



# UNIVERSIDAD DE SONORA

---

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Aspectos algorítmicos y computacionales en Teoría de  
Morse Discreta

## T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

**Maestro en Ciencias (Matemáticas)**

Presenta:

Daniel Mora de la Cruz

Directores de tesis:

Dr. Jesús Francisco Espinoza F.

Dr. Rafael Roberto Ramos F.

Hermosillo, Sonora, México

Noviembre de 2017



# Sinodales

**Dr. Martín Eduardo Frías Armenta**

Departamento de Matemáticas,  
Universidad de Sonora

**Dr. Gabriela Hinojosa Palafox**

Departamento de Matemáticas,  
Universidad Autónoma del Estado de Morelos

**Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro**

Departamento de Matemáticas,  
Universidad de Sonora

**Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa**

Departamento de Matemáticas,  
Universidad de Sonora



*“No one ever stops being a student  
in the classroom of life”*  
-Chris Colfer



# Agradecimientos

Agradezco infinitamente a mis padres y hermano que siempre me han apoyado en todos los aspectos a pesar de la distancia. A Betti que además de ser mi compañera de trabajo ha sido mi amiga y siempre me ha hecho sentir parte de su familia. A Ángeles e Isaac por siempre estar ahí cuando necesito a alguien. A todos mis amigos que he conocido en Hermosillo que han hecho que mi experiencia en esta ciudad sea más amena. A Melina que a pesar de estar del otro lado del mundo siempre estuvo ahí para darme su apoyo.

A mis profesores, el Dr. Jesús Espinoza y el Dr. Rafael Ramos por sus enseñanzas y el tiempo dedicado a esta investigación. Gracias a mis demás sinodales: Dr. Gabriela Hinojoza y Dr. Eduardo Frías por tomarse el tiempo de revisar esta tesis, gracias por sus sugerencias y observaciones. Muchas gracias a todos los profesores que tuve a lo largo de la maestría por sus clases y el fortalecimiento de mis conocimientos.

Por último, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido, sin el cual no habría sido posible la realización y culminación de la Maestría en Ciencias (Matemáticas) en la Universidad de Sonora, así como esta tesis.

Daniel Mora de la Cruz





# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Homología simplicial y teoría de Morse discreta</b>	<b>1</b>
1.1. Complejos simpliciales . . . . .	1
1.2. Homología simplicial . . . . .	9
1.3. Teoría de Morse discreta . . . . .	15
1.4. Campo vectorial gradiente y flujo asociado . . . . .	19
<b>2. Emparejamientos generalizados</b>	<b>31</b>
2.1. Campo vectorial gradiente algebraico . . . . .	31
2.2. Emparejamientos generalizados de Morse . . . . .	35
2.3. Acciones de grupos en complejos simpliciales . . . . .	39
2.4. $G$ -complejos CW modelados por productos torcidos. . . . .	44
2.5. Consecuencias para $G$ -complejos simpliciales. . . . .	50
2.6. Aplicaciones en teoría de gráficas . . . . .	58
<b>3. Resultados</b>	<b>71</b>
3.1. Algoritmo para generar un emparejamiento de Morse generalizado . . . . .	71
3.2. Ejemplos . . . . .	75
3.3. Complejo de Morse para un emparejamiento de Morse generalizado . . . . .	79
3.4. EMG vs. ExtractRaw . . . . .	81
<b>A. Códigos</b>	<b>87</b>
A.1. EMG . . . . .	87
A.2. ExtractRaw . . . . .	93
A.3. EMG vs. ExtractRaw . . . . .	97
<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>



# Introducción

Una de las áreas de investigación que ha tomado fuerza durante la última década es el análisis topológico de datos (ATD), la cual se dedica al análisis de conjuntos de datos utilizando técnicas de topología algebraica, inicialmente motivado por el estudio de la “forma” de los datos. El ATD combina herramientas de la topología algebraica y otras áreas de las matemáticas para permitir un estudio matemáticamente riguroso de la estructura topológica de un conjunto de datos. Una manera de analizar la forma de un conjunto de datos es construir un complejo simplicial abstracto filtrado con ellos y luego calcular los grupos de homología persistente de éste. La información codificada en la homología persistente es representada gráficamente en un código de barras o diagrama de persistencia, e ilustra aquellas características topológicas más significativas a través de la filtración.

Una de las herramientas más utilizadas en el ATD es la teoría de Morse discreta, desarrollada por Robin Forman en 1998 [6], ésta es una adaptación discreta de la teoría de Morse [12] y pretende encontrar un método más económico para calcular la homología simplicial de un complejo simplicial abstracto. Dicho método consiste en calcular una función real  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre un complejo simplicial abstracto  $K$  asociado a un conjunto de datos, llamada función de Morse discreta. Dicha función induce un emparejamiento, esto es, una partición de  $K$  en clases de equivalencia que consisten en parejas de simplejos y elementos críticos. Los elementos críticos son fundamentales para el cálculo de los grupos de homología simplicial de  $K$  pues con ellos podemos construir un complejo de cadenas, llamado complejo de Morse-Forman cuyos grupos de homología son isomorfos a los de  $K$ . Este complejo de cadenas presenta ventajas para calcular los grupos de homología, pues los elementos que generan al complejo de Morse-Forman son menos y por tanto se reducen considerablemente los cálculos de los grupos de homología.

En 2005, H. King, K. Knudson y N. Mramor presentaron un algoritmo para calcular un emparejamiento en un complejo simplicial abstracto [10]. Éste recibe el complejo  $K$  y una función inyectiva  $h$  definida en el conjunto de vértices de  $K$ , el algoritmo arroja tres listas, dos permiten formar las parejas y la tercera con los elementos críticos. Este resultado presenta una manera eficiente (y óptima en dimensión 2) para calcular el complejo de Morse-Forman. Posteriormente, en 2008 Ragnar Freij [8] presenta una variante de la teoría de Morse discreta generalizando el concepto de emparejamiento, permitiendo que los emparejamientos generalizados sean clases de equivalencia que tengan más elementos. Además, ésto último presenta una ventaja cuando involucramos acciones de grupos en un complejo simplicial  $K$ , pues el complejo de Morse clásico asociado en general no respeta las simetrías que posee  $K$  por la acción de un grupo  $G$ , en consecuencia es necesario crear una variante de la teoría de Morse discreta que respete acciones de grupos, es

decir construir un complejo de Morse  $\mathcal{M}$  que es homotópicamente equivalente a  $K$  de manera  $G$ -equivariante. La generalización de Freij proporciona la suficiente flexibilidad para construir dicha  $G$ -homotopía siempre que se cumplan ciertas hipótesis razonables impuestas sobre la acción de  $G$  en  $K$  con respecto al emparejamiento generalizado elegido.

El objetivo de este trabajo es presentar un algoritmo inspirado en el de Neža Mramor que calcule un emparejamiento generalizado como los que define R. Freij. Para ello hemos organizado este texto en tres capítulos.

El primer capítulo está dividido en dos secciones: en la primera se presentan los conceptos estándar sobre los complejos simpliciales abstractos y el cálculo de sus grupos de homología, y en la segunda la teoría de Morse presentada por R. Forman.

A continuación, en el segundo capítulo, se presenta la teoría de emparejamientos generalizados dada por Freij. También vemos la ventaja de trabajar con  $G$ -complejos simpliciales e incluimos una aplicación de la teoría de Morse discreta equivariante a la teoría de gráficas.

En el último capítulo presentaremos nuestro algoritmo con sus respectivos pseudocódigos enfatizando en las ventajas que ofrece sobre el algoritmo de Neža. Para esto realizamos experimentos en el que comparamos la cantidad de elementos críticos y la duración de ambos algoritmos. Observamos que conforme incrementamos la cantidad de simplejos maximales en la estructura simplicial, la cantidad de simplejos críticos es similar, aunque el algoritmo de Neža arroja una menor cantidad, como se muestra en la siguiente gráfica.

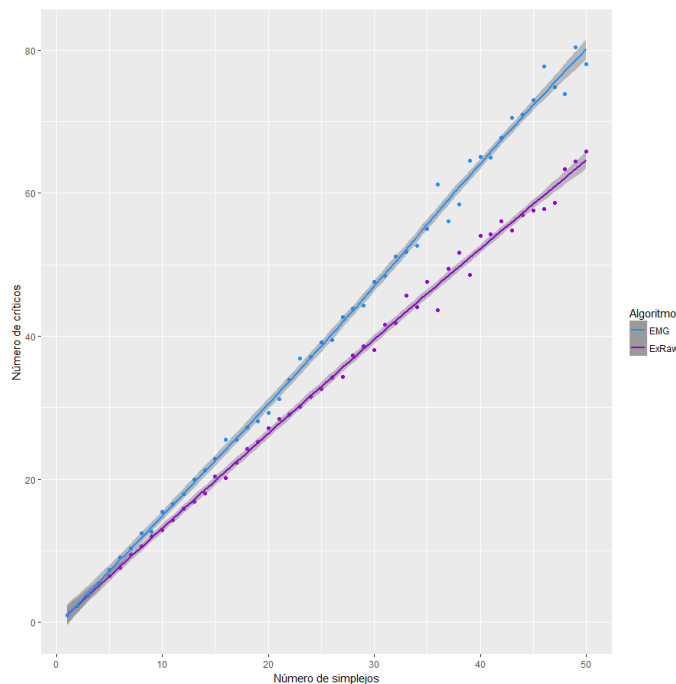


Figura 1: Cantidad promedio de críticos que arrojan ambos algoritmos según la cantidad de simplejos maximales de dimensión 10.

Sin embargo, cuando comparamos los tiempos de duración de ambos algoritmos observamos que nuestro algoritmo mantiene una duración menor a un minuto sin importar la dimensión y la cantidad de simplejos maximales, y el algoritmo de Neža tiene una tasa de crecimiento exponencial cuando aumentamos la dimensión, como vemos en la siguiente gráfica.

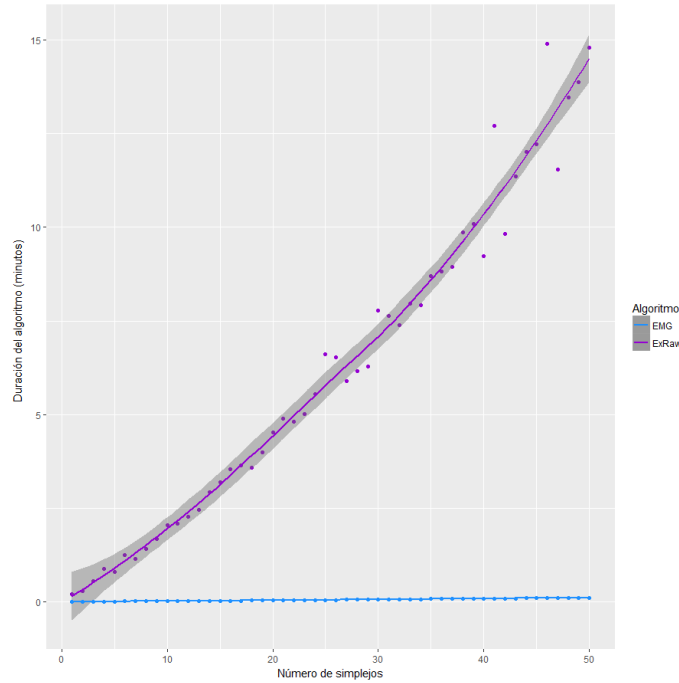


Figura 2: Duración promedio de ambos algoritmos según la cantidad de simplejos maximales de dimensión 10.

En cada una de las simulaciones que se realizaron, nuestro algoritmo generó una cantidad ligeramente mayor de elementos críticos, pero presentó una mejora considerable en cuanto a duración en comparación contra el algoritmo de Neža.



# Capítulo 1

## Homología simplicial y teoría de Morse discreta

En este capítulo se presentarán los conceptos y resultados estándar para el estudio de complejos simpliciales y de la teoría de Morse discreta. En las siguientes secciones presentamos definiciones y resultados tanto de [5], [6], [9] y [15], con las cuales se construirá la teoría de homología.

La homología es una herramienta esencial en la topología algebraica. La idea intuitiva que se pretende dar es que estudia la forma de un objeto mediante sus agujeros y cómo se relacionan éstos entre sí. Hay muchas clases de homología, pero aquí trataremos con la homología simplicial.

Veremos que una de las utilidades de la teoría de Morse discreta es que nos permite calcular los grupos de homología de un complejo simplicial utilizando menos elementos que en su cálculo usual.

### 1.1. Complejos simpliciales

En esta sección comenzaremos hablando de los objetos de estudio que serán los complejos simpliciales, cabe mencionar que en la bibliografía consultada los resultados que presentamos están en el contexto de los complejos CW o singulares, pero debido a sus complicaciones decidimos utilizar los complejos simpliciales, pues además estos son más aptos computacionalmente.

#### 1.1.1. Complejos simpliciales abstractos

Para poder llegar a utilizar los complejos simpliciales computacionalmente debemos de dar una definición abstracta de ellos, pues podemos pasar de esta definición a la topológica como veremos con los complejos simpliciales geométricos.

**Definición 1.1.1.** Sea  $V$  un conjunto finito. Un **complejo simplicial abstracto** o simplemente **complejo**  $K$  es una familia de subconjuntos de  $V$ , llamados *simplejos*, tal que

- i) si  $v \in V$ , entonces  $\{v\} \in K$ ,

ii) si  $\sigma \in K$  y  $\sigma' \subset \sigma$ , entonces  $\sigma' \in K$ .

De momento llamaremos a  $V$  el conjunto de vértices de  $K$ , i.e.,  $\text{Vert}(K) = V$ .

En el siguiente ejemplo veremos varios complejos simpliciales abstractos generados por el mismo conjunto de vértices.

**Ejemplo 1.1.2.** Sea  $V = \{1, 2, 3\}$ . Entonces

- $K_1 = 2^V = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- $K_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $K_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$

son complejos simpliciales abstractos. Podemos ver una representación geométrica de éstos en la siguiente figura, más adelante veremos la definición precisa de complejos simpliciales geométricos que justificará esta representación.

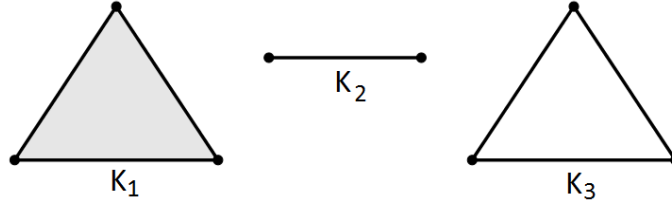


Figura 1.1: Representación geométrica de  $K_1, K_2, K_3$  en el ejemplo anterior.

**Nota 1.1.3.** Por definición el conjunto  $\{\emptyset\}$  siempre deberá pertenecer a la estructura simplicial  $K$ , pero lo omitiremos excepto cuando sea necesario.

Si un simplejo  $\sigma \in K$  tiene  $d + 1$  elementos, decimos que la dimensión de  $\sigma$  es  $d$  (o que  $\sigma$  es un  **$d$ -simplejo**) y lo denotamos por  $\sigma^d$ , o simplemente  $\sigma$  si no hay confusión.

Cuando se tiene la dimensión de los simplejos, podemos hablar ahora de la dimensión del complejo. Esto da pie a la siguiente definición:

**Definición 1.1.4.** Si  $K$  es un complejo,  $\dim(K) = \max\{\dim(\sigma) | \sigma \in K\}$ .

Si  $\sigma, \tau \in K$  son tales que  $\sigma \subseteq \tau$  decimos que  $\sigma$  es **cara** de  $\tau$  (denotado por  $\sigma \leq \tau$ ) y que  $\tau$  es **supercara** de  $\sigma$  (denotado por  $\tau \geq \sigma$ ). Diremos que  $\sigma$  es cara inmediata de  $\tau$  (y que  $\tau$  es supercara inmediata de  $\sigma$ ) si  $\dim \sigma + 1 = \dim \tau$ . Además, si  $\sigma$  no es cara de ningún otro simplejo, decimos que  $\sigma$  es una cara libre de  $\tau$ .

**Definición 1.1.5.** Si  $\tilde{K} \subset K$  es una subcolección que por sí misma es un complejo, entonces decimos que  $\tilde{K}$  es un **subcomplejo** de  $K$ .

Al subcomplejo que consiste de todos los  $l$ -simplejos con  $l \leq d$ , lo llamamos el  **$d$ -esqueleto** de  $K$  y lo denotamos con  $K^{(d)}$ .

**Definición 1.1.6.** Una **filtración** de un complejo simplicial  $K$  es una colección de subcomplejos de  $K$ :  $K_1, K_2, \dots, K_M$ , que satisface

$$\emptyset \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_M = K.$$



Todo complejo de dimensión  $d$  tiene la filtración dada por los  $l$ -esqueletos, con  $l = 0, \dots, d$ , es decir, la filtración en  $K$  está dada por

$$K^{(0)} \subset K^{(1)} \subset \dots \subset K^{(d)} = K.$$

Con el fin de analizar las relaciones entre complejos introducimos un tipo que funciones que se comportan adecuadamente con la estructura simplicial.

**Definición 1.1.7.** Si  $K$  y  $L$  son complejos, entonces un **morfismo simplicial**  $\varphi : K \rightarrow L$  es una función  $\varphi : \text{Vert}(K) \rightarrow \text{Vert}(L)$  tal que para cada simplejo  $\{v_0, \dots, v_q\}$  en  $K$ , se tiene que  $\{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_q)\}$  es un simplejo en  $L$  (obviamente, es posible tener repeticiones en este último).

**Ejemplo 1.1.8.** Consideremos  $K = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4\}$ . Sea  $f : K \rightarrow K$  la función tal que  $f(v_1) = v_3, f(v_2) = v_2, f(v_3) = v_1, f(v_4) = v_4$  y extendemos simplicialmente, veamos que es un morfismo simplicial:

$$f(v_1v_2) = v_3v_2 \in K$$

$$f(v_1v_3) = v_3v_1 \in K$$

$$f(v_2v_3) = v_2v_1 \in K$$

$$f(v_2v_4) = v_2v_4 \in K$$

por tanto  $f$  es un morfismo simplicial.

Ahora consideremos  $g : K \rightarrow K$  tal que  $g(v_1) = v_4, g(v_2) = v_2, g(v_3) = v_3, g(v_4) = v_1$  y extendemos simplicialmente, podemos ver que  $g(v_1v_3) = v_4v_3 \notin K$ , por tanto  $g$  no es un morfismo simplicial.

### 1.1.2. Complejos simpliciales geométricos

Hasta aquí hemos trabajado con los complejos y sus simplejos de modo combinatorio, pero ahora buscamos que la representación también sea geométrica, es decir que la estructura sea geométrica y que los simplejos se obtengan a partir de ésta.

#### 1.1.2.1. Realización geométrica

Buscamos que los complejos simpliciales tengan una realización geométrica, de esta manera obtener la estructura visual de los complejos. Se ve con más claridad a la hora de utilizar filtraciones y complejos en general, que se verá más adelante. Por lo pronto, se introduce teoría que nos permite definir las realizaciones geométricas de los complejos.

#### Definición 1.1.9.

- Un subconjunto  $A$  de un espacio euclidiano es llamado **afín** si para todo par de puntos  $x \neq x' \in A$ , la línea determinada por  $x, x'$  está contenida en  $A$ .
- Un subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  es **convexo** si, para cada par de puntos  $x, y \in X$ , el segmento de línea que une a  $x$  y  $y$  está contenida en  $X$ . En otras palabras, si  $x, y \in X$ , entonces  $tx + (1-t)y \in X$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Dos ejemplos de espacios afines son el vacío y el conjunto de un solo punto. Además los espacios afines son convexos. Estos conjuntos cumplen la propiedad de que la intersección de subconjuntos convexos (afines) de  $\mathbb{R}^n$  también es convexa (afín).

Sea  $\{X_j \mid j \in J\}$  y tomemos  $x, y \in \cap X_j$ . Entonces  $x, y \in X_j$  para cada  $j \in J$ , donde cada uno es convexo, por lo que  $\{(1-t)x + ty\}$ , con  $0 \leq t \leq 1$ , pertenece a  $X_j$  para cada  $j \in J$ . Así, el segmento  $\{(1-t)x + ty\}$ , con  $0 \leq t \leq 1$ , está en la intersección. Para el caso de subconjuntos afines, se cambia la restricción de  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definición 1.1.10.** Una **combinación afín** de puntos  $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$  es un punto definido como

$$x = t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_m p_m,$$

donde  $\sum_{i=0}^m t_i = 1$ . Una **combinación convexa** es una combinación afín con  $t_i \geq 0$  para toda  $i = 1, \dots, m$ .

Por ejemplo, sean  $x_0, x_1$  dos puntos distintos en  $\mathbb{R}^n$ . Su combinación afín sería

$$\{t_0 x_0 + t_1 x_1 \mid t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 + t_1 = 1\} = \{t_0 x_0 + (1 - t_0) x_1 \mid t_0 \in \mathbb{R}\},$$

es decir, la línea que pasa por  $x_0$  y  $x_1$ . Mientras que la combinación convexa de los mismos puntos sería:

$$\begin{aligned} \{t_0 x_0 + t_1 x_1 \mid t_0, t_1 \geq 0, t_0 + t_1 = 1\} &= \{t_0 x_0 + (1 - t_0) x_1 \mid t_0 \geq 0, 1 - t_0 \geq 0\} \\ &= \{t_0 x_0 + (1 - t_0) x_1 \mid t_0 \in [0, 1]\}, \end{aligned}$$

es decir, el segmento que une  $x_0$  con  $x_1$ .

**Teorema 1.1.11.** Si  $p_0, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$  entonces el conjunto convexo generado por éstos,  $[p_0, \dots, p_m]$ , es el conjunto de todas las combinaciones convexas de  $p_0, \dots, p_m$ .

La prueba de este resultado, se puede ver en [15, p.32]. Además, se tiene que el espacio afín generado por  $p_0, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$  consiste de todas las combinaciones afines de esos puntos.

**Definición 1.1.12.** Un conjunto ordenado de puntos  $\{p_0, \dots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$  es **afín independiente** si  $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$  es un subconjunto linealmente independiente de  $\mathbb{R}^n$ .

Por lo que cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  linealmente independiente es un conjunto afín independiente. Por ejemplo, si tomamos  $e_0, \dots, e_n$ , una base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $0, e_0, \dots, e_n$  es afín independiente aunque no sea linealmente independiente.

En [15, p.33], podemos ver que con un conjunto ordenado de puntos  $p_0, \dots, p_m$  en  $\mathbb{R}^n$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $\{p_0, \dots, p_m\}$  es afín independiente
2. Si  $\{s_0, \dots, s_m\} \subset \mathbb{R}$  satisface  $\sum_{i=0}^m s_i p_i = 0$  y  $\sum_{i=0}^m s_i = 0$  entonces  $s_i = 0$  para toda  $i = 0, \dots, m$

3. Para cada  $x \in A$ , el conjunto afín generado por  $\{p_0, \dots, p_m\}$  tiene una única expresión como combinación afín  $x = \sum_{i=0}^m t_i p_i$  y  $\sum_{i=0}^m t_i = 1$

**Definición 1.1.13.** Un conjunto de puntos  $\{a_1, \dots, a_k\}$  en  $\mathbb{R}^n$  está en **posición general** si cada  $n + 1$  de estos puntos forman un conjunto afín independiente.

Si tenemos un complejo  $K$ , recordemos que  $V = \text{Vert}(K)$ . Si suponemos que los elementos de  $V$  son puntos que están en una posición general en algún espacio euclidiano, entonces el espacio topológico  $|K|$  está definido por

$$\bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|,$$

donde  $|\sigma|$  denota la envolvente convexa de los puntos en  $\sigma$ . Entonces decimos que  $|K|$  es una **realización geométrica** de  $K$ .

**Nota 1.1.14.** Observemos que si  $x \in |K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$ , existe algún  $\sigma \in K$ , con  $\sigma = \{\sum a_i v_i \mid \sum a_i = 1, a_i \geq 0\}$  tal que  $x \in |\sigma|$ , en consecuencia,  $x$  se puede escribir como  $\sum a_i v_i$ . Teniendo en cuenta esta observación, de ahora en adelante cada vez que tengamos que  $x \in |K|$ , escribiremos  $x = \sum a_i v_i$  omitiendo esta construcción.

Dado un complejo  $K$  podemos definir una “subestructura” con más elementos que nos será útil más adelante.

**Definición 1.1.15.** Dado un complejo  $K$ , definimos la **subdivisión baricéntrica** de  $K$ , denotada por  $K'$ , como sigue:

- Los vértices de  $K'$  son simplejos de  $K$ .
- $\{v_0, \dots, v_n\}$  es un simplejo en  $K'$  si  $v_0, \dots, v_n$  es una cadena, es decir, después de reordenar tenemos  $v_{i_0} \subseteq \dots \subseteq v_{i_n} \in K$ .

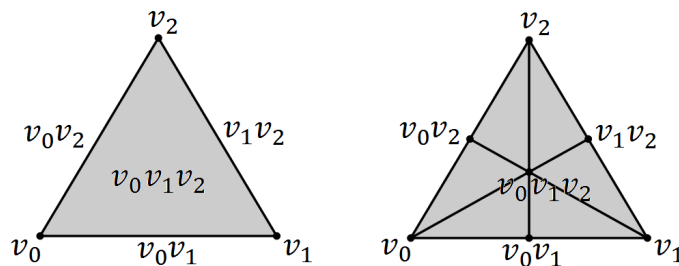


Figura 1.2: Subdivisión baricéntrica de el 2-simplejo estandar

### 1.1.3. Orientación

Como trabajamos con objetos combinatorios (y sus etiquetas) es natural querer dar una orientación en ellas. Para esto le daremos una orientación a los vértices de los complejos y a su vez sus simplejos heredarán una orientación como veremos más adelante.

**Definición 1.1.16.** Sea  $K$  un complejo y  $\sigma \in K$ . Una **orientación** en  $\sigma$  es un orden total de sus vértices módulo una permutación par de ellos.

Una forma natural de orientar un simplejo es enumerar sus vértices. Si  $\sigma^d = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$  está orientado por el orden de sus subíndices denotaremos su orientación con  $(v_0, v_1, \dots, v_d)$ . Si el simplejo tiene dimensión  $d = 0$ , entonces una orientación consiste en colocar un signo  $+$  ó  $-$ .

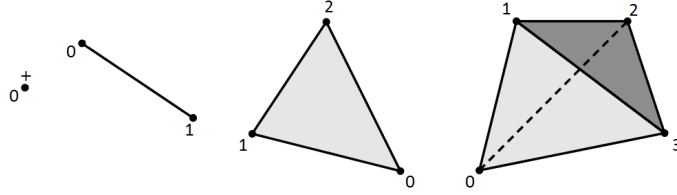


Figura 1.3: Simplejos orientados con un orden en sus vértices.

Si  $\sigma^d = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$  está dotado con la orientación  $(v_0, v_1, \dots, v_d)$  y  $\alpha_i^{d-1} = \{v_0, v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_d\}$  (la  $(d-1)$ -cara de  $\sigma$  generada por todos los vértices excepto  $v_i$ ), entonces la orientación en  $\alpha_i$  determinada por  $(-1)^i(v_0, v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_d)$  está bien definida.

**Definición 1.1.17.** Si  $\sigma^d = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$  está dotado con la orientación  $(v_0, v_1, \dots, v_d)$  y  $\alpha_i^{d-1} = \{v_0, v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_d\}$  (donde  $\widehat{v_i}$  denota que omitimos el vértice que este en la posición  $i$ ), entonces la orientación sobre  $\alpha_i^{d-1}$  está definida por  $(-1)^i(v_0, v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_d)$ , a la cual le llamamos la **orientación heredada** de  $\sigma^d$ .

Poniendo un poco de atención a la figura anterior, específicamente al 2-simplejo del lado izquierdo, podemos ver que con la orientación que tiene, a sus aristas les hereda las siguientes orientaciones:  $(01), (12)$  y  $-(02)$ .

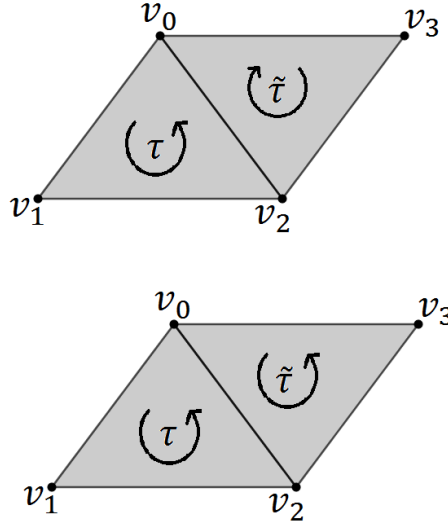
**Definición 1.1.18.** Supongamos que  $K$  es un c.s.a. y  $\sigma^{d-1}, \tau^d, \tilde{\tau}^d \in K$  tales que  $\sigma < \tau$  y  $\sigma < \tilde{\tau}$ .

- i) Si  $\tau, \tilde{\tau}$  están orientados y heredan orientaciones diferentes sobre  $\sigma$ , entonces decimos que ellos están **orientados coherentemente**.
- ii) Si sólo  $\tau$  está orientado, entonces para obtener la orientación en  $\tilde{\tau}$  primero necesitamos que  $\sigma$  obtenga su orientación heredada por  $\tau$ . Así, a  $\tilde{\tau}$  se le dota de la orientación tal que  $\sigma$  hereda la orientación contraria a la que hereda por  $\tau$ , a dicha orientación en  $\tilde{\tau}$  se le conoce como la **orientación deslizada**.

**Ejemplo 1.1.19.** Sea  $K$  el complejo simplicial con caras maximales  $\tau = \{v_0, v_1, v_2\}$ ,  $\tilde{\tau} = \{v_0, v_2, v_3\}$ . Si escogemos las orientaciones  $(v_0, v_1, v_2)$ ,  $(v_0, v_2, v_3)$  respectivamente tenemos que las orientaciones heredadas en  $\sigma = \{v_0, v_2\}$  son  $(-1)^1(v_0, v_2) = -(v_0, v_2)$  y  $(-1)^2(v_0, v_2) = (v_0, v_2)$  respectivamente, por tanto decimos que con estas orientaciones  $\tau$  y  $\tilde{\tau}$  están coherentemente orientados.

Si escogemos las orientaciones  $(v_0, v_1, v_2)$ ,  $(v_0, v_3, v_2)$  respectivamente tenemos que las orientaciones heredadas en  $\sigma = \{v_0, v_2\}$  son  $(-1)^1(v_0, v_2) = -(v_0, v_2)$  y

$(-1)^1(v_0, v_2) = -(v_0, v_2)$  respectivamente, por tanto decimos que con estas orientaciones  $\tau$  y  $\tilde{\tau}$  no están coherentemente orientados.



Ahora por lo anterior, si la orientación de  $\tau$  es  $(v_0, v_1, v_2)$  tenemos que la orientación deslizada por  $\sigma$  para  $\tilde{\tau}$  es  $(v_0, v_2, v_3)$ .

Nótese que la orientación deslizada sobre  $\tilde{\tau}$  se define para hacerla coherente con la orientación en  $\tau^d$ . Además, se debe tener claro que la orientación heredada es hacia un simplejo de dimensión inmediatamente menor y la orientación deslizada es hacia un simplejo de la misma dimensión.

#### 1.1.4. Colapsos entre complejos simpliciales

En esta sección se tratará el concepto de colapsar complejos, que intuitivamente significa reducir de tamaño un complejo simplicial abstracto de tal modo que complejo resultante sea “homotópico” al original. Recordemos que una **cara libre** de un simplejo es aquella cara de dimensión inmediatamente menor, que solamente lo tiene a él como supercara de dimensión inmediata.

**Definición 1.1.20.** Sea  $K$  un complejo simplicial,

- i) Si  $\tau^d, \sigma^{d-1} \in K$  son tales que  $\sigma$  es cara libre de  $\tau$ , entonces decimos que  $K \setminus \{\tau^d, \sigma^{d-1}\}$  se obtiene de  $K$  al **colapsar**  $\tau$  a través de  $\sigma$ .
- ii) Si  $\tilde{K} \subset K$  es un subcomplejo que se obtiene de aplicar un número finito de colapsos en  $K$ , entonces decimos que  $K$  se **colapsa** en  $\tilde{K}$  y escribimos  $K \searrow \tilde{K}$ .
- iii) Si  $\tilde{K}$  es un complejo simplicial tal que  $\tilde{K} \searrow K$  o  $K \searrow \tilde{K}$ , entonces decimos que  $\tilde{K}$  y  $K$  son **simplicialmente homotópicos**.

Podemos observar que el concepto de “simplicialmente homotópicos” es una relación de equivalencia entre complejos simpliciales. Además si  $K$  es un complejo simplicial sin caras

libres, entonces sobre  $K$  no se pueden hacer colapsos. Un caso particular son los complejos simpliciales que son triangulaciones de una variedad sin frontera (por ejemplo, el toro).

También podemos observar que todo simplejo estándar de dimensión  $d$  se puede colapsar en cualquiera de sus vértices.

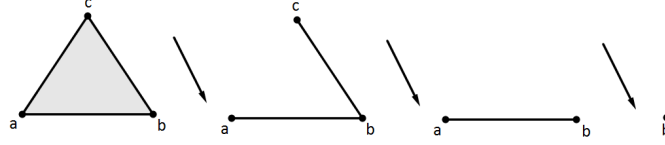


Figura 1.4: Posibles pasos para colapsar un 2-simplejo sobre uno de sus vértices.

Por último, si  $K_1, K_2$  son simplicialmente homotópicos, entonces se verá que tienen grupos de homología isomorfos. Esto se debe a que al colapsar eliminamos un disco que es homológicamente trivial en  $K$ .

### 1.1.5. Ejemplos. Los complejos de Čech y de Vietoris-Rips

En esta sección mostraremos dos métodos para construir una estructura simplicial asociada a una nube de puntos, es decir a una colección finita de puntos con una métrica. Estas estructuras simpliciales son muy empleadas en la literatura para estudiar la forma de la nube de datos a través de cierta filtración reducida y su homología persistente (véase en [4]).

**Definición 1.1.21.** Si  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_d\} \subset \mathbb{R}^n$  y  $\epsilon > 0$ , entonces el **complejo de Čech** con parámetro de proximidad  $\epsilon$ , denotado por  $\mathcal{C}(V, \epsilon)$ , es el complejo cuyos  $m$ -simplejos se corresponden a los subconjuntos  $A \subset V$  tales que la cardinalidad de  $A$  es  $m + 1$  y que

$$\bigcap_{v_i \in A} B\left(v_i; \frac{\epsilon}{2}\right) \neq \emptyset \text{ donde } B(v; r) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, v) < r\}.$$

En la siguiente figura podemos ver la estructura simplicial de Čech para distintos valores del parámetro de proximidad, cuando  $V$  es un conjunto de 3 puntos.

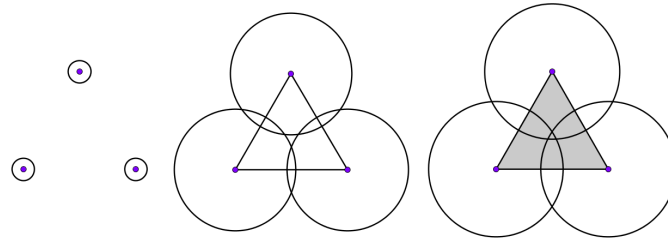


Figura 1.5: estructura simplicial de Čech para  $\epsilon_1 = 0.5$ ,  $\epsilon_2 = 2.7$ ,  $\epsilon_3 = 3$ .

Nótese que para  $\epsilon$  suficientemente pequeño,  $\mathcal{C}(V, \epsilon) = V$  y para  $\epsilon$  suficientemente grande,  $\mathcal{C}(V, \epsilon)$  es isomorfo al simplejo estándar  $\Delta^{|V|}$ . Además, si  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , entonces  $\mathcal{C}(V, \epsilon_1)$  es un subcomplejo de  $\mathcal{C}(V, \epsilon_2)$ .

Como todo  $d$ -simplejo tiene  $2^{d+1}$  caras, entonces el número de simplejos en el complejo de Čech crece de forma exponencial con la cardinalidad de  $V$ , por lo que se requiere de mucha memoria en una computadora para almacenarlo.

**Definición 1.1.22.** Si  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ ,  $\epsilon > 0$  y  $d_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es una métrica, entonces el **complejo de Vietoris-Rips** con parámetro de proximidad  $\epsilon$ , denotado por  $\mathcal{VR}(V, \epsilon)$ , es el complejo simplicial cuyos  $m$ -simplejos se corresponden con los subconjuntos  $A \subset V$  tales que la cardinalidad de  $A$  es  $m + 1$  y para toda pareja  $v_i, v_j \in A$ ,  $d(v_i, v_j) < \epsilon$ .

En la siguiente figura podemos ver distintas estructuras simpliciales de Vietoris-Rips, donde  $V$  también es un conjunto de tres puntos y diferentes valores del parámetro de proximidad  $\epsilon$ .

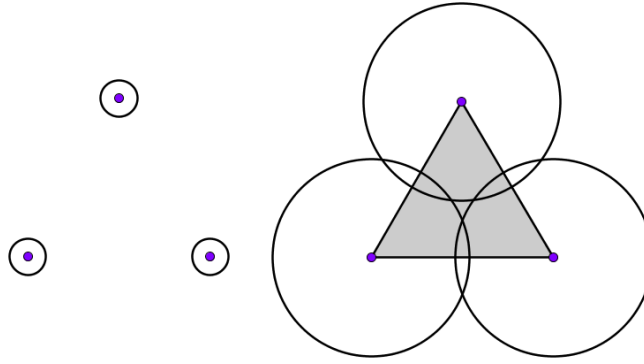


Figura 1.6: filtración de Vietoris-Rips generada para  $\epsilon_1 = 0.5$ ,  $\epsilon_2 = 2.7$ .

Nuevamente se cumple que  $\mathcal{VR}(V, \epsilon) = V$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeño; para  $\epsilon$  suficientemente grande,  $\mathcal{VR}(V, \epsilon)$  es isomorfo al simplejo estándar  $\Delta^{|V|}$ , y si  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , entonces  $\mathcal{VR}(V, \epsilon_1)$  es un subcomplejo de  $\mathcal{VR}(V, \epsilon_2)$ .

Nótese que si  $\{v_0, \dots, v_m\} \subset V$  es tal que cualquier pareja de puntos está a distancia menor que  $\epsilon$ , entonces todo el  $m$ -simplejo generado por estos puntos pertenece a  $\mathcal{VR}(V, \epsilon)$ . De manera que éste es más sencillo de almacenar en una computadora pues sólo basta almacenar el 1-esqueleto de los simplejos y por lo tanto se requiere menos memoria.

De las definiciones se puede verificar que para un  $\epsilon > 0$  fijo, todo simplejo en  $\mathcal{C}(V, \epsilon)$  es también simplejo de  $\mathcal{VR}(V, \epsilon)$ , por lo que existe un encaje natural de  $\mathcal{C}(V, \epsilon)$  en  $\mathcal{VR}(V, \epsilon)$ .

## 1.2. Homología simplicial

En esta sección definiremos los grupos de homología simplicial. Supondremos de aquí en adelante que tenemos un complejo  $K$  de dimensión  $n$ .

### 1.2.1. Definición

Construiremos grupos con cada dimensión menor o igual a la dimensión de  $K$ , para después relacionarlos entre si, es decir a los elementos del grupo de dimensión  $d$  los mandaremos al grupo de dimensión  $d - 1$ , para hacer ésto necesitaremos definir la frontera de un simplejo.

**Definición 1.2.1.** Para todo  $d \geq 0$ , definimos las  $d$ -**cadenas** como el **grupo abeliano libre generado por los  $d$ -simplejos orientados de  $K$** , sobre  $\mathbb{Z}$ , denotado por:

$$C_d(K, \mathbb{Z}).$$

Si  $\alpha^d > \sigma^{d-1}$ , donde son los simplejos orientados  $\alpha = [v_0, \dots, v_d]$  y  $\sigma = [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_d]$ , entonces definimos

$$\epsilon(\alpha, \sigma) := (-1)^i$$

como el número de incidencia de  $\sigma$  en  $\alpha$ .

