



UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Ciclos límite de cruce en sistemas lineales por
pedazos sin deslizamiento

T E S I S

Que para obtener el título de:

**Maestro en Ciencias
(Matemáticas)**

Presenta:

Mat. Bruno Campoy Garza

Director de tesis: Dr. Fernando Verduzco González

Hermosillo, Sonora, México

Diciembre de 2017

Sinodales

Dr. Fernando Verduzco González

Universidad de Sonora,
Hermosillo, México

Dr. Juan Andres Castillo Valenzuela

Universidad de Sonora,
Hermosillo, México

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro

Universidad de Sonora,
Hermosillo, México

Dr. Juan Gonzalo Barajas Ramírez

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICyT),
San Luis Potosí, México

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi director de tesis, el Dr. Fernando Verduzco González por su tiempo, paciencia y enseñanzas, a los sinodales, los doctores Juan Andres Castillo Valenzuela, Francisco Armando Carrillo Navarro y Juan Gonzalo Barajas Ramírez por sus observaciones, aclaraciones y correcciones; al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y a la Universidad de Sonora por todo el apoyo y las oportunidades que me han dado. Gracias también a mi familia por su apoyo.

Índice general

Introducción	VII
1. Preliminares	1
2. Forma normal	6
3. Cálculo de mapeos de Poincaré	14
3.1. Tangencia invisible	15
3.1.1. Caso real	17
3.1.2. Caso complejo	21
3.2. Tangencia visible	24
4. Ciclos límite en sistemas sin deslizamiento	34
4.1. Foco-foco	36
4.2. Casos con un equilibrio frontera y tangencia invisible	38
4.3. Casos con un equilibrio frontera y tangencia visible	41
4.4. Casos con tangencia visible-invisible	42
4.5. Foco fundido	44
4.5.1. Existencia de un centro	45
4.5.2. Ciclos límite y estabilidad	47
4.6. Silla fundida	50
Conclusiones	56
Apéndices	57
A. Teoría de mapeos	57
B. Demostración del Lema 3.5	58
C. Teorema de la Función Implícita	60
Bibliografía	61

Introducción

En la actualidad, el análisis de sistemas lineales por pedazos (SLPP) es un campo de investigación activo, ya que ciertos dispositivos modernos pueden ser modelados usando este tipo de sistemas. Los SLPP son la extensión natural de los sistemas lineales con el fin de abarcar comportamientos no-lineales. Este tipo de sistemas son extensamente utilizados para modelar procesos biológicos así como también dispositivos mecánicos y electrónicos (ver [7] y [8]). Los avances teóricos en el análisis cualitativo de dicha clase de sistemas con los que se cuentan hoy en día resultan ser una herramienta muy útil a la hora de estudiar y comprender diversos fenómenos físicos con una naturaleza compuesta por procesos continuos ó discretos que se llevan a cabo por partes, es decir, con un desarrollo continuo que es interrumpido por eventos instantáneos, como por ejemplo, el presionar un interruptor en un circuito eléctrico, algunos dispositivos mecánicos cuyos componentes se impactan unos con otros, fenómenos ocasionados por fricción, colisión, deslizamiento, entre otros (ver [5], [6], [7]). Los SLPP se encuentran frecuentemente en todos los campos de la ciencia y la ingeniería, donde la relación entre las variables es suave pero puede ser de naturaleza distinta en algunas regiones del espacio fase. Entre algunos ejemplos famosos de SLPP, se encuentran sistemas mecánicos de adhesión-resbale, donde la fricción entre dos superficies es diferente de cero y cambia de signo con la velocidad relativa de las superficies (ver [9]).

Un SLPP en el plano es de la forma

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x) & \text{para } x \in R_1, \\ F_2(x) & \text{para } x \in R_2, \end{cases}$$

donde $F_i(x) = A_i x + b_i$, $A_i \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $b_i \in \mathbb{R}^2$, para $i = 1, 2$ y R_i son las regiones delimitadas por la curva de conmutación

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = 0\},$$

tales que $R_1 \cup R_2 \cup \Sigma = \mathbb{R}^2$ y $R_1 \cap R_2$ es vacío, donde H es una función escalar suave. En este trabajo supondremos que Σ es una recta. Además de Σ , consideraremos otras dos rectas L_1 y L_2 , por las cuales el flujo atraviesa de forma paralela a Σ . Naturalmente, al tener estas tres rectas en el plano, dependiendo de su inclinación, éstas pueden intersectarse o ser paralelas. Nos enfocaremos en el estudio de solamente el caso donde las tres rectas se intersectan. Más aún, posteriormente se establecen

condiciones para que las direcciones normales de estas rectas sean linealmente independientes entre sí, así descartando casos donde alguna de las tres sea paralela a alguna otra. Al intersectar L_1 y L_2 a Σ en diferentes puntos, se dá lugar a la existencia de por lo menos tres distintos segmentos en Σ delimitados por L_1 ó L_2 , en los cuales el flujo puede cruzar Σ desde una región hacia la otra, o colisionar en el punto de intersección sobre Σ y así deslizarse sobre ésta. Al segmento compuesto por puntos donde el flujo cruza de una región a otra se le conoce como *segmento de cruce*, mientras que al segmento con puntos que se deslizan sobre ésta se le llama *segmento de deslizamiento*. En este documento trabajaremos solamente con el caso donde L_1 y L_2 intersectan a Σ en un mismo punto, el cual es llamado el punto de doble tangencia, y de esta manera, no existen segmentos de deslizamiento en Σ , solamente de cruce. Adicionalmente, si existe un ciclo límite y éste intersecta a la conmutación en puntos de deslizamiento, entonces éste es llamado un *ciclo límite de deslizamiento*, mientras que si el ciclo intersecta a Σ en puntos de cruce, es llamado *ciclo límite de cruce*. Estos últimos son el principal objeto de estudio de este trabajo.

En el primer capítulo se presentan los conceptos y definiciones básicas para entender qué es un SLPP y cómo funcionan, como recta de conmutación, puntos de equilibrio, equilibrios virtuales, equilibrios frontera, pseudo-equilibrios, los tipos de segmentos sobre la conmutación, puntos de tangencia, tipos de tangencia, entre otros, así como también se establecen las condiciones e hipótesis generales que descartan la existencia de segmentos de deslizamiento sobre la conmutación, lo cual es la principal característica de la familia de sistemas con la que se trabaja a lo largo del documento.

En el segundo capítulo se propone y se calcula una forma normal para la familia de SLPP antes mencionada. En el tercer capítulo se desarrollan los análisis y cálculos para obtener las funciones laterales (una en cada región) utilizadas para construir mapeos de Poincaré y en el último capítulo se enlistan resultados sobre la existencia y estabilidad de ciclos límite de cruce en diferentes casos particulares de la forma normal obtenida anteriormente, los cuales son demostrados utilizando los mapeos de Poincaré construídos en el capítulo anterior.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan conceptos y definiciones básicas y fundamentales en el estudio de SLPP, así como también se establecen las hipótesis generales que se usarán como convención a lo largo de todo este trabajo, ya que éstas dan lugar a la aparición de la familia de SLPP que se estudiará posteriormente. Primeramente, se definen los conceptos y objetos más importantes:

Sea

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T x = c_0\}$$

la *recta de conmutación*, con $c \in \mathbb{R}^2$, $c_0 \in \mathbb{R}$. Esta recta divide al plano \mathbb{R}^2 en dos regiones. Definamos cada una de éstas de la siguiente manera:

$$R_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T x < c_0\},$$

$$R_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T x > c_0\}.$$

Definición 1.1. *Un sistema lineal por pedazos en el plano es de la forma*

$$\dot{x} = \begin{cases} f^-(x) = A_1 x + b_1 & \text{para } x \in R_1, \\ f^+(x) = A_2 x + b_2 & \text{para } x \in R_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $A_i \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $b_i \in \mathbb{R}^2$, para $i = 1, 2$.

Definición 1.2. *Diremos que $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio (o punto de equilibrio) del sistema (1.1) en R_1 si $f^-(\bar{x}) = 0$ y, además, $\bar{x} \in R_1$. Similarmente, \bar{x} es un equilibrio en R_2 si $f^+(\bar{x}) = 0$ y $\bar{x} \in R_2$.*

Definición 1.3. *Diremos que $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio virtual de (1.1) en R_1 si $f^-(\bar{x}) = 0$ y $\bar{x} \in R_2$. De igual manera, \bar{x} es un equilibrio virtual en R_2 si $f^+(\bar{x}) = 0$ y $\bar{x} \in R_1$.*

Definición 1.4. *Diremos que $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio frontera si \bar{x} es un punto de equilibrio y, además, $\bar{x} \in \Sigma$.*

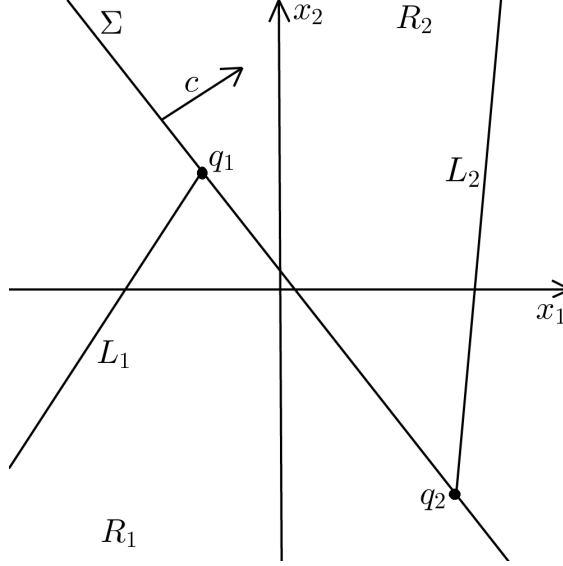


Figura 1.1: Sistema (1.1). q_1 y q_2 son los puntos de tangencia del sistema.

Definamos también otras dos rectas importantes en \mathbb{R}^2 :

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(A_1x + b_1) = 0 \text{ para } x \in \Sigma \cup R_1\},$$

$$L_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(A_2x + b_2) = 0 \text{ para } x \in \Sigma \cup R_2\}.$$

Por la manera en la que fueron definidas dichas rectas, éstas tienen la propiedad de que el flujo en cada uno de sus puntos es paralelo a Σ . La importancia de estas rectas se debe a que éstas indican cuándo el flujo retorna de una región a otra, lo cual es esencial en el análisis y búsqueda de ciclos límites, particularmente de cruce, el cual es el principal objetivo de este trabajo. En la Figura 1.1 se presenta una ilustración geométrica del sistema (1.1) en el plano.

Observación 1.5. Sean p_1 y p_2 equilibrios en R_1 y R_2 , respectivamente, del sistema (1.1). Sabemos que éstos cumplen que

$$\begin{aligned} A_1p_1 + b_1 &= 0 \text{ y} \\ A_2p_2 + b_2 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por c^T por la izquierda en ambas ecuaciones, tenemos

$$c^T(A_1p_1 + b_1) = 0 \text{ y } c^T(A_2p_2 + b_2) = 0,$$

es decir, p_1 y p_2 son puntos de L_1 y L_2 , respectivamente.

Al tener estas tres rectas en el plano, es claro que, si las rectas L_i no son paralelas a Σ , ésto da lugar a puntos de intersección de cada recta L_i con Σ , en los cuales el flujo en alguno de los dos campos es tangente a Σ , por lo que llamamos a éstos

los puntos de tangencia q_1 y q_2 , como se muestra en la Figura 1.1. Los puntos de tangencia se definen posteriormente, pero antes de ello, necesitamos calcular $\ddot{x}(t)$ en los puntos q_i . Dichos cálculos se muestran a continuación.

Sea $\varphi_t(x)$ el flujo para $f^-(x)$ en la región R_1 . Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ suave tal que

$$\gamma(t) = \varphi_t(x_0),$$

con $\gamma(\bar{t}) = q_1$, $\bar{t} > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Luego,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \dot{\varphi}_t(x_0), \\ &= f^-(\varphi_t(x_0)).\end{aligned}$$

Ahora la segunda derivada:

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= f^-(\varphi_t(x_0)), \\ \gamma''(t) &= Df^-(\varphi_t(x_0))\dot{\varphi}_t(x_0), \\ &= A_1(A_1\varphi_t(x_0) + b_1), \\ \gamma''(\bar{t}) &= A_1(A_1q_1 + b_1).\end{aligned}$$

Multiplicando por c^T por la izquierda en este último renglón obtenemos

$$c^T \gamma''(\bar{t}) = c^T A_1(A_1q_1 + b_1),$$

por lo que podemos hacer

$$r_1 = c^T A_1(A_1q_1 + b_1) = c^T A_1 f^-(q_1). \quad (1.2)$$

Análogamente, llamando $\psi_t(x)$ al flujo para $f^+(x)$ en R_2 , podemos obtener

$$r_2 = c^T A_2(A_2q_2 + b_2) = c^T A_2 f^+(q_2). \quad (1.3)$$

De esta manera, usando (1.2) y (1.3), podemos definir los diferentes tipos de tangencia que puede haber sobre Σ (ver [3] y Figura 1.2).

Definición 1.6. *Un punto $q \in \Sigma$ se dice ser un punto de tangencia cuadrática de (1.1) si*

1. $c^T f^-(q) = 0$ y $r_1 = c^T A_1 f^-(q) \neq 0$, o
2. $c^T f^+(q) = 0$ y $r_2 = c^T A_2 f^+(q) \neq 0$, o
3. q es un equilibrio frontera y además es un foco o un centro.

Más aún, q es un punto de tangencia invisible (visible) para f^- si

$$c^T f^-(q) = 0 \quad y \quad r_1 > 0 (< 0).$$

q es un punto de tangencia invisible (visible) para f^+ si

$$c^T f^+(q) = 0 \quad y \quad r_2 < 0 (> 0).$$

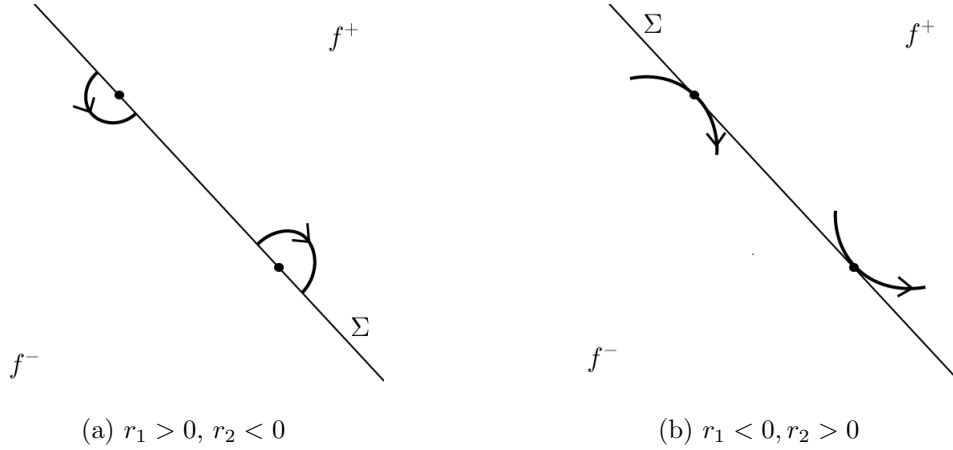


Figura 1.2: Distintos tipos de tangencia. (a) Tangencia invisible (en ambas regiones). (b) Tangencia visible.

Para garantizar la existencia de puntos de tangencia en el sistema (1.1), es necesario imponer una condición, la cual implique que ninguna de las tres rectas Σ , L_1 ó L_2 sean paralelas entre sí. Para fines de este trabajo, supondremos que la siguiente condición se satisface:

Hipótesis H1) $A_i^T c$ es linealmente independiente con c para $i = 1, 2$.

Dicha condición implica que

$$A_2^T c = \gamma_1 c + \gamma_2 A_1^T c, \quad (1.4)$$

con $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_2 \neq 0$.

Ahora, podemos definir dos segmentos abiertos sobre Σ , los cuales están delimitados por los puntos de tangencia q_1 y q_2 (ver [1]):

Definición 1.7. El segmento de cruce $\Sigma_c \subset \Sigma$ se define como

$$\Sigma_c = \{x \in \Sigma : \sigma(x) > 0\},$$

donde

$$\sigma(x) = \langle c, f^-(x) \rangle \langle c, f^+(x) \rangle.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual.

Definición 1.8. El segmento de deslizamiento Σ_s se define como

$$\Sigma_s = \{x \in \Sigma : \sigma(x) < 0\}.$$

Generalmente, el segmento de deslizamiento puede ser estable o inestable en la dirección normal. Si

$$\langle c, f^-(x) \rangle > 0 \text{ y } \langle c, f^+(x) \rangle < 0,$$

dicho segmento es estable, mientras que si

$$\langle c, f^+(x) \rangle < 0 \text{ y } \langle c, f^-(x) \rangle > 0,$$

éste es inestable. El *segmento de escape* Σ_e se define como el segmento de deslizamiento inestable. El segmento de deslizamiento presenta una dinámica propia, la cual puede ser calculada mediante el método convexo de Filippov (ver [10]), por lo que consecuentemente, dicho segmento cuenta con sus propios puntos de equilibrio, llamados *pseudo-equilibrios*. A continuación se enuncian dos diferentes definiciones de equivalencia topológica, las cuales se utilizarán posteriormente (ver [6]).

Definición 1.9. *Dos campos vectoriales f y F de la forma (1.1), definidos en conjuntos abiertos U y \tilde{U} y con curvas de conmutación $\Sigma \subset U$ y $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$ respectivamente, se dicen ser Σ -equivalentes si existe un homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva la orientación, el cual envía Σ en $\tilde{\Sigma}$ y envía órbitas de f en F .*

Definición 1.10. *Dos campos vectoriales f y F de la forma (1.1), definidos en conjuntos abiertos U y \tilde{U} y con curvas de conmutación $\Sigma \subset U$ y $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$ respectivamente, se dicen ser topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva la orientación, el cual envía órbitas de f en F .*

En este trabajo estudiaremos solamente SLPP en los cuales L_1 y L_2 intersectan a Σ en un mismo punto. Ahora estableceremos la condición bajo la cual se garantiza que ésto ocurra. De (1.4) tenemos que la ecuación de L_2 está dada por

$$\begin{aligned} (\gamma_1 c^T + \gamma_2 c^T A_1)x + c^T b_2 &= 0, \\ \gamma_1 c^T x + \gamma_2 c^T A_1 x + c^T b_2 &= 0, \end{aligned}$$

para $x \in \Sigma \cup R_2$. De esta forma, si suponemos que existe algún $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $x_0 \in \Sigma \cap L_1 \cap L_2$, tendríamos que

$$\gamma_1 c^T x_0 + \gamma_2 c^T A_1 x_0 + c^T b_2 = 0,$$

es decir,

$$\gamma_1 c_0 - \gamma_2 c^T b_1 + c^T b_2 = 0.$$

Por lo que establecemos la siguiente hipótesis:

$$\text{Hipótesis H2)} \quad \gamma_1 c_0 - \gamma_2 c^T b_1 + c^T b_2 = 0.$$

Al satisfacerse esta condición, L_1 y L_2 intersectan a Σ en un mismo punto, el cual es llamado el *punto de doble tangencia*.

En el siguiente capítulo se propone una forma normal para el sistema (1.1).

Capítulo 2

Forma normal

En este capítulo transformaremos el sistema (1.1) en un sistema nuevo, con el fin de simplificar la estructura geométrica del sistema original y así poder estudiarlo más fácilmente. Para ello haremos uso del siguiente teorema:

Teorema 2.1. *Suponga que se satisface la hipótesis H1. El cambio de coordenadas*

$$y = (y_1, y_2) = h(x) = \begin{cases} \gamma_2 T_1(x - q_1) & \text{para } x \in R_1, \\ T_2(x - q_1) & \text{para } x \in R_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde γ_2 es como definido en (1.4), $T_i = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_i \end{pmatrix}$ para $i = 1, 2$ y q_1 es el punto de tangencia para f^- del sistema (1.1), transforma dicho sistema en

$$\dot{y} = \begin{cases} F^-(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} & \text{para } y_1 < 0, \\ F^+(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} b \\ r_2 + d_2 b \end{pmatrix} & \text{para } y_1 > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Demostración. Primero apliquémoslo a f^- . De (2.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \gamma_2 T_1 \dot{x}, \\ &= \gamma_2 T_1 (A_1 x + b_1), \\ &= \gamma_2 T_1 \left(A_1 \left(\frac{1}{\gamma_2} T_1^{-1} y + q_1 \right) + b_1 \right), \\ &= (T_1 A_1 T_1^{-1}) y + \gamma_2 T_1 (A_1 q_1 + b_1), \end{aligned}$$

y haciendo $\bar{A}_1 = T_1 A_1 T_1^{-1}$ y $\bar{b}_1 = \gamma_2 T_1 (A_1 q_1 + b_1)$, podemos escribir

$$\dot{y} = \bar{A}_1 y + \bar{b}_1.$$

Calculando \bar{A}_1 y \bar{b}_1 :

$$\begin{aligned}\bar{A}_1 &= T_1 A_1 T_1^{-1}, \\ &= \begin{pmatrix} c^T A_1 T_1^{-1} \\ c^T A_1^2 T_1^{-1} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

pero, sabemos que $T_1 T_1^{-1} = I$, es decir

$$T_1 T_1^{-1} = \begin{pmatrix} c^T T_1^{-1} \\ c^T A_1 T_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

por lo que

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Luego,

$$\begin{aligned}\bar{b}_1 &= \gamma_2 T_1 (A_1 q_1 + b_1), \\ &= \gamma_2 \begin{pmatrix} c^T (A_1 q_1 + b_1) \\ c^T A_1 (A_1 q_1 + b_1) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

pero $c^T (A_1 q_1 + b_1) = 0$, ya que $q_1 \in L_1$. Más aún, por (1.2), tenemos

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix}.$$

De manera análoga, podemos aplicar (2.1) a $f^+(x)$ para obtener

$$\dot{y} = \bar{A}_2 y + \bar{b}_2,$$

con $\bar{A}_2 = T_2 A_2 T_2^{-1}$ y $\bar{b}_2 = T_2 (A_2 q_1 + b_1)$.

