0), \dots, (k, m-1)\}.$$

Notemos que todos los puntos pertenecientes a N_1 se encuentran sobre la recta $i = 0$, mientras que todos los puntos en N_2 se encuentran sobre la recta $i = k$, por lo que ninguna de estas rectas es útil para obtener nuestros parámetros, sin embargo, podemos obtener un segmento del polígono utilizando los puntos de menor ordenada de cada conjunto, estos son $(0, s) \in N_1$ y $(k, -1) \in N_2$, ambos puntos pertenecen siempre a N ya que $a_s \neq 0$ y $b_0 \neq 0$ cuando $s > 0$. Luego, la recta que contiene al segmento que une a estos puntos es

$$(s+1)i + kj = sk,$$

por lo que para el segundo blow-up en el origen utilizaremos los parámetros $\alpha = s+1$, $\beta = k$ y $d = sk$.

- Hagamos primero el blow-up en dirección x positiva (recordemos que si s es par, se cubre también la dirección negativa). Tomemos el cambio $u = w^\alpha$, $v = w^\beta z$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{\dot{u}}{\alpha w^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} w P(1, w^\beta z) \\ \dot{z} &= \frac{\dot{v} - \beta w^{\beta-1} z \dot{w}}{w^\beta} = w^{\alpha k - \beta} Q(1, w^\beta z) - \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) z P(1, w^\beta z), \end{aligned}$$

dividiendo por w^{sk} obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{1}{s+1} w^{1-sk} P(1, w^k z) \\ \dot{z} &= Q(1, w^k z) - \left(\frac{s+k+1}{s+1}\right) z w^{-sk} P(1, w^k z), \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde

$$\begin{aligned} w^{-sk} P(1, w^k z) &= a_s z^s + a_{s+1} w^k z^{s+1} + \dots + a_n w^{k(n-s)} z^n \\ Q(1, w^k z) &= b_0 + b_1 w^k z + b_2 w^{2k} z^2 + \dots + b_m w^{km} z^m, \end{aligned}$$

de modo que los equilibrios tales que $w = 0$, son aquellos puntos $(0, \bar{z})$ que cumplen la ecuación $b_0 - a_s \left(\frac{s+k+1}{s+1}\right) \bar{z}^{s+1} = 0$, esto ocurre si y solo si

$$\bar{z}^{s+1} = \frac{b_0(s+1)}{a_s(s+k+1)}.$$

Por lo tanto, si:

- s es par, existe un único equilibrio,

- s es impar y $b_0 a_s > 0$, existen dos equilibrios,
- s es impar y $b_0 a_s < 0$, no existen equilibrios.

La matriz Jacobiana del sistema (4.19) evaluada en los puntos de equilibrio es

$$D\hat{X}^+(0, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \frac{a_s}{s+1} \bar{z}^s & 0 \\ \star & -\frac{a_s(k+s+1)}{s+1} \bar{z}^s \end{pmatrix},$$

por lo que en cualquier caso los equilibrios son tipo silla, de este modo, cada equilibrio aportará una curva de la forma $z = \bar{z} + \dots$, la cual se transformará en la curva $v = \bar{z} u^{\frac{k}{s+1}} + \dots$ y finalmente, al regresar al plano x - y , obtenemos la curva

$$y = \bar{z} x^{\frac{s+k+1}{s+1}} + \dots$$

- Para el blow-up en la dirección x negativa, hacemos el cambio $u = -w^\alpha$, $v = w^\beta z$, y luego de dividir por el factor w^{sk} , obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{1}{s+1} w^{1-sk} P(1, w^k z) \\ \dot{z} &= (-1)^k Q(1, w^k z) - \left(\frac{s+k+1}{s+1} \right) z w^{-sk} P(1, w^k z), \end{aligned} \quad (4.20)$$

y sobre la vertical tenemos los equilibrios $(0, \bar{z})$ que cumplan

$$\bar{z}^{s+1} = \frac{(-1)^k b_0 (s+1)}{a_s (s+k+1)}.$$

Entonces:

- Si s es par, existe un único equilibrio.
- Existen dos equilibrios, si s es impar,
 - ◊ k par y $b_0 a_s > 0$, ó
 - ◊ k impar y $b_0 a_s < 0$.
- No existen equilibrios, si s es impar,
 - ◊ k par y $b_0 a_s < 0$, ó
 - ◊ k impar y $b_0 a_s > 0$.

La matriz Jacobiana del sistema (4.20) evaluada en los puntos de equilibrio es nuevamente

$$D\hat{X}^-(0, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \frac{a_s}{s+1} \bar{z}^s & 0 \\ \star & -\frac{a_s(k+s+1)}{s+1} \bar{z}^s \end{pmatrix},$$

luego, concluimos de nuevo que los equilibrios son sillas, los cuales aportan las curvas

$$y = (-1)^{\frac{k}{s+1}} \bar{z} x^{\frac{s+k+1}{s+1}} + \dots,$$

para $x < 0$.

- Resta realizar el blow-up en la dirección y . Para la dirección positiva hacemos $u = wz^\alpha$, $v = z^\beta$ y tras dividir por el factor z^{sk} , nos resulta el sistema

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \left(\frac{s+k+1}{k} \right) wz^{-sk} P(1, z^k) - \frac{s+1}{k} w^{k+1} Q(1, z^k) \\ \dot{z} &= \frac{1}{k} \left[w^k z Q(1, z^k) - z^{1-sk} P(1, z^k) \right],\end{aligned}$$

de donde se sigue claramente que el origen es un punto de equilibrio. La matriz Jacobiana evaluada en el es

$$D\tilde{X}^+(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{a_s(k+s+1)}{k} & 0 \\ 0 & -\frac{a_s}{k} \end{pmatrix},$$

por lo tanto, el origen es una silla cuyas curvas características son los ejes coordenados. El eje $w = 0$, es enviado a $u = 0$ y finalmente es transformado en el origen; mientras que el eje $z = 0$ se transforma en el origen del plano $u-v$, por lo que ambas curvas características desaparecen sin aportar nada al plano original.

- Finalmente, hacemos el blow-up en la dirección y negativa, tomando $u = wz^\alpha$, $v = -z^\beta$, por lo que el sistema (4.18), al dividirse por z^{sk} , se transforma en

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \left(\frac{s+k+1}{k} \right) wz^{-sk} P(1, -z^k) + \frac{s+1}{k} w^{k+1} Q(1, -z^k) \\ \dot{z} &= -\frac{1}{k} \left[w^k z Q(1, -z^k) + z^{1-sk} P(1, -z^k) \right],\end{aligned}$$

nuevamente el origen es un equilibrio cuya Jacobiana es

$$D\tilde{X}^-(0,0) = \begin{pmatrix} (-1)^s \frac{a_s(k+s+1)}{k} & 0 \\ 0 & (-1)^{s+1} \frac{a_s}{k} \end{pmatrix},$$

de nuevo el origen es un punto silla, con los ejes como variedades estable e inestable. Otra vez, el eje $w = 0$ es enviado al origen del plano original y $z = 0$ es enviado al origen del plano $u-v$, por lo que tampoco aporta curvas características al plano original.

En conclusión, solo los equilibrios encontrados en el blow-up en dirección x aportan curvas características al plano original.

Del análisis anterior, si no hay puntos de equilibrio en ninguna de las dos direcciones del segundo blow-up en el origen en la dirección x , podemos concluir el siguiente Teorema para la existencia de puntos de equilibrios monodrómicos, es decir, focos o centros.

Teorema 5. Sea el origen un equilibrios aislado del sistema (4.15), si $P(1, \alpha_1)$ no tiene raíces reales distintas de cero y además se cumple

$H1)$ s impar,

$H2)$ $a_s b_0 < 0$,

$H3)$ k par,

$H4)$ $a_n \neq 0$,

entonces localmente, el origen es **foco** o un **centro**.

Recordando que $k = m - n$ es la diferencia entre los grados de los polinomios P y Q del sistema (4.15).