Para un simplejo  $\sigma$  de dimensión  $d$ , definimos su **frontera** como la  $(d-1)$ -cadena que tiene como sumandos todas las caras de dimensión  $d-1$  de  $\sigma$ . Extendiendo linealmente, podemos definir el siguiente **operador frontera**:

**Definición 1.2.2.** Definimos el **operador frontera**  $\partial_d : C_d(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{d-1}(K, \mathbb{Z})$  como sigue: para cada  $d$ -simplejo  $\tau^d \in K$ , definimos

$$\begin{aligned} \partial_d : C_d(K, \mathbb{Z}) &\rightarrow C_{d-1}(K, \mathbb{Z}) \\ \tau^d &\mapsto \sum_{\sigma^{d-1} < \tau^d} \epsilon(\tau, \sigma) \sigma \end{aligned}$$

donde  $\epsilon(\tau, \sigma)$  es el número de incidencia, extendemos  $\mathbb{Z}$ -linealmente a todo  $C_d(K, \mathbb{Z})$ .

Al definir estos operadores, buscamos tener una sucesión larga que nos relacione todos los grupos de  $d$ -cadenas definidos anteriormente, pero para poder definir esta sucesión es importante que los operadores cumplan con la siguiente propiedad:

**Proposición 1.2.3.** Para cada  $d$ , el operador frontera satisface

$$\partial_{d-1} \circ \partial_d = 0.$$

Utilizaremos la idea de la demostración de [15], pues ahí se prueba para complejos singulares. Para dicha demostración, debemos definir un tipo de funciones que nos permiten calcular las caras inmediatas de un simplejo.

Sea  $K$  un complejo y sea  $\sigma = \{v_0, \dots, v_d\}$  un  $d$ -simplejo de  $K$ , definimos la aplicación cara como

$$\begin{aligned} \epsilon_i^d : C_d(K, \mathbb{Z}) &\rightarrow C_{d-1}(K, \mathbb{Z}) \\ \sigma^d &\mapsto \{v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_d\}, \end{aligned}$$

recordemos que  $\widehat{v_i}$  denota que omitimos el vértice que este en la posición  $i$ .

Estas funciones tienen la siguiente propiedad, que es importante para demostrar el resultado antes mencionado:

**Lema 1.2.4.** Sea  $K$  un complejo Si  $k \leq j$ , entonces para toda  $d \geq 0$ , las aplicaciones cara satisfacen

$$\epsilon_j^{d-1} \circ \epsilon_k^d = \epsilon_k^{d-1} \circ \epsilon_{j+1}^d.$$



**Demostración.** Sea  $K$  un complejo y sea  $\sigma = \{v_0, \dots, v_d\}$  un  $d$ -simplejo de  $K$ . Primero veamos el caso donde  $k < j$ , por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}\epsilon_j^{d-1} \circ \epsilon_k^d(\{v_0, \dots, v_d\}) &= \epsilon_j^{d-1}(\{v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, v_d\}) \\ &= \{v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_d\}\end{aligned}$$

y por el otro tenemos que

$$\begin{aligned}\epsilon_k^{d-1} \circ \epsilon_{j+1}^d(\{v_0, \dots, v_d\}) &= \epsilon_k^{d-1}(\{v_0, \dots, \widehat{v_{j+1}}, \dots, v_d\}) \\ &= \{v_0, \dots, \widehat{v_k}, \dots, \widehat{v_{j+1}}, \dots, v_d\}\end{aligned}$$

pero ahora  $\widehat{v_{j+1}}$  está realmente en la posición  $j$ , por lo que se cumple la igualdad. Ahora veamos el caso donde  $k = j$ ,

$$\begin{aligned}\epsilon_j^{d-1} \circ \epsilon_j^d(\{v_0, \dots, v_d\}) &= \epsilon_j^{d-1}(\{v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_d\}) \\ &= \{v_0, \dots, \widehat{v_j}, \widehat{v_{j+1}}, \dots, v_d\} \quad \text{pues } v_{j+1} \text{ está en la posición } j \\ &= \epsilon_j^{d-1}(\{v_0, \dots, \widehat{v_{j+1}}, \dots, v_d\}) \\ &= \epsilon_j^{d-1} \circ \epsilon_{j+1}^d(\{v_0, \dots, v_d\})\end{aligned}$$

■

Ahora tenemos las herramientas para la prueba de la Proposición 1.2.3.

**Demostración.** Sea  $K$  un complejo y sea  $\sigma$  un  $d$ -simplejo de  $K$ .

$$\begin{aligned}\partial_{d-1} \circ \partial_d(\sigma) &= \partial_{d-1} \left( \sum_{i=0}^d (-1)^i \epsilon_i^d(\sigma) \right) \\ &= \sum_{i=0}^d (-1)^i \partial_{d-1}(\epsilon_i^d(\sigma)) \\ &= \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^{i+j} \epsilon_j^{d-1} \epsilon_i^d(\sigma) \\ &= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \epsilon_j^{d-1} \epsilon_i^d(\sigma) + \sum_{i > j} (-1)^{i+j} \epsilon_j^{d-1} \epsilon_i^d(\sigma) \\ &= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \epsilon_i^{d-1} \epsilon_{j+1}^d(\sigma) + \sum_{i > j} (-1)^{i+j} \epsilon_j^{d-1} \epsilon_i^d(\sigma) \quad \text{por el Lema 1.2.4} \\ &= \sum_{p < q} (-1)^{p+q-1} \epsilon_p^{d-1} \epsilon_q^d(\sigma) + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \epsilon_j^{d-1} \epsilon_i^d(\sigma) \quad \text{donde } p = i, q = j + 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

■

Con lo anterior, diremos que una sucesión de grupos de  $d$ -cadenas,

$$C_* : 0 \longrightarrow C_d(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_d} C_{d-1}(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{d-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

que cumplan que  $\partial_{d-1} \circ \partial_d = 0$  para toda  $d$ , será llamada **complejo de cadenas**. Con éstos podemos definir los grupos de homología de  $K$ .

**Definición 1.2.5.** Sea  $K$  un complejo. Definimos el  $d$ -ésimo grupo de homología simplicial de  $K$ , sobre  $\mathbb{Z}$  como

$$H_d(K, \mathbb{Z}) := \text{Ker}(\partial_d : C_d(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{d-1}(K, \mathbb{Z})) / \text{Im}(\partial_{d+1} : C_{d+1}(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_d(K, \mathbb{Z})).$$

Al rango de  $H_d(K, \mathbb{Z})$  lo llamamos el  $d$ -ésimo número de Betti y lo denotamos por  $\beta_d(K)$ .

Cuando no haya confusión, pondremos simplemente  $H_d$  o  $\beta_d$ , sin mencionar el complejo y los coeficientes a usar. Igualmente, a los operadores frontera, los denotaremos por  $\partial$ , sin hacer referencia al subíndice que indica la dimensión.

### 1.2.2. Propiedades funtoriales

Veamos ahora que  $H_d$  es un funtor entre las categorías de los complejos simpliciales y la de grupos abelianos. Veamos primero los siguientes resultados que darán pie a la prueba.

Sean  $K$  y  $L$  complejos, si  $\varphi : K \rightarrow L$  es un morfismo simplicial, denotamos por

$$\begin{aligned}\varphi_{\#} : C_d(K) &\rightarrow C_d(L) \\ \sum a_{\sigma}\sigma &\mapsto \sum a_{\sigma}\varphi(\sigma)\end{aligned}$$

al morfismo inducido, para cada  $d \geq 0$ .

$\varphi_{\#}$  está bien definido pues  $C_d(K)$  es un grupo abeliano libre con base los elementos de  $K$ .  $\varphi_{\#}$  cumple la siguiente propiedad.

**Lema 1.2.6.** Si  $\varphi : K \rightarrow L$  es un morfismo simplicial, entonces  $\varphi_{\#} : C_d(K) \rightarrow C_d(L)$  cumple que  $\varphi_{\#}\partial = \partial\varphi_{\#}$

**Demostración.** Sea  $\sum a_{\sigma}\sigma \in C_q(K)$ ,

$$\begin{aligned}\varphi_{\#}\partial\left(\sum a_{\sigma}\sigma\right) &= \varphi_{\#}\left(\sum a_{\sigma}\partial\sigma\right) \\ &= \varphi_{\#}\left(\sum a_{\sigma}\sum(-1)^i\widehat{\sigma}_i\right) \\ &= \sum a_{\sigma}\sum(-1)^i\varphi(\widehat{\sigma}_i).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\partial\varphi_{\#}\left(\sum a_{\sigma}\sigma\right) &= \partial\left(\sum a_{\sigma}\varphi(\sigma)\right) \\ &= \sum a_{\sigma}\sum(-1)^i\overline{\varphi(\sigma_i)}.\end{aligned}$$

Por tanto,  $\varphi_{\#}\partial = \partial\varphi_{\#}$ . ■

Tenemos lo necesario para poder probar el siguiente resultado, el cual es al que se quería llegar.

**Teorema 1.2.7.** Para toda  $d \geq 0$ ,  $H_d$  es un funtor entre las categorías  $\mathcal{K}$  (complejos simpliciales) y  $\text{Ab}$  (grupos abelianos), i.e.

$$H_d : \mathcal{K} \rightarrow \text{Ab}.$$

**Demostración.**  $H_d$  está definida para objetos de  $\mathcal{K}$  y para morfismos simpliciales  $\varphi : K \rightarrow L$ , definimos de manera natural el siguiente morfismo inducido:

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & H_d(K, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_d / \text{Im } \partial_{d+1} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_* \\ L & \longrightarrow & H_d(L, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_d / \text{Im } \partial_{d+1} \end{array}$$

donde  $\varphi_*$  está definida como sigue

$$\begin{aligned}\varphi_* : H_d(K) &\rightarrow H_d(L) \\ z + \text{Im } \partial_{d+1}(K) &\mapsto \varphi_{\#}(z) + \text{Im } \partial_{d+1}(L)\end{aligned}$$

el cual ya está definido con objetos de  $\text{Ab}$ . Por el Lema 1.2.6  $\varphi_{\#}(\text{Im } \partial) \subseteq \text{Im } \partial$ , por tanto  $\varphi_*$  está bien definida. Es fácil probar que  $H_d : \mathcal{K} \rightarrow \text{Ab}$  es un funtor. ■

Por lo que, si tenemos un morfismo simplicial  $\varphi : K \rightarrow L$ , podemos hablar del morfismo inducido en homología  $\varphi_* : H_d(K) \rightarrow H_d(L)$ .

**Corolario 1.2.8.** Si  $K$  y  $L$  son homeomorfos (denotado por  $K \cong L$ ), entonces  $H_d(K)$  y  $H_d(L)$  son isomorfos ( $H_d(K) \cong H_d(L)$ ), para toda  $d$ .

Existe un funtor entre  $\mathcal{K}$  y  $\text{Top}$ , asociando a cada complejo simplicial abstracto su realización geométrica.

**Teorema 1.2.9.** El espacio subyacente de un complejo simplicial define  $|\cdot| : \mathcal{K} \rightarrow \text{Top}$ , el funtor entre las categorías  $\mathcal{K}$  y  $\text{Top}$ .

**Demostración.** Sea  $\varphi : K \rightarrow L$  un morfismo simplicial entre los complejos simpliciales  $K$  y  $L$ . Para cada  $s \in K$  definimos  $f_s : s \rightarrow |L|$  como la aplicación afín determinada por

$$\varphi|_{\text{Vert}(s)} : s \rightarrow |L|$$

que es un morfismo simplicial.

Entonces, por la condición de intersección de la definición de complejo simplicial, las funciones coinciden en sus intersecciones.

También, por el lema del pegado, tenemos una única función continua

$$|\varphi| : |K| \rightarrow |L|,$$

veamos que es un funtor:

Primero veamos que sucede con el morfismo identidad:

$$|\text{Id}|(s) = \text{Id}|_{\text{Vert}(s)}(\sum t_i v_i) = \sum t_i \text{Id}|_{\text{Vert}(s)}(v_i) = \sum t_i v_i = \text{Id}(s)$$

Ahora con la composición, por un lado tenemos que

$$|f \circ g|(s) = f \circ g|_{\text{Vert}(s)}(\sum t_i v_i) = \sum t_i (f \circ g|_{\text{Vert}(s)}(v_i)) = \sum t_i (f \circ g(v_i)),$$

y por el otro lado tenemos que

$$|f| \circ |g|(s) = |f|(g|_{\text{Vert}(s)}(\sum t_i v_i)) = |f|(\sum t_i g(v_i)) = \sum t_i (f \circ g(v_i)).$$

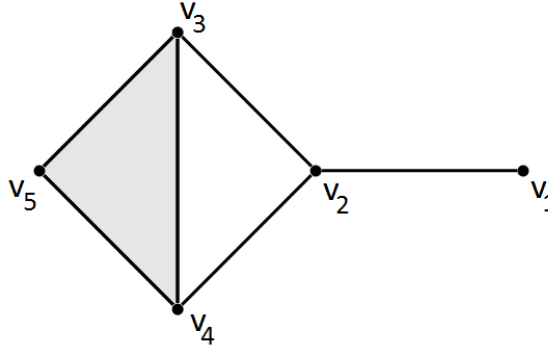
De esta manera, se tiene que  $|\cdot|$  es un funtor. ■

### 1.2.3. Un ejemplo

Para dejar claro los conceptos y resultados vistos en la sección, mostraremos un ejemplo donde se hacen los cálculos pertinentes. Regresaremos a este ejemplo en varias ocasiones en capítulos siguientes:

**Ejemplo 1.2.10.** Consideremos el complejo  $K$ , con la siguiente estructura simplicial:

$$K : \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_3, v_4, v_5\}\}.$$



Éste induce el siguiente complejo de cadenas:

$$\begin{aligned} C_*(K) : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \langle \{v_3, v_4, v_5\} \rangle &\xrightarrow{\partial_2} \langle \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\} \rangle \\ &\xrightarrow{\partial_1} \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle \xrightarrow{\partial_0} 0. \end{aligned}$$

Entonces, como el contradominio de  $\partial_0$  es 0, tenemos que

$$\ker \partial_0 \cong \mathbb{Z}[v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_4] \oplus \mathbb{Z}[v_5].$$

Sea  $\alpha$  un elemento arbitrario de  $C_1(K)$ , entonces,

$$\alpha = a_1\{v_1, v_2\} + a_2\{v_2, v_3\} + a_3\{v_2, v_4\} + a_4\{v_3, v_4\} + a_5\{v_3, v_5\} + a_6\{v_4, v_5\}.$$

Por tanto,

$$\partial_1(\alpha) = a_1(v_2 - v_1) + a_2(v_3 - v_2) + a_3(v_4 - v_2) + a_4(v_4 - v_3) + a_5(v_5 - v_3) + a_6(v_5 - v_4).$$

Luego,

$$\text{Im}(\partial_1) \cong \mathbb{Z}[v_2 - v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_3 - v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_4 - v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_4 - v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_5 - v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_5 - v_4].$$

Así,

$$\begin{aligned} H_0(K) &= \text{Ker } \partial_0 / \text{Im } \partial_1 \\ &\cong \frac{\mathbb{Z}[v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_4] \oplus \mathbb{Z}[v_5]}{\mathbb{Z}[v_2 - v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_3 - v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_4 - v_2] \oplus \mathbb{Z}[v_4 - v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_5 - v_3] \oplus \mathbb{Z}[v_5 - v_4]} \\ &\cong \mathbb{Z}[v_1], \end{aligned}$$

pues  $v_1 = v_2 = \dots = v_5$ .

Ahora,

$$\begin{aligned}\partial_1(\alpha) &= a_1(v_2 - v_1) + a_2(v_3 - v_2) + a_3(v_4 - v_2) + a_4(v_4 - v_3) + a_5(v_5 - v_3) + a_6(v_5 - v_4) \\ &= -a_1v_1 + (a_1 - a_2 - a_3)v_2 + (a_2 - a_4 - a_5)v_3 + (a_3 + a_4 - a_6)v_4 + (a_5 + a_6)v_5.\end{aligned}$$

Si  $\partial_1(\alpha) = 0$ , tenemos que  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -a_3 = a_4 + a_5$  y  $a_6 = -a_5$ . Por tanto,

$$\ker \partial_1 \cong \mathbb{Z}[w_1] \oplus \mathbb{Z}[w_2],$$

donde:

$$\begin{aligned}w_1 &= \{v_2, v_3\} - \{v_2, v_4\} + \{v_3, v_4\}, \\ w_2 &= \{v_2, v_3\} - \{v_2, v_4\} + \{v_3, v_5\} - \{v_4, v_5\}.\end{aligned}$$

Ahora, sea  $\beta$  un elemento cualquiera de  $C_2(K)$ , es decir

$$\beta = b\{v_3, v_4, v_5\}.$$

Entonces,

$$\partial_2(\beta) = b(\{v_4, v_5\} - \{v_3, v_5\} + \{v_3, v_4\}).$$

Por tanto,

$$\text{im } \partial_2 \cong \mathbb{Z}[\{v_4, v_5\} - \{v_3, v_5\} + \{v_3, v_4\}].$$

Y así,

$$\begin{aligned}H_1(K) &= \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2 \\ &\cong \frac{\mathbb{Z}[\{v_2, v_3\} - \{v_2, v_4\} + \{v_3, v_4\}] \oplus \mathbb{Z}[\{v_2, v_3\} - \{v_2, v_4\} + \{v_3, v_5\} - \{v_4, v_5\}]}{\mathbb{Z}[\{v_4, v_5\} - \{v_3, v_5\} + \{v_3, v_4\}]} \\ &\cong \mathbb{Z}[\{v_2, v_3\} - \{v_2, v_4\} + \{v_3, v_4\}],\end{aligned}$$

Pues  $\{v_3, v_4\} = \{v_3, v_5\} - \{v_4, v_5\}$ . Para  $n \geq 2$  tendremos que  $H_n(K) = 0$ .

### 1.3. Teoría de Morse discreta

En esta sección se presentan las definiciones básicas de teoría de Morse discreta, con el objetivo de mostrar una alternativa eficiente para el cálculo de la homología simplicial. Como vimos en el ejemplo anterior se requiere toda la estructura simplicial para poder calcular la homología de  $K$ , la teoría de Morse discreta nos ofrece el cálculo de la homología utilizando sólo ciertos elementos.

#### 1.3.1. Función de Morse discreta

**Definición 1.3.1.** Si  $K$  es un complejo simplicial abstracto y  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, decimos que  $f$  es una **función de Morse discreta** (FMD) si para todo  $d$ -simplejo  $\alpha^d \in K$  se cumple:

$$1. |\{\beta^{d+1} > \alpha^d \mid f(\beta^{d+1}) \leq f(\alpha^d)\}| \leq 1$$

$$2. |\{\gamma^{d-1} < \alpha^d \mid f(\gamma^{d-1}) \geq f(\alpha^d)\}| \leq 1,$$

donde  $||$  denota la cardinalidad del conjunto.

En el siguiente ejemplo, definimos dos funciones distintas en un mismo complejo  $K$ , una es FMD y la otra no. Pondremos los valores de la función de Morse sobre su simplejo, no se debe de confundir con la etiqueta que usemos para el vértice.

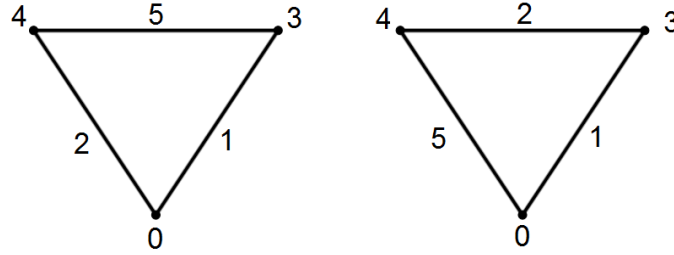


Figura 1.7: En el lado izquierdo se muestra una FMD, y en el lado derecho una que no lo es.

La idea general es que las funciones de Morse discretas asignen números mayores a simplejos de dimensión mayor “casi siempre”.

**Observación. 1.3.2.** Nótese que las condiciones (1) y (2) en la Definición 1.3.1 son tales que, si uno de los conjuntos tiene cardinalidad uno, entonces el otro es vacío:

En efecto, supongamos que  $\sigma^p \in K$  tal que existen  $v^{p-1}, \tau^{p+1} \in K$  con  $v^{p-1} < \sigma^p < \tau^{p+1}$  y  $f(\tau) \leq f(\sigma) \leq f(v)$ . Sea  $\tilde{\sigma}^p \neq \sigma^p$  tal que  $v^{p-1} < \tilde{\sigma}^p < \tau^{p+1}$ , este simplejo existe pues  $p \geq 1$  (Así, si  $\tau^{p+1} = \{t_0, t_1, \dots, t_p, t_{p+1}\}$  y en particular  $\sigma^p = \{t_0, t_1, \dots, t_p\}$ , entonces podemos tomar, por ejemplo,  $\tilde{\sigma}^p = \{t_1, \dots, t_p, t_{p+1}\}$ ). Ahora, como  $f(\tau) \leq f(\sigma)$  entonces  $f(\tau) > f(\tilde{\sigma})$ , y como  $f(v) \geq f(\sigma)$  entonces  $f(\tilde{\sigma}) > f(v)$ . Por tanto  $f(\tau) \leq f(\sigma) \leq f(v) < f(\tilde{\sigma}) < f(\tau)$ , lo cual es una contradicción.

Por la definición de FMD podemos distinguir distintos tipos de simplejos. Si  $K$  es un complejo simplicial abstracto y  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  es un FMD, entonces decimos que  $\alpha^d \in K$  es un **simplejo crítico** de índice  $d$  si:

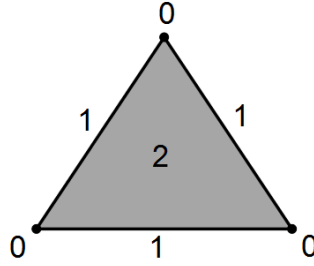
1.  $|\{\beta^{d+1} > \alpha^d \mid f(\beta^{d+1}) \leq f(\alpha^d)\}| = 0$
2.  $|\{\gamma^{d-1} < \alpha^d \mid f(\gamma^{d-1}) \geq f(\alpha^d)\}| = 0$

Si  $\alpha^d$  no es crítico, se llama **simplejo regular**.

Dado un complejo simplicial  $K$ , siempre existe una FMD  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  dada por,

$$\begin{aligned} f : K &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sigma^d &\mapsto d \end{aligned}$$

esto es  $f(\sigma) = \dim(\sigma)$ . La característica más importante de esta función es que todos los simplejos resultan ser simplejos críticos. Podemos ver esta función en la siguiente figura.



Más adelante se probará que si  $m_d(f)$  es el número de simplejos críticos de dimensión  $d$  de  $f$ , entonces  $K$  es homotópicamente equivalente a un complejo celular  $\mathcal{M}_k$ , que tiene exactamente  $m_d(f)$  celdas de dimensión  $d$ .

Las funciones de Morse cumplen las siguientes propiedades:

**Proposición 1.3.3.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  una FMD, se tiene que:

- (1) Si  $K_1 \subset K$  es un subcomplejo y  $f_1$  es la restricción de  $f$  a  $K_1$ , entonces  $f_1$  es una FMD y los simplejos críticos de  $f$  también son simplejos críticos de  $f_1$ .
- (2) Existe una función inyectiva  $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{R}$  que tiene los mismos simplejos críticos que  $f$ .
- (3) Sean  $\alpha^d, \tau^p \in K$  son tales que  $\alpha^d < \tau^p$ , entonces existe  $\sigma^{d+1} \in K$  tal que  $\alpha^d < \sigma^{d+1} \leq \tau^p$  y  $f(\sigma) \leq f(\tau)$ .
- (4) Si  $\sigma$  es crítico, entonces para cualquier  $\tau > \sigma$ , tenemos que  $f(\tau) > f(\sigma)$ .

**Demostración.** Las demostraciones 1 2 y 3 se pueden encontrar en [9, pp.29-30].

Probemos 4 mediante inducción sobre  $d = \dim(\tau) - \dim(\sigma)$ .

Para  $d = 1$  se sigue de la definición de simplejo crítico.

Para  $d \geq 2$  tenemos que existen  $d$  caras inmediatas de  $\tau$  que contienen a  $\sigma$ . Por hipótesis de inducción cada una de esas  $d$  caras inmediatas tiene un valor mayor que  $\sigma$ . Pero a los más en una de ellas  $f$  podría valer más o igual que  $\tau$  lo que deja  $d - 1$  simplejos  $\rho$  donde cada uno de ellos cumple  $f(\sigma) < f(\rho) < f(\tau)$ . ■

A continuación una definición, que nos será útil más adelante.

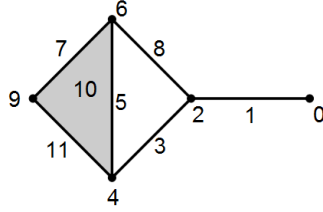
**Definición 1.3.4.** Si  $K$  es un complejo simplicial,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  es una FMD y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces definimos el **subcomplejo de nivel  $c$**  como

$$K(c) = \bigcup_{f(\tau) \leq c} \left( \bigcup_{\sigma \leq \tau} \sigma \right).$$

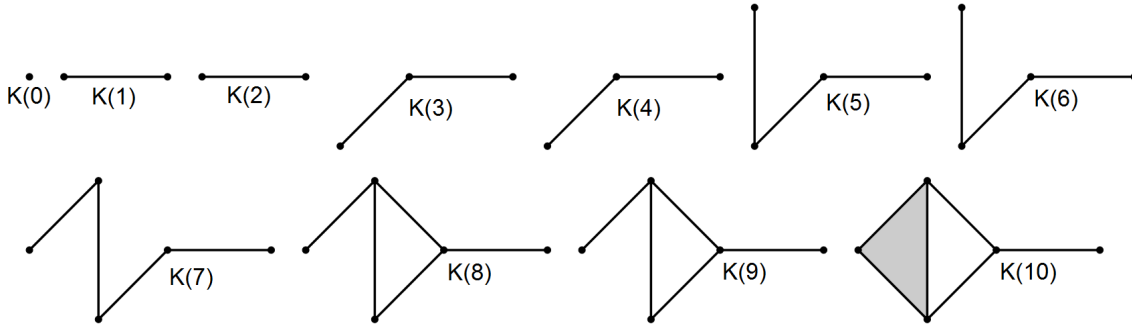
Entonces  $K(c)$  se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} K(c) &= \bigcup_{f(\tau) \leq c} \left( \bigcup_{\sigma \leq \tau} \sigma \right) \\ &= \{ \sigma \leq \tau \mid f(\tau) \in (-\infty, c] \} \\ &= \{ \sigma \leq \tau \mid \tau \in f^{-1}(-\infty, c] \} \\ &= \bigcup_{\tau \in f^{-1}(-\infty, c]} \left( \bigcup_{\sigma \leq \tau} \sigma \right) \\ &= \bigcup_{\sigma \leq \tau \in f^{-1}(-\infty, c]} \sigma. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.3.5.** Sea  $f$  la FMD dada por,



Dado que  $f$  está definida en los números naturales y es inyectiva obtenemos la siguiente filtración:



Nótese que  $K(c)$  es el subcomplejo de  $K$  que tiene todos los simplejos con imagen menor o igual que  $c$  y todas las caras de éstos. Ésta definición da pie al siguiente resultado, de esta manera obtendremos como consecuencia uno de los teoremas principales de la sección.

**Teorema 1.3.6.** Sea  $f : K \rightarrow \mathbb{N}$  una FMD inyectiva. Entonces:

1.  $K(0)$  consiste de a lo más un punto.
2. Si  $f^{-1}(n)$  es regular, entonces  $K(n) \simeq K(n-1)$  donde  $n \in \mathbb{Z}_+$
3. Si  $\sigma^p = f^{-1}(n)$  es crítico, entonces

$$K(n) \simeq K(n-1) \bigcup_{\partial\sigma} \sigma$$

**Demostración.**

1. Por definición y como el contradominio de  $f$  es  $\mathbb{N}$  y  $f$  es inyectiva,

$$K(0) = \bigcup_{\sigma \leq f^{-1}(0)} \sigma.$$

Si  $f^{-1}(0)$  es un simplejo de dimensión mayor o igual a uno, entonces tendría al menos dos caras, donde cada una de ellas tendría valor mayor a cero (es decir mayor que el valor que toma  $f^{-1}(0)$ ), contradiciendo la definición de FMD.

Así,  $f^{-1}(0)$  es un 0-simplejo o bien,  $f^{-1}(0) = \emptyset$ . Entonces  $K(0) = f^{-1}(0)$  es a lo más un punto.

2. Aquí tenemos dos casos:



- Si existe un  $\sigma > f^{-1}(n) = \tau$  tal que  $f(\sigma) \leq n$ , entonces por ser  $f$  inyectiva tenemos que  $f(\sigma) \leq n - 1$ . Ésto implica que

$$\tau = f^{-1}(n) \in \bigcup_{f(\sigma) \leq n-1} \left( \bigcup_{\tau \leq \sigma} \tau \right) = K(n-1),$$

por tanto  $\tau = f^{-1}(n) \in K(n-1)$  y por ser  $K(n-1)$  un complejo simplicial (o bien por la misma definición de  $K(n-1)$ ) tenemos que todas las caras de  $\tau$  también pertenecen a  $K(n-1)$ . Por tanto  $K(n) = K(n-1)$ .

- Si no existe tal  $\sigma$ , existe algún  $\rho < f^{-1}(n)$  con  $f(\rho) \geq n$  (ya que  $f^{-1}(n)$  es no crítico). Entonces por ser  $f$  de Morse existe un único  $\tau > \rho$  con  $f(\tau) \leq f(\rho)$ , lo que implica  $\tau = f^{-1}(n)$ . Si  $\beta > \rho$  con  $\beta \neq \tau$  entonces  $f(\rho) < f(\beta)$ , como  $n = f(\tau) \leq f(\rho) < f(\beta)$ , tenemos que  $\beta \notin K(n)$ . Por tanto  $\rho$  es una cara libre de  $\tau$  en  $K(n)$ . Pero para cualquier otra cara  $\sigma < \tau$ ,  $f(\sigma) < f(\tau) = n$ , por tanto  $f(\sigma) \leq n - 1$ .

Así, los únicos simplejos en  $K(n) \setminus K(n-1)$  son  $\rho$  y  $\tau$ . Ahora colapsando  $\tau$  a través de su cara libre  $\rho$  tenemos un complejo homotópicamente equivalente, por tanto  $K(n) \simeq K(n-1)$ .

3. Si  $\tau = f^{-1}(n)$  es crítico, es claro que la frontera de  $\tau$  está en  $K(n-1)$ . Por otro lado, por la Proposición 1.3.3 se sigue que  $\tau$  no puede estar en  $K(n-1)$ .

Así que  $K(n)$  es obtenido a partir de  $K(n-1)$  agregando  $\tau$  junto con su frontera, por tanto

$$K(n) \simeq K(n-1) \bigcup_{\partial\tau} \tau.$$

■

Del teorema anterior, se sigue inmediatamente el resultado:

**Corolario 1.3.7.** Sea  $f$  una FMD en un complejo  $K$ . Entonces  $K$  es homotópicamente equivalente a un complejo CW con una celda de dimensión  $p$  por cada  $p$ -simplejo crítico en  $K$  con respecto a  $f$ .

En esta sección vimos una prueba combinatoria del teorema principal de la teoría de Morse discreta el cual se busca presentar a detalle en diferentes contextos, simplemente se utilizaron propiedades simpliciales.

## 1.4. Campo vectorial gradiente y flujo asociado

Hemos visto que los simplejos críticos asociados a una FMD definida en un complejo  $K$  determinan el tipo de homotopía del complejo  $K$ . Construiremos un complejo de cadenas con dichos simplejos críticos (que llamaremos complejo de Morse-Forman) y probaremos que existe un isomorfismo entre el complejo de cadenas simplicial usual de  $K$  y al complejo de cadenas de Morse-Forman de  $K$ .

Para precisar esta relación necesitamos definir el concepto de campo vectorial gradiente. Fijemos  $K$  un complejo,  $f$  una FMD y demos una orientación para cada simplejo  $\sigma \in K$ .

Definimos un producto interno en  $C_p(K, \mathbb{Z})$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : C_p(K, \mathbb{Z}) \times C_p(K, \mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\sum a_i \sigma_i, \sum b_i \sigma_i) &\mapsto \sum a_i b_i. \end{aligned}$$

**Definición 1.4.1.** Sea  $\sigma^p \in K$ . Si existe un  $\tau^{p+1} > \sigma$  con  $f(\tau) \leq f(\sigma)$  definimos

$$V(\sigma) = -\langle \partial\tau, \sigma \rangle \tau,$$

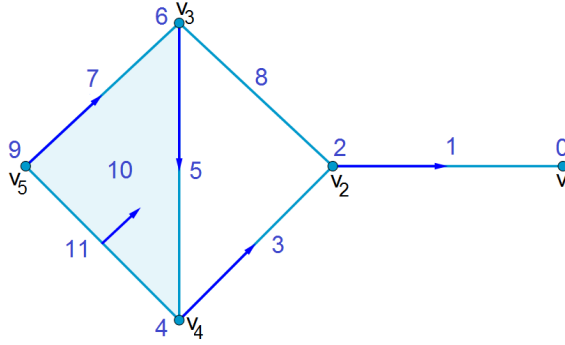
si no existe tal  $\tau$  definimos  $V(\sigma) = 0$ .

Para cada  $p$  extendemos  $\mathbb{Z}$ -linealmente  $V$  a un homomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos

$$V : C_p(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{p+1}(K, \mathbb{Z}).$$

A  $V$  lo llamaremos el **campo vectorial gradiente** asociado a  $K$  por  $f$ .

**Ejemplo 1.4.2.** Consideremos el siguiente complejo simplicial  $K$  ordenado por la numeración de sus vértices con la FMD  $f$  denotada en éstos:



Para cada  $\sigma \in K$ , la flecha que sale de  $\sigma$  apunta a su supercara tal que su  $f$ -valor es menor. El campo ilustrado por las flechas será el campo vectorial asociado por esta función de Morse.

El campo vectorial gradiente y la estructura que nos dan las flechas como en el ejemplo anterior nos permiten dar la siguiente definición que mas adelante nos será útil en el cálculo de la homología del complejo de Morse-Forman.

**Definición 1.4.3.** Un **camino gradiente** asociado a una función de Morse  $f$  es una sucesión

$$(\sigma_0^d, \tau_0^{d+1}), (\sigma_1^d, \tau_1^{d+1}), \dots, (\sigma_r^d, \tau_r^{d+1})$$

de parejas determinadas por  $f$  (es decir que  $\tau_i$  es la única supercara de  $\sigma_i$  tal que  $f(\tau_i) < f(\sigma_i)$  para toda  $i$ ) tales que  $\sigma_{i+1}^d < \tau_i^{d+1}$ .

Por ejemplo un camino gradiente en el Ejemplo 1.4.2 esta formado por la sucesion:

$$(v_5, \{v_3, v_5\}), (v_3, \{v_3, v_4\}), (v_4, \{v_2, v_4\}), (v_2, \{v_1, v_2\}), (v_1).$$

**Definición 1.4.4.** Para cualquier simplejo orientado  $\sigma \in K$ , definimos el **flujo gradiente**  $\phi$  como

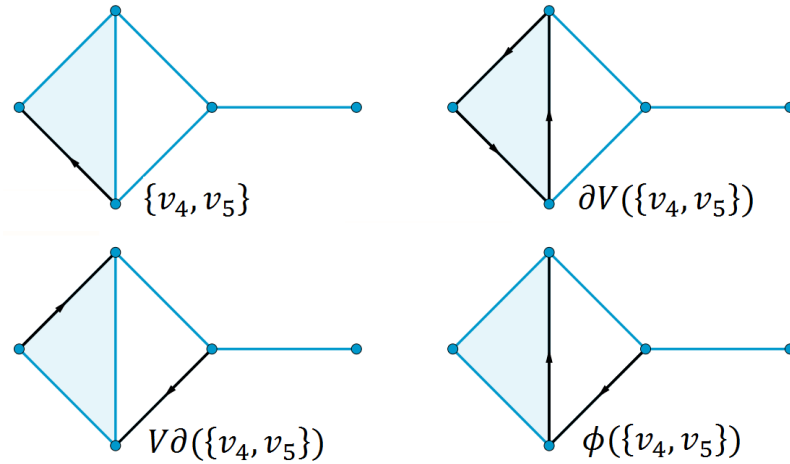
$$\phi(\sigma) = \sigma + \partial V(\sigma) + V\partial(\sigma).$$

Para cada  $p$ , extendemos  $\mathbb{Z}$ -linealmente a un homomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos

$$\phi : C_p(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_p(K, \mathbb{Z}).$$

**Ejemplo 1.4.5.** Consideremos el complejo y su FMD como en el ejemplo anterior, calculemos el flujo de la arista  $\{v_4, v_5\}$ :

$$\begin{aligned} V(\{v_4, v_5\}) &= -\langle \partial\{v_3, v_4, v_5\}, \{v_4, v_5\} \rangle \{v_3, v_4, v_5\} \\ &= -\langle \{v_4, v_5\} - \{v_3, v_5\} + \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\} \rangle \{v_3, v_4, v_5\} \\ &= -\{v_3, v_4, v_5\} \\ \partial(V(\{v_4, v_5\})) &= \partial(-\{v_3, v_4, v_5\}) = -\partial(\{v_3, v_4, v_5\}) \\ &= -\{v_4, v_5\} + \{v_3, v_5\} - \{v_3, v_4\} \\ \partial(\{v_4, v_5\}) &= v_5 - v_4 \\ V(\partial(\{v_4, v_5\})) &= V(v_5) - V(v_4) = -\langle \partial\{v_3, v_5\}, v_5 \rangle \{v_3, v_5\} + \langle \partial\{v_2, v_4\}, v_4 \rangle \{v_2, v_4\} \\ &= -\langle v_5 - v_3, v_5 \rangle \{v_3, v_5\} + \langle v_4 - v_2, v_4 \rangle \{v_2, v_4\} = -\{v_3, v_5\} + \{v_2, v_4\} \end{aligned}$$



Tenemos los siguientes resultados:

**Teorema 1.4.6.** Sea  $K$  un complejo simplicial abstracto y  $f$  una función de Morse asociada a  $K$ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1.  $V \circ V = 0$ .
2. Si  $\sigma^p$  está orientado, entonces  $|\{v^{p-1} | V(v) = \pm \sigma\}| \leq 1$ .
3. Si  $\sigma^p$  está orientado, entonces  $\sigma$  es crítico si y sólo si  $\sigma \notin \text{im}(V)$  y  $V(\sigma) = 0$ .

**Demostración.**

1. Si  $V(v^{p-1}) = \pm \sigma$  entonces  $v < \sigma$  y  $f(\sigma) \leq f(v)$ . Pero por 1.3.2, no existe  $\tau^{p+1} > \sigma$  con  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ , por tanto  $V(\sigma) = 0$ , y entonces  $V \circ V(v) = 0$ .

2. Si  $V(v^{p-1}) = \pm\sigma^p$  entonces  $v < \sigma$  y  $f(\sigma) \leq f(v)$ , y por definición de FMD  $v$  es único.
3. Por definición  $\sigma$  es crítico si y sólo si no existe  $v^{p-1} < \sigma$  con  $f(v) \geq f(\sigma)$  y no existe  $\tau^{p+1} > \sigma$  con  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ . Esto es equivalente a que no existe  $v^{p-1}$  con  $V(v) = \pm\sigma$  y no existe  $\tau > \sigma$  tal que  $V(\tau) = \pm\tau$ , esto implica que  $\sigma \notin \text{Im}(v)$  y  $V(\sigma) = 0$ .

■

Este resultado nos permite caracterizar a los simplejos de la siguiente manera:

**Corolario 1.4.7.** Dada una FMD  $f : K \rightarrow \mathbb{N}$  para cada  $p$ -simplejo de  $K$  se cumple exactamente una de las siguientes propiedades:

1.  $\sigma$  es crítico.
2.  $\pm\sigma \in \text{Im } V_f$ .
3.  $V_f(\sigma) \neq 0$ .

**Teorema 1.4.8.** Se cumplen las siguientes afirmaciones:

1.  $\phi\partial = \partial\phi$ , donde  $\phi$  es el flujo gradiente.

Sean  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  los  $p$ -simplejos de  $K$ . Cada uno con una orientación fija. Denotamos

$$\phi(\sigma_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}\sigma_j.$$

2. Para cada  $i$ ,  $a_{ii} = 0$  ó  $1$ , y  $a_{ii} = 1$  si y sólo si  $\sigma_i$  es crítico.
3. Si  $i \neq j$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ , si además  $a_{ij} \neq 0$  entonces  $f(\sigma_j) < f(\sigma_i)$  para todo  $\sigma_j$ .