Calculando \bar{A}_2 :

$$\begin{aligned}\bar{A}_2 &= T_2 A_2 T_2^{-1}, \\ \bar{A}_2 &= \begin{pmatrix} c^T A_2 T_2^{-1} \\ c^T A_2^2 T_2^{-1} \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (2.5)$$

Haciendo

$$T_2^{-1} = (v_1 \ v_2), \quad (2.6)$$

con $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ y por (2.3), tenemos

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^T A_2 v_1 & c^T A_2 v_2 \end{pmatrix}$$

y haciendo

$$\begin{aligned}d_1 &= c^T A_2 v_1, \\d_2 &= c^T A_2 v_2,\end{aligned}\tag{2.7}$$

podemos escribir

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}.\tag{2.8}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\bar{b}_2 &= T_2(A_2 q_1 + b_2), \\&= \begin{pmatrix} c^T(A_2 q_1 + b_2) \\ c^T A_2(A_2 q_1 + b_2) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Hagamos

$$b = c^T(A_2 q_1 + b_2),\tag{2.9}$$

$$\hat{b} = c^T A_2(A_2 q_1 + b_2).\tag{2.10}$$

Demostraremos que $\hat{b} = r_2 + d_2 b$. Definamos

$$v = q_2 - q_1.\tag{2.11}$$

Consideremos v_1 y v_2 como en (2.6). Por ser éstos linealmente independientes, podemos escribir

$$v = s_1 v_1 + s_2 v_2,\tag{2.12}$$

con $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Multipliquemos por c^T por la izquierda en lo anterior para obtener

$$c^T v = s_1 c^T v_1 + s_2 c^T v_2.\tag{2.13}$$

Pero,

$$T_2 T_2^{-1} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A_2 \end{pmatrix} (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$c^T v_1 = 1,\tag{2.14}$$

$$c^T v_2 = 0,\tag{2.15}$$

$$c^T A_2 v_1 = 0,\tag{2.16}$$

$$c^T A_2 v_2 = 1.\tag{2.17}$$

Así, sustituyendo (2.14) y (2.15) en (2.13), obtenemos

$$c^T v = s_1,$$

pero $c^T v = 0$, por lo que

$$s_1 = 0 \quad (2.18)$$

Sustituyendo (2.18) en (2.12) tenemos

$$v = s_2 v_2. \quad (2.19)$$

Multipliquemos (2.19) por $c^T A_2$ por la izquierda para obtener

$$c^T A_2 v = s_2 c^T A_2 v_2.$$

Sustituyendo (2.17) en lo anterior, tenemos

$$\begin{aligned} s_2 &= c^T A_2 v, \\ &= c^T A_2 (q_2 - q_1) + c^T b_2 - c^T b_2, \\ &= c^T (A_2 q_2 + b_2) - c^T (A_2 q_1 + b_2), \end{aligned}$$

pero $c^T (A_2 q_2 + b_2) = 0$, ya que $q_2 \in L_2$, por lo que

$$s_2 = -b. \quad (2.20)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} r_2 &= c^T A_2 (A_2 (q_1 + v) + b_2) \\ &= c^T A_2 (A_2 q_1 + b_2 + A_2 v) \\ &= \hat{b} + c^T A_2^2 v \\ r_2 &= \hat{b} + s_2 d_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Así, sustituyendo (2.20) en (2.21), obtenemos

$$r_2 = \hat{b} - b d_2,$$

por lo que

$$\hat{b} = r_2 + d_2 b.$$

□

Observación 2.2. Debido a que siempre se puede normalizar c de tal forma que $\|v_2\| = 1$, de (2.19) y (2.20) se sigue que

$$\|q_2 - q_1\| = |b|.$$

Podemos ver que si $q_2 \rightarrow q_1$, entonces $b \rightarrow 0$, por lo que si $b = 0$, entonces dichos puntos colapsan en el punto de doble tangencia.

Observación 2.3. De (2.9) tenemos

$$\begin{aligned} b = 0 &\iff c^T(A_2q_1 + b_2) = 0, \\ c^TA_2q_1 + c^Tb_2 &= 0, \\ (\gamma_1c^T + \gamma_2c^TA_1)q_1 + c^Tb_2 &= 0, \quad (\text{por (1.4)}) \end{aligned}$$

y al sumar $\gamma_2c^Tb_1 - \gamma_2c^Tb_1$ en lo anterior, obtenemos

$$\gamma_1c_0 - \gamma_2c^Tb_1 + c^Tb_2 = 0.$$

Es decir, la Hipótesis H2 es equivalente a hacer $b = 0$.

En cuanto a las rectas Σ , L_1 y L_2 , sus respectivas transformaciones se calculan con la siguiente proposición:

Proposición 2.4. *El cambio de coordenadas (2.1) transforma Σ , L_1 y L_2 en*

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 = 0\}, \\ \tilde{L}_1 &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = 0 \text{ para } y \in \tilde{R}_1 \cup \tilde{\Sigma}\}, \\ \tilde{L}_2 &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = -b \text{ para } y \in \tilde{R}_2 \cup \tilde{\Sigma}\}, \end{aligned}$$

respectivamente, donde

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 < 0\}, \\ \tilde{R}_2 &= \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 > 0\}. \end{aligned}$$

Demostración. Primero transformemos Σ . Despejemos x en (2.1) y sustituyamos ésto en la expresión para Σ como sigue:

$$\begin{aligned} c^Tx - c_0 &= 0, \\ c^T(T_2^{-1}y + q_1) - c_0 &= 0, \\ (c^TT_2^{-1})y + c^Tq_1 - c_0 &= 0, \end{aligned}$$

pero, $c^Tq_1 - c_0 = 0$, ya que $q_1 \in \Sigma$. Luego, por el primer renglón de (2.3), tenemos que

$$(1, 0)y = 0,$$

es decir,

$$y_1 = 0.$$

En otras palabras, Σ es transformada en $\tilde{\Sigma}$. De manera similar, hagamos ahora ésto para L_1 :

$$\begin{aligned} c^T(A_1x + b_1) &= 0, \\ c^T\left(A_1\left(\frac{1}{\gamma_2}T_1^{-1}y + q_1\right) + b_1\right) &= 0, \\ \frac{1}{\gamma_2}(c^TA_1T_1^{-1})y + c^T(A_1q_1 + b_1) &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, $c^T(A_1q_1 + b_1) = 0$, ya que $q_1 \in L_1$, y además, por el segundo renglón de (2.3), tenemos que

$$y_2 = 0.$$

Por lo que L_1 es transformada en \tilde{L}_1 . Análogamente, haciendo lo mismo para L_2 , podemos obtener que $y_2 = -b$, y así, ésta se convierte en \tilde{L}_2 . \square

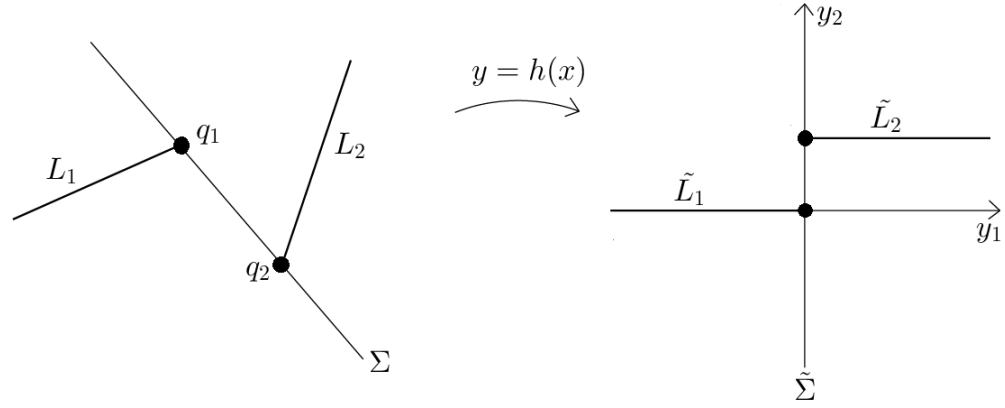


Figura 2.1: Efecto del cambio de coordenadas (2.1). Transformación del sistema (1.1) en (2.2).

Supongamos que existe un equilibrio p_1 de (2.2) en la región $y_1 < 0$ y sea $p_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix}$. Haciendo los cálculos correspondientes, podemos obtener que

$$p_{11} = -\frac{\gamma_2 r_1}{c_1} \quad \text{y}$$

$$p_{12} = 0.$$

Análogamente, para el equilibrio $p_2 = \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ en la región $y_1 > 0$ tenemos

$$p_{21} = -\frac{r_2}{d_1} \quad \text{y}$$

$$p_{22} = -b.$$

Observación 2.5. Es fácil ver que, si $r_1 > 0$, si se tiene una silla en $y_1 < 0$, ésta será no-virtual, mientras que todos los demás tipos de dinámica serán virtuales y viceversa para $r_1 < 0$. Análogamente, para $r_2 > 0$, una silla en $y_1 > 0$ será virtual, mientras que cualquier otro tipo de dinámica será no-virtual y viceversa para el caso $r_2 < 0$.

Al ser (2.1) un homeomorfismo por construcción, sabemos que los sistemas (1.1) y (2.2) son topológicamente equivalentes en las dos regiones delimitadas por la conmutación. En el siguiente corolario se establece la Σ -equivalencia de éstos dos sistemas.

Capítulo 2

Corolario 2.6. Si $\bar{x} \in \Sigma$, entonces

$$\begin{aligned} e_1^T F^-(h(\bar{x})) &= \gamma_2 c^T f^-(\bar{x}), \\ e_1^T F^+(h(\bar{x})) &= c^T f^+(\bar{x}). \end{aligned}$$

Es decir, si $\gamma_2 > 0$, entonces $h(\Sigma_a) = \tilde{\Sigma}_a$ para $a \in \{c, s, e\}$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in \Sigma$. Tenemos

$$\begin{aligned} e_1^T F^-(h(\bar{x})) &= c^T A_2(\bar{x} - q_1), \\ &= (\gamma_1 c^T + \gamma_2 c^T A_1)(\bar{x} - q_1), \quad (\text{por (1.4)}) \\ &= \gamma_2 c^T A_1(\bar{x} - q_1) + \gamma_2 c^T b_1 - \gamma_2 c^T b_1, \\ &= \gamma_2 c^T (A_1 \bar{x} + b_1) + \gamma_2 c^T (A_1 q_1 + b_1), \\ &= \gamma_2 c^T F^-(\bar{x}) + \gamma_2 c^T f^-(q_1), \\ &= \gamma_2 c^T f^-(\bar{x}). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} e_1^T F^+(h(\bar{x})) &= c^T A_2(\bar{x} - q_1) + b, \\ &= c^T A_2(\bar{x} - q_1) + c^T (A_2 q_1 + b_2), \\ &= c^T A_2 \bar{x} + c^T b_2, \\ &= c^T (A_2 \bar{x} + b_2), \\ &= c^T f^+(\bar{x}). \end{aligned}$$

□

Del Corolario 2.6 podemos ver que el signo del parámetro γ_2 divide a todos los SLPP que satisfacen la Hipótesis H1 en dos grandes clases: aquellos que tienen una ventana de deslizamiento delimitada por los dos puntos de tangencia ($\gamma_2 > 0$) y aquellos con una ventana de cruce delimitada también por estos puntos ($\gamma_2 < 0$). Esto se ilustra en la Figura 2.2.

Más aún, de las observaciones 2.2 y 2.3 es claro que si $\gamma_2 > 0$ y $b = 0$, entonces no existe segmento de deslizamiento. El resto de este trabajo trata solamente SLPP con un punto de doble tangencia y sin deslizamiento, por lo que, de aquí en adelante tomaremos $\gamma_2 > 0$ y haremos $b = 0$.

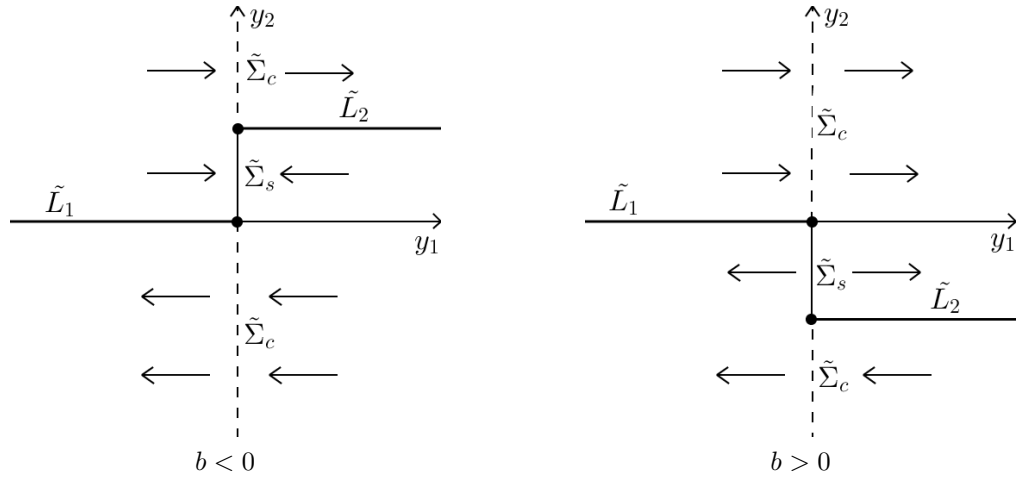


Figura 2.2: Flujo del sistema (2.2) cuando $\gamma_2 > 0$. Se tiene una ventana de deslizamiento delimitada por los puntos de tangencia.

Lo siguiente es obtener las herramientas necesarias para buscar ciclos límite de cruce en la forma normal (2.2), lo cual es el objetivo del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Cálculo de mapeos de Poincaré

En este capítulo se desarrolla el cálculo de los mapeos laterales que posteriormente serán utilizados para demostrar la existencia de ciclos límite de cruce, dependiendo del tipo de tangencia que exista en cada una de las dos regiones en el plano. Se calcula un mapeo por cada región, h_1 en $x_1 < 0$ y h_2 en $x_1 > 0$, los cuales se usarán para construir los mapeos de Poincaré $P = h_2 \circ h_1$. Dicho mapeo es importante ya que la existencia de puntos fijos de éste implica la existencia de ciclos límite. Equivalentemente, si $c \in \mathbb{R}$ es un cero del mapeo $P = h_1 - h_2$, entonces

$$\begin{aligned}h_1(c) - h_2(c) &= 0, \\h_1(c) &= h_2(c), \\h_2^{-1}(h_1(c)) &= c,\end{aligned}$$

es decir, c es un punto fijo de $h_2^{-1} \circ h_1$, por lo que, en caso de no poder realizar la composición $h_2 \circ h_1$, se considerará el mapeo $P = h_1 - h_2$.

Sin perder de vista que estaremos trabajando con la forma normal del sistema (1.1) que construimos previamente, readoptaremos la variable original x , así como también los símbolos originales Σ , L_1 y L_2 para las rectas y b_1, b_2, A_1, A_2 para los vectores y matrices. Adicionalmente, de aquí en adelante se estudian exclusivamente sistemas sin deslizamiento, por lo que, por el resto de este trabajo, supondremos que $\gamma_2 > 0$ y que $b = 0$. A continuación un rápido recordatorio de la forma normal (2.2), que es el sistema que analizaremos por el resto de este trabajo:

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Sea φ_t el flujo en $x_1 < 0$ y ψ_t el flujo en $x_1 > 0$. El problema que se plantea en este capítulo es probar la existencia de tiempos $t_1, t_2 > 0$ tales que el siguiente sistema de ecuaciones tenga solución:

$$\begin{aligned} S_1 &= \varphi_{t_1}(z_2) - z_1 = 0, \\ S_2 &= \psi_{t_2}(z_1) - z_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $z_1 = (0, u)^T$ y $z_2 = (0, v)^T$, con $u > 0$ y $v < 0$. $S_1 = 0$ se usará para calcular el mapeo lateral $u = h_1(v)$ y $S_2 = 0$ para $v = h_2(u)$. Geométricamente, podemos representar el sistema (3.2) como se muestra en la Figura 3.1.

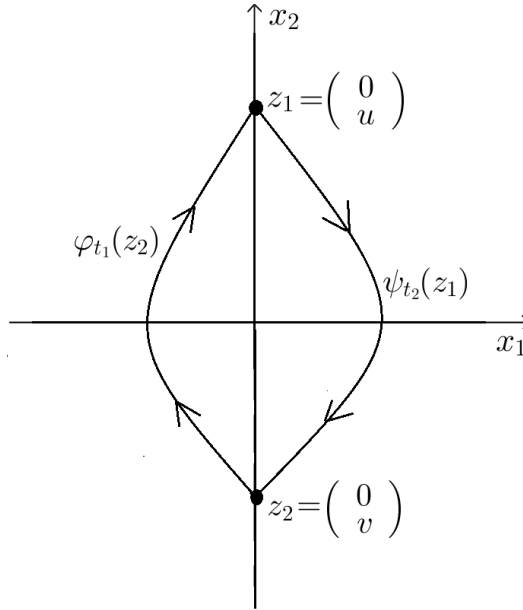


Figura 3.1: Representación geométrica del sistema de ecuaciones (3.2).

Además, supondremos que los valores propios de A_1 y A_2 son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \sigma(A_1) &= \{\lambda_1, \lambda_2\} \quad y \\ \sigma(A_2) &= \{\delta_1, \delta_2\}. \end{aligned}$$

A continuación se calculan los mapeos laterales dependiendo del tipo de tangencia que exista en cada región, por separado.

