



# UNIVERSIDAD DE SONORA

---

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

**K-Teoría**

**T E S I S**

Que para obtener el grado académico de:

**Maestro en Ciencias**  
(Matemáticas)

Presenta:

Dante Rafael Terán Ramírez

Directores de tesis:

Dr. Jesús F. Espinoza

Dr. Rafael R. Ramos

Hermosillo, Sonora, México

Agosto de 2014



# Agradecimientos

Quisiera dedicar esta tesis para el futuro venturoso de mi vida, a la versión 2.0 de mi ser Dante Rafael Terán Quintana, espero brindarte tanta luz como la que se me brindo en este trabajo. También quiero agradecer a mi prometida Ariadna Quintana Leal por desvelarse conmigo, corregir ortografía, decirme que existen más palabras que conectivos lógicos, y ser la que me mantiene cuerdo.

Existen dos personas en especial que tienen un rol importante, y estas son mis padres Francisco José Terán Cruz y María Teresa Ramirez Vejar, a los cuales les debo mi curiosidad que sin ella no me hubiera interesado indagar mas sobre los tema que se me han presentado en la vida, y un caso particular es esta tesis. También se encuentran mis hermanos; Miguel Angel que siempre esta para darme una palmadita en el lomo y decirme “ahí te vas...”. A Leonardo que siempre está haciendo preguntas de cosas que no entiendo para que esté actualizado. A Francisco José por hacer ruido de vez en cuando y apoyarme en varios proyectos.

Deseo extender un agradecimiento muy especial a mis directores Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro y al Dr. Rafael Roberto Ramos Flores por apoyarme en mis estudios, mandarme fuera de la ciudad para tener una mejor formación como matemático. A darme las herramientas para crecer en el área de topología algebraica. También agradecer los raytes a mi casa al Dr. Jesus, y tenerme mucha paciencia desde la licenciatura y empujarme a terminar este trabajo y considerarme en futuros proyectos. También está el Dr. Daniel Juan Pineda, quien fue mi tutor en mi estancia en Morelia Michoacán.

Por último quiero agradecer mis amigos Jesus Alfonso Anzaldo López y Carlos Fernando Alarcón Suarez que siempre están conmigo y si caigo están para hecharme una mano... y aveces hecharme el brazo. A Manuel Gil, Alberto Maytorena, Jesus Lizarraga, Yessenia Liñan, Daniel Rubio, Brenda Inustroza, Alvaro Reyes, Daniela Griselle Tellez, Raissa Talavera, Michelle Valencia, Gerardo Rodriguez, Martín Vejar, Los comandos del Oeste, Victor Becerril, Jesús Tadeo Ibarra, Enrique Rodríguez, Sergio Guzmán y todas las personas que están en mi entorno muchas gracias.



# Sinodales

**Dr. Guillermo Dávila Rascón**

Departamento de Matemáticas,  
Universidad de Sonora

**Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro**

Departamento de Matemáticas,  
Universidad de Sonora

**Dr. Juan Loreto Hernández**

Facultad de Ciencias,  
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

**Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa**

Departamento de Matemáticas,  
Universidad de Sonora



# Índice general

|   |            |
|---|------------|
| <b>Introducción</b>   | <b>VII</b> |
| <b>1. Haces vectoriales</b>                                   | <b>1</b>   |
| 1.1. Cuasi-haces vectoriales . . . . .                        | 1          |
| 1.2. Haces vectoriales . . . . .                              | 11         |
| 1.3. Teorema de pegado . . . . .                              | 19         |
| 1.4. Cociclos . . . . .                                       | 26         |
| 1.5. El haz tangente . . . . .                                | 46         |
| 1.6. Operaciones con haces vectoriales . . . . .              | 56         |
| 1.7. Secciones sobre un haz vectorial . . . . .               | 64         |
| <b>2. Teoría de homotopía de haces vectoriales</b>            | <b>77</b>  |
| 2.1. Homotopía . . . . .                                      | 77         |
| 2.2. Espacio de proyecciones . . . . .                        | 96         |
| 2.3. Sistemas dirigidos . . . . .                             | 98         |
| 2.4. La Grassmaniana . . . . .                                | 106        |
| <b>3. El grupo de Grothendieck y K-teoría</b>                 | <b>121</b> |
| 3.1. Construcción de Grothendieck . . . . .                   | 121        |
| 3.2. Representabilidad de la K-teoría . . . . .               | 147        |
| <b>4. Periodicidad de Bott</b>                                | <b>155</b> |
| 4.1. Introducción . . . . .                                   | 155        |
| 4.2. Preliminares . . . . .                                   | 156        |
| 4.3. La cuasifibración de Bott . . . . .                      | 164        |
| 4.4. El Teorema de Dold-Thom y periodicidad de Bott . . . . . | 170        |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>183</b> |





# Introducción

La *K-teoría* (topológica compleja) es una rama de la topología algebraica, que a groso modo se puede interpretar como el estudio del álgebra lineal sobre espacios topológicos. Alexander Grothendieck (1928 - ) desarrolló el concepto algebraico de lo que hoy es llamado K-teoría, el cual utilizó para establecer el Teorema de Grothendieck-Riemann-Roch, donde utilizó la palabra “klassen” del alemán, para referirse a cierto tipo de elementos involucrados y es aquí donde nace el grupo de K-teoría con el nombre actual. En este trabajo Grothendieck utilizó diversos conceptos de geometría algebraica, tales como variedades algebraicas y gavillas, y mediante una construcción universal asoció un grupo de clases de isomorfismos. Siguiendo esta misma idea M. Atiyah (1929 - ) y F. Hirzebruch (1927 - 2012) publicaron en 1959 (cf. [4]) la construcción de Grothendieck aplicada al monoide de clases de isomorfismos de haces vectoriales sobre un espacio topológico. Esta construcción es lo que actualmente se llama el grupo de K-teoría topológica real o compleja, según el campo donde se considere la fibra de tales haces vectoriales. En este artículo Atiyah y Hirzebruch demuestran que la K-teoría topológica satisface todos los axiomas de Eilenberg-Steenrod para una teoría de cohomología (cf. [13]), excepto el axioma de la dimensión, lo cual la convierte en una teoría de cohomología generalizada.

Más precisamente, una teoría de cohomología generalizada es una familia de funtores contravariantes  $\{F^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  definidos de la categoría de espacios topológicos con *punto base* ( $\mathbf{Top}_*$ ) a la categoría de grupos abelianos ( $\mathbf{Ab}$ ), junto con equivalencias naturales,

$$F^q : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Ab} \text{ y } s^q : F^q \circ S \longrightarrow F^{q-1}$$

ésta última es llamada isomorfismo de suspensión, donde  $S : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Top}_*$  es el funtor que asocia a un espacio punteado  $(X, x_0)$  su suspensión reducida  $(\Sigma X, *)$ , que satisface los siguientes axiomas

1. **Homotopía:** Las funciones homotópicas inducen las mismas funciones en cohomología. Esto es, si  $f \simeq g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$  entonces

$$f^* = g^* : k^q(Y, y_0) \longrightarrow k^q(X, x_0)$$

para toda  $q \in \mathbb{Z}$ .

---

2. **Exactitud:** Para cada pareja de espacios con punto base  $(X, A)$  se tiene la siguiente sucesión exacta

$$k^q(X \cup CA, *) \xrightarrow{j^*} k^q(X, x_0) \xrightarrow{i^*} k^q(A, x_0)$$

donde  $i : (A, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$  es la inclusión y  $j : (X, x_0) \longrightarrow (X \cup CA, *)$  es la inclusión canónica en el cono de  $i$ .

Existe una propiedad más incluida en la lista de axiomas de Eilenberg-Steenrod, éste es el *axioma de la dimensión*, que en el caso de la cohomología establece que  $k^q(\{*\}) = 0$  para el espacio que consta de un solo punto, y  $k^q(\mathbb{S}^0) = 0$  si  $q \neq 0$  en el caso reducido. Cuando se satisface este último axioma se llama teoría de cohomología *ordinaria*. Como comentábamos anteriormente Atiyah y Hirzebruch demostraron en [4] que el funtor

$$(X, x_0) \longrightarrow \tilde{K}(X)$$

satisface los axiomas antes mencionados.

Posteriormente al trabajo de Atiyah y Hirzebruch en la década de los 60, bajo la dirección del primero Grame Segal desarrollo el correspondiente grupo de  $K$ -teoría para espacios con la acción de un grupo, la cual se conoce con el nombre de  $K$ -teoría equivariante, y fue utilizada por Atiyah y Singer para establecer y demostrar el Teorema del Índice Atiyah-Singer, que generaliza entre otros resultados el Teorema de Grothendieck-Riemann-Roch. En 1970 M. Karoubi, bajo la dirección de P. Donovan desarrollo en su tesis doctoral el caso de  $K$ -teoría con coeficientes locales, la cual actualmente es llamada  $K$ -teoría torcida. Recientemente la  $K$ -teoría se ha convertido en una área de investigación muy activa debido a la infusión de ideas y problemas provenientes de física teórica principalmente *teoría de cuerdas*, gracias al trabajo de Edward Witten (cf. D-Branes And K-Theory 1998) quien relacionó la carga de una D-brana con un elemento en  $K$ -teoría del espacio tiempo.

Entre otras aplicaciones, la  $K$ -teoría facilito la demostración de teoremas tales como la estructura de  $H$ -espacio sobre esferas, el problema de campo vectoriales sobre esferas, entre otros (cf. [16]).

El objetivo de este trabajo es presentar un panorama general del funtor de  $K$ -teoría topológica mediante un desarrollo completo y detallado de los elementos involucrados de tal manera que sea accesible a un estudiante de nivel universitario con nociones de álgebra lineal, topología y teoría de grupos. En la literatura existente es usual que los autores omitan gran cantidad de detalles para la construcción de ideas de ésta misma, de modo que en este trabajo se busca contribuir al esclarecimiento de tales aspectos técnicos.

En el capítulo uno se introducen los fundamentos de la teoría de haces vectoriales, iniciamos con la definición de un cuasi-haz vectorial el cual esquemáticamente consiste de una familia de espacios vectoriales parametrizada por los puntos de un espacio topológico llamado espacio base. Posteriormente requerimos que un cuasi haz satisfaga la condición de trivialidad local lo cual lo convierte en un haz vectorial. En la sección 1.3 analizamos las condiciones bajo las cuales es posible contruir nuevos

haces a partir de haces dados y proporcionamos el ejemplo de la construcción de un haz vectorial sobre la esfera de dimensión  $n$  dados haces sobre sus emisferios (superior e inferior) que coinciden en el ecuador. En la sección 1.4 establecemos varios resultados técnicos que serán de utilidad en el capítulo 2, posteriormente se demuestra que el haz tangente asociado a una variedad diferenciable es un haz vectorial. Utilizando las operaciones de suma directa y producto tensorial de espacios vectoriales, se establecen las correspondientes operaciones con haces vectoriales, concluimos el capítulo con el estudio de espacio de secciones de un haz vectorial y analizamos en particular dicho espacio para el caso del haz tangente sobre la esfera de dimensión  $n$ .

En la primera parte de capítulo dos, vemos que dado un haz vectorial  $E$  sobre  $X$  y una proyección  $p: E \rightarrow E$ , es posible construir un haz vectorial nuevo sobre  $X$  mediante el kernel de la proyección, y representamos al espacio de clases de isomorfismos de haces vectoriales de rango  $n$  sobre  $X$  ( $\Phi_n(X)$ ) en términos del colímite de los espacios de proyección de rango  $n$ .

En el capítulo 3 vemos la construcción del grupo de Grothendieck del monoide de clases de isomorfismos de haces vectoriales, luego establecemos la definición de K-teoría reducida y concluimos el capítulo con la construcción de un espacio clasificante  $BU$ , y demostramos que este es un representante del funtor de K-teoría, es decir

$$\tilde{K}_{\mathbb{C}}(X) \cong [X, BU].$$



# Capítulo 1

## Haces vectoriales

En este capítulo se desarrolla una breve recopilación de lo que es el estudio de haces vectoriales. Primero definiremos el haz vectorial para posteriormente ver propiedades como el Teorema de Pegado. Dado un espacio topológico  $X$  un haz vectorial se puede pensar como la unión ajena de la familia de espacios vectoriales  $\{E_x\}_{x \in X}$  donde  $E_x$  es el espacio vectorial asociado al punto  $x \in X$ .

### 1.1. Cuasi-haces vectoriales

**Definición 1.1.1.** Un **cuasi-haz vectorial**  $\zeta$  es una terna  $\zeta = (E, \pi, X)$  sobre un espacio topológico  $X$  tal que

1. Para cada  $x \in X$ , tenemos un espacio vectorial sobre  $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  de dimensión finita  $E_x$ .
2. El espacio total  $E = \bigsqcup_{x \in X} E_x$  tiene una topología que induce la topología usual en  $E_x$ , con  $x \in X$ . Es decir, tomando una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  para  $E_x$  con  $v_i \in k$  y la base canónica  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $k^n$  con  $k = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , tenemos una biyección que manda una base a la otra (por el Teorema de la dimensión en álgebra lineal ([14], p. 68)). Usando esta biyección podemos dotar a  $E_x$  de una topología (la de  $k^n$ ). Se puede probar que la topología de  $E_x$  no depende de la base que tomemos.
3. La función proyección  $\pi : E = \bigsqcup_{x \in X} E_x \longrightarrow X$  es continua.

Adoptaremos la siguiente notación

1.  $E$  es llamado el espacio total.
2.  $X$  es el espacio base.
3.  $E_x = \pi^{-1}(x)$  es la fibra de  $\zeta$  sobre  $x$ .

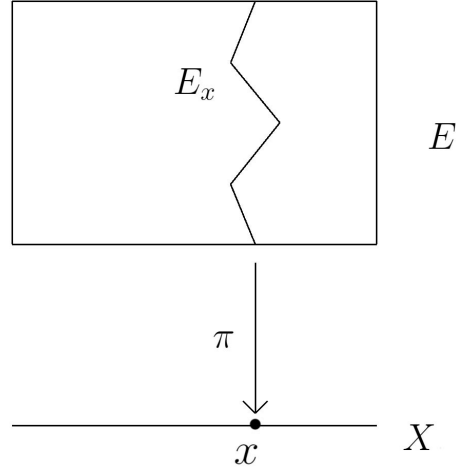


Figura 1.1: Cuasi-haz Vectorial

**Ejemplo 1.1.2.** Sea  $X = \mathbb{S}^1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x_1, x_2)\| = 1\}$ , consideremos un punto  $x \in \mathbb{S}^1$  y el siguiente conjunto

$$E_x = \{e_x \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \mid \langle x, e \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0\} \text{ donde } e_x := (x, e) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2.$$

Así se tiene que  $E = \bigsqcup_{x \in X} E_x \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$  y consideremos la proyección natural  $\rho : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua. Definimos el cuasi-haz vectorial  $\zeta = (X, \rho|_E, E)$ , donde  $\rho|_E$  es la restricción de  $\rho$  en el subespacio  $E$ , la cual es continua. Para ver que  $E$  es un cuasi-haz primero tenemos que demostrar que  $E_x$  es un espacio vectorial para cada  $x$ . Dado que  $E_x$  es complemento ortogonal en  $\mathbb{R}^2$  del vector  $x$  tenemos que  $E_x$  es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$  [17], con suma y producto por escalar

$$\begin{aligned} + : E_x \times E_x &\longrightarrow E_x & \cdot : \mathbb{R} \times E_x &\longrightarrow E_x \\ ((x, e_1), (x, e_2)) &\longmapsto (x, e_1 + e_2) & \lambda \cdot (x, e) &\longmapsto (x, \lambda e) \end{aligned}$$

Veamos que  $E \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$  tiene una topología que induce la topología usual de  $E_x \subset \mathbb{R}^2$ . Como  $E$  tiene la topología de subespacio heredada de la topología producto de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$  se cumple que  $E_x = \{x\} \times R \subset \{x\} \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$  donde  $R = \{e \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, e \rangle = 0\}$  es una recta en  $\mathbb{R}^2$  que pasa por el origen ortogonal a  $x$ . Así  $E_x \cong R \cong \mathbb{R}$  tiene la topología usual y coincide con la topología heredada de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ .

**Ejemplo 1.1.3.** Sea  $\zeta = (E, \rho, X)$  un cuasi-haz vectorial, y consideremos para cada  $x \in X$  un subespacio vectorial de  $E_x$  elegido arbitrariamente  $F_x \subset E_x$ . Construimos el

cuasi-haz vectorial  $\zeta' = (F, \rho|_F, X)$ , donde  $F = \bigsqcup_{x \in X} F_x$ , y  $\rho|_F : F \rightarrow X$  la restricción de  $\rho$  a  $F$ , que es continua.

1. Para cada  $x \in X$  tenemos que  $(\rho|_F)^{-1}(x) = F_x$ , es un espacio vectorial.
2. Como  $F$  tiene la topología de subespacio heredada por  $E$ , esta va a coincidir con la topología de  $F_x$  para cada  $x \in X$ .
3.  $\rho|_F$  es continua ya que es la restricción de la función continua  $\rho : E \rightarrow X$ .

Por lo tanto  $\zeta' = (F, \rho|_F, X)$  es un cuasi-haz vectorial.

**Ejemplo 1.1.4.** Sea  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ . Tomamos  $x \in \mathbb{S}^n$ , y consideremos la familia de espacios vectoriales

$$E_x = \{e_x \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, e \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0\}$$

con suma y productos definidos como en el ejemplo anterior.

Entonces  $\zeta = (\mathbb{S}^n, \rho, E)$  es un cuasi-haz vectorial, con  $E = \bigsqcup_{x \in X} E_x \subset \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  y  $\rho : E \rightarrow \mathbb{S}^n$  definido por  $p(x, e) = x$ .

De la misma manera como en el Ejemplo 1.1.2, tenemos que  $\zeta = (X, \rho, E)$  es cuasi-haz vectorial.

**Definición 1.1.5.** Sea  $\zeta = (E, \pi, X)$  y  $\zeta' = (E', \pi', X')$  dos cuasi-haces vectoriales. Un **morfismo general** de  $\zeta$  y  $\zeta'$  es una pareja de funciones continuas  $(f, g)$ , con  $f : X \rightarrow X'$  y  $g : E \rightarrow E'$  tales que

- (1) El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

- (2) La función  $g_x : E_x \rightarrow E'_{f(x)}$  es  $k$ -lineal. (ver figura 1.1.5)

**Observación. 1.1.6.** De la conmutatividad del diagrama (1) se tiene que para cada  $e_x \in E_x$ ,  $f \circ \pi(e_x) = \pi' \circ g(e_x)$ . Luego,  $g(e_x) \in (\pi')^{-1}(f \circ \pi(e_x)) = (\pi')^{-1}(f(x))$  lo cual implica que la restricción de la función  $g : E \rightarrow E'$  a cada fibra es dada por una función entre fibras. La condición (2) establece que dicha restricción es  $k$ -lineal, es decir,  $g_x := g|_{E_x} : E_x \rightarrow E'_{f(x)}$  es  $k$ -lineal.

La colección de cuasi-haces vectoriales forman una categoría cuyos morfismos son los morfismos generales. Si consideramos sólo la colección de cuasi-haces vectoriales sobre un mismo espacio base  $X$ , tenemos una subcategoría cuyos morfismos son de la forma  $(f, g)$  donde  $f : X \rightarrow X$  y  $g : E \rightarrow E'$  con  $f = \text{Id}_X$ . Denotaremos por  $\mathcal{E}'(X)$  a la categoría de cuasi-haces vectoriales sobre  $X$ , si queremos ser más específicos podemos denotarlo por  $\mathcal{E}'_k(X)$  ó  $\mathcal{E}'_{\mathbb{C}}(X)$  ó  $\mathcal{E}'_{\mathbb{R}}(X)$ , dependiendo del campo que utilicemos.

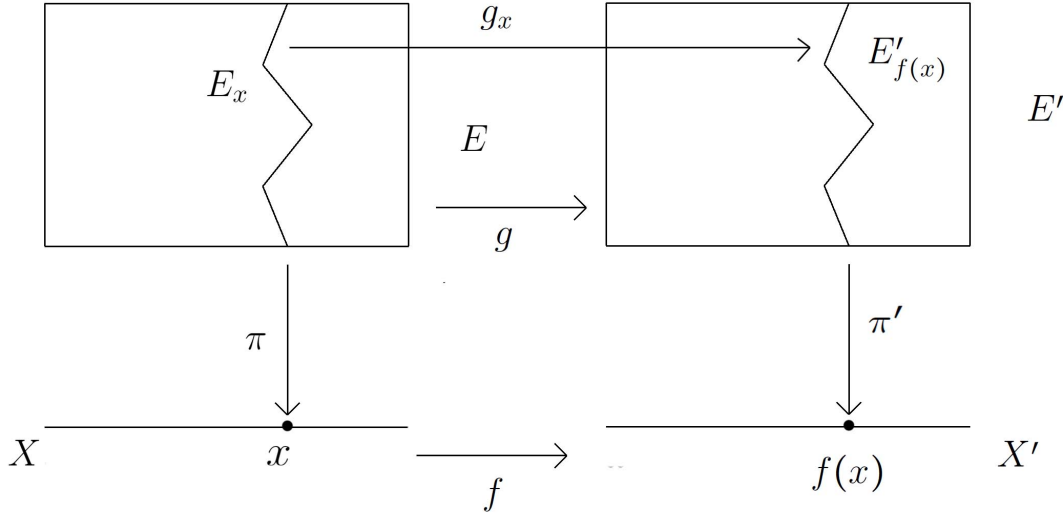


Figura 1.2: Morfismo general

Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{g} & E' \\
 \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\
 & X &
 \end{array}$$

En este caso denotaremos un morfismo  $(\text{Id}_X, g)$  solo por  $g$ .

**Definición 1.1.7.** Un morfismo general de cuasi-haces vectoriales  $(f, g) : (E, \pi, X) \rightarrow (E', \pi', X')$  es un **isomorfismo de cuasi-haces vectoriales** si existe un morfismo general  $(u', f') : (E', \pi', X') \rightarrow (E, \pi, X)$  tal que  $f' \circ f = 1_X$ ,  $f \circ f' = 1_{X'}$  y  $g' \circ g = 1_E$ ,  $g \circ g' = 1_{E'}$ .

**Definición 1.1.8.** Sea  $\zeta = (E, \pi, X)$  un cuasi-haz vectorial. Se dice que  $\zeta$  es un **cuasi-haz vectorial trivial** si  $E$  es isomorfo a  $X \times V$  para algún espacio vectorial  $V$ .

Consideremos el espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$ , por un conocido teorema de álgebra lineal ([14], p. 98)  $V$  es isomorfo a  $k^n$ , usando este isomorfismo dotamos a  $V$  con topología natural de  $k^n$ .



**Definición 1.1.9.** Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (x, v) & \longmapsto & (x, g_x(v)) \\ & & \\ X \times V & \xrightarrow{g} & X \times V' \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \pi' & \\ & X & \end{array}$$

Se dice que  $g$  es **morfismo de haces triviales** si,

1.  $g$  es continua
2. La función inducida por la restricción  $g_x : V \rightarrow V'$  es lineal para cada  $x \in X$ .

Así definimos la función

$$\begin{aligned} \check{g} : X &\longrightarrow \mathcal{L}(V, V') \\ x &\longmapsto g_x \end{aligned}$$

que es una aplicación entre espacios topológicos, asumiendo que  $\mathcal{L}(V, V')$  tiene la topología natural dada por un isomorfismo  $\mathcal{L}(V, V') \cong k^{\dim V \cdot \dim V'}$ .

**Teorema 1.1.10.** 1. Sea  $g : X \times V \rightarrow X \times V'$  un morfismo de haces triviales, la función  $\check{g} : X \rightarrow \mathcal{L}(V, V')$  anteriormente definida es continua.

2. Sea  $h : X \rightarrow \mathcal{L}(V, V')$  una función continua. Entonces es posible definir un morfismo de cuasi-haces vectoriales.

$$\begin{aligned} \hat{h} : X \times V &\longrightarrow X \times V' \\ (x, v) &\longmapsto (x, h(x)(v)) \end{aligned}$$

**Demostración.** Sean  $V$  y  $V'$  espacios vectoriales sobre un campo  $k$  y sean  $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  y  $\mathbb{B}' = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p\}$  las respectivas bases de los espacios vectoriales. Para cada  $x \in X$  tenemos que

$$g_x : V \rightarrow V'$$

es una transformación lineal que es posible definir en las bases, así para cada  $j = 1, \dots, n$  existen escalares  $\alpha_{ij}(x)$  tal que  $g_x(e_j) = \sum_{i=1}^p \alpha_{ij}(x)\eta_i$ , de esta manera  $(\alpha_{ij})$  es la matriz de representación asociada a la transformación lineal  $g_x$  y tenemos un isomorfismo natural de espacios vectoriales que depende de  $\mathbb{B}$  y  $\mathbb{B}'$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'} : \mathcal{L}(V, V) &\longrightarrow M_{n \times p}(k) \\ g_x &\longmapsto (\alpha_{ij}(x)) \end{aligned}$$

## Capítulo 1

---

Usaremos este isomorfismo natural de espacios vectoriales para darle una topología a  $\mathcal{L}(V, V')$ . Por otra parte tenemos para cada  $j = 1, \dots, n$  la inclusión  $\mu_j : X \rightarrow X \times V$  definida por  $\mu_j(x) = (x, e_j)$  para cada  $x \in X$ . Notemos que  $\mu_j$  es continua para cada  $j$  ya que  $X \times V$  tiene la topología producto. También consideremos la proyección natural  $\kappa : X \times V' \rightarrow V'$  definida por  $\kappa(x, v') = v'$ . Como  $V'$  es un espacio vectorial de dimensión  $p$  existe un isomorfismo  $\gamma$  de  $V'$  con  $k^p$  donde un elemento  $v' = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_p \eta_p$  en  $V'$  lo manda a  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in k^p$ . Consideremos la siguiente composición de funciones

$$X \xrightarrow{\mu_j} X \times V \xrightarrow{g} X \times V' \xrightarrow{\kappa} V' \xrightarrow{\nu_i} k$$

$$x \mapsto (x, e_j) \mapsto (x, g_x(e_j)) \mapsto g_x(e_j) \mapsto \alpha_{ij}(x)$$

donde  $\nu_i : V' \rightarrow k$  es la composición de  $\gamma$  con la proyección  $\rho_i : k^p \rightarrow k$  en la  $i$ -ésima entrada. Por lo tanto la función

$$\begin{aligned} X &\rightarrow k \\ x &\mapsto \alpha_{ij}(x) \end{aligned}$$

es continua para cada  $ij$ , entonces la función

$$\begin{aligned} X &\rightarrow M_{n \times p}(k) \\ x &\mapsto (\alpha_{ij}(x)) \end{aligned}$$

es continua. Dado que  $\check{g}$  es la composición de funciones continuas

$$X \rightarrow M_{n \times p}(k) \xrightarrow{(\varphi_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}^{-1})} \mathcal{L}(V, V')$$

$$x \mapsto (\alpha_{ij}(x)) \mapsto g_x$$

tenemos que  $\check{g} : X \rightarrow \mathcal{L}(V, V')$  es continua.

Sea  $h : X \rightarrow \mathcal{L}(V, V')$  continua, y sea

$$\begin{aligned} \hat{h} : X \times V &\rightarrow X \times V' \\ (x, v) &\mapsto (x, h(x)(v)) \end{aligned}$$

Entonces  $\hat{h}$  está dada por la composición de funciones

$$X \times V \xrightarrow{((\text{Id}_X \times h) \circ \Delta) \times \text{Id}_V} X \times \mathcal{L}(V, V') \times V \xrightarrow{\text{Id} \times \text{ev}} X \times V'$$

$$(x, v) \mapsto (x, h(x), v) \mapsto (x, h(x)(v))$$

Donde  $\Delta : X \longrightarrow X \times X$  es la función diagonal y  $ev : \mathcal{L}(V, V') \times V \longrightarrow V'$  es el homomorfismo evaluación el cual es continuo, pues se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(V, V') \times V & \xrightarrow{ev} & V' \\ \varphi_{B, B'} \times \varphi_B \downarrow \cong & & \varphi_{B'} \downarrow \cong \\ M_{n \times p}(k) \times k^n & \longrightarrow & k^p \end{array}$$

$$(A, x) \longmapsto Ax$$

por lo tanto  $ev$  es composición de funciones continuas. También  $(Id_X \times h) \circ \Delta : X \longrightarrow X \times \mathcal{L}(V, V')$  dada por  $(Id_X \times h) \circ \Delta(x) = (x, h(x))$  es continua. Por lo tanto  $\hat{h}$  es composición de funciones continuas y por lo tanto es continua.

■

**Definición 1.1.11.** Sea  $\zeta = (E, \pi, X)$  un cuasi-haz vectorial y  $X' \subset X$  un subespacio. Definimos el **cuasi-haz restricción** como la terna  $(\pi^{-1}(X'), \pi|_{\pi^{-1}(X')}, X')$ , ver figura 1.1.11.

El cuasi-haz restricción es efectivamente un cuasi-haz vectorial. En efecto

1. Para cada  $x \in X'$  se tiene que  $(\pi|_{\pi^{-1}(X')})(x) = E_x$  es un espacio vectorial, pues lo es para cada  $x \in X$ .
2. El espacio  $\pi^{-1}(X') = \sqcup_{x \in X'} E_x$  induce la topología usual en  $E_x$ , pues  $E = \sqcup_{x \in X} E_x$  la induce.
3. La restricción de la función  $\pi$  en  $\pi^{-1}(X')$  es continua, pues  $\pi$  es continua.

**Definición 1.1.12.** Sea  $f : X' \longrightarrow X$  una función continua y sea  $\zeta = (E, \pi, X)$  un cuasi-haz vectorial sobre  $X$ . Definimos el **cuasi-haz inducido** por  $f$  (“pull back”) como

$$f^*(\zeta) = (f^*(E), \pi', X')$$

donde

$$f^*(E) = X' \times_X E = \{(x', e) \in X' \times E \mid f(x') = \pi(e)\}$$

es llamado el producto fibrado entre  $X'$  y  $E$ , y  $\pi' : X' \times_X E \longrightarrow X'$  es la restricción de la proyección  $\kappa : X' \times E \longrightarrow X'$ .

Se sigue de la definición que para cada  $x' \in X'$  la fibra  $f^*(E)_{x'}$  es isomorfa a la fibra  $E_{f(x')}$ . En efecto, sea  $x' \in X'$ , entonces

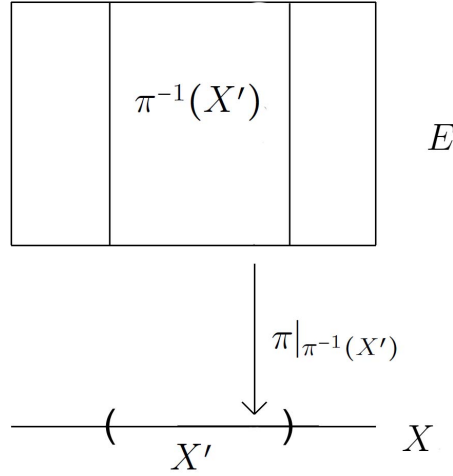


Figura 1.3: Cuasi-haz restricción

$$\begin{aligned}
 f^*(E)_{x'_0} = (\pi')^{-1}(x'_0) &= \{(x', e) \in X' \times_X E \mid \pi'(x', e) = x'_0\} \\
 &= \{(x', e) \in X' \times_X E \mid x' = x'_0\} \\
 &= \{(x', e) \in X' \times E \mid x' = x'_0 \text{ y } f(x') = \pi(e)\} \\
 &= \{(x'_0, e) \in X' \times E \mid f(x'_0) = \pi(e)\} \\
 &= \{(x'_0, e) \in \{x'_0\} \times E \mid f(x'_0) = \pi(e)\} \\
 &= \{x'_0\} \times \{e \in E \mid f(x'_0) = \pi(e)\} \\
 &= \{x'_0\} \times \pi^{-1}(f(x'_0)) = \{x'_0\} \times E_{f(x'_0)}
 \end{aligned}$$

así esquemáticamente tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 (x', e) & & \\
 \downarrow & & \\
 x' & & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 X \times_X E & \xrightarrow{pr_2} & E \\
 \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\
 X' & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

donde  $pr_2$  es la proyección en la segunda componente.

El cuasi-haz vectorial inducido es un cuasi-haz vectorial ya que:

(1) Para cada  $x' \in X'$  se tiene que  $f^*(E)_{x'}$  es un espacio vectorial, ya que  $f^*(E)_{x'} \cong E_{f(x')}$ .

(2) Se tiene que  $f^*(E)_x$  tiene la topología natural pues  $f^*(E)_{x'} = \{x'\} \times E_{f(x')} \subseteq X \times_X E \subseteq X \times E$ .

(3)  $\pi'$  es continua pues es restricción de la proyección  $X' \times E \rightarrow X'$ .

**Lema 1.1.13.** *Sea  $f : X' \rightarrow X$  una función continua entre espacios topológicos y  $\zeta = (E, \pi, X)$  un cuasi-haz vectorial sobre  $X$ , entonces  $f$  induce un funtor  $f^* : \mathcal{E}'(X) \rightarrow \mathcal{E}'(X')$  entre la categoría de cuasi-haces vectoriales sobre  $X$  a la categoría de cuasi-haces vectoriales sobre  $X'$ .*

### Demostración.

De la definición tenemos que para cada cuasi-haz vectorial  $\zeta = (E, \pi, X) \in \mathcal{E}'(X)$  la función  $f$  induce un cuasi-haz vectorial  $f^*(\zeta) = (f^*(E), \pi', X') \in \mathcal{E}'(X')$ . Sean  $\zeta_1 = (E, \pi, X)$  y  $\zeta_2 = (F, \pi', X)$  dos cuasi-haces vectoriales sobre  $X$ , sea  $\alpha : E \rightarrow F$  un morfismo general, entonces podemos definir un morfismo general  $f^*(\alpha) : f^*(E) \rightarrow f^*(F)$  definido en las fibras como  $(f^*(\alpha))_{x'} = \alpha_{f(x')}$ , Esquemáticamente tenemos

$$\begin{array}{ccccc} f^*(E) & \xrightarrow{f^*\alpha} & f^*(F) & & E & \xrightarrow{\alpha} & F \\ & \searrow f^*(\pi) & \swarrow f^*(\pi') & & \searrow \pi & \swarrow \pi' & \\ & & X' & \xrightarrow{f} & & & X \end{array}$$

Así  $f^*(\alpha) : f^*(E) \rightarrow f^*(F)$  es el morfismo  $f^*(\alpha) = \text{Id}_{X'} \times_X \alpha$  donde por definición  $\text{Id}_{X'} \times_X \alpha$  es restricción de  $\text{Id}_{X'} \times \alpha : X' \times E \rightarrow X' \times F$  al subconjunto  $X' \times_X E$  con  $\text{Id}_{X'} : X' \rightarrow X'$  la identidad y así  $\text{Id}_{X'} \times_X \alpha$  es continua. Sólo tenemos que ver que está bien definida. Sea  $(x', e) \in X' \times_X E$ , entonces

$$\begin{aligned} f^*(\alpha)(x', e) &= \text{Id}_{X'} \times_X \alpha(x', e) \\ &= (\text{Id}_{X'} \times \alpha)(x', e) \\ &= (x', \alpha_{f(x')}(e)) \\ &= (x', \alpha(e)) \end{aligned}$$

donde  $\pi(e) = f(x') = \pi(\alpha(e))$  ya que  $\alpha$  es un morfismo general, así  $(x', \alpha(e)) \in f^*(E)_{x'}$  está bien definida.

Sea  $g : Y \rightarrow X$ , entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} (f \circ g)^*(E) & \xrightarrow{\cong} & g^*(f^*(E)) & & f^*(E) & & E \\ & \searrow (f \circ g)^* & \downarrow g^*(f^*(\pi)) & & \downarrow f^*(\pi) & & \downarrow \pi \\ & & Z & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned}
 g^*(f^*(E)) &= g^*(Y \times_X E) \\
 &= Z \times_Y (Y \times_X E) \\
 &= Z \times_Y \{(y, u) \in Y \times E \mid f(y) = \pi(e)\} \\
 &= \{(z, (y, u)) \in Z \times (Y \times E) \mid f(y) = \pi(e) \text{ y } g(z) = f^*(\pi)(y, u)\} \\
 &= \{(z, (y, u)) \in Z \times (Y \times E) \mid f(y) = \pi(e) \text{ y } g(z) = y\} \\
 &= \{(z, (g(z), u)) \in Z \times (Y \times E) \mid f(g(z)) = \pi(e)\} \\
 &\cong \{(z, u) \in Z \times E \mid (f \circ g)(z) = \pi(e)\} \\
 &= (f \circ g)^*(E)
 \end{aligned}$$

por lo tanto  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$  y también se cumple que  $\text{Id}^* = \text{Id}$ . ■

## 1.2. Haces vectoriales

Un haz vectorial es un cuasi-haz vectorial que es localmente isomorfo a un haz trivial.

**Definición 1.2.1.** Sea  $\zeta = (E, \pi, X)$  un cuasi-haz vectorial sobre  $X$ . Entonces decimos que  $\zeta$  es **localmente trivial** o un **haz vectorial** si para cada  $x \in X$  existe un abierto  $U \subset X$ , con  $x \in U$  tal que  $\zeta|_U$  es isomorfo a un cuasi-haz trivial.

Más explícitamente, la última condición de la Definición 1.2.1 se expresa como se sigue: Existe un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita y existe un homeomorfismo  $\phi : U \times V \rightarrow \pi^{-1}(U)$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow[\cong]{\phi} & \pi^{-1}(U) \subset E \\ & \searrow \rho \quad \swarrow \pi|_{\pi^{-1}(U)} & \\ & U & \end{array}$$

donde  $\rho : U \times V \rightarrow U$  es la proyección en la primera entrada y tenemos que  $\phi_y : V \rightarrow E_y$  es lineal para cada  $y \in U$ .

Llamaremos a  $U$  dominio de trivialización del haz vectorial  $\zeta$ . Una cubierta abierta  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  donde cada  $U_i$  es dominio de trivialización se llama cubierta de trivialización.

**Ejemplo 1.2.2.** Veamos que el Ejemplo 1.1.4,  $E = \text{TS}^n = \{(y, v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle y, v \rangle = 0\}$  es un haz vectorial. Sea  $x_0 \in \mathbb{S}^n$  y  $U_{x_0} = \{y \in \mathbb{S}^n \mid \langle y, x_0 \rangle \neq 0\}$  una vecindad de  $x_0$ . Notemos que  $U_{x_0}$  es abierto ya que  $\langle -, - \rangle : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces la restricción  $\langle -, x_0 \rangle : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, así la imagen inversa de un cerrado es cerrado, y tenemos que  $\langle -, x_0 \rangle^{-1}(0)$  es cerrado. Como  $U_{x_0} = \mathbb{S}^n - \langle -, x_0 \rangle^{-1}(0)$  entonces  $U_{x_0}$  es abierto en  $\mathbb{S}^n$ .

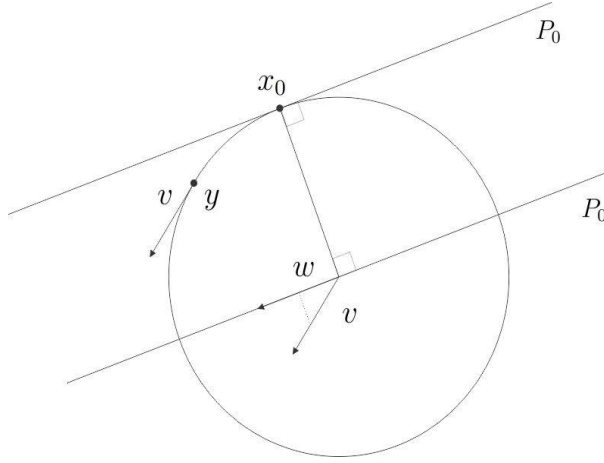
Sea  $P_0 = \{x_0\}^\perp$  y  $\phi : \text{TS}^n|_{U_{x_0}} \rightarrow U_{x_0} \times P_0$  dada por  $(y, v) \xrightarrow{\phi} (y, w)$  donde  $w = v - \langle x_0, v \rangle \cdot x_0$  es la proyección ortogonal de  $v$  en  $P_0$

Definimos  $\psi : U_{x_0} \times P_0 \rightarrow \text{TS}^n|_{U_{x_0}}$  por  $(y, w) \xrightarrow{\psi} (y, w + \frac{\langle y, w \rangle}{\langle x_0, y \rangle} x_0)$ . Es fácil verificar que los morfismos de cuasi-haces vectoriales  $\phi$  y  $\psi$  son inversas uno del otro. Por lo tanto,  $\text{TS}^n$  es localmente trivial.

**Ejemplo 1.2.3.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo  $k$ . Sea  $P(V)$  el espacio proyectivo asociado a  $V$ , esto es

$$P(V) = (V - \{0\}) / \sim$$

con la siguiente relación de equivalencia  $x \sim y$  si y sólo si existe  $\lambda \in k - \{0\}$  tal que  $x = \lambda y$ . Construiremos un haz vectorial  $E$  sobre  $P(V)$ . Consideremos  $P(V) \times V$  con la topología producto y  $\tilde{\pi} : P(V) \times V \rightarrow P(V)$  la proyección natural. Sea  $E = \{(D, e) \in P(V) \times V \mid D \in P(V) \text{ y } e \in D \cup \{0\}\} \subset P(V) \times V$ . Así la restricción



$\pi = \tilde{\pi}|_E : E \longrightarrow P(V)$  es continua.

Notemos que  $E_D = \pi^{-1}(D) = \{e \in D \cup \{0\}\} \subseteq V$ , así la fibra  $E_D$  tiene  $\dim E_D = 1$  y  $E = \bigsqcup_{D \in P(V)} E_D$ , donde  $E_D = D \cup \{0\}$  tiene la topología natural, ya que es subespacio de  $V$ . Así  $(E, \pi, P(V))$  es cuasi-haz vectorial.

Ahora veamos que  $(E, \pi, P(V))$  es localmente trivial. Damos a  $V$  un producto interno, lo cual siempre es posible porque  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita. O bien podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $V = \mathbb{R}^{n+1}$  ó  $\mathbb{C}^{n+1}$  con el producto interno canónico. Sea  $D_0 \in P(V)$  un punto cualquiera en  $P(V)$  esto es, una recta en  $V$ . Denotemos por  $U_{D_0}$  el conjunto de puntos en  $P(V)$ , que visto como rectas en  $V$  no son ortogonales a  $D_0$ , es decir,

$$U_{D_0} = \{\Delta \in P(V) | \langle \Delta, D_0 \rangle \neq 0\}$$

donde  $\langle \Delta, D_0 \rangle$  denota el producto interno de cualesquiera representantes de clase de  $\Delta$  y  $D_0$  respectivamente, observemos que el conjunto  $U_{D_0}$  está bien definido, (aún cuando  $\langle \Delta, D_0 \rangle$  no lo está), pues

$$\begin{aligned} \langle \lambda x, \lambda y \rangle &= \lambda \langle x, \lambda y \rangle \\ &= \lambda \bar{\lambda} \langle x, y \rangle \\ &= |\lambda|^2 \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

así para  $\lambda \neq 0$  tenemos que  $\langle x, y \rangle = 0$  si y sólo si  $\langle \lambda x, \lambda y \rangle = 0$ .

Veamos que  $U_{D_0}$  es abierto en  $P(V)$ . Sea  $p : V - \{0\} \longrightarrow P(V) := (V - \{0\}) / \sim$  la proyección natural, entonces

$$\begin{aligned} p^{-1}(U_{D_0}) &= \{e \in V - \{0\} | \langle e, D_0 \rangle \neq 0\} \\ &= (V - \{0\}) - \{e \in V - \{0\} | \langle e, D_0 \rangle = 0\} \end{aligned}$$



Notemos que  $\{e \in V - \{0\} \mid \langle e, D_0 \rangle = 0\}$  es cerrado en  $V - \{0\}$  porque es imagen inversa del cero de la función continua  $\langle -, D_0 \rangle : V - \{0\} \rightarrow k$ . Por lo tanto  $U_{D_0}$  es abierto.

Sea  $\phi : E_{U_{D_0}} = \pi^{-1}(U_{D_0}) \rightarrow U_{D_0} \times (D_0 \cup \{0\})$  definida por  $(\Delta, e) \mapsto (\Delta, e')$  con  $e \in \Delta \cup \{0\}$  y  $e'$  es la proyección ortogonal de  $e$  sobre  $D_0$ . Es fácil probar que  $\phi$  es continua, invertible y con inversa continua.

**Definición 1.2.4.** *Un morfismo general de haces vectoriales  $(f, g) : (E, \pi, X) \rightarrow (E', \pi', X')$  es un **isomorfismo de haces vectoriales** si existe un morfismo general  $(u', f') : (E', \pi', X') \rightarrow (E, \pi, X)$  tal que  $f' \circ f = 1_X$ ,  $f \circ f' = 1_{X'}$ ,  $g' \circ g = 1_E$  y  $g \circ g' = 1_{E'}$ .*

**Ejemplo 1.2.5.** Podemos dar un haz isomorfo al del ejemplo anterior en el caso de que  $k = \mathbb{R}$ . Así  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con  $\dim V = n + 1 < \infty$ . Recordemos que al identificar los subespacios lineales en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con los puntos donde estos intersectan a  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , tenemos una relación de equivalencia sobre  $\mathbb{S}^n$  dada por la identificación antípoda  $x \sim -x$ . No es difícil ver que el correspondiente espacio cociente es homeomorfo a  $P(\mathbb{R}^{n+1})$ , esto es

$$P(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim \cong \mathbb{S}^n / \{-x, x\}$$

Esta presentación del espacio proyectivo real de dimensión  $n$  nos permitirá establecer de manera más explícita el espacio total del haz de líneas canónico sobre  $P(\mathbb{R}^{n+1})$ . Sea  $F = \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} / \{(x, t), (-x, -t)\}$  y  $\pi' : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} / \{(x, t), (-x, -t)\} \rightarrow P(V)$  dada por  $\overline{(x, t)} \mapsto D_{\{-x, x\}}$  donde  $D_{\{-x, x\}}$  es la recta que pasa por  $x$  y  $-x$  para  $x \in \mathbb{S}^n$ . Veamos que  $F$  es un cuasi-haz sobre  $P(V)$ . Sea  $f : F \rightarrow E \subset P(V) \times V$  definido como  $\overline{(x, t)} \mapsto (D_{\{x, -x\}}, tx)$ . Notemos que  $tx \in D_{\{-x, x\}}$ , así efectivamente tenemos que  $(D_{\{-x, x\}}, tx) \in E$ . Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} / \{(x, t), (-x, -t)\} & \xrightarrow{f} & E \subset P(V) \times V \\ & \searrow \pi' & \swarrow \pi \\ & P(V) & \end{array}$$

donde a nivel de elementos se ve como:

$$\begin{array}{ccc} \overline{(x, t)} & \xrightarrow{f} & (D_{\{x, -x\}}, tx) \\ & \searrow \pi' & \swarrow \pi \\ & D_{\{x, -x\}} & \end{array}$$

Para ver que  $f$  es continua, notemos que

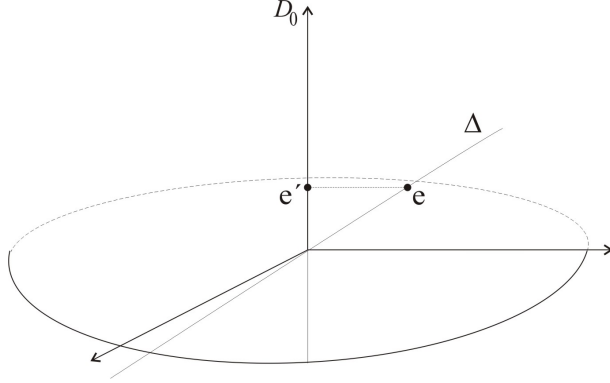
$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}}{\{(x, t), (-x, -t)\}} & \longrightarrow & P(V) \times V \\ \overline{(x, t)} & \longmapsto & (D_{\{-x, x\}}, tx) \end{array}$$

## Capítulo 1

es continua y la imagen de esta función está contenida en  $E$ . Así la función  $f$  es la restricción de esta función a su imagen y así  $f$  es continua.

Además  $f_{\overline{(x,t)}} : F_{\overline{(x,t)}} \rightarrow E_{f(x,t)}$  es lineal. Entonces  $f$  es un morfismo de cuasi-haces vectoriales.

Por otra parte definimos  $g : E \rightarrow F$  como  $(D_{\{x,-x\}}, v) \mapsto \overline{(x, t)}$  donde  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $tx = v$ , es decir,  $t = \langle v, x \rangle$  pues  $\langle v, x \rangle = \|v\| \cdot \|x\| \cdot \cos(\theta)$  pero como  $v \in D_{\{x,-x\}}$  tenemos que  $\langle v, x \rangle = \|v\| \cdot \cos(\theta) = \pm \|v\|$ .



Tenemos que  $P(V) \times V \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} / \{(x, t), (-x, -t)\}$  definido por  $(D_{\{x,-x\}}, v) \mapsto \overline{(x, \langle v, x \rangle)}$  es continua. Por lo tanto  $g$  es continua ya que es la restricción a  $E$  de esta función continua. Además  $g_{D_{\{x,-x\}}} : E_{D_{\{x,-x\}}} \rightarrow F_{\overline{(x,t)}}$  es lineal.

También notemos que  $f \circ g = \text{Id}$  y que  $g \circ f = \text{Id}$ . Por lo tanto  $f$  es un isomorfismo de cuasi-haces vectoriales y por lo tanto  $F$  es un haz vectorial, donde la propiedad de que  $F$  es localmente trivial es heredada de  $E$  mediante el isomorfismo de cuasi-haces.

**Ejemplo 1.2.6.** Sea  $V = \mathbb{C}^{n+1}$  con el producto interno usual. Entonces

$$\begin{aligned} P(V) &= \frac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\{x \sim y \Leftrightarrow y = \lambda x \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C}\}} \\ &\cong \frac{\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|(z_1, \dots, z_{n+1})\| = 1\}}{\{x \sim y \Leftrightarrow y = \lambda x \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } |\lambda| = 1\}} \end{aligned}$$

pues para  $x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$  tales que  $\|x\| = \|y\| = 1$  y tales que  $x = \lambda y$  se tiene que  $|\lambda| = 1$ .

$$P(V) \cong \frac{\mathbb{S}^{2n+1}}{\{x \sim y \Leftrightarrow y = \lambda x \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } |\lambda| = 1\}}$$

donde  $z_k = x_k + iy_k$  para  $k = 1, \dots, n$ . También podemos identificar de manera similar el haz vectorial  $E$  del Ejemplo 1.2.3 con el haz vectorial

$$F = \frac{\mathbb{S}^{2n+1} \times \mathbb{C}}{\{(x, t) \sim (\lambda x, \bar{\lambda} t) \text{ con } |\lambda| = 1, \lambda \in \mathbb{C}\}}.$$

**Nota.** Si  $k = \mathbb{R}$  lo llamamos haz vectorial real, y si  $k = \mathbb{C}$  lo llamaremos haz vectorial complejo.

**Definición 1.2.7.** El haz vectorial  $\zeta = (E, \pi, X)$  es llamado **haz vectorial trivial** si es isomorfo al haz producto  $X \times V$  con  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $k$ .

Sea  $\mathcal{E}_k(X)$  la categoría de haces vectoriales sobre el campo  $k$  con base  $X$ .

**Lema 1.2.8.** Sea  $f : X' \rightarrow X$  una función continua, entonces  $f^*$  define un funtor de  $\mathcal{E}(X)$  a  $\mathcal{E}(X')$ .

**Demostración.** Basta probar que si  $\zeta = (E, \pi, X)$  es localmente trivial entonces  $f^*(\zeta) = (f^*(E), f^*(\pi), X')$  es localmente trivial. Sea  $x \in X'$  y sea  $U$  una vecindad de  $f(x)$ , tal que  $\eta = \zeta|_U$  es localmente trivial, esto es,  $E|_U \cong U \times V$  donde  $V$  un espacio vectorial. Por definición  $f^*(E|_U) = f^{-1}(U) \times_U E|_U \cong f^{-1}(U) \times_U U \times V$ , así tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^*(E|_U) = f^{-1}(U) \times_U U \times V & & E|_U \cong U \times V \\ f^*(\pi)|_{f^{-1}(U)} \downarrow & & \downarrow \pi|_U \\ f^{-1}(U) & \xrightarrow{f|_{f^{-1}(U)}} & U \\ x \mapsto & & f(x) \end{array}$$

Por definición  $f^{-1}(U) \times_U U \times V = \{(x', (x, v)) \in f^{-1}(U) \times U \times V \mid \pi(x, v) = f(x')\}$ , pero sabemos que  $\pi(x, v) = x$  entonces  $f(x') = x$ . Así definimos

$$\begin{aligned} \varphi : f^*(E|_U) &\longrightarrow f^{-1}(U) \times V \\ (x', f(x'), v) &\longmapsto (x', v) \end{aligned}$$

que es continua por ser restricción de una función continua, y su inversa

$$\begin{aligned} \varphi' : f^{-1}(U) \times V &\longrightarrow f^*(E|_U) \\ (x', v) &\longmapsto (x', f(x'), v) \end{aligned}$$

es también continua.

De modo que  $f^*(\zeta)$  es localmente trivial y por lo tanto  $f : X' \rightarrow X$  induce un funtor de  $\mathcal{E}(X)$  a  $\mathcal{E}(X')$ . ■

**Corolario 1.2.9.** Sea  $X'$  un subespacio de  $X$  y  $\zeta = (E, \pi, X)$  un haz vectorial sobre  $X$ . Entonces  $\zeta|_{X'}$  es un haz vectorial sobre  $X'$ .

**Demostración.** Tomar la inclusión  $f = \iota : X' \rightarrow X$  en el Lema 1.2.8 y usamos el hecho de que  $\iota^*(\zeta) = \zeta|_{X'}$ . ■

**Proposición 1.2.10.** Sean  $E$  y  $F$  dos haces vectoriales sobre  $X$  y  $g : E \rightarrow F$  un morfismo de haces vectoriales tal que  $g_x : E_x \rightarrow F_x$  es biyectiva para cada  $x \in X$ , entonces  $g$  es un isomorfismo de haces vectoriales.

**Demostración.** Sea  $h : F = \sqcup_{x \in X} F_x \rightarrow E = \sqcup_{x \in X} E_x$  definido como  $h_x(v) := g_x^{-1}(v)$  para toda  $v \in F_x$  y  $x \in X$ . Sólo tenemos que demostrar que  $h$  es continua para ver que  $h$  es inversa de  $g$ .

Sea  $U$  vecindad de  $x$  tal que  $U$  es un dominio de trivialización para  $E$  y  $F$ , sea  $\beta : E_U \xrightarrow{\cong} U \times M$  y  $\gamma : F_U \xrightarrow{\cong} U \times N$  los isomorfismos correspondientes, donde  $M$  y  $N$  son espacios vectoriales. Definimos  $g_0 : U \times M \rightarrow U \times N$  definido por la composición

$$\begin{array}{ccccc} U \times M & \xrightarrow[\cong]{\beta^{-1}} & E_U & \xrightarrow{g|_U} & F_U & \xrightarrow[\cong]{\gamma} & U \times N \\ & \searrow & & & \nearrow & & \\ & & g_0 & & & & \end{array}$$

Por el Teorema 1.1.10, la función inducida  $\check{g}_0 : U \rightarrow \mathcal{L}(M, N)$  es continua. Definimos  $\check{h}_0 : U \rightarrow \text{Iso}(N, M)$  como  $\check{h}_0(x) = (g(x))^{-1}$  la cual es continua pues está dada por la composición de funciones continuas

$$X \xrightarrow{\check{g}_0} \text{Iso}(M, N) \xrightarrow{(\ )^{-1}} \text{Iso}(N, M)$$

$$x \longmapsto \check{g}_0(x) \longmapsto (\check{g}_0(x))^{-1}$$

Utilizando el Teorema 1.1.10 tenemos que el morfismo inducido  $h_0 : U \times N \xrightarrow{\cong} U \times M$  es continuo y considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times N & \xrightarrow{h_0} & U \times M \\ \gamma \uparrow & & \downarrow (\beta)^{-1} \\ F_U & \xrightarrow{h_U} & E_U \end{array}$$

tenemos que  $h_U = \beta^{-1} \circ h_0 \circ \gamma$ . Por lo tanto  $h$  es continua y  $g$  es un isomorfismo. ■

**Lema 1.2.11.** Sea  $\zeta = (E, \pi, X)$  un haz vectorial. Si definimos la suma como

$$\begin{aligned} s : E \times_X E &\longrightarrow E \\ (e, e') &\longmapsto e + e' \end{aligned}$$

y el producto por

$$\begin{aligned} p : k \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, e) &\longmapsto \lambda \cdot e \end{aligned}$$

entonces  $s$  y  $p$  son continuas.

**Demostración.** Sólo basta probar el lema para  $E = X \times V$ . Para  $p$  tenemos que

$$\begin{aligned} p : k \times (X \times V) &\longrightarrow X \times V \\ (\lambda, (x, v)) &\longmapsto (x, \lambda \cdot v) \end{aligned}$$

donde se define la multiplicación por escalar en la segunda entrada y la identidad en la primera, por lo tanto  $p$  es continua. Notemos que si  $E = X \times V$ , entonces  $E \times_X E \cong X \times V \times V$  ya que

$$\begin{aligned} E \times_X E &= \{(e', e) \in E \times E \mid \pi(e') = \pi(e)\} \\ &= \{(e', (x, v)) \in E \times (X \times V) \mid \pi(e') = \pi((x, v))\} \quad \text{donde } \pi((x, v)) = x \\ &= \{(e', (\pi(e'), v)) \in E \times (X \times V)\} \\ &\cong \{(e', v) \in E \times V\} \\ &= E \times V \\ &= (X \times V) \times V \end{aligned}$$

así la suma  $s$  es dada por

$$\begin{aligned} s : E \times_X E \cong X \times V \times V &\longrightarrow X \times V \\ (x, e', e) &\longmapsto (x, e' + e) \end{aligned}$$

la cual es continua. ■

**Definición 1.2.12.** El **rango** de un haz vectorial  $\zeta = (E, \pi, X)$  está dado por la función localmente constante

$$\begin{aligned} r : X &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \dim E_x \end{aligned}$$

El rango de  $\zeta$  es  $n \in \mathbb{N}$  si  $r(x) = n$  para toda  $x \in X$ .

**Lema 1.2.13.** Cuando el espacio base  $X$  es conexo por trayectorias, el rango de cualquier haz vectorial definido sobre  $X$  es constante.

**Demostración.**

Sean  $U_1$  y  $U_2$  dos dominios de trivialización tales que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  entonces existen isomorfismos  $\varphi_{U_1} : U_1 \times k^{l_1} \xrightarrow{\cong} E_{U_1}$  y  $\varphi_{U_2} : U_2 \times k^{l_2} \xrightarrow{\cong} E_{U_2}$ . Sea  $x \in U_1 \cap U_2$  entonces tenemos los isomorfismos  $\varphi_{U_1}|_{\{x\}} : \{x\} \times k^{l_1} \xrightarrow{\cong} E_{\{x\}}$  y  $\varphi_{U_2}|_{\{x\}} : \{x\} \times k^{l_2} \xrightarrow{\cong} E_{\{x\}}$ , así tenemos que  $\{x\} \times k^{l_1} \cong \{x\} \times k^{l_2}$ , por lo tanto  $k^{l_1} \cong k^{l_2}$  de aquí  $l_1 = l_2$ .

## Capítulo 1

---

Sean  $x_0, x_1 \in X$  y sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  una trayectoria continua con  $\gamma(0) = x_0$  y  $\gamma(1) = x_1$ . Si  $\zeta$  es un haz vectorial sobre  $X$ , existe una cubierta abierta de  $X$  formada por dominios de trivialización de  $\zeta$ . Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  tal cubierta. Luego, como  $\text{Im } \gamma \subset X$  es un conjunto compacto podemos sustraer una cubierta finita de  $\text{Im } \gamma$ , digamos  $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_N}\}$ . El Lema se sigue iterando el razonamiento anterior, iniciando con cualquier abierto que contenga a  $x_0$  y otro abierto cuya intersección sea no vacía. Repetimos este proceso hasta incluir algún abierto que contenga a  $x_1$ .

■

### 1.3. Teorema de pegado

**Definición 1.3.1.** Una colección  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  de subconjuntos de un espacio topológico  $X$  es **localmente finita** si para cada  $x \in X$  existe una vecindad  $W_x$  de  $x$  tal que  $W_x \cap A_\alpha \neq \emptyset$  para a lo más un número finito de índices  $\alpha \in \Lambda$ .

**Teorema 1.3.2.** Sean  $\zeta = (E, \pi, X)$  y  $\zeta' = (E', \pi', X)$  dos haces vectoriales sobre la misma base  $X$ . Consideremos:

1. una cubierta abierta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$ . (Respectivamente una cubierta localmente finita de cerrados.)
2. una colección de morfismos  $\alpha_i : \zeta|_{U_i} \longrightarrow \zeta'|_{U_i}$  tal que

$$\alpha_i|_{U_i \cap U_j} = \alpha_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Entonces existe un único morfismo  $\alpha : \zeta \longrightarrow \zeta'$  tal que  $\alpha|_{U_i} = \alpha_i$ .

**Demostración.** Primero identificamos  $E_{U_i}$  y  $E'_{U_i}$  como subconjuntos de  $E$  y  $E'$  respectivamente. Sea  $e \in E$ , definimos  $\alpha(e) := \alpha_i(e)$  para  $e \in E_{U_i}$  y por la segunda hipótesis esta definición es independiente de la elección de  $i \in I$ . Dado que

$$\{E_{U_i}\}_{i \in I} = \{\pi^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$$

es una cubierta abierta (o localmente finita de cerrados) de  $E$ , entonces por un Lema de pegado [19]  $\alpha$  es continua. Además  $\alpha_x : E_x \longrightarrow E'_x$  es lineal ya que para  $e \in E_x \subset E_{U_i}$  para alguna  $i \in I$ , así  $\alpha_x(e) = (\alpha_i)_x(e)$ . Mas aún  $\alpha$  es un morfismo general.

Veamos la unicidad. Sea  $\tilde{\alpha} : E \longrightarrow E'$  tal que  $\tilde{\alpha}|_{U_i} = \alpha_i$  para toda  $i \in I$  (i.e.  $\tilde{\alpha}|_{\pi^{-1}(U_i)} = \alpha_i$  para toda  $i \in I$ ). Sea  $e \in E$  entonces  $e \in \pi^{-1}(U_i) = E_{U_i}$  para alguna  $i \in I$ . Así  $\tilde{\alpha}(e) = \tilde{\alpha}|_{\pi^{-1}(U_i)}(e) = \alpha_i(e) = \alpha(e)$ .

■

**Teorema 1.3.3.** Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  una cubierta abierta de un espacio topológico  $X$  (respectivamente una cubierta de cerrados localmente finita en un espacio paracompacto  $X$ ). Sea  $\zeta_i = (E_i, \pi_i, U_i)$  un haz vectorial sobre  $U_i$  para cada  $i \in I$  y sean  $g_{ji} : \zeta_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cong} \zeta_j|_{U_i \cap U_j}$  isomorfismos de haces vectoriales que satisfacen la siguiente condición de compatibilidad

$$g_{ki}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} = g_{kj}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \circ g_{ji}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$$

Entonces existe un único haz vectorial  $\zeta = (E, \pi, X)$  sobre  $X$  e isomorfismos  $g_i : \zeta_i \xrightarrow{\cong} \zeta|_{U_i}$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \zeta_i|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{g_{ji}} & \zeta_j|_{U_i \cap U_j} \\ & \searrow \cong & \swarrow \cong \\ & \zeta|_{U_i \cap U_j} & \end{array}$$

## Capítulo 1

---

**Demostración.** Como  $g_{ii} : E_i|_{U_i \cap U_i} \longrightarrow E_i|_{U_i \cap U_i}$  por la condición de compatibilidad tenemos que

$$g_{ii}|_{U_i \cap U_i \cap U_i} = g_{ii}|_{U_i \cap U_i \cap U_i} \circ g_{ii}|_{U_i \cap U_i \cap U_i}$$

pero  $E_i|_{U_i \cap U_i} = E_i$  y así  $g_{ii} : E_i \longrightarrow E_i$  es tal que

$$\begin{aligned} g_{ii} &= g_{ii} \circ g_{ii} \\ \Rightarrow g_{ii}^{-1} \circ g_{ii} &= g_{ii}^{-1} \circ g_{ii} \circ g_{ii} \\ \Rightarrow \text{Id}_{U_i} &= g_{ii} \end{aligned}$$

Usando que  $g_{ii} = \text{Id}_{U_i}$  obtenemos que

$$g_{ki}|_{U_i \cap U_k} \circ g_{ik}|_{U_i \cap U_k} = g_{kk}|_{U_i \cap U_k} = \text{Id}|_{U_i \cap U_k}$$

entonces  $g_{ki}|_{U_i \cap U_k} = (g_{ik}|_{U_i \cap U_k})^{-1}$ .

Consideremos la unión ajena  $\sqcup_{i \in I} E_i$  a la cual le daremos la topología de la unión ajena. Definimos  $E := \sqcup_{i \in I} E_i / \sim$  con la topología cociente donde  $e_i \sim e_j$  si y sólo si  $g_{ji}(e_i) = e_j$  con  $e_i \in E_i$  y  $e_j \in E_j$ .

Veamos que  $\sim$  es una relación de equivalencia.

1. **Reflexividad.**  $e_i \sim e_i$  ya que  $g_{ii}(e_i) = \text{Id}(e_i) = e_i$ . Por lo tanto es reflexiva.
2. **Simetría.** Si  $e_i \sim e_j$  entonces  $g_{ji}(e_i) = e_j$ , consideremos  $(g_{ji})^{-1} = g_{ij}$ . Tenemos que

$$g_{ij}(e_j) = g_{ij}(g_{ji}(e_i)) = e_i$$

entonces  $e_j \sim e_i$ , por lo tanto es simétrica.

3. **Transitividad.** Supongamos que  $e_i \sim e_j$  y  $e_j \sim e_k$ , es decir que  $g_{ji}(e_i) = e_j$  y  $g_{kj}(e_j) = e_k$ , entonces por la condición de compatibilidad de la hipótesis tenemos que

$$g_{ki}(e_i) = (g_{kj} \circ g_{ji})(e_i) = g_{kj}(g_{ji}(e_i)) = g_{kj}(e_j) = e_k$$

así  $e_i \sim e_k$ . Por lo tanto  $\sim$  es una relación de equivalencia.

Definimos  $\pi' : \sqcup_{i \in I} E_i \longrightarrow X$  por  $\pi'|_{E_i} := \pi_i : E_i \longrightarrow U_i$  para toda  $i \in I$ . Es fácil verificar que  $\pi'$  es continua. Consideremos  $\rho : \sqcup_{i \in I} E_i \longrightarrow \sqcup_{i \in I} E_i / \sim$  la proyección natural con respecto a la identificación anterior. Definamos  $\pi = \pi' \circ \rho^{-1}$ , así

$$\begin{array}{ccc} \sqcup_{i \in I} E_i & \xrightarrow{\rho} & \sqcup_{i \in I} E_i / \sim \\ \pi' \downarrow & \swarrow \pi = \pi' \circ \rho^{-1} & \\ X & & \end{array}$$



Por el Teorema de Transgresión ([12], p. 132) basta probar que  $\pi'$  es 1-valuada y tendremos que  $\pi$  es continua.