Ilustraremos el Teorema mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 18. Consideremos una vez más el sistema (3.22)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x^5.\end{aligned}$$

Si evaluamos el polinomio $P(1, \alpha_1)$ obtenemos

$$P(1, \alpha_1) = \alpha_1(1 + \alpha_1^2)$$

el cual tiene por raíces $\alpha_{1,1} = 0$, $\alpha_{1,2} = i$ y $\alpha_{1,2} = -i$, por lo que $P(1, \alpha_1)$ no tiene raíces reales distintas de cero.

Luego, como se cumple $s = 1$ es impar, $a_s b_0 = (1)(-1) < 0$ y $k = 2$ par, concluimos por el Teorema anterior que el origen es un punto de equilibrio monodrómico. El retrato fase de este sistema se observa en la figura 4.9.

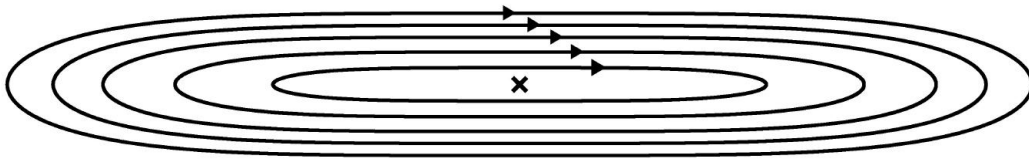


Figura 4.9: Retrato fase del sistema, $-0.2 \leq x \leq 0.2$.

Cuando tenemos un equilibrio monodrómico, sigue siendo un problema abierto el distinguir entre un centro topológico y un foco, sin embargo, esto se ha podido realizar para casos particulares. A continuación mostraremos algunas condiciones suficientes, para que un equilibrio que cumpla con las hipótesis del Teorema 5 sea un centro topológico. Para ello, requerimos de las siguientes definiciones [Meiss, 2007].

Definición 5. Sea $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Un flujo $\phi_t(x)$ del campo $f(x)$ tiene una **simetría en reversa**, si existe un difeomorfismo, $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (el reversor), que conjugue el flujo con su inverso, es decir

$$\phi_{-t}(S(x)) = S(\phi_t(x)),$$

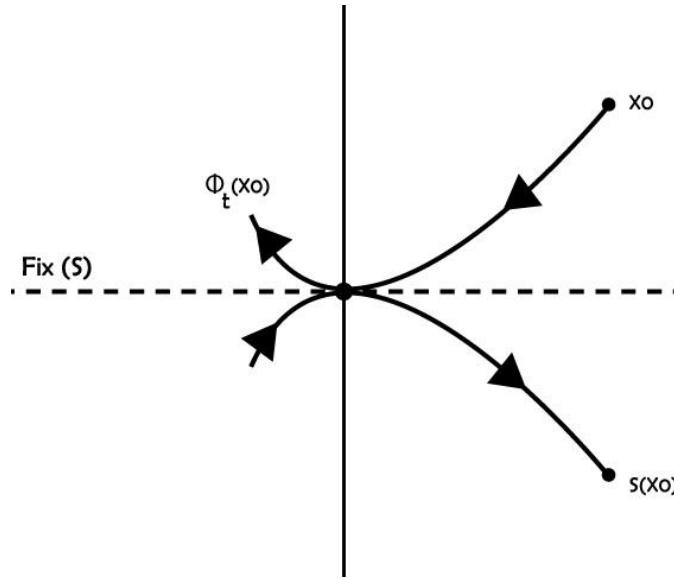
o equivalentemente,

$$-f(S(x)) = DS(x)f(x).$$

Definición 6. El conjunto fijo de un reversor S es

$$\text{Fix}(S) = \{x : x = S(x)\}.$$

Se puede probar que el $\text{Fix}(S)$ es una curva en \mathbb{R}^2 . Ver [MacKay, 1993]. La siguiente figura ilustra el comportamiento de las soluciones de un sistema que tiene un reversor S .



Definición 7. Sea $o(x)$ una órbita de $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, es decir, $o(x) = \{\phi_t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$, donde $\phi_t(x)$ es el flujo de $f(x)$. Decimos que $o(x)$ es una **órbita simétrica** con respecto a S , si

$$S(o(x)) = o(x).$$

Finalmente, haremos uso del siguiente lema, establecido en [Lamb y Roberts, 1997].

Lema 2. Sea $o(x)$ una órbita de un flujo en un campo $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, con reversor S . Entonces,

- una órbita $o(x)$ es simétrica con respecto a S , si y solo si, $o(x)$ intersecta a $\text{Fix}(S)$, en cuyo caso, la órbita intersecta a $\text{Fix}(S)$ en no más de dos puntos y está totalmente contenida en $\text{Fix}(S^2)$.
- Una órbita $o(x)$ intersecta a $\text{Fix}(S)$ en precisamente dos puntos, si y solo si, la órbita es periódica (y no un punto fijo) y simétrica respecto a S .

De lo anterior, podemos concluir el siguiente Teorema.

Teorema 6. *Sea el origen un equilibrio aislado del sistema (4.15), para el cual se cumplen las hipótesis del Teorema 5. Si el sistema tiene reversor S y $(0, 0) \in \text{Fix}(S)$, entonces el origen es un **centro** topológico.*

Demostración:

Por el Teorema 5, sabemos que el origen es un equilibrio monodrómico, es decir un foco o un centro. Como el origen está contenido en el $\text{Fix}(S)$, que es una curva, cualquier solución que se encuentre en una vecindad del origen intersecta al $\text{Fix}(S)$, ya que las soluciones se encuentran girando.

Supongamos que el origen es un foco, entonces cualquier solución tendiendo al origen, en tiempo positivo o negativo, cruzará el $\text{Fix}(S)$ una infinidad de veces. Por el lema (2) sabemos que esto no puede ocurrir, ya que la órbita intersecta al $\text{Fix}(S)$ en a lo más dos puntos, por lo que llegamos a una contradicción y en consecuencia, el origen es un centro. ■

Analicemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 19. *Consideremos la familia*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^s (a_s x^{n-s} + a_{s+2} x^{n-s-2} y^2 + \dots + a_{n-s-2} x^2 y^{n-s-2} + a_n y^{n-s}) \\ \dot{y} &= b_0 x^m + b_2 x^{m-2} y^2 + \dots + b_{m-3} x^3 y^{m-3} + b_{m-1} x y^{m-1},\end{aligned}\tag{4.21}$$

con s impar, n y m impares, $a_s b_0 < 0$, $a_n \neq 0$ y tal que

$$P(1, \alpha_1) = a_s + a_{s+2} \alpha_1^2 + \dots + a_{n-s-2} \alpha_1^{n-s-2} + a_n \alpha_1^{n-s},$$

no tenga raíces reales.

Como m y n son impares, k es un número par, por lo que el sistema cumple con las hipótesis del Teorema 5. Además el sistema tiene como reversor a $S(x) = (-x, y)^T$, ya que

$$\begin{aligned}-f(S(x)) &= -f(-x, y) \\ &= - \begin{pmatrix} y^s (a_s (-x)^{n-s} + \dots + a_{n-s-2} (-x)^2 y^{n-s-2} + a_n y^{n-s}) \\ b_0 (-x)^m + \dots + b_{m-1} (-x) y^{m-1} \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} y^s (a_s x^{n-s} + \dots + a_{n-s-2} x^2 y^{n-s-2} + a_n y^{n-s}) \\ -(b_0 x^m + \dots + b_{m-1} x y^{m-1}) \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} f(x) \\ &= DS(x) f(x).\end{aligned}$$

Finalmente, notemos que el $\text{Fix}(S)$ es el eje y , por lo que contiene al origen. Por lo tanto, concluimos que el origen en esta familia es un centro.

El sistema (3.22) representa un caso particular perteneciente a esta familia de centros.

Los dos teoremas anteriores se refieren al caso en el que el origen es del tipo monodrómico, lo cual ocurre al no existir puntos de equilibrio en el blow-up. Cuando estos existen, obtenemos nodos no-hiperbólicos. El siguiente Teorema resume todas las curvas características que pueden existir para el origen del sistema (4.15), obtenidas mediante el análisis de blow-up y el Teorema 4.