3.1. Tangencia invisible

En esta sección se calculan los mapeos laterales h_1 y h_2 para los casos donde existe tangencia invisible en el origen. Para ello, resolveremos el sistema de ecuaciones (3.2). Antes de empezar, estableceremos las siguientes convenciones para los valores propios de A_1 y A_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\neq \lambda_2, \quad \lambda_1 \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_1 < \lambda_2 \quad y \\ \delta_1 &\neq \delta_2, \quad \delta_1 \delta_2 \neq 0, \quad \delta_1 < \delta_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Mediante cálculos, podemos reducir la ecuación vectorial $S_1 = 0$ en dicho sistema a

$$S_1 = 0 \iff \begin{cases} e^{\lambda_1 t_1} = \frac{\gamma_2 r_1 + \lambda_1 u}{\gamma_2 r_1 + \lambda_1 v}, \\ e^{\lambda_2 t_1} = \frac{\gamma_2 r_1 + \lambda_2 u}{\gamma_2 r_1 + \lambda_2 v}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Haciendo lo mismo para $S_2 = 0$,

$$S_2 = 0 \iff \begin{cases} e^{\delta_1 t_2} = \frac{r_2 + \delta_1 v}{r_2 + \delta_1 u}, \\ e^{\delta_2 t_2} = \frac{r_2 + \delta_2 v}{r_2 + \delta_2 u}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Hagamos $\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\gamma_2 r_1}$, ($i = 1, 2$), para escribir (3.4) como

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t_1} &= \frac{1 + \tilde{\lambda}_1 u}{1 + \tilde{\lambda}_1 v}, \\ e^{\lambda_2 t_1} &= \frac{1 + \tilde{\lambda}_2 u}{1 + \tilde{\lambda}_2 v}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Luego, haciendo

$$g_i(z) = 1 + \tilde{\lambda}_i z, \quad i = 1, 2,$$

podemos escribir (3.6) como

$$e^{\lambda_1 t_1} = \frac{g_1(u)}{g_1(v)}, \quad (3.7)$$

$$e^{\lambda_2 t_1} = \frac{g_2(u)}{g_2(v)}. \quad (3.8)$$

Podemos despejar t_1 de (3.7) y (3.8) respectivamente para obtener

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{g_1(u)}{g_1(v)} \right), \\ t_1 &= \frac{1}{\lambda_2} \ln \left(\frac{g_2(u)}{g_2(v)} \right), \end{aligned}$$

y así podemos definir

$$G_1(u, v) = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{g_1(u)}{g_1(v)} \right) - \frac{1}{\lambda_2} \ln \left(\frac{g_2(u)}{g_2(v)} \right).$$

Es claro ver que $G_1(u, v) = 0$ es la solución de (3.4). Podemos ver que $G_1(u, v) = 0$ es equivalente a

$$\frac{1}{\lambda_1} \ln(g_1(u)) - \frac{1}{\lambda_2} \ln(g_2(u)) = \frac{1}{\lambda_1} \ln(g_1(v)) - \frac{1}{\lambda_2} \ln(g_2(v)).$$

Ahora, haciendo

$$H_1(z) = \frac{1}{\lambda_1} \ln(g_1(z)) - \frac{1}{\lambda_2} \ln(g_2(z)), \quad (3.9)$$

podemos concluir que

$$G_1(u, v) = 0 \iff H_1(u) = H_1(v).$$

De manera análoga a lo anterior, podemos hacer $\tilde{\delta}_i = \frac{\delta_i}{r_2}$, para escribir (3.5) como

$$\begin{aligned} e^{\delta_1 t_2} &= \frac{1 + \tilde{\delta}_1 v}{1 + \tilde{\delta}_1 u}, \\ e^{\delta_2 t_2} &= \frac{1 + \tilde{\delta}_2 v}{1 + \tilde{\delta}_2 u}, \end{aligned}$$

y así, siguiendo el procedimiento anterior, podemos obtener la equivalencia

$$G_2(u, v) = 0 \iff H_2(u) = H_2(v),$$

con

$$H_2(z) = \frac{1}{\delta_1} \ln(\tilde{g}_1(z)) - \frac{1}{\delta_2} \ln(\tilde{g}_2(z)), \quad (3.10)$$

donde

$$\tilde{g}_i(z) = 1 + \tilde{\delta}_i z, \quad i = 1, 2.$$

De esta manera, tenemos que si $\lambda_i, \delta_i \in \mathbb{R}$, entonces $H_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y, si $\lambda_i, \delta_i \in \mathbb{C}$, entonces $H_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. A continuación se estudian ambos casos por separado.

3.1.1. Caso real

Sean $\lambda_i, \delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. El siguiente resultado nos proporciona expresiones para calcular los mapeos h_1 y h_2 . Los cálculos en esta sección y en la siguiente están basados en [3].

Lema 3.1. *Considere una función real suave $H : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $H'(0) = 0$ y $H''(0) \neq 0$, entonces existe una función real suave $h : (-\varepsilon_1, 0] \rightarrow [0, \varepsilon_2)$, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, tal que*

$$H(v) = H(h(v)), \quad (3.11)$$

para cada $v \in (-\varepsilon_1, 0]$. Además, $h(0) = 0, h'(0) = -1, h''(0) = -\frac{2}{3} \frac{H'''(0)}{H''(0)}$ y $h'''(0) = -\frac{3}{2}(h''(0))^2$.

Demostración. Las hipótesis implican que H tiene un punto extremo local en $z = 0$, el cual asumiremos ser un mínimo, sin pérdida de generalidad. Luego, existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tales que, para cada $v \in (-\varepsilon_1, 0)$ existe un único $u \in (0, \varepsilon_2)$ tal que $H(u) = H(v)$, es decir, existe una función $h : (-\varepsilon_1, 0) \rightarrow [0, \varepsilon_2)$, tal que $h(0) = 0$ y

$$H(v) = H(h(v)),$$

para cada $v \in (-\varepsilon_1, 0]$ (ver Figura 3.2).

Ahora calculemos h . Por (3.11), tenemos

$$\begin{aligned} H(u) &= H(v), \\ H(h(v)) &= H(v), \\ H'(h(v))h'(v) &= H'(v), \end{aligned} \quad (3.12)$$

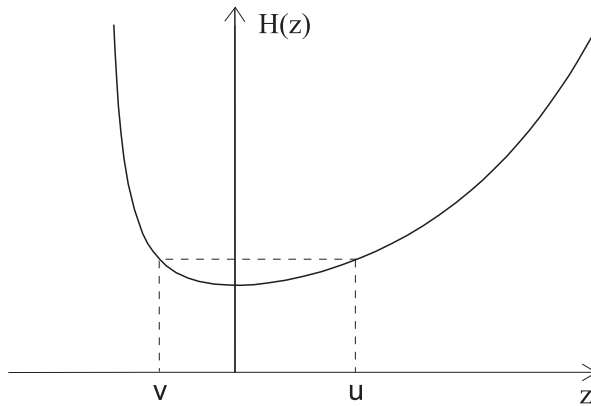


Figura 3.2: $u = h(v)$.

por lo que

$$h'(v) = \frac{H'(v)}{H'(h(v))}.$$

Luego, como $h'(0) = \frac{0}{0}$, calcularemos el límite

$$\begin{aligned} h'(0) &= \lim_{v \rightarrow 0^-} h'(v), \\ &= \lim_{v \rightarrow 0^-} \frac{H'(v)}{H'(h(v))}, \\ &= \lim_{v \rightarrow 0^-} \frac{H''(v)}{H''(h(v))h'(v)}, \\ &= \frac{1}{h'(0)}. \end{aligned}$$

Así, si suponemos que $h'(0)$ existe, tenemos que

$$(h'(0))^2 = 1,$$

pero, por la Figura 3.2, tenemos

$$h'(0) = -1.$$

Luego, de (3.12) tenemos

$$\begin{aligned} H'(h(v))h'(v) &= H'(v), \\ H''(h(v))(h'(v))^2 + H'(h(v))h''(v) &= H''(v), \end{aligned}$$

por lo que

$$h''(v) = \frac{H''(v) - H''(h(v))(h'(v))^2}{H'(h(v))}.$$

Como $h''(0) = \frac{0}{0}$, entonces, similarmente a lo hecho antes para encontrar $h'(0)$, calcularemos el límite

$$\begin{aligned} h''(0) &= \lim_{v \rightarrow 0^-} h''(v), \\ &= \lim_{v \rightarrow 0^-} \frac{H''(v) - H''(h(v))(h'(v))^2}{H'(h(v))}, \\ &= \lim_{v \rightarrow 0^-} \frac{H'''(v) - H'''(h(v))(h'(v))^3 - 2H''(h(v))h'(v)h''(v)}{H''(h(v))h'(v)}, \\ &= -\frac{2H'''(0) + 2H''(0)h''(0)}{H''(0)}, \end{aligned}$$

por lo que

$$h''(0) = -\frac{2}{3} \frac{H'''(0)}{H''(0)}.$$

Luego, de $H'''(v) = H'''(h(v))(h'(v))^3 + 3H''(h(v))h'(v)h''(v) + H'(h(v))h'''(v)$,

$$h'''(v) = \frac{H'''(v) - H'''(h(v))(h'(v))^3 - 3H''(h(v))h'(v)h''(v)}{H'(h(v))},$$

entonces,

$$\begin{aligned} h'''(0) &= \lim_{v \rightarrow 0^-} h'''(v), \\ &= \lim_{v \rightarrow 0^-} \frac{H'''(v) - H'''(h(v))(h'(v))^3 - 3H''(h(v))h'(v)h''(v)}{H'(h(v))}, \\ &= -6(h''(0))^2 - 3h'''(0), \end{aligned}$$

esto es,

$$h'''(0) = -\frac{3}{2}(h''(0))^2.$$

□

Consideremos las funciones H_1 y H_2 como definidas en (3.9) y (3.10), respectivamente:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{\lambda_1} \ln(g_1(z)) - \frac{1}{\lambda_2} \ln(g_2(z)), \\ H_2(z) &= \frac{1}{\delta_1} \ln(\tilde{g}_1(z)) - \frac{1}{\delta_2} \ln(\tilde{g}_2(z)), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} g_i(z) &= 1 + \tilde{\lambda}_i z, \\ \tilde{g}_i(z) &= 1 + \tilde{\delta}_i z, \end{aligned}$$

y $\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\gamma_2 r_1}$, $\tilde{\delta}_i = \frac{\delta_i}{r_2}$, $i = 1, 2$. Tenemos que

$$\begin{aligned} H_1(0) &= 0, \\ H_1'(0) &= 0, \\ H_1''(0) &= \frac{1}{(\gamma_2 r_1)^2} (\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0, \end{aligned}$$

y además,

$$\begin{aligned} H_2(0) &= 0, \\ H_2'(0) &= 0, \\ H_2''(0) &= \frac{1}{r_2^2} (\delta_1 - \delta_2) \neq 0. \end{aligned}$$

Así, podemos aplicar el Lema 3.1 a H_1 y H_2 , respectivamente, para garantizar la existencia de dos funciones reales suaves $h_1 : (-\varepsilon_1, 0] \rightarrow [0, \varepsilon_2)$ y $h_2 : [0, \varepsilon_2) \rightarrow (-\varepsilon_1, 0]$, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, tales que

$$\begin{aligned} h_1(0) &= 0, \\ h_1'(0) &= -1, \\ h_1''(0) &= \frac{4}{3} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\gamma_2 r_1} \quad \text{y} \\ h_1'''(0) &= -\frac{8}{3} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{(\gamma_2 r_1)^2}, \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} h_2(0) &= 0, \\ h_2'(0) &= -1, \\ h_2''(0) &= \frac{4}{3} \frac{\delta_1 + \delta_2}{r_2} \quad \text{y} \\ h_2'''(0) &= -\frac{8}{3} \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{r_2^2}. \end{aligned}$$

De esta forma, podemos escribir la expansión de Taylor alrededor de 0 de h_1 y h_2 como sigue:

$$h_1(v) = -v + \frac{2}{3} \frac{c_2}{\gamma_2 r_1} v^2 - \frac{4}{9} \frac{c_2^2}{(\gamma_2 r_1)^2} v^3 + \dots, \quad (3.13)$$

$$h_2(u) = -u + \frac{2}{3} \frac{d_2}{r_2} u^2 - \frac{4}{9} \frac{d_2^2}{r_2^2} u^3 + \dots \quad (3.14)$$

3.1.2. Caso complejo

Ahora, al suponer que $\lambda_i, \delta_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2$, haremos uso de otro resultado, el cual se enuncia a continuación.

Corolario 3.2. *Considere una función compleja suave $H : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $H(z) = 2i\theta(z)$, donde θ es una función real suave. Si $\theta'(0) = 0$ y $\theta''(0) \neq 0$, entonces existe una función real suave $h : (-\varepsilon_1, 0] \rightarrow [0, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, tal que*

$$H(v) = H(h(v)),$$

para cada $v \in (-\varepsilon_1, 0]$. Además, $h(0) = 0, h'(0) = -1, h''(0) = -\frac{2}{3} \frac{H'''(0)}{H''(0)}$ y $h'''(0) = -\frac{3}{2}(h''(0))^2$.

Demostración. Podemos observar que las hipótesis implican que la función real θ tiene un valor extremo en $z = 0$. Luego, por el Lema 3.1, existe una función $h : (-\varepsilon_1, 0] \rightarrow [0, \varepsilon_2)$, tal que $h(0) = 0$ y

$$\theta(v) = \theta(h(v)) \iff H(v) = H(h(v)),$$

para cada $v \in (-\varepsilon_1, 0]$. □

Ahora, como $\lambda_i, \delta_i \in \mathbb{C}$, podemos hacer $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \bar{\lambda}, \delta_1 = \delta$ y $\delta_2 = \bar{\delta}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} g_1(z) &= r(z)e^{i\rho(z)}, \\ g_2(z) &= r(z)e^{-i\rho(z)}, \end{aligned}$$

con $r(z), \rho(z) \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{\lambda}(\ln r(z) + i\rho(z)) - \frac{1}{\bar{\lambda}}(\ln r(z) + i\rho(z)), \\ &= \ln r(z) \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) + i\rho(z) \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) \end{aligned}$$

Ahora, suponiendo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \mu + i\eta, \\ \frac{1}{\bar{\lambda}} &= \mu - i\eta, \end{aligned}$$

con $\mu, \eta \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned} H_1(z) &= 2i\eta \ln r(z) + i\rho(z)(2\mu), \\ &= 2i(\mu\rho(z) + \eta \ln r(z)), \\ &= 2i\theta(z), \end{aligned}$$

Capítulo 3

donde θ es una función real suave. De manera análoga, podemos repetir el procedimiento anterior para H_2 y, así, es posible aplicar el Corolario 3.2 a las funciones suaves complejas H_1 y H_2 para concluir que, igual que en el caso real, en este caso h_1 y h_2 son los mapeos (3.13) y (3.14).

Ahora cubriremos los casos restantes, en los cuales las convenciones establecidas en (3.3) no se cumplen.

Nodos impropios

Supongamos que $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\delta_1 = \delta_2$. Entonces,

$$S_1 = 0 \iff \begin{cases} e^{\lambda_1 t_1} = \frac{u}{v + t_1(\gamma_2 r_1 + \lambda_1 v)}, \\ e^{\lambda_1 t_1} = \frac{\gamma_2 r_1}{\gamma_2 r_1 - \lambda_1 t_1(\gamma_2 r_1 + \lambda_1 v)} \end{cases} \quad (3.15)$$

con $t_1 = \frac{\gamma_2 r_1(u - v)}{(\gamma_2 r_1 + \lambda_1 u)(\gamma_2 r_1 + \lambda_1 v)}$. Sustituyendo t_1 en ambas ecuaciones de (3.15), obtenemos

$$e^{\frac{\gamma_2 r_1(g_1(u) - g_1(v))}{g_1(u)g_1(v)}} = \frac{g_1(u)}{g_1(v)},$$

donde $g_1(z) = \gamma_2 r_1 + \lambda_1 z$. Esto es,

$$S_1 = 0 \iff G_1(u, v) = g_1(v)e^{\frac{\gamma_2 r_1}{g_1(v)}} - g_1(u)e^{\frac{\gamma_2 r_1}{g_1(u)}} = 0,$$

Similarmente,

$$S_2 = 0 \iff \begin{cases} e^{\delta_1 t_2} = \frac{v}{u + t_2(r_2 + \delta_1 u)}, \\ e^{\delta_1 t_2} = \frac{r_2}{r_2 - \delta_1 t_2(r_2 + \delta_1 u)}, \end{cases}$$

y $t_2 = -\frac{r_2(u - v)}{(r_2 + \delta_1 u)(r_2 + \delta_1 v)}$. Esto es

$$S_2 = 0 \iff G_2(u, v) = g_2(v)e^{\frac{r_2}{g_2(v)}} - g_2(u)e^{\frac{r_2}{g_2(u)}} = 0,$$

donde $g_2(z) = r_2 + \delta_1 z$. Luego, las funciones $H_1(z) = g_1(z)e^{\frac{\gamma_2 r_1}{g_1(z)}}$ y $H_2(z) = g_2(z)e^{\frac{r_2}{g_2(z)}}$ satisfacen las hipótesis del Lema 3.1, por lo que las expresiones para h_1 y h_2 son (3.13) y (3.14).

Caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \delta_1 \neq 0, \delta_2 = 0$

Análogamente a lo hecho en la sección anterior, se tiene que

$$S_1 = 0 \iff \begin{cases} e^{\lambda_1 t_1} = \frac{\gamma_2 r_1 + \lambda_1 u}{\gamma_2 r_1 + \lambda_1 v}, \\ e^{\lambda_1 t_1} = \frac{\gamma_2 r_1 + \lambda_1 v + \gamma_2 r_1 \lambda_1 t_1}{\gamma_2 r_1 + \lambda_1 v}, \end{cases}$$

por lo que $t_1 = \frac{u - v}{\gamma_2 r_1}$. Esto es

$$S_1 = 0 \iff G_1(u, v) = g_1(v)e^{-\frac{\lambda_1 v}{\gamma_2 r_1}} - g_1(u)e^{-\frac{\lambda_1 u}{\gamma_2 r_1}} = 0,$$

y $S_2 = 0 \iff G_2(u, v) = g_2(v)e^{-\frac{\delta_1 v}{r_2}} - g_2(u)e^{-\frac{\delta_1 u}{r_2}} = 0$, y se tiene además que las funciones $H_1(z) = g_1(z)e^{-\frac{\lambda_1 z}{\gamma_2 r_1}}$ y $H_2(z) = g_2(z)e^{-\frac{\delta_1 z}{r_2}}$ satisfacen las hipótesis del Lema 3.1, para obtener así las mismas expresiones para h_1 y h_2 .

Caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \delta_1 = \delta_2 = 0$

Análogamente, se tiene que

$$S_1 = 0 \iff \begin{cases} \frac{(2v + \gamma_2 r_1 t_1)t_1}{2} = 0, \\ v - u + \gamma_2 r_1 t_1 = 0, \end{cases}$$

de donde obtenemos $t_1 = -\frac{2v}{\gamma_2 r_1}$ y $u = h_1(v) = -v$. Similarmente, de $S_2 = 0$, obtenemos $t_2 = -\frac{2u}{r_2}$ y $v = h_2(u) = -u$.

De esta manera, con lo anterior hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 3.3. *Considere el sistema (3.1). Si existe una tangencia invisible, entonces los mapeos laterales h_1 y h_2 en $x_1 < 0$ y $x_1 > 0$ respectivamente, están dados por*

$$h_1(v) = -v + \frac{2}{3} \frac{c_2}{\gamma_2 r_1} v^2 - \frac{4}{9} \frac{c_2^2}{(\gamma_2 r_1)^2} v^3 + \dots, \quad (3.16)$$

$$h_2(u) = -u + \frac{2}{3} \frac{d_2}{r_2} u^2 - \frac{4}{9} \frac{d_2^2}{r_2^2} u^3 + \dots, \quad (3.17)$$

con $u > 0$ y $v < 0$.

Observación 3.4. Debe aclararse que el sistema (3.2) no siempre tiene solución real. Supongamos que $r_1 < 0$ y $\lambda_i < 0$ ($i = 1, 2$), entonces $e^{\lambda_i t_1} < 1$ y, por (3.4), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_2 r_1 + \lambda_i u}{\gamma_2 r_1 + \lambda_i v} &< 1, \\ \frac{\gamma_2 r_1 + \lambda_i u}{\gamma_2 r_1 + \lambda_i v} - 1 &< 0, \\ \frac{\lambda_i(u - v)}{\gamma_2 r_1 + \lambda_i v} &< 0,\end{aligned}$$

pero, como $r_1 < 0$, entonces se tiene que

$$\frac{\lambda_i(u - v)}{\gamma_2 r_1 + \lambda_i v} > 0,$$

lo cual es una contradicción. Por otra parte, si $\lambda_i > 0$, tenemos que $e^{\lambda_i t_1} > 1$ y, repitiendo el procedimiento anterior podemos volver a obtener una contradicción al suponer que (3.4) se cumple. En otras palabras, hemos probado que (3.2) no tiene solución real cuando $r_1 < 0$. Análogamente, podemos repetir el procedimiento exhaustivo anterior para δ_i y así probar que (3.5) no tiene solución real cuando $r_2 > 0$. En otras palabras, el sistema (3.2) no tiene solución real en una región, cuando exista tangencia visible en el origen en ésta. Cuando exista tangencia invisible, la solución de dicho sistema puede ser tanto real como compleja, por lo que la dinámica no se especifica. Por ésto, siempre que se tenga tangencia visible, supondremos que los respectivos equilibrios son focos o centros.

3.2. Tangencia visible

En esta sección se presenta una forma diferente de resolver el sistema (3.2), para el caso cuando se tiene tangencia visible en el origen. Como, por la Observación 3.4, sabemos que dicho sistema solamente tiene solución en \mathbb{C} , en el desarrollo siguiente supondremos que $\lambda_i, \delta_i \in \mathbb{C}$, por lo que prescindiremos de los subíndices y haremos

$$\begin{aligned}\sigma(A_1) &= \{\lambda = \alpha_1 + i\beta_1, \bar{\lambda}\}, \\ \sigma(A_2) &= \{\delta = \alpha_2 + i\beta_2, \bar{\delta}\},\end{aligned}$$

con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i > 0$, $i = 1, 2$.