Sea  $\bar{e} \in E$ , así  $e \in E_{i_0}$  para alguna  $i_0 \in I$ . Entonces  $e \in (E_{i_0})_x$  para algún  $x \in U_{i_0}$ , así  $\rho^{-1}(\bar{e}) = \{g_{ji_0}(e)\}_{j \in I}$  y dado que  $g_{ji_0}$  es un isomorfismo de haces vectoriales, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E_{i_0}|_{U_{i_0} \cap U_j} & \xrightarrow[\cong]{g_{ji_0}} & E_j|_{U_{i_0} \cap U_j} \\ & \searrow \pi'|=\pi_{i_0}| & \swarrow \pi_j|=\pi'| \\ & U_{i_0} \cap U_j & \end{array}$$

a nivel de elementos tenemos

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{\quad} & g_{ji_0}(e) \\ & \searrow & \swarrow \\ & x & \end{array}$$

así  $\pi_j(g_{ji_0}(e)) = x$  para toda  $j \in I$  cuando tenga sentido. Por lo tanto  $\pi'(g_{ji_0}(e)) = x$ , es decir,  $\pi'$  es 1-valuada y así  $\pi$  es continua.

Sea  $x_0 \in X$ , demos a  $\pi^{-1}(x_0)$  estructura de espacio vectorial. Tenemos que

$$E_{x_0} = \pi^{-1}(x_0) = (\pi' \circ \rho^{-1})^{-1}(x_0) = \rho \circ (\pi')^{-1}(x_0)$$

como  $\pi'|_{E_i} = \pi_i : E_i \rightarrow U_i$ , nos queda  $\rho \circ (\pi')^{-1}(x_0) = \rho \circ (\bigsqcup_{i \in \Gamma} \pi_i^{-1}(x_0))$  donde  $\Gamma$  es el conjunto  $\Gamma = \{i \in I | x_0 \in U_i\}$ , así

$$\rho \circ (\pi')^{-1}(x_0) = \rho \circ \left( \bigsqcup_{i \in \Gamma} \pi_i^{-1}(x_0) \right) = \rho \circ \left( \bigcup_{i \in \Gamma} (E_i)_{x_0} \right) = \bigcup_{i \in \Gamma} \rho \circ ((E_i)_{x_0})$$

por lo tanto  $E_{x_0} = \bigcup_{i \in \Gamma} \rho \circ ((E_i)_{x_0})$ . Por otra parte como consecuencia de las hipótesis tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (E_i)_{x_0} & \xrightarrow[\cong]{g_{ji}} & (E_j)_{x_0} \\ & \searrow \pi_i & \swarrow \pi_j \\ & \{x_0\} & \end{array}$$

entonces  $\rho \circ ((E_i)_{x_0}) = \rho \circ ((E_j)_{x_0})$  para toda  $i, j \in \Gamma$ , por lo tanto  $E_{x_0} = \rho \circ ((E_i)_{x_0})$  para toda  $i \in \Gamma$ , es decir, todas las fibras de  $x_0$ ,  $(E_i)_{x_0}$  se identifican entre si, por lo que por nuestra definición de relación de equivalencia tenemos que para cada  $i \in \Gamma$  el homeomorfismo  $\rho|_{(E_i)_{x_0}} : (E_i)_{x_0} \rightarrow E_{x_0} \subset E$  definido por  $e \mapsto \bar{e}$ , de esta manera  $E_{x_0}$  tiene la topología natural.

Dado cualquier  $i \in \Gamma$  usaremos este homeomorfismo para definir una estructura de espacio vectorial en  $E_{x_0}$ . Sean  $\bar{e}, \bar{e}' \in E_{x_0}$  entonces  $e \sim e_1^i$  y  $e' \sim e_2^i$  para algún par de elementos  $e_1^i, e_2^i \in (E_i)_{x_0}$ . Para  $\lambda \in k$  definimos  $\bar{e} + \lambda \cdot \bar{e}' = e_1^i + \lambda \cdot e_2^i \in E_{x_0}$ . Veamos que

## Capítulo 1

---

esta definición no depende de  $i \in \Gamma$  elegido. Sea  $j \in \Gamma$  con  $e \sim e_1^j$  y  $e' \sim e_2^j$  para algún par de elementos  $e_1^j, e_2^j \in (E_j)_{x_0}$ , por transitividad tenemos que  $e_1^i \sim e_1^j$  y  $e_2^i \sim e_2^j$ , es decir que  $(g_{ji})_{x_0}(e_1^i) = e_1^j$  y  $(g_{ji})_{x_0}(e_2^i) = e_2^j$  entonces

$$\begin{aligned} \bar{e} + \lambda \cdot \bar{e}' &= \overline{e_1^j + \lambda \cdot e_2^j} \\ &= \overline{(g_{ji})_{x_0}(e_1^i) + \lambda \cdot (g_{ji})_{x_0}(e_2^i)} \\ &= \overline{(g_{ji})_{x_0}(e_1^i + \lambda \cdot e_2^i)} \text{ pues } g_{ji} \text{ es lineal} \\ &= \overline{e_1^i + \lambda \cdot e_2^i} \text{ por definición de la relación de equivalencia.} \end{aligned}$$

Sean  $x_0, y_0 \in X$  con  $x_0 \neq y_0$  entonces la intersección de las fibras  $E_{x_0}$  y  $E_{y_0}$  es vacía pues no hay elemento de  $(E_i)_{x_0}$  que esté relacionado con algún elemento de  $(E_j)_{y_0}$  porque los isomorfismos  $(g_{ji})_{x_0}$  van de  $(E_i)_{x_0}$  en  $(E_j)_{x_0}$ , y por lo tanto  $E = \bigsqcup_{x \in X} E_x$ .

Procederemos ahora a definir los isomorfismos  $g_i : E_i \longrightarrow E_{U_i}$  que enuncia el teorema. Sea

$$\begin{aligned} g_i : E_i &\longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \equiv E_{U_i} \\ e &\longmapsto \bar{e} \end{aligned}$$

notemos que  $g_i$  es continua, pues  $\rho : \bigsqcup_{i \in I} E_i \longrightarrow E$  definido por  $e \longmapsto \bar{e}$  es continua, entonces la restricción  $\rho|_{E_i} : E_i \longrightarrow E$  es continua. Dado que

$$\begin{aligned} \rho(E_{i_0}) &= \rho\left(\bigsqcup_{x \in U_{i_0}} (E_{i_0})_x\right) \\ &= \bigcup_{x \in U_{i_0}} \rho((E_{i_0})_x) \\ &= \bigcup_{x \in U_{i_0}} E_x \text{ pues } \rho((E_{i_0})_x) = E_x \\ &= E_{U_{i_0}} \end{aligned}$$

Por lo tanto la restricción de  $\rho$  a  $E_i$ , es exactamente la función continua  $g_i : E_i \longrightarrow E_{U_i}$ . Aun más tenemos que  $g_i$  es sobreyectiva ya que la imagen de  $\rho$  es todo  $E_{U_i}$ . Veamos que es  $g_i$  inyectiva, supongamos que  $g_i(e) = g_i(e')$  donde  $e, e' \in E_i$ , así tenemos que  $\rho(e) = \rho(e')$  entonces  $\bar{e} = \bar{e}'$ , es decir,  $e \sim e'$  con  $e, e' \in E_i$ , por lo tanto  $g_{ii}(e) = \text{Id}(e) = e'$  así  $e = e'$ . Veamos que  $g_i : E_i \longrightarrow E_{U_i}$  es abierta, lo cual es necesario pues no hemos probamos que  $E$  es un haz vectorial, con lo anteriormente demostrado solo tenemos que  $E$  es un cuasi-haz vectorial. Sea  $A \subset E_i$  un conjunto abierto en  $E_i$  lo que implica que  $A$  es abierto en  $\bigsqcup_{i \in I} E_i$ . Dado que  $g_i(A) = \rho(A)$  y dado que  $\rho$  es una función abierta por ser identificación tenemos que  $g_i(A)$  es abierto en  $E$  y por lo tanto  $g_i(A)$  es abierto en  $E_{U_i}$ . Ahora veamos que para toda  $x \in X$  la función  $(g_i)_x : (E_i)_x \longrightarrow E_x$  es lineal. Para  $e_1, e_2 \in (E_i)_i$  y  $\lambda \in k$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 g_i(e_1 + \lambda e_2) &= \overline{e_1 + \lambda \cdot e_2} \\
 &= \overline{e_1} + \lambda \cdot \overline{e_2} \text{ por definición} \\
 &= g_i(e_1) + \lambda \cdot g_i(e_2).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $g_i : E_i \rightarrow E_{U_i}$  es un isomorfismo de cuasi-haces vectoriales. Además tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E_i|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{g_{ji}} & E_j|_{U_i \cap U_j} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & e \xrightarrow{\quad} g_{ji}(e) & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 & \bar{e} = \overline{g_{ij}(e)} & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 & E|_{U_i \cap U_j} &
 \end{array}$$

$g_i|$    $g_j|$

Solo falta ver que  $E$  es localmente trivial, lo analizaremos en dos casos.

**Caso 1:** La cubierta  $\{U_i\}_{i \in I}$  es una cubierta abierta de  $X$ .

Sea  $x \in X$ , entonces  $x \in U_i$  para algún  $i \in I$  y sea  $V$  abierto de  $X$  tal que  $V \subseteq U_i$  y tal que  $E_i|_V$  es trivial. Como para cada  $i \in I$  tenemos el isomorfismo  $g_i : E_i \xrightarrow{\cong} E_{U_i}$  entonces, tenemos el isomorfismo  $g_i|_V : E_i|_V \xrightarrow{\cong} E_V$ . Por lo tanto  $E_V$  es localmente trivial y así  $E$  es un haz vectorial.

**Caso 2:** La cubierta  $\{U_i\}_{i \in I}$  es una cubierta de cerrados localmente finita en un espacio paracompacto y Hausdorff  $X$ . Por hipótesis la topología de cada  $U_i$  es inducida por  $X$ .

Dado  $x_0 \in X$  entonces para una vecindad abierta  $B$  de  $x_0$ , se tiene que  $B$  intersecta a lo más un número finito de elementos de la cubierta cerrada, digamos  $U_1, \dots, U_p$ , donde pueden ocurrir dos casos:  $x_0 \in U_i$  ó  $x_0 \notin U_i$  con  $i = 1, \dots, p$ , así reasignamos etiquetas considerando las colecciones  $N = \{U_{n_1}, \dots, U_{n_s} \mid \text{tal que } x \notin U_{n_i} \text{ con } i = 1, \dots, s\}$  y  $S = \{U_{s_1}, \dots, U_{s_t} \mid \text{tal que } x \in U_{s_j} \text{ con } j = 1, \dots, t\}$ .

Consideremos la colección  $N$ . Dado que  $X$  es paracompacto entonces  $X$  es normal y dado que por hipótesis los  $U_i$  son cerrados en  $X$ , para cada  $U_{n_i}$  existe un abierto  $A_{n_i}$  en  $X$  tal que  $x_0 \in A_{n_i}$  y  $A_{n_i} \cap U_{n_i} = \emptyset$ .

Por otra parte, consideremos la colección  $S$ . Dado que para cada  $j = 1, \dots, t$  tenemos que  $x_0 \in U_{s_j}$  y  $U_{s_j}$  es el espacio base de un haz, entonces existe un abierto  $B_{s_i}$  en  $U_{s_i}$  con  $x_0 \in B_{s_i}$  y tal que  $B_{s_i}$  es trivializable. Dado que por hipótesis la cubierta  $\{U_i\}_{i \in I}$  tienen la topología relativa inducida por  $X$ , entonces  $B_{s_i} = U_{s_i} \cap A_{s_i}$  con  $A_{s_i}$  abierto

en  $X$ .

Sea  $\tilde{B} = (A_{s_1} \cap \dots \cap A_{s_t}) \cap (A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_r}) \cap B$  entonces  $x_0 \in \tilde{B}$ , notemos que  $\tilde{B}$  es abierto en  $X$ , además intersecta a lo más una colección finita  $U_{i_1}, \dots, U_{i_p}$  de la colección  $\{U_i\}_{i \in I}$  y la colección  $\tilde{B} \cap U_{i_1}, \dots, \tilde{B} \cap U_{i_p}$  es trivializable en  $U_{i_1}, \dots, U_{i_p}$  respectivamente.

Dado a que  $X$  es paracompacto, entonces  $X$  es regular, de este modo existe un abierto  $Z$  en  $X$  con  $x_0 \in Z$  tal que  $Z \subset \overline{Z} \subseteq \tilde{B}$ . Sea  $V = \overline{Z}$ , entonces  $V$  es cerrado en  $X$ , donde  $V$  intersecta a lo más una colección finita de  $U_{i_1}, \dots, U_{i_p}$  de la colección  $\{U_i\}_{i \in I}$  donde  $V \cap U_{i_1}, \dots, V \cap U_{i_p}$  son cerrados trivializables con  $x_0 \in Z \subset V$  y  $Z$  abierto.

Por simplicidad renombraremos a  $U_{i_1}, \dots, U_{i_p}$  por  $U_1, \dots, U_p$ . Sea  $V_j = U_j \cap V$  para toda  $j = 1, \dots, p$ , así tenemos los isomorfismos  $\gamma_j : E_j|_{V_j} \xrightarrow{\cong} V_j \times k^n$ . Por la primera parte de la prueba tenemos que  $g_j : E_j \xrightarrow{\cong} E|_{U_j}$  es un isomorfismo de cuasi-haces vectoriales, entonces  $g_j|_{V \cap U_j} : E_j|_{V \cap U_j} \rightarrow E|_{V \cap U_j}$  es un isomorfismo de cuasi-haces vectoriales, así definimos el isomorfismo de cuasi haces vectoriales  $\alpha_j := \gamma_j \circ (g_j|_{V_j})^{-1} : E|_{V_j} \rightarrow V_j \times k^n$ .

Supongamos sin perdida de generalidad que  $x_0 \in V_1$  y consideremos el isomorfismo  $\alpha_1 := \gamma_1 \circ (g_1|_{V_1})^{-1} : E|_{V_1} \rightarrow V_1 \times k^n$ , definiremos a continuación un morfismo  $\alpha_r$  por inducción sobre  $r$  extendiendo a  $\alpha_1$  donde

$$\alpha_r : E|_{V_1 \cup \dots \cup V_r} \rightarrow (V_1 \cup \dots \cup V_r) \times k^n$$

con  $V_1 \cup \dots \cup V_r = V$ . Supongamos que  $\alpha_{r-1} : E|_{V_1 \cup \dots \cup V_{r-1}} \rightarrow (V_1 \cup \dots \cup V_{r-1}) \times k^n$  está definido y  $\alpha_{r-1}|_{V_1} = \alpha_1$ . Sea  $U = V_1 \cup \dots \cup V_{r-1}$ , entonces con esta notación  $\alpha_{r-1} : E|_U \rightarrow U \times k^n$ . Queremos definir  $\alpha_r : E|_{U \cup V_r} \rightarrow (U \cup V_r) \times k^n$  para esto basta definir un morfismo  $V_r \times k^n \cong E|_{V_r} \xrightarrow{\alpha_r} V_r \times k^n$  que extienda al morfismo  $(U \cap V_r) \times k^n \cong E|_{U \cap V_r} \xrightarrow{\alpha_{r-1}} (U \cap V_r) \times k^n$ . Dado que  $\alpha_{r-1}|_{U \cap V_r} : E|_{U \cap V_r} \rightarrow (U \cap V_r) \times k^n$ , y  $E|_{U \cap V_r} \cong (U \cap V_r) \times k^n$ , entonces por la observación 1.1.6  $\alpha_{r-1}|_{U \cap V_r}$  es un morfismo entre haces triviales. Así basta definir una función continua

$$\beta_r : V_r \rightarrow \mathcal{L}(k^n, k^n) \cong k^{n^2}$$

tal que extiende a la función continua  $\check{\alpha}_{r-1}|_{V_r \cap U} : V_r \cap U \rightarrow \mathcal{L}(k^n, k^n) \cong k^{n^2}$ . Pero esto es posible por que  $V_r \cap U$  es cerrado en  $V_r$  y por el Lema de extensión de Tietze ([19], p. 219).

Sea  $\alpha : E|_V \rightarrow V \times k^n$  el nuevo morfismo obtenido. Así  $\alpha$  extiende al isomorfismo de cuasi-haces  $\alpha_1$ , es decir que  $\alpha|_{V_1} = \alpha_1$ .

Ahora demostraremos que existe un abierto  $W$  de  $X$ , con  $w_0 \in W$  tal que  $\alpha|_W : E|_W \rightarrow W \times k^n$  es un isomorfismo y así tendremos que  $E$  es localmente trivial.

Consideremos para cada  $j = 1, \dots, p$  la restricción del morfismo  $\alpha$  a  $V_j$ ,

$$\alpha|_{V_j} : E|_{V_j} \rightarrow V_j \times k^n$$

como  $E|_{V_j} \cong V_j \times k^n$ ,  $\alpha|_{V_j}$  es un isomorfismo entre haces triviales y así por la observación 1.1.10 tenemos definida la función continua  $\beta_j = \check{\alpha}|_{V_j} : V_j \rightarrow \mathcal{L}(k^n, k^n)$

es continua. Dado que  $\text{Iso}(k^n, k^n) \cong \{A \in M_{n \times n}(k) | \det A \neq 0\}$ , tenemos que  $\text{Iso}(k^n, k^n)$  es abierto en  $\mathcal{L}(k^n, k^n)$ , por lo tanto  $W_j := \check{\beta}_j^{-1}(\text{Iso}(k^n, k^n)) \subseteq V_j$  es abierto en  $V_j$  para toda  $j = 1, \dots, p$  y por construcción  $(\check{\alpha}|_{W_j}) : W_j \rightarrow \text{Iso}(k^n, k^n)$  induce el isomorfismo  $(\alpha|_{W_j}) : E|_{W_j} \rightarrow_{\cong} W_j \times k^n$ .

Sea

$$\begin{aligned} \widetilde{W} &= \{x \in V | \alpha_x : E_x \rightarrow \{x\} \times k^n \text{ es isomorfismo}\} \\ &= \bigcup_{j=1}^p \{x \in V_j | \alpha_x : E_x \rightarrow \{x\} \times k^n \text{ es isomorfismo}\} \\ &= \bigcup_{j=1}^p W_j \end{aligned}$$

Notemos que como  $\alpha_1 : E|_{V_1} \rightarrow V_1 \times k^n$  es isomorfismo y  $x_0 \in V_1$ , entonces  $V_1 = W_1$ . Por lo tanto  $\widetilde{W}$  es abierto en  $V$ , con  $x_0 \in \widetilde{W}$  y con  $\alpha|_{\widetilde{W}} : E|_{\widetilde{W}} \rightarrow \widetilde{W} \times k^n$  un isomorfismo. Tomando  $W := \widetilde{W} \cap Z$  (Vimos que  $x_0 \in Z \subset V$  con  $Z$  abierto y  $\overline{Z} = V$ ), tenemos que  $W$  es abierto en  $X$  y  $\alpha|_W$  es isomorfismo.

Veamos que el haz obtenido es único salvo isomorfismos. Consideremos  $\zeta' = (E', \pi', X)$  otro haz vectorial y sea  $g'_i : E_i \xrightarrow{\cong} E'|_{U_i}$  isomorfismos tales que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_i|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{g_{ji}} & E_j|_{U_i \cap U_j} \\ & \searrow g'_i & \swarrow g'_j \\ & E'|_{U_i \cap U_j} & \end{array}$$

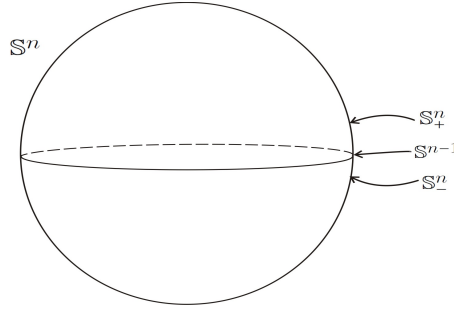
Sea  $\alpha_i := g'_i \circ g_i^{-1} : E_{U_i} \rightarrow E'_{U_i}$ . Para  $g_{ji} : E_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cong} E_j|_{U_i \cap U_j}$ , en  $U_i \cap U_j$  tenemos que  $g_{ji} = g'_j \circ g_i = g_j^{-1} \circ g_i$ , entonces  $g'_i \circ g_i^{-1} = g'_j \circ g_j^{-1}$ , es decir  $\alpha_i = \alpha_j$  en  $U_i \cap U_j$ . Por el Teorema 1.3.2 existe un único  $\alpha : E \rightarrow E'$  tal que  $\alpha|_{U_i} = \alpha_i$  para toda  $i \in I$ . Esto es, existe un único  $\alpha : E \rightarrow E'$  tal que

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ g_i \swarrow & & \searrow g'_i \\ E|_{U_i} & \xrightarrow[\alpha|_{U_i}]{} & E'|_{U_i} \end{array}$$

■

**Ejemplo 1.3.4.** Consideremos  $\mathbb{S}^n$  la esfera unitaria de dimensión  $n$ , tomando  $U_1 = \mathbb{S}_+^n$  el hemisferio superior de la esfera y  $U_2 = \mathbb{S}_-^n$  el hemisferio inferior de la esfera. Así tenemos una cubierta cerrada  $\{U_1, U_2\}$  de  $\mathbb{S}^n$  con  $\mathbb{S}_+^n \cap \mathbb{S}_-^n = \mathbb{S}^{n-1}$ .

Sea  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \text{GL}_p(k) \subseteq \mathcal{L}(k^p, k^p)$  una función continua. Aplicaremos el Teorema 1.3.3 para probar que existe un haz  $E_f$  sobre  $\mathbb{S}^n$  naturalmente asociado a  $f$ : Por



el Teorema 1.1.10 tenemos que  $\check{f} : \mathbb{S}^{n-1} \times k^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{S}^{n-1} \times k^n$  es un isomorfismo, es decir  $\check{f} : E_1|_{U_1 \cap U_2} \xrightarrow{\cong} E_2|_{U_1 \cap U_2}$ . El haz  $E_f$  lo obtenemos al pegar los haces triviales  $E_1 = \mathbb{S}_+^n \times k^p$  y  $E_2 = \mathbb{S}_-^n \times k^p$  con funciones de transición  $g_{11} = \text{Id}_{\mathbb{S}_+^n}$ ,  $g_{22} = \text{Id}_{\mathbb{S}_-^n}$  y  $g_{21} = \check{f}$ .

★

## 1.4. Cociclos

**Definición 1.4.1.** Sea  $(G, \cdot)$  un grupo topológico y  $X$  un espacio topológico. Un ***G-cociclo*** en  $X$  es una pareja que consiste en una cubierta abierta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$  y funciones continuas  $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  tales que  $g_{ki}(x) = g_{kj}(x) \cdot g_{ji}(x)$  para  $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ , denotado por  $(U_i, g_{ji})$ .

Para usos prácticos tomaremos  $G = \text{GL}_n(k)$ .

**Definición 1.4.2.** Sean dos cociclos  $(U_i, g_{ji})$  y  $(V_r, h_{sr})$ . Se dice que los ***cociclos son equivalentes*** si existen funciones continuas  $g_i^r : U_i \cap V_r \rightarrow \text{GL}_n(k)$ , tales que  $g_j^s(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (g_i^r(x))^{-1} = h_{sr}(x)$  para toda  $x \in (U_i \cap U_j) \cap (V_r \cap V_s)$

Primero notemos que para todo  $x \in U_i$  se cumple que

$$g_{ii}(x) \cdot g_{ii}(x) = g_{ii}(x) \Rightarrow g_{ii}(x) = \text{Id}$$

Mas aún  $g_{ji}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}$  pues

$$\text{Id} = g_{ii}(x) = g_{ij}(x) \cdot g_{ji}(x) \Rightarrow g_{ji}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}$$

Veamos que efectivamente la relación anterior es una relación de equivalencia.

**Reflexividad.** Sea  $(U_i, g_{ji})$  un cociclo. Definimos  $g_i^r : U_i \cap U_r \rightarrow \text{GL}_n(k)$  por  $g_i^r(x) = g_{ri}(x)$  para toda  $x \in U_i \cap U_r$ . Sea  $x \in (U_i \cap U_j) \cap (U_r \cap U_s)$ , entonces

$$\begin{aligned} g_j^s(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (g_i^r(x))^{-1} &= g_{sj}(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (g_{ri}(x))^{-1} \\ &= g_{sj}(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot g_{ir}(x) \\ &= g_{sr}(x) \end{aligned}$$

así  $(U_i, g_{ji}) \sim (U_i, g_{ji})$  y por lo tanto es reflexiva.

**Simetría.** Sean  $(U_i, g_{ji}), (V_r, h_{sr})$  dos cocíclcos sobre  $X$  con  $(U_i, g_{ji}) \sim (V_r, h_{sr})$ , entonces existen funciones continuas  $g_i^r : U_i \cap V_r \longrightarrow \text{GL}_n(k)$ , tales que  $g_j^s(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (g_i^r(x))^{-1} = h_{sr}(x)$  para toda  $x \in (U_i \cap U_j) \cap (V_r \cap V_s)$ . Despejando tenemos que  $g_{ji}(x) = (g_j^s(x))^{-1} \cdot h_{sr}(x) \cdot g_i^r(x)$  para toda  $x \in (U_i \cap U_j) \cap (V_r \cap V_s)$ . Así definimos  $g_s^j : V_s \cap U_j \longrightarrow \text{GL}_n(k)$  por  $g_s^j(x) = (g_j^s(x))^{-1}$  y  $g_r^i : V_r \cap U_i \longrightarrow \text{GL}_n(k)$  por  $g_r^i(x) = (g_i^r(x))^{-1}$  las cuales son continuas por ser  $\text{GL}_n(k)$  grupo topológico. De esta manera tenemos que  $g_{ji}(x) = g_s^j(x) \cdot h_{sr}(x) \cdot (g_r^i(x))^{-1}$ . Por lo tanto  $(V_r, h_{sr}) \sim (U_i, g_{ji})$ , es decir, es simétrica.

**Transitividad.** Sean  $(U_i, g_{ji}), (V_r, h_{sr}), (W_u, l_{vu})$  tres cociclos sobre  $X$  con  $(U_i, g_{ji}) \sim (V_r, h_{sr})$  y  $(V_r, h_{sr}) \sim (W_u, l_{vu})$ . Como  $(U_i \sim g_{ji}) \sim (V_r, h_{sr})$  entonces existen funciones continuas  $g_i^r : U_i \cap V_r \longrightarrow \text{GL}_n(k)$  tales que

$$g_j^s(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (g_i^r(x))^{-1} = h_{sr}(x) \quad (1.1)$$

para toda  $x \in (U_i \cap U_j) \cap (V_r \cap V_s)$ .

Por otra parte como  $(V_r, h_{sr}) \sim (W_u, l_{vu})$  entonces existen funciones continuas  $h_r^u : V_r \cap W_u \longrightarrow \text{GL}_n(k)$ , tales que

$$h_s^v(x) \cdot h_{sr}(x) \cdot (h_r^u(x))^{-1} = l_{vu}(x) \quad (1.2)$$

para toda  $x \in (V_s \cap V_r) \cap (W_u \cap W_v)$ . Supongamos que  $i = j$  en 1.1 entonces

$$h_{sr}(x) = g_i^s(x) \cdot g_{ii}(x) \cdot (g_i^r(x))^{-1} = g_i^s(x) \cdot (g_i^r(x))^{-1} \quad (1.3)$$

para  $x \in U_i \cap V_r \cap V_s$ . Por otra parte, también supongamos que  $u = v$  en 1.2, entonces tenemos que  $h_s^u(x) \cdot h_{sr}(x) \cdot (h_r^u(x))^{-1} = l_{uu}(x) = \text{Id}$ , y despejando

$$h_{sr}(x) = (h_s^u(x))^{-1} \cdot h_r^u(x) \quad (1.4)$$

para toda  $x \in V_r \cap V_s \cap W_u$ . Así de (1.3) y (1.4)

$$g_i^s(x) \cdot (g_i^r(x))^{-1} = (h_s^u(x))^{-1} \cdot h_r^u(x)$$

entonces se cumple que

$$h_s^u(x) \cdot g_i^s(x) = h_r^u(x) \cdot g_i^r(x) \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

para toda  $x \in (V_r \cap V_s) \cap (U_i \cap W_u)$ . Haciendo variar  $r$  en todos los elementos de la cubierta  $\{V_r\}$ , definimos otra función continua  $l_i^u : U_i \cap W_u \longrightarrow \text{GL}_n(k)$  por  $l_i^u|_{V_r}(x) =$

$h_r^u(x) \cdot g_i^r(x)$  con  $x \in V_r \cap (U_i \cap W_u)$ , hemos visto que está bien definida en las intersecciones  $V_r \cap V_s$  por 1.5, entonces  $l_i^u$  está bien definida y es continua. Además tenemos que

$$\begin{aligned} l_j^v(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (l_i^u(x))^{-1} &= (h_s^v(x) \cdot g_j^s(x)) \cdot g_{ji}(x) \cdot (h_r^u(x) \cdot g_i^r(x))^{-1} \\ &= h_s^v(x) \cdot g_j^s(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (g_i^r(x))^{-1} \cdot (h_r^u(x))^{-1} \\ &= h_s^v(x) \cdot h_{sr}(x) \cdot (h_r^u(x))^{-1} \text{ por 1.1} \\ &= l_{vu}(x) \text{ por 1.2} \end{aligned}$$

para toda  $x \in (U_i \cap U_j) \cap (V_s \cap V_r) \cap (W_u \cap W_v)$  y como esto es valido en cualquier  $V_r \cap V_s$  entonces es valido en todo  $U_i \cap U_j \cap W_u \cap W_v$ . Así

$$l_j^v(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (l_i^u(x))^{-1} = l_{vu}(x)$$

para toda  $x \in (U_i \cap U_j) \cap (W_u \cap W_v)$ , haciendo cumplir la transitividad de  $\sim$ . Por lo tanto  $\sim$  es una relación de equivalencia.

Denotamos por  $H^1(X, G)$  el conjunto de clases de equivalencia de cociclos de  $X$  a  $G$  bajo la relación de equivalencia anterior. Notemos que  $H^1(X, G)$  depende contravariantemente en la primera entrada y covariante en la segunda. Más precisamente, sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y  $\{U_i, g_{ij}\} \in H^1(Y, G)$ . Tenemos que  $\{f^{-1}(U_i)\}$  es una cubierta abierta de  $X$ , así definimos  $g'_{ji} : f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \rightarrow G$  por  $g'_{ji}(x) = (g_{ji} \circ f)(x)$ , obteniendo el  $G$ -cociclo  $(f^{-1}(U), g_{ji} \circ f)$  como ilustra el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & H^1(X, G) & (f^{-1}(U_i), g_{ji} \circ f) \\ f \downarrow & & \uparrow & \uparrow \\ Y & \longrightarrow & H^1(Y, G) & (U_i, g_{ji}) \end{array}$$

Por otro lado, dados  $G_1, G_2$  grupos topológico y  $X$  un espacio topológico y un homomorfismo continuo  $h : G_1 \rightarrow G_2$ , para un cociclo  $\{U_i, g_{ij}\} \in H^1(X, G_1)$ , definimos el cociclo  $\{U_i, h \circ g_{ij}\} \in H^1(X, G_2)$ , como lo ilustra el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \longrightarrow & H^1(X, G_1) & (U_i, g_{ji}) \\ h \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ G_2 & \longrightarrow & H^1(X, G_2) & (U_i, h \circ g_{ji}) \end{array}$$

**Teorema 1.4.3.** Sea  $\phi_n^k(X)$  el conjunto de clases de isomorfismos de haces  $k$ -vectoriales de rango  $n$  sobre el espacio topológico  $X$ . Entonces existe un isomorfismo natural de  $\phi_n^k(X)$  al conjunto  $H^1(X, \text{GL}_n(k))$ .

**Demostración.** Sea  $\zeta = (E, \pi, X)$  un haz vectorial y sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  una cubierta abierta de trivialización de  $X$ , entonces existen isomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i \times k^n &\xrightarrow{\cong} E_{U_i} \\ (x, v) &\longmapsto (\varphi_i)_x(v) \end{aligned}$$



así,  $(\varphi_i)_x : k^n \xrightarrow{\cong} E_x$ . Sea  $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathrm{GL}_n(k)$  definido por  $g_{ji}(x) = (\varphi_j)_x^{-1} \circ (\varphi_i)_x$ . Definimos

$$\begin{aligned} h : \phi_n^k(X) &\longrightarrow H^1(X, \mathrm{GL}_n(k)) \\ \zeta = (E, \pi, X) &\longmapsto [(U_i, g_{ji})] \end{aligned}$$

Primero veamos que  $(U_i, g_{ji})$  es un cociclo. Para toda  $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$  tenemos que  $g_{kj}(x) \cdot g_{ji}(x) = (\varphi_k)_x^{-1} \circ (\varphi_j)_x \circ (\varphi_j)_x^{-1} \circ (\varphi_i)_x = (\varphi_k)_x^{-1} \circ (\varphi_i)_x = g_{ki}(x)$ , por lo tanto  $(U_i, g_{ji})$  es un cociclo. Ahora veamos que  $h$  está bien definida, esto es, la clase de cocíclon  $(U_i, g_{ji})$  en  $H^1(X, \mathrm{GL}_n(k))$  no depende de la cubierta de trivialización que tomemos y los  $\varphi_i$ . Sea  $(V_r, h_{sr})$  otro cociclo asociado a la cubierta abierta de trivialización  $\{V_r\}_{r \in R}$  junto con  $\psi_r : V_r \times k^n \rightarrow E_{V_r}$ . Sean  $g_i^r : U_i \cap V_r \rightarrow \mathrm{GL}_n(k)$  definidas por  $g_i^r(x) = (\psi_r)_x^{-1} \circ (\varphi_i)_x$  y  $x \in (U_i \cap U_j) \cap (V_r \cap V_s)$ , entonces

$$\begin{aligned} g_j^s(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (g_i^r(x))^{-1} &= (\psi_s)_x^{-1} \circ (\varphi_j)_x \circ (\varphi_j)_x^{-1} \circ (\varphi_i)_x \circ ((\psi_r)_x^{-1} \circ (\varphi_i)_x)^{-1} \\ &= (\psi_s)_x^{-1} \circ (\varphi_i)_x \circ ((\varphi_i)_x)^{-1} \circ (\psi_r)_x \\ &= (\psi_s)_x^{-1} \circ (\psi_r)_x \\ &= h_{sr}(x) \end{aligned}$$

por lo tanto  $h : \phi_n^k(X) \rightarrow H^1(X, \mathrm{GL}_n(k))$  está bien definida.

Sea  $(U_i, g_{ji}) \in H^1(X, \mathrm{GL}_n(k))$ , donde  $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathrm{GL}_n(k) \subseteq \mathcal{L}(k^n, k^n)$ , por el Teorema 1.1.10 induce un isomorfismo general de haces vectoriales

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ji} : (U_i \cap U_j) \times k^n &\longrightarrow (U_i \cap U_j) \times k^n \\ (x, v) &\longmapsto (x, g_{ji}(x)(v)) \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \hat{g}_{kj} \circ \hat{g}_{ji}(x, v) &= \hat{g}_{kj}(x, g_{ji}(x)(v)) \\ &= (x, g_{kj}(x) \cdot g_{ji}(x)(v)) \\ &= (x, g_{ki}(x)(v)) \\ &= \hat{g}_{ki}(x, v) \end{aligned}$$

Entonces por el Teorema 1.3.3 tenemos que existe un haz vectorial  $E$  sobre  $X$  e isomorfismos  $g_i : U_i \times k^n \rightarrow E_{U_i}$ , tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} (U_i \cap U_j) \times k^n = E_i|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\hat{g}_{ji}} & E_j|_{U_i \cap U_j} = (U_i \cap U_j) \times k^n \\ & \searrow g_i|_{U_i \cap U_j} \quad \swarrow g_j|_{U_i \cap U_j} & \\ & E|_{U_i \cap U_j} & \end{array} \quad (1.7)$$

## Capítulo 1

Entonces definimos

$$\begin{aligned} h' : H^1(X, \mathrm{GL}_n(k)) &\longrightarrow \phi_n^k(X) \\ [(U_i, g_{ji})] &\longmapsto [E] \end{aligned}$$

Veamos que  $h'$  está bien definida. Supongamos que  $(U_i, g_{ji}) \sim (V_r, h_{sr})$  entonces existen morfismos  $g_i^r : U_i \cap V_r \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k)$  tal que  $h_{sr}(x) = g_j^s(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (g_i^r(x))^{-1}$  para toda  $x \in (U_i \cap U_j) \cap (V_r \cap V_s)$ . Sabemos que el cociclo  $(V_r, h_{sr})$  induce un haz vectorial  $F$  al aplicarle el Teorema de Pegado a los haces triviales  $F_r = V_r \times k^n$  y morfismos  $\hat{h}_{sr} : (V_r \cap V_s) \times k^n \longrightarrow (V_r \cap V_s) \times k^n$ . Además existen isomorfismos  $h_r : F_r \longrightarrow F|_{V_r}$  tales que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_r|_{V_r \cap V_s} & \xrightarrow{\hat{h}_{sr}} & F_s|_{U_i \cap U_j} \\ & \searrow h_r \quad \swarrow h_s & \\ & F|_{V_r \cap V_s} & \end{array} \quad (1.8)$$

Consideremos los isomorfismos  $\hat{g}_i^r : E_i|_{U_i \cap V_r} = U_i \cap V_r \times k^n \longrightarrow F_r|_{U_i \cap V_r} = U_i \cap V_r \times k^n$  inducidos por  $g_i^r : U_i \cap V_r \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k)$ . Sea  $\alpha : E \longrightarrow F$  el único isomorfismo de haces que hace conmutar el siguiente diagrama para cada  $(i, r)$

$$\begin{array}{ccc} E_i|_{U_i \cap V_r} & \xrightarrow[\cong]{\hat{g}_i^r} & F_r|_{U_i \cap V_r} \\ g_i|_{U_i \cap V_r} \downarrow & & \downarrow h_r|_{U_i \cap V_r} \\ E_{U_i \cap V_r} & \xrightarrow[\cong]{\alpha|_{U_i \cap V_r}} & F|_{U_i \cap V_r} \end{array}$$

esto es,  $\alpha|_{U_i \cap V_r} = h_r|_{U_i \cap V_r} \circ \hat{g}_i^r \circ (g_i|_{U_i \cap V_r})^{-1}$ . Si demostramos que  $\alpha$  está bien definido acabamos, puesto que la inversa de  $\alpha$  se obtiene intercambiando los papeles de  $E$  y  $F$ . Sea  $x \in (U_i \cap U_r) \cap (V_r \cap V_s)$ . Dado que por hipótesis  $(V_r, h_{sr}) \sim (U_i, g_{ji})$  se cumple que

$$h_{sr}(x) = g_j^s(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (g_i^r(x))^{-1}$$

y despejando tenemos que

$$h_{sr}(x) \cdot g_i^r(x) \cdot g_{ij}(x) = g_j^s(x).$$

Por otra parte, del diagrama 1.7 se cumple que

$$\hat{g}_{ij} = g_i^{-1} \circ g_j \quad (1.9)$$

y de 1.8 se cumple que

$$\hat{h}_{sr} = h_s^{-1} \circ h_r. \quad (1.10)$$

De esta manera de 1.9 y 1.10 se tiene que

$$\begin{aligned} (h_s^{-1} \circ h_r) \circ \hat{g}_i^r \circ (g_i^{-1} \circ g_j) &= \hat{g}_j^s \\ \Rightarrow h_r \circ g_i^r \circ g_i^{-1} &= h_s \circ g_j^s \circ g_j^{-1} \end{aligned}$$

en  $(U_i \cap U_r) \cap (V_r \cap V_s)$ . Así  $\alpha|_{(U_i \cap V_r)} = h_r \circ g_i^r \circ g_i^{-1} = h_s \circ g_j^s \circ g_j^{-1} = \alpha|_{(U_j \cap V_s)}$ . Por el Teorema 1.3.2 existe un único homomorfismo de haces vectoriales  $\alpha : E \longrightarrow F$ . Dado que  $\alpha$  es isomorfismo entonces  $E \cong F$ , es decir, pertenecen a la misma clase  $[E] = [F]$ . Por lo tanto  $h'$  está bien definida, y así  $h \circ h' = \text{Id}$  y  $h' \circ h = \text{Id}$ . ■

**Teorema 1.4.4.** Sean  $(U_i, g_{ji})$  y  $(U_i, h_{ji})$  dos cociclos relativos a la misma cubierta abierta  $\{U_i\}_{i \in I}$  (respectivamente una cubierta de cerrados localmente finita en un espacio paracompacto  $X$  y Hausdorff). Entonces los haces asociados  $E$  y  $F$  de  $(U_i, g_{ji})$  y  $(U_i, h_{ji})$  respectivamente son isomorfos si y sólo si existen funciones continuas  $\lambda_i : U_i \longrightarrow \text{GL}_n(k)$  tal que  $h_{ji}(x) = \lambda_j(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (\lambda_i(x))^{-1}$  para toda  $x \in U_i \cap U_j$ . En particular el haz  $E$  es trivial si y sólo si  $g_{ji}(x) = \lambda_j(x) \cdot (\lambda_i(x))^{-1}$ , para una colección adecuada de los  $\lambda_i$ .

**Demostración.** De la definición de cociclo tenemos que  $g_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow \text{GL}_n(k)$  es continua con la siguiente propiedad

$$g_{ki}(x) = g_{kj}(x) \cdot g_{ji}(x)$$

Por el Teorema 1.1.10 para cada  $i, j$  existen los isomorfismos de haces  $\hat{g}_{ji} : U_i \cap U_j \times k^n \longrightarrow U_i \cap U_j \times k^n$  donde  $(x, v) \longmapsto (x, g(x)(v))$ . Si denotamos  $E_i = F_i = U_i \times k^n$  entonces

$$\hat{g}_{ji} : E_i|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow E_j|_{U_i \cap U_j}$$

es una familia de isomorfismos que cumple que  $\hat{g}_{ki}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} = \hat{g}_{kj}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \circ \hat{g}_{ji}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$ .

Por lo tanto se cumplen las hipótesis del Teorema 1.3.3, así existe un haz  $E$  sobre  $X$  e isomorfismos  $g_i : E_i \xrightarrow{\cong} E|_{U_i}$  tales que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_i|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\hat{g}_{ji}} & E_j|_{U_i \cap U_j} \\ & \searrow g_i|_{U_i \cap U_j} \quad \swarrow g_j|_{U_i \cap U_j} & \\ & E|_{U_i \cap U_j} & \end{array}$$

para toda  $i, j \in I$ .

De manera análoga construimos para el cociclo  $(U_i, h_{ji})$  los isomorfismos de haces vectoriales asociados

$$\hat{h}_{ji} : F_i|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow F_j|_{U_i \cap U_j}$$

cumplen que  $\hat{h}_{ki}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} = \hat{h}_{kj}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \circ \hat{h}_{ji}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$ . Así existe un haz vectorial  $F$  sobre  $X$  e isomorfismos  $h_i : F_i \xrightarrow{\cong} F|_{U_i}$ , tales que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_i|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\hat{h}_{ji}} & F_j|_{U_i \cap U_j} \\ & \searrow h_i|_{U_i \cap U_j} \quad \swarrow h_j|_{U_i \cap U_j} & \\ & F|_{U_i \cap U_j} & \end{array}$$

para toda  $i, j \in I$ .

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que se tiene un isomorfismo  $\alpha : E \xrightarrow{\cong} F$ . Sea  $\hat{\lambda}_i : E_i \rightarrow F_i$  el isomorfismo de haces vectoriales triviales dado por la composición

$$U_i \times k^n \equiv E_i \xrightarrow[\cong]{g_i} E|_{U_i} \xrightarrow{\alpha|_{U_i}} F|_{U_i} \xrightarrow{h_i^{-1}} F_i \equiv U_i \times k^n$$

$\hat{\lambda}_i$

así  $\hat{\lambda}_i = h_i^{-1} \circ \alpha|_{U_i} \circ g_i$ . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} E|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\alpha|_{U_i \cap U_j}} & F|_{U_i \cap U_j} & & \\ \uparrow g_i|_{U_i \cap U_j} & \swarrow g_j|_{U_i \cap U_j} & \nearrow h_j|_{U_i \cap U_j} & & \uparrow h_i|_{U_i \cap U_j} \\ & E_j|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\hat{\lambda}_j|_{U_i \cap U_j}} F_j|_{U_i \cap U_j} & & & \\ \nearrow \hat{g}_{ji} & & \nwarrow \hat{h}_{ji} & & \\ E_i|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\hat{\lambda}_i|_{U_i \cap U_j}} & F_i|_{U_i \cap U_j} & & \end{array}$$

Es claro que la parte superior del diagrama anterior conmuta. Demostraremos que la parte inferior del diagrama conmuta. Tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{h}_{ji}^{-1} \circ \hat{\lambda}_j|_{U_i \cap U_j} \circ \hat{g}_{ji} &= (h_i^{-1}|_{U_i \cap U_j} \circ h_j|_{U_i \cap U_j}) \circ (h_j^{-1}|_{U_i \cap U_j} \circ \alpha|_{U_i \cap U_j} \circ g_j|_{U_i \cap U_j}) \circ (g_j^{-1}|_{U_i \cap U_j} \circ g_i|_{U_i \cap U_j}) \\ &= h_i^{-1} \circ \alpha|_{U_i \cap U_j} \circ g_i \\ &= \hat{\lambda}_i|_{U_i \cap U_j} \end{aligned}$$

y despejando  $\hat{h}_{ji} = \hat{\lambda}_j|_{U_i \cap U_j} \circ \hat{g}_{ji} \circ (\hat{\lambda}_i|_{U_i \cap U_j})^{-1}$ , entonces  $h_{ji}(x) = \lambda_j(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (\lambda_i(x))^{-1}$  para toda  $x \in U_i \cap U_j$ .

( $\Leftarrow$ ). La expresión  $h_{ji}(x) = \lambda_j(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (\lambda_i(x))^{-1}$  implica que  $(U_i, g_{ji}) \sim (U_i, h_{ji})$ . Recordemos que  $h : H^1(X, \text{GL}_n(k)) \rightarrow \phi_n^k$  está bien definida en cociclos equivalentes que tienen asociados haces isomorfos.

Demostremos que el haz asociado  $E$  a un cociclo  $(U_i, g_{ji})$  es trivial si y sólo si  $g_{ji}(x) = (\lambda_j(x))^{-1} \lambda_i(x)$ .

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $E \cong X \times k^n$  de la primera parte de la prueba, si  $E \cong F$  con  $F = X \times k^n$  tenemos que  $h_{ji}(x) = \lambda_j(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (\lambda_i(x))^{-1}$  donde  $E$  es el haz vectorial asociado al cociclo  $(U_i, g_{ji})$  y  $F$  es el haz vectorial asociado al cociclo  $(U_i, h_{ji})$ . Notemos que definiendo  $h_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow \text{GL}_n(k)$  como  $x \mapsto \text{Id}$  para toda  $i, j \in I$ , obtenemos un cociclo  $(U_i, \text{Id} = h_{ji})$ . Además el haz asociado a este cociclo es  $F = X \times k^n$  pues sea

$$\hat{h}_i : U_i \times k^n \equiv F_i \longrightarrow X \times k^n|_{U_i} \equiv U_i \times k^n$$

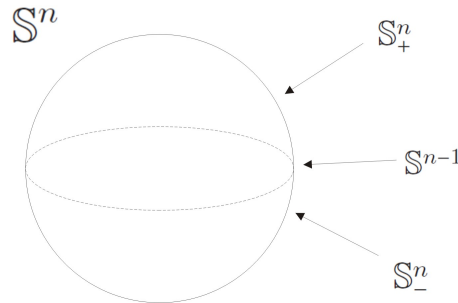
tal que  $h_i = \text{Id}$  para toda  $i \in I$ . Entonces

$$\begin{array}{ccc} F_i|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\text{Id}=\hat{h}_{ji}} & F_j|_{U_i \cap U_j} \\ & \searrow \text{Id}=h_i|_{U_i \cap U_j} \quad \swarrow \text{Id}=h_j|_{U_i \cap U_j} & \\ & F|_{U_i \cap U_j} = X \times k^n|_{U_i \cap U_j} & \end{array}$$

Por el Teorema 1.3.3 el haz asociado al cociclo  $(U_i, h_{ji} = \text{Id})$  es  $F = X \times k^n$ , entonces  $\text{Id}(x) = \lambda_j(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (\lambda_i(x))^{-1}$ , despejando tenemos  $g_{ji}(x) = (\lambda_j(x))^{-1} \lambda_i(x)$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $g_{ji}(x) = (\lambda_j(x))^{-1} \lambda_i(x)$  para toda  $x \in U_i \cap U_j$  entonces  $\text{Id}(x) = \lambda_j(x) \cdot g_{ji}(x) \cdot (\lambda_i(x))^{-1}$ , así  $(U_i, g_{ji}) \sim (U_i, h_{ji} = \text{Id})$ , pero ya vimos que el haz asociado a  $(U_i, h_{ji} = \text{Id})$  es  $F = X \times k^n$  por lo tanto  $E \cong X \times k^n$ . ■

**Ejemplo 1.4.5.** Retomemos el Ejemplo 1.3.4 tomando  $X = \mathbb{S}^n$ . Tenemos que  $U_1 = \mathbb{S}_+^n, U_2 = \mathbb{S}_-^n$  y  $U_1 \cap U_2 = \mathbb{S}^{n-1}$ . Sea  $f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \text{GL}_n(k)$  continua, determina un haz  $E_f$ .



Sea

$$\hat{g}_{12} = \hat{f} : S^{n-1} \times k^n \longrightarrow S^{n-1} \times k^n$$

la función inducida por  $f$  utilizando el Teorema 1.1.10. Aplicaremos el Teorema 1.4.4 al ejemplo 1.3.4. Sea  $\lambda : E_1 = \mathbb{S}_+^n \times k^p \longrightarrow E_2 = \mathbb{S}_+^n \times k^p$  cualquier automorfismo,

## Capítulo 1

entonces  $\lambda$  induce un isomorfismo de haces vectoriales  $\mu : E_1|_{S^{n-1}} \longrightarrow E_2|_{S^{n-1}}$  donde  $\mu := \lambda|_{S^{n-1}}$ . Por el Teorema 1.1.10 existe  $\check{\mu} : S^{n-1} \longrightarrow \text{GL}_n(k)$  y así

$$\begin{aligned} f\check{\mu} : S^{n-1} &\longrightarrow \text{GL}_n(k) \\ x &\longmapsto f(x)\check{\mu}(x) \end{aligned}$$

Usando la notación del ejemplo 1.3.4, demostraremos que  $E_f$  y  $E_{f\check{\mu}}$  son haces vectoriales isomorfos. Notemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_+^n \times k^p & \xrightarrow{\lambda^{-1}} & \mathbb{S}_+^n \times k^p \\ \downarrow \hat{f} & & \downarrow \hat{f}\check{\mu} \\ \mathbb{S}_-^n \times k^p & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{S}_-^n \times k^p \end{array} \quad (1.11)$$

donde las flechas punteadas denotan morfismos definidos en  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Sea  $\lambda_1 = \check{\lambda} : \mathbb{S}_+^n \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  y  $\lambda_2 = \text{Id} : \mathbb{S}_-^n \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  las funciones inducidas. El diagrama 1.11 induce el siguiente diagrama conmutativo para cada  $x \in \mathbb{S}_+^n \cap \mathbb{S}_-^n \equiv \mathbb{S}^{n-1}$

$$\begin{array}{ccc} k^p & \xrightarrow{(\check{\lambda}(x))^{-1}} & k^p \\ f(x) \downarrow & & \downarrow (f\check{\mu})(x) \\ k^p & \xrightarrow{\text{Id}=\lambda_2(x)} & k^p \end{array} \quad (1.12)$$

En efecto, 1.12 conmuta. Sea  $x \in \mathbb{S}_+^n \cap \mathbb{S}_-^n$  entonces

$$\begin{aligned} (f\check{\mu})(x) \cdot (\check{\lambda}(x))^{-1} &= f(x) \cdot \check{\mu}(x) \cdot (\check{\lambda}(x))^{-1} \\ &= f(x) \cdot \check{\lambda}(x) \cdot (\check{\lambda}(x))^{-1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

de este modo tenemos que  $f(x) = \lambda_2(x) \cdot (f\check{\mu})(x) \cdot (\lambda_1(x))^{-1}$  para toda  $x \in \mathbb{S}_+^n \cap \mathbb{S}_-^n$ . Haciendo  $U_1 = \mathbb{S}_+^n$  y  $U_2 = \mathbb{S}_-^n$  y para cociclos  $(\{U_1, U_2\}, g_{21} = f : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \text{GL}_p(k))$  y  $(\{U_1, U_2\}, h_{21} = f\check{\mu} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \text{GL}_p(k))$  en  $X = \mathbb{S}^n$  existen funciones continuas  $\lambda_1 : U_1 \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  y  $\lambda_2 : U_2 \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  tal que  $g_{21}(x) = \lambda_2(x) \cdot h_{21}(x) \cdot (\lambda_1(x))^{-1}$ . Por el Teorema 1.4.4 los haces asociados  $E_f$  y  $E_{f\check{\mu}}$  a dichos cociclos son isomorfos, esto es,  $E_f \cong E_{f\check{\mu}}$ .

De manera similar se puede probar que  $E_f \cong E_{\hat{\nu}f}$  donde  $\nu$  es un automorfismo de  $E_2|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ , el cual puede extenderse a un automorfismo de  $E_2$ .

**Ejemplo 1.4.6.** Ahora consideremos  $f_0, f_1 : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  funciones continuas tales que  $f_0$  es homotópica  $f_1$ , es decir, existe una función continua  $H : \mathbb{S}^{n-1} \times I \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  tal que  $H(x, 0) = f_0(x)$  y  $H(x, 1) = f_1(x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Sea  $\alpha = \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  definida por  $\alpha(x) = (f_1(x))^{-1} \cdot f_0(x)$ .

Afirmación:  $\alpha \sim \text{Id}$ . En efecto, definimos  $\beta : \mathbb{S}^{n-1} \times I \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  como  $\beta(x, t) = (f_1(x))^{-1} \cdot H(x, t)$ , entonces

$$\begin{aligned}\beta(x, 0) &= (f_1(x))^{-1} \cdot H(x, 0) = (f_1(x))^{-1} \cdot f_0(x) = \alpha(x) \\ \beta(x, 1) &= (f_1(x))^{-1} \cdot H(x, 1) = (f_1(x))^{-1} \cdot f_1(x) = \text{Id}(x) = x\end{aligned}$$

Parametricemos ahora el hemisferio superior  $\mathbb{S}_+^n$  de  $\mathbb{S}^n$  escribiendo cada  $w \in \mathbb{S}_+^n$  por  $w = v \cdot \text{Cos}(\theta) + e_{n+1} \cdot \text{Sen}(\theta)$  donde  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  y  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , (note que  $\text{Sen}(\theta) \leq 1$ ).

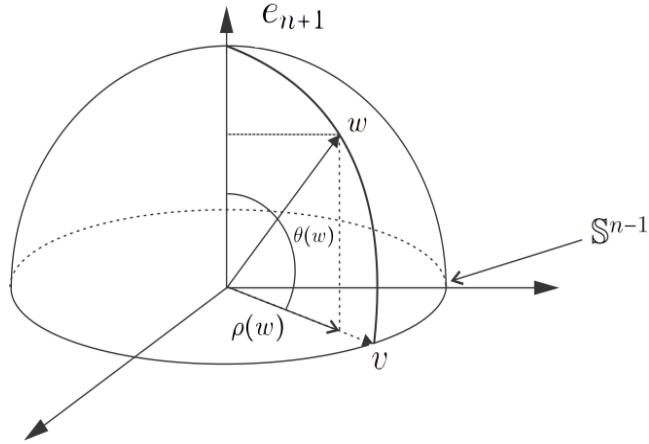


Figura 1.4: Parte superior de la esfera  $\mathbb{S}^n$

Usamos  $\beta$  para definir  $\gamma : \mathbb{S}_+^n \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  dado por la composición de estas dos funciones

$$\mathbb{S}_+^n \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{n-1} \times I \xrightarrow{\beta} \text{GL}_p(k)$$

$$w \longmapsto (v, \text{Sen } \theta) \longmapsto \beta(v, \text{Sen}(\theta))$$

Esta función  $\gamma$  está bien definida y es continua, incluso en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , pues  $\beta(x, t)$  converge a  $\text{Id}$  uniformemente en  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  cuando  $t$  tiende a 1, es decir

$$\lim_{t \rightarrow 1} \beta(x, t) = \text{Id} \quad \text{para toda } x \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Veamos que  $g$  es continua para toda  $w \neq e_{n+1}$ . Sea  $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  la proyección ortogonal definida por  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$  entonces  $\text{Cos}(\theta) = \|\rho(w)\| = \sqrt{\langle \rho(w), \rho(w) \rangle}$ . Así  $\text{Sen}(\theta) = +\sqrt{1 - \text{Cos}^2(\theta)} = +\sqrt{1 - \langle \rho(w), \rho(w) \rangle}$ . Por otra parte  $v = \frac{\rho(w)}{\|\rho(w)\|}$  para toda  $w \in \mathbb{S}_+^n - \{e_{n+1}\}$ . Por lo tanto  $g(w) = (\frac{\rho(w)}{\|\rho(w)\|}, \sqrt{1 - \langle \rho(w), \rho(w) \rangle}) = (v, \text{Sen}(\theta))$ , la cual es continua para toda  $w \in \mathbb{S}_+^n - \{e_{n+1}\}$ .

Cuando  $w \rightarrow e_{n+1}$  entonces  $\text{Sen}(\theta) \rightarrow 1$ , entonces  $\lim_{w \rightarrow e_{n+1}} \gamma(w) = \lim_{w \rightarrow e_{n+1}} \beta(v, \text{Sen}(\theta)) = \text{Id}$ .

## Capítulo 1

---

Afirmacion: Los haces vectoriales  $E_{f_0} \cong E_{f_1 \circ \alpha}$  son isomorfos. Note primero que  $\alpha = \gamma|_{\mathbb{S}^{n-1}}$  pues si  $w \in \mathbb{S}_+^n$  entonces  $w = v \cdot 1 + e_{n+1} \cdot 0 = v$ . Así

$$\begin{aligned}\gamma(w) &= \gamma(v) \\ &= \beta(v, 0) \\ &= f_1^{-1}(v) \cdot H(v, 0) \\ &= f_1^{-1}(v) \cdot f_0(v)\end{aligned}$$

y así  $\alpha = \gamma|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ . Además  $\gamma : \mathbb{S}_+^n \rightarrow \text{GL}_p(k)$  induce un automorfismo  $\hat{\gamma} : \mathbb{S}_+^n \rightarrow \mathbb{S}_+^n$ . Notemos que  $f_0 = f_1 \cdot \alpha$  pues si  $w \in \mathbb{S}^{n-1}$  entonces  $w = v \cdot 1 + e_{n+1} \cdot 0 = v$ , así

$$f_1(x) \cdot \alpha(x) = f_1(x) \cdot ((f_1(x))^{-1} f_0(x)) = f_0(x)$$

y utilizando el ejemplo 1.4.5 tenemos que  $E_{f_0} = E_{f_1 \cdot \alpha} \cong E_{f_1}$ .

Consideremos las clases de homotopía de las funciones  $f : (\mathbb{S}^{n-1}, e) \rightarrow (\text{GL}_p(k), \text{Id})$  tales que  $f(e) = \text{Id}$  con  $e = (1, 0, \dots, 0)$ , así  $[f] \in [(\mathbb{S}^{n-1}, e), (\text{GL}_p(k), \text{Id})]$ , donde por definición  $[(\mathbb{S}^{n-1}, e), (\text{GL}_p(k), \text{Id})] = \pi_{n-1}(\text{GL}_p(k), \text{Id})$  el  $n-1$  grupo de homotopía. Por la discusión anterior, si  $g \sim f$  relativo a  $\{e\}$  entonces  $E_f \cong E_g$  por lo tanto el mapeo

$$\begin{aligned}\pi_{n-1}(\text{GL}_p, \text{Id}) &\longrightarrow \phi_p^k(\mathbb{S}^n) \\ [f] &\longmapsto [E_p]\end{aligned}$$

está bien definido.

Antes de continuar, haremos algunas observaciones. Sea  $G$  un grupo topológico y  $G_e$  la componente conexa por trayectorias de  $G$  que contiene la identidad  $e$ . Se prueba que  $G_e$  es subgrupo de  $G$  y además  $G_e$  es invariante. Las componentes conexas por trayectorias de  $G$  se obtienen al trasladar  $G_e$  por  $g \cdot G_e$  para algún  $g \in G$ , mas aún en un grupo topológico  $G$  se cumple que  $G_e$  es subgrupo normal de  $G$  y es cerrado, así  $G/G_e$  es un grupo. Definimos  $\pi_0(G, e) = G/G_e$  y consideremos la acción

$$\begin{aligned}G \times G &\longrightarrow G \\ (g, g') &\longmapsto g \cdot g' \cdot g^{-1}\end{aligned}$$

donde  $e$  permanece fijo para todo  $g \in G$  pues  $(g, e) \longmapsto g \cdot e \cdot g^{-1} = e$ . Para cada  $g \in G$  fijo tenemos una acción dada por

$$\begin{aligned}\star : G \times \pi_n(G, e) &\longrightarrow \pi_n(G, e) \\ (g, [f]) &\longmapsto [g \cdot f \cdot g^{-1}]\end{aligned}$$

donde  $g \cdot f \cdot g^{-1} : (\mathbb{S}^n, \star) \rightarrow (G, e)$  con  $x \mapsto g \cdot f(x) \cdot g^{-1}$  y  $\star$  punto fijo de  $\mathbb{S}^n$ . Note además que  $(g \cdot f \cdot g^{-1})(\star) = g \cdot f(\star) \cdot g^{-1} = g \cdot e \cdot g^{-1} = e$ , por lo tanto  $[g \cdot f \cdot g^{-1}] \in \pi_n(G, e)$ . Veamos que  $\star$  acción está bien definida, sean  $f \sim h$  representantes de  $[f]$  en  $\pi_n(G, e)$ ,



entonces existe  $H : (\mathbb{S}^n, *) \times I \longrightarrow (G, e)$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = h(x)$ ,  $H(*, t) = e$ . Definiendo  $F(x, t) = g \cdot H(x, t) \cdot g^{-1}$  se tiene que

$$F(x, 0) = g \cdot f(x) \cdot g^{-1} F(x, 1) = g \cdot h(x) \cdot g^{-1} F(*, t) = g \cdot H(*, t) \cdot g^{-1} = e$$

entonces  $[g \cdot f \cdot g^{-1}] = [g \cdot h \cdot g^{-1}]$ , y por lo tanto  $*$  está bien definida. Solo nos falta ver que  $*$  es una acción.

1. Sea  $e \in G$ , entonces para toda  $[f] \in \pi_n(G, e)$  se tiene que

$$e \star [f] = [e \cdot f \cdot e^{-1}] = [f]$$

2. Sea  $g_1, g_2 \in G$  entonces

$$\begin{aligned} (g_1 \cdot g_2) \star [f] &= [(g_1 \cdot g_2) \cdot f (g_1 \cdot g_2)^{-1}] \\ &= [g_1 \cdot g_2 \cdot f (g_2)^{-1} \cdot (g_1)^{-1}] \\ &= g_1 \star [g_2 \cdot f (g_2)^{-1}] \\ &= g_1 \star (g_2 \star [f]) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $*$  es una acción.

La acción anterior induce una acción del cociente  $G/G_e$  en el  $n$ -ésimo grupo de homotopía  $\pi_n(G, e)$  definida por

$$\begin{aligned} \bullet : G/G_e \times \pi_n(G, e) &\longrightarrow \pi_n(G, e) \\ (\bar{a}, [f]) &\longmapsto \bar{a} [f] = [a \cdot f \cdot a^{-1}] \end{aligned}$$

Veamos que está bien definida, sean  $g_0, g_1 \in G/G_e$  en la misma componente conexa por trayectorias de  $G$  entonces  $g_0 [f] = g_1 [f]$  para toda  $[f] \in \pi_n(G, e)$ . Sea  $g : [0, 1] \longrightarrow G$  una trayectoria tal que  $g(0) = g_0$  y  $g(1) = g_1$ , entonces se tiene una homotopía  $h : (G, e) \times I \longrightarrow G$  dada por  $h(g, t) = g(t) \cdot g \cdot (g(t))^{-1}$  tal que

$$\begin{aligned} h(g, 0) &= g(0) \cdot g \cdot (g(0))^{-1} = g_0 \cdot g \cdot g_0^{-1} \\ h(g, 1) &= g(1) \cdot g \cdot (g(1))^{-1} = g_1 \cdot g \cdot g_1^{-1} \\ h(e, t) &= g(t) \cdot e \cdot (g(t))^{-1} = e \end{aligned}$$

Sea  $[f] \in \pi_n(G, e)$ , entonces  $f : (\mathbb{S}^n, *) \longrightarrow (G, e)$ . Definimos  $H : (\mathbb{S}^n, *) \times I \longrightarrow (G, e)$  por  $H(x, t) = h(f(x), t)$ , entonces

$$\begin{aligned} H(g, 0) &= g_0 \cdot g \cdot g_0^{-1} \\ H(g, 1) &= g_1 \cdot g \cdot g_1^{-1} \end{aligned}$$

$$H(e, t) = h(f(*), t) = h(e, t) = e$$

así  $[g_0 \cdot f(x) \cdot g_0^{-1}] = [g_1 \cdot f(x) \cdot g_1^{-1}]$ , es decir,  $\bar{g}_0[f] = \bar{g}_1[f]$ . En particular todos los elementos de  $G_e$  actúan trivialmente en  $\pi_n(G, e)$ .

En un caso particular, cuando  $(G, e) = (\mathrm{GL}_n(k), \mathrm{Id})$ , entonces con lo anterior hemos probado

$$\begin{aligned} \bullet : \pi_0(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id}) \times \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id}) &\longrightarrow \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id}) \\ (\bar{a}, [f]) &\longmapsto [a \cdot f \cdot a^{-1}] \end{aligned}$$

está bien definida, y por lo tanto tenemos que  $E_f \cong E_{a \cdot f \cdot a^{-1}}$ . Sea

$$\frac{\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})}{\pi_0(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})} = \{ \pi_0(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id}) \bullet [f] \mid [f] \in \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id}) \}$$

el conjunto de orbitas. Entonces la función

$$\begin{aligned} \Lambda : \frac{\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})}{\pi_0(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})} &\longrightarrow \phi_p^k(\mathbb{S}^n) \\ (\pi_0(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id}), [f]) &\longmapsto [E_f] \end{aligned}$$

está bien definida.

**Teorema 1.4.7.** *La función  $\Lambda : \frac{\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})}{\pi_0(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})} \longrightarrow \phi_p^k(\mathbb{S}^n)$  es inyectiva.*

Para la demostración de este teorema utilizaremos el siguiente:

**Teorema 1.4.8.** *Sea  $f : X \longrightarrow X$  es continua y nulhomotópica si y sólo si,  $f$  se extiende al cono  $F : CX \longrightarrow X$  por  $F(x, 0) = f(x)$  ([12])*

**Demostración.** Ses  $f, g : (\mathbb{S}^{n-1}, e) \longrightarrow (\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})$  continuas ( $f(e) = g(e) = \mathrm{Id}$ ), con  $e = (1, 0, \dots, 0)$  tales que  $E_f = E_g$ , además utilizando el Teorema 1.1.10  $f, g$  inducen los isomorfismo de haces vectoriales  $\hat{f}, \hat{g} : \mathbb{S}^{n-1} \times k^p \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times k^p$ . Por el Teorema 1.4.4 existe  $\lambda_1 : \mathbb{S}_+^n \longrightarrow \mathrm{GL}_p(k)$  y  $\lambda_2 : \mathbb{S}_-^n \longrightarrow \mathrm{GL}_p(k)$  tal que  $g(x) = \lambda_2(x)f(x)(\lambda_1(x))^{-1}$  para toda  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces  $\hat{g} = \hat{\lambda}_2 \cdot \hat{f} \cdot (\hat{\lambda}_2)^{-1}$ . Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_+^n & \xrightarrow{\hat{\lambda}_1} & \mathbb{S}_+^n \\ \downarrow \hat{f} & & \downarrow \hat{g} \\ \mathbb{S}_-^n & \xrightarrow{\hat{\lambda}_2} & \mathbb{S}_-^n \end{array}$$

donde las flechas punteadas denotan morfismo definidos únicamente en  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Sean  $\beta_1 = \lambda_1|_{\mathbb{S}^{n-1}}$  y  $\beta_2 = \lambda_2|_{\mathbb{S}^{n-1}}$  entonces  $g(x) = \beta_2(x) \cdot f(x) \cdot (\beta_1(x))^{-1}$  para toda  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Dado a que  $\beta_1 : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathrm{GL}_p(k)$  se extiende al cono mediante  $\lambda_1 : \mathbb{S}_+^n \longrightarrow \mathrm{GL}_p(k)$ , entonces  $\beta_1$  es nulhomotópica. Análogamente,  $\beta_2$  es nulhomotópica.

