



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Bifurcación de Turing-Hopf en Sistemas de
Reacción-Difusión

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Gabriel Adrián Salcedo Varela

Directores de Tesis: Dr. Víctor F. Breña Medina
Dr. Daniel Olmos Liceaga

Hermosillo, Sonora, México, 25 de Agosto del 2017

SINODALES

Dr. Víctor Francisco Breña Medina
Instituto Tecnológico Autónomo de México,
Ciudad de México, México

Dr. Daniel Olmos Liceaga
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México

Dr. Fernando Verduzco González
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México

Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México



"El Saber de Mis Hijos
Hará Mi Grandeza"



El saber de mis hijos
hará mi grandeza

Salcedo Varela Gabriel Adrian

GABRIEL ADRIAN
SALCEDO VARELA

211203745

UNIVERSIDAD DE SONORA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

En la ciudad de Hermosillo, Sonora, siendo las 18:00 horas del día 25 de agosto de 2017, se reunieron en el Auditorio del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, los integrantes del jurado:

DR. FRANCISCO ARMANDO CARRILLO NAVARRO
DR. FERNANDO VERDUZCO GONZÁLEZ
DR. VÍCTOR FRANCISCO BREÑA MEDINA
DR. DANIEL OLMOS LICEAGA

bajo la presidencia del primero y fungiendo como secretario el último, para realizar el examen de grado del programa de Maestro en Ciencias Matemáticas, a:

GABRIEL ADRIAN SALCEDO VARELA

quien de acuerdo a la opción de examen de grado presentó un trabajo de investigación titulado

"Bifurcación de Turing-Hopf en Sistemas de Reacción-Difusión"

El jurado, después de debatir entre sí reservada y libremente, emitió el siguiente dictamen:

APROBADO POR UNANIMIDAD

y para constancia se levantó la presente acta.

Acta: 43

Foja: 43

Libro: 1

DR. JESÚS ADOLFO
MINJAREZ SOSA,
Coordinador del Programa de
Maestro en Ciencias
Matemáticas de la Universidad
de Sonora, hace constar que las
firmas que anteceden
corresponden al jurado que
intervino en el examen de
grado.

Hermosillo, Sonora, a 25 de
agosto de 2017

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa

DR. JESÚS ADOLFO
MINJAREZ SOSA

Coordinador de programa



DIVISIÓN DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES,
COORDINACIÓN
POSGRADO EN MATEMÁTICAS

DR. FRANCISCO ARMANDO
CARRILLO NAVARRO
Presidente

DR. FERNANDO VERDUZCO
GONZALEZ
Sinodal

DR. DANIEL OLMOS LICEAGA
Secretario

DR. VÍCTOR FRANCISCO BREÑA
MEDINA
Sinodal externo

Agradecimientos

Agradezco a la institución CONACyT por su apoyo económico que me proporcionó durante el transcurso de estos dos años.

Agradezco de manera muy especial a mis directores de tesis Dr. Víctor Francisco Breña Medina, Dr. Daniel Olmos Liceaga gracias por compartir sus conocimientos conmigo, por su ayuda moral que extendió hacia un servidor, muchas gracias por su amistad. Quiero dar las gracias a los integrantes del comité revisor de este trabajo: Dr. Fernando Verduzco González y Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro, sin duda, sus correcciones, críticas y consejos me han permitido culminar este trabajo.

Gracias a todos mis amigos, especialmente a aquellos con quien comparto diariamente momentos de estudio, diversión, tristezas y alegrías.

ÍNDICE GENERAL

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Preliminares | 9 |
| 1.1 | Teoría de la bifurcación de Hopf | 9 |
| 1.2 | Fenómeno de Difusión | 15 |
| 1.3 | Teoría de la bifurcación de Turing | 18 |
| 1.4 | Teoría general para la bifurcación de Turing-Hopf | 22 |
| 2 | Sistema presa-depredador con Captura | 25 |
| 2.1 | Análisis del modelo sin difusión | 25 |
| 2.2 | Bifurcaciones del sistema | 45 |
| 2.3 | Análisis del sistema con difusión | 59 |
| 2.4 | Simulaciones del sistema con difusión | 60 |
| 2.5 | Sistemas que no presentan bifurcaciones de Turing | 63 |
| 3 | Sistema presa-depredador. Bifurcación de Turing-Hopf. | 69 |
| 3.1 | Estabilidad local del sistema | 73 |
| 3.2 | Bifurcaciones del sistema | 76 |
| 3.3 | Bifurcación de Turing del sistema | 79 |
| 3.4 | Simulaciones de la Bifurcación de Turing | 84 |
| 3.5 | Bifurcación de Turing-Hopf del sistema | 88 |
| 3.6 | Simulaciones de la bifurcación de Turing-Hopf | 90 |
| 4 | Simulaciones en dos dimensiones | 97 |
| 4.1 | Simulación: Bifurcación Turing dos dimensiones | 99 |
| 4.2 | Simulación: Bifurcación Turing-Hopf dos dimensiones | 100 |
| A | Diferencias Finitas | 107 |
| B | Método Runge-Kutta | 111 |

Introducción

Los modelos matemáticos han desempeñado un papel importante a lo largo de la historia de la ecología. Los modelos en ecología a menudo nos sirven para ilustrar ideas así como para modelar fenómenos difíciles de comprender de la vida real. Mediante los modelos en ecología podemos hacer predicciones tanto específicas como generales, además de proporcionar una base para el desarrollo de herramientas estadísticas y de hipótesis comprobables [1].

Los modelos son simplificaciones de la realidad que están diseñados para analizar algunos aspectos del fenómeno a estudiar. La creación de un modelo está fuertemente unida al interés que se desee modelar [2]. Este hecho suele ser pasado por alto por muchos biólogos, tanto en formación como en el caso de especialistas. Ya que las matemáticas no pueden modelar todas especificaciones que los fenómenos presentan, las cuales pueden aportar a su conocimiento muchos puntos de vista distintos [3].

Un gran número de fenómenos reales son modelados por ecuaciones de reacción-difusión. Las ecuaciones de reacción-difusión muestran características dinámicas que se asemejan a fenómenos de tipo onda, los cuales se propagan como pulsos solitarios y paquetes de pulsos, patrones estables y un comportamiento caótico espacio-temporal [4].

La formación de patrones es uno de los temas centrales de la ecología. Las poblaciones que viven en su medio natural tienen raramente características comunes. A menudo, estas características toma la forma de un patrón irregular, ya que puede ocurrir que las áreas con una mayor densidad de población empiecen a difundirse a áreas donde la especie que se esté estudiando, esté prácticamente ausente. A veces, se puede relacionar a las propiedades del medio ambiente, debido a que puede haber más alimento o alguna sobrepoblación que ocasione que los individuos tengan que desplazarse a otro lugar distinto. Por ejemplo, una población de insectos que vive en campos de maíz en densidades considerables puede estar casi ausente en el espacio entre los campos simplemente debido a condiciones desfavorables de diversa índole; véase [5].

La teoría de formación de patrones comenzó a formularse rigurosamente debido a las ideas de Alan M. Turing, quien en 1952 demostró matemáticamente que un sistema de ecuaciones de reacción-difusión podría dar lugar a patrones de concentración espacial, en el cual se tiene un dominio con una longitud fija y una condición inicial dada [6]. Estos patrones son debidos a la inestabilidad que es producida por la difusión. El objetivo de Turing era modelar mecanismos detrás de la morfogénesis, es decir, el crecimiento biológico de la forma de los individuos. Turing planteó la hipótesis de que, tan pronto como la blástula esférica se hace lo suficientemente grande y se presentan varias desviaciones aleatorias de la perfecta simetría, ese estado se vuelve

inestable y el sistema es llevado a otro estado definido por procesos físico-químicos espontáneos [7].

Turing sugirió un modelo en el cual un embrión contiene dos sustancias A y B llamadas morfógenos, las cuales reaccionan entre si en cada célula, y se difunden entre células vecinas con coeficiente de difusión D_A y D_B [6, 7]. El modelo propuesto por Turing está dado por la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = R(c) + D\Delta c, \quad (1)$$

donde $c = c(x, t)$ es el vector de concentración de los morfógenos en el tiempo t en la posición x y tiene como componentes $(A, B)^T$. R es la reacción que ocurre entre los morfógenos y D la matriz diagonal con los coeficientes de difusión. Además de las condiciones de frontera e inicial

$$c(x, 0) = c_0(x) \text{ y } \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega,$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera del dominio, las condiciones de frontera son de cero flujo. La reacción R representa las cinéticas F y G

$$R(c) = \begin{pmatrix} F(A, B) \\ G(A, B) \end{pmatrix},$$

donde F es la cinética del morfógeno A , G es la cinética del morfógeno B . De esta manera, el sistema (1) tiene la siguiente expresión

$$\frac{\partial A}{\partial t} = F(A, B) + D_A\Delta A, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = G(A, B) + D_B\Delta B.$$

La aparición de patrones periódicos en sistemas de reacción-difusión es principalmente una consecuencia de la inestabilidad producida por la difusión, para soluciones periódicas no triviales. Tales soluciones periódicas son generalmente consecuencia de la bifurcación de Hopf. Por otro lado, los fundamentos matemáticos de las inestabilidades de Turing se reconocen como principios básicos en la formación de patrones y sus implicaciones en la morfogénesis [6].

Más recientemente, se ha tratado la cuestión de los patrones periódicos como consecuencia de las inestabilidades de Turing para las soluciones periódicas espacialmente homogéneas que aparecen debido a las bifurcaciones de Hopf. Estas inestabilidades se llaman inestabilidad de Turing-Hopf o bifurcaciones de Turing-Hopf. En el estudio de la bifurcación de Turing-Hopf intervienen dos parámetros: el primero está asociado a la bifurcación de Hopf y el segundo está asociado con la relación de los coeficientes de difusión [6].

El principal objetivo de este trabajo es entender e implementar el mecanismo de Turing-Hopf en dos modelos de presa-depredador, uno con un término de depredación

diferente a la presa y el otro modelo posee un nivel de extinción de los depredadores. De este modo, estudiaremos cada modelo por separado primeramente considerando el modelo sin difusión, es decir, trabajaremos con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Después consideraremos el modelo con difusión, convirtiendo el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Encontraremos las condiciones necesarias y suficientes para que ocurra la bifurcación de Hopf, seguido de la formación de patrones debido a la bifurcación o mecanismo de Turing, y con ello poder llegar a obtener las condiciones que se requieren para que se presente la bifurcación o mecanismo de Turing-Hopf. Finalmente simularemos los modelos y analizaremos los resultados.

En el primer capítulo veremos algunos conceptos básicos sobre la teoría de las bifurcaciones de Hopf y Turing por separado. Asimismo, incluiremos el concepto de difusión y la teoría de la bifurcación de Turing-Hopf, además de algunos ejemplos. En el capítulo 2, mediante el uso de las ecuaciones diferenciales se propone un modelo de presa-depredador con término de depredación. Se estudian analíticamente a fondo las propiedades cualitativas de dicho modelo y se presentan simulaciones del modelo sin difusión. Después estudiaremos las condiciones necesarias y suficientes para la ocurrencia de la bifurcación de Turing y presentaremos simulaciones del modelo con difusión en una dimensión. Finalizamos el capítulo con un teorema, el cual nos dice cuándo no puede presentarse la bifurcación de Turing en un modelo. En el capítulo 3, presentamos un modelo de presa-depredador, en el cual los depredadores solo pueden sobrevivir si hay suficientes presas. Al igual que en el capítulo 2 estudiaremos las propiedades cualitativas del modelo analíticamente, se estudian las condiciones necesarias y suficientes para que pueda ocurrir la bifurcación de Turing, así como la bifurcación de Turing-Hopf. Además presentamos simulaciones en una dimensión para ambas bifurcaciones, con distintas condiciones iniciales.

Finalmente, en el capítulo 4, presentamos simulaciones en dos dimensiones de la bifurcación de Turing, y la bifurcación de Turing-Hopf. Solo estamos estudiando el caso cuando el dominio es el plano. Por último discutiremos los resultados obtenidos con las simulaciones y presentamos conclusiones.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo, presentamos algunos conceptos que estaremos utilizando a lo largo del trabajo, los cuales, son de carácter teórico para aplicarlos en distintos modelos que se estarán estudiando en los siguientes capítulos.

Primero presentaremos una breve parte de la teoría de la bifurcación de Hopf. Esta bifurcación es muy importante en el área de la biología matemática, debido a que la existencia de estas bifurcaciones nos indican la supervivencia de especies, describen comportamientos periódicos. Los cuales son fundamentales en biología al modelar ritmos circadianos, generación de potenciales de acción, modelación de ecosistemas de presa-depredador, etc.

Continuaremos con una descripción de los fenómenos de difusión, ya que es uno de los medios de transporte más utilizados en la modelación de sistemas biológicos. Además que es fuertemente utilizado en la inestabilidad de Turing, esta propiedad de los sistemas de reacción-difusión nos permite obtener comportamientos periódicos en el dominio espacial.

Finalizaremos con una descripción de la bifurcación de Turing-Hopf. Para que esta bifurcación ocurra, primero debe ocurrir la bifurcación de Hopf en el sistema ordinario, y después debe ocurrir la bifurcación de Turing en el sistema de reacción-difusión. Además, la bifurcación de Turing se presenta más rápido, si el parámetro de bifurcación, en el caso de la bifurcación de Hopf, está más cerca del valor donde la bifurcación de Hopf comienza [8, 9]. La proximidad de este tipo de inestabilidad puede conducir a su interacción de manera que el patrón espacio-temporal resultante puede diferir significativamente de los patrones que aparecerían en el caso típico de la bifurcación de Turing.

La bifurcación de Turing está asociada con el paso de la parte real de un valor propio a través de cero (bifurcación en estado estacionario). Y la bifurcación Hopf con el cruce del eje imaginario por un par de valores propios complejos conjugados. Interacciones de la bifurcación de Hopf y bifurcaciones en estado de equilibrio puede traer una variedad de tipos complejos de comportamiento.

1.1 Teoría de la bifurcación de Hopf

En esta sección, presentamos una síntesis de la teoría de la bifurcación Hopf. Esta bifurcación se presenta en muchos sistemas de ecuaciones en los cuales existen fenómenos

oscilatorios. Dado que en este trabajo nos enfocaremos a modelos biológicos, particularmente en el área de ecología, daremos una descripción breve de cómo obtener la bifurcación de Hopf, además de ejemplos donde se presenta. La información que presentamos a continuación puede verse con más profundidad en [10].

Supongamos que un sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$ de dos ecuaciones (la bifurcación puede darse en una dimensión mayor). El cual tiene un punto de equilibrio fijo asintóticamente estable, de tal manera que el punto de equilibrio pueda cambiar de estabilidad mientras variamos el parámetro μ . La información con la cual el punto de equilibrio pueda cambiar de estabilidad, será proporcionada por los valores propios de la matriz de Jacobi, evaluada en el punto de equilibrio.

Como consideraremos un sistema de dimensión dos, los valores propios satisfacen una ecuación cuadrática con coeficientes reales. Por tanto, las raíces de dicha ecuación son reales o son complejos conjugados. Para nuestro interés consideramos el caso que los valores propios son complejos.

En el caso de la bifurcación de Hopf, los valores propios λ_1 y λ_2 son función del parámetro μ y tienen la propiedad de que para un valor μ_1 , $\text{Re}(\lambda_1(\mu_1))$ y $\text{Re}(\lambda_2(\mu_1))$ son menor a cero. Y al variar el parámetro μ , el punto de equilibrio se hace inestable, cuando ambos valores propios cruzan el eje imaginario, es decir, existe $\mu_2 > \mu_1$ tal que $\text{Re}(\lambda_1(\mu_2)) > 0$ y $\text{Re}(\lambda_2(\mu_2)) > 0$.

Esta consideración hace que un punto de equilibrio estable, cambie a ser inestable al variar el parámetro μ . Pero también puede pasar que el punto de equilibrio sea inestable inicialmente. Las condiciones para que la bifurcación de Hopf ocurra, son independientes de la estabilidad.

La bifurcación de Hopf está dividida en dos casos, cuando es supercrítica y subcrítica. A continuación daremos una breve descripción de ambas.

Bifurcación de Hopf supercrítica

Supongamos que tenemos un punto de equilibrio asintóticamente estable, tal que dada una condición inicial, esta convergerá exponencialmente al punto de equilibrio. Como $\lambda = \lambda(\mu)$ suponemos que para un valor $\mu = \mu_1$, se tiene que $\text{Re}(\lambda_{1,2}(\mu_1)) < 0$.

Como la condición inicial converge exponencialmente al punto de equilibrio, al variar el parámetro μ hacia el valor crítico μ_c . La convergencia de la solución hacia el punto de equilibrio se vuelve más lenta, ya que la parte real de los valores propios están más cerca de ser cero. Cuando el parámetro μ pasa el valor μ_c el punto de equilibrio se vuelve inestable, ya que la parte real de los valores propios se hacen positivos. En muchos casos, el resultado es una oscilación de un ciclo límite de amplitud pequeña, sobre el punto de equilibrio. Entonces diremos intuitivamente que en el sistema ha ocurrido una bifurcación de Hopf supercrítica.

Otra forma de verlo es, mediante el espacio fase. Una bifurcación de Hopf supercrítica ocurre cuando un punto de equilibrio estable cambia a ser un punto de equilibrio inestable, rodeado por un pequeño ciclo límite.

Un ejemplo de dimensión dos donde ocurre una bifurcación de Hopf supercrítica, está dado por el siguiente sistema:

$$\dot{x} = (\mu - (x^2 + y^2))x - (\omega + b(x^2 + y^2))y, \quad (1.1a)$$

$$\dot{y} = (\mu - (x^2 + y^2))y + (\omega + b(x^2 + y^2))x. \quad (1.1b)$$

En este sistema, el origen es un punto de equilibrio. Por tanto calcularemos y evaluaremos la matriz de Jacobi en el origen.

$$\begin{bmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{bmatrix}$$

los valores propios son $\lambda_{1,2} = \mu \pm \omega i$. De aquí vemos que, los valores propios cruzan el eje imaginario de izquierda aderecha, mientras μ crece de valores negativos a positivos. En la figura 1.1, se muestra el retrato fase del sistema (1.1).

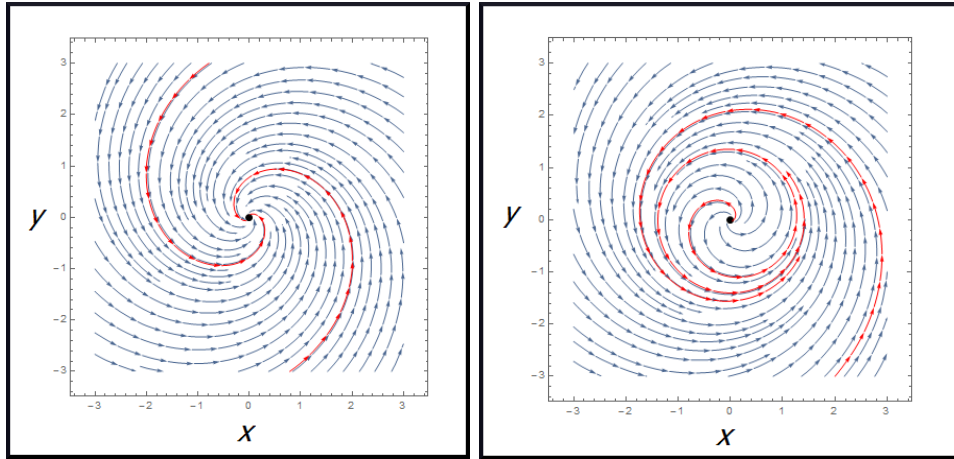


Figura 1.1: Retrato fase del sistema (1.1). Bifurcación de Hopf supercrítica. Parámetros $\omega = 2$, $b = 3$, variamos μ , con $\mu = -1$ en la figura de la izquierda, b) $\mu = 1$ en la figura de la derecha.

En la figura 1.1 (izquierda), podemos observar que tenemos un punto de equilibrio asintóticamente estable del tipo foco, cuando el parámetro $\mu < 0$. La bifurcación se da cuando tenemos $\mu = 0$, y cuando el parámetro μ cruza el valor de 0 aparece un ciclo límite. El punto de equilibrio se vuelve inestable y las trayectorias convergen al ciclo límite.

Ahora que hemos visto el retrato fase del sistema para el caso de $\mu < 0$ y $\mu > 0$. Donde se observó la estabilidad del punto $(0, 0)$, procedemos a mostrar la existencia de una órbita periódica estable cuando $\mu > 0$. Para ello, cambiaremos el sistema a coordenadas polares, el cual queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu r - r^3, \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2,\end{aligned}$$

Para mostrar la existencia de soluciones cerradas, resolvemos el caso $\dot{r} = 0$, que implican soluciones cuyo radio no cambia. Y por tanto que nos da órbitas cerradas o soluciones periódicas. Es decir, encontramos los valores de r que satisfagan la ecuación:

$$\mu r - r^3 = 0$$

de esto se observan tres soluciones, las cuales son $r = 0$, $r = \sqrt{\mu}$ y $r = -\sqrt{\mu}$, esto nos da origen la siguiente figura.

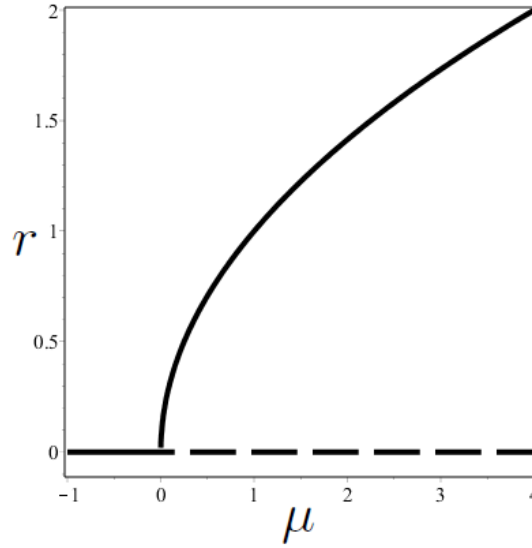


Figura 1.2: Diagrama de bifurcación de Hopf supercrítica al variar el parámetro μ .

En la figura 1.2, se puede observar que mientras variamos el parámetro μ , el punto de equilibrio es estable cuando μ es negativa. Cuando μ cruza el eje imaginario, comienza a surgir un ciclo límite asintóticamente estable y el punto de equilibrio pasa a ser inestable. En este caso, el ciclo límite va incrementando su período mientras μ va creciendo. Mediante el Teorema de Poincaré-Bendixon es posible probar la existencia de estos ciclos límite.

Bifurcación de Hopf subcrítica

El caso subcrítico es más raro, debido a que antes de que suceda la bifurcación tenemos la existencia de un ciclo límite inestable. Después que ocurre la bifurcación,

las trayectorias deben converger a un atractor distante, que puede ser otro punto de equilibrio, un ciclo límite, infinito, etc. Este es uno de los efectos que se pueden apreciar, debido a que mientras el parámetro μ crece de negativo a positivo, el ciclo límite inestable se contrae hasta tener amplitud cero y envuelve al punto de equilibrio, haciéndolo inestable. Cuando $\mu > 0$, si se genera un ciclo límite este es atractor. El otro efecto es cuando un equilibrio pierde estabilidad y la órbita periódica es inestable.

Por ejemplo, considere el siguiente sistema de dimensión dos:

$$\dot{x} = (\mu + (x^2 + y^2))x - (\omega + b(x^2 + y^2))y, \quad (1.2a)$$

$$\dot{y} = (\mu + (x^2 + y^2))y + (\omega + b(x^2 + y^2))x. \quad (1.2b)$$

En este sistema, el origen es un punto de equilibrio. Por tanto calcularemos y evaluaremos la matriz de Jacobi en el origen.

$$\begin{bmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{bmatrix}$$

en este caso también tenemos los valores propios $\lambda_{1,2} = \mu \pm \omega i$. De aquí vemos que, los valores propios cruzan el eje imaginario de izquierda aderecha, mientras μ crece de valores negativos a positivos.

En la siguiente figura 1.3, se muestra el retrato fase del sistema (1.2).

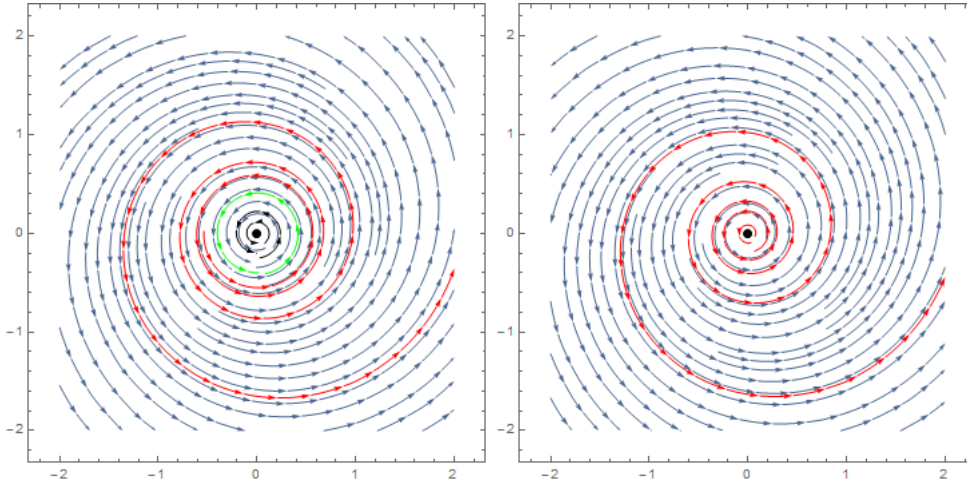


Figura 1.3: Retrato fase del sistema (1.2). Bifurcación de Hopf subcrítica. Parámetros $\omega = 4$, $b = 5$, variamos μ , con $\mu = -0.2$ en la figura de la izquierda, b) $\mu = 2$ en la figura de la derecha.

En la figura 1.3, podemos observar que en la figura de la izquierda tenemos un punto de equilibrio estable, además de poderse apreciar un ciclo límite inestable. Cualquier

condición inicial dentro del ciclo límite converge al punto de equilibrio, cuando el parámetro $\mu < 0$. La bifurcación se da cuando tenemos $\mu = 0$. Y cuando cruza el valor de 0 aparece un ciclo límite, donde el punto de equilibrio se vuelve inestable y las trayectorias convergen al ciclo límite.

Ahora que hemos visto el retrato fase del sistema para el caso de $\mu < 0$ y $\mu > 0$, donde se observó la estabilidad del punto $(0, 0)$. procedemos a mostrar la existencia de una órbita periódica inestable cuando $\mu < 0$ y la existencia de una órbita periódica estable cuando $\mu > 0$. Para ello, cambiaremos el sistema a coordenadas polares, el cual queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu r + r^3, \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2.\end{aligned}$$

Para mostrar la existencia de soluciones cerradas, resolvemos el caso $\dot{r} = 0$, que implican soluciones cuyo radio no cambia, y por tanto que nos da órbitas cerradas o soluciones periódicas. Es decir, encontramos los valores de r que satisfagan la ecuación:

$$\mu r + r^3 = 0$$

de esto se observa que mientras variamos μ de negativo a positivo, se da lugar a la siguiente figura.