Como fue hecho previamente, mediante cálculos podemos reducir el sistema vectorial (3.2) al sistema siguiente:

$$S_1 = 0 \iff \begin{cases} e^{\lambda t_1} = \frac{\gamma_2 r_1 + \lambda u}{\gamma_2 r_1 + \lambda v}, \\ e^{\bar{\lambda} t_1} = \frac{\gamma_2 r_1 + \bar{\lambda} u}{\gamma_2 r_1 + \bar{\lambda} v}. \end{cases} \quad (3.18)$$

$$S_2 = 0 \iff \begin{cases} e^{\delta t_2} = \frac{r_2 + \delta v}{r_2 + \delta u}, \\ e^{\bar{\delta} t_2} = \frac{r_2 + \delta v}{r_2 + \bar{\delta} u}. \end{cases} \quad (3.19)$$

El objetivo es resolver este sistema. Primero, haciendo

$$z = \frac{\gamma_2 r_1 + \lambda u}{\gamma_2 r_1 + \lambda v} \quad (3.20)$$

es fácil ver que

$$\bar{z} = \frac{\gamma_2 r_1 + \bar{\lambda} u}{\gamma_2 r_1 + \bar{\lambda} v},$$

por lo que podemos escribir (3.18) como

$$e^{\lambda t_1} = z, \quad (3.21)$$

$$e^{\bar{\lambda} t_1} = \bar{z}. \quad (3.22)$$

De (3.21), tenemos

$$\begin{aligned} e^{t_1} &= z^{\frac{1}{\lambda}}, \\ &= e^{\frac{1}{\lambda} \text{Log } z}, \\ &= e^{\frac{1}{\lambda} (\ln |z| + i \text{Arg } z)}. \end{aligned}$$

Desarrollando lo anterior, tenemos

$$e^{t_1} = e^{x \ln |z| - y \text{Arg } z} e^{i(x \text{Arg } z + y \ln |z|)}, \quad (3.23)$$

con

$$x = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \quad y = -\frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}.$$

El lado derecho de (3.23) debe ser un número real, por lo que debe cumplirse que

$$x \text{Arg } z + y \ln |z| = 2n\pi \quad (3.24)$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, de (3.22) es fácil ver que también

$$e^{t_1} = e^{x \ln |z| - y \text{Arg } z} e^{-i(x \text{Arg } z + y \ln |z|)},$$

por lo que se debe tener que

$$-(x \text{Arg } z + y \ln |z|) = 2m\pi, \quad (3.25)$$

con $m \in \mathbb{Z}$. Luego, considerando (3.24) y (3.25), podemos tomar $n = m = 0$, por lo que, si hacemos

$$E_1(u, v) = x \text{Arg } z + y \ln |z|,$$

Capítulo 3

entonces la solución de (3.18) está dada por $E_1(u, v) = 0$. Adicionalmente, de (3.23) es fácil ver que

$$t_1 = x \ln |z| - y \operatorname{Arg} z. \quad (3.26)$$

Luego, podemos multiplicar $E_1(u, v) = 0$ por α_1 , (3.26) por β_1 y sumar éstas para obtener

$$t_1 = \frac{\operatorname{Arg} z}{\beta_1}.$$

De lo anterior observamos que, para tener que $t_1 > 0 \forall \alpha_1$, es necesario que $\operatorname{Arg} z > 0$, por lo que haremos la convención $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$.

Podemos ahora escribir $z = F_1(u, v)$ como definida en (3.20) en su forma

$$F_1(u, v) = X_1(u, v) + iY_1(u, v),$$

donde

$$X_1(u, v) = \frac{(\gamma_2 r_1)^2 + \gamma_2 r_1 \alpha_1 (u + v) + uv(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{(\gamma_2 r_1 + \alpha_1 v)^2 + (\beta_1 v)^2},$$

$$Y_1(u, v) = \frac{\beta_1 \gamma_2 r_1 (u - v)}{(\gamma_2 r_1 + \alpha_1 v)^2 + (\beta_1 v)^2}.$$

Definamos ahora la región de nuestro interés en el plano (u, v) :

$$R_0 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v < 0\}$$

y veamos cuál es su imagen bajo la función F_1 .

Supongamos que $r_1 < 0$. Es inmediato ver que $F_1(0, 0) = 1$ y que $Y_1 < 0$, por lo que, para todo $z \in F_1(R_0)$ tendremos que $\pi < \operatorname{Arg} z < 2\pi$. Ahora, calculemos la imagen de los ejes $v = 0$ y $u = 0$ que delimitan a R_0 en \mathbb{R}^2 . Primero, la imagen de $v = 0$ bajo F_1 :

$$F_1(u, 0) = \frac{(\gamma_2 r_1)^2 + \gamma_2 r_1 \alpha_1 u}{(\gamma_2 r_1)^2} + i \left(\frac{\beta_1 \gamma_2 r_1}{(\gamma_2 r_1)^2} \right) u,$$

$$= 1 + \frac{\alpha_1}{\gamma_2 r_1} u + i \left(\frac{\beta_1}{\gamma_2 r_1} \right) u,$$

es decir,

$$X_1(u) = 1 + \frac{\alpha_1}{\gamma_2 r_1} u, \quad Y_1(u) = \left(\frac{\beta_1}{\gamma_2 r_1} \right) u,$$

por lo que obtenemos

$$Y_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} (X_1 - 1).$$

En cuanto al eje $u = 0$, el cálculo de su imagen bajo F_1 se basa en el siguiente lema:

Lema 3.5. Las imágenes bajo F_1 de las rectas $u = kv$, $k \leq 0$, son las circunferencias

$$\left(X_1 - \frac{k+1}{2}\right)^2 + \left(Y_1 - \left(\frac{1-k}{2}\right) \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2 = \frac{(1-k)^2 |\lambda|^2}{4\beta_1^2}. \quad (3.27)$$

La demostración de este lema se incluye en el Apéndice B. La imagen del eje $u = 0$ es simplemente la ecuación (3.27) para $k = 0$,

$$\left(X_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y_1 - \frac{\alpha_1}{2\beta_1}\right)^2 = \frac{|\lambda|^2}{4\beta_1^2}.$$

Finalmente, la imagen de R_0 bajo F_1 es como se ilustra en la Figura 3.3.

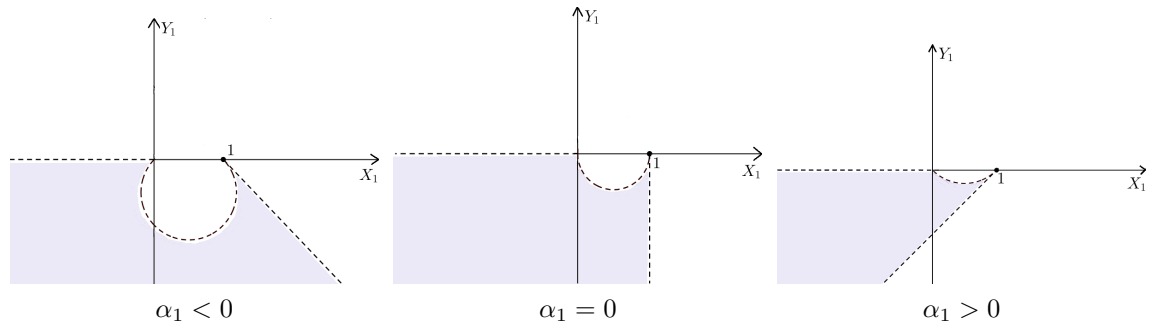


Figura 3.3: $F_1(R_0)$ en \mathbb{C} ($r_1 < 0$).

Entonces, si para todo $z \in F_1(R_0)$ definimos

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \text{Arctan} \left(\frac{Y_1}{X_1} \right) + 2\pi & \text{si } X_1 > 0, \\ \text{Arctan} \left(\frac{Y_1}{X_1} \right) + \pi & \text{si } X_1 < 0, \end{cases}$$

obtenemos la expresión para $E_1(u, v)$ como sigue:

$$E_1(u, v) = \begin{cases} 2\alpha_1 \left(\text{Arctan} \left(\frac{Y_1}{X_1} \right) + 2\pi \right) - \beta_1 \ln(X_1^2 + Y_1^2), & \text{si } X_1 > 0, \\ 2\alpha_1 \left(\text{Arctan} \left(\frac{Y_1}{X_1} \right) + \pi \right) - \beta_1 \ln(X_1^2 + Y_1^2), & \text{si } X_1 < 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

y así, la solución de (3.18) está dada por $E_1(u, v) = 0$.

Mediante cálculos, podemos escribir la expresión para $X_1(u, v) = 0$ de la siguiente manera:

$$v = -\frac{\gamma_2 r_1 \alpha_1 u + (\gamma_2 r_1)^2}{|\lambda|^2 u + \gamma_2 r_1}.$$

En la Figura 3.4 se presenta la gráfica de (3.28).

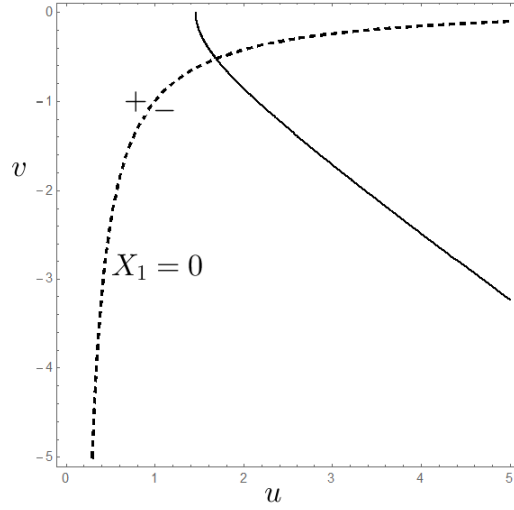


Figura 3.4: Gráfica de (3.28) para $\gamma_2 = \beta_1 = 1, r_1 = -1, \alpha_1 = 0.1$.

Análogamente, haciendo

$$w = \frac{r_2 + \delta v}{r_2 + \delta u}$$

podemos escribir (3.5) como

$$e^{\delta t_2} = w, \quad (3.29)$$

$$e^{\bar{\delta} t_2} = \bar{w}, \quad (3.30)$$

y así seguir todo el procedimiento anterior. Podemos escribir $w = F_2(u, v)$ en su forma $F_2(u, v) = X_2(u, v) + iY_2(u, v)$, con

$$X_2(u, v) = \frac{r_2^2 + r_2\alpha_2(u + v) + uv(\alpha_2^2 + \beta_2^2)}{(r_2 + \alpha_2 u)^2 + (\beta_2 u)^2},$$

$$Y_2(u, v) = -\frac{\beta_2 r_2(u - v)}{(r_2 + \alpha_2 u)^2 + (\beta_2 u)^2}$$

Podemos también calcular $F_2(R_0)$ cuando $r_2 > 0$, que es como se ilustra en la Figura 3.5. Luego, la expresión para $E_2(u, v)$ es

$$E_2(u, v) = \begin{cases} 2\alpha_2 \left(\text{Arctan} \left(\frac{Y_2}{X_2} \right) + 2\pi \right) - \beta_2 \ln(X_2^2 + Y_2^2), & \text{si } X_2 > 0, \\ 2\alpha_2 \left(\text{Arctan} \left(\frac{Y_2}{X_2} \right) + \pi \right) - \beta_2 \ln(X_2^2 + Y_2^2), & \text{si } X_2 < 0. \end{cases}$$

y la solución de (3.19) está dada por $E_2(u, v) = 0$.

Análogamente, para $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$, podemos ver que $Y_i > 0$, por lo que $0 < \text{Arg } z < \pi$ para $z \in F_i(R_0)$, $i = 1, 2$. Así, repitiendo el procedimiento anterior, podemos obtener $F_i(R_0)$ como se ilustra en las figuras 3.6 y 3.7.

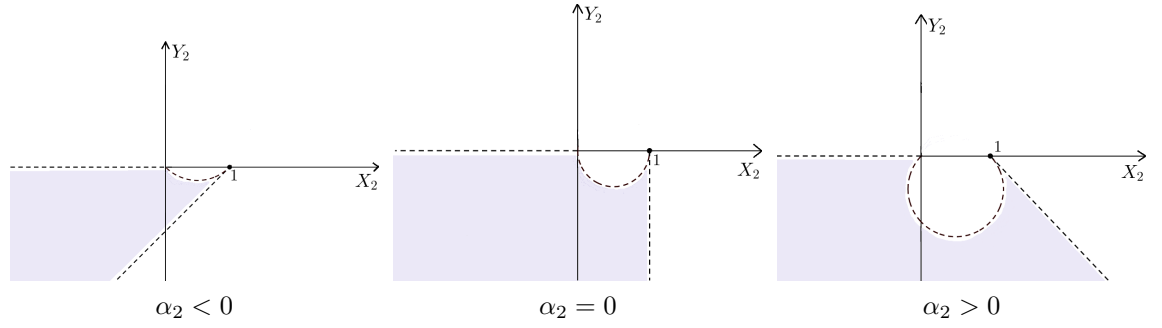


Figura 3.5: $F_2(R_0)$ en \mathbb{C} ($r_2 > 0$).

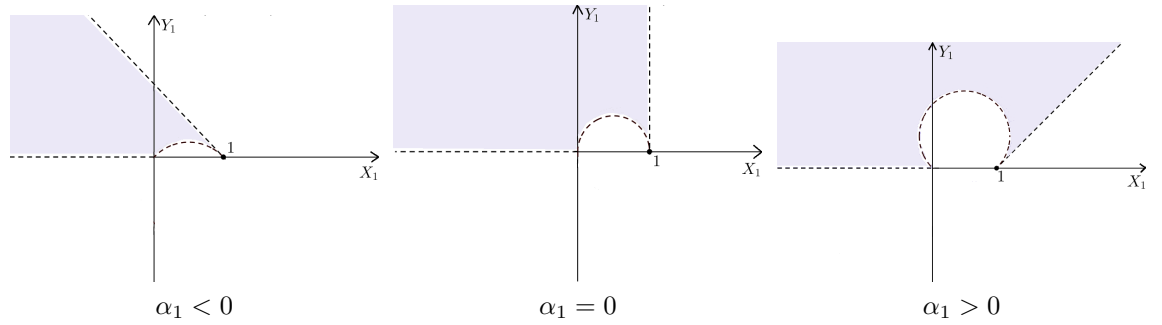


Figura 3.6: $F_1(R_0)$ en \mathbb{C} ($r_1 > 0$).

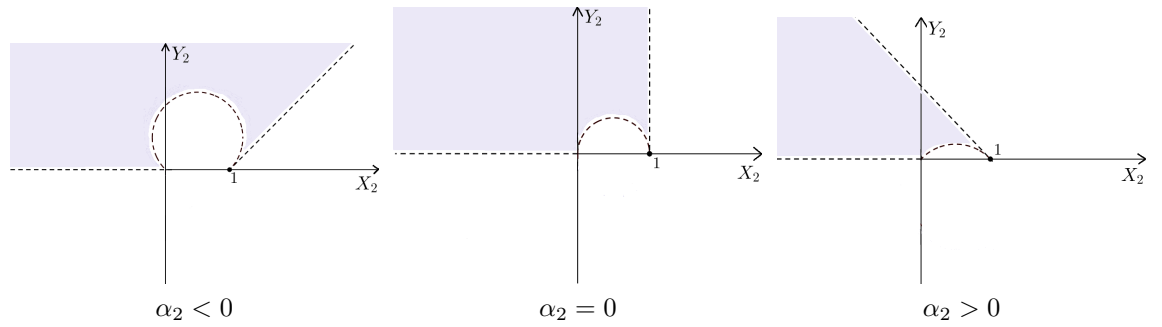


Figura 3.7: $F_2(R_0)$ en \mathbb{C} ($r_2 < 0$).

Luego, la expresión para $E_i(u, v)$ es

$$E_i(u, v) = \begin{cases} 2\alpha_i \operatorname{Arctan}\left(\frac{Y_i}{X_i}\right) - \beta_i \ln(X_i^2 + Y_i^2), & \text{si } X_i > 0, \\ 2\alpha_i \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{Y_i}{X_i}\right) + \pi\right) - \beta_i \ln(X_i^2 + Y_i^2), & \text{si } X_i < 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

En la Figura 3.8 se presenta la gráfica de (3.31).

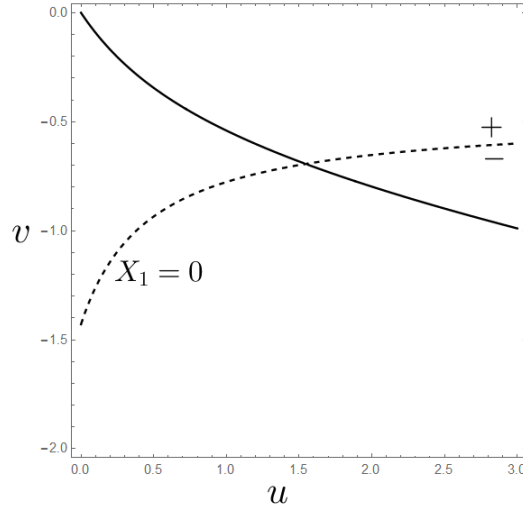


Figura 3.8: Gráfica de (3.31) ($i = 1$) para $\gamma_2 = r_1 = \beta_1 = 1, \alpha_1 = 0.7$.

Ahora haremos uso de las funciones E_1 y E_2 para calcular los mapeos laterales h_1 y h_2 , utilizando el Teorema de la Función Implícita (ver Apéndice C). Primeramente, aclaramos que en los casos con tangencia invisible, $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$, no es posible calcular h_1 y h_2 de esta manera, ya que

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_i}{\partial u}(u, v) &= -\frac{u\beta_i|\alpha_i^2 + \beta_i^2|}{(r_i + \alpha_i u)^2 + (\beta_i u)^2} \Big|_{(0,0)} = 0 \quad y \\ \frac{\partial E_i}{\partial v}(u, v) &= \frac{v\beta_i|\alpha_i^2 + \beta_i^2|}{(r_i + \alpha_i v)^2 + (\beta_i v)^2} \Big|_{(0,0)} = 0, \end{aligned}$$

con $r_1 \rightarrow \gamma_2 r_1$, por lo que no es posible aplicar el Teorema de la Función Implícita. Ahora, antes de iniciar el desarrollo de los cálculos para los casos con tangencia visible, $r_1 < 0$ y $r_2 > 0$, normalizaremos las expresiones anteriores para X_i y Y_i , ($i = 1, 2$), con el fin de reducir el número de parámetros de los cuales se hará uso. Factoricemos β_1^2 en la expresión para X_1 para obtener

$$X_1(u, v) = \frac{\gamma_2^2 \bar{r}_1^2 + \gamma_2 \bar{r}_1 \bar{\alpha}_1 (u + v) + uv(\bar{\alpha}_1^2 + 1)}{(\gamma_2 \bar{r}_1 + \bar{\alpha}_1 v)^2 + v^2}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{r}_i &= \frac{r_i}{\beta_i}, \\ \bar{\alpha}_i &= \frac{\alpha_i}{\beta_i}, \end{aligned}$$

y análogamente para X_2 y Y_i . Podemos ver que al prescindir de las tildes, dichas expresiones retoman su forma original; por lo tanto, de ahora en adelante haremos

$$\begin{aligned} r_i &\rightarrow \frac{r_i}{\beta_i}, \\ \alpha_i &\rightarrow \frac{\alpha_i}{\beta_i}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Al ser ambos equilibrios focos, la estabilidad de éstos depende del signo de α_i , y, dependiendo de su respectiva estabilidad, la órbita que pasa por el origen de cada foco se intersectará con Σ en puntos diferentes. Los diferentes puntos de intersección con Σ se ilustran en las figuras 3.9 y 3.10.

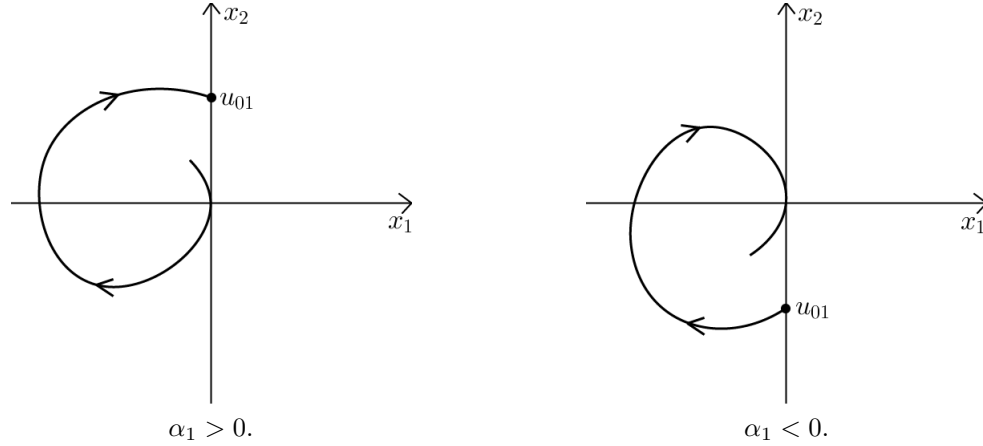


Figura 3.9: Intersección de la órbita que pasa por el origen dependiendo del signo de α_1 ($r_1 < 0$).