**Demostración.**

1. Tenemos que  $\phi\partial = (\text{Id} + V\partial + \partial V)\partial = \partial + V\partial\partial + \partial V\partial = \partial + \partial V\partial$ . Por otra parte,  $\partial\phi = \partial(\text{Id} + V\partial + \partial V) = \partial + \partial V\partial + \partial\partial V = \partial + \partial V\partial$ .
2. y 3. Como  $V$  y  $\partial$  mandan cadenas enteras en cadenas enteras, tenemos que  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ . Por el Corolario 1.4.7 cada  $\sigma^p$  cumple exactamente una de las siguientes propiedades:  $\sigma$  es crítico,  $\pm\sigma \in \text{Im}(V)$  ó  $V(\sigma) \neq 0$ .

- (i) Si  $\sigma$  es crítico, entonces  $V(\sigma) = 0$ , por tanto  $\phi(\sigma) = \sigma + V(\partial\sigma) = \sigma + \sum_{v^{p-1} < \sigma} \epsilon(\sigma, v)V(v)$ . Como  $\sigma \notin \text{Im}(V)$  tenemos que para cada  $v^{p-1} < \sigma$ ,  $f(v) < f(\sigma)$  y  $V(v) = 0$  ó  $V(v) = \tilde{\sigma}^p$  con  $f(\tilde{\sigma}) \leq f(v) < f(\sigma)$ . Entonces,

$$\phi(\sigma) = \sigma + \sum_{v^{p-1} < \tilde{\sigma}, \sigma \neq \tilde{\sigma}} a_{\tilde{\sigma}}\tilde{\sigma},$$

donde  $a_{\tilde{\sigma}} \neq 0$  implica que  $f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)$  y en este caso  $a_{ii} = 1$ .

- (ii) Si  $\sigma$  no es crítico, por Teorema 1.4.6  $\sigma$  no es crítico si y sólo si  $\pm\sigma \in \text{Im}(V)$  o  $V(\sigma) \neq 0$ . Si  $\sigma \in \text{Im } V$  entonces  $\sigma \in \text{Ker}$ , por Teorema 1.4.6(1), por tanto  $\phi(\sigma) = \sigma + V(\partial\sigma) = \sigma + \sum_{v^{p-1} < \sigma} \epsilon(\sigma, v)V(v)$ . De nuevo por Teorema 1.4.6(2) existe una única  $(p-1)$ -cara  $\tilde{v} < \sigma$  con  $V(\tilde{v}) = \pm\sigma$ . Ahora, como  $\epsilon(\sigma, \tilde{v}) = \langle \partial\sigma, \tilde{v} \rangle$  y tenemos que  $V(\tilde{v}) = -\langle \partial\sigma, \tilde{v} \rangle\sigma$  entonces  $\epsilon(\sigma, \tilde{v})V(\tilde{v}) = -\sigma$ . Más aún, si  $\tilde{v} \neq v < \sigma$  entonces  $V(v) = 0$  ó  $V(v) = \tilde{\sigma}$  con  $f(\tilde{\sigma}) \leq f(v) < f(\sigma)$ . Esto implica que

$$\phi(\sigma) = \sigma - \sigma + \sum_{v^{p-1} < \tilde{\sigma}, \sigma \neq \tilde{\sigma}} a_{\tilde{\sigma}}\tilde{\sigma},$$

donde  $a_{\tilde{\sigma}} \neq 0$  implica que  $f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)$ , y en este caso  $a_{ii} = 0$ .

- (iii) Si  $\sigma$  no es crítico y  $V(\sigma) \neq 0$ , entonces  $V(\sigma) = -\langle \partial\tau, \sigma \rangle \tau \neq 0$  para algún  $\tau^{p+1} > \sigma$  con  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ , entonces  $\phi(\sigma) = \sigma + V\partial\sigma + \partial V\sigma$ . Como en (i) y (ii):

$$V\partial\sigma = \sum_{v^{p-1} < \tilde{\sigma}, \sigma \neq \tilde{\sigma}} a_{\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}.$$

Además,

$$\begin{aligned} \partial V\sigma &= -\langle \partial\tau, \sigma \rangle \partial\tau \\ &= -\langle \partial\tau, \sigma \rangle \left( \sum_{\tilde{\sigma} < \tau} \epsilon(\tau, \tilde{\sigma}) \tilde{\sigma} \right) \\ &= -\langle \partial\tau, \sigma \rangle \langle \partial\tau, \sigma \rangle \sigma + \sum b_{\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma} \\ &= -\sigma + \sum_{\tilde{\sigma} < \tau, \sigma \neq \tilde{\sigma}} b_{\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}, \end{aligned}$$

donde  $b_{\tilde{\sigma}} \neq 0$  implica que  $f(\tilde{\sigma}) \leq f(\tau) < f(\sigma)$  y en este caso al sumar para obtener  $\phi(\sigma)$  vemos que también  $a_{ii} = 0$ .

En conclusión; probamos que si  $\sigma$  es crítico entonces  $a_{ii} = 1$ . Y probamos que si  $\sigma$  no es crítico entonces  $a_{ii} = 0$ . Por tanto, si  $a_{ii} = 1$  entonces  $a_{ii} \neq 0$  lo cual implica que  $\sigma$  es crítico. Por tanto  $a_{ii} = 1$  si y sólo  $\sigma$  es crítico.

■

Sea  $C_p^\phi(K, \mathbb{Z}) = \{c \in C_p(K, \mathbb{Z}) \mid \phi(c) = c\}$ , llamaremos a estos conjuntos **cadena**  $\phi$ -**invariantes** de  $K$ . Veamos que  $\partial(C_p^\phi) \subseteq C_{p-1}^\phi$ : Sea  $c \in \partial(C_p^\phi)$  esto implica que  $c = \partial(\sigma)$  donde  $\sigma \in C_p^\phi$ , es decir  $\phi(\sigma) = \sigma$ , ahora por Teorema 1.4.8 tenemos que  $\phi(c) = \phi\partial(\sigma) = \partial\phi(\sigma) = \partial(\sigma) = c$ , por tanto  $c \in C_{p-1}^\phi$ . Entonces tenemos el siguiente complejo de cadenas,

$$C_p^\phi : 0 \rightarrow C_n^\phi(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^\phi(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0^\phi(K, \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

llamado **complejo de Morse-Forman**. Tenemos que el complejo de Morse-Forman es un complejo de cadenas porque es una restricción del complejo de cadenas simplicial usual.

Nuestro objetivo será mostrar que los grupos de homología de  $C_p^\phi$  y de  $K$  son los mismos. Para esto analizaremos el homomorfismo estabilizador  $\phi^\infty : C_* \rightarrow C_*^\phi$  definido por  $\phi^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \phi^N$ , donde  $\phi^N$  denota la composición de  $\phi$  consigo misma  $N$  veces. Veremos que para  $N$  suficientemente grande  $\phi^\infty = \phi^N$ . Pero antes de eso, necesitamos el siguiente resultado.

**Lema 1.4.9.** Sea  $c \in C_p^\phi(K, \mathbb{Z})$ ; donde  $c = \sum_{\sigma \in K_p} a_\sigma \sigma$  y  $K_p$  denota a los simplejos de dimensión  $p$  en  $K$ . Sea  $\sigma^*$  cualquier elemento que maximice el conjunto  $\{f(\sigma) \mid a_\sigma \neq 0\}$ . Entonces  $\sigma^*$  es crítico en  $f$ .

**Demostración.** Como  $c$  es  $\phi$ -invariante tenemos que  $c = \phi(c) = \sum_{\sigma \in K_p} a_\sigma \phi(\sigma)$ . Ahora,  $a_{\sigma^*} = \langle c, \sigma^* \rangle = \langle \sum a_\sigma \phi(\sigma), \sigma^* \rangle = \sum a_\sigma \langle \phi(\sigma), \sigma^* \rangle$ . Por Teorema 1.4.8(3) si  $\sigma \neq \sigma^*$  y  $f(\sigma) \leq f(\sigma^*)$  entonces  $a_\sigma = 0$ , esto implica que  $a_\sigma \langle \phi(\sigma), \sigma^* \rangle = 0$  para  $\sigma \neq \sigma^*$  por tanto  $0 \neq a_{\sigma^*} = a_{\sigma^*} \langle \phi(\sigma^*), \sigma^* \rangle$  entonces  $\langle \phi(\sigma^*), \sigma^* \rangle \neq 0$ , lo cual implica que  $\langle \phi(\sigma^*), \sigma^* \rangle = 1$ , es decir  $\phi(\sigma^*) = \sigma^*$  y así  $\sigma^* \in C_p^\phi$ . Pero  $\langle \phi(\sigma^*), \sigma^* \rangle = 1$  pero por el Teorema 1.4.8(2) significa también que  $\sigma^*$  es crítico. ■

**Teorema 1.4.10.** Para  $N$  suficiente grande  $\phi^N = \phi^{N+1} = \dots = \phi^\infty$ .

**Demostración.** Sea  $\sigma \in K$ , demostraremos que  $\phi^N(\sigma) = \phi^{N+1}(\sigma) = \dots = \phi^\infty(\sigma)$ . Hagamos inducción sobre  $r = \#\{\tilde{\sigma} \in K | f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)\}$ :

Para  $r = 0$ . Sea  $\sigma_i := \sigma$  tenemos que  $\phi(\sigma_i) = \sum_{\sigma_j \in K} a_{ij} \sigma_j$  y por Teorema 1.4.8(3)  $a_{ij} = 0$  para todo  $j \neq i$ , por tanto  $\phi(\sigma) = \sigma$  ó  $\phi(\sigma) = 0$ , en cualquier caso  $\phi(\sigma) = \phi^\infty(\sigma)$ .

Para  $r > 0$ , veamos dos casos, con la siguiente hipótesis de inducción: Supongamos que para cualquier  $\sigma$  tal que  $\#\{\tilde{\sigma} \in K | f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)\} \leq r - 1$  existe  $N_\sigma$  tal que  $\phi^N(\sigma) = \phi^{N+1}(\sigma) = \dots = \phi^\infty(\sigma)$ . Sea  $\sigma$  tal que  $\#\{\tilde{\sigma} \in K | f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)\} \leq r$ .

- Supongamos que  $\sigma$  no es crítico: por Teorema 1.4.8(2) y (3)  $\phi(\sigma) = \sum_{f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)} a_{\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}$ .

Veamos que podemos aplicar la hipótesis de inducción a los elementos de  $\{\tilde{\sigma} \in K | f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)\}$ , sea  $\tilde{\sigma}_0 \in \{\tilde{\sigma} \in K | f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)\}$ , tenemos que  $\{\tilde{\sigma} \in K | f(\tilde{\sigma}) < f(\tilde{\sigma}_0)\} \not\subseteq \{\tilde{\sigma} \in K | f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)\}$  pues en particular  $\tilde{\sigma}_0 \notin \{\tilde{\sigma} \in K | f(\tilde{\sigma}) < f(\tilde{\sigma}_0)\}$ , por tanto  $\#\{\tilde{\sigma} \in K | f(\tilde{\sigma}) < f(\tilde{\sigma}_0)\} \leq r - 1$  para cada  $\tilde{\sigma}_0$  en la sumatoria.

Entonces, por hipótesis de inducción para cada  $\tilde{\sigma}$  en la sumatoria existe  $\tilde{N}_{\tilde{\sigma}}$  tal que  $\phi^{\tilde{N}_{\tilde{\sigma}}}(\tilde{\sigma})$  es  $\phi$ -invariante siempre que  $f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)$ .

Sea  $\tilde{N} = \max \tilde{N}_{\tilde{\sigma}}$ . Tenemos que,

$$\phi^{\tilde{N}+1}(\sigma) = \phi^{\tilde{N}}(\phi(\sigma)) = \sum_{f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)} a_{\tilde{\sigma}} \phi^{\tilde{N}}(\tilde{\sigma}) \quad (*)$$

esto implica que  $\phi^{\tilde{N}+1}(\sigma)$  es  $\phi$ -invariante, pues: por (\*),

$$\begin{aligned} \phi(\phi^{\tilde{N}+1}(\sigma)) &= \phi\left(\sum_{f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)} a_{\tilde{\sigma}} \phi^{\tilde{N}}(\tilde{\sigma})\right) \\ &= \sum_{f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)} a_{\tilde{\sigma}} \phi(\phi^{\tilde{N}}(\tilde{\sigma})) \\ &= \sum_{f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)} a_{\tilde{\sigma}} \phi^{\tilde{N}}(\tilde{\sigma}) \text{ pues } \phi^{\tilde{N}}(\tilde{\sigma}) \text{ es } \phi\text{-invariante} \\ &= \phi^{\tilde{N}}\left(\sum_{f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)} a_{\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}\right) \\ &= \phi^{\tilde{N}}(\phi(\sigma)) \\ &= \phi^{\tilde{N}+1}(\sigma). \end{aligned}$$

- Supongamos que  $\sigma$  es crítico por el Teorema 1.4.6 tenemos que  $V(\sigma) = 0$ , sea  $c = V(\partial\sigma)$ , esto implica que,

$$\begin{aligned} \phi(\sigma) &= \sigma + \partial V \sigma + c = \sigma + c \\ \phi^2(\sigma) &= \phi(\sigma) + \phi(c) = \sigma + c + \phi(c) \\ &\vdots \\ \phi^m(\sigma) &= \sigma + c + \phi(c) + \dots + \phi^{m-1}(c) \end{aligned}$$

Se sigue que  $\phi^N(\sigma)$  es invariante si y sólo si  $\phi^N(c) = 0$  para algún  $N$ .

Dado que  $\sigma$  es crítico tenemos por definición que

$$\phi(\sigma) = \sigma + V(\partial\sigma).$$

Por tanto, por prueba del Teorema 1.4.8

$$c = V(\partial\sigma) = \phi(\sigma) - \sigma = \left( \sigma + \sum_{\substack{\sigma \neq \tilde{\sigma} \\ f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)}} a_{\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma} \right) - \sigma = \sum_{\substack{\sigma \neq \tilde{\sigma} \\ f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)}} a_{\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma},$$

Pero por el mismo argumento de arriba y por hipótesis de inducción existe  $\tilde{N}$  tal que  $\phi^{\tilde{N}}(c)$  es  $\phi$ -invariante. Observemos que  $c \in \text{Im } V$  y  $\text{Im } V$  es  $\phi$ -invariante (como conjunto), es decir  $\phi(\text{Im } V) \subseteq \text{Im } V$  pues:

$$\phi V = (\text{Id} + \partial V + V \partial) V = V + \partial V^2 + V \partial V = V + V \partial V = V(\text{Id} + \partial V),$$

lo que implica que  $\phi^{\tilde{N}}(c) \in \text{Im } V$ .

Notemos que  $\text{Im } V$  es ortogonal a las caras críticas pues recordemos por Teorema 1.4.6, que  $\sigma$  es crítico si y sólo si  $V(\sigma) = 0$  y  $\sigma \notin \text{Im } V$ . Así para cualquier  $\tau \in \text{Im } V$ , dado que  $\sigma$  es crítico tenemos que  $\tau \neq \sigma$  lo cual implica que  $\langle \tau, \sigma \rangle = 0$  para todo  $\tau \in \text{Im } V$ , más explícitamente,

$$\langle \tau, \sigma \rangle = \left\langle \sum_{\alpha \in K_p} a_{\alpha} V(\alpha), \sigma \right\rangle = \sum a_{\alpha} \langle V(\alpha), \sigma \rangle = 0.$$

Supongamos que  $\phi^{\tilde{N}}(c) \neq 0$ , entonces podemos escribir  $\phi^{\tilde{N}}(c) = \sum b_{\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}$  con  $b_{\tilde{\sigma}} \neq 0$  para todo  $\tilde{\sigma}$  en la sumatoria. Sea  $\sigma^*$  el elemento que maximiza el conjunto  $\{f(\tilde{\sigma}) | b_{\tilde{\sigma}} \neq 0\}$ . Por el Lema 1.4.9  $\sigma^*$  es crítico, por tanto  $\langle \phi^{\tilde{N}}(c), \sigma^* \rangle = 0$ , pero por otra parte  $\langle \phi^{\tilde{N}}(c), \sigma^* \rangle = b_{\sigma^*}$ , es decir  $b_{\sigma^*} = 0$ , lo cual es una contradicción y por tanto  $\phi^{\tilde{N}}(c) = 0$  y así  $\phi^{\tilde{N}}(\sigma)$  es  $\phi$ -invariante.

■

En el Teorema 1.4.10 probamos que para cada cadena  $C$  existe un  $N$  suficientemente grande tal que  $\phi^N(C) = \phi^{N+1}(C) = \phi^{N+2}(C) = \dots$ . Denotamos por  $\phi^{\infty}(C)$  a esta cadena  $\phi$ -invariante. Entonces para cada  $p$  tenemos los siguientes homomorfismos:

$$\phi^{\infty} : C_p(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_p^{\phi}(K, \mathbb{Z})$$

$$i : C_p^{\phi}(K, \mathbb{Z}) \hookrightarrow C_p(K, \mathbb{Z})$$

Nótese que  $\phi^{\infty} \circ i$  es la identidad en  $C_p^{\phi}(K, \mathbb{Z})$ .

**Teorema 1.4.11.** Sea  $C_{\star}^{\phi}$  el complejo de Morse-Forman de  $K$ . Entonces para cada  $p$ ,

$$H_p(C_{\star}^{\phi}) \cong H_p(K, \mathbb{Z}).$$

**Demostración.** Por 1.4.8 y 1.4.10 tenemos que existe que  $N$  tal que  $\phi^\infty \partial = \phi^N \partial = \partial \phi^N = \partial \phi^\infty$ , además siempre se cumple que  $i\partial = \partial i$ . Entonces podremos considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} C_* : 0 & \longrightarrow & C_d & \xrightarrow{\partial} & C_{d-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \xrightarrow{\partial} C_0 \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow i \downarrow \phi^\infty & & \uparrow i \downarrow \phi^\infty & & \uparrow i \downarrow \phi^\infty \\ C_*^\phi : 0 & \longrightarrow & C_d^\phi & \xrightarrow{\partial} & C_{d-1}^\phi & \xrightarrow{\partial} & \cdots \xrightarrow{\partial} C_0^\phi \longrightarrow 0 \end{array}$$

Sean

$$\phi_*^\infty : H_*(K, \mathbb{Z}) \rightarrow H(C_p^\phi)$$

$$i_* : H(C_p^\phi) \rightarrow H_*(K, \mathbb{Z}),$$

los morfismos inducidos en homología. Demostraremos que  $\phi_*^\infty$  y  $i_*$  son isomorfismos. Basta probar que son inversos uno del otro.

Como  $\phi^\infty \circ i = \text{Id}_{C_p^\phi}$  tenemos que:

$$\text{Id}_{H(C_p^\phi)} = (\text{Id}_{C_p^\phi})_* = (\phi^\infty \circ i)_* = \phi_*^\infty \circ i_*.$$

Para ver que  $i_* \circ \phi_*^\infty = \text{Id}_{H_p(K, \mathbb{Z})}$  es suficiente encontrar un operador

$$L = \{L_n : C_n^\phi(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{n+1}(K, \mathbb{Z})\}$$

tal que  $\text{Id} - i \circ \phi^\infty = \partial L + L \partial$ , pues esto implicaría que  $\text{Id} \simeq i \circ \phi^\infty$  y por tanto,  $\text{Id}_* = (i \circ \phi^\infty)_*$  o lo que es lo mismo:

$$\text{Id}_{H_p(K, \mathbb{Z})} = i_* \circ \phi_*^\infty.$$

Como  $i$  es la identidad en cadenas y  $\phi^\infty = \phi^N$  para algún  $N$  suficientemente grande:

$$\begin{aligned} \text{Id} - i \circ \phi^\infty &= \text{Id} - \phi^N = (\text{Id} - \phi)(\text{Id} + \phi + \cdots + \phi^{N-1}) \\ &= (\text{Id} - [\text{Id} + \partial V + V \partial])(\text{Id} + \phi + \cdots + \phi^{N-1}) \\ &= (-\partial V - V \partial)(\text{Id} + \phi + \cdots + \phi^{N-1}) \\ &= -\partial V(\text{Id} + \phi + \cdots + \phi^{N-1}) - V \partial(\text{Id} + \phi + \cdots + \phi^{N-1}) \\ &= \partial(-V(\text{Id} + \phi + \cdots + \phi^{N-1})) + (-V(\partial + \partial \phi + \cdots + \partial \phi^{N-1})) \\ &= \partial[-V(\text{Id} + \phi + \cdots + \phi^{N-1})] + [-V(\text{Id} + \phi + \cdots + \phi^{N-1})]\partial. \end{aligned}$$

Por tanto, sea  $L = -V(\text{Id} + \phi + \cdots + \phi^{N-1})$ . ■

**Corolario 1.4.12.**  $H_n(C_n^\phi)$  no depende de la FMD  $f$  dada para  $K$ . ■

Por último veamos que el complejo de cadenas de Morse es isomorfo al complejo generado por los elementos críticos de  $f$  en  $K$ .

Para cada  $p$  definamos:

$$\mathcal{M}_p := \left\{ \sum_{\sigma \in K_p} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in \mathbb{Z} \text{ y } a_\sigma \neq 0 \text{ implica que } \sigma \text{ es crítico.} \right\}$$



Consideremos  $\phi^\infty : \mathcal{M}_p \rightarrow C_p^\phi(K, \mathbb{Z})$  como la restricción de  $\phi^\infty : C_p^\phi(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_p^\phi(K, \mathbb{Z})$ , veremos que éste nos funciona como isomorfismo. Pero primero necesitamos el siguiente resultado.

**Lema 1.4.13.** Sea  $\sigma$  un  $p$ -simplejo crítico. Si  $\tilde{\sigma} \neq \sigma$  es crítico, entonces  $\langle \phi^\infty(\sigma), \tilde{\sigma} \rangle = 0$ .

**Demostración.** Por Teorema 1.4.10  $\phi^\infty(\sigma) = \phi^N(\sigma)$  para algún  $N$  suficientemente grande, además en la prueba de este Teorema se vió que si  $\sigma$  es crítico entonces  $\phi^N(\sigma) = \sigma + V\partial(\sigma) + \phi(V\partial(\sigma)) + \dots + \phi^{N-1}(V\partial(\sigma))$ , donde  $V\partial\sigma \in \text{Im } V$  y  $\text{Im } V$  es  $\phi$ -invariante, lo que implica que  $\phi^N(\sigma) = \sigma + a$ , donde  $a \in \text{Im } V \subseteq \mathcal{M}$ . Lo que implica que

$$\langle \phi^\infty(\sigma), \tilde{\sigma} \rangle = \langle \phi^N(\sigma), \tilde{\sigma} \rangle = \langle \sigma + a, \tilde{\sigma} \rangle = \langle \sigma, \tilde{\sigma} \rangle + \langle a, \tilde{\sigma} \rangle = 0,$$

donde la última igualdad se da pues  $a \in \text{Im } V$  y  $\tilde{\sigma}$  es crítico y recordemos que  $\text{Im } V$  es ortogonal al conjunto de simplejos críticos, además que  $\langle \sigma, \tilde{\sigma} \rangle = \langle \sigma + 0 \cdot \tilde{\sigma}, 0 \cdot \sigma + \tilde{\sigma} \rangle = 0$  por la definición de este producto interno. ■

**Teorema 1.4.14.** La función  $\phi^\infty : \mathcal{M}_p \rightarrow C_p^\phi(K, \mathbb{Z})$  es un isomorfismo.

**Demostración.** Veamos que  $\phi^\infty$  es sobreyectiva: sea  $c \in C_p^\phi(K, \mathbb{Z})$  y definamos

$$\tilde{c} := \sum_{\gamma \text{ crítico}} \langle c, \gamma \rangle \gamma \in \mathcal{M}_p.$$

Demostraremos que  $\phi^\infty(\tilde{c}) = c$ . Tenemos que para cualquier crítico  $\sigma$ ,

$$\begin{aligned} \langle \phi^\infty(\tilde{c}), \sigma \rangle &= \langle \phi^\infty(\sum_{\gamma} \langle c, \gamma \rangle \gamma), \sigma \rangle \\ &= \sum_{\gamma} \langle c, \gamma \rangle \langle \phi^\infty(\gamma), \sigma \rangle \\ &= \langle c, \sigma \rangle \langle \phi^\infty(\sigma), \sigma \rangle \\ &= \langle c, \sigma \rangle \langle \sigma + a, \sigma \rangle \text{ con } a \in \text{Im } V \\ &= \langle c, \sigma \rangle \langle \sigma, \sigma \rangle + \langle c, \sigma \rangle \langle a, \sigma \rangle \\ &= \langle c, \sigma \rangle, \text{ pues } \langle a, \sigma \rangle = 0. \end{aligned}$$

donde la tercer igualdad se obtiene del Lema 1.4.13. Por otra parte, dado que  $\phi^\infty(\tilde{c}) - c$  es  $\phi$ -invariante, entonces para cada  $\sigma$  crítico, por la igualdad anterior,

$$\langle \phi^\infty(\tilde{c}) - c, \sigma \rangle = \langle \phi^\infty(\tilde{c}), \sigma \rangle - \langle c, \sigma \rangle = \langle c, \sigma \rangle - \langle c, \sigma \rangle = 0.$$

Si tuvieramos que  $\phi^\infty(\tilde{c}) - c \neq 0$ , entonces tomando  $\sigma^*$  el simplejo que maximiza  $f$  (que aparece en  $\phi^\infty(\tilde{c}) - c$ ) obtenemos una contradicción pues por el Corolario 1.4.9 tenemos  $\langle \phi^\infty(\tilde{c}) - c, \sigma^* \rangle = b_{\sigma^*} \neq 0$  y por la igualdad anterior. Por tanto  $\phi^\infty(\tilde{c}) = c$ .

Ahora veamos que  $\phi^\infty$  es inyectiva: Supongamos que  $c \in \mathcal{M}_p$  satisface  $\phi^\infty(c) = 0$ , tenemos que para cada  $\sigma$  crítico,  $\langle \phi^\infty(c), \sigma \rangle = \langle 0, \sigma \rangle = 0$ . Recordemos que

$$\phi^\infty(c) = c + V\partial(c) + \phi(V\partial(c)) + \dots + \phi^{N-1}(V\partial(c)).$$

Por tanto

$$0 = \langle \phi^\infty(c), \sigma \rangle = \langle c + V\partial(c) + \phi(V\partial(c)) + \dots + \phi^{N-1}(V\partial(c)), \sigma \rangle = \langle c, \sigma \rangle.$$

Por tanto  $\langle c, \sigma \rangle = 0$  para cada crítico en  $\mathcal{M}_p$ , lo cual implica que  $c = 0$  es decir,  $\text{Ker } \phi^\infty = \{0\}$ . ■

El resultado anterior nos permite definir un operador frontera, y así obtener el complejo de cadenas generado por los elementos críticos de  $f$  en  $K$  el cual resulta isomorfo por construcción al complejo de cadenas de Morse-Forman, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} C_*^\phi : & 0 & \longrightarrow & C_n^\phi & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}^\phi & \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0^\phi \longrightarrow 0 \\ & & & \uparrow \phi^\infty \cong & & \uparrow \phi^\infty \cong & & \uparrow \phi^\infty \cong \\ \mathcal{M} : & 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n & \xrightarrow{\tilde{\partial}} & \mathcal{M}_{n-1} & \xrightarrow{\tilde{\partial}} \cdots \xrightarrow{\partial} \mathcal{M}_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Donde definimos  $\tilde{\partial}_n = (\phi_{n-1}^\infty)^{-1} \circ \partial_n \circ \phi_n^\infty$ . Además podemos ver que

$$\tilde{\partial}_n \circ \tilde{\partial}_{n+1} = (\phi_{n-1}^\infty)^{-1} \circ \partial_n \circ \phi_n^\infty \circ (\phi_n^\infty)^{-1} \circ \partial_{n+1} \circ \phi_{n+1}^\infty = 0.$$

Por tanto  $\mathcal{M}$  es un complejo simplicial y como es isomorfo a  $C_*^\phi$  también lo llamaremos **complejo de Morse**.

De esta manera obtenemos el siguiente resultado

**Corolario 1.4.15.**  $H_d(K, \mathbb{Z}) \cong H_d(\mathcal{M})$  para toda  $d$ .

**Demostración.** Como  $\mathcal{M} \cong C_*^\phi$ , por el Corolario 1.2.8 se sigue que  $H_d(\mathcal{M}) \cong H_d(C_*^\phi)$  y por el Teorema 1.4.11 tenemos que  $H_d(\mathcal{M}) \cong H_d(C_*^\phi) \cong H_d(K, \mathbb{Z})$ . ■

Por tanto podemos calcular la homología de  $K$  utilizando sólo sus simplejos críticos.

Por último calculemos el complejo de Morse-Forman de un complejo simplicial para ilustrar las ventajas de la teoría de Forman, para ello usaremos un método combinatorio presentado en [9, Sección 2.5] y en [6, Sección 8].

Para un complejo simplicial  $K$  escojamos una orientación sobre sus simplejos. Si  $\tau^d$  es un simplejo crítico de una función de Morse  $f$ , entonces podemos calcular el operador frontera del complejo de Morse-Forman asociado a  $f$  de la siguiente manera:

$$\tilde{\partial}(\tau^d) := \sum_{\sigma^{d-1} \text{ críticos}} c_{\sigma, \tau} \sigma^{d-1},$$

donde  $c_{\sigma, \tau} = \sum_{\eta \in \Gamma(\tau, \sigma)} m(\eta)$ .  $\Gamma(\tau, \sigma)$  denota el conjunto de los caminos gradiente que van de las  $(d-1)$ -caras de  $\tau$  al  $(d-1)$ -simplejo crítico  $\sigma$  y  $m(\eta) = \pm 1$ , dependiendo si la orientación deslizada en  $\sigma$  es la orientación escogida o la contraria.

**Ejemplo 1.4.16.** Sea  $K$  el complejo simplicial definido en el Ejemplo 1.2.10 y tomemos la estructura simplicial, así como el campo vectorial gradiente definidos en el Ejemplo 1.4.2, consideraremos la orientación dada por los subíndices de los vértices.

Tenemos los críticos  $\{v_2, v_3\}$  y  $v_1$ , por tanto el complejo de cadenas Morse-Forman queda generado como sigue:

$$\mathcal{M} : \dots \xrightarrow{\tilde{\partial}_2} \langle \{v_2, v_3\} \rangle \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} \langle v_1 \rangle \xrightarrow{\tilde{\partial}_0} 0.$$

Podemos ver que  $H_n(K, \mathbb{Z}) \cong 0$  para  $n > 2$ . Calculemos los operadores frontera  $\tilde{\partial}_n$  para  $n = 0, 1, 2$ .  $\tilde{\partial}_2 = 0$  pues su dominio es 0, y  $\tilde{\partial}_0 = 0$  pues su contradominio es 0. Para calcular  $\tilde{\partial}_1$  veamos los caminos que van de  $\{v_2, v_3\}$  a  $v_1$ :

$$\eta_1 : (v_2, \{v_1, v_2\}), (v_1).$$

$$\eta_2 : (v_3, \{v_3, v_4\}), (v_4, \{v_2, v_4\}), (v_2, \{v_1, v_2\}), (v_1).$$

Arrastrando la orientación tenemos que  $m(\eta_1) = 1, m(\eta_2) = -1$ , por tanto  $c_{v_1, \{v_2, v_3\}} = 1 - 1 = 0$ , de manera que  $\tilde{\partial}_1(\{v_2, v_3\}) = 0 \cdot v_1$ , es decir  $\tilde{\partial}_1 = 0$ .

Así,

$$H_0(K, \mathbb{Z}) \cong H_0(\mathcal{M}) = \text{Ker } \tilde{\partial}_0 / \text{Im } \tilde{\partial}_1 = \mathbb{Z} / 0 \cong \mathbb{Z},$$

$$H_1(K, \mathbb{Z}) \cong H_1(\mathcal{M}) = \text{Ker } \tilde{\partial}_1 / \text{Im } \tilde{\partial}_2 = \mathbb{Z} / 0 \cong \mathbb{Z},$$

$$H_2(K, \mathbb{Z}) \cong H_2(\mathcal{M}) = \text{Ker } \tilde{\partial}_2 / \text{Im } \tilde{\partial}_3 = 0 / 0 \cong 0.$$



## Capítulo 2

# Emparejamientos generalizados

En esencia las funciones de Morse nos permiten definir una partición (llamada emparejamiento) en un complejo simplicial  $K$ , donde cada elemento en  $K/\sim$  (donde  $\sim$  denota el emparejamiento) contiene a lo más dos simplejos de  $K$ , de tal modo que los simplejos que quedan aislados en la partición determinan la homología de  $K$ .

En este capítulo generalizamos el concepto de emparejamiento permitiendo particiones de  $K$  donde cada elemento de la partición (que llamaremos intervalo) puede contener más de dos simplejos. Dicha generalización proporciona más flexibilidad permitiéndonos elegir particiones más económica computacionalmente reduciendo el número de “parejas”. Además si involucramos una acción de un grupo  $G$  en  $K$  veremos que usar emparejameintos generalizados nos proporciona el margen de maniobra para elegir particiones que preserven las simetrías de  $K$  y demostramos que se puede construir un complejo simplicial  $K'$  con los elementos aislados de la partición tal que  $K'$  es  $G$ -homotópico al complejo original  $K$ . Para lograr este objetivo es necesario generalizar algunos conceptos vistos en el capítulo anterior.

### 2.1. Campo vectorial gradiente algebraico

Como vimos en la teoría de Morse discreta, el concepto fundamental es el de emparejamiento que es obtenido a través del campo vectorial gradiente, para crear una variante de esto daremos una definición más general del campo gradiente.

**Definición 2.1.1.** Sea  $C : \cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \rightarrow \cdots$  un complejo de cadenas. Sea  $V : C_* \rightarrow C_{*+1}$  una aplicación tal que:

1.  $V : C_k \rightarrow C_{k+1}$  es un homomorfismo para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,
2.  $V^2 = 0$ ,
3. Para cada  $a \in C$  existe algún  $n \in \mathbb{N}$  con

$$V(\text{Id} - \partial V)^n(a) = 0.$$

La primera  $n$  para la que se cumpla 3. es llamada el **grado de  $V$ -nilpotencia** de  $a$ . Decimos que  $V$  es un **campo vectorial gradiente algebraico**.

No es difícil ver que el campo vectorial gradiente asociado a una FMD (véase en 1.4.1), cumple la definición anterior.

Ahora para ver las propiedades que cumple el campo vectorial gradiente algebraico, definimos el siguiente operador auxiliar

$$\begin{aligned} W : C_* &\rightarrow C_{*+1} \\ a &\mapsto \sum_{k \geq 0} V(\text{Id} - \partial V)^k(a) \end{aligned}$$

Ahora, como  $V^2 = 0$ , tenemos que  $(\text{Id} - \partial V)V = V - \partial V^2 = V$ , por tanto  $(\text{Id} - \partial V)^n V = V$  para toda  $n$ , entonces  $W^2 = 0$ .

Podemos ver también que

$$\begin{aligned} W\partial V(a) &= \sum_{k \geq 0} V(\text{Id} - \partial V)^k \partial V(a) \\ &= \sum_{k \geq 0} V(\text{Id} - \partial V)^k (\text{Id} - \text{Id} + \partial V)(a) \\ &= \sum_{k \geq 0} V(\text{Id} - \partial V)^k (\text{Id} - (\text{Id} - \partial V))(a) \\ &= V \left[ \sum_{k \geq 0} (\text{Id} - \partial V)^k(a) - \sum_{k \geq 0} (\text{Id} - \partial V)^{k+1}(a) \right] \\ &= V(\text{Id} - \partial V)^0(a) \\ &= V(a) \end{aligned}$$

En la antepenúltima igualdad se cancelan los términos al desarrollar la sumatoria pues tenemos una suma telescópica. Entonces,

$$W\partial W = W\partial \sum_{k \geq 0} V(\text{Id} - \partial V)^k = \sum_{k \geq 0} W\partial V(\text{Id} - \partial V)^k = \sum_{k \geq 0} V(\text{Id} - \partial V)^k = W$$

**Definición 2.1.2.** Sea  $V$  un c.v.g.a. definamos  $\phi : C_* \rightarrow C_*$  como:

$$\phi(a) = a - (\partial W(a) + W\partial(a)),$$

donde  $W(a) = \sum_{k \geq 0} V(\text{Id} - \partial V)^k(a)$  para  $a \in C$ .

**Nota 2.1.3.** Denotamos a propósito a este morfismo como el morfismo que da el flujo gradiente pues será su análogo en este nuevo contexto.

$\phi$  es la versión algebraica de lo que Forman llama  $\phi^\infty$ . Este morfismo nos será de utilidad para demostrar uno de los resultados importantes que tenemos en la teoría de Morse, pero antes unas propiedades que cumple  $\phi$ .

**Proposición 2.1.4.** El morfismo  $\phi$  cumple las siguientes propiedades:

- $\phi$  es un morfismo de cadena,
- $\phi \simeq \text{Id}$ ,
- $\phi$  es una proyección, es decir  $\phi^2 = \phi$ .

**Demostración.**

$$\partial\phi = \partial - \partial^2 W - \partial W \partial = \partial - \partial W \partial - W \partial^2 = (\text{Id} - \partial W - W \partial) \partial = \phi \partial,$$

por tanto  $\phi$  es un morfismo de cadena.

De la definición de  $\phi$ ,  $\text{Id} - \phi = W \partial + \partial W$ , así  $W$  define una homotopía entre  $\text{Id}$  y  $\phi$ .

Por último,

$$\begin{aligned} \phi^2 &= (\text{Id} - (\partial W + W \partial))^2 \\ &= \text{Id}^2 - 2(\partial W + W \partial) + (\partial W + W \partial)^2 \\ &= \text{Id} - 2\partial W - 2W \partial + \partial(W \partial W) + \partial W W \partial + W \partial \partial W + (W \partial W) \partial \\ &= \text{Id} - 2\partial W - 2W \partial + \partial W + W \partial \\ &= \text{Id} - \partial W - W \partial \text{ por observaciones anteriores acerca de } W \\ &= \phi \end{aligned}$$

■

**Lema 2.1.5.** El morfismo  $\phi : C \rightarrow \phi(C)$  induce un isomorfismo en homología.

**Demostración.** Como  $\phi \simeq \text{Id}$ , tenemos que  $\phi_* = \text{Id}_*$ . ■

### 2.1.1. Simplejos críticos

Como sabemos los simplejos críticos asociados a una FMD nos dan información topológica, en este nuevo contexto no será la excepción.

**Definición 2.1.6.** Sea  $V$  un c.v.g.a. fijo. Para cada  $p$ , sea

$$\mathcal{M}_p = \text{Ker} V_p / \text{Im} V_{p-1}$$

De nuevo, podemos observar que si  $V$  es el campo gradiente asociado a una FMD, pudimos haber definido los simplejos críticos utilizando la definición 2.1.6, pues de un resultado anterior (en el contexto de Forman) tenemos que  $\sigma$  es crítico si y sólo si  $V(\sigma) = 0$  y  $\sigma \notin \text{Im} V$  esto es equivalente a que  $\sigma \in \text{Ker} V$  y  $\sigma \notin \text{Im} V$  (ver Teorema 1.4.6). Así,  $\sigma$  es crítico si y sólo si  $0 \neq \sigma \in \text{Ker} V / \text{Im} V$ . Por tanto es natural querer demostrar que el complejo generado por los críticos en este nuevo contexto tiene la misma homología que el complejo original.

**Teorema 2.1.7.**  $\phi|_{\text{Ker} V} : \text{Ker} V \rightarrow \phi(C)$  puede ser descompuesto como

$$\begin{aligned} \text{Ker} V &\rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\phi'} \phi(C) \\ [a] &\mapsto \phi(a), \end{aligned}$$

donde el primer morfismo es un morfismo cociente, y el segundo es un isomorfismo.

**Demostración.** Consideremos la composición  $\phi \circ V$ . Podemos ver que

$$\phi \circ V(a) = V(a) - \partial W V(a) - W \partial V(a),$$

pero  $W \partial V = V$  y  $W V(a) = \sum_{k \geq 0} V(\text{Id} - \partial V)^k V(a) = 0$  (cada término tiene el factor  $V^2$ ). Así que  $\text{Im } V \subseteq \text{Ker } \phi$ , por tanto  $\phi$  induce un homomorfismo bien definido,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \text{Ker } V / \text{Im } V &\xrightarrow{\phi'} \phi(C) \\ [b] &\mapsto \phi(b). \end{aligned}$$

Basta probar que el homomorfismo  $\phi' : \mathcal{M} \rightarrow \phi(C)$  definido por  $\phi' \bar{b} = \phi b$  (donde  $\bar{b}$  es la clase en  $\text{Ker } V / \text{Im } V$  con representante  $b$ ) es biyectivo, y entonces un isomorfismo.