Teorema 7. *Sea el origen un punto de equilibrio aislado del sistema (4.15), si no se cumple alguna de las condiciones en el Teorema 5, entonces el origen es un nodo no-hiperbólico, cuyas curvas características están dadas por:*

(i)

$$y = \alpha_i x + \dots,$$

donde α_i es una solución de la ecuación $P(1, \alpha_i) = 0$, con $\alpha_i \neq 0$ y $\frac{\partial P}{\partial y}(1, \alpha_i) \neq 0$.

(ii) Si $a_n = 0$, el eje vertical también es una curva característica.

(iii)

$$y = c x^{\frac{s+k+1}{s+1}} + \dots,$$

para $x > 0$ donde c satisface $c^{s+1} = \frac{b_0(s+1)}{a_s(s+k+1)}$.

(iv)

$$y = (-1)^{\frac{k}{s+1}} \bar{c} x^{\frac{s+k+1}{s+1}} + \dots,$$

para $x < 0$ donde \bar{c} satisface $\bar{c}^{s+1} = \frac{(-1)^k b_0(s+1)}{a_s(s+k+1)}$.

Ilustraremos el Teorema anterior mediante los siguientes ejemplos:

Ejemplo 20. *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^3 - \frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{2}xy^2 + y^3 \\ \dot{y} &= 5x^5 + 3x^3y^2 - 2y^5. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Tenemos entonces $n = 3$, $m = 5$, $k = 2$, $a_3 = 1 \neq 0$ y $s = 0$. Las raíces de $P(1, \alpha_{1,r}) = 0$ son $-1, 1/2$ y 2 , por lo que las curvas características que pasan por el origen son:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \frac{5}{4}x^3 + \dots & h_2(x) &= -x + \dots \\ h_3(x) &= \frac{1}{2}x + \dots & h_4(x) &= 2x + \dots \end{aligned}$$

A continuación determinaremos la dinámica sobre cada una de estas curvas invariantes. Sobre la curva $h_1(x)$ tenemos $\dot{x} = x^3 + \dots$, por lo que \dot{x} es positiva para $x > 0$ y \dot{x} es negativa para $x < 0$; para $h_2(x)$ sustituimos $x = -y + \dots$ en \dot{y} , esto es, $\dot{y} = -10y^5 + \dots$ así que $\dot{y} > 0$ en $y < 0$ y $\dot{y} < 0$ en $y > 0$. En $h_3(x)$ tenemos $\dot{y} = 182y^5 + \dots$, por lo tanto $\dot{y} > 0$ para $y > 0$ y $\dot{y} < 0$ para $y < 0$. Finalmente, la dinámica sobre $h_4(x)$ esta dada por $\dot{y} = -\frac{47}{32}y^5 + \dots$, entonces $\dot{y} > 0$ para $y < 0$ y $\dot{y} < 0$ para $y > 0$.

Notemos que tenemos dos sectores parabólicos comprendidos entre h_1 y h_3 , ambos saliendo del origen; y tenemos otros dos sectores parabólicos comprendidos entre h_2 y h_4 ambos convergiendo al origen. Nos resta determinar como son los cuatro sectores comprendidos entre una dirección que

entra y una que sale, para ello es necesario determinar el signo de $\dot{\theta}$ en cada sector, la velocidad angular del sistema es

$$\dot{\theta} = \frac{1}{r^2} \left(5x^6 + 3x^4y^2 - 2xy^5 - yx^3 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{3}{2}xy^3 - y^4 \right)$$

por lo que en una vecindad del origen el signo, $\text{sgn}(\dot{\theta}) = \text{sgn}(\frac{3}{2}y^2(x^2 + xy) - y(x^3 + y^3))$ para el sector comprendido entre h_1 y h_2 del lado derecho del eje y obtuvimos $\dot{\theta} > 0$ por lo tanto, éste es un sector hiperbólico, de igual modo tenemos otro sector hiperbólico en el sector comprendido entre h_1 y h_2 del lado contrario, ya que $\dot{\theta}$ también es positivo. Por último, para los dos sectores que se encuentran entre h_3 y h_4 a ambos lados tenemos que $\dot{\theta} < 0$ por lo que ambos sectores son elípticos. En conclusión, el retrato fase del sistema (4.22) queda determinado por la figura 4.10.

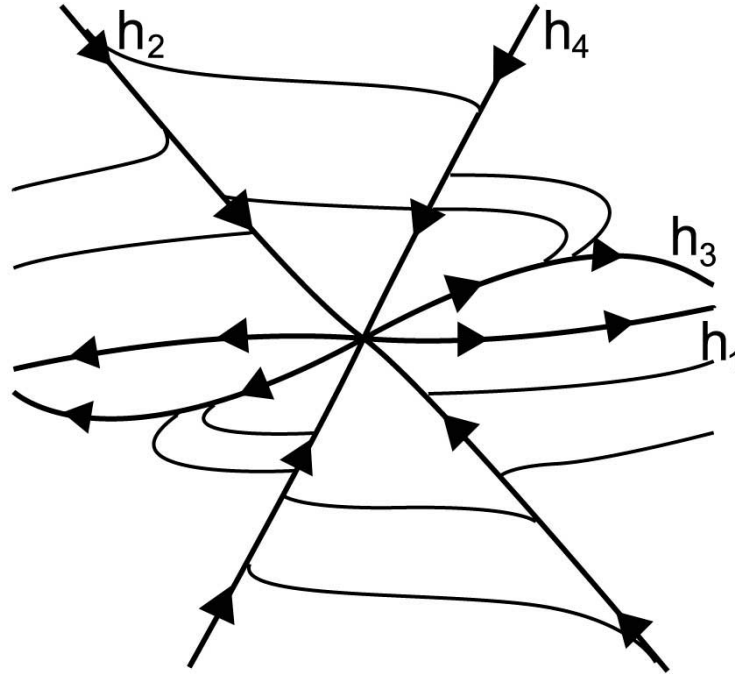


Figura 4.10: Retrato fase del sistema.

Ejemplo 21. Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3xy^2 \\ \dot{y} &= x^6 + y^6. \end{aligned}$$

Notemos en este ejemplo que $s = 2$. Luego,

$$P(1, \alpha_1) = 3\alpha_1^2,$$

por lo que solo tiene a cero como raíz y ninguna distinta de él. Podemos concluir entonces, por el Teorema, que el origen es un nodo no hiperbólico cuyas curvas características son:

- el eje y , ya que $a_n = a_3 = 0$ y $b_m = b_6 \neq 0$,

■ y la curva

$$y = h_1(x) = c_0 x^2 + \dots,$$

donde $c_0 = \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Analicemos ahora la estabilidad de cada curva. Claramente, el flujo sobre el eje vertical es siempre hacia arriba ya que $\dot{y} > 0$ para toda y . Luego, para ver la estabilidad sobre la otra curva característica, sustituimos su aproximación en \dot{x} , esto es,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3xy^2 \\ &= 3x(c_0 x^2 + \dots)^2 \\ &= 3c_0^2 x^5 + \dots,\end{aligned}$$

por lo que el flujo sobre la curva característica es a la derecha si $x > 0$ y hacia la izquierda en caso contrario, es decir, la curva es inestable.

Dado que tenemos dos curvas características, tenemos una vecindad del origen dividida en cuatro sectores. Como los dos sectores superiores están delimitados solo por curvas inestables, ambos sectores serán del tipo parabólico. Para los sectores inferiores calculamos la velocidad angular ya que ambos se encuentran delimitados por una curva estable y una inestable, obteniendo

$$\dot{\theta} = \frac{1}{r^2} (x^7 + xy^6 - 3xy^3),$$

por lo que en una vecindad del origen $\text{sgn}(\dot{\theta}) = -\text{sgn}(3xy^3)$. En el sector comprendido entre la parte positiva de $h_1(x)$ y la parte negativa del eje y la velocidad angular es positiva, por lo que tenemos un sector hiperbólico, mientras que en el opuesto la velocidad es negativa, por lo que tenemos nuevamente un sector hiperbólico.

La siguiente figura nos muestra la simulación del retrato fase del sistema para este ejemplo.