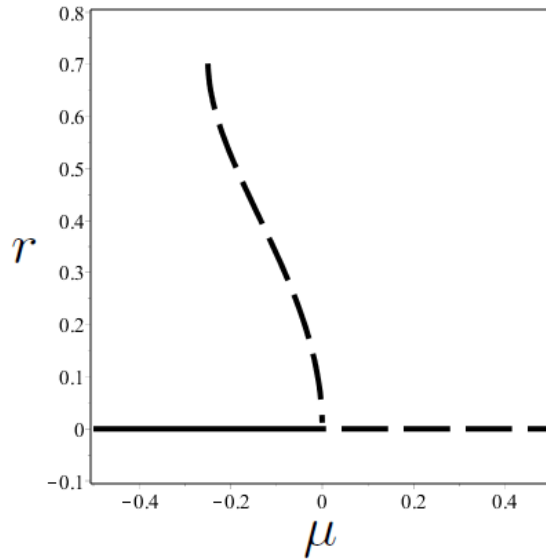


Figura 1.4: Diagrama de bifurcación de Hopf subcrítica al variar el parámetro μ .

En la figura 1.4, se puede observar que mientras variamos el parámetro μ existen dos ciclos límites, uno inestable y otro estable. Si seguimos incrementando el parámetro μ el ciclo límite inestable colapsa en el punto de equilibrio, haciéndolo inestable y que solo exista un ciclo límite estable. Además de que hay una bifurcación de Hopf subcrítica, también ocurre una bifurcación del tipo silla-nodo que estabiliza la órbita inestable.

1.2 Fenómeno de Difusión

A continuación veremos uno de los efectos importantes que se pueden incorporar a los sistemas biológicos. Debido al contexto de este trabajo daremos una breve explicación del concepto de difusión, ya que es muy importante. Por ejemplo, cuando abrimos un frasco de perfume o de cualquier otro líquido volátil, podemos olerlo rápidamente en un lugar cerrado. Decimos que las moléculas del líquido después de evaporarse se difunden por el aire, distribuyéndose en todo el espacio. Lo mismo ocurre si colocamos un terrón de azúcar en un vaso de agua, las moléculas de sacarosa se difunden por todo el agua. Utilizaremos este concepto a lo largo de los capítulos siguientes. Además de que mediante la difusión, obtendremos una propiedad sumamente importante de este trabajo. La información que presentamos a continuación puede verse con mayor profundidad en [11].

Cuando se está modelando algún fenómeno que ocurre en cierto espacio, es fundamental la conservación de las sustancias involucradas dentro del modelo, es decir, es necesario el balance en la ecuación diferencial.

Veamos el caso donde el movimiento de las partículas ocurre en una dimensión. Consideremos un cilindro y tomando una sección transversal, donde el área transversal es constante en cualquier parte del cilindro.

Llamaremos x a la distancia arbitraria desde el origen a lo largo del cilindro. Luego fijemos el intervalo $(x, x + \Delta x)$ y describamos los dos efectos que influyen en la concentración de partículas: primero, el flujo de partículas entrando y saliendo del intervalo $(x, x + \Delta x)$. Segundo, el proceso de introducir o degradar partículas por medio de la reacción cinética. Así podemos establecer el balance de la ecuación por medio de la masa o número de partículas.

$$\begin{bmatrix} \text{tasa de} \\ \text{cambio de} \\ \text{población de} \\ \text{partículas en} \\ (x, x + \Delta x) \\ \text{por unidad} \\ \text{de tiempo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{tasa de} \\ \text{cambio de} \\ \text{entrada de} \\ \text{partículas en} \\ (x, x + \Delta x) \\ \text{por unidad} \\ \text{de tiempo} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{tasa de} \\ \text{cambio de} \\ \text{salida de} \\ \text{partículas en} \\ (x, x + \Delta x) \\ \text{por unidad} \\ \text{de tiempo} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \text{tasa de} \\ \text{cambio de} \\ \text{creación o} \\ \text{eliminación} \\ \text{partículas,} \\ \text{localmente} \\ \text{por unidad} \\ \text{de tiempo} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Mediante esta relación, definiremos los siguientes términos

| Término | Descripción |
|----------------|--|
| $J(x, t)$ | Número de partículas cruzando una unidad de área en el punto x con dirección positiva por unidad de tiempo |
| $c(x, t)$ | Concentración de partículas en (x, t) |
| $\sigma(x, t)$ | Número de partículas creadas o eliminadas por unidad de tiempo por unidad de volumen en (x, t) |
| A | Área de la sección transversal del tubo |
| ΔV | Volumen correspondiente a la longitud $\Delta x = A\Delta x$ |

Tabla 1.1: Términos de la ecuación del balance

En términos de los elementos de (1.1), reescribiremos la ecuación (1.3), obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial t}(c(x, t)A\Delta x) = J(x, t)A - J(x + \Delta x, t)A \pm \sigma(x, t)A\Delta x. \quad (1.4)$$

La función c depende de dos variables, x y t . Por otro lado, el área y la cantidad Δx no dependen del tiempo, por tanto podemos despejarlo del lado izquierdo de la ecuación. Obteniendo una representación del cambio con respecto al tiempo de la concentración de partículas.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{J(x + \Delta x, t) - J(x, t)}{\Delta x} \pm \sigma(x, t). \quad (1.5)$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y mediante la definición de la derivada, obtenemos

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \pm \sigma(x, t). \quad (1.6)$$

La ecuación (1.6) se conoce como ecuación de balance en una dimensión o ley de conservación. El análisis cuando la dimensión es mayor a uno, es análogo.

Una de las fuentes más importantes de movimiento colectivo a nivel molecular es la difusión, que resulta del movimiento aleatorio continuo de las moléculas individuales. La difusión es un importante mecanismo de transporte metabólicamente barato en sistemas biológicos, pero como veremos, su efectividad disminuye rápidamente con la distancia. Una suposición familiar hecha en el contexto de la difusión, es a través de las membranas celulares, en las cuales la tasa de flujo depende linealmente de las diferencias de concentración. Esta es una aproximación a una situación más complicada. Una extensión de este concepto a situaciones más generales se conoce como ley de Fick, que indica que el flujo debido al movimiento al azar es aproximadamente proporcional al gradiente local en la concentración de la partícula:

$$J = -D\nabla c.$$

La constante de proporcionalidad D se conoce como el coeficiente de difusión. Por ejemplo, en la figura 1.5, podemos apreciar que si la derivada en un punto es positiva, la concentración tiende a ir en dirección negativo. Y si la derivada es negativa, la concentración tiende a ir en dirección positiva. Claramente, podemos ver que el movimiento de la concentración en x dada por $f(x)$, va de altas a bajas concentraciones.

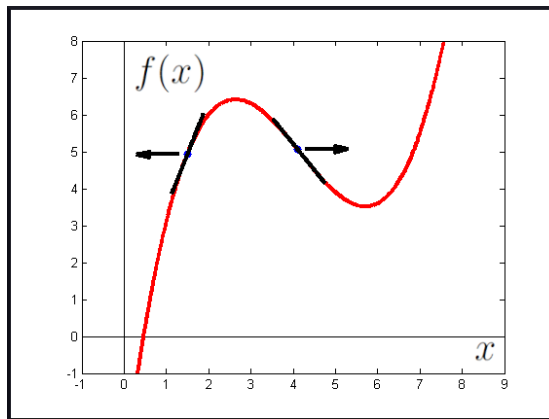


Figura 1.5: Representación Ley de Fick.

La migración neta debido a la difusión es contraria del gradiente de la concentración, en una dirección lejos de los lugares más concentrados. Esto tiene sentido ya que en la

mayoría de las situaciones donde hay una concentración local relativamente grande, más moléculas abandonan en promedio que el retorno (debido al carácter aleatorio de sus movimientos).

En una dimensión, el flujo difusivo es dado simplemente por $J = -D \frac{\partial c}{\partial x}$, de manera que al sustituir la ecuación de conservación se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial c}{\partial x} \right].$$

Si D es una constante y no depende de c o x , se obtiene la versión más familiar de la ecuación de difusión unidimensional:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

1.3 Teoría de la bifurcación de Turing

La embriología es la parte de la biología que se encarga de estudiar la formación y el desarrollo del embrión desde su fertilización hasta el nacimiento. Por ejemplo, el embrión del ser humano y el de otros seres vivos en sus primeros días de gestación, es prácticamente imposible distinguirlos visualmente [7, 12, 13, 14].

La morfogénesis es la parte de la embriología la cual se encarga del estudio de cómo se generan la forma y la estructura biológicas. Es posible estudiar la forma que adquiere el embrión conforme se desarrolla dando lugar a la formación de patrones en sus órganos [7, 12, 13, 14]. En 1952 Alan Turing fue el primero en proponer un mecanismo y atribuir a las reacciones químicas la formación de patrones en la naturaleza y estudió sistemas de reacción-difusión de modelos biológicos.

Turing sugirió un modelo en el cual un embrión idealizado contiene dos sustancias químicas características A y B llamadas morfógenos. Las cuales reaccionan entre sí en cada célula y se difunden entre células vecinas con coeficientes de difusión D_A y D_B , respectivamente, formando, patrones espacio-temporales. Estos patrones se formarán siempre que el sistema de reacción-difusión cumpla con ciertas condiciones. A este proceso se le conoce como *el mecanismo de Turing, inestabilidad de Turing o inestabilidad inducida por difusión* [7, 12, 13, 14].

En este trabajo nos basaremos en área de la ecología y estudiaremos el mecanismo de Turing en dicha área. Para ello, en vez de tomar a un embrión que contiene dos sustancias químicas, tomaremos una población de individuos. Las poblaciones estarán interactuando entre sí y dichas sustancias representarán en nuestro caso a dos poblaciones presas y depredadores, los cuales podrán moverse en un medio ambiente.

Para obtener la inestabilidad de Turing comenzaremos derivando las condiciones necesarias para que ocurra. De modo que, considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma f(u, v) + \Delta u, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \gamma g(u, v) + d\Delta v, \quad (1.8)$$

con condiciones iniciales $u(x, 0)$, $v(x, 0)$ dados. Además, consideramos condiciones de frontera de Neumann, $u_x(x, t) = 0$, $v_x(x, t) = 0$ para $x \in \partial B$. Las condiciones de frontera igual a cero, se tomaron debido a que consideramos una población cerrada, es decir, no habrá entrada ni salida de individuos externamente del dominio.

Necesitaremos obtener los puntos de equilibrio del sistema (1.7) en ausencia de difusión, el cual debe tener coordenadas positivas. Dicho punto de equilibrio es la solución de

$$f(u, v) = 0, \quad g(u, v) = 0. \quad (1.9)$$

Supondremos que el punto de equilibrio tiene coordenadas (u_0, v_0) y linealizaremos cerca del punto de equilibrio, de la siguiente forma

$$w = \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Esta linealización, transforma el sistema (1.7) en ausencia de difusión en

$$w_t = \gamma A w, \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{u_0, v_0}, \quad (1.11)$$

la matriz A , es la matriz de Jacobi de (1.7) sin difusión evaluada en el punto de equilibrio (u_0, v_0) . Como el sistema (1.11) es lineal, sabemos que el comportamiento de las soluciones estará determinado por los valores propios de la matriz A , o de igual forma por su traza y determinante.

Las primeras condiciones que deben cumplirse para que ocurra la inestabilidad de Turing, se derivan del hecho de que el punto de equilibrio debe ser estable, es decir,

- $\text{tr}(A) < 0$,
- $\det(A) > 0$.

Nos falta por obtener, otras dos condiciones. Estas condiciones estarán relacionadas con el efecto de difusión, y como el nombre nos indica, buscaremos que el punto de equilibrio sea inestable, cuando este presente el efecto de difusión.

Ahora considere el sistema

$$w_t = \gamma Aw + D\Delta w, \quad \text{donde } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

el último término $D\Delta w$, nos representa las derivadas parciales de u y v en forma vectorial, el cual se formula de esta manera porque la derivada de una constante es cero, es decir, $\partial w / \partial x = (\partial u / \partial x, \partial v / \partial x)^T$. En este caso también se linealizó cerca de (u_0, v_0) . Como este sistema está sujeto a condiciones de frontera y es lineal, se puede obtener la solución mediante el método de separación de variables, propondremos que la solución sea del tipo $w(x, t) = T(t)W(x)$. Sustituyendo en la ecuación (1.12), obtenemos

$$T'(t)W(x) = \gamma AT(t)W(x) + D\Delta T(t)W(x),$$

agrupando de cada lado los términos de t y x , obtenemos

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \gamma A + \frac{D}{W(x)} \Delta W(x),$$

como en cada lado de la igualdad hay dependencia de una sola variable, entonces la única manera de que sea posible la igualdad, es si ambos son constante, la cual satisface las condiciones de frontera para la ecuación de (1.7), es decir,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -k^2 \quad \text{y} \quad \gamma A + \frac{D}{W(x)} \Delta W(x) = -k^2.$$

Las soluciones para estas ecuaciones, son proporcionales a $e^{\lambda t}$ para el caso temporal y $\cos(\frac{n\pi x}{L})$ para el caso espacial, debido a las condiciones iniciales y de frontera.

Como la solución w es la multiplicación de ambas soluciones, sabemos que para algún $k = n\pi/L$, la solución toma la forma de $w_k(x, t) = c_k e^{\lambda t} W_k(x)$, y por el principio de superposición, la solución al problema es

$$w(x, t) = \sum_k c_k e^{\lambda t} W_k(x). \quad (1.13)$$

Donde las constantes c_k son conocidos como coeficientes de Fourier. Las constantes son determinadas por las series de Fourier de las condiciones iniciales en términos de $W_k(x)$. Ahora obtendremos los valores propios, los cuales se obtienen de

$$|\lambda I - \gamma A + Dk^2| = 0.$$

Utilizando las matrices A y D , obtenemos los valores propios $\lambda(k)$ como la raíces de

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda[k^2(1+d) - \gamma(f_u + g_v)] + h(k^2) &= 0, \\ h(k^2) &= dk^4 - \gamma(df_u + g_v)k^2 + \gamma^2 \det(A). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Como el punto de equilibrio es estable en ausencia de difusión. Ahora haremos que dicho punto de equilibrio sea inestable, para ello, requerimos que $\text{Re}(\lambda) > 0$ para algún $k \neq 0$. Esto puede ocurrir si el coeficiente de λ es negativo, o si $h(k^2) < 0$. Como $\text{tr}(A) < 0$ y $k^2(1+d) > 0$, el coeficiente de λ es positivo.

De este modo, la única forma para que $\text{Re}(\lambda)$ pueda ser positivo es si $h(k^2) < 0$ para algún $k \neq 0$. Como requerimos que $\det(A) > 0$, la única posibilidad para que $h(k^2)$ sea negativa es si $(df_u + g_v) > 0$. Debido a que $\text{tr}(A) < 0$, esto nos dice que, $d \neq 1$. Por lo tanto

$$df_u + g_v > 0. \quad (1.15)$$

La desigualdad (1.15) es necesaria pero no suficiente para tener $\text{Re}\lambda > 0$. Para que $h(k^2)$ sea negativa para algún k no cero, el valor de la función $h(k^2)$ en el mínimo debe ser negativo. De (1.14) vamos a derivar respecto a k^2 , obteniendo

$$h_{min} = \gamma \left[\det(A) - \frac{(df_u + g_v)^2}{4d} \right], \text{ donde } k^2 = k_{min}^2 = \gamma \frac{df_u + g_v}{2d}. \quad (1.16)$$

Entonces la condición que nos hace $h(k^2) < 0$ para algún $k \neq 0$ es

$$\frac{(df_u + g_v)^2}{4d} > \det(A). \quad (1.17)$$

La bifurcación ocurre cuando $h_{min} = 0$, para ello necesitamos que $\det(A) = \frac{(df_u + g_v)^2}{4d}$, fijando los parámetros de reacción del sistema, podemos definir un coeficiente de difusión crítico como la apropiada raíz de

$$d_c^2 f_u^2 + 2(2f_v g_u - f_u g_v) d_c + g_v^2 = 0. \quad (1.18)$$

Recapitulando todas las condiciones que se necesitan para generar patrones espaciales en modelos de dos especies de sistemas de la forma (1.7). También volver a recordar que todas las derivadas están evaluadas en el punto de equilibrio (u_0, v_0) de (1.7) en ausencia de difusión. Por lo que las condiciones para que ocurra la inestabilidad de Turing son

$$\text{I.} - f_u + g_v < 0, \quad (1.19a)$$

$$\text{II.} - f_u g_v - f_v g_u > 0, \quad (1.19b)$$

$$\text{III.} - df_u + g_v > 0, \quad (1.19c)$$

$$\text{IV.} - (df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) > 0. \quad (1.19d)$$

Estas condiciones van a ser utilizadas más adelante, como se mencionó al principio de la sección en modelos matemáticos en el área de ecología, para obtener la inestabilidad de Turing en modelos de presa-depredador.

1.4 Teoría general para la bifurcación de Turing-Hopf

A principios de los años noventa del siglo pasado, se realizaron investigaciones experimentales y teóricas sobre los mecanismos descritos hasta ahora (bifurcaciones de Turing y Hopf). Sobre la base de esto, se propuso otro mecanismo morfogénico. En los siguientes párrafos, presentamos una breve descripción de dicho mecanismo [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

Denotemos a Ω como un dominio en el plano, y consideremos un sistema de reacción-difusión de dos componentes. Donde la parte de reacción esta descrita por el campo vectorial $\mathbf{F} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto donde el parámetro μ varia. Por tanto, el sistema de reacción-difusión toma la forma: $\mathbf{u}_t = D\Delta\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mu)$. Con $\mathbf{u}(x, t) = (u(x, t), v(x, t))$ para todo $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ es el vector de concentración y D es la matriz diagonal de difusión, en la diagonal tiene por entradas los coeficientes de difusión y Δ es el operador de Laplace.

Una bifurcación de Turing-Hopf ocurre si los parámetros del sistema (1.7) satisfacen las condiciones **II-IV**, las cuales, se obtuvieron en la inestabilidad de Turing. Mientras que la condición **I** de (1.19) será remplazada por la condición **I'**: los valores propios de la matriz de Jacobi evaluada en el punto de equilibrio, satisfacen las condiciones para la aparición de una bifurcación supercrítica de Hopf. Es decir, el signo de la traza, $(f_u + g_v)$, debe cambiar: de negativo a positivo, mientras que el parámetro de bifurcación aumenta o disminuye, dependiendo del caso que se este trabajando.

Más precisamente, los valores del parámetro de bifurcación, en el caso de que el parámetro μ aumente, deben pasar del intervalo $(0, \mu_1)$ al intervalo (μ_1, μ_2) donde μ_2 es cualquier valor positivo finito de μ , con $\mu_1 < \mu_2$.

De la condición **II**, se debe cumplir que

$$f_u g_v - f_v g_u > 0$$

de la condición **III** se debe satisfacer que sea positiva, entonces

$$df_u + g_v > 0, \text{ por lo tanto } d > -\frac{g_v}{f_u}$$

de la condición **IV** al igual que en la condición **III** debe ser positiva, por lo que

$$(df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) > 0,$$

desarrollando el término cuadrático obtenemos

$$f_u^2 d^2 + 2df_u g_v + g_v^2 - 4df_u g_v + 4df_v g_u > 0,$$

agrupando los términos semejantes tenemos que

$$f_u^2 d^2 - 2df_u g_v + g_v^2 + 4df_v g_u > 0,$$

como vamos a obtener las raíces del polinomio en la variable d , agrupemos los términos en la variable d

$$f_u^2 d^2 + 2(2f_v g_u - f_u g_v)d + g_v^2 > 0,$$

ahora calculando las raíces tenemos

$$d_{1,2} = \frac{1}{2f_u^2} \left(-2(2f_v g_u - f_u g_v) \pm \sqrt{(2(2f_v g_u - f_u g_v))^2 - 4f_u^2 g_v^2} \right)$$

desarrollando y agrupando los términos del discriminante, tenemos que

$$d_{1,2} = \frac{1}{2f_u^2} \left(-2(2f_v g_u - f_u g_v) \pm 4\sqrt{(f_v^2 g_u^2 - f_v g_u f_u g_v)} \right).$$

Veamos que las raíces $d_{1,2}$ son reales positivas para que tenga sentido. En primer lugar por la condición **I**, debe pasar que f_u y g_v tienen signos opuestos. Por lo tanto, $f_u g_v < 0$, con lo que el determinante es positivo si $f_v g_u < 0$, entonces el radicando de los valores $d_{1,2}$ es positivo. Falta ver cuando es siempre positivo, esto pasa si $2f_v g_u - f_u g_v < 0$. Separando la expresión anterior tenemos $f_v g_u + f_v g_u - f_u g_v$, el cual es el determinante negativo y un término negativo. Por lo que $2f_v g_u - f_u g_v < 0$ y por lo tanto $d_{1,2}$ son reales positivos.

Por último, para que se cumpla la condición **IV**, debemos tomar un coeficiente de difusión fuera del intervalo comprendido entre $[d_1, d_2]$, es decir, $d \in [d_1, d_2]^c$.

Estos resultados van a ser utilizados en los siguientes capítulos, con el fin de obtener dichas bifurcaciones en los modelos que se presentarán.

CAPÍTULO 2

Sistema presa-depredador con Captura

En este capítulo presentamos un modelo de presa-predador, el cual está basado en las siguientes hipótesis. Consideramos que las presas tienen un crecimiento logístico, es decir, la tasa de crecimiento per capita se reduce cada vez más conforme el tamaño de la población se acerca a un tamaño máximo por los recursos limitados del entorno. Consideraremos que hay un contacto de tipo Lotka-Volterra entre presa y depredador, es decir, es la medida que hay entre el número de encuentros entre un depredador y una presa, y que el encuentro sea exitoso para el predador. Para ambas poblaciones pueden moverse en un medio cerrado, aislado. También hemos supuesto un término de captura, considerando que solo la población de presas podrá ser pescada, debido a que consideraremos que los depredadores se mueven mucho más rápido que las presas. Para los predadores hemos considerado que tendrán un crecimiento por los contactos que se presentan con la presa y además un decaimiento exponencial, es decir, en ausencia de presa, la población de predadores decae exponencialmente. El modelo que obtenemos es:

$$\begin{aligned}u_t &= \epsilon^2 u_{xx} + \alpha u(1 - u) - uv - \gamma(1 - e^{-\delta u}), \\v_t &= v_{xx} + \beta uv - v,\end{aligned}\tag{2.1}$$

con las siguientes condiciones de frontera $u_x = v_x = 0$ en $x = \pm L$ y condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$, $v(x, 0) = v_0(x)$. Los parámetros α , β , δ son positivos, además con $\gamma \in [0, 1]$ y $\epsilon^2 \in [10^{-2}, 10^{-1}]$. El parámetro α es la razón de crecimiento intrínseco de la presa, γ es la razón de carga de los pescadores, δ es la razón de captura de los pescadores y β es la razón de crecimiento de los depredadores.

A continuación vamos a estudiar la dinámica del modelo (2.1) en ausencia del término de difusión. estableceremos condiciones de existencia de los puntos de equilibrio y su estabilidad, y presentaremos las bifurcaciones que puede presentar dicho modelo. Finalizando con el estudio de la dinámica en el espacio.

2.1 Análisis del modelo sin difusión

En esta sección, analizaremos el sistema (2.1) sin difusión, es decir, consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha u(1 - u) - uv - \gamma(1 - e^{-\delta u}), \\ v_t &= \beta uv - v. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Primero veamos que las soluciones siempre pertenecen al primer cuadrante, entonces sea $(\bar{u}, 0)$ y evaluemos en el campo vectorial

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha \bar{u}(1 - \bar{u}) - \gamma(1 - e^{-\delta \bar{u}}), \\ v_t &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que, en el eje u no hay movimiento en la componente v . Ahora consideremos $(0, \bar{v})$ y evaluemos el campo vectorial en dichos puntos

$$\begin{aligned} u_t &= 0, \\ v_t &= -\bar{v}. \end{aligned}$$

Entonces, en el eje v no hay movimiento en la componente u . Esto nos dice que no hay salidas ni entradas por los ejes, lo cual indica que el primer cuadrante es invariante.

Comenzaremos por encontrar los puntos de equilibrio del sistema (2.2) igualando el campo vectorial al vector cero,

$$\begin{aligned} \alpha u(1 - u) - uv - \gamma(1 - e^{-\delta u}) &= 0, \\ \beta uv - v &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

De (2.3) podemos observar que en la segunda ecuación obtenemos que $v = 0$ o $u = 1/\beta$ son soluciones del problema. Ahora utilizando el hecho de que $v = 0$, de la primera ecuación obtenemos que:

$$\alpha u(1 - u) - \gamma(1 - e^{-\delta u}) = 0. \quad (2.4)$$

Para analizar la ecuación (2.4), la reescribiremos como la diferencia de dos funciones $f(u) - g(u) = 0$, donde

$$f(u) = \alpha u(1 - u) \text{ y } g(u) = \gamma(1 - e^{-\delta u})$$

con la finalidad de facilitar el análisis ya que no es posible determinar de forma analítica los puntos de equilibrio. De la ecuación (2.4) obtenemos los siguientes casos de existencia de puntos de equilibrio sobre el eje u :

Caso 1

La figura 2.1 nos presenta la situación cuando solo tenemos un equilibrio en el eje u .

Una importante observación en todos los casos de existencia que se van a presentar. El parámetro β no interviene para la existencia de los puntos de equilibrio, por lo tanto no le daremos valores por el momento a dicho parámetro.

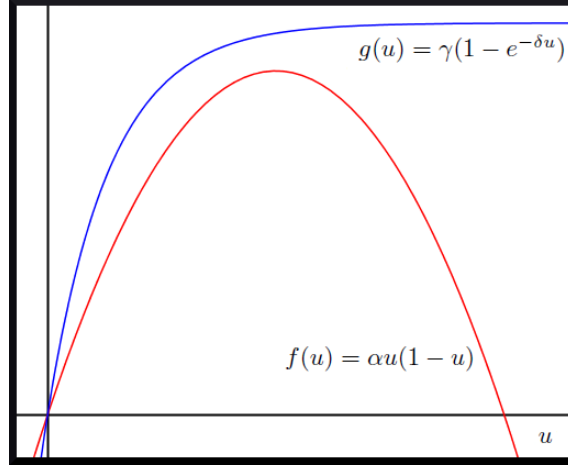


Figura 2.1: Estudio de la existencia de los puntos de equilibrio sobre el eje u . Los puntos de intersección de f y g en las gráficas definen los puntos de equilibrio localizados en el eje u . Parámetros usados $\alpha = 3.09$, $\gamma = 0.88$, $\delta = 7.3$.