- Veamos que  $\phi'$  es inyectivo. Sea  $b \in \text{Ker } V$  tal que  $\phi b = 0$  (es decir  $\bar{b} \in \text{Ker } \phi'$ ). Ahora, dado que  $Vb = 0$  implica que  $Wb = 0$ ,

$$0 = \phi b = b - \partial W b - W \partial b = b - W \partial b,$$

entonces  $b = W \partial b \in \text{Im } W \subseteq \text{Im } V$  por definición de  $W$ , por tanto  $\bar{b} = 0$ , es decir,  $\text{Ker } \phi' = 0$  y así  $\phi'$  es inyectivo.

- Veamos que  $\phi'$  es sobreyectivo. Demostraremos que para cualquier  $a \in C_p$  existe  $b \in \mathcal{M}_p$  tal que  $\phi' b = \phi a$ . De existir dicha  $b$  es representada por algún elemento  $c \in \text{Ker}(V_p)$  tal que  $\phi a = \phi c$ .

Probaremos que tal  $c$  existe por inducción sobre  $n$  el grado de  $V$ -nilpotencia de  $a$ .

Si  $n = 0$  tenemos que  $Va = 0$  entonces  $a \in \text{Ker } V_p$  y escogemos  $c = a$ .

La hipótesis de inducción es: Supongamos que para cada  $a$  con  $V(\text{Id} - \partial V)^n a = 0$  para todo  $n' \leq n - 1$  existe  $c \in \text{Ker } V_p$  tal que  $\phi(a) = \phi(c)$ .

Sea  $a$  tal que  $V(\text{Id} - \partial V)^n(a) = 0$ , observemos que

$$\begin{aligned} \phi(\text{Id} - \partial V) &= \phi - (\partial V - \partial W \partial V - W \partial^2 V) \\ &= \phi - (\partial V - \partial W \partial V) \\ &= \phi - (\partial V - \partial V) \\ &= \phi, \end{aligned}$$

entonces  $\phi a = \phi(\text{Id} - \partial V)a$ , y como  $(\text{Id} - \partial V)a$  tiene menor grado de  $V$ -nilpotencia que  $a$ , entonces por hipótesis de inducción tenemos que existe  $c \in \text{Ker } V$  tal que  $\phi(c) = \phi((\text{Id} - \partial V)a) = \phi(a)$ .

■

**Corolario 2.1.8.** Existe un operador  $\tilde{\partial}$  tal que el complejo  $\mathcal{M} : \dots \mathcal{M}_n \xrightarrow{\tilde{\partial}} \mathcal{M}_{n-1} \rightarrow \dots$  tiene la misma homología que  $C : \dots C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \rightarrow \dots$ .

**Demostración.** Por Lema 2.1.5 los complejos de cadenas  $(C, \partial)$  y  $(\phi(C), \partial)$  tienen homología isomorfa. Por Teorema 2.1.7  $\mathcal{M}_p$  y  $\phi(C_p)$  son isomorfos, y sus grupos de homología también lo son, con  $\tilde{\partial} = \phi'^{-1} \circ \partial \circ \phi'$  donde  $\phi'$  es como en la prueba del Teorema 2.1.7. ■

**Observación. 2.1.9.** Si  $a \in \text{Ker } V$  entonces  $\tilde{\partial}(\bar{a}) = (\text{Id} - \partial V)^n \partial a$  donde  $n$  es (al menos) el grado de nilpotencia de  $\partial a$ .

De esta manera concluimos que el campo vectorial algebraico generaliza al campo vectorial definido en el capítulo anterior, por tanto podremos hablar indistintivamente de ellos.

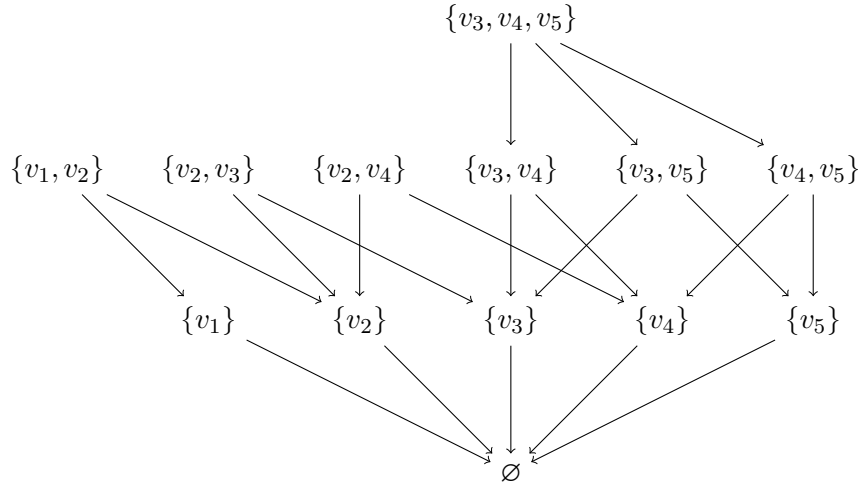


## 2.2. Emparejamientos generalizados de Morse

En esta sección extraeremos la propiedad de emparejar de las funciones de Morse (o de los campos vectoriales gradientes algebraicos), para después dar una definición más apropiada a nuestros fines.

Dado un complejo  $K$ , consideremos  $P(K)$  (el conjunto parcialmente ordenado de simplejos en  $K$  ordenados por la inclusión), podemos ver esto como un grafo dirigido, donde las flechas indican la siguiente relación: Decimos que  $\tau$  cubre a  $\sigma$  si  $\sigma < \tau$  y no existe elemento  $\rho$  con  $\sigma < \rho < \tau$ . Note que esto equivale a decir que  $\sigma$  es una cara inmediata de  $\tau$ . Pondremos una flecha de  $\tau$  a  $\sigma$ .

**Ejemplo 2.2.1.** Consideremos  $K$  como en el Ejemplo 1.2.10. Podemos ilustrar  $P(K)$  utilizando el diagrama de Hasse.



**Definición 2.2.2.** Un **emparejamiento**  $M$  en  $P(K)$  es una partición en  $P(K)$  que consta de a lo más dos elementos por clase y en cada clase  $(\sigma^p, \tau^{p+1})$ , se cumple que  $\sigma^p < \tau^{p+1}$ .

Ahora, una FMD (o un campo vectorial gradiente algebraico) inducen un emparejamiento en  $P(K)$ , que llamaremos **emparejamiento de Morse**.

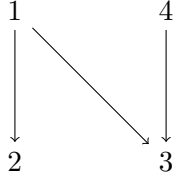
Recíprocamente, de tal emparejamiento, podemos recuperar el campo vectorial gradiente algebraico definiendo en sus componentes no-cero  $V(\sigma) = \tau$  cuando hay un emparejamiento de  $\sigma$  a  $\tau$ .

Es natural preguntarse, si dado un emparejamiento en  $P(K)$ , si existe un emparejamiento de Morse (y por tanto produce un complejo de Morse). Para contestar esta pregunta necesitamos la siguiente definición.

**Definición 2.2.3.** Dada una gráfica dirigida  $G = (V, A)$  y una relación de equivalencia  $\sim$  en sus vértices, construimos la gráfica  $G/\sim$  como sigue:

- El conjunto de vértices de  $G/\sim$  es  $V/\sim$ .
- Existe una arista de  $v_1$  a  $v_2$  si existen  $w_1, w_2 \in V$  con  $w_i \in v_i$  y una arista  $(w_1, w_2) \in A$ .

**Ejemplo 2.2.4.** Consideremos la gráfica  $G$  con vértices  $\{1, 2, 3, 4\}$ , con aristas  $\{(1, 2), (1, 3), (3, 4)\}$ :



y  $\sim$  dada por las relaciones  $1 \sim 2$  y  $3 \sim 4$ . Por tanto  $V/\sim = \{\bar{1}, \bar{3}\}$ ,  $A/\sim = \{(\bar{1}, \bar{3})\}$  entonces la gráfica  $G/\sim$  tiene la forma:



**Nota 2.2.5.** De ahora en adelante, omitiremos las flechas que denotan la relación de “cubrir”, y utilizar las flechas para denotar los emparejamientos que veremos más adelante. La idea es no confundir al lector con la cantidad de líneas. Las líneas que van de  $\sigma$  a  $\tau$  indicaran que  $\sigma$  es emparejado con  $\tau$ .

**Teorema 2.2.6.** Un emparejamiento  $M$  en  $P(K)$  es un emparejamiento de Morse si y sólo si  $P(K)/M$  no tiene caminos dirigidos cerrados.

**Demostración.** Supongamos que existe un camino cerrado  $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \dots \rightarrow w_n \rightarrow w_1$  en  $P(K)/M$  (Véase en [6, p.130]). Cada flecha en  $P(K)$  va de un  $(p+1)$ -simplejo en un  $p$ -simplejo para alguna  $p$ , y cada  $w_i$  consiste de un simplejo o una pareja de la forma  $(\sigma^p, \tau^{p+1})$ . Entonces al camino cerrado podemos con respecto a su preimagen en  $P(K)$  de la siguiente forma:

$$\tau_1^{p+1} \xrightarrow{P(K)} \sigma_2^p \xleftarrow{M} \tau_2^{p+1} \xrightarrow{P(K)} \dots \xleftarrow{M} \tau_n^{p+1} \xrightarrow{P(K)} \sigma_1^p$$

donde  $\sigma_i$  esta emparejado con  $\tau_i$  por  $M$  para  $i = \{0, \dots, n\}$  y  $w_j = (\sigma_j, \tau_j)$  con  $\tau_j > \sigma_j$ .

Así, si  $M$  fuera inducido por una FMD  $f$ , tendríamos

$$f(\tau_1) > f(\sigma_2) \geq f(\tau_2) > \dots \geq f(\tau_n) > f(\sigma_1),$$

lo que implica  $f(\tau_1) > f(\sigma_1)$ . Pero como  $\sigma_1$  es emparejado con  $\tau_1$ , tendremos que  $f(\sigma_1) \geq f(\tau_1)$  lo cual nos produce una contradicción. Así  $M$  no es inducido por ninguna  $f$ , y entonces no es un emparejamiento de Morse.

Recíprocamente, supongamos que no existen caminos dirigidos cerrados en  $P(K)/M$ . Como  $K$  es finito, tenemos que  $P(K)/M$  es finito. Así, cualquier camino en  $P(K)/M$  tiene longitud finita. Definimos  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  tomando  $f(\sigma)$  como la longitud del camino más largo comenzando en  $\bar{\sigma}$ . Veamos que  $f$  es una FMD:

Si  $\sigma^p < \tau^{p+1}$  en  $K$ , existe una flecha  $\tau \rightarrow \sigma$  en  $P(K)$ . Si esta flecha está en el emparejamiento  $M$  tenemos que  $\bar{\sigma} = \bar{\tau}$ , por tanto  $f(\sigma) = f(\tau)$ . De otra manera, cualquier camino que comienza en  $\sigma$  (es decir en  $\bar{\sigma} \in P(K)/M$ ) puede extenderse a uno más largo comenzando en  $\tau$  (es decir en  $\bar{\tau} \in P(K)/M$ ), en este caso  $f(\sigma) < f(\tau)$ . Por tanto,

$f(\sigma) \leq f(\tau)$  con la igualdad si y sólo si  $\tau \sim_M \sigma$ . Es decir  $f$  es una FMD e induce un emparejamiento de Morse. ■

¿Pueden estos argumentos ser llevados a  $P(K)/\sim$  para una partición  $\sim$  que no es un emparejamiento?, para contestar esta pregunta presentaremos un tipo de partición diferente utilizando los siguientes conjuntos.

**Definición 2.2.7.** Sean  $\sigma^p, \tau^{p+m} \in K$  tal que  $\sigma \subseteq \tau$ . Definimos

$$[\sigma, \tau] := \{\gamma \in K \mid \sigma \subseteq \gamma \subseteq \tau\}.$$

Observemos que esta definición es valida para cualquier poset (conjunto parcialmente ordenado).

**Nota 2.2.8.** Dados  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}, \tau = \{v_0, \dots, v_{n+m}\}$  denotamos al intervalo formado por ellos como

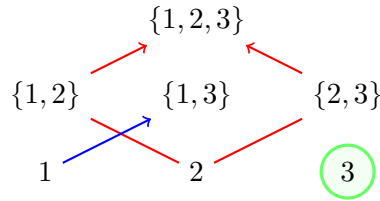
$$[\{v_0, \dots, v_n\}, \{v_0, \dots, v_{n+m}\}],$$

o simplemente por

$$[v_0 \dots v_n, v_0 \dots v_{n+m}].$$

De ahora en adelante  $\sim$  sera una partición en intervalos. El caso clásico ocurre cuando cada intervalo tiene rango 1 o 2 (por rango nos referimos a el número de elementos del intervalo), es decir, cuando  $\sim$  es un emparejamiento.

**Ejemplo 2.2.9.** Consideremos  $K = \{1, 2, 3, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$  con el emparejamiento  $\sim = \{(3), (1, 13), [2, 123]\}$ . El emparejamiento en el diagrama de Hasse está dado por:



Para contestar la pregunta al teorema anterior, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.10.** Sea  $\sim$  una relación de equivalencia en  $K$  cuyas clases de equivalencia son intervalos en  $P(K)$ . Supongamos que  $P(K)/\sim$  no tiene caminos cerrados dirigidos. Entonces existe una FMD en  $K$  cuyos simplejos críticos son exactamente aquellos que están solos en su clase de equivalencia bajo  $\sim$ .

**Demostración.** Dado cualquier intervalo  $[\sigma, \tau]$  en  $P(K)$  no trivial, construyamos el siguiente emparejamiento total en él:

Para algún vértice fijo  $v \in \tau \setminus \sigma$  ( $\tau$  y  $\sigma$  pensados como subconjuntos de  $\text{Vert}(K)$ ), emparejamos  $\rho \in [\sigma, \tau]$  con  $\rho \cup \{v\}$  para toda  $\rho$  que no contenga a  $v$ . Note que  $\rho \cup \{v\} \in [\sigma, \tau]$  pues  $\sigma \subseteq \rho \cup \{v\} \subseteq \tau$  además como  $\rho \cup \{v\} \subseteq \tau \in K$  por definición de complejo simplicial,

$\rho \cup \{v\} \in [\sigma, \tau]$ . Además es claro que  $\dim(\rho - v) + 1 = \dim \rho$ .

Pongamos todos estos emparejamientos totales juntos, ésto genera un emparejamiento  $M$  en  $P(K)$ , que no genera más simplejos aislados ésto es por lo siguiente: para  $v \in \tau / \sigma$  fijo tenemos dos casos,

- Si  $\rho \in [\sigma, \tau]$  es tal que  $\rho$  contiene a  $v$  entonces  $\rho - v \not\subseteq \rho \subseteq K$  esto implica que  $\rho - v \in K$  y además  $\rho - v \in \{\rho \in K \mid \sigma \subseteq \rho \subseteq \tau\}$ , por tanto  $\rho$  es emparejado con  $\rho - v$  y  $\rho \neq \rho - v$ .
- Si  $\rho \in [\sigma, \tau]$  no contiene a  $v$  entonces  $\rho \cup \{v\} \subseteq \tau \in K$  lo que implica que  $\rho \cup \{v\} \in K$ , por tanto  $\rho \cup \{v\} \in \{\rho \in K \mid \sigma \subseteq \rho \subseteq \tau\}$  entonces  $\rho$  se empareja con  $\rho \cup \{v\}$ .

Por tanto no se generan elementos aislados en un intervalo  $[\sigma, \tau]$  no trivial. Entonces  $M$  y  $\sim$  deja los mismos simplejos sin emparejar. Veamos que  $M$  genera un campo vectorial gradiente, es decir una FMD: Si existiera un ciclo en  $P(K)/M$  tendría que estar contenido en un elemento de  $P(K)/\sim$ , porque de otra forma, tendríamos un ciclo dirigido entre clases de  $P(K)/\sim$ , el cual supusimos acíclico. Note que  $P(K)/M$  es un “refinamiento” de  $P(K)/\sim$ . Más precisamente, tenemos una proyección canónica  $P(K)/M \xrightarrow{\pi} P(K)/\sim$ .

Sea  $[\sigma, \tau] \in P(K)/\sim$ . Supongamos que existe un ciclo en  $[\sigma, \tau]/M$ , entonces, visto en la preimagen (en  $[\sigma, \tau]$ ) de un ciclo minimal contenido en  $[\sigma, \tau]/M$  tendría la forma:

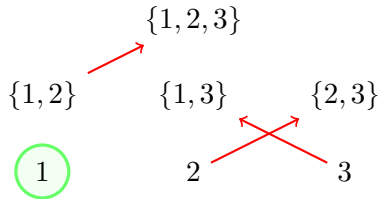
$$\rho_1 \xleftarrow{P(K)} (\rho_2 \cup \{v\} \xrightarrow{M} \rho_2) \xleftarrow{P(K)} (\rho_3 \cup \{v\} \xrightarrow{M} \dots \xleftarrow{P(K)} (\rho_n \cup \{v\} \xrightarrow{M} \rho_n) \xleftarrow{P(K)} (\rho_1 \cup \{v\} \xrightarrow{M} \rho_1),$$

donde los  $\rho_i$ 's son diferentes, y ninguno de ellos contiene a  $\{v\}$ . Pero como existe una flecha  $\rho_1 \cup \{v\} \xrightarrow{P(K)} \rho_n \subseteq \rho_1 \cup \{v\}$ , esto implica que  $\rho_n$  es una cara inmediata de  $\rho_1 \cup \{v\}$ , es decir  $v \in \rho_n$  o  $\rho_n = \rho_1$ , donde cualquiera es una contradicción. Por tanto no existen ciclos en  $P(K)/M$ .

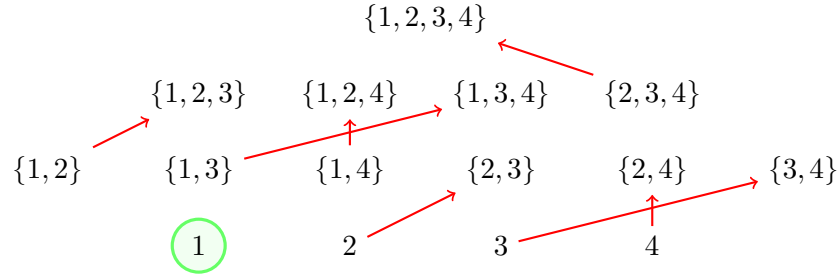
Por Teorema 2.2.6 existe un campo vectorial gradiente (i.e. una FMD) cuyos críticos son los mismo que  $M$  deja sin emparejar, que son los mismos que deja  $\sim$ . ■

**Definición 2.2.11.** Una relacion de equivalencia  $\sim$  en  $K$  que satisface las hipótesis del Teorema 2.2.10 , lo llamaremos **emparejamiento de Morse generalizado** (EMG).

Vimos en la prueba anterior que un emparejamiento de Morse generalizado puede refinarse a un emparejamiento de Morse ordinario. Pero existen otras maneras de refinar un EMG a uno clásico:



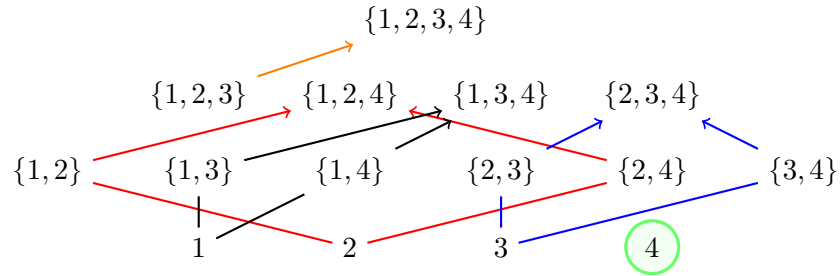
Por otro lado, no todos los emparejamientos totales en  $[\sigma, \tau]$  dan un emparejamiento de Morse. Como contra ejemplo, consideremos el emparejamiento  $M$  para  $\tau = \sigma \cup \{1, 2, 3, 4\}$  dado de la siguiente manera,



Podemos ver que en  $[\sigma, \tau]/M$  tenemos  $[2, 23] \rightarrow [3, 34] \rightarrow [4, 24] \rightarrow [2, 23]$ , por tanto no existe emparejamiento de Morse en  $[\sigma, \tau]$  por  $M$ .

Podemos observar que si la co-dimensión en el EMG es menor o igual a 3, cualquier refinamiento genera un emparejamiento de Morse. Finalmente, existen particiones  $\sim$  de  $P(K)$  que no son EMG pero pueden refinarse a un emparejamiento de Morse.

Consideremos el tetraedro con la siguiente partición:



Podemos ver que  $\sim$  no es un EMG pues  $[2, 124] \rightarrow [1, 134] \rightarrow [3, 234] \rightarrow [2, 124]$ . Sin embargo, podemos dar un refinamiento que genera una FMD clásica cuyo campo vectorial gradiente es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \{1, 2, 3\} &\rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \\
 \{1, 2\} &\rightarrow \{1, 2, 4\} \\
 \{1, 3\} &\rightarrow \{1, 3, 4\} \\
 \{2, 3\} &\rightarrow \{2, 3, 4\} \\
 1 &\rightarrow \{1, 4\} \\
 2 &\rightarrow \{2, 4\} \\
 3 &\rightarrow \{3, 4\}
 \end{aligned}$$

### 2.3. Acciones de grupos en complejos simpliciales

En este capítulo tendremos como objetivo analizar la acción de un grupo  $G$ , en algún complejo simplicial. Veremos diferentes tipos de acciones de grupo con el fin de obtener emparejamientos  $G$ -equivariantes.

En esta sección fijaremos  $X$  como un espacio topológico,  $G$  un grupo, un homomorfismo de grupos  $\rho : G \rightarrow \text{aut}(X)$  que llamaremos una acción del grupo  $G$ , donde  $\text{aut}(X) = \{h : X \rightarrow X | h \text{ es homeomorfismo}\}$ . Denotaremos por  $gx$  a  $\rho(g)(x) \in X$ .

**Definición 2.3.1.** Supongamos que  $G$  actúa en dos espacios  $X$  y  $Y$ . Una función  $f : X \rightarrow Y$  es  $G$ -equivariante si  $f(gx) = gf(x)$  para todo  $g \in G$ .

Si existe un homeomorfismo  $G$ -equivariante  $X \rightarrow Y$ , decimos que  $X$  y  $Y$  son  $G$ -homeomorfos, y lo denotaremos  $X \cong_G Y$ .

Si  $X$  y  $Y$  son homotópicamente equivalentes, y las homotopías pueden ser escogidas tal que conmutan con la  $G$ -acción, escribimos  $X \simeq_G Y$ .

**Definición 2.3.2.** Sea  $K$  un complejo supongamos que  $G$  actúa en  $\text{Vert}(K)$  de tal manera que manda simplejos en simplejos. Entonces decimos que  $G$  actúa simplicialmente en  $K$ , y que  $K$  es un  $G$ -complejo simplicial.

**Observación. 2.3.3.** Nótese que tal acción es realmente una acción de grupos en  $K$ , dada por  $g\sigma = \{gv_1, \dots, gv_n\}$ , donde  $\sigma = \{v_1, \dots, v_n\} \in K$ .

Sin embargo, existe una manera natural de extender la acción a una acción en  $|K|$ . Más precisamente, Sea  $x \in |K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$ , lo que implica que  $x \in |\sigma|$  con  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ , por tanto  $x = \sum_{i=0}^n a_i v_i$ . Sea

$$gx := \sum a_i gv_i \in g|\sigma|.$$

Pero tenemos que

$$\begin{aligned} g|\sigma| &= \{g \sum a_i v_i | \sum a_i = 1, a_i \geq 0\} \\ &= \{\sum a_i gv_i | \sum a_i = 1, a_i \geq 0\} \\ &= |g\sigma|, \end{aligned}$$

Entonces tenemos una función  $G \times |K| \rightarrow |K|$ , que claramente es una acción.

**Definición 2.3.4.** Sea  $G$  una acción simplicial en  $K$ .

- a) Supongamos que, siempre que  $gv \neq v$ , no existe simplejo que contenga a  $v$  y  $gv$  (al mismo tiempo) para toda  $g \in G$ . Entonces diremos que  $K$  es llamado un  $G$ -complejo **semi-regular**. Equivalentemente diremos que dados cualesquiera  $\tau \in K$ ,  $g \in G$  y  $v \in \tau$  tales que  $v, gv \in \tau$  entonces se tiene que  $gv = v$ .

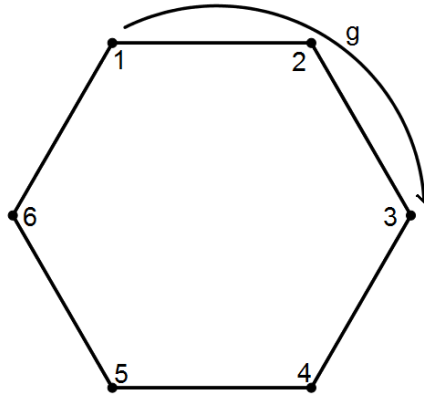
- b) Consideremos la siguiente condición:

( $\star$ ) “Si  $g_0, g_1, \dots, g_n$  son elementos de  $G$  y  $\{v_0, \dots, v_n\}$  y  $\{g_0 v_0, \dots, g_n v_n\}$  son ambos simplejos de  $K$ , entonces existe un elemento  $g \in G$  tal que  $gv_i = g_i v_i$  para todo  $i$ .”

Una acción simplicial de  $G$  en  $K$  que satisface esta condición ( $\star$ ) para la acción de cada subgrupo de  $G$  es llamada regular, y  $K$  es llamado un  $G$ -complejo **regular**.

Nótese que la regularidad es estrictamente más fuerte que la semi-regularidad: Supongamos que  $K$  es un  $G$ -complejo regular y que  $v$  y  $gv$  pertenecen al mismo simplejo. Por definición de simplejo  $\{v, gv\} \subseteq \tau \in K$  implica que  $\{v, gv\} \in K$ . Entonces  $\{v\}$  y  $\{v, gv\}$  son simplejos de  $K$ , y como  $K$  es regular algún elemento de  $G$  manda  $\{v\}$  en  $\{v, gv\}$ , lo cual es una contradicción, a menos que  $\#\{v, gv\} = 1$ , por tanto  $v = gv$ . Es decir regular implica semi-regular.

El recíproco no es cierto en general: Consideremos la acción de  $C_3 = \langle g \rangle$  en el hexágono  $K$ , donde  $g$  es la rotación en 120 grados.



Veamos que  $K$  es un complejo  $C_3$ - semi-regular. Claramente para todo  $v \in \text{Vert}(K)$  siempre que  $gv \neq v$  implica que  $v, gv$  no están en un mismo simplejo, por tanto  $K$  es un complejo  $C_3$ - semi-regular. Sin embargo no existe elemento en  $C_3$  que mande  $\{1, 2\}$  en  $\{2, 3\}$  por tanto no es regular.

Recordemos que  $K'$  denota la subdivisión baricéntrica de  $K$  (vease en 1.1.15). Note que la acción de  $G$  en  $K$  induce una acción natural en  $K'$ , pues si  $\tau \in K'$  entonces  $\tau = \{\sigma_0, \dots, \sigma_k\}$  con  $\sigma_i \in K$  y  $\sigma_i \subseteq \sigma_{i+1}$ . Definimos naturalmente

$$g\tau := \{g\sigma_0, \dots, g\sigma_k\}.$$

Note también que  $g\tau \in K'$  pues  $\sigma_i \subseteq \sigma_{i+1}$  implica  $g\sigma_i \subseteq g\sigma_{i+1}$ .

**Teorema 2.3.5.** Para cualquier  $G$ -complejo simplicial  $K, K'$  es un  $G$ -complejo semi-regular. Si  $K$  es un  $G$ -complejo semi-regular,  $K'$  es un  $G$ -complejo regular.

**Demostración.** Supongamos que  $\sigma$  y  $g\sigma$  son dos vértices diferentes de  $K'$  (así  $\sigma$  y  $g\sigma$  son simplejos de  $K$ ). Entonces tienen la misma dimension como simplejos de  $K$  (pues la acción es biyectiva), así ninguno está contenido en el otro (en el sentido de  $K$ ). Entonces por definición de  $K'$  no existe simplejo en él que contenga a ambos, pues se necesitaría que dicho simplejo fuera de la forma  $\{\sigma_0 \subseteq \dots \subseteq \sigma_k\}$  donde  $\sigma = \sigma_i$  y  $g(\sigma) = \sigma_j$  para algunos  $i, j$ . Por tanto  $K'$  es semi-regular.

Ahora supongamos que  $K$  es un  $G$ -complejo semi-regular, entonces también es un  $H$ -complejo semi-regular para cualquier subgrupo  $H$  de  $G$ . Sean  $\sigma_i$  con  $i = 1, \dots, n$  simplejos

en  $K$ , supongamos que  $\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_n$ . Entonces  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  es un simplejo general en  $K'$ . Para demostrar que  $K'$  es regular, demostraremos que si  $\{h_1(\sigma_1), \dots, h_n(\sigma_n)\}$  forman un simplejo de  $K'$ , con  $h_i \in H$ , existe un  $h \in H$  tal que  $h(\sigma_i) = h_i(\sigma_i)$  para toda  $i$ . Procedamos por inducción sobre  $n$ :

Para  $n = 1$  si  $h = h_1$  tenemos que  $h(\sigma) = h_1(\sigma)$ .

Ahora supongamos que  $h(\sigma_i) = h_i(\sigma_i)$  para cada  $i = 1, \dots, n-1$ . Entonces  $h^{-1}\{h_1(\sigma_1), \dots, h_n(\sigma_n)\} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, h'(\sigma_n)\}$  es un simplejo de  $K'$  donde  $h' = h^{-1}h_n$ . Pero como simplejos de  $K$ ,  $\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_{n-1} \subset h'(\sigma_n)$ . Así  $\sigma_{n-1} \subset \sigma_n \cap h'(\sigma_n)$ . Y por la semi-regularidad de  $K$ ,  $h'$  actúa trivialmente en  $\sigma_{n-1}$  (pues, para cualquier  $v \in \sigma_{n-1}$ ,  $h'(\sigma_n)$  contiene a  $v$  y  $h'v$ , lo cual implica que  $v = h'v$ ). Por tanto  $\sigma_i = h'(\sigma_i) = h^{-1}h_n(\sigma_i)$  para  $i = 1, \dots, n-1$ , entonces  $h_i(\sigma_i) = h_n(\sigma_i) = h(\sigma_i)$  para  $i = 1, \dots, n-1$ . Así  $h_n$  manda  $\sigma_i$  a  $h_i(\sigma_i)$  para toda  $i = 1, \dots, n$ , y así  $K'$  es un  $H$ -complejo regular en particular para  $H = G$ . ■

Se sigue de inmediato la siguiente observación.

**Observación. 2.3.6.**  $(K')'$  es regular para cualquier  $G$ -complejo  $K$ .

**Proposición 2.3.7.** Si  $K$  es un  $G$ -complejo semi-regular, entonces los simplejos  $G$ -invariantes de  $K$  forman un subcomplejo  $K^G$  de  $K$ , y  $|K|^G = |K^G|$ . Donde  $|K|^G$  denota el conjunto de los puntos  $G$ -invariantes en  $|K|$ .

**Demostración.** Sea  $\sigma \in K$  un simplejo fijo (i.e.  $g\sigma = \sigma$  para toda  $g \in G$ ), veamos que sus caras también lo son:  $\{v_1, \dots, v_n\} = \{gv_1, \dots, gv_n\}$  implica que  $gv_i, v_i \in \sigma$ , pero por la semi-regularidad tenemos que  $gv_i = v_i$  y por tanto cualquier cara de  $\sigma$  también es fija, esto es, si  $\tau \subseteq \sigma \in K^G$  entonces  $\tau \in K^G$ . Y así  $K^G$  es un subcomplejo simplicial de  $K$ .

Por demostrar,  $|K|^G = |K^G|$ : Sea  $x \in |K|^G$ , por tanto  $x = \sum a_i v_i$  (Recordemos Nota 1.1.14) donde  $gv_i = v_i$  para toda  $i$  y para toda  $g \in G$  pues todas las caras de  $\sigma$  son invariantes, en particular los vértices, por tanto tenemos que  $gx = \sum a_i gv_i = \sum a_i v_i = x$ , y así  $x \in |K^G|$ .

Recíprocamente, sea  $x \in |K^G|$ , es decir, existe  $\tau = \{v_0, \dots, v_p\}$  tal que  $x \in |\tau|$ , por tanto  $x = \sum_{i=0}^p a_i v_i$ . Reordando vértices, sea  $\sigma = \{v_0, \dots, v_p\}$  simplejo de  $K$  tal que  $x = \sum_{j=0}^p a_j v_j$  es tal que  $a_j \neq 0$  para toda  $j = 0, \dots, p$ . Notemos que  $\sigma$  es el único simplejo de dimensión mínima tal que  $x \in |\sigma|$ , pues  $x \in |\overset{\circ}{\sigma}|$  con  $|\overset{\circ}{\sigma}| = \{\sum_{i=0}^p a_i v_i \mid \sum a_i = 1, a_i > 0\}$  y  $|\overset{\circ}{\sigma}|$  es el único simplejo abierto que contiene a  $x$  (véase en [13]).

Por otra parte, dado que  $x \in |K|^G$  se cumple que  $gx = x$ , entonces tenemos que para todo  $g \in G$ ,

$$x = \sum a_j v_j = g \sum a_j v_j = \sum a_j gv_j,$$

por tanto  $x \in |g\sigma|$  y dado que  $a_j \neq 0$  implica  $x \in |g|\overset{\circ}{\sigma}|$ . Además  $g\sigma$  es un simplejo de dimensión  $p$  pues  $g \cdot ()$  es biyección. Por unicidad, tenemos que  $g\sigma = \sigma$  para todo  $g \in G$  por tanto  $\sigma \in K^G$  y así  $x \in |\sigma| \subseteq |K^G|$ . ■

**Definición 2.3.8.** Para un  $G$ -complejo regular  $K$ , definimos el complejo abstracto  $K/G$  como sigue:

- Los vértices de  $K/G$  son las órbitas  $Gv$  con  $v \in \text{Vert}(K)$ .

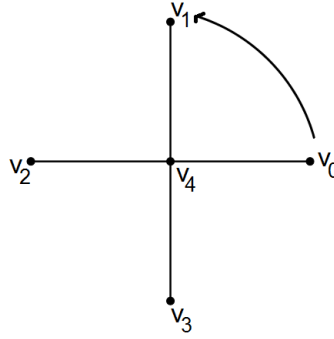


- Los simplejos de  $K/G$  son los conjuntos  $\{Gv_1, \dots, Gv_n\}$  para todo simplejo  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $K$ .

Veamos que  $K/G$  es efectivamente un complejo simplicial:

Sea  $\{Gv_1, \dots, Gv_n\} \in K/G$  y  $\{Gv_1, \dots, Gv_{i-1}, Gv_{i+1}, \dots, Gv_n\} \subset \{Gv_1, \dots, Gv_n\}$ , ahora, como  $\{Gv_1, \dots, Gv_n\} \in K/G$ , tenemos que  $\{v_1, \dots, v_n\} \in K$ , entonces  $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\} \in K$  y por tanto  $\{Gv_1, \dots, Gv_{i-1}, Gv_{i+1}, \dots, Gv_n\} \in K/G$ .

**Ejemplo 2.3.9.** Sea  $K$  el siguiente complejo simplicial, con la acción de  $\mathbb{Z}_4 = \langle g \rangle$  (el grupo cíclico de orden 4).



Tenemos que los vértices de  $K/\mathbb{Z}_4$  son:  $\{\mathbb{Z}_4 v_0\}$  y  $\{\mathbb{Z}_4 v_4\}$ , por tanto el único simplejo es  $\{\mathbb{Z}_4 v_0, \mathbb{Z}_4 v_4\}$ .

De aquí en adelante denotaremos  $Gv \equiv [v]$ .

**Proposición 2.3.10.** Si  $K$  es un complejo regular, entonces  $|K/G| \cong |K|/G$ .

**Demostración.** Consideremos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \varphi : |K|/G &\rightarrow |K/G| \\ [\sum a_i v_i] &\mapsto \sum a_i [v_i] \end{aligned}$$

Veamos que está bien definida: Supongamos que  $[\sum a_i v_i] = [\sum a_i u_i]$ , entonces tenemos que existe  $g \in G$  tal que  $g \sum a_i v_i = \sum a_i u_i$ , por tanto  $\sum a_i g v_i = \sum a_i u_i$ , ahora como la representación convexa de un punto es única tenemos que  $g v_i = u_i$ , es decir  $[v_i] = [u_i]$  y por tanto  $\sum a_i [v_i] = \sum a_i [u_i]$ .

Ahora veamos que  $\varphi$  es continua: Consideremos la función

$$\begin{aligned} \psi : |K| &\rightarrow |K/G| \\ \sum a_i v_i &\mapsto \sum a_i [v_i]. \end{aligned}$$

Podemos ver que  $\psi = \varphi \circ \pi$ , donde  $\pi : |K| \rightarrow |K|/G$  es la proyección natural. Entonces basta ver que  $\psi$  es continua y  $G$ -equivariante para así que  $\varphi$  también lo sea.

Por demostrar  $\lim_{x_n \rightarrow x} \psi(x_n) = \psi(x)$ .

Sea  $x = \sum_{i=0}^p a_i v_i$  y  $\{x_n\}$  con  $x_n = \sum a_i^n v_i$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Se puede ver que  $x_n \rightarrow x$  si y sólo si  $a_i^n \rightarrow a_i$  para toda  $i = 0, \dots, p$ . Entonces,

$$\lim_{x_n \rightarrow x} \psi(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow x} \psi\left(\sum a_i^n v_i\right) = \lim_{x_n \rightarrow x} \sum a_i^n [v_i] = \sum a_i [v_i] = \psi(x)$$

Veamos que  $\varphi$  es inyectiva, supongamos que  $\varphi([\sum a_i v_i]) = \varphi([\sum a_i u_i])$ , es decir  $\sum a_i [v_i] = \sum a_i [u_i]$ , por tanto  $\sum a_i v_i = \sum a_i g_i u_i$ . Pero como  $K$  es un  $G$ -complejo regular, tenemos que existe  $g \in G$  tal que  $\sum a_i v_i = \sum a_i g u_i$  y por tanto  $\sum a_i v_i = g \sum a_i u_i$  y entonces,  $[\sum a_i v_i] = [\sum a_i u_i]$ .

Veamos que  $\varphi$  es sobre: Demostraremos que, para cualquier  $\sum a_i [v_i] \in |K/G|$ , existe un simplejo  $\{u_i\} \in K$  con  $[u_i] = [v_i]$  para cada  $i$  tal que  $[\sum a_i u_i] \in |K/G|$ .

Como  $\sum a_i [v_i] \in |K/G|$ , tenemos que  $\{[v_i]\}$  es un simplejo en  $K/G$ . Entonces por definición existe un simplejo  $\{u_i\} \in K$  con  $[u_i] = [v_i] \in K/G$  para toda  $i$ ; por tanto,  $[\sum a_i u_i] \in |K/G|$  es tal que  $\varphi([\sum a_i u_i]) = \sum a_i u_i$ .

Hasta ahora hemos probado que  $\varphi$  es una biyección continua, entonces como  $|K|$  es compacto,  $|K|/G$  también lo será, además  $|K/G|$  es Hausdorff, por tanto  $\varphi$  es un homeomorfismo. ■

## 2.4. G-complejos CW modelados por productos torcidos.

**Definición 2.4.1.** Sea  $G$  un grupo y sea  $H$  un subgrupo de  $G$  actuando en un espacio  $X$ . Consideremos  $G$  como un espacio topológico otorgándole la topología discreta. Definamos una relación de equivalencia  $\sim$  en  $G \times X$  por  $(gh, x) \sim (g, hx)$ . Definimos el espacio  $G \times_H X$  por el espacio cociente  $G \times X / \sim$ . Esta construcción es llamada **producto torcido**.

Veamos que  $\sim$  es de equivalencia:

- Tenemos que  $(g, x) = (ge, x)$  y  $(g, x) = (g, ex)$  donde  $e \in G$  es el elemento neutro. Por tanto  $(g, x) \sim (g, x)$ .
- Supongamos que  $(gh, x) \sim (g, hx)$ , tenemos que  $(g, hx) = (ghh^{-1}, hx) \sim (gh, h^{-1}hx) = (gh, x)$ , por tanto  $(g, hx) \sim (gh, x)$ .
- Si  $(g_1, x) \sim (g_2, y)$  implica que  $g_1 = g_2 h$  y  $y = hx$ . Si  $(g_2, y) \sim (g_3, z)$  tenemos que  $g_2 = g_3 h'$  y  $z = h'y$ . Entonces  $g_1 = g_3 h' h$ ,  $z = h' h x$ , por tanto  $(g_1, x) = (g_3 h' h, x) \sim (g_3, h' h x) = (g_3, z)$ .