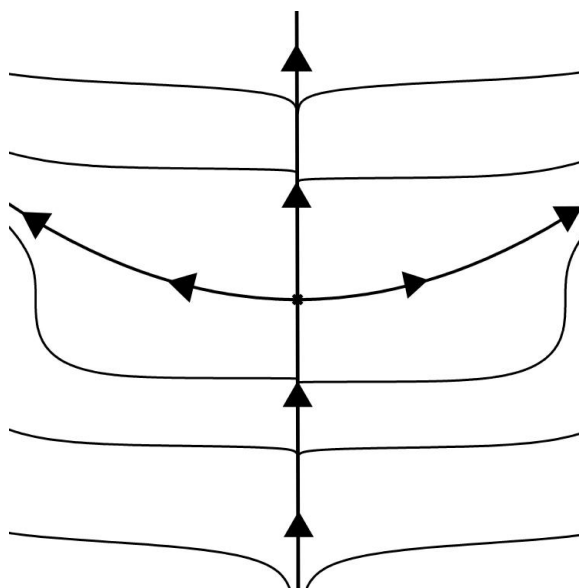


Figura 4.11: Retrato fase del sistema, $-0.6 \leq x, y \leq 0.6$

Ejemplo 22. Analicemos nuevamente el sistema (2.25)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(y^2 - x^2) \\ \dot{y} &= x^4.\end{aligned}$$

Notemos claramente que $k = 1$ es impar por lo que no cumple con las hipótesis para ser un punto monodrómico, por lo cual es un nodo no hiperbólico. Luego, $a_3 = 1 \neq 0$ por lo que el eje vertical no es una curva característica.

Como $P(1, \alpha_1) = \alpha_1(\alpha_1^2 - 1)$ tiene por raíces distintas de cero a $\alpha_1 = \pm 1$, entonces tenemos como curvas características a

$$h_{1,2}(x) = \pm x + \dots$$

Dado que $s = 1$ es impar y $a_s b_0 = (-1)(1) < 0$ no existen más curvas características en el semiplano $x > 0$. Sin embargo, como $k = 1$ es impar tenemos otras dos curvas características en el semiplano $x < 0$, cuya aproximación es

$$h_{3,4}(x) = \pm \sqrt{-\frac{2}{3}x^3} + \dots$$

Finalmente, observemos que $\dot{y} = x^4$, por lo que el flujo es hacia arriba sobre todo el plano, excepto cuando $x = 0$, por lo que particularmente sobre las curvas características el flujo es también siempre hacia arriba, de modo que las curvas características pertenecientes al semi-plano $y > 0$ son inestables y las pertenecientes al semiplano $y < 0$ son estables. De lo anterior se sigue que el sector comprendido entre la parte superior de la curva h_2 y h_3 es parabólico, al igual que su opuesto; y que el sector comprendido entre h_3 y h_4 es hiperbólico, así como el comprendido entre h_1 y h_2 .

Por lo tanto, el retrato fase del sistema es como se muestra en la figura 4.12.

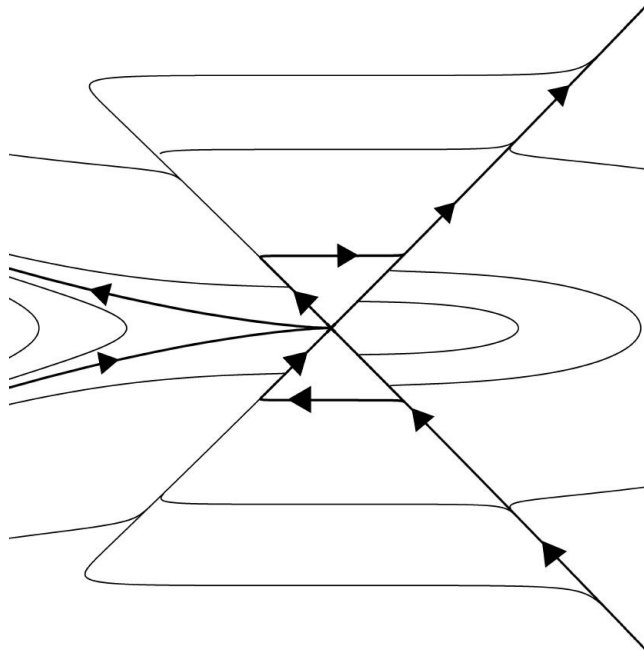


Figura 4.12: Retrato fase del sistema.

En el siguiente ejemplo, analizaremos un sistema sencillo pero que depende de un parámetro, veremos cómo puede variar el retrato fase alrededor del origen de acuerdo al signo del parámetro.

Ejemplo 23. *Consideremos el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu y^3 \\ \dot{y} &= -x^5\end{aligned}\tag{4.23}$$

con $\mu \neq 0$ (ya que si $\mu = 0$ el eje y es un continuo de equilibrios).

Claramente, el origen es el único punto de equilibrio del sistema. Por otro lado, $P(1, \alpha) = \mu\alpha^3$, por lo que no existen raíces reales distintas de cero para este polinomio, en consecuencia, no tendremos curvas características provenientes de él. Por otro lado, tenemos $a_3 = \mu \neq 0$, implicando que el eje y tampoco es una curva característica.

Luego, $s = 3$ es impar y $k = m - n = 2$ es par, de modo que, tenemos dos casos:

- Si $\mu > 0$, entonces $a_3 b_0 = -\mu < 0$, por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 5 y más aún, el sistema es un caso particular de la familia de centros (4.21), concluyendo entonces que el origen es un centro topológico.
- En cambio, si $\mu < 0$, no se cumplen todas las condiciones del Teorema 5 y por lo tanto, el origen será un nodo no hiperbólico, cuyas curvas características, dadas por el Teorema (7) serán

$$y = \pm \sqrt[4]{\frac{-2}{3\mu}} x^6 + \dots,$$

con $x \in (-\infty, \infty)$.

Notemos que $\dot{y} = -x^5$, es independiente de μ , por lo que si $x > 0$, $\dot{y} < 0$ y el flujo será hacia abajo, mientras que será hacia arriba si $x < 0$ (esto también nos da información sobre el sentido del flujo en el centro). Luego, $\dot{x} = \mu y^3$, entonces, si $y > 0$, $\dot{x} < 0$, en cambio si $y < 0$, $\dot{x} > 0$, de acuerdo a esto, obtenemos cuatro sectores hiperbólicos como se observa en la figura 4.13.

Los retratos fase alrededor del origen, para μ negativa y positiva, se observan en la siguiente figura.

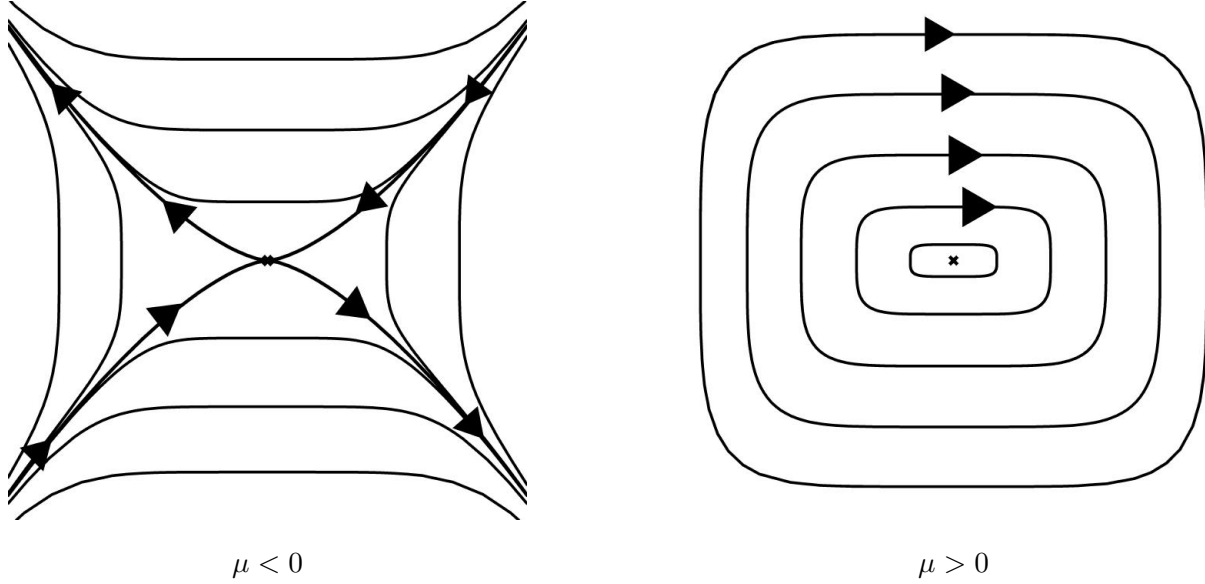


Figura 4.13: Retratos fase del sistema (4.23), de acuerdo al parámetro μ .