Como se observa en la figura 2.1, este caso de existencia de puntos de equilibrio sobre el eje u . Sucede cuando la derivada de la función f es menor que la derivada de la función g en el cero. Además debemos imponer que en un punto digamos \tilde{u} , la función f sea menor que la función g evaluada en dicho punto. Es decir, las condiciones que permiten que este escenario se presente son las siguientes:

- a) $f'(0) < g'(0)$,
- b) $f(\tilde{u}) < g(\tilde{u})$.

Analicemos estas condiciones en base a las expresiones que conocemos de $f(u)$ y $g(u)$, las derivadas de $f(u)$ y $g(u)$ son las siguientes:

$$f'(u) = \alpha - 2\alpha u \text{ y } g'(u) = \gamma\delta e^{-\delta u},$$

evaluando en $u = 0$ obtenemos que $f'(0) = \alpha$ y $g'(0) = \gamma\delta$, entonces debe pasar que $\alpha < \gamma\delta$ para que $f'(0) < g'(0)$ y garanticemos la primera condición para que suceda este escenario.

Ahora vemos cuando el valor de $f(u)$ en $u = \tilde{u}$ es menor que el valor de $g(u)$ en $u = \tilde{u}$. Para ello, hemos tomado el valor de $u = \tilde{u}$ debido a que proviene de una ecuación trascendental y no es posible darle una expresión algebraica. Entonces, se debe cumplir que

$$\alpha\tilde{u}(1 - \tilde{u}) < \gamma(1 - e^{-\delta\tilde{u}})$$

de esto, llegamos a la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *El sistema (2.2) tiene un solo punto de equilibrio dado por $(u^*, v^*) = (0, 0)$ si se cumple:*

- a) $\alpha < \gamma\delta$,
- b) $\alpha\tilde{u}(1 - \tilde{u}) < \gamma(1 - e^{-\delta\tilde{u}})$.

Ahora que ya hemos encontrado condiciones para que suceda el primer escenario en el eje u , lo que haremos es ver los otros escenarios en los cuales se presentan diferentes puntos de equilibrio sobre el eje u .

Caso 2

En la figura 2.2 estamos presentando un caso particular de cuando obtenemos dos puntos de equilibrio en el eje u , en este caso hay un efecto importante que se estudiará más adelante.

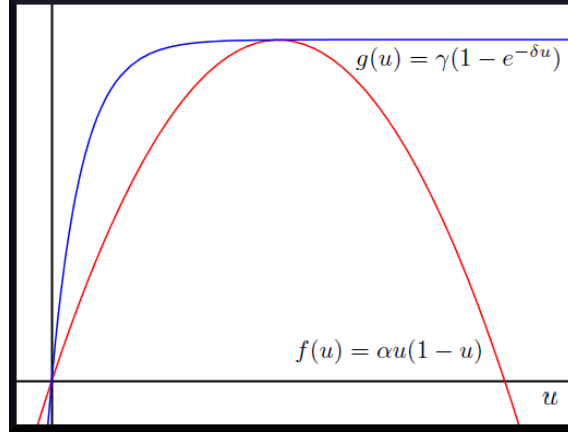


Figura 2.2: Estudio de la existencia de los puntos de equilibrio sobre el eje u . Los puntos de intersección de f y g en las gráficas definen los puntos de equilibrio localizados en el eje u . Parámetros usados $\alpha = 3.09$, $\gamma = 0.77$, $\delta = 14.75$.

Para que se den las condiciones que hacen en la figura 2.2, debemos tener que la derivada de la función f sea menor que la derivada de la función g en el cero. Además de tener que el valor de la función f y la función g , en el máximo de f sean el mismo. Es decir, las condiciones que dan lugar a la figura 2.2 son las siguientes:

- a) $f'(0) < g'(0)$.
- b) $f(\tilde{u}) = g(\tilde{u})$,
- c) $f'(\tilde{u}) = g'(\tilde{u})$.

Para obtener las igualdades, haremos lo siguiente.

$$\alpha \tilde{u}(1 - \tilde{u}) = \gamma(1 - e^{-\delta \tilde{u}}),$$

y

$$\alpha(1 - 2\tilde{u}) = \gamma\delta e^{-\delta \tilde{u}},$$

despejando el término del a exponencial tenemos que

$$e^{-\delta \tilde{u}} = \frac{\alpha(1 - 2\tilde{u})}{\gamma\delta}$$

sustituyendo esta expresión en la primera ecuación transcendental tenemos un polinomio cuadrático,

$$\tilde{u}^2 - (1 - \frac{2}{\delta})\tilde{u} + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1}{\delta}$$

la solución de esta ecuación es

$$\tilde{u}_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{2}{\delta}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{2}{\delta}\right)^2 - 4\left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1}{\delta}\right)} \right)$$

y para que solo tengamos una raíz debe ocurrir que

$$\left(1 - \frac{2}{\delta}\right)^2 - 4\left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1}{\delta}\right) = 0$$

Por lo tanto haciendo los cálculos y tomando los valores debidos para los parámetros, tenemos que las condiciones para que este escenario se presente son:

Proposición 2.2. *El sistema (2.2) tiene dos puntos de equilibrio en el eje u , con f y g tangentes en el punto $u = \frac{1}{2}$, si se cumple:*

- a) $\alpha < \gamma\delta$,
- b) $e^{-\delta\tilde{u}} = \frac{\alpha(1-2\tilde{u})}{\gamma\delta}$,
- c) $\left(1 - \frac{2}{\delta}\right)^2 - 4\left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1}{\delta}\right) = 0$.

Caso 3

En la figura 2.3 estamos presentando cuando existen tres puntos de equilibrio sobre el eje u .

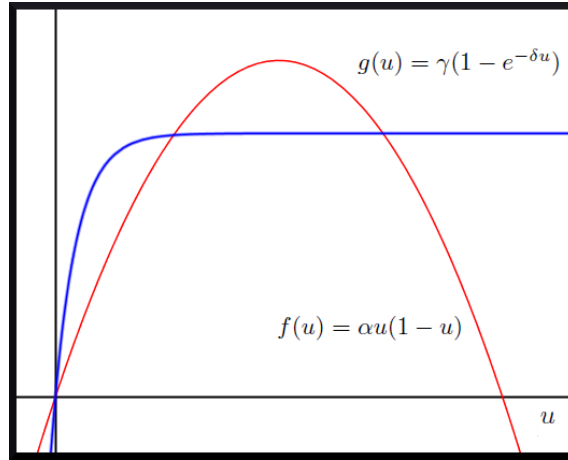


Figura 2.3: Estudio de la existencia de los puntos de equilibrio sobre el eje u . Los puntos de intersección de f y g en las gráficas definen los puntos de equilibrio localizados en el eje u . Parámetros usados $\alpha = 3.09$, $\gamma = 0.61$, $\delta = 19.1$.

Observando la figura 2.3, podemos ver que necesitamos que el valor de la derivada de f sea menor que el valor de la derivada de g en el cero. Y también necesitaremos que el valor de la función f sea mayor que el valor de la función g , en el valor $u = \tilde{u}$. Es decir, las condiciones para que exista los tres puntos de equilibrio sobre el eje u son:

- a) $f'(0) < g'(0)$,
- b) $f(\tilde{u}) > g(\tilde{u})$.

Haciendo los cálculos adecuados similarmente como en los anteriores casos, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *El sistema (2.2) tiene tres puntos de equilibrio en el eje u si se cumple:*

- a) $\alpha < \gamma\delta$,
- b) $\alpha\tilde{u}(1 - \tilde{u}) > \gamma(1 - e^{-\delta\tilde{u}})$.

Caso 4

En la figura 2.4 presentamos el segundo caso de existencia de puntos de equilibrio en el eje u . En este caso encontramos que hay dos puntos de equilibrio.

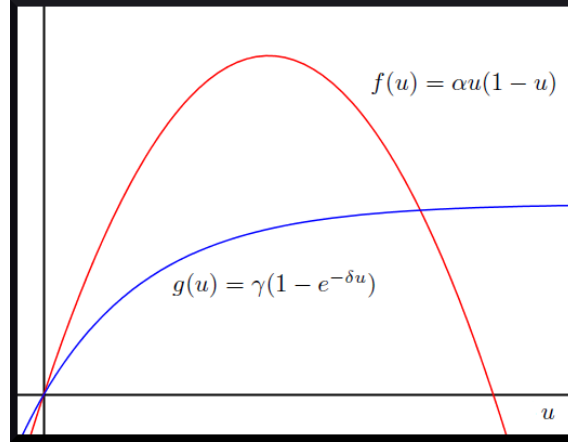


Figura 2.4: Estudio de la existencia de los puntos de equilibrio sobre el eje u . Los puntos de intersección de f y g en las gráficas definen los puntos de equilibrio localizados en el eje u . Parámetros usados $\alpha = 3.09$, $\gamma = 0.44$, $\delta = 4.05$.

Al igual que en el caso 1, la figura 2.4 nos presenta condiciones de existencia para los puntos de equilibrios. En esta ocasión la derivada de la función f tiene que ser mayor que la derivada de la función g en el cero. Y también el valor de la función f en $u = \tilde{u}$, debe ser mayor que el valor de la función g en el mismo punto. Es decir, las condiciones que permiten que este escenario se presente son las siguientes:

- a) $f'(0) > g'(0)$,
- b) $f(\tilde{u}) > g(\tilde{u})$.

Como ya hemos determinado la derivada de $f(u)$ y $g(u)$ en el origen, rápidamente podemos ver que una de las condiciones para que este escenario se presente es $\alpha > \gamma\delta$.

Ahora determinemos cuando el valor de $f(u)$ en $u = \tilde{u}$ debe ser mayor que el valor de $g(u)$ en $u = \tilde{u}$. Esto sucede cuando tenemos la siguiente desigualdad:

$$\alpha\tilde{u}(1 - \tilde{u}) > \gamma(1 - e^{-\delta\tilde{u}}),$$

y por lo tanto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *El sistema (2.2) tiene dos puntos de equilibrio en el eje u si se cumple:*

- a) $\alpha > \gamma\delta$,
- b) $\alpha\tilde{u}(1 - \tilde{u}) > \gamma(1 - e^{-\delta\tilde{u}})$.

Pasemos a otro escenario de existencia en el cual tenemos un punto tangente entre las funciones $f(u)$ y $g(u)$, además del origen, este escenario está representado en la figura 2.2.

Punto de equilibrio con coordenadas positivas

Ahora procedamos con el cálculo de otros posibles puntos equilibrios los cuales van a estar determinados cuando $u = \frac{1}{\beta}$. Evaluemos la primera ecuación del sistema (2.3) en $u = \frac{1}{\beta}$ y obtendremos la siguiente igualdad:

$$\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \frac{v}{\beta} - \gamma \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}\right) = 0. \quad (2.5)$$

Despejemos la variable v de (2.5) mediante los procedimientos algebraicos necesarios y una vez que los hemos realizado obtendremos el valor para la variable v el cual es $v = \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \gamma\beta \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}\right)$.

Con el punto de equilibrio $\left(\frac{1}{\beta}, \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \gamma\beta \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}\right)\right)$, veamos cuando está presente en el primer cuadrante, lo cual sucede cuando la componente en v es positiva y la determinaremos de la siguiente expresión:

$$\alpha \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \gamma\beta \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}\right) > 0,$$

y obtenemos la siguiente condición, la cual nos ayudará más adelante:

$$-\frac{\delta}{\beta} > \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{\gamma\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \right| \right). \quad (2.6)$$

Cuando es posible hacer que (2.6) sea cero, es decir, cuando en vez de tener una desigualdad tenemos una igual, caemos en el caso de la figura 2.2, en el cual tendríamos el equilibrio $\left(\frac{1}{\beta}, 0\right)$. Esto nos podría decir que los posibles tres equilibrios que se pueden generar distintos del $(0,0)$ pueden colapsarse en uno solo, este efecto será estudiado más adelante.

En la tabla 2.1, hemos colocado los puntos de equilibrio del sistema (2.2).

| | |
|--------------------|---|
| $P_1 = (u_1, v_1)$ | $u_1 = 0, v_1 = 0$ |
| $P_2 = (u_2, v_2)$ | $u_2 = u^*, v_2 = 0$ |
| $P_3 = (u_3, v_3)$ | $u_3 = u^{**}, v_3 = 0$ |
| $P_4 = (u_4, v_4)$ | $u_4 = \frac{1}{\beta}, v_4 = \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \gamma\beta \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}\right)$ |

Tabla 2.1: Puntos de equilibrio del sistema (2.2)

Debido a que no tenemos una expresión algebraica para u^* y u^{**} , en el plano fase serán tomados en orden de izquierda a derecha. Ya tenemos los puntos de equilibrio, lo que haremos es determinar su estabilidad mediante el signo de los valores propios de la matriz de Jacobi del sistema (2.2). En caso de que se pueda de lo contrario veremos otro medio para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

2.1.1 Análisis de estabilidad local del sistema

En esta sección presentamos un estudio de la estabilidad local de los puntos de equilibrio, mediante la aproximación lineal del campo. La matriz de Jacobi del sistema (2.2) es:

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} \alpha - 2\alpha u - v - \gamma\delta e^{-\delta u} & -u \\ \beta v & \beta u - 1 \end{bmatrix}.$$

Al evaluar la matriz $J(u, v)$ en el punto (u_1, v_1) , obtenemos

$$J(u_1, v_1) = \begin{bmatrix} \alpha - \gamma\delta & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como es una matriz diagonal, rápidamente podemos observar que los valores propios son los elementos de la diagonal, por lo tanto $\lambda_1 = \alpha - \gamma\delta$ y $\lambda_2 = -1$. Además se puede observar que λ_1 puede ser negativo, cero o positivo; para que $\lambda_1 < 0$ debe suceder que $\alpha < \gamma\delta$; para que $\lambda_1 = 0$ debe suceder que $\alpha = \gamma\delta$; y para que $\lambda_1 > 0$ debe suceder que $\alpha > \gamma\delta$.

Proposición 2.5. *El punto de equilibrio $(u_1, v_1) = (0, 0)$ del sistema (2.2) es localmente asintóticamente estable sí y solo si $\alpha < \gamma\delta$.*

Pasaremos a estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio (u_2, v_2) y (u_3, v_3) , donde la componente u es desconocida. Para el caso del punto de equilibrio (u_2, v_2) vamos a hacer el siguiente análisis de estabilidad, para ello vamos a recordar que este se presenta cuando $-\frac{\delta}{2} > \ln(|1 - \frac{\alpha}{4\gamma}|)$, tomando $(u, 0)$, veremos como es el campo vectorial en el eje u , evaluando el sistema (2.2) en dicho punto obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \alpha u(1 - u) - \gamma(1 - e^{-\delta u}) \\ \dot{v} &= 0 \end{aligned}$$

entonces el eje u es un eje invariante. Nos falta ver si hay conjuntos donde en el eje u la ecuación para \dot{u} es positiva o negativa. Para ello vamos a utilizar las condiciones de existencia de los puntos de equilibrio que nos proporcionó la figura 2.3. En dicha figura se puede observar que la función $f(u)$ es menor que $g(u)$ en el intervalo $(0, u^*)$ y $f(u)$ es mayor que $g(u)$ en el intervalo (u^*, u^{**}) , esto nos dice que $\dot{u} < 0$ para $u \in (0, u^*)$ y que $\dot{u} > 0$ para (u^*, u^{**}) .

Proposición 2.6. *El punto de equilibrio $(u_2, v_2) = (u^*, 0)$ del sistema (2.2) es siempre inestable.*

Para el caso del punto de equilibrio (u_3, v_3) vamos a evaluar la matriz de Jacobi en dicho punto y analizaremos el signo de los valores propios.

$$J(u^{**}, 0) = \begin{bmatrix} \alpha - 2\alpha u^{**} - \gamma\delta e^{-\delta u^{**}} & -u^{**} \\ 0 & \beta u^{**} - 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos ver que es una matriz triangular superior, por lo que los valores propios son $\lambda_1 = \alpha - 2\alpha u^{**} - \gamma\delta e^{-\delta u^{**}}$ y $\lambda_2 = \beta u^{**} - 1$. Para que obtengamos estabilidad se debe cumplir que ambos valores propios sean negativos, entonces debe pasar lo siguiente

$$\alpha - 2\alpha u^{**} - \gamma\delta e^{-\delta u^{**}} < 0 \text{ y } \beta u^{**} - 1 < 0,$$

de esto tenemos que $u^{**} < \frac{1}{\beta}$ y además debemos hacer que $\alpha - 2\alpha u^{**} < 0$, porque $-\gamma\delta e^{-\delta u^{**}}$ es siempre negativa. Entonces llegamos al siguiente resultado.

Proposición 2.7. *El punto de equilibrio $(u_3, v_3) = (u^{**}, 0)$ del sistema (2.2) es estable si $u^{**} \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta})$.*

Ahora analicemos la estabilidad del equilibrio (u_4, v_4) , la matriz de Jacobi evaluada en este punto de equilibrio es la siguiente:

$$J(u_4, v_4) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\beta} + \gamma\beta \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}\right) - \delta\gamma e^{-\frac{\delta}{\beta}} & -\frac{1}{\beta} \\ \alpha\beta \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \gamma\beta^2 \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}\right) & 0 \end{bmatrix}.$$

Para determinar la estabilidad de este punto veamos su traza y su determinante, debido a que las expresiones de los valores propios son bastantes complicadas. Comencemos por ver la traza la cual está dada por la siguiente expresión:

$$\text{Tr}(J(u_4, v_4)) = -\frac{\alpha}{\beta} + \gamma\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}) - \delta\gamma e^{-\frac{\delta}{\beta}}.$$

Para que la traza sea negativa debemos hacer lo siguiente:

$$-\frac{\alpha}{\beta} + \gamma\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}) - \delta\gamma e^{-\frac{\delta}{\beta}} < 0,$$

y por último hacemos unos pocos despejes más para obtener la siguiente condición:

$$-\frac{\delta}{\beta} > \ln \left(\left| \frac{\gamma\beta^2 - \alpha}{\beta\gamma(\beta + \delta)} \right| \right). \quad (2.7)$$

Ahora veamos el determinante de la matriz de Jacobi, el cual está dado por la ecuación:

$$\det(J(u_4, v_4)) = \frac{1}{\beta}(\alpha\beta(1 - \frac{1}{\beta}) - \gamma\beta^2(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}})),$$

para que haya estabilidad debemos hacer que el determinante sea positivo por lo tanto debe cumplirse lo siguiente:

$$\frac{1}{\beta}(\alpha\beta(1 - \frac{1}{\beta}) - \gamma\beta^2(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}})) > 0$$

y por último tenemos la siguiente condición para que el determinante sea positivo:

$$-\frac{\delta}{\beta} > \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{\gamma\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right| \right). \quad (2.8)$$

Por lo tanto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.8. *El punto de equilibrio $(\frac{1}{\beta}, \alpha(1 - \frac{1}{\beta}) - \gamma\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}))$ del sistema (2.2), es estable si:*

- a) $-\frac{\delta}{\beta} > \ln \left(\left| \frac{\gamma\beta^2 - \alpha}{\beta\gamma(\beta + \delta)} \right| \right),$
- b) $-\frac{\delta}{\beta} > \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{\gamma\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right| \right).$

Para el caso cuando este punto de equilibrio pueda ser inestable, lo que cambiará es la condición (2.7). Y para el caso cuando el determinante es negativo no lo consideraremos ya que en este caso el punto de equilibrio no está presente en el cuadrante positivo, lo cual por la biología del problema no se considerará. Algo importante que se puede ver es que la condición (2.6) y (2.8) son iguales. Esto nos indica que mientras el punto de equilibrio este en el cuadrante positivo, el determinante será positivo.

2.1.2 Retratos fase del sistema

En esta sección, presentamos diferentes retratos fase del sistema (2.2), con el objetivo de visualizar la estabilidad de los distintos casos de existencia de puntos de equilibrio que se han estado obteniendo en anteriores secciones.

El primer retrato fase que presentamos es cuando solamente tenemos un punto de equilibrio, el cual es el origen, para que esto suceda se debe cumplir:

- a) $\alpha < \gamma\delta,$
- b) $-\frac{\delta}{2} < \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{4\gamma} \right| \right).$

En la figura 2.5, se puede observar que el origen es un punto de equilibrio estable.

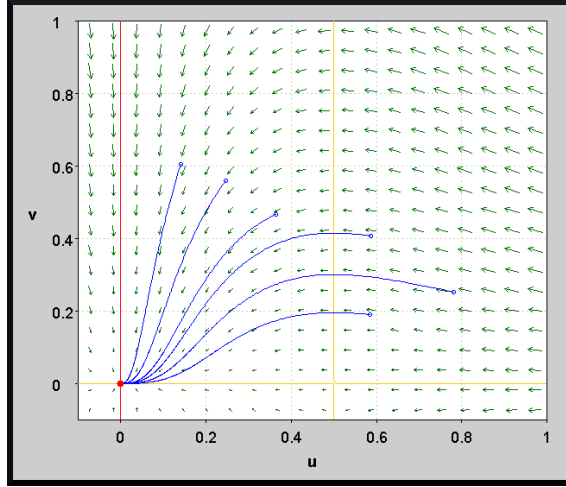


Figura 2.5: Retrato fase del sistema (2.2) con los parámetros $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 3$.

En la figura 2.5, se puede observar que no importa la condición inicial que tomemos, ambas poblaciones tienden a la extinción.

Ahora veamos el retrato fase que se presenta en la figura 2.4, además de que se presenta el equilibrio que no está en el eje u , las condiciones para que este escenario se presente son las siguientes:

- a) $\alpha > \gamma\delta$,
- b) $-\frac{\delta}{2} > \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{4\gamma} \right| \right)$,
- c) $-\frac{\delta}{\beta} > \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{\gamma\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right| \right)$.

En la figura 2.6 se presentan tres equilibrios de los cuales los puntos de equilibrio que están en el eje u son inestables, mientras que el punto de equilibrio que no está en el eje u es asintóticamente estable.

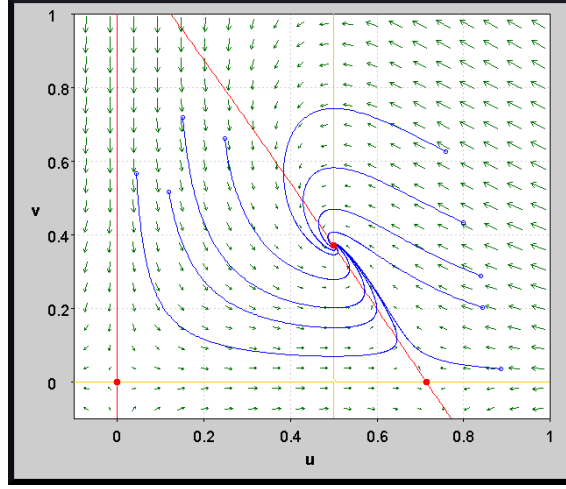


Figura 2.6: Retrato fase del sistema (2.2) con los parámetros $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 1$.

En este retrato fase, se observa que hay una supervivencia por parte de ambas especies, es decir, se puede llegar a consumir por parte de los pescadores y los depredadores y la población de presas no va a desaparecer.

En el retrato fase de la figura 2.4, con la excepción que solo se presentan los equilibrios en el eje u . Las condiciones que para que se presente este retrato fase son las siguientes:

- a) $\alpha > \gamma\delta$,
- b) $-\frac{\delta}{2} > \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{4\gamma} \right| \right)$,
- c) $-\frac{\delta}{\beta} < \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{\gamma\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right| \right)$.

Como se puede observar en la figura 2.7, la estabilidad que se presenta es la misma que se ha obtenido cuando se hizo el análisis de estabilidad en el eje u . Es decir, obtuvimos que el origen es un punto de equilibrio inestable y el otro punto de equilibrio que está presente es estable.

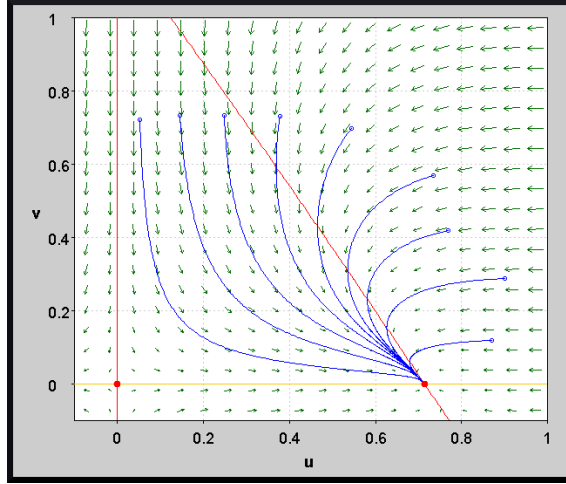


Figura 2.7: Retrato fase del sistema (2.2) con los parámetros $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 1$.

En la figura 2.7 a diferencia de la figura 2.6, en este retrato fase se puede observar que con cualquier condiciones inicial que tomemos los depredadores tenderán a desaparecer.

En las dos siguientes figuras 2.8, 2.9 se presenta los retratos fase cuando el punto de equilibrio que no está en el eje u , colapsa en uno de los punto de equilibrio que están en el eje u diferentes del origen. Las condiciones que para que se presenten estos retratos fase son las siguientes:

a) $\alpha < \gamma\delta$,

b) $-\frac{\delta}{2} = \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{4\gamma} \right| \right)$.

En la figura 2.8 se puede observar que el origen es un punto de equilibrio estable, además de que el punto de equilibrio que tiene componente u entre cero y un medio es inestable, y otro punto de equilibrio que tiene componente en u entre un medio y uno es también inestable.

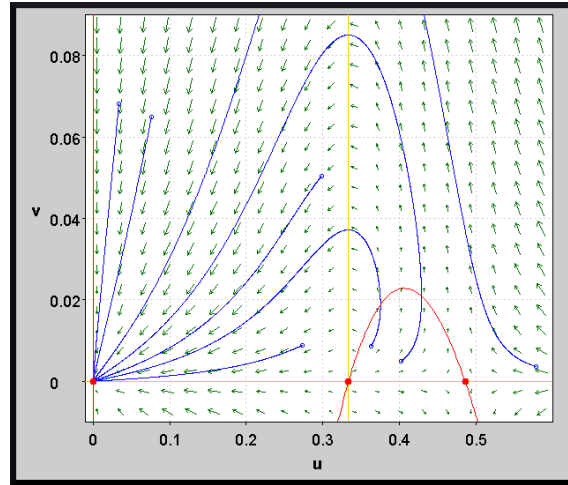


Figura 2.8: Retrato fase del sistema (2.2) con los parámetros $\alpha = 2.920047830$, $\beta = 3$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 5$.