Definimos una acción de  $G$  en  $G \times_H X$  dada por  $g(g', x) = (gg', x)$ , está bien definida pues  $(g'h, x) \sim (g', hx)$  implica que  $g(g'h, x) = (gg'h, x)$  y  $g(g', hx) = (gg', hx)$  con  $(gg'h, x) \sim (gg', hx)$  para toda  $g \in G$ .

**Ejemplo 2.4.2.** Consideramos un espacio con tres puntos con la acción natural de  $S_3$ . Supongamos que  $x$  es el punto tal que  $(12)x = x$ . Tenemos que

$$S_3 \times \{x\} = \{(g, x) | g \in S_3\}.$$

Veamos cuales son las clases de  $S_3 \times_{(12)} \{x\}$ :

$$\begin{aligned}
 ((12), x) &= ((1)(12), x) \sim ((1), (12)x) = ((1), x) \\
 ((13), x) &= ((123)(12), x) \sim ((123), (12)x) = ((123), x) \\
 ((23), x) &= ((132)(12), x) \sim ((132), (12)x) = ((132), x)
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$S_3 \times_{(12)} \{x\} = \{[(1), x], [(123), x], [(132), x]\}.$$

También tenemos que (123) rota a los tres puntos en  $S_3 \times_{(12)} \{x\}$ , y que (12) intercambia los puntos  $[(123), x]$  y  $[(132), x]$ .

Ahora, construiremos, para un grupo fijo  $G$ , complejos con productos torcidos como celdas. Ésto se hará inductivamente como sigue:

1. Comenzemos con un conjunto discreto de puntos  $X_0$ , y una acción en  $X_0$  dada por  $G$ .
2. Dado  $X_{n-1}$ , peguemos los productos torcidos  $G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^m$  a  $X_{n-1}$  via inclusiones  $G$ -invariantes de sus fronteras. Obtendremos  $X_n$ .

Los  $H_\alpha$ 's son subgrupos de  $G$ . Aquí,  $\Delta_\alpha^m$  son  $m$ -simplejos (con las  $m$ 's posiblemente diferentes entre ellas y de  $n$ ), donde los  $H_\alpha$  actúan sobre  $X_0$  por restricción y se extienden a una acción lineal sobre

$$\Delta_\alpha^m = \langle \text{Vert}(\Delta_\alpha^m) \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^m a_i e_i \mid \sum_{i=0}^m a_i = 1, a_i \geq 0 \right\},$$

definida por  $g(\sum_{i=0}^m a_i e_i) := \sum_{i=0}^m a_i g e_i$ .

Estrictamente hablando,  $\Delta_\alpha^m$  es un disco de una representación de  $H_\alpha$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 H_\alpha &\xrightarrow{\rho} \text{aut}(\langle \text{Vert}(\Delta_\alpha^m) \rangle) \\
 g &\longmapsto \rho_g : \langle \text{Vert}(\Delta_\alpha^m) \rangle \longrightarrow \langle \text{Vert}(\Delta_\alpha^m) \rangle \\
 e_i &\longmapsto g \cdot e_i.
 \end{aligned}$$

con  $\text{Vert}(\Delta_\alpha^m) = \{e_i\}_{i=0}^m$ . Ahora  $\alpha$  indexa todas las celdas que son agregadas a  $X$  en el paso  $n$ .

Para ser preciso, consideremos los morfismos

$$\iota : G \times_{H_\alpha} \partial \Delta_\alpha^m \hookrightarrow G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^m \text{ la inclusión natural (que es } G\text{-equivariante),}$$

$$\varphi_\alpha : G \times_{H_\alpha} \partial \Delta_\alpha^m \rightarrow X_{n-1} \text{ } G\text{-equivariante,}$$

$X_n$  es el espacio

$$X_{n-1} \sqcup_\alpha G \times_{H_\alpha} \partial \Delta_\alpha^m / \iota(x) \sim \varphi_\alpha(x)$$

$$\begin{array}{ccc} G \times_{H_\alpha} \partial \Delta_\alpha^m & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & X_{n-1} \\ \downarrow \iota & & \downarrow \\ G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^m & \longrightarrow & X_n \end{array}$$

3. Tenemos inclusiones naturales  $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ , definimos  $X = \cup_n X_n$ .

Decimos que  $X$  es un  **$G$ -complejo CW modelado en discos de representaciones**.

Esto es análogo a la construcción estandar de complejos CW. Tomaremos siempre espacios y grupos finitos, sin embargo la construcción funciona sin estas restricciones.

Ahora, veremos como un  $G$ -complejo simplicial puede considerarse como un  $G$ -complejo CW modelado en discos de representaciones:

1. Sea  $K$  un  $G$ -complejo simplicial (para un grupo fijo  $G$ ). Sea  $K_0$  su conjunto de vértices.
2. Supongamos que hemos construido  $K_{n-1}$ . Particionemos el conjunto de  $n$ -simplejos de  $K$  en sus  $G$ -órbitas,  $O_\alpha^n = \{g\Delta_\alpha^n | g \in G\}$  (recordemos que tenemos una acción  $G \times K \rightarrow K$ ).

Sea  $\Delta_\alpha^n$  un representante de  $O_\alpha^n$ , y sea  $H_\alpha$  el subgrupo de  $G$  que consiste de aquellos elementos que dejan  $\Delta_\alpha^n$  invariante, es decir,

$$H_\alpha = \{g \in G | g\Delta_\alpha^n = \Delta_\alpha^n\}.$$

Entonces  $H_\alpha$  actúa en  $\Delta_\alpha^n$ , y así podemos ver que la unión disjunta de los simplejos en  $O_\alpha^n$  es  $G$ -homeomorfa a  $G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^n$ :

**Demostración.** Consideremos,

$$\begin{aligned} \phi : G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^n &\rightarrow O_\alpha^n \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

Veamos que  $\phi$  es  $G$ -equivariante: Tenemos que para  $g \in G$

$$\phi(g(g', x)) = \phi(gg', x) = gg'x = g\phi(g', x)$$

Veamos que  $\phi$  está bien definida: Sea  $(g_1, x) = (g_2, y)$  es decir  $g_1 = g_2h$ ,  $y = hx$  para alguna  $h \in H_\alpha$ . Entonces

$$\phi(g_1, x) = g_1x = g_2hx = g_2y = \phi(g_2, y)$$

Veamos que  $\phi$  es continua: Sea  $gx \in O_\alpha^n$  (con  $g \in G$ ,  $x \in \Delta_\alpha^n$ ) y sea  $V_{g\Delta}$  un abierto en  $O_\alpha^n$ . Ahora podemos ver que  $V_{g\Delta} = gV_\Delta$  donde  $V_\Delta$  es un abierto en  $\Delta_\alpha^n$ , en particular  $x \in V_\Delta$ , entonces si consideramos el abierto  $\{g\} \times V_\Delta$ , tendremos que  $\phi(\{g\} \times V_\Delta) \subset gV_\Delta = V_{g\Delta}$ .

Veamos que  $\phi$  es inyectiva: Supongamos que  $g_1x = g_2y$  con  $x, y \in \Delta_\alpha^n$ , es decir  $x = g_1^{-1}g_2y \in \Delta_\alpha^n$  con  $g_1^{-1}g_2 \in G$ , por tanto  $g_1^{-1}g_2 \in H_\alpha$ . Si denotamos  $h = g_1^{-1}g_2$  tenemos que  $x = hy$  y  $g_2 = g_1h$ , por tanto  $(g_2, y) = (g_1h, y) \sim (g_1, hy) = (g_1, x)$ .

Veamos que  $\phi$  es sobreyectiva: Sea  $\alpha \in O_\alpha^n$  es decir  $\alpha = gx$  para algunos  $g \in G$  y  $x \in \Delta_\alpha^n$ , entonces  $\phi(g, x) = gx = \alpha$ .

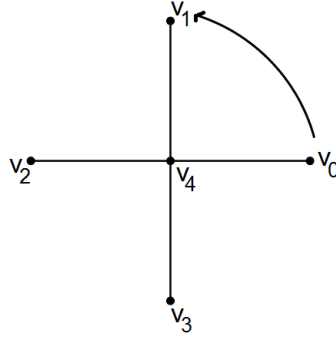
Ahora, como  $G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^n$  es compacto y  $O_\alpha^n$  es Hausdorff tenemos que  $\phi$  es un homeomorfismo. ■

Podemos dar una demostración alternativa en [1, Proposición 3.2, p.80].

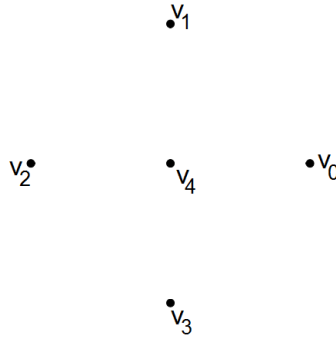
Entonces, el  $n$ -esqueleto es obtenido de pegar  $G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^n$  para toda  $\alpha$  a  $K_{n-1}$  vía inclusiones de sus fronteras. Estas inclusiones serán  $G$ -equivariantes, así la construcción del esqueleto de  $K_n$  sigue fielmente la construcción de un  $G$ -complejo CW.

3. Ahora, el  $n$ -esqueleto de  $|K|$  es  $\bigcup_{l \leq n} K_l$ , así  $|K|$  es el  $G$ -complejo CW  $\bigcup_n K_n$ .

**Ejemplo 2.4.3.** Sea  $K$  como en el ejemplo 2.3.9; describiremos como el  $G$ -complejo simplicial  $K$  puede considerarse como un  $G$ -complejo CW modelado en discos de representaciones



Comenzamos la construcción del  $G$ -complejo CW con  $K_0$  como sigue:



Vemos que la única órbita posible en  $K_1$  es la siguiente:

$$O_\alpha^1 : V_0V_4 \rightarrow V_1V_4 \rightarrow V_2V_4 \rightarrow V_3V_4 \rightarrow V_0V_4.$$

Sea  $\Delta_\alpha^1 = V_0 V_4 \in O_\alpha^1$ , en este caso,  $H_\alpha = \{e\}$  (el elemento trivial de  $\mathbb{Z}_4$ ). Ahora,

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_4 \times \Delta_\alpha^1 &= \bigcup \{ \{h_i\} \times \Delta_\alpha^1 \mid h_i \in \mathbb{Z}_4 \} \\ &= \{ \{e\} \times V_0 V_4, \{g\} \times V_0 V_4, \{g^2\} \times V_0 V_4, \{g^3\} \times V_0 V_4 \}.\end{aligned}$$

Sean  $g \in \mathbb{Z}_4$  y  $x \in \Delta_\alpha^1$ , entonces para cada  $h \in \{e\}$ ,

$$(g, x) = (ge, x) = (gh, x) \sim (g, hx) = (g, ex) = (g, x).$$

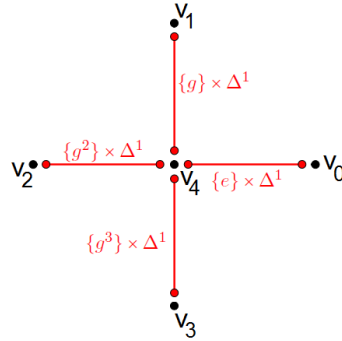
Así, utilizando el morfismo  $\phi_\alpha$  como en la demostración anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_4 \times_{\{e\}} \Delta_\alpha^1 &\cong_{\mathbb{Z}_4} O_\alpha^1 = \bigsqcup_{\alpha=1}^4 \Delta_\alpha^1. \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_4 \times \{V_0, V_4\} & \xrightarrow{\phi_\alpha|} & X_0 = K_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times \Delta_\alpha^1 & \longrightarrow & X_1 = X_0 \sqcup \mathbb{Z}_4 \times \Delta_\alpha^1 / gV_i \sim (g, V_i) \end{array}.$$

Finalmente, el  $G$ -complejo CW resultante tiene la siguiente forma, (con las celdas pegadas en el sentido de  $gV_i \sim (g, V_i)$ ):



Recuperando así el  $G$ -complejo simplicial original  $K$ .

Nótese que si  $G$  es no-abeliano, las diferentes “copias” de  $\Delta_\alpha^m$ , indexadas por  $G/H_\alpha$  no tienen los mismos grupos de invarianza. De hecho, si el grupo de invarianza de  $\Delta$  es  $H$ ,  $g\Delta$  tendrá grupo de invarianza  $gHg^{-1}$  (i.e. serán conjugados).

$$\begin{aligned}H_{g\Delta} &= \{ \tilde{g} \in G \mid \tilde{g}g\Delta = g\Delta \} \\ &= \{ \tilde{g} \in G \mid g^{-1}\tilde{g}g\Delta = \Delta \} \\ &= g\{ \tilde{g} \in G \mid \tilde{g}\Delta = \Delta \}g^{-1} \\ &= gH_\Delta g^{-1}\end{aligned}$$

Ahora, los subgrupos  $H_\alpha < G$  serán determinados salvo clase de conjugación, y para determinarla exactamente necesitamos fijar un representante  $\Delta_\alpha^n$ .

Para ver que el  $G$ -complejo CW construido a partir de  $K$  está bien definido, veremos que

$$G \times_H \Delta \cong_G G \times_{gHg^{-1}} g\Delta.$$

Veamos la Proposición y la observación de [1, p.81], y los siguientes resultados.

**Proposición 2.4.4.** Para un grupo  $G$ ,  $H \leq G$  y un espacio topológico  $X$ . Sea  $f : G \rightarrow f(G)$  un isomorfismo y  $l : X \rightarrow l(X)$  un homeomorfismo (no necesariamente equivariante) y una acción  $\cdot : f(H) \times l(X) \rightarrow l(X)$ . Entonces

$$\begin{aligned} * : H \times X &\rightarrow X \\ (g, y) &\mapsto l^{-1}(f(g) \cdot l(y)), \end{aligned}$$

es una acción.

**Demostración.** Sea  $e$  el elemento neutro de  $G$ , tenemos que

$$e * y = l^{-1}(f(e) \cdot l(y)) = l^{-1}(e \cdot l(y)) = l^{-1}l(y) = y$$

Sean  $g_1, g_2 \in G$ , por un lado tenemos

$$(g_1 g_2) * y = l^{-1}(f(g_1 g_2) \cdot l(y)) = l^{-1}(f(g_1) f(g_2) \cdot l(y))$$

tambien tenemos que

$$g_1 * (g_2 * y) = g_1 * [l^{-1}(f(g_2) \cdot l(y))] = l^{-1}(f(g_1) \cdot l[l^{-1}(f(g_2) \cdot l(y))]) = l^{-1}(f(g_1) f(g_2) \cdot l(y))$$

por tanto  $(g_1 g_2) * y = g_1 * (g_2 * y)$  ■

Definamos

$$\begin{aligned} I : G \times_H X &\rightarrow f(G) \times_{f(H)} l(X) \\ \overline{(g, y)} &\mapsto \overline{(f(g), l(y))}. \end{aligned}$$

Veamos que  $I$  está bien definida: como  $(g, y) \sim (gh^{-1}, h * y) = (gh^{-1}, l^{-1}[f(h) \cdot l(y)])$  tenemos que

$$\begin{aligned} I(gh^{-1}, h * y) &= I(gh^{-1}, l^{-1}[f(h) \cdot l(y)]) \\ &= (f(gh^{-1}), l(l^{-1}[f(h) \cdot l(y)])) \\ &= (f(g)f(h)^{-1}, f(h) \cdot l(y)) \\ &\sim (f(g), l(y)) \\ &= I(g, y), \end{aligned}$$

por tanto  $I$  está bien definido. Ahora veamos que  $I$  es  $G$ -equivariante, para ésto sea  $g_1 \in G$ , veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G \times_H X & \xrightarrow{I} & f(G) \times_{f(H)} l(X) , \\ g_1 \downarrow & & \downarrow f(g_1) \\ G \times_H X & \xrightarrow{I} & f(G) \times_{f(H)} l(X) \end{array}$$

donde la acción natural de  $g_1 \in G$  esta dada por:

$$g_1 \cdot (g, y) := (g_1 g, y).$$

Sea  $(g, y) \in G \times_H X$ , entonces tenemos que como  $f$  es isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} (g, y) & \xrightarrow{I} & (f(g), l(y)) \\ g_1 \downarrow & & \downarrow f(g_1) \\ (g_1 g, y) & \xrightarrow{I} & (f(g_1 g), l(y)) = (f(g_1) f(g), l(y)) \end{array} .$$

Por tanto  $I$  es  $G$ -equivariante. Ahora consideremos la siguiente función

$$J : f(G) \times_{f(H)} l(X) \rightarrow G \times_H X$$

$$\overline{(g, y)} \mapsto \overline{(f^{-1}(g), l^{-1}(y))}$$

Podemos ver que  $J$  es inversa de  $I$ , demostremos que  $J$  está bien definida: Sea  $(g, y) \in f(G) \times_{f(H)} l(X)$ , ésto implica que  $g = f(g'), y = l(x)$  para algunos  $x \in X, g' \in G$  y  $(g, y) \sim (gh^{-1}, hy)$  para algún  $h = f(h')$  con  $h' \in G$ , por tanto

$$\begin{aligned} J(gh^{-1}, hy) &= (f^{-1}(gh^{-1}), l^{-1}(hy)) \\ &= (f^{-1}(g)f^{-1}(h^{-1}), l^{-1}(f(h') \cdot l(x))) \\ &= (f^{-1}(g)f^{-1}(f(h'^{-1}), h'x) \\ &= (f^{-1}(g)h'^{-1}, h'l^{-1}(y)) \\ &\sim (f^{-1}(g), l^{-1}(y)) \\ &= J(g, y). \end{aligned}$$

Entonces  $J$  está bien definida. Ésto demuestra que  $I$  es un homeomorfismo  $G$ -equivariante. Tomando

$$X = \Delta_\alpha^n,$$

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto ghg^{-1}, \\ l : \Delta_\alpha^n &\rightarrow g\Delta_\alpha^n \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

obtenemos la equivalencia

$$G \times_H \Delta \cong_G G \times_{gHg^{-1}} g\Delta.$$

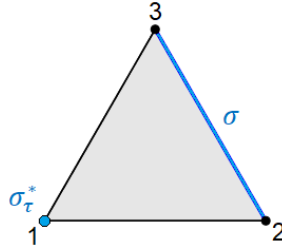
## 2.5. Consecuencias para $G$ -complejos simpliciales.

En esta sección veremos aplicaciones que tienen las acciones y construcciones vistas en la sección pasada para ahora si incorporar de manera adecuada las simetrías de un complejo simplicial y los nuevos emparejamientos generalizados. Antes unas definiciones necesarias.



**Definición 2.5.1.** Sea  $\sigma$  una cara propia de  $\tau$  (i.e.  $\sigma < \tau$  con  $\sigma \neq \tau$ ). Definimos el **dual** de  $\sigma$  con respecto a  $\tau$  denotado por  $\sigma_\tau^*$  como  $\tau \setminus \sigma$ .

**Ejemplo 2.5.2.** Sea  $K$  el 2-simplejo estandar con cara maximal  $\{1, 2, 3\}$ , tomemos  $\sigma = \{2, 3\}$ , por tanto  $\sigma_\tau^* = \tau \setminus \sigma = \{1\}$

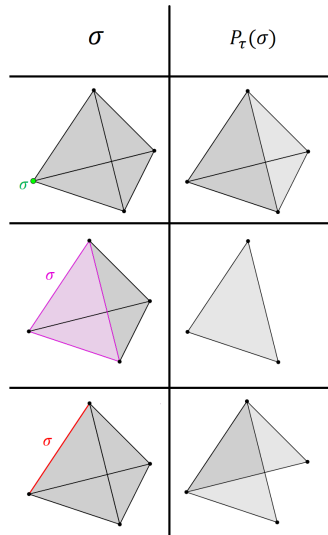


Note que  $\sigma_\tau^* \cup \{\sigma\} = \{1\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\} = \tau$ .

Podemos observar que  $\sigma_\tau^*$  es cara de  $\tau$ , y que,  $\sigma$  y  $\sigma_\tau^*$  juntos contienen todos los vértices de  $\tau$ .

**Definición 2.5.3.** Sea  $\sigma$  una cara propia de  $\tau$ . Definimos  $P_\tau(\sigma)$  como la unión de todas las caras inmediatas de  $\tau$  (es decir de dimensión  $(\dim \tau - 1)$ ) que contienen a  $\sigma$ .

**Ejemplo 2.5.4.** Sea  $\tau$  el 3-simplejo estandar, veamos los  $P_\tau(\sigma)$  para las siguientes  $\sigma$ :



La idea es que cada simplejo  $\tau$  sea colapsado en algo de dimensión menor y en este caso será  $P_\tau(\sigma)$ , para alguna cara propia  $\sigma$ . El siguiente Lema nos dará una propiedad interesante que usaremos más adelante.

**Lema 2.5.5.** Si  $\tau$  es un  $n$ -simplejo y  $\sigma$  es una cara propia de  $\tau$ , entonces  $P_\tau(\sigma)$  es un  $(n - 1)$ -disco topológico (Podemos verlo intuitivamente en el Ejemplo 2.5.4).

**Demostración.** Notemos que  $P_\tau(\sigma)$  es un  $(n - 1)$ -subcomplejo puro de  $\tau$  (i.e. todo simplejo maximal de  $P_\tau(\sigma)$  tiene dimensión  $n - 1$ ):

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\tau = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  y  $\sigma = \{v_1, \dots, v_{k+1}\}$  con  $k < n + 1$ , así  $\sigma \not\subseteq \tau$ . Tenemos que

$$P_\tau(\sigma) = \{v_1, \dots, v_{k+1}, \widehat{v_{k+2}}, v_{k+3}, \dots, v_{n+1}\} \cup \{v_1, \dots, v_{k+1}, v_{k+2}, \widehat{v_{k+3}}, \dots, v_{n+1}\} \cup \dots \cup \{v_1, \dots, v_{k+1}, v_{k+2}, v_{k+3}, \dots, \widehat{v_{n+1}}\}$$

implica que cada cara maximal de  $P_\tau(\sigma)$  es de la forma  $\tau - v$  con  $v \notin \sigma$  (es decir,  $v \in \tau \setminus \sigma = \sigma_\tau^*$ ). Así si  $\dim(\tau) = n$  entonces la dimensión de cada cara maximal de  $P_\tau(\sigma)$  es  $n - 1$ .

Afirmamos que si  $K$  es cualquier  $(n - 1)$ -subcomplejo puro de un simplejo  $\Delta^n$ , con  $K \neq \partial\Delta$ , entonces  $K$  es un  $(n - 1)$ -disco.

De hecho, esto es equivalente a el lema, ya que todo  $(n - 1)$ -subcomplejo puro de  $\Delta^n$  es  $P_\Delta(\sigma)$  para algún  $\sigma \not\subseteq \Delta$ .

Sea  $k$  el número de simplejos maximales en  $K$ . Procederemos a probar la afirmación por inducción sobre  $k$  y  $n$ :

Si  $n = 1$  tenemos que  $K$  es un punto (i.e. un 0-disco). Si  $k = 1$  entonces  $K$  es un  $(n - 1)$ -simplejo.

En efecto, sea  $\delta = \{v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_{n+1}\}$  dicha celda maximal, lo cual implica que  $\delta \subseteq K$ . Pero toda celda de  $K$  está contenida en alguna maximal. Pero todas las celdas maximales son de dimensión  $n - 1$  pues  $K$  es puro y sólo hay una, esto implica que  $K \subseteq \delta$ , por tanto  $K = \delta$ .

Supongamos que la afirmación es cierta para todo  $m < n$  y para  $m = n$  con  $j < k$ . Probaremos que es cierta para  $m = n$  con  $j = k$ : Sea  $K$  un  $(n - 1)$ -subcomplejo puro de  $\Delta^n$ , con  $k$  simplejos maximales tal que  $K \neq \partial\Delta$ , demostraremos que  $K$  es un  $(n - 1)$ -disco.

Un simplejo maximal típico de  $K$  es  $\Delta \setminus v$  con  $v \in \text{Vert}(\Delta)$ . Así podemos escribir  $|K| = |K'| \cup |\Delta \setminus v|$ , donde  $K'$  tiene  $k - 1$  simplejos maximales (es decir  $|K'| = \bigcup_{i=1}^{k-1} |\Delta \setminus v_i|$ , con  $v_i \in \text{Vert}(\Delta)$  y  $v_i \neq v$ ). Entonces por hipótesis de inducción  $|K|$  es la unión de dos  $(n - 1)$ -discos, a través de  $|K'| \cap |\Delta \setminus v|$ .

Note que

$$|K'| \not\subseteq |K| \not\subseteq \partial\Delta^n = \bigcup_{i=1}^n |\Delta \setminus v_i|,$$

por tanto  $|K| \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n |\Delta \setminus v_i|$ . Entonces como  $|K|$  es un  $(n - 1)$ -simplejo puro tenemos que

$$|K| \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n |\Delta \setminus v_i|$$

para algún  $i \neq s$ , donde  $|K|$  se puede expresar como la unión de sus celdas maximales que son todas de dimensión  $n - 1$ . Ahora, una celda típica maximal de  $K$  es  $\Delta \setminus \sigma$  para algún  $v = v_r$ , por tanto podemos escribir

$$|K| = |K'| \cup |\Delta \setminus \sigma|$$

donde  $|K'|$  se puede expresar como la unión de sus celdas maximales que son todas de dimensión  $n - 1$ . Ahora, tenemos

$$|K'| \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq r \\ i \neq s}}^n |\Delta \setminus v_i| \subsetneq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^n |\Delta \setminus v_i| = \bigcup_{v_i \neq v} |\Delta \setminus v_i|,$$

entonces

$$|K'| \cap |\Delta \setminus v| \subsetneq \left( \bigcup_{v_i \neq v} |\Delta \setminus v_i| \right) \cap |\Delta \setminus v| = \bigcup_{\substack{i=1 \\ v_i \neq v}}^n |\Delta \setminus \{v_i, v\}| = \partial |\Delta \setminus v|,$$

por tanto

$$|K'| \cap |\Delta \setminus v| \subsetneq \partial |\Delta \setminus v|, \quad (2.1)$$

lo que implica que

$$|K'| \cap |\Delta \setminus v| \subsetneq |K'| \cap \partial |\Delta \setminus v|.$$

Dado que  $|K'|$  y  $\partial |\Delta \setminus v|$  son complejos simpliciales, sólo se pueden intersectar en caras de  $|K'|$  y  $\partial |\Delta \setminus v|$ . Pero todas las caras maximales de  $\partial |\Delta \setminus v|$  son de dimensión  $(n - 2)$ . Por tanto tenemos que  $|K'|$  se intersecta en caras de a lo más dimensión  $n - 2$  con  $\partial |\Delta \setminus v|$ . Pero las caras de dimensión  $n - 2$  son caras propias de  $|K'|$  y dichas caras propias están todas contenidas en  $\partial |K'|$ , entonces

$$|K'| \cap \partial |\Delta \setminus v| \subseteq \partial |K'| \cap \partial |\Delta \setminus v|. \quad (2.2)$$

Así por 2.1 y 2.2

$$|K'| \cap |\Delta \setminus v| \subseteq \partial |K'| \cap \partial |\Delta \setminus v|.$$

Pero las celdas maximales del complejo simplicial  $|K'| \cap |\Delta \setminus v|$  son aquellas  $(n - 2)$ -celdas de  $|K'|$  que no contienen a  $v$ . Entonces  $|K'| \cap |\Delta \setminus v|$  es un subcomplejo puro  $(n - 2)$ -dimensional del simplejo  $|\Delta \setminus v|$ , por lo cual por 2.1, 2.2 y hipótesis de inducción tenemos que  $|K'| \cap |\Delta \setminus v|$  es un  $(n - 2)$ -disco. De manera que  $K$  es la unión de dos  $(n - 1)$ -discos pegados por un  $(n - 2)$ -disco en la intersección de sus fronteras, es decir,  $K$  es un  $(n - 1)$ -disco topológico. En particular,  $P_\tau(K)$  es un  $(n - 1)$ -disco topológico. ■

En el siguiente Lema calcularemos la frontera de  $\tau$  en términos de  $P_\tau(\sigma)$  y a su vez calcularemos la frontera de  $P_\tau(\sigma)$ .

**Lema 2.5.6.** Para cualquier  $\sigma$  cara propia de  $\tau$ ,

$$\partial \tau = P_\tau(\sigma) \cup P_\tau(\sigma_\tau^*).$$

Más aún,

$$\partial P_\tau(\sigma) = \partial P_\tau(\sigma_\tau^*) = P_\tau(\sigma) \cap P_\tau(\sigma_\tau^*).$$

**Demostración.** Cualquier cara inmediata  $\rho$  de  $\tau^n$  tiene dimensión  $n - 1$ , así que existe  $v \in \text{Vert}(\tau)$  tal que  $\rho = \tau \setminus v$ . Si  $v \in \sigma$  tenemos que  $\rho \in P_\tau(\sigma_\tau^*)$ , pues  $v \in \sigma$  implica que  $\tau \setminus \sigma \subseteq \tau \setminus \{v\} \subseteq \bigcup_{\tau \setminus \sigma \subseteq \tau \setminus \{v_i\}} \tau \setminus \{v_i\} = P_\tau(\sigma_\tau^*)$ . De otra manera  $\rho \in P_\tau(\sigma)$ , pues  $v \notin \sigma$  implica que  $\sigma \subseteq \tau \setminus \{v\} = \rho$ , por lo cual  $\rho \in \bigcup_{\sigma \subseteq \tau \setminus \{v_i\}} \tau \setminus \{v_i\} = P_\tau(\sigma)$ . Como cada punto en  $\partial \tau$  está en alguna cara inmediata de  $\tau$ ,

$$\partial \tau = P_\tau(\sigma) \cup P_\tau(\sigma_\tau^*).$$

Ahora, notemos que ninguna cara inmediata  $\tau \setminus v$  de  $\tau$  puede estar en ambas  $P_\tau(\sigma)$  y  $P_\tau(\sigma_\tau^*)$ , supongamos que  $\tau \setminus v \in P_\tau(\sigma) \cap P_\tau(\sigma_\tau^*)$ , como  $\tau \setminus v \in P_\tau(\sigma)$  tenemos que  $\sigma \subseteq \tau \setminus v$  por lo cual  $v \notin \sigma$  y así  $v \in \tau \setminus \sigma$  y como  $\tau \setminus v \in P_\tau(\sigma_\tau^*)$  tenemos que  $\tau \setminus \sigma \subseteq \tau \setminus v$ , así  $v \in \sigma$ , de manera que  $v \in \sigma \cap (\tau \setminus \sigma) = \sigma \cap \sigma_\tau^* = \emptyset$ . Entonces,  $P_\tau(\sigma)$  y  $P_\tau(\sigma_\tau^*)$  tienen interiores disjuntos. Así cualquier punto en  $P_\tau(\sigma) \cap P_\tau(\sigma_\tau^*)$  está en las fronteras de  $P_\tau(\sigma)$  y  $P_\tau(\sigma_\tau^*)$ . Es decir,

$$\partial P_\tau(\sigma_\tau^*) \supseteq P_\tau(\sigma) \cap P_\tau(\sigma_\tau^*) \subseteq \partial P_\tau(\sigma).$$

Por otro lado, veamos como ambos  $\partial P_\tau(\sigma)$  y  $\partial P_\tau(\sigma_\tau^*)$  consisten de aquellos  $(n-2)$ -simplejos que se escriben de la forma  $\tau \setminus \{v, w\}$  con  $v \in \text{Vert}(\sigma)$ ,  $w \in \text{Vert}(\sigma_\tau^*)$ :

Sea  $\tau = \{v_0, \dots, v_n\}$ , recordemos que  $\text{Vert}(\tau) = \text{Vert}(\sigma) \sqcup \text{Vert}(\sigma_\tau^*)$ , por tanto sin perdida de generalidad tomemos  $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\}$ ,  $\sigma_\tau^* = \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ . Por definición, tenemos que los elementos en  $P_\tau(\sigma)$  son de la forma  $\{v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n\}$  con  $i = k+1, \dots, n$ . Notemos que  $v_i \in \text{Vert}(\sigma_\tau^*)$  para  $i = k+1, \dots, n$ . Ahora, como  $\partial P_\tau(\sigma)$  es de dimensión  $n-2$  y  $\sigma \subsetneq P_\tau(\sigma)$  tenemos que los elementos de  $\partial P_\tau(\sigma)$  son de la forma  $\{v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n\}$  con  $i = k+1, \dots, n$  y  $j = 0, \dots, k$ , es decir son de la forma  $\tau \setminus \{v_j, v_i\}$  con  $v_j \in \text{Vert}(\sigma)$ ,  $v_i \in \text{Vert}(\sigma_\tau^*)$ . Análogamente para  $\partial P_\tau(\sigma_\tau^*)$ .

Ahora, vemos que  $\tau \setminus \{v, w\} \subseteq \tau \setminus \{v\} \in P_\tau(\sigma_\tau^*)$  y  $\tau \setminus \{v, w\} \subseteq \tau \setminus \{w\} \in P_\tau(\sigma)$  con  $v \in \text{Vert}(\sigma)$ ,  $w \in \text{Vert}(\sigma_\tau^*)$ , y así tenemos que

$$\partial P_\tau(\sigma_\tau^*) \subseteq P_\tau(\sigma) \cap P_\tau(\sigma_\tau^*) \supseteq \partial P_\tau(\sigma).$$

Finalmente,

$$\partial P_\tau(\sigma_\tau^*) = P_\tau(\sigma) \cap P_\tau(\sigma_\tau^*) = \partial P_\tau(\sigma).$$

■

Ahora si, veamos como es el colapso y además involucraremos una acción de grupos.

**Proposición 2.5.7.** Sea  $\sigma$  una cara propia de  $\tau$ . Entonces  $\tau$  se colapsa en  $P_\tau(\sigma_\tau^*)$ .

Más aún, sea  $g$  una permutación de los vértices de  $\tau$ , con  $g(\sigma) = \sigma$ .

Extendemos  $g$  linealmente a el simplejo geométrico  $|\tau|$ . Entonces, el colapso  $C : |\tau| \times I \rightarrow |\tau|$  puede escogerse tal que

$$C(x, 0) = x, C(x, 1) \in P_\tau(\sigma_\tau^*)$$

y  $gC(x, s) = C(gx, s)$  para cualquier  $x \in \tau$  y  $0 \leq s \leq 1$ .

**Demostración.** Denotemos por  $b$  el baricentro de  $\sigma$  y por  $b^*$  el baricentro de  $\sigma_\tau^*$ . Afirmamos que todo punto  $x \in |\tau|$  se puede escribir como  $x = tb + (1-t)x^*$  donde  $x^* \in P_\tau(\sigma_\tau^*)$  y  $0 \leq t \leq 1$ : Todo punto en  $|\sigma|$  se puede escribir de esta manera ya que  $\partial\sigma \subseteq P_\tau(\sigma_\tau^*)$ , pues  $\partial\sigma = \bigcup_{v \in \sigma} \sigma - v \subseteq \bigcup_{v \in \sigma} \tau - v = P_\tau(\sigma_\tau^*)$ . Claramente todo punto en  $|\sigma_\tau^*|$  también, ya que  $\sigma_\tau^* \subset P_\tau(\sigma_\tau^*)$ . Pero entonces todo punto en  $|\tau|$  puede escribirse de esta forma ya que  $|\sigma|$  y  $|\sigma_\tau^*|$  generan  $|\tau|$  de manera convexa.

Entonces, definimos  $C(x, s) = t(sb^* + (1-s)b) + (1-t)x^*$ . En palabras,  $C$  esta definido por  $b$  siendo colapsado a  $b^*$ , y el colapso siendo lineal.

Ahora, tenemos que

$$C(x, 0) = tb + (1-t)x^* = x$$

$$C(x, 1) = tb^* + (1-t)x^*.$$

Este último es una combinación convexa de dos puntos en un  $(n-1)$ -simplejo que contiene  $x^*$ , ya que  $x^* \in P_\tau(\sigma_\tau^*)$ . Entonces  $C(x, 1)$  está en el mismo  $(n-1)$ -simplejo, y así

$$C(x, 1) \in P_\tau(\sigma_\tau^*).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} gC(x, s) &= g(t[sb^* + (1-s)b] + (1-t)x^*) \\ &= t[sg(b^*) + (1-s)g(b)] + (1-t)g(x^*), \end{aligned}$$

como  $g$  sólo permuta los vértices de  $\sigma_\tau^*$ , pues  $g : \tau \rightarrow \tau$  es biyección, así  $g(\sigma) = \sigma$  implica  $g(\tau - \sigma) \subseteq \tau - \sigma$ , es decir,  $g(\sigma_\tau^*) \subseteq \sigma_\tau^*$  por lo cual  $g(\sigma_\tau^*) = \sigma_\tau^*$ . Entonces  $g$  deja al baricentro fijo, pues

$$\begin{aligned} g(b^*) &= g\left(\frac{1}{\dim(\sigma_\tau^*) + 1} \sum_{v_i \in \text{Vert}(\sigma_\tau^*)} v_i\right) \\ &= \frac{1}{\dim(\sigma_\tau^*) + 1} \sum_{v_i \in \text{Vert}(\sigma_\tau^*)} v_{g(i)} \\ &= b^*, \end{aligned}$$

por tanto

$$gC(x, s) = t[sb^* + (1-s)g(b)] + (1-t)g(x^*) = C(gx, s)$$

■

Ahora veremos como un EMG produce un colapso de  $K$  a el equivalente del complejo de Morse en el sentido clásico:

**Teorema 2.5.8.** Sea  $\sim$  un EMG en un  $G$ -complejo simplicial finito. Supongamos que  $\sim$  es  $G$ -equivariante, es decir: si  $[\sigma, \tau]$  está en  $\sim$ , entonces  $[g\sigma, g\tau]$  también está. Entonces existe un  $G$ -complejo CW  $\mathcal{M}$ , tal que las celdas de  $\mathcal{M}$  (tratado como un CW) son exactamente las celdas en  $K$  que son críticas con respecto a  $\sim$ , y  $K \simeq_G \mathcal{M}$ .

**Demostración.** Dado que  $\sim$  es un EMG tenemos que  $P(K)/\sim$  es acíclico, por tanto tiene sentido decir que  $P(K)/\sim$  es un poset definiendo  $w > v$  si hay un camino de  $w$  a  $v$  para  $w, v \in P(K)/\sim$ , es decir, si  $w = [\sigma_1, \tau_1], v = [\sigma_2, \tau_2]$  existen  $x \in [\sigma_1, \tau_1], y \in [\sigma_2, \tau_2]$  tal que  $y \subseteq x$ . Note que esta condición se abrevia diciendo: hay un camino de  $w = [\sigma_1, \tau_1]$  a  $v = [\sigma_2, \tau_2]$  si  $\sigma_2 \subset \tau_1$ .

Veamos las siguientes observaciones:

a) “ $\sigma < \tau$  implica  $g(\sigma) < g(\tau)$ ”

Si  $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\}$  y  $\tau = \{w_0, \dots, w_k\}$  entonces  $\{v_0, \dots, v_k\} \subseteq \{w_0, \dots, w_k\}$  y así

$$g\sigma = g\{v_0, \dots, v_k\} = \{gv_0, \dots, gv_k\} \subseteq \{gw_0, \dots, gw_k\} = g\tau,$$

por tanto  $g(\sigma) < g(\tau)$ .

b) “Si hay un camino de  $w$  a  $v$  implica que hay un camino de  $gw$  a  $gv$ ”

Sean  $w = [\sigma_1, \tau_1], v = [\sigma_2, \tau_2]$ , entonces tenemos que  $\sigma_2 \subseteq \tau_1$ , por tanto  $g\sigma_2 \subseteq g\tau_1$  es decir hay una flecha de  $[g\sigma_1, g\tau_1] = g[\sigma_1, \tau_1]$  a  $[g\sigma_2, g\tau_2] = g[\sigma_2, \tau_2]$ , es decir hay un camino de  $gw$  en  $gv$ .

c) “La condición  $v < gv$  nunca se cumple para todo  $v \in P(K)/\sim, g \in G$ ”

Definimos  $(-\infty, v] := \{w \in P(K)/\sim \mid w \leq v\}$  donde  $w \leq v$  significa por definición que hay una flecha de  $v$  a  $w$  o que  $w = v$ . Observemos que

$$\begin{aligned} g(-\infty, v] &= g\{w \in P(K)/\sim \mid w \leq v\} \\ &= \{gw \in P(K)/\sim \mid w \leq v\} \\ &= \{w \in P(K)/\sim \mid g^{-1}w \leq v\} \\ &= \{w \in P(K)/\sim \mid w \leq gv\} \\ &= (-\infty, gv]. \end{aligned}$$

Dado que  $g() : (-\infty, v] \rightarrow (-\infty, gv]$  es una biyección tenemos que  $|(-\infty, v]| = |(-\infty, gv]|$ . Por otra parte, si suponemos que  $v < gv$  entonces  $(-\infty, v] \subseteq (-\infty, gv]$  y dado que  $P(K)$  es un conjunto finito tendríamos que  $(-\infty, v] = (-\infty, gv]$  lo cual implica que  $v = gv$  lo que es una contradicción.

d) “ $v < w$  implica que  $gw \not< hv$  para todo  $g, h \in G, v, w \in P(K)/\sim$ ”

Supongamos que  $v < w$  y  $gw < hv$  para algunos  $g, h \in G, v, w \in P(K)/\sim$ . Por a) Tenemos que  $gw < hv$  implica que  $w < g^{-1}hv$  y en consecuencia  $v < w < g^{-1}hv$  con  $g^{-1}h \in G$ , lo cual contradice c).