4.2.3. Puntos al infinito

En esta sección calcularemos los puntos al infinito para el sistema (4.15), con el fin de conocer más acerca del comportamiento global del sistema.

De las ecuaciones (3.7), obtenidas en el Capítulo 3, sabemos que los puntos al infinito del sistema (4.15) deben satisfacer las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= 1 \\ XQ_j(X, Y) - YP_j(X, Y) &= 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde j es el grado mayor en P y Q . En nuestro caso tenemos $j = m$, ya que $n < m$, entonces $P_m(X, Y) \equiv 0$ y $Q_m(X, Y) = Q(X, Y)$. Por lo tanto,

$$XQ_m(X, Y) - YP_m(X, Y) = XQ(X, Y)$$

por lo que los puntos de equilibrio al infinito serán aquellos tales que

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= 1 \\ X(b_0X^m + b_1X^{m-1}Y + \dots + b_mY^m) &= 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

por lo que tenemos los siguientes casos:

- Si $X = 0$, entonces $Y = \pm 1$. Por lo tanto, los puntos $(0, \pm 1, 0)$ son equilibrios al infinito.

Observación 1. Notemos que si $b_0 \neq 0$ y $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, entonces $(0, \pm 1, 0)$ son los únicos equilibrios al infinito del sistema.

- Si $X \neq 0$, entonces

$$Q(X, Y) = b_0 X^m + b_1 X^{m-1} Y + \dots + b_m Y^m = 0.$$

Sea $0 \leq l < m$ tal que $b_{m-l} \neq 0$ y $b_{m-l+1} = b_{m-l+2} = \dots = b_m = 0$, es decir, b_{m-l} es el último coeficiente distinto de cero en $Q(X, Y)$. Entonces

$$\begin{aligned} Q(X, Y) &= b_0 X^m + b_1 X^{m-1} Y + \dots + b_{m-l} X^l Y^{m-l} \\ &= X^l \left(b_0 X^{m-l} + b_1 X^{m-(l+1)} Y + \dots + b_{m-l} Y^{m-l} \right) \\ &= X^l \hat{Q}(X, Y), \end{aligned}$$

donde $\hat{Q}(X, Y) = b_0 X^{m-l} + b_1 X^{m-(l+1)} Y + \dots + b_{m-l} Y^{m-l} = X^{-l} Q(X, Y)$. Luego, por el Teorema fundamental del álgebra

$$\hat{Q}(1, z) = b_{m-l} \prod_{i=1}^{m-l} (z - c_i),$$

para algunos $c_1, \dots, c_{m-l} \in \mathbb{C}$. Notemos que $\hat{Q}(X, Y)$ es un polinomio homogéneo de grado $m-l$, por lo que se sigue que

$$\begin{aligned} \hat{Q}(X, Y) &= X^{m-l} \hat{Q}\left(1, \frac{Y}{X}\right) \\ &= b_{m-l} X^{m-l} \prod_{i=1}^{m-l} \left(\frac{Y}{X} - c_i\right) \\ &= b_{m-l} \prod_{i=1}^{m-l} X \left(\frac{Y}{X} - c_i\right) \\ &= b_{m-l} \prod_{i=1}^{m-l} (Y - c_i X) \\ &= b_{m-l} \prod_{i=1}^j (Y - \beta_i X) \prod_{i=j+1}^{\frac{m-l-j}{2}} \left(|\hat{\beta}_i|^2 X^2 - 2\operatorname{Re}(\hat{\beta}_i)XY + Y^2\right), \end{aligned}$$

donde los β_1, \dots, β_j son las raíces reales de $\hat{Q}(1, \beta)$ y los $\hat{\beta}_{j+1}, \dots, \hat{\beta}_{\frac{m-l-j}{2}}$ son las raíces complejas, sin incluir sus conjugados.

Dado que buscamos que se cumpla $X \neq 0$ y $Q(X, Y) = 0$, como $Q(X, Y) = X^l \hat{Q}(X, Y)$, requerimos

$$\hat{Q}(X, Y) = 0, \tag{4.26}$$

esto ocurre, si y solo si alguno de los factores en \hat{Q} es cero. Por lo que las soluciones de la ecuación (4.26) son las rectas de la forma

$$Y = \beta_i X, \tag{4.27}$$

y los factores de la forma

$$|\hat{\beta}_i|^2 X^2 - 2\operatorname{Re}(\hat{\beta}_i)XY + Y^2 = 0,$$

sin embargo, estos últimos son elipses degeneradas, es decir, el origen, por lo que no tenemos intersección con el círculo $X^2 + Y^2 = 1$.

En consecuencia, los puntos al infinito serán las intersecciones del círculo unitario con las rectas en (4.27), estos son los puntos que cumplen

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow X^2 + (\beta_i X)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow X^2 &= \frac{1}{1+\beta_i^2} \\ \Leftrightarrow X &= \pm \frac{1}{\sqrt{1+\beta_i^2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\hat{Q}(1, \beta_i) = 0$ tiene soluciones reales, los puntos $\pm \left(\frac{1}{\sqrt{1+\beta_i^2}}, \frac{\beta_i}{\sqrt{1+\beta_i^2}}, 0 \right)$ son puntos de equilibrio al infinito, finalmente notemos que de hecho, las raíces de $\hat{Q}(1, \beta_i)$ y $Q(1, \beta_i)$ son las mismas.

Del análisis anterior concluimos el siguiente Teorema:

Teorema 8. *Para el sistema (4.15)*

- (i) *los puntos $(0, \pm 1, 0)$ son equilibrios al infinito y,*
- (ii) *si existen soluciones β_i reales de la ecuación $Q(1, \beta_i) = 0$, entonces los puntos*

$$\pm \left(\frac{1}{\sqrt{1+\beta_i^2}}, \frac{\beta_i}{\sqrt{1+\beta_i^2}}, 0 \right),$$

también son puntos de equilibrio al infinito del sistema.

Ejemplo 24. *Recordemos el sistema (3.22)*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x^5. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Este sistema ha sido previamente analizado, obteniendo al origen como único equilibrio finito, el cual es del tipo monodrómico y particularmente un centro global, como estudiamos en el capítulo de puntos al infinito. Claramente todos los coeficientes en Q son cero, a excepción de b_0 , por lo que concluimos rápidamente que este sistema tiene como únicos puntos al infinito a $(0, \pm 1, 0)$, lo cual coincide con nuestro análisis anterior, como mostramos en la siguiente figura.

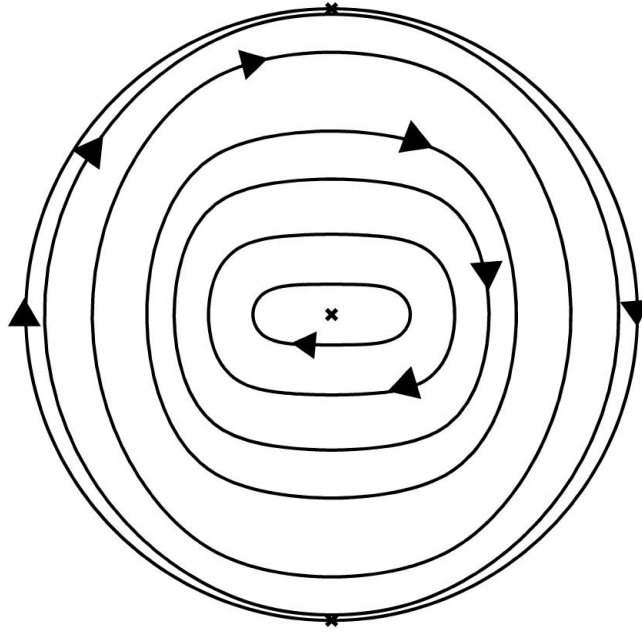


Figura 4.14: Puntos al infinito.