En el retrato fase de la figura 2.8, se observa que dada una condición inicial de poblaciones, hay regiones donde la población de depredadores comienza a aumentar, pero la de presas a disminuir. Y hay otra región donde tanto presa como depredador comienzan a disminuir, en estas regiones ambas poblaciones disminuyen hasta desaparecer.

En la figura 2.9 se puede observar que el origen aún sigue siendo un punto de equilibrio estable. Además de que el punto de equilibrio que tiene componente u entre cero y un medio es inestable. Y hay otro punto de equilibrio que tiene componente en u entre un medio y uno es también estable.

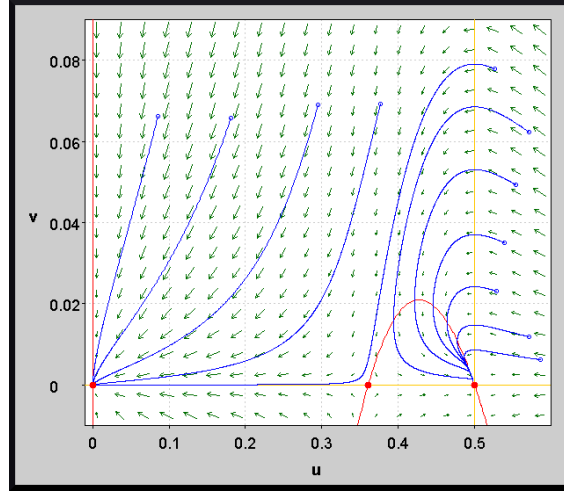


Figura 2.9: Retrato fase del sistema (2.2) con los parámetros $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 5.54518$.

En el retrato fase de la figura 2.9, observamos que hay dos regiones que dependen de la cantidad de la población que haya en ese momento. Es decir, existe una región en donde las poblaciones de presas y depredadores tienen a desaparecer. Y una región en donde para cualquier condición inicial los depredadores van a desaparecer.

En la siguiente figura 2.10 se presenta el retrato fase cuando están presentes los cuatro puntos de equilibrio y esto es posible cuando se presenta las siguientes condiciones:

- a) $\alpha < \gamma\delta$,
- b) $-\frac{\delta}{2} > \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{4\gamma} \right| \right)$,
- c) $-\frac{\delta}{\beta} > \ln \left(\left| \frac{\gamma\beta^2 - \alpha}{\beta\gamma(\beta + \delta)} \right| \right)$,
- d) $-\frac{\delta}{\beta} > \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{\gamma\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right| \right)$.

Como se puede observar en la figura 2.10 los puntos de equilibrio que son estables son el origen y el punto de equilibrio que está fuera del eje u , los otros dos puntos de equilibrio son inestables.

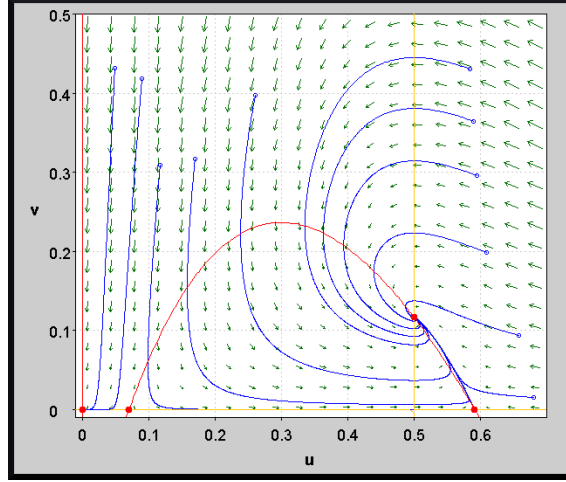


Figura 2.10: Retrato fase del sistema (2.2) con los parámetros $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 4$.

En este retrato fase, se puede observar que también hay dos regiones. Una región donde si tenemos pocas presas, la interacción de ambas poblaciones hacen que las presas disminuyan hasta desaparecer. En la otra región, tenemos que con cualquier condición inicial ambas poblaciones pueden sobrevivir.

En la siguiente figura 2.11 se puede observar el retrato fase, cuando no está presente en el primer cuadrante el punto de equilibrio que no pertenece al eje u , este escenario se obtiene de las siguientes condiciones:

- a) $\alpha < \gamma\delta$,
- b) $-\frac{\delta}{2} > \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{4\gamma} \right| \right)$,
- c) $-\frac{\delta}{\beta} < \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{\gamma\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right| \right)$.

En el cual podemos observar que el origen es un punto de equilibrio estable. El punto de equilibrio que tiene componente en u entre cero y un medio es inestable. Y por último el punto de equilibrio que tiene su componente en u entre un medio y uno es estable.

En la figura 2.11, estamos mostrando un retrato fase donde no aparece el punto de equilibrio P_4 , en esta ocasión se puede observar que solo tenemos los puntos de equilibrio que están en el eje u .

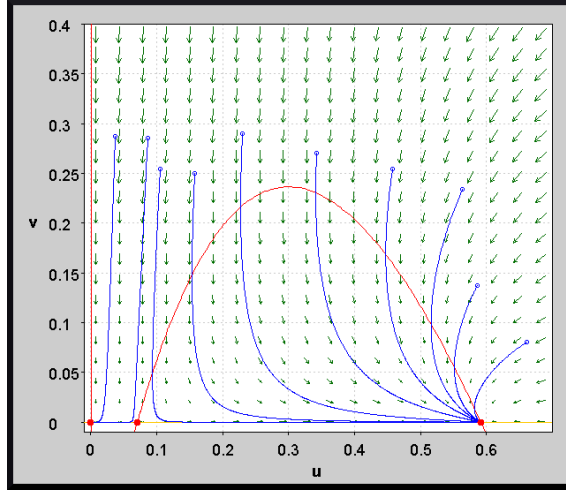


Figura 2.11: Retrato fase del sistema (2.2) con los parámetros $\alpha = 3$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 4$.

En este retrato fase, se puede observar dos regiones, en una ambas poblaciones tienen a desaparecer y en la otra los que sobreviven son las presas.

El siguiente retrato fase que presentaremos es cuando están los cuatro puntos de equilibrio, el cual se puede observar en la figura 2.12. Este escenario se presenta cuando se tiene las siguientes condiciones:

- a) $\alpha < \gamma\delta$,
- b) $-\frac{\delta}{2} > \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{4\gamma} \right| \right)$,
- c) $-\frac{\delta}{\beta} < \ln \left(\left| \frac{\gamma\beta^2 - \alpha}{\beta\gamma(\beta + \delta)} \right| \right)$,
- d) $-\frac{\delta}{\beta} > \ln \left(\left| 1 - \frac{\alpha}{\gamma\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right| \right)$.

Este retrato fase podemos observar que el origen es un punto de equilibrio estable y los otros puntos de equilibrio son inestables. Además que podemos ver que existe un ciclo límite en este escenario.

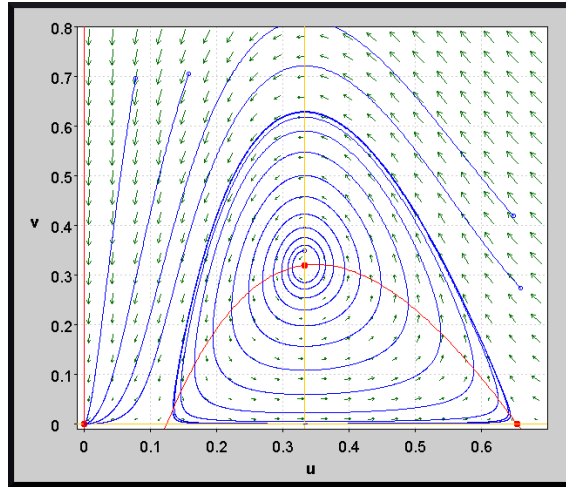


Figura 2.12: Retrato fase del sistema (2.2) con los parámetros $\alpha = 3.4$, $\beta = 3$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 5$.

En la figura 2.12, se muestra una región en la cual las poblaciones de presas y depredadores, están oscilando entre sus poblaciones máximas y mínimas. En la cual, ambas poblaciones pueden coexistir, y también existe una región en la cual cualquier condición inicial hace desaparecer a ambas poblaciones.

Por último, en la figura 2.13 se presenta el retrato fase con la misma estabilidad que en la figura 2.12. En este caso sin la presencia del ciclo límite, es decir, el origen es un punto de equilibrio estable y los otros puntos de equilibrio son inestables.

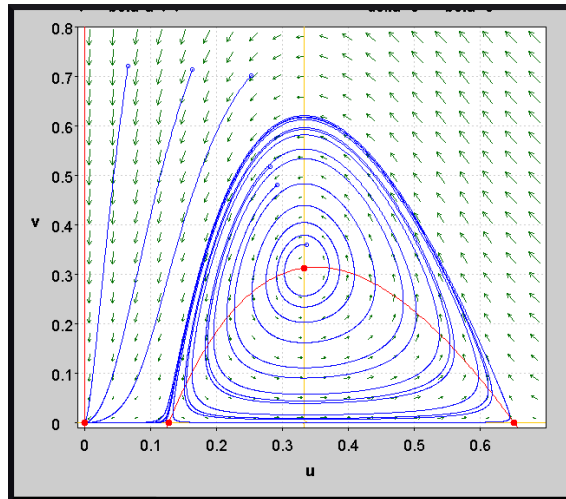


Figura 2.13: Retrato fase del sistema (2.2) con los parámetros $\alpha = 3.39$, $\beta = 3$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 5$.

En la figura 2.13, se presenta un retrato fase, en el cual cualquier condición inicial dada hace que las poblaciones de presas y depredadores desaparezca. Además tenemos una región que lo hace muy rápido respecto a la otra, la cual hace que oscilen un poco las poblaciones.

Como se puede observar hay varios cambios de estabilidad, a lo largo de los retratos fases que se presentaron. En la siguiente sección vamos a dar las condiciones necesarias para la existencias de bifurcaciones, en aquellos puntos de equilibrio que pueden cambiar de estabilidad.

2.2 Bifurcaciones del sistema

En esta sección vamos a determinar el tipo de bifurcación que presentan los puntos de equilibrio del sistema (2.2). Para ello, utilizaremos el teorema de Sotomayor para mostrar que ocurren bifurcaciones estacionarias [23].

Teorema 2.1. *Considere el sistema parametrizado*

$$\dot{\eta} = F(\eta, \nu) \quad (2.9)$$

con $\eta \in \mathbb{R}^n$ y $\nu \in \mathbb{R}$. Supongamos que existe (η_0, ν_0) tal que

$$H1) \quad F(\eta_0, \nu_0) = 0$$

$$H2) \quad \sigma(A) = \{\lambda_1 = 0, \text{ y } \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, j = 1, 2, \dots, n\}$$

donde

$$A \equiv (DF(\eta_0, \nu_0))_{n \times n}.$$

Sean v_0 y w_0 los vectores propios derecho e izquierdo respectivamente de A , correspon-

dientes al valor propio $\lambda_1 = 0$. Entonces,

Caso 1. Si

$$w_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) \neq 0 \text{ y} \quad (2.10)$$

$$(w_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0) \neq 0.$$

Entonces, el sistema (2.9) experimenta una bifurcación silla-nodo en el punto de equilibrio $\eta = \eta_0$ cuando el parámetro ν pasa a través del valor de bifurcación $\nu = \nu_0$.

Caso 2. Si

$$\begin{aligned}
w_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) &= 0, \\
(w_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0) &\neq 0, \\
v_0^T (w_0^T D_{\nu\eta} F(\eta_0, \nu_0))^T &\neq 0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

entonces el sistema (2.9) experimenta un bifurcación transcítica en el punto de equilibrio $\eta = \eta_0$ cuando el parámetro ν varía através del valor de bifurcación $\nu = \nu_0$.

Si

$$\begin{aligned}
w_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) &= 0, \\
(w_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0) &= 0, \\
v_0^T (w_0^T D_{\nu\eta} F(\eta_0, \nu_0))^T &\neq 0, \\
(w_0^T D^3 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0, v_0) &\neq 0,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

entonces el sistema (2.9) experimenta una bifurcación trinche en el punto de equilibrio $\eta = \eta_0$ cuando el parámetro ν varía através del valor de bifurcación $\nu = \nu_0$.

Apliquemos el teorema, veamos la matriz Jacobi evaluada en el origen, la cual es:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \alpha - \gamma\delta & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como ya habiamos visto tiene por valores propios a $\lambda_1 = \alpha - \gamma\delta$, $\lambda_2 = -1$. Para aplicar el teorema de Sotomayor debemos tener un valor propio cero. Además de calcular los vetores propios derecho e izquierdo de dicho valor propio.

Observe que el valor propio λ_1 es cero solo cuando $\alpha = \gamma\delta$. Entonces si suponemos esto podemos ver que la matriz de Jacobi evaluada en el origen se reduce a:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Haciendo los cálculos respectivos obtenemos que el valor propio derecho asociado al valor propio cero es $v_0 = (1, 0)^T$ y el vector propio izquierdo es $w_0 = (1, 0)^T$.

Ahora vamos a checar las condiciones para que haya la presencia de una bifurcación, la primera condicion del teorema es $w_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0)$, donde ν es el vector de parámetros y η es el vector de variables.

Para ver está condición veamos que $F_\nu(\eta, \nu)$ está dada por:

$$\begin{bmatrix} u - u^2 & -\gamma u e^{-\delta u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Evaluando en el origen tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La primera condición que hemos obtenido es que $w_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) = 0$. Por lo que, no puede ocurrir la bifurcación nodo-silla en el origen. Veamos la siguiente condición $(w_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0)$, donde (v_0, v_0) simboliza la mutiplicación por izquierda por el vector v_0^T y por la derecha por v_0 .

Para calcular esta condición debemos obtener la matriz $D^2 F(\eta_0, \nu_0)$, la cual se obtiene de las siguientes matrices:

$$D_{\eta\eta} F_1 = \begin{bmatrix} -2\alpha + \delta^2\gamma & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{\eta\eta} F_2 = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora multiplicamos estás matrices por la izquierda por el vector propio izquierdo para obtener la siguiente matriz:

$$D^2 F = \begin{bmatrix} -2\alpha + \delta^2\gamma & -1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

Haciendo los cálculos debidos obtenemos que $(w_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0) = -2\alpha + \delta^2\gamma = \delta\gamma(\delta - 2)$, lo cual es diferente de cero si $\delta \neq 2$, ahora nos falta de ver la siguiente condición $v_0^T (w_0^T D_{\nu\eta} F(\eta_0, \nu_0))^T$. Las matriz $D_{\nu\eta} F(\eta_0, \nu_0)$ está dada por:

$$D_{\nu\eta} F(\eta_0, \nu_0) = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Haciendo los cálculos debido obtenemos que $v_0^T (w_0^T D_{\nu\eta} F(\eta_0, \nu_0))^T = 1$, por lo tanto en el origen ocurre una bifurcación transcítica.

Teorema 2.2. *En el punto de equilibrio $(0, 0)^T$ del sistema (2.2) ocurre una bifurcación transcítica si $\alpha = \gamma\delta$ y $\delta \neq 2$.*

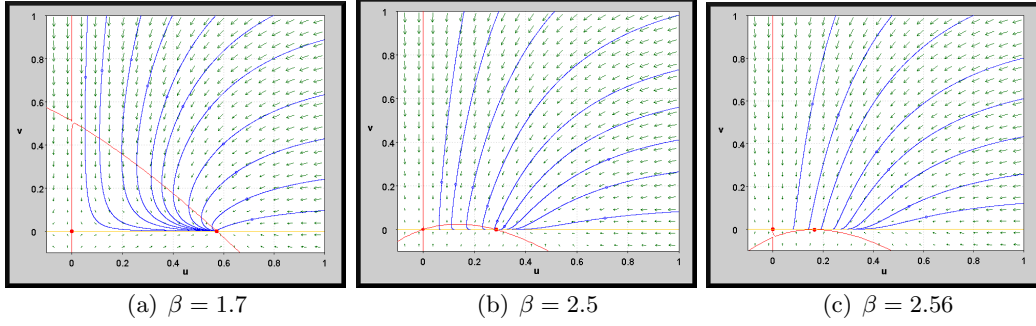


Figura 2.14: Retratos fase del sistema (2.2) para ilustrar la existencia de una bifurcación transcítica en $(u = 0, v = 0)$ al mover el parámetro δ . $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.6$.

Puesto que hemos supuesto que $\delta \neq 2$, hemos llegado a que $(w_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0) \neq 0$ y por tanto ocurre la bifurcación transcítica. Ahora supongamos que $(w_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0) = 0$, entonces tomemos $\delta = 2$, y calculemos la expresión $(w_0^T D^3 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0, v_0)$. Para ello, calculamos el vector $D^3 F(\eta_0, \nu_0)$, el cual tiene por componentes a dos vectores, que a su vez tienen por componentes las siguientes matrices:

$$D^3 F_1(\eta_0, \nu_0)_1 = \begin{bmatrix} -\delta^3 \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^3 F_1(\eta_0, \nu_0)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D^3 F_2(\eta_0, \nu_0)_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^3 F_2(\eta_0, \nu_0)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las matrices $D^3 F_i(\eta_0, \nu_0)_j$ para $i, j = 1, 2$, se obtienen derivando parcialmente respecto a cada una de las variables las matrices $D^2 F_i$.

Haciendo los cálculos debidos podemos observar que la condición $(w_0^T D^3 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0, v_0) = -\delta^3 \gamma$. La cual es diferente de cero si ambos parámetros son diferentes de cero, por lo tanto hemos llegado al siguiente resultado.

Teorema 2.3. *En el punto de equilibrio $(0, 0)$ del sistema (2.2) ocurre una bifurcación de tencedor si $\alpha = \delta \gamma$ y $\delta = 2$.*

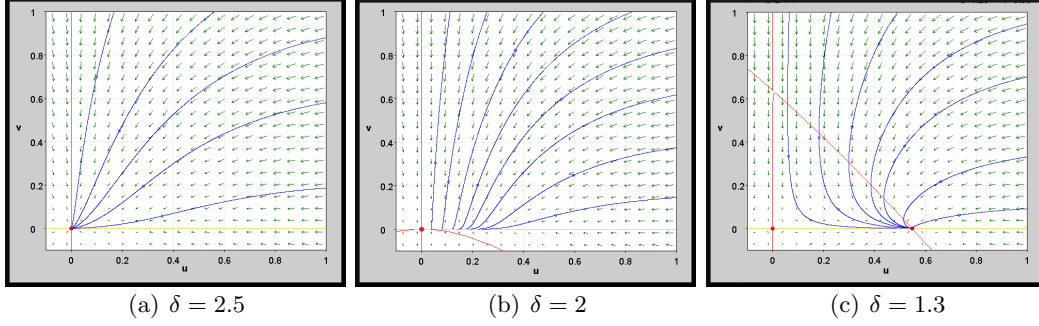


Figura 2.15: Retratos fase del sistema (2.2) para ilustrar la existencia de una bifurcación tenedor en $(u = 0, v = 0)$ al mover el parámetro δ . $\alpha = 1.7$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.85$.

Otro tipo de bifurcación que se sospecha es la de nodo-silla en el punto de equilibrio $(u^*, 0)^T$, para la cual tenemos que la matriz de Jacobi esta dado por:

$$\begin{bmatrix} \alpha(1 - 2u^*) - \gamma\delta e^{-\delta u^*} & -u^* \\ 0 & \beta u^* - 1 \end{bmatrix}.$$

Donde los valores propios son $\lambda_1 = \alpha(1 - 2u^*) - \gamma\delta e^{-\delta u^*}$ y $\lambda_2 = \beta u^* - 1$. De esto podemos observar que $\lambda_1 = 0$ si $\alpha = \frac{\gamma\delta e^{-\delta u^*}}{(1-2u^*)}$, entonces supongamos a α de esa manera, por lo tanto, la matriz de Jacobi se reduce a:

$$\begin{bmatrix} 0 & -u^* \\ 0 & \beta u^* - 1 \end{bmatrix}.$$

Los vectores propios derecho e izquierdo asociados a $\lambda_1 = 0$ son $v_0 = (1, 0)^T$ y $w_0 = (\frac{\beta u^* - 1}{u^*}, 1)^T$. Verifiquemos la condición $w_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0)$, el vector $F_\nu(\eta_0, \nu_0)$ está dada por:

$$F_\nu(\eta_0, \nu_0) = \begin{bmatrix} u^* - u^{*2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces $w_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) = \frac{(\beta u^* - 1)(u^* - u^{*2})}{u^*}$, el cual es distinto de cero. Ahora para terminar verifiquemos la condición $(w_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0)$, entonces calculemos la matriz $D^2 F(\eta_0, \nu_0)$, la cual está dada por:

$$\begin{bmatrix} (-2\alpha + \gamma\delta^2 e^{-\delta u^*})(\frac{\beta u^* - 1}{u^*}) - 1 & -\frac{\beta u^* - 1}{u^*} \\ \beta & \beta \frac{\beta u^* - 1}{u^*} \end{bmatrix}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes llegamos a que $(w_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0) = (-2\alpha + \gamma\delta^2 e^{-\delta u^*})(\frac{\beta u^* - 1}{u^*}) - 1$. Y por lo tanto, en el punto $(u^*, 0)$ se presenta una bifurcación nodo-silla.

Teorema 2.4. En el punto de equilibrio $(u^*, 0)^T$ del sistema (2.2) hay una bifurcación de tipo nodo-silla si $\alpha = \frac{\delta\gamma e^{-\delta u^*}}{1-2u^*}$.

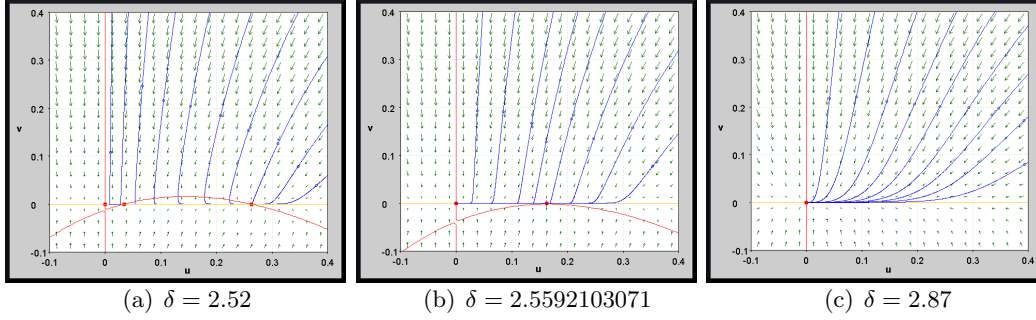


Figura 2.16: Retratos fase del sistema (2.2) para ilustrar la existencia de una bifurcación nodo-silla en $(u \approx 0.16, v = 0)$ al mover el parámetro δ . $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.6$.

Ahora veamos si se puede presentar una bifurcación en el punto de equilibrio $(u^{**}, 0)$. Para ello, veamos cuando la matriz de Jacobi evaluada en el punto $(u^{**}, 0)$ tiene un valor propio cero, la cual está dada por:

$$\begin{bmatrix} \alpha - 2\alpha u^{**} - \gamma\delta e^{-\delta u^{**}} & -u^{**} \\ 0 & \beta u^{**} - 1 \end{bmatrix}.$$

Como ya habíamos visto tiene por valores propios a $\lambda_1 = \alpha - 2\alpha u^{**} - \gamma\delta e^{-\delta u^{**}}$, $\lambda_2 = \beta u^{**} - 1$, aplicamos el teorema de Sotomayor y calculamos los vectores propios derecho e izquierdo de dicho valor propio.

Observe que el valor propio λ_2 es cero solo cuando $u^{**} = \frac{1}{\beta}$, entonces si suponemos esto podemos ver que la matriz de Jacobi evaluada en $(u^{**}, 0)$ se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \alpha - \frac{2\alpha}{\beta} - \gamma\delta e^{-\frac{\delta}{\beta}} & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & \beta_0 \end{bmatrix}.$$

Haciendo los cálculos respectivos obtenemos que el valor propio derecho asociado al valor propio cero es $v_0 = (1, k)^T$ donde $k = \beta(\alpha - \frac{2\alpha}{\beta} - \delta\gamma e^{-\frac{\delta}{\beta}})$ y el vector propio izquierdo es $w_0 = (0, 1)^T$.

Ahora vamos a checar las condiciones para que haya la presencia de una bifurcación, la primera condición del teorema es $w_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0)$.

Para ver está condición veamos que $F_\nu(\eta, \nu)$ está dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ uv \end{bmatrix}.$$

Evaluando en $(u^{**}, 0)$ tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo que la primera condición que hemos obtenido es que $w_0^T F_\nu(\eta_0, \nu_0) = 0$, por lo que, no puede ocurrir la bifurcación nodo-silla en el origen, veamos la siguiente condición $(w_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0)$.

Para calcular está condición debemos obtener la matriz $D^2 F(\eta_0, \nu_0)$, la cual se obtiene de las siguientes matrices:

$$D_{\eta\eta} F_1 = \begin{bmatrix} -2\alpha + \delta^2 \gamma e^{-\frac{\delta}{\beta}} & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{\eta\eta} F_2 = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora multiplicamos estas matrices por la izquierda por el vector propio izquierdo para obtener la siguiente matriz:

$$D^2 F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Haciendo los cálculos debidos obtenemos que $(w_0^T D^2 F(\eta_0, \nu_0))(v_0, v_0) = -1 + k\beta$, lo cual es diferente de cero, ahora nos falta de ver la siguiente condición $v_0^T (w_0^T D_{\nu\eta} F(\eta_0, \nu_0))^T$. La matriz $D_{\nu\eta} F(\eta_0, \nu_0)$ está dada por:

$$D_{\nu\eta} F(\eta_0, \nu_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}.$$

Haciendo los cálculos debido obtenemos que $v_0^T (w_0^T D_{\nu\eta} F(\eta_0, \nu_0))^T = \alpha - \frac{2\alpha}{\beta} - \delta\gamma e^{-\frac{\delta}{\beta}}$, por lo tanto en $(u^{**}, 0)$ ocurre una bifurcación transcítica.

Teorema 2.5. *En el punto de equilibrio $(u^{**}, 0)^T$ del sistema (2.2) ocurre una bifurcación transcítica si $\beta = \frac{1}{u^{**}}$.*

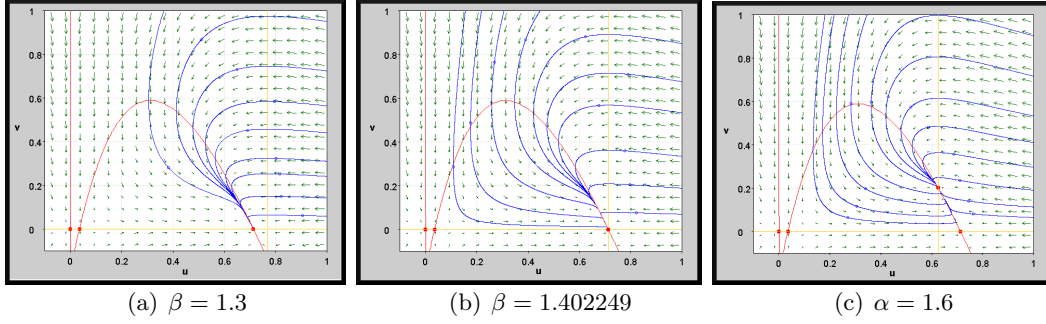


Figura 2.17: Retratos fase del sistema (2.2) para ilustrar la existencia de una bifurcación transcritical en $(u \approx 0.71314, v = 0)$ al mover el parámetro β . $\alpha = 3.8$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 5$.