De aquí podemos definir el poset  $P(K)/\sim /G$  por:  $G[\sigma] < G[\tau]$  si y sólo si  $g[\sigma] < h[\tau]$  para algunos  $g, h \in G$ . Veamos que este poset está bien definido: Supongamos que  $G[\sigma] < G[\tau]$ , es decir existen  $g, h \in G$  tal que  $g[\sigma] < h[\tau]$ . Supongamos también que existen  $\tilde{g}, \tilde{h} \in G$  tal que  $\tilde{g}[\sigma] > \tilde{h}[\tau]$ . Sean  $x := g[\sigma], y := h[\tau]$ , así  $x > y$  y por d) tenemos que  $g'x \not< h'y$  para todo  $g', h' \in G$ . Tomando  $g' = g\tilde{g}^{-1}, h' = h\tilde{h}^{-1}$  se sigue que  $g\tilde{g}^{-1}x \not< h\tilde{h}^{-1}y$  es decir,  $g[\sigma] \not< h[\tau]$  lo cual es una contradicción. Por tanto no puede ocurrir que  $G[\sigma] < G[\tau]$  y  $G[\tau] < G[\sigma]$  al mismo tiempo, es decir  $P(K)/\sim /G$  está bien definido.

Recordemos que por el Teorema de extensión, todo poset puede extenderse a un conjunto totalmente ordenado (es decir, todo poset tiene una extensión lineal), para más información revisar [3, p.114-117].

Entonces el poset  $P(K)/\sim /G$  tiene una extensión lineal (finita)

$$v_0 < v_1 < \dots < v_N,$$

donde cada  $v_i$  es una órbita de intervalos  $[\sigma_i, \tau_i] \in P(K)/\sim$ , es decir,

$$v_0 = G[\sigma_0, \tau_0] < \dots < v_N = G[\sigma_N, \tau_N].$$

Sea  $\sigma$  un simplejo cualquiera en  $v_j = G[\sigma_0, \tau_0]$ , esto implica que  $\sigma \in [g\sigma_0, g\tau_0]$  para algún  $g \in G$ . Entonces cualquier cara  $\rho$  de  $\sigma$ , es tal que  $[\rho] < [\sigma]$  en  $P(K)/\sim$ , por tanto  $[\rho] \in v_i$  para alguna  $i \leq j$ . De aquí que

$$K_n := \bigcup_{k \leq n} \bigcup_{[\sigma] \in v_k} \sigma$$

es un  $G$ -subcomplejo de  $K$ .

Construiremos inductivamente las equivalencias  $G$ -homotopicas para algún  $G$ -CW-complejo  $\mathcal{M}_k$  construido a partir de aquellas celdas  $\sigma$  tales que  $v_i = G_{\{\sigma\}}$  para algún  $i \leq k$ .

Haremos esto poniendo ciertos colapsos juntos.

Veamos la siguiente observación:

- e) “Todas las caras de un elemento maximal de un intervalo en  $v_0$  deben estar en el intervalo.” (De esto se sigue que los intervalos en  $v_0$  contienen a lo más una 0-celda y así son todos críticos)

Sea  $[\sigma, \tau] \in v_0 = G[\sigma_0, \tau_0]$ . Sea  $\rho < \tau$  (subcara) tal que  $\rho \notin [\sigma, \tau]$  esto implica que  $\rho \in v_i$  para algún  $i \leq j = 0$  pues el orden total extiende al orden parcial por tanto  $\rho \in v_0$  es decir  $\rho \in [\sigma', \tau'] \in G[\sigma_0, \tau_0]$  por lo cual  $\rho \in [\sigma', \tau'] \cap [\sigma, \tau] \neq \emptyset$  lo cual no es posible pues  $[\sigma, \tau], [\sigma', \tau'] \in \sim$  implica que  $[\sigma', \tau'] \cap [\sigma, \tau] = \emptyset$ .

Por tanto  $[\sigma, \tau] \in G[\sigma_0, \tau_0] = v_0$  implica que  $[\sigma, \tau]$  contiene todas las subcaras de  $\tau$  y dado que  $[\sigma, \tau]$  es un intervalo tenemos que  $\sigma$  tiene que ser una 0-cara de  $\tau$ . Entonces  $G[\sigma_0, \tau_0]$  contiene intervalos que solo tienen una 0-celda en particular  $[\sigma_0, \tau_0] = \{\sigma_0\}$ . Por tanto todos los  $g\sigma_0$  son críticos.

Por lo que definimos  $\mathcal{M}_0 = K$  y el colapso es trivial.

Ahora supongamos que hemos contruido el colapso para  $Km - 1 \simeq_G \mathcal{M}_{m-1}$ , tenemos dos casos

1. Si  $v_m = G\{\sigma\}$  entonces todos los  $g\sigma$  son críticos y así

$$K_m = K_{m-1} \bigcup_{G \times_H \partial \sigma} G \times_H \sigma \simeq_G \mathcal{M}_{m-1} \bigcup_{G \times_H \partial \sigma} G \times_H \sigma \simeq_{G=} \mathcal{M}_m,$$

donde  $H = \{g \in G \mid g\sigma = \sigma\}$ .

2. Si  $v_m = G[\rho, \sigma]$  con  $\rho \neq \sigma$ , demostremos que  $K_m \searrow K_{m-1}$ :

Notemos primero que dado que  $\sim$  es  $G$ -equivariante, entonces cualquier  $g \in G$  que fije a  $\sigma$  también debe fijar a  $\rho$ , pues  $g[\rho, \sigma] = [g\rho, g\sigma] = [g\rho, \sigma]$  implica que  $\sigma \in [g\rho, \sigma] \cap [\rho, \sigma] \neq \emptyset$  y así  $[\rho, \sigma] = [g\rho, \sigma]$  por tanto  $g\rho = \rho$ .

Sea  $[\rho, \sigma] \in v_m$  y  $H_\sigma = \{g \in G \mid g\sigma = \sigma\}$ , que es igual a  $\{g \in G \mid g[\rho, \sigma] = [\rho, \sigma]\}$  y además  $\rho$  es invariante por  $g$  para todo  $g \in H_\sigma$ . Por tanto por Proposición 2.5.7  $\sigma \searrow P_\sigma(\rho_\sigma^*)$ , es decir  $\sigma$  se colapsa a través de  $P_\sigma(\rho)$  ( $\rho \subseteq P_\sigma(\rho) \subseteq \sigma$ ) a  $P_\sigma(\rho_\sigma^*)$  y además de manera equivariante.

Ahora, ninguna cara de  $P_\sigma(\rho_\sigma^*)$  está en el intervalo  $[\rho, \sigma]$ , por tanto  $P_\sigma(\rho_\sigma^*) \subseteq K_{m-1}$ .

Por otra parte para interpretar  $K_{m-1} \cup (K_m - K_{m-1}) = K_m$  como un  $GCW$ -complejo modelado en discos de representaciones, tomamos un representante  $\sigma^m$  de  $G\sigma^m$  por tanto  $\sigma \in G\sigma^m = \cup_{[\sigma] \in v_m} \sigma$  y pegamos  $G \times_{H_\sigma} \sigma^m$  a  $K_{m-1}$  mediante la inclusión

$$\partial(G \times_{H_\sigma} \sigma^m) = G \times_{H_\sigma} \partial \sigma^m \hookrightarrow K_{m-1}.$$

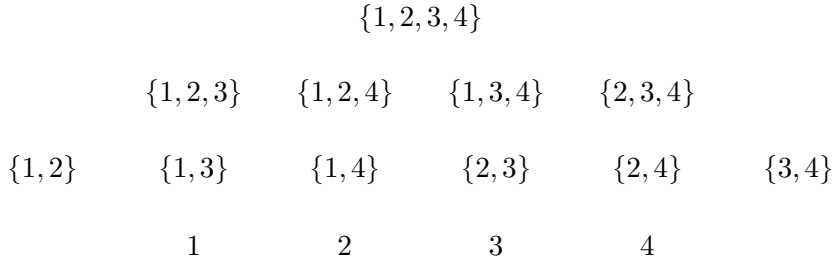
Ahora, colapsamos cada  $\sigma^m$  a  $P_{\sigma^m}(\rho_{\sigma^m}^*) \subseteq K_{m-1}$ . Repitiendo este proceso cuantas veces sea necesario obtenemos que  $K_m \searrow_G K_{m-1}$ . Dado que  $K = K_n$  para algún  $n$ , tenemos que  $K \simeq_G \mathcal{M}_n =: \mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}$  es el complejo CW con una  $p$ -celda por cada  $p$ -simplejo crítico con respecto a  $\sigma$ .

■

Finalmente, discutiremos porque los EMG se adaptan mejor al caso equivariante que los emparejamientos clásicos.

En un emparejamiento de Morse clásico, en simplejo  $\sigma$  siempre está emparejado con una cara inmediata  $\tau = \sigma \setminus \{v\}$  para algún  $v \in \text{Vert}(\sigma)$ . Si algún subgrupo  $H \subseteq G$  permuta los vértices de  $\sigma$ , puede no existir una cara inmediata de  $\sigma$  que sea invariante bajo  $H$ , a pesar de que  $\sigma$  lo es. Entonces no podemos emparejar equivariantemente a  $\sigma$ , así  $\sigma$  tiene que ser crítico.

**Ejemplo 2.5.9.** Consideremos el 3-simplejo estandar con el diagrama de Hasse como sigue:



Y  $H = \{(1), (12)(34)\}$  subgrupo de  $S_4$ . Si tomamos  $\sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ , tenemos que

$$H \cdot \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\},$$

Sin embargo, ninguna de sus caras inmediatas son invariantes bajo  $H$ :

$$(12)(34) \cdot \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 4\}$$

$$(12)(34) \cdot \{1, 3, 4\} = \{2, 3, 4\}$$

Ahora, en un EMG, podemos emparejar  $\sigma$  con cualquier cara  $\rho$  de  $\sigma$ , es decir una con co-dimensión diferente de uno. Entonces, si  $H$  es el grupo de invarianza de  $\sigma$ , podemos emparejar a  $\sigma$  con alguna de sus caras siempre que dicha cara sea  $H$ -invariante. Ésto claramente nos da mas posibilidades de emparejar equivariantemente que en el caso de emparejameintos de Morse clásicos y obtener menos críticos.

## 2.6. Aplicaciones en teoría de gráficas

En la sección 5 de [7], se discute una aplicación en teoría de gráficas. Se utiliza la teoría de Morse discreta para determinar el tipo de homotopía de complejos de gráficas no conexos. Mostraremos como la teoría de Morse discreta equivariante fortalece ésto para determinar el tipo de  $\Gamma$ -homotopía de un complejo simplicial para un grupo  $\Gamma$ .

Notación:  $G$  para gráficas y  $\Gamma$  para grupos.

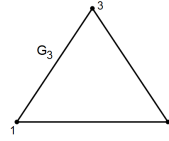


### 2.6.1. El complejo de gráficas no conexas

Denotaremos por  $\mathcal{N}_n$  el complejo de gráficas no-conexas en  $n$  vértices, construido como sigue:

Consideremos la gráfica completa  $G_n$  de  $n$  vértices, y sea  $E_n$  su conjunto de aristas. Sea  $\text{Vert}(\mathcal{N}_n) = E_n$ , esto implica que  $|\text{Vert}(\mathcal{N}_n)| = \binom{n}{2}$ . Ahora, toda subgráfica generada por  $G_n$  (es decir, aquellas subgráficas que contienen  $n$  vértices) corresponde naturalmente a un subconjunto de  $E_n$ . Los simplejos de  $\mathcal{N}_n$  serán aquellos subconjuntos de  $E_n$  que correspondan a gráficas no conexas en  $n$  vértices. Entonces  $\mathcal{N}_n$  es un complejo simplicial, ya que la propiedad de ser no conexo es cerrada bajo subgráficas en  $n$  vértices.

**Ejemplo 2.6.1.** Consideremos la gráfica completa en tres vértices  $G_3$ ,

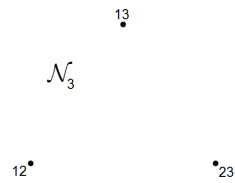


Tenemos que  $E_3 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} = \text{Vert}(\mathcal{N}_3)$ . Ahora tenemos una biyección entre los subconjuntos de  $E_3$  y las subgráficas de  $G_3$  que contienen los tres vértices, podemos verlo en la siguiente tabla:

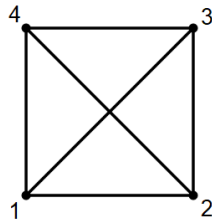
Subconjuntos de $E_3$	Subgráficas de $G_3$ que contienen tres vértices
$\{\emptyset\}$	
$\{\{1, 2\}\}$	
$\{\{1, 3\}\}$	
$\{\{2, 3\}\}$	
$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$	
$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$	
$\{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$	
$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$	

## Capítulo 2

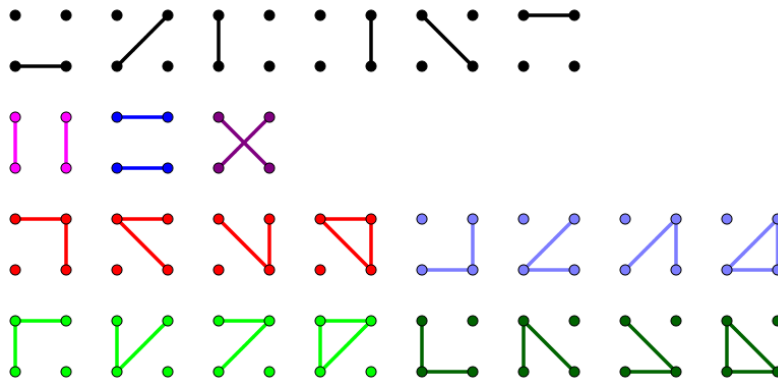
Observamos que solo los primeros cuatro subconjuntos de  $E_3$  se corresponden a una subgráfica no conexa, por tanto éstos son los simplejos de  $\mathcal{N}_3$ . Y así



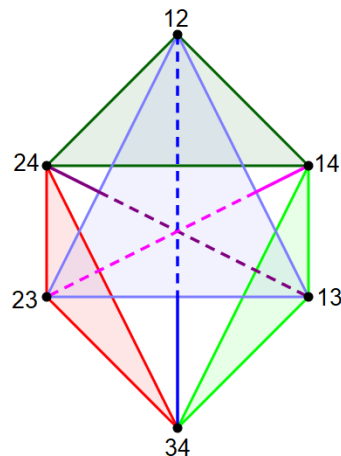
**Ejemplo 2.6.2.** Análogamente como en el ejemplo anterior, sea  $G_4$  la gráfica completa en cuatro vértices,



Ahora consideremos las subgráficas en cuatro vértices de  $G_4$ :



Observando las subgráficas anteriores podemos deducir que el complejo de gráficas no conexas  $\mathcal{N}_4$  tiene la siguiente estructura:



Forman utiliza la teoría de Morse para determinar el tipo de homotopía de  $\mathcal{N}_n$ . Este resultado fue presentado primero por Vassiliev [16] utilizando métodos elementales, él demostró que

$$\mathcal{N}_n \simeq \bigvee_{i=1}^{(n-1)!} S_i^{n-3}.$$

Forman hizo ésto construyendo un emparejamiento de Morse (o un campo vectorial gradiente) en  $\mathcal{N}_n$  como vemos a continuación: Denotemos por  $V_{12}$  como el campo vectorial que consiste de las parejas  $\{G, G \cup \{1, 2\}\}$  tal que  $G \in \mathcal{N}_n$  y no contiene a  $\{1, 2\}$  y  $G \cup \{1, 2\} \in \mathcal{N}_n$ . Observemos que  $\{1, 2\}$  no está emparejado, lo denotaremos por  $G^*$ . Las gráficas en  $\mathcal{N}_n$  diferentes de  $G^*$  que no están emparejadas tienen dos componentes conexas una que tiene el vértice 1 y otra al vértice 2. Denotamos esas componentes como  $G^1$  y  $G^2$ . Sea  $G \neq G^*$  que no esté emparejando en  $V_{12}$ , y consideremos el vértice 3. 3 debe estar en  $G_1$  ó  $G_2$ .

Supongamos que  $3 \in G^1$ , si  $G$  no contiene a  $\{1, 3\}$  entonces  $G \cup \{1, 3\}$  tampoco está emparejado en  $V_{12}$  así que podemos emparejar  $G$  con  $G \cup \{1, 3\}$ . Si  $3 \in G^1$  entonces  $G$  sigue sin pareja si y sólo si  $G$  contiene  $\{1, 3\}$  y  $G \setminus \{1, 3\}$  es unión de tres componentes conexas. Similarmente si  $3 \in G^2$ . Denotemos por  $V_3$  como el campo vectorial resultante. Las gráficas sin pareja en  $V_3$  son  $G^*$ , y aquellos que contengan a la arista  $\{1, 3\}$  ó  $\{2, 3\}$  y que tengan la propiedad de que  $G \setminus \{1, 3\}$  o  $G \setminus \{2, 3\}$  sea la unión de tres componentes conexas, una con el vértice 1, otra con el 2 y otra con el 3. Continuamos este proceso hasta  $n$ , denotamos a  $V = V_n$ .

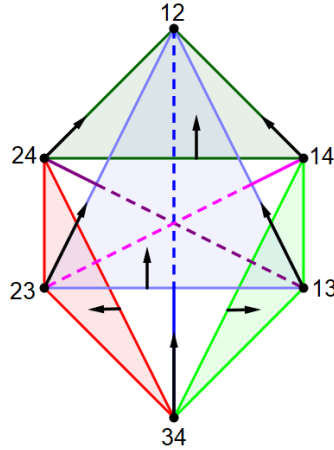


Figura 2.1: Emparejamiento en  $\mathcal{N}_4$ .

Veamos que  $V$  efectivamente es un campo vectorial gradiente, es decir no tiene caminos cerrados. Primero veamos que  $V_{12}$  es un campo vectorial gradiente:

Sea  $\gamma = \alpha_0^p, \beta_0^{p+1}, \alpha_1^p$  un  $V_{12}$ -camino, tenemos que  $(\alpha_0, \beta_0) \in V_{12}$ , es decir  $\beta_0 = \alpha_0 \cup \{1, 2\}$ . Ahora, como  $\alpha_1$  es cara de  $\beta_0$  diferente de  $\alpha_0$  tenemos que  $\alpha_1 = \alpha_0 \cup \{1, 2\} \setminus e$ , donde  $e$  es una arista de  $\alpha_0$  diferente de  $\{1, 2\}$ . Por tanto  $\alpha_1$  contiene a  $\{1, 2\}$  entonces  $\alpha_1$  es final de flecha en  $V_{12}$ , es decir  $\gamma$  no puede continuar a un  $V_{12}$ -camino más largo por tanto  $V_{12}$  no tiene caminos cerrados.

Ahora, supongamos que en  $V_{i-1}$  no tenemos caminos cerrados, veremos que en  $V_i$  tampoco tendremos:

Sea  $\gamma = \alpha_0, \beta_0, \alpha_1$  un  $V_i$ -camino. En particular tenemos que  $(\alpha_0, \beta_0) \in V_i$ , entonces tenemos dos casos,

- $\alpha_1$  es final de flecha en  $V_i$  en cuyo caso el  $V$ -camino no puede continuar.
- $\alpha_1$  es emparejado en  $V_{i-1}$ , por hipótesis de inducción.

En cualquiera de los dos casos,  $\gamma$  no puede continuar, y análogamente no tiene caminos cerrados.

Esta construcción genera un complejo de Morse  $\mathcal{M}$  que consiste de simplejos correspondientes a:

- La gráfica que consiste de la arista  $\{1, 2\}$ .
- Las gráficas con exactamente dos componentes conexas, una con el vértice 1 y otra con el vértice 2. Más aún las componentes conexas son arboles, y las etiquetas de cada rama van creciendo a partir del 1 y 2 respectivamente.

Veamos que estos últimos son  $(n-1)!$ , procedamos por inducción sobre  $n$ :

Para  $n = 3$ , tenemos únicamente dos gráficas, es decir  $(3-1)!$



Supongamos que las gráficas en el nivel  $n$  son  $(n-1)!$ , demostraremos que para el nivel  $n+1$  son  $n!$  gráficas. Tendremos que las gráficas en el nivel  $n$  serán  $n$  por cada gráfica en el nivel  $n-1$  (es decir, para cada gráfica podemos hacer una rama nueva etiquetada con  $n+1$  en cada vértice del árbol), por tanto son  $n(n-1)! = n!$ .

Donde cada uno de estas gráficas tiene  $n-2$  aristas  $(n-1-(12))$  que le corresponden a un  $(n-3)$ -simplejo de  $\mathcal{N}_n$ . Se sigue que

$$\mathcal{N}_n \simeq \bigvee_{i=1}^{(n-1)!} S_i^{n-3}.$$

### 2.6.2. Colapso equivariante de $\mathcal{N}_n$

La propiedad de ser no-conexo es una propiedad de gráficas, es decir sólo depende del tipo de isomorfismos de la gráfica. Así cualquier re-etiquetamiento de los vértices es dado por una permutación de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , tenemos una acción de  $S_n$  en  $\mathcal{N}_n$ .

Sin embargo, esta acción de grupo no se restringe a el complejo de Morse  $\mathcal{M}$  de la subsección anterior, ya que las etiquetas en las ramas de  $G$  crecen a partir de 1 y 2, esto no puede ser así después de un re-etiquetamiento en los vértices. Geométricamente, esto

quiere decir que las equivalencias homotópicas que construyó Forman no respetan las simetrías de  $\mathcal{N}_n$ .

Nos gustaría construir un emparejamiento de Morse que respete las simetrías de  $\mathcal{N}_n$ , y que el complejo de Morse tenga un 0-simplejo y  $(n-1)!$  simplejos de dimensión  $n-3$ . No podemos hacer ésto  $S_n$ -equivariantemente, ya que no hay ningún 0-simplejo en  $\mathcal{N}_n$  que se fije por  $S_n$ . Consideremos el subgrupo  $\Gamma \subseteq S$  que fije  $\{1, 2\}$ . Podemos ver que  $\Gamma \cong C_2 \times S_{n-2}$  ya que permuta  $\{1, 2\}$  y  $\{3, \dots, n\}$  independientemente. Así tendremos una acción de  $C_2 \times S_{n-2}$  en  $\mathcal{N}_n$ . Éste es el grupo  $\Gamma$  más grande tal que  $\mathcal{N}_n \simeq_{\Gamma} \mathcal{M}$  si  $\mathcal{M} \cong \bigvee_{i=1}^{(n-1)!} S_i^{n-3}$ .

De aquí en adelante denotaremos por  $\Gamma$  a  $C_2 \times S_{n-2}$ . Construiremos un EMG  $\sim$ , cuyo complejo de Morse sea isomorfo a  $\bigvee_{i=1}^{(n-1)!} S_i^{n-3}$  y que  $\sim$  sea  $\Gamma$ -equivariante.

Denotemos por  $M$  el subconjunto de  $\mathcal{N}_n$  que consiste de:

- la gráfica con sólo la arista  $e = \{1, 2\}$ .
- las gráficas que son unión de dos cadenas, una con el vértice siendo el punto final de una cadena y el vértice 2 siendo el final de la otra cadena.

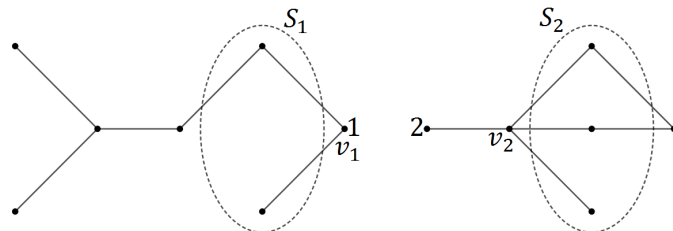
La meta es emparejar por intervalos todas las gráficas en  $\mathcal{N}_n$  excepto las de  $M$ , el emparejamiento  $\sim$  será construido en dos etapas: Sea  $G \in \mathcal{N} - M$ ,

1. Si la gráfica  $G$  contiene la arista  $e = \{1, 2\}$  y al menos una arista más (es decir  $G \setminus e \neq \emptyset$ ), emparejamos  $[G \setminus e, G]$  en  $\sim$ . Note que  $G \setminus e \in \mathcal{N}_n$  y  $G \setminus e \notin M$ .

Sea  $M' = \{G \in \mathcal{N}_n - M \mid e \not\subseteq G\}$ , esto implica que  $\mathcal{N}_n - M - M'$  es el conjunto de las gráficas en  $\mathcal{N}_n$  que consiste de la gráfica  $e$ , y las gráficas que no contienen a  $e$ , pero  $G \cup e$  es conexo (es decir, tales que  $G \cup e \notin \mathcal{N}_n$ ).

2. Sea  $G$  una gráfica no emparejada, es decir,  $G \in \mathcal{N}_n - M' - M$ , ésto implica que  $\mathcal{N}_n - M' - M$  tiene exactamente dos componentes, una componente que contiene al vértice 1 y otra componente al vértice 2. Denotemos sus componentes por  $G^1$  y  $G^2$ .

Sigamos a  $G^1$  a partir de 1. Si  $G_1$  no es una cadena existe un primer vértice  $v_1$  en el cual ésto no se puede hacer de manera única. Más aún, entre todos estos vértices,  $v_1$  es el de distancia minimal a 1. Sea  $S_1$  el conjunto de los vecinos de  $v_1$  menos el que forma la cadena de  $v_1$  a 1 (si  $v_1 \neq 1$ ). Si  $G_1$  es una cadena, definimos  $S_1 = \emptyset$ . Análogamente construimos  $S_2$  para  $G^2$ . Podemos darnos una idea en la siguiente imagen.



Podemos ver que si  $G$  no esta emparejada, es decir  $G \in \mathcal{N}_n - M - M'$  si y sólo si al menos  $v_1$  ó  $v_2$  están definidos y al menos un  $S_1$  ó  $S_2$  es no vacío con más de un elemento.

Sea  $G = G_1 \cup G_2$  una gráfica no emparejada, es decir  $G \in \mathcal{N}_n - M - M'$  y además  $G$  no tiene aristas entre los vértices dentro de  $S_1$  o entre vértices dentro de  $S_2$ . Construimos a partir de  $G$  la gráfica  $G'$  donde agregamos todas las posibles aristas en  $S_1$  y todas las posibles aristas en  $S_2$ , así  $G'$  restringida a  $S_i$  es completa para cada  $i = 1, 2$ . Note que  $[G, G']$  es el conjunto de gráficas  $H$  tal que  $G \subseteq H \subseteq G'$  y emparejamos  $[G, G']$  en  $\sim$ . Finalmente, si  $H$  es una gráfica tal que  $H \in \mathcal{N} - M - M'$  que tiene aristas dentro de  $S_1$  o dentro de  $S_2$ , quitamos dichas aristas y llamamos  $G$  a dicha gráfica, entonces es claro que  $H \in [G, G']$  y así todas las gráficas en  $\mathcal{N}_n - M$  quedan emparejadas.

Veamos que  $\sim$  es un EMG  $\Gamma$ -equivariante, pero primero veamos que efectivamente las gráficas de  $M$  no son emparejadas.

**Lema 2.6.3.** Las gráficas en  $\mathcal{N}_n$  que quedan sin emparejar por  $\sim$  son aquellas en  $M$ .

**Demostración.** La gráfica con sólo la arista  $\{1, 2\}$  está claramente sin pareja. Todas las gráficas  $H$  que están sin emparejar después de la primer etapa, que no están en  $M$ , tienen  $S_1$  ó  $S_2$  no-vacío. Sea  $G$  construido a partir de  $H$  eliminando todas las aristas en  $S_1$  y  $S_2$ . Entonces  $H \in [G, G']$ , así  $H$  es emparejado en la segunda etapa. Por otro lado, las gráficas en  $M$  no están emparejadas en la primera etapa y tienen  $S_1$  y  $S_2$  vacío, así que son no emparejadas por  $\sim$ . ■

**Proposición 2.6.4.** El emparejamiento  $\sim$  anterior es un emparejamiento generalizado de Morse  $\Gamma$ -equivariante.

**Demostración.** Primero veamos que  $\sim$  es un EMG.

Supongamos por contradicción que existe un ciclo cerrado  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v_1 \in P(\mathcal{N}_n)/\sim$ . su preimagen en  $P(\mathcal{N}_n)$  tiene la forma

$$H_1 \not\supseteq (G_2 \subseteq H_2) \not\supseteq \dots \not\supseteq (G_n \subseteq H_n) \not\supseteq (G_1 \subseteq H_1),$$

donde  $G_i$  y  $H_i$  están en el mismo intervalo en  $\sim$  (posiblemente  $G_i$  y  $H_i$  son iguales),  $H_i$  y  $G_{i+1}$  difieren sólo por una arista. Tenemos dos casos:

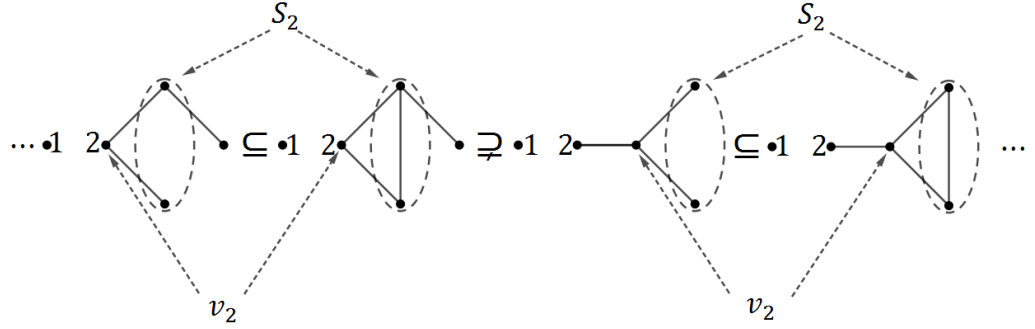
1. Si para algún  $i$ ,  $H_i$  y  $G_i$  son emparejadas en la primera etapa, tenemos que  $e = \{1, 2\} \in H_i$  y  $G_i = H_i - e$ .

Debe ocurrir que  $G_{i+1} \neq G_i$  implica que  $G_{i+1}$  también contiene a  $e$ , en efecto:

$$(G_i = H_i - e \subseteq H_i) \not\supseteq (G_{i+1} \subseteq H_{i+1}).$$

Pero  $G_{i+1}$  difiere de  $H_i$  por sólo una arista, es decir  $G_{i+1} = H_i - f$  para alguna arista  $f \in H_i$ . lo cual implica que  $f \neq e$  (pues si  $f = e$ , tendríamos que  $G_i = H_i - e = H_i - f = G_{i+1}$ ) por tanto  $e \in H_i - f = G_{i+1} \subseteq H_{i+1}$  es decir  $e \in G_{i+1}$  y  $e \in H_{i+1}$ , lo cual implica que no es posible que  $G_{i+1} \neq H_{i+1}$  pues por construcción ó bien  $e \in H_{i+1}$  y  $e \notin G_{i+1}$  ó ni  $G_{i+1}$  ni  $H_{i+1}$  contienen a  $e$ . Por tanto  $H_{i+1} = G_{i+1} = H_i - f$  con  $f \neq e$ , lo que implica que  $e \in H_{i+1}$ . Repitiendo el argumento  $e \in H_{i+2} = G_{i+2}$  implica  $\dots e \in H_n = G_n$  implica que  $e \in G_1 = H_1$  lo cual no es posible pues  $e \notin G_1$ .

2. Si  $e \notin H_i$  para todo  $i$ . Todos los emparejamientos en el ciclo ocurren en la segunda etapa. Entonces, los pasos  $\subseteq$  en la sucesión no afectan ni  $S_i$  ni  $v_i$  o el camino de  $i$  a  $v_i$  para  $i = 1, 2$ , ésto es inmediato de la construcción de  $\sim$ , podemos verlo en la siguiente imagen.

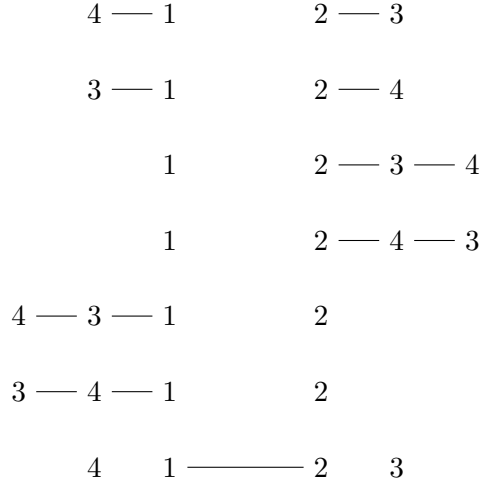


Así para que el ciclo se cierre, esto no debe ser afectado tampoco en los pasos  $\supseteq$ . Entonces, en los pasos  $\supseteq$ , estamos removiendo aristas más lejanas de  $v_i$  que  $S_i$ . Por otro lado, estas aristas no afectan lo que pasa en los pasos  $\subseteq$ . Esto implica que tales aristas sólo pueden ser removidas en el sentido derecho de la sucesión. Pero cada  $\supseteq$  es una inclusión estricta, ya que  $G_{i+1}$  es una cara propia de  $H_i$  en  $\mathcal{N}_n$ . Esto contradice que tengamos un ciclo cerrado.

Ahora, la construcción de  $\sim$  es independiente de las etiquetas de los vértices  $3, \dots, n$ , y no depende de 1 y 2 por tanto se sigue que  $\sim$  es  $C_2 \times S_{n-2}$ -equivariante. ■

Ahora analizaremos la acción del grupo en el complejo de Morse. Si las dos cadenas de  $G$  tienen la misma longitud, existe un único elemento de  $\Gamma$  que fija  $G$ , digamos aquel intercambiar las dos cadenas. Si las cadenas tienen diferente longitud, no existe elemento que fije a  $G$ , ya que tal elemento manda las etiquetas en la cadena larga en ellos mismos, y las etiquetas en la cadena más corta en ellos mismos. La órbita de una gráfica  $G$  es determinada por la longitud de la cadena más grande de  $G$ , es decir, todas las gráficas con la misma longitud en su cadena más larga están en la misma órbita. Ésto puede ser un número entre  $\frac{n}{2}$  y  $n-1$ , así hay  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  órbitas en  $M$ .

**Ejemplo 2.6.5.** Para  $n = 4$ , tenemos que  $M$  está formado por las siguientes gráficas:



$\Gamma$ , en este caso es  $C_2 \times S_2$ , es decir

$$\Gamma = \{(1) \times (1), (1) \times (34), (12) \times (1), (12) \times (34)\}.$$

Entonces, las órbitas son

$$\begin{array}{ccc}
 4-1-2-3 \xrightarrow{(1) \times (1)} 4-1-2-3 & 1-2-3-4 \xrightarrow{(1) \times (1)} 1-2-3-4 & 4-1-2-3 \xrightarrow{(1) \times (1)} 4-1-2-3 \\
 \xrightarrow{(1) \times (34)} 3-1-2-4 & \xrightarrow{(1) \times (34)} 1-2-4-3 & \xrightarrow{(1) \times (34)} 4-1-2-3 \\
 \xrightarrow{(12) \times (1)} 3-1-2-4 & \xrightarrow{(12) \times (1)} 4-3-1-2 & \xrightarrow{(12) \times (1)} 4-1-2-3 \\
 \xrightarrow{(12) \times (34)} 4-1-2-3 & \xrightarrow{(12) \times (34)} 3-4-1-2 & \xrightarrow{(12) \times (34)} 4-1-2-3
 \end{array}$$

Entonces tenemos tres órbitas.

Tenemos que hay un complejo de Morse  $M$  con una  $(p-1)$ -celda por cada gráfica en  $M$  con  $p$  aristas tal que  $M \simeq_{\Gamma} \mathcal{N}_n$ , en efecto, una gráfica con  $p$ -aristas en  $\mathcal{N}_n$  tiene  $p$  vértices (por definición los vértices son las aristas), por tanto es un  $(p-1)$ -simplejo, es decir una  $p-1$ -celda.

Ahora determinaremos cuantas celdas tiene  $M$ , que dimensiones tienen las celdas de  $M$  y como es la acción del grupo  $\Gamma$ .

Por definición  $M$  contiene una gráfica con una arista, que es  $e = \{1, 2\}$ . Todas las otras gráficas de  $M$  consisten de dos cadenas ajenas. En general si hay  $n$  vértices,  $G \in M$  tiene  $n-2$  aristas.

**Observación. 2.6.6.** Hay  $(n-1)!$  gráficas en  $M$  que son la unión ajena de dos cadenas.

**Demostración.** Para contarlas veamos los tipos de gráficas que existen. Ya que los vértices 1 y 2 están fijos, transponiendo los demás vértices tenemos los siguientes tipos de gráficas:

$$1 \quad 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } \cdots \text{ --- } n \quad \text{hay } (n-2)! \text{ gráficas de este tipo}$$



3 — 1      2 —  $\cdots$  —  $n$     hay  $(n-2)!$  gráficas de este tipo

$\vdots$

$n$  —  $\cdots$  — 3 — 2      1    hay  $(n-2)!$  gráficas de este tipo

entonces hay  $(n-1)$  tipos de gráficas con  $(n-2)!$  gráficas cada uno. Por tanto hay  $(n-1)(n-2)! = (n-1)!$  gráficas en  $M$

■

Recuerde que por definición cada arista en  $M$  representa un vértice, la 0-celda que corresponde a  $\{1, 2\}$  y las  $(n-1)!$  celdas corresponden a las gráficas que son unión ajena de dos cadenas donde en un extremo de una aparece el vértice 1 y en un extremo de la otra aparece el vértice 2 (por la observación anterior hay  $(n-1)!$  de estas gráficas). Cada una de estas gráficas es de dimensión  $(n-3)$  pues cada gráfica tiene  $(n-2)$  aristas lo que implica que el simplejo en  $\mathcal{N}_n$  que representa dicha gráfica tiene  $(n-2)$  vértices, es decir, que es un  $(n-2) - 1 = (n-3)$  simplejo (recordemos que en general un simplejo de  $k+1$  vértices es un  $k$ -simplejo por definición).

Por el parrafo anterior tenemos que

$$M \simeq \bigvee_{i=1}^{(n-1)!} S_i^{n-3}.$$

Procedamos ahora a determinar la acción de  $\Gamma$ : Sea  $G$  una gráfica en  $M$  que no es  $e = \{1, 2\}$ . Si las dos cadenas de  $G$  tienen la misma longitud, entonces existe exactamente un elemento  $\gamma \neq \text{Id}$  en  $\Gamma$  que fija  $G$  (explícitamente el que intercambia las dos cadenas). Si las cadenas en  $G$  tienen distinta longitud entonces no existe elemento  $\gamma \neq \text{Id}$  en  $\Gamma$  que fije a  $G$  ya que tal elemento debería enviar las etiquetas (vértices) de la cadena más larga en si mismas, y las etiquetas de la cadena más corta en si mismas.

Sea  $G \in M$  una gráfica con sus longitudes de cadenas distintas, entonces la órbita de  $G$ ,  $\Gamma.G$  es tal que  $|\Gamma.G| = (n-2)!2$ , pues hay  $(n-2)$  etiquetas (diferentes de 1 y 2), por tanto hay  $(n-2)!$  posibilidades, luego multiplicamos por 2 pues podemos permutar al 1 por 2. Ahora sea  $G \in M$  una gráfica con longitudes de cadenas iguales, en este caso hay igual  $(n-2)$  etiquetas, por tanto  $(n-2)!$  posibilidades, pero en este caso no contamos con la permutación de 1 por 2 pues nos da una gráfica repetida.