Por otra parte,  $\beta_2(e) \cdot f(e) \cdot (\beta_1(e))^{-1} = g(e)$  entonces  $\beta_1(e) = \beta_2(e)$ . Sea  $a = \beta_1(e) = \beta_2(e) \in \text{GL}_p(k)$ . Así  $\beta_1, \beta_2$  son homotópicas a las mismas funciones constante  $a : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \text{GL}_p(k)$  donde  $a(x) = a$  para toda  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces

$$g(x) = \beta_1(x) \cdot f(x) \cdot (\beta_2(x))^{-1} \cong a \cdot f \cdot a^{-1}$$

Sea  $h : \mathbb{S}^{n-1} \times I \rightarrow \text{GL}_p(k)$  la homotopía entre  $g(x)$  y  $a \cdot f \cdot a^{-1}$ , esto es,  $h(x, 0) = g(x)$  y que  $h(x, 1) = a \cdot f(x) \cdot a^{-1}$ . Definimos  $l : \mathbb{S}^{n-1} \times I \rightarrow \text{GL}_p(k)$  por  $l(x, t) = h(x, t)(h(e, t))^{-1}$ , así

$$\begin{aligned} l(x, 0) &= h(x, 0) \cdot (h(e, 0))^{-1} = g(x)(g(e))^{-1} = g(x) \\ l(x, 1) &= h(x, 1) \cdot (h(e, 1))^{-1} = a \cdot f(x) \cdot a^{-1} \\ l(e, t) &= h(e, t) \cdot (h(e, t))^{-1} = \text{Id} \end{aligned}$$

entonces  $[a \cdot f(x) \cdot a^{-1}] \sim [g]$  es decir,  $a \bullet [f] = [g]$  para alguna  $a \in \pi_0(\text{GL}_n(k), \text{Id})$ . Así  $[f] \sim [g]$ , esto es  $[f], [g] \in \pi_0(\text{GL}_n(k), \text{Id}) \bullet [f]$ . Entonces  $\overline{[f]} \sim \overline{[g]}$  y por lo tanto  $\Lambda$  es inyectiva. ■

En realidad  $\Lambda$  es biyección, posteriormente demostraremos la sobreyectividad.

**Observación. 1.4.9.**  $\text{GL}_p(\mathbb{C}) \cong U(p) \times \mathbb{R}^{p^2}$  donde  $U(p) = \{A \in \text{GL}_p(\mathbb{C}) | A \cdot \overline{A}^t = \text{Id}\}$ . ([22], p. 302).

**Teorema 1.4.10.** Sea  $B \in \text{GL}_p(\mathbb{C})$ , entonces existen matrices únicas  $M$  y  $U$  tales que  $M \in T^+(p)$  y  $U \in U(p)$  y  $B = M \cdot U$ , donde  $T^+(p) = \{A \in M_{p \times p}(\mathbb{C}) | A_{ij} = 0 \text{ para toda } i < j \text{ y } A_{ii} > 0\}$ , esto es,  $T^+(p)$  es el conjunto de matrices de  $p \times p$  tales que arriba de la diagonal principal tiene puros ceros y en la diagonal principal tiene todas sus entradas positivas.

**Demostración.** Sea

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \in \text{GL}_p(\mathbb{C})$$

entonces el conjunto  $\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$  es linealmente independiente, entonces utilizamos el proceso de ortogonalización Gram-Schmidt [?] para obtener una base ortogonal  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$  de  $\mathbb{C}^p$  con

$$\alpha_k = \beta_k - \sum_{j < k} \frac{\langle \beta_k, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_j\|^2} \alpha_j$$

Sea  $C_{kj} = \frac{\langle \beta_k, \alpha_j \rangle}{\|\alpha_j\|^2}$ , entonces  $U$  es la matriz cuyos renglones son  $\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \dots, \frac{\alpha_p}{\|\alpha_p\|}$ , es decir,

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_p}{\|\alpha_p\|} \end{pmatrix}$$

y

$$M = \begin{cases} \frac{-1}{\|\alpha_k\|} C_{kj} & \text{si } j < k \\ \frac{1}{\|\alpha_k\|} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$$

así  $M \in T^+(p)$ .

■

Por el Teorema 1.4.10 tenemos que  $\text{GL}_p(\mathbb{C}) \subseteq \{M \cdot U | M \in T^+(p), U \in U(p)\}$ . Recíprocamente si  $M \in T^+(p), U \in U(p)$  entonces  $M \cdot U$  es invertible, pues  $\det(M) = M_{11} \dots M_{pp} > 0$ , así  $M$  es invertible y  $\text{GL}_p(\mathbb{C}) = \{M \cdot U | M \in T^+(p), U \in U(p)\}$ .

**Lema 1.4.11.**  $T^+(p) \cong \mathbb{R}^{p^2}$

**Demostración.** Por definición

$$T^+(p) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ x_{12} & x_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{pp} \end{pmatrix} \mid x_{ji} \in \mathbb{C} \text{ y } x_{ii} > 0 \right\}$$

donde tenemos  $\frac{p(p+1)}{2}$  variables en  $T^+(p)$ . Así

$$\begin{aligned} T^+(p) &\cong \mathbb{C}^{\frac{p(p+1)}{2}-p} \times (0, \infty)^p \\ &\cong \mathbb{C}^{\frac{p(p+1)}{2}-p} \times \mathbb{R}^p \\ &= (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\frac{p(p+1)}{2}-p} \times \mathbb{R}^p \\ &= \mathbb{R}^{p(p+1)-2p} \times \mathbb{R}^p \\ &= \mathbb{R}^{p^2+p-2p+p} \\ &= \mathbb{R}^{p^2} \end{aligned}$$

■

**Lema 1.4.12.**  $\text{GL}_p(\mathbb{C}) \cong T^+(p) \times U(p)$

**Demostración.** Tenemos que la función

$$\begin{aligned} M_{p \times p}(\mathbb{C}) \times M_{p \times p}(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_{p \times p}(\mathbb{C}) \\ (A, B) &\longmapsto A \cdot B \end{aligned}$$

es continua, entonces la restricción

$$\begin{aligned} T^+(p) \times U(p) &\longrightarrow M_{p \times p}(\mathbb{C}) \\ (M, U) &\longmapsto M \cdot U \end{aligned}$$

es continua. Como  $M \cdot U \in \text{GL}_p(\mathbb{C})$  al tomar la restricción en la imagen, tenemos que la función

$$\begin{aligned} \alpha : T^+(p) \times U(p) &\longrightarrow \text{GL}_p(\mathbb{C}) \\ (M, U) &\longmapsto M \cdot U \end{aligned}$$

es continua.

La inversa de la función  $\alpha$  es continua. Utiliando el Teorema 1.4.10, dada  $B \in \text{GL}_p(\mathbb{C})$  existen matrices únicas  $M \in T^+(p)$  y  $U \in U(p)$  tales que  $B = M \cdot U$ . Así la función

$$\begin{aligned} \text{GL}_p(\mathbb{C}) &\longrightarrow T^+(p) \times U(p) \\ B &\longmapsto (M, U) \end{aligned}$$

es continua. Por lo tanto  $\text{GL}_p(\mathbb{C}) \cong T^+(p) \times U(p)$ . ■

**Corolario 1.4.13.**  $\text{GL}_p(\mathbb{C}) \cong T^+(p) \times \mathbb{R}^{p^2}$ .

**Ejemplo 1.4.14.** Veamos el caso en el que  $p = 1$ . Por el corolario anterior tenemos que  $\text{GL}_1(\mathbb{C}) \cong U(1) \times \mathbb{R}$  donde

$$\begin{aligned} U(1) &= \{z \in \text{GL}_1(\mathbb{C}) | z\bar{z}^t = 1\} \\ &= \{z \in \text{GL}_1(\mathbb{C}) | z\bar{z} = 1\} \\ &= \{z \in \text{GL}_1(\mathbb{C}) | |z| = 1\} \\ &= \mathbb{S}^1 \end{aligned}$$

así tenemos que  $\text{GL}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Entonces  $\pi_0(\text{GL}_1(\mathbb{C})) = \pi_0(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) = 1$ . También que

$$\begin{aligned} \pi_1(\text{GL}_1(\mathbb{C})) &= \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \\ &= \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{R}) \\ &\cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\pi_1(\text{GL}_1(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$ .

**Lema 1.4.15.** Sea  $O(p) = \{A \in \text{GL}_p(\mathbb{R}) | A \cdot A^t = \text{Id}\}$  el conjunto de las matrices ortonormales con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , entonces  $\text{GL}_p(\mathbb{R}) \cong O(p) \times \mathbb{R}^{\frac{p(p+1)}{2}}$ .

**Demostración.** Primero demostraremos que  $\text{GL}_p(\mathbb{R}) \cong T^+(p) \times O(p)$ . Usando el Teorema 1.4.10, dada  $B \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$  existen matrices únicas  $M \in T^+(p)$  y  $U \in U(p)$  tales que  $B = M \cdot U$ . Dado que  $B$  tiene entradas en  $\mathbb{R}$ , tenemos que  $T^+(p) = \{A \in M_{p \times p}(\mathbb{R}) | A_{ij} = 0 \text{ para toda } i < j \text{ y } A_{ii} > 0\}$ . Como en el caso  $\text{GL}_p(\mathbb{C})$ , se puede demostrar de la misma manera que

$$\begin{aligned} T^+(p) \times O(p) &\longrightarrow \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \\ (M, U) &\longmapsto M \cdot U \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Además

$$T^+(p) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ x_{12} & x_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{pp} \end{pmatrix} \mid x_{ji} \in \mathbb{R} \text{ y } x_{ii} > 0 \right\}$$

donde  $T^+(p)$  tiene  $\frac{p(p+1)}{2}$  entradas libres. Así  $T^+(p) \cong \mathbb{R}^{\frac{p(p+1)}{2}-p} \times (0, \infty)^p \cong \mathbb{R}^{\frac{p(p+1)}{2}-p} \times \mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^{\frac{p(p+1)}{2}}$ . Por lo tanto  $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \cong O(p) \times \mathbb{R}^{\frac{p(p+1)}{2}}$ .

■

Notemos que  $O(p)$  tiene al menos dos componentes. Sea  $A \in O(p)$ , entonces  $A \cdot A^t = \mathrm{Id}$  lo que implica que  $1 = \det(\mathrm{Id}) = (\det(A))^2$  con  $\det(A) \in \mathbb{R}$ , de aquí tenemos que  $\det(A) = 1$  ó  $\det(A) = -1$ . Por lo tanto  $O(p) = \{A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} \sqcup \{A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R}) \mid \det(A) = -1\} = \det^{-1}(\{1\}) \sqcup \det^{-1}(\{-1\})$ . Así  $O(p)$  se expresa como la unión de dos cerrados ajenos, y así se tiene que  $O(p)$  tiene al menos dos componentes conexas. (Se prueba en [22] Teorema 3.67, pág 130 que  $O(p)$  tiene exactamente dos componentes conexas).

**Ejemplo 1.4.16.** Consideremos la función  $\Lambda$  anteriormente definida, (posteriormente veremos que es biyección)

$$\begin{aligned} \Lambda : \frac{\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k), e)}{\pi_0(\mathrm{GL}_p(k), e)} &\longrightarrow \phi_p^k(\mathbb{S}^n) \\ (\pi_0(\mathrm{GL}_p(k), e), [f]) &\longmapsto [E_f] \end{aligned}$$

Tenemos que  $\pi_0(\mathrm{GL}_p) \cong \pi_0(U(p) \times \mathbb{R}^p) \cong \pi_0(U(p))$  utilizando el Teorema 3.6.7 de [22] que nos dice que  $U(p)$  es conexo por trayectorias. Entonces  $\pi_0(U(p)) \cong 1$ , además por 1.4.7 se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_p^k(\mathbb{S}^n) &\cong \frac{\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k), e)}{\pi_0(\mathrm{GL}_p(k), e)} \\ &\cong \frac{\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k), e)}{1} \\ &\cong \pi_{n-1}(U(p) \times \mathbb{R}^p) \\ &\cong \pi_{n-1}(U(p)) \times \pi_{n-1}(\mathbb{R}^p) \\ &= \pi_{n-1}(U(p)) \end{aligned}$$

Así  $\phi_p^{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^n) \cong \pi_{n-1}(U(p))$ .

Por otra parte tenemos una fibración local trivial

$$\begin{aligned} U(p) &\longrightarrow U(p+1) \longrightarrow \mathbb{S}^{2p+1} \\ A &\longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

induce una sucesión exacta de homotopía

$$\dots \longrightarrow \pi_{i+1}(\mathbb{S}^{2p+1}) \longrightarrow \pi_i(U(p)) \longrightarrow \pi_i(U(p+1)) \longrightarrow \pi_i(\mathbb{S}^{2p+1}) \longrightarrow \dots$$

En [1] se explica que  $\pi_j(\mathbb{S}^r) = 0$  para toda  $j < r$ , y que para  $i+1 < 2p+1$ , es decir para  $p > \frac{i}{2}$  tenemos que la sucesión exacta anterior se ve de la forma

$$0 \longrightarrow \pi_i(U(p)) \longrightarrow \pi_i(U(p+1)) \longrightarrow 0$$

entonces  $\pi_i(U(p)) \cong \pi_i(U(p+1))$  para toda  $p > \frac{i}{2}$ , así

$$\operatorname{colim}_{m \rightarrow \infty} \pi_i(U(m)) \cong \pi_i(U(p))$$

de modo que  $\phi_p^{\mathbb{C}} \cong \pi_i(U(p)) \cong \operatorname{colim}_{m \rightarrow \infty} \pi_i(U(m))$ . Sea  $r = i+1$ , despejando  $i = r-1$ . También se prueba que

$$\operatorname{colim}_{m \rightarrow \infty} \pi_{n-1}(U(m)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo que el problema de clasificación de haces vectoriales complejos de rango  $p$  sobre una esfera  $\mathbb{S}^r$ , para  $\phi_p^k(\mathbb{S}^r)$  está completamente resuelta para  $p > \frac{r-1}{2}$ . El caso  $p \leq \frac{r-1}{2}$  es desconocido en general.

**Ejemplo 1.4.17.** Por otra parte, en analisemos el caso real. Del Lema 1.4.15 se tiene que  $\operatorname{GL}_p(\mathbb{R}) \cong O(p) \times \mathbb{R}^{\frac{p(p-1)}{2}}$  entonces  $\pi_i(\operatorname{GL}_p(\mathbb{R})) \cong \pi_i(O(p))$  y  $\pi_0(\operatorname{GL}_p(\mathbb{R})) \cong \pi_0(O(p)) \cong \mathbb{Z}_2$  debido a que  $O(p)$  tiene dos componentes conexas por trayectorias. Así tenemos el siguiente isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^n) &\cong \frac{\pi_{n-1}(\operatorname{GL}_p \mathbb{R})}{\pi_0(\operatorname{GL}_p \mathbb{R})} \\ &\cong \frac{\pi_{n-1}(O(p))}{\pi_0(O(p))} \end{aligned}$$

además, consideremos la fibración local trivial

$$\begin{aligned} O(p) &\longrightarrow O(p+1) \longrightarrow \mathbb{S}^p \\ A &\longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Capítulo 1

---

que induce la siguiente sucesión exacta larga

$$\dots \longrightarrow \pi_{i+1}(\mathbb{S}^p) \longrightarrow \pi_i(O(p)) \longrightarrow \pi_i(O(p+1)) \longrightarrow \pi_i(\mathbb{S}^p) \longrightarrow \dots$$

Sabemos que  $\pi_{i+1}(\mathbb{S}^p) = 0$  para toda  $p > i+1$ , entonces  $\pi_i(O(p)) \cong \pi_i(O(p+1))$  para toda  $p > i+1$  y por lo tanto  $\pi_i(O(p)) \cong \text{colim}_{m \rightarrow \infty} \pi_i(O(m))$ . Así

$$\begin{aligned} \phi_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^{i_0+1}) &\cong \frac{\pi_{n-1}(O(p))}{\pi_0(O(p))} \\ &\cong \pi_i(O(p)) \\ &\cong \text{colim}_{m \rightarrow \infty} \pi_i(O(m)) \end{aligned}$$

para toda  $p > i_0+1$ , por lo tanto  $\phi_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^{i_0+1}) \cong \text{colim}_{m \rightarrow \infty} \pi_i(O(m))$ , donde en el capítulo tres de [16] demuestran que

$$\text{colim}_{m \rightarrow \infty} \pi_i(O(m)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } i \equiv 0 \text{ ó } 1 \pmod{8} \\ \mathbb{Z} & \text{si } i \equiv 3 \pmod{8} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Solo nos falta ver que  $\frac{\pi_{i-1}(O(p))}{\pi_0(O(p))} \cong \pi_i(O(p))$  para toda  $p > i+1$ .

Caso  $p$  impar. Como  $p$  es impar  $-\text{Id} = -1$ , entonces  $\pi_0(O(p)) = \{\overline{\text{Id}}, -\overline{\text{Id}}\}$ , así para  $[f] \in \pi_i(O(p))$  tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_0(O(p)) \cdot [f] &= \{\overline{\text{Id}}, -\overline{\text{Id}}\} \cdot [f] \\ &= \{\overline{\text{Id}} \cdot [f], -\overline{\text{Id}} \cdot [f]\} \\ &= \{[f], [-\text{Id} \cdot f \cdot (-\text{Id})^{-1}]\} \\ &= \{[f], [f]\} = [f] \end{aligned}$$

Por lo tanto las orbitas constan exactamente de un solo punto, es decir,  $\pi_0(O(p)) \cong \mathbb{Z}_2$  actúa trivialmente en  $\pi_i(O(p))$ .

Caso  $p$ . Tenemos el siguiente isomorfismo  $\varphi_* : \pi_i(O(p)) \xrightarrow{\cong} \pi_i(O(p+1))$  donde

$$\begin{aligned} \varphi : O(p) &\longrightarrow O(p+1) \\ A &\longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

así por definición  $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$ ,

$$(\mathbb{S}^i, e) \xrightarrow{f} (O(p), \text{Id}) \xrightarrow{\varphi} (O(p+1), \text{Id})$$



El isomorfismo  $\varphi_*$  es compatible con la acción de  $\pi_0(O(p))$ ,  $\pi_0(O(p+1))$ , es decir que para  $\bar{a} \in \pi_0(O(p))$  tenemos que  $\varphi_*(\bar{a} \bullet [f]) = \overline{\varphi_*(a)} \varphi_*([f])$ . En efecto, vemos que  $\varphi_*(\bar{a} \bullet [f]) = \varphi_*([a \cdot f \cdot a^{-1}]) = [\varphi(a \cdot f \cdot a^{-1})]$  donde

$$\begin{aligned} a \cdot f \cdot a^{-1} : (\mathbb{S}^i, e) &\longrightarrow (O(p), \text{Id}) \\ x &\longmapsto a \cdot f(x) \cdot a^{-1} \end{aligned}$$

esto es  $\varphi(a \cdot f \cdot a^{-1})(x) = \varphi(a \cdot f(x) \cdot a^{-1})$ .

Notemos que

$$\begin{aligned} \varphi(a \cdot f(x) \cdot a^{-1}) &= \begin{pmatrix} a \cdot f(x) \cdot a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \varphi(a) \cdot \varphi(f(x)) \cdot (\varphi(a))^{-1} \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} [\varphi(a \cdot f \cdot a^{-1})] &= [\varphi(a) \cdot \varphi(f(x)) \cdot (\varphi(a))^{-1}] \\ &= \overline{\varphi_*(a)} \bullet [\varphi(f)] \\ &= \overline{\varphi_*(a)} \bullet \varphi_*([f]) \end{aligned}$$

Entonces como  $\varphi_*(O(p) \bullet [f]) = \varphi_*(\overline{O(p)}) \bullet \varphi_*([f]) \subseteq \pi_0((O(p+1))) \varphi_*([f])$  implica que  $\varphi_*(O(p) \bullet [f]) = \pi_0((O(p+1))) \varphi_*([f])$ . Así  $\varphi_*$  manda clases a clases y es biyectiva punto por punto. Notemos que  $\frac{\pi_i(O(p))}{\pi_0(O(p))} \cong \pi_i(O(p))$  pues  $p > i+1$ , entonces  $p+1 > i+1$  y como  $p$  es par, tenemos que  $p+1$  es impar, así caemos en el caso anterior. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\pi_i(O(p))}{\pi_0(O(p))} &\cong \frac{\pi_i(O(p+1))}{\pi_0(O(p+1))} \\ &\cong \pi_i(O(p+1)) \\ &\cong \pi_i(O(p)) \end{aligned}$$

para  $p > i+1$ . Concluimos que

$$\begin{aligned} \phi_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^{i+1}) &\cong \frac{\pi_i(O(p))}{\pi_0(O(p))} \\ &= \pi_i(O(p)) \\ &= \text{colim}_{m \rightarrow \infty} \pi_i(O(m)) \end{aligned}$$

El problema de lasificación de haces vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  de rango  $p$  sobre  $\mathbb{S}^n$  está completamente resuelto para  $p > n$  y el caso para  $p \leq n$  sigue abierto en general.

## 1.5. El haz tangente

En esta sección primero definiremos la suspensión de un espacio topológico. Posteriormente introduciremos la definición de variedad diferenciable y, utilizando herramientas anteriormente mostradas construiremos un haz vectorial sobre ésta, llamado haz tangente.

**Definición 1.5.1.** Sea  $X$  un espacio topológico paracompacto. Dándole la topología cociente, definimos la **suspensión**  $S'(X) = X \times [-1, 1] / \sim$  donde  $(x, -1) \sim (y, -1)$  y  $(x, 1) \sim (y, 1)$  para todo  $x, y \in X$ .

Es fácil ver que  $\sim$  es una relación de equivalencia. Consideremos la proyección natural  $\eta : X \times [-1, 1] \rightarrow X \times [-1, 1] / \sim$ . Denotamos por  $C^+(X)$  a la imagen de la proyección  $\eta$  restringida a la parte superior del cilindro, es decir  $C^+(X) = \text{Im } \eta|_{X \times [0, 1]}$ . Del mismo modo definimos  $C^-(X) = \text{Im } \eta|_{X \times [-1, 0]}$ . De esta manera tenemos que  $S'(X) = C^+(X) \cup C^-(X)$ . Utilizando el argumento para descomponer  $\mathbb{S}^{n-1}$  del Ejemplo 1.4.6, se sigue que  $S'(\mathbb{S}^{n-1})$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^n$ .

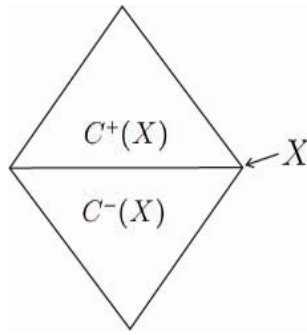


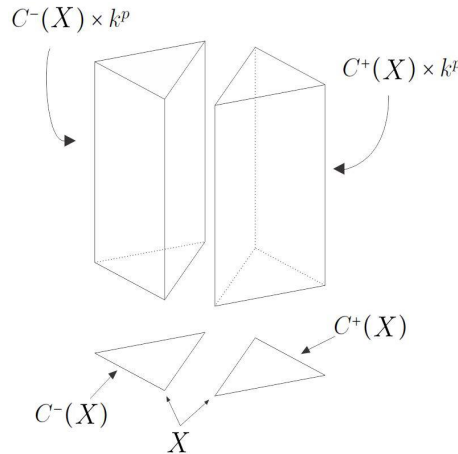
Figura 1.5: Suspensión  $S'(X)$

Sea  $f : X \rightarrow \text{GL}_p(k)$  una función continua, entonces es posible definir un haz vectorial  $E_f$  sobre  $S'(X)$ . Sean  $E_1 = C^+(X) \times k^p$  y  $E_2 = C^-(X) \times k^p$  haces triviales sobre  $C^+(X)$  y  $C^-(X)$  respectivamente, con una función de transición  $g_{21} = \hat{f} : X \times k^p \rightarrow X \times k^p$ , donde  $\hat{f}$  es la función inducida definida en el Teorema 1.1.10 y  $g_{12} = (g_{21})^{-1}$ . Utilizando el Teorema 1.3.3 (Teorema de pegado) tenemos que existe un único haz vectorial  $E_f$  sobre  $S'(X) = C^+(X) \cup C^-(X)$ .

**Lema 1.5.2.** Para funciones homotópicas  $f_0, f_1 : X \rightarrow \text{GL}_p(k)$ , se cumple que  $E_{f_0}$  es isomorfo a  $E_{f_1}$ .

Se demuestra utilizando los mismos argumentos que se tienen en el Ejemplo 1.4.5.

Sea  $e \in X$  un punto distinguido. Denotamos por  $[(X, e), (\text{GL}_p(k), \text{Id})]$  al conjunto de clases de homotopía de funciones continuas  $f : X \rightarrow \text{GL}_p(k)$  tales que  $f(e) = \text{Id}$


 Figura 1.6: Haz vectorial  $E_f$  sobre  $S'(X)$ 

o bien por  $[X, \text{GL}_p(k)]_*$  cuando sea claro cuales son los puntos bases de dichos espacios.

A continuación daremos la definición de variedad diferenciable, partiendo de un espacio topológico o variedad topológica.

**Definición 1.5.3.** Sea  $M$  un espacio topológico y  $U$  un conjunto abierto de  $M$ . Una **carta**  $n$ -dimensional sobre  $M$  es una aplicación continua e inyectiva  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuya imagen  $\varphi(U)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

Al conjunto  $U$ , dominio de la carta  $\varphi$ , se le denomina **entorno coordenado** ya que todos los puntos de  $U$  tienen asignadas coordenadas via  $\varphi$ . En efecto, si  $\text{pr}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  denota la proyección en la  $i$ -ésima coordenada, entonces se definen funciones coordenadas asociadas a la carta  $(U, \varphi)$  por  $\alpha_i = \text{pr}_i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces las coordenadas de un punto  $x \in U$  en la carta  $\varphi$  son  $(\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$ .

Cuando queremos cubrir un espacio topológico  $M$  mediante una colección de cartas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de tal manera que  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ , estas necesitan cumplir la siguiente relación de compatibilidad.

**Definición 1.5.4.** Dos cartas  $n$ -dimensionales  $(U_i, \varphi_i)$  y  $(U_j, \varphi_j)$  sobre  $M$  son compatibles si  $U_i \cap U_j = \emptyset$ , o bien si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces los conjuntos  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  y  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  son abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y las funciones  $\theta_{ji} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  y  $\theta_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  son difeomorfismos de clase  $C^m$  para  $m \geq 1$ . Denotaremos por  $A_{ji} := \varphi_i(U_i \cap U_j)$  y  $A_{ij} := \varphi_j(U_i \cap U_j)$ .

Con esto podemos dar la definición de estructura diferenciable.

**Definición 1.5.5.** Un **atlas diferenciable**  $n$ -dimensional sobre un conjunto  $M$  es una familia de cartas  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  satisfaciendo lo siguiente:

1. La familia de subconjuntos  $\{U_i\}_{i \in I}$  es una cubierta abierta de  $M$ , esto es,  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ .

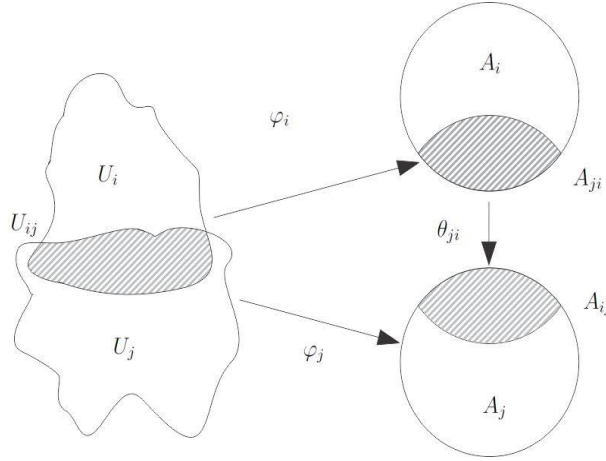


Figura 1.7: Condición de compatibilidad de una estructura diferenciable

2. Para todo par de índices  $i, j \in I$  las cartas  $(U_i, \varphi_i)$  y  $(U_j, \varphi_j)$  son compatibles.

Diremos que un atlas  $\mathcal{A}$  determina una **estructura diferenciable** sobre  $M$  si es maximal para las condiciones anteriores.

**Proposición 1.5.6.** *Cualquier atlas diferenciable sobre un espacio topológico  $M$  se puede completar a un atlas maximal de manera única, es decir, todo atlas diferenciable sobre un conjunto está contenido en exactamente un atlas maximal. ([6], p. 54)*

Así pues, para definir una estructura diferenciable no necesitamos especificar un atlas maximal sobre  $M$ , sino simplemente un atlas diferenciable. Utilizando la compatibilidad de las cartas es fácil probar la siguiente relación de equivalencia.

**Definición 1.5.7.** *Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos atlas diferenciables sobre un conjunto  $M$ . Los atlas son equivalentes si y sólo si,  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ , donde  $\mathcal{C}$  es otro atlas diferenciable de  $M$ .*

**Definición 1.5.8.** *Una **variedad diferenciable** de dimensión  $n$  es un par  $(M, \mathcal{A})$  formado por un espacio topológico  $M$  y una estructura diferenciable  $\mathcal{A}$  de  $M$ .*

A continuación daremos una definición equivalente a la de estructura diferenciable.

Una **estructura diferenciable** de dimensión  $n$  es un espacio topológico  $M$  junto con una familia de funciones inyectivas  $\{g_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M\}_{i \in I}$  donde  $U_i$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$ , tales que

1.  $\bigcup_{i \in I} g_i(U_i) = M$
2. Para cualquier par de subíndices  $i, j \in I$  con  $g_i(U_i) \cap g_j(U_j) = W \neq \emptyset$  el conjunto  $g_i^{-1}(W)$  y  $g_j^{-1}(W)$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y el mapeo  $g_j^{-1} \circ g_i$  es diferenciable.

3. La familia  $\{(U_i, g_i)\}$  es maximal a las condiciones anteriores.

**Observación. 1.5.9.** En la definición anterior,  $\{g_i(U_i)\}_{i \in I}$  es una cubierta abierta de  $M$  satisfaciendo la primera condición de la definición 1.5.5. La condición de compatibilidad y de maximalidad siguen siendo las mismas.

**Ejemplo 1.5.10.** (El espacio proyectivo  $P^n(\mathbb{R})$ ). Denotaremos por  $P^n(\mathbb{R})$  al conjunto de líneas rectas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  tales que pasan por el origen  $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , esto es  $P^n(\mathbb{R})$  es el conjunto de “direcciones” en  $\mathbb{R}^n$ .

Daremos a  $P^n(\mathbb{R})$  una estructura diferenciable utilizando la definición anterior. Sea  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , por definición  $P^n(\mathbb{R})$  es el cociente de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  con la siguiente relación de equivalencia

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1})$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  con  $\lambda \neq 0$ . Denotaremos los puntos de  $P^n(\mathbb{R})$  de la forma  $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ . Además si  $x_i \neq 0$ , entonces

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = \left[ \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i} \right]$$

Definimos los subconjuntos  $V_1, \dots, V_{n+1} \subseteq P^n(\mathbb{R})$  por

$$V_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in P^n(\mathbb{R}) | x_i \neq 0\}$$

para  $i = 1, \dots, n+1$ . Geométricamente  $V_i$  es el conjunto de líneas rectas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasan a través del origen y no pertenecen al hiperplano  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_i = 0\}$ .

Vamos a mostrar que los subconjuntos  $V_i$ 's son vecindades coordinadas, donde las coordenadas en  $V_i$  son

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{x_i} \\ &\vdots \\ y_{i-1} &= \frac{x_{i-1}}{x_i} \\ y_i &= \frac{x_{i+1}}{x_i} \\ &\vdots \\ y_n &= \frac{x_{n+1}}{x_i} \end{aligned}$$

Definimos una función continua  $\alpha_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_i$  dada por  $\alpha_i(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n]$ , de modo que  $\alpha_i$  es continua. Mostraremos que la familia  $\{\mathbb{R}^n, \alpha_i\}$  es una atlas diferenciable de  $P^n(\mathbb{R})$ . Claramente  $\alpha_i$  es biyectiva y tenemos que  $\bigcup_{i=1}^{n+1} \alpha_i(\mathbb{R}^n) = P^n(\mathbb{R})$  ya que  $\alpha_i(\mathbb{R}^n) = V_i$  y  $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i = P^n(\mathbb{R})$ .

## Capítulo 1

---

Veamos que  $\alpha_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y que  $\alpha_j^{-1} \circ \alpha_i$  es diferenciable con  $i, j = 1, \dots, n+1$ . Si  $i > j$  entonces  $x_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  está en  $\mathbb{R}^n$ . Notemos que  $V_i \cap V_j = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) | x_i \neq 0, x_j \neq 0\}$ , con esto definimos

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{x_i} \\ &\vdots \\ y_{i-1} &= \frac{x_{i-1}}{x_i} \\ y_0 &= 1 \\ y_i &= \frac{x_{i+1}}{x_i} \\ &\vdots \\ y_n &= \frac{x_{n+1}}{x_i} \end{aligned}$$

de modo que  $\alpha_i^{-1}(V_i \cap V_j) = \{(y_1, \dots, y_j, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n | y_j \neq 0\}$ . Notemos que  $\alpha_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , ya que con la topología producto, la imagen de  $\alpha_i$  en cada entrada es  $\mathbb{R}$  excepto en la  $j$ -ésima entrada donde su imagen es  $\mathbb{R} - \{0\}$ , el cual es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}$ .

Veamos que  $\alpha_j^{-1} \circ \alpha_i$  es un difeomorfismo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $j < i$  entonces

$$\begin{aligned} \alpha_j^{-1} \circ \alpha_i(y_1, \dots, y_n) &= \alpha_j^{-1}([y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n]) \\ &= \alpha_j^{-1}\left(\left[\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, 1, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right]\right) \\ &= \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, 1, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right) \end{aligned}$$

así  $\alpha_j^{-1} \circ \alpha_i(y_1, \dots, y_n) = (\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, 1, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j})$ . Definamos las funciones  $f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  con  $k = 1, \dots, n$  como

$$\begin{aligned}
 f_1(y_1, \dots, y_n) &= \frac{y_1}{y_j} \\
 &\vdots \\
 f_{j-1}(y_1, \dots, y_n) &= \frac{y_{j-1}}{y_j} \\
 f_j(y_1, \dots, y_n) &= \frac{y_{j+1}}{y_j} \\
 &\vdots \\
 f_{i-1}(y_1, \dots, y_n) &= \frac{y_1}{y_j} \\
 f_i(y_1, \dots, y_n) &= \frac{y_{j-1}}{y_j} \\
 &\vdots \\
 f_n(y_1, \dots, y_n) &= \frac{y_n}{y_j}
 \end{aligned}$$

con  $y_j \neq 0$ , entonces  $f_k$  es continua para  $k = 1, \dots, n$  haciendo  $\alpha_j^{-1} \circ \alpha_i$  un difeomorfismo. Por lo tanto  $\{\mathbb{R}^{n+1}, \alpha_i\}$  es una variedad diferenciable de  $P(\mathbb{R}^n)$ .

★

Sea  $A$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ , definimos  $TA := A \times k^n$  el haz vectorial trivial sobre  $A$ . Sean  $A, B$  subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^p$  y una función  $f : A \rightarrow B$  diferenciable de clase  $C^m$  para  $m \geq 1$ , entonces podemos asociarle a  $f$  un morfismo general de haces vectoriales  $Tf : TA \rightarrow TB$  que haga conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 TA & \xrightarrow{Tf} & TB \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

definido fibra a fibra por  $(Tf)_x(v) = df_x(x)(v)$ , donde  $df_x$  es el diferencial en  $X$ .

Sea  $\mathcal{A} = (U_i, A_i, \varphi)$  un atlas de  $M$ . Definiremos el **haz tangente**  $TM$  sobre  $M$  pegando los haces triviales  $TU_i = U_i \times \mathbb{R}^n$ . Sea  $\overline{\varphi}_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow A_i \times \mathbb{R}^n$  el isomorfismo de  $TU_i$  a  $TA_i$  definido por  $\overline{\varphi}_i(x, v) = (\varphi_i(x), v)$ . Veamos que  $\overline{\alpha}_i$  es continua. Sean  $A_{i_0} \subset A$  abierto y  $R \subset \mathbb{R}^n$  abierto entonces

$$\begin{aligned}
 \overline{\varphi}_i^{-1}(A_{i_0} \times R) &= \{(x, u) \in U_i \times \mathbb{R}^n | \overline{\varphi}_i(x, v) = (y, u) \text{ con } (y, u) \in A_{i_0} \times R\} \\
 &= \{(x, u) \in U_i \times \mathbb{R}^n | (\varphi_i(x), v) = (y, u) \text{ con } (y, u) \in A_{i_0} \times R\} \\
 &= \varphi_i^{-1}(A_{i_0}) \times R
 \end{aligned}$$

## Capítulo 1

como  $\varphi_i$  es continua entonces  $\varphi_i^{-1}(A_{i_0})$  es abierto, además  $\overline{\varphi}^{-1}(A_{i_0} \times R)$  es abierto en  $U_i \times \mathbb{R}^n$  ya que  $R$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Ahora probemos que  $\overline{\varphi}_i$  es biyectiva.

**Inyectividad.** Sean  $(x, v), (y, u) \in U_i \times \mathbb{R}^n$  con  $\overline{\varphi}_i(x, v) = \overline{\varphi}_i(y, u)$ , entonces  $(\varphi_i(x), v) = (\varphi_i(y), u)$  como  $\varphi$  es biyectiva  $x = y$  y además  $v = u$ , así  $(x, u) = (y, v)$ . Por lo tanto  $\overline{\varphi}_i$  es inyectiva.

**Sobreyectividad.** Sea  $(y, v) \in A_i \times \mathbb{R}^n$  como  $\varphi_i$  es biyectiva existe  $x \in U_i$  tal que  $\varphi_i(x) = y$ , así  $\overline{\varphi}_i(x, u) = (\varphi_i(x), u) = (y, u)$ . Por lo tanto  $\overline{\varphi}_i$  es sobreyectiva.

Definamos las funciones de transición  $g_{ji} : TU_i \longrightarrow TU_j$ . Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} TU_i|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\overline{\varphi}_i|_{U_i \cap U_j}} & TA_i|_{A_{ji}} \\ g_{ji} \downarrow & & \downarrow T\theta_{ij} \\ TU_j|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\overline{\varphi}_j|_{U_i \cap U_j}} & TA_j|_{A_{ij}} \end{array}$$

donde  $(T\theta_{ji})_x(v) = (\theta'_{ji}(x))(v)$ , ya que  $\theta_{ji} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi$  es diferenciable. Como  $\theta_{ki}(x) = \theta_{kj}(\theta_{ji}(x))$  para  $x \in \varphi_i(U_i \cap U_j \cap U_k)$ , y por la regla de la cadena se tiene que  $T\theta_{ki} = T\theta_{kj} \circ T\theta_{ji}$  cuando nos restringimos en  $\varphi_i(U_i \cap U_j \cap U_k)$ . Definimos  $g_{ji} : TU_i|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow TU_j|_{U_i \cap U_j}$  como  $g_{ji} = (\overline{\varphi}_j|_{U_i \cap U_j})^{-1} \circ T\theta_{ji} \circ \overline{\varphi}_i|_{U_i \cap U_j}$  y como  $\overline{\varphi}_i, \overline{\varphi}_j$  y  $T\theta_{ji}$  son isomorfismos entonces,  $g_{ji}$  es un isomorfismo que define las funciones de transición para  $TM$ . Vemos que cumplen con las condiciones de cociclo, pues

$$\begin{aligned} g_{ii} &= (\overline{\varphi}_i)^{-1} \circ T\theta_{ii} \circ \overline{\varphi}_i \\ &= (\overline{\varphi}_i)^{-1} \circ \text{Id}_{TA_i} \circ \overline{\varphi}_i \\ &= \text{Id}_{TU_i} \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} g_{ki} &= (\overline{\varphi}_k|_{U_i \cap U_j \cap U_k})^{-1} \circ T\theta_{ki} \circ \overline{\varphi}_i|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \\ &= (\overline{\varphi}_k|_{U_i \cap U_j \cap U_k})^{-1} \circ T\theta_{kj} \circ T\theta_{ji} \circ \overline{\varphi}_i|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \\ &= (\overline{\varphi}_k|_{U_i \cap U_j \cap U_k})^{-1} \circ T\theta_{kj} \circ \overline{\varphi}_j|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \circ (\overline{\varphi}_j|_{U_i \cap U_j \cap U_k})^{-1} \circ T\theta_{ji} \circ \overline{\varphi}_i|_{U_i \cap U_j \cap U_k} \\ &= g_{kj} \circ g_{ji} \end{aligned}$$

entonces  $g_{ji}$  son funciones de transición.

Veamos que esta definición no depende sobre que atlas  $\mathcal{A}$  escojamos. Sea  $\mathcal{B} = (V_r, B_r, \psi_r)$  un atlas equivalente con funciones de transición  $h_{sr} : TV_s \longrightarrow TV_r$  en  $V_r \cap V_s$ . Como  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son atlas equivalentes existen funciones  $\sigma_{ri} := \psi_r \circ \varphi_i^{-1} : A_i \longrightarrow B_r$  que hacen conmutar el siguiente diagrama



$$\begin{array}{ccc}
 U_i & \xrightarrow[\cong]{\varphi_i|_{U_i \cap V_r}} & A_i \\
 \text{Id}_{U_i \cap V_r} \downarrow & & \sigma_{ri} \downarrow \cong \\
 V_r & \xrightarrow[\cong]{\psi_r|_{U_i \cap V_r}} & B_r
 \end{array} \quad (1.13)$$

Además, estas inducen los isomorfismos  $T\sigma_{ri} : TA_i \rightarrow TB_r$ . Definimos el isomorfismo  $g_i^r : TU_i|_{U_i \cap V_r} \rightarrow TV_r|_{U_i \cap V_r}$  por  $g_i^r := (\bar{\psi}_r|_{U_i \cap V_r})^{-1} \circ T\sigma_{ri} \circ \bar{\varphi}_i$ , de modo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 TU_i & \xrightarrow{\bar{\varphi}_i|_{U_i \cap V_r}} & TA_i \\
 g_i^r \downarrow & & T\sigma_{ri} \downarrow \\
 TV_r & \xrightarrow{\bar{\psi}_r|_{U_i \cap V_r}} & TB_r
 \end{array} \quad (1.14)$$

Así tenemos que  $(TU_i, g_{ji})$  y  $(TV_r, h_{sr})$  son dos cociclos, además utilizando los diagramas 1.13 y 1.14 se obtiene el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 TU_r & \xrightarrow{g_i^r} & TV_r \\
 h_{sr} \downarrow & & \downarrow g_{ji} \\
 TU_j & \xrightarrow{g_j^s} & TV_s
 \end{array}$$

esto es,  $h_{sr} = g_j^s \circ g_{ji} \circ (g_i^r)^{-1}$ , entonces  $(TU_i, g_{ji}) \sim (TV_r, h_{sr})$ . Utilizando el Teorema 1.4.3,  $(TU_i, g_{ji})$  y  $(TV_r, h_{sr})$  están en la misma clase en  $H^1(M, \text{GL}_p(k))$  entonces están en la misma clase de isomorfismo en  $\phi_k^p(M)$ . Por lo tanto, dada una variedad diferenciable  $M$  de clase  $C^m$  es posible construir un único haz vectorial  $TM$  llamado **haz tangente de  $M$** .

### 1.5.1. Funtorialidad del haz tangente

Veamos que la construcción del haz tangente es funtorial, esto es, dada una variedad diferenciable de  $(M, \mathcal{A})$  con  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  es posible asociarle haz vectorial  $TM$  sobre  $M$  y para una función continua entre variedades  $f : M \rightarrow N$  exista un morfismo general  $Tf : TM \rightarrow TN$ . Más aún, demostraremos que  $T$  es un funtor covariante.

**Definición 1.5.11.** Sean  $(M, \mathcal{A})$  y  $(N, \mathcal{B})$  variedades diferenciales de clase  $C^m$  con  $\mathcal{A} = (U_i, A_i, \varphi_i)$  atlas de  $M$  y  $\mathcal{B} = (V_r, B_r, \psi_r)$  atlas de  $N$ . Sea  $f : M \rightarrow N$  una función continua. Decimos que  $f$  es **de clase  $C^\alpha$** , con  $1 \leq \alpha \leq m$  si para toda  $i \in I$ , toda  $x \in U_i$  y para  $f(x) \in V_r$  para algún  $r$ , la función  $f_i^r = \psi_r \circ f \circ \varphi_i^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^\alpha$  en una vecindad de  $\varphi_i(x)$  que sea lo suficientemente pequeña para que  $\psi_r \circ f \circ \varphi_i^{-1}$  tenga sentido.

## Capítulo 1

Queremos definir un morfismo general  $Tf : TM \rightarrow TN$ . Sea  $f : M \rightarrow N$  una función continua de clase  $C^\alpha$ , entonces la función  $f_i^r = \psi_r \circ f \circ \varphi_i^{-1}$  es diferenciable de clase  $C^\alpha$  en una vecindad de  $\varphi(x)$  y hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\varphi_i|_{U_i}} & A_i \\ f|_{U_i} \downarrow & & \downarrow f_i^r|_{\varphi(U_i)} \\ V_r & \xrightarrow{\psi_r|_{f(U_i)}} & B_r \end{array} \quad (1.15)$$

Además, cumple la siguiente identidad

$$f_j^s = (\psi_s \circ \psi_r^{-1}) \circ (\psi_r \circ f \circ \varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) = \theta_{sr}^N \circ f_i^r \circ \theta_{ij}^M$$

con  $\theta_{ji}^M : A_i \rightarrow A_j$  y  $\theta_{sr}^N : B_r \xrightarrow{\cong} B_s$  los difeomorfismos locales de las variedades  $M$  y  $N$ , respectivamente. Además,  $f_i^r$  induce una función continua  $Tf_i^r : TA_i|_{U_i} \rightarrow TB_r|_{U_i}$  donde para cada fibra de  $x \in U_i$  se define  $(Tf_i^r)_x(v) = (f_i^r)'(x)(v)$ . Definimos  $Tf|_{U_i} : TM \rightarrow TN$  como la composición

$$\begin{array}{ccc} TU_i & \xrightarrow{\overline{\varphi}_i|_{U_i}} & TA_i \\ Tf|_{U_i} \downarrow & & \downarrow Tf_i^r|_{\varphi_i(U_i)} \\ TV_r & \xleftarrow{(\overline{\psi}_r|_{f(U_i)})^{-1}} & TB_r \end{array}$$

Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} TU_i & \xrightarrow{\overline{\varphi}_i} & A_i & \xrightarrow{T\theta_{ji}^M} & TA_j & \xleftarrow{\overline{\varphi}_j} & TU_j \\ Tf|_{U_i \cap U_j} \downarrow & & \downarrow Tf_i^r & & \downarrow Tf_j^s & & \downarrow T|_{U_i \cap U_j} \\ TV_r & \xrightarrow{\overline{\psi}_r} & TB_r & \xrightarrow{T\theta_{sr}^N} & TB_s & \xleftarrow{\overline{\psi}_s} & TV_s \end{array}$$

donde  $Tf_j^s = T\theta_{sr}^N \circ Tf_i^r \circ (\theta_{ji}^M)^{-1}$ . Utilizando el Teorema 1.3.2, esto define un único morfismo general  $Tf : TM \rightarrow TN$ .

Veamos que el funtor  $T$  covariante. Sea  $(P, \mathcal{C})$  otra variedad diferenciable con atlas  $\mathcal{C} = (W_k, C_k, \gamma_k)$  y  $g : N \rightarrow P$  un mapeo diferenciable, vemos que  $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$ . Tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc} U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & A_i & & \\ f|_{U_i} \downarrow & & \downarrow f_i^r & & \\ V_r & \xrightarrow{\psi_r} & B_r & & \\ g|_{V_r} \downarrow & & \downarrow g_r^k & & \\ W_k & \xrightarrow{\gamma_k} & C_k & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{curved arrow from } U_i \text{ to } W_k: g|_{V_r} \circ f|_{U_i} \\ \text{curved arrow from } A_i \text{ to } C_k: g_r^k \circ f_i^r \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 TU_i & \xrightarrow{\bar{\varphi}_i} & TA_i & & \\
 \downarrow Tf & & \downarrow Tf_i^r & & \\
 TV_r & \xrightarrow{\bar{\psi}_r} & TB_r & & \\
 \downarrow Tg & & \downarrow Tg_r^k & & \\
 TW_k & \xrightarrow{\bar{\gamma}_k} & TC_k & & 
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 T(g \circ f) \curvearrowleft \\
 \\
 \curvearrowright T(g_r^k \circ f_i^r) \\
 \\
 \end{array}$$

para  $x \in U_i$ ,  $f(x) \in V_r$  y  $(g \circ f)(x) \in W_k$ . Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 TA_i & \xrightarrow{\theta_{ji}^M} & TA_j & & \\
 \downarrow Tf_i^r & & \downarrow Tf_j^s & & \\
 TB_r & \xrightarrow{\theta_{sr}^N} & TB_s & & \\
 \downarrow Tg_r^k & & \downarrow Tg_s^l & & \\
 TC_k & \xrightarrow{\theta_{lk}^P} & TB_l & & 
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 T(g_r^k \circ f_i^r) \curvearrowleft \\
 \\
 \curvearrowright T(g_s^l \circ f_j^s) \\
 \\
 \end{array}$$

Tenemos que ver que para  $x \in U_i \cap U_j$ ,  $f(x) \in V_r \cap V_s$  y  $(g \circ f)(x) \in W_k \cap W_l$  se cumple que  $Tg_r^k \circ Tf_i^r = T(g_r^k \circ f_i^r)$ . Utilizando la regla de la cadena, a nivel de fibras tenemos que

$$\begin{aligned}
 (T(g_r^k \circ f_i^r))_x(v) &= ((g_r^k \circ f_i^r)'(x))(v) \\
 &= ((g_r^k)'((f_i^r)(x)) \circ (f_i^r)'(x))(v) \\
 &= ((Tg_r^k)_{f_i^r(x)} \circ (Tf_i^r)_x)(v) \\
 &= (Tg_r^k \circ Tf_i^r)_x(v)
 \end{aligned}$$

por lo tanto  $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$ .

## 1.6. Operaciones con haces vectoriales

Denotaremos por  $\mathcal{E}$  a la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita y  $\mathcal{E}(X)$  denotará la categoría de haces vectoriales sobre  $X$ . Si queremos ser más específicos podemos denotarlo por  $\mathcal{E}_k(X)$  ó  $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(X)$  ó  $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(X)$ , dependiendo del campo que utilicemos.

El propósito de esta sección es, dado un funtor continuo  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  asociarle un funtor  $\varphi' : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X)$  de tal manera que podamos tener más herramientas y ejemplos de haces vectoriales.

**Definición 1.6.1.** *Un funtor  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  se dice continuo, si para cada par de objetos  $(M, N)$  en  $\mathcal{E}_0$  el mapeo natural  $\varphi_{M,N} : \mathcal{E}(M, N) \rightarrow \mathcal{E}(\varphi(M), \varphi(N))$  es continuo, respecto a la topología usual de espacios vectoriales de dimensión finita.*

**Ejemplo 1.6.2.** Definamos  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  por  $\varphi(M) = M \oplus M$ . Veamos que  $\varphi$  es continua. Sean  $M$  y  $N$  espacios vectoriales con  $\beta = \{e_1, \dots, e_m\}$  y  $\beta' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$  sus respectivas bases y sea  $f \in \mathcal{L}(M, N)$ , entonces  $f$  tiene una representación matricial dada por las bases  $\beta$  y  $\beta'$ , como

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \alpha_{11}e'_1 + \alpha_{21}e'_2 + \dots + \alpha_{n1}e'_n \\ f(e_2) &= \alpha_{12}e'_1 + \alpha_{22}e'_2 + \dots + \alpha_{n2}e'_n \\ &\vdots \\ f(e_m) &= \alpha_{1m}e'_1 + \alpha_{2m}e'_2 + \dots + \alpha_{nm}e'_n \end{aligned}$$

entonces

$$[f]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Como nuestro funtor está definido por  $\varphi(M) = M \oplus M$ , definimos las bases  $\beta \oplus \beta = ((e_1, 0), \dots, (e_m, 0), (0, e_1), \dots, (0, e_m))$  para  $M \oplus M$  y  $\beta' \oplus \beta' = ((e'_1, 0), \dots, (e'_n, 0), (0, e'_1), \dots, (0, e'_n))$  para  $N \oplus N$ . Tenemos que  $\varphi(f) = f \oplus f$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M \oplus M \\ f \downarrow & & \downarrow f \oplus f \\ N & \xrightarrow{\varphi} & N \oplus N \end{array}$$

donde

$$[f \oplus f]_{\beta \oplus \beta}^{\beta' \oplus \beta'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Así  $\varphi(f)$  se puede ver como una función  $\psi : \mathbb{R}^{nm} \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+n)(m+m)}$ , que se describe con funciones  $\psi_{i,j} : \mathbb{R}^{nm} \longrightarrow \mathbb{R}$  con  $i = 1, \dots, n+n$ ,  $j = 1, \dots, m+m$  donde

$$\psi_{ij}(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn}) = \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{si } 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq m \\ \alpha_{ij} & \text{si } n+1 \leq i \leq n+n \text{ y } m+1 \leq j \leq m+m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

como cada  $\psi_{ij}$  es continua, tenemos que  $\varphi_{M,N}$  es continua. Por lo tanto  $\varphi$  es un funtor continuo.

★

**Ejemplo 1.6.3.** Del mismo modo que el ejemplo anterior se puede demostrar que  $\varphi(M) = M \otimes M$  es un funtor continuo.

★

Nuestro proposito a continuación es: dado un funtor continuo  $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ , asociarle un funtor  $\varphi' = \varphi(X) : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ , que coincida con  $\varphi$  cuando  $X = \{x_0\}$ .

Si  $E$  es un haz vectorial sobre  $X$  con proyección  $\pi : E \longrightarrow X$ , definiremos  $E' = \varphi'(E)$  como la unión disjunta  $\bigsqcup_{x \in X} \varphi(E_x)$  con proyección  $\pi' : \varphi'(E) \longrightarrow X$ . En el siguiente lema daremos a  $\varphi'(E)$  una topología.

**Lema 1.6.4.** Sean  $U$  y  $V$  abiertos en  $X$  y sea  $\beta : E_U \longrightarrow U \times M$  y  $\gamma : E_V \longrightarrow V \times N$  dominios de trivialización de  $U$  y  $V$  respectivamente. Sean  $\beta' : E'_U \longrightarrow U \times \varphi(M)$  y  $\gamma' : E'_V \longrightarrow V \times \varphi(N)$  las biyecciones inducidas por el funtor continuo  $\varphi'$ . Si damos a  $E'_U$  y  $E'_V$  las topologías inducidas por estas biyecciones, las topologías coinciden en  $E'_U \cap E'_V = E'_{U \cap V}$  y  $E'_{U \cap V}$  es abierto en  $E'_U$  y en  $E'_V$ .

**Demostración.** Primero veamos que las funciones inducidas por  $\beta$  y  $\gamma$  son biyecciones. Sea  $\beta' : E'_U \longrightarrow U \times \varphi(M)$  definida fibra a fibra por  $\beta'_x = \varphi(\beta_x) : E_x \longmapsto \{x\} \times \varphi(M)$  así

$$\begin{aligned}\beta' : E_U &\longrightarrow U \times \varphi(M) \\ E_x &\longmapsto \{x\} \times \varphi(M)\end{aligned}$$

**Inyectividad.** Sean  $E_x$  y  $E_y$  tal que  $\beta'(E_{\{x\}}) = \beta'(E_{\{y\}})$ , entonces  $\{x\} \times \varphi(M) = \{y\} \times \varphi(M)$  así  $x = y$ . Por lo tanto  $E_x = E_y$ .

**Sobreyectividad.** Sea  $(u, v) \in U \times \varphi(M)$ . Como  $u \in U$ , entonces su fibra  $E_u$  es tal que  $\beta'(E_u) = \{u\} \times \varphi(M)$ , en particular  $(u, v) \in \{u\} \times \varphi(M)$ . Por lo tanto  $\beta'$  es sobreyectiva.

Tenemos que  $\beta'$  es biyección, y por argumentos similares se prueba que  $\gamma'$  es biyección.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_{U \cap V} & \xrightarrow{\beta|_{U \cap V}} & (U \cap V) \times M \\ \parallel & & \downarrow \hat{s} \\ E_{U \cap V} & \xrightarrow{\gamma|_{U \cap V}} & (U \cap V) \times N \end{array}$$

donde  $\hat{s} = \gamma|_{U \cap V} \circ (\beta|_{U \cap V})^{-1}$ , la cual es continua, entonces por el Teorema 1.1.10 tenemos la siguiente función continua

$$\begin{aligned}s : U \cap V &\longrightarrow \mathcal{L}(M, N) \\ x &\longmapsto s_x\end{aligned}$$

Por otro lado, definimos  $\delta : U \cap V \longrightarrow \mathcal{L}(\varphi(M), \varphi(M))$  por  $\delta = \varphi_{M, N} \circ s$ ,

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{s} & \mathcal{L}(M, N) \\ & \searrow \delta & \downarrow \varphi_{M, N} \\ & & \mathcal{L}(\varphi(M), \varphi(M)) \end{array}$$

Notemos que  $\delta$  es continua, ya que es composición de funciones continuas y por el Teorema 1.1.10 existe  $\hat{\delta} : (U \cap V) \times \varphi(M) \longrightarrow (U \cap V) \times \varphi(N)$  continua que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E'_{U \cap V} & \xrightarrow{\beta'|_{U \cap V}} & (U \cap V) \times \varphi(M) \\ \parallel & & \downarrow \hat{\delta} \\ E'_{U \cap V} & \xrightarrow{\gamma'|_{U \cap V}} & (U \cap V) \times \varphi(N) \end{array}$$

ya que

$$\begin{aligned}
 \hat{\delta}(\beta'|_{U \cap V}) &= \hat{\delta}(\varphi_{MN}(\beta|_{U \cap V})) \\
 &= \varphi_{M,N}(\gamma|_{U \cap V} \circ (\beta|_{U \cap V})^{-1})(\varphi_{M,N}(\beta|_{U \cap V})) \\
 &= \varphi_{M,N}(\gamma|_{U \cap V} \circ (\beta|_{U \cap V})^{-1} \circ \beta|_{U \cap V}) \\
 &= \varphi_{M,N}(\gamma|_{U \cap V}) \\
 &= \gamma'|_{U \cap V}.
 \end{aligned}$$

De la misma manera se puede definir  $\delta^{-1}$ , de tal manera que la topología de  $E'_U$  y  $E'_V$  coinciden en  $E'_U \cap E'_V = E'_{U \cap V}$ . Además por la biyección tenemos que  $E'_{U \cap V}$  es abierto en  $E'_U$  y  $E'_V$ . ■

**Teorema 1.6.5.** Sea  $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  un funtor continuo, entonces existe un morfismo general  $\varphi' : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$  definido por  $\varphi'(E) = \sqcup_{x \in X} \varphi(E_x)$ .

**Demostración.** Primero definiremos una topología en  $E' = \varphi'(E)$ . Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  una cubierta abierta  $X$  y sean  $\beta_i : E_{U_i} \longrightarrow U_i \times M$  dominios de trivialización de  $E$  para cada  $i \in I$ . Sabemos que  $\beta_i$  induce una biyección  $\beta'_i : E'_{U_i} \longrightarrow U_i \times \varphi(M)$ . Le asociamos a  $E'$  la siguiente topología:  $A \subset E'$  es abierto si y sólo si  $A \cap E'_{U_i}$  es abierto en  $E'_{U_i}$  para toda  $i \in I$ . Veamos que es una topología.

1. Tenemos que  $\emptyset$  y  $E'$  está en la topología pues  $\emptyset$  es abierto en  $E_{U_i}$  para toda  $i \in I$  y  $E' \cap E_{U_i} = E_{U_i}$  es abierto en  $E_{U_i}$  para toda  $i \in I$ .
2. Sean  $\{A_j\}_{j \in J}$  una colección finita de subconjuntos abiertos en  $E'$ , entonces para cada  $j \in J$  se tiene que  $A_j \cap E_{U_i}$  es abierto en  $E_{U_i}$  para cada  $i \in I$ . Tenemos que para cada  $i \in I$  se cumple que  $\bigcup_{j \in J} A_j \cap E_{U_i}$  es abierto en  $E_{U_i}$  y por lo tanto  $\bigcup_{j \in J} A_j$  es abierto en  $E'$ .
3. Sean  $\{A_j\}_{j=1}^t$  una colección de subconjuntos abiertos en  $E'$ , entonces para cada  $j = 1, \dots, t$  se tiene que  $A_j \cap E_{U_i}$  es abierto en  $E_{U_i}$  para cada  $i \in I$ . Tenemos que para cada  $i \in I$  se cumple que  $\bigcap_{j=1}^t A_j \cap E_{U_i}$  es abierto en  $E_{U_i}$  y por lo tanto  $\bigcap_{j=1}^t A_j$  es abierto en  $E'$ .

Por lo tanto tenemos una topología para  $E'$ .

Veamos que esta topología no depende de la cubierta que tomemos. Sea  $\{V_r\}_{r \in R}$  otra cubierta abierta de  $X$  y  $\psi_r : E_{V_r} \longrightarrow V_r \times N_r$  otra trivialización, así

$$\begin{array}{ccc}
 E_{U \cap V} & \xrightarrow{\varphi_i|_{U \cap V}} & (U \cap V) \times M_i \\
 \parallel & & \downarrow \hat{s} \\
 E_{U \cap V} & \xrightarrow{\psi_r|_{U \cap V}} & (U \cap V) \times N_r
 \end{array}$$

## Capítulo 1

donde  $\hat{s} = \psi_r|_{U \cap V} \circ (\varphi_i|_{U \cap V})^{-1}$  entonces existe  $\hat{\delta} : (U_i \times V_r) \times \varphi(M_i) \longrightarrow (U_i \times V_r) \times \varphi(N_r)$ , del mismo modo podemos definir  $\hat{\delta}^{-1}$  la cual también será continua, así  $(U_i \cap V_r) \times M_i \cong (U_i \cap V_r) \times N_r$ . Con esto van a coincidir las topologías en  $U_i \cap V_r$ . De este modo, la topología de  $E'$  no dependerá de la cubierta que tomemos. Tenemos que  $E'$  es localmente trivial ya que  $E_{U_i} \cong U_i \times \varphi(M_i)$  por definición.

Para terminar de definir el funtor  $\varphi'$  tenemos que definir  $f' = \varphi'(f) : \varphi'(E) \longrightarrow \varphi'(F)$  cuando  $f : E \longrightarrow F$  es morfismo de haces vectoriales. Como  $f_x : E_x \longrightarrow F_x$  es una función lineal entre espacios vectoriales, al aplicar el funtor  $\varphi_{E_x, F_x} : \mathcal{E}(E_x) \longrightarrow \mathcal{E}(F_x)$  a la función  $f_x$  induce una función lineal  $f'_x = \varphi(f_x) : \varphi(E_x) \longrightarrow \varphi(F_x)$ . De este modo definimos  $f' = \varphi'(f) : \varphi'(E) \longrightarrow \varphi'(F)$  en cada fibra por la función  $f'_x = \varphi(f_x)$  inducida por el funtor  $\varphi$ . Para ver que  $f'$  es continua consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow[\cong]{\beta} & U \times M \\ f|_U \downarrow & & \downarrow g \\ F_U & \xrightarrow[\cong]{\delta} & U \times N \end{array}$$

donde  $g = \delta \circ f|_U \circ \beta^{-1} : U \times M \longrightarrow U \times N$ , entonces por el Teorema 1.1.10 existe una función continua

$$\begin{array}{ccc} \check{g} : U & \longrightarrow & \mathcal{L}(M, N) \\ u & \longmapsto & g_u \end{array}$$

aplicando el funtor  $\varphi_{M, N}$  tenemos

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\check{g}} & \mathcal{L}(M, N) \\ & \searrow \check{h} & \downarrow \varphi_{M, N} \\ & & \mathcal{L}(\varphi(M), \varphi(M)) \end{array}$$

donde  $\check{h}$  es continua, la cual por el Teorema 1.1.10 induce un morfismo continuo  $h : U \times \varphi(M) \longrightarrow U \times \varphi(N)$ , así tenemos que

$$\begin{array}{ccc} E'_U & \xrightarrow[\cong]{\beta'} & U \times \varphi(M) \\ f'|_U \downarrow & & \downarrow h \\ F'_U & \xrightarrow[\cong]{\delta'} & U \times \varphi(N) \end{array}$$

donde  $f'|_U = (\delta')^{-1} \circ h \circ \beta'$ . Por lo tanto  $f'|_U$  es continua en cada vecindad, y se sigue que  $f'$  es continua.

■



### 1.6.1. Multifuntores continuos

**Definición 1.6.6.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  dos categorías. El **producto cartesiano entre categorías**  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$  consiste en parejas  $(A, A')$ , donde  $A \in \mathcal{C}, A' \in \mathcal{C}'$  y morfismos dados por

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C}'((A, A'), (B, B')) = \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}'(A', B')$$

**Definición 1.6.7.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, definimos la **categoría opuesta**  $\mathcal{C}^o$  cuyos objetos son los mismos que  $\mathcal{C}$ , y  $\mathcal{C}^o(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$ .

**Definición 1.6.8.** Sea  $\mathcal{C}$  un producto de categorías  $\mathcal{C}^1, \dots, \mathcal{C}^n$  y  $\mathcal{D}$  cualquier categoría. Un **multifunctor**  $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  satisface lo siguiente:

1. Para cada  $A \in \mathcal{C}_0$ , existe  $\varphi(A) \in \mathcal{D}_0$ ,
2. Para cada  $\alpha \in \mathcal{C}(A, B)$ , existe  $\varphi(\alpha) \in \mathcal{D}(\varphi(A), \varphi(B))$ ,
3. Existe una función  $\psi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{id, op\}$ , donde  $id$  es el funtor identidad, y  $op$  es el funtor opuesto, con

$$\bar{\mathcal{C}} := \psi(1)(\mathcal{C}^1) \times \dots \times \psi(n)(\mathcal{C}^n) \text{ y } \bar{\alpha}_i := \psi(i)(\alpha_i)$$

para cada morfismo  $\alpha_i \in \mathcal{C}_1^i$  con  $i = 1, \dots, n$ , tal que el funtor  $\bar{\varphi} : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{D}$  dado por

$$\bar{\varphi}(A) = \varphi(A) \text{ y } \bar{\varphi}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$$

es un funtor covariante.