En el punto de equilibrio $(\frac{1}{\beta}, \alpha(1 - \frac{1}{\beta}) - \gamma\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}))$, vamos a verificar si existe una bifurcación de Hopf, para que esta bifurcación se presente debe de pasar dos cosas. La primera es que los valores propios en el parámetro de bifurcación sean complejos puros; la segunda es que la derivada de la parte real del valor propio, respecto al parámetro de bifurcación sea distinto de cero.

La matriz de Jacobi en este punto de equilibrio es:

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\beta} + \gamma\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}) - \delta\gamma e^{-\frac{\delta}{\beta}} & -\frac{1}{\beta} \\ \alpha\beta(1 - \frac{1}{\beta}) - \gamma\beta^2(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Y sus valores propios son:

$$\begin{aligned} \bullet \lambda_1 &= \frac{-\frac{\alpha}{\beta} + \gamma\beta - e^{-\frac{\delta}{\beta}}(\gamma\beta + \delta\gamma) + \sqrt{(-\frac{\alpha}{\beta} + \gamma\beta - e^{-\frac{\delta}{\beta}}(\gamma\beta + \delta\gamma))^2 - 4(\alpha(1 - \frac{1}{\beta}) - \gamma\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}))}}{2}, \\ \bullet \lambda_2 &= \frac{-\frac{\alpha}{\beta} + \gamma\beta - e^{-\frac{\delta}{\beta}}(\gamma\beta + \delta\gamma) - \sqrt{(-\frac{\alpha}{\beta} + \gamma\beta - e^{-\frac{\delta}{\beta}}(\gamma\beta + \delta\gamma))^2 - 4(\alpha(1 - \frac{1}{\beta}) - \gamma\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}))}}{2}. \end{aligned}$$

Para que ambos valores propios tengan parte real cero debe de suceder lo siguiente:

$$-\frac{\alpha}{\beta} + \gamma\beta - e^{-\frac{\delta}{\beta}}(\gamma\beta + \delta\gamma) = 0, \quad (2.13)$$

a partir de (2.13), se obtiene una relación para α en términos de los parámetros β , γ y δ , de la siguiente forma

$$\alpha = \gamma\beta^2 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}(\gamma\beta + \gamma\delta)\beta.$$

Derivemos parcialmente la parte real del valor propio para tener la otra condición para que se presente dicha bifurcación.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{\alpha}{\beta} + \gamma\beta - e^{-\frac{\delta}{\beta}}(\gamma\beta + \delta\gamma) \right) = -\frac{1}{\beta},$$

la cual es distinta de cero. Falta ver cuando ambos valores propios son complejos, esto pasa cuando tenemos lo siguiente:

$$\alpha \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) - \gamma\beta \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}} \right) > 0,$$

reduciendo está expresión llegamos a lo siguiente:

$$\alpha > \frac{\gamma\beta^2(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}})}{\beta - 1}.$$

Por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.6. *En el punto de equilibrio $\left(\frac{1}{\beta}, \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) - \gamma\beta \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}} \right) \right)$ del sistema (2.2) ocurre una bifurcación de tipo Hopf si:*

- $\alpha = \gamma\beta^2 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}(\gamma\beta + \gamma\delta)\beta,$
- $\alpha > \frac{\gamma\beta^2(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}})}{\beta - 1}.$

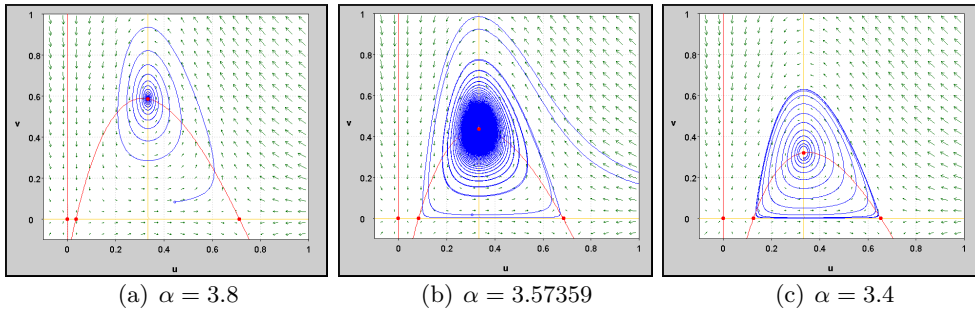


Figura 2.18: Retratos fase del sistema (2.2) para ilustrar la existencia de una bifurcación de Hopf en $(u \approx 0.33333, v \approx 0.31997)$ al mover el parámetro α . $\beta = 3$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 5$.

A continuación ilustramos los diagramas de bifurcación que se presentaron en el sistema (2.2). Para ello también vamos a incluir tablas en las cuales estarán los valores de los parámetros con los cuales se realizaron los diagramas.

En nuestra primera tabla hemos fijado todos los parámetros a excepción del parámetro δ el cual fue utilizado para realizar el diagrama 2.19.

| Parámetro | Conjunto 1 | Conjunto 2 | Conjunto 3 | Conjunto 4 |
|-----------|---------------|-----------------|------------|------------|
| γ | 0.6 | 0.85 | 0.8 | $[0,1]$ |
| α | 1.5 | 1.7 | 3.8 | 3 |
| δ | $[2.48,2.57]$ | $[1.990,2.002]$ | 5 | 5 |
| β | 0.5 | 0.5 | $[1,4.5]$ | 3 |

Tabla 2.2: Valores de los parámetros que se utilizaron para realizar los diagramas de bifurcación.

En la figura 2.19 junto con la ayuda de los valores que hemos proporcionado en la tabla 2.2. Se puede observar que ocurren dos bifurcaciones de las cuales una es una bifurcación transcítica y la otra una bifurcación la nodo-silla.

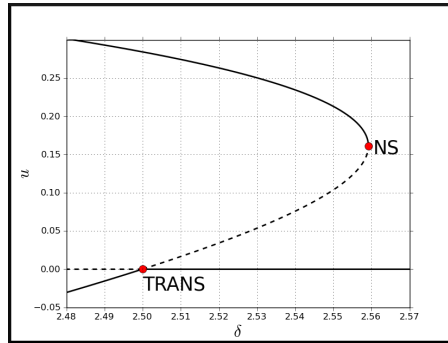


Figura 2.19: Diagrama de bifurcación, ver tabla 2.2 conjunto 1. Las soluciones en curvas solidas son estables y las soluciones en curvas punteadas son inestables. NS: Nodo-silla, TRANS: transcítica.

En la figura 2.19, si tenemos que la rapidez con la que los pescadores están sacando a las presas es poca, vamos a tener que habrá supervivencia de ellas. Pero si la rapidez es cada vez mayor podemos observar que cada vez disminuye la población de las presas y por ende va a terminar desapareciendo. Hay otra situación que se puede ver, la cual es que cuando tenemos veda, un periodo donde no se podrá pescar, debido a que si se pesca hará que la población de presas se extinga. Por lo que este periodo se puede utilizar para que las presas puedan volver a repoblar el medio donde se encuentren, y después que esto suceda poder volver a pescar.

Como habíamos visto algebraicamente obtuvimos dos casos de bifurcaciones que pueden ocurrir en el punto de equilibrio $(0,0)$. En el diagrama anterior se presentó cuando ocurría la bifurcación de tipo transcítica. Ahora tomando valores distintos en nuestros parámetros, en este caso como se muestra en la tabla 2.2, para poder visualizar una bifurcación de tipo tenedor.

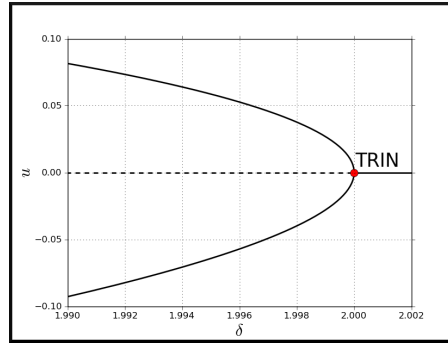
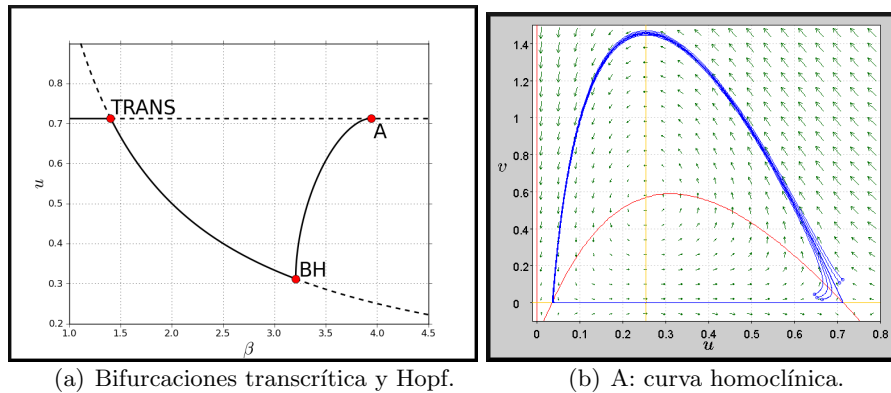


Figura 2.20: Diagrama de la bifurcación trinche al variar el parámetro δ , la estabilidad está representada con curvas sólidas y la inestabilidad con curvas punteadas.

En esta ocasión podemos ver en la figura 2.20 hay un valor para δ , en el cual la población de presas pueda sobrevivir. Pero si aumentamos δ no queda otra alternativa más que la población de presas comience a desaparecer, por lo que la población de depredadores se acabará.

El siguiente diagrama que presentamos está hecho en base al parámetro β , esto se ha hecho para poder visualizar la bifurcación de tipo transcítica que estaba ocurriendo en el punto de equilibrio $(u^*, 0)$. También se puede apreciar numéricamente que con el parámetro β podemos obtener la bifurcación de tipo Hopf. Pero cuando se trató de hacer algebraicamente no se pudo debido a que se obtenía una ecuación trascendental para β en el proceso. Además que numéricamente no se pudo presentar el diagrama de bifurcación mediante el parámetro α . A continuación presentamos la figura 2.21, el diagrama de la bifurcación de tipo transcítica y Hopf.



(a) Bifurcaciones transcítica y Hopf.

(b) A: curva homoclínica.

Figura 2.21: la estabilidad está con curvas sólidas y la inestabilidad con curvas punteadas, el parámetro que se vario fue β como se muestra en la tabla 2.2. BH: Hopf, TRANS: transcítica.

En la figura 2.21 estamos mostrando en la parte izquierda el diagrama de bifur-

cación cuando variamos β . Cuando tenemos que es pequeño podemos observar que la población de presas puede sobrevivir. Mientras que si aumentamos β , la población de presas va a disminuir hasta llegar a una población mínima. Después las poblaciones de presas y depredadores empiezan a oscilar entre sus poblaciones mínimas y máximas en las cuales ambas pueden coexistir.

En este diagrama también se puede distinguir que hay una curva homoclínica A. La cual corresponde al caso límite cuanto la rama de soluciones periódicas que emergen de una bifurcación de Hopf (BH), colapsa con una rama inestable. No se analizó pero solo la estamos mostrando en el espacio fase del sistema (2.2), en la cual es las condiciones que comienzan dentro de la curva convergen a dicha curva.

Como se observó antes, al dejar un parámetro libre y variarlo (δ, β) encontramos que dependía del valor de otro parámetro para que ocurrieran las bifurcaciones que se han estudiado. Entonces, ¿Qué pasa si variamos otro parámetro? En esta ocasión tomemos el parámetro γ , el cual es controlable al ser la capacidad de carga con la que se extraen las presas. Al igual que en los casos anteriores vamos a utilizar el teorema de Sotomayor para establecer si ocurre o no alguna bifurcación en los puntos de equilibrio.

En el caso cuando el punto de equilibrio es el $(0, 0)$ tenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{bmatrix} \alpha - \delta\gamma & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Al igual que antes tenemos los valores propios $\lambda_1 = \alpha - \delta\gamma$ y $\lambda_2 = -1$, por lo que si vamos a tomar como nuestro parámetro a γ , entonces tenemos que tener un valor propio cero y esto se obtiene solo si $\gamma = \frac{\alpha}{\delta}$. Las condiciones que cumple el punto de equilibrio son las siguientes:

- $w^T F_\gamma((0, 0), \frac{\alpha}{\delta}) = 0,$
- $(w^T D^2 F((0, 0), \frac{\alpha}{\delta}))(v, v) = \alpha(\delta - 2).$

Como se puede ver en el punto de equilibrio $(0, 0)$ no puede ocurrir una bifurcación de tipo nodo-silla. Pero también se puede observar que en la segunda condición puede ser tanto cero como distinto de cero. Por lo cual vamos a imponer una condición adicional para que la condición $(w^T D^2 F((0, 0), \frac{\alpha}{\delta}))(v, v)$ sea distinta de cero y otra para cuando sea cero, la cual es $\delta \neq 2$ para el caso distinto de cero y $\delta = 2$. Tomemos primero que sucedería si $\delta \neq 2$, entonces tenemos que calcular otra condición la cual es $v^T (w^T D_\gamma D F((0, 0), \frac{\alpha}{\delta}))^T$, haciendo los cálculos debido llegamos a que esta condición es la siguiente:

- $v^T (w^T D_\gamma D F((0, 0), \frac{\alpha}{\delta}))^T = -\delta.$

Por lo tanto, en el punto de equilibrio $(0, 0)$ puede ocurrir una bifurcación de tipo transcítica, ahora vemos el otro caso, cuando tenemos que $\delta = 2$, entonces

- $w^T F_\gamma((0, 0), \frac{\alpha}{\delta}) = 0,$
- $(w^T D^2 F((0, 0), \frac{\alpha}{\delta}))(v, v) = 0,$
- $v^T (w^T D_\gamma D F((0, 0), \frac{\alpha}{\delta}))^T = -\delta.$

Por lo cual cuando tenemos que $\delta = 2$ no puede ocurrir una bifurcación de tipo transcítica, por lo cual debemos calcular otra condición la cual es $(w^T D^3 F((0, 0), \frac{\alpha}{\delta}))(v, v, v)$, la cual después de hacer los debidos cálculos tenemos que:

- $(w^T D^3 F((0, 0), \frac{\alpha}{\delta}))(v, v, v) = -\alpha\delta^2,$

esta condición es distinta de cero siempre y cuando ambos parámetros sean distintos de cero.

Ahora vemos que sucede en los otros puntos de equilibrio, comencemos por el punto de equilibrio $(u^*, 0)$, la matriz de Jacobi en este punto es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \alpha - 2\alpha u^* - \delta\gamma e^{-\delta u^*} & -u^* \\ 0 & \beta u^* - 1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz son $\lambda_1 = \alpha - 2\alpha u^* - \delta\gamma e^{-\delta u^*}$ y $\lambda_2 = \beta u^* - 1$, entonces en términos del parámetro γ podemos hacer que uno de nuestros valores propios sea cero. Por lo que debemos tener que $\gamma = \frac{\alpha - 2\alpha u^*}{\delta e^{-\delta u^*}}$, así podemos calcular las condiciones, las cuales son las siguientes:

- $w^T F_\gamma((u^*, 0), \frac{\alpha - 2\alpha u^*}{\delta e^{-\delta u^*}}) = -(\frac{\beta u^* - 1}{u^*})(1 - e^{-\delta u^*}),$
- $(w^T D^2 F((0, 0), \frac{\alpha}{\delta}))(v, v) = \alpha((\frac{2}{u^*} + \delta) - (2\beta + \delta u^*)).$

Como se puede observar estas condiciones son distintas de cero, ya que vamos a considerar en esta ocasión que $u^* \neq \frac{1}{\beta}$, para no tener dos valores propios cero. Por lo tanto, en el punto de equilibrio $(u^*, 0)$ puede ocurrir una bifurcación de tipo nodo-silla.

Ahora, repitiendo el proceso para el punto de equilibrio $(u^{**}, 0)$, se puede observar que algebraicamente no podemos decir mucho acerca de la estabilidad en dicho punto de equilibrio. Pero como se muestra en la figura 2.22, cuando movemos el parámetro γ ocurre una bifurcación de tipo transcítica en el punto de equilibrio $(u^{**}, 0)$.

Nos falta ver si al variar el parámetro γ podemos generar a la bifurcación de Hopf. Para ello, tomemos el punto de equilibrio $(\frac{1}{\beta}, \alpha(1 - \frac{1}{\beta}) - \gamma\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}))$. Como se había hecho vamos a despejar a nuestro parámetro γ en términos de los otros parámetros, que en este caso tenemos que debe tener la forma $\gamma = \frac{\alpha}{\beta(\beta - e^{-\frac{\delta}{\beta}})(\beta + \delta)}$.

Con esto, podemos ver cuando los valores propios de la matriz de Jacobi asociada al punto de equilibrio serán complejos puros. Lo cual se obtiene si se cumple la siguiente condición $\gamma < \frac{\alpha(1 - \frac{1}{\beta})}{\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}})}$.

Imponiendo esta condición sabemos que tendremos valores propios complejos puros. Ahora vamos a ver cuándo la derivada respecto al parámetro γ de la parte real del valor propio es distinta de cero, la cual es $\frac{\partial}{\partial \gamma}(-\frac{\alpha}{\beta} + \gamma(\beta - e^{-\frac{\delta}{\beta}}(\beta + \delta))) = (\beta - e^{-\frac{\delta}{\beta}}(\beta + \delta))$. Por lo que cuando variamos el parámetro tendremos que ocurre una bifurcación de tipo Hopf si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\gamma = \frac{\alpha}{\beta(\beta - e^{-\frac{\delta}{\beta}})(\beta + \delta)},$
- $\gamma < \frac{\alpha(1 - \frac{1}{\beta})}{\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}})}.$

A continuación presentamos en la figura 2.22 un diagrama de las bifurcaciones que se presentan cuando variamos el parámetro γ .

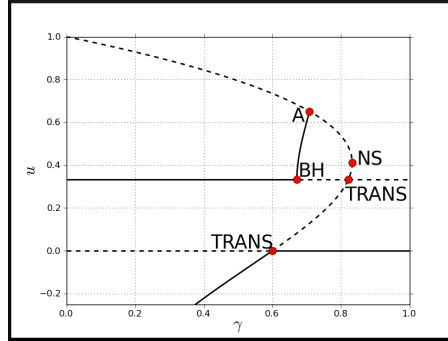


Figura 2.22: Diagrama de las bifurcaciones al variar γ como se muestra en la tabla 2.2 conjunto 4, las curvas sólidas representan estabilidad y las punteadas inestabilidad. Tomado de [24].

En la figura 2.22, estamos variando el parámetro γ . Se puede ver que hay un región del parámetro donde la población de presas puede existir en conjunto con los depredadores. También hay otra región donde la población de presas desaparezca. En esta ocasión también tenemos una región muy interesante donde se originan los ciclos límites. Es decir, dependiendo de cuanta cantidad de la presa sea tomada por

los pescadores esta influencia hace que la población de presas empiece a oscilar entre una cantidad máxima y mínima. Produciendo el mismo efecto en los depredadores, ya que su existencia depende de la presa.

2.3 Análisis del sistema con difusión

En esta sección, vamos a estudiar la inestabilidad de Turing que pueda presentar el sistema (2.1), para ello, en el capítulo 1 se dieron las condiciones para que pueda ocurrir, linealizando cerca de (u_4, v_4) , como se hizo en el capítulo 1, obtenemos que

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u - \frac{1}{\beta} \\ v - (\alpha(1 - \frac{1}{\beta}) - \gamma\delta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}})) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

en forma vectorial el sistema (2.2) para pequeñas perturbaciones, tiene la siguiente forma

$$\mathbf{w}_t = A\mathbf{w}, \text{ con } A = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\beta} + \delta\gamma(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}) - \delta\gamma e^{-\frac{\delta}{\beta}} & -\frac{1}{\beta} \\ \alpha\beta(1 - \frac{1}{\beta}) - \gamma\beta^2(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

donde A es la matriz de Jacobi evaluada en el punto (u_4, v_4) . Buscamos soluciones de la forma

$$\mathbf{w} \propto \mathbf{v}e^{\lambda t}, \quad (2.16)$$

donde λ es el valor propio y \mathbf{v} es un vector constante. Sustituyendo (2.16) en (2.15) y haciendo los cálculos necesarios tenemos como traza y determinante lo siguiente:

- $\text{tr}(A) = -\frac{\alpha}{\beta} + \delta\gamma(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}) - \delta\gamma e^{-\frac{\delta}{\beta}} < 0,$
- $\det(A) = -\frac{1}{\beta}(\alpha\beta(1 - \frac{1}{\beta}) - \gamma\beta^2(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}})) > 0.$

Con estas condiciones veremos si puede ocurrir la inestabilidad de Turing en dicho punto de equilibrio, por lo tanto calcularemos las condiciones de Turing. Para ello debemos ver que pasa en el caso cuando el sistema tiene difusión. Haciendo los cálculos necesarios llegamos a que en presencia de difusión la traza y el determinante de la matriz de estabilidad son los siguiente:

$$\lambda^2 + [k^2(1 + \epsilon^2) - (-\frac{\alpha}{\beta} + \gamma\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}) - \delta\gamma e^{-\frac{\delta}{\beta}})]\lambda + h(k^2) = 0,$$

donde

$$h(k^2) = \epsilon^2 k^4 - [-\frac{\alpha}{\beta} + \gamma\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}}) - \delta\gamma e^{-\frac{\delta}{\beta}}]k^2 - [\alpha(1 - \frac{1}{\beta}) - \gamma\beta(1 - e^{-\frac{\delta}{\beta}})].$$

De esto se puede observar que el coeficiente de λ es positivo. Además de que también el coeficiente de k^2 en el polinomio $h(k^2)$ es positivo. Por lo tanto se viola una de las condiciones de la inestabilidad de Turing, por lo cual dicho efecto no puede ocurrir.

Lo que vamos a hacer enseguida será mostrar algunas simulaciones de las soluciones que puede presentar el sistema con difusión. Esto para confirmar que no se hizo algún error en los cálculos algebraicos. Debido a que no parece haber una bifurcación de Turing, el patrón que muestras en la figura 2.23, sugiere ser un patrón de Turing (estable en el tiempo e inestable en el espacio).

2.4 Simulaciones del sistema con difusión

En esta sección, vamos a presentar algunas simulaciones de las soluciones que presenta el sistema (2.1), la primera figura que estamos presentando es el diagrama de bifurcación hecho con AUTO07p [24].

Para realizar el diagrama 2.23 hemos hecho la siguiente transformación. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(u, v),\end{aligned}$$

con condiciones de Neumann $u_x = v_x = 0$ en $x = 0, L$ y condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$, $v(x, 0) = v_0(x)$. Lo que haremos es un cambio de variable, en el cual transformaremos el sistema de dos ecuaciones diferenciales parcial a uno de cuatro ecuaciones ordinarias. Con el fin de encontrar soluciones de equilibrio, es decir $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$.

$$\begin{aligned}\epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v) &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(u, v) &= 0,\end{aligned}$$

sea $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $Q = \frac{\partial v}{\partial x}$, derivando las expresiones anteriores tenemos $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Teniendo el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= P, \\
\frac{\partial P}{\partial x} &= -\frac{f(u, v)}{\epsilon^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= Q, \\
\frac{\partial Q}{\partial x} &= -g(u, v),
\end{aligned}$$

con $u(x, 0) = u_0(x)$, $v(x, 0) = v_0(x)$ y $P = 0$, $Q = 0$. y $u_x = v_x = 0$ en $x = 0, L$. Con este método encontraremos las curvas equilibrio en el espacio.

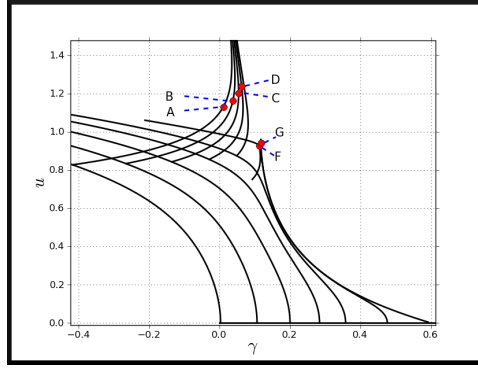


Figura 2.23: Diagrama de bifurcación del sistema (2.1). Con condiciones de frontera Neumman de cero flujo. Parámetros $\alpha = 3$, $\delta = 5$, $\epsilon = 0.05$, $\beta = 3$, varimos el parámetro γ . Las letras indican las soluciones de equilibrio.

En la figura 2.23 mostramos un diagrama de bifurcación para el sistema de ecuaciones (2.1 transformado) al mover el parámetro γ . Para $\gamma > 0$ tenemos que la ecuación tiene la solución trivial. Sin embargo, al mover nuestro parámetro, vemos que surgen ramas de solución, las cuales indican la amplitud de dichas soluciones al mover nuestro parámetro de interés. Las letras sirven como etiquetas para las diferentes ramas.

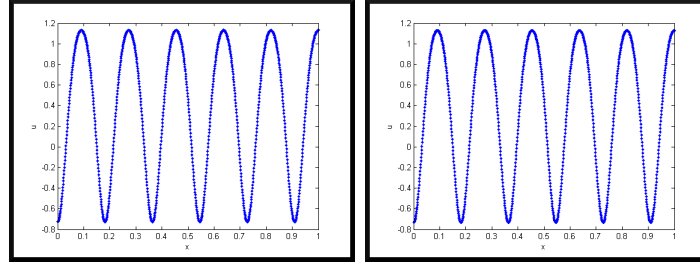


Figura 2.24: Solución del sistema (2.1) en la rama A de la Figura 2.23. En la figura de la izquierda mostramos la condición inicial dada ($t = 0$) y en la parte izquierda la solución del tiempo final ($t=1$), con parámetro $\gamma \approx 1.09383 \times 10^{-2}$.

En la figura 2.24, en la figura de la derecha se tomó como condición inicial la solución A de la figura 2.23. En la figura de la izquierda se muestra como la solución a cambiado a lo largo del tiempo, en este caso la solución queda invariante a lo largo del tiempo, por lo tanto dicha solución es estable.