Tenemos que hay  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  órbitas en  $M$ , en efecto la órbita de una gráfica  $G \in M$  está determinada por la longitud de su cadena más larga, es decir si  $G$  tiene una cadena de longitud  $m$  entonces todos los elementos de la órbita de  $G$  tienen la misma forma (una cadena de longitud  $m$ ), entonces si  $n$  es par hay  $\frac{n}{2}$  representantes por cada órbita y si  $n$  es impar hay  $\frac{n-1}{2}$  representantes, por tanto para una  $n$  en general hay  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

**Definición 2.6.7.** Sean  $(X, x_0)$  y  $(Y, y_0)$ . Definimos el producto smash como:

$$X \wedge Y = X \times Y / (\{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\}).$$

Si  $\Gamma$  es un grupo topológico, definimos  $\Gamma^+$  como  $\Gamma$  con un punto base ajeno, fijado por  $\Gamma$ . Entonces  $\Gamma^+ \wedge S^n$  es un cuña de esferas indexadas por  $\Gamma$ :

En general, si tenemos espacios topológicos punteados  $(X \sqcup +, +), (Y, y_0)$  entonces

$$\begin{aligned} (X \sqcup +) \wedge Y &= \frac{(X \sqcup +) \times Y}{(+ \times Y) \cup (X \sqcup +) \times y_0} \\ &= \frac{X \times Y \sqcup (+ \times Y)}{(+ \times Y) \cup X \sqcup y_0(+ \times y_0)} \\ &\cong \frac{X \times Y}{X \times y_0} \\ &\cong \bigvee_{(x, y_0) \in X \times y_0} \{x\} \times Y \\ &\cong \bigvee_{x \in X} Y, \end{aligned}$$

donde el cuarto homeomorfismo se obtiene ya que  $\frac{+ \times Y}{(+ \times Y) \sqcup (+ \times y_0)}$  se colapsa a un punto. Por tanto,

$$\Gamma^+ \wedge S^n \cong \frac{\Gamma \times S^n}{\Gamma \times s_0} \cong \bigvee_{\gamma \in \Gamma} S^n.$$

Si  $H \subseteq \Gamma$  actúa en  $X$ , entonces  $H$  actúa en  $\Gamma^+ \wedge X$  por

$$h[\gamma, x] = [\gamma h^{-1}, hx].$$

Veamos que esta bien definido, sea  $e \in H$  el elemento neutro, por tanto

$$e[\gamma, x] = [\gamma e, ex] = [\gamma, x],$$

sean  $h_1, h_2 \in H$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (h_1 h_2)[\gamma, x] &= [\gamma (h_1 h_2)^{-1}, h_1 h_2 x] \\ &= [\gamma h_2^{-1} h_1^{-1}, h_1 h_2 x] \\ &= h_1 [\gamma h_2^{-1}, h_2 x] \\ &= h_1 (h_2 [\gamma, x]), \end{aligned}$$

por definición,  $[\gamma, x] = (+, x)$  ó  $(\gamma, x_0)$ , entonces si  $[\gamma, x] = (+, x)$ ,

$$h[\gamma, x] = h(+, x) = (+h^{-1}, hx) = (+, hx) = [\gamma h^{-1}, hx]$$

y si  $[\gamma, x] = (\gamma, x_0)$

$$h[\gamma, x] = h(\gamma, x_0) = (\gamma h^{-1}, hx_0) = (\gamma h^{-1}, x_0) = [\gamma h^{-1}, hx].$$

Sea  $\Gamma^+ \wedge_H X = \Gamma^+ \wedge X / H$  hereda la acción de  $\Gamma$  en la primera coordenada.

Veamos que, como  $\Gamma$ -complejos,  $\Gamma^+ \wedge S^n$  puede construirse a partir de  $\Gamma \times D^n$  pegandole una 0-celda, y a  $\Gamma^+ \wedge_H S^n$  a partir de  $\Gamma \times_H D^n$  pegandole una 0-celda. Más aún,  $\Gamma^+ \wedge S^n \cong \Gamma^+ \wedge_H S^n$  si  $H$  es trivial.

Regresando al tipo de homotopía de  $\mathcal{N}_n$ , tenemos dos casos. El caso cuando  $n$  es par lo veremos más adelante. Cuando  $n$  es impar, la clasificación se vuelve más simple:

**Teorema 2.6.8.** Para  $n \geq 3$  con  $n$  impar,

$$\mathcal{N}_n \cong_{\Gamma} \bigvee_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \Gamma^+ \wedge S_i^{n-3}.$$

**Demostración.**

$$\bigvee_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \Gamma^+ \wedge S_i^{n-3} = \bigvee_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left( \bigvee_{\gamma \in \Gamma} S_{\gamma}^{n-3} \right) = \bigvee_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left( \bigvee_{j=1}^{|\Gamma|} S_j^{n-3} \right) = \bigvee_{i=1}^{(n-1)!} S_j^{n-3} \simeq_{\Gamma} \mathcal{N}_n.$$

■

El lado derecho denota el cuña de  $\frac{n-1}{2}$  órbitas de  $(n-3)$ -celdas, donde la acción de grupo es libre en cada órbita.

En el caso donde  $n$  es par, tenemos otro problema. Como una de las órbitas tiene acción de grupo no-libre, no podemos tener a priori que todas las celdas pueden ser identificadas a un punto. Por ejemplo para  $n = 4$  la órbita de  $4 - 1 \ 2 - 3$  no es libre por el elemento  $(12) \times (34)$ .

**Lema 2.6.9.** Cualesquiera dos gráficas en  $M$ , excepto la gráfica que contiene sólo a  $\{1, 2\}$ , están no relacionadas en  $P(K)/\sim$ .

**Demostración.** Supongamos que las gráficas  $G$  y  $H$  son críticas, y que  $G < H$  en  $P(K)/\sim$ . Entonces existe un camino

$$H \supset G_1 \subseteq H_1 \supset \cdots \supset G_n \subseteq H_n \supset G,$$

donde  $G_i$  esta emparejado a  $H_i$  por  $\sim$ .

Como  $H$  es crítico, entonces es la unión de dos cadenas disjuntas, se sigue que  $G_1$  es la unión de tres cadenas disjuntas. Pero tales gráficas están emparejadas a  $H_1 = G_1 \cup e$  con  $e = \{1, 2\}$ .

Por inducción vemos que todos los  $G_i$  contienen a  $e$  o al menos tres componentes conexas:

$G_2 = G_1$  ó contiene a  $e$ . Supongamos que  $G_i$  contiene a  $e$ , esto implica que  $H_i = G_i$  lo cual implica que  $G_{i+1} = H_i \setminus e$  es decir tiene tres componentes conexas ó  $G_{i+1}$  contiene a  $e$ . Por otro lado, supongamos que  $G_i$  tiene tres componentes conexas, tenemos que  $H_i = G_i \cup e$  por tanto  $G_{i+1} = G_i$  que tiene tres componentes conexas ó  $G_{i+1}$  tiene a  $e$ . ■

Así no habrá relaciones entre las gráficas correspondientes a  $(n-3)$ -celdas en el complejo de Morse. Entonces ésto se puede probar bajo cualquier orden en la extensión lineal.

En particular, podemos ignorar las gráficas con dos cadenas de igual longitud por el momento. Sea  $\mathcal{M}'$  el complejo de Morse antes de agregar éstos. Supongamos  $n$  par.

Las celdas correspondientes a gráficas con cadenas de igual longitud, tienen grupo de invarianza de orden 2, la transposición  $(1, 2)$  y  $\frac{n}{2} - 1$  transposiciones de los demás vértices

según su posición en la cadena.

Sea  $\Lambda \subseteq \Gamma$  el grupo cíclico de orden 2, generado por  $\tau = (1, 2)(3, 4) \cdots (n-1, n)$ . Ahora

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}' \bigcup_{\Gamma \times_{C_2} \partial D^{n-3}} \Gamma \times_{C_2} D^{n-3}.$$

La acción de grupo en cada órbita en  $\mathcal{M}'$  es libre, así que el único punto en  $\mathcal{M}'$  que queda invariante para algún grupo es la 0-celda. Así el operador frontera sera equivariante, y deberá pegar estas últimas celdas a la celda en  $\mathcal{M}'$ . Entonces

**Teorema 2.6.10.** Sea  $n > 3$  un número par, entonces

$$\mathcal{N}_n \cong_{\Gamma} \bigvee_{i=1}^{\frac{n}{2}} \Gamma^+ \wedge_{H_i} S_i^{n-3},$$

donde  $H_i$  es trivial para  $i = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$  y donde  $H_{\frac{n}{2}} = \Lambda = \langle \tau \rangle$ .

**Demostración.** En general se cumple:

$$H_k(\bigvee_{i=1}^n X_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n H_k(X_i)$$

veáse en [2, Problema 3, p.190].

También  $G_+ \wedge_H X \cong (G/H)_+ \wedge X$  es un  $G$ -homeomorfismo (ver [11, p. 13]).

Además

$$\tilde{H}_n((G/H)_+ \wedge S^n) \cong \tilde{H}_0((G/H)_+) \cong H_0(G/K),$$

(ver [11, p. 17]).

Por tanto,

$$H_{n-3}(\bigvee_{i=1}^{\frac{n}{2}} \Gamma^+ \wedge_{H_i} S_i^{n-3}) = \bigoplus_{i=1}^{\frac{n}{2}} H_{n-3}(\Gamma^+ \wedge_{H_i} S_i^{n-3})$$

donde  $H_i$  es trivial para toda  $i \neq \frac{n}{2}$  y  $H_{\frac{n}{2}} = \langle \tau \rangle = \Lambda$ . Ésto implica que

$$\begin{aligned} H_{n-3}(\mathcal{N}_n) &= \bigoplus_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} H_{n-3}(\Gamma^+ \wedge S^{n-3}) \oplus H_{n-3}(\Gamma^+ \wedge_{\Lambda} S^{n-3}) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \mathbb{Z}[\Gamma] \oplus H_{n-3}(\Gamma^+ \wedge_{\Lambda} S^{n-3}), \end{aligned}$$

pero  $H_{n-3}(\Gamma^+ \wedge_{\Lambda} S^{n-3}) = H_0(\Gamma/\Lambda) = \mathbb{Z}[\Gamma/\Lambda] = \mathbb{Z}[S_{n-2}]$ , por tanto

$$H_{n-3}(\mathcal{N}_n) = \bigoplus_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \mathbb{Z}[\Gamma] \oplus \mathbb{Z}[S_{n-2}].$$

■

## Capítulo 3

# Resultados

En este capítulo presentaremos un algoritmo para obtener un emparejamiento de Morse generalizado, a partir de un complejo simplicial y una función inyectiva definida en sus vértices. Comenzaremos dando las definiciones de algunos conjuntos y funciones que se utilizan a lo largo de ambos algoritmos. Después presentaremos los pseudocódigos que se utilizan en el algoritmo que presentamos e ilustraremos con algunos ejemplos. Demostraremos que efectivamente este emparejamiento efectivamente es un emparejamiento de Morse generalizado y expondremos como se realiza el cálculo de sus grupos de homología. Por último haremos una comparación en duración y cantidad de críticos que arrojan nuestro algoritmo y el presentado en [10].

### 3.1. Algoritmo para generar un emparejamiento de Morse generalizado

En esta sección nos inspiraremos en el trabajo de Neza [10], podemos encontrar el pseudocódigo de su algoritmo en A.2. Presentaremos un algoritmo que calcule un emparejamiento de Morse generalizado para un complejo simplicial finito  $K$ . Pediremos que  $K$  este expresado en sus caras maximales y con una función inyectiva  $h : \text{Vert}(K) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ . El algoritmo arrojará una lista  $L$  de intervalos de diferente longitud.

Antes de presentar el pseudo código, necesitamos establecer unas definiciones conocidas y definir algunas funciones y conjuntos.

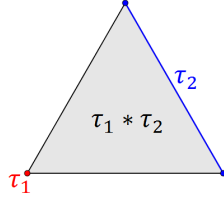
**Definición 3.1.1.** Para  $\tau_1, \tau_2 \in K$ , definimos el **join**(o junta) de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  denotado por  $\tau_1 * \tau_2$  como

$$\tau_1 * \tau_2 := \{\sigma_1 \cup \sigma_2 \mid \sigma_i \in \tau_i, i = 1, 2\}.$$

En palabras, el join de dos simplejos es el complejo simplicial formado por los vértices de ambos simplejos.

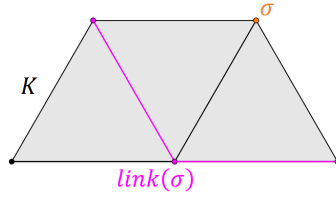
**Ejemplo 3.1.2.** Sean  $\tau_1 = \{v_1\}$  y  $\tau_2 = \{v_2, v_3\}$ .

$$\begin{aligned} \tau_1 * \tau_2 &= \{v_1 \cup \emptyset, v_1 \cup v_2, v_1 \cup v_3, v_1 \cup \{v_2, v_3\}, \emptyset \cup \emptyset, \emptyset \cup v_2, \emptyset \cup v_3, \emptyset \cup \{v_2, v_3\}\} \\ &= \{v_1, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \emptyset, v_2, v_3, \{v_2, v_3\}\} \end{aligned}$$



**Definición 3.1.3.** Para  $\sigma \in K$ , definimos el **link** de  $\sigma$  por

$$\text{link}_K(\sigma) := \{\tau \in K \mid \sigma * \tau \in K, \sigma \cap \tau = \emptyset\}.$$



Ahora veamos la siguiente función que viene en [10]:

$$\begin{aligned} \text{mín } h : K &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sigma &\mapsto \min_{v \in \text{Vert}(\sigma)} h(v) \end{aligned}$$

E inspirados en la construcción del Lowerlink que de igual manera lo podemos encontrar en [10], definamos el siguiente conjunto:

$$\text{Maxlink}_K(\sigma) := \{\tau \in \text{link}_K(\sigma) \mid \text{mín } h(\tau) > \text{mín } h(\sigma)\}.$$

Veamos que  $\text{Maxlink}_K(\sigma)$  es un subcomplejo de  $K$ .

**Proposición 3.1.4.**  $\text{Maxlink}_K(\sigma)$  es un subcomplejo simplicial de  $\text{link}_K(\sigma)$ .

**Demostración.** Es claro que  $\text{Maxlink}_K(\sigma) \subseteq \text{link}_K(\sigma)$ .

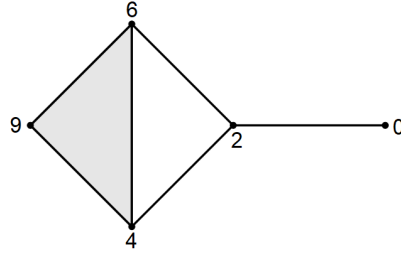
Sea  $\delta = \{v_0, \dots, v_m\} \in \text{Maxlink}_K(\sigma)$  y  $\alpha = \{v_0, \dots, v_n\} \subset \delta$  con  $n < m$ . Veamos que  $\alpha \in \text{Maxlink}_K(\sigma)$ :

Como  $\delta \in \text{Maxlink}_K(\sigma)$  tenemos que  $\text{mín } h(\delta) > \text{mín } h(\sigma)$ , por tanto existe  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$  tal que  $\text{mín } h(\delta) = h(v_i)$ . Tenemos los siguientes casos:

- Si  $i \in \{0, \dots, n\}$ , tenemos que  $\text{mín } h(\alpha) = h(v_i) > \text{mín } h(\sigma)$  y así  $\alpha \in \text{Maxlink}_K(\sigma)$ .
- Si  $i \in \{n+1, \dots, m\}$  implica por la inyectividad de  $h$  que  $h(v_i) \neq \text{mín } h(\alpha)$ , veamos que  $\text{mín } h(\alpha) > \text{mín } h(\delta)$ , si  $\text{mín } h(\alpha) < \text{mín } h(\delta)$  tendríamos por definición de  $\text{mín } h$  que  $\text{mín } h(\alpha) = \text{mín } h(\delta)$  lo cual es una contradicción. Por tanto  $\text{mín } h(\alpha) > \text{mín } h(\delta) > \text{mín } h(\sigma)$  y así  $\alpha \in \text{Maxlink}_K(\sigma)$ .

■

**Ejemplo 3.1.5.** Consideremos el siguiente complejo con la función denotada en sus vértices.



entonces  $\text{Maxlink}(4) = \{6, 9, \{6, 9\}\}$ .

Dados  $v \in \text{Vert}(K)$  y  $L$  una lista de intervalos definamos el siguiente conjunto

$$v * L := \{[v * \sigma, v * \tau] \mid [\sigma, \tau] \in L\},$$

**Ejemplo 3.1.6.** Sea  $L = \{[2, 245], [3], [4, 45]\}$  y  $v = 1$ , entonces

$$1 * L = \{[12, 1245], [13], [14, 145]\},$$

donde  $*$  denota a el operador Join.

Definamos un orden para los  $n$ -simplejos de un complejo inspirado en el orden lexicográfico. Primero, ordenemos a los vértices por su valor en  $h$ , es decir, si  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  entonces  $h(v_0) < \dots < h(v_n)$ . Ahora, al  $n$ -simplejo  $\sigma$  le asignamos la siguiente sucesión

$$h(v_n), h(v_{n-1}), \dots, h(v_0).$$

Dados dos  $n$ -simplejos  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}, \tau = \{w_0, \dots, w_n\}$ , diremos que  $\sigma <_h \tau$  si sus respectivas sucesiones son diferentes y además sucede que  $h(v_{n-i}) < h(w_{n-i})$  para la primera  $i \in \{0, \dots, n\}$  donde  $h(v_{n-i})$  y  $h(w_{n-i})$  difieren.

Veamos que  $<_h$  es realmente un orden (así como el orden lexicográfico).

**Proposición 3.1.7.** La relación  $<_h$  es un orden parcial.

**Demostración.** Sean  $\sigma, \tau, \rho \in K$  tal que,  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}, \tau = \{w_0, \dots, w_n\}, \rho = \{u_0, \dots, u_n\}$ .

- Tenemos que para todo  $\sigma \in K$ ,  $\sigma =_h \sigma$  pues  $h(v_{n-i}) = h(v_{n-i})$  para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ .
- Supongamos que  $\sigma <_h \tau$  y  $\tau <_h \rho$ , veamos que  $\sigma <_h \rho$ : Como  $\sigma <_h \tau$  tenemos que existe  $i \in \{0, \dots, n\}$  tal que  $h(v_{n-i}) < h(w_{n-i})$  y como  $\tau <_h \rho$  tenemos que existe  $j \in \{0, \dots, n\}$  tal que  $h(w_{n-j}) < h(u_{n-j})$ . Entonces para  $k = \min\{i, j\}$  tenemos que  $h(v_{n-k}) < h(u_{n-k})$  y es la primera  $k$  para la que  $h(v_{n-k})$  y  $h(u_{n-k})$  difieren, por tanto  $\sigma <_h \rho$ .
- Supongamos que  $\sigma \leq_h \tau$  y  $\tau \leq_h \sigma$  veamos que  $\sigma =_h \tau$ . Tenemos que existe  $i \in \{0, \dots, n\}$  tal que  $h(v_{n-i}) \leq h(w_{n-i})$  donde  $i$  es la primera en que  $h(v_{n-i})$  y  $h(w_{n-i})$  difieren, de la misma manera existe  $j \in \{0, \dots, n\}$  tal que  $h(w_{n-j}) \leq h(v_{n-j})$  donde  $j$  es la primera en que  $h(w_{n-j})$  y  $h(v_{n-j})$  difieren. Entonces por definicion de  $<_h$  tenemos que  $i = j$  pues ambas denotan la primera  $k$  para la que  $h(v_{n-k})$  y  $h(w_{n-k})$  difieren, por tanto  $h(v_{n-i}) \leq h(w_{n-i}) \leq h(v_{n-i})$ , es decir  $h(v_{n-i}) = h(w_{n-i})$  y así  $\sigma =_h \tau$ .

Por tanto  $<_h$  es un orden parcial. ■

Con este orden definimos  $\text{hmax.simplex}(K)$  como el simplejo máximo en  $K$  bajo el orden  $<_h$ .

la idea del algoritmo es que genere un emparejamiento de Morse generalizado donde cada simplejo sea emparejado con la supercara con dimensión más grande de éste cuyos  $h$ -valores sean los más grandes posibles. Al igual que en el algoritmo presentado en [10] este proceso se hará a través de vértices.

El pseudocódigo del algoritmo principal que llamaremos EMG es el siguiente:

---

**Algoritmo 1: EMG**

---

**Entrada:** Estructura simplicial en caras maximales  $K$

**Salida:** Lista de intervalos  $L$

```

1  $d = \emptyset$ 
2 función EMG( $K, d$ )
3   si  $K = \emptyset$  entonces
4      $L := \emptyset$ 
5   en otro caso
6     para  $v \in \text{Vert}(K) \setminus \text{Vert}(d)$  hacer
7       calcular  $\text{Maxlink}_K(v)$ 
8       si  $\text{Maxlink} = \emptyset$  entonces
9          $L \leftarrow [v]$ 
10      en otro caso
11         $d_v = \text{hmax.simplex}(\text{Maxlink}_K(v))$ 
12         $L \leftarrow [v, v * d_v]$ 
13         $K' := \text{Maxlink}_K(v) \setminus d_v$ 
14         $L' := \text{EMG}(K', d_v)$ 
15        si  $L' \neq \emptyset$  entonces
16           $L \leftarrow v * L'$ 
17   calcular Other.Critics( $K, L, d$ )
18   si Other.Critics( $K, L, d$ )  $\neq \emptyset$  entonces
19      $L \leftarrow \text{Other.Critics}(K, L, d)$ 
20   devolver  $L$ 
```

---

Como estamos trabajando con caras maximales habrá ocasiones en el procedimiento de EMG hasta el punto 16 haya omitido ciertos simplejos (es decir, que no los incluya en ningún intervalos). Other.Critics hará a éstos, críticos automáticamente. El pseudocódigo es el siguiente:



**Algoritmo 2:** OtherCritics

---

**Entrada:** Estructura simplicial en caras maximales  $K$ ,  
Última pareja utilizada  $d$   
**Salida:** Lista de críticos que no aparecieron en  $\text{EMG}(K, d)$

```

1 función ( $K, d$ )
2   para  $v \in \text{Vert}(d)$  hacer
3     calcular  $\text{Maxlink}_K(v)$ 
4     si  $\text{Maxlink}(K, v) \neq \emptyset$  entonces
5       para  $x \in \text{Maxlink}_K(v)$  hacer
6          $d_x := v * x$ 
7         si  $d_x \notin L$  entonces
8            $OC \leftarrow [d_x]$ 
9   devolver  $OC$ 

```

---

**Nota 3.1.8.** El algoritmo trabaja siempre con caras maximales, por ejemplo: Si  $K = \{1, 2, 3, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ , por definición,

$$\text{Maxlink}_K(1) = \{2, 3, \{2, 3\}\}.$$

Pero en el algoritmo,

$$\text{Maxlink}_K(1) = \{2, 3\}.$$

Ahora demostraremos que EMG realmente construye un emparejamiento de Morse generalizado en  $K$ .

**Proposición 3.1.9.** La función EMG genera un emparejamiento de Morse generalizado.

**Demostración.** Denotemos  $\sim = \{L\}$ . Veamos que efectivamente  $\sim$  es un EMG: Demostraremos que la construcción no genera caminos cerrados. Sea

$$[a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2] \rightarrow \dots [a_n, b_n] \rightarrow [a_1, b_1],$$

un camino cerrado en  $P(K)/\sim$ . Tenemos que cada flecha en el camino implica que el vértice más grande de  $a_{i+1}$  digamos  $v_{i+1}$  está en el Maxlink del vértice más grande de  $a_i$ , digamos  $v_i$ . Por tanto  $v_i < v_{i+1}$ , es decir

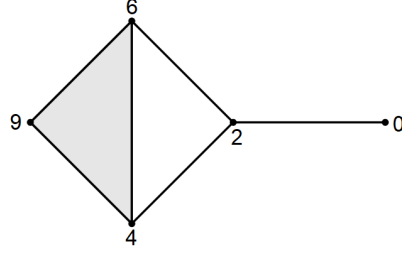
$$v_1 < v_2 < \dots < v_n < v_1,$$

lo cual es una contradicción. ■

## 3.2. Ejemplos

Ahora presentaremos dos ejemplos ilustrativos del algoritmo.

**Ejemplo 3.2.1.** Consideremos el siguiente complejo simplicial, con la función  $h$  denotada en sus vértices:



$$K = \{\{0, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 6, 9\}\}$$

$$d \leftarrow \emptyset$$

$$\text{Intervalos} \leftarrow \text{EMG}(K, d) =$$

$$K \neq \emptyset$$

$$\text{Vert}(K) \setminus \text{Vert}(d) = 0, 2, 4, 6, 9$$

■ 0

$$\text{Maxlink}_K(0) = \{2\} \neq \emptyset$$

$$d_0 = \text{hmax.simplex}(\{2\}) = 2$$

$$L \leftarrow [0, 0 * 2]$$

$$K' = \{2\} \setminus 2 = \emptyset$$

$$L' = \text{EMG}(\emptyset, 2) = \emptyset$$

■ 2

$$\text{Maxlink}_K(2) = \{4\}, \{6\} \neq \emptyset$$

$$d_2 = \text{hmax.simplex}(\{4\}, \{6\}) = \{6\}$$

$$L \leftarrow [2, 2 * 6]$$

$$K' = \{\{4\}, \{6\}\} \setminus 6 = \{4\}$$

$$L' = \text{EMG}(\{4\}, 6) =$$

$$K' \neq \emptyset$$

$$\text{Vert}(K') \setminus \text{Vert}(6) = 4$$

• 4

$$\text{Maxlink}_{K'}(4) = \emptyset$$

$$L' \leftarrow [4]$$

$$\text{Other.Critics} = \emptyset$$

$$L' = [4]$$

$$L \leftarrow 2 * [4], \text{ es decir, } L \leftarrow [2 * 4]$$

■ 4

$$\text{Maxlink}_K(4) = \{6, 9\} \neq \emptyset$$

$$d_4 = \text{hmax.simplex}(\{6, 9\}) = \{6, 9\}$$

$$L \leftarrow [4, 4 * 69]$$

$$K' = \{6, 9\} \setminus \{6, 9\} = \emptyset$$

$$L' = \text{EMG}(\emptyset, \{6, 9\}) = \emptyset$$

■ 6

$$\text{Maxlink}_K(6) = \{9\} \neq \emptyset$$

$$d_6 = \text{hmax.simplex}(\{9\}) = \{9\}$$

$$L \leftarrow [6, 6 * 9]$$

$$K' = \{9\} \setminus 9 = \emptyset$$

$$L' = \text{EMG}(\emptyset, 9) = \emptyset$$

■ 9

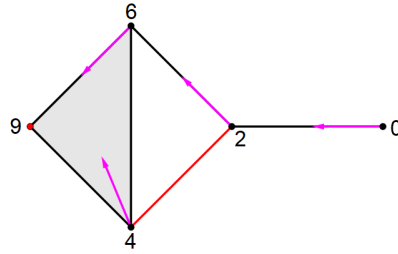
$$\text{Maxlink}_K(9) = \emptyset$$

$$L \leftarrow [9]$$

Other.Critics =  $\emptyset$

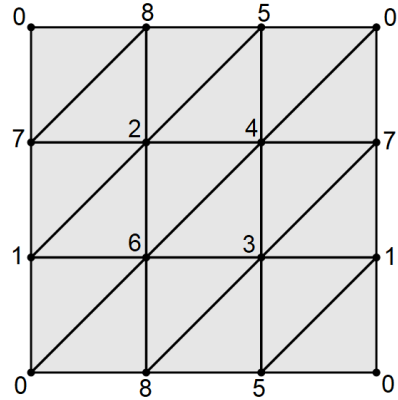
Intervalos =  $\{[0, 02], [2, 26], [24], [4, 469], [6, 69], [9]\}$

A continuación vemos el emparejamiento de Morse generalizado resultante:



Ahora analizemos un ejemplo más grande en donde veamos la utilidad de Other.Critics.

**Ejemplo 3.2.2.** Consideremos el toro, con la siguiente estructura simplicial y con los siguientes valores en sus vértices,



Por tanto:

$$K = \{\{0, 1, 5\}, \{0, 1, 6\}, \{0, 4, 5\}, \{0, 4, 7\}, \{0, 6, 8\}, \{0, 7, 8\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 5\}, \\ \{1, 3, 7\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 8\}, \{2, 7, 8\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 8\}, \{3, 6, 8\}\}$$

Para ilustrar la función Other.Critics sólo aplicaremos el algoritmo al vértice  $1 \in K$ , pues es el único vértice en este ejemplo donde usamos esta función.

■ 1

$$\text{Maxlink}_K(1) = \{\{2, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}\} \neq \emptyset$$

$$d_1 = \text{hmax.simplex}(\{\{2, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}\}) = \{3, 7\}$$

$$L \leftarrow [1, 1 * 37]$$

$$K' = \{\{2, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}\} \setminus \{3, 7\} = \{\{2, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}\} \neq \emptyset$$

$$L' = \text{EMG}(K', \{3, 7\}) =$$

$$K' \neq \emptyset$$

$$\text{Vert}(K') \setminus \text{Vert}(\{3, 7\}) = 2, 5, 6$$

• 2

$$\text{Maxlink}_{K'}(2) = \{6, 7\} \neq \emptyset$$

$$d'_2 = \text{hmax.simplex}(\{6, 7\}) = 7$$

$$L' \leftarrow [2, 2 * 7]$$

$$K'' = \{6, 7\} \setminus 7 = \{6\} \neq \emptyset$$

$$L' = \text{EMG}(K', 7) = \emptyset$$

$$K'' \neq \emptyset$$

$$\text{Vert}(K'') \setminus \text{Vert}(7) = \{6\}$$

◦ 6

$$\text{Maxlink}_{K''}(6) = \emptyset$$

$$L'' \leftarrow [6]$$

$$L' \leftarrow 2 * [6] = [2 * 6] = [26]$$

• 5

$$\text{Maxlink}_{K'}(5) = \emptyset$$

$$L' \leftarrow [5]$$

• 6

$$\text{Maxlink}_{K'}(6) = \emptyset$$

$$L' \leftarrow [6]$$

Entonces  $L \leftarrow 1 * L' = 1 * \{[2, 27], [26], [5], [6]\}$ , es decir,

$$L = \{[1, 137], [12, 127], [126], [15], [16]\}.$$

Hasta este momento hemos emparejado a cada elemento que contiene al vértice  $1 \in K$  excepto a  $\{1, 3, 5\} \in K$ , por tanto veamos que  $\{1, 3, 5\}$  aparece en  $\text{Other.Critics}(K', L', 37)$  y por tanto será un crítico en el EMG.

$$\text{Other.Critics}(K', L', \{3, 7\}) =$$

$$\text{Vert}(\{3, 7\}) = 3, 7$$

■ 3

$$\text{Maxlink}_{K'}(3) = \{5\} \neq \emptyset$$

$$d_3 = 3 * 5 = \{3, 5\}$$

$\{3, 5\} \notin L'$   
 $\text{Other.Critics} \leftarrow [35]$

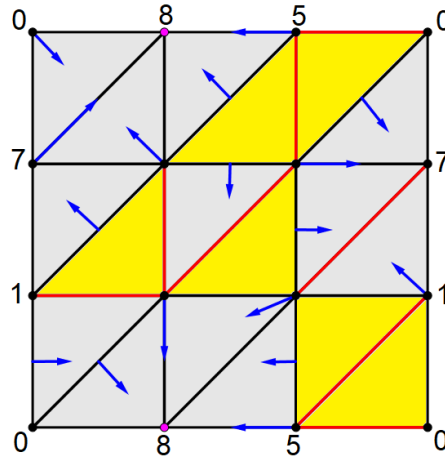
- 7  
 $\text{Maxlink}_{K'}(7) = \emptyset$

Por tanto,  
 $L' \leftarrow \text{Other.Critics} = [35]$   
 $L' = \{[2, 27], [26], [5], [6], [35]\}$   
 $L \leftarrow 1 * L' = \{[1, 137], [12, 127], [126], [15], [16], [135]\}.$

Después de aplicar el algoritmo, a todo el c.s.a. obtenemos el siguiente EMG:

Intervalos =  $\{[0, 078], [01, 016], [015], [04, 047], [045], [05], [06, 068], [1, 137], [12, 127], [126], [15], [16], [135], [2, 278], [24, 246], [245], [25, 258], [26], [3, 368], [34, 347], [346], [35, 358], [37], [4, 47], [45], [46], [5, 58], [6, 68], [7, 78], [8]\}$

A continuación podemos ver el emparejamiento de Morse generalizado resultante en el toro:



### 3.3. Complejo de Morse para un emparejamiento de Morse generalizado

Sabemos por la teoría de Morse que para calcular los grupos de homología de un complejo simplicial podemos utilizar el complejo de Morse, que consiste de los elementos críticos que deja un emparejamiento. En caso de los EMG podremos hacer algo similar. Procedemos de manera análoga que en [14]

Definamos de igual manera  $\mathcal{M}_n$  como el grupo libre generado por los elementos críticos de dimensión  $n$  en  $K$  que deja un EMG  $\sim$ .

Ahora necesitamos un operador frontera  $\bar{\partial}_n : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{M}_{n-1}$ . Para cada  $\sigma \in \mathcal{M}_n$  definamos,

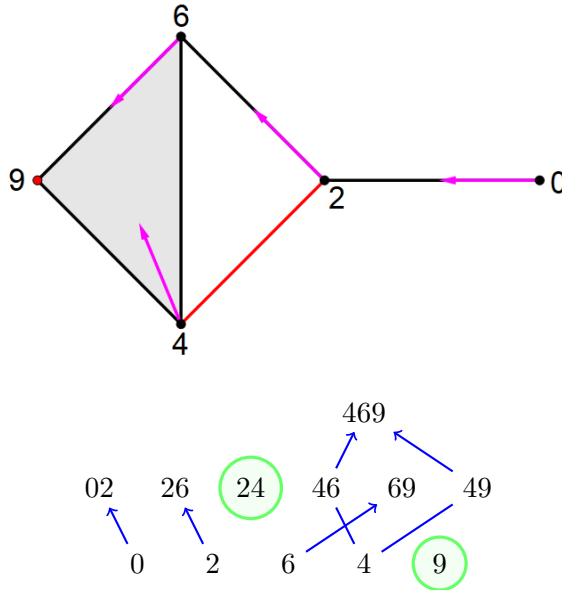
$$\bar{\partial}_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathcal{M}_{n-1}} \kappa'(\sigma, \tau) \tau,$$

donde,

$$\kappa'(\sigma, \tau) = \kappa(\sigma, \tau) + \sum_{\rho} \text{mul}(\sigma \xrightarrow{\rho} \tau).$$

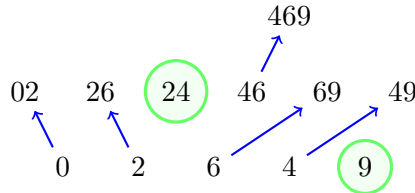
Extendemos ésto  $\mathbb{Z}$ -linealmente. Como sabemos, esta construcción depende de los caminos que van de  $\sigma^n$  a los críticos de dimensión de  $n-1$ . Observemos que la definición de camino no es compatible con la estructura de intervalo. Por tanto será necesario tomar algún refinamiento para cada intervalo y de esta manera calcular  $\kappa'(\sigma, \tau)$  como en la teoría de Morse usual. Veamos en un ejemplo que no importa la elección de refinamientos.

**Ejemplo 3.3.1.** Consideremos la siguiente estructura simplicial con el emparejamiento de Morse generalizado ilustrado con las flechas :



De este EMG, podemos tomar dos refinamientos:

1. Consideremos el siguiente diagrama de Hasse:



Tenemos los siguientes caminos:

$$\rho_1 : \{2, 4\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \{2, 6\} \rightarrow \{6\} \rightarrow \{6, 9\} \rightarrow \{9\}$$

$$\rho_2 : \{2, 4\} \rightarrow \{4\} \rightarrow \{4, 9\} \rightarrow \{9\}$$

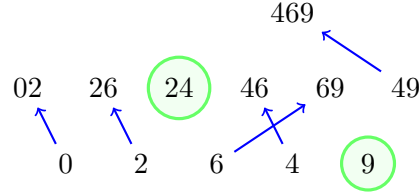
cuya respectiva multiplicidad es:

$$\text{mul}(\rho_1) = \frac{\kappa(\{2, 4\}, \{2\})\kappa(\{2, 6\}, \{6\})\kappa(\{6, 9\}, \{9\})}{(-1)^2\kappa(\{2, 6\}, \{2\})\kappa(\{6, 9\}, \{6\})} = -1$$

$$\text{mul}(\rho_2) = \frac{\kappa(\{2, 4\}, \{4\})\kappa(\{4, 9\}, \{9\})}{(-1)^1\kappa(\{4, 9\}, \{9\})} = 1$$

Por tanto  $\kappa'(\{2, 4\}, \{9\}) = 0$ .

2. Consideremos el siguiente diagrama de Hasse:



Tenemos los siguientes caminos:

$$\rho_1 : \{2, 4\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \{2, 6\} \rightarrow \{6\} \rightarrow \{6, 9\} \rightarrow \{9\}$$

$$\rho_2 : \{2, 4\} \rightarrow \{4\} \rightarrow \{4, 6\} \rightarrow \{6\} \rightarrow \{6, 9\} \rightarrow \{9\}$$

cuya multiplicidad son:

$$\text{mul}(\rho_1) = \frac{\kappa(\{2, 4\}, \{2\})\kappa(\{2, 6\}, \{6\})\kappa(\{6, 9\}, \{9\})}{(-1)^2\kappa(\{2, 6\}, \{2\})\kappa(\{6, 9\}, \{6\})} = -1$$

$$\text{mul}(\rho_2) = \frac{\kappa(\{2, 4\}, \{4\})\kappa(\{4, 6\}, \{6\})\kappa(\{6, 9\}, \{9\})}{(-1)^2\kappa(\{4, 6\}, \{4\})\kappa(\{6, 9\}, \{6\})} = 1$$

Por tanto  $\kappa'(\{2, 4\}, \{9\}) = 0$ .

### 3.4. EMG vs. ExtractRaw

Por último, compararemos la efectividad del algoritmo que proponemos contra el algoritmo ExtractRaw trabajado en [10]. Cabe mencionar que ambos algoritmos generan un emparejamiento en un complejo con una cantidad no óptima de críticos.

Para comparar ambos algoritmos contruiremos complejos de la siguiente manera: fijamos una dimensión  $n$ , y una cantidad de simplejos maximales  $m$ , programamos un algoritmo que genera un complejo simplicial abstracto  $K$ , con  $\dim K \leq n$  que consiste del wedge de  $m$  simplejos maximales. Entonces el algoritmo arrojará una estructura simplicial con una función inyectiva en sus vértices

$$K = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 \\ 1 & n+2 & \cdots & n+i_2 & \\ 1 & n+i_2+1 & \cdots & n+i_2+i_3 & \\ \vdots & & & & \\ 1 & n+\sum_{j=2}^{m-1} i_j+1 & \cdots & n+\sum_{j=2}^m i_j & \end{array} \right\}$$

donde  $i_j \leq n$  para  $j = 2, \dots, m$ . Ahora, esta elección de valores para los vértices en  $K$  le da una ventaja al algoritmo de Neža pues generará sólo un crítico, por tanto es necesario generar una permutación aleatoria en los valores de cada vértice. Consideramos el grupo de permutaciones  $S_{n+i_2+\dots+i_{m-1}+i_m}$ , tomaremos cualquier elemento  $g \in S_{n+i_2+\dots+i_{m-1}+i_m}$  y lo haremos actuar en  $K$  de la siguiente manera.

$$g \cdot K = \left\{ \begin{array}{ccccc} g \cdot 1 & g \cdot 2 & \cdots & g \cdot n & g \cdot (n+1) \\ g \cdot 1 & g \cdot (n+2) & \cdots & g \cdot (n+i_2) & \\ g \cdot 1 & g \cdot (n+i_2+1) & \cdots & g \cdot (n+i_2+i_3) & \\ \vdots & & & & \\ g \cdot 1 & g \cdot (n+\sum_{j=2}^{m-1} i_j+1) & \cdots & g \cdot (n+\sum_{j=2}^m i_j) & \end{array} \right\}$$

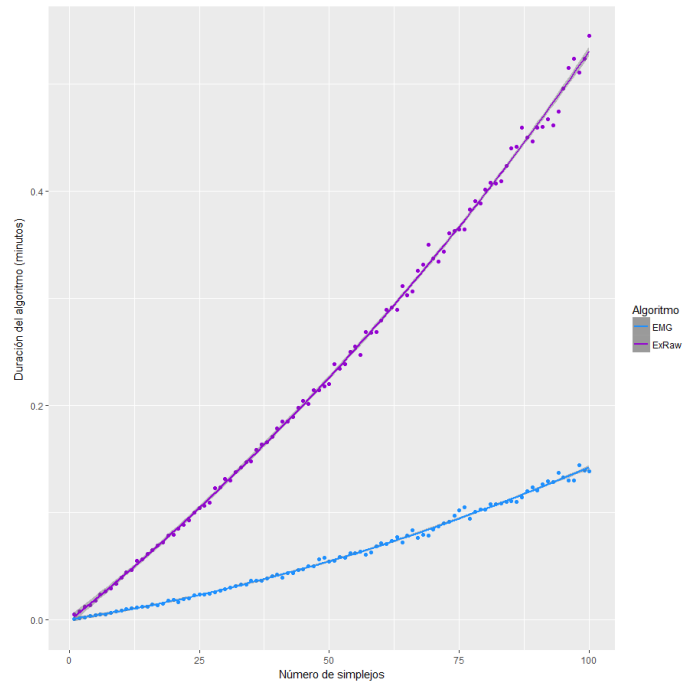
De esta manera ningún algoritmo tendrá ninguna ventaja. Buscamos comparar la duración del algoritmo y la cantidad de críticos que arrojan cada uno. Para  $n$  fija, y cada  $m'$  entre 1 y  $m$ , realizamos el siguiente proceso 100 veces: Obtener un complejo  $K$ , calculamos EMG y ExtractRaw, y guardamos el tiempo de duración y la cantidad de críticos que arrojaron cada uno. Realizamos un promedio con estas 100 entradas y lo guardamos. Entonces para cada  $m'$  tendremos un tiempo y críticos promedio.