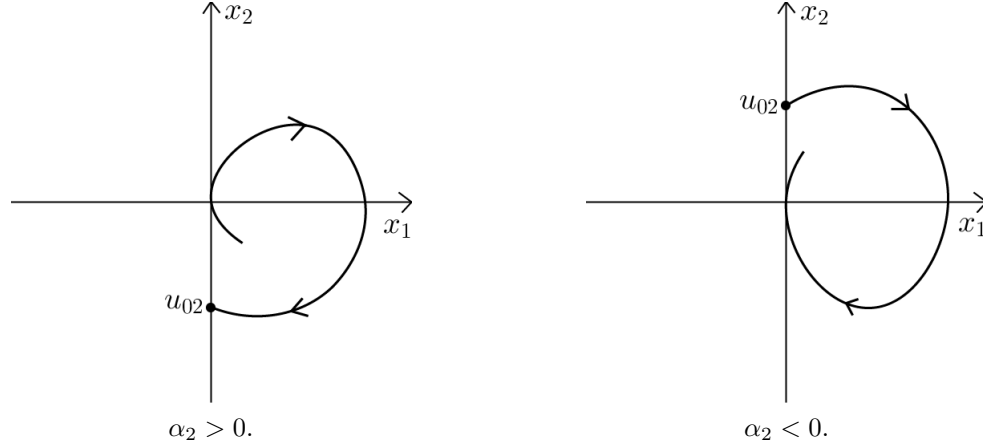


Figura 3.10: Intersección de la órbita que pasa por el origen dependiendo del signo de α_2 ($r_2 > 0$).

Observación 3.6. De dichas figuras podemos ver que α_1 y u_{01} tienen el mismo signo, mientras que α_2 y u_{02} son de signos opuestos, además, si $\alpha_i = 0$, entonces $u_{0i} = 0$ y si α_i es pequeño, entonces también lo es u_{0i} .

Supongamos que $\alpha_1 > 0$. Primero, consideremos el punto $(u_{01}, 0)$, $u_{01} > 0$, y la rama con $X_1 > 0$ de la función E_1 :

$$E_1(u, v) = 2\alpha_1 \left(\text{Arctan} \left(\frac{Y_1}{X_1} \right) + 2\pi \right) - \ln(X_1^2 + Y_1^2).$$

Capítulo 3

Tenemos que $E_1(u_{01}, 0) = 0$ por construcción de ésta y que

$$\frac{\partial E_1}{\partial u}(u_{01}, 0) = \frac{u_{01}|\lambda|}{(\gamma_2 r_1 + u_{01}\alpha_1)^2 + u_{01}^2} \neq 0,$$

por lo que, por el Teorema de la Función Implícita, sabemos que existe una función diferenciable h_1 tal que $u = h_1(v)$, con $h_1(0) = u_{01}$ y que, además,

$$E_1(h_1(v), v) = 0,$$

para $v < 0$ suficientemente pequeño. Podemos derivar esta última expresión para calcular las derivadas de orden superior en $v = 0$ de la función h_1 . Desarrollando todos los cálculos podemos obtener:

$$\begin{aligned} h_1'(0) &= 0, \\ h_1''(0) &= \frac{(u_{01}\alpha_1 + \gamma_2 r_1)^2 + u_{01}^2}{(\gamma_2 r_1)^2 u_{01}}, \\ h_1'''(0) &= -\frac{4\alpha_1((u_{01}\alpha_1 + \gamma_2 r_1)^2 + u_{01}^2)}{(\gamma_2 r_1)^3 u_{01}}, \\ h_1^{(4)}(0) &= -\frac{3((u_{01}\alpha_1 + \gamma_2 r_1)^2 + u_{01}^2)((\gamma_2 r_1)^2 + u_{01}^2(-7\alpha_1^2 + 1))}{(\gamma_2 r_1)^4 u_{01}^3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

De esta forma, podemos expresar la función h_1 mediante su expansión de Taylor alrededor de 0 como sigue:

$$h_1(v) = u_{01} + a_2 v^2 + a_3 v^3 + a_4 v^4 + \dots$$

donde $a_k = \frac{1}{k!} h_1^{(k)}(0)$, para $k = 2, 3, 4, \dots$. Análogamente, si $\alpha_1 < 0$, al considerar el punto $(0, u_{01})$, con $u_{01} < 0$, podemos repetir el procedimiento anterior para obtener que

$$h_1(u) = u_{01} + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 + \dots$$

De manera similar, si $\alpha_2 < 0$, podemos considerar el punto $(u_{02}, 0)$, $u_{02} > 0$, y la rama con $X_2 > 0$ de la función E_2 :

$$E_2(u, v) = 2\alpha_2 \left(\text{Arctan} \left(\frac{Y_2}{X_2} \right) + 2\pi \right) - \ln(X_2^2 + Y_2^2),$$

para obtener

$$h_2(v) = u_{02} + b_2 v^2 + b_3 v^3 + b_4 v^4 + \dots,$$

y

$$h_2(u) = u_{02} + b_2 u^2 + b_3 u^3 + b_4 u^4 + \dots,$$

para $\alpha_2 > 0$ y $u_{02} < 0$, con

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{(u_{02}\alpha_2 + r_2)^2 + u_{02}^2}{2r_2^2 u_{02}}, \\ b_3 &= -\frac{2\alpha_2((u_{02}\alpha_2 + r_2)^2 + u_{02}^2)}{3r_2^3 u_{02}}, \\ b_4 &= -\frac{((u_{02}\alpha_2 + r_2)^2 + u_{02}^2)(r_2^2 + u_{02}^2(-7\alpha_2^2 + 1))}{8r_2^4 u_{02}^3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Con lo anterior hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 3.7. *Considere el sistema (3.1). Si existe una tangencia visible, entonces los mapeos laterales h_1 y h_2 en $x_1 < 0$ y $x_1 > 0$ respectivamente, están dados por*

$$\begin{aligned} h_1(v) &= u_{01} + a_2 v^2 + a_3 v^3 + a_4 v^4 + \dots, \\ h_2(v) &= u_{02} + b_2 v^2 + b_3 v^3 + b_4 v^4 + \dots, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{(u_{01}\alpha_1 + \gamma_2 r_1)^2 + u_{01}^2}{2(\gamma_2 r_1)^2 u_{01}}, \\ a_3 &= -\frac{2\alpha_1((u_{01}\alpha_1 + \gamma_2 r_1)^2 + u_{01}^2)}{3(\gamma_2 r_1)^3 u_{01}}, \\ a_4 &= -\frac{((u_{01}\alpha_1 + \gamma_2 r_1)^2 + u_{01}^2)((\gamma_2 r_1)^2 + u_{01}^2(-7\alpha_1^2 + 1))}{8(\gamma_2 r_1)^4 u_{01}^3}, \\ b_2 &= \frac{(u_{02}\alpha_2 + r_2)^2 + u_{02}^2}{2r_2^2 u_{02}}, \\ b_3 &= -\frac{2\alpha_2((u_{02}\alpha_2 + r_2)^2 + u_{02}^2)}{3r_2^3 u_{02}}, \\ b_4 &= -\frac{((u_{02}\alpha_2 + r_2)^2 + u_{02}^2)(r_2^2 + u_{02}^2(-7\alpha_2^2 + 1))}{8r_2^4 u_{02}^3}, \end{aligned}$$

con $u_{0i} \neq 0, i = 1, 2$, para $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < 0$. Para $\alpha_1 < 0$ y $\alpha_2 > 0$, simplemente hágase $v \rightarrow u$.

Capítulo 4

Ciclos límite en sistemas sin deslizamiento

En este capítulo se estudian los distintos tipos de desdoblamiento alrededor del punto de doble tangencia, es decir, todas las combinaciones posibles de los dos tipos de tangencia que puede haber para cada región en el origen, dependiendo de los signos de r_1 y r_2 . Esto da lugar a nueve tipos de desdoblamiento. En este capítulo se presenta al menos un resultado por sección, en los cuales se establecen condiciones para la existencia de un ciclo límite de cruce, o un análisis de la dinámica alrededor del punto de doble tangencia (el origen), en caso de que no existan ciclos límite, como es en el caso $r_1 = r_2 = 0$ (ver Figura 4.1). A lo largo del resto de este capítulo se estudian estos nueve casos por separado.

Todos los resultados contenidos en este capítulo están basados en el sistema (3.1):

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

En los casos donde los valores propios $\lambda_i, \delta_i \in \mathbb{C}$, haremos $\sigma(A_1) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$ y $\sigma(A_2) = \{\delta, \bar{\delta}\}$, con

$$\lambda = \alpha_1 + i\beta_1, \quad (4.2)$$

$$\delta = \alpha_2 + i\beta_2, \quad (4.3)$$

$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \beta_i > 0, i = 1, 2$.

Al considerar tangencia invisible se hará uso de las expresiones para h_1 y h_2 , (3.16)

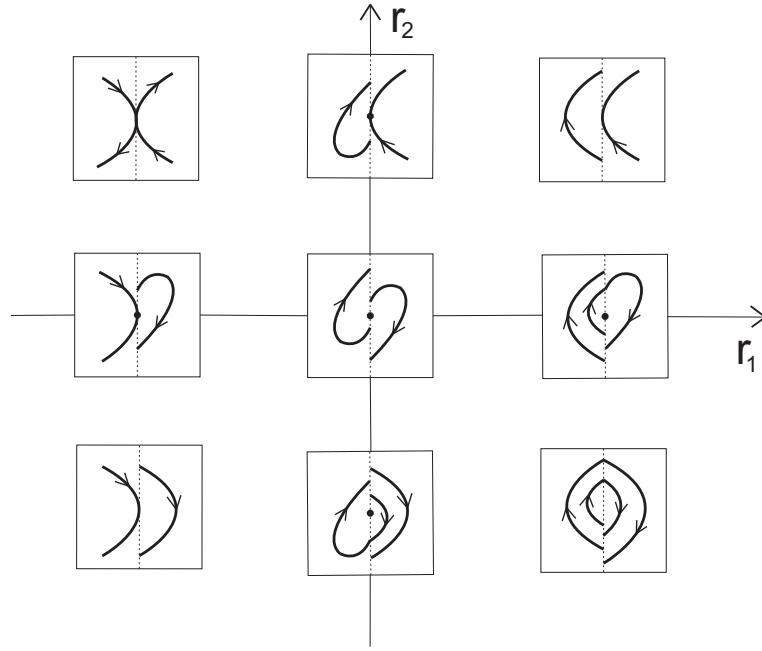


Figura 4.1: Desdoblamientos del punto de doble tangencia.

y (3.17), definidas en la Proposición 3.3 de la sección 3.1.2,

$$h_1(v) = -v + \frac{2}{3} \frac{c_2}{\gamma_2 r_1} v^2 - \frac{4}{9} \frac{c_2^2}{(\gamma_2 r_1)^2} v^3 + \dots, \quad (4.4)$$

$$h_2(u) = -u + \frac{2}{3} \frac{d_2}{r_2} u^2 - \frac{4}{9} \frac{d_2^2}{r_2^2} u^3 + \dots \quad (4.5)$$

en las regiones $x_1 < 0$ y $x_1 > 0$, respectivamente, mientras que para tangencias visibles se utilizarán los mapeos definidos en la Proposición 3.7, en la sección 3.2:

$$h_1(v) = u_{01} + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \dots, \quad (4.6)$$

$$h_2(v) = u_{02} + b_2 v^2 + b_3 v^3 + \dots, \quad (4.7)$$

donde

$$a_2 = \frac{(u_{01} \alpha_1 + \gamma_2 r_1)^2 + u_{01}^2}{2(\gamma_2 r_1)^2 u_{01}}, \quad (4.8)$$

$$a_3 = -\frac{2\alpha_1((u_{01} \alpha_1 + \gamma_2 r_1)^2 + u_{01}^2)}{3(\gamma_2 r_1)^3 u_{01}},$$

$$b_2 = \frac{(u_{02} \alpha_2 + r_2)^2 + u_{02}^2}{2r_2^2 u_{02}}, \quad (4.9)$$

$$b_3 = -\frac{2\alpha_2((u_{02} \alpha_2 + r_2)^2 + u_{02}^2)}{3r_2^3 u_{02}}$$

para $i = 1, 2$, cuando $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < 0$. En los casos $\alpha_1 < 0$ y $\alpha_2 > 0$ simplemente hágase $v \rightarrow u$. En análisis posteriores consideramos el mapeo $P = h_2 \circ h_1$ ó $P = h_1 - h_2$, en caso de no poder realizar la composición.

4.1. Foco-foco

En esta sección se presenta un resultado propio del escenario con $r_1 = r_2 = 0$ de la Figura 4.1, llamado foco-foco (*focus-focus* en inglés), en el cual se determina la estabilidad del punto de doble tangencia, es decir, del origen. Supondremos que los puntos de equilibrio en ambas regiones son focos, por lo que es necesario tener que $|A_i| > 0$, $\text{disc}(A_1) = c_2^2 + 4c_1 < 0$ y $\text{disc}(A_2) = d_2^2 + 4d_1 < 0$, lo que implica que $c_1 < 0$ y $d_1 < 0$.

Teorema 4.1. *Considere el sistema (4.1). Supongamos que ambos equilibrios son focos y que $r_1 = r_2 = 0$. Sea*

$$\lambda_0 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad (4.10)$$

donde α_i, β_i son como definidos en (4.2) y (4.3). Entonces el origen es:

1. un centro si $\lambda_0 = 0$.
2. estable si $\lambda_0 < 0$.
3. inestable si $\lambda_0 > 0$.

Demostración. De manera similar a lo hecho en demostraciones de resultados anteriores, el objetivo es resolver el sistema vectorial de ecuaciones

$$\begin{aligned} S_1 &= \varphi_{t_1}(z_2) - z_1 = 0, \\ S_2 &= \psi_{t_2}(z_1) - z_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde φ_t y ψ_t son los flujos en las regiones $x_1 < 0$ y $x_1 > 0$ respectivamente, $t_1, t_2 > 0$ y $z_1 = (0, u)^T$, $z_2 = (0, v)^T$ con $u > 0$ y $v < 0$. Primeramente, sabemos que

$$A_i \sim \begin{pmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} = J_i \quad (i = 1, 2),$$

por lo que existen matrices P_i invertibles tales que

$$\begin{aligned} \varphi_t(x) &= P_1 e^{tJ_1} P_1^{-1} x, \\ \psi_t(x) &= P_2 e^{tJ_2} P_2^{-1} x. \end{aligned}$$

Así, podemos escribir (4.11) como

$$\begin{aligned} P_1 e^{t_1 J_1} P_1^{-1} z_2 - z_1 &= 0, \\ P_2 e^{t_2 J_2} P_2^{-1} z_1 - z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Mediante cálculos, podemos desarrollar el sistema anterior de la siguiente forma:

$$\frac{v}{u} e^{\alpha_1 t_1} \cos(\beta_1 t_1) = 1, \quad (4.12)$$

$$e^{\alpha_1 t_1} \sin(\beta_1 t_1) = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{u}{v} e^{\alpha_2 t_2} \cos(\beta_2 t_2) = 1, \quad (4.14)$$

$$e^{\alpha_2 t_2} \sin(\beta_2 t_2) = 0. \quad (4.15)$$

El primer paso es resolver (4.13) y (4.15). Tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_1 t_1 &= k_1 \pi \quad \text{y} \\ \beta_2 t_2 &= k_2 \pi, \end{aligned}$$

con $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Tomamos $k_1 = k_2 = 1$, para obtener

$$t_1 = \frac{\pi}{\beta_1} \quad \text{y} \quad (4.16)$$

$$t_2 = \frac{\pi}{\beta_2}. \quad (4.17)$$

Ahora, sustituimos (4.16) y (4.17) en (4.12) y (4.14) respectivamente para obtener un nuevo sistema reducido de ecuaciones:

$$u + v e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1} \pi} = 0, \quad (4.18)$$

$$u e^{\frac{\alpha_2}{\beta_2} \pi} + v = 0. \quad (4.19)$$

Podemos escribir el sistema anterior como

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1} \pi} \\ e^{\frac{\alpha_2}{\beta_2} \pi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Para que el sistema (4.20) tenga una infinidad de soluciones, debemos tener que

$$e^{\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right) \pi} - 1 = 0,$$

es decir, que

$$e^{\lambda_0 \pi} - 1 = 0.$$

De esta manera, concluimos que, si $\lambda_0 = 0$, entonces el origen es un centro.

Por otra parte, supongamos que $\lambda_0 \neq 0$. Despejemos u de (4.18) y v de (4.19) para obtener

$$u = h_1(v) = -v e^{\frac{\alpha_1}{\beta_1} \pi}, \quad (4.21)$$

$$v = h_2(u) = -u e^{\frac{\alpha_2}{\beta_2} \pi}. \quad (4.22)$$

Tomemos ahora el mapeo

$$P(v) = h_2(h_1(v)) = ve^{\lambda_0\pi}, \quad (4.23)$$

por lo que $v = 0$ es el único punto fijo de P y, además,

$$P'(v) = e^{\lambda_0\pi}. \quad (4.24)$$

Por el Teorema A.5 (ver Apéndice A), de (4.24) es fácil ver que, si $\lambda_0 < 0$, el origen es estable y, si $\lambda_0 > 0$, entonces el origen es inestable. \square

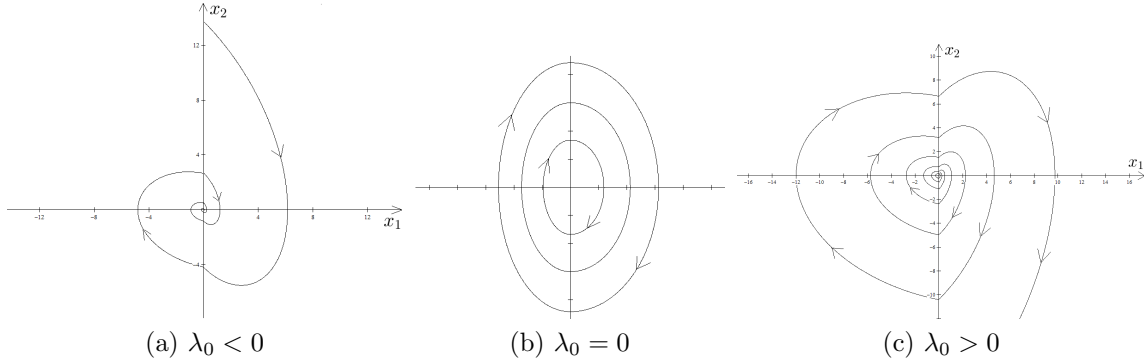


Figura 4.2: Simulaciones del sistema (4.1) con $r_1 = r_2 = 0$. El origen es (a) estable ($\lambda_0 = -0.52$) (b) un centro ($\lambda_0 = 0$) (c) inestable ($\lambda_0 = 0.23$).

4.2. Casos con un equilibrio frontera y tangencia invisible

En esta sección se presenta un resultado técnico propio de los escenarios donde se tiene un foco frontera en una región y tangencia invisible en la otra ($r_1 = 0, r_2 < 0$ y $r_1 > 0, r_2 = 0$). Estudiaremos el caso con $r_1 = 0$ y $r_2 < 0$, el caso restante ($r_1 > 0, r_2 = 0$) es análogo a éste. Por el resto de este capítulo haremos $r_i \rightarrow \frac{r_i}{\beta_i}$ y $\alpha_i \rightarrow \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ como establecido en (3.32) en la sección 3.2.

Teorema 4.2. *Considere el sistema (4.1) con $r_1 = 0$ y $r_2 < 0$.*

1. *Si $\alpha_1 d_2 < 0$ y $|\alpha_1|$ es suficientemente pequeño, entonces existe un ciclo límite, el cual es estable si $d_2 < 0$ e inestable si $d_2 > 0$.*
2. *Si $\alpha_1 d_2 > 0$, no existe ningún ciclo límite. Más aún, el origen es estable si $\alpha_1 < 0$ es inestable si $\alpha_1 > 0$.*

Demostración. Consideremos el siguiente mapeo obtenido usando (4.21) y (4.5):

$$P(u) = h_1(h_2(u)) = - \left(-u + \frac{2}{3} \frac{d_2}{r_2} u^2 - \frac{4}{9} \frac{d_2^2}{r_2^2} u^3 + \dots \right) e^{\alpha_1 \pi}. \quad (4.25)$$

Buscaremos puntos fijos de dicho mapeo P . Equivalentemente, buscaremos ceros de la siguiente función:

$$H(u) = P(u) - u = u(e^{\alpha_1 \pi} - 1) - \frac{2}{3} \frac{d_2}{r_2} e^{\alpha_1 \pi} u^2 + \frac{4}{9} \frac{d_2^2}{r_2^2} e^{\alpha_1 \pi} u^3 + \dots$$

Es claro que podemos escribir la función H como

$$H(u) = uG(u, \alpha_1),$$

donde

$$G(u, \alpha_1) = e^{\alpha_1 \pi} - 1 - \frac{2}{3} \frac{d_2}{r_2} e^{\alpha_1 \pi} u + \frac{4}{9} \frac{d_2^2}{r_2^2} e^{\alpha_1 \pi} u^2 + \dots$$

Luego, tenemos que $G(0, 0) = 0$ y

$$\left. \frac{\partial G}{\partial u}(u, \alpha_1) = -\frac{2}{3} \frac{d_2}{r_2} e^{\alpha_1 \pi} + \mathcal{O}(u) \right|_{(0,0)} = -\frac{2}{3} \frac{d_2}{r_2} \neq 0,$$

para $d_2 \neq 0$, por lo que, por el Teorema de la Función Implícita (ver Apéndice C), tenemos que existe una función diferenciable h tal que $u = h(\alpha_1)$, con $h(0) = 0$ y además,

$$G(h(\alpha_1), \alpha_1) = 0,$$

para α_1 suficientemente pequeño. Al derivar la expresión anterior tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u, \alpha_1) h'(\alpha_1) + \frac{\partial G}{\partial \alpha_1}(u, \alpha_1) = 0,$$

de donde podemos obtener que $h'(0) = \frac{3\pi r_2}{2d_2}$. Luego, mediante un bosquejo de la gráfica de la función h (ver Figura 4.3), es claro ver que si $\alpha_1 d_2 < 0$, entonces existen algunos $\tilde{u} > 0$ y $\tilde{\alpha}_1$ tales que $G(\tilde{u}, \tilde{\alpha}_1) = 0$, es decir, que $H(\tilde{u}) = 0$. En otras palabras, el mapeo (4.25) tiene un punto fijo diferente de cero, el cual implica la existencia de un ciclo límite, solamente si $\alpha_1 d_2 < 0$.