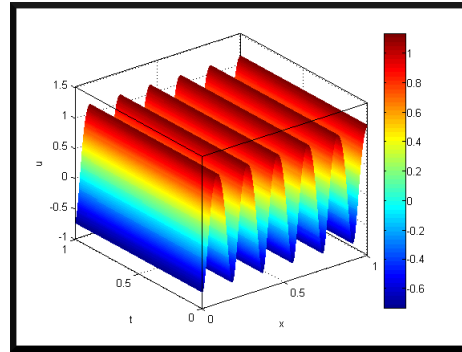


Figura 2.25: Solución del sistema (2.1) en el espacio, con parámetro $\gamma \approx 1.09383 \times 10^{-2}$.

En la figura 2.25 estamos mostrando la evolución de la solución A en el tiempo, es decir, para cada t hay una solución en el espacio, en esta figura se puede apreciar mejor que la rama de 2.23 donde corresponde la solución A, es siempre estable.

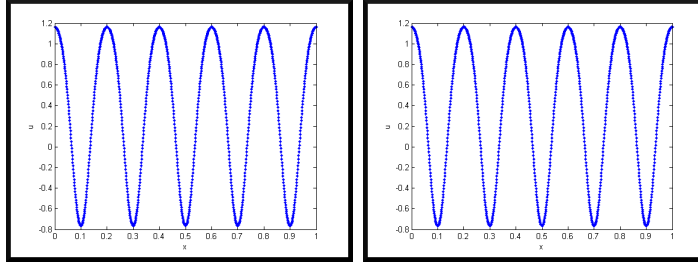


Figura 2.26: Solución del sistema (2.1), en la figura de la izquierda mostramos la condición inicial dada y en la parte izquierda la solución del tiempo final, con parámetro $\gamma \approx 3.77871 \times 10^{-2}$.

En la figura 2.26, en la figura de la derecha se tomó como condición inicial la solución B de la figura 2.23, en la figura de la izquierda se muestra como la solución a cambiado a lo largo del tiempo, en este caso la solución queda invariante a lo largo del tiempo, por lo tanto dicha solución es estable.

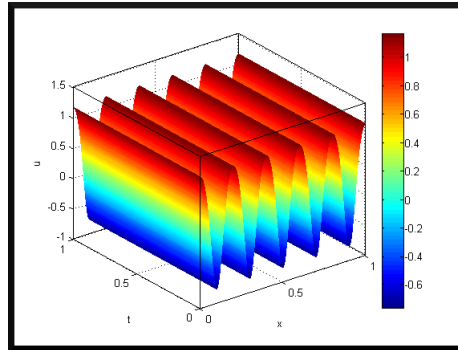


Figura 2.27: Solución del sistema (2.1) en el espacio, con parámetro $\gamma \approx 3.77871 \times 10^{-2}$.

En la figura 2.27 estamos mostrando la evolución de la solución B en el tiempo, es decir, para cada t hay una solución en el espacio, en esta figura se puede apreciar mejor que la rama de 2.23 donde corresponde la solución B , es estable.

2.5 Sistemas que no presentan bifurcaciones de Turing

En el estudio anterior, se observó que el sistema estudiado, no presentó la bifurcación de Turing. Aún cuando en las figuras 2.24 a la 2.37 se observan patrones "clásicos" de Turing, en realidad no lo son. Observe que dichas soluciones son producto de desestabilizar puntos de equilibrio sobre el eje u y por tanto, los patrones obtenidos toman valores negativos y por ende, carecen de significado para nuestro problema.

Lo que procedo a mostrar es ver cual fué la problemática del modelo para que no se presentase la bifurcación de Turing. Para ello, mostraremos el siguiente teorema.

Considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \Delta u + f(u, v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \Delta v + g(u, v).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Teorema 2.7. *Si el sistema (2.17) tiene la estructura*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= d_1 \Delta u + f(u, v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \Delta v + vg(u).\end{aligned}\tag{2.18}$$

Entonces el sistema (2.18) no presenta inestabilidad de Turing.

Demostración. Para que se presente la inestabilidad de Turing debemos hacer que el sistema (2.18), en uno de sus puntos de equilibrio con valores no negativos sea asintóticamente estable, en ausencia del efecto de difusión. Y cuando haya difusión el punto de equilibrio debe ser inestable. Por lo que vamos a obtener condiciones en las cuales esto pueda ocurrir. Los puntos de equilibrio del sistema (2.18) se obtienen de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}f(u, v) &= 0, \\ vg(u) &= 0.\end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos que si hay puntos de equilibrio, son de la forma $(u^*, 0)^T$ y $(u^*, v^*)^T$ con $v^* \neq 0$. Como pueden ser varios los que tengan estas estructuras vamos a definir unos conjuntos para facilitarnos la notación de dichos puntos de equilibrio.

Sea $\bar{u} = \{u \in \Omega : f(u, 0) = 0\}$ y $\tilde{u} = \{u \in \Omega : g(u) = 0\}$. Estos dos conjuntos nos definen los puntos de equilibrio que puede presentar el sistema (2.18) sin difusión. Sabiendo que tenemos estos dos conjuntos vamos a separarlo en dos casos.

El primer caso será con el conjunto $\bar{u} = \{u \in \Omega : f(u, 0) = 0\}$. Como queremos que (\bar{u}, \bar{v}) sea estable en ausencia de difusión vamos a calcular la matriz de Jacobi del sistema, la cual es la siguiente:

$$J = \begin{bmatrix} f_u(u, v) & f_v(u, v) \\ vg(u)' & g(u) \end{bmatrix}.$$

Evaluando en un punto de equilibrio de la forma $(\bar{u}, 0)^T$, obtenemos la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} f_u(\bar{u}, 0) & f_v(\bar{u}, 0) \\ 0 & g(\bar{u}) \end{bmatrix}.$$

Para que en este tipo de puntos de equilibrios sean estables utilizaremos el criterio de traza y determinante, por lo que ocupamos que $\text{tr}(A) < 0$ y $\det(A) > 0$. En este caso tenemos que la traza y determinante son : $\text{tr}(A) = f_u(\bar{u}, 0) + g(\bar{u})$ y $\det(A) = f_u(\bar{u}, 0)g(\bar{u})$. Teniendo en cuenta esto se puede ver fácilmente que $f_u(\bar{u}, 0), g(\bar{u}) < 0$, lo cual, contradice una de las condiciones de la inestabilidad de Turing por lo que no se presenta en este conjunto de puntos de equilibrios.

El segundo caso será con el conjunto $\tilde{u} = \{u \in \Omega : g(u) = 0\}$, como queremos que sea estable en ausencia de difusión. Vamos a calcular la matriz de Jacobi evaluada en un punto de equilibrio de la forma $(\tilde{u}, \tilde{v})^T$, obtenemos la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} f_u(\tilde{u}, \tilde{v}) & f_v(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ \tilde{v}g'(\tilde{u}) & g(\tilde{u}) \end{bmatrix}.$$

Como en el conjunto los u hacen que $g(u) = 0$, la matriz de Jacobi se convierte en la siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} f_u(\tilde{u}, \tilde{v}) & f_v(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ \tilde{v}g'(\tilde{u}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Consideremos el vector \mathbf{w} el cual será una pequeña traslación de nuestro punto de equilibrio, de la siguiente manera:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u - \tilde{u} \\ v - \tilde{v} \end{pmatrix},$$

el problema ahora se convierte en la siguiente ecuación vectorial,

$$\mathbf{w}_t = B\mathbf{w}, \text{ donde } B = \begin{bmatrix} f_u(\tilde{u}, \tilde{v}) & f_v(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ \tilde{v}g'(\tilde{u}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Lo que vamos a hacer es buscar soluciones de la forma $\mathbf{w} \propto \mathbf{v}e^{\lambda t}$, donde λ es el valor propio y \mathbf{v} es un vector constante. De ante mano se sabe que si $\lambda < 0$ el punto de equilibrio $\mathbf{w} = 0$ es localmente estable. Sabemos por la teoría de ecuaciones diferenciales que los valores propios de una matriz de 2×2 se obtienen apartir de este es el polinomio característico.

$$\lambda^2 - (f_u(\tilde{u}, \tilde{v}))\lambda - f_v(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{v}g'(\tilde{u}) = 0 \quad (2.19)$$

teniendo por raíces lo siguiente,

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}[(f_u(\tilde{u}, \tilde{v})) \pm \sqrt{(f_u(\tilde{u}, \tilde{v}))^2 + 4f_v(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{v}g(\tilde{u})'}], \quad (2.20)$$

lo que garantiza que haya estabilidad local en el punto de equilibrio $\mathbf{w} = 0$ son las siguientes condiciones,

$$f_u(\tilde{u}, \tilde{v}) < 0 \text{ y } -f_v(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{v}g(\tilde{u})' > 0.$$

Lo siguiente que vamos a hacer es considerar el sistema completo, linealizando cerca del punto de equilibrio $\mathbf{w} = 0$, consiguiendo el siguiente sistema

$$\mathbf{w}_t = B\mathbf{w} + D\Delta\mathbf{w}, \text{ donde } D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Como nuestra ecuación es lineal, podemos determinar la solución \mathbf{w} como un producto de dos funciones, las cuales solo dependen de una variable, es decir, $\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{W}(x)T(t)$. para el término independiente del tiempo sabemos que la solución proviene de resolver la ecuación

$$\Delta\mathbf{W} + k^2\mathbf{W} = 0, \text{ con } \mathbf{W}_x = 0 \text{ para } x \in \partial\Omega, \quad (2.22)$$

donde k es el valor propio. Como estamos en una dimensión digamos $0 < x < L$. Sabemos por las condiciones de frontera que la solución $\mathbf{W} = \alpha \mathbf{V} \cos(\frac{n\pi x}{L})$, donde n es un entero. Esto nos proporciona una infinidad de soluciones, $k = \frac{n\pi}{L}$ es llamado el modo de onda.

Sea $\mathbf{W}_k(x)$ la función propia correspondiente al número de onda k . Cada una de estas funciones propias satisface las condiciones de frontera, como ya habíamos dicho el problema es lineal por lo que la solución tiene la forma

$$\mathbf{w}(x, t) = \sum_k c_k e^{\lambda t} \mathbf{W}_k(x) \quad (2.23)$$

donde la constante c_k son determinadas con las expansiones de Fourier de la condición inicial en términos de $\mathbf{W}_k(x)$. Como λ es el valor propio que determina el crecimiento temporal. Vamos a sustituyendo (2.23) en (2.21) y cancelando $e^{\lambda t}$, para cada k tenemos,

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{W}_k &= B\mathbf{W}_k + D\Delta\mathbf{W}_k \\ &= B\mathbf{W}_k - Dk^2\mathbf{W}_k. \end{aligned}$$

Requerimos soluciones no triviales para \mathbf{W}_k de tal manera que λ son determinados por las raíces del polinomio característico

$$|\lambda I - B + Dk^2| = 0$$

$$\begin{aligned}\lambda^2 + (k^2(d_1 + 1) - (f_u(\tilde{u}, \tilde{v})))\lambda + h(k^2) &= 0, \\ h(k^2) &= d_1 k^4 - (f_u(\tilde{u}, \tilde{v}))k^2 - f_v(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{v}g(\tilde{u})'. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como estamos suponiendo que el punto de equilibrio $(\tilde{u}, \tilde{v})^T$ es estable en ausencia de difusión, entonces el coeficiente de λ es positivo. Se puede observar rápidamente que si $Re(k^2 = 0) < 0$, es decir (2.24) cuando $k^2 = 0$ estamos en el caso que representa cuando no hay difusión. Para que el punto de equilibrio sea inestable debe pasar que $Re\lambda > 0$ para algún $k \neq 0$ cuando perturbamos en el espacio. Esto puede ocurrir si $h(k^2) < 0$ para algún $k \neq 0$, además se requiere que $|B| > 0$, la única posibilidad para que $h(k^2) < 0$ es si $f_u(\tilde{u}, \tilde{v}) > 0$. Pero esto contradice el hecho de que sin el efecto de difusión, la condición $f_u(\tilde{u}, \tilde{v}) < 0$. Por lo que hemos mostrado que una de las condiciones que se requieren para la inestabilidad de Turing no se cumple. Por lo tanto el sistema (2.18) no presenta la inestabilidad de Turing.

Dentro de lo que hemos visto, encontramos que existen regiones para diferentes parámetros tales como δ , γ y β donde el único caso es que la población de presas tienda a desaparecer a lo largo del tiempo. También encontramos regiones para los parámetros β y γ para las cuales tenemos existencia de ciclos límites, estas propiedades nos dicen que tanto las presas y los depredadores pueden estar oscilando entre su mínima y máxima población. Es decir, esto nos dice que hay una coexistencia de especies.

CAPÍTULO 3

Sistema presa-depredador. Bifurcación de Turing-Hopf.

El sistema visto en el capítulo anterior mostró una dinámica muy rica en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, no tuvo los suficientes elementos para lograr que tuviese una bifurcación de Turing. Como se mostró en el teorema (2.7) se mostraron condiciones que indican una familia de ecuaciones diferenciales sin bifurcación de Turing.

En este capítulo, nos enfocamos en otro modelo de poblaciones, el cual tiene dinámicas más sencillas comparadas con el modelo anterior, pero que sí presenta la bifurcación de Turing-Hopf.

En este modelo se considera una población u de alguna especie que invade una región. La especie u se alimenta de la especie a , esta alimentación dependerá de un valor crítico de a . Cuando la especie a este por debajo de dicho valor crítico, la especie u tenderá a decaer exponencialmente. Cuando la población a este por encima de su valor crítico, la especie u podrá sobrevivir. Se considera que la especie a tiene un crecimiento logístico y cuando la especie a esta en contacto con la especie u , la especie u se alimenta de la especie a [25].

De lo anterior, se construyó el siguiente modelo

$$u_t = f(u, a), \quad (3.1a)$$

$$a_t = \gamma_a a \left(1 - \frac{a}{k_a}\right) - \delta_a a u, \quad (3.1b)$$

donde $f(u, a)$ tiene la forma siguiente

$$f(u, a) = \begin{cases} -r_u u (k_1 u + a - \beta_u) (k_2 u - a - \eta_u) & \text{si } a \geq a^*, \\ -r_u u & \text{si } a < a^*. \end{cases} \quad (3.2)$$

Primero veamos que las soluciones siempre pertenecen al primer cuadrante, entonces sea $(\bar{u}, 0)$ y evaluemos en el campo vectorial

$$\begin{aligned} u_t &= f(\bar{u}, 0), \\ a_t &= 0, \end{aligned}$$

con

$$f(\bar{u}, 0) = \begin{cases} -r_u \bar{u}(k_1 \bar{u} - \beta_u)(k_2 \bar{u} - \eta_u) & \text{si } a \geq a^*, \\ -r_u \bar{u} & \text{si } a < a^*. \end{cases}$$

Por lo que, en el eje u no hay movimiento en la componente a . Ahora consideremos $(0, \bar{a})$ y evaluemos el campo vectorial en dichos puntos

$$\begin{aligned} u_t &= 0, \\ a_t &= \gamma_a a \left(1 - \frac{a}{\bar{a}}\right), \end{aligned}$$

entonces, en el eje a no hay movimiento en la componente u . Esto nos dice que no hay salidas ni entradas por los ejes, lo cual indica que el primer cuadrante es invariante.

Una interpretación de los parámetros veamos lo siguiente. Supongamos que tenemos un cierto número de presas en la población, digamos \bar{a} mayor que el valor crítico a^* , en este caso usamos la función $f(u, a) = -r_u u(k_1 u + a - \beta_u)(k_2 u - a - \eta_u)$.

Para ver cuanta población soporta el medio con cierta cantidad de alimento \bar{a} , nos centraremos en la recta $k_1 u + a - \beta_u = 0$. La cual nos dice que tanto alimento, o población puede soportar el medio mientras los depredadores se reproducen. Entonces

$$k_1 u + \bar{a} - \beta_u = 0$$

despejando la variable u obtenemos

$$\bar{u} = \frac{\beta_u - \bar{a}}{k_1} \quad (3.3)$$

de esto podemos observar que \bar{u} es la capacidad de carga del medio para sustentar la reproducción de la población u . La ecuación (3.3) debe estar balanceada en dichas unidades. Por lo tanto, tanto β_u como \bar{a} deben tener unidades de población y la constante k_1 no tiene unidades. La ecuación (3.3) nos indica que a mayor alimento, el medio soporta a más depredadores que puedan reproducirse.

Nos faltan ver los otros parámetros k_2 , η_u , los cuales están relacionados con la recta $k_2 u - a - \eta_u = 0$, esta recta nos representa la supervivencias de la población. Entonces podremos saber cuánta población puede soportar el medio, si tenemos una cantidad de alimento fijo. Usaremos la misma notación que en los anteriores cálculos, por lo tanto tomando una cantidad \bar{a} de alimento, tenemos que

$$k_2 u - \bar{a} - \eta_u = 0$$

despejando la variable u obtenemos

$$\bar{u} = \frac{\eta_u + \bar{a}}{k_2}. \quad (3.4)$$

Al igual que en el caso anterior, podemos observar que si \bar{u} es la capacidad de carga del medio para sustentar la población u . La ecuación (3.4) debe estar balanceada en dichas unidades, por lo tanto, tanto η_u como \bar{a} deben tener unidades de población y la constante k_2 no posee unidades. También la ecuación (3.4) nos dice que entre más alimento el medio soporta más población.

La tasa de reproducción de los depredadores es representada por k_1 , β_u es un umbral de alimento para la reproducción de los depredadores. k_2 es la tasa de consumo de alimento de los depredadores, η_u es un umbral de alimento para la supervivencias de los depredadores, r_u es el tiempo de muerte de los depredadores.

De la ecuación (3.1b) vemos que es logística, por lo tanto el parámetro γ_a es la tasa de reproducción de la presa, k_a capacidad de carga de las presas en el medio y δ_a tasa de contactos de las presas con los depredadores.

Para obtener el valor de a^* , veamos que la intersección de las dos ceroclinas $a = -k_1u + \beta_u$ y $a = k_2u - \eta_u$. Cuando $a = a^*$, obtenemos $u^* = \frac{\beta_u + \eta_u}{k_1 + k_2}$. Además, por construcción, nótese que el valor que ambas tienen al evaluar en u^* es $a^* = \frac{\beta_u k_2 - k_1 \eta_u}{k_1 + k_2}$.

A continuación, llevaremos a cabo el análisis clásico. Primero, encontramos los puntos de equilibrio del sistema (3.1). Debido a que la función (3.2) es continua por pedazos, calcularemos los puntos de equilibrio en los casos $a < a^*$ y $a \geq a^*$.

Caso $a < a^*$

Para el caso $a < a^*$ se considera la función $f(u, a) = -r_u u$, el único valor de u que anula a dicha función es $u = 0$. Entonces sustituyendo el valor de $u = 0$ en la segunda ecuación de (3.1), dicha ecuación se reduce a $\gamma_a a \left(1 - \frac{a}{k_a}\right) = 0$. Los valores de a que la anulan son $a = 0$ y $a = k_a$. Los puntos de equilibrio son $(0, 0)$ y $(0, k_a)$.

Caso $a \geq a^*$

Para el caso $a \geq a^*$, la componente del campo para u satisface que $f(u, a) = -r_u u(k_1u + a - \beta_u)(k_2u - a - \eta_u)$. En dicha función podemos ver que $u = 0$, $a = -k_1u + \beta_u$ y $a = k_2u - \eta_u$ anulan a la función $f(u, a)$. Entonces sustituyendo el valor de $u = 0$ en la segunda ecuación de (3.1), llegamos a $a = 0$ y $a = k_a$. Obtenemos los mismos puntos de equilibrio que en el caso $a < a^*$.

Sustituyendo el valor de $a = -k_1u + \beta_u$ en la segunda ecuación de (3.1), obtenemos la ecuación $\frac{\gamma_a}{k_a}(k_a + k_1u - \beta_u) - \delta_a u = 0$, de esta ecuación tenemos que $a = \frac{k_a(k_1\gamma_a - \delta_a\beta_u)}{k_1\gamma_a - \delta_a k_a}$ con $u = \frac{\gamma_a(\beta_u - k_a)}{k_1\gamma_a - \delta_a k_a}$. Obteniendo el punto de equilibrio $\left(\frac{\gamma_a(\beta_u - k_a)}{k_1\gamma_a - \delta_a k_a}, \frac{k_a(k_1\gamma_a - \delta_a\beta_u)}{k_1\gamma_a - \delta_a k_a}\right)$.

Para el valor de $a = k_2u - \eta_u$ haremos lo mismo. Sustituyendo dicho valor de a en la segunda ecuación de (3.1), esta adquiere la forma $\frac{\gamma_a}{k_a}(k_a - k_2u + \eta_u) - \delta_a u = 0$, haciendo los cálculos necesarios obtenemos que $a = \frac{k_a(\gamma_a k_2 - \delta_a \eta_u)}{\gamma_a k_2 + k_a \delta_a}$ con $u = \frac{\gamma_a(k_a + \eta_u)}{\gamma_a k_2 + k_a \delta_a}$. El punto de equilibrio es $\left(\frac{\gamma_a(k_a + \eta_u)}{\gamma_a k_2 + k_a \delta_a}, \frac{k_a(\gamma_a k_2 - \delta_a \eta_u)}{\gamma_a k_2 + k_a \delta_a}\right)$.

| | |
|--------------------|---|
| $S_1 = (u_1, a_1)$ | $u_1 = 0, a_1 = 0$ |
| $S_2 = (u_2, a_2)$ | $u_2 = 0, a_2 = k_a$ |
| $S_3 = (u_3, a_3)$ | $u_3 = \frac{\gamma_a(\beta_u - k_a)}{k_1\gamma_a - \delta_a k_a}, a_3 = \frac{k_a(k_1\gamma_a - \delta_a\beta_u)}{k_1\gamma_a - \delta_a k_a}$ |
| $S_4 = (u_4, a_4)$ | $u_4 = \frac{\gamma_a(k_a + \eta_u)}{\gamma_a k_2 + k_a \delta_a}, a_4 = \frac{k_a(\gamma_a k_2 - \delta_a \eta_u)}{\gamma_a k_2 + k_a \delta_a}$ |

Tabla 3.1: Puntos de equilibrio del sistema (3.1)

En la Tabla 3.1 se resumen los distintos puntos de equilibrio.

En la figura 3.1, se presenta distintos retratos fase para los puntos de equilibrio y ceroclinas que pueden ocurrir.

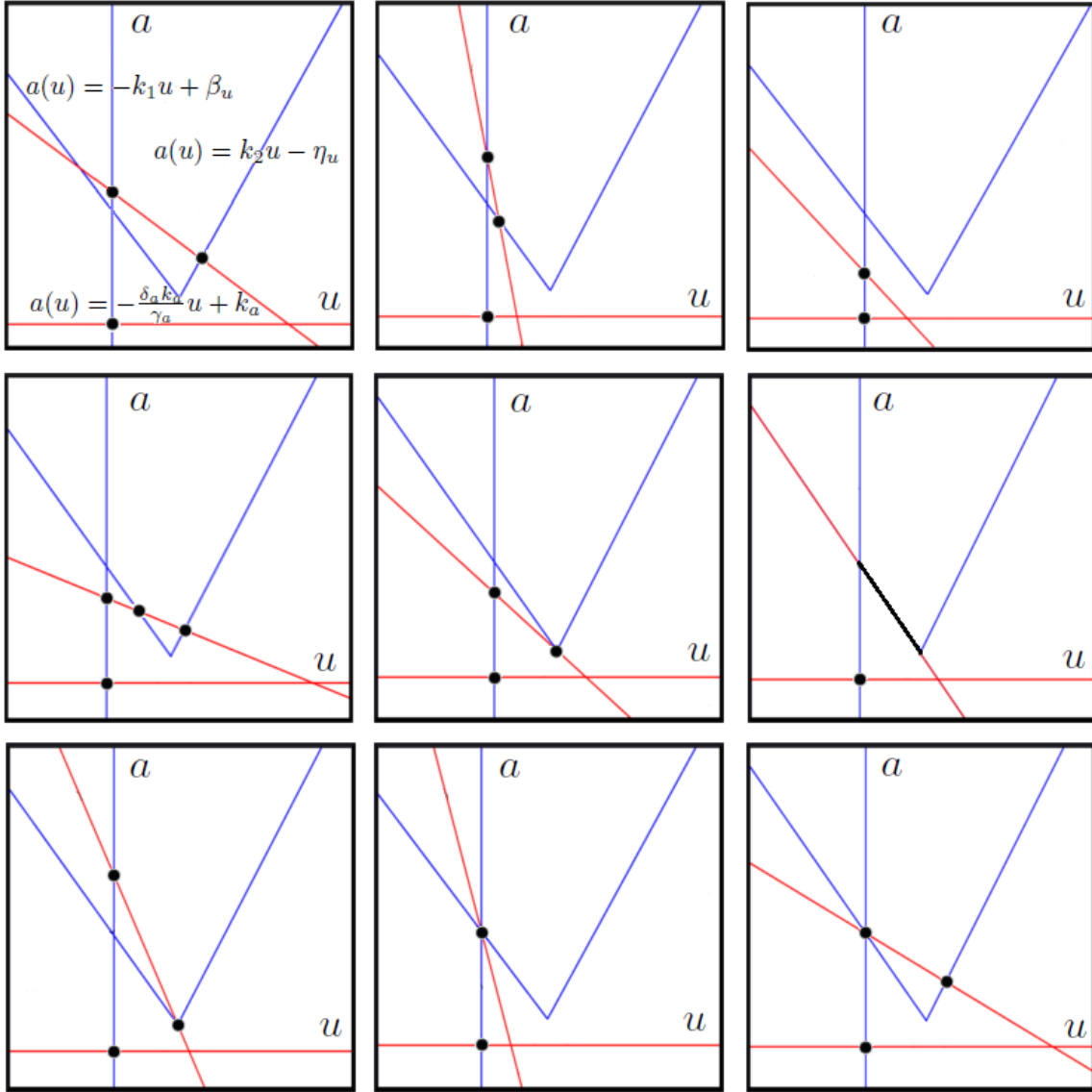


Figura 3.1: Diferentes escenarios para las ceroclinas del sistema (3.1), las ceroclinas de la variable u se muestran en azul y en rojo las ceroclinas de la variable a . Los puntos negros son los puntos fijos en cada escenario.

3.1 Estabilidad local del sistema

En esta sección, calcularemos la estabilidad local de los puntos de equilibrio del sistema (3.1).