Se dice que éste es un **multifunctor continuo** si la función  $\mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(\varphi(A), \varphi(B))$  es continua.

Consideremos  $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  un funtor continuo, y queremos definir  $\varphi' : \mathcal{E}(X) \times \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X)$ . Sean  $E$  y  $F$  haces vectoriales sobre  $X$ , entonces definimos

$$\varphi'(E, F) = \bigsqcup_{x \in X} \varphi(E_x, F_x).$$

Con esto, podemos obtener una generalización del Lema 1.6.4 como se enuncia a continuación.

**Lema 1.6.9.** Sean  $E$  y  $F$  haces vectoriales sobre  $X$ . Sean  $U$  y  $V$  abiertos de  $X$  y consideremos  $\beta : E_U \rightarrow U \times M$  y  $\gamma : E_V \rightarrow V \times N$  trivializaciones de  $E$  sobre  $U$  y  $V$  respectivamente, también consideremos  $\beta' : F_U \rightarrow U \times M'$  y  $\gamma' : F_V \rightarrow V \times N'$  trivializaciones de  $F$  sobre  $U$  y  $V$ . Sean

$$\begin{aligned} \varphi'(\beta, \gamma) : \varphi(E_U, F_V) &\rightarrow U \times \varphi(M, M') \\ \varphi'(\beta, \gamma) : \varphi(F_U, F_V) &\rightarrow U \times \varphi(N, N') \end{aligned}$$

las biyecciones inducidas por las fibras

$$\begin{array}{ccc} (E_x, F_x) & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(E_x, F_x) \\ (\beta_x, \gamma_x) \downarrow & & \downarrow \varphi(\beta_x, \gamma_x) \\ (M, N) & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(M, N) \end{array}$$

Si damos a  $\varphi'(E_U, F_U)$  y  $\varphi'(E_V, F_V)$  las topologías inducidas por estas biyecciones tenemos que las dos topologías coinciden en  $\varphi'(E_U, F_U) \cap \varphi'(E_V, F_V) = \varphi'(E_{U \cap V}, F_{U \cap V})$  y además son abiertos en  $\varphi'(E_V, F_V)$  y en  $\varphi'(E_U, F_U)$ .

La demostración es similar a la del Lema 1.6.4.

Utilizando el Lema 1.6.9 podemos asociarle una topología a  $\varphi'(E, F)$  la cual es inducida por la biyección con  $\sqcup_{x \in X} \varphi(E_x, F_x)$ . Más aún para cada fibra en  $x \in X$  tenemos que  $(\varphi'(E, F))_x = \varphi(E_x, F_x)$  es un espacio vectorial, de este modo tenemos siguiente resultado.

**Teorema 1.6.10.** *Sea  $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  un funtor continuo, entonces existe un funtor  $\varphi' : \mathcal{E}(X) \times \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$  definido por  $\varphi'(E, F) = \sqcup_{x \in X} \varphi(E_x, F_x)$ .*

Se demuestra de la misma manera que el Teorema 1.6.5.

**Ejemplo 1.6.11.** Sean  $E$  y  $F$  haces vectoriales sobre  $X$  con proyecciones  $\pi : E \longrightarrow X$  y  $\pi' : F \longrightarrow X$ . Tenemos que el funtor  $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  definido por  $\varphi(M, N) = M \oplus N$  es continuo, así tenemos un morfismo general  $\varphi' : \mathcal{E}(X) \times \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$  definido por  $\varphi'(E, F) = \sqcup_{x \in X} (E_x \oplus F_x)$ .

Veamos que el haz vectorial  $E \oplus F$  es igual a  $E \times_X F$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} E \times_X F &= \{(e, e') \in E \times F \mid \pi(e) = \pi'(e')\} \\ &= \bigsqcup_{x \in X} (E_x \times F_x) \\ &= \bigsqcup_{x \in X} (E_x \oplus F_x) \\ &= E \oplus F \end{aligned}$$

así tenemos definido el haz  $E \oplus F$  sobre  $X$ . Este haz es llamado el haz suma de Whitney para los haces  $E$  y  $F$  sobre  $X$ .

Debido a que la suma directa para espacios vectoriales se satisfacen que  $E \oplus F \cong F \oplus E$  y  $(E \oplus F) \oplus G \cong E \oplus (F \oplus G)$  para  $E, F$  y  $G$  espacios vectoriales, es decir, la suma directa para espacios vectoriales satisface la conmutatividad y la asociatividad. Entonces estas propiedades son heredadas para la suma de Whitney, es decir, para  $E, F, G \in \mathcal{E}(X)$  se cumple que  $E \oplus F \cong F \oplus E$  y  $(E \oplus F) \oplus G \cong E \oplus (F \oplus G)$ .

★

**Ejemplo 1.6.12.** Sea  $\varphi : \mathcal{E}_k \times \mathcal{E}_k \longrightarrow \mathcal{E}_k$  definido por  $\varphi(M, N) = M \otimes_k N$ . Como  $\varphi$  es continuo, tenemos que existe  $\varphi(X)(E, F) = E \otimes F = \sqcup_{x \in X} E_x \otimes_k F_x$ , llamado producto tensorial de  $E$  y  $F$ . De igual manera tenemos que  $E \otimes F \cong F \otimes E$ ,  $(E \otimes F) \otimes G \cong E \otimes (F \otimes G)$ .

★

**Ejemplo 1.6.13.** Sean  $E \in \mathcal{E}(X)$  y  $F \in \mathcal{E}(Y)$ . Definimos la **suma externa de Whitney** de  $E$  y  $F$  como el haz vectorial  $E \boxplus F$  en  $X \times Y$ , donde  $E \boxplus F = \pi_1^*(E) \oplus \pi_2^*(F)$  con  $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$  y  $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ , con fibras definidas por  $(E \boxplus F)_{(x,y)} = E_x \oplus F_y$ .

★

## 1.7. Secciones sobre un haz vectorial

Sea  $\zeta = (E, \pi, X)$  un haz vectorial. Una **sección** es una función continua

$$s : X \longrightarrow E$$

tal que  $\pi \circ s : X \longrightarrow X$  es la aplicación identidad.

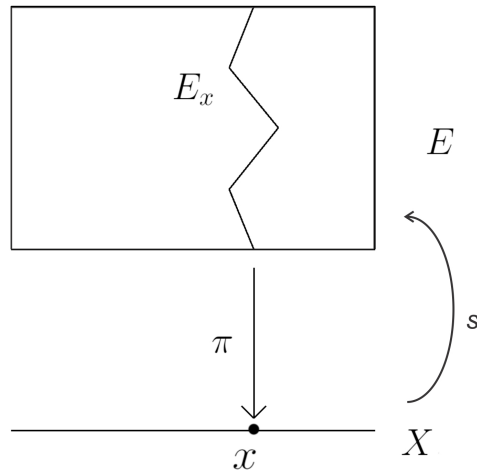


Figura 1.8: Sección de un haz vectorial

**Ejemplo 1.7.1.** Un caso trivial es tomar la función

$$\begin{aligned} s : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto s(x) = \vec{0} \in E_x \end{aligned}$$

donde  $\vec{0}_x$  es el neutro del espacio vectorial  $E_x$ . Ésta es llamada sección trivial o sección cero.

★

Sea  $\zeta = (E, \pi, X)$  un haz vectorial y sea  $s$  una sección

$$\begin{aligned} s : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto s(x) \in E_x \end{aligned}$$

Si  $U$  es un dominio de trivialización de  $X$  via  $\phi : E|_U \xrightarrow{\approx} U \times M$ , para  $x \in X$  existe un morfismo  $U \rightarrow U \times M$  definido como  $x \mapsto (x, s_1(x))$  donde  $s_1 = \phi \circ s : U \rightarrow M$  tal que hace conmutar el siguiente dirgrama

$$\begin{array}{ccc} E|_U & \xrightarrow{\phi} & U \times M \\ s \downarrow & \nearrow \phi' & \\ U & & \end{array}$$

Luego si  $E = X \times M$  es el haz trivial se define la sección como

$$\begin{aligned} s : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto (x, s_1(x)) \end{aligned}$$

donde  $s_1 : X \rightarrow M$  es una función continua. Recíprocamente, dada una función continua  $s_1 : X \rightarrow M$ , podemos construir la sección

$$\begin{aligned} s : X &\longrightarrow X \times M \\ x &\longmapsto (x, s_1(x)) \end{aligned}$$

la cual es continua porque en la primera entrada es la identidad de  $X$  y en la segunda es la función  $s_1$ .

**Definición 1.7.2.** Consideremos un conjunto de  $n$  secciones continuas del haz vectorial  $E$  sobre  $X$ , esto es,  $\{s_i : X \rightarrow E \mid s_i \text{ es una sección continua}\}_{i=1}^n$ . Las secciones son llamadas **linealmente independientes** si  $s_1(x), \dots, s_n(x)$  son linealmente independientes en cada punto  $x \in X$ .

**Ejemplo 1.7.3.** Consideremos el haz vectorial  $E = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{S}^1$ . Veamos cuántas secciones linealmente independientes puede tener el haz vectorial  $E$ . Sea

$$\begin{aligned} s : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ z &\longmapsto (z, s_1(z)) \end{aligned}$$

donde  $s_1(z) \neq 0$  para toda  $z \in \mathbb{S}^1$ . Esta sección es linealmente independiente ya que  $E_z \approx \mathbb{R}$  y estamos tomando un vector  $s_1(z) \in \mathbb{R}$ . Ahora consideremos  $s' : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  donde  $z \mapsto (z, s_2(z))$ , ahora tenemos  $s_1(z), s_2(z) \in E_z$ , pero este es un espacio vectorial de dimensión uno, así que  $\{s_1(z), s_2(z)\}$  es linealmente dependiente y este haz vectorial sólo puede tener una sección linealmente independiente.

★

**Observación. 1.7.4.** Consideremos  $s_1, s_2, \dots, s_n$  secciones continuas del haz vectorial  $E$  sobre  $X$ , y consideremos la siguiente función continua

$$\begin{aligned}\alpha : X \times k^n &\longrightarrow E \\ (x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i(x)\end{aligned}$$

donde  $x \in X$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$  y la suma está en el espacio vectorial  $E_x$ . Si el rango de  $E$  es igual a  $n$ , entonces  $\alpha$  es un isomorfismo de haces ya que  $\alpha$  es continua y para cada  $x \in X$

$$\alpha_x : k^n \xrightarrow{\approx} E_x$$

es un isomorfismo.

De igual manera si  $\alpha : X \times k^n \longrightarrow E$  es un isomorfismo, tenemos los isomorfismos  $\alpha_x : k^n \longrightarrow E_x$  para cada  $x \in X$ . Como  $k^n$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ , entonces existen  $u_1, \dots, u_n \in k^n$  vectores linealmente independientes que son una base. Sabemos que  $E_x$  tiene dimensión  $n$ , así  $\alpha_x(u_1), \dots, \alpha_x(u_n)$  son base de  $E_x$  para cada  $x \in X$ . Así definimos las funciones  $s_i : X \longrightarrow E$  donde  $s_i(x) = \alpha_x(u_i)$  para  $i = 1, \dots, n$  y  $x \in X$ , más aún, son continuas ya que  $\alpha$  es continua. También  $\pi \circ s_i = \text{Id}$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , entonces  $s_i$  es sección de  $E$ . El conjunto  $\{s_1, \dots, s_n\}$  es linealmente independiente, ya que  $\{s_1(x), \dots, s_n(x)\} = \{\alpha_x(u_1), \dots, \alpha_x(u_n)\}$  y éste es linealmente independiente para cada  $x \in X$ .

**Ejemplo 1.7.5.** Sea  $\mathbb{S}^n$  la  $n$ -esfera unitaria en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , y sea  $T\mathbb{S}^n = \{(x, v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$  el haz tangente con proyección  $\pi = \text{pr}_1|_{T\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ . Además, como  $\dim_{\mathbb{R}}(\langle x \rangle) = 1$  se tiene que  $\dim_{\mathbb{R}}(\langle x \rangle^\perp) = n$  y por lo tanto  $T_x\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n$ . Una sección sobre  $T_x\mathbb{S}^n$  es de la forma

$$\begin{aligned}s : \mathbb{S}^n &\longrightarrow T\mathbb{S}^n \\ x &\longmapsto (x, v)\end{aligned}$$

donde  $v \in T_x\mathbb{S}^n$  y  $\langle v, x \rangle = 0$ .

★

Existen diferentes herramientas para saber cuantas secciones linealmente independientes de  $T\mathbb{S}^n$  se pueden definir. Si deseamos estudiar el número de secciones linealmente independientes sobre  $\mathbb{S}^n$  podemos utilizar herramientas de geometría diferencial tales como el Teorema de Poncaré-Hopf y la característica de Euler. Para ello veremos dos casos.

Caso  $n$  par. Del capítulo 2 de [15] se sigue que la característica de Euler de la esfera  $\mathbb{S}^n$  es

$$\chi(\mathbb{S}^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H_k(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z})$$

donde  $H_k(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z})$  es el  $k$ -ésimo grupo de homología. Como  $H_k(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) = 1$  para  $k = 0, n$  y  $H_k(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) = 0$  para  $k \neq 0, n$  se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H_k(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) &= 1 + (-1)^n \\ &= 2 \text{ ya que } n \text{ es par.} \end{aligned}$$

Por otro lado, cada sección  $s : \mathbb{S}^n \rightarrow T\mathbb{S}^n$  define un campo vectorial ya que a cada punto  $x \in \mathbb{S}^n$  le asociamos un vector  $v \in T_x \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $\langle x, v \rangle = 0$ . Utilizando el Teorema de Poincaré-Hopf ([15]) se tiene

$$\sum \text{ind}_{x_i}(s) = \chi(\mathbb{S}^n) = 2 \neq 0$$

de modo que existe  $x \in \mathbb{S}^n$  tal que  $s(x) = 0$ , entonces no existen secciones linealmente independientes en  $T\mathbb{S}^n$  para  $n$  par.

Caso  $n$  impar. Como  $n$  es impar entonces  $n = 2m - 1$  para algún  $m \in \mathbb{Z}$ , además como  $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^{2m-1} \subset \mathbb{R}^{2m}$  se tiene que cualquier  $x \in \mathbb{S}^n$  es de la forma  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2m})$ . Siempre es posible construir una sección linealmente independiente de  $T\mathbb{S}^n$ . Entonces consideremos la siguiente función continua

$$\begin{aligned} s : \mathbb{S}^n &\rightarrow T\mathbb{S}^n \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_{2m}) &\mapsto (x, v) \end{aligned}$$

donde  $v = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2m}, -x_{2m-1}) \in E_x$ . Notemos que  $\langle x, v \rangle = 0$ , ya que

$$\begin{aligned} \langle x, v \rangle &= x_1 x_2 - x_1 x_2 + \dots + x_{2m-1} x_{2m} - x_{2m-1} x_{2m} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De modo que  $v \in T_x \mathbb{S}^{2m-1}$  con  $v \neq 0$ , para toda  $x \in \mathbb{S}^{2m-1}$ , entonces  $s$  es una sección linealmente independiente sobre  $T\mathbb{S}^n$ .

**Ejemplo 1.7.6.** Caso  $n = 1$ . Sea  $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{S}^1$ , vemos que

$$\begin{aligned} s : \mathbb{S}^1 &\rightarrow T\mathbb{S}^1 \\ x_1 + ix_2 &\mapsto (x_1 + ix_2, ix_2 - x_1) \end{aligned}$$

es una sección sobre  $T\mathbb{S}^1$ . En efecto, sea  $x_1 + ix_2 \in \mathbb{S}^1$  entonces

$$\begin{aligned} (\pi \circ s)(x_1 + ix_2) &= \pi(x_1 + ix_2, ix_2 - x_1) \\ &= x_1 + ix_2 \end{aligned}$$

## Capítulo 1

---

esto es,  $\pi \circ s = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$  y también tenemos que

$$\begin{aligned}\langle x_1 + ix_2, ix_2, x_1 \rangle &= ix_1x_2 - ix_1x_2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto  $s$  es una sección no nula para  $\mathbb{S}^1$ .

★

**Ejemplo 1.7.7.** Caso  $n = 3$ . Sea  $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \in \mathbb{S}^3$ , y consideremos las secciones

$$\begin{aligned}s_1(x) &= ix = -x_2 + ix_1 - jx_3 + kx_4 \\ s_2(x) &= jx = -x_3 + ix_4 + jx_1 - kx_2 \\ s_3(x) &= kx = -x_4 - ix_3 + jx_2 + kx_1\end{aligned}$$

donde es fácil verificar que  $s_1, s_2, s_3$  son linealmente independientes. Así tenemos tres secciones linealmente independientes sobre  $\mathbb{S}^3$ .

★

Sea  $\rho(n)$  = número de secciones linealmente independientes en  $\mathbb{S}^n$ . De resultados del capítulo 5 de [16] se obtiene la siguiente tabla

| n         | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 10 |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $\rho(n)$ | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 | 7 | 1 | 0  |

así que tenemos que  $\alpha : \mathbb{S}^n \times k^n \longrightarrow T\mathbb{S}^n$  es un isomorfismo para  $n = 1, 3, 7$ .

### 1.7.1. Espacio de secciones

**Definición 1.7.8.** Sea  $\zeta = (E, \pi, X)$  un haz vectorial. Denotamos por

$$\Gamma(X, E) = \{s : X \longrightarrow E \mid \pi \circ s = \text{Id}_X, s \text{ es continua}\}$$

el **espacio de secciones** de  $E$ .

Tenemos que  $\Gamma(X, E)$  es un  $k$ -espacio vectorial definiendo la suma para  $s, f \in \Gamma(X, E)$  como

$$(s + f)(x) = s(x) + f(x)$$

y el producto para  $s \in \Gamma(X, E)$  y  $\lambda \in k$  como

$$(\lambda s)(x) = \lambda s(x)$$



**Ejemplo 1.7.9.** Consideremos  $X = \mathbb{S}^1$  y  $E = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  un haz trivial, tenemos que

$$\Gamma(X, E) \cong \text{Map}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$$

donde  $\text{Map}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$  es el espacio de funciones continuas  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , o bien, es equivalente a una función  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  que es  $2\pi$ -periódica.

★

Sea  $\iota : Y \rightarrow X$  una función continua, entonces tenemos una aplicación  $k$ -lineal

$$\begin{aligned} \Gamma(X, E) &\longrightarrow \Gamma(Y, \iota^*(E)) \\ (s : X \longrightarrow E) &\longmapsto (\tilde{s} : Y \longrightarrow Y \times_X E) \\ &\quad (y \longmapsto (y, (s \circ \iota)(y))) \end{aligned}$$

Consideremos  $\iota : Y \rightarrow X$  la inclusión. En este caso  $\iota^*(E) = E|_Y$  así tenemos una aplicación

$$\begin{aligned} \Gamma(X, E) &\longrightarrow \Gamma(Y, E|_Y) \\ (s : X \longrightarrow E) &\longmapsto (\tilde{s} = s|_Y : Y \longrightarrow E|_Y) \end{aligned}$$

Notemos que la aplicación no siempre es sobreyectiva, esto se ejemplifica como sigue.

**Ejemplo 1.7.10.** Consideremos  $X = \mathbb{R}$ ,  $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  el haz trivial y  $Y = \mathbb{R} - \{0\}$ . Entonces una aplicación

$$F : \Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R})$$

que es equivalente a dar una aplicación  $F' : \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Map}(\mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{R})$ . Consideremos  $f(x) = 1/x$  con  $f \in \text{Map}(\mathbb{R} - \{0\}, \mathbb{R})$  y notemos que no existe función continua  $g \in \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tal que  $F'(g) = f$  ya que  $f$  no está definida en 0.

★

**Teorema 1.7.11.** Si  $X$  es paracompacto y  $Y \subset X$  es un subespacio cerrado, entonces la aplicación restricción

$$\eta : \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(Y, E|_Y)$$

es sobreyectiva.

Esta demostración la veremos en tres partes:

1. Si  $E$  es un haz trivial, es decir,  $E = X \times M$ ;
2. Si  $E$  es isomorfo a un haz trivial, esto es,  $E \cong X \times M$ ;
3. Caso El caso general.

**Demostración.**

Caso  $E$  es un haz trivial. Sea  $E = X \times M$ , entonces tenemos que  $\Gamma(X, X \times M) \cong \text{Map}(X, M)$ , así para una sección  $s \in \text{Map}(X, M)$  es de la forma  $s(x) = (x, s_1(x))$ . Recordemos el Teorema de Tietze

**Teorema 1.7.12.** *Si  $X$  es un espacio topológico normal y  $f : Y \rightarrow M$  es una función continua donde  $Y \subset X$  cerrado. Entonces existe una función continua  $F : X \rightarrow M$  tal que  $F(a) = f(a)$  para toda  $a \in Y$ .*

Como  $X$  es paracompacto y Hausdorff, entonces  $X$  es normal. Para una función continua  $f : Y \rightarrow M$  tenemos que existe una función  $F : X \rightarrow M$  continua. De modo que para una sección  $s \in \Gamma(Y, Y \times M)$ , definida por  $x \mapsto (x, s_1(x))$ , existe  $S \in \Gamma(X, X \times M)$  tal que  $S(x) = (x, s_1(x))$  para toda  $x \in Y$ . Por lo tanto  $\eta$  es sobreyectiva.

Caso  $E$  es isomorfo a un haz trivial. Supongamos  $\varphi : E \rightarrow X \times M$  es un isomorfismo, entonces tenemos un isomorfismo

$$\varphi' : \Gamma(X, E) \rightarrow \Gamma(X, X \times M)$$

De tal manera que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, E) & \xrightarrow[\cong]{\varphi'} & \Gamma(X, X \times M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(Y, E_Y) & \xrightarrow[\cong]{(\varphi|_Y)'} & \Gamma(Y, Y \times M) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{\quad} & (\varphi \circ s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ s|_Y & \xrightarrow{\quad} & \varphi \circ s|_Y = (\varphi \circ s)|_Y \end{array}$$

Utilizando el caso anterior, sea  $f \in \Gamma(X, E_Y)$  vemos que para  $(\varphi|_Y)'(f) \in \Gamma(Y, Y \times M)$  existe  $F \in \Gamma(X, X \times M)$  tal que  $F(x) = (\varphi|_Y)'(f)(x) = (\varphi|_Y \circ f)(x)$  para toda  $x \in Y$ . Así  $(\varphi')^{-1}(F) \in \Gamma(X \times E)$  y cumple que

$$\begin{aligned} (\varphi')^{-1}(F)(x) &= (\varphi^{-1} \circ F)(x) \\ &= \varphi^{-1} \circ (\varphi|_Y \circ f)(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

para toda  $x \in Y$ . Por lo tanto  $\eta$  es sobreyectiva.

Caso general. Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  una cubierta de trivialización para  $\zeta$ . Debido a que  $X$  es paracompacto podemos suponer que  $\{U_i\}_{i \in I}$  es localmente finita. Así tenemos que  $E|_{U_i} \cong U_i \times M$  para cada  $i \in I$ . Debido a que  $X$  es normal existe  $\{V_i\}_{i \in I}$  una cubierta

abierta de  $X$  tal que  $\overline{V}_i \subset U_i$ , de esta manera definimos  $T_i = \overline{V}_i \cap Y$  para cada  $i \in I$ .

Sea  $t : Y \longrightarrow E|_Y$  una sección. Veremos que a partir de una sección  $t$  restringida a cada  $T_i$  definiremos secciones  $s_i$  sobre  $\overline{V}_i \supseteq T_i$ .

Como  $\overline{V}_i \subset U_i$  se tiene que  $E|_{\overline{V}_i}$  es isomorfo a un haz trivial. Luego como  $T_i = \overline{V}_i \cap Y$  es cerrado, existe una sección  $s_i : \overline{V}_i \longrightarrow E|_{\overline{V}_i}$  tal que

$$s_i|_{T_i = \overline{V}_i \cap Y} = t|_{T_i}$$

por el segundo inciso. Como esto se cumple para cada  $i \in I$ , tenemos una familia de secciones  $s_i : \overline{V}_i \longrightarrow E|_{\overline{V}_i}$ .

Sea  $\{\alpha_i : X \longrightarrow [0, 1]\}_{i \in I}$  una partición de la unidad subordinada a la cubierta  $\{V_i\}_{i \in I}$ , es decir que,

$$\text{supp}(\alpha_i) = \overline{\{x \in X | \alpha_i(x) \neq 0\}} \subseteq V_i$$

Donde para cada  $x \in X$  existe una vecindad en que sólo un número finito de  $\alpha_i$ 's son diferentes de cero y

$$\sum_{i \in I} \alpha_i(x) = 1$$

Sea  $s'_i : X \longrightarrow E$  dado por

$$s'_i(x) = \begin{cases} \alpha_i(x)s_i(x) & \text{si } x \in \overline{V}_i \\ 0 & \text{si } x \notin \overline{V}_i \end{cases}$$

las cuales son continuas y no idénticamente cero en un número finito de  $V_i$ 's. Definimos  $s : X \longrightarrow E$  una sección de  $\zeta$  por

$$s(x) = \sum_{i \in I} s'_i(x)$$

La continuidad se sigue del hecho de que para cada  $x \in X$  hay una cantidad finita de  $V_i$ 's donde  $s'_i$  son no idénticamente cero, es decir, la suma sobre un número finito de términos.

Además, para  $x \in Y$

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i \in I} \alpha_i(x)s_i(x) \\ &= \sum_{i \in I} \alpha_i(x)t(x) \\ &= t(x) \sum_{i \in I} (\alpha_i(x)) \\ &= t(x) \end{aligned}$$

■

**Teorema 1.7.13.** *Los funtores*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k^{op}(X) \times \mathcal{E}_k(X) &\longrightarrow \text{Vect} \\ (E, F) &\longmapsto \text{Hom}(E, F) \\ (E, F) &\longmapsto \Gamma(X, \text{Hom}(E, F))\end{aligned}$$

*son isomorfos.*

**Demostración.** Veamos que  $\text{Hom}(E, F) \xrightarrow{\cong} \Gamma(X, \text{Hom}(E, F))$ . Sea  $\alpha \in \text{Hom}(E, F)$ , entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha} & F \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

Demostremos que  $\alpha$  es continua y que para cada  $x \in X$ ,  $\alpha_x : E_x \longrightarrow F_x$  es lineal. Consideremos  $s \in \Gamma(X, \text{Hom}(E, F))$ , entonces  $s(x) \in \text{Hom}(E, F)_x \cong \text{Hom}(E_x, F_x)$ , por lo tanto  $s(x) : E_x \longrightarrow F_x$  es lineal, así tenemos que

$$\begin{aligned}\text{Hom}(E, F) &\longrightarrow \Gamma(X, \text{Hom}(E, F)) \\ (\alpha : E \longrightarrow F) &\longmapsto (s : X \longrightarrow \text{Hom}(E, F)) \\ &x \longmapsto s(x) = \alpha_x : E_x \longrightarrow F_x\end{aligned}$$

Mostremos que  $s : X \longrightarrow \text{Hom}(E, F)$  es continua. Sea  $U$  un dominio de trivialización para  $E$  y  $F$ , consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times M & \xrightarrow{\hat{g}} & U \times N \\ \beta \uparrow \cong & & \cong \uparrow \gamma \\ E|_U & \xrightarrow{\alpha|_U} & F|_U \end{array}$$

con  $\hat{g} : U \times M \longrightarrow U \times N$  definido por  $\hat{g} = \gamma \circ \alpha|_U \circ \beta^{-1}$ . Por el Teorema 1.1.10 existe  $g : U \longrightarrow \mathcal{L}(M, N)$  continua. De modo que podemos identificar  $g$  con  $s|_U(x) = (x, g(x))$  la cual es continua.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(E, F) & \longrightarrow & U \times \mathcal{L}(M, N) \\ \downarrow & \nearrow s & \\ U & & \end{array}$$

El recíproco es análogo. ■

**Proposición 1.7.14.** *Sean  $E$  y  $F$  haces sobre  $X$  y  $Y$ , con  $Y \subset X$  cerrado y para-compacto tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} E|_Y & \xrightarrow{\alpha_Y} & F|_Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

donde  $\alpha_Y$  es un morfismo de haces vectoriales. Entonces existe  $\alpha : E \rightarrow F$  tal que  $\alpha|_Y = \alpha_Y$ . ( $\alpha$  es una extensión de  $\alpha_Y$  a  $X$ ).

**Demostración.** Utilizando el Teorema 1.7.13 y por hipótesis  $Y \subset X$  es cerrado, para  $x \in \Gamma(Y, \text{Hom}(E|_Y, F|_Y)) \cong \text{Hom}(E|_Y, F|_Y)$ . Entonces por el Teorema 1.7.11 existe  $\alpha \in \Gamma(X, \text{Hom}(E, F)) \cong \text{Hom}(E, F)$ , donde  $\alpha|_Y = \alpha_Y$ . ■

La condición de que  $Y$  sea cerrado en  $X$  es necesaria ya que puede ocurrir lo siguiente.

**Ejemplo 1.7.15.** Consideremos  $X = \mathbb{S}^1$ ,  $Y = \mathbb{S}^1 - \{1\}$ , y consideramos el haz vectorial  $E = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} / \sim$  sobre  $\mathbb{S}^1$  (la banda de Möbius), donde  $(1, x) \sim (1, -x)$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ . También consideremos  $F = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  como haz vectorial sobre  $X$ . Notemos que existe un isomorfismo  $\alpha_Y : E|_Y \rightarrow F|_Y$  dado por  $\alpha(x, y) = (x, y)$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E|_Y & \xrightarrow{\alpha_Y} & F|_Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

pero no existe un isomorfismo  $\alpha : E \rightarrow F$ . Si suponemos que existe un isomorfismo  $\alpha : E \rightarrow F$ , para  $(1, x) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} / \sim$  se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha(1, x) &= \alpha\left(\left(1, \frac{x}{2}\right) + \left(1, \frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \alpha\left(\left(1, \frac{x}{2}\right) + \left(1, -\frac{x}{2}\right)\right) \text{ ya que } \left(1, \frac{x}{2}\right) \sim \left(1, -\frac{x}{2}\right) \\ &= \alpha(1, 0) = 0 \end{aligned}$$

Esto ocurre para toda  $(1, x) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} / \sim$  con  $x \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto no existe un isomorfismo  $\alpha : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} / \sim \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  ya que  $\mathbb{S}^1 - \{1\}$  es abierto en  $\mathbb{S}^1$ .

★

**Proposición 1.7.16.** Sea  $X$  un espacio paracompacto y Hausdorff,  $Y \subset X$  cerrado y sean  $E$  y  $F$  haces vectoriales definidos sobre  $X$ . Supongamos que  $\alpha_Y : E|_Y \rightarrow F|_Y$  es un isomorfismo, entonces existe un abierto  $V$  de  $Y$  tal que

$$\alpha|_V : E|_V \rightarrow F|_V$$

es un isomorfismo.

**Demostración.** Definimos

$$V = \left\{ x \in X \mid \alpha_x : E_x \xrightarrow{\cong} F_x \text{ es isomorfismo} \right\}$$

donde  $\alpha_x = (\alpha_Y)_x$ , entonces  $Y \subseteq V$  ya que para toda  $x \in Y$  se tiene que  $\alpha_x$  es un isomorfismo.

Mostremos que  $V$  es abierto en  $X$ , sea  $x \in V$ , entonces existe  $W_x$  abierto tal que es dominio de trivialización, es decir,  $E|_Y \cong F|_Y \cong W_x \times k^n$ . De modo que tenemos

$$\begin{array}{ccc} W_x \times k^n & \xrightarrow{\beta_x} & W_x \times k^n \\ \cong \uparrow \varphi & & \psi \uparrow \cong \\ E|_{W_x} & \xrightarrow{\alpha|_{W_x}} & F|_{W_x} \end{array}$$

donde  $\beta = \psi \circ \alpha|_{W_x} \circ (\varphi)^{-1}$ . Por el Teorema 1.1.10 existe

$$\check{\beta}_x : W_x \longrightarrow \mathcal{L}(k^n, k^n)$$

continua. Por lo tanto

$$\begin{aligned} V \cap W_x &= \{ v \in W_x \mid \check{\beta}_x(x) \in \text{Iso}(k^n, k^n) \} \\ &= (\check{\beta}_x)^{-1}(\text{Iso}(k^n, k^n)) \end{aligned}$$

como  $\text{Iso}(k^n, k^n)$  es abierto y  $\check{\beta}_x$  es continua, tenemos que  $V \cap W_x$  es abierto en  $W_x$ . Como  $W_x$  es abierto en  $X$ , tenemos que  $V \cap W_x$  es abierto en  $X$  para cada  $x \in X$ . Por lo tanto  $V = \bigcup_{x \in V} W_x \cap V$  es abierto en  $X$ .

Finalmente  $\alpha|_V : E|_V \longrightarrow F|_V$  es isomorfismo donde la continuidad se da por la restricción al abierto  $V$ . Como es biyectiva fibra a fibra tenemos que  $\alpha|_V = \alpha_Y$ .

■

**Proposición 1.7.17.** *Sea  $X$  un espacio topológico paracompacto,  $\alpha : E \longrightarrow F$  un morfismo entre haces vectoriales  $E$  y  $F$  sobre  $X$ . Si  $\alpha_x : E_x \longrightarrow F_x$  es sobreyectiva para cada  $x \in X$ , entonces existe un morfismo  $\beta : F \longrightarrow E$  tal que  $\alpha \circ \beta : F \longrightarrow F$  es la identidad.*

**Demostración.** Sea  $x \in X$  y sea  $U$  un dominio de trivialización para  $E$  y  $F$ , entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times N & \xrightarrow{\hat{\theta}} & U \times M \\ \cong \uparrow & & \psi \uparrow \cong \\ E|_U & \xrightarrow[\varphi]{\alpha|_U} & F|_U \end{array}$$

donde  $\hat{\theta} = \psi \circ \alpha|_U \circ (\varphi)^{-1}$ , entonces por el Teorema 1.1.10 existe  $\theta : U \rightarrow \mathcal{L}(M, N)$  continua. De modo que para  $x \in U$  se tiene que  $\theta(x) : M \rightarrow N$  es sobreyectiva. Así podemos reescribir

$$M = N \oplus \text{Ker } \theta(x)$$

luego, para  $y \in U$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \theta(y) : N \oplus \text{Ker } \theta(x) &\longrightarrow N \\ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \theta_1(y) & \theta_2(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde  $\begin{pmatrix} \theta_1(y) & \theta_2(y) \end{pmatrix}$  es la matriz asociada a la transformación  $\theta(y)$  y  $\theta_1, \theta_2$  funciones continuas.

Observemos que si  $y = x$  se tiene que  $\theta_1(x) = \text{Id}$  y  $\theta_2(x) = 0$ .

Luego como  $\theta_1 : U \rightarrow \text{Aut}(N) \subset \text{End}(N)$  es continua, definimos

$$V_x = \theta_1^{-1}(\text{Aut}(N)) \subset U$$

el cual es abierto. Sea  $\theta'_x : V_x \rightarrow \mathcal{E}(N, M)$  representado por

$$\begin{pmatrix} \theta_1(y)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

la cual es continua, de modo que tenemos

$$\begin{array}{ccc} V_x \times N & \xrightarrow{\hat{\theta}'_x} & V_x \times M \\ \psi \uparrow \cong & & \cong \uparrow \varphi \\ F|_{V_x} & \xrightarrow{\beta|_{V_x}} & E|_{V_x} \end{array}$$

donde  $\alpha|_{V_x} \circ \beta|_{V_x} = \text{Id}|_{F|_{V_x}}$ .

Variando  $x \in X$ , tomamos una cubierta abierta localmente finita  $\{V_i\}$  de  $X$  y sus respectivos morfismos

$$\beta_{V_i} : F|_{V_i} \rightarrow E|_{V_i}$$

tal que

$$\alpha|_{V_i} \circ \beta|_{V_i} = \text{Id}|_{F|_{V_i}}.$$

Sea  $(\eta_i)$  una partición de la unidad subordinada a  $V_i$  y

$$\begin{aligned} \beta : F &\longrightarrow E \\ e &\longmapsto \sum_{i \in I, e \in E_x} \eta_i(x) \beta_i(e) \end{aligned}$$

donde  $\eta_i(x)\beta_i(e)$  es continua, y para cada  $x \in X$  la suma es finita, entonces  $\beta$  es continua.

Además

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta)(e) &= \sum_{i \in I} \eta_i(x)(\alpha \circ \beta_i)(e) \\ &= \sum_{i \in I} \eta_i(x)e \\ &= e \end{aligned}$$

■

**Proposición 1.7.18.** *Sea  $E$  un haz vectorial sobre un espacio compacto  $X$ . Entonces existe un haz vectorial  $E'$  tal que  $E \oplus E'$  es isomorfo a un haz trivial.*

**Demostración.** Sea  $\{U_i\}_{i=1}^r$  una cubierta abierta finita de  $X$  tal que  $E_{U_i} \approx U_i \times k^{n_i}$  y sea  $\eta_i$  una partición de la unidad asociada a  $\{U_i\}_{i=1}^r$ . De acuerdo con la observación 1.7.4 existen  $n_i$  secciones linealmente independientes  $s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^{n_i}$  de  $E_{U_i}$ .

Consideremos las extensiones  $\eta_i s_i^1, \dots, \eta_i s_i^{n_i}$  donde

$$\eta_i s_i^j(x) = \begin{cases} \eta_i(x) s_i^j(x) & \text{si } x \in U_i \\ 0 & \text{si } x \notin U_i \end{cases}$$

con  $j = 1, \dots, n_i$ . Las cuales son continuas y tenemos que ver que sean linealmente independientes en  $E_{V_i}$ , donde  $U_i \supset V_i = \eta^{-1}(0, 1]$ , para  $i = 1, \dots, r$ .

Tenemos que  $\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j (\eta_i s_i^j)(x) = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j \eta_i(x) s_i^j(x)$  con  $\lambda_i \in k$ , es linealmente independiente en  $E_{V_i}$ , ya que  $\{s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^{n_i}\}$  es linealmente independiente.

Sea  $\alpha_i^j = \eta_i s_i^j : X \longrightarrow E$ . Entonces los vectores  $\alpha_i^j(x)$  generan a  $E_x$  como espacio vectorial y por observación 1.7.4 tenemos el morfismo

$$\alpha : T = X \times k^n \longrightarrow E$$

con  $n = \sum_{i=1}^r n_i$ , tal que  $\alpha_x : T_x \longrightarrow E_x$  es sobreyectivo en cada  $x \in X$ . De acuerdo con la Proposición 1.7.17 existe un morfismo  $\beta : E \longrightarrow T$  tal que  $\alpha \circ \beta = \text{Id}_E$ . Notemos que  $p = \beta \circ \alpha$  es una proyección ya que

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha) \circ (\beta \circ \alpha) &= \beta \circ (\alpha \circ \beta) \circ \alpha \\ &= \beta \circ \text{Id}_E \circ \alpha \\ &= \beta \circ \alpha \end{aligned}$$

Sea  $E'$  el kernel de  $p$ . Como  $\mathcal{E}(X)$  es una categoría aditiva (Se demostrará más adelante en Lema 3.1.11) y  $E \approx \text{Ker}(1 - p)$  entonces  $T = E \oplus E'$

■



# Capítulo 2

## Teoría de homotopía de haces vectoriales

### 2.1. Homotopía

Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  conjuntos, definimos la proyección natural en la  $i$ -ésima entrada por

$$\begin{aligned} \text{pr}_i : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_n &\longrightarrow A_i \\ (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) &\longmapsto a_i \end{aligned}$$

notemos que si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son espacios topológicos y  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_n$  tiene la topología producto, la proyección natural en la  $i$ -ésima entrada es una función continua.

**Teorema 2.1.1.** *Sea  $X$  un espacio compacto y sea  $E$  un haz vectorial sobre  $X \times I$  con proyección  $\pi : E \longrightarrow X \times I$ , donde  $I = [0, 1]$ . Sean*

$$\begin{aligned} \alpha_t : X &\longrightarrow X \times I \\ x &\longmapsto (x, t) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \kappa : X \times I &\longrightarrow X \\ (x, u) &\longmapsto x \end{aligned}$$

así para cada  $t \in I$  tenemos un haz vectorial  $E_0 = \alpha_0^*(E)$  sobre  $X$ . De las hipótesis se sigue que existe  $E_t = \alpha_t^*(E) = \{(x, e) \in X \times E \mid \alpha_t(x) = \pi(e)\}$  para toda  $t \in [0, 1]$ .

$$\begin{array}{ccc} E_t = \alpha_t^*(E) & & E \\ \downarrow \text{pr}_1|_{E_t} & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\alpha_t} & X \times I \end{array}$$

Entonces los haces vectoriales  $E_0 = \alpha_0^*(E)$  y  $E_1 = \alpha_1^*(E)$  son isomorfos donde  $\alpha_t^*(E)$  es el haz vectorial inducido por  $\alpha_t : X \longrightarrow X \times I$  definido en 1.1.12.

**Demostración.** Demostraremos que  $\kappa^*(E_{t_0})|_{X \times \{t_0\}} \cong E|_{X \times \{t_0\}}$ . Para cada  $t_0 \in I$  tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \kappa^*(E_{t_0}) & \xrightarrow{\text{pr}_2|_{\kappa^*(E_{t_0})}} & E_{t_0} & \longrightarrow & E \\ \text{pr}_1|_{\kappa^*(E_{t_0})} \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1|_{E_{t_0}} & & \downarrow \pi \\ X \times I & \xrightarrow{\kappa} & X & \xrightarrow{\alpha_{t_0}} & X \times I \end{array}$$

donde  $E_{t_0} = \{(x, e) \in X \times E | \alpha_{t_0}(x) = \pi(e)\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \kappa^*(E_{t_0}) &= \{((x, u), (x', e)) \in (X \times I) \times E_{t_0} | \kappa(x, u) = \text{pr}_1(x', e)\} \\ &= \{((x, u), (x', e)) \in (X \times I) \times E_{t_0} | x = x'\} \\ &= \{((x, u), (x, e)) \in (X \times I) \times E_{t_0}\} \\ &= \{((x, u), (x, e)) \in (X \times I) \times (X \times E) | \pi(e) = \alpha_{t_0}(x)\} \\ &= \{((x, u), (x, e)) \in (X \times I) \times (X \times E) | \pi(e) = (x, t_0)\} := A \\ &\cong \{((x, u), e) \in (X \times I) \times E | \pi(e) = (x, t_0)\} := B \end{aligned}$$

Veamos que este último es isomorfismo, esto es,  $A \cong B$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha = \text{pr}_1 \times \text{pr}_2 \times \text{pr}_3 : (X \times I) \times (X \times E) &\longrightarrow (X \times I) \times E \\ ((x, u), (x', e)) &\longmapsto ((x, u), e) \end{aligned}$$

es continua, entonces  $\alpha|_A : A \longrightarrow (X \times I) \times E$  es continua. Dado que  $\alpha(A) \subseteq B$  tenemos que  $\alpha' := \alpha|_A : A \longrightarrow B$  es continua.

Por otra parte

$$\begin{aligned} \beta = \text{pr}_1 \times \text{pr}_2 \times \text{pr}_1 \times \text{pr}_3 : (X \times I) \times E &\longrightarrow (X \times I) \times (X \times E) \\ ((x, u), e) &\longmapsto ((x, u), (x, e)) \end{aligned}$$

es continua, entonces  $\beta|_B : B \longrightarrow (X \times I) \times (X \times E)$  es continua. Dado a que  $\beta(B) \subseteq A$  tenemos que  $\beta' := \beta|_B : B \longrightarrow A$  es continua. Así  $\beta' \circ \alpha' = \text{Id}$  y  $\alpha' \circ \beta' = \text{Id}$ , entonces  $A \cong B$ .

Tomando la restricción en  $X \times \{t_0\}$  nos queda que

$$\begin{aligned} \kappa^*(E_{t_0})|_{X \times \{t_0\}} &= \{((x, u), e) \in (X \times I) \times E | \pi(e) = (x, t_0)\}|_{t_0} \\ &= \{((x, t_0), e) \in (X \times \{t_0\}) \times E | \pi(e) = (x, t_0)\} \\ &= \{(\pi(e), e) \in (X \times \{t_0\}) \times E\} \stackrel{\text{def}}{:=} C \end{aligned}$$

La proyección

$$\begin{aligned} \sigma = \text{pr}_3 : (X \times \{t_0\}) \times E &\longrightarrow E \\ ((x, t_0), e) &\longmapsto e \end{aligned}$$

es continua, entonces la restricción  $\sigma|_C : C \times E \longrightarrow E$  es continua. Dado que  $\sigma(C) \subseteq E|_{X \times \{t_0\}}$  tenemos que  $\sigma' := \sigma|_C : C \longrightarrow E \times \{t_0\}$  es continua.

Por otra parte, consideremos la función continua

$$\begin{aligned} \tau = \pi \times \text{Id} : E &\longrightarrow (X \times I) \times E \\ e &\longmapsto (\pi(e), e) \end{aligned}$$

Dado que  $\pi(e)$  es de la forma  $(x, t_0)$  para toda  $x \in X$  entonces  $\tau(E|_{X \times \{t_0\}}) \subset C$ , así  $\tau' = \tau|_{E|_{X \times \{t_0\}}} : E|_{X \times \{t_0\}} \longrightarrow C$  es continua. Notemos que  $\tau' \circ \sigma' = \text{Id}$  y  $\sigma' \circ \tau' = \text{Id}$ , de modo que  $E|_{X \times \{t_0\}} \cong C$  y por lo tanto  $\kappa^*(E_{t_0})|_{t_0} = E|_{X \times \{t_0\}}$ .

Sabemos que  $X \times I$  es compacto, en particular es paracompacto y tenemos que  $X \times \{t\}$  es cerrado en  $X \times I$ , además tenemos un isomorfismo de haces  $\kappa^*(E_{t_0})|_{X \times \{t_0\}} \xrightarrow{\cong} E|_{X \times \{t_0\}}$ , entonces por la Proposición 1.7.16 existe una vecindad abierta  $V$  en  $X \times I$  con  $X \times \{t\} \subseteq V$  tal que

$$E|_V \xrightarrow{\cong} \kappa^*(E_t)|_V.$$

Notemos que  $V$  contiene un conjunto de la forma  $X \times U$  donde  $U$  es una vecindad de  $t \in I$ . Como  $V$  es abierto, se puede expresar como unión de abiertos, así  $V = \bigcup_{j \in J} (U_j \times V_j)$  donde  $U_j$  es abierto en  $X$  y  $V_j$  es abierto en  $I$  para cada  $j \in J$ . Como  $X \times \{t\}$  es compacto, y

$$X \times \{t\} \subseteq V = \bigcup_{j \in J} (U_j \times V_j)$$

entonces existe una subcubierta finita  $\{U_j \times V_j\}_{j=1}^n$  tal que  $V \supseteq \{U_j \times V_j\}_{j=1}^n \supseteq X \times \{t\}$ . Sea  $V' = \bigcap_{j=1}^n V_j$ , entonces  $V'$  es abierto en  $I$  y además

$$X \times \{t\} \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j \times V' \subseteq \bigcup_{j=1}^n (U_j \times V_j) \subseteq V$$

por lo tanto  $V'$  es una vecindad de  $t \in I$ , así dado  $t_0 \in I$  existe una vecindad  $V'$  de  $t_0$  tal que

$$\kappa^*(E)|_{X \times V'} \cong E|_{X \times V'}$$

Notemos que para cada  $t_0 \in I$  fijo existe una vecindad  $U$  de  $t_0$  tal que  $E_{u_0} \cong E_{t_0}$  para cada  $u_0 \in U$ .

En efecto, para cada  $u_0 \in U$  tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} E_{u_0} & \xrightarrow[\cong]{\text{pr}_2} & E|_{X \times \{u_0\}} & \xrightarrow[\cong]{\text{pr}_2} & \kappa^*(E_{t_0})|_{X \times \{u_0\}} & \xrightarrow[\cong]{} & E_{t_0} \\ \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \pi & & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \text{pr}_1 \\ X & \xrightarrow{\alpha_{u_0}} & X \times \{u_0\} & \xlongequal{\quad} & X \times \{u_0\} & \xrightarrow{\kappa} & X \end{array}$$

note que los morfismos  $\text{pr}_2$  son isomorfismos pues

$$E_{u_0} = \{(x, e) \in X \times E | \pi(e) = (x, u_0)\} \xrightarrow{\cong} E|_{X \times \{u_0\}}$$

y

$$\kappa^*(E_{t_0})|_{X \times u_0} = \{((x, u_0), (x, e)) \in (X \times \{u_0\}) \times E_{t_0}\} \xrightarrow{\cong} E_{t_0}$$

Tenemos que  $E_{u_0} \cong E_{t_0}$  para todo  $u \in U$  donde  $t_0 \in U$  y dado que  $I$  es compacto y conexo por lo tanto  $E_0 \cong E_1$ .

■

**Teorema 2.1.2.** *Sea  $X$  un espacio compacto y sea  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  funciones continuas y homotópicas. Si  $E$  es un haz sobre  $Y$  entonces los haces  $f_0^*(E)$  y  $f_1^*(E)$  son isomorfos.*

**Demostración.** Por hipótesis tenemos que existe  $F : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f_0(x)$  y  $F(x, 1) = f_1(x)$  para toda  $x \in X$ . Definamos  $f_t = F \circ \alpha_t$  donde

$$\begin{aligned} \alpha_t : X &\longrightarrow X \times I \\ x &\longmapsto (x, t) \end{aligned}$$

de tal manera que  $F \circ \alpha_0 = f_0$  y  $F \circ \alpha_1 = f_1$ . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times I & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

por el Teorema 2.1.1 se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_0^*(F^*(E)) &\cong \alpha_1^*(F^*(E)) \\ (F \circ \alpha_0)^*(E) &\cong (F \circ \alpha_1)^*(E) \\ f_0^*(E) &\cong f_1^*(E). \end{aligned}$$

■

**Teorema 2.1.3.** *Utilizando la notación del Teorema 2.1.1 tenemos que los haces  $E$  y  $\kappa^*(E_0)$  son isomorfos, esquematicamente*

$$\begin{array}{ccccc} & & \cong & & \\ & \searrow & & \swarrow & \\ \kappa^*(E_0) & \longrightarrow & E_0 & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow d \\ X \times I & \xrightarrow{\kappa} & X & \xrightarrow{\alpha_0} & X \times I \\ & & x \longmapsto & & (x, 0) \end{array}$$

**Demostración.** Sea

$$\begin{aligned} p : (X \times I) \times I &\longrightarrow X \times I \\ ((x, t), u) &\longmapsto (x, tu) \end{aligned}$$

tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} E' = p^*(E) & \xrightarrow{\text{pr}_2} & E \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ (X \times I) \times I & \xrightarrow{p} & X \times I \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} E_0 = \alpha_0^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\alpha_0} & X \times I \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} E' &= \{(((x, t), u), e) \in ((X \times I) \times I) \times E \mid \pi(e) = p(x, t, u)\} \\ &= \{(((x, t), u), e) \in ((X \times I) \times I) \times E \mid \pi(e) = (x, tu)\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(x, e) \in X \times E \mid \alpha_0(e) = \pi(e)\} \\ &= \{(x, e) \in X \times E \mid (x, 0) = \pi(e)\} \end{aligned}$$

Considerando el siguiente pull back

$$\begin{array}{ccc} \bar{\alpha}_0^*(E') & \longrightarrow & E' \\ \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{\alpha}_0} & (X \times I) \times I \end{array}$$

$$(x, u) \longmapsto ((x, u), 0)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0^*(E') &= \{(x', u'), ((x, t, u), e) \in (X \times I) \times (((X \times I) \times I) \times E) \mid (x', u', 0) = (x, t, u), \pi(e) = (x, tu)\} \\ &= \{(x', t), ((x, t, 0), e) \in (X \times I) \times (((X \times I) \times I) \times E) \mid \pi(e) = (x, t0) = (x, 0)\} \\ &= \{(x, t, e) \in X \times I \times E \mid \pi(e) = (x, 0)\} \end{aligned}$$

## Capítulo 2

---

Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \kappa^*(E_0) & \longrightarrow & E_0 = \{(x', e) \in X \times E \mid \pi(e) = (x, 0)\} \\ \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ X \times I & \xrightarrow{\kappa} & X \end{array}$$

Entonces nos queda que

$$\begin{aligned} \kappa^*(E_0) &= \{((x, u), (x', e)) \in (X \times I) \times (X \times E) \mid \pi(e) = (x, 0) \text{ y } \kappa(x, u) = \text{pr}_1(x', e)\} \\ &= \{((x, u), (x', e)) \in (X \times I) \times (X \times E) \mid \pi(e) = (x, 0) \text{ y } x = x'\} \\ &= \{((x, u), (x, e)) \in (X \times I) \times (X \times E) \mid \pi(e) = (x, 0)\} \\ &\cong \{(x, u, e) \in X \times I \times E \mid \pi(e) = (x, 0)\} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\kappa^*(E_0) = \bar{\alpha}_0^*(E') \quad (2.1)$$

Por otra parte

$$\begin{array}{ccc} \bar{\alpha}_1^*(E') & \longrightarrow & E \\ \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{\alpha}_1} & (X \times I) \times I \end{array}$$

$$(x, u) \xrightarrow{\bar{\alpha}_1} ((x, u), 1)$$

donde un elemento en  $\bar{\alpha}_1^*(E')$  es de la forma  $((x', u'), (x, t, u, e)) \in (X \times I) \times (X \times I \times I \times E)$  con  $\pi(e) = (x, tu)$  y  $((x', u'), 1) = (x, tu)$ , de aquí tenemos que  $x' = x, u' = t, u = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1^*(E') &= \{((x, t), (x, t, 1, e)) \in (X \times I) \times (X \times I \times I \times E) \mid \pi(e) = (x, t)\} \\ &= \{(x, t, e) \in X \times I \times E \mid \pi(e) = (x, t)\} \\ &= \{(\pi(e), e) \in (X \times I) \times E \mid \pi(e) = (x, t)\} \\ &\cong E \end{aligned}$$

así

$$\bar{\alpha}_1^*(E') \cong E \quad (2.2)$$

Utilizando el Teorema 2.1.1 se tiene que  $\bar{\alpha}_0^*(E') \cong \bar{\alpha}_1^*(E')$ ; luego, de (2.1) y (2.2) tenemos que

$$E \cong \kappa^*(E).$$

■

**Observación. 2.1.4.** Notemos que dado que  $\kappa \circ \alpha_0 = \text{Id}$  tenemos en general que  $(\pi \circ \alpha_0)^*(E) = \text{Id}^*(E) = E$ .

**Teorema 2.1.5.** *Si  $X$  es contraíble y compacto entonces cualquier haz sobre  $X$  es trivial.*

**Demostración.** Sea  $x_0 \in X$ ,  $\iota : X \longrightarrow \{x_0\}$  y  $\rho : \{x_0\} \longrightarrow X$ . Dado que  $X$  es contraíble tenemos que  $\text{Id} : X \longrightarrow X$  y  $\rho \circ \iota : X \longrightarrow X$  son homotópicas. Entonces por el Teorema 2.1.2,

$$E \cong \text{Id}^*(E) \cong (\rho \circ \iota)^*(E) \cong \iota^* \circ \rho^*(E).$$

Considerando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \rho^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{x_0\} & \xrightarrow{\iota} & X \end{array}$$

donde  $\rho^*(E) \cong E_{x_0}$ , además  $E_{x_0}$  es isomorfo a un haz trivial  $\{x_0\} \times M$ , con  $M$  algún espacio vectorial.

Por otra parte  $\iota^*(\rho^*(E))$  es trivial. En efecto, debido que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \iota^*(\rho^*)(E) & \longrightarrow & \rho^*(E) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \longrightarrow & \{x_0\} \end{array}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \iota^*(\rho^*(E)) &= \{(x, v) \in X \times \rho^*(E) \mid \iota(x) = \pi(v)\} \\ &= \{(x, v) \in X \times \rho^*(E) \mid x_0 = x_0\} \\ &= X \times \rho^*(E) \end{aligned}$$

por lo tanto  $E$  es un haz vectorial trivial. ■

En la sección 4 se definió y se demostró en el Teorema 1.4.7 que

$$\begin{aligned} \Lambda : \frac{\pi_{n-1}(\text{GL}_p(k), \text{Id})}{\pi_0(\text{GL}_p(k), \text{Id})} &\longrightarrow \phi_p^k(\mathbb{S}^n) \\ (\pi_0(\text{GL}_p(k), \text{Id}), [f]) &\longmapsto [E_f] \end{aligned}$$

es un morfismo inyectivo. Ahora, generalizaremos este resultado para la suspensión de un espacio topológico  $X$ . Recordemos que la suspensión de  $X$  se define como  $S'(X) = \frac{X \times [-1, 1]}{X \times \{-1\} \cup X \times \{1\}}$  y

$$C^+(X) = \frac{X \times [0, 1]}{X \times \{1\}}$$

$$C^-(X) = \frac{X \times [-1, 0]}{X \times \{-1\}}$$

donde  $S'(X) = C^+(X) \cup C^-(X)$  y  $X \times \{0\} = C^+(X) \cap C^-(X)$ . Note que  $C^+(X)$  y  $C^-(X)$  son cerrados en  $S'(X)$  pues  $\pi^{-1}(C^+(X)) = X \times [1, 0]$ .

Sea  $f : X \rightarrow \text{GL}_p(k)$  una función continua, entonces podemos definir un haz vectorial  $E_f$  sobre  $S'(X)$  pegando los haces triviales  $E_1 = C^+(X) \times k^p$  y  $E_2 = C^-(X) \times k^p$  con la función de transición  $g_{21} = \hat{f}$ .

Para esta generalización debemos ver algunos resultados que anteriormente abordamos para el caso de la esfera unitaria. Ahora, utilizaremos un espacio topológico  $X$  y su suspensión para dichas generalizaciones. Sea  $\lambda : C^+(X) \times k^p \rightarrow C^+(X) \times k^p$  un automorfismo de haces vectoriales, entonces  $\lambda$  induce un isomorfismo de haces vectoriales

$$\mu : E_1|_{X \times \{0\}} \rightarrow E_1|_{X \times \{0\}}$$

donde  $\mu = \lambda|_{X \times \{0\}}$ .

**Lema 2.1.6.** *Los haces vectoriales  $E_f$  y  $E_{f\hat{\mu}}$  son isomorfos.*

Recuerde que  $f : X \times \{0\} \rightarrow \text{GL}_p(k)$  continua induce  $g_{21} : \hat{f} : (X \times \{0\}) \times k^p \rightarrow (X \times \{0\}) \times k^p$  isomorfismo de haces vectoriales.

**Demostración.** Sea  $\lambda_1 = \hat{\lambda} : C^+(X) \rightarrow \text{GL}_p(k)$  y  $\text{Id} : E_2 \rightarrow E_2$ , note que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\lambda^{-1}} & E_1 \\ \downarrow \hat{f} & & \downarrow \hat{f}\mu \\ E_2 & \xrightarrow{\text{Id}} & E_2 \end{array}$$

donde las líneas punteadas denotan morfismos definidos sólo sobre  $X \times \{0\}$ . En efecto, el diagrama conmuta pues para  $(x, 0) \in X \times \{0\}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{f}\mu \circ \lambda^{-1}((x, 0), v) &= \hat{f}\mu \circ \mu^{-1}((x, 0), v) \\ &= \hat{f}((x, 0), v) \\ &= \text{Id} \circ \hat{f}((x, 0), v) \end{aligned}$$

esto es,  $\hat{f}\mu \circ \lambda^{-1} = \text{Id} \circ \hat{f}$  para toda  $((x, 0), v) \in (X \times \{0\}) \times k^p$ , entonces  $\text{Id} \circ \hat{f}\mu \circ \lambda^{-1} = \hat{f}$ , ya que  $f\hat{\mu} : X \times \{0\} \rightarrow \text{GL}_p(k)$  está definida por  $f\hat{\mu}(x, 0) = f(x, 0)\hat{\mu}(x, 0)$ .



Note que  $f(x, 0) = \check{\text{Id}}(x, 0)(f(x, 0)\check{\mu}(x, 0))(\check{\lambda}(x, 0))^{-1}$  para cada  $(x, 0) \in X \times \{0\} = C^+(X) \cap C^-(X)$ . En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{f}(x, v) &= (x, f(x)(v)) = \text{Id} \circ (\hat{f} \circ \mu)\lambda^{-1}(x, v) = \text{Id} \circ (\hat{f} \circ \mu)(x, \lambda_x^{-1}(v)) \\ &= \text{Id} \circ \hat{f} \circ \mu(x, \lambda_x^{-1}(v)) \\ &= \text{Id} \circ \hat{f}(x, \mu_x \circ \lambda_x^{-1}(v)) \\ &= \text{Id} \circ (x, f(x) \circ \mu_x \circ \lambda_x^{-1}(v)) \\ &= (x, \text{Id}_x \circ f(x) \circ \mu_x \circ \lambda_x^{-1}(v)) \\ &= (x, \check{\text{Id}} \circ f(x) \circ \check{\mu}(x)(\check{\lambda}^{-1}(v)))\end{aligned}$$

entonces  $f(x)(v) = \check{\text{Id}} \circ f(x) \circ \check{\mu}(x)(\check{\lambda}^{-1}(x))$  para todo  $x \in X \times \{0\} = C^+(X) \cap C^-(X)$ , y esto ocurre si y sólo si  $f(x) = \lambda_2(x) \cdot f(x)\check{\mu}(x)(\lambda_1(x))^{-1}$  para toda  $x \in X \times \{0\}$ . Utilizando el Teorema 1.4.4 tenemos que  $E_f \cong E_{f\hat{\mu}}$ .

■

Dado un automorfismo  $\lambda : C^+(X) \rightarrow C^+(X)$  y considerando la restricción  $\mu = \lambda|_{X \times \{0\}}$ , hemos probado que existen funciones

$$\begin{aligned}\lambda_1 : C^+(X) &\rightarrow \text{GL}_p(k) \\ \lambda_2 : C^+(X) &\rightarrow \text{GL}_p(k)\end{aligned}$$

tales que  $f(x) = g_{21}(x) = \lambda_2(x)(f\check{\mu}(x))(\lambda_1(x))^{-1}$  para toda  $x \in C^+(X) \cap C^-(X)$ . Entonces por el Teorema 1.4.4 los haces vectoriales  $E_f$  y  $E_{f\hat{\mu}}$  son isomorfos. De la misma manera se puede probar que  $E_f$  es isomorfo a  $E_{\check{\nu}f}$  donde  $\nu$  es un automorfismo de  $E_2|_{\mathbb{S}^{n-1}}$  el cual puede extenderse a un automorfismo de  $E_2$ .

**Lema 2.1.7.** Sean  $f_0, f_1 : X \times \{0\} \rightarrow \text{GL}_p(k)$  funciones continuas tales que  $f_0$  es homotópica a  $f_1$ , entonces  $E_{f_0} \cong E_{f_1}$

**Demostración.** Como  $f_0, f_1 : X \times \{0\} \rightarrow \text{GL}_p(k)$  son homotópicas, entonces existe  $H : (X \times \{0\}) \times I \rightarrow \text{GL}_p(k)$  continua tal que  $H((x, 0), 0) = f_0(x, 0)$  y  $H((x, 0), 1) = f_1(x, 0)$ . Sea

$$\begin{aligned}\alpha : X \times \{0\} &\rightarrow \text{GL}_p(k) \\ (x, 0) &\mapsto (f_1(x, 0))^{-1} \cdot f_0(x, 0)\end{aligned}$$

Observemos que  $\alpha$  es homotópica a la identidad, pues si definimos

$$\begin{aligned}\beta : (X \times \{0\}) \times I &\rightarrow \text{GL}_p(k) \\ \beta((x, 0), t) &\rightarrow (f_1(x, 0))^{-1} \cdot H((x, 0), t)\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\beta((x, 0), 0) &= (f_1(x, 0))^{-1} \cdot H((x, 0), 0) \\ &= (f_1(x, 0))^{-1} \cdot f_0(x, 0) \\ &= \alpha(x, 0)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\beta((x, 0), 1) &= (f_1(x, 0))^{-1} \cdot H((x, 0), 1) \\ &= (f_1(x, 0))^{-1} \cdot f_1(x, 0) \\ &= \text{Id}\end{aligned}$$

por lo tanto  $\alpha \sim \text{Id}$ . Definimos ahora

$$\begin{aligned}\gamma : C^+(X) &\longrightarrow \text{GL}_p(k) \\ \overline{(x, t)} &\longmapsto \beta((x, 0), t)\end{aligned}$$

Note que  $\gamma$  está bien definida y es continua pues si consideramos

$$\begin{aligned}\gamma' : X \times [0, 1] &\longrightarrow \text{GL}_p(k) \\ (x, t) &\longmapsto \beta((x, 0), t)\end{aligned}$$

tal que  $\gamma'(x, 1) = \beta((x, 0), 1) = \text{Id}$ , tenemos que  $\gamma'(X \times \{1\}) = \text{Id}$ . Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (x, t) & & X \times I \xrightarrow{\pi} \frac{X \times I}{X \times \{1\}} \\ \downarrow & & \downarrow \gamma' \\ \beta((x, 0), t) & & \text{GL}_p(k) \end{array}$$

$\swarrow \gamma' \circ \pi^{-1} = \gamma$

donde la fibra es 1-valuada, así  $\gamma$  es continua. Note ahora que  $\alpha = \gamma|_{X \times \{0\}}$  pues  $\gamma(x, 0) = \beta((x, 0), 0) = \alpha(x, 0)$ , por lo tanto  $\alpha = \gamma|_{X \times \{0\}}$ . También, notemos que  $f_0 = f_1 \cdot \alpha$  pues

$$\begin{aligned}(f_1 \cdot \alpha)(x, 0) &= f_1(x, 0) \cdot \alpha(x, 0) \\ &= f_1(x, 0) \cdot (f_1(x, 0))^{-1} \cdot f_0(x, 0) \\ &= f_0(x, 0)\end{aligned}$$

De modo que  $E_{f_0} = E_{f_1 \cdot \alpha}$ , entonces utilizando el Lema 2.1.6 tenemos que  $E_{f_0} = E_{f_1 \cdot \alpha} \cong E_{f_1}$ , pues  $\alpha$  es la restricción a  $X \times \{0\} = C^+(X) \cap C^{-1}(X)$  de  $\gamma : C^+(X) \longrightarrow \text{GL}_p(k)$ .

■

Hemos probado que si  $f_0, f_1 : X \times \{0\} \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  son homotópicas entonces  $E_{f_0} \cong E_{f_1}$ . Si restringimos nuestra atención a las funciones  $f : X \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  tales que  $f(e) = \text{Id}$ , entonces  $[f] \in [(X, e), (\text{GL}_p(k), \text{Id})]$  y por el Lema 2.1.7 si  $f \sim g$  relativo a  $\{e\}$  entonces  $E_f \cong E_g$ .

Por lo tanto la función

$$\begin{aligned} [(X, e), (\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})] &\longrightarrow \Phi_p^k(S'(X)) \\ [f] &\longmapsto E_f \end{aligned}$$

está bien definida.

Antes de continuar haremos algunas observaciones:

Sea  $G$  un grupo topológico y  $G_1$  la componente por trayectorias de  $G$  que contiene al elemento neutro  $1$  de  $G$ . Tenemos la acción

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, g') &\longmapsto g \cdot g' \cdot g^{-1} \end{aligned}$$

Notemos que el neutro  $1 \in G$  permanece fijo para toda  $g \in G$  ya que

$$(g, 1) \longmapsto g \cdot 1 \cdot g^{-1} = 1.$$

Se tiene una acción

$$\begin{aligned} \bullet : G \times [(X, e), (G, 1)] &\longrightarrow G \times [(X, e), (G, 1)] \\ (g, [f]) &\longmapsto [g \cdot f \cdot g^{-1}] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} g \cdot f \cdot g^{-1} : X &\longrightarrow \mathrm{GL}_p(k) \\ x &\longmapsto g \cdot f(x) \cdot g^{-1} \end{aligned}$$

note además que  $(g \cdot f \cdot g^{-1})(e) = g \cdot f(x) \cdot g^{-1} = g \cdot 1 \cdot g^{-1} = 1$ . Por lo tanto  $[g \cdot f \cdot g^{-1}] \in [(X, e), (G, 1)]$ .