Estudiaremos ahora la dinámica en los puntos de equilibrio al infinito.

Observación 2. Si $b_0 = 0$, entonces $s = 0$, ya que en otro caso tendríamos a $y = 0$ como continuo de equilibrios y estamos suponiendo que el origen es un equilibrio aislado del sistema. Bajo estas condiciones,

$$\begin{aligned}
 & s = b_0 = 0 \\
 \Leftrightarrow & Q(X, Y) = b_1 X^{m-1} Y + \dots + b_m Y^m \\
 \Leftrightarrow & Q(1, \beta) = \beta (b_1 + \dots + b_m \beta^{m-1}) \\
 \Leftrightarrow & \beta = 0 \text{ es raíz de } Q(1, \beta) \\
 \Leftrightarrow & (\pm 1, 0, 0) \text{ son equilibrios al infinito del sistema.}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, solo en este caso tenemos equilibrios con $Y = 0$, en cualquier otro caso, tenemos equilibrios con $Y > 0$ y sus opuestos, por lo que estudiaremos primero la dinámica sobre el plano tangente a la esfera de Poincaré en $Y = 1$.

El sistema en el plano $Y = 1$ es

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= \zeta^m P\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}\right) - \xi \zeta^m Q\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}\right) \\
 &= \zeta^k P(\xi, 1) - \xi Q(\xi, 1) \\
 \dot{\zeta} &= -\zeta^{m+1} Q\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}\right) \\
 &= -\zeta Q(\xi, 1).
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Busquemos los puntos de equilibrio tales que $\zeta = 0$. En este caso, requerimos $\xi = 0$ ó $Q(\xi, 1) = \xi^l \hat{Q}(\xi, 1) = 0$, por lo que los puntos de equilibrio del nuevo sistema (4.29) son $(0, 0)$ y $(\xi_i, 0)$, donde los ξ_i son las raíces reales de $\hat{Q}(\xi_i, 1) = 0$.

La matriz Jacobiana general del sistema (4.29) es

$$D\hat{F}(\xi, \zeta) = \begin{pmatrix} \zeta^k \frac{\partial P}{\partial x}(\xi, 1) - Q(\xi, 1) - \xi \frac{\partial Q}{\partial x}(\xi, 1) & k\zeta^{k-1}P(\xi, 1) \\ -\zeta \frac{\partial Q}{\partial x}(\xi, 1) & -Q(\xi, 1) \end{pmatrix},$$

entonces para el origen:

- Si $l = 0$, entonces $D\hat{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} -b_m & k(0)^{k-1}a_n \\ 0 & -b_m \end{pmatrix}$, por lo tanto el origen es un nodo.
- Si $l > 0$, entonces $D\hat{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & k(0)^{k-1}a_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que si $k = 1$ y $a_n \neq 0$, podemos usar la teoría de formas normales para conocer el retrato fase en el origen. Si $k > 1$ ó $a_n = 0$, tenemos la matriz cero, por lo que será necesario un análisis más extenso como la técnica del blow-up,

donde l es tal que b_{m-l} es el último coeficiente distinto de cero, como definimos anteriormente.

Mientras que para los equilibrios de la forma $(\xi_i, 0)$, la Jacobiana viene dada por

$$D\hat{F}(\xi, \zeta) = \begin{pmatrix} -\xi_i \frac{\partial Q}{\partial x}(\xi_i, 1) & k(0)^{k-1}P(\xi_i, 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que tenemos tres casos,

- si $\frac{\partial Q}{\partial x}(\xi_i, 1) \neq 0$, podemos usar el Teorema de la Variedad Central y el equilibrio será un nodo, silla ó silla-nodo,
- si $\frac{\partial Q}{\partial x}(\xi_i, 1) = 0$, $k = 1$ y $P(\xi_i, 1) \neq 0$ podemos utilizar la teoría de formas normales para conocer su comportamiento,
- en cualquier otro caso tendremos la matriz cero, por lo que será necesario hacer uso de los teoremas planteados en este capítulo o de las técnicas de blow-up.

Los equilibrios tales que $Y < 0$ tendrán la misma estabilidad encontrada para los equilibrios con $Y > 0$ si m es impar y será invertida si m es par.

Recordemos ahora que si $s = 0$ y $b_0 = 0$, obtenemos los equilibrios al infinito $(\pm 1, 0, 0)$, por lo que necesitamos hacer la proyección sobre el plano $X = 1$, realizando el análisis para $(1, 0, 0)$ para posteriormente, de acuerdo a la paridad de m , conocer el comportamiento del equilibrio opuesto. El sistema en este plano es

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= Q(1, \eta) - \eta \zeta^k P(1, \eta) \\ \dot{\zeta} &= -\zeta^{k+1} P(1, \eta). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Los puntos de equilibrio tales que $\zeta = 0$ son $(\beta_i, 0)$, donde los β_i son las soluciones de $Q(1, \beta_i) = 0$, incluyendo al cero.

Observación 3. Aunque el objetivo de hacer el estudio en este plano es estudiar el punto $(1, 0)$, ya que no se analizó en el plano $Y = 1$, el análisis en el plano $X = 1$ también nos permite estudiar el resto de los equilibrios con $X \neq 0$, con el fin de obtener más información de ellos, de ser insuficiente el primer análisis.

La matriz Jacobiana del sistema (4.30) en general es

$$D\bar{F}(\eta, \zeta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial y}(1, \eta) - \zeta^k \left[P(1, \eta) + \eta \frac{\partial P}{\partial y}(1, \eta) \right] & -k\zeta^{k-1}\eta P(1, \eta) \\ -\zeta^{k+1} \frac{\partial P}{\partial y}(1, \eta) & -(k+1)\zeta^k P(1, \eta) \end{pmatrix}.$$

El origen es un equilibrio si $s = b_0 = 0$, y al evaluar la Jacobiana en él obtenemos

$$D\bar{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego, si $b_1 \neq 0$, podremos usar el Teorema de la Variedad Central y el origen será un nodo, una silla o silla-nodo. Si $b_1 = 0$, será necesario un mayor análisis.

Para el resto de los equilibrios $(\beta_i, 0)$:

$$D\bar{F}(\beta_i, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial y}(1, \beta_i) & -k(0)^{k-1}\beta_i P(1, \beta_i) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

así que tenemos nuevamente tres casos,

- si $\frac{\partial Q}{\partial y}(1, \beta_i) \neq 0$, utilizamos el Teorema de la Variedad Central para determinar si el equilibrio es nodo, silla ó silla-nodo,
- si $\frac{\partial Q}{\partial y}(1, \beta_i) = 0$, $k = 1$ y $P(1, \beta_i) \neq 0$ podemos utilizar la teoría de formas normales para conocer su comportamiento,
- en cualquier otro caso, nuevamente se obtiene la matriz cero, por lo que será necesario hacer uso de los teoremas de este capítulo o las técnicas de blow-up.

Ejemplo 25. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -x^2 y + y^3. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Claramente el origen es el único punto de equilibrio finito del sistema (4.31). Como $s = 0$, por el Teorema 4, sabemos que el origen es un nodo no hiperbólico cuyas curvas características son el eje x (ya que $b_0 = 0$), y el eje y , ya que $a_n = 0$ y $b_m \neq 0$. Notemos que $P(1, \alpha) = 1$, por lo que no tiene raíces y en consecuencia no hay más curvas características en el origen. Si $x = 0$ entonces el flujo es positivo cuando $y > 0$ y negativo si $y < 0$; si $y = 0$ el flujo siempre es hacia la derecha.

Ya que las curvas características pertenecientes al semiplano $x \geq 0$ son todas inestables, los sectores en ese semi-plano son parabólicos. Para determinar de que tipo son los sectores en el semiplano

$x \leq 0$, calcularemos primero la velocidad angular como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{1}{r^2} (x\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= \frac{1}{r^2} (-x^3y + xy^3 - x^2y),\end{aligned}$$

por lo que en una vecindad del origen $\text{sgn}(\dot{\theta}) = -\text{sgn}(x^2y)$. Por lo tanto, $\dot{\theta} < 0$ si $y > 0$, y $\dot{\theta} > 0$ si $y < 0$, de modo que los sectores en el segundo y tercer cuadrantes son ambos hiperbólicos. El retrato fase local del origen se muestra en la siguiente figura.