Considerando que sólo tenemos al punto de equilibrio S_1 por debajo del umbral

a^* . Vamos a calcular la estabilidad de cada punto de equilibrio, para ello vamos a obtener la matriz de Jacobi del sistema (3.1), la cual es

$$J(S) = \begin{bmatrix} J_{11}(S) & J_{12}(S) \\ J_{21}(S) & J_{22}(S) \end{bmatrix},$$

donde $J_{11}(S) = -r_u[(k_1u + a - \beta_u)(k_2u - a - \eta_u) + k_1u(k_2u - a - \eta_u) + k_2u(k_1u + a - \beta_u)]$, $J_{12}(S) = -r_uu[(k_2u - a - \eta_u) - (k_1u + a - \beta_u)]$, $J_{21}(S) = -\delta_a a$ y $J_{22}(S) = \gamma_a((1 - \frac{a}{k_a}) - \frac{a}{k_a}) - \delta_a u$ cuando estamos en el caso $a \geq a^*$. Para cuando tenemos que $a < a^*$ la matriz de Jacobi es

$$J(S) = \begin{bmatrix} -r_u & 0 \\ -\delta_a a & \gamma_a((1 - \frac{a}{k_a}) - \frac{a}{k_a}) - \delta_a u \end{bmatrix}.$$

Como los cálculos algebraicos son más sencillos para estructura de la matriz de Jacobi en el caso de $a < a^*$, debido a la estructura de $f(u, a)$ en dicha sección. Vamos a empezar evaluándola en el origen, ya que es el único punto de equilibrio que consideraremos abajo de dicho umbral.

$$J(S_1) = \begin{bmatrix} -r_u & 0 \\ 0 & \gamma_a \end{bmatrix},$$

fácilmente se puede observar que el punto de equilibrio $(0,0)$ es inestable debido a que sus valores propios son $\lambda_1 = -r_u$ y $\lambda_2 = \gamma_a$, más aún es un punto silla. Ahora evaluaremos la correspondiente matriz de Jacobi en el punto de equilibrio S_2 el cual está por encima del umbral a^* .

$$J(S_2) = \begin{bmatrix} r_u(k_a - \beta_u)(k_a + \eta_u) & 0 \\ -\delta_a k_a & -\gamma_a \end{bmatrix},$$

los valores propios en esta ocasión son $\lambda_1 = r_u(k_a - \beta_u)(k_a + \eta_u)$ y $\lambda_2 = -\gamma_a$. El punto S_2 puede ser estable si $\beta_u > k_a$ y es inestable si $\beta_u < k_a$. También se puede apreciar que el valor propio λ_1 puede ser cero si $\beta_u = k_a$. Esto puede ser un indicio para poder obtener algún tipo de bifurcación estacionaria la cual la retomaremos más adelante.

Continuamos ahora evaluando la matriz de Jacobi en el punto de equilibrio S_3 , en la cual se obtiene la siguiente expresión

$$J(S_3) = \begin{bmatrix} r_u k_1 u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) & r_u u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) \\ -\delta_a a_3 & -\frac{\gamma_a}{k_a} a_3 \end{bmatrix},$$

en esta ocasión es un poco más complicado obtener los valores propios explícitamente. Por lo que vamos a proceder a obtener la traza y el determinante de la matriz $J(S_3)$, calcularemos primero el determinante

$$\det(J(S_3)) = -\frac{\gamma_a}{k_a} r_u k_1 u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) a_3 + \delta_a a_3 r_u u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u),$$

agrupando los términos similares tenemos que

$$\det(J(S_3)) = r_u (\delta_a - \frac{\gamma_a}{k_a} k_1) u_3 a_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u),$$

obteniendo común denominador el determinante se expresa como

$$\det(J(S_3)) = -r_u \left(\frac{\gamma_a k_1 - \delta_a k_a}{k_a} \right) u_3 a_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u),$$

sustituyendo los valores de u_3 y a_3 en los términos fuera del paréntesis tenemos que

$$\det(J(S_3)) = -\frac{r_u \gamma_a (\beta_u - k_a) (k_1 \gamma_a - \delta_a \beta_u)}{k_1 \gamma_a - \delta_a k_a} (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u).$$

Claramente la traza es $\text{tr}(J(S_3)) = r_u k_1 u_3 (-k_2 u_3 + a_3 + \eta_u) - \frac{\gamma_a}{k_a} a_3$, aquí podemos apreciar algo muy importante. El término $-k_2 u_3 + a_3 + \eta_u$ es positivo, ya que a_3 es el valor de la coordenada en a del punto de equilibrio. Además $-k_2 u_3 + \eta_u = a'_3$ pero $a'_3 < a_3$, con lo cual tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *El punto de equilibrio $S_3 = (\frac{\gamma_a(\beta_u - k_a)}{k_1 \gamma_a - \delta_a k_a}, \frac{k_a(k_1 \gamma_a - \delta_a \beta_u)}{k_1 \gamma_a - \delta_a k_a})$ del sistema (3.1) es estable si:*

- $k_a > \beta_u$,
- $r_u k_1 u_3 (-k_2 u_3 + a_3 + \eta_u) < \frac{\gamma_a}{k_a} a_3$.

Nos falta analizar la estabilidad del punto de equilibrio S_4 , por lo que evaluemos la matriz de Jacobi en dicho punto de equilibrio. Y haciendo los cálculos apropiados llegamos a que tiene la forma

$$J(S_4) = \begin{bmatrix} -r_u k_2 u_4 (k_1 u_4 + a_4 - \beta_u) & r_u u_4 (k_1 u_4 + a_4 - \beta_u) \\ -\delta_a a_4 & -\frac{\gamma_a}{k_a} a_4 \end{bmatrix},$$

al igual que como lo hicimos anteriormente, vamos analizar la estabilidad del punto de equilibrio S_4 mediante la traza y el determinante. Es fácil ver que la traza es $\text{tr}(J(S_4)) = -(r_u k_2 u_4 (k_1 u_4 + a_4 - \beta_u) + \frac{\gamma_a}{k_a} a_4)$ y $\det(J(S_4)) = \frac{r_u u_4 a_4}{k_a} (k_1 u_4 + a_4 - \beta_u) (k_2 \gamma_a + \delta_a k_a)$, aquí también tenemos una expresión similar que anteriormente $k_1 u_4 + a_4 - \beta_u$. Pero esta cantidad también es positiva ya que $a_4 - (k_1 u_4 - \beta_u) = a_4 - a'_4 > 0$, por lo tanto tenemos que $\text{tr}(J(S_4)) < 0$ y $\det(J(S_4)) > 0$, esto nos dice que el punto de equilibrio S_4 es estable.

3.2 Bifurcaciones del sistema

En esta sección, vamos a obtener las bifurcaciones que puede presentar el sistema (3.1). Retomaremos el hecho de que en el punto de equilibrio S_2 hay una condición de estabilidad, es decir, el punto de equilibrio S_2 puede ser estable o inestable. Para lo cual pensamos que puede haber una bifurcación estacionaria en dicho punto de equilibrio, para ello vamos a utilizar el teorema de Sotomayor. el cual nos dá condiciones suficientes para que una familia uni-parametrizada de campos vectoriales presente las bifurcaciones estacionarias [23].

Para poder aplicar el teorema necesitamos obtener la condición que nos garantice un valor propio cero. La cual fácilmente se puede obtener como $k_a = \beta_u$, además de los vectores propios izquierdo y derecho, los cuales son

$$v_{izq} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } v_{der} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma_a}{\delta_a k_a} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La primera condición que vamos a ver es $v_{izq}^T D_{\beta_u} F(\beta_u = k_a, (0, k_a))$, donde $D_{\beta_u} F$ es la derivada parcial respecto de β_u del campo (3.1). Veremos si esta condición es distinta de cero o no.

$$v_{izq}^T F_{\beta_u}(\beta_u = k_a, (0, k_a)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_a \end{bmatrix} = 0.$$

Como la condición $v_{izq}^T F_{\beta_u}(\beta_u = k_a, (0, k_a))$ fue cero, entonces podemos descartar la posibilidad de que ocurra una bifurcación de tipo nodo-silla. Ahora vamos a proseguir con la siguiente condición la cual es $(v_{izq}^T D^2 F(\beta_u = k_a, (0, k_a)))(v_{der}, v_{der})$, donde $M(v_{der}, v_{der}) = v_{der}^T M v_{der}$. Desarrollando la condición llegamos a que es la siguiente

$$\begin{aligned} & (v_{izq}^T D^2 F(\beta_u = k_a, (0, k_a)))(v_{der}, v_{der}) = \\ & \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k_1 r_u(\eta_u + k_a) & r_u(\eta_u + k_a) \\ r_u(\eta_u + k_a) & 0 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} -\frac{\gamma_a}{\delta_a k_a} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\gamma_a}{\delta_a k_a} \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ & \left(\frac{\gamma_a}{\delta_a k_a} \right)^2 (2k_1 r_u(\eta_u + k_a)) - \frac{\gamma_a}{\delta_a k_a} r_u(\eta_u + k_a). \end{aligned}$$

Falta de tomar en cuenta la condición $v_{der}^T (v_{izq} D_{\beta_u} DF(k_a, (0, k_a)))^T$, si es diferente de cero podremos decir que hay una bifurcación de tipo transcítica. Entonces la matriz $D_{\beta_u} DF(k_a, (0, k_a))$ es

$$D_{\beta_u} DF(k_a, (0, k_a)) = \begin{bmatrix} -r_u(k_a + \eta_u) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

calculando la condición

$$v_{der}^T(v_{iqz}D_{\beta_u}DF(k_a, (0, k_a)))^T = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma_a}{\delta_a k_a} & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_u(k_a + \eta_u) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^T =$$

desarrollando el producto interior y transponemos tenemos que

$$\begin{bmatrix} -\frac{\gamma_a}{\delta_a k_a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_u(k_a + \eta_u) \\ 0 \end{bmatrix} =$$

y desarrollamos el producto interior tenemos como resultado

$$\frac{\gamma_a r_u}{\delta_a k_a} (k_a + \eta_u).$$

Claramente esta condición es diferente de cero, por lo tanto llegamos al siguiente resultado.

Teorema 3.2. *El punto de equilibrio $S_2 = (0, k_a)$ del sistema (3.1) presenta una bifurcación estacionaria de tipo transcítica si $\beta_u = k_a$.*

También en el punto de equilibrio S_3 hay un cambio de signo en la matriz $J(S_3)$. Para ello, volveremos a colocar la matriz $J(S_3)$ y nos vamos a fijar en el polinomio característico.

$$J(S_3) = \begin{bmatrix} r_u k_1 u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) & r_u u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) \\ -\delta_a a_3 & -\frac{\gamma_a}{k_a} a_3 \end{bmatrix},$$

con $\lambda^2 - (r_u k_1 u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) - \frac{\gamma_a}{k_a} a_3) \lambda - \frac{r_u \gamma_a (\beta_u - k_a) (k_1 \gamma_a - \delta_a \beta_u)}{k_1 \gamma_a - \delta_a k_a} (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u)$. De aquí sabemos que las raíces de este polinomio son

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} [\text{tr}(J(S_3)) \pm \sqrt{(\text{tr}(J(S_3)))^2 - 4(\det(J(S_3)))}],$$

necesitamos que los valores propios sean complejos puros lo cual lo obtenemos cuando $\text{tr}(J(S_3)) = 0$. Viendo la estructura de la traza el parámetro más libre que se puede ver es r_u , por lo tanto la $\text{tr}(J(S_3)) = 0$ si $r_u = \frac{\gamma_a}{k_a} a_3 (k_1 u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u))^{-1}$. Ahora vamos ver cuando el determinante es positivo, lo cual se logra si $\delta_a k_a > k_1 \gamma_a$ debido a que el determinante con la suposición de r_u se transforma en $\det(J(S_3)) = -\frac{a_3^2 \gamma_a}{k_a^2 k_1} (k_1 \gamma_a - \delta_a k_a)$. Por último falta verificar la condición de transversalidad, es decir, si la derivada respecto a r_u de la parte real de los valores propios es diferente de cero.

$$\frac{\partial \text{Re}(\lambda)}{\partial r_u} = k_1 u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) - \frac{\gamma_a}{k_a} a_3 \neq 0,$$

por lo tanto hemos obtenido las condiciones para que se pueda presentar una bifurcación de tipo Hopf, por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *En el punto de equilibrio $S_3 = (\frac{\gamma_a(\beta_u - k_a)}{k_1\gamma_a - \delta_a k_a}, \frac{k_a(k_1\gamma_a - \delta_a\beta_u)}{k_1\gamma_a - \delta_a k_a})$ del sistema (3.1) ocurre una bifurcación de tipo Hopf si:*

- $r_u = \frac{\gamma_a}{k_a} a_3 (k_1 u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u)^{-1})$,
- $k_a > \beta_u$.

A continuación presentamos el diagrama de bifurcación del sistema (3.1) al variar el parámetro β_u .

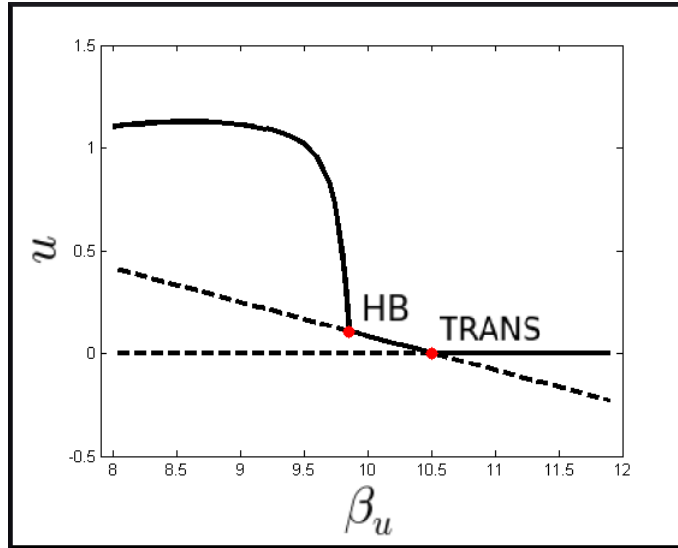


Figura 3.2: Diagrama de bifurcación, los parámetros usados son: $r_u = 1.062028448$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$ y $\delta_a = 4.3$. Las soluciones en curvas sólidas son estables y las soluciones en curvas punteadas son inestabilidad. Bifurcación de Hopf (HB), bifurcación transcrítica (TRANS).

Observemos que hay conjuntos de parámetros en los cuales ambas poblaciones pueden coexistir. Es decir, las poblaciones de presas y depredadores están oscilando entre sus poblaciones máximas y mínimas. Y otro conjunto en el cual los depredadores desaparecen, haciendo que la presa sobreviva.

Hemos hecho simulaciones de distintos ciclos límites que presenta el sistema (3.1), variamos el parámetro β_u en el rango $(8.0, 9.86)$.

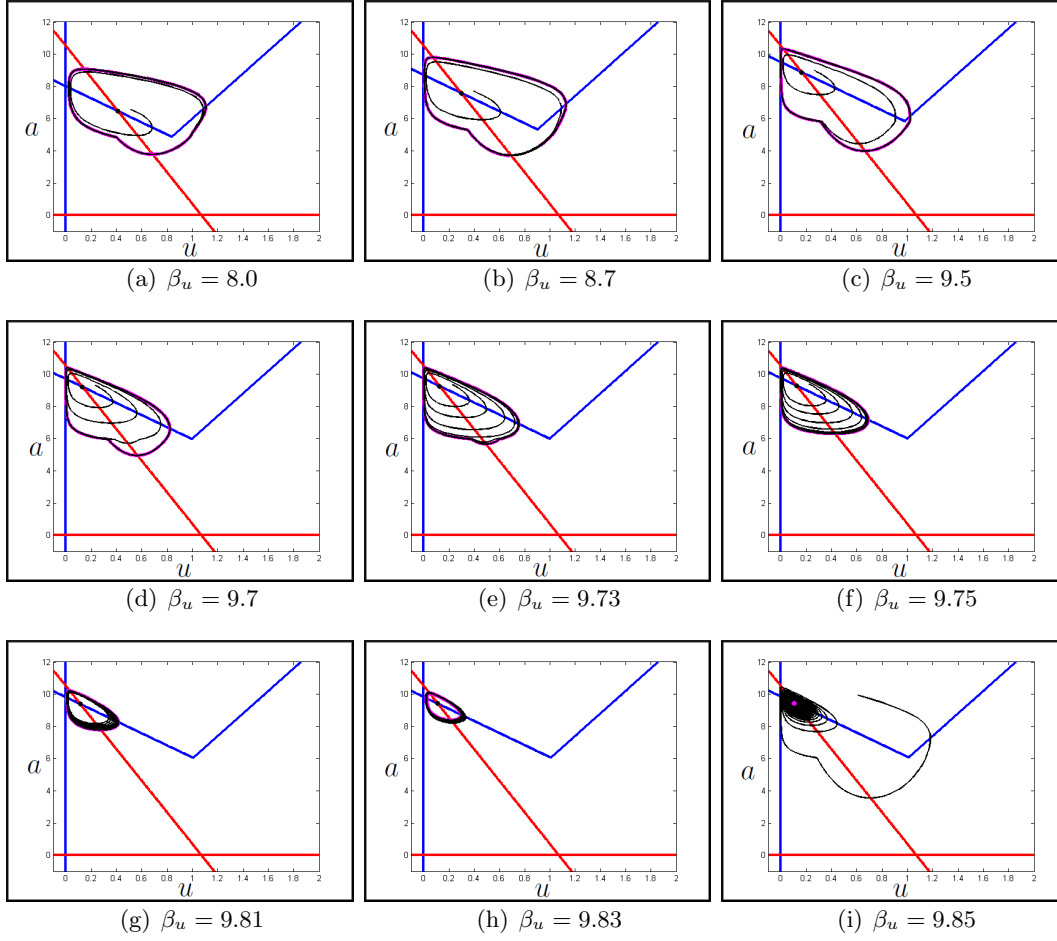


Figura 3.3: Retratos fase del sistema (3.5). Los distintos ciclos límites fueron hechos al variar el parámetro β_u , con parámetros fijos: $r_u = 1.062028448$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$ y $\delta_a = 4.3$. Se tomaron condiciones iniciales para que empiece por dentro del ciclo límite en cada figura.

3.3 Bifurcación de Turing del sistema

En esta sección, vamos a calcular la bifurcación de Turing. Supondremos que ambas especies u y a pueden moverse en algún habitat o medio posible, en una dimensión. Entonces el sistema (3.1) se convierte en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, a), \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= d \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \gamma_a \left(1 - \frac{a}{k_a}\right) - \delta_a a u,\end{aligned}\tag{3.5}$$

con las condiciones de frontera de tipo Neumann homogéneas $u_x = 0$, $a_x = 0$, para $x \in \partial\Omega$, donde Ω es el intervalo de la variable x . Vamos a considerar un punto de equilibrio del sistema (3.1) en el cual ambas componentes sean positivas, para ello consideraremos el punto de equilibrio S_3 como candidato a lo siguiente.

Sabemos que si linealizamos el sistema (3.1) cerca del punto de equilibrio S_3 , el sistema (3.1) tiene la siguiente forma, Sea

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u - \frac{\gamma_a(\beta_u - k_a)}{k_1\gamma_a - \delta_a k_a} \\ a - \frac{k_a(k_1\gamma_a - \delta_a\beta_u)}{k_1\gamma_a - \delta_a k_a} \end{pmatrix}$$

de este modo el sistema (3.1) se convierte para pequeñas perturbaciones en

$$\mathbf{w}_t = J(S_3)\mathbf{w},\tag{3.6}$$

para este tipo de problemas se buscan soluciones de la forma

$$\mathbf{w} \propto \mathbf{a}e^{\lambda t},\tag{3.7}$$

donde λ es el valor propio y \mathbf{a} es un vector constante. Ahora el punto de equilibrio $\mathbf{w} = 0$ es localmente estable si $\text{Re}(\lambda) < 0$, es decir la traslación $\mathbf{w} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Vamos a sustituir (3.7) en (3.6) para determinar los valores propios mediante la siguiente ecuación

$$|J(S_3) - \lambda I| = \begin{vmatrix} r_u k_1 u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) - \lambda & r_u u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) \\ -\delta_a a_3 & -\frac{\gamma_a}{k_a} a_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

entonces

$$\lambda^2 - (r_u k_1 u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) - \frac{\gamma_a}{k_a} a_3) \lambda - \frac{r_u u_3 a_3}{k_a} (k_1 \gamma_a - \delta_a k_a) (-k_2 u_3 + a_3 + \eta_u) = 0, \tag{3.8}$$

así que las raíces del polinomio (3.8) son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[r_u k_1 u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) - \frac{\gamma_a}{k_a} a_3 \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left(r_u k_1 u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) - \frac{\gamma_a}{k_a} a_3 \right)^2 - 4 \left(-\frac{r_u u_3 a_3}{k_a} (k_1 \gamma_a - \delta_a k_a) (-k_2 u_3 + a_3 + \eta_u) \right)} \right], \quad (3.9)$$

para garantizar que $\text{Re}(\lambda) < 0$, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \text{tr}(J(S_3)) &= r_u k_1 u_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) - \frac{\gamma_a}{k_a} a_3 < 0, \\ \det(J(S_3)) &= -\frac{r_u u_3 a_3}{k_a} (k_1 \gamma_a - \delta_a k_a) (-k_2 u_3 + a_3 + \eta_u) > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De forma linealizada el sistema (3.5) tiene la forma

$$\mathbf{w}_t = J(S_3) \mathbf{w} + D \Delta \mathbf{w}, \text{ donde } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Para resolver esta ecuación se hace mediante el metodo de separación de variables, el cual utilizamos cuando usamos la ecuación (1.18). Dicho método es posible utilizarlo ya que (3.11) es una ecuación diferencial parcial lineal, en la cual llegamos a que la solución independiente del tiempo es de la forma $\mathbf{W} = \cos(\frac{n\pi x}{L})$, donde $n \in \mathbb{Z}$. Para este tipo de problemas buscamos soluciones $\mathbf{w}(x, t)$ de la forma

$$\mathbf{w}(x, t) = c_k e^{\lambda t} \mathbf{W}(x)_k, \quad (3.12)$$

donde las constantes c_k son determinadas por las expansiones de Fourier de las condiciones iniciales en términos de $\mathbf{W}_k(x)$. λ es el valor propio el cual nos va a determinar el crecimiento temporal. Sustituyendo la ecuación (1.18) en (3.11) y cancelando $e^{\lambda t}$, tenemos para cada k

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{W}_k &= J(S_3) \mathbf{W}_k + D \Delta \mathbf{W}_k \\ &= J(S_3) \mathbf{W}_k - D k^2 \mathbf{W}_k. \end{aligned}$$

Como requerimos soluciones que no sean triviales para \mathbf{W}_k así que λ esta determinado por las raíces del polinomio característico

$$|\lambda I - J(S_3) + D k^2| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - J_{11}(S_3) + k^2 d & -J_{12}(S_3) \\ -J_{21}(S_3) & \lambda - J_{22}(S_3) + k^2 \end{vmatrix} = 0,$$

de esto vemos que los valores propios dependen del número de onda k y son las raíces de

$$\begin{aligned} \lambda^2 + [k^2(d+1) - (J_{11}(S_3) + J_{22}(S_3))]\lambda + h(k^2) &= 0, \\ h(k^2) &= dk^4 - (dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3))k^2 + J_{11}(S_3)J_{22}(S_3) - J_{12}(S_3)J_{21}(S_3). \end{aligned} \quad (3.13)$$

El punto de equilibrio S_3 es estable si ambas soluciones de (3.13) tienen parte real negativa. Tenemos las hipótesis de que el punto de equilibrio es estable en ausencia de difusión; es decir, $\text{Re}\lambda(k^2 = 0) < 0$. Para que el punto de equilibrio sea inestable en presencia de pequeñas perturbaciones en el espacio requerimos que $\text{Re}\lambda > 0$ para algún $k \neq 0$. Esto puede ocurrir si el coeficiente de λ en (3.13) es negativo, o si $h(k^2) < 0$ para algún $k \neq 0$. Como $\text{tr}(J(S_3)) < 0$ de la condición (3.10) y $k^2(1+d) > 0$ para todo $k \neq 0$ el coeficiente de λ , el cual es

$$[k^2(d+1) - (J_{11}(S_3) + J_{22}(S_3))] > 0,$$

así que la única manera para que $\text{Re}\lambda$ pueda ser positiva es si $h(k^2) < 0$ para algún k . Claramente las soluciones de (3.13) son

$$2\lambda = -[k^2(d+1) - (J_{11}(S_3) + J_{22}(S_3))] \pm \sqrt{[k^2(d+1) - (J_{11}(S_3) + J_{22}(S_3))]^2 - 4h(k^2)}.$$

Como requerimos que el determinante sea positivo, la única posibilidad para que $h(k^2)$ sea negativa es si $(J_{11}(S_3) + dJ_{22}(S_3)) < 0$. Pero como suposimos que $J_{11}(S_3) + J_{22}(S_3) < 0$ esto implica que $d \neq 1$, además sabemos que $J_{11}(S_3)$ y $J_{22}(S_3)$ tienen signos opuesto. Así que un requerimiento para que $h(k^2) < 0$ es

$$dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3) > 0, \text{ lo cual implica } d \neq 1. \quad (3.14)$$

La desigualdad (3.14) es necesaria pero no suficiente para tener $\text{Re}\lambda > 0$. para que $h(k^2)$ sea negativa para algún $k \neq 0$ el valor de $h(k^2)$ en el mínimo debe ser negativo. De (3.13), y derivando respecto a k^2 .