Veamos que la acción  $\bullet$  está bien definida. Sean  $f \sim h$  representantes en  $[(X, e), (G, 1)]$  entonces existe  $H : (H, e) \times I \longrightarrow (G, I)$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = h(x)$  y  $H(e, t) = 1$ . Con esto definimos  $F(x, t) = g \cdot H(x, t) \cdot g^{-1} : (X, e) \times I \longrightarrow (G, 1)$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= g \cdot f(x) \cdot g^{-1} \\ F(x, 1) &= g \cdot h(x) \cdot g^{-1} \\ F(e, t) &= g \cdot H(e, t) \cdot g^{-1} = g \cdot 1 \cdot g^{-1} \end{aligned}$$

por lo tanto  $[g \cdot f \cdot g^{-1}] = [g \cdot h \cdot g^{-1}]$ . Es fácil ver que  $\bullet$  es una acción.

**Lema 2.1.8.** *Definimos  $\pi_0(G, 1) = G/G_1$ , entonces la acción anterior induce la siguiente acción*

$$\begin{aligned}\pi_0(G, 1) \times [(X, e), (G, 1)] &\longrightarrow [(X, e), (G, 1)] \\ \bar{a} \bullet [f] &\longmapsto [a \cdot f \cdot a^{-1}]\end{aligned}$$

**Demostración.** Para ver esto, note que si  $g_0, g_1$  están en la misma componente conexa por trayectorias de  $G$ , entonces  $g_0 \bullet f = g_1 \bullet f$  para toda  $[f] \in [(X, e), (G, 1)]$ . En efecto, sea  $g(t) : [0, 1] \longrightarrow G$  una trayectoria tal que  $g(0) = g_0$  y  $g(1) = g_1$ , entonces se tiene una homotopía

$$\begin{aligned}h : (G, 1) \times I &\longrightarrow (G, 1) \\ (g, t) &\longmapsto g(t) \cdot g \cdot (g(t))^{-1}\end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned}h(g, 0) &= g(0) \cdot g \cdot (g(0))^{-1} = g_0 \cdot g \cdot g_0^{-1} \\ h(g, 1) &= g(1) \cdot g \cdot (g(1))^{-1} = g_1 \cdot g \cdot g_1^{-1} \\ h(1, t) &= g(t) \cdot 1 \cdot (g(t))^{-1} = 1\end{aligned}$$

Sea  $[f] \in [(X, e), (G, 1)]$  entonces  $f : (X, e) \longrightarrow (G, 1)$ , definimos

$$\begin{aligned}H : (X, e) \times I &\longrightarrow (G, 1) \\ (x, t) &\longmapsto h(f(x), t)\end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned}H(x, 0) &= h(f(x), 0) = g_0 \cdot f(x) \cdot g_0^{-1} \\ H(x, 1) &= h(f(x), 1) = g_1 \cdot f(x) \cdot g_1^{-1} \\ H(e, t) &= h(f(e), t) = h(1, t) = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto  $g_0 \bullet [f] = [g_0 \cdot f \cdot g_0^{-1}] = [g_1 \cdot f \cdot g_1^{-1}] = g_1 \bullet [f]$  en  $[(X, e), (G, 1)]$ .

■

Hemos probado que

$$\begin{aligned}\pi_0(G, e) \times [(X, e), (G, 1)] &\longrightarrow [(X, e), (G, 1)] \\ \bar{a} \bullet [f] &\longmapsto [a \cdot f \cdot a^{-1}]\end{aligned}$$

es una acción donde  $(a \cdot f \cdot a^{-1})(x) = a \cdot f(x) \cdot a^{-1}$ . Si hacemos  $G = \text{GL}_p(k)$  tenemos la acción

$$\begin{aligned}\pi_0(\text{GL}_p(k), \text{Id}) \times [(X, e), (\text{GL}_p(k), \text{Id})] &\longrightarrow [(X, e), (\text{GL}_p(k), \text{Id})] \\ \bar{a} \bullet [f] &\longmapsto [a \cdot f \cdot a^{-1}]\end{aligned}$$

donde  $(a \cdot f \cdot a^{-1})(x) = a \cdot f(x) \cdot a^{-1}$ .

Note que  $E_f \cong E_{a \cdot f \cdot a^{-1}}$ . En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} a \cdot f \cdot a^{-1} : (X, e) &\longrightarrow (\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id}) \\ f : (X, e) &\longrightarrow (\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id}) \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \lambda_1 : C^+(X) &\longrightarrow \mathrm{GL}_p(k) \text{ tal que } \lambda_1(\overline{(x, t)}) = a \text{ para todo } \overline{(x, t)} \in C^+(X) \\ \lambda_2 : C^-(X) &\longrightarrow \mathrm{GL}_p(k) \text{ tal que } \lambda_2(\overline{(x, t)}) = a \text{ para todo } \overline{(x, t)} \in C^-(X) \end{aligned}$$

Entonces  $h_{21}(\overline{(x, t)}) := a \cdot \overline{f(x, t)} \cdot a^{-1} = \lambda_1(\overline{(x, t)}) \cdot \overline{f(x, t)} \cdot \lambda_1(\overline{(x, t)})^{-1}$  para todo  $\overline{(x, t)} \in C^+(X) \cap C^-(X) = X \times \{0\}$ . Entonces, utilizando el Teorema 1.4.4 se tiene que  $E_f \cong E_{a \cdot f \cdot a^{-1}}$  para toda  $a \in \pi_0(\mathrm{GL}_p(k))$ .

Este último isomorfismo nos dice que todos los elementos de la órbita  $\pi_0(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id}) \bullet [f]$  son enviados a  $[E_f]$ , la clase de isomorfismo de  $E_f$ .  
Sea

$$\frac{[(X, e), (\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})]}{\pi_0(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})} = \{\pi_0(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id}) \bullet [f] \mid [f] \in [(X, e), (\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})]\}$$

el conjunto de órbitas. Entonces tenemos una función bien definida

$$\begin{aligned} \Lambda : \frac{[(X, e), (\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})]}{\pi_0(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})} &\longrightarrow \Phi_p^k(S'(X)) \\ \pi_0(\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id}) \bullet [f] &\longmapsto [E_f] \end{aligned}$$

**Teorema 2.1.9.** *La función  $\Lambda : \frac{\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_p(k), e)}{\pi_0(\mathrm{GL}_p(k), e)} \longrightarrow \phi_p^k(S'(X))$  es biyectiva.*

**Demostración.** Veamos que la función  $\Lambda$  es inyectiva. Sean  $f, g : (X, e) \longrightarrow (\mathrm{GL}_p(k), \mathrm{Id})$  continuas tales que  $E_f \cong E_g$ , entonces  $\hat{f}, \hat{g} : X \times k^p \longrightarrow X \times k^p$  son isomorfismos de haces vectoriales. Por el Teorema 1.4.4, existe  $\lambda_1 : C^+(X) \longrightarrow \mathrm{GL}_p(k)$  y  $\lambda_2 : C^-(X) \longrightarrow \mathrm{GL}_p(k)$  tales que  $\lambda_2(\overline{(x, t)}) \cdot \overline{f(x, t)} \cdot (\lambda_1(\overline{(x, t)}))^{-1} = \overline{g(x, t)}$  para todo  $\overline{(x, t)} \in C^+(X) \cap C^-(X) = X \times \{0\}$ . Utilizando el Teorema 1.1.10 se sigue que  $\hat{\lambda}_2 \cdot \hat{f} \cdot (\hat{\lambda}_1)^{-1} = \hat{g}$  de modo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C^+(X) & \xrightarrow{\hat{\lambda}_1} & C^+(X) \\ \hat{f} \downarrow & & \hat{g} \downarrow \\ C^-(X) & \xrightarrow{\hat{\lambda}_2} & C^-(X) \end{array}$$

donde las flechas punteadas denotan morfismos que son únicamente definidos sobre  $X \times \{0\}$ .

## Capítulo 2

---

Sean  $\beta_1 = \lambda_1|_{X \times \{0\}}$  y  $\beta_2 = \lambda_2|_{X \times \{0\}}$  entonces  $g(x, 0) = \beta_2(x, 0) \cdot f(x, 0) \cdot (\beta_1(x, 0))^{-1}$ . Note que  $\beta_1, \beta_2 : X \times \{0\} \longrightarrow \text{GL}_p(X)$  son funciones continuas homotópicas a una función constante pues  $\beta_1 = \lambda_1|_{X \times \{0\}} : C^+(X) \longrightarrow \text{GL}_p(X)$  y  $\beta_2 = \lambda_2|_{X \times \{0\}} : C^-(X) \longrightarrow \text{GL}_p(X)$ , entonces  $\text{Im } \beta_1 \subseteq \lambda_1(C^+(X))$  es conexa por trayectorias y  $\text{Im } \beta_2 \subseteq \lambda_2(C^-(X))$  también es conexa por trayectorias.

Como  $\text{Im } \beta_1$  y  $\text{Im } \beta_2$  son componentes conexas en  $\text{GL}_p(k)$  con  $\beta_1(e, 0) = \beta_2(e, 0)$ , entonces  $\text{Im } \beta_1 \cap \text{Im } \beta_2 \neq \emptyset$ , por lo tanto  $\text{Im } \beta_1$  y  $\text{Im } \beta_2$  están contenidas en la misma componente conexa por trayectorias. Con esto tenemos que  $\text{Im } \beta_1$  y  $\text{Im } \beta_2$  son homotópicas a la aplicación constante  $a : X \times \{0\} \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  dada por  $a(x, 0) = a \in \text{GL}_p(k)$ , entonces

$$g(x, 0) = \beta_2(x, 0) \cdot f(x, 0) \cdot (\beta_1(x, 0))^{-1} \sim a \cdot f(x, 0) \cdot a^{-1}$$

Sea  $h : (X \times \{0\}) \times I \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  la homotopía entre  $g(x, 0)$  y  $a \cdot f(x, 0) \cdot a^{-1}$ , esto es,

$$\begin{aligned} h((x, 0), 0) &= g(x, 0) \\ h((x, 0), 1) &= a \cdot f(x, 0) \cdot a^{-1} \end{aligned}$$

Definimos la homotopía

$$\begin{aligned} l : (X \times \{0\}) \times I &\longrightarrow \text{GL}_p(k) \\ ((x, 0), t) &\longmapsto h((x, 0), t) \cdot (h((e, 0), t))^{-1} \end{aligned}$$

entonces se cumple:

$$l((x, 0), 0) = h((x, 0), 0) \cdot (h((e, 0), 0))^{-1} = g(x, 0) \cdot (g(e, 0))^{-1} = g(x, 0) \cdot \text{Id} = g(x, 0)$$

y

$$\begin{aligned} l((x, 0), 1) &= h((x, 0), 1) \cdot (h((e, 0), 1))^{-1} = a \cdot f(x, 0) \cdot a^{-1} \cdot (a \cdot f(e, 0) \cdot a^{-1})^{-1} \\ &= a \cdot f(x, 0) \cdot a^{-1} \cdot (a \cdot \text{Id} \cdot a^{-1})^{-1} \\ &= a \cdot f(x, 0) \cdot a^{-1} \end{aligned}$$

además

$$l((e, 0), 0) = h((e, 0), 0) \cdot (h((e, 0), 0))^{-1} = \text{Id}$$

De esta manera, tenemos que  $l : (X \times \{0\}) \times I \longrightarrow \text{GL}_p(k)$  es una homotopía entre  $g$  y  $a \cdot f \cdot a^{-1}$ , así  $[a \cdot f \cdot a^{-1}] = [g]$  en  $[(X, e), (\text{GL}_p(k), \text{Id})]$ , es decir,  $a \bullet [f] = [g]$  para algún  $a \in \pi_0(\text{GL}_p(k), \text{Id}) = \frac{\text{GL}_p(k)}{(\text{GL}_p(k))_{\text{Id}}}$ . Entonces  $[f] \sim [g]$ , esto es  $[f], [g] \in \pi_0(\text{GL}_p(k), \text{Id}) \bullet [f]$ , por lo tanto  $\overline{[f]} = \overline{[g]}$ .

Veamos que  $\lambda$  es sobreyectiva, para ello basta probar que cualquier haz vectorial sobre  $S'(X)$  es isomorfo a un haz de la forma  $E_f$  donde  $f : (x, e) \longrightarrow (\text{GL}_p(k), \text{Id})$ .

Sea  $E$  un haz vectorial sobre  $S'(X)$ , debido a que  $X \times [-1, 1]$  es compacto,  $C^+(X)$  y  $C^-(X)$  son compactos, entonces  $C^+(X)$  y  $C^-(X)$  son contraíbles donde  $E|_{C^+(X)}$  y  $E|_{C^-(X)}$  son haces triviales.

Sean  $E_1 = C^+(X)$  y  $E_2 = C^-(X)$  con isomorfismos  $\bar{g}_1 : E_1 \rightarrow E|_{C^+(X)}$  y  $\bar{g}_2 : E_2 \rightarrow E|_{C^-(X)}$  y definimos  $g_{21} : E_1|_{C^+(X) \cap C^-(X)} \rightarrow E_2|_{C^+(X) \cap C^-(X)}$  por  $g_{21} = (\bar{g}_1|_{C^+(X) \cap C^-(X)}) \circ (\bar{g}_2|_{C^+(X) \cap C^-(X)})^{-1}$ . Utilizando el Teorema 1.3.3, sea  $F$  el haz que se obtiene al identificar  $E_1$  y  $E_2$  vía  $g_{21}$ , entonces dicho haz hace conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 & \xrightarrow{g_{11}=\text{Id}} & E_1 \\
 \searrow \cong & & \swarrow \cong \\
 & g_1 & F \\
 & \nwarrow & \nearrow \\
 & & F
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E_2 & \xrightarrow{g_{22}=\text{Id}} & E_2 \\
 \searrow \cong & & \swarrow \cong \\
 & g_2 & F \\
 & \nwarrow & \nearrow \\
 & & F
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 E_1|_{C^+(X) \cap C^-(X)} & \xrightarrow{g_{21}} & E_2|_{C^+(X) \cap C^-(X)} \\
 \searrow \cong & & \swarrow \cong \\
 & g_1 & F|_{C^+(X) \cap C^-(X)} \\
 & \nwarrow & \nearrow \\
 & & F|_{C^+(X) \cap C^-(X)}
 \end{array}$$

donde  $g_1 : E_1 \rightarrow F$  y  $g_2 : E_2 \rightarrow F$  son los isomorfismos dados por el Teorema 1.3.3. Notemos que el haz  $E$  hace conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 & \xrightarrow{g_{11}=\text{Id}} & E_1 \\
 \searrow \cong & & \swarrow \cong \\
 & \bar{g}_1 & E \\
 & \nwarrow & \nearrow \\
 & & E
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E_2 & \xrightarrow{g_{22}=\text{Id}} & E_2 \\
 \searrow \cong & & \swarrow \cong \\
 & \bar{g}_2 & E \\
 & \nwarrow & \nearrow \\
 & & E
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 E_1|_{C^+(X) \cap C^-(X)} & \xrightarrow{g_{21}} & E_2|_{C^+(X) \cap C^-(X)} \\
 \searrow \cong & & \swarrow \cong \\
 & \bar{g}_1 & E|_{C^+(X) \cap C^-(X)} \\
 & \nwarrow & \nearrow \\
 & & E|_{C^+(X) \cap C^-(X)}
 \end{array}$$

Entonces, por unicidad tenemos que  $E \cong F$ . Por lo tanto  $E$  se obtiene al identificar  $E_1$  y  $E_2$  vía la función  $g_{21}$ .

Sea  $f : X \rightarrow \text{GL}_p(k)$  definido por  $f(x) = g_{21}(x)(g_{21}(e))^{-1}$  con  $f(e) = g_{21}(e)(g_{21}(e))^{-1} = \text{Id}$ , entonces  $[f] \in [(X, e), (\text{GL}_p(k), \text{Id})]$ . Tenemos que  $g_{21} : X \times \{0\} \rightarrow \text{GL}_p(k)$  tiene una extensión  $g_{21} : C^+(X) \rightarrow \text{GL}_p(k)$ , entonces por el Lema 2.1.7  $E_f \cong E_{g_{21} \cdot g_1(e)} \cong E_{g_{21}}$ , por lo tanto  $E \cong E_f$ , así  $\Lambda$  es sobreyectiva.

■

## Capítulo 2

**Teorema 2.1.10.** *Sea  $E$  un haz vectorial sobre  $X$  y  $p$  una proyección de  $E$ , es decir, un endomorfismo  $p : E \rightarrow E$  tal que  $p^2 = p$ , entonces el cuasi-haz vectorial  $\text{Ker } p = \bigsqcup_{x \in X} \text{Ker } p_x$  con la topología inducida por  $E$  es localmente trivial.*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad sea  $E = X \times M$  un haz vectorial trivial. Sea  $x_0 \in X$  y sea  $f : X \rightarrow \mathcal{L}(M, N)$  una función lineal dada por  $f(x) = \text{Id} - p_x - p_{x_0} + 2p_{x_0} \circ p_x$ .

Notemos que  $p_{x_0} \circ f(x) = f(x) \circ p_x$  pues el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(M, M) & \xrightarrow{p_x} & \mathcal{L}(M, M) \\ \downarrow f(x) & & \downarrow f(x) \\ \mathcal{L}(M, M) & \xrightarrow{p_{x_0}} & \mathcal{L}(M, M) \end{array}$$

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} p_{x_0} \circ f(x) &= p_{x_0} \circ (\text{Id} - p_x - p_{x_0} + 2p_{x_0} \circ p_x) \\ &= p_x - p_{x_0} \circ p_x - p_{x_0}^2 + 2p_{x_0}^2 \circ p_x \\ &= p_x - p_{x_0} \circ p_x - p_{x_0} + 2p_{x_0} \circ p_x \\ &= p_{x_0} \circ p_x \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} f(x) \circ p_x &= (\text{Id} - p_x - p_{x_0} + 2p_{x_0} p_x) \circ p_x \\ &= p_x - p_x^2 - p_{x_0} \circ p_x + 2p_{x_0} \circ p_x^2 \\ &= p_x - p_x - p_{x_0} \circ p_x + 2p_{x_0} \circ p_x \\ &= p_{x_0} \circ p_x \end{aligned}$$

por lo tanto el diagrama anterior induce el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} (x, v) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (x, p_x(v)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \begin{array}{ccc} X \times M & \xrightarrow{p} & X \times M \\ \downarrow \hat{f} & & \downarrow \hat{f} \\ X \times M & \xrightarrow{\text{Id} \times p_{x_0}} & X \times M \end{array} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, f(x)(v)) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (x, p_{x_0} f(x)(v)) = (x, f(x) p_x(v)) \end{array}$$

así tenemos que



$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } p & \longrightarrow & X \times M & \xrightarrow{p} & X \times M \\
 & & \downarrow & & \downarrow \hat{f} & & \downarrow \hat{f} \\
 0 & \longrightarrow & X \times \text{Ker } p_{x_0} & \longrightarrow & X \times M & \xrightarrow{\text{Id} \times p_{x_0}} & X \times M
 \end{array}$$

Notemos que  $f(x_0) = \text{Id} - p_{x_0} - p_{x_0} + 2p_{x_0} \circ p_{x_0} = \text{Id}$  por lo tanto  $f(x_0) \in \text{Iso}(M, M)$  por la Proposición 1.7.16 existe una vecindad  $V_{x_0}$  tal que  $f(x) \in \text{Iso}(M, M)$  para toda  $x \in V_{x_0}$  entonces  $f|_{V_{x_0}} : V_{x_0} \times M \longrightarrow V_{x_0} \times M$  es un isomorfismo, así

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } p & \longrightarrow & V_{x_0} \times M & \xrightarrow{p} & V_{x_0} \times M \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \hat{f}|_{V_0} & & \downarrow \hat{f}|_{V_0} \\
 0 & \longrightarrow & V_{x_0} \times \text{Ker } p_{x_0} & \longrightarrow & V_{x_0} \times M & \xrightarrow{\text{Id} \times p_{x_0}} & V_{x_0} \times M
 \end{array}$$

Sea  $x \in \text{Ker } p|_{V_{x_0}}$  entonces  $\hat{f} \circ p(x) = 0$ , por conmutatividad de los diagramas tenemos que  $(\text{Id} \times p_{x_0}) \circ \hat{f}(x) = 0$ , entonces  $\hat{f}(x) \in \text{Ker } (\text{Id} \times p_{x_0})$ , y por lo tanto  $\hat{f}(\text{Ker } p|_{V_{x_0}}) \subseteq \text{Ker } (\text{Id} \times p_{x_0})|_{V_{x_0}}$ .

Análogamente  $\hat{f}^{-1}(\text{Ker } (\text{Id} \times p_{x_0})|_{V_{x_0}}) \subseteq \text{Ker } p|_{V_{x_0}}$ . Por lo tanto

$$\text{Ker } p|_{V_{x_0}} \cong \text{Ker } (\text{Id} \times p_{x_0})|_{V_{x_0}}$$

■

**Corolario 2.1.11.** Sea  $X$  un espacio topológico,  $E$  un haz vectorial sobre  $X$  y  $p : E \longrightarrow E$  una proyección. Entonces  $\text{Im } p$  es un haz vectorial.

**Demostración.** Veamos que  $\text{Id} - p : E \longrightarrow E$  es una proyección.

$$\begin{aligned}
 (\text{Id} - p)^2 &= (\text{Id} - p) \circ (\text{Id} - p) \\
 &= \text{Id} - p - p + p^2 \\
 &= \text{Id} - p - p + p \\
 &= \text{Id} - p
 \end{aligned}$$

sabemos que  $\text{Im } p = \text{Ker } (\text{Id} - p)$ , por el teorema anterior tenemos que  $\text{Im } p$  es un haz vectorial. ■

**Observación. 2.1.12.** Sea  $E$  un haz sobre  $X$  y  $p : E \longrightarrow E$  proyección, tenemos que  $E_x = \text{Im } p_x \oplus \text{Im } (\text{Id} - p)$  entonces

$$E = \text{Im } p \oplus \text{Im } (\text{Id} - p)$$

**Proposición 2.1.13.** Sean  $p$  y  $p'$  proyecciones del haz vectorial  $E$  con base  $X$ , tales que  $\text{Im } p = \text{Im } p'$  y sean  $\bar{p}$  y  $\bar{p}'$  las proyecciones de  $E \oplus E$  definido por  $\bar{p} = p \oplus O_E$  y  $\bar{p}' : p' \oplus O_E$ . Entonces existe  $\delta : E \oplus E \longrightarrow E \oplus E$  automorfismo de haces isotópico a la identidad tal que  $\bar{p}' = \delta \circ \bar{p} \circ \delta^{-1}$ .

**Demostración.** Sean

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{Im } p \\ E_2 &= \text{Im } (\text{Id} - p) \\ E'_1 &= \text{Im } p' \\ E'_2 &= \text{Im } (\text{Id} - p') \end{aligned}$$

Entonces  $E \oplus E = (E_1 \oplus E_2) \oplus (E'_1 \oplus E'_2)$ . Por hipótesis existe un isomorfismo  $\alpha : E_1 \longrightarrow E'_1$ , el cual induce el siguiente isomorfismo  $\delta : E \oplus E \longrightarrow E \oplus E$  definido por la fibra como

$$\delta_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_x^- & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta_x \begin{pmatrix} e_1x \\ e_2x \\ e'_1x \\ e'_2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_x^{-1}(e'_1x) \\ e_2x \\ \alpha_x(e_1x) \\ e'_2x \end{pmatrix}$$

Notemos que  $\delta$  está bien definida pues  $(-\alpha_x^{-1}(e'_1x), e_2x, \alpha_x(e_1x), e'_2x) \in E_{1x} \oplus E_{2x} \oplus E'_{1x} \oplus E'_{2x}$  con  $-\alpha_x^{-1}(e'_1x) \in E_{1x}$ ,  $e_2x \in E_{2x}$ ,  $\alpha_x(e_1x) \in E'_{1x}$  y  $e'_2x \in E'_{2x}$ . Aun más  $\delta$  es invertible con inversa

$$\delta_x^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos para las funciones  $\bar{p}$  y  $\bar{p}'$  tienen la siguiente descomposición matricial

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{p}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{p} \delta' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_x^- & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \bar{p}'
 \end{aligned}$$

Si nos fijamos en el factor  $E_1 \oplus E'_1$  de  $E_1 \oplus E'_1 \oplus E_2 \oplus E'_2$  tenemos el automorfismo

$$\begin{aligned}
 \delta' &= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned}
 H : E_1 \oplus E'_1 \times I &\longrightarrow E_1 \oplus E_1 \\
 ((e_1, e_2), t) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -t\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t\alpha^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

calculando tenemos que

$$\begin{aligned}
 H((e_1, e_2), 0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\
 H((e_1, e_2), 1) &= \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \delta' \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Cada matriz que representa a  $H$  está bien definida y son isomorfismos con inversa

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & -t\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & t\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t\alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t\alpha & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & -t\alpha^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & t\alpha^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Además si  $(e_1, e_2) \in E_1 \oplus E'_1$  tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -t\alpha^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e_1 - t\alpha(e_2) \\ e_2 \end{pmatrix} \in E_1 \oplus E'_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e_1 \\ t\alpha(e_2) + e_1 \end{pmatrix} \in E_1 \oplus E'_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & -t\alpha^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e_1 - t\alpha(e_2) \\ e_2 \end{pmatrix} \in E_1 \oplus E'_1 \end{aligned}$$

por lo tanto  $H_t$  es isomorfismo para toda  $t \in I$ .

■

## 2.2. Espacio de proyecciones

Demos a  $\text{Hom}(k^N, k^N)$  la topología natural inducida por la biyección  $\text{Hom}(k^N, k^N) \cong k^{N^2}$ . Sea

$$\text{Proj}_n(k^N) = \{q \in \text{Hom}(k^N, k^N) \mid q^2 = q \text{ y } \dim(q(k^N)) = n\}$$

Así  $\text{Proj}_n(k^N)$  tiene la topología de subespacio inducida por  $\text{Hom}(k^N, k^N)$ .

Sea  $g : Y \longrightarrow \text{Proj}_n(k^N) \subset \mathcal{L}(k^N, k^N)$  continua, por el Teorema 1.1.10 existe un morfismo de haces  $\hat{g} : Y \times k^N \longrightarrow Y \times k^N$  continuo.

Veamos que  $p = \hat{g}$  es una proyección. Calculando tenemos

$$\begin{aligned} \hat{g}(\hat{g}(y, k)) &= \hat{g}(y, g(y)(k)) \\ &= (y, g(y)g(y)(k)) \\ &= (y, g(y)(k)) \\ &= \hat{g}(y, k) \end{aligned}$$

entonces  $\text{Im } p \subseteq Y \times X$  es un haz vectorial sobre  $Y$ . Notemos que  $\text{Im } p$  tiene rango constante ya que para  $y \in Y$  tenemos

$$\begin{aligned} \text{Im } p_y &= p(\{y\} \times K^N) \\ &= \hat{g}(\{y\} \times K^N) \\ &= (\{y\} \times \hat{g}(y)(K^N)) \end{aligned}$$

donde  $\hat{g}(y) \in \text{Proj}_n(k^N)$ . Entonces  $\dim \text{Im } p_y = n$ . Denotemos  $\zeta_g := \text{Im } \hat{g}$ .

**Lema 2.2.1.** Si  $f : X \longrightarrow Y$  función continua entre espacios topológicos, entonces  $\zeta_{g \circ f} = f^*(\zeta_g)$ .

**Demostración.** Esquemáticamente tenemos que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & \text{Proj}_n(k^N) \end{array}$$

Vemos que  $\zeta_{g \circ f} = \text{Im } \widehat{(g \circ f)}$  donde tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{g \circ f}(X \oplus k^N) &= \{ \widehat{(g \circ f)}(x, e) \mid (x, e) \in X \times k^N \} \\ &= \{ (x, (g \circ f)(x)(e)) \mid (x, e) \in X \times k^N \} \\ &= \{ (x, (g(f(x)))(e)) \mid (x, e) \in X \times k^N \} \end{aligned}$$

por otro lado tenemos que  $f^*(\zeta_g) = f^*(\text{Im } \hat{g})$

$$\begin{aligned} f^*(\zeta_g) &= \{ (x, e) \in E \times \zeta_g \mid \pi(e) = f(x) \} \\ &= \{ (x, (y, g(y)(e))) \in X \times (Y \times k^N) \mid (y, e) \in Y \times k^N \text{ y } f(x) = y \} \\ &= \{ (x, (f(x), g(f(x))(e))) \in X \times (Y \times k^N) \mid (f(x), e) \in Y \times k^N \} \\ &= \{ (x, (f(x), (g \circ f)(x)(e))) \in X \times (X \times k^N) \mid (x, e) \in X \times k^N \} \\ &= \{ (x, g(x)(e)) \in X \times k^N \mid (x, e) \in X \times k^N \} \end{aligned}$$

por lo tanto  $\zeta_{g \circ f} = \text{Im } \widehat{(g \circ f)} \cong f^*(\text{Im } \hat{g}) = f^*(\zeta_g)$ .

En particular  $Y = \text{Proj}_n(k^N)$  y  $g = \text{Id} : \text{Proj}_n(k^N) \longrightarrow \text{Proj}_n(k^N)$ , entonces

$$\begin{aligned} \hat{g} : \text{Proj}_n(k^N) \times k^N &\longrightarrow \text{Proj}_n(k^N) \times k^N \\ (p, v) &\longmapsto (p, \text{Id}(p), v) = (p, p(v)) \end{aligned}$$

y así  $\text{Im } \widehat{\text{Id}_{\text{Proj}_n(k^N)}} = \text{Im } \hat{g} \subseteq \text{Proj}_n(k^N) \times k^N$  define  $\zeta_{n,N} = \text{Im } \widehat{\text{Id}_{\text{Proj}_n(k^N)}}$ . Consideremos

$$X \xrightarrow{f} \text{Im } \widehat{\text{Id}_{\text{Proj}_n(k^N)}} \xrightarrow{\text{Id}_{\text{Proj}_n(k^N)}} \text{Proj}_n(k^N)$$

Aplicando el Lema 2.2.1 tenemos que

$$\text{Im } (\hat{f}) = \text{Im } ((\widehat{\text{Id}_{\text{Proj}_n(k^N)}}) \circ f) = f^*(\text{Im } \widehat{\text{Id}_{\text{Proj}_n(k^N)}}) = f^*(\zeta_{n,N})$$

En resumen si  $f : X \longrightarrow \text{Proj}_n(k^N)$  es continua, entonces  $\zeta_f = f^*(\zeta_{n,N})$ , donde  $\zeta_{n,N} = \text{Im } \widehat{\text{Id}_{\text{Proj}_n(k^N)}}$ . Además como  $X$  es compacto entonces por el Teorema 2.1.2 implica que, salvo isomorfismo de haces vectoriales, el haz  $\zeta_f$  depende sólo de la clase de homotopía de  $f : X \longrightarrow \text{Proj}_n(k^N)$ . Por lo tanto tenemos una función bien definida

$$\begin{aligned} C_{n,N} : [X, \text{Proj}_n(k^N)] &\longrightarrow \phi_n^k(X). \\ [f] &\longmapsto [\zeta_f] \end{aligned}$$

## 2.3. Sistemas dirigidos

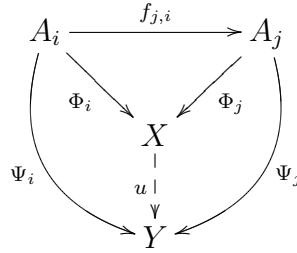
**Definición 2.3.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Un **sistema dirigido** es una familia de objetos  $\{A_i\}_{i \in I}$  en  $\mathcal{C}_0$  y morfismos  $f_{j,i} : A_i \rightarrow A_j$  para  $i \leq j$  en  $\mathcal{C}_1$  tal que

1.  $f_{i,i} = \text{Id} : A_i \rightarrow A_i$
2.  $f_{k,i} = f_{k,j} \circ f_{j,i}$

Se denota por  $\langle A_i, f_{j,i} \rangle$ .

Para este trabajo utilizaremos el conjunto de índices  $I = \mathbb{N}$ .

**Definición 2.3.2.** El **límite directo** (o **colímite**) de  $\langle A_i, f_{j,i} \rangle$  es un objeto  $X \in \mathcal{C}$  junto con morfismos  $\Phi_i : A_i \rightarrow X$  tales que  $\Phi_i = \Phi_j \circ f_{j,i}$ , el cual cumple la siguiente propiedad universal: Para cualquier  $\langle Y, \Psi_i \rangle$  tal que  $\Psi_i = \Psi_j \circ f_{j,i}$ , existe un único morfismo  $u : X \rightarrow Y$  tal que  $u \circ \Phi_i = \Psi_i$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ .



**Ejemplo 2.3.3.** Consideremos la categoría de conjuntos **Conj** donde los morfismos son inclusiones. Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de conjuntos y consideremos las inclusiones  $f_{i+1,i} : A_i \rightarrow A_{i+1}$ , esto es,

$$A_1 \xrightarrow{f_{2,1}} A_2 \xrightarrow{f_{3,2}} A_3 \xrightarrow{f_{4,3}} \dots$$

Definimos  $f_{k,j} : A_j \rightarrow A_k$  por  $f_{k,j} := f_{k,k-1} \circ \dots \circ f_{j+1,j}$ , así tenemos un sistema dirigido  $\langle A_i, f_{j,i} \rangle_{i \in I}$  en la categoría **Conj**. El límite directo (o colímite) del sistema dirigido anterior es

$$\frac{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i}{A_i \sim f_{j,i}(A_i)}.$$

★

Para buscar más ejemplos de sistemas dirigidos y colímites puede consultar [1].

Consideramos  $\text{Proj}_n(k^n) \leq \text{GL}_n(k)$  el subespacio vectorial de las proyecciones  $q : k^n \rightarrow k^n$ . Para cada  $M \geq N$  tenemos la función

$$\begin{aligned} \iota'_{M,N} : \text{Proj}_n(k^N) &\longrightarrow \text{Proj}_n(k^M) \\ q &\longmapsto \rho \oplus O_{M-N} \\ Q &\longmapsto \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde  $Q$  es la representación matricial de la proyección  $q$ . Notemos que  $\iota'_{M,N}$  es continua pues la función

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{N \times N}(k) &\longrightarrow \mathcal{M}_{N \times N}(k) \\ A &\longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es continua, entonces tomando la restricción en  $\text{Proj}_n(k^N)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \iota'_{M,N} : \text{Proj}_n(k^N) &\longrightarrow \text{Proj}_n(k^M) \\ A &\longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es continua y además si  $A \in \text{Proj}_n(k^N)$  entonces

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix} \in \text{Proj}_n(k^M)$$

de tal manera que  $\iota_{M,N}$  es inyectiva (inclusión canónica).

Consideremos la familia  $\{[X, \text{Proj}_n(k^N)]\}_{N \in \mathbb{N}}$ , tenemos que  $\iota'_{M,N}$  induce la función

$$\begin{aligned} \iota_{M,N} : [X, \text{Proj}_n(k^N)] &\longrightarrow [X, \text{Proj}_n(k^M)] \\ [f : X \longrightarrow \text{Proj}_n(k^N)] &\longmapsto [\iota'_{M,N} \circ f : X \longrightarrow \text{Proj}_n(k^N)] \end{aligned}$$

Veamos que  $\iota'_{M,N}$  está bien definida. Sean  $f, g : X \longrightarrow \text{Proj}_n(k^N)$  tales que  $f \sim g$ , entonces existe  $H : X \times I \longrightarrow \text{Proj}_n(k^N)$  continua tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$  para toda  $x \in X$ . Sea  $F : X \times I \longrightarrow \text{Proj}_n(k^M)$  dada por  $F(x, t) = \iota'_{M,N} \circ H(x, t)$

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{H} & \text{Proj}_n(k^N) \\ & \searrow F & \swarrow \iota'_{M,N} \\ & \text{Proj}_n(k^M) & \end{array}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= \iota'_{M,N} \circ H(x, 0) \\ &= \iota'_{M,N} \circ f(x) \\ &= (\iota'_{M,N} \circ f)(x) \end{aligned}$$

para toda  $x \in X$ . Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} F(x, 1) &= \iota'_{M,N} \circ H(x, 1) \\ &= \iota'_{M,N} \circ g(x) \\ &= (\iota'_{M,N} \circ g)(x) \end{aligned}$$

para toda  $x \in X$ . Así  $\iota'_{M,N} \circ f \sim \iota'_{M,N} \circ g$ , por lo tanto  $\iota_{M,N}$  está bien definida.

Ahora veamos que  $\langle [X, \text{Proj}_n(k^N)], \iota_{M,N} \rangle$  es un sistema dirigido.

## Capítulo 2

---

1. Por definición tenemos que  $\iota_{N,N} = \text{Id}$ .
2. Para  $N, M, P \in \mathbb{N}$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 (\iota_{P,M} \circ \iota_{M,N}) \circ [f] &= [(\iota'_{P,M} \circ \iota'_{M,N}) \circ f] \\
 &= [\iota'_{P,M} \circ (f \oplus O_{M-N})] \\
 &= [f \oplus 0_{M-N} \oplus 0_{P-M}] \\
 &= [f \oplus 0_{P-N}] \\
 &= \iota_{M,N}([f])
 \end{aligned}$$

Por lo tanto es un sistema dirigido.

Ahora consideremos  $Z$  el conjunto

$$Z = \text{colim}_{N \in \mathbb{N}} [X, \text{Proj}_n(k^N)] = \frac{\sqcup_{N \in \mathbb{N}} [X, \text{Proj}_n(k^N)]}{\iota_{M,N}([f]) \sim [f]}$$

y para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos las funciones

$$\begin{aligned}
 \phi_N : [X, \text{Proj}_n(k^N)] &\longrightarrow Z \\
 [f] &\longmapsto \pi \circ j_N([f]) = \overline{[f]}
 \end{aligned}$$

donde  $j_N : [X, \text{Proj}_n(k^N)] \longrightarrow \sqcup_{N \in \mathbb{N}} [X, \text{Proj}_n(k^N)]$  y  $\pi : \sqcup_{N \in \mathbb{N}} [X, \text{Proj}_n(k^N)] \longrightarrow Z$  la proyección

$$[X, \text{Proj}_n(k^N)] \xrightarrow{j_N} \sqcup_{N \in \mathbb{N}} [X, \text{Proj}_n(k^N)] \xrightarrow{\pi} Z$$

tenemos que el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 [X, \text{Proj}_n(k^N)] & \xrightarrow{\iota_{M,N}} & [X, \text{Proj}_n(k^M)] \\
 \searrow \phi_N & & \swarrow \phi_M \\
 & Z &
 \end{array}$$

pues

$$\begin{aligned}
 \phi_M \circ \iota_{M,N}([f]) &= \overline{\iota_{M,N}([f])} = \overline{[f]} \\
 &= \phi_N([f])
 \end{aligned}$$

Probaremos que  $\{Z, \phi_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  es el colímite del sistema dirigido  $\{[X, \text{Proj}_n(k^N, \iota_{M,N})]\}_{N \in \mathbb{N}}$ . Sea  $\{Y, \psi_M\}_{M \in \mathbb{N}}$  tal que  $\psi_M \circ \iota_{M,N} = \psi_N$ . Así debe



de existir  $u : Z \rightarrow Y$  que haga conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 [X, \text{Proj}_n(k^N)] & \xrightarrow{\iota_{M,N}} & [X, \text{Proj}_n(k^M)] \\
 \searrow \phi_N & & \swarrow \phi_M \\
 & Z & \\
 & \downarrow u & \\
 & Y & 
 \end{array}$$

Sea  $\overline{[f]} \in Z$ , así  $[f] \in [X, \text{Proj}_n(k^N)]$  para alguna  $N \in \mathbb{N}$ . Para que  $u$  haga conmutar el diagrama es necesario que se cumpla que  $u(\overline{[f]}) := \psi_N[f]$ .

Veamos que  $u$  está bien definida y es único. Sean  $[f] \in [X, \text{Proj}_n(k^N)]$  y  $[g] \in [X, \text{Proj}_n(k^M)]$  con  $M, N \in \mathbb{N}$ , sin pérdida de generalidad suponemos que  $M < N$ , entonces  $\iota_{M,N}([f]) = [g]$ . Por otra parte

$$\begin{aligned}
 u(\overline{[g]}) &= \psi_M([g]) \\
 &= \psi_M \circ \iota_{M,N}([f]) \\
 &= \psi_N([f])
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $u$  está bien definida y así  $\{Z, \phi_M\}$  es el colímite del sistema dirigido  $\langle [X, \text{Proj}_n(k^N, \iota_{M,N})] \rangle_{N \in \mathbb{N}}$ .

En la sección anterior definimos la función

$$\begin{aligned}
 C_{n,N} : [X, \text{Proj}_n(k^N)] &\longrightarrow \phi_n^k \\
 [f] &\longmapsto [\zeta_f]
 \end{aligned}$$

donde  $\zeta_f = \text{Im } \hat{f} = f^*(\zeta_{M,N})$ , tal que  $\zeta_{n,N} = \text{Im } \widehat{\text{Id}}$  es el haz inducido por la función continua

$$\begin{aligned}
 \widehat{\text{Id}} : \text{Proj}_n(k^N) \times k^N &\longrightarrow \text{Proj}_n(k^N) \times k^N \\
 (p, v) &\longmapsto (p, \text{Id}(p)v) = (p, p(v))
 \end{aligned}$$

Notemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 [X, \text{Proj}_n(k^N)] & \xrightarrow{\iota_{M,N}} & [X, \text{Proj}_n(k^M)] \\
 \searrow \phi_N & & \swarrow \phi_M \\
 & Z & \\
 & \downarrow C_n & \\
 & \phi_n^k(X) & 
 \end{array}$$

## Capítulo 2

---

a nivel de elementos tenemos

$$\begin{array}{ccc}
 [f] & \xrightarrow{\iota_{M,N}} & \iota_{M,N}([f]) = [\iota'_{M,N} \circ f] = [f \oplus 0_{M-N}] \\
 & \searrow C_{n,N} & \swarrow \\
 & [\text{Im } \widehat{f}] = [\text{Im } (f \oplus 0_{M-N})] &
 \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned}
 f \oplus 0_{M-N} : X &\longrightarrow \text{Proj}_n(k^M) \\
 x &\longmapsto \begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Veamos que  $\text{Im } \widehat{f} \cong \text{Im } (f \oplus 0_{M-N})$ . Tenemos que

$$\text{Im } \widehat{f} = \{(x, f(x)(v)) | (x, v) \in X \times k^N\}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
 \text{Im } (f \oplus 0_{M-N}) &= \left\{ \left( x, \begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \right) \mid \left( x, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \right) \in X \oplus (k^N \oplus k^{M-N}) \right\} \\
 &= \left\{ \left( x, \begin{pmatrix} f(x)(k_1) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \mid \left( x, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \right) \in X \oplus (k^N \oplus k^{M-N}) \right\} \\
 &= \text{Im } \widehat{f} \oplus (X \times 0_{M-N}) \cong \text{Im } \widehat{f}
 \end{aligned}$$

y como  $X \times 0_{M-N}$  es el haz neutro tenemos que el diagrama conmuta. De esta manera tenemos

$$\begin{aligned}
 C_n : Z &\longrightarrow \phi_n^k(X) \\
 \overline{[f : X \longrightarrow \text{Proj}_n(k^N)]} &\longmapsto C_{n,N}([f]) = [f^*(\zeta_{n,N})]
 \end{aligned}$$

Ahora calculemos  $\text{colim}_{N \rightarrow \infty} \text{Proj}_n(k^N)$ , para esto recordemos el sistema dirigido  $\{\text{Proj}_n(k)^N, \iota'_{M,N}\}_{N \in \mathbb{N}}$  donde

$$\begin{aligned}
 \iota'_{M,N} : \text{Proj}_n(k^N) &\longrightarrow \text{Proj}_n(k^M) \\
 Q &\longmapsto \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Sabemos que  $\iota_{M,N}$  es continua y además es inyectiva por definición, veamos que  $\text{Proj}_n(k^N)$  es un subespacio topológico cerrado en  $\text{Proj}_n(k^M)$  para toda  $M \geq N$ .

Sea  $\pi : \mathcal{M}_{M \times M}(k) \rightarrow \mathcal{M}_{M \times M}(k)$  una función continua definida por

$$\begin{pmatrix} A_{N \times N} & B_{N \times (M-N)} \\ C_{(M-N) \times N} & D_{(M-N) \times (M-N)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & B_{N \times (M-N)} \\ C_{(M-N) \times N} & D_{(M-N) \times (M-N)} \end{pmatrix}$$

donde la restricción  $\pi|_{\text{Proj}_n(k^N)} : \text{Proj}_n(k^N) \rightarrow \text{Proj}_n(k^N)$  es continua y

$$\text{Proj}_n(k^N) = \pi^{-1} \left( \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

por lo tanto  $\text{Proj}_n(k^N)$  es cerrado en  $\text{Proj}_n(k^M)$  para toda  $M \geq N$ , cumpliendo estas condiciones se sigue que  $\text{colim}_{N \rightarrow \infty} \text{Proj}_n(k^N) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k^N)$  existe junto con morfismos  $j_N : \text{Proj}_n(k^N) \rightarrow \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k^N)$  continuos. (cf. [1])

Consideremos el sistema dirigido  $\langle [X, \text{colim}_{N \rightarrow \infty} \text{Proj}_n(k^N)], \varphi_N \rangle = \langle [X, \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k^N)], \varphi_N \rangle$  con

$$\begin{aligned} \varphi_N : [X, \text{Proj}_n(k^N)] &\rightarrow \left[ X, \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k^N) \right] \\ [f] &\mapsto [j_N \circ f] \end{aligned}$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} [X, \text{Proj}_n(k^N)] & \xrightarrow{\iota_{M,N}} & [X, \text{Proj}_n(k^M)] \\ & \searrow \varphi_N & \swarrow \varphi_M \\ & [X, \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k^N)] & \end{array}$$

ya que para  $[f] \in [X, \text{Proj}_n(k^N)]$  tenemos que  $[j_N \circ f] = [j_M \circ \iota_{M,N} \circ f]$ . Por la propiedad universal, debe de existir  $u : Z \rightarrow [X, \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k)]$  que haga conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} [X, \text{Proj}_n(k^N)] & \xrightarrow{\iota_{M,N}} & [X, \text{Proj}_n(k^M)] \\ & \searrow \phi_N & \swarrow \phi_M \\ & Z & \\ & \downarrow u & \\ & [X, \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k^N)] & \end{array}$$

(Curved arrows from  $[X, \text{Proj}_n(k^N)]$  and  $[X, \text{Proj}_n(k^M)]$  to  $[X, \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k^N)]$  are labeled  $\varphi_N$  and  $\varphi_M$  respectively.)

donde

$$\overline{[f]} \xrightarrow{u} \varphi_N([f]) = [j_N \circ f].$$

**Proposición 2.3.4.** *u es biyectiva.*

**Demostración.** Para demostrar lo anterior notemos que si  $X$  es compacto y  $f : X \rightarrow \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^N$  (donde  $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^N$  tiene la topología final inducida por  $\dots \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \dots$ ) entonces  $f(X) \subseteq \mathbb{R}^N$  para algún  $N \in \mathbb{N}$ .

Sea  $v : [X, \text{colim}_{N \rightarrow \infty} \text{Proj}_n(k^N)] \rightarrow \text{colim}_{N \rightarrow \infty} [X, \text{Proj}_n(k^N)]$  definido por  $[f] \mapsto [\tilde{f}]$  donde  $\tilde{f} : X \rightarrow \text{Proj}_n(k^N)$  para  $f(X) \subseteq \text{Proj}_n(k^N) \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k^N)$ . Veamos que  $v$  está bien definida.

Sea  $f, g : X \rightarrow \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k^N)$  tales que  $f \sim g$ , entonces existe  $H : X \times I \rightarrow \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k^N)$  continua tal que  $H(x, 0) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x)$ . Dado que  $X \times I$  es compacto entonces  $\text{Im } H \subset \text{Proj}_n(k^N)$  para alguna  $N \in \mathbb{N}$ . Observamos que  $H : X \times I \rightarrow \text{Proj}_n(k^N)$  es continua, con  $H(x, 0) = f(x) = \tilde{f}(x)$  y  $H(x, 1) = g(x) = \tilde{g}(x)$ . Así  $v$  está bien definida con  $v \circ u = \text{Id}$  y  $u \circ v = \text{Id}$ , por lo tanto

$$Z = \text{colim}_{N \rightarrow \infty} [X, \text{Proj}_n(k^N)] \cong [X, \text{colim}_{M \rightarrow \infty} \text{Proj}_n(k^N)]$$

■

**Teorema 2.3.5.** *Para cualquier espacio topológico compacto  $X$  la función*

$$C_n : \frac{\sqcup [X, \text{Proj}_n(k^N)]}{\iota_{M,N}([f]) \sim [f]} \rightarrow \phi_n^k(X)$$

$$[\overline{f}] \mapsto [\zeta_f] \equiv [f^*(\zeta_{n,N})] \equiv [\text{Im } \hat{f}]$$

es biyectiva.

**Demostración. Sobreyectividad.** Sea  $\zeta$  un haz sobre  $X$ . Dado que  $X$  es compacto por la Proposición 1.7.18 existe un haz vectorial  $E'$  tal que  $\zeta \oplus E'$  es un haz trivial. Más precisamente, según la Proposición 1.7.18 se tiene que  $\zeta = \text{Ker } (1 - p)$  para alguna proyección  $p : X \times k^N \rightarrow X \times k^N$ . Así  $E' \cong \text{Ker } p$  y  $\zeta = \text{Im } p = \zeta_{\tilde{p}}$  donde  $\tilde{p} : X \rightarrow \text{Proj}_n(k^N)$ . Entonces  $[\tilde{p}] \in \text{colim}_{N \rightarrow \infty} [X, \text{Proj}_n(k^N)]$  es tal que  $C_n([\tilde{p}]) = [\zeta_{\tilde{p}}] = [\zeta]$ .

**Inyectividad.** Sean  $[f_0], [f_1] \in \sqcup [X, \text{Proj}_n(k^N)] / \iota_{M,N}([f]) \sim [f]$ , tal que  $\zeta_{f_0} = \zeta_{f_1}$  donde

$$f_0 : X \rightarrow \text{Proj}_n(k^N)$$

$$f_1 : X \rightarrow \text{Proj}_n(k^{N'})$$

para algún  $N, N' \in \mathbb{N}$ . Así

$$\zeta_{f_0} = \{ \hat{f}_0(x, k) \in X \times k^N \mid (x, k) \in X \times k^N \}$$

$$\zeta_{f_1} = \{ \hat{f}_1(x, k) \in X \times k^{N'} \mid (x, k) \in X \times k^{N'} \}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $N = N'$ , pues si  $N' \geq N$  tenemos que

$$X \xrightarrow{f_0} \text{Proj}_n(k^N) \xrightarrow{\iota'_{N',N}} \text{Proj}_n(k^{N'})$$

donde  $\iota'_{N',N} \circ f_0 = f_1$ , así se tiene que  $\overline{[\iota'_{N',N} \circ f_0]} = \overline{[f_1]}$ . De modo que basta probar que  $\iota'_{N,N} \circ f_0 = \bar{f}_0$  y que  $\iota'_{N,N} \circ f_1 = \bar{f}_1$  son homotópicas pues  $\bar{f}_0 \sim f_0$  y  $\bar{f}_1 \sim f_1$  en  $\text{colim}_{N \in \mathbb{N}} [X, \text{Proj}_n(k^N)]$ .

Sea  $p_0 = \hat{f}_0$  y  $p_1 = \hat{f}_1$  así  $p_0, p_1 : X \times k^N \longrightarrow X \times k^N$  son proyecciones tales que

$$\text{Im } p_0 = \text{Im } \hat{f}_0 = \zeta_{f_0} \cong \zeta_{f_1} = \text{Im } \hat{f}_1 = \text{Im } p_1$$

entonces por el Teorema 2.1.13 existe un automorfismo  $\delta : (X \times k^N) \oplus (X \times k^N) \longrightarrow (X \times k^N) \oplus (X \times k^N)$  isotópico a la identidad y tal que  $\bar{p}_1 = \delta \circ \bar{p}_0 \circ \delta^{-1}$  donde  $\bar{p}_0 = p_0 \oplus 0_T$  y  $\bar{p}_1 = p_1 \oplus 0_T$  entonces tenemos que

$$\bar{p}_1 = \hat{f}_1 \oplus 0_{X \times k^N} = f_1 \oplus \widehat{0_{X \times k^N}} = \widehat{\iota'_{2N,N} \circ f_0}$$

es homotópica a

$$\bar{p}_0 = \hat{f}_0 \oplus 0_{X \times k^N} = f_0 \oplus \widehat{0_{X \times k^N}} = \widehat{\iota'_{2N,N} \circ f_1}.$$

■

**Definición 2.3.6.**

$$\text{BGL}_n(k) := \text{colim}_{N \rightarrow \infty} \text{Proj}_n(k^N)$$

**Corolario 2.3.7.** *Sea  $X$  un espacio topológico compacto. Entonces se tiene el siguiente isomorfismo*

$$[X, \text{BGL}_n(k)] \cong \phi_n^k(X)$$

**Demostración.** Como  $X$  es compacto, vimos que

$$v : [X, \text{colim}_{N \rightarrow \infty} \text{Proj}_n(k^N)] \xrightarrow{\cong} \text{colim}_{N \rightarrow \infty} [X, \text{Proj}_n(k^N)]$$

y por el Teorema 2.3.5 tenemos que

$$C_n : \frac{\sqcup [X, \text{Proj}_n(k^N)]}{\iota_{M,N}([f]) \sim [f]} = \phi_n^k(X)$$

$$\overline{[f]} \longmapsto [\text{Im } \hat{f}]$$

es biyectiva. Así la biyección explícita está dada por la composición

$$[X, \text{BGL}_n(k)] \xrightarrow{v} \text{colim}_{N \rightarrow \infty} [X, \text{Proj}_n(k^N)] \xrightarrow{C_n} \phi_n^k(X)$$

$$[f : X \longrightarrow \cup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k^N)] \longmapsto [\tilde{f}] \longmapsto \zeta_f = [\text{Im } \hat{\tilde{f}}]$$

donde  $f : X \longrightarrow \cup_{N \in \mathbb{N}} \text{Proj}_n(k^N)$  es tal que  $\text{Im } f \subseteq \text{Proj}_n(k^N)$  para algún  $N \in \mathbb{N}$  ya que  $X$  es compacto, así  $\tilde{f}$  es la restricción de  $f$  a su imagen  $\tilde{f} : X \longrightarrow \text{Proj}_n(k^N)$ .

■

En resumen, la biyección está dada explícitamente por

$$\begin{aligned} [X, \text{BGL}_n(k)] &\longrightarrow \phi_n^k(X) \\ [f] &\longmapsto [\zeta_f] = [\text{Im } \hat{f}] \end{aligned}$$

## 2.4. La Grassmaniana

Sea  $k$  el campo de los números complejos con el producto interno canónico, esto es para  $x, y \in k^N$  tenemos que

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^N x_j \bar{y}_j$$

Sea  $M$  un subespacio vectorial de  $k^N$ , definimos

$$\begin{aligned} p_M : M \oplus M^\perp &\longrightarrow M \oplus M^\perp \\ (x, y) &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

así  $p_M$  es proyección natural sobre  $M$ , haciendo  $\text{Im } p_M = M$  y  $\text{Ker } p_M = M^\perp$ . Notemos que

$$\begin{aligned} \text{Im } (\text{Id} - p_M) &= \{(x, y) - (x, 0) \mid (x, y) \in M \oplus M^\perp\} \\ &= \{(0, y) \in M \oplus M^\perp\} \cong M^\perp \end{aligned}$$

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $p : k^N \longrightarrow k^N$  una proyección autoadjunta tal que  $\text{Im } p = M$  si, y sólo si  $p$  es la proyección ortogonal sobre  $\text{Im } p = M$ .*

**Demostración.** Notemos que  $p_M$  es autoadjunto pues

$$\begin{aligned} \langle p_M(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle &= \langle (x_1, 0), (x_2, y_2) \rangle \\ &= x_1 \bar{x}_2 + 0 \bar{y}_2 \\ &= x_1 \bar{x}_2 \end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \langle (x_1, y_1), p_M(x_2, y_2) \rangle &= \langle (x_1, y_1), (x_2, 0) \rangle \\ &= x_1 \bar{x}_2 + y_1 \bar{0} \\ &= x_1 \bar{x}_2 \end{aligned}$$

por unicidad del operador adjunto  $p_M^* = p_M$ . Por lo tanto  $p_M$  es autoadjunto. Recíprocamente, sea  $p$  una proyección tal que  $\text{Im } p = M$  y  $p = p^*$ , entonces  $k^N = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$  y así

$$\begin{aligned} p : \text{Im } p \oplus \text{Ker } p &\longrightarrow \text{Im } p \oplus \text{Ker } p \\ (x, y) &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Sólo resta ver que  $\text{Ker } p = M^\perp$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $v \in \text{Ker } p$  y  $m \in M = \text{Im } p$ , entonces

$$\begin{aligned} \langle m, v \rangle &= \langle p(m), v \rangle \\ &= \langle m, p(v) \rangle \\ &= \langle m, 0 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

así  $v \in M^\perp$ . Por lo tanto  $\text{Ker } p \subseteq M^\perp$ .

( $\supseteq$ ) Sea  $v \in M^\perp$  entonces  $\langle m, v \rangle = 0$  para toda  $m \in M = \text{Im } p$ . Como  $m \in \text{Im } p$  tenemos que  $p(m) = m$  así  $\langle p(m), v \rangle = \langle m, p(v) \rangle = 0$  para toda  $m \in M$ , así  $p(v) \in M^\perp$  pero  $p(v) \in M = \text{Im } p$  por definición, así  $p(v) \in M \cap M^\perp = \{0\}$ , entonces  $p(v) = 0$  y  $v \in \text{Ker } p$ , por lo tanto  $M \subseteq \text{Ker } p$ .

■

**Definición 2.4.2.** La *grassmaniana de dimensión*  $n$  se define como

$$G_n(k^N) = \{M < k^N \mid \dim M = n\}$$

**Proposición 2.4.3.** Sea  $G' = \{p \in \text{Proj}_n(k^N) \mid p = p^*\}$  el subespacio de proyecciones autoadjuntas de  $\text{Proj}_n(k^N)$ . Entonces  $G'$  es isomorfo a  $G_n(k^N)$ .

**Demostración.** Definimos la función

$$\begin{aligned} \varphi : \{p \in \text{Proj}_n(k^N) \mid p = p^*\} &\longrightarrow \{M < k^N \mid \dim M = n\} \\ p &\longmapsto \text{Im } p \end{aligned}$$

y la función

$$\begin{aligned} \phi : \{M < k^N \mid \dim M = n\} &\longrightarrow \{p \in \text{Proj}_n(k^N) \mid p = p^*\} \\ M &\longrightarrow p_M \end{aligned}$$

donde  $p_M : M \oplus M^\perp \longrightarrow M \oplus M^\perp$  con  $(x, y) \longmapsto (x, 0)$ .

Veamos que  $\psi \circ \varphi = \text{Id}$ . Sea  $q \in \{p \in \text{Proj}_n(k^N) \mid p = p^*\}$ , entonces  $\phi(\varphi(q)) = \phi(\text{Im } q) = p_{\text{Im } q}$  donde

$$\begin{aligned} p_{\text{Im } q} : \text{Im } q \oplus (\text{Im } q)^\perp &\longrightarrow \text{Im } q \oplus (\text{Im } q)^\perp \\ (x, y) &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Notemos que  $p_{\text{Im } q} = q$ , dado que

$$\begin{aligned} q : \text{Im } q \oplus (\text{Im } q)^\perp &\longrightarrow \text{Im } q \oplus (\text{Im } q)^\perp \\ (x, y) &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

entonces  $\phi \circ \varphi = \text{Id}$ .

Veamos que  $\varphi \circ \phi = \text{Id}$ . Sea  $M \in G_n(k^N)$ , así  $\varphi(\phi(M)) = \varphi(p_M) = \text{Im } p_M$ , donde

$$\begin{aligned} p_M : M \oplus M^\perp &\longrightarrow M \oplus M^\perp \\ (x, y) &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

entonces  $\text{Im } p_M = M$ , por lo tanto  $\varphi \circ \phi = \text{Id}$ . ■

Por comodidad denotaremos también por  $G_n(k^N)$  al subespacio de proyecciones autoadjuntas de  $\text{Proj}_n(k^N)$ .

**Definición 2.4.4.** Un **operador lineal positivo** es un operador lineal  $T : V \longrightarrow V$  tal que  $T = T^*$  y  $\langle T(a), a \rangle > 0$  para toda  $a \in V$  con  $a \neq 0$ .

**Lema 2.4.5.** Sea  $V$  un espacio vectorial con un producto interior con  $\dim V < \infty$ , sea  $T : V \longrightarrow V$  un operador lineal positivo, entonces  $T$  es invertible.

**Demostración.** Sea  $\beta$  una base ortonormal respecto al producto interior  $\langle, \rangle$ . Sea  $A = [A]_\beta$  la representación matricial de  $T$  con respecto a la base  $\beta$ . Dado que  $\beta$  es ortonormal tenemos que  $\langle a, b \rangle = \overline{[b]_\beta^t} \cdot [a]_\beta$  para toda  $a, b \in V$ , donde  $[a]_\beta$  y  $[b]_\beta$  denota la expresión correspondiente a los vectores  $a, b$  respecto a la base  $\beta$ . Así

$$\begin{aligned} \langle T(a), a \rangle &= \overline{[a]_\beta^t} \cdot [T(a)]_\beta \\ &= \overline{[b]_\beta^t} \cdot [T]_\beta \cdot [a]_\beta \\ &= \overline{[b]_\beta^t} \cdot A \cdot [a]_\beta \end{aligned}$$

de está manera  $\langle T(a), a \rangle > 0$  si y sólo si  $\overline{[b]_\beta^t} \cdot A \cdot [a]_\beta > 0$  para toda  $a \in V$ , en otras palabras  $\overline{M}^t \cdot A \cdot M$  para toda  $M \neq 0$  con  $M \in \mathcal{M}_{n \times 1}(k)$ . En particular tenemos que  $A$  es invertible, ya que de no serlo existe  $M \in \mathcal{M}_{n \times 1}(k)$  tal que  $A \cdot M = 0$  así  $\overline{M}^t \cdot A \cdot M = 0$ , lo que contradice la hipótesis de ser un operador positivo. Entonces  $A = [T]_\beta$  es invertible, por lo tanto  $T$  es invertible. ■



**Lema 2.4.6.** *Sea  $T : V \longrightarrow V$  un operador lineal positivo, entonces  $T^{-1}$  es un operador positivo.*

**Demostración.** Dado que

$$\begin{aligned} (T^{-1})^* \circ T &= (T^{-1})^* \circ T^* \\ &= (T \circ T^{-1})^* \\ &= (\text{Id})^* \\ &= \text{Id} \end{aligned}$$

entonces  $(T^{-1})^* = T^{-1}$ . Por hipótesis tenemos que  $\langle T(a), a \rangle > 0$  para toda  $a \in V$  con  $a \neq 0$ , por la observación anterior  $T$  es invertible así que  $T^{-1}(b) \neq 0$  para toda  $b \in V$  con  $b \neq 0$ , así tomando  $T^{-1}(b) = a$  tenemos que

$$\begin{aligned} \langle T(a), a \rangle &= \langle T(T^{-1}(b)), T^{-1}(b) \rangle \\ &= \langle b, T^{-1}(b) \rangle \\ &= \langle (T^{-1})^*(b), b \rangle \\ &= \langle (T^{-1})(b), b \rangle > 0 \end{aligned}$$

para toda  $b \in V$  con  $b \neq 0$ . Por lo tanto  $T^{-1}$  es un operador positivo. ■

A continuación usaremos una variante del Teorema 13, página 341 de [17].

**Teorema 2.4.7.** *Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $T : V \longrightarrow V$  un operador positivo. Entonces  $T$  tiene raíz cuadrada positiva, es decir, existe un único operador positivo  $N$  tal que  $N^2 = T$ .*

Daremos un bosquejo de la demostración.

**Demostración.** Utilizando el Teorema Espectral [17] pág. 335,  $T$  se descompone como

$$T = c_1 \pi_{W_1} + \dots + c_k \pi_{W_k}$$

donde  $c_i$  son los valores propios de  $T$ , y  $\pi_{W_i}$  es la proyección en el subespacio  $W_i$  asociado al valor propio  $c_i$  con  $i = 1, \dots, k$ . Así  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$  pues  $T$  es normal, además  $W_i \perp W_j$  para todo  $i, j = 1, 2, \dots, k$  con  $i \neq j$ .

Por el Teorema 12 de [17], adaptado a operadores positivos,  $T$  es un operador positivo si y sólo si  $c_j > 0$ . Definamos

$$\sqrt{T} = \sqrt{c_1} \pi_{W_1} + \dots + \sqrt{c_k} \pi_{W_k}$$

entonces  $(\sqrt{T})^2 = T$  pues  $\pi_{W_i} \circ \pi_{W_j} = 0$  para toda  $i \neq j$  y  $\pi_{W_i} \circ \pi_{W_i} = \pi_{W_i}$  para toda  $i = 1, \dots, k$ . Dado que  $\sqrt{c_j} > 0$  para toda  $j = 1, \dots, k$  por el Teorema 12 de [17],  $\sqrt{T}$  es un operador positivo. ■

**Corolario 2.4.8.** *Si  $T : V \longrightarrow V$  es un operador positivo, entonces  $(\sqrt{T})^{-1}$  es un operador positivo.*

**Proposición 2.4.9.** *La variedad grasmaniana  $G_n(k^N)$  es un retracto por deformación de  $\text{Proj}_n(k^N)$*

**Demostración.** Sea  $\rho : k^N \longrightarrow k^N$  una proyección y  $t_0 \in [0, 1]$ . Definimos  $h_{t_0} : k^N \longrightarrow k^N$  como

$$h_{t_0} := \text{Id} + t_0 J^* J$$

donde  $J = 2\rho - 1$ .

Notemos que  $h_{t_0}$  es un operador positivo, pues

$$\begin{aligned} h_{t_0}^* &= (\text{Id} + t_0 J^* J)^* \\ &= \text{Id}^* + \bar{t}_0 (J^* J)^* \\ &= \text{Id} + t_0 (J^* J^{**}) \\ &= \text{Id} + t_0 J^* J \end{aligned}$$

O bien, utilizando la definición tenemos que

$$\begin{aligned} \langle x, h_{t_0}(y) \rangle &= \langle x, (\text{Id} + t_0 J^* J)y \rangle \\ &= \langle x, y + t_0 J^* J(y) \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + \bar{t}_0 \langle x, J^* J(y) \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + t_0 \langle J(x), J(y) \rangle \end{aligned}$$

por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} \langle h_{t_0}(x), y \rangle &= \langle (\text{Id} + t_0 J^* J)x, y \rangle \\ &= \langle x + t_0 J^* J(x), y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + \bar{t}_0 \langle J^* J(x), y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle + t_0 \langle J(x), J(y) \rangle \end{aligned}$$

por lo tanto  $h_{t_0}^* = h_{t_0}$ .