Finalmente, para determinar la estabilidad de dicho ciclo límite, haremos uso del Teorema A.5:

$$\begin{aligned} P(u) &= u + H(u), \\ &= u + uG(u, \alpha_1), \\ P'(u) &= 1 + u \frac{\partial G}{\partial u}(u, \alpha_1) + G(u, \alpha_1), \end{aligned}$$

por lo que

$$P'(\tilde{u}) = 1 + \tilde{u} \left(-\frac{2}{3} \frac{d_2}{r_2} \right).$$

De lo anterior es fácil ver que, si $d_2 < 0$ (y $\alpha_1 > 0$), entonces $|P'(\tilde{u})| < 1$, por lo que el ciclo es estable y si $d_2 > 0$ (y $\alpha_1 < 0$), entonces $|P'(\tilde{u})| > 1$, por lo que el ciclo es inestable. Análogamente, de (4.25), tenemos que $u = 0$ es un punto fijo de P y $P'(0) = e^{\alpha_1 \pi}$, por lo que el origen es estable si $\alpha_1 < 0$ e inestable si $\alpha_1 > 0$. \square

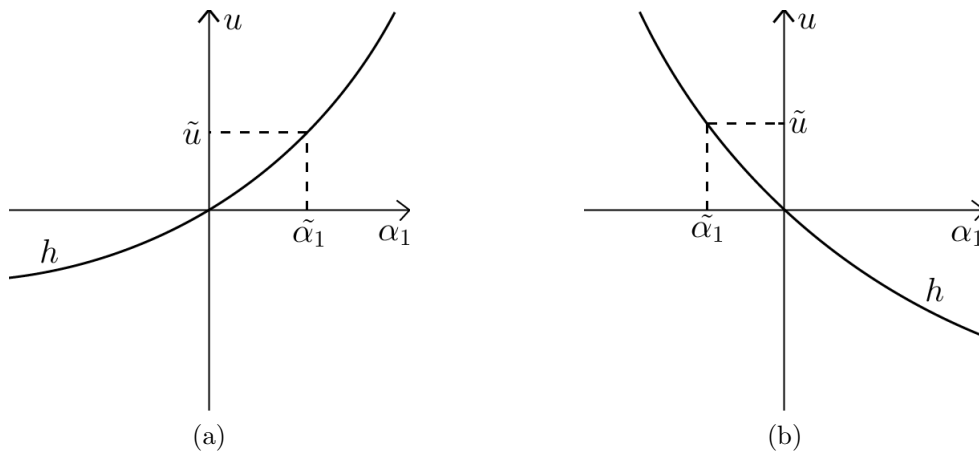


Figura 4.3: Bosquejo de la gráfica de la función h . La existencia de $\tilde{u} > 0$ implica la existencia de un ciclo límite. (a) \tilde{u} existe para $\alpha_1 > 0$ cuando $d_2 < 0$. (b) \tilde{u} existe para $\alpha_1 < 0$ cuando $d_2 > 0$. \tilde{u} no existe si $\alpha_1 d_2 > 0$.

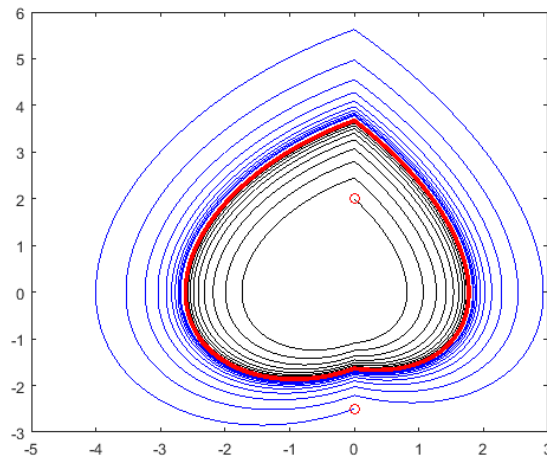


Figura 4.4: Simulación del sistema (4.1) con $c_2 = 0.5 (\alpha_1 = 0.25)$, $d_2 = -0.8$, $c_1 = d_1 = -1$, $r_1 = 0$, $r_2 = -1$. Existe un ciclo límite estable.

4.3. Casos con un equilibrio frontera y tangencia visible

En esta sección se estudian los dos casos donde se tiene tangencia visible en una región y un foco frontera en la otra ($r_1 < 0, r_2 = 0$ y $r_1 = 0, r_2 > 0$). Se analiza el caso con $r_1 < 0$ y $r_2 = 0$, el caso restante ($r_1 = 0, r_2 > 0$) es análogo a éste. Adicionalmente, supondremos que ambos equilibrios son focos.

Teorema 4.3. *Considere el sistema (4.1) con $r_1 < 0$ y $r_2 = 0$.*

1. Si $\alpha_1\alpha_2 < 0$ y $|\alpha_1|$ es suficientemente pequeño, entonces existe un ciclo límite, el cual es estable si $\alpha_2 < 0$ e inestable si $\alpha_2 > 0$.
2. Si $\alpha_1\alpha_2 > 0$, no existe ningún ciclo límite. Más aún, si p_1 es un foco en $x_1 < 0$, entonces este mismo es un foco estable (inestable) del sistema (4.1) si $\alpha_1 < 0$ ($\alpha_1 > 0$).

Demostración. Supondremos que $\alpha_1 > 0$, el análisis para el caso con $\alpha_1 < 0$ es análogo a lo que sigue. De (4.6) y (4.22) podemos ver que si $\alpha_2 < 0$, entonces, si llamamos m a la pendiente de $h_2(u)$, tenemos que $-1 < m < 0$, por lo que h_2 y h_1 se intersectarán para algún $\tilde{\alpha}_2 < 0$, mientras que si $\alpha_2 > 0$, no habrá intersección (ver Figura 4.5).

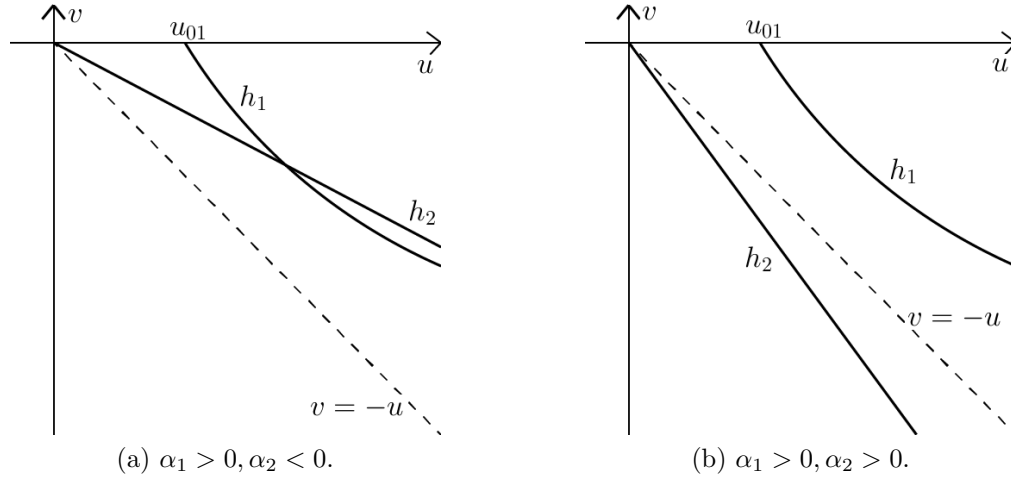


Figura 4.5: Gráficas de las funciones h_1 y h_2 en el plano (u, v) . (a) Las curvas se intersectan si $\alpha_1\alpha_2 < 0$. (b) No existe intersección si $\alpha_1\alpha_2 > 0$.

Ahora, de (4.6) y (4.22), podemos construir el mapeo $(h_2^{-1} \circ h_1)$ para el caso $\alpha_1 < 0$

$$P(v) = h_2(h_1(v)) = -h_1(v)e^{\alpha_2\pi}.$$

Buscaremos puntos fijos de dicho mapeo, suponiendo que $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < 0$. Equivalentemente, buscaremos ceros de la función

$$H(v) = P(v) - v = -u_{01}e^{\alpha_2\pi} - v - a_2e^{\alpha_2\pi}v^2 - a_3e^{\alpha_2\pi}v^3 - \dots$$

Tenemos que el discriminante $disc$ de la función H truncada hasta orden dos es

$$disc = 1 - 4a_2u_{01}e^{2\alpha_2\pi}.$$

Luego, de (4.8), como dicho en la Observación 3.6, si α_1 es pequeño, también lo es u_{01} , por lo que $a_2u_{01} \approx \frac{1}{2}$, lo que implica que $disc \approx 1 - 2e^{2\alpha_2\pi}$, de lo cual tenemos que $disc > 0$ cuando $\alpha_2 < \frac{\ln(1/2)}{2\pi}$, de donde se sigue que H tiene un cero $\tilde{v} < 0$

pequeño.

Para determinar la estabilidad del ciclo límite, tenemos

$$\begin{aligned} P(v) &= v + H(v), \\ P'(v) &= 1 + H'(v), \end{aligned}$$

y como $H'(\tilde{v}) \approx -1$, se sigue que $|P'(\tilde{v})| < 1$, por lo que, por el Teorema A.5, se tiene que el ciclo límite es estable.

Finalmente, en la Figura 4.6 se ilustra el foco p_1 en la región $x_1 < 0$. □

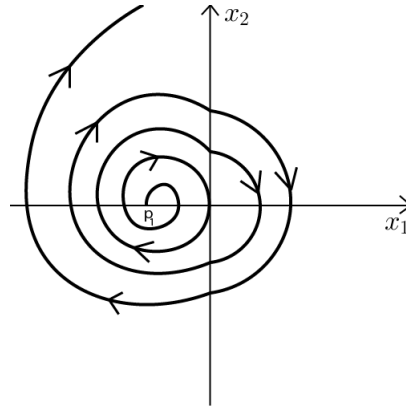


Figura 4.6: Al ser p_1 un foco en $x_1 < 0$, éste a su vez es un foco (inestable) del sistema.

4.4. Casos con tangencia visible-invisible

En esta sección se estudian los casos con $r_1 r_2 > 0$ de la Figura 4.1. Consideramos el caso $r_1 < 0, r_2 < 0$, el caso restante ($r_1 > 0, r_2 > 0$) es análogo a éste.

Teorema 4.4. *Considere el sistema (4.1) con $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$.*

1. *Si $\alpha_1 d_2 < 0$ y $|\alpha_1|$ es suficientemente pequeño, entonces existe un ciclo límite, el cual es estable si $d_2 < 0$ e inestable si $d_2 > 0$.*
2. *Si $\alpha_1 d_2 > 0$, no existe ningún ciclo límite. Más aún, si p_1 es un foco en $x_1 < 0$, entonces este mismo es un foco estable (inestable) del sistema (4.1) si $\alpha_1 < 0$ ($\alpha_1 > 0$).*

Demostración. Primero supongamos que $\alpha_1 > 0$, el caso con $\alpha_1 < 0$ es análogo a éste. Tenemos que $u_{01} > 0$, $a_2 > 0$ y $a_3 > 0$. De (4.6) y (4.5) es inmediato ver que, para que estas dos curvas se intersecten, es necesario que $h_2''(0) > 0$, es decir, que

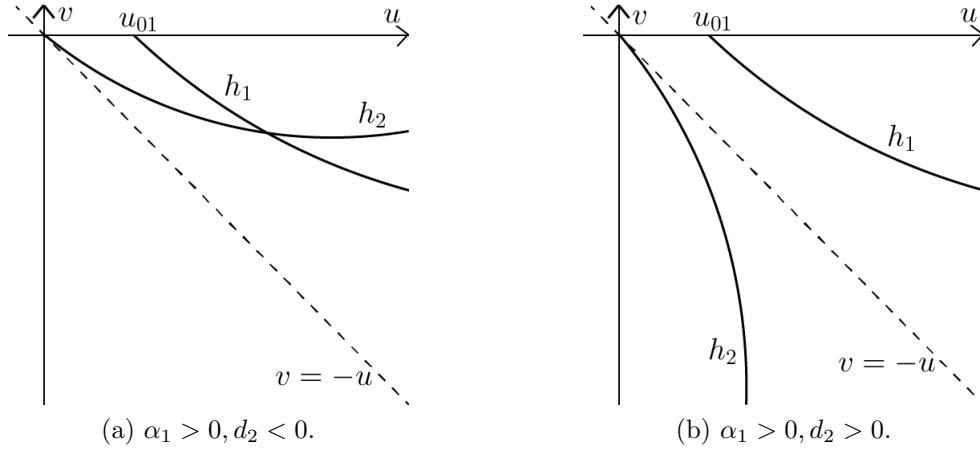


Figura 4.7: Gráficas de las funciones h_1 y h_2 en el plano (u, v) . (a) Las curvas se intersectan si $\alpha_1 d_2 < 0$. (b) No existe intersección si $\alpha_1 d_2 > 0$.

$d_2 < 0$ (ver Figura 4.7).

Usando (4.6) y (4.5), podemos construir el mapeo

$$\begin{aligned}
 P(v) &= h_2(h_1(v)), \\
 &= -(u_{01} + a_2 v^2 + \dots) + \frac{2}{3} \frac{d_2}{r_2} (u_{01} + a_2 v^2 + \dots)^2 - \frac{4}{9} \frac{d_2^2}{r_2^2} (u_{01} + a_2 v^2 + \dots)^3 + \dots, \\
 &= -u_{01} + \frac{2}{3} \frac{d_2}{r_2} u_{01}^2 - \frac{4}{9} \frac{d_2^2}{r_2^2} u_{01}^3 + \dots + a_2 \left(-1 + \frac{4}{3} \frac{d_2}{r_2} u_{01} - \frac{4}{3} \frac{d_2^2}{r_2^2} u_{01}^2 + \dots \right) v^2 + \dots
 \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$P(v) = h_2(u_{01}) + \bar{a}_2 v^2 + \bar{a}_3 v^3 + \dots, \quad (4.26)$$

donde $h_2(u_{01}) < 0$, $\bar{a}_2 = a_2 h_2'(u_{01}) < 0$ y $\bar{a}_3 = a_3 h_2'(u_{01}) < 0$.

Ahora demostraremos que el mapeo (4.26) tiene un punto fijo $\tilde{v} < 0$. Para buscar puntos fijos de dicho mapeo, buscaremos los ceros de la siguiente función

$$H(v) = P(v) - v = h_2(u_{01}) - v + \bar{a}_2 v^2 + \bar{a}_3 v^3 + \dots$$

Truncando H hasta orden tres, como $\bar{a}_3 < 0$, podemos ver que, si $|\alpha_1|$ es suficientemente pequeño, entonces $H(v) \rightarrow -\infty$ cuando $v \rightarrow \infty$ y $H(v) \rightarrow \infty$ cuando $v \rightarrow -\infty$, por lo que podemos asegurar la existencia de un punto $\tilde{v} < 0$ pequeño tal que $H(\tilde{v}) = 0$ (ver Figura 4.8).

De manera análoga a lo anterior, si tomamos $\alpha_1 < 0$, tenemos que $u_{01} < 0$, $a_2 < 0$ y $a_3 > 0$, por lo que puede demostrarse que existe algún $\tilde{u} > 0$ pequeño tal que

$$H(\tilde{u}) = h_1(\tilde{u}) - h_2(\tilde{u}) = 0,$$

si $d_2 > 0$, para $|\alpha_1|$ suficientemente pequeño.

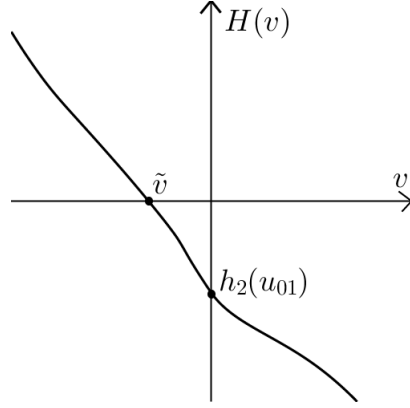


Figura 4.8: Bosquejo de la gráfica de la función H . La existencia de $\tilde{v} < 0$ implica la existencia de un ciclo límite.

Finalmente, para determinar la estabilidad del ciclo límite, tenemos

$$|P'(\tilde{v})| = |1 + H'(\tilde{v})| < 1,$$

ya que $H'(\tilde{v}) \approx -1$, por lo que el ciclo es estable. Adicionalmente, si p_1 es el foco inestable en $x_1 < 0$, éste es un foco inestable del sistema (ver Figura 4.6). \square

4.5. Foco fundido

En esta sección se estudia el caso con $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$ de la Figura 4.1, conocido como foco fundido (*fused focus* en inglés). Se presenta un análisis de la dinámica alrededor del origen, así como también condiciones para la existencia de un centro y ciclos límite con su respectiva estabilidad. Primeramente, introduciremos dos nuevos parámetros y reemplazaremos d_1 y d_2 por éstos. Definamos dichos parámetros como sigue:

$$\mu_1 = \frac{c_2}{\gamma_2 r_1} - \frac{d_2}{r_2} \quad \text{y} \tag{4.27}$$

$$\mu_2 = \frac{c_1}{(\gamma_2 r_1)^2} - \frac{d_1}{r_2^2}. \tag{4.28}$$

Podemos despejar d_2 y d_1 de (4.27) y (4.28), respectivamente, para obtener

$$\begin{aligned} d_1 &= r_0^2 c_1 - (r_0 \gamma_2 r_1)^2 \mu_2 \quad \text{y} \\ d_2 &= r_0 c_2 - r_0 \gamma_2 r_1 \mu_1, \end{aligned}$$

con $r_0 = \frac{r_2}{\gamma_2 r_1}$. Así, sustituyendo lo anterior en la expresión del sistema (4.1), obte-

nemos:

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r_0^2 c_1 - (r_0 \gamma_2 r_1)^2 \mu_2 & r_0 c_2 - r_0 \gamma_2 r_1 \mu_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ r_0 \gamma_2 r_1 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 > 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

Observación 4.5. Si $\mu_1 = \mu_2 = 0$, entonces, mediante simples cálculos puede obtenerse que

$$\begin{aligned} \delta_1 &= r_0 \lambda_2, \\ \delta_2 &= r_0 \lambda_1. \end{aligned}$$

A continuación se presenta un resultado que trata de la existencia de un centro en el sistema (4.29).

4.5.1. Existencia de un centro

El siguiente resultado es demostrado en [12]. Omitimos la demostración ya que en ésta se hace uso de herramientas que son ajenas a los fines de este trabajo.

Teorema 4.6. *Considere el sistema (4.29). El origen es un centro si y sólo si $\mu_1 = \mu_2 = 0$.*

A continuación se presentan dos ejemplos, ambos con $\mu_1 = \mu_2 = 0$, en los cuales se ilustra la conclusión obtenida con el resultado anterior.

Ejemplo 4.7. Considere el sistema

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 > 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

cuyo retrato fase se ilustra en la Figura 4.9.

Observación 4.8. En general, cuando $\mu_1 = \mu_2 = 0$, siempre que existan dos sillars, el centro está delimitado por un ciclo heteroclínico.