Primero analizemos la duración del algoritmo para simplejos de dimensión maximal 5 y 10 en la Figura 3.1, podemos ver que conforme aumentamos la cantidad de simplejos maximales la duración del algoritmo ExtractRaw incrementa exponencialmente. Por otro lado EMG mantiene una duración menor a un minuto sin importar la cantidad de simplejos maximales.

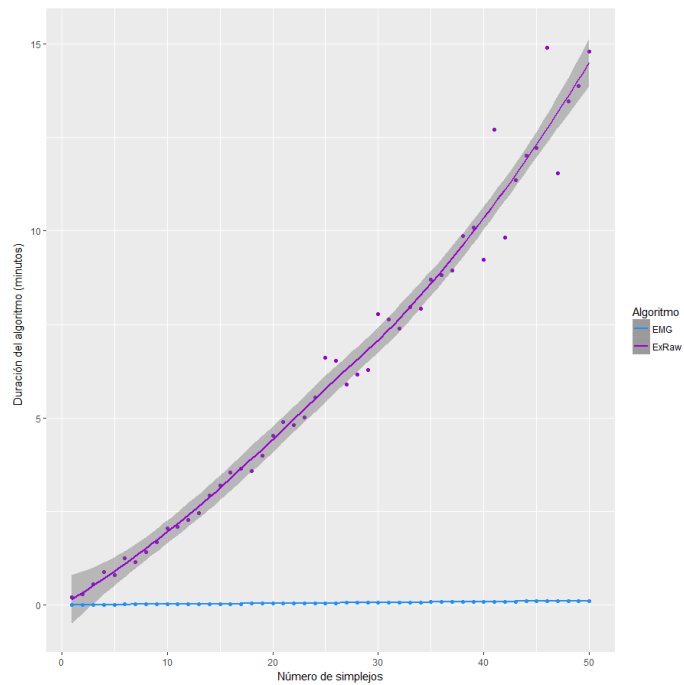
Ahora, analizemos la cantidad de simplejos críticos que arrojan ambos algoritmos para simplejos maximales de dimensión 5 y 10 en la Figura 3.2, podemos ver que la tasa de crecimiento de críticos es similar para ambos algoritmos, con ExtractRaw haciendo menos críticos. Sin embargo si realizamos una comparación con la cantidad de simplejos en total que tiene el complejo simplicial, observamos que ambos algoritmos obtienen una cantidad relativamente similar de críticos, ver Figura 3.3.

Para comparar los críticos y la duración de ambos algoritmos en dimensiones superiores, por cuestiones de la duración total del algoritmo, trabajamos en dimensión 15 reduciendo el número de repeticiones y la cantidad de simplejos maximales.



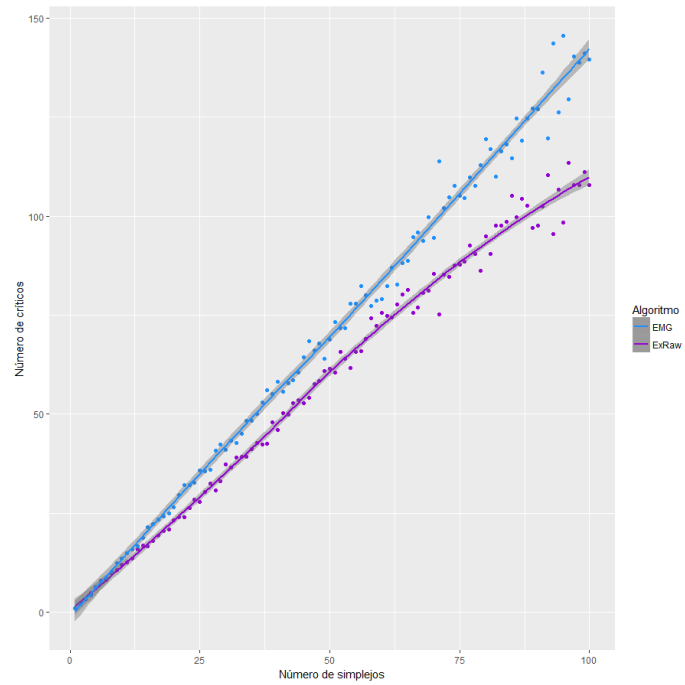


(a) Complejos de dimensión menor o igual a 5

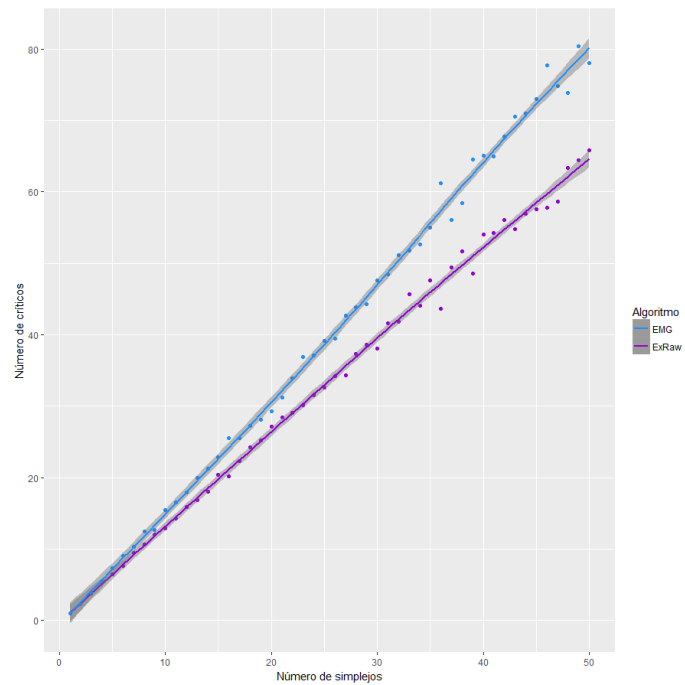


(b) Complejos de dimensión menor o igual a 10

Figura 3.1: Duración del algoritmo EMG y ExtractRaw

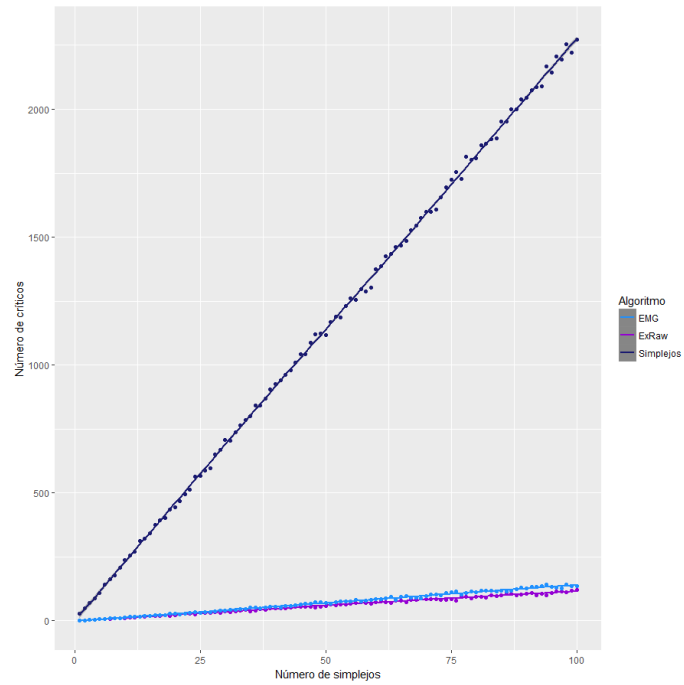


(a) Complejos de dimensión menor o igual a 5

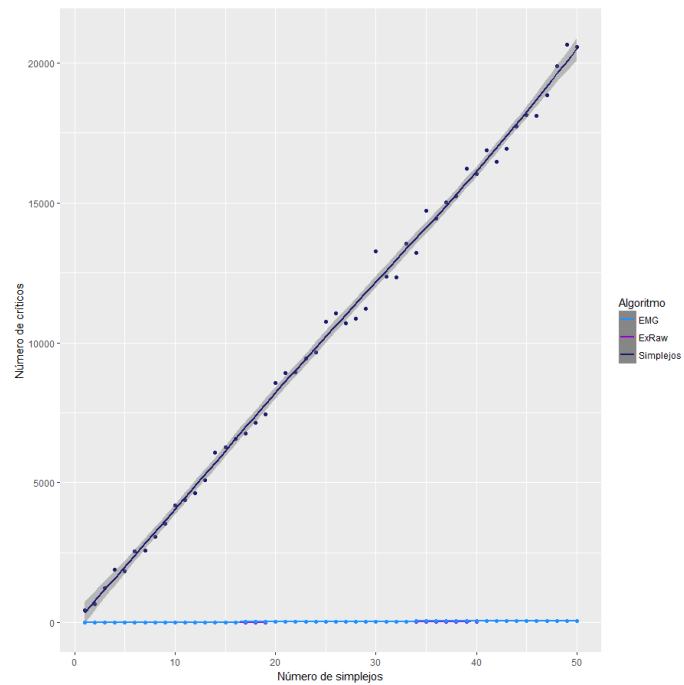


(b) Complejos de dimensión menor o igual a 10

Figura 3.2: Cantidad de críticos del algoritmo EMG y ExtractRaw

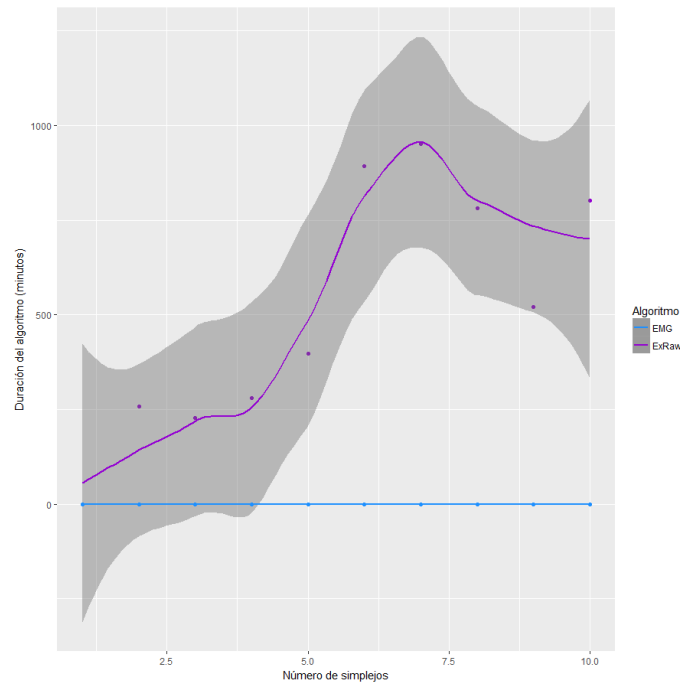


(a) Complejos de dimensión menor o igual a 5

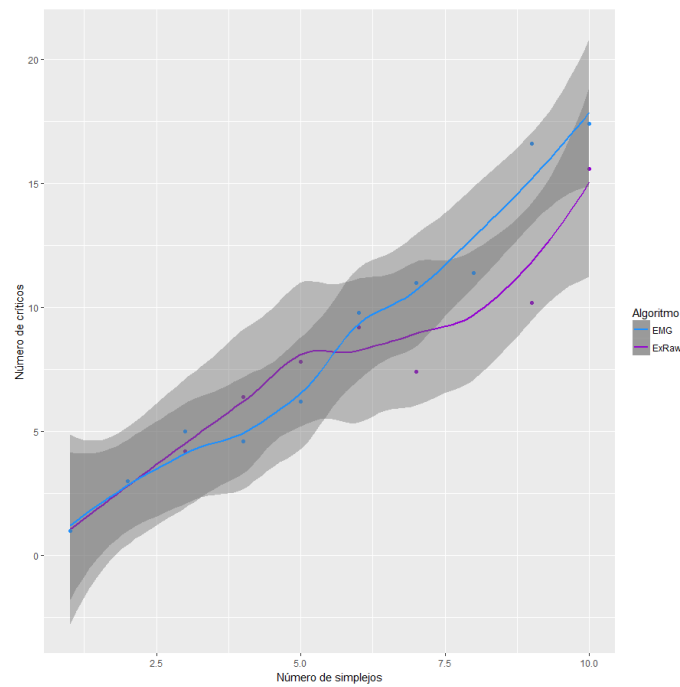


(b) Complejos de dimensión menor o igual a 10

Figura 3.3: Comparación en cantidad de críticos y simplejos



(a) Duración del algoritmo



(b) Cantidad de simplejos críticos

Figura 3.4: Comparación del algoritmo EMG y ExtractRaw para simplejos de dimensión 15

# Apéndice A

## Códigos

En este apéndice incluimos todos los códigos utilizados para programar los algoritmos propuestos, el de Neža [10] y los necesarios para hacer la comparación. Utilizamos el programa R (versión 3.3.2) y R Studio (versión 1.0.136) y una computadora con un procesador Intel Core i5 (Memoria RAM de 8GB) sin paralelización.

### A.1. EMG

Presentamos el código del algoritmo propuesto para calcular emparejamientos generalizados de Morse que llamamos EMG. Primero damos el código principal para luego ir mostrando poco a poco cada función utilizada.

---

---

#### EMG

---

---

**Entrada:** Estructura Simplicial  $K$ .

**Salida:** Partición de  $K$  en intervalos de diferente longitud.

```
d<- NULL
EMG<-function(K,d){
  L<-list()
  int<-1
  L1<-NULL
  if(is.null(K)){
    L<-NULL
  } else {
    for (v in Vert(K,d)){
      mlink<-Max.Link(K,v)
      if (is.null(mlink)){
        L[[int]]<- list(v)
        int<-int+1
      } else {
        c<-Candidatos(mlink)
        d1<-hmax.simplex(c)
        L[[int]]<- list(c(v),c(v,d1))
        int<-int+1
      }
    }
  }
}
```

```

        K1<-Queue.Simplex(mlink,d1)
        L1<-EMG(K1,d1)
        if(!is.null(L1)){
            L<-c(L,List.Joint(v,L1))
            int<-length(L)+1
        }
    }
    OC<-Other.Critics(K,d)
    if(!is.null(OC)){
        L<-append(L,OC)
    }
}
return(L)
}
}

```

La función `Vert` calcula los vértices de un complejo simplicial, y en caso de que hayamos hecho una pareja esta función nos dirá cuales son los vértices disponibles para seguir emparejando.

---



---

### Vert

---



---

**Entrada:** Estructura Simplicial  $K$ , última pareja utilizada  $d$ .

**Salida:** Lista de vértices para realizar nuevos emparejamientos.

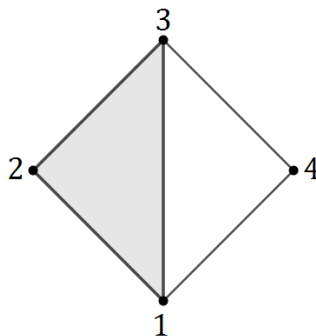
```

Vert<-function(K,d){
  l<-length(d)
  if(l == 0){
    K<-unlist(as.list(K))
  } else {
    for( x in 1:l ){
      K<-K[which(K != d[x])]
    }
  }
  Vertices<-sort(unique(K))
  return(Vertices)
}

```

**Ejemplo A.1.1.** Sea  $K$  con la siguiente estructura simplicial:

$$K = \{\{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}.$$



Si  $d = \emptyset$  entonces  $\text{Vert}(K, d) = (1, 2, 3, 4)$ . Si  $d = \{2, 3\}$  entonces  $\text{Vert}(K, d) = (1, 4)$ .

Ahora presentamos el código que utilizamos para programar la función Maxlink.

---

### MaxLink

---

**Entrada:** Estructura Simplicial  $K$ , un vértice  $n$ .

**Salida:**  $\text{Maxlink}_K(n)$ .

```
Max.Link<- function(K,n){
  mlink<-list()
  S<-K[which(K == n, arr.ind = TRUE)[,1],]
  if(length(S) == 0){
    mlink<-NULL
  } else {
    if(is.null(nrow(S))){
      mlink[[1]]<-S[-which(S<=n | is.na(S))]
      mlink<-mlink[sapply(mlink, length) > 0]
    }
    if(!is.null(nrow(S))){
      for (s in 1:nrow(S)){
        mlink[[s]]<-S[s,-which(S[s,] <= n | is.na(S[s,]))]
        mlink<-mlink[sapply(mlink, length) > 0]
      }
    }
    if (length(mlink) == 0) {
      mlink<-NULL
    }
  }
  mlink<-unique(mlink)
  l<-length(mlink)
  entra<-NULL
  e<-1
  for(x in 1:l){
    l1<-length(mlink)
    for(y in 1:l1){
      if(length(intersect(mlink[[x]],mlink[[y]]) != 0)){
        if(length(mlink[[x]])>length(mlink[[y]])){
          entra[e]<-y
        }
      }
    }
  }
}
```

```

        e<-e+1
      }
    }
  }
  if (!is.null(entra)){
   mlink<-mlink[-entra]}
  }
  return(mlink)
}

```

**Ejemplo A.1.2.** Si  $n = 1$ ,  $\text{Maxlink}(K, n) = \{\{4\}, \{2, 3\}\}$ .

La función `Candidatos` toma a los simplejos maximales del `Maxlink` para poder asegurar que emparejemos un simplejo de dimensión mayor.

---



---

**Candidatos**

---



---

**Entrada:** Estructura simplicial  $K$ .

**Salida:** Simplejos de dimensión máxima en  $K$ .

```

Candidatos<-function(mlink){
  l1<- length(mlink)
  L<-NULL
  for(x in 1:l1){
    L[x]<-length(mlink[[x]])
  }
  m<-which.max(L)
  entra<- NULL
  for(y in 1:l1){
    if(length(mlink[[m]]) == length(mlink[[y]])) {
      entra<- c(entra,y)
    }
  }
  d<-NULL
  if(!is.null(entra)){
    for(y1 in 1:length(entra)){
      d[y1]<-mlink[entra[y1]]
    }
  }
  return(d)
}

```

**Ejemplo A.1.3.** Con el `Maxlink` del ejemplo anterior tenemos que `Candidatos = {{2,3}}`.

Ahora presentamos el código que utilizamos para programar la función `hmax.simplex`.

---



---

**hmax.simplex**

---



---



---

**Entrada:** Estructura Simplicial  $K$ .

**Salida:**  $\text{hmax.simplex}(K)$ .

```
hmax.simplex <- function(K){
  X <- matrix(unlist(K), ncol = length(K[[1]]), byrow =TRUE)
  n <- dim(X)[2]
  i <- 1
  Ind <- which(X[,n]==max(X[,n]))
  while(length(Ind)>1){
    ind <- which(X[Ind,n-i]==max(X[,n-i]))
    Ind <- Ind[ind]
    i <- i+1
  }
  return(X[Ind,])
}
```

**Ejemplo A.1.4.** Si consideramos  $K' = \{\{1,4\}, \{3,4\}\} \subset K$ , tenemos que  $\text{hmax.simplex}(K') = \{3,4\}$ .

La función `Queue.Simplex` toma en cuenta la última pareja utilizada y la quita del `Maxlink` para saber cuales son los siguientes posibles simplejos que podemos emparejar.

---



---

### Queue.Simplex

---



---

**Entrada:** Estructura Simplicial  $K$ , última pareja utilizada  $d$ .

**Salida:**  $K \setminus d$ .

```
Queue.Simplex <- function(mlink,d){
  l<-length(d)
  X<-list()
  for( x in 1:l ){
    X[[x]]<-grep(d[x] , mlink)
  }
  y<-Reduce(intersect, X)
  Y<-mlink[-y]
  if(length(Y) != 0){
    max.length <- max(sapply(Y, length))
    Y <- lapply(Y, function(v) { c(v, rep(NA, max.length-length(v)))})
    QS<-do.call(rbind,Y)
  }
  if(length(Y) == 0){
    QS<-NULL
  }
  return(QS)
}
```

**Ejemplo A.1.5.** Consideramos el `Maxlink` calculado en A.1.2, y tomemos  $d = \{2,3\}$ , entonces  $\text{Queue.Simplex} = \{4\}$ .

A continuación presentamos una función `List.Joint` que nos permite hacer la operación  $*$  (Joint) entre listas y vértices.

---

### ListJoint

---

**Entrada:** vértice  $v$ , Lista de intervalos  $L$ .

**Salida:**  $v * L$ .

```
List.Joint<-function(v,L){
  l<-length(L)
  listjoint<-rep( list(list()), l )
  if(is.null(L)){
    listjoint<-NULL
  } else {
    for(y in 1:l){
      m<-length(L[[y]])
      for(x in 1:m){
        listjoint[[y]][[x]]<-append(v,L[[y]][[x]])
      }
    }
  }
  return(listjoint)
}
```

Podemos ver un ejemplo de como funciona esta función en el Ejemplo 3.1.6.

Ahora presentamos el código que utilizamos para programar la función `Other.Critics`.

---

### OtherCritics

---

**Entrada:** Estructura Simplicial  $K$ , última pareja utilizada  $d$ .

**Salida:** Lista de críticos que no se calcularon en EMG.

```
Other.Critics<-function(K,d){
  int<-1
  I<-list()
  for(o in d){
    if(!is.null(Max.Link(K,o))){
      mlink<-Max.Link(K,o)
      l1<-length(mlink)
      for(x in 1:l1){
        d1<-list(c(o,mlink[[x]]))
        V<-intersect(d,d1[[1]]) == d1[[1]]
        if(any(!(V))){
          I[[int]]<- d1
          int<-int+1
        }
      }
    }
  }
}
```

```

    return(I)
}

```

Analizamos el uso de esta función en el Ejemplo 3.2.2.

## A.2. ExtractRaw

Como uno de nuestros fines era demostrar la efectividad de nuestro algoritmo en comparación con el propuesto en [10], decidimos también programar el algoritmo ExtractRaw en R Studio. A continuación presentamos el pseudo-código principal (Nosotros omitimos el uso de una función  $h$  por como introducimos las estructuras simpliciales).

---

### Algoritmo 3: ExtractRaw

---

**Entrada:** Estructura simplicial en caras maximales  $K$

**Salida:** Tres listas  $A, B, C$ ,  
Función de asignación  $r : B \rightarrow A$

```

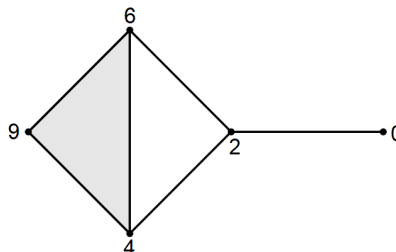
1 función (K)
2   para  $v \in \text{Vert}(K)$  hacer
3       calcular  $K' = \text{LowerLink}_K(v)$ 
4       si  $K' = \emptyset$  entonces
5            $C \leftarrow v$ 
6       en otro caso
7            $A \leftarrow v$ 
8           calcular ExtractRaw( $K'$ ) y denotemos por  $A', B', C', r'$  la partición
              resultante de los simplejos en  $K'$ 
9           calcular  $w_0 = \min(\text{Vert}(C'))$ 
10           $B \leftarrow [v, w_0]$  y definimos  $r([v, w_0]) = v$ 
11          para  $\sigma \in C' - w_0$  hacer
12               $C \leftarrow v * \sigma$ 
13          para  $\sigma \in B'$  hacer
14               $B \leftarrow v * \sigma$ ,  $A \leftarrow v * r'(\sigma)$  y definimos  $r(v * \sigma) = v * r'(\sigma)$ .
15  devolver  $A, B, C, r$ 

```

---

Las listas  $A, B, C$  describen la partición del complejo simplicial  $K$ , donde la listas  $A$  y  $B$  representan los “inicios de flecha” y “finales de flecha” del campo vectorial generado respectivamente, la lista  $C$  representa a los simplejos críticos y la función  $r : B \rightarrow A$  establece las relaciones entre los inicios y finales de flecha.

**Ejemplo A.2.1.** Retomemos la siguiente estructura simplicial, con la función  $h$  denotada en sus vértices:



$K = \{\{0, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 6, 9\}\}$   
 $\text{ExtractRaw}(K) =$

- 0  
 $K' = \text{Lowerlink}_K(0) = \emptyset$   
 $C \leftarrow 0$
- 2  
 $K' = \text{Lowerlink}_K(2) = 0 \neq \emptyset$   
 $A \leftarrow 2$   
 $\text{ExtractRaw}(K') =$ 
  - 0  
 $K'' = \text{Lowerlink}_{K'}(0) = \emptyset$   
 $C' \leftarrow 0$
  - $A' = \emptyset, B' = \emptyset, C' = \{0\}$

$B \leftarrow \{0, 2\}$   
se define  $r(\{0, 2\}) = 2$

- 4  
 $K' = \text{Lowerlink}_K(4) = 2 \neq \emptyset$   
 $A \leftarrow 4$   
 $\text{ExtractRaw}(K') =$ 
  - 2  
 $K'' = \text{Lowerlink}_{K'}(2) = \emptyset$   
 $C' \leftarrow 2$
  - $A' = \emptyset, B' = \emptyset, C' = \{2\}$

$B \leftarrow \{2, 4\}$   
se define  $r(\{2, 4\}) = 4$

- 6  
 $K' = \text{Lowerlink}_K(6) = 2, 4 \neq \emptyset$   
 $A \leftarrow 6$   
 $\text{ExtractRaw}(K') =$ 
  - 2  
 $K'' = \text{Lowerlink}_{K'}(2) = \emptyset$   
 $C' \leftarrow 2$

$A = 2, 4, 6, 9, \{6, 9\}$

$B = \{0, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 9\}, \{4, 6, 9\}$   
 $C = 0, \{4, 6\}$

- 4  
 $K'' = \text{Lowerlink}_{K'}(4) = \emptyset$   
 $C' \leftarrow 4$
- $A' = \emptyset, B' = \emptyset, C' = \{2\}, \{4\}$

$B \leftarrow \{2, 6\}$   
se define  $r(\{2, 6\}) = 7$   
 $C \leftarrow \{4, 6\}$

- 9  
 $K' = \text{Lowerlink}_K(9) = 4, 6, \{4, 6\} \neq \emptyset$   
 $A \leftarrow 9$   
 $\text{ExtractRaw}(K') =$

- 4  
 $K'' = \text{Lowerlink}_{K'}(4) = \emptyset$   
 $C' \leftarrow 4$
- 6  
 $K'' = \text{Lowerlink}_{K'}(6) = 4 \neq \emptyset$   
 $A' \leftarrow 6$ 
  - 4  
 $K''' = \text{Lowerlink}_{K''}(4) = \emptyset$   
 $C'' \leftarrow 4$
  - $A'' = \emptyset, B'' = \emptyset, C'' = \{4\}$

$B' \leftarrow \{4, 6\}$   
se define  $r'(\{4, 6\}) = 6$

- $A' = \{6\}, B' = \{4, 6\}, C' = \{4\}$

$B \leftarrow \{4, 9\}, \{4, 6, 9\}$   
 $A \leftarrow \{6, 9\}$   
se define  $r(\{4, 9\}) = 9, r(\{4, 6, 9\}) = \{6, 9\}$

Ahora veamos el código que usamos para programarlo:

---

### ExtractRaw

---

**Entrada:** Estructura Simplicial  $K$ .

**Salida:** Partición de  $K$  listas  $A, B, C$  y la asignación de las parejas  $r$ .

```
ExtractRaw<-function(K){
  A<-list()
  a<-1
  B<-list()
  b<-1
  C<-list()
  c<-1
  d<- NULL
  R<-list()
  r<- 1
  L<-rep( list(list()), 4 )
  for(v in Vert(K,d)){
    K1 = Lower.Link(K,v)
    if( is.null(K1) ){
      C[c]<- v
      c<-c+1
    } else {
      A[a]<-v
      a<-a+1
      max.length <- max(sapply(K1, length))
      K1 <- lapply(K1, function(v) { c(v, rep(NA, max.length-length(v)))})
      K1 = do.call(rbind,K1)
      L1 = ExtractRaw(K1)
      A1 = L1[[1]]
      B1 = L1[[2]]
      C1 = L1[[3]]
      r1 = L1[[4]]
      w0 = min(unlist(C1))
      B[[b]]<-c(v,w0)
      b<-b+1
      R[[r]]<-list(v,c(v,w0))
      r<-r+1
      for( s in C1[-grep(w0,C1)]){
        C[[c]]<- c(v,s)
        c<-c+1
      }
      OL<-unlist(r1, recursive=FALSE)
      for( x in A1){
        z<-Position(function(y) identical(y, x), OL, nomatch = 0)
        A[[a]]<- c(v,x)
        a<-a+1
      }
    }
  }
}
```

```

        B[[b]]<- c(v,OL[z+1][[1]])
        b<-b+1
        R[[r]]<- list(c(v,x),c(v,OL[z+1][[1]]))
        r<-r+1
    }
}
}
L[[1]]<-A
L[[2]]<-B
L[[3]]<-C
L[[4]]<-R
return(L)
}

```

La función Vert mencionada es la misma que se utiliza en EMG.

**Ejemplo A.2.2.** Consideremos al Toro con la estructura simplicial como vienen en el Ejemplo 3.2.2, entonces ExtractRaw arroja las siguientes listas:

$$\begin{aligned}
 A &= \{1, 2, 3, 4, \{5, 1\}, \{5, 3\}, \{5, 4\}, 6, \{6, 1\}, \{6, 2\}, \{6, 4\}, 7, \{7, 2\}, \{7, 3\}, \{7, 4\}, 8, \{8, 5\}, \{8, 6\}, \\
 &\quad \{8, 7\}\} \\
 B &= \{\{1, 0\}, \{2, 1\}, \{3, 1\}, \{4, 0\}, \{5, 0\}, \{5, 1, 0\}, \{5, 3, 1\}, \{5, 4, 0\}, \{6, 0\}, \{6, 1, 0\}, \{6, 2, 1\}, \\
 &\quad \{6, 4, 2\}, \{7, 0\}, \{7, 2, 1\}, \{7, 3, 1\}, \{7, 4, 0\}, \{8, 0\}, \{8, 5, 2\}, \{8, 6, 0\}, \{8, 7, 0\}\} \\
 C &= \{0, \{4, 2\}, \{4, 3\}, \{5, 2\}, \{5, 4, 2\}, \{6, 3\}, \{6, 4, 3\}, \{7, 1\}, \{7, 4, 3\}, \{8, 2\}, \{8, 3\}, \{8, 5, 3\}, \\
 &\quad \{8, 6, 3\}, \{8, 7, 2\}\} \\
 r &= (1, \{1, 0\}), (2, \{2, 1\}), (3, \{3, 1\}), (4, \{4, 0\}), (5, \{5, 0\}), (\{5, 1\}, \{5, 1, 0\}), (\{5, 3\}, \{5, 3, 1\}), \\
 &\quad (\{5, 4\}, \{5, 4, 0\}), (6, \{6, 0\}), (\{6, 1\}, \{6, 1, 0\}), (\{6, 2\}, \{6, 2, 1\}), (\{6, 4\}, \{6, 4, 2\}), \\
 &\quad (7, \{7, 0\}), (\{7, 2\}, \{7, 2, 1\}), (\{7, 3\}, \{7, 3, 1\}), (\{7, 4\}, \{7, 4, 0\}), (8, \{8, 0\}), \\
 &\quad (\{8, 5\}, \{8, 5, 2\}), (\{8, 6\}, \{8, 6, 0\}), (\{8, 7\}, \{8, 7, 0\})
 \end{aligned}$$

Ahora tenemos el código utilizado para programar la función LowerLink.

---



---

### LowerLink

---



---

**Entrada:** Estructura Simplicial  $K$ , vértice  $n$ .

**Salida:** LowerLink $_K(n)$ .

```

Lower.Link<- function(K,n){
  mlink<-list()
  S<-K[which(K == n, arr.ind = TRUE)[,1],]
  if(length(S) == 0){
    mlink<-NULL
  } else {
    if(is.null(nrow(S))){
      mlink[[1]]<-S[-which(S>=n | is.na(S))]
    }
  }
}

```

---

```

        mlink<-mlink[sapply(mlink, length) > 0]
    }
    if(!is.null(nrow(S))){
        for (s in 1:nrow(S)){
            mlink[[s]]<-S[s,-which(S[s,] >= n | is.na(S[s,]))]
            mlink<-mlink[sapply(mlink, length) > 0]
        }
    }
    if (length(mlink) == 0) {
        mlink<-NULL
    }
    mlink<-unique(mlink)
    l<-length(mlink)
    entra<-NULL
    e<-1
    for(x in 1:l){
        l1<-length(mlink)
        for(y in 1:l1){
            if(length(intersect(mlink[[x]],mlink[[y]]) != 0 )){
                if(length(mlink[[x]])>length(mlink[[y]])){
                    entra[e]<-y
                    e<-e+1
                }
            }
        }
    }
    if (!is.null(entra)){
        mlink<-mlink[-entra]
    }
}
return(mlink)
}

```

**Ejemplo A.2.3.** Para  $K$  como en 3.2.2 si tomamos  $v = 8$ , entonces  $\text{LowerLink}(K, v) = \{\{0, 6\}, \{0, 7\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$ .

### A.3. EMG vs. ExtractRaw

Por último presentamos los códigos que utilizamos para comparar la efectividad de ambos algoritmos, primero tenemos el código principal del experimento.

---

```

d<-5
n<-100
r<-100
EMG.time <- c(rep(0,r))
ExRaw.time <- c(rep(0,r))
EMG.crit <- c(rep(0,r))

```

```

ExRaw.crit <- c(rep(0,r))
Simp <- c(rep(0,r))
EMG.res<-list( list(),list())
ExRaw.res<-list( list(),list())
Simp.res<- list()

pb<-txtProgressBar(min = 1, max = n ,style = 3)
for( N in seq(1, n,1)){
  for( i in 1:r){
    K<-complex(N,d)
    m<-1
    a<-0
    while(m < N+1){
      a <- a + Num.Simp(length(K[m,][!is.na(K[m,])])) - 1
      m <- m +1
    }
    Simp[i]<- a + 1
    setTxtProgressBar(pb, N)
    EMG.time[i]<-system.time(EMG.test(K))[[1]]
    ExRaw.time[i]<-system.time(ExtractRaw.Test(K))[[1]]
    EMG.crit[i]<-EMG.test(K)
    ExRaw.crit[i]<-ExtractRaw.Test(K)
  }
  Simp.res[N]<-mean(Simp)
  EMG.res[[1]][N]<-mean(EMG.time)
  EMG.res[[2]][N]<-mean(EMG.crit)
  ExRaw.res[[1]][N]<-mean(ExRaw.time)
  ExRaw.res[[2]][N]<-mean(ExRaw.crit)
}

```

Donde  $d$  representa la dimensión del complejo simplicial que utilizaremos,  $n$  el número de simplejos maximales, y  $r$  el numero de repeticiones del experimento por complejo.

La función `EMG.test` calcula cuantos simplejos críticos arroja el algoritmo EMG.

---



---

### EMG.test

---



---

```

EMG.test<-function(K){
  d<- NULL
  M<-EMG(K,d)
  c<-0
  for( s in 1:length(M)){
    if( length(M[[s]]) == 1){
      c<-c+1
    }
  }
  return(c)
}

```



De la misma manera, La función `ExtractRaw.test` calcula cuantos simplejos críticos arroja el algoritmo `ExtractRaw`.

---

### **ExtractRaw.Test**

---

```
ExtractRaw.Test<-function(K){
  M<-ExtractRaw(K)
  L<-length(M[[3]])
  return(L)
}
```

la función `complex` calcula de manera aleatoria un complejo simplicial de dimensión  $d$  que consiste de el producto wedge de  $n$  simplejos donde la dimensión de cada uno de ellos es menor o igual a  $d$ , también asigna de manera aleatoria un valor para cada vértice de manera que ningún algoritmo tenga ventaja con la elección de los valores.

---

### **Complex**

---

**Entrada:** Número de simplejos  $n$ , Dimensión  $d$ .

**Salida:** Estructura simplicial de dimensión  $d$  con  $n$  simplejos.

```
complex <- function(n, d){
  CSA <- matrix(, n, d + 1)
  r.1 <- 2
  for(r in 1:n){
    r.2 <- r.1 + sample(0:(d-1), 1)
    CSA[r,1:(r.2 - r.1 + 2)] <- c(1, r.1:r.2)
    r.1 <- r.2 + 1
  }
  M<-max(CSA, na.rm = TRUE)
  imagen<-sample( 1:M , M , replace = FALSE)
  perm <- function(n){
    if(is.na(n)){
      return(NA)
    } else {
      return(imagen[n])
    }
  }
  Perm<-Vectorize(perm, vectorize.args = "n", SIMPLIFY = TRUE)
  CSA <- matrix(Perm(CSA),N,d +1)
  return(CSA)
}
```

**Ejemplo A.3.1.** Tomemos  $n, d = 5$ , entonces los resultados de `complex` son de la siguiente

forma:

```
complex(5,5)={13,17,1,11},
              {13,10,16,9},
              {13,2,8,15,5,6},
              {13,4},
              {13,3,12,14,7}
```

la función Num.simp calcula el número de simplejos que tiene un simplejo de dimensión  $n$ .

---

### Num.Simp

---

**Entrada:** Número natural  $n$ .

**Salida:** Número de simplejos en una estructura simplicial estandar de dimensión  $n$ .

```
Num.Simp <- function(n) {
  r<-0
  a<-0
  while( r < n ){
    a<- a + choose(n,r)
    r<- r + 1
  }
  return(a)
}
```

# Bibliografía

- [1] G. E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, 1972.
- [2] G. E. Bredon. *Topology and Geometry*. 139. 1993.
- [3] R. A. Brualdi. *Introductory Combinatorics*. Pearson Education, Inc., 2009.
- [4] G. Carlsson. Topological pattern recognition for point cloud data. *Department of Mathematics, Stanford University*, 2013.
- [5] M. E. Espinosa Lara. *Homología Persistente*. CIMAT.
- [6] R. Forman. Morse theory for cell complexes. *Adv. Math.*, 1998.
- [7] R. Forman. A user's guide to discrete morse theory. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 2002.
- [8] R. Freij. *Equivariant Discrete Morse Theory*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, 2007.
- [9] J. A. González Lemus. *Teoría de Morse Discreta y Gráficas de Reeb aplicadas a ATD*. CIMAT.
- [10] H. King, K. Knudson, and N. Mramor. Generating discrete morse functions from point data. *Experimental Mathematics*, 14(4), 2005.
- [11] J. P. May. *Equivariant Homotopy and Cohomology Theory*. American Mathematical Society, 1996.
- [12] J. Milnor. *Morse Theory*. Study 51. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [13] J. R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison Wesley, 1984.
- [14] V. Nanda. *Discrete Morse theory for filtrations*. PhD thesis, New Brunswick Rutgers, The State University of New Jersey, 2012.
- [15] J. J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer, 1991.
- [16] V. Vassiliev. Complexes of connected graphs. *The Gelfand Mathematical Seminars*, 1990-1992.