Veamos que  $h_t$  es un operador positivo para toda  $x \in k^n$  con  $x \neq 0$ . Como  $\langle h_{t_0}(x), x \rangle = \langle x, x \rangle + t_0 \langle J(x), J(x) \rangle$ , tenemos que  $\langle x, x \rangle > 0$  por definición de producto interno,  $t_0 \geq 0$  y  $\langle J(x), J(x) \rangle \geq 0$ , sólo nos falta probar que  $\langle J(x), J(x) \rangle > 0$  para toda  $x \neq 0$ , que es equivalente a probar, que si  $J(x) = 0$  entonces  $x = 0$ . Si  $J(x) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 = (2\rho - \text{Id})(x) &= (\rho - (\text{Id} - \rho))(x) \\ &= \rho(x) + (-\text{Id} - \rho)(x) \end{aligned}$$

donde  $\rho(x) \in \text{Im } \rho$  y  $(\text{Id} - \rho)(x) \in \text{Im } (\text{Id} - \rho)$ , y sabemos que

$$k^N = \text{Im } \rho \oplus \text{Im } (\text{Id} - \rho)$$

ya que  $\rho$  es una proyección. Entonces  $\rho(x) = 0$  y  $(\text{Id} - \rho)(x) = 0$ , donde lo segundo equivale a  $x - \rho(x) = 0$  lo que implica que  $x = \rho(x)$ , así nos queda que  $x = 0$ . Por lo tanto  $h_{t_0}$  es un operador positivo para cada  $t_0 \in [0, 1]$ .

Sea

$$\begin{aligned} h : [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{M}_{N \times N}(k) \\ t &\longrightarrow \text{Id} + tJ^*J \end{aligned}$$

una función continua. Como  $h(t)$  es un operador positivo para cada  $t \in [0, 1]$ , utilizando el Teorema Espectral [17] tenemos que

$$h(t) = c_1(t)E_1(t) + \dots + c_l(t)E_l(t)$$

y por el Teorema 2.4.7  $h(t)$  tiene raíz cuadrada positiva

$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{c_1(t)}E_1(t) + \dots + \sqrt{c_l(t)}E_l(t)$$

Utilizando el Lema 2.4.6 y el Corolario 2.4.8 tenemos que  $h^{-1}(t)$  y  $\sqrt{h^{-1}(x)}$  son continuas. Definimos

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{M}_{N \times N}(k) \\ t &\longmapsto \sqrt{h(t)} \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} F : \text{Proj}_n(k^N) \times I &\longrightarrow \text{Proj}_n(k^N) \\ (\rho, t) &\longmapsto \alpha(t)\rho(\alpha(t))^{-1} \end{aligned}$$

notemos que  $F(\rho, t) \in \text{Proj}_n(k^N)$  ya que

$$\begin{aligned} (F(\rho, t))^2 &= (\alpha(t) \circ \rho \circ (\alpha(t))^{-1})(\alpha(t) \circ \rho \circ (\alpha(t))^{-1}) \\ &= \alpha(t) \circ (\rho)^2 \circ (\alpha(t))^{-1} \\ &= \alpha(t) \circ \rho \circ (\alpha(t))^{-1} \\ &= F(\rho, t) \end{aligned}$$

Para que  $F$  sea un retracto por deformación de  $\text{Proj}_n(k^N)$  en  $G_n(k^N)$  se debe de cumplir lo siguiente

1. Para toda  $\rho \in G_n(k^N)$  se debe de tener que  $F(\rho, t) = \rho$  para toda  $t \in I$ .
2. Para toda  $\rho \in \text{Proj}_n(k^N)$  se debe cumplir que  $F(\rho, 0) = \rho$ .
3. Se debe de tener que  $F(\rho, 1) \in G_n(k^N)$  para toda  $\rho \in \text{Proj}_n(k^N)$ .

## Capítulo 2

---

1. Sea  $\rho \in G_n(k^N)$ , tenemos que  $p = p^*$ , así  $J^* = 2\rho^* - \text{Id} = 2\rho - \text{Id} = J$  y calculando

$$\begin{aligned} JJ &= (2\rho - \text{Id})(2\rho - \text{Id}) \\ &= 4\rho^2 - 2\rho^* - 2\rho + \text{Id} \\ &= 4\rho - 4\rho + \text{Id} \\ &= \text{Id} \end{aligned}$$

tenemos que

$$\alpha(t) = \sqrt{\text{Id} + tJ^*J} = \sqrt{\text{Id} + tJJ} = \sqrt{\text{Id} + t\text{Id}} = \sqrt{(1+t)\text{Id}}$$

notemos que  $\sqrt{(1+t)\text{Id}} = \sqrt{(1+t)}\text{Id}$  ya que

$$\sqrt{(1+t)\text{Id}} \circ \sqrt{(1+t)\text{Id}} = (1+t)\text{Id}$$

y

$$\sqrt{(1+t)\text{Id}} \circ \sqrt{(1+t)\text{Id}} = (1+t)\text{Id}$$

Así

$$\begin{aligned} F(\rho, t) &= \alpha(t) \circ \rho \circ (\alpha(t))^{-1} \\ &= (\sqrt{1+t})\text{Id} \circ \rho \circ (\sqrt{1+t})^{-1}\text{Id} \\ &= \text{Id} \circ \rho \circ \text{Id} \\ &= \rho \end{aligned}$$

entonces se cumple la primera parte.

2. Sea  $\rho \in \text{Proj}_n(k^N)$  tenemos que

$$\begin{aligned} F(\rho, 0) &= \sqrt{\text{Id} + 0J^*J} \circ \rho \circ (\sqrt{\text{Id} + 0J^*J})^{-1} \\ &= \sqrt{\text{Id}} \circ \rho \circ (\sqrt{\text{Id}})^{-1} \\ &= \text{Id} \circ \rho \circ \text{Id} \\ &= \rho \end{aligned}$$

por lo tanto se cumple la segunda parte.

3. Notemos que  $(\alpha(1))^2 \circ \rho \circ (\alpha(1))^{-2} = \rho^*$  cuando  $t = 1$ , ya que

$$\begin{aligned} \alpha(1)^2 &= (\text{Id} + J^*J)^2 \\ &= \text{Id} + (2\rho^* - \text{Id})(2\rho - \text{Id}) \\ &= \text{Id} + 4\rho^* \circ \rho - 2\rho^* - 2\rho + \text{Id} \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
 \alpha(1)^2 \circ \rho &= (\text{Id} + 4\rho^* \circ \rho - 2\rho^* - 2\rho + \text{Id}) \circ \rho \\
 &= \rho + 4\rho^* \circ \rho^2 - 2\rho^* \rho - 2\rho^2 + \rho \\
 &= \rho + 4\rho^* \circ \rho - 2\rho^* \rho - 2\rho + \rho \\
 &= 2\rho^* \circ \rho
 \end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
 \rho^* \alpha(1)^2 &= \rho^* \circ (\text{Id} + 4\rho^* \circ \rho - 2\rho^* - 2\rho + \text{Id}) \\
 &= \rho^* + 4(\rho^*)^2 \circ \rho - 2(\rho^*)^2 - 2\rho^* \rho + \rho^* \\
 &= \rho^* + 4\rho^* \circ \rho - 2\rho^* \rho - 2\rho^* + \rho^* \\
 &= 2\rho^* \circ \rho
 \end{aligned}$$

Así para  $t = 1$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 \rho^* &= (\alpha(1))^2 \circ \rho \circ (\alpha(1))^{-2} \\
 &= \alpha(1) \circ (\alpha(1) \circ \rho \circ \alpha(1)^{-1}) \circ \alpha(1)^{-1} \\
 &= \alpha(1) \circ F(\rho, 1) \circ \alpha(1)^{-1}
 \end{aligned}$$

donde  $F(\rho, 1) = (\alpha(1))^{-1} \circ \rho^* \circ \alpha(1)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 (F(\rho, 1))^* &= (\alpha(1)^{-1} \circ \rho^* \circ \alpha(1))^* \\
 &= \alpha(1)^* \circ \rho^{**} \circ (\alpha(1)^{-1})^* \\
 &= \alpha(1)^* \circ \rho \circ (\alpha(1)^*)^{-1}
 \end{aligned}$$

pero como  $\alpha$  es un operador positivo, entonces es autoadjunto, así

$$\alpha(1)^* \circ \rho \circ (\alpha(1)^*)^{-1} = \alpha(1) \circ \rho \circ (\alpha(1))^{-1} = F(\rho, 1)$$

entonces  $F(\rho, 1) \in G_n(k^N)$ . Por lo tanto  $G_n(k^N)$  es un retracto por deformación de  $\text{Proj}_n(k^N)$ . ■

### 2.4.1. Una descripción distinta

Podemos dar otra descripción de los espacios  $\text{Proj}_n(k^N)$  y de  $G_n(k^N)$  en términos de espacios homogéneos. Sean

$$\text{GL}_n(k) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

$$O_n(k) = \{A \in \text{GL}_n(k) \mid A\overline{A}^t = \text{Id}\}$$

donde si queremos ser más específicos si  $k = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  tenemos que  $O_n(k) = O(n)$  ó  $U(n)$  respectivamente.

## Capítulo 2

---

Sea

$$\begin{aligned} p_0 = \text{Id}_{k^n} \oplus 0_{k^{N-n}} : k^n \oplus k^{N-n} &\longrightarrow k^n \oplus k^{N-n} \\ (x, y) &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

donde su representación matricial es

$$p_0 = \begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ 0 & 0_{N-n} \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $p_0$  es una proyección y además

$$p_0^* = \overline{\begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ 0 & 0_{N-n} \end{pmatrix}}^t = \begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ 0 & 0_{N-n} \end{pmatrix} = p_0$$

por lo tanto  $p_0$  es autoadjunto.

Sea

$$\begin{aligned} p : \text{GL}_n(k) &\longrightarrow \text{Proj}_n(k^N) \\ A &\longmapsto A \cdot p_0 \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

Notemos que  $p$  está bien definida ya que  $P(A) \in \text{Proj}_n(k^N)$  pues

$$\begin{aligned} (p(A))^2 &= (A \cdot p_0 \cdot A^{-1})(A \cdot p_0 \cdot A^{-1}) \\ &= A \cdot p_0^2 \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot p_0 \cdot A^{-1} \\ &= p(A) \end{aligned}$$

Definimos también

$$\begin{aligned} \sigma : O_n(k) &\longrightarrow G_n(k^N) \\ A &\longmapsto A \cdot p_0 \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

es decir  $\sigma = p|_{O_n(k)}$ . Notemos que  $\sigma$  está bien definida pues para  $A \in O_n(k)$ , por definición tenemos que  $A^{-1} = A^t$ , entonces

$$\begin{aligned} (A \cdot p_0 \cdot A^{-1})^* &= (A^{-1})^* \cdot p_0 \cdot A^* \\ &= \overline{(A^t)^t} \cdot p_0 \cdot \overline{A^t} \\ &= A \cdot p_0 \cdot A^t \\ &= A \cdot p_0 \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

por lo tanto  $A \cdot p_0 \cdot A^{-1} \in G_n(k^N)$ .

**Proposición 2.4.10.** *Las funciones  $p$  y  $\sigma$  inducen homeomorfismos*

$$\bar{p} : \frac{\mathrm{GL}_N(k)}{\mathrm{GL}_n(k) \times \mathrm{GL}_{N-n}(k)} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Proj}_n(k^N)$$

$$\bar{\sigma} : \frac{O_N(k)}{O_n(k) \times O_{N-n}(k)} \xrightarrow{\cong} G_n(k^N)$$

**Demostración.** Definimos la siguiente acción

$$\begin{aligned} \bullet : \mathrm{GL}_N(k) \times \mathrm{Proj}_n(k^N) &\longrightarrow \mathrm{Proj}_n(k^N) \\ (A, p) &\longmapsto A \cdot p_0 \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

Notemos que  $\bullet$  está bien definida, pues  $A \cdot p_0 \cdot A^{-1} \in \mathrm{Proj}_n(k^N)$ . La acción es continua pues es restricción de la función

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_N(k) \times \mathcal{M}_{N \times N}(k) &\longrightarrow \mathcal{M}_{N \times N}(k) \\ (A, p) &\longmapsto A \cdot p_0 \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

que es continua. También cumple con la definición de acción

1. Para  $p \in \mathrm{GL}_{N \times N}(k)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} \bullet p &= \mathrm{Id} \cdot p \cdot \mathrm{Id}^{-1} \\ &= \mathrm{Id} \cdot p \cdot \mathrm{Id} \\ &= p \end{aligned}$$

2. Sean  $A_1, A_2 \in \mathrm{GL}_N(k)$  y  $p \in \mathcal{M}_{N \times N}(k)$ , entonces

$$\begin{aligned} (A_1 \cdot A_2) \bullet p &= (A_1 \cdot A_2) \cdot p \cdot (A_1 \cdot A_2)^{-1} \\ &= A_1 \cdot A_2 \cdot p \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \\ &= A_1 \bullet (A_2 \cdot p \cdot A_2^{-1}) \\ &= A_1 \bullet (A_2 \bullet p) \end{aligned}$$

Tenemos que la acción  $\bullet$  es transitiva. Sea  $p_1, p_2 \in \mathrm{Proj}_n(k^N)$ . Tenemos que encontrar matrices  $A \in \mathrm{GL}_N(k)$  tal que  $A \cdot p_1 \cdot A^{-1} = p_2$ . Por definición de  $\mathrm{Proj}_n(k^N)$  tenemos que  $\dim(\mathrm{Im} p_1) = \dim(\mathrm{Im} p_2)$ . Sea  $\beta$  la base canónica de  $k^N$  y sean  $\beta_1, \beta_2$  bases ordenadas tales que para las proyecciones  $p_1, p_2$ , respectivamente y su representación matricial con sus respectivas bases es

$$\begin{aligned} [p_1]_{\beta_1} &= \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0_{N-n} \end{pmatrix} \\ [p_2]_{\beta_2} &= \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0_{N-n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Capítulo 2

La matriz  $p_1 = [p_1]_\beta$  es semejante a la matriz  $[p_1]_{\beta_1}$ , y la matriz  $p_2 = [p_2]_\beta$  es semejante a la matriz  $[p_2]_{\beta_2}$ , es decir existen matrices  $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_{N \times N}(k)$  invertibles tales que

$$P_1^{-1} \cdot p_1 \cdot P_1 = [p_1]_{\beta_1}$$

$$P_2^{-1} \cdot p_2 \cdot P_2 = [p_2]_{\beta_2}$$

Además tenemos que  $[p_1]_{\beta_1} = [p_2]_{\beta_2}$  es decir que  $P_1^{-1} \cdot p_1 \cdot P_1 = P_2 \cdot p_2 \cdot P_2$  despejando tenemos que  $p_2 = P_2 \cdot P_1^{-1} \cdot p_1 \cdot P_1 \cdot P_2^{-1} = P_2 \cdot P_1^{-1} \cdot p_1 \cdot (P_2 \cdot P_1^{-1})^{-1}$ , haciendo  $A = P_2 \cdot P_1^{-1} \in \text{GL}_n(k)$ , tenemos que  $A \cdot p_1 \cdot A^{-1} = p_2$ . Por lo tanto la acción es transitiva.

**Nota.** En general tenemos el isomorfismo

$$\begin{aligned} G/G_{x_0} &\xrightarrow{\cong} G \bullet x_0 \\ g \bullet G_{x_0} &\mapsto g \bullet x_0 \end{aligned}$$

y cuando la acción  $\bullet$  es transitiva tenemos que  $G \bullet x_0 = X$ .

Aplicando lo anterior a nuestra acción con  $x_0 = p_0 \in \text{Proj}_n(k^N)$ , tenemos que

$$G_{p_0} = \{A \in \text{GL}_N(k) \mid A \bullet p_0 = p_0\} < \text{GL}_N(k)$$

así la biyección

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(k) &\xrightarrow{\cong} \text{Proj}_n(k^N) \\ A \bullet G_{p_0} &\mapsto A \bullet p_0 = A \cdot p_0 \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

Notemos que

$$G_{p_0} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \mid (A_1, A_2) \in \text{GL}_n(k) \times \text{GL}_{N-n}(k) \right\}$$

En efecto, dada cualquier  $U \in \text{GL}_N(k)$  lo podemos escribir como

$$U = \begin{pmatrix} A_{n \times n} & B_{n \times (N-n)} \\ C_{(N-n) \times n} & D_{(N-n) \times (N-n)} \end{pmatrix}$$

Por definición  $U \cdot p_0 \cdot U^{-1} = p_0$  y esto pasa si y sólo si  $U \cdot p_0 = p_0 \cdot U$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{n \times n} & 0 \\ C_{(N-n) \times n} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{n \times n} & B_{n \times (N-n)} \\ C_{(N-n) \times n} & D_{(N-n) \times (N-n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ 0 & 0_{N-n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ 0 & 0_{N-n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{n \times n} & B_{n \times (N-n)} \\ C_{(N-n) \times n} & D_{(N-n) \times (N-n)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{n \times n} & B_{n \times (N-n)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



entonces tenemos que  $C_{(N-n) \times n} = 0_{N-n}$  y  $B_{n \times (N-n)} = 0_{n \times (N-n)}$ , así  $U$  es de la forma

$$U = \begin{pmatrix} A_{n \times n} & 0 \\ 0 & D_{(N-n) \times (N-n)} \end{pmatrix}$$

de esta manera establecemos la biyección continua que hay entre

$$\begin{aligned} G_{p_0} &\xrightarrow{\cong} \mathrm{GL}_n(k) \times \mathrm{GL}_{N-n}(k) \\ \begin{pmatrix} A_{n \times n} & 0 \\ 0 & D_{(N-n) \times (N-n)} \end{pmatrix} &\mapsto (A_{n \times n}, D_{(N-n) \times (N-n)}) \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos la biyección continua

$$\begin{aligned} \bar{p} : \frac{\mathrm{GL}_N(k)}{\mathrm{GL}_n(k) \times \mathrm{GL}_{N-n}(k)} &\longrightarrow \mathrm{Proj}_n(k^N) \\ [A] &\longmapsto A \bullet p_0 = A \cdot p_0 \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

Sólo resta demostrar que  $\bar{p}$  es abierta. Dado  $q_0 \in \mathrm{Proj}_n(k^N)$  y  $A_0 \in \mathrm{GL}_N(k)$  tal que  $\bar{p}(A_0) = q_0$ , es decir,  $A \cdot p_0 \cdot A^{-1} = q_0$ , construiremos una sección  $s$  de

$$\begin{aligned} p : \mathrm{GL}_n(k) &\longrightarrow \mathrm{Proj}_n(k^N) \\ A &\longmapsto A \cdot p_0 \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

en una vecindad abierta  $V_{q_0}$  del punto  $q_0$  tal que  $s(q_0) = A_0$ .

Sea

$$\begin{aligned} \tilde{s} : \mathrm{Proj}_n(k^N) &\longrightarrow \mathcal{M}_{N \times N}(k) \\ q &\longmapsto (\mathrm{Id} - q_0 - q + 2q \cdot q_0) \cdot A_0 \end{aligned}$$

la cual es continua. Notemos que

$$\begin{aligned} \tilde{s}(q_0) &= (\mathrm{Id} - q_0 - q_0 + 2q_0 \cdot q_0) \cdot A_0 \\ &= \mathrm{Id} \circ A_0 \\ &= A_0 \end{aligned}$$

Dado que  $\tilde{s}(q_0) = A_0 \in \mathrm{GL}_N(k) \subset \mathcal{M}_{N \times N}(k)$  y además  $\mathrm{GL}_N(k)$  es abierto en  $\mathcal{M}_{N \times N}$ , así  $\mathrm{GL}_N(k)$  es una vecindad abierta de  $A_0$  y como  $\tilde{s}$  es continua existe una vecindad abierta  $V_{q_0}$  de  $q_0 \in \mathrm{Proj}_n(k^N)$  tal que  $\tilde{s}(V_{q_0}) \subseteq \mathrm{GL}_N(k)$ . Sea  $s$  la restricción

$$s = \tilde{s}|_{V_{q_0}} : V_{q_0} \subset \mathrm{Proj}_n(k^N) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(k)$$

así  $s$  está bien definida y es continua. Veamos que  $s$  es una sección de  $p$  en  $V_{q_0}$ , es decir, demostraremos  $p(s(q)) = q$  para toda  $q \in V_{q_0}$ . Note que  $p(s(q)) = q$  se cumple para toda  $q \in V_{q_0}$  si y sólo si  $s(q) \cdot p_0 \cdot (s(q))^{-1}$  para toda  $q \in V_{q_0}$ . Despejando tenemos

que  $s(q) \cdot p_0 = q \cdot s(q)$  para toda  $q \in V_{q_0}$ . Entonces basta demostrar que  $s(q) \cdot p_0 = q \cdot s(q)$  para toda  $q \in V_{q_0}$ . Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}
 s(q) \cdot p_0 &= s(q) \cdot p_0 = (\text{Id} - q_0 - q + 2q \cdot q_0) \cdot A_0 \cdot p_0 \\
 &= (\text{Id} - A_0 \cdot p_0 \cdot A_0^{-1} - q + 2q \cdot A_0 \cdot p_0 \cdot A_0^{-1}) \cdot A_0 \cdot p_0 \\
 &= A_0 \cdot p_0 - A_0 \cdot p_0 \cdot A_0^{-1} \cdot A_0 \cdot p_0 - q \cdot A_0 \cdot p_0 + 2q \cdot A_0 \cdot p_0 \cdot A_0^{-1} \cdot A_0 \cdot p_0 \\
 &= A_0 \cdot p_0 - A_0 \cdot p_0^2 - q \cdot A_0 \cdot p_0 + 2q \cdot A_0 \cdot p_0^2 \\
 &= A_0 \cdot p_0 - A_0 \cdot p_0 - q \cdot A_0 \cdot p_0 + 2q \cdot A_0 \cdot p_0 \\
 &= q \cdot A_0 \cdot p_0
 \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned}
 q \cdot s(q) &= q \cdot (\text{Id} - q_0 - q + 2q \cdot q_0) \cdot A_0 \\
 &= (q - q \cdot q_0 - q^2 + 2q^2 \cdot q_0) \cdot A_0 \\
 &= (q - q \cdot q_0 - q + 2q \cdot q_0) \cdot A_0 \\
 &= q \cdot A_0 - q \cdot q_0 \cdot A_0 - q \cdot A_0 + 2q \cdot q_0 \cdot A_0 \\
 &= q \cdot q_0 \cdot A_0 \\
 &= q \cdot A_0 \cdot p_0 \cdot A_0^{-1} \cdot A_0 \\
 &= q \cdot A_0 \cdot p_0
 \end{aligned}$$

por lo tanto  $s$  es una sección de  $p$  en la vecindad  $V_{q_0}$ . Usando lo anterior demostraremos que

$$\begin{aligned}
 \bar{p} : \frac{\text{GL}_N(k)}{\text{GL}_n(k) \times \text{GL}_{N-n}(k)} &\longrightarrow \text{Proj}_n(k^N) \\
 [A] &\longmapsto A \bullet p_0 = A \cdot p_0 \cdot A^{-1}
 \end{aligned}$$

es una función abierta. Sea  $[A] \in \text{GL}_N(k)/G_{p_0}$  y  $q_0 = p([A_0])$ . Sea  $W$  cualquier vecindad abierta de  $[A]$ . Por la construcción anterior existe una vecindad  $V_{q_0}$  de  $q_0$  en  $\text{Proj}_n(k^N)$  y una sección continua  $s$  de  $p : \text{GL}_n(k) \longrightarrow \text{Proj}_n(k^N)$ , así  $s : V_{q_0} \longrightarrow \text{GL}_n(k)$  es tal que  $s(q_0) = A_0$ . Sea  $\bar{s}$  la función dada por la composición

$$\text{Proj}_n(k^N) \supseteq V_{q_0} \xrightarrow{s} \text{GL}_n(k) \xrightarrow{\pi} \text{GL}_N(k)/G_{p_0}$$

es decir,  $\bar{s} = \pi \circ s$ . Notemos que  $\bar{p} \circ \bar{s}|_{V_{q_0}} = \text{Id}$ , esto es,  $\bar{s}$  es sección continua de  $\bar{p}$  en la vecindad  $V_{q_0}$ . Por otra parte, dado que  $\bar{s}$  es continua tenemos que  $\bar{s}^{-1}(W)$  es una vecindad abierta de  $q_0$  en  $\text{Proj}_n(k^N)$ .

Notemos que  $[A_0] \in W \cap \bar{s}(V_{q_0}) \subseteq W$  y así

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}(W) &\supseteq \bar{p}(W \cap \bar{s}(V_{q_0})) \\
 &= \bar{p}(\bar{s}(\bar{s}^{-1}(W))) \\
 &= \text{Id}_{V_{q_0}}(\bar{s}^{-1}(W)) \\
 &= \bar{s}^{-1}(W)
 \end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que dado  $[A_0] \in \frac{\mathrm{GL}_N(k)}{G_{p_0}}$  y dada cualquier vecindad  $W$  de  $[A_0]$  existe una vecindad abierta  $U = \bar{s}^{-1}(W)$  del punto  $p([A_0]) = q_0$  en  $\mathrm{Proj}_n(k^N)$  tal que  $\bar{s}^{-1}(W) \subseteq \bar{p}(W)$ . Por lo tanto  $\bar{p}$  es abierta. La segunda parte de la demostración se sigue de la restricción del homomorfismo  $\bar{p}$  a  $\frac{O_N}{O_n \times O_{N-n}}$ . ■



## Capítulo 3

# El grupo de Grothendieck y K-teoría

### 3.1. Construcción de Grothendieck

Consideremos un monoide abeliano  $M$ , es decir, un conjunto con una operación binaria, denotada por  $+$ , que satisface las propiedades de grupo abeliano, excepto posiblemente la existencia de inversos. Es posible asociarle un grupo abeliano  $S(M)$  a  $M$  y un homomorfismo de monoides  $s : M \rightarrow S(M)$ , tal que tiene la siguiente propiedad universal:

*Para cada grupo abeliano  $G$  y cualquier homomorfismo de monoides  $f : M \rightarrow G$ , hay un único homomorfismo de grupos  $\tilde{f} : S(M) \rightarrow G$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s} & S(M) \\ & \searrow f & \swarrow \tilde{f} \\ & G & \end{array}$$

Existen varias posibles construcciones para  $s$  y  $S(M)$ , todas son equivalentes salvo isomorfismos.

1. Consideremos el producto  $M \times M$  y la siguiente relación de equivalencia:

$$(m, n) \sim_1 (m', n') \text{ si, y sólo si existe } p \in M \text{ tal que } m + n' + p = m' + n + p$$

entonces, definimos  $S(M) = M \times M / \sim_1$ , donde

$$\begin{aligned} s : M &\rightarrow S(M) \\ m &\mapsto [(m, 0)] \end{aligned}$$

Veamos que  $\sim_1$  es una relación de equivalencia

- a) Sea  $(m, n) \in M \times M$ , por ser  $M$  monoide existe un neutro  $e \in M$  tal que  $m + n + e = m + n + e$ , entonces  $(m, n) \sim_1 (m, n)$ .
- b) Supongamos que  $(m, n) \sim_1 (m', n')$ , entonces existe  $p \in M$  tal que  $m + n' + p = m' + n + p$  que es lo mismo que expresarlo como  $m' + n + p = m + n' + p$  por lo tanto  $(m', n') \sim_1 (m, n)$ .
- c) Supongamos que  $(m, n) \sim_1 (m', n')$  y  $(m', n') \sim_1 (\bar{m}, \bar{n})$ , entonces existen  $p, q \in M$  tales que

$$\begin{aligned} m + n' + p &= m' + n + p \\ m' + \bar{n} + q &= \bar{m} + n' + q. \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones tenemos que

$$\bar{m} + n + n' + m' + p + q = m + \bar{n} + m' + n' + q + p$$

Como  $n' + m' + p + q \in M$  tenemos que  $(m, n) \sim_1 (\bar{m}, \bar{n})$ . Por lo tanto  $\sim_1$  es una relación de equivalencia.

Veamos que  $S(M)$  es un grupo, para ello primero demostraremos que la operación está bien definida. Sean  $(m_1, m'_1) \sim_1 (n_1, n'_1)$  y  $(m_2, m'_2) \sim_1 (n_2, n'_2)$ , entonces existen  $p_1, p_2 \in M$  tales que  $m_1 + n'_1 + p_1 = m'_1 + n_1 + p_1$  y  $m_2 + n'_2 + p_2 = m'_2 + n_2 + p_2$ , sumando ambas ecuaciones tenemos que  $m_1 + m_2 + n'_1 + n'_2 + p_1 + p_2 = m'_1 + m'_2 + n_1 + n_2 + p_1 + p_2$ , debido a que  $p_1 + p_2 \in M$  se tiene que  $(m_1 + m_2, m'_1 + m'_2) \sim_1 (n_1 + n_2, n'_1 + n'_2)$  y por lo tanto la operación está bien definida.

La asociatividad y la conmutatividad son heredadas del monoide  $M \times M$ , sólo tenemos que ver la existencia de inversos. Sea  $[(m, n)] \in S(M)$ , entonces existe  $(n, m) \in S(M)$  tal que

$$[(m, n)] + [(n, m)] = [(e, e)]$$

por lo tanto  $S(M)$  es un grupo.

Falta ver que cumple la propiedad universal. Sea  $G$  un grupo y  $f : M \longrightarrow G$  un homomorfismo de monoides. Sea  $\tilde{f}$  definida por

$$\begin{aligned} \tilde{f} : S(M) &\longrightarrow G \\ [(m, n)] &\longmapsto f(m) - f(n) \end{aligned}$$

Veamos que  $\tilde{f}$  está bien definida, sea  $(m, n) \sim_1 (m', n')$  entonces existe  $p \in M$  tal que  $m + n' + p = m' + n + p$ , entonces

$$\begin{aligned} f(m + n' + p) &= f(m' + n + p) \\ \Rightarrow f(m) + f(n') + f(p) &= f(m') + f(n) + f(p) \\ \Rightarrow f(m) - f(n) &= f(m') - f(n') \\ \Rightarrow \tilde{f}([(m, n)]) &= \tilde{f}([(m', n')]) \end{aligned}$$

Notemos que  $\tilde{f}$  es homomorfismo de grupos, pues

$$\begin{aligned} \tilde{f}([(m + m', n + n')]) &= f(m + m') - f(n + n') \\ &= f(m) + f(m') - (f(n) + f(n')) \\ &= f(m) - f(n) + f(m') - f(n') \\ &= f([(m, n)]) + f([(m', n')]) \end{aligned}$$

por lo tanto  $\tilde{f}$  es un homomorfismo. Falta ver que  $\tilde{f}$  es único, sea  $g : S(M) \rightarrow G$  otro homomorfismo que satisface el mismo diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s} & S(M) \\ & \searrow f & \swarrow \tilde{f} \\ & G & \end{array}$$

es decir,  $f = g \circ s$ . Por hipótesis  $f = \tilde{f} \circ s$ , entonces para toda  $m \in M$

$$\begin{aligned} g(s(m)) &= \tilde{f}(s(m)) \\ \Rightarrow g([(m, 0)]) &= \tilde{f}([(m, 0)]) \end{aligned}$$

Por otra parte, y utilizando el hecho de que  $g([(m, 0)]) = \tilde{f}([(m, 0)])$  tenemos que

$$\begin{aligned} e &= g([(m, 0)]) - g([(m, 0)]) = \tilde{f}([(m, 0)]) - \tilde{f}([(m, 0)]) \\ \Rightarrow e &= g([(m, 0)]) + g([(0, m)]) = \tilde{f}([(m, 0)]) + \tilde{f}([(0, m)]) \\ \Rightarrow \tilde{f}([(m, 0)]) + g([(0, m)]) &= \tilde{f}([(m, 0)]) + \tilde{f}([(0, m)]) \\ \Rightarrow g([(0, m)]) &= \tilde{f}([(0, m)]) \end{aligned}$$

Así dado que cualquier elemento  $[(m, n)] \in S(M)$  se escribe como  $[(m, 0)] + [(0, n)]$  tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}([(m, n)]) &= \tilde{f}([(m, 0)] + [(0, n)]) \\ &= \tilde{f}([(m, 0)]) + \tilde{f}([(0, n)]) \\ &= g([(m, 0)]) + g([(0, n)]) \\ &= g([(m, 0)] + [(0, n)]) \\ &= g([(m, n)]) \end{aligned}$$

por lo tanto  $\tilde{f}$  es única.

### Capítulo 3

2. Una segunda construcción es considerar el cociente de  $M \times M$  con la siguiente relación de equivalencia

$$(m, n) \sim_2 (m', n') \text{ si, y sólo si existen } p, q \in M \text{ tal que } (m, n) + (p, p) = (m', n') + (q, q)$$

con

$$\begin{aligned} s' : M &\longrightarrow S(M) \\ m &\longmapsto [(m, 0)] \end{aligned}$$

Los detalles de está construcción se demuestran de manera similar que la construcción de  $\sim_1$ .

Demostraremos que cualquier  $(S(M), s)$  que satisfaga la propiedad universal es única salvo isomorfismos. Sea  $M$  un monoide abeliano, entonces consideremos la construcción  $S(M)$  junto con su homomorfismo de monoides  $s : M \longrightarrow S(M)$ . Sea  $S'(M)$  un grupo junto con un homomorfismo de monoides  $s' : M \longrightarrow S'(M)$  que satisfaga la propiedad universal.

Usando la propiedad universal tenemos que existen homomorfismos de grupos

$$\begin{aligned} t : S(M) &\longrightarrow S'(M) \\ q : S'(M) &\longrightarrow S(M) \end{aligned}$$

tales que hacen conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s} & S(M) \\ & \searrow s' & \swarrow t \\ & S'(M) & \end{array} \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s'} & S'(M) \\ & \searrow s & \swarrow q \\ & S(M) & \end{array} \quad (3.2)$$

Por otra parte, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

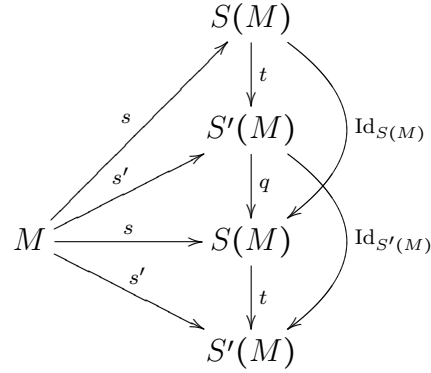
$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s} & S(M) \\ & \searrow s & \swarrow \text{Id}_{S(M)} \\ & S(M) & \end{array} \quad (3.3)$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s'} & S'(M) \\ & \searrow s' & \swarrow \text{Id}_{S'(M)} \\ & S'(M) & \end{array} \quad (3.4)$$

donde  $\text{Id}_{S(M)}$  y  $\text{Id}_{S'(M)}$  son homomorfismos de grupos.



Utilizando la conmutatividad de los diagramas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 tenemos el siguiente diagrama conmutativo



donde  $q \circ t = \text{Id}_{S(M)}$  y  $t \circ q = \text{Id}_{S'(M)}$ , por lo tanto  $t$  es un isomorfismo de grupos y  $S(M) \cong S'(M)$ .

En cada una de las construcciones anteriores, cada elemento de  $S(M)$  puede ser escrito de la forma  $s(m) - s(n)$  con  $m, n \in M$ . En general el morfismo  $s$  no es inyectivo (Ejemplo 3.1.3).

**Ejemplo 3.1.1.** Sea  $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$  un monoide abeliano, demostraremos que  $S(\mathbb{N} \cup \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ . Si tomamos el homomorfismo de monoides

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \cup \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto n \end{aligned}$$

tenemos que demostrar que  $\tilde{f}$  es una biyección.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \cup \{0\} & \xrightarrow{s} & S(M) = (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\}) / \sim_1 \\ & \searrow f & \swarrow \tilde{f} \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

**Inyectividad.** Sea  $[(m, n)] \in \text{Ker } \tilde{f}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}([(m, n)]) &= f(m) - f(n) \\ &= m - n = 0 \end{aligned}$$

entonces  $m = n$ . Así  $(m, n) \sim_1 (0, 0)$  pues  $0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  es tal que

$$m + 0 + 0 = n + 0 + 0.$$

Por lo tanto  $\tilde{f}$  es inyectiva.

**Sobreyectividad.** Sea  $m \in \mathbb{Z}$ , si  $m \geq 0$  existe  $[(m, 0)] \in S(M)$  tal que  $\tilde{f}([(m, 0)]) = f(m) - f(0) = m$ . Si  $m \leq 0$ , haciendo  $m = -n$  para algún  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  existe  $[(0, n)] \in S(M)$  tal que  $\tilde{f}([(0, n)]) = f(0) - f(n) = -n = m$ . Así  $\tilde{f}$  es sobreyectiva y por lo tanto  $S(M) \cong \mathbb{Z}$ .

★

**Ejemplo 3.1.2.** Sea  $M = \mathbb{Z} - \{0\}$ , un monoide abeliano donde la operación binaria es la multiplicación. Entonces  $S(M) \cong \mathbb{Q} - \{0\}$ . En efecto, sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Q} - \{0\} \\ n &\longmapsto n \end{aligned}$$

tenemos que demostrar que  $\tilde{f}$  es una biyección.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} - \{0\} & \xrightarrow{s} & S(M) = (\mathbb{Z} - \{0\}) \times (\mathbb{Z} - \{0\}) / \sim_1 \\ & \searrow f & \swarrow \tilde{f} \\ & \mathbb{Q} - \{0\} & \end{array}$$

**Inyectividad.** Sea  $[(p, q)] \in \text{Ker } \tilde{f}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \tilde{f}([(p, q)]) = f(p) \cdot (f(q))^{-1} \\ &= p \cdot q^{-1} \end{aligned}$$

entonces  $p = q$ . Así  $(p, q) \sim_1 (1, 1)$  pues  $1 \in \mathbb{Z} - \{0\}$  es tal que

$$p \cdot 1 \cdot 1 = q \cdot 1 \cdot 1.$$

Por lo tanto  $\tilde{f}$  es inyectiva.

**Sobreyectividad.** Sea  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} - \{0\}$  con  $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , así

$$\begin{aligned} \tilde{f}([(p, q)]) &= f(p) \cdot (f(q))^{-1} \\ &= p \cdot q^{-1} \\ &= \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

Así  $\tilde{f}$  es sobreyectiva y por lo tanto  $S(M) \cong \mathbb{Q}$ .

★

**Ejemplo 3.1.3.** Sea  $M$  un monoide abeliano con la propiedad de que existe un elemento  $\infty \in M$  tal que  $m + \infty = \infty$  para todo  $m \in M$ . Entonces  $S(M) = 0$  ya que cada elemento de  $S(M)$  se escribe de la forma  $s(m) - s(n)$ , entonces

$$\begin{aligned} s(m) - s(n) &= s(m) + s(\infty) - s(n) - s(\infty) \\ &= s(m + \infty) - s(n + \infty) \\ &= s(\infty) - s(\infty) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Otros casos donde el grupo de Grothendieck es igual a el grupo trivial, es considerando el monoide de números enteros con la multiplicación  $(\mathbb{Z}, \cdot)$ , o considerar el conjunto de números reales positivos junto con 0, con la multiplicación como operación binaria  $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \cdot)$ .

★

**Nota 3.1.4.** El grupo  $S(M)$  depende funtorialmente de  $M$ . Si  $f : M \rightarrow N$  es un homomorfismo de monoides, la propiedad universal permite definir un único homomorfismo  $S(f) : S(M) \rightarrow S(N)$  tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ S(M) & \xrightarrow{S(f)=s' \circ f} & S(N) \end{array}$$

donde  $s' \circ f$  es homomorfismo de monoides. Más aún  $S(g \circ f) = S(g) \circ S(f)$ , ya que si  $f : M \rightarrow N$  y  $g : N \rightarrow N'$  son homomorfismos de monoides tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & N' \\ s \downarrow & & s' \downarrow & & s'' \downarrow \\ S(M) & \xrightarrow{S(f)} & S(N) & \xrightarrow{S(g)} & S(N') \end{array}$$

$\curvearrowright$   
 $S(g \circ f)$

Por unicidad tenemos que  $S(g \circ f) = S(g) \circ S(f)$ , también para  $\text{Id}_M : M \rightarrow M$  tenemos que  $S(\text{Id}_M) = \text{Id}_{S(M)}$

**Definición 3.1.5.** Una **categoría aditiva**  $\mathcal{C}$  es una categoría con objeto cero en la que cualesquiera dos objetos poseen un producto y el conjunto de morfismos  $\mathcal{C}(X, Y)$  es un grupo abeliano tal que la composición

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$$

es bilineal.

**Definición 3.1.6.** Sean  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  categorías aditivas. Un funtor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es llamado **funtor aditivo** si para  $A, B \in \mathcal{A}$ , la función  $F_{A,B} : \mathcal{A}(A, B) \rightarrow \mathcal{B}(F(A), F(B))$  dada por  $F_{A,B}(f) = F(f)$  es un homomorfismo de grupo. En otras palabras, si  $f, g : A \rightarrow B$  son dos morfismos, entonces

$$F(f + g) = F(f) + F(g).$$

Consideremos una categoría aditiva  $\mathcal{C}$ , si  $E$  es un objeto en  $\mathcal{C}$ , denotamos la clase de isomorfismos de  $E$  por  $\overline{E}$ . Denotaremos por  $\phi(\mathcal{C})$  al conjunto de clases de isomorfismos, y le daremos estructura de monoide definiendo la operación  $\overline{E} + \overline{F} = \overline{E \oplus F}$ , donde  $E \oplus F$  es el producto de la categoría.

Veamos que la operación  $+$  está bien definida, supongamos que  $E \cong E'$  y  $F \cong F'$  y sean  $\theta_1 : E \rightarrow E'$ ,  $\theta_2 : F \rightarrow F'$  los respectivos isomorfismos, entonces existen morfismos  $h$  y  $h'$  únicos tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 \text{Id}_{E'} \curvearrowright \begin{array}{ccccc}
 E' & \xrightarrow{i'} & E' \oplus F' & \xleftarrow{j'} & F' \\
 \uparrow \theta_1 & & \uparrow h & & \uparrow \theta_2 \\
 E & \xrightarrow{i} & E \oplus F & \xleftarrow{j} & F \\
 \uparrow \theta_1^{-1} & & \uparrow h' & & \uparrow \theta_2^{-1} \\
 E' & \xrightarrow{i'} & E' \oplus F' & \xleftarrow{j'} & F'
 \end{array} & \xrightarrow{\text{Id}_F} & \begin{array}{c}
 \text{Id}_E \curvearrowright \begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{i} & E \oplus F & \xleftarrow{j} & F \\
 \uparrow \theta_1^{-1} & & \uparrow h' & & \uparrow \theta_2^{-1} \\
 E' & \xrightarrow{i'} & E' \oplus F' & \xleftarrow{j'} & F' \\
 \uparrow \theta_1 & & \uparrow h & & \uparrow \theta_2 \\
 E & \xrightarrow{i} & E \oplus F & \xleftarrow{j} & F
 \end{array} & \xrightarrow{\text{Id}_F} & \begin{array}{c}
 \text{Id}_F \curvearrowright \begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{i} & E \oplus F & \xleftarrow{j} & F \\
 \uparrow \theta_1^{-1} & & \uparrow h' & & \uparrow \theta_2^{-1} \\
 E' & \xrightarrow{i'} & E' \oplus F' & \xleftarrow{j'} & F' \\
 \uparrow \theta_1 & & \uparrow h & & \uparrow \theta_2 \\
 E & \xrightarrow{i} & E \oplus F & \xleftarrow{j} & F
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (3.5)$$

Utilizando la conmutatividad de los diagramas 3.5 y 3.6, y la propiedad universal del producto se tiene que  $h \circ h' = \text{Id}_{E' \oplus F'}$  y  $h' \circ h = \text{Id}_{E \oplus F}$ . Así  $E \oplus F \cong E' \oplus F'$  y por lo tanto la operación  $+$  está bien definida. Más aun, usando la propiedad universal se demuestra que  $\overline{E \oplus F} \cong \overline{F \oplus E}$ ,  $\overline{(E \oplus F) \oplus G} \cong \overline{E \oplus (F \oplus G)}$  y  $\overline{E \oplus 0} \cong \overline{E}$  donde  $0$  es el objeto cero en  $\mathcal{C}$ . Entonces tenemos una estructura de monoide abeliano para  $\phi(\mathcal{C})$ .

**Definición 3.1.7.** En la situación del ejemplo anterior, decimos que  $S(M)$ , donde  $M = \phi(\mathcal{C})$ , es llamado el **grupo de Grothendieck de  $\mathcal{C}$**  y se denota por  $K(\mathcal{C})$ .

Notemos que si  $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  es un funtor aditivo, entonces  $\varphi$  induce un homomorfismo de monoides  $\phi(\varphi) : \phi(\mathcal{C}) \rightarrow \phi(\mathcal{C}')$ . En efecto, sean  $E, F$  dos representantes de  $\overline{E} \in \phi(\mathcal{C})$ , donde  $f : E \xrightarrow{\cong} F$  es el isomorfismo correspondiente, entonces por funtorialidad  $\varphi(f) : \varphi(E) \rightarrow \varphi(F)$  es isomorfismo. De esta manera la función

$$\begin{array}{ccc}
 \phi(\varphi) : \phi(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \phi(\mathcal{C}') \\
 \overline{E} & \longmapsto & \overline{\varphi(E)}
 \end{array}$$

está bien definida.

Veamos que  $\phi(\varphi)$  es un homomorfismo de monoides. Sean  $\overline{E}, \overline{F} \in \phi(\mathcal{C})$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 \phi(\varphi)(\overline{E \oplus F}) &= \overline{\varphi(E \oplus F)} \\
 &= \overline{\varphi(E) \oplus \varphi(F)} \\
 &= \overline{\varphi(E) + \varphi(F)} \\
 &= \phi(\varphi)(\overline{E}) + \phi(\varphi)(\overline{F})
 \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da usando la propiedad universal de producto y co-producto obteniendo que  $\varphi(E \oplus F) \cong \varphi(E) \oplus \varphi(F)$  ([20], Capítulo 2) y la tercera igualdad se debe a la definición de la operación  $+$ , la cual comprobamos antes que está bien definida.

Usando la nota 3.1.4, tenemos que el homomorfismo de monoides  $\phi(\varphi) : \phi(\mathcal{C}) \rightarrow \phi(\mathcal{C}')$  induce un homomorfismo de grupos

$$\varphi_* : K(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\mathcal{C}').$$

Sea  $\mathcal{C}''$  otra categoría aditiva y  $\psi : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$  un funtor aditivo, entonces tenemos que  $(\psi \circ \varphi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$  por la nota 3.1.4.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \phi(\psi \circ \varphi) & & \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 \phi(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\phi(\varphi)} & \phi(\mathcal{C}') & \xrightarrow{\phi(\psi)} & \phi(\mathcal{C}'') \\
 \downarrow s & & \downarrow s' & & \downarrow s'' \\
 K(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\varphi_*} & K(\mathcal{C}') & \xrightarrow{\psi_*} & K(\mathcal{C}'') \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & (\psi \circ \varphi)_* & & 
 \end{array}$$

**Ejemplo 3.1.8.** Sea  $k$  un campo arbitrario y sea  $\mathcal{C}$  una categoría cuyos objetos son  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita y los morfismos son funciones lineales. Entonces de la teoría clásica de espacios vectoriales tenemos que  $\phi(\mathcal{C}) \cong \mathbb{N}$ , ya que la clase de isomorfismos queda determinada por la dimensión del espacio vectorial. Así usando el Ejemplo 3.1.1 tenemos que  $K(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}$ .

★

**Ejemplo 3.1.9.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva dotada con un funtor aditivo  $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  y el isomorfismo  $\tau + \text{Id}_{\mathcal{C}} \cong \tau$ , esto es,  $\tau(E) \oplus E \cong \tau(E)$  para todo  $E \in \mathcal{C}_0$  y  $\tau(f) \oplus f \cong \text{Id}$  para  $f \in \mathcal{C}(A, B)$  donde  $\tau(f) \oplus f$  es el único morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccc}
 \tau(B) & \longrightarrow & \tau(B) \oplus B & \longleftarrow & B \\
 \tau(f) \downarrow & & \tau(f) \oplus f \downarrow & & f \downarrow \\
 \tau(A) & \longrightarrow & \tau(A) \oplus A & \longleftarrow & A
 \end{array}$$

Entonces  $K(\mathcal{C}) = 0$ , ya que la identidad anterior implica  $s(\tau(E)) + s(E) = s(\tau(E))$ , entonces  $s(E) = 0$ , así tenemos las mismas condiciones que el caso del Ejemplo 3.1.3.

★

**Ejemplo 3.1.10.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría cuyos objetos son  $k$ -espacios vectoriales, definimos el funtor

$$\begin{aligned}
 \tau : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\
 E &\longmapsto E \oplus E \oplus \dots \oplus E \oplus \dots
 \end{aligned}$$

Este funtor cumple la condición planteada en el ejemplo anterior, debido

$$\begin{aligned}
 s(\tau(E)) \oplus s(E) &\cong s(E \oplus E \oplus \dots \oplus E \oplus \dots) \oplus s(E) \\
 &\cong s(E \oplus E \oplus \dots \oplus E \oplus \dots) \\
 &\cong s(\tau(E)).
 \end{aligned}$$

**Lema 3.1.11.** *La categoría de haces vectoriales sobre  $X$ , denotada por  $\mathcal{E}(X)$ , es una categoría aditiva donde el producto es la suma de Whitney.*

**Demostración.** Sean  $E, F, G \in \mathcal{E}(X)_0$ , entonces  $E \oplus F \in \mathcal{E}(X)_0$  ya que la categoría de espacios vectoriales  $\mathcal{E}$  es una categoría aditiva. Consideremos las inclusiones  $\iota_E : E \rightarrow E \oplus F$  y  $\iota_F : F \rightarrow E \oplus F$  y los morfismos generales  $f : E \rightarrow G$  y  $g : F \rightarrow G$ , entonces existe un único morfismo  $h : E \oplus F \rightarrow G$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & f \nearrow & \uparrow h & \nwarrow g & \\ E & \xrightarrow{\iota_E} & E \oplus F & \xleftarrow{\iota_F} & F \end{array}$$

donde  $h = f \oplus g$ . Por lo tanto  $\mathcal{E}(X)$  posee un producto.

Veamos que  $\mathcal{E}(X)(E, F)$  es un grupo abeliano. Sean  $f, g : E \rightarrow F$  morfismos generales, definimos la suma de morfismos generales en las fibras como

$$(f + g)_x(e) = f_x(e) + g_x(e)$$

así  $\mathcal{E}(X)(E, F)$  tiene estructura de grupo.

Sean  $E, F, G \in \mathcal{E}(X)_0$ , demostraremos que la composición

$$\mathcal{E}(X)(E, F) \times \mathcal{E}(X)(F, G) \rightarrow \mathcal{E}(X)(E, G)$$

es bilineal. Sean  $f_1, f_2 \in \mathcal{E}(X)(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{E}(X)(F, G)$  y  $e \in E_x$  entonces

$$\begin{aligned} (g \circ (f_1 + f_2))_x(e) &= g_x((f_1 + f_2)_x(e)) \\ &= g_x((f_1)_x(e) + (f_2)_x(e)) \\ &= g_x((f_1)_x(e)) + g_x((f_2)_x(e)) \\ &= (g \circ f_1)_x(e) + (g \circ f_2)_x(e) \\ &= (g \circ f_1 + g \circ f_2)_x(e) \end{aligned}$$

donde esta última igualdad se debe a que  $g$  es un morfismo general. El caso  $(f_1 + f_2) \circ h = f_1 \circ h + f_2 \circ h$  se demuestra de manera análoga. ■

Consideremos la categoría  $\mathcal{E}(X)$ . Denotaremos por  $K(X)$  al grupo de Grothendieck de  $\mathcal{E}(X)$ , si queremos ser más precisos, denotaremos por  $K_k(X)$  al grupo de Grothendieck de la clase de isomorfismos de haces vectoriales sobre  $X$  con coeficientes en un campo  $k$  ( $k = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ). El objeto principal de la  $K$ -teoría topológica es calcular  $K(X)$  para espacios interesantes  $X$ . Observemos que la  $K$ -teoría topológica viene siendo un caso especial de la  $K$ -teoría algebraica. El Teorema I.6.17 de [16] muestra que la categoría  $\mathcal{E}(X)$  es equivalente a  $\mathcal{P}(A)$ , la categoría cuyos objetos

son  $A$ -módulos proyectivos finitamente generados y cuyos morfismos son funciones  $A$ -lineales donde  $A$  es el anillo de funciones continuas sobre  $X$ . En consecuencia las construcciones de Grothendieck  $K(X)$  y  $K(\mathcal{P}(A))$  son isomorfas. Muchas de las técnicas de  $K$ -teoría algebraica están inspiradas por las técnicas de la  $K$ -teoría topológica.

Para la categoría  $\mathcal{E}(X)$  tenemos que  $K(X)$  depende contravariantemente, esto es, si  $f : Y \rightarrow X$  es una función continua, entonces  $f$  induce un funtor  $f^* : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ , que a su vez induce un homomorfismo de grupos  $K(X) \rightarrow K(Y)$  denotado nuevamente por  $f^*$ . Usando el Lema 1.1.13 tenemos  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$  y  $\text{Id}^* = \text{Id}$ .

**Proposición 3.1.12.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva y sea  $[E] = s(\overline{E})$  la clase del objeto  $E \in \mathcal{C}_0$  en el grupo de Grothendieck  $K(\mathcal{C})$ . Entonces cada elemento de  $K(\mathcal{C})$  se puede expresar de la forma  $[E] - [F]$ . Más aún  $[E] - [F] = [E'] - [F']$  en  $K(\mathcal{C})$  si y sólo si existe  $G \in \mathcal{C}_0$  tal que*

$$E \oplus F' \oplus G \cong E' \oplus F \oplus G$$

**Demostración.** Sean  $E, F \in \mathcal{C}_0$ , por construcción del grupo de Grothendieck tenemos que al par  $(\overline{E}, \overline{F})$  es posible expresarlo como  $s(\overline{E}) - s(\overline{F}) = [E] - [F]$ . Más aún,  $(\overline{E}, \overline{F})$  define el mismo elemento  $(\overline{E}', \overline{F}')$  en  $K(\mathcal{C})$ , si y sólo si existe  $\overline{G} \in \phi(\mathcal{C})$  (esto es  $G \in \mathcal{C}_0$ ) tal que  $\overline{E} + \overline{F}' + \overline{G} = \overline{E}' + \overline{F} + \overline{G}$ , es decir, si y sólo si  $E \oplus F \oplus G \cong E' \oplus F' \oplus G$ . ■

**Corolario 3.1.13.** *Sean  $E$  y  $F$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $[E] = [F]$  si y sólo si existe un objeto  $G \in \mathcal{C}_0$  tal que  $E \oplus G \cong F \oplus G$ .*

**Definición 3.1.14.** *Denotaremos por  $\theta_n$  al haz vectorial trivial de rango  $n$  sobre  $X$ , es decir,  $\theta_n = X \times k^n$ .*

**Proposición 3.1.15.** *Sea  $X$  un espacio topológico compacto, entonces cualquier elemento  $x \in K(X)$  puede ser expresado de la forma  $[E] - [\theta_n]$  para algún  $n$  y algún haz vectorial  $E$  sobre  $X$ . Más aún,  $[E] - [\theta_n] = [F] - [\theta_p]$  si y sólo si existe un entero  $q$  tal que  $E \oplus \theta_{p+q} \cong F \oplus \theta_{n+q}$ .*

**Demostración.** Aplicaremos la Proposición 3.1.12 a la categoría  $\mathcal{C} = \mathcal{E}(X)$ . Sabemos que cada elemento  $x \in K(X)$  se escribe de la forma  $[E_1] - [F_1]$ , donde  $E_1$  y  $F_1$  son haces vectoriales sobre  $X$ . Aplicando la Proposición 1.7.18 existe un haz vectorial  $F_2$  tal que  $F_1 \oplus F_2$  es un haz trivial, digamos  $\theta_n$ . Calculando

$$\begin{aligned} [E_1] - [F_1] &= [E_1] + [F_2] - [F_2] - [F_1] \\ &= [E_1] + [F_2] - ([F_2] + [F_1]) \\ &= [E] - [\theta_n] \end{aligned}$$

donde  $E = E_1 \oplus F_2$ .

Probaremos ahora la segunda parte de la proposición.

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $[E] - [\theta_n] = [F] - [\theta_p]$ . Por la segunda parte de la Proposición 3.1.12, existe un haz vectorial  $G \in \mathcal{C}_0$  tal que  $E \oplus \theta_p \oplus G \cong F \oplus \theta_n \oplus G$ . Utilizando el Teorema 1.7.18 existe  $G_1 \in \mathcal{C}_0$  tal que  $G \oplus G_1 \cong \theta_q$  para algún entero  $q$ , entonces

$$\begin{aligned} E \oplus \theta_{p+q} &\cong E \oplus \theta_p \oplus \theta_q \\ &\cong E \oplus \theta_p \oplus G \oplus G_1 \\ &\cong F \oplus \theta_n \oplus G \oplus G_1 \\ &\cong F \oplus \theta_n \oplus \theta_q \\ &\cong F \oplus \theta_{n+q} \end{aligned}$$

y por lo tanto  $E \oplus \theta_{p+q} \cong F \oplus \theta_{n+q}$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que existe un entero  $q$  tal que  $E \oplus \theta_{p+q} \cong F \oplus \theta_{n+q}$ , esto es  $E \oplus \theta_p \oplus \theta_q \cong F \oplus \theta_n \oplus \theta_q$ . Usando la Proposición 3.1.12 se tiene que  $[E] - [\theta_n] = [F] - [\theta_p]$ .

■

**Corolario 3.1.16.** *Sean  $E, F \in \mathcal{E}(X)_0$  haces vectoriales sobre  $X$ , entonces  $[E] = [F]$  en  $K(X)$  si y sólo si  $E \oplus \theta_n \cong F \oplus \theta_n$  para algún entero  $n$ .* ■

Sabemos que el funtor  $K : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathbf{Gr}_{\mathbf{ab}}$  es contravariante, entonces la proyección  $\alpha' : X \rightarrow P = \{x_0\}$  con  $x_0 \in X$  induce un homomorfismo de monoides  $\tilde{\alpha} : \phi(\{x_0\}) \rightarrow \phi(X)$ , que a su vez induce un homomorfismo de grupos  $(\alpha')^* : K(P) \rightarrow K(X)$  y como  $\mathbb{Z} \cong K(P)$  tenemos un homomorfismo de grupos  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow K(X)$ . Definimos la  **$K$ -teoría reducida** como

$$\tilde{K}(X) = \text{Coker } (\alpha')^* = \frac{K(X)}{\text{Im } (\alpha')^*}.$$

Si queremos ser más específicos denotaremos a  $\tilde{K}(X)$  por  $\tilde{K}_k(X)$  con  $k = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ .

**Proposición 3.1.17.** *Si  $X \neq \emptyset$ , entonces la siguiente sucesión es exacta*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} K(X) \xrightarrow{\beta} \tilde{K}(X) \longrightarrow 0$$

donde  $\beta : K(X) \rightarrow \tilde{K}(X)$  es la proyección canónica de  $K(X)$  a  $\tilde{K}(X) = \frac{K(X)}{\text{Im } (\alpha')^*}$ . Más aún, la elección de un punto  $x_0 \in X$  determina una escisión canónica tal que  $\tilde{K}(X) \cong \text{Ker } (K(X) \rightarrow K(\{x_0\}) \cong \mathbb{Z})$  y

$$K(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}(X)$$

**Demostración.** Sea  $\iota : \{x_0\} \rightarrow X$  la inclusión de  $\{x_0\}$  en  $X$ . Sea  $\alpha' : X \rightarrow \{x_0\}$  la proyección de  $X$  a  $x_0$ . Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \{x_0\} & \xrightarrow{\iota} & X & \xrightarrow{\alpha'} & \{x_0\} \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & \text{Id}_{x_0} & & \end{array}$$



Aplicando el funtor  $K$  obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Id}_{K(\{x_0\})} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 K(\{x_0\}) & \xleftarrow{\iota^*} & K(X) & \xleftarrow{(\alpha')^*} & K(\{x_0\}) \\
 \uparrow \gamma \cong & & & & \uparrow \gamma \cong \\
 \mathbb{Z} & & & & \mathbb{Z}
 \end{array}$$

$\alpha$

entonces

$$\begin{aligned}
 (\gamma^{-1} \circ \iota^*) \circ \alpha &= \gamma^{-1} \circ \iota^* \circ (\alpha')^* \circ \gamma \\
 &= \gamma^{-1} \circ \text{Id}_{K(\{x_0\})} \circ \gamma \\
 &= \text{Id}_{\mathbb{Z}}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\alpha$  tiene un inverso izquierdo que es  $\gamma^{-1} \circ \iota^*$ . Entonces la sucesión es exacta y se escinde, por lo tanto  $K(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}(X)$ .  
 ■

**Lema 3.1.18.** Usando la notación de la Proposición 3.1.17,  $\text{Im } \alpha$  es el conjunto de diferencias de clases de isomorfismo de haces vectoriales triviales, es decir,

$$\text{Im } \alpha = \{[\theta_n] - [\theta_m] \mid n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

**Demostración.** Sea  $(\alpha')^* : \mathcal{E}(\{x_0\}) \rightarrow \mathcal{E}(X)$  el funtor asociado a la función  $\alpha' : X \rightarrow \{x_0\}$ , dado por el pull back de la definición 1.1.12. Sea  $E \in \text{Im } (\alpha')^*$ , entonces probaremos que  $E \cong X \times k^N$  para alguna  $N \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 E = (\alpha')^*(E') & & E' \\
 \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\
 X & \xrightarrow{\alpha'} & \{x_0\}
 \end{array}$$

En efecto,  $(\alpha')^*(E') = E$  para algún haz vectorial trivial  $E' = \{x_0\} \times k^N$  para alguna  $N \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\begin{aligned}
 E = (\alpha')^*(E') &= \{(x, e) \in X \times E' \mid \pi(e) = f(x)\} \\
 &= \{(x, (x_0, v)) \in X \times (\{x_0\} \times k^N) \mid \pi(x_0, v) = x_0\} \\
 &= \{(x, (x_0, v)) \in X \times (\{x_0\} \times k^N)\} \\
 &\cong \{(x, v) \in X \times k^N\} \\
 &= X \times k^N.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $E \cong X \times k^N$ . Recíprocamente, si  $E \in \mathcal{E}(X)$  es tal que  $E \cong X \times k^N$  para algún  $N \in \mathbb{N}$  entonces claramente  $E \cong (\alpha')^*(\{x_0\} \times k^N)$ . Por otro lado, usando

el homomorfismo de monoides inducido por  $\alpha'$ ,  $\phi(\alpha') : \phi(\{x_0\}) \longrightarrow \phi(X)$  tenemos que  $\text{Im } \phi(\alpha')$  es el submonoide de clases de isomorfismo de haces vectoriales sobre  $X$ . Entonces, usando el homomorfismo de grupos inducido por la construcción de Grothendieck  $(\alpha')^* : K(\{x_0\}) \longrightarrow K(X)$ , tenemos que

$$\text{Im } (\alpha')^* = \{[\theta_n] - [\theta_m] \mid n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

■

En particular  $[\theta_n] \in \text{Im } (\alpha')^* = \text{Ker } \beta$  para toda  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Por lo tanto  $\text{Ker } \beta$  contiene al conjunto de clases de isomorfismos de haces vectoriales triviales.

**Proposición 3.1.19.** *Sea  $\gamma : \phi(X) \longrightarrow \tilde{K}(X)$  definida por la composición*

$$\phi(X) \xrightarrow{s} K(X) \xrightarrow{\beta} \tilde{K}(X)$$

donde  $s$  es el morfismo dado por la construcción de Grothendieck y  $\beta$  está definida en la proposición anterior. Entonces  $\gamma$  es sobreyectiva. Más aún  $\gamma(\overline{E}) = \gamma(\overline{F})$ , si y sólo si  $E \oplus \theta_n \cong F \oplus \theta_p$  para algún haz trivial  $\theta_n$  y  $\theta_p$ .

**Demostración.** Sea  $\overline{E} \in \tilde{K}(X)$ . Como  $\beta$  es sobreyectiva existe  $[E] \in K(X)$  tal que  $\beta([E]) = \overline{E}$ , usando la Proposición 3.1.15  $[E] = [F] - [\theta_n]$  para algún haz vectorial  $F$  y para algún un haz vectorial trivial  $\theta_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Usando el hecho de que  $[\theta_n] \in \text{Ker } \beta$  por el comentario despues del Lema 3.1.18, es decir,  $\beta([\theta_n]) = 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma(\overline{F}) &= \beta(s(\overline{F})) \\ &= \beta([F]) \\ &= \beta([F]) - \beta([\theta_n]) \\ &= \beta([F] - [\theta_n]) \\ &= \beta([E]) \\ &= \overline{E}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\gamma : \phi \longrightarrow \tilde{K}(X)$  es sobreyectiva.

Afirmar que  $\gamma(\overline{E}) = \gamma(\overline{F})$  es equivalente a afirmar que  $[E] - [F] = [\theta_p] - [\theta_r]$  para algún par de enteros  $p, r$ . Por la Proposición 3.1.12 esto se cumple si y sólo si  $E \oplus \theta_r \oplus \theta_t \cong F \oplus \theta_p \oplus \theta_t$  para algún entero  $t$ , entonces  $E \oplus \theta_s \cong F \oplus \theta_q$ , con  $s = r + t$  y  $q = p + t$ . ■

La proposición anterior da una conveniente definición para  $\tilde{K}(X)$ , es decir,  $\tilde{K}(X)$  es cociente de  $\phi(X)$  con la relación  $\overline{E} \sim \overline{F}$  si y sólo si existen enteros  $n, p$  tal que  $E \oplus \theta_n \cong F \oplus \theta_p$

**Teorema 3.1.20.** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos compactos y sean  $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$  funciones continuas homotópicas. Entonces  $f_0$  y  $f_1$  inducen los mismos homomorfismos  $K(Y) \longrightarrow K(X)$  y  $\tilde{K}(Y) \longrightarrow \tilde{K}(X)$ .*

**Demostración.** De acuerdo con el Teorema 2.1.2 las funciones  $f_0$  y  $f_1$  inducen haces isomorfos  $f_0^*(E) \cong f_1^*(E)$  para todo  $E \in \mathcal{E}(Y)$ , esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(Y) &\longrightarrow \mathcal{E}(X) \\ E &\longmapsto f_0^*(E) \cong f_1^*(E) \end{aligned}$$

para todo  $E \in \mathcal{E}(Y)$ . Así inducen las funciones

$$\begin{aligned} \overline{f}_0^* : \phi(Y) &\longrightarrow \phi(X) \\ \overline{E} &\longmapsto \overline{f_0^*(E)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{f}_1^* : \phi(Y) &\longrightarrow \phi(X) \\ \overline{E} &\longmapsto \overline{f_1^*(E)} \end{aligned}$$

las cuales están bien definidas pues  $f_0^*$  y  $f_1^*$  son funtores. Así  $\overline{f}_0^*(E) = \overline{f}_1^*(E)$  pues  $f_0^*(E) \cong f_1^*(E)$  para todo  $E \in \mathcal{E}(Y)$ . En consecuencia  $\overline{f}_0^* = \overline{f}_1^*$  inducen el mismo homomorfismo de grupos  $f_0^* = f_1^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$ .

Por otra parte, sean  $\alpha : X \longrightarrow P$  y  $\beta : Y \longrightarrow P$  las proyecciones de los espacios  $X$  y  $Y$  a un punto  $P = \{x_0\}$ , respectivamente. Debido a que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K(Y) & \xrightarrow{f_i^*} & K(X) \\ & \searrow \beta^* \quad \nearrow \alpha^* & \\ & K(P) & \end{array}$$

para  $i = 1, 2$  se tiene que  $f_i^*(\text{Im } \beta^*) = \text{Im } \alpha^*$  para  $i = 1, 2$ . Luego,  $f_i^*$  induce un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_i : \widetilde{K}(Y) = K(Y)/\text{Im } \beta &\longrightarrow \widetilde{K}(X) = K(X)/\text{Im } \alpha \\ \overline{x} &\longmapsto \overline{f_i^*(x)} \end{aligned}$$

el cual está bien definido para  $i = 1, 2$ . De la primera parte de la demostración tenemos que  $f_1^* = f_2^*$ , por lo tanto  $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$ . ■

**Lema 3.1.21.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos monoides abelianos, entonces  $S(M_1 \oplus M_2) \cong S(M_1) \oplus S(M_2)$ .