Ejemplo 4.9. Considere el sistema

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{para } x_1 > 0, \end{cases} \quad (4.31)$$

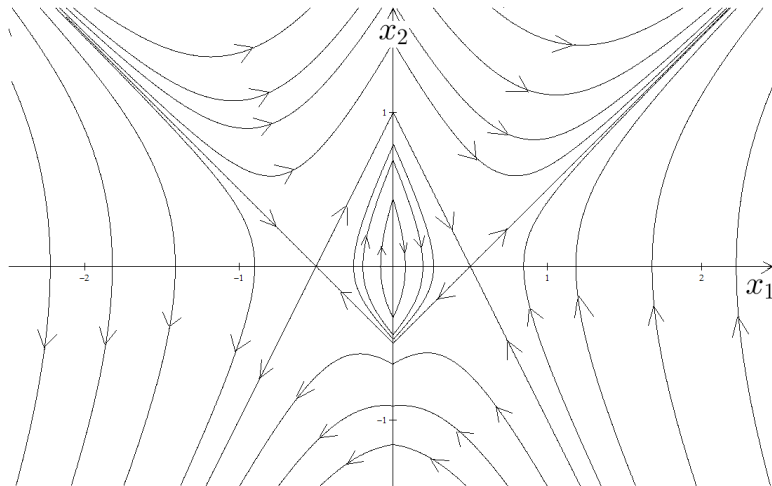


Figura 4.9: Retrato fase del sistema (4.30).

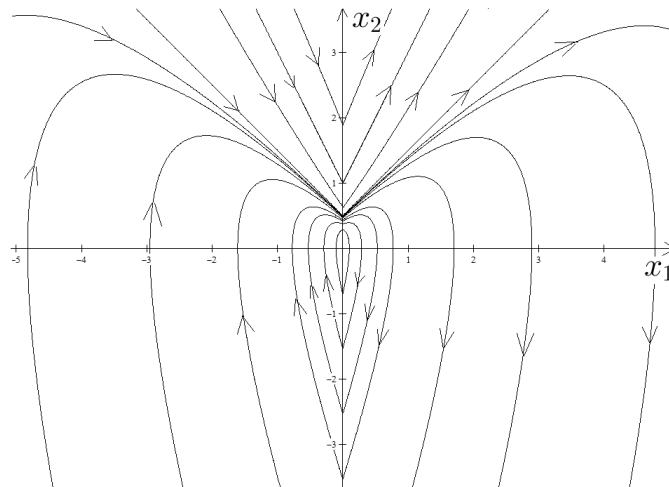


Figura 4.10: Retrato fase del sistema (4.31).

A continuación se muestra un análisis de estabilidad del origen y se demuestra la existencia o la no-existencia de un ciclo límite en el sistema en cuestión.

4.5.2. Ciclos límite y estabilidad

Con el fin de analizar la dinámica alrededor del origen, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones vectoriales, similar a (3.2), cuya ilustración geométrica se presenta en la Figura 4.11:

$$\begin{aligned} S_1 &= \varphi_{t_1}(z_2) - z_1 = 0, \\ S_2 &= \psi_{t_2}(z_1) - z_3 = 0, \end{aligned} \tag{4.32}$$

donde $z_1 = (0, u)^T$, $z_2 = (0, v_1)^T$, $z_3 = (0, v_2)^T$, con $t_1, t_2, u > 0$, $v_1, v_2 < 0$ y, además, φ_t y ψ_t son los flujos en $x_1 < 0$ y $x_1 > 0$ respectivamente. De la figura es fácil ver

que el origen es un centro si $v_1 = v_2$, si $v_2 - v_1 > 0$, entonces el origen es estable, mientras que si $v_2 - v_1 < 0$, entonces éste es inestable.

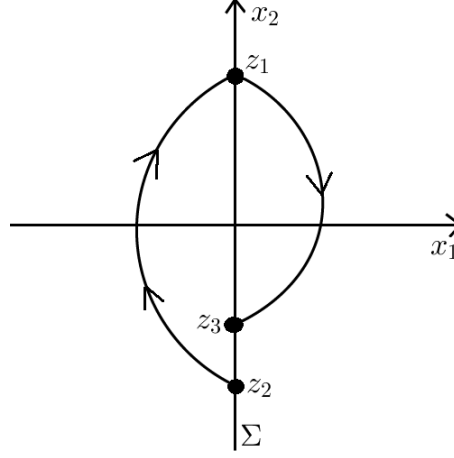


Figura 4.11: Ilustración geométrica del sistema de ecuaciones (4.32).

Para determinar la estabilidad del origen, determinaremos el signo de la diferencia $v_2 - v_1$, suponiendo que $\mu_1, \mu_2 \neq 0$. Primero, usando (4.4) y (4.5), definimos el mapeo $P : (-\varepsilon, 0) \rightarrow (-\varepsilon, 0)$, $\varepsilon > 0$, como

$$P(v) = h_2(h_1(v)) = v - \frac{2}{3} \left(\frac{c_2}{\gamma_2 r_1} - \frac{d_2}{r_2} \right) v^2 + \frac{4}{9} \left(\frac{c_2}{\gamma_2 r_1} - \frac{d_2}{r_2} \right)^2 v^3 + \sum_{i=4}^{\infty} a_i(\mu) v^i,$$

es decir,

$$P(v) = v - \frac{2}{3} \mu_1 v^2 + \frac{4}{9} \mu_1^2 v^3 + \sum_{i=4}^{\infty} a_i(\mu) v^i, \quad (4.33)$$

donde $a_i(\mu) \in \mathbb{R}$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$. De (4.33), podemos ver que

$$v_2 = h_2(h_1(v_1)) = v_1 - \frac{2}{3} \mu_1 v_1^2 + \frac{4}{9} \mu_1^2 v_1^3 + a_4(\mu) v_1^4 + a_5(\mu) v_1^5 + \dots,$$

por lo que,

$$v_2 - v_1 = v_1^2 \left(-\frac{2}{3} \mu_1 + \frac{4}{9} \mu_1^2 v_1 + a_4(\mu) v_1^2 + a_5(\mu) v_1^3 + \dots \right).$$

Entonces, si hacemos

$$H(v_1, \mu_1) = -\frac{2}{3} \mu_1 + \frac{4}{9} \mu_1^2 v_1 + a_4(\mu) v_1^2 + a_5(\mu) v_1^3 + \dots, \quad (4.34)$$

podemos escribir

$$v_2 - v_1 = v_1^2 H(v_1, \mu_1)$$

y así, $\text{sign}(v_2 - v_1) = \text{sign}(H(v_1, \mu_1))$. Ahora determinaremos $\text{sign}(H(v_1, \mu_1))$. De (4.34) es fácil ver que, para μ_1 y v_1 suficientemente pequeños, se tiene que $H(v_1, \mu_1) < 0$ si $\mu_1 > 0$ y $H(v_1, \mu_1) > 0$ si $\mu_1 < 0$. En otras palabras, se concluye que si $\mu_1 < 0$, entonces $v_2 > v_1$, por lo que el origen es estable, y, si $\mu_1 > 0$, $v_2 < v_1$, por lo que el origen es inestable. Ahora si consideramos el punto $(0, 0)$, podemos ver que

$$H(0, 0) = 0, \quad y$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mu_1}(v_1, \mu_1) = -\frac{2}{3} + \frac{8}{9}\mu_1 v_1 + \mathcal{O}(v_1^2) \right|_{(0,0)} = -\frac{2}{3},$$

por lo que, por el Teorema de la Función Implícita, tenemos que existe una función diferenciable h tal que $\mu_1 = h(v_1)$, con $h(0) = 0$ y que, además,

$$H(v_1, h(v_1)) = 0,$$

para $v_1 < 0$ suficientemente pequeño. Luego, derivando la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial v_1}(v_1, \mu_1) + \frac{\partial H}{\partial \mu_1}(v_1, \mu_1)h'(v_1) = 0, \quad (4.35)$$

de donde podemos obtener que $h'(0) = 0$, ya que $\frac{\partial H}{\partial v_1}(0, 0) = 0$. Luego al derivar (4.35), podemos obtener

$$h''(0) = 3a_4(0, \mu_2) = -\frac{2}{5} \frac{c_2 \mu_2}{r_1},$$

donde $a_4(\mu_1, \mu_2)$ es como en (4.34). Con esta información, podemos crear un bosquejo de la función h para $v_1 < 0$ como se ilustra en la Figura 4.12.

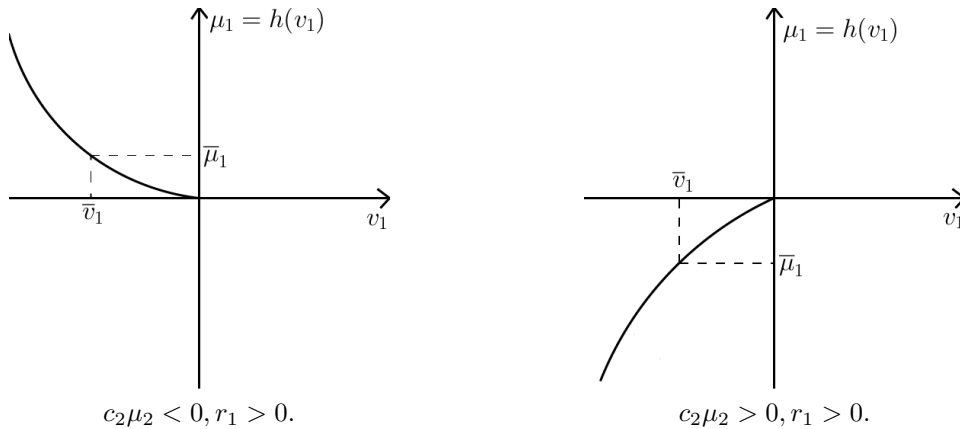


Figura 4.12: Bosquejos de la función h en el plano (v_1, μ_1) .

De la Figura 4.12 podemos ver que si $c_2 \mu_2 < 0$, la pareja $(\bar{v}_1, \bar{\mu}_1)$ implica la existencia de un ciclo límite para algún $\bar{\mu}_1 > 0$, mientras que si $\bar{\mu}_1 < 0$, no existe ningún ciclo

límite. Análogamente, si $c_2\mu_2 > 0$, entonces existe un ciclo límite para algún $\bar{\mu}_1 < 0$, mientras que no existe ningún ciclo límite si $\mu_1 > 0$. Ahora pasaremos a determinar la estabilidad de dichos ciclos límites, cuando éstos existen. Consideremos de nuevo el mapeo

$$\begin{aligned} P(v_1) &= v_1 - \frac{2}{3}\mu_1 v_1^2 + \frac{4}{9}\mu_1^2 v_1^3 + a_4(\mu)v_1^4 + a_5(\mu)v_1^5 + \dots, \\ &= v_1 + v_1^2 H(v_1, \mu_1). \end{aligned}$$

Derivando lo anterior, tenemos

$$P'(v_1) = 1 + v_1^2 \frac{\partial H}{\partial v_1}(v_1, \mu_1) + 2v_1 H(v_1, \mu_1).$$

Luego, sabemos que el punto $(\bar{v}_1, \bar{\mu}_1)$ es un punto fijo de P y que $H(\bar{v}_1, \bar{\mu}_1) = 0$, por lo que,

$$P'(\bar{v}_1) = 1 + \bar{v}_1^2 \frac{\partial H}{\partial v_1}(\bar{v}_1, \bar{\mu}_1).$$

Ahora, de la ecuación (4.35):

$$\frac{\partial H}{\partial v_1}(\bar{v}_1, \bar{\mu}_1) + \frac{\partial H}{\partial \mu_1}(\bar{v}_1, \bar{\mu}_1)h'(\bar{v}_1) = 0,$$

es posible determinar el signo de $\frac{\partial H}{\partial v_1}(\bar{v}_1, \bar{\mu}_1)$. Previamente habíamos obtenido que $\frac{\partial H}{\partial \mu_1}(\bar{v}_1, \bar{\mu}_1) = -\frac{2}{3}$ y, de la Figura 4.12, podemos observar que para el caso $c_2\mu_2 < 0$, con $\bar{\mu}_1 > 0$, tenemos que $h'(\bar{v}_1) < 0$, por lo que, necesariamente, se debe tener que $\frac{\partial H}{\partial v_1}(\bar{v}_1, \bar{\mu}_1) < 0$. Así, tenemos que $|P'(\bar{v}_1)| < 1$ y, por el Teorema A.5, tenemos que el ciclo límite es estable. Análogamente, si $\bar{\mu}_1 < 0$, el ciclo límite es inestable. Con lo anterior hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 4.10. *Considere el sistema (4.29) con $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$. Para $c_2 > 0$,*

- *Si $\mu_1\mu_2 < 0$, entonces existe un ciclo límite de cruce, el cual es estable si $\mu_1 > 0$ e inestable si $\mu_1 < 0$.*
- *Si $\mu_1\mu_2 > 0$, entonces no existe un ciclo límite de cruce. Si $\mu_1 < 0$, el origen es estable, y si $\mu_1 > 0$, el origen es inestable.*

Para $c_2 < 0$,

- *Si $\mu_1\mu_2 > 0$, entonces existe un ciclo límite de cruce, el cual es estable si $\mu_1 > 0$ e inestable si $\mu_1 < 0$.*
- *Si $\mu_1\mu_2 < 0$, entonces no existe un ciclo límite de cruce. Si $\mu_1 < 0$, el origen es estable, y si $\mu_1 > 0$, el origen es inestable.*

4.6. Silla fundida

En esta sección se presenta una demostración con un enfoque geométrico de la existencia de un ciclo límite en el caso con $r_1 < 0$ y $r_2 > 0$, conocido como silla fundida (*fused saddle* en inglés). Sabemos que, para poder buscar ciclos límite en este escenario, tenemos que suponer que los equilibrios en ambas regiones son focos.

A diferencia de secciones anteriores donde se consideraba la composición de las funciones h_1 y h_2 , en esta sección consideraremos la resta de estas funciones, ya que no es posible realizar la composición de éstas. Consideramos el caso con $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < 0$; el caso restante ($\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$) es análogo a éste. De (4.6) y (4.7), definimos la resta de las funciones h_1 y h_2 como sigue:

$$H(v) = h_1(v) - h_2(v) = u_0 + a_0 v^2 + \dots, \quad (4.36)$$

donde

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{01} - u_{02}, \\ a_0 &= a_2 - b_2. \end{aligned}$$

De (4.36), podemos ver que si existe algún $\bar{v} < 0$ tal que $h_1(\bar{v}) = h_2(\bar{v})$, es decir, que $H(\bar{v}) = 0$, ésto implicaría la existencia de un ciclo límite. De la misma expresión para $H(v)$, también es fácil ver que, dependiendo de los signos de los parámetros u_0 y a_0 , solamente existen dos posibles escenarios en los cuales podríamos aspirar a garantizar la existencia de dicho \bar{v} : si $u_0 < 0$ y $a_0 > 0$ ó si $u_0 > 0$ y $a_0 < 0$. Ésto se ilustra en la Figura 4.13.

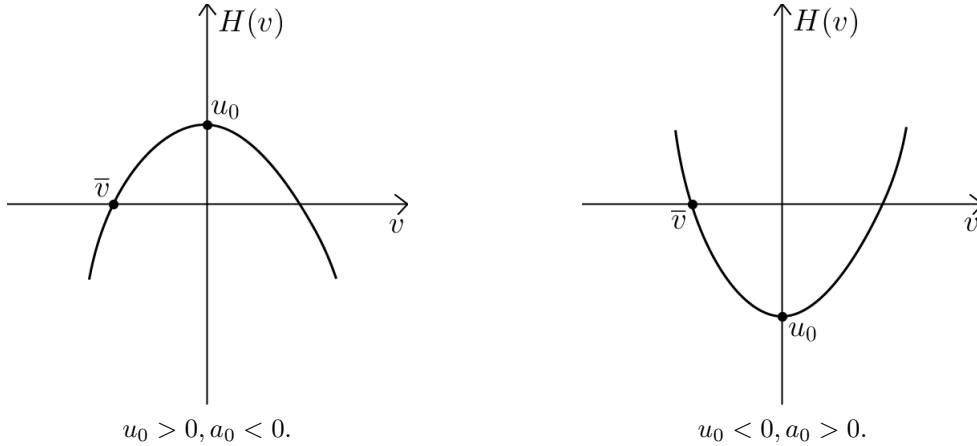


Figura 4.13: La intersección de la función H con el eje v en el punto \bar{v} implica la existencia de un ciclo límite y se cumple solamente si $u_0 a_0 < 0$.

Primeramente, obtendremos expresiones aproximadas para u_{01} y u_{02} . Para lograr ésto, consideremos la función E_1 , calculada en la sección 3.2, como una función

$E_1 = E_1(u_{01}, \alpha_1)$, haciendo $v = 0$ y fijando $u = u_{01}$, y llamémosle a ésta E_1^+ . En otras palabras, hagamos

$$E_1^+(u_{01}, \alpha_1) = E_1(u_{01}, 0) = 0.$$

Consideremos ahora el punto $(u_{01}, \alpha_1) = (0, 0)$. Luego, mediante simples cálculos podemos verificar que $E_1^+(0, 0) = 0$ y que

$$\frac{\partial E_1^+}{\partial \alpha_1}(0, 0) = 4\pi \neq 0,$$

por lo que, por el Teorema de la Función Implícita, podemos garantizar la existencia de una función diferenciable g_1 tal que $\alpha_1 = g_1(u_{01})$, con $g_1(0) = 0$, y que, adicionalmente,

$$E_1^+(u_{01}, g_1(u_{01})) = 0,$$

para todo $u_{01} > 0$ suficientemente pequeño. Luego, de manera similar a lo hecho en secciones previas, podemos derivar consecutivamente esta última expresión para obtener las derivadas de orden superior en $u_{01} = 0$ de la función g_1 . Después de los cálculos, dichas derivadas son como sigue:

$$\begin{aligned} g_1'(0) &= 0, \\ g_1''(0) &= \frac{1}{2\pi(\gamma_2 r_1)^2}, \\ g_1'''(0) &= 0, \\ g_1^{(4)}(0) &= -\frac{3}{\pi(\gamma_2 r_1)^4}, \\ g_1^{(5)}(0) &= -\frac{10}{\pi^2(\gamma_2 r_1)^5}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

De esta forma, la expresión para la función g_1 es

$$\alpha_1 = g_1(u_{01}) = \frac{1}{4\pi(\gamma_2 r_1)^2} u_{01}^2 - \frac{1}{8\pi(\gamma_2 r_1)^4} u_{01}^4 - \frac{1}{12\pi^2(\gamma_2 r_1)^5} u_{01}^5 + \dots$$

Así, de esta última expresión, podemos despejar u_{01} para obtener

$$u_{01} = -2\gamma_2 r_1 \sqrt{\alpha_1 \pi} + \dots,$$

por lo que concluimos que $u_{01} = u_{01}(\alpha_1)$. Análogamente, haciendo

$$E_2^+(u_{02}, \alpha_2) = E_2(u_{02}, 0) = 0,$$

mediante el Teorema de la Función Implícita, podemos garantizar la existencia de una función diferenciable g_2 tal que

$$\alpha_2 = g_2(u_{02}) = -\frac{1}{4\pi r_2^2} u_{02}^2 + \frac{1}{8\pi r_2^4} u_{02}^4 - \frac{1}{12\pi^2 r_2^5} u_{02}^5 + \dots,$$

de donde podemos despejar u_{02} :

$$u_{02} = 2r_2\sqrt{-\alpha_2\pi} + \dots,$$

ya que $\alpha_2 < 0$, por lo que $u_{02} = u_{02}(\alpha_2)$. Tenemos de esta forma que existe una relación biunívoca entre u_{01} y α_1 y u_{02} y α_2 . Es fácil ver que $u_{01}(0) = 0$ y $u_{02}(0) = 0$, ya que, si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, entonces ambos equilibrios son centros. Más aún, la relación entre estas variables es monótona para ambos casos. Ésto se ilustra en la Figura 4.14.

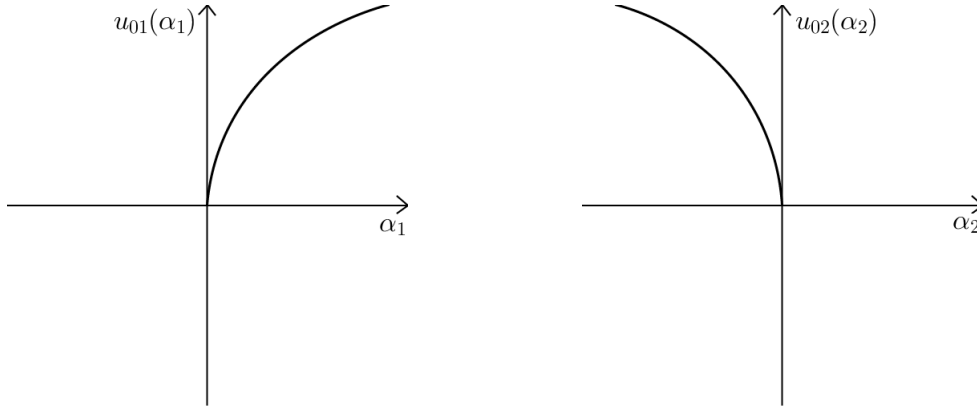


Figura 4.14: Bosquejos de las gráficas de $u_{01}(\alpha_1)$ y $u_{02}(\alpha_2)$.