El mínimo de la función $h(k^2)$ y la función evaluada en el mínimo es el siguiente

$$\begin{aligned} h_{min} &= J_{11}(S_3)J_{22}(S_3)(S_3) - J_{12}(S_3)J_{21}(S_3) - \frac{(dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3))^2}{4d}, \\ \text{con } k_{min}^2 &= \frac{dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3)}{2d}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Entonces para que $h(k^2) < 0$ se requiere para algún $k \neq 0$, lo siguiente

$$\frac{(dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3))^2}{4d} > J_{11}(S_3)J_{22}(S_3) - J_{12}(S_3)J_{21}(S_3). \quad (3.16)$$

La bifurcación ocurre cuando $h_{min} = 0$, lo cual requiere que $J_{11}(S_3)J_{22}(S_3) - J_{12}(S_3)J_{21}(S_3) = \frac{(dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3))^2}{4d}$. Entonces si fijamos todos los parámetros a excepción del parámetro de difusión, podemos definir un coeficiente de difusión crítico $d_c > 1$, como la raíz adecuada de

$$d_c^2 J_{11}^2(S_3) + 2(2J_{12}(S_3)J_{21}(S_3) - J_{11}(S_3)J_{22}(S_3))d_c + J_{22}^2(S_3) = 0. \quad (3.17)$$

El número de onda crítico k_c^2 está dada por

$$k_c^2 = \frac{dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3)}{2d_c} = \left[\frac{J_{11}(S_3)J_{22}(S_3) - J_{12}(S_3)J_{21}(S_3)}{d_c} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.18)$$

Siempre que $h(k^2) < 0$, (3.13) tiene una solución λ que es positiva, para el mismo intervalo de números de onda que hacen $h < 0$. De (3.13) con $d > d_c$ el intervalo de números de onda inestables $k_1^2 < k^2 < k_2^2$ es obtenido de los ceros k_1^2 y k_2^2 de la función $h(k^2) = 0$ como

$$k_1^2 = k_{1*}^2 < k^2 < k_{2*}^2 < k_2^2, \quad (3.19)$$

donde

$$k_{1*}^2 = \frac{1}{2d} \left[(dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3)) - \sqrt{(dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3))^2 - 4d(J_{11}(S_3)J_{22}(S_3) - J_{12}(S_3)J_{21}(S_3))} \right]$$

$$\text{y } k_{2*}^2 = \frac{1}{2d} \left[(dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3)) + \sqrt{(dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3))^2 - 4d(J_{11}(S_3)J_{22}(S_3) - J_{12}(S_3)J_{21}(S_3))} \right].$$

Recapitulando las condiciones que nos hacen generar patrones de inestabilidad en el espacio son

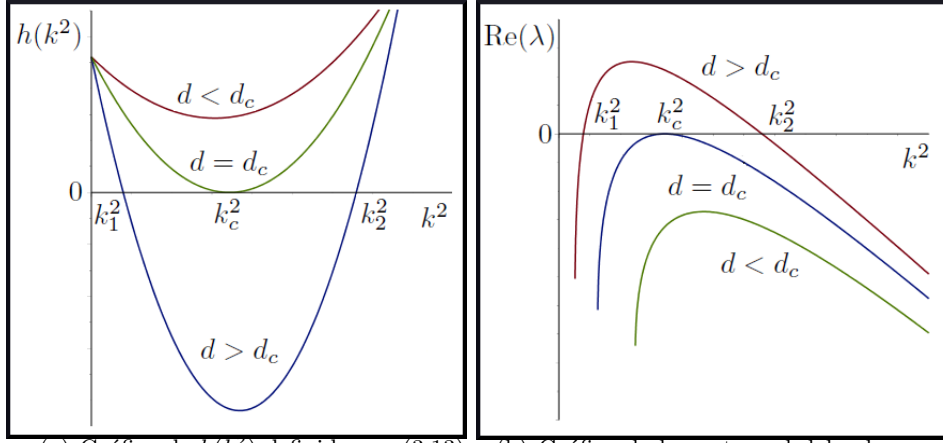
$$J_{11}(S_3) + J_{22}(S_3) < 0, \quad (3.20a)$$

$$J_{11}(S_3)J_{22}(S_3) - J_{12}(S_3)J_{21}(S_3) > 0, \quad (3.20b)$$

$$dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3) > 0, \quad (3.20c)$$

$$(dJ_{11}(S_3) + J_{22}(S_3))^2 - 4d(J_{11}(S_3)J_{22}(S_3) - J_{12}(S_3)J_{21}(S_3)) > 0. \quad (3.20d)$$

En la figura 3.4, se puede apreciar visualmente como tomar el coeficiente de difusión para que pueda ocurrir la bifurcación de Turing, en el cual fijamos los parámetros del sistema (3.5).



(a) Gráfica de $h(k^2)$ definida por (3.13). (b) Gráfica de la parte real del valor propio como función de k^2 .

Figura 3.4: (a) cuando el coeficiente de difusión d crece más allá del valor crítico d_c , $h(k^2)$ es negativo para un conjunto finito de $k^2 > 0$. (b) cuando $d > d_c$ existe un intervalo de número de ondas $k_1^2 < k^2 < k_2^2$ que son linealmente inestables. Parámetros fijos $r_u = 1$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $\beta_u = 9.85$, $k_a = 10.5$, $k_1 = 3.75$, $\delta_a = 4.3$, se tomó el coeficiente de difusión $d = 5$, $d_c = 8.867727154$ y $d = 20$.

Mediante el valor del parámetro de difusión que cumpla con las gráficas. En la siguiente sección haremos simulaciones en el caso cuando no ocurre la bifurcación de Turing, y también haremos simulaciones para el caso cuando ocurre.

3.4 Simulaciones de la Bifurcación de Turing

En esta sección presentamos simulaciones de las soluciones del sistema (3.1), para el cual hemos propuesto resolverlas con el método de Runge-Kutta. Asimismo, consideramos los diferentes casos en los cuales no tenemos inestabilidad de Turing y cuando sí se presenta.

En la figura 3.5, hemos considerado el siguiente conjunto de parámetros: $r_u = 1.4$, $k_1 = 3$, $k_2 = 3$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$ y $d = 10$, en este conjunto de parámetros no hay inestabilidad de Turing. Las condiciones iniciales son $u_0 = u_3 + 0.03 \cos(0.9x)$ y $a_0 = a_3 + 0.03 \cos(0.9x)$.

A continuación se presentan las simulaciones mediante el método de Runge-Kutta.

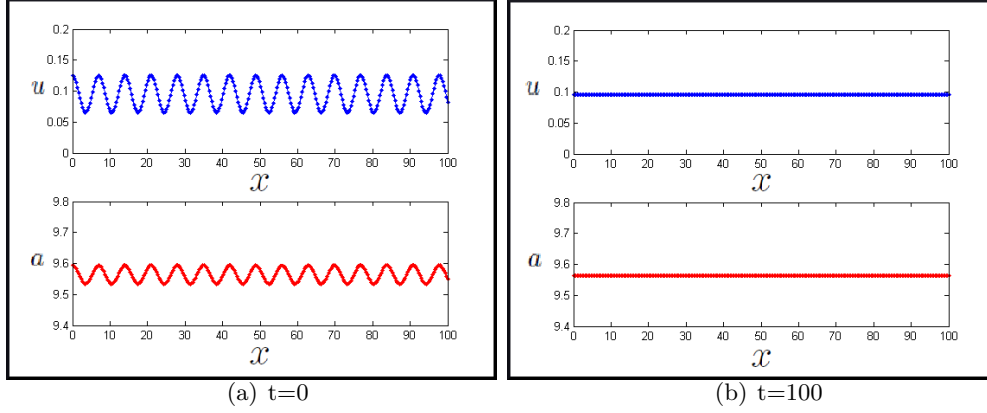


Figura 3.5: Soluciones a diferentes tiempo del sistema (3.5), con parámetros $r_u = 1.4$, $k_1 = 3$, $k_2 = 3$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$, $d = 10$ y con condiciones iniciales $u_0 = u_3 + 0.03 \cos(0.9x)$ y $a_0 = a_3 + 0.03 \cos(0.9x)$. En la figura de la derecha se presenta la condición inicial y en la izquierda la solución del sistema (3.5) en el tiempo $t = 100$.

En la figura 3.5, observe que al tomar una perturbación del punto de equilibrio (3.5, $t = 0$), las perturbaciones van disminuyendo conforme el tiempo va incrementando. la cual llega hasta que ya no hay perturbación, por lo que la condición inicial con los parámetros que se escogieron para la simulación converge al punto de equilibrio. Esto fue logrado gracias a que tomamos un parámetro de difusión en el cual la condición de (3.20d) no se cumplen.

Considere el conjunto: $r_u = 1$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$ y $d = 40$, en este conjunto de parámetros hay inestabilidad de Turing.

Con condiciones iniciales $u_0 = u_3 + 0.03 \cos(x)$ y $a_0 = a_3 + 0.03 \cos(x)$, donde $k \in (0.4248776339, 1.900900851)$.

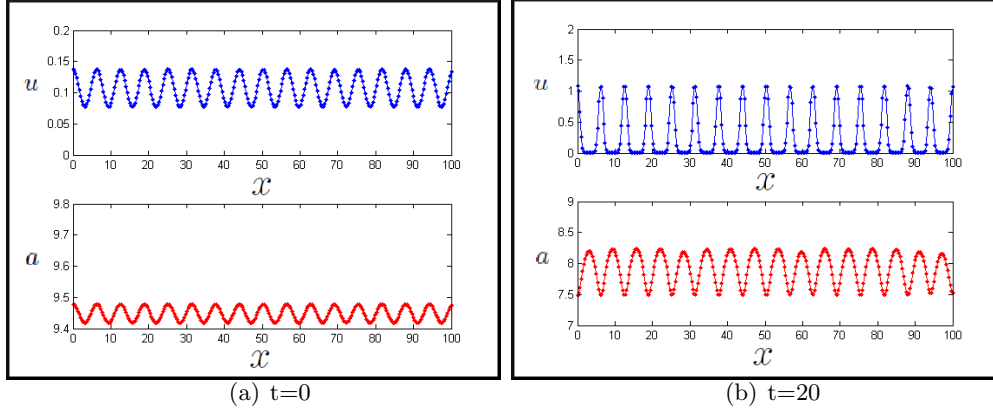


Figura 3.6: Soluciones a diferentes tiempo del sistema (3.5), con parámetros $r_u = 1$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$, $d = 10$ y con condiciones iniciales $u_0 = u_3 + 0.03 \cos(x)$ y $a_0 = a_3 + 0.03 \cos(x)$. En la figura de la derecha se presenta la condición inicial y en la izquierda la solución del sistema (3.5) en el tiempo $t = 20$.

Como se puede observar en la figura 3.6, las perturbaciones de la condición inicial en el tiempo comienzan a crecer. Y estas tiene una amplitud con rango $(0, 1.2)$ en el caso de u . Las amplitudes para la variable a son con rango $(7.4, 8.3)$, mientras más pasa el tiempo las perturbaciones quedan casi uniformes.

Tomamos los mismos parámetros que en el caso de la figura 3.6, con la diferencia de otra condición inicial. $u_0 = u_3 + 0.03 \text{rand}(1, Npx)$ y $a_0 = a_3 + 0.03 \text{rand}(1, Npx)$, donde Npx es el número de puntos en el intervalo que representa la región espacial donde las poblaciones interactúan.

A continuación se presentan las simulaciones mediante el método de Runge-Kutta.

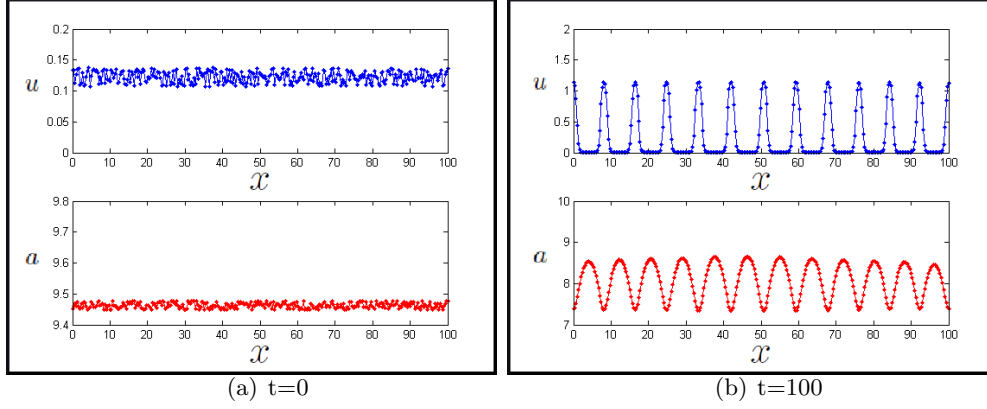


Figura 3.7: Soluciones a diferentes tiempo del sistema (3.5), con parámetros $r_u = 1$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$, $d = 40$ y con condiciones iniciales $u_0 = u_3 + 0.03\text{rand}(1, Npx)$ y $a_0 = a_3 + 0.03\text{rand}(1, Npx)$. En la figura de la derecha se presenta la condición inicial y en la izquierda la solución del sistema (3.5) en el tiempo $t = 100$.

Como se pueda observar en las figuras 3.7, tomamos otra condición inicial, mediante números aleatorios. También se consideró que todas las condiciones de Turing se cumplen. En este caso las perturbaciones crecen y se vuelve a crear el patrón de Turing que ocurrió en las simulaciones de la figura 3.6.

Para las figuras 3.8, consideramos el conjunto: $r_u = 1$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$ y $d = 40$, en este conjunto de parámetros, se presenta la inestabilidad de Turing.

Con condiciones iniciales $u_0 = u_3 + 0.03 \cos(kx)$ y $a_0 = a_3 + 0.03 \cos(kx)$, donde $k = 150$, fuera del intervalo de modos inestables. A continuación se presentan las simulaciones.

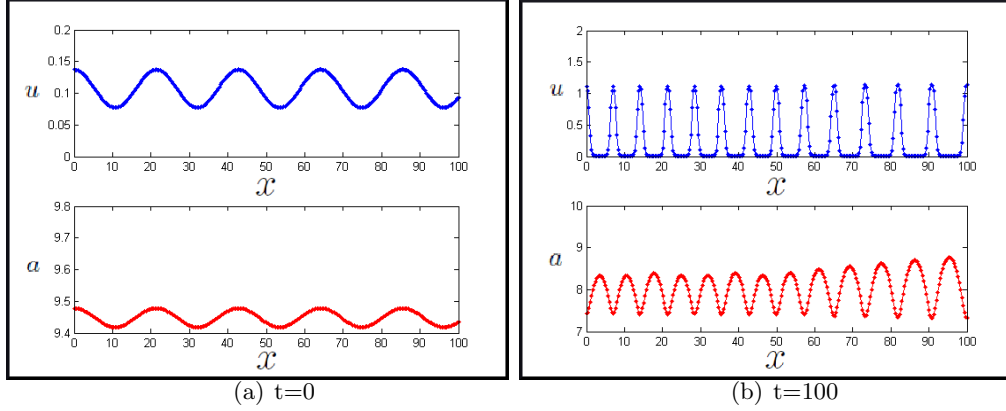


Figura 3.8: Soluciones a diferentes tiempo del sistema (3.5), con parámetros $r_u = 1$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$, $d = 40$ y con condiciones iniciales $u_0 = u_3 + 0.03 \cos(150x)$ y $a_0 = a_3 + 0.03 \cos(150x)$. En la figura de la derecha se presenta la condición inicial y en la izquierda la solución del sistema (3.5) en el tiempo $t = 100$.

En la figura 3.8, estamos presentando el escenario donde se cumplen las condiciones de turing, con la excepción de que se tomó k lo suficientemente grande para que las perturbaciones no pudieran sobrevivir. Pero esto no es lo que ocurrió, ya que si sobreviven, esto suele pasar ya que las perturbaciones dependen del tamaño del espacio.

3.5 Bifurcación de Turing-Hopf del sistema

En esta sección, presentaremos las condiciones para que la bifurcación de tipo Turing-Hopf pueda ocurrir. Los parámetros del sistema (3.5) deben satisfacer las condiciones **II-IV**, de las condiciones de la inestabilidad de Turing. pero la condición **I** va a ser remplazada por la condición **I'** [15, 16]: los valores propios de la matriz de Jacobi asociada con (3.1), satisfacen las condiciones para la aparición de una bifurcación supercrítica de Hopf, como se indica en el Teorema 3.3. Es decir, el signo de la traza debe cambiar: de negativo a positivo, cuando el valor de r_u va incrementando.

A continuación vamos a las implicaciones que se derivan de las condiciones **II-IV**. De la condición **II**, tenemos que

$$\det(J(S_3)) = -\frac{r_u}{k_a} \gamma_a (\beta_u - k_a) a_3 (a_3 - k_2 u_3 + \eta_u) > 0$$

de esto sabemos que

$$\det(J(S_3)) > 0 \text{ si } k_a > \beta_u.$$

De de la condición **III**, obtendremos una cota para el coeficiente de difusión, con el cual haremos que se cumpla esta condición, por lo tanto

$$dr_u k_1 u_3 (-k_2 u_3 + a_3 + \eta_u) - \frac{\gamma_a}{k_a} a_3 > 0 \quad (3.21)$$

entonces

$$dr_u > \frac{\gamma_a}{k_a} a_3 (k_1 u_3 (-k_2 u_3 + a_3 + \eta_u))^{-1} \quad (3.22)$$

como se puede observar, la parte derecha de la desigualdad es el valor crítico del parámetro r_u , en el cual ocurre la bifurcación de Hopf. Reduciendo la ecuación (3.22) tenemos

$$dr_u > r_u^* \quad (3.23)$$

por lo tanto

$$d > \frac{r_u^*}{r_u} \quad (3.24)$$

con esto ya encontramos la cota mínima para el coeficiente de difusión. Finalmente, de la condición **IV** tenemos

$$\left[dr_u k_1 u_3 (-k_2 u_3 + a_3 + \eta_u) - \frac{\gamma_a}{k_a} a_3 \right]^2 - 4d(-r_u \gamma_a (\beta_u - k_a) a_3 (-k_2 u_3 + a_3 + \eta_u)) > 0 \quad (3.25)$$

definiremos la siguiente expresión $c_1 = -k_2 u_3 + a_3 + \eta_u$, entonces la desigualdad (3.25) se convierte en

$$\left[dr_u k_1 u_3 c_1 - \frac{\gamma_a}{k_a} a_3 \right]^2 - 4d(-r_u \gamma_a (\beta_u - k_a) a_3 c_1) > 0 \quad (3.26)$$

ahora definiremos a $c_2 = \frac{\gamma_a}{k_a} a_3$, $c_3 = r_u k_1 u_3$ y desarrollando el término cuadrático de la desigualdad tenemos

$$d^2 (c_3 c_1)^2 - 2dc_3 c_1 c_2 + c_2^2 + 4d(r_u \gamma_a (\beta_u - k_a) a_3 c_1) > 0 \quad (3.27)$$

por último definiremos a la constante $c_* = (2c_3 c_1 c_2 - 4(r_u \gamma_a (\beta_u - k_a) a_3 c_1))$, para simplificar de las expresiones que hemos obtenido. Entonces este polinomio cuadrático tiene por raíces en la variable d lo siguiente

$$d_1, d_2 = \frac{c_* \pm \sqrt{c_*^2 - 4(c_3 c_1)^2 c_2^2}}{2(c_3 c_1)^2}. \quad (3.28)$$

La condición **IV** requiere ser siempre positiva, para que la bifurcación de Turing-Hopf pueda ocurrir. Por lo tanto, el coeficiente de difusión debe pertenecer al complemento del intervalo $[d_2, d_1]$. Entonces eligiendo apropiadamente los valores de los parámetros puede ocurrir la bifurcación de Turing-Hopf.

3.6 Simulaciones de la bifurcación de Turing-Hopf

En esta sección, presentamos simulaciones de las soluciones del sistema (3.1), para el cual hemos utilizado el método de Runge-Kutta de orden 4.

Para las figuras de 3.9, consideramos el conjunto: $r_u = 1.067$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$ y $d = 10$, en este conjunto de parámetros, se presenta el patron de Turing-Hopf.

Las condiciones iniciales que se tomaron son los datos obtenidos en la simulación de la inestabilidad de Turing. Es decir, los datos obtenidos en la figura 3.6 iniciamos las simulaciones con el patron de Turing a tiempo 200.

Las simulaciones que se presentan estan en distintos tiempo, con el fin de que se pueda apreciar el cambio en el tiempo y espacio.

Ahora presentaremos las simulaciones de la bifurcación de Turing-Hopf, mediante el método de Runge-Kutta.

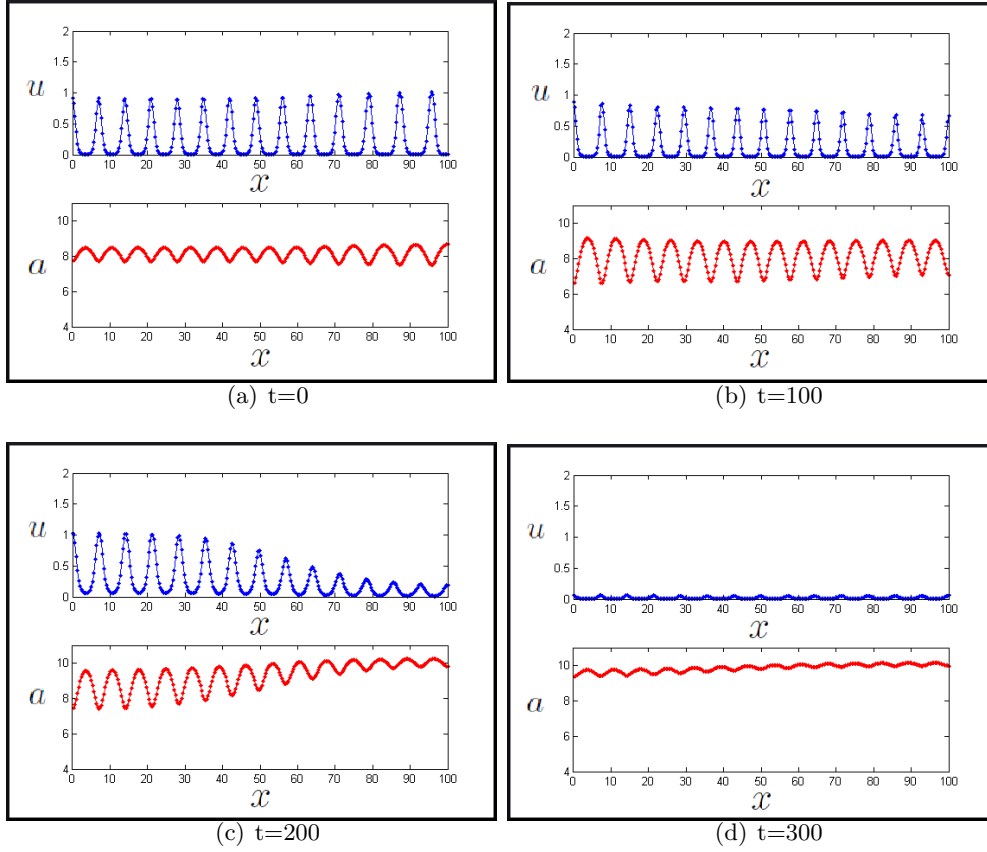


Figura 3.9: Soluciones a diferentes tiempo del sistema (3.5), con parámetros $r_u = 1.067$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$, $d = 10$ y con condiciones iniciales la solución que se muestra en la gráfica 3.7 b). En la figura (a) se presenta la condición inicial la cual es el patrón de Turing, en la figura (b) la solución del sistema (3.5) en el tiempo $t = 100$, en la figura (c) la solución del sistema (3.5) en el tiempo $t = 200$ y en la figura (d) la solución del sistema (3.5) en el tiempo $t = 300$.

En las figuras de 3.9, tomamos como condición inicial el patrón de Turing. Mientras que el tiempo va transcurriendo las soluciones como se muestran en las figuras 3.9 (b), (c) y (d) los chipotes comienzan a crecer y disminuir mientras que al mismo tiempo están oscilando. La componente u un rango de $(0.0, 1.5)$ y en el caso de la componente a en el rango de $(6.0, 10.0)$.

Tomaremos la figura de la condición inicial de 3.9, con el fin de apreciar un fenómeno que ocurre. Además tomaremos dos puntos en el espacio, tal como se muestra en la figura 3.10.

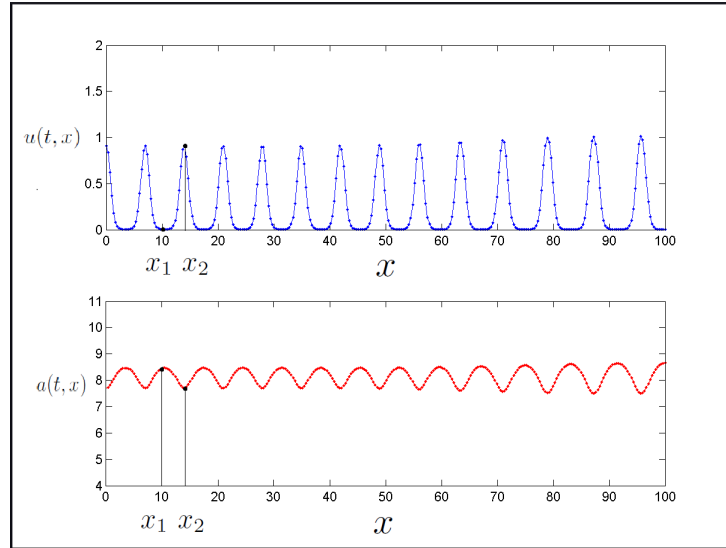


Figura 3.10: Condición inicial para el patrón de Turing-Hopf, con parámetros $r_u = 1$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$, $d = 40$. Está condición es el patrón de Turing de las simulaciones del sistema (3.5).

Observemos que la condición inicial 3.10, el patrón de Turing no es periódico. Ya que es posible ver que las oscilaciones en la izquierda, tiene mayor amplitud que las oscilaciones en la derecha.

En la figura 3.9 (b), podemos apreciar que las oscilaciones son de mayor amplitud en la izquierda que en la derecha. Este efecto se sigue conservando en la figura 3.9 (c), pero con un mayor rango de oscilación.

Por lo tanto, se observa en las siguientes figuras que la solución a diferentes tiempos no tiene por que mostrar regularidad.

De aquí observamos los siguientes fenómenos.

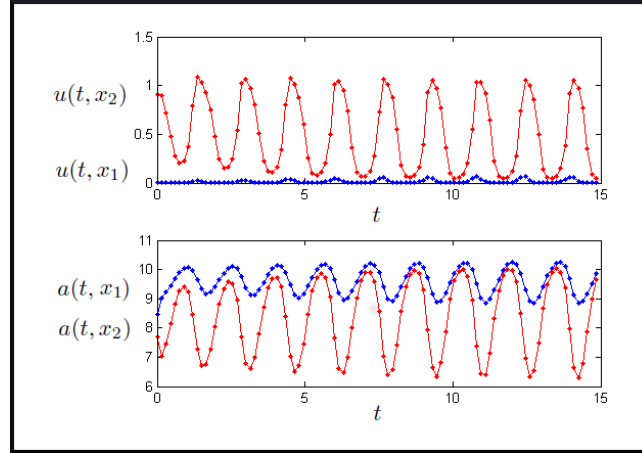


Figura 3.11: soluciones de u y a para el valor de x_1 y x_2 fijos en el espacio.

De la figura 3.11, vemos que en general la solución $u(t, x_1)$, donde x_1 es el valor donde $u(0, x_1)$ tiene un valle, sigue un patrón oscilatorio en el tiempo con una amplitud con rango $(0, 0.2)$.

Mientras que si $u(t, x_2)$ corresponde a una cresta, la solución oscila con una amplitud mayor, con un rango entre $(0, 1.2)$.

En el caso de la solución $a(t, x_1)$, x_1 es el valor donde $a(0, x_1)$ tiene una cresta, observándose que la amplitud de oscilación tiene un rango $(9, 10)$ aproximadamente. Mientras que la solución $a(t, x_2)$, en la cual x_2 corresponde un valle, la solución oscila con una mayor amplitud, con rango $(6.5, 9.5)$.

En la siguiente figura 3.12, presentamos el espacio fase del sistema 3.5 en presencia de la bifurcación de Turing-Hopf, para el valor $x = 50$ en el dominio del espacio.