**Demostración.** Sean  $s_1 : M_1 \longrightarrow S(M_1)$ ,  $s_2 : M_2 \longrightarrow S(M_2)$  las completaciones de Grothendieck para  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente. Veamos que  $s_1 \oplus s_2 : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow S(M_1) \oplus S(M_2)$  es la completación de Grothendieck para  $M_1 \oplus M_2$ , y así tendremos que  $S(M_1) \oplus S(M_2) \cong S(M_1 \oplus M_2)$ .

Sea  $G$  un grupo abeliano y sea  $f : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow G$  cualquier homomorfismo de monoides, entonces existen únicas  $h_1 : S(M_1) \longrightarrow G$  y  $h_2 : S(M_2) \longrightarrow G$  tal que hacen conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{s_1} & S(M_1) \\ & \searrow f \circ \iota_1 & \swarrow h_1 \\ & G & \end{array} \quad (3.7)$$

$$\begin{array}{ccc} M_2 & \xrightarrow{s_2} & S(M_2) \\ & \searrow f \circ \iota_2 & \swarrow h_2 \\ & G & \end{array} \quad (3.8)$$

donde  $\iota_1 : M_1 \rightarrow M_1 \oplus M_2$  y  $\iota_2 : M_2 \rightarrow M_1 \oplus M_2$  son las inclusiones canónicas.

Sean  $\pi_1 : S(M_1) \oplus S(M_2) \rightarrow S(M_1)$  y  $\pi_2 : S(M_1) \oplus S(M_2) \rightarrow S(M_2)$  las proyecciones canónicas. Sea

$$\begin{aligned} h : S(M_1) \oplus S(M_2) &\rightarrow G \\ (m_1, m_2) &\mapsto h_1 \circ \pi_1(m_1, m_2) + h_2 \circ \pi_2(m_1, m_2) \end{aligned}$$

entonces  $h$  es tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_1 \oplus M_2 & \xrightarrow{s_1 \oplus s_2} & S(M_1) \oplus S(M_2) \\ & \searrow f & \swarrow h \\ & G & \end{array} \quad (3.9)$$

En efecto, sea  $(m_1, m_2) \in M_1 \oplus M_2$  entonces

$$\begin{aligned} (h \circ (s_1 \oplus s_2))(m_1, m_2) &= h(s_1(m_1), s_2(m_2)) \\ &= (h_1 \circ \pi_1 + h_2 \circ \pi_2)(s_1(m_1), s_2(m_2)) \\ &= h_1 \circ \pi_1(s_1(m_1), s_2(m_2)) + h_2 \circ \pi_2(s_1(m_1), s_2(m_2)) \\ &= h_1(s_1(m_1)) + h_2(s_2(m_2)) \\ &= f(\iota_1(m_1)) + f(\iota_2(m_2)) \\ &= f(m_1, 0) + f(0, m_2) \\ &= f(m_1, m_2) \end{aligned}$$

Veamos que  $h$  es el único homomorfismo que hace conmutar el diagrama 3.9. Sea  $g : S(M_1) \oplus S(M_2) \rightarrow G$  tal que también hace conmutar el diagrama 3.9, esto es,  $g \circ (s_1 \oplus s_2) = f$ . Notemos que  $g|_{S(M_1)} : S(M_1) \rightarrow G$  es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{s_1} & S(M_1) \\ & \searrow f \circ \iota_1 & \swarrow g|_{S(M_1)} \\ & G & \end{array} \quad (3.10)$$

es decir,  $g|_{S(M_1)} = g \circ j_1$  donde  $j_1 : S(M_1) \rightarrow S(M_1) \oplus S(M_2)$  es la inclusión canónica.

En efecto, sea  $m_1 \in M_1$  entonces

$$\begin{aligned}
 g|_{S(M_1)} \circ s_1(m_1) &= g \circ j_1(s_1(m_1)) \\
 &= g(s_1(m_1), 0) \\
 &= g(s_1(m_1), s_2(0)) \\
 &= g \circ (s_1 \oplus s_2)(m_1, 0) \\
 &= f(m_1, 0) \\
 &= f \circ \iota_1(m_1)
 \end{aligned}$$

por lo tanto 3.10 es un diagrama conmutativo.

Análogamente,  $g|_{S(M_2)} : S(M_2) \rightarrow G$  es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 M_2 & \xrightarrow{s_2} & S(M_2) \\
 & \searrow f \circ \iota_2 & \swarrow g|_{S(M_2)} \\
 & G &
 \end{array} \quad (3.11)$$

Entonces, usando unicidad de la propiedad universal tenemos que  $h_1 = g|_{S(M_1)}$  y  $h_2 = g|_{S(M_2)}$ . Dado que  $g$  puede escribirse como  $g = (g|_{S(M_1)}) \circ \pi_1 + (g|_{S(M_2)}) \circ \pi_2$  tenemos que

$$g = h_1 \circ \pi_1 + h_2 \circ \pi_2 = h$$

Por lo tanto  $s_1 \oplus s_2 : M_1 \oplus M_2 \rightarrow S(M_1) \oplus S(M_2)$  cumple con la propiedad universal y así  $S(M_1) \oplus S(M_2) \cong S(M_1 \oplus M_2)$ . ■

**Proposición 3.1.22.** *Suponga que  $X$  es la unión ajena de subespacios abiertos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  en  $X$ . Entonces existe una descomposición de  $K(X)$  como producto directo de*

$$K(X_1) \times K(X_2) \times \dots \times K(X_n) = K(X_1) \oplus K(X_2) \oplus \dots \oplus K(X_n)$$

**Demostración.** Sea  $E$  un haz vectorial sobre  $X$  con proyección  $\rho : E \rightarrow X$ . Como  $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_n$ , entonces

$$\begin{aligned}
 E &= \bigsqcup_{x \in X} \rho^{-1}(E_x) \\
 &= \bigsqcup_{x \in X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_n} \rho^{-1}(E_x) \\
 &= \left( \bigsqcup_{x \in X_1} \rho^{-1}(E_x) \right) \sqcup \dots \sqcup \left( \bigsqcup_{x \in X_n} \rho^{-1}(E_x) \right)
 \end{aligned}$$

Sean  $E_{X_i} = \bigsqcup_{x \in X_i} \rho^{-1}(E_x)$  para  $i = 1, \dots, n$  y definimos  $\rho_i = \rho|_{X_i} : E_{X_i} \rightarrow X_i$ . Más aun, en el Capítulo 1 se demostró que la restricción  $(E|_{X_i}, \rho_i, X_i)$  es un haz vectorial

para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Por otro lado, si  $((E_1, \rho_1, X_1), \dots, (E_n, \rho_n, X_n)) \in \mathcal{E}(X_1) \times \dots \times \mathcal{E}(X_n)$ , dado que  $\{X_i\}_{i=1}^n$  es una cubierta abierta de  $X$  y los  $X_i$  son ajenos, esto es,  $X_i \cap X_j = \emptyset$  con  $i \neq j$  y  $i, j = 1, \dots, n$ , se cumplen las condiciones de compatibilidad del Teorema 1.3.3 de manera trivial, así  $E = \bigsqcup_{i=1}^n E_{X_i}$  es un haz vectorial sobre  $X$  donde la proyección  $\rho : E \rightarrow X$  está definida como  $\rho|_{E_{X_i}} = \rho_i$  con  $i = 1, \dots, n$ .

Definamos los siguientes funtores

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{E}(X) &\longrightarrow \mathcal{E}(X_1) \times \dots \times \mathcal{E}(X_n) \\ E = \bigsqcup_{i=1}^n E_{X_i} &\longmapsto (E_{X_1}, \dots, E_{X_n}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{E}(X_1) \times \dots \times \mathcal{E}(X_n) &\longrightarrow \mathcal{E}(X) \\ (E_{X_1}, \dots, E_{X_n}) &\longmapsto E = \bigsqcup_{i=1}^n E_{X_i} \end{aligned}$$

Los funtores  $\varphi$  y  $\psi$  se definen en los morfismos de manera obvia. Veamos que efectivamente  $\varphi$  es un funtor. Sean  $E, F \in \mathcal{E}(X)_0$  con  $\rho : E \rightarrow X$  y  $\rho' : F \rightarrow X$  las respectivas proyecciones. Sea  $g : E \rightarrow F$  un morfismo general, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & F \\ & \searrow \rho & \swarrow \rho' \\ & X & \end{array}$$

esto es,  $\rho = \rho' \circ g$ . Usando la conmutatividad del diagrama anterior, tenemos que  $g_i := g|_{E_{X_i}} : E_{X_i} \rightarrow F_{X_i}$  está bien definida. Así definimos el morfismo general

$$\begin{aligned} \varphi(g) : E_{X_1} \times \dots \times E_{X_n} &\longrightarrow F_{X_1} \times \dots \times F_{X_n} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longrightarrow (g_1(x_1), \dots, g_n(x_n)) \end{aligned}$$

En efecto  $\varphi(g)$  es un morfismo general, ya que  $g_i : E_{X_i} \rightarrow F_{X_i}$  es un morfismo general para cada  $i = 1, \dots, n$ . Solo falta ver que  $\varphi$  es un funtor covariante, sean  $G \in \mathcal{E}(X)_0$  con proyección  $\rho'' : G \rightarrow X$  y  $h : F \rightarrow G$  un morfismo general. Consideremos el siguiente morfismo general

$$\begin{aligned} \varphi(g \circ h) : E_1 \times \dots \times E_n &\longrightarrow F_1 \times \dots \times F_n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto ((h \circ g)_1(x_1), \dots, (h \circ g)_n(x_n)) \end{aligned}$$

Notemos que para cada  $i = 1, \dots, n$  tenemos que

$$\begin{aligned}(h \circ g)_i(x_i) &= (h \circ g)|_{X_i}(x_i) \\ &= (h|_{X_i} \circ g|_{X_i})(x_i) \\ &= (h_i \circ g_i)(x_i) \\ &= h_i(g_i(x_i))\end{aligned}$$

Así vemos que

$$\begin{aligned}\varphi(h \circ g)(x_1, \dots, x_n) &= ((h \circ g)_1(x_1), \dots, (h \circ g)_n(x_n)) \\ &= (h_1(g_1(x_1)), \dots, h_n(g_n(x_n))) \\ &= \varphi(h)(g_1(x_1), \dots, g_n(x_n)) \\ &= \varphi(h)(\varphi(g)(x_1, \dots, x_n)) \\ &= (\varphi(h) \circ \varphi(g))(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

por lo tanto  $\varphi$  es un funtor covariante.

De manera similar se prueba que

$$\begin{aligned}\psi : \mathcal{E}(X_1) \times \dots \times \mathcal{E}(X_n) &\longrightarrow \mathcal{E}(X) \\ (E_{X_1}, \dots, E_{X_n}) &\longmapsto E = \bigsqcup_{i=1}^n E_{X_i}\end{aligned}$$

es un funtor covariante. Claramente  $\varphi \circ \psi = \text{Id}$  y  $\psi \circ \varphi = \text{Id}$ .

Sea

$$\begin{aligned}\overline{\varphi} : \phi(X) &\longrightarrow \phi(X_1) \times \dots \times \phi(X_n) \\ \overline{E} &\longmapsto (\overline{E}_{X_1}, \dots, \overline{E}_{X_n})\end{aligned}$$

el homomorfismo de monoides inducido por el funtor  $\varphi$ . Veamos que  $\overline{\varphi}$  está bien definida, sean  $E, F \in \mathcal{E}(X)_0$  tales que  $E \cong F$ . Sea  $\gamma : E \longrightarrow F$  el isomorfismo general, entonces  $\gamma|_{E_{X_i}} : E_{X_i} \longrightarrow F_{X_i}$  es un isomorfismo general bien definido para todo  $i = 1, \dots, n$ . Así

$$\begin{aligned}\varphi(\overline{E}) &= (\overline{E}_{X_1}, \dots, \overline{E}_{X_n}) \\ &= (\overline{F}_{X_1}, \dots, \overline{F}_{X_n}) \\ &= \varphi(\overline{F})\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\overline{\varphi}$  está bien definida. Por otra parte, sea

$$\begin{aligned}\overline{\psi} : \phi(X_1) \times \dots \times \phi(X_n) &\longrightarrow \phi(X) \\ (\overline{E}_{X_1}, \dots, \overline{E}_{X_n}) &\longmapsto \overline{E}\end{aligned}$$

el homomorfismo de monoides inducido por  $\psi$ . Es fácil ver que  $\overline{\psi}$  está bien definida, se demuestra de manera similar que para  $\varphi$ , y además  $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi} = \text{Id}_{\phi(X_1) \times \dots \times \phi(X_n)}$  y

$$\overline{\psi} \circ \overline{\phi} = \text{Id}_{\phi(X)}.$$

Sea  $K(X_i)$  el grupo de Grothendieck de  $\phi(X_i)$  junto con el homomorfismo de monoides  $s_i : \phi(X_i) \rightarrow K(X_i)$  para  $i = 1, \dots, n$  que es la completación de Grothendieck para  $\phi(X_i)$ . Utilizando el Lema 3.1.21 tenemos que  $s_1 \times \dots \times s_n : \phi(X_1) \times \dots \times \phi(X_n) \rightarrow K(X_1) \times \dots \times K(X_n)$  es la completación de Grothendieck para el monoide  $\phi(X_1) \times \dots \times \phi(X_n)$ . Por otra parte, sea  $s : \phi(X) \rightarrow K(X)$  el homomorfismo de monoides que es la completación de Grothendieck para  $\phi(X)$ , entonces por la nota 3.1.4 tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \phi(X) & \xrightarrow{s} & K(X) \\ \downarrow \overline{\varphi} & & \downarrow \varphi^* \\ \phi(X_1) \times \dots \times \phi(X_n) & \xrightarrow{s_1 \times \dots \times s_n} & K(X_1) \times \dots \times K(X_n) \\ \downarrow \overline{\psi} & & \downarrow \psi^* \\ \phi(X) & \xrightarrow{s} & K(X) \end{array} \begin{array}{c} \text{Id}_{\phi(X)} \quad \text{Id}_{K(X)} \end{array}$$

donde  $\varphi^*$ ,  $\psi^*$  y  $\text{Id}_{\phi(X)}^* = \text{Id}_{K(X)}$  son los homomorfismos de grupos inducidos por  $\overline{\varphi}$ ,  $\overline{\psi}$  y  $\text{Id}_{\phi(X)}$  respectivamente. Por tanto  $\psi^* \circ \varphi^* = \text{Id}_{K(X)}$ . Análogamente, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \phi(X_1) \times \dots \times \phi(X_n) & \xrightarrow{s_1 \times \dots \times s_n} & K(X_1) \times \dots \times K(X_n) \\ \downarrow \overline{\psi} & & \downarrow \psi^* \\ \phi(X) & \xrightarrow{s} & K(X) \\ \downarrow \overline{\varphi} & & \downarrow \varphi^* \\ \phi(X_1) \times \dots \times \phi(X_n) & \xrightarrow{s_1 \times \dots \times s_n} & K(X_1) \times \dots \times K(X_n) \end{array} \begin{array}{c} \text{Id}_{\phi(X_1) \times \dots \times \phi(X_n)} \quad \text{Id}_{K(X_1) \times \dots \times K(X_n)} \end{array}$$

donde  $\text{Id}_{\phi(X_1) \times \dots \times \phi(X_n)}^* = \text{Id}_{K(X_1) \times \dots \times K(X_n)}$  es el homomorfismo de grupos inducido por  $\text{Id}_{\phi(X_1) \times \dots \times \phi(X_n)}$ . Por tanto,  $\varphi^* \circ \psi^* = \text{Id}_{K(X_1) \times \dots \times K(X_n)}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} K(X) &\cong K(X_1) \times K(X_2) \times \dots \times K(X_n) \\ &= K(X_1) \oplus K(X_2) \oplus \dots \oplus K(X_n) \end{aligned}$$

■

**Observación. 3.1.23.** La proposición anterior no es válida para la  $K$ -teoría reducida,  $\tilde{K}$ . Por ejemplo si  $X$  es la unión ajena de dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ , entonces  $\tilde{K}(X) \cong \mathbb{Z}$  pero  $\tilde{K}(P_i) = 0$  con  $i = 1, 2$ . En efecto, tenemos que  $X = P_1 \sqcup P_2$ , donde

$$\phi(X) = \phi(P_1) \oplus \phi(P_2) = \mathbb{N} \cup \{0\} \oplus \mathbb{N} \cup \{0\}$$

así



$$K(X) = K(P_1) \oplus K(P_2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

entonces

$$\tilde{K}(X) = \frac{K(X)}{K(P)} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$$

por otra parte tenemos que

$$\tilde{K}(P_i) = \frac{K(P_i)}{K(P_i)} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = 0$$

para  $i = 1, 2$ .

Sea  $H^0(X, \mathbb{N})$  el monoide abeliano de funciones localmente constantes de  $X$  a  $\mathbb{N}$ . Consideremos para cada haz vectorial  $E$  sobre  $X$  la función localmente constante  $r_E : X \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $r_E(x) = \dim E_x$ . De este modo definimos

$$\begin{aligned} r' : \phi(X) &\longrightarrow H^0(X, \mathbb{N}) \\ \overline{E} &\longmapsto r_E \end{aligned}$$

Afirmamos que  $r'$  es un homomorfismo de monoides:

Veamos que  $r'$  está bien definida. Supongamos que  $E \cong F$ , entonces para toda  $x \in X$  tenemos

$$\begin{aligned} \overline{E} &\longmapsto r_E : X \longrightarrow \mathbb{N} \\ &x \longmapsto \dim E_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{F} &\longmapsto r_F : X \longrightarrow \mathbb{N} \\ &x \longmapsto \dim F_x \end{aligned}$$

y como  $E \cong F$  fibra a fibra tenemos que  $\dim E_x = \dim F_x$  para toda  $x \in X$ , así  $r_E = r_F$ , y por lo tanto está bien definida.

Veamos que  $r'$  es un homomorfismo de monoides, sean  $\overline{E}, \overline{F} \in \phi(X)$  entonces

$$\overline{E \oplus F} = \overline{E} + \overline{F} \longmapsto r_{E \oplus F} : X \longrightarrow \mathbb{N}$$

donde

$$\begin{aligned} r_{E \oplus F}(x) &= \dim (E \oplus F)_x \\ &= \dim E_x \oplus F_x \\ &= \dim E_x + \dim F_x \\ &= r_E(x) + r_F(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $r' : \phi(X) \rightarrow H^0(X, \mathbb{N})$  es un homomorfismo.

Es posible extender el homomorfismo  $r'$  de manera que  $r : K(X) \rightarrow H^0(X, \mathbb{Z})$  es un homomorfismo de grupos, donde  $H^0(X, \mathbb{Z})$  es el grupo de funciones localmente constantes de  $X$  a  $\mathbb{Z}$ . Es fácil ver que  $s(H^0(X, \mathbb{N})) = H^0(X, \mathbb{Z})$  usando el hecho de que cualquier elemento  $x \in H^0(X, \mathbb{Z})$  se puede expresar de la forma  $s(m) - s(n)$  para algún  $m, n \in H^0(X, \mathbb{N})$ . Así utilizando la nota 3.1.4 obtenemos dicha extensión  $r$  como el único homomorfismo de grupos que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \phi(X) & \xrightarrow{r'} & H^0(X, \mathbb{N}) \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ K(X) & \xrightarrow{r} & H^0(X, \mathbb{Z}) \end{array}$$

**Proposición 3.1.24.** *Sea  $r : K(X) \rightarrow H^0(X, \mathbb{Z})$  la función definida anteriormente y definimos  $K'(X) = \text{Ker } r$ , entonces tenemos la siguiente sucesión exacta*

$$0 \rightarrow K'(X) \xrightarrow{\iota} K(X) \xrightarrow{r} H^0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

que se escinde canónicamente, donde  $\iota : K' \rightarrow K(X)$  es la inclusión canónica. Mas aún, si  $X$  es conexo  $K'(X)$  y  $\tilde{K}(X)$  son isomorfos.

**Demostración.** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{N}$  una función localmente constante (esto implica que  $f$  es continua y aun más  $f$  es constante en cada componente conexa por trayectorias de  $X$ ) y consideremos la cubierta abierta  $\{f^{-1}(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$ . Debido a que  $X$  es un espacio compacto existe una subcubierta finita  $\{f^{-1}(n_i)\}_{i=1}^p$  donde  $n_i \in \mathbb{N}$  para todo  $i = 1, \dots, p$ . Definimos  $X_i = f^{-1}(n_i)$  para  $i = 1, \dots, p$  de modo que  $X$  es la unión ajena de  $X_i$  con  $i = 1, \dots, p$ , es decir,  $X = \bigsqcup_{i=1}^p X_i$ .

Usando el Teorema 1.3.3 definimos el haz  $E_f$  como resultado de pegar de manera canónica los haces triviales  $E_i = X_i \times k^{n_i}$ , de modo que  $E_f = \bigsqcup_{i=1}^p E_i$ . De esta manera para cada función  $f$  localmente constante de  $X$  a  $\mathbb{N}$  se define un haz vectorial  $E_f$  sobre  $X$  donde a nivel de fibras  $(E_f)_x = \{x\} \times k^{f(x)}$ , de modo que  $E_f = \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times k^{f(x)}$ .

Definimos el siguiente homomorfismo de monoides

$$\begin{array}{ccc} t' : H^0(X, \mathbb{N}) & \rightarrow & \phi(X) \\ f & \mapsto & \overline{E_f} \end{array}$$

Veamos que efectivamente es un homomorfismo de monoides. Sean  $f, g \in H^0(X, \mathbb{N})$ , entonces  $E_f = \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times k^{f(x)}$ ,  $E_g = \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times k^{g(x)}$  y  $E_{f+g} = \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times k^{(f+g)(x)}$  son los haces vectoriales inducidos por las funciones localmente constantes  $f, g$  y  $f + g$  respectivamente. Notemos que

$$\begin{aligned}
 E_{f+g} &= \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times k^{(f+g)(x)} \\
 &= \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times k^{f(x)+g(x)} \\
 &= \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times (k^{f(x)} \oplus k^{g(x)}) \\
 &\cong \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times k^{f(x)} \oplus \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times k^{g(x)} \\
 &= E_f \oplus E_g
 \end{aligned}$$

donde el isomorfismo del cuarto paso está dado por

$$\begin{aligned}
 \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times (k^{f(x)} \oplus k^{g(x)}) &\longrightarrow \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times k^{f(x)} \oplus \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times k^{g(x)} \\
 (x, (v, v')) &\longmapsto ((x, v), (x, v'))
 \end{aligned}$$

De este modo tenemos que  $E_{f+g} \cong E_f + E_g$ , así  $t'(f+g) = t'(f) + t'(g)$  teniendo que  $t$  es un homomorfismo de monoides.

Notemos que  $r' \circ t' = Id$ , ya que para  $f \in H^0(X, \mathbb{N})$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 (r' \circ t')(f) &= r'(t'(f)) \\
 &= r'(\overline{E_f}) \\
 &= r_{E_f}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 r_{E_f} : X &\longrightarrow \mathbb{N} \\
 x &\longmapsto \dim(E_f)_x = f(x)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $r_{E_f} = f$  teniendo que  $r' \circ t' = Id$ .

Usando la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, i.e. la nota 3.1.4, el homomorfismo de monoides  $t' : H^0(X, \mathbb{N}) \longrightarrow \phi(X)$  induce un homomorfismo de grupos  $t : H^0(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow K(X)$  el cual es inverso izquierdo de  $r : K(X) \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z})$  por la nota 3.1.4. Por lo tanto la sucesión del enunciado se escinde y  $K(X) \cong H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus K'(X)$ .

Si  $X$  es conexo, su imagen bajo cualquier función localmente constante es conexa, así tenemos que  $H^0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ .

Dado que

$$0 \longrightarrow K'(X) \xhookrightarrow{\iota} K(X) \xrightarrow{r} H^0(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \quad (3.12)$$

$\xleftarrow{t}$

### Capítulo 3

---

es una sucesión exacta que se escinde tenemos que  $K(X) = K'(X) \oplus \text{Im } t$ , por lo tanto

$$\frac{K(X)}{\text{Im } t} = \frac{K'(X) \oplus \text{Im } t}{\{0\} \oplus \text{Im } t} \cong \frac{K'(X)}{\{0\}} \oplus \frac{\text{Im } t}{\text{Im } t} \cong K'(X) \quad (3.13)$$

Por otra parte, recordemos que  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow K(X)$  está dada por  $m - n \mapsto [\theta_n] - [\theta_m]$  y por otro lado, la composición

$$\mathbb{Z} \xrightarrow[\gamma]{\cong} H^0(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{t} K(X) \quad \text{es tal que}$$

$$n - m \mapsto r_n - r_m \mapsto [\theta_n] - [\theta_m]$$

donde

$$\begin{array}{ccc} r_n : X & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} r_m : X & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & m \end{array}$$

De esta manera  $\alpha = t \circ \gamma$  con  $\gamma$  un isomorfismo, entonces  $\text{Im } \alpha = \text{Im } t$  y por lo tanto

$$\tilde{K}(X) = \frac{K(X)}{\text{Im } \alpha} = \frac{K(X)}{\text{Im } t} \cong K'(X)$$

donde el último isomorfismo se debe gracias a 3.13.

■

Sea  $\phi_n(X)$  el conjunto de clases de isomorfismos de haces vectoriales de rango  $n$  sobre  $X$  y consideremos  $\theta_n$  el haz vectorial de rango  $n$  sobre  $X$ . Utilizando la suma de Whitney, definimos

$$\begin{array}{ccc} f_{j+1,j} : \phi_j(X) & \longrightarrow & \phi_{j+1}(X) \\ \overline{E} & \longmapsto & \overline{E \oplus \theta_1} \end{array}$$

para  $j \in \mathbb{N}$ , donde  $\overline{E \oplus \theta_1}$  es la clase de isomorfismo de  $E \oplus \theta_1$ . Esta función está bien definida ya que  $E \oplus \theta_1$  es un haz vectorial de rango  $j + 1$ . Con lo anterior tenemos la siguiente sucesión

$$\phi_0(X) \xrightarrow{f_{1,0}} \phi_1(X) \xrightarrow{f_{2,1}} \dots \xrightarrow{f_{n,n-1}} \phi_n(X) \xrightarrow{f_{n+1,n}} \dots$$

Si  $m \geq n$ , definimos  $f_{m,n} := f_{m,m-1} \circ f_{m-1,m-2} \circ \dots \circ f_{n+2,n+1} \circ f_{n+1,n}$ , de esta manera obtenemos el sistema dirigido  $\langle \phi_n(X), f_{m,n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ .

En efecto,  $\langle \phi_n(X), f_{m,n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema dirigido ya que por definición  $f_{n,n} = \text{Id}_{\phi_n(X)}$ , y se cumple que  $f_{k,i} = f_{k,j} \circ f_{j,i}$  ya que para  $k \geq j \geq i$

$$\begin{aligned}
 f_{k,j} \circ f_{j,i} &= (f_{k,k-1} \circ f_{k-1,k-2} \circ \dots \circ f_{j+2,j+1} \circ f_{j+1,j}) \circ (f_{j,j-1} \circ f_{j-1,j-2} \circ \dots \circ f_{i+2,i+1} \circ f_{i+1,i}) \\
 &= f_{k,k-1} \circ f_{k-1,k-2} \circ \dots \circ f_{j+2,j+1} \circ f_{j+1,j} \circ f_{j,j-1} \circ f_{j-1,j-2} \circ \dots \circ f_{i+2,i+1} \circ f_{i+1,i} \\
 &= f_{k,i}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\langle \phi_n(X), f_{m,n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema dirigido.

Sea

$$\phi'(X) = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \phi_n(X) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \phi_n / \sim$$

donde  $[\overline{E}] \sim [\overline{F}]$  si y sólo si  $f_{m,n}(\overline{E}) = \overline{F}$  para algún  $n, m \in \mathbb{N}$ . Si queremos ser mas específicos para un campo  $k$  ( $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ) denotamos  $\phi'_k(X) = \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \phi_n^k(X)$ .

Daremos a  $\phi'(X)$  estructura de monoide. Primero definimos las funciones

$$\begin{aligned}
 \phi_n(X) \times \phi_m(X) &\longrightarrow \phi_{n+m}(X) \\
 (\overline{E}, \overline{F}) &\longmapsto \overline{E \oplus F}
 \end{aligned}$$

De este modo definimos la suma de clases de isomorfismos en el colímite como

$$\begin{aligned}
 + : \phi'(X) \times \phi'(X) &\longrightarrow \phi'(X) \\
 ([\overline{E}], [\overline{F}]) &\longmapsto [\overline{E \oplus F}]
 \end{aligned}$$

Veamos que la suma de clases de isomorfismos en el colímite está bien definida. Sean  $\overline{E} \in \phi_n(X)$ ,  $\overline{E}' \in \phi_{n'}(X)$  con  $\overline{E} \sim \overline{E}'$  y sean  $\overline{F} \in \phi_m(X)$ ,  $\overline{F}' \in \phi_{m'}(X)$  con  $\overline{F} \sim \overline{F}'$ . Por un lado tenemos que  $f_{n',n}(\overline{E}) = \overline{E}'$  y por otra parte  $f_{m',m}(\overline{F}) = \overline{F}'$ . Así

$$\begin{aligned}
 \overline{E}' + \overline{F}' &= f_{n',n}(\overline{E}) + f_{m',m}(\overline{F}) \\
 &= \overline{E \oplus \theta_{n'-n}} + \overline{F \oplus \theta_{m'-m}} \\
 &= \overline{F \oplus \theta_{n'-n} \oplus F \oplus \theta_{m'-m}} \\
 &= \overline{E \oplus F \oplus \theta_{(m'+n')-(m+n)}} \\
 &= f_{m'+n',m+n}(\overline{E \oplus F}) \\
 &= f_{m'+n',m+n}(\overline{E} + \overline{F})
 \end{aligned}$$

por lo tanto la operación suma está bien definida.

Veamos que  $\phi'(X)$  tiene estructura de monoide abeliano. Consideremos  $[\overline{E}], [\overline{F}], [\overline{G}] \in \phi'(X)$  entonces

$$\begin{aligned}
 [\overline{E}] + [\overline{F}] &= [\overline{E \oplus F}] \\
 &= [\overline{F \oplus E}] \\
 &= [\overline{F}] + [\overline{E}]
 \end{aligned}$$

por lo tanto se cumple conmutatividad. También tenemos que

$$\begin{aligned}
 [\overline{E}] + ([\overline{F}] + [\overline{G}]) &= [\overline{E}] + [\overline{E \oplus F}] \\
 &= [\overline{E \oplus (F \oplus G)}] \\
 &= [\overline{(E \oplus F) \oplus G}] \\
 &= [\overline{E \oplus F}] + [\overline{G}] \\
 &= ([\overline{E}] + [\overline{F}]) + [\overline{G}]
 \end{aligned}$$

por lo tanto se cumple la asociatividad. Además  $[\overline{0}] \in \phi'(X)$  es el elemento neutro, así hemos probado que  $\phi'(X)$  tiene estructura de monoide abeliano.

Sea  $\overline{E} \in \phi_n(X)$  y consideremos el homomorfismo  $r : K(X) \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z})$  anteriormente definido, entonces  $[E] - [\theta_n] \in K'(X) = \text{Ker } r$  ya que

$$\begin{array}{ccc}
 r([E]) : r_E : X & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\
 x & \longmapsto & \dim E_x = n
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 r([\theta_n]) : r_{\theta_n} : X & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\
 x & \longmapsto & \dim(\theta_n)_x = n
 \end{array}$$

Con esto, definimos el siguiente homomorfismo de monoides

$$\begin{aligned}
 \Lambda : \phi'(X) &\longrightarrow K'(X) \\
 [\overline{E}] &\longmapsto [E] - [\theta_n]
 \end{aligned}$$

**Proposición 3.1.25.**  $\Lambda$  es isomorfismo.

**Demostración.** Veamos que  $\Lambda$  está bien definida, sean  $[\overline{E}] = [\overline{F}] \in \phi'(X)$ , esto es  $\overline{E} \sim \overline{F}$  con  $\overline{E} \in \phi_n(X)$  y  $\overline{F} \in \phi_m(X)$  para algún  $m, n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f_{m,n}(\overline{E}) = \overline{F}$  con  $m \geq n$ . Notemos que  $f_{m,n}\overline{E} = \overline{E \oplus \theta_{m-n}} = \overline{F}$  entonces

$$\begin{aligned}
 \Lambda([\overline{F}]) &= [F] - [\theta_m] \\
 &= [E \oplus \theta_{m-n}] - [\theta_m] \\
 &= [E] + [\theta_{m-n}] - [\theta_m] \\
 &= [E] + [\theta_{m-n}] - [\theta_{m-n} \oplus \theta_n] \\
 &= [E] + [\theta_{m-n}] - [\theta_{m-n}] - [\theta_n] \\
 &= [E] - [\theta_n] \\
 &= \Lambda([\overline{E}])
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\Lambda$  está bien definida. Ahora veamos que  $\Lambda$  es un homomorfismo, sean  $[\overline{E}], [\overline{F}] \in \phi'(X)$ , donde  $\overline{E} \in \phi_n(X)$  y  $\overline{F} \in \phi_m(X)$  para alguna  $m, n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\overline{E} \oplus \overline{F} \in \phi_{n+m}(X)$ , de modo que

$$\begin{aligned} \Lambda([\overline{E} \oplus \overline{F}]) &= [E \oplus F] - [\theta_{n+m}] \\ &= [E] + [F] - ([\theta_n] + [\theta_m]) \\ &= [E] - [\theta_n] + [F] - [\theta_m] \\ &= \Lambda([\overline{E}]) + \Lambda([\overline{F}]) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\Lambda$  es un homomorfismo. Sólo falta ver que  $\Lambda$  es biyectiva.

**Injectividad.** Sean  $[\overline{E}], [\overline{F}] \in \phi'(X)$  con  $\Lambda([\overline{E}]) = [\overline{F}]$  donde  $\overline{E} \in \phi_n(X)$  y  $\overline{F} \in \phi_m$ , entonces  $[E] - [\theta_n] = [F] - [\theta_m]$  en  $K(X)$ . Usando la Proposición 3.1.15 existe  $q$  en los enteros tal que  $E \oplus \theta_{m+q} \cong F \oplus \theta_{n+q}$ . De modo que  $\overline{E} \oplus \theta_{m+q} = \overline{F} \oplus \theta_{n+q}$ , por lo tanto  $[\overline{E}] = [\overline{F}]$ .

**Sobreyetividad.** Sea  $u$  un elemento en  $K'(X) \subseteq K(X)$ , usando la Proposición 3.1.15  $u$  puede ser escrito de la forma  $[E] - [\theta_n]$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $[E] - [\theta_n] \in K'(X)$  tenemos que  $r([E] - [\theta_n]) = 0$  de modo que  $\dim E_x = n$  para toda  $x \in X$  haciendo que  $\overline{E} \in \phi_n(X)$ . Consideremos  $[\overline{E}] \in \phi'(X)$  entonces  $\Lambda([\overline{E}]) = [E] - [\theta_n] = u$ , así el homomorfismo es sobreyectivo.

Por lo tanto  $\Lambda : \phi'(X) \longrightarrow K'(X)$  es un isomorfismo. ■

## 3.2. Representabilidad de la K-teoría

En el Capítulo 2 vimos que  $\langle \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N), \iota_n^{M,N} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema dirigido con

$$\begin{aligned} \iota_n^{M,N} : \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow \text{Proj}_n(\mathbb{R}^M) \\ P &\longmapsto P \oplus 0_{M-N} \end{aligned}$$

donde su límite directo es  $Z_n = \text{colim}_{N \rightarrow \infty} \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N) = \bigsqcup_{N=1}^{\infty} \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N) / P \sim \iota_n^{M,N}(P)$  junto con los morfismos  $\iota_n^N : \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N) \longrightarrow Z_n$ .

En el Teorema 2.4.9 se demostró que la grassmaniana  $G_n(\mathbb{R}^N)$  es un retractor por deformación de  $\text{Proj}_n(\mathbb{R}^N)$ , de modo que  $\langle G_n(\mathbb{R}), \iota_n^{M,N} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema dirigido utilizando las restricciones de  $\iota_n^{M,N}$  en la grassmaniana  $G_n(\mathbb{R}^N)$ .

**Teorema 3.2.1.** *Consideremos*

$$BO(n) = \text{colim}_{N \rightarrow \infty} G_n(\mathbb{R}^N) = \frac{\bigsqcup_{N \in \mathbb{N}} G_n(\mathbb{R}^N)}{\rho \sim \iota_n^{M,N}(\rho)}$$

entonces  $Z_n$  es un retractor por deformación de  $BO(n)$ .

**Demostración.** Consideremos  $F_n^N : \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N) \times I \longrightarrow \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N)$  el retracto por deformación del espacio de proyecciones a la grassmaniana que se definió en el Teorema 2.4.9.

Definimos la restricción  $F_n^N(-, t) = F_n^N|_{\text{Proj}_n(\mathbb{R}^N) \times \{t\}} : \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N)$  para cada  $N \in \mathbb{N}$ , así construimos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N) & & & & \text{Proj}_n(\mathbb{R}^M) \\
 \swarrow F_n^N(-, t) & & & & \nearrow F_n^M(-, t) \\
 & \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N) & \xrightarrow{\iota_n^{M,N}} & \text{Proj}_n(\mathbb{R}^M) & \\
 & \searrow \iota_n^N & & \swarrow \iota_n^M & \\
 & & Z_n & & \\
 & & \downarrow F_n(-, t) & & \\
 & & BO(n) & & 
 \end{array} \quad (3.14)$$

Para demostrar que el diagrama conmuta y que existe un homomorfismo  $F_n(-, t) : Z \longrightarrow BO(n)$  para toda  $t \in I$ , vamos a recordar como se definió cada una de las funciones. Para  $\rho \in \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N)$  y  $t \in I$  tenemos que  $F_n^N(\rho, t) = \sqrt{h_N(t)} \circ \rho \circ (\sqrt{h_N(t)})^{-1}$  con  $h_N(t) = \text{Id}_N + t \cdot J_N^* \circ (J_N)$ , donde  $J_N = 2\rho - \text{Id}_N$ , así  $(J_N)^* = 2\rho^* - \text{Id}_N$ .

Tenemos que

$$(J_N)^* \circ J_N = (2\rho^* - \text{Id}_N) \circ (2\rho - \text{Id}_N) = 4\rho^* \circ \rho - 2\rho^* - 2\rho + \text{Id}_N$$

así  $h_N(t) = \text{Id}_N + 4t \cdot \rho^* \circ \rho - 2t \cdot \rho^* - 2t \cdot \rho + t \cdot \text{Id}_N$ . También  $\iota_n^{M,N}(\rho) = \rho \oplus 0_{M-N}$ , esto es, se agregan ceros a la matriz de representación de  $\rho$  para completar una matriz de  $M \times M$ , así las primeras  $N \times N$  entradas de la matriz asociada a  $\rho \oplus 0_{M-N}$  son idénticas a las  $N \times N$  entradas de la matriz de representación de  $\rho$ .

Volviendo a la conmutatividad del diagrama, tenemos que ver que

$$\iota_n^N \circ F_n(-, t)(\rho) = \iota_n^M \circ F_n^M(-, t) \circ \iota_n^{M,N}(\rho).$$

Demostraremos que la matriz de representación de  $F_n^M(-, t)(\iota_n^{M,N}(\rho))$  coincide con  $F_n^N(-, t)(\rho)$  en sus primeras  $N \times N$  entradas. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 F_n^N(\rho, t) &= \sqrt{h_N(t)} \circ \rho \circ (\sqrt{h_N(t)})^{-1} \\
 &= \sqrt{\text{Id}_N + 4t \cdot \rho^* \circ \rho - 2t \cdot \rho^* - 2t \cdot \rho + t \cdot \text{Id}_N} \circ \rho \circ (\sqrt{\text{Id}_N + 4t \cdot \rho^* \circ \rho - 2t \cdot \rho^* - 2t \cdot \rho + t \cdot \text{Id}_N})^{-1}
 \end{aligned}$$

Por otra parte,



$$\begin{aligned}
 F_n^M(-, t)(\iota_n^{M,N}(\rho)) &= F_n^M(\rho \oplus 0_{M-N}, t) \\
 &= \sqrt{h_M(t)} \circ (\rho \oplus 0_{M-N}) \circ (\sqrt{h_M(t)})^{-1}
 \end{aligned}$$

Consideremos la siguiente representación matricial por bloques de  $h_M(t)$ .

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_N & 0 \\ 0 & \text{Id}_{M-N} \end{pmatrix} + 4t \cdot \begin{pmatrix} \rho^* & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix} - 2t \cdot \begin{pmatrix} \rho^* & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix} - 2t \cdot \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \text{Id}_N & 0 \\ 0 & \text{Id}_{M-N} \end{pmatrix}$$

calculando tenemos que  $h_M(t)$  es igual a

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_N + 4t \cdot \rho^* \circ \rho - 2t \cdot \rho^* - 2t \cdot \rho + t \cdot \text{Id}_N & 0 \\ 0 & \text{Id}_{M-N} + t \cdot \text{Id}_{M-N} \end{pmatrix}$$

entonces, usando la unicidad de la raíz cuadrada tenemos que

$$\begin{aligned}
 \sqrt{h_M(t)} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\text{Id}_N + 4t \cdot \rho^* \circ \rho - 2t \cdot \rho^* - 2t \cdot \rho + t \cdot \text{Id}_N} & 0 \\ 0 & \sqrt{\text{Id}_{M-N} + t \cdot \text{Id}_{M-N}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{h_N(t)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\text{Id}_{M-N} + t \cdot \text{Id}_{M-N}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

De igual manera,

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{h_M(t)})^{-1} &= \begin{pmatrix} ((\sqrt{\text{Id}_N + 4t \cdot \rho^* \circ \rho - 2t \cdot \rho^* - 2t \cdot \rho + t \cdot \text{Id}_N})^{-1}) & 0 \\ 0 & (\sqrt{\text{Id}_{M-N} + t \cdot \text{Id}_{M-N}})^{-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} ((\sqrt{h_N(t)})^{-1}) & 0 \\ 0 & (\sqrt{\text{Id}_{M-N} + t \cdot \text{Id}_{M-N}})^{-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

teniendo esto, calculamos la matriz  $F_n^M(\rho \oplus 0_{M-N})$

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} \sqrt{h_N(t)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\text{Id}_{M-N} + t \cdot \text{Id}_{M-N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ((\sqrt{h_N(t)})^{-1}) & 0 \\ 0 & (\sqrt{\text{Id}_{M-N} + t \cdot \text{Id}_{M-N}})^{-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{h_N(t)} \circ \rho \circ (\sqrt{h_N(t)})^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} F_n^N(\rho, t) & 0 \\ 0 & 0_{M-N} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

por lo tanto  $F_n^M(-, t) \circ (\iota_n^{M,N}(\rho))$  y  $F_n^N(-, t)(\rho)$  coinciden en las primeras  $N \times N$  entradas, así el diagrama 3.14 conmuta, lo que implica que para cada  $t \in I$  existe  $F_n(-, t) : Z_n \rightarrow BO(n)$  continuo. Sea  $F_n : Z_n \times I \rightarrow BO(n)$  el retracto por deformación de  $Z_n$  a  $BO(n)$  definido por

$$\begin{aligned} F_n : Z_n \times I &\longrightarrow BO(n) \\ (\rho, t) &\longmapsto F_n(\rho, t) \end{aligned}$$

En efecto,  $F_n$  es un retracts por deformación ya que

1. Para toda  $\bar{\rho} \in BO(n)$  tenemos que  $\rho \in G_n(\mathbb{R}^N)$  para alguna  $N \in \mathbb{N}$  entonces

$$\begin{aligned} F_n(-, t)(\bar{\rho}) &= \iota_n^N \circ F_n^N(\rho, t) \\ &= \iota_n^N(\rho) \\ &= \bar{\rho} \end{aligned}$$

2. Para toda  $\bar{\rho} \in Z_n$  tenemos que  $\rho \in \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N)$  para alguna  $N \in \mathbb{N}$  entonces

$$\begin{aligned} F_n(-, 0)(\bar{\rho}) &= \iota_n^N \circ F_n^N(\rho, 0) \\ &= \iota_n^N(\rho) \\ &= \bar{\rho} \end{aligned}$$

3. Para toda  $\bar{\rho} \in Z_n$  tenemos que  $\rho \in \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N)$  para alguna  $N \in \mathbb{N}$  entonces

$$F_n(-, 1)(\bar{\rho}) = \iota_n^N \circ F_n^N(\rho, 1)$$

Dado que  $F_n^N(\rho, 1) \in G_n(\mathbb{R}^N)$ , tenemos que  $\iota_n^N \circ F_n^N(\rho, 1) \in BO(n)$ , Por lo tanto  $F_n$  es un retracts por deformación de  $Z_n$  a  $BO(n)$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

■

El resultado anterior también es válido para el campo los complejos, es decir,  $\text{colim}_{N \rightarrow \infty} \text{Proj}_n(\mathbb{C}^N)$  es un retracts por deformación de  $BU(n) := \text{colim}_{N \rightarrow \infty} G_n(\mathbb{C}^N)$ .

**Corolario 3.2.2.**

$$[X, BO(n)] \cong \phi_n^{\mathbb{R}}(X) \quad y \quad [X, BU(n)] \cong \phi_n^{\mathbb{C}}(X)$$

**Demostración.** Del Teorema 2.3.5 y el Teorema 3.2.1 tenemos el resultado. ■

Consideremos la grassmaniana  $G_n(\mathbb{R}^N)$  como el conjunto de subespacios de  $\mathbb{R}^N$  de dimensión  $n$ . Sea  $BO(n) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} G_n(\mathbb{R})/V \sim \iota_n^{M,N}(V)$  donde

$$\begin{aligned} \iota_n^{M,N} : G_n(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow G_n(\mathbb{R}^M) \\ V &\longmapsto 0_{M-N} \oplus V \end{aligned}$$

para  $M \geq N$ ; y para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideremos la inclusión de la grassmaniana  $G_n(\mathbb{R}^N)$  a su colímite  $BO(n)$ ,  $\iota_n^N : G_n(\mathbb{R}^N) \rightarrow BO(n)$ .

Sea  $g_{n+1,n} : BO(n) \rightarrow BO(n+1)$  definida de la siguiente manera, si  $V \in G_n(\mathbb{R}^N)$  entonces  $g_{n+1,n}(\overline{V}) = \overline{V \oplus \langle e_{N+1} \rangle}$  donde  $e_{N+1} = (0, \dots, 0, 1)$  es el último vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^{N+1}$ , esto es,  $g_{n+1,n}$  está inducida por

$$\begin{aligned} e_{n+1,n}^{N+1,N} : G_n(\mathbb{R}^N) &\rightarrow G_{n+1}(\mathbb{R}^{N+1}) \\ V &\mapsto V \oplus \langle e_{N+1} \rangle \end{aligned}$$

Veamos que  $g_{n+1,n}$  está bien definida, sean  $V \in G_n(\mathbb{R}^N)$  y  $V' \in G_n(\mathbb{R}^M)$  tales que  $V \sim \iota_n^{M,N}(V) = V'$  con  $M \geq N$ , entonces

$$\begin{aligned} g_{n+1,n}(\overline{V}') &= \overline{V' \oplus \langle e_{M+1} \rangle} \\ &= \overline{\iota_n^{M,N}(V) \oplus \langle e_{M+1} \rangle} \\ &= \overline{0_{M-N} \oplus V \oplus \langle e_{M+1} \rangle} \end{aligned}$$

con  $(0_{M-N} \oplus V) \oplus \langle e_{M+1} \rangle \in G_{n+1}(\mathbb{R}^{M+1})$ .

Por otra parte,  $g_{n+1,n}(\overline{V}) = \overline{V \oplus \langle e_{N+1} \rangle}$  con  $V \oplus \langle e_{N+1} \rangle \in G_{n+1}(\mathbb{R}^{N+1})$  pero

$$\begin{aligned} \iota_{n+1}^{M+1,N+1}(V \oplus \langle e_{N+1} \rangle) &= 0_{(M+1)-(N+1)} \oplus (V \oplus \langle e_{N+1} \rangle) \\ &= 0_{M-N} \oplus (V \oplus \langle e_{N+1} \rangle) \\ &= (0_{M-N} \oplus V) \oplus \langle e_{M+1} \rangle \in G_{n+1}(\mathbb{R}^{M+1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $g_{n+1,n}$  está bien definida.

Consideremos la siguiente sucesión

$$BO(1) \xrightarrow{g_{2,1}} \dots \xrightarrow{g_{n,n-1}} BO(n) \xrightarrow{g_{n+1,n}} \dots$$

Sea  $m \geq n$ , definimos  $g_{m,n} : BO(n) \rightarrow BO(m)$  por  $g_{m,n} = g_{m,m-1} \circ g_{m-1,m-2} \circ \dots \circ g_{n+1,n}$ , de modo que  $\{BO(n), g_{m,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema dirigido.

**Lema 3.2.3.** *La imagen de  $BO(n)$  es un encaje cerrado en  $BO(n+1)$  vía  $g_{n+1,n}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Demostración.** Primero veamos que  $e_{n+1,n}^{N+1,N}$  es una función cerrada. Para esto consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_n(\mathbb{R}^N) & \xrightarrow{e_{n+1,n}^{N+1,N}} & G_{n+1}(\mathbb{R}^{N+1}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \widetilde{\text{Proj}}_n(\mathbb{R}^N) & \dashrightarrow & \widetilde{\text{Proj}}_{n+1}(\mathbb{R}^{N+1}) \end{array}$$

donde

$$\widetilde{\text{Proj}}_n(\mathbb{R}^N) = \{\rho \in \text{Proj}_n(\mathbb{R}^N) \mid \rho = \rho^*\}.$$

La composición dada por la flecha horizontal inferior está dada por

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Proj}}_n(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow \widetilde{\text{Proj}}_{n+1}(\mathbb{R}^{N+1}) \\ \rho &\longmapsto \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la cual ya vimos antes que es cerrada (se demuestra justo antes de la Proposición 2.3.4), por lo tanto  $e_{n+1,n}^{N+1,N}$  es cerrada. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_n(\mathbb{R}^N) & \xrightarrow{e_{n+1,n}^{N+1,N}} & G_{n+1}(\mathbb{R}^{N+1}) \\ \downarrow \iota_n^{N+1,N} & & \downarrow \iota_{n+1}^{N+2,N+1} \\ G_n(\mathbb{R}^{N+1}) & \xrightarrow{e_{n+1,n}^{N+2,N+1}} & G_{n+1}(\mathbb{R}^{N+2}) \\ \vdots & & \vdots \\ BO(n) & \xrightarrow{g_{n+1,n}} & BO(n+1) \end{array}$$

$A$  es un subconjunto cerrado en  $BO(n) = \bigsqcup_{N=1}^{\infty} G_n(\mathbb{R}^N)$  si y sólo si  $A \cap G_n(\mathbb{R}^N)$  es cerrado para toda  $N \in \mathbb{N}$ . Así, si  $A$  es cerrado en  $BO(n)$  entonces  $e_{n+1,n}^{N+1,N}(A \cap G_n(\mathbb{R}^N))$  es cerrado para toda  $N \in \mathbb{N}$  pues  $e_n^{N+1,N}$  es una aplicación cerrada. Pero  $g_{n+1,n}(A) \cap G_{n+1}(\mathbb{R}^{N+1}) = e_{n+1,n}^{N+1,N}(A \cap G_n(\mathbb{R}^{N+1}))$  para cada  $N \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto  $g_{n+1,n}(A)$  es cerrado en  $BO(n+1) = \bigsqcup_{N=1}^{\infty} G_{n+1}(\mathbb{R}^N)$  y así  $g_{n+1,n}$  es cerrada.

■

Como  $\langle BO(n), g_{m,n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema dirigido de encajes cerrados, entonces el colímite de  $BO(n)$  se puede expresar como

$$BO = \frac{\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} BO(n)}{\overline{V} \sim g_{m,n}(\overline{V})}$$

junto con morfismos  $g_n : BO(n) \longrightarrow BO$ . (Aguilar, Gitler, Prieto [1]).

De igual manera se puede construir el sistema dirigido  $\langle BU(n), g_{m,n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  junto con un colímite  $BU$ .

Consideramos el sistema dirigido  $\langle [X, BO(n)], g'_{m,n} \rangle$  con  $m \geq n$  donde

$$\begin{aligned} g'_{m,n} : [X, BO(n)] &\longrightarrow [X, BO(m)] \\ [f : X \longrightarrow BO(n)] &\longmapsto [g_{mn} \circ f : X \longrightarrow BO(m)] \end{aligned}$$

Veamos que  $g'_{m,n}$  está bien definida. Sean  $f_1, f_2 : X \rightarrow \text{BO}(n)$  tales que  $f_1 \sim f_2$ , entonces existe  $H : X \times I \rightarrow \text{BO}(n)$  con  $H(x, 0) = f_1(x)$  y  $H(x, 1) = f_2(x)$ . Definamos  $H' : X \times I \rightarrow \text{BO}(m)$  como  $H'(x, t) = g_{m,n} \circ H(x, t)$ , así

$$H'(x, 0) = g_{m,n} \circ H(x, 0) = g_{m,n}(f_1(x))$$

$$H'(x, 1) = g_{m,n} \circ H(x, 1) = g_{m,n}(f_2(x))$$

por lo tanto  $g'_{m,n}$  está definida.

**Teorema 3.2.4.** *Tenemos un isomorfismo natural entre los funtores  $K'_{\mathbb{R}}$  y  $[-, \text{BO}]$ , es decir, si  $f : X \rightarrow Y$  una función continua, entonces el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} K'_{\mathbb{R}}(X) & \xrightarrow{\cong} & [X, \text{BO}] \\ f^* \uparrow & & \uparrow (-) \circ f \\ K'_{\mathbb{R}}(Y) & \xrightarrow{\cong} & [Y, \text{BO}] \end{array}$$

de modo que

$$K'_{\mathbb{R}}(X) \cong [X, \text{BO}]$$

Similarmente tenemos que

$$K'_{\mathbb{C}}(X) \cong [X, \text{BU}]$$

**Demostración.** Como  $X$  es compacto tenemos que  $\text{colim}_{n \rightarrow \infty} [X, \text{BO}(n)] = [X, \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \text{BO}(n)] = [X, \text{BO}]$ . Aplicando la Proposición 3.1.25 y el Corolario 3.2.2 tenemos que

$$\begin{aligned} K'_{\mathbb{R}}(X) &\cong \phi^{\mathbb{R}}(X) \\ &= \text{colim}_{n \rightarrow \infty} \phi_n^{\mathbb{R}}(X) \\ &= \text{colim}_{n \rightarrow \infty} [X, \text{BO}(n)] \\ &= [X, \text{BO}] \end{aligned}$$

donde la última igualdad se prueba de manera análoga como lo hicimos para probar que  $\text{colim}_{N \rightarrow \infty} [X, \text{Proj}_n(k^N)] = [X, \text{colim}_{N \rightarrow \infty} \text{Proj}_n(k^N)]$  para  $X$  compacto (se demostró en la Proposición 2.3.4). De igual manera tenemos

$$K'_{\mathbb{C}}(X) \cong [X, \text{BU}].$$

■

**Teorema 3.2.5.** *Para cada espacio compacto y conexo  $X$  se tiene los isomorfismos*

$$K_{\mathbb{R}}(X) \cong [X, \mathbb{Z} \times \text{BO}] \text{ y } K_{\mathbb{C}}(X) \cong [X, \mathbb{Z} \times \text{BU}]$$

donde  $\mathbb{Z}$  tiene la topología discreta.

**Demostración.** Por la Proposición 3.1.24 se tiene  $K_{\mathbb{R}}(X) \cong H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus K'_{\mathbb{R}}(X)$ . Además como  $X$  es conexo  $H^0(X, \mathbb{Z}) \cong [X, \mathbb{Z}]$ , utilizando el Teorema 3.2.4 se tiene que

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{R}}(X) &= H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus K'_{\mathbb{R}}(X) \\ &\cong [X, \mathbb{Z}] \times [X, \text{BO}] \\ &\cong [X, \mathbb{Z} \times \text{BO}] \end{aligned}$$

De la misma manera se obtiene el isomorfismo  $K_{\mathbb{C}}(X) \cong [X, \mathbb{Z} \times \text{BU}]$ . ■

**Ejemplo 3.2.6.** En el caso  $X = \mathbb{S}^n$  es posible dar una interpretación mas completa de  $\tilde{K}(X)$  y en consecuencia de  $K(X) = \mathbb{Z} \times \tilde{K}(X)$ . Vimos antes en el ejemplo 1.4.16 que  $\phi_p^{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^n) \cong \pi_{n-1}(U(p))$  entonces  $\tilde{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^n) = \text{colim}_{p \rightarrow \infty} \pi_{n-1}(U(p)) \cong \pi_n(U)$  con  $U = \text{colim}_{p \rightarrow \infty} U(p)$  y donde el último isomorfismo es porque  $\pi_{n-1}(U(p)) \cong \pi_{n-1}(U(p+1))$  para  $p > \frac{n-1}{2}$ . Aplicando la Periodicidad de Bott en el caso complejo tenemos que

$$\phi_p^{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^n) = \pi_{n-1}(U) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

En el capítulo 4 de trabajo veremos la demostración del Teorema de la Periodicidad de Bott en el caso complejo y su aplicación a este ejemplo.

★

**Ejemplo 3.2.7.** Del mismo modo vimos en el ejemplo 1.4.17 que  $\phi_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^n) \cong \pi_{n-1}(O(p)) \cong \pi_{n-1}(O)$  para toda  $p > n$  donde  $O = \text{colim}_{m \rightarrow \infty} O(m)$ . Usando la Periodicidad de Bott en el caso real [2] se tiene que

$$\phi_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^n) = \pi_{n-1}(O) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } n \equiv 0 \text{ ó } 1 \pmod{8} \\ \mathbb{Z} & \text{si } n \equiv 3 \pmod{8} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

★

# Capítulo 4

## Periodicidad de Bott

### 4.1. Introducción

El Teorema de Periodicidad de Bott es un importante resultado en distintas áreas de las matemáticas, tales como la topología algebraica, el análisis funcional, entre otras. Este teorema establece una periodicidad en los grupos de homotopía de grupos clásicos de operadores y fue inicialmente establecido por Raoul Bott (cf. [7] y [8]), teniendo un importante impacto en diversas investigaciones de la época tales como K-teoría topológica compleja y el cálculo de los grupos de homotopía estable de esferas.

En el artículo original [8], R. Bott establece el teorema de periodicidad para los grupos  $U$  y  $O$  de operadores unitarios y ortogonales, respectivamente. Su demostración se basa esencialmente en técnicas desarrolladas en [7] sobre teoría de Morse.

Si como anteriormente,  $O(n)$  denota el grupo ortogonal,  $U(n)$  el grupo unitario y  $SP(n)$  el grupo simpléctico, entonces podemos formar los correspondientes grupos  $O$ ,  $U$  y  $SP$  mediante el proceso estándar de tomar el colímite del sistema inducido mediante las inclusiones canónicas. El Teorema de Periodicidad de Bott, como fue establecido originalmente, es el siguiente.

**Teorema 4.1.1** (R. Bott (1957), [8]). *La homotopía estable de los grupos clásicos es periódica:*

$$\begin{aligned}\pi_n(U) &\cong \pi_{n+2}(U) \\ \pi_n(O) &\cong \pi_{n+4}(SP) \\ \pi_n(SP) &\cong \pi_{n+4}(O) \quad n = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

donde  $\pi_0$  denota el grupo de componentes conexas.

Desde la presentación de este resultado se han establecido una gran cantidad de pruebas desde diversas perspectivas, así como distintas generalizaciones. En la introducción de [2] puede encontrarse un compendio bastante exhaustivo de las distintas pruebas que se han proporcionado de este teorema y la correspondiente bibliografía.

En este capítulo presentaremos una demostración siguiendo las ideas de D. McDuff (cf. [18]) y cuyo programa fue desarrollado por M. Aguilar y C. Prieto en [2]

para el caso complejo (grupo unitario) y por M. Behrens en [5] para el caso real (grupo ortogonal).

Es importante señalar que la demostración que incluimos aquí no es una transcripción fiel de los artículos mencionados, sino una adaptación de ambos enfoques ([2] y [5]). La demostración que presentamos se basa en un teorema de A. Dold y R. Thom para cuasifibraciones (ver Sección 4.4), fue utilizado originalmente por D. McDuff y posteriormente en el trabajo de Aguilar-Prieto (cf. [2]) y M. Behrens (cf. [5]).

El objetivo principal de este capítulo es demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.2.** *Sea  $U$  el grupo unitario infinito y sea  $A \in U$ . Existe una cuasifibración  $p: E \rightarrow U$  tal que  $E$  es contraíble y  $p^{-1}(A) \cong \mathbb{Z} \times BU$ .*

Llamaremos a la cuasifibración anterior la *cuasifibración de Bott*.

Mostraremos a continuación cómo del teorema anterior se deriva el Teorema de Periodicidad de Bott para el grupo unitario. Las definiciones y resultados que se utilizarán a continuación se encuentran enunciados en las secciones subsecuentes.

De la contractibilidad de  $E$  se tiene que  $\pi_n(E) = 0$  para  $n \geq 0$ , y de la definición de cuasifibración tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(\mathbb{Z} \times BU) \longrightarrow \pi_n(E) = 0 \longrightarrow \pi_n(U) \longrightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{Z} \times BU) \longrightarrow \pi_{n-1}(E) = 0 \longrightarrow \cdots$$

lo cual implica que

$$\pi_n(U) \cong \pi_{n-1}(\mathbb{Z} \times BU) \cong \pi_{n-1}(BU) \quad (4.1)$$

para  $n > 1$ , y  $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$ . Por otro lado, si  $\Omega U \rightarrow PU \rightarrow U$  es la sucesión de lazos y caminos basados sobre  $U$ , entonces aplicando el Lema 4.2.4 a la cuasifibración de Bott  $\mathbb{Z} \times BU \rightarrow E \rightarrow U$ , se sigue la existencia de una equivalencia homotópica  $\mathbb{Z} \times BU \simeq \Omega U$ . Luego, de la teoría de clasificación de haces es conocida la fibración (en particular, cuasifibración)  $U \rightarrow EU \rightarrow BU$  de modo que nuevamente por el Lema 4.2.4, existe una equivalencia homotópica  $U \simeq \Omega BU$ . Combinando los resultados anteriores, obtenemos

$$\Omega^2 BU \cong \Omega(\Omega BU) \simeq \Omega U \simeq \mathbb{Z} \times BU.$$

En particular,

$$\pi_{n+2}(BU) \cong \pi_n(\Omega^2 BU) \cong \pi_n(BU),$$

equivalentemente por (4.1),

$$\pi_{n+2}(U) \cong \pi_n(U).$$

## 4.2. Preliminares

En esta sección introducimos algunos resultados básicos sobre los funtores *espacio de lazos* y *suspensión reducida*, fibraciones de Serre y Hurewicz, el concepto de cuasifibración y teoría de colímites. Estos resultados serán de utilidad en las siguientes secciones.



## Espacio de lazos y suspensión reducida

Dados dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , denotamos por  $C(X, Y)$  el conjunto de todas las funciones continuas  $f : X \rightarrow Y$ . Si  $A \subset X$  y  $B \subset Y$ , definimos

$$C(X, A; Y, B) = \{f \in C(X, Y) \mid f(A) \subseteq B\},$$

esto es, el conjunto de todas las funciones continuas de parejas.

Cuando  $A = \{x_0\}$  y  $B = \{y_0\}$ , el conjunto  $C(X, A; Y, B)$  corresponde precisamente al conjunto de funciones que preservan el punto base.

Otro caso particularmente importante es dado por el conjunto  $C(I, X)$  de caminos libres en  $X$  con  $I = [0, 1]$ ,

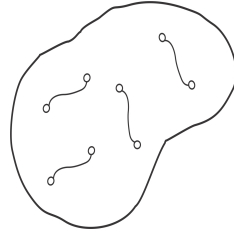


Figura 4.1: Caminos libres en  $X$ .

El conjunto  $C(I, 0; X, x_0)$  es llamado el conjunto de caminos basados en  $x_0$ ,

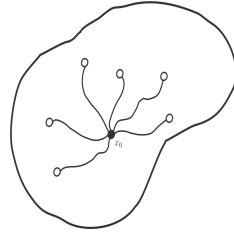


Figura 4.2: Conjunto de caminos basados en  $x_0$ .

Cuando la imagen de un camino tiene el mismo punto inicial y final, éste es llamado un *lazo*, así  $C(I, \partial I; X, x_0)$  consiste del conjunto de todos los lazos basados en  $x_0$ .

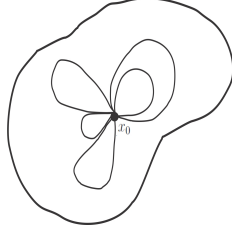


Figura 4.3: Conjunto de lazos basados en  $x_0$ .

Denotaremos por  $P(X, x_0)$  el espacio de caminos basados  $C(I, 0; X, x_0)$  con la topología compacto-abierto y por  $\Omega(X, x_0)$  el correspondiente subespacio de lazos basados en  $x_0$ , con la topología relativa. Cuando no exista riesgo de confusión respecto al punto base  $x_0 \in X$ , denotaremos los espacios anteriores simplemente por  $PX$  y  $\Omega X$ , respectivamente.

Iterando el proceso de “tomar el espacio de lazos”, definimos el  $n$ -ésimo espacio de lazos por  $\Omega^n(X, x_0) := C(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ . En particular, se tiene que  $\Omega^n(X, x_0) \cong C(\mathbb{S}^n, *; X, x_0)$ .

No es difícil convencerse que  $\Omega$  define un funtor de la categoría de espacios topológicos con punto base en sí misma. Este funtor tiene un funtor adjunto izquierdo dado por la suspensión reducida.

Recordemos que si  $X$  es un espacio topológico con punto base  $x_0$ , la *suspensión reducida* (o funtor de suspensión)  $\Sigma X$  se define como el siguiente espacio cociente,

$$\Sigma X = \frac{X \times I}{(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)}.$$

Análogamente al caso no reducido, se tiene que  $\Sigma \mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^{n+1}$ .

El hecho de que el funtor  $\Sigma : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$  y el funtor  $\Omega : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$  satisfagan la siguiente propiedad

$$[\Sigma X, Y]_* \cong [X, \Omega Y]_*$$

significa que  $\Sigma$  es un funtor adjunto izquierdo de  $\Omega$  (cf. [1, Prop. 2.10.5]).

Por otro lado, como el  $n$ -ésimo grupo de homotopía  $\pi_n(X)$  del espacio topológico con punto base  $(X, x_0)$  satisface la propiedad

$$\pi_n(X) = [\mathbb{S}^n, X]_* = [\Sigma \mathbb{S}^{n-1}, X]_* = [\mathbb{S}^{n-1}, \Omega X]_* = \pi_{n-1}(\Omega X), \quad n \geq 1,$$

se sigue que  $\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X) = \pi_{n-2}(\Omega^2 X) = \cdots = \pi_0(\Omega^n X)$ ,  $n \geq 1$ .