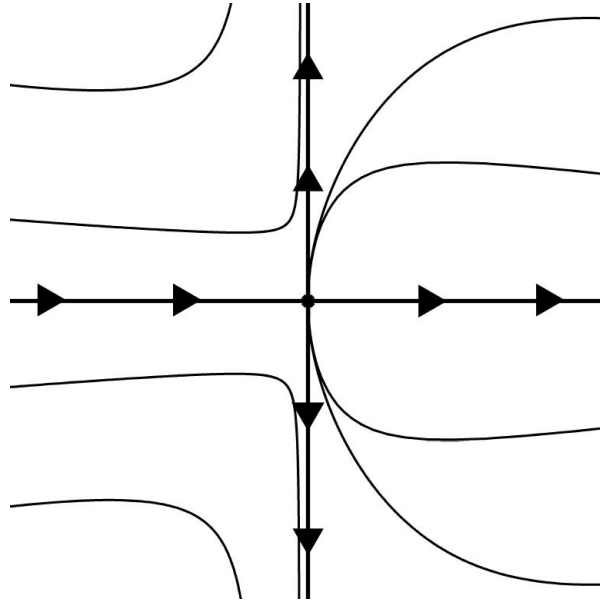


Figura 4.15: Retrato fase local en el origen.

Busquemos ahora los puntos de equilibrio al infinito:

$$Q(1, \beta) = \beta(\beta^2 - 1),$$

por lo que tiene como raíces a $\beta = \pm 1$ y $\beta = 0$, por lo tanto, los puntos de equilibrio al infinito son $(0, \pm 1, 0)$, $(\pm 1, 0, 0)$ y $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0)$. Estudiemos ahora la dinámica en cada uno de ellos. El punto $(0, 1, 0)$ se corresponde con el origen del plano $Y = 1$, cuya Jacobiana evaluada en él es $D\hat{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, por lo que este equilibrio es un nodo estable. Por otro lado, los equilibrios $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ se corresponden con los puntos $(1, 0)$, $(0, 0)$ y $(-1, 0)$, respectivamente, en el plano $X = 1$. La matriz Jacobiana evaluada en cada uno de ellos es

$$D\bar{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\bar{F}(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde podemos observar que el origen tiene una variedad estable y una central, mientras que los equilibrios $(\pm 1, 0)$ tienen asociados una variedad inestable y también una central. El sistema sobre

este plano es

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta + \eta^3 - \eta\zeta \\ \dot{\zeta} &= -\zeta^2,\end{aligned}$$

notemos que el eje ζ es invariante y tiene flujo negativo, además éste es precisamente la variedad central del origen, podemos concluir entonces que el origen es un silla-nodo. Las variedades centrales para los puntos $(\pm 1, 0)$ vienen dadas por curvas de la forma $\eta = \pm 1 + \dots$, respectivamente, y dado que $\dot{\zeta} = -\zeta^2$, el flujo sobre estas curvas es también negativo, por lo tanto ambos equilibrios son también silla-nodo.

Finalmente, dado que el grado de Q , $m = 3$, es impar todos los equilibrios opuestos a los estudiados tendrán el mismo tipo de estabilidad, obteniendo así el retrato fase global del sistema, el cual se muestra en la figura 4.16.

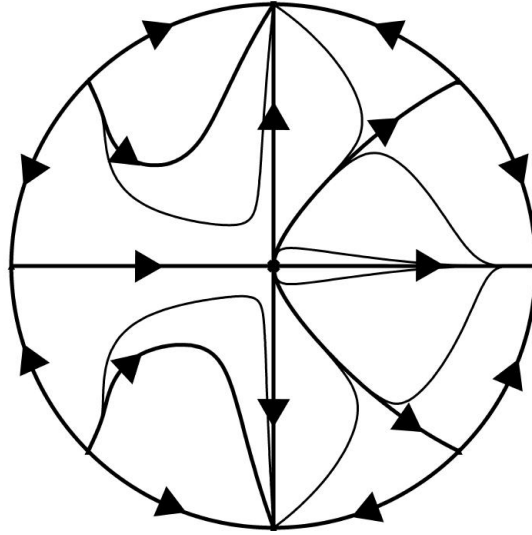


Figura 4.16: Retrato global del sistema (4.31).

Ejemplo 26. Retomemos el sistema del ejemplo (4.22)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^3 - \frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{2}xy^2 + y^3 \\ \dot{y} &= 5x^5 + 3x^3y^2 - 2y^5.\end{aligned}$$

Las curvas características alrededor del origen son

$$\begin{aligned}h_1(x) &= \frac{5}{4}x^3 + \dots & h_2(x) &= -x + \dots \\ h_3(x) &= \frac{1}{2}x + \dots & h_4(x) &= 2x + \dots,\end{aligned}$$

partiendo una vecindad del origen en ocho sectores, como estudiamos anteriormente.

Por otra parte, $Q(1, \beta) = -2\beta^5 + 3\beta^2 + 5$, tiene como única raíz real a $\beta \approx 1.40409$. De modo que, por el Teorema 8, concluimos que los puntos de equilibrio al infinito del sistema son $(0, \pm 1, 0)$ y $\pm(c_1, c_2, 0) \approx \pm(0.58011, 0.81453, 0)$.

Analicemos cómo es la dinámica en estos puntos. Para estudiar a $(0, 1, 0)$ nos fijaremos en la proyección sobre $Y = 1$. El sistema en este plano es,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \zeta^2 \left(\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\xi + 1 \right) - \xi (5\xi^5 + 3\xi^3 - 2) \\ \dot{\zeta} &= -\zeta (5\xi^5 + 3\xi^3 - 2).\end{aligned}$$

Notemos en el sistema original (4.22) que $b_5 = -2 \neq 0$, por lo que, como estudiamos anteriormente de manera general, el origen para el sistema sobre $Y = 1$, es un nodo inestable y por ende también lo es $(0, 1, 0)$. Como $m = 5$ es impar, el equilibrio al infinito opuesto $(0, -1, 0)$ también es un nodo inestable.

Ahora, para estudiar el equilibrio $(c_1, c_2, 0)$, usaremos la proyección sobre el plano $X = 1$, el sistema proyectado sobre este plano es

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= 5 + 3\eta^2 - 2\eta^5 - \eta\zeta^2 \left(1 - \frac{3}{2}\eta - \frac{3}{2}\eta^2 + \eta^3 \right) \\ \dot{\zeta} &= -\zeta^3 \left(1 - \frac{3}{2}\eta - \frac{3}{2}\eta^2 + \eta^3 \right),\end{aligned}$$

luego, $\frac{\partial Q}{\partial y}(1, \beta) = \beta(6 - 10\beta^2)$, por lo que la matriz Jacobiana en el equilibrio $(\beta, 0)$, que es el correspondiente en este plano con el punto $(c_1, c_2, 0)$ en la esfera, es

$$D\bar{F}(\beta, 0) = \begin{pmatrix} -d_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $d_1 \approx 30.4423$, por lo que el equilibrio tiene una variedad estable y existe una variedad central de la forma $\eta = \beta + \dots$, sustituyendo en $\dot{\zeta}$ tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= -\zeta^3 \left(1 - \frac{3}{2}\beta - \frac{3}{2}\beta^2 + \beta^3 + \dots \right) \\ &= d_2\zeta^3 + \dots,\end{aligned}$$

donde $d_2 \approx 1.29522$. Se sigue que si $\zeta > 0$, $\dot{\zeta} > 0$ y si $\zeta < 0$, $\dot{\zeta} < 0$, por lo que la variedad central es inestable. Por lo tanto, el punto $(\beta, 0)$ es un punto silla, y consecuentemente, $\pm(c_1, c_2, 0)$ son puntos sillas, pues $m = 5$ es impar.

Las variedades inestables de las sillas en el infinito deben converger al origen, pues es el único equilibrio finito, y el resto de los equilibrios al infinito son inestables, por lo que las curvas características encontradas tampoco convergen a los puntos al infinito ni pueden cruzar las variedades de las sillas, por lo que las soluciones en los sectores parabólicos eventualmente girarán regresando al origen formando parte de un sector elíptico, delimitado por h_1 y h_4 , por lo que la curva característica h_3 en la figura 4.10 formará parte del nuevo sector elíptico en el retrato fase global y por

lo tanto, no será una separatriz. Esto significa que en el análisis global del sistema, no todas las curvas características son separatrices.