De esta manera podemos garantizar la existencia de una curva en el espacio (α_1, α_2) tal que $u_{01} = u_{02}$, es decir, $u_0(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ para todo $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < 0$. Ahora, de manera similar hagamos ésto para el parámetro a_0 . Tenemos

$$a_2 = \frac{(u_{01}\alpha_1 + \gamma_2 r_1)^2 + u_{01}^2}{2(\gamma_2 r_1)^2 u_{01}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{01}(\alpha_1)} + \frac{2\alpha_1}{\gamma_2 r_1} + \frac{|\lambda|^2}{(\gamma_2 r_1)^2} u_{01}(\alpha_1) \right),$$

$$b_2 = \frac{(u_{02}\alpha_2 + r_2)^2 + u_{02}^2}{2r_2^2 u_{02}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_{02}(\alpha_2)} + \frac{2\alpha_2}{r_2} + \frac{|\delta|^2}{r_2^2} u_{02}(\alpha_2) \right),$$

por lo que $a_2 = a_2(\alpha_1)$ y $b_2 = b_2(\alpha_2)$, por lo tanto, $a_0 = a_2 - b_2 = a_0(\alpha_1, \alpha_2)$. Luego, mediante simples cálculos podemos obtener los siguientes límites:

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow 0^+} a_2 = +\infty,$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow 0^-} b_2 = +\infty,$$

por lo que, de esta manera, podemos realizar un bosquejo de las gráficas de $a_2(\alpha_1)$ y $b_2(\alpha_2)$, como se ilustra en la Figura 4.15.

Así, siguiendo el mismo razonamiento usado para $u_0 = 0$, podemos concluir que existe una curva en el espacio (α_1, α_2) tal que $a_2 = b_2$, es decir, $a_0 = 0$, para $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < 0$ suficientemente pequeños. En la Figura 4.16 se presenta un bosquejo de las curvas $u_0 = 0$ y $a_0 = 0$ en el espacio (α_1, α_2) .

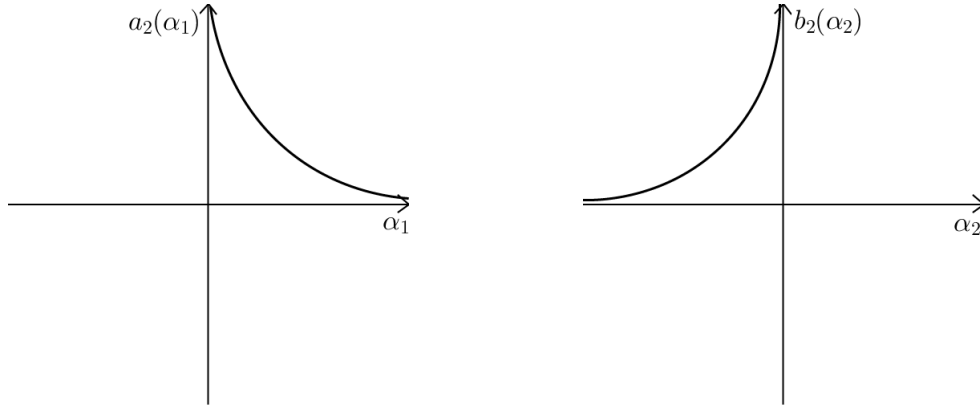


Figura 4.15: Bosquejos de las gráficas de $a_2(\alpha_1)$ y $b_2(\alpha_2)$.

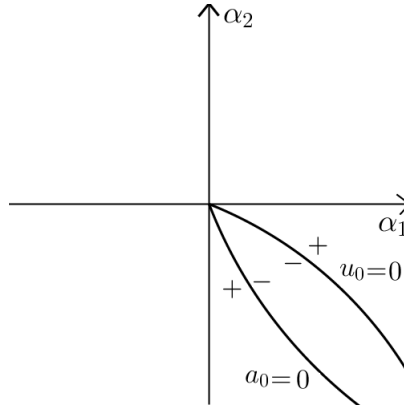


Figura 4.16: Bosquejo de las curvas a_0 y u_0 en el plano (α_1, α_2) .

Así, se ha demostrado que si $u_0 a_0 < 0$, existe un ciclo límite, mientras que si $u_0 a_0 > 0$, no existe ninguno. Ahora, para determinar la estabilidad de dicho ciclo límite, haremos uso de diagramas de telaraña como se ilustra en la Figura 4.17.

Con lo anterior se ha desarrollado una demostración con un enfoque geométrico del teorema que se enuncia a continuación:

Teorema 4.11. *Considere el sistema (4.1) con $r_1 < 0$ y $r_2 > 0$. Si $a_0 u_0 < 0$, entonces existe un ciclo límite. Más aún,*

- *si $u_0 > 0$ y $a_0 < 0$, el ciclo es estable.*
- *si $u_0 < 0$ y $a_0 > 0$, el ciclo es inestable.*

Si $a_0 u_0 > 0$, no existe ningún ciclo límite.

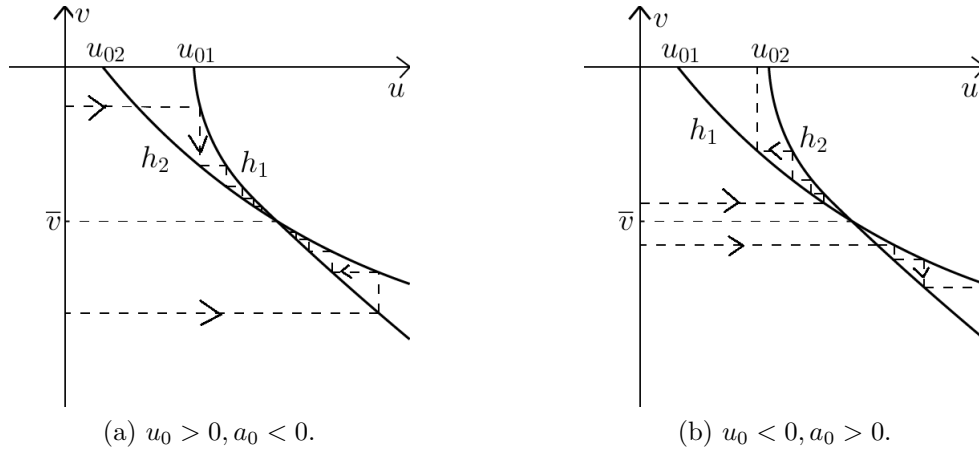


Figura 4.17: Diagramas de telaraña para determinar la estabilidad del ciclo límite. (a) El ciclo límite es estable. (b) El ciclo es inestable.

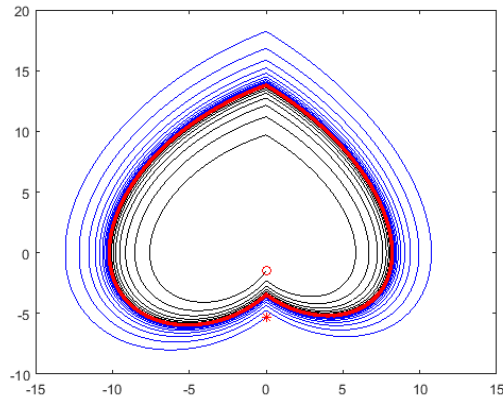


Figura 4.18: Simulación del sistema (4.1) con $c_2 = 0.6, d_2 = -0.8, c_1 = -1.09, d_1 = -1.16, r_1 = -2, r_2 = 0.5, u_0 > 0, a_0 < 0$. Existe un ciclo límite estable.

Hasta la fecha no se ha podido dar una demostración analítica de la existencia de un ciclo límite en este escenario, sin embargo, en [11] se conjetura la existencia de no más de un ciclo límite.

En el Cuadro 4.1 se enlistan las expresiones para h_1 y h_2 dependiendo del tipo de tangencia y en el Cuadro 4.2 se resume la información de todos los casos de la Figura 4.1.

Tipo de tangencia	h_1	h_2
Eq. frontera	$-ve^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\pi} \quad (4.21)$	$-ue^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}\pi} \quad (4.22)$
Invisible	$-v + \frac{2}{3} \frac{c_2}{\gamma_2 r_1} v^2 - \frac{4}{9} \frac{c_2^2}{(\gamma_2 r_1)^2} v^3 + \dots$ (4.4)	$-u + \frac{2}{3} \frac{d_2}{r_2} u^2 - \frac{4}{9} \frac{d_2^2}{r_2^2} u^3 + \dots$ (4.5)
Visible	$h_1(v) = u_{01} + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \dots$ (4.6)	$h_2(v) = u_{02} + b_2 v^2 + b_3 v^3 + \dots$ (4.7)

 Cuadro 4.1: Expresiones de h_1 y h_2 dependiendo del tipo de tangencia.

Caso	No.	r_1, r_2	h_1	h_2	Mapeo P	α_1, α_2
Foco-foco	1	$r_1 = 0$ $r_2 = 0$	(4.21)	(4.22)	$h_2 \circ h_1$	No especificado
Casos con un eq. frontera y tang. inv.	2	$r_1 = 0$ $r_2 < 0$	(4.21)	(4.5)	$h_1 \circ h_2$	No especificado
	3	$r_1 > 0$ $r_2 = 0$	(4.4)	(4.22)	$h_2 \circ h_1$	
Casos con un eq. frontera y tang. vis.	4	$r_1 < 0$ $r_2 = 0$	(4.6)	(4.22)	$h_2 \circ h_1$	$\alpha_1 > 0$
			(4.6) $v \rightarrow u$	(4.22)	$h_2^{-1} \circ h_1$	$\alpha_1 < 0$
	5	$r_1 = 0$ $r_2 > 0$	(4.21)	(4.7) $v \rightarrow u$	$h_1 \circ h_2$	$\alpha_2 > 0$
			(4.21)	(4.7)	$h_1^{-1} \circ h_2$	$\alpha_2 < 0$
Casos con tangencia vis.-inv.	6	$r_1 < 0$ $r_2 < 0$	(4.6)	(4.5)	$h_2 \circ h_1$	$\alpha_1 > 0$
			(4.6) $v \rightarrow u$	(4.5)	$h_1 - h_2$	$\alpha_1 < 0$
			(4.4)	(4.7) $v \rightarrow u$	$h_1 \circ h_2$	$\alpha_2 > 0$
	7	$r_1 > 0$ $r_2 > 0$	(4.4)	(4.7)	$h_1 - h_2$	$\alpha_2 < 0$
Foco fundido	8	$r_1 > 0$ $r_2 < 0$	(4.4)	(4.5)	$h_2 \circ h_1$	No especificado
Silla fundida	9	$r_1 < 0$ $r_2 > 0$	(4.6)	(4.7)	$h_1 - h_2$	$\alpha_1 > 0$
			(4.6) $v \rightarrow u$	(4.7) $v \rightarrow u$		$\alpha_2 < 0$
			(4.6) $v \rightarrow u$	(4.7) $v \rightarrow u$		$\alpha_1 < 0$ $\alpha_2 > 0$

Cuadro 4.2: Organización de los nueve casos de la Figura 4.1.

Conclusiones

En el estudio de SLPP en el plano, al dar un sistema y tres rectas (una de ellas la recta de conmutación) arbitrarias, el escenario más común que ocurre generalmente es que dichas rectas se intersecten en puntos distintos. Para obtener escenarios específicos, como uno donde todas o algunas rectas sean paralelas entre sí, o que dos rectas intersecten a la conmutación en un mismo punto, como fue el caso estudiado en esta tesis, es necesario establecer condiciones para los parámetros del sistema dado. En este trabajo enunciamos dichas condiciones, tanto como para obtener la concurrencia de las rectas en un punto en común, como para descartar la existencia de segmentos de deslizamiento sobre la conmutación.

Muchos autores que trabajan con este tipo de sistemas proponen sus propias formas normales, cada una dependiendo de qué tan conveniente les resulta para resolver el problema de su interés particular. En este trabajo propusimos una forma normal particular, la cual resultó conveniente debido a la reducción del número de parámetros originales, la ortogonalización de las tres rectas dadas y a la equivalencia topológica de dicha forma normal y el sistema dado originalmente, lo que permitió trabajar directamente con la primera en vez de con el segundo, reduciendo así la dificultad del problema planteado.

Al contar ahora con una expresión simplificada del sistema a estudiar, se procedió al cálculo de las funciones que se utilizaron como herramientas en la resolución del problema abordado en esta tesis, es decir, en la búsqueda de ciclos límite de cruce, así como la prueba de su respectiva existencia. Se observó que dichos cálculos y funciones dependieron significativamente del tipo de tangencia que se tuviese y se distinguieron los casos para tangencia invisible y visible, y así se obtuvieron las expresiones para las funciones laterales en cada caso correspondiente, con las cuales se construyeron los mapeos (composición o resta) necesarios para el análisis de ciclos límite de cruce.

Apéndice A

Teoría de mapeos

El siguiente material fue extraído de [2]. No se incluyen demostraciones.

Definición A.1. Una función cuyo dominio y rango son iguales se le dice **mapeo**. Sea x un punto fijo y sea f un mapeo. La **órbita** de x bajo f es el conjunto de puntos $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$. El punto de arranque x para la órbita es llamado el **valor inicial** de la órbita. Un punto p es un **punto fijo** del mapeo f si $f(p) = p$.

Ejemplo A.2. La función $g(x) = 2x(1 - x)$ que va de la recta real a ella misma es un mapeo. La órbita de $x = 0.01$ bajo g es $\{0.01, 0.0198, 0.0388, \dots\}$, y los puntos fijos de g son $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$.

Definición A.3. Una **epsilon-vecindad** de p es el conjunto de todos los números reales que se encuentran a una distancia ϵ de p . Simbólicamente, ésto es

$$N_\epsilon(p) = \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < \epsilon\}.$$

Suponemos que ϵ es un número positivo pequeño.

Definición A.4. Sea f un mapeo sobre \mathbb{R} y sea p un punto fijo de f . Si todos los puntos suficientemente cercanos a p son atraídos a p , entonces p es llamado un **sumidero** o un **punto fijo atractor**. De forma más precisa, si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in N_\epsilon(p)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p$, entonces p es un sumidero. Si todos los puntos suficientemente cercanos a p se alejan de p , entonces p es llamado una **fuentes** o **punto fijo repulsor**. En otras palabras, si existe algún $\epsilon > 0$ tal que cada $x \in N_\epsilon(p)$, excepto p , es mapeado fuera de $N_\epsilon(p)$, entonces p es una fuente.

Teorema A.5. Sea f un mapeo suave sobre \mathbb{R} y p un punto fijo de f .

1. Si $|f'(p)| < 1$, entonces p es un sumidero.
2. Si $|f'(p)| > 1$, entonces p es una fuente.

Apéndice B

Demostración del Lema 3.5

En esta sección se demuestra el Lema 3.5 enunciado en la sección 3.2.

Lema B.1 (Lema 3.5). *Las imágenes bajo F_1 de las rectas $u = kv$, $k \leq 0$, son las circunferencias*

$$\left(X_1 - \frac{k+1}{2}\right)^2 + \left(Y_1 - \left(\frac{1-k}{2}\right) \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2 = \frac{(1-k)^2 |\lambda|^2}{4\beta_1^2}.$$

Demostración. Primero consideremos el caso $k = 0$. Tenemos

$$X_1(0, v) = \frac{(\gamma_2 r_1)^2 + \gamma_2 r_1 \alpha_1 v}{(\gamma_2 r_1 + \alpha_1 v)^2 + (\beta_1 v)^2}, \quad (\text{B.1})$$

$$Y_1(0, v) = -\frac{\beta_1 \gamma_2 r_1 v}{(\gamma_2 r_1 + \alpha_1 v)^2 + (\beta_1 v)^2}. \quad (\text{B.2})$$

Despejemos v de (B.2) para obtener

$$v = -\frac{((\gamma_2 r_1 + \alpha_1 v)^2 + (\beta_1 v)^2) Y_1}{\beta_1 \gamma_2 r_1}. \quad (\text{B.3})$$

Luego, sustituimos (B.3) en (B.1) para tener

$$(\gamma_2 r_1 + \alpha_1 v)^2 + (\beta_1 v)^2 = \frac{\beta_1 r_1^2}{\beta_1 X_1 + \alpha_1 Y_1}. \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo (B.4) en (B.3):

$$v = -\frac{\gamma_2 r_1 Y_1}{\beta_1 X_1 + \alpha_1 Y_1}. \quad (\text{B.5})$$

Sustituyendo (B.5) en (B.4), obtenemos

$$\beta_1(X_1^2 + Y_1^2) = \beta_1 X_1 + \alpha_1 Y_1.$$

Desarrollando lo anterior, podemos llegar a lo siguiente ecuación:

$$\left(X_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y_1 - \frac{\alpha_1}{2\beta_1}\right)^2 = \frac{|\lambda|^2}{4\beta_1^2}, \quad (\text{B.6})$$

es decir, la imagen bajo F_1 del semieje $u = 0$ que delimita a R_0 en el espacio (u, v) es una circunferencia.

Ahora, usando un razonamiento inductivo y mediante cálculos, es fácil concluir que las imágenes bajo F_1 de las rectas $u = kv$, con $k < 0$, son las circunferencias

$$\left(X_1 - \frac{k+1}{2}\right)^2 + \left(Y_1 - \left(\frac{1-k}{2}\right) \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^2 = \frac{(1-k)^2 |\lambda|^2}{4\beta_1^2}. \quad (\text{B.7})$$

□

Más aún, también tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow -\infty} X_1(kv, v) &= \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{(\gamma_2 r_1)^2 + \gamma_2 r_1 \alpha_1 (k+1)v + kv^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{(\gamma_2 r_1 + \alpha_1 v)^2 + (\beta_1 v)^2}, \\ &= \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{k(\alpha_1^2 + \beta_1^2)v^2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)v^2}, \\ &= k, \end{aligned}$$

es decir, las circunferencias (B.7) pasan por los puntos $(1, 0)$ y $(k, 0)$.

Apéndice C

Teorema de la Función Implícita

El siguiente teorema fue extraído de [4] y se incluye sin demostración.

Teorema C.1 (Teorema de la Función Implícita). *Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable en un conjunto abierto que contiene a (x_0, y_0) y $f(x_0, y_0) = 0$. Sea $M = D_y f(x_0, y_0)$. Si $\det(M) \neq 0$, entonces existe un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a x_0 y un conjunto abierto $B \subset \mathbb{R}^m$ que contiene a y_0 , con la siguiente propiedad: para cada $x \in A$, existe una única $g(x) \in B$ tal que $f(x, g(x)) = 0$. La función g es diferenciable.*

Bibliografía

- [1] Kuznetsov, Yu. A., Sinaldi, S., Gagnani, A. *One-Parameter Bifurcations in Planar Filippov Systems*. International Journal of Bifurcations and Chaos, vol. **13**, no. 8; 2157-2188, pp. 2159. 2003.
- [2] Alligood, Ka. T., Sauer, Tim D., Yorke, Ja. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*; pp. 5, 9-10. Springer. 1996.
- [3] Castillo, J., Llibre, J., Verduzco, F. *The pseudo-Hopf bifurcation for planar discontinuous piecewise linear differential systems*. Nonlinear Dynamics; 90:1829-1840. 2017.
- [4] Spivak, M. *Calculus on Manifolds*. Addison-Wesley Publishing Company. 1965.
- [5] Freire, E., Ponce, E., Rodrigo, F., Torres, F. *Bifurcation Sets of Continuous Piecewise Linear Systems with Two Zones*. International Journal of Bifurcations and Chaos, vol. **8**, no. 11; 2073-2097. 1998.
- [6] Guardia, M., Seara, T.M., Teixeira, M.A. *Generic Bifurcations of Low Codimension of Planar Filippov Systems*. Journal of Differential Equations; 250:1967-2023. 2011.
- [7] Di Bernardo, M., Budd, C.J., Champneys, A.R., Kowalczyk, P. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Springer. 2008.
- [8] Stoker, J.J. *Non-linear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*. John Wiley & Sons Publishing Company. 1950.
- [9] Galvanetto, U., Bishop, S.R., Briseghella, L. *Mechanical stick-slip vibrations*. International Journal of Bifurcations and Chaos, vol. **5**, no. 3; 637-651. 1995.
- [10] Filippov, A.F. *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 1988.
- [11] Freire, E., Ponce, E., Torres, F. *Planar Filippov Systems with Maximal Crossing Set and Piecewise Linear Focus Dynamics*. Progress and Challenges in Dynamical Systems, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. **54**. 2013.
- [12] Medrado, J., Torregrosa, J. *Uniqueness of limit cycles for sewing planar piecewise linear systems*. J. Math. Anal. Appl. **431**; 529-544, pp. 532. 2015.