## Fibraciones de Serre y de Hurewicz

Sea  $\mathcal{C}$  una subcategoría de **Top**. Si  $B, E \in \mathcal{C}_0$  y  $p \in \mathcal{C}_1(E, B)$ , decimos que  $p$  tiene la  $\mathcal{C}$ -propiedad de levantamiento de homotopías ( $\mathcal{C}$ -PLH) si para todo  $X \in \mathcal{C}_0$ , toda función  $f \in \mathcal{C}_1(X, E)$  y toda homotopía  $H \in \mathcal{C}_1(X \times I, B)$  tal que  $H(x, 0) = (p \circ f)(x)$ , existe una homotopía  $\tilde{H} \in \mathcal{C}_1(X \times I, E)$  tal que  $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$  y  $p \circ \tilde{H} = H$ .

Podemos parafrasear el párrafo anterior de la siguiente manera. El morfismo  $p$  tiene la  $\mathcal{C}$ -PLH si siempre que el siguiente cuadrado es un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$ ,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ j_0 \downarrow & \tilde{H} \nearrow & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

entonces existe un morfismo que hace de los triángulos inferior y superior dos diagramas conmutativos en  $\mathcal{C}$ .

**Definición 4.2.1.** Una función continua  $p: E \rightarrow B$  con la  $\mathcal{C}$ -PLH es llamada una  $\mathcal{C}$ -fibración. Una  $\mathcal{C}$ -fibración sobre la categoría de espacios topológicos es llamada una **fibración de Hurewicz**. Si  $\mathcal{C}$  es la categoría de los hipercubos  $I^n$  (equivalente a la categoría de los complejos CW) la  $\mathcal{C}$ -fibración es llamada **fibración de Serre**.

Es claro que toda fibración de Serre es una fibración de Hurewicz, pero no recíprocamente, algunos ejemplos pueden encontrarse en [10] y [3].

**Ejemplo 4.2.2.** Si  $B$  es un espacio topológico con punto base  $x_0$  y

$$PB = \{w: I \rightarrow B \mid w(0) = x_0\}.$$

Entonces  $q: PB \rightarrow B$  definido por  $w \mapsto w(1)$  es una fibración de Hurewicz (cf. [1, p. 105]), con fibra  $q^{-1}(x_0) = \Omega B$ . De modo que tenemos la siguiente sucesión

$$\Omega B \rightarrow PB \rightarrow B,$$

y es claro que  $PB$  es contraíble.

Las fibraciones de Serre y de Hurewicz satisfacen una importante propiedad, ésta es la de tener una sucesión exacta larga en homotopía, como se establece en el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.3.** Si  $p: E \rightarrow B$  es una fibración de Serre, entonces

$$p_*: \pi_n(E, F_b, e) \rightarrow \pi_n(B, b), \quad n \geq 1$$

es un isomorfismo, donde  $b \in B$  y  $e \in F_b := p^{-1}(b)$ . En particular, existe una sucesión exacta larga,

$$\dots \rightarrow \pi_n(F_b) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F_b) \rightarrow \dots$$

La demostración de la primera parte de este resultado puede consultarse en [1, Teo. 4.3.33]. La segunda parte del teorema (cf. [1, Cor. 4.3.34]) se sigue al reemplazar  $\pi_n(E, F_b, e)$  por  $\pi_n(B, b)$  en la sucesión exacta larga asociada a la pareja  $(E, F_b)$ ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \pi_n(B) & & & & \\
 & \nearrow j'_* & \uparrow p_* & \downarrow p_*^{-1} & \nwarrow \delta' & & \\
 \dots \longrightarrow & \pi_n(F_b) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(E, F_b) & \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(F_b) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

donde  $j'_* = p_* \circ j_*$  y  $\delta' = \delta \circ p_*^{-1}$ .

## Cuasifibraciones

El concepto de cuasifibración rescata la importante propiedad de la existencia de una sucesión exacta larga en homotopía.

Una función  $p : E \longrightarrow B$  es llamada *cuasifibración* si para todo punto  $b \in B$  y para todo  $e \in F_b = p^{-1}(\{b\})$  se tiene que

$$p_* : \pi_n(E, F_b, e) \longrightarrow \pi_n(B, b)$$

es un isomorfismo para cada  $q \geq 0$ . Esto implica la existencia de una sucesión exacta larga en homotopía

$$\dots \longrightarrow \pi_n(F_b) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(F_b) \longrightarrow \dots$$

Es evidente que toda fibración de Serre, y por lo tanto de Hurewicz, es una cuasifibración. Nuevamente el resultado recíproco es falso, basta tomar la proyección canónica de la unión de los ejes  $X$  y  $Y$  sobre el eje  $X$ .

**Lema 4.2.4** (cf. [1, Prop. B.2.5]). *Si  $p : E \longrightarrow B$  es una cuasifibración con fibra  $F$  y espacio total  $E$  contraíble, entonces existe una equivalencia homotópica débil  $\phi : F \longrightarrow \Omega B$ , es decir,*

$$\phi_* : \pi_n(F) \xrightarrow{\cong} \pi_n(\Omega B),$$

para todo  $n \geq 0$ .

**Demostración.** Sean  $b \in B$ ,  $e_0 \in F \subset E$  y  $e'_0 \in \Omega B \subset PB$  puntos base, donde  $\Omega B = \Omega(B, b)$  y  $PB = P(B, b)$ . Por hipótesis  $E$  es contraíble, de modo que existe una homotopía  $H : E \times I \longrightarrow E$  entre la función constante  $H(e, 0) = e_0$ , y la función identidad  $H(e, 1) = e$ .

Consideremos las funciones  $p \circ H : E \times I \longrightarrow B$  y  $\overline{e'_0} : E \longrightarrow PB$ , con  $\overline{e'_0} : e \longmapsto e'_0$  siendo la función constante. Luego, como  $q \circ \overline{e'_0}(e) = q(e'_0) = b$  y  $(p \circ H) \circ j(e) = (p \circ H)(e, 0) = p(H(e, 0)) = p(e_0) = b$ , se sigue que el cuadrado del diagrama de

abajo es conmutativo, y por ser  $q : PB \rightarrow B$  una fibración de Hurewicz, existe una homotopía  $\tilde{H} : E \times I \rightarrow PB$  que hace conmutar el diagrama,

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\overline{e'_0}} & PB \\
 j_0 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow q \\
 E \times I & \xrightarrow{p \circ H} & B \\
 H \searrow & & \nearrow p \\
 & E &
 \end{array}$$

Esta homotopía tiene la propiedad de que  $\tilde{H}(e, 0) = \overline{e'_0}(e) = e'_0$  y  $q \circ \tilde{H} = p \circ H$ .

Definimos la función  $\varphi : E \rightarrow PB$  por  $\varphi(e) = \tilde{H}(e, 1)$ , de modo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\varphi} & PB \\
 p \searrow & & \nearrow q \\
 & B &
 \end{array}$$

De hecho, la conmutatividad del diagrama se sigue por la propiedad mencionada en el párrafo anterior. En efecto, si  $e \in E$  entonces  $(q \circ \varphi)(e) = q(\tilde{H}(e, 1)) = (p \circ H)(e, 1) = p(H(e, 1)) = p(e)$ .

Por la conmutatividad de este último diagrama, la función  $\varphi : E \rightarrow PB$  define por restricción una función entre las correspondientes fibras,

$$\phi : F \rightarrow \Omega B.$$

Veamos que esta aplicación es la equivalencia homotópica débil establecida en el lema.

De la contractibilidad de  $E$  y  $PB$  se tiene que  $\pi_n(E) = \pi_n(PB) = 0$ , para todo  $n \geq 0$ . Luego, las sucesiones exactas largas en homotopía de la cuasifibración  $F \rightarrow E \rightarrow B$  y la fibración de Hurewicz  $\Omega B \rightarrow PB \rightarrow B$  forman el siguiente digrama de cuadrados conmutativos,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \parallel & & \parallel & & \\
 \cdots & \longrightarrow & \pi_n(E) & \longrightarrow & \pi_n(B) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \varphi_* \cong & & \downarrow \phi_* & & \downarrow \varphi_* \cong \\
 \cdots & \longrightarrow & \pi_n(PB) & \longrightarrow & \pi_n(B) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(\Omega B) \longrightarrow \cdots \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Por lo tanto, para cada  $n \geq 1$ , tenemos que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_{n-1}(F) & \\
 \nearrow \cong & \downarrow \phi_* \cong & \\
 \pi_n(B) & & \\
 \searrow \cong & \downarrow & \\
 & \pi_{n-1}(\Omega B) &
 \end{array}$$

Se sigue que  $\phi : F \longrightarrow \Omega B$  es una equivalencia homotópica débil. ■

## Colímites

Aunque ya hemos utilizado previamente el concepto de colímite, recordaremos algunos hechos básicos que serán frecuentemente utilizados en este capítulo. El material incluido a continuación puede consultarse en [12, Apéndice 2] y [9, Cap. III, Sec. 7].

Recordemos que un *conjunto dirigido*  $(I, \leq)$  es un conjunto no vacío  $I$  con una relación binaria, transitiva y reflexiva  $\leq$ , tal que todo par de elementos  $a, b \in I$  tiene una cota superior  $c \in I$ , esto es, para todos  $a, b \in I$  existe  $c \in I$  tal que  $a \leq c$  y  $b \leq c$ .

**Ejemplo 4.2.5.** Sea  $\mathcal{U}$  un espacio de Hilbert complejo separable de dimensión infinita y sea  $I = \{W \subset \mathcal{U} \mid \dim_{\mathbb{C}} W < \infty\}$  con  $V \leq W$  si y sólo si,  $V \subseteq W$ . Entonces  $(I, \leq)$  es un conjunto dirigido, donde una cota superior para  $V$  y  $W$  es  $V \oplus W$ .

Sea  $(I, \leq)$  un conjunto dirigido. Un *sistema dirigido sobre  $I$* , denotado por  $\{X_i, f_{ji}\}$ , es una familia de objetos (en alguna categoría) indexados por  $I$ , y  $f_{ji} : X_i \longrightarrow X_j$  es un morfismo para todo  $i \leq j$  con las siguientes propiedades,

1.  $f_{ii} = \text{Id}_{X_i}$  es la identidad sobre  $X_i$ , y
2.  $f_{ki} = f_{kj} \circ f_{ji}$  para todo  $i \leq j \leq k$ .

El *colímite del sistema dirigido*  $\{X_i, f_{ji}\}$ , denotado por  $\text{colim}_i X_i$ , se define como el espacio cociente de la unión ajena  $\bigsqcup_i X_i$ , respecto a la relación de equivalencia  $\sim$ : para  $x_i \in X_i$  y  $x_j \in X_j$ ,  $x_i \sim x_j$  si y sólo si, existe  $k \in I$  tal que  $f_{ki}(x_i) = f_{kj}(x_j)$ .

El morfismo canónico  $f_i : X_i \rightarrow X$  que envía cada elemento a su clase de equivalencia es llamado la proyección.

Previamente en este trabajo hemos manejado la definición equivalente de colímite mediante la propiedad universal: Sea  $\{X_i, f_{ji}\}$  un sistema dirigido de objetos y morfismos en una categoría  $\mathcal{C}$ . El colímite de este sistema es un objeto  $X$  en  $\mathcal{C}$  junto con morfismos  $f_i : X_i \longrightarrow X$  que satisfacen  $f_i = f_j \circ f_{ji}$ . La pareja  $(X, f_i)$  es universal,

es decir, si  $(Y, g_i)$  satisface la propiedad anterior, entonces existe un único morfismo  $u : X \longrightarrow Y$  que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X_i & \xrightarrow{f_{ji}} & X_j \\
 & \searrow f_i \quad \swarrow f_j & \\
 & X & \\
 & \downarrow u & \\
 & Y &
 \end{array}$$

$g_i$   $g_j$

para todos  $i, j$ .

Un morfismo entre dos sistemas dirigidos  $\{X_i, f_{ji}\}$  y  $\{Y_i, g_{ji}\}$  es una familia de funciones  $\{h_i : X_i \longrightarrow Y_i\}_{i \in I}$  que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X_i & \xrightarrow{h_i} & Y_i \\
 f_{ji} \downarrow & & \downarrow g_{ji} \\
 X_j & \xrightarrow{h_j} & Y_j
 \end{array}$$

para todos  $i, j \in I$ . Un sistema dirigido  $\{X_i, f_{ji}\}$  en la categoría **Top** debe satisfacer que cada  $f_{ji}$  sea continua, y un morfismo entre sistemas dirigidos en dicha categoría debe cumplir que cada función  $h_i$  sea continua.

**Teorema 4.2.6** ([12, Ap. 2, Teo. 1.5]). *Sean  $\{X_i, f_{ji}\}$  y  $\{Y_i, g_{ji}\}$  dos sistemas dirigidos en **Top**. Si  $\{h_i\}_{i \in I}$  es un morfismo continuo, entonces existe una única función continua  $h : \text{colim } X_i \longrightarrow \text{colim } Y_i$  que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 X_i & \xrightarrow{h_i} & Y_i \\
 f_i \downarrow & & \downarrow g_i \\
 \text{colim } X_i & \xrightarrow{h} & \text{colim } Y_i
 \end{array}$$

*Además, si cada  $h_i$  es una función inyectiva (resp. sobreyectiva, resp. homeomorfismo), entonces  $h$  es inyectiva (resp. sobreyectiva, resp. homeomorfismo).*

La función  $h$  enunciada en el teorema anterior es llamada la función inducida por  $\{h_i\}_{i \in I}$  y usamos la notación  $h = \text{colim}_i h_i$ . El siguiente resultado muestra tres propiedades importantes de la función inducida (cf. [12, Ap.2, Cor. 1.6] y [9, p. 207]).

**Proposición 4.2.7.** *Sean  $\{\varphi_i\} : \{X_i, f_{ji}\} \longrightarrow \{Y_i, g_{ji}\}$  y  $\{\psi_i\} : \{Y_i, g_{ji}\} \longrightarrow \{Z_i, h_{ji}\}$  dos morfismos entre sistemas dirigidos y sean  $\varphi = \text{colim } (\varphi_i)$  y  $\psi = \text{colim } (\psi_i)$  sus correspondientes colímites.*

(i) La familia

$$\{\psi_i \circ \varphi_i\} : \{X_i, f_{ji}\} \longrightarrow \{Z_i, h_{ji}\}$$

es también un morfismo de sistemas dirigidos y además,

$$\operatorname{colim} (\psi_i \circ \varphi_i) = \psi \circ \varphi.$$

(ii) Si  $\{A_i\}$  es un sistema dirigido de subconjuntos de  $\{X_i\}$ , entonces  $\{\varphi_i(A_i)\}$  es un sistema dirigido de subconjuntos de  $\{Y_i\}$  y

$$\operatorname{colim} \varphi_i(A_i) = \varphi(\operatorname{colim} A_i).$$

(iii) Sea  $\{y_i\}$  una familia de elementos tal que  $y_i \in Y_i$  para cada  $i \in I$ , y además  $g_{ji}(y_i) = y_j$  para  $i \leq j$ . Entonces los conjuntos  $\varphi_i^{-1}(y_i)$  forman un sistema dirigido de subconjuntos de  $\{X_i\}$  y

$$\operatorname{colim} \varphi_i^{-1}(y_i) = \varphi^{-1}(y),$$

donde  $y \in \operatorname{colim}_i Y_i$  es el único elemento de tal que  $g_i(y_i) = y$  para cada  $i$ .

### 4.3. La cuasifibración de Bott

El objetivo de esta sección es proporcionar la construcción del espacio total  $E$  y el espacio base  $U$  de la cuasifibración de Bott  $p : E \longrightarrow U$ . Proporcionaremos también una caracterización de su correspondiente fibra.

#### Definición de $U$

Sea  $\mathcal{U}$  un espacio vectorial complejo separable de dimensión infinita, con un producto interior hermitiano. Podemos tomar como modelo  $\mathcal{U} = \mathbb{C}^\infty := \operatorname{colim}_n \mathbb{C}^n$ .

Consideremos nuevamente el conjunto dirigido

$$I = \{V \subset \mathcal{U} \mid \dim_{\mathbb{C}} V < \infty\}$$

con  $V \leq W$  si y sólo si,  $V \subseteq W$ . Asociado a este conjunto dirigido tenemos el siguiente sistema dirigido

$$\{U(V \oplus V), \iota_{W,V}\}_{V \in I}$$

donde  $U(V \oplus V) := \{A : V \oplus V \longrightarrow V \oplus V \mid AA^* = A^*A = \operatorname{Id}_{V \oplus V}\}$  es el grupo de operadores unitarios sobre  $V \oplus V$ , de tal manera que si  $V \leq W$  entonces se tiene el homomorfismo

$$\begin{aligned} \iota_{W,V} : U(V \oplus V) &\longrightarrow U(W \oplus W) \\ A &\longmapsto A \oplus \operatorname{Id}_{(W-V) \oplus (W-V)} \end{aligned}$$

donde  $W - V$  representa el complemento ortogonal de  $V$  en  $W$ .



**Observación. 4.3.1.** Si  $\dim_{\mathbb{C}} V = n$  y  $\dim_{\mathbb{C}} W = m$ , entonces es posible factorizar cada homomorfismo  $\iota_{W,V}$  como

$$\iota_{W,V} : U(V \oplus V) \longrightarrow U(2n) \longrightarrow U(2m) \longrightarrow U(W \oplus W),$$

con  $U(2n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid A \cdot A^* = \text{Id}\}$ , donde la flecha del centro es el encaje estándar de los grupos unitarios de matrices y las flechas de los extremos son inducidas por alguna isometría al elegir bases sobre  $V$  y  $W$ . De lo anterior se sigue la continuidad de  $\iota_{W,V}$ .

Definimos el grupo unitario infinito como el siguiente colímite,

$$U = \text{colim}_{\rightarrow V} U(V \oplus V)$$

donde el colímite es tomado sobre todos los subespacios  $V \subset \mathcal{U}$  de dimensión finita.

Cabe señalar que esta caracterización de  $U$  coincide con la establecida anteriormente en este trabajo. En efecto, como el conjunto dirigido  $(\mathbb{N}, \leq)$  con  $\leq$  el orden usual, induce un sistema dirigido  $\{U(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  el cual es cofinal a  $\{U(V \oplus V)\}_{V \in \mathcal{I}}$ , es decir, dado cualquier  $U(V \oplus V)$  con  $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $U(V \oplus V) = U(n)$ , se sigue que (cf. [12, p. 424]),

$$\text{colim}_{\rightarrow V} U(V \oplus V) \cong \text{colim}_{n \rightarrow \infty} U(n).$$

## Definición de $E$

Para la definición del espacio total de la cuasifibración de Bott, consideramos el mismo conjunto dirigido que para el espacio base  $U$  y el siguiente sistema dirigido,

$$E(V \oplus V) = \{X : V \oplus V \longrightarrow V \oplus V \mid X \text{ es lineal, } \langle Xv, u \rangle = \langle v, Xu \rangle \text{ y } \sigma(X) \subset [0, 1]\}$$

donde  $\sigma(X)$  denota el espectro de  $X$ . Esto es,  $E(V \oplus V)$  consta del conjunto de todos los endomorfismos lineales hermitianos de  $V \oplus V$  cuyos valores propios pertenecen al intervalo  $[0, 1]$ , donde para  $V \subseteq W$  subespacios de dimensión finita de  $\mathcal{U}$  tenemos los siguientes homomorfismos

$$\begin{aligned} \kappa_{W,V} : E(V \oplus V) &\longrightarrow E(W \oplus W) \\ X &\longmapsto X \oplus \pi_{(W-V) \oplus 0} \end{aligned}$$

donde denotamos por  $\pi_S$  la proyección ortogonal sobre el subespacio  $S$ . La continuidad de  $\kappa_{W,V}$  se deduce de un argumento completamente análogo a la Observación 4.3.1.

**Lema 4.3.2.** *Sea  $E = \text{colim}_{\rightarrow V} E(V \oplus V)$  el colímite sobre todos los subespacios  $V \subset \mathcal{U}$  de dimensión finita. Entonces  $E$  es contraíble.*

El lema anterior se sigue del hecho de que cada espacio  $E(V \oplus V)$  es contraíble mediante la homotopía  $h_t(X) = tX$  con  $t \in [0, 1]$ . Por lo tanto,  $E = \text{colim}_{\rightarrow V} E(V \oplus V)$  es también contraíble.

### Definición de $p : E \longrightarrow U$

Sea  $X \in E(V \oplus V)$ . Como  $X$  es un operador hermitiano, tenemos que  $X^* = X$ , de modo que el operador

$$p_V(X) := e^{2\pi i X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i)^n}{n!} X^n$$

es un operador unitario. En efecto,

$$p_V(X) \circ (p_V(X))^* = (e^{2\pi i X}) \circ (e^{2\pi i X})^* = e^{2\pi i X} \circ e^{-2\pi i X^*} = e^{2\pi i X} e^{-2\pi i X} = e^0 = \text{Id}_{V \oplus V}.$$

Análogamente  $(p_V(X))^* \circ p_V(X) = \text{Id}_{V \oplus V}$ . Así, tenemos una aplicación bien definida,

$$\begin{aligned} p_V : E(V \oplus V) &\longrightarrow U(V \oplus V) \\ X &\longmapsto e^{2\pi i X} \end{aligned}$$

Nuevamente, la continuidad de cada aplicación  $p_V$  se sigue de la continuidad de su contraparte en el caso clásico de los grupos de matrices y factorizando  $p_V$  a través de tal proyección exponencial como se comenta en la Observación 4.3.1.

**Lema 4.3.3** (cf. [1, Prop. B.2.8]). *Para cada subespacio  $V \subset \mathcal{U}$  de dimensión finita, la aplicación  $p_V$  es sobreyectiva.*

**Demostración.** Fijando una base para  $V \oplus V$  y siendo  $[A]$  la representación matricial en dicha base del operador unitario  $A \in U(V \oplus V)$ , podemos encontrar una matriz unitaria  $T$  tal que

$$T^{-1}[A]T = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \lambda_1} & & & 0 \\ & e^{2\pi i \lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{2\pi i \lambda_n} \end{pmatrix}$$

con  $\lambda_j \in [0, 1]$ , ya que los valores propios de la matriz unitaria  $T^{-1}[A]T$  son números complejos de módulo 1.

Sea

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y consideremos el operador  $X$  cuya representación matricial es dada por  $TDT^{-1}$ . Como  $T$  es una matriz unitaria, se tiene que  $T^{-1} = T^*$  y por lo tanto,

$$(TDT^{-1})^* = (TDT^*)^* = TD^*T^* = TDT^{-1},$$

esto es,  $TDT^{-1}$  es una matriz hermitiana y se sigue que  $X \in E(V \oplus V)$ .

Finalmente, y abusando de la notación, tenemos

$$p_V(X) = e^{2\pi i (TDT^{-1})} = e^{T(2\pi i D)T^{-1}} = Te^{2\pi i D}T^{-1} = T(T^{-1}AT)T^{-1} = A.$$

■

**Lema 4.3.4.** Si  $V \subset W$  son subespacios de dimensión finita de  $\mathcal{U}$ , entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E(V \oplus V) & \xrightarrow{p_V} & U(V \oplus V) \\ \downarrow \kappa_{W,V} & & \downarrow \iota_{W,V} \\ E(W \oplus W) & \xrightarrow{p_W} & U(W \oplus W) \end{array}$$

**Demostración.** Sea  $X \in E(V \oplus V)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} p_W \circ \kappa_{W,V}(X) &= p_W(X \oplus \pi_{(W-V) \oplus 0}) \\ &= e^{2\pi i \cdot (X \oplus \pi_{(W-V) \oplus 0})} \\ &= e^{2\pi i X} \oplus e^{2\pi i \cdot \pi_{(W-V) \oplus 0}} \\ &= e^{2\pi i X} \oplus \text{Id}_{(W-V) \oplus (W-V)} \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por el hecho de que  $e^{2\pi i} = e^0$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \iota_{W,V} \circ p_V(X) &= \iota_{W,V}(e^{2\pi i X}) \\ &= e^{2\pi i X} \oplus \text{Id}_{(W-V) \oplus (W-V)} \end{aligned}$$

De modo que se sigue la conmutatividad del diagrama. ■

De los lemas anteriores, se sigue la existencia (cf. [12, Teo. 1.5-(2)]) de una única aplicación continua y sobreyectiva  $p: E \rightarrow U$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E(V \oplus V) & \xrightarrow{p_V} & U(V \oplus V) \\ \downarrow \kappa_V & & \downarrow \iota_V \\ E & \xrightarrow{p} & U \end{array}$$

es conmutativo para cada subespacio  $V$  de  $\mathcal{U}$  de dimensión finita, donde  $\kappa_V$  y  $\iota_V$  son las proyecciones en su respectivo cociente.

Si  $Y \subset \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ , definimos los conjuntos

$$\text{BU}_n(Y) = \{V \mid V \subseteq Y, \dim_{\mathbb{C}} V = n\}$$

para cada  $n \geq 0$ , y  $\text{BU}(Y) := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \text{BU}_n(Y)$ .

**Lema 4.3.5.** Si  $V \subset \mathcal{U}$  es un subespacio de dimensión finita y  $A \in U(V \oplus V)$ , entonces

$$p_V^{-1}(A) \cong \text{BU}(\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V})).$$

**Demostración.** Como  $A$  es un operador unitario, su descomposición espectral es de la forma

$$A = \sum e^{2\pi i \mu_j} \pi_{V_j},$$

con  $\bigoplus_j V_j = V \oplus V$ . Si  $X \in p_V^{-1}(A)$ , entonces el operador  $X$  tiene la siguiente descomposición espectral

$$X = 0 \cdot \pi_{V_0} + 1 \cdot \pi_{V_1} + \sum_j \mu_j \pi_{V_j},$$

con  $V_0 \oplus V_1 \oplus \bigoplus_j V_j = V \oplus V$ . Definimos

$$\begin{aligned} \Psi_V : p_V^{-1}(A) &\longrightarrow \text{BU}(\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V})) \\ X &\longmapsto \text{Ker}(X - \text{Id}_{V \oplus V}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Claramente  $\Psi_V$  está bien definida ya que  $\text{Ker}(X - \text{Id}_{V \oplus V}) = V_1 \subset V_0 \oplus V_1 = \text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V})$ . Además, su función inversa es dada por

$$\begin{aligned} \Psi_V^{-1} : \text{BU}(\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V})) &\longrightarrow p_V^{-1}(A) \\ V' &\longmapsto 0 \cdot \pi_{\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V}) - V'} + 1 \cdot \pi_{V'} + \sum_j \mu_j \pi_{V_j} \end{aligned}$$

■

Para  $V \subseteq W \subseteq \mathcal{U}$  existen inclusiones naturales

$$\begin{aligned} \delta_{W,V} : \text{BU}_n(V \oplus V) &\longrightarrow \text{BU}_m(W \oplus W) \\ V' &\longmapsto V' \oplus ((W - V) \oplus 0) \end{aligned}$$

Si  $V' \subset W \oplus W$ , definimos

$$\widetilde{\text{BU}}_{V',W} = \text{colim}_{W' \supseteq W} \text{BU}(V' \oplus ((W' - W) \oplus (W' - W))).$$

Por otro lado, si  $A \in U(V \oplus V)$  tiene la siguiente descomposición espectral

$$A = \sum e^{2\pi i \mu_j} \pi_{V_j},$$

entonces  $X \in p_V^{-1}(A)$  tiene la forma

$$X = 0 \cdot \pi_{V_0} + 1 \cdot \pi_{V_1} + \sum_j \mu_j \pi_{V_j},$$

con  $V_0 \oplus V_1 \oplus \bigoplus_j V_j = V \oplus V$ . Si además  $V \subset W$ ,  $X' \in p_W^{-1}(\iota_{W,V}(A))$  y  $\kappa_{W,V}(X) = X'$ , entonces

$$X' = 0 \cdot \pi_{V_0 \oplus (0 \oplus (W - V))} + 1 \cdot \pi_{V_1 \oplus ((W - V) \oplus 0)} + \sum_j \mu_j \pi_{V_j},$$

con  $[V_0 \oplus (0 \oplus (W - V))] \oplus [V_1 \oplus ((W - V) \oplus 0)] \oplus [\bigoplus_j V_j] = W \oplus W$ .

En la notación anterior y de la demostración del Lema 4.3.5, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 p_V^{-1}(A) & \xrightarrow{\Psi_V} & BU(\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V})) \\
 \downarrow \kappa_{W,V} & & \downarrow \delta_{W,V} \\
 p_W^{-1}(\iota_{W,V}(A)) & \xrightarrow{\Psi_W} & BU(\text{Ker}(\iota_{W,V}(A) - \text{Id}_{W \oplus W}))
 \end{array}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
 \delta_{W,V} \circ \Psi_V(X) &= \delta_{W,V} \circ \Psi_V \left( 0 \cdot \pi_{V_0} + 1 \cdot \pi_{V_1} + \sum_j \mu_j \pi_{V_j} \right) \\
 &= \delta_{W,V}(V_1) \\
 &= V_1 \oplus ((W - V) \oplus 0).
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \Psi_W \circ \kappa_{W,V}(X) &= \Psi_W \circ \kappa_{W,V} \left( 0 \cdot \pi_{V_0} + 1 \cdot \pi_{V_1} + \sum_j \mu_j \pi_{V_j} \right) \\
 &= \Psi_W \left( 0 \cdot \pi_{V_0 \oplus (0 \oplus (W - V))} + 1 \cdot \pi_{V_1 \oplus ((W - V) \oplus 0)} + \sum_j \mu_j \pi_{V_j} \right) \\
 &= V_1 \oplus ((W - V) \oplus 0)
 \end{aligned}$$

Luego, como cada aplicación  $\Psi_V$  es un homeomorfismo, por el Lema 4.3.5, se sigue que

$$\Psi : p^{-1}(A) \xrightarrow{\cong} \widetilde{BU}_{\text{Ker}(A - \text{Id}), V} \quad (4.3)$$

por el Teorema 4.2.6 y el Corolario 4.2.7-(iii).

Finalmente como  $\mathcal{U} \cong \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ , por ser un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, podemos elegir una base para  $\mathcal{U}$  de la forma  $\{e_i\}_{-\infty < i < \infty}$  y se puede caracterizar a  $\mathbb{Z} \times BU$  como la colección de todos los subespacios  $V \subset \mathcal{U}$  tales que  $V_p \subset V \subset V_q$ , para algunos  $-\infty < p \leq q < \infty$  y  $V_k := \text{span}_{i < k} \langle e_i \rangle$  (cf. [1, Apéndice B.1] y [18, Sec. 4]). Por lo tanto, existe un homeomorfismo

$$\Phi : \widetilde{BU}_{\text{Ker}(A - \text{Id}), V} \longrightarrow \mathbb{Z} \times BU. \quad (4.4)$$

De (4.3) y de (4.4) obtenemos que

$$p^{-1}(A) \cong \mathbb{Z} \times BU.$$

## 4.4. El Teorema de Dold-Thom y periodicidad de Bott

En esta sección demostraremos el Teorema 4.1.2, resultado principal de este capítulo. Para demostrar que  $p : E \rightarrow U$  es efectivamente una cuasifibración seguiremos el siguiente criterio establecido por A. Dold y R. Thom.

**Teorema 4.4.1** (Dold-Thom). *Sea  $p : X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva. Supongamos que  $Y$  tiene una filtración  $\cdots \subset F_{i-1}Y \subset F_iY \subset F_{i+1}Y \subset \cdots$  tal que*

**DT-1.** *El subespacio  $F_nY - F_{n-1}Y$  es distinguido para todo  $n$ , esto es, la restricción*

$$p|_{p^{-1}(F_nY - F_{n-1}Y)} : p^{-1}(F_nY - F_{n-1}Y) \rightarrow F_nY - F_{n-1}Y$$

*es una cuasifibración.*

**DT-2.** *Para todo  $n$  existe una vecindad  $N_n$  de  $F_{n-1}Y$  en  $F_nY$  y una deformación  $h : N_n \times I \rightarrow N_n$  tal que  $h(-, 0) : N_n \rightarrow N_n$  es la identidad y  $h(-, 1) : N_n \rightarrow N_n$  satisface que  $h(N_n, 1) \subset F_{n-1}Y$ .*

**DT-3.** *Esta deformación es cubierta por una deformación  $H : p^{-1}(N_n) \times I \rightarrow p^{-1}(N_n)$  tal que  $H(-, 0) : p^{-1}(N_n) \rightarrow p^{-1}(N_n)$  es la identidad y para todo  $y \in N_n$  la aplicación inducida*

$$H(-, 1) : p^{-1}(y) \rightarrow p^{-1}(h(y, 1))$$

*es una equivalencia homotópica débil.*

Entonces  $p$  es una cuasifibración.

El criterio anterior es establecido en [5, Teo. 2.1] basándose en los resultados originales de A. Dold y R. Thom en [11].

Antes de iniciar la verificación de las hipótesis para la función  $p : E \rightarrow U$ , establecemos la siguiente filtración para  $U$ .

Sea  $V \subset \mathcal{U}$  un subespacio de dimensión finita y sea

$$F_nU(V \oplus V) = \{A \in U(V \oplus V) \mid \dim_{\mathbb{C}}(V \oplus V - \text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V})) \leq n\},$$

definimos

$$B_n(V) = F_nU(V \oplus V) - F_{n-1}U(V \oplus V) = \{A \in U(V \oplus V) \mid \dim_{\mathbb{C}}(V \oplus V - \text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V})) = n\}$$

y adoptamos la siguiente notación

$$F_nU := \text{colim}_V F_nU(V \oplus V) \subseteq U,$$

$$B_n := F_nU - F_{n-1}U.$$

#### 4.4.1. Comprobación de DT-1

Para la comprobación del primer paso de DT-1 ocupamos enunciar unos resultados

**Lema 4.4.2.** *Sea  $G$  un subgrupo cerrado de un grupo de Lie  $B$ , entonces  $B/G$  tiene una única estructura de variedad tal que*

1.  $B \xrightarrow{\pi} B/G$  es  $C^\infty$
2. Existen secciones locales de  $B/G$  en  $B$

Para ver la demostración puede consultar [[22], p. 120].

**Lema 4.4.3.** *Sea  $B$  un grupo topológico y  $H$  subgrupo cerrado de un subgrupo cerrado  $G$  de  $B$  ( $H \subseteq G \subseteq B$ ) tales que  $\pi : B \rightarrow B/G$  admite secciones locales, entonces  $p : B/H \rightarrow B/G$  la proyección natural tiene estructura de haz fibrado.*

La demostración de este lema se encuentra en [[21], p.30].

**Lema 4.4.4.** *Sea  $V \subset \mathcal{W}$  un subespacio de dimensión finita y sea*

$$\text{Perp}_{i,j}(V \oplus V) = \{(V', V'') \mid V', V'' \subset V \oplus V, V' \perp V'', \dim V' = i, \dim V'' = j\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} P : \text{Perp}_{i,j}(V \oplus V) &\longrightarrow \text{BU}_{i+j}(V \oplus V) \\ (V', V'') &\longmapsto V' \oplus V'' \end{aligned}$$

es una fibración de Serre.

**Demostración.** Por una parte, por definición tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Perp}_{i,j}(V \oplus V) &= \{(V', V'') \mid V', V'' \subset V \oplus V, V' \perp V'', \dim V' = i, \dim V'' = j\} \\ &= \frac{U_{2n}}{U_i \times U_j \times U_{2n-(i+j)}} \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la Proposición 2.4.10 tenemos que

$$\text{BU}_{i+j}(V \oplus V) \cong \frac{U_{2n}}{U_{i+j} \times U_{2n-(i+j)}}.$$

Notemos que  $U_i \times U_j \times U_{2n-(i+j)} \rightarrow U_{i+j} \times U_{2n-(i+j)}$  es un encaje cerrado, y a su vez  $U_{i+j} \times U_{2n-(i+j)} \rightarrow U_{2n}$  es un encaje cerrado. Usando el Lema 4.4.2 tenemos que  $U_{2n} \rightarrow \frac{U_{2n}}{U_{i+j} \times U_{2n-(i+j)}}$  admite secciones locales, y por el Lema 4.4.3 tenemos que

$$P' = \frac{U_{2n}}{U_i \times U_j \times U_{2n-(i+j)}} \longrightarrow \frac{U_{2n}}{U_{i+j} \times U_{2n-(i+j)}}$$

es una fibración, por lo tanto

$$P : \text{Perp}_{i,j}(V \oplus V) \longrightarrow \text{BU}_{i+j}(V \oplus V)$$

es una fibración de Serre.

■

Para demostrar que los subespacios  $B_n$  son distinguidos, probaremos de hecho, que para cada  $n$  la restricción

$$p|_{p^{-1}(B_n)} : p^{-1}(B_n) \longrightarrow B_n$$

es una fibración de Serre. Para ello necesitamos el siguiente resultado.

**Lema 4.4.5.** *Si  $V \subset \mathcal{U}$  es un subespacio de dimensión finita y  $A \in U(V \oplus V)$ , entonces para cada  $n$ , la proyección natural*

$$p_V^{-1}(B_n(V)) \longrightarrow B_n(V),$$

*es una fibración de Serre.*

**Demostración.** Consideremos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} I^k & \xrightarrow{\tilde{\beta}_0} & p_V^{-1}(B_n(V)) \\ \downarrow j_0 & & \downarrow p_V \\ I^k \times I & \xrightarrow{\beta} & B_n(V) \end{array}$$

y fijemos la siguiente notación

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0 : I^k &\longrightarrow p_V^{-1}(B_n(V)) \\ \tau &\longmapsto X(\tau) = 0 \cdot \pi_{W_0(\tau)} + 1 \cdot \pi_{W_1(\tau)} + \sum \mu_j(\tau) \pi_{V_j(\tau)} \end{aligned} \tag{4.5}$$

y

$$\begin{aligned} \beta : I^k \times I &\longrightarrow B_n(V) \\ (\tau, t) &\longmapsto A(\tau, t) = 1 \cdot \pi_{V_1(\tau, t)} + \sum \lambda_j(\tau, t) \pi_{V_j(\tau, t)} \end{aligned} \tag{4.6}$$

El hecho de que el diagrama anterior es conmutativo significa que  $p_V \circ \tilde{\beta}_0(\tau) = \beta(\tau, 0)$ , lo cual implica las siguientes condiciones sobre las descomposiciones espectrales de los operadores anteriores, para cada  $\tau \in I^k$  y  $t = 0$ ,

- $W_0(\tau) \oplus W_1(\tau) = V_1(\tau, 0)$ ,



- $V_j(\tau) = V_j(\tau, 0)$ ,
- $e^{2\pi i \mu_j(\tau)} = \lambda_j(\tau, 0)$  con  $\mu_j(\tau) \in (0, 1)$ .

A fin de demostrar que  $p_V$  es una fibración de Serre, debemos construir una homotopía  $\tilde{\beta} : I^k \times I \rightarrow p_V^{-1}(B_n(V))$  tal que  $\tilde{\beta}(\tau, 0) = \tilde{\beta}_0(\tau)$  y  $p_V \circ \tilde{\beta} = \beta$ , esto es, un levantamiento del diagrama anterior,

$$\begin{array}{ccc}
 I^k & \xrightarrow{\tilde{\beta}_0} & p_V^{-1}(B_n(V)) \\
 \downarrow j_0 & \nearrow \tilde{\beta} & \downarrow p_V \\
 I^k \times I & \xrightarrow{\beta} & B_n(V)
 \end{array}$$

Por otro lado, en la notación de (4.5) y (4.6), definimos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}_0 : I^k &\longrightarrow \text{Perp}_{i,j}(V \oplus V) \\
 \tau &\longmapsto (W_1(\tau), V_1(\tau, 0) - W_1(\tau))
 \end{aligned}$$

donde  $i = \dim W_1(0)$ , y definimos también

$$\begin{aligned}
 \alpha : I^k \times I &\longrightarrow \text{BU}_{i+j}(V \oplus V) \\
 (\tau, t) &\longmapsto V_1(\tau, t)
 \end{aligned}$$

de modo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc}
 I^k & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} & \text{Perp}_{i,j}(V \oplus V) \\
 \downarrow j_0 & & \downarrow P \\
 I^k \times I & \xrightarrow{\alpha} & \text{BU}_{i+j}(V \oplus V)
 \end{array}$$

Luego, como  $P$  es una fibración de Serre (por el Lema 4.4.4), existe una homotopía

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha} : I^k \times I &\longrightarrow \text{Perp}_{i,j}(V \oplus V) \\
 (\tau, t) &\longmapsto (W'_1(\tau, t), V_1(\tau, t) - W'_1(\tau, t))
 \end{aligned}$$

tal que  $\tilde{\alpha}(\tau, 0) = \tilde{\alpha}_0(\tau)$  y  $P \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ , y en particular  $W'_1(\tau, 0) = W_1(\tau)$ . Definimos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta} : I^k \times I &\longrightarrow p_V^{-1}(B_n(V)) \\
 (\tau, t) &\longmapsto 0 \cdot \pi_{V_1(\tau, t) - W'_1(\tau, t)} + 1 \cdot \pi_{W'_1(\tau, t)} + \sum \mu_j(\tau) \pi_{V_j(\tau)}
 \end{aligned}$$

Es sencillo verificar que esta homotopía es el levantamiento que estábamos buscando para el diagrama original y se sigue el resultado que deseábamos demostrar. ■

Finalmente, para probar que  $p|_{p^{-1}(B_n)}: p^{-1}(B_n) \rightarrow B_n$  es una fibración de Serre usamos el hecho de que el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} I^k & \xrightarrow{\tilde{\gamma}_0} & p^{-1}(B_n) \\ j_0 \downarrow & & \downarrow p \\ I^k \times I & \xrightarrow{\gamma} & B_n \end{array}$$

se puede factorizar de la siguiente manera,

$$\begin{array}{ccccc} I^k & \xrightarrow{\tilde{\beta}_0} & p_V^{-1}(B_n(V)) & \xrightarrow{\kappa_V} & p^{-1}(B_n) \\ j_0 \downarrow & & \downarrow p_V & & \downarrow p \\ I^k \times I & \xrightarrow{\beta} & B_n(V) & \xrightarrow{\iota_V} & B_n \end{array}$$

debido a la compacidad de  $I^k \times I$  y de  $I^k$ . Luego, por el Lema 4.4.5 existe un levantamiento  $\tilde{\beta}: I^k \times I \rightarrow p_V^{-1}(B_n(V))$  y se sigue que  $\tilde{\gamma} := \kappa_V \circ \tilde{\beta}$  corresponde a un levantamiento de  $\gamma = \iota_V \circ \beta$ .

#### 4.4.2. Comprobación de DT-2

Antes de comprobar los puntos DT-2 y DT-3 del Teorema de Dold-Thom, mostraremos una homotopía entre la función identidad  $\text{Id}: I \rightarrow I$  y la función  $f: I \rightarrow I$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}] \\ 2x - 1/2 & \text{si } x \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

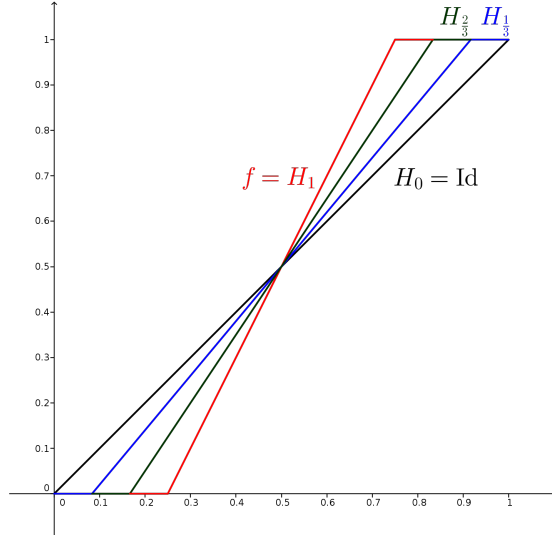
la cual utilizaremos para la comprobación de estos últimos puntos del teorema.

La homotopía entre  $\text{Id}$  y  $f$  que consideraremos, para cada  $t \in [0, 1]$ , es dada por

$$H_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{t}{4}] \\ \frac{2}{2-t} \left(x - \frac{t}{4}\right) & \text{si } x \in (\frac{t}{4}, 1 - \frac{t}{4}) \\ 1 & \text{si } x \in [1 - \frac{t}{4}, 1] \end{cases}$$

de donde es evidente que  $H_0 = \text{Id}$  y  $H_1 = f$ . Podemos ver la homotopía como la familia de funciones donde la parte constante de cada término de la familia se expande linealmente respecto a  $t > 0$ . En la figura mostramos algunos términos de la

homotopía.



Consideremos ahora un subespacio  $V \subset \mathcal{U}$  de dimensión finita y un operador hermitiano  $X \in E(V \oplus V)$  cuya descomposición espectral es dada por

$$X = \sum_j \nu_j \pi_{V_j},$$

con  $\bigoplus_j V_j = V \oplus V$  y  $\nu_j$  el valor propio correspondiente al espacio propio  $V_j$ . En la notación anterior, definimos

$$\begin{aligned} H_V : E(V \oplus V) \times I &\longrightarrow E(V \oplus V) \\ \left( \sum_j \nu_j \pi_{V_j}, t \right) &\longrightarrow \sum_j H_t(\nu_j) \pi_{V_j} \end{aligned}$$

y denotamos por  $H : E \times I \longrightarrow E$  la correspondiente deformación inducida en el colímite. Análogamente, podemos definir

$$\begin{aligned} h_V : U(V \oplus V) \times I &\longrightarrow U(V \oplus V) \\ \left( \sum_j e^{2\pi i \nu_j} \pi_{V_j}, t \right) &\longrightarrow \sum_j e^{2\pi i H_t(\nu_j)} \pi_{V_j} \end{aligned}$$

y sea  $h : U \times I \longrightarrow U$  la correspondiente deformación inducida en el colímite.

Procedamos ahora a la comprobación de DT-2. Sea  $n$  fijo,  $V \subset \mathcal{U}$  un subespacio de dimensión finita y consideremos la siguiente vecindad

$$N_n(V) := \left\{ A = 1 \cdot \pi_{V'} + \sum_{\nu_j \neq 0,1} e^{2\pi i \nu_j} \pi_{V_j} \in F_n U(V \oplus V) \mid V' \oplus \bigoplus_{\nu_j \neq 0,1} V_j = V \oplus V, \dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{\nu_j \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} V_j < n \right\}.$$

Por otro lado, si  $A = 1 \cdot \pi_{V'} + \sum_{\nu_j \neq 0,1} e^{2\pi i \nu_j} \pi_{V_j} \in F_{n-1} U(V \oplus V)$  entonces  $\dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{\nu_j \neq 0,1} V_j \leq n-1$  y se sigue que

$$\dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{\nu_j \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} V_j \leq n-1 < n.$$

Por lo tanto, para cada subespacio  $V \subset \mathcal{U}$  de dimensión finita, se tiene que

$$F_{n-1}U(V \oplus V) \subset N_n(V) \subset F_n U(V \oplus V).$$

De la relación anterior, tenemos una vecindad  $N_n = \text{colim}_{\rightarrow V} N_n(V)$  de  $F_{n-1}U$  en  $F_n U$ .

Para comprobar que la vecindad  $N_n$  satisface las condiciones de DT-2, consideremos la restricción  $h|_{N_n \times I}$  de la deformación  $h : U \times I \rightarrow U$  introducida previamente en esta sección. Denotaremos esta restricción también por  $h$ . El hecho de que  $h$  es una deformación de  $N_n$  se sigue del siguiente lema.

**Lema 4.4.6.** *Para cada subespacio  $V \subset \mathcal{U}$  de dimensión finita y  $t \in [0, 1]$ , se satisface que*

$$h_V(N_n(V), t) \subseteq N_n(V).$$

**Demostración.** Este resultado se sigue del hecho de que  $H_t : I \rightarrow I$  es una función no decreciente para todo  $t \in [0, 1]$  y es estrictamente creciente (con pendiente mayor o igual que 1) en el intervalo  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ . En efecto, sea

$$A = 1 \cdot \pi_{V'} + \sum_{\nu_j \neq 0,1} e^{2\pi i \nu_j} \pi_{V_j} \in N_n(V)$$

con  $V' \oplus \bigoplus_{\nu_j \neq 0,1} V_j = V \oplus V$  y  $\dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{\nu_j \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} V_j < n$ . Luego, por construcción de  $H_t$ , se tiene que  $\nu_j \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  no necesariamente implica que  $H_t(\nu_j) \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ . Por lo tanto, el operador

$$h_V(A, t) = 1 \cdot \pi_{V'} + \sum_{\nu_j \neq 0,1} e^{2\pi i H_t(\nu_j)} \pi_{V_j}$$

tiene a lo más la misma cantidad de valores propios en el intervalo  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  que el operador  $A$ ; así,

$$\dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{H_t(\nu_j) \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} V_j \leq \dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{\nu_j \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} V_j < n,$$

y se sigue que  $h_V(A, t) \in N_n(V)$ . ■

Finalmente, en  $t = 0$  se tiene  $H_0 = \text{Id}$  y por lo tanto  $h_V(A, 0) = A$  para todo  $A \in U(V \oplus V)$ , de modo que  $h(-, 0) = \text{Id}$  sobre  $U$  y en consecuencia sobre  $N_n$ . El hecho de que  $h(N_n, 1) \subset F_{n-1}U$  se sigue del siguiente lema, cuya demostración sigue prácticamente las mismas líneas que la demostración del lema anterior y por lo tanto no las reproduciremos.

**Lema 4.4.7.** *Para cada subespacio  $V \subset \mathcal{U}$  de dimensión finita se cumple que*

$$h_V(N_n(V), 1) \subseteq F_{n-1}U(V \oplus V).$$

### 4.4.3. Comprobación de DT-3

Para concluir la verificación del Teorema de Dold-Thom, resta probar que la función

$$H(-, 1) : p^{-1}(\mathbf{A}) \longrightarrow p^{-1}(h(\mathbf{A}, 1))$$

establecida anteriormente, induce una equivalencia homotópica débil para cada  $\mathbf{A} \in N_n$ . Para ésto probaremos, mediante el homeomorfismo dado por (4.3),

$$\Psi_{\mathbf{A}} : p^{-1}(\mathbf{A}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathrm{BU}}_{\mathrm{Ker}(A - \mathrm{Id}), V},$$

que la aplicación inducida sobre tales espacios corresponde a una equivalencia homotópica débil.

Caracterizamos primero la aplicación inducida por  $H(-, 1)$ .

Sea  $V \subset \mathscr{U}$  un subespacio de dimensión finita y  $A \in U(V \oplus V)$  un operador unitario tal que  $\iota_V(A) = \mathbf{A}$ , cuya descomposición espectral es dada por

$$A = 1 \cdot \pi_{V_1} + \sum_{\mu_j \neq 0, 1} e^{2\pi i \mu_j} \pi_{V_j},$$

con  $\bigoplus_j V_j = V \oplus V$ . Se sigue que

$$h_V(A, 1) = 1 \cdot \pi_{\widetilde{V}_1} + \sum_{\frac{1}{4} < \mu_j < \frac{3}{4}} e^{2\pi i f(\mu_j)} \pi_{V_j},$$

donde  $\widetilde{V}_1 = V_1 \oplus_{\mu_j \in (0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1)} V_j$  y por lo tanto,  $H_V(-, 1) : p_V^{-1}(A) \longrightarrow p_V^{-1}(h_V(A, 1))$  es dado explícitamente por,

$$H_V(-, 1) : 0 \cdot \pi_{W_0} + 1 \cdot \pi_{W_1} + \sum_{\mu_j \neq 0, 1} \mu_j \pi_{V_j} \longmapsto 0 \cdot \pi_{W_0 \oplus \widetilde{W}_0} + 1 \cdot \pi_{W_1 \oplus \widetilde{W}_1} + \sum_{\frac{1}{4} < \mu_j < \frac{3}{4}} f(\mu_j) \pi_{V_j}$$

donde  $W_0 \oplus W_1 = V_1$ ,  $\widetilde{W}_0 = \bigoplus_{\mu_j \in (0, \frac{1}{4}]} V_j$  y  $\widetilde{W}_1 = \bigoplus_{\mu_j \in [\frac{3}{4}, 1)} V_j$ . Luego, la aplicación inducida en el siguiente diagrama consiste en tomar la suma directa con el subespacio  $\widetilde{W}_1$ ,

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\mathbf{A}) & \xrightarrow{H(-, 1)} & p^{-1}(h(\mathbf{A}, 1)) \\ \Psi_A \downarrow \cong & & \cong \downarrow \Psi_{h(A, 1)} \\ \widetilde{\mathrm{BU}}_{\mathrm{Ker}(A - \mathrm{Id}_{V \oplus V}), V} & \xrightarrow{i} & \widetilde{\mathrm{BU}}_{\mathrm{Ker}(h_V(A, 1) - \mathrm{Id}_{V \oplus V}), V} \end{array}$$

En efecto, si  $V \subset W$ , entonces tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} p_W^{-1}(\iota_{W, V}(A)) & \xrightarrow{H_W(-, 1)} & p_W^{-1}(h_W(\iota_{W, V}(A), 1)) \\ (\Psi_A)_W \downarrow \cong & & \cong \downarrow (\Psi_{h(A, 1)})_W \\ \mathrm{BU}(\mathrm{Ker}(\iota_{W, V}(A) - \mathrm{Id}_{W \oplus W}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V))) & \xrightarrow{i_W} & \mathrm{BU}(\mathrm{Ker}(h_W(\iota_{W, V}(A), 1) - \mathrm{Id}_{W \oplus W}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V))) \end{array}$$

El cual, para cada elemento  $X \in p_W^{-1}(\iota_{W,V}(A))$ , cuya descomposición espectral es  $X = 0 \cdot \pi_{W_0} + 1 \cdot \pi_{W_1} + \sum_{\mu_j \neq 0,1} \mu_j \pi_{V_j}$  con  $W_0 \oplus W_1 = V_1$ , establece la siguiente correspondencia

$$\begin{array}{ccc}
 0 \cdot \pi_{W_0} + 1 \cdot \pi_{W_1} + \sum_{\mu_j \neq 0,1} \mu_j \pi_{V_j} & \xrightarrow{H_W(-,1)} & 0 \cdot \pi_{W_0 \oplus \widetilde{W}_0} + 1 \cdot \pi_{W_1 \oplus \widetilde{W}_1} + \sum_{\frac{1}{4} < \mu_j < \frac{3}{4}} f(\mu_j) \pi_{V_j} \\
 \downarrow (\Psi_A)_W \cong & & \downarrow \cong (\Psi_{h(A,1)})_W \\
 W_1 = \text{Ker}(X - \text{Id}_{W \oplus W}) & \dashrightarrow \dashrightarrow \dashrightarrow \dashrightarrow \dashrightarrow & \text{Ker}(X \oplus \pi_{\widetilde{W}_1} - \text{Id}_{W \oplus W}) = W_1 \oplus \widetilde{W}_1
 \end{array}$$

y además,

$$\text{Ker}(0 \cdot \pi_{W_0 \oplus \widetilde{W}_0} + 1 \cdot \pi_{W_1 \oplus \widetilde{W}_1} + \sum_{\frac{1}{4} < \mu_j < \frac{3}{4}} f(\mu_j) \pi_{V_j} - \text{Id}_{W \oplus W}) = \text{Ker}(X - \text{Id}_{W \oplus W}) \oplus \widetilde{W}_1.$$

El tercer punto del Teorema de Dold-Thom se sigue del siguiente lema.

**Lema 4.4.8.** *En la notación previa, la aplicación*

$$\begin{array}{ccc}
 i : \widetilde{\text{BU}}_{\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V}), V} & \longrightarrow & \widetilde{\text{BU}}_{\text{Ker}(h_V(A,1) - \text{Id}_{V \oplus V}), V} \\
 Y & \longmapsto & Y \oplus \widetilde{W}_1
 \end{array}$$

es una equivalencia homotópica débil.

**Demostración.** Sea  $\sigma : \mathbb{S}^n \longrightarrow \widetilde{\text{BU}}_{\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V}), V}$  una aplicación continua. Por la compacidad de  $\mathbb{S}^n$ , existen funciones continuas  $\sigma_W$  y  $\delta_W$ , con  $V \subset W \subset \mathcal{U}$  de dimensión finita, tales que

$$\sigma = \delta_W \circ \sigma_W : \mathbb{S}^n \xrightarrow{\sigma_W} \text{BU}(\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V))) \xrightarrow{\delta_W} \widetilde{\text{BU}}_{\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V}), V}.$$

Luego, por la continuidad de  $\sigma_W$  existe  $m$  tal que

$$\sigma_W : \mathbb{S}^n \longrightarrow \text{BU}_m(\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V))).$$

Por lo tanto,  $i_W \circ \sigma_W$  está dado de la siguiente manera,

$$\begin{array}{ccc}
 i_W \circ \sigma_W : \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \text{BU}_{m+\dim(\widetilde{W}_1)}(\text{Ker}(h_V(A,1) - \text{Id}_{V \oplus V}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V))) \\
 x & \longmapsto & \sigma_W(x) \oplus \widetilde{W}_1
 \end{array}$$

Si fijamos una base para  $W \oplus W$ , podemos identificar los espacios anteriores con las grassmannianas, esto es,

$$\text{BU}_m(\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V))) \cong G_m(\mathbb{C}^M)$$

y

$$\text{BU}_{m+\dim(\widetilde{W}_1)}(\text{Ker}(h_V(A,1) - \text{Id}_{V \oplus V}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V))) \cong G_{m+\dim(\widetilde{W}_1)}(\mathbb{C}^N)$$

donde  $M = \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V))$  y  $N = \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(h_V(A, 1) - \text{Id}_{V \oplus V}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V))$ .

Sea

$$\gamma^r(\mathbb{C}^s) = \{(Z, z) \in G_r(\mathbb{C}^s) \times \mathbb{C}^s \mid z \in Z\}$$

el haz *tautológico* sobre  $G_r(\mathbb{C}^s)$ , el cual es un haz vectorial de rango  $r$  que corresponde a restringir el haz canónico sobre  $\text{Proj}_r(\mathbb{C}^s)$  (definido en el Capítulo 2, Sección 2) al subespacio de proyecciones autoadjuntas, subespacio que a su vez es identificado con  $G_r(\mathbb{C}^s)$  (definido en el Capítulo 2, Sección 4). En términos de este haz, se tienen los siguientes haces sobre los espacios base mencionados anteriormente,

$$\begin{array}{ccccc} & \gamma^m(\mathbb{C}^M) & & \gamma^{m+\dim(\widetilde{W}_1)}(\mathbb{C}^N) & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\sigma_W} & G_m(\mathbb{C}^M) & \xrightarrow{i_W} & G_{m+\dim(\widetilde{W}_1)}(\mathbb{C}^N) \end{array}$$

Veamos ahora la relación que guardan los haces inducidos sobre  $\mathbb{S}^n$  por las aplicaciones  $i_W \circ \sigma_W$  y  $\sigma_W$ . Por definición,

$$\begin{aligned} (i_W \circ \sigma_W)^*(\gamma^{m+\dim(\widetilde{W}_1)}(\mathbb{C}^N)) &= \{(x, w') \in \mathbb{S}^n \times \gamma^{m+\dim(\widetilde{W}_1)}(\mathbb{C}^N) \mid w' \in \sigma_W(x) \oplus \widetilde{W}_1\} \\ &= \{(x, w') \in \mathbb{S}^n \times \gamma^{m+\dim(\widetilde{W}_1)}(\mathbb{C}^N) \mid w' = w + \widetilde{w}_1, \text{ con } w \in \sigma_W(x) \text{ y } \widetilde{w}_1 \in \widetilde{W}_1\} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sigma_W^*(\gamma^k(\mathbb{C}^M)) \oplus (\mathbb{S}^n \times \widetilde{W}_1) &= \{(x, w) \in \mathbb{S}^n \times \gamma^k(\mathbb{C}^M) \mid w \in \sigma_W(x)\} \oplus (\mathbb{S}^n \times \widetilde{W}_1) \\ &= \{(x, w, \widetilde{w}_1) \in \mathbb{S}^n \times \gamma^k(\mathbb{C}^M) \times \widetilde{W}_1 \mid w \in \sigma_W(x), \widetilde{w}_1 \in \widetilde{W}_1\} \end{aligned}$$

Se sigue que  $(i_W \circ \sigma_W)^*(\gamma^{m+\dim(\widetilde{W}_1)}(\mathbb{C}^N)) \cong \sigma_W^*(\gamma^k(\mathbb{C}^M)) \oplus (\mathbb{S}^n \times \widetilde{W}_1)$ . De modo que tenemos una función bien definida entre los monoides de las clases de isomorfismo de haces vectoriales, esto es,

$$\begin{aligned} \Phi_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^n) &\longrightarrow \Phi_{m+\dim(\widetilde{W}_1)}^{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^n) \\ [E] &\longmapsto [E \oplus (\mathbb{S}^n \times \widetilde{W}_1)] \end{aligned}$$

Como  $\text{BU}_m(\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V)))$  es homeomorfo a  $G_m(\mathbb{C}^M)$ , inducen un isomorfismo en sus grupos de homotopía, esto es,

$$[\mathbb{S}^n, \text{BU}_m(\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V)))]_* \cong [\mathbb{S}^n, G_m(\mathbb{C}^M)]_*$$

Tomando el colímite en los sistemas dirigidos,

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\text{BU}_m(\text{Ker}(A - \text{Id}_{V \oplus V}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V)))) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbb{S}^n, G_m(\mathbb{C}^M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(\text{BU}_{m+\dim(\widetilde{W}_1)}(\text{Ker}(h_V(A, 1) - \text{Id}_{V \oplus V}) \oplus ((W - V) \oplus (W - V)))) & \longrightarrow & \pi_n(G_{m+\dim(\widetilde{W}_1)}(\mathbb{C}^N)) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(G_m(\mathbb{C}^M)) & \longrightarrow & \Phi_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(G_{m+\dim(\widetilde{W}_1)}(\mathbb{C}^N)) & \longrightarrow & \Phi_{m+\dim(\widetilde{W}_1)}^{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^n) \end{array}$$

concluimos que la aplicación inducida en el grupo de K-teoría por  $i : \widetilde{\mathrm{BU}}_{\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id}_{V \oplus V}), V} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{BU}}_{\mathrm{Ker}(h_V(A,1)-\mathrm{Id}_{V \oplus V}), V}$ , corresponde a la suma con el haz trivial  $\mathbb{S}^n \times \widetilde{W}_1$ ,

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & K(\mathbb{S}^n). \\ [E] & \longmapsto & [E \oplus (\mathbb{S}^n \times \widetilde{W}_1)] \end{array}$$

Finalmente, el hecho de que  $i : \widetilde{\mathrm{BU}}_{\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id}_{V \oplus V}), V} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{BU}}_{\mathrm{Ker}(h_V(A,1)-\mathrm{Id}_{V \oplus V}), V}$  es una equivalencia homotópica débil se sigue por el siguiente diagrama conmutativo y porque el renglón inferior corresponde a la función identidad en el grupo de K-teoría (Corolario 3.1.16),

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\widetilde{\mathrm{BU}}_{\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id}_{V \oplus V}), V}) & \xrightarrow{i_*} & \widetilde{\mathrm{BU}}_{\mathrm{Ker}(h_V(A,1)-\mathrm{Id}_{V \oplus V}), V} \\ \downarrow = & & \downarrow = \\ [\mathbb{S}^n, \widetilde{\mathrm{BU}}_{\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Id}_{V \oplus V}), V}]_* & \xrightarrow{\sigma \mapsto \sigma \oplus \widetilde{W}_1} & [\mathbb{S}^n, \widetilde{\mathrm{BU}}_{\mathrm{Ker}(h_V(A,1)-\mathrm{Id}_{V \oplus V}), V}]_* \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \widetilde{K}(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow[\mathrm{Id}]{[E] \mapsto [E \oplus (\mathbb{S}^n \times \widetilde{W}_1)]} & \widetilde{K}(\mathbb{S}^n) \end{array}$$

■

## Aplicación

Finalizamos este trabajo con una aplicación del Teorema de Periodicidad de Bott al cálculo de los grupos de K-teoría de las esferas. Esto complementa el Ejemplo 3.2.6 del capítulo anterior.

**Proposición 4.4.9.** *El grupo de K-teoría de la esfera de dimensión  $n$  es dado por*

$$K(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ es par} \\ \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$



**Demostración.** Del Teorema 3.2.5, se sigue que

$$\begin{aligned}
 K(\mathbb{S}^n) &\cong [\mathbb{S}^n, \mathbb{Z} \times BU] \\
 &= \pi_n(\mathbb{Z} \times BU) \\
 &\cong \mathbb{Z} \times \pi_n(BU) \\
 &\cong \mathbb{Z} \times \pi_{n+1}(U) \\
 &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} \times \pi_1(U) & \text{si } n \text{ es par} \\ \mathbb{Z} \times \pi_0(U) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \\
 &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ es par} \\ \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

■

Del resultado anterior y del hecho de que  $\mathbb{S}^n$  es un espacio compacto y conexo, se tiene

$$\tilde{K}(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Otra aplicación del Teorema de Periodicidad de Bott que es importante mencionar es que permite extender el grupo de K-teoría a una teoría de cohomología generalizada, basta definir

$$\tilde{K}^{-n}(X) := \tilde{K}(\Sigma^n X)$$

para  $n \geq 0$  y  $X$  compacto; y

$$\tilde{K}^n(X) \cong \begin{cases} \tilde{K}^0(X) & \text{si } n \text{ es par} \\ \tilde{K}^1(X) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

El hecho de que la familia de funtores  $\{\tilde{K}^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una teoría de cohomología generalizada es un importante resultado en topología algebraica que facilita en cierto sentido su cálculo ya que permite la implementación de herramientas del tipo de la sucesión de Mayer-Vietoris y sucesiones espectrales (cf. [4]). De hecho, esta fue la primer teoría de cohomología generalizada descubierta.



# Bibliografía

- [1] M. Aguilar, S. Gitler, and C. Prieto. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*. Springer-Verlag, 2002.
- [2] M. A. Aguilar and C. Prieto. Quasifibrations and Bott periodicity. *Topology and its Applications*, 98:3–17, 1999.
- [3] G. Allaud. On an example of R. Brown. *Archiv der Mathematik*, 19:654–655, 1969.
- [4] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch. Vector bundles and homogeneous spaces. *Amer. Math. Soc. Symp. in Pure Math.*, 3:7–38, 1961.
- [5] M. Behrens. A new proof of the Bott periodicity theorem. *Topology and its Applications*, 119:167–183, 2002.
- [6] W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. ACADEMIC PRESS, INC, 1975.
- [7] R. Bott. An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups. *Bull. Soc. Math. France*, 84:251–281, 1956.
- [8] R. Bott. The stable homotopy of the classical groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 43:933–935, 1957.
- [9] N. Bourbaki. *Theory of Sets*. Actualités scientifiques et industrielles. Addison-Wesley, 2004.
- [10] R. Brown. Two examples in homotopy theory. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 62:575–576, 1966.
- [11] A. Dold and R. Thom. Quasifaserungen und unendliche symmetrische produkte. *Ann*, 67:239 – 281, 1958.
- [12] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., 1966.
- [13] S. Eilenberg and N. E. Steenrod. *Foundations of algebraic topology*. Princeton University Press, 1952.
- [14] J. B. Fraleigh. *Algebra Abstracta*. Addison Wesley, 1988.

- 
- [15] S. H. Friedberg. *Algebra Lineal*. Publicaciones Cultural, 1982.
  - [16] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge, New York, NY., 2002.
  - [17] M. Karoubi. *K-Theory. An Introduction*. Springer-Verlag, 1978.
  - [18] R. K. Kenneth Hoffman. *Lineal Algebra*. Prentice-Hall, 1971.
  - [19] McDuff. Configuration spaces. *K-Theory and Operator Algebras, Lecture Notes in Mathematics*, 575:88–95, 1977.
  - [20] J. R. Munkres. *Topología*. Pearson Educación, 2002.
  - [21] E. L. Puebla. *Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría de Álgebra Clásica*. Addison Wesley Iberoamerica, 1990.
  - [22] N. E. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, 1951.
  - [23] F. W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer-Verlag, 1971.