Como no existen soluciones convergiendo a los puntos de equilibrio en el infinito, a excepción de las pertenecientes al ecuador de la esfera, todas las curvas convergerán eventualmente al origen, incluso las soluciones con condiciones iniciales en los sectores hiperbólicos, aunque no parezca ser así localmente, por lo que el origen resulta ser cuasi-asintóticamente estable al estudiarlo de manera global. El retrato fase global del sistema se muestra en la figura 4.17.

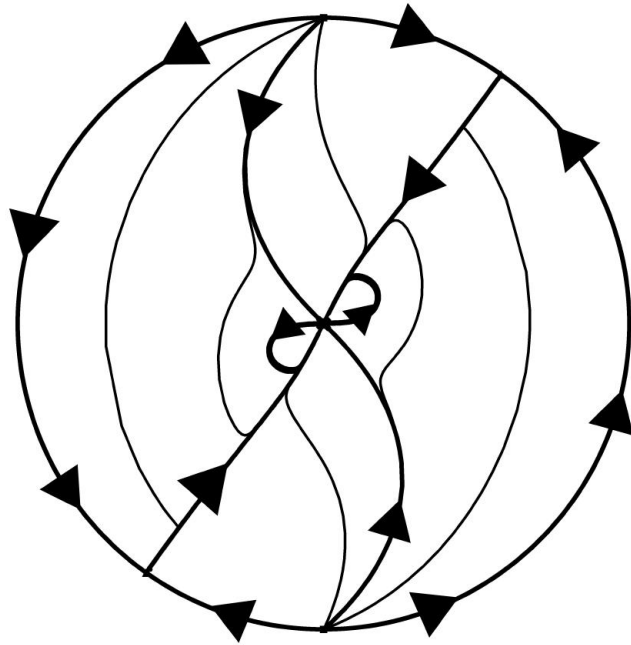


Figura 4.17: Retrato global del sistema (4.22).

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado los retratos fase para sistemas no lineales en el plano, donde el origen es un punto de equilibrio aislado, en particular el caso en el que las componentes del sistema son polinomios homogéneos no lineales, del mismo grado y grado distinto, haciendo nuestra aportación con éste último. Para tal fin, estudiamos las técnicas de Blow-up en el plano y estudiamos los puntos de equilibrio al infinito, sobre la esfera de Poincaré, para tener una mayor información del retrato fase global del sistema.

Para el caso en el que los polinomios homogéneos son del mismo grado, el comportamiento del origen está completamente determinado por el valor de una integral, como analizamos en la sección 4.1. Sin embargo, nuestra contribución se encuentra en la sección 4.2, donde estudiamos los sistemas con polinomios homogéneos de distinto grado. Haciendo una búsqueda de curvas analíticas y el uso de las técnicas de blow-up, obtuvimos teoremas que nos permiten determinar cuándo el origen es un equilibrio monodrómico y cuándo un nodo no hiperbólico, para un sistema de polinomios homogéneos de grado distinto. En el caso de los nodos no hiperbólicos obtuvimos las expresiones para todas las curvas características en una vecindad del origen. Mientras que en el caso de los equilibrios monodróxicos, presentamos un teorema en el cual, para los sistemas que poseen un reversor, los equilibrios monodróxicos resultan ser centros topológicos. Establecimos también un teorema que nos dice cuáles son los puntos de equilibrio al infinito para estos sistemas y estudiamos su dinámica de forma general.

El estudio de los sistemas con parte lineal cero, así como el problema de distinguir un foco de un centro, siguen siendo problemas abiertos en el caso general, sin embargo, hemos hecho nuestro aporte al determinar el comportamiento para los sistemas no lineales de polinomios homogéneos en el plano.

Bibliografía

- [1] Álvarez, M. (2006). *Critical points and periodic orbits of planar differential equations*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.
- [2] Álvarez, M., Ferragut, A. & Jarque, X. (2010). *A survey on the blow up technique*. 2014, Marzo, de Universidad Politécnica de Cataluña Sitio web: [http://upcommons.upc.edu/e-prints/bitstream/2117/12029/1/AlvFerJar2010\[1\].pdf](http://upcommons.upc.edu/e-prints/bitstream/2117/12029/1/AlvFerJar2010[1].pdf)
- [3] Andreev, A. (1958). *Investigation of the behavior of the integral curves of a system of two differential equations in the neighborhood of a singular point*. Trans. Amer. Math. Soc., 8, 187-207.
- [4] Andronov, A., Leontovich, E., Gordon, I. & Maier, A. (1973). *Qualitative theory of second order dynamic systems*. J, Wiley & Sons.
- [5] Aranda, J. (1998). *Métodos simples para el análisis de puntos degenerados de sistemas analíticos planos*. Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.
- [6] Arrowsmith, D. & Place, C. (1990). *An Introduction to Dynamical Systems*. Gran Bretaña: Cambridge.
- [7] Artés, J., Dumortier, F., Herssens, C., Llibre, J. & De Maesschalck, P. (2005). *Computer program P4 to study Phase Portraits of Planar Polynomial differential equations*. <http://mat.uab.cat/~artés/p4/p4.htm>
- [8] Brunella, M. & Miari, M. (1988). *Topological Equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra*. Journ al of differential equations, 85, 338-366. 2014, Marzo, De Science Direct Base de datos.
- [9] Coppel, W. (1965). *A Survey of Quadratic Systems*. *Journal of differential equations*, 2, 293-304. 2011, Agosto, De Science Direct Base de datos.
- [10] Dumortier, F. (1977). *Singularities of vector fields on the plane*. *Journal of Differential equations*, 23, 53-106. 2012, Agosto, De Science Direct Base de datos.
- [11] Dumortier, F., Llibre, J. & Artés, J. (2006). *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. New York: Springer.
- [12] Gasull, A. , Llibre, J., Mañosa, V. & Mañosas, F. (2000). *The focus-centre problem for a type of degenerate systems*. 2011, Octubre, de Iop Science Sitio web: <http://iopscience.iop.org/0951-7715/13/3/311>
- [13] Giné, J. (2001). *Sufficient conditions for a center at a completely degenerate critical point*. *International Journal of bifurcation and chaos*, 12, 1659-1666. 2013, Abril, De Worldscientific Base de datos.

- [14] Guckenheimer, J. & Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer .
- [15] Lamb S. & Roberts J. (1998). *Time-Reversal Symmetry in Dynamical Systems: A Survey*. 2014, Mayo, de CiteSeerX Sitio web: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.57.6979>
- [16] Llibre, J. (2008). *Open problems on the algebraic limit cycles of planar polynomial vector fields*. Buletinul academiei de stiinte a republicii Moldova, matematica, 1, 19-26. 2012, De Institutul de Matematica si Informatica Base de datos.
- [17] Llibre, J. & Martínez, J. (2012). *An upper bound of the index of an equilibrium point in the plane*. Journal of Differential Equations, 253, 2460-2473. 2012, De Science Direct Base de datos.
- [18] Mackay, R. (1993). *Renormalisation in Area-preserving maps*. Singapur: World Scientific.
- [19] Mañosa, V. (2001). *On the center problem for degenerate singular points of planar vector fields*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 12, 687-707. 2013, Enero , De Worldscientific Base de datos.
- [20] Maza, S. (2008). *Discrete and continuous symmetries in planar vector fields*. Tesis Doctoral, Universitat de Lleida.
- [21] Meiss, J. (2007). *Differential Dynamical Systems*. U.S.A.: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [22] Pelletier, M. (1994). *Contribution a létude de quelques singularites de systemes non lineaires*. Tesis Doctoral, Université de Bourgogne.
- [23] Pelletier, M. (1995). *Éclatements quasi-homogènes*. Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 4, 879-937. 2014, Marzo, De Numdam Base de datos.
- [24] Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer.
- [25] Poincaré, H. (1881). *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*. Journal de mathématiques pures et appliquées, 7, 375-422. 2014, Febrero, De Gallica Base de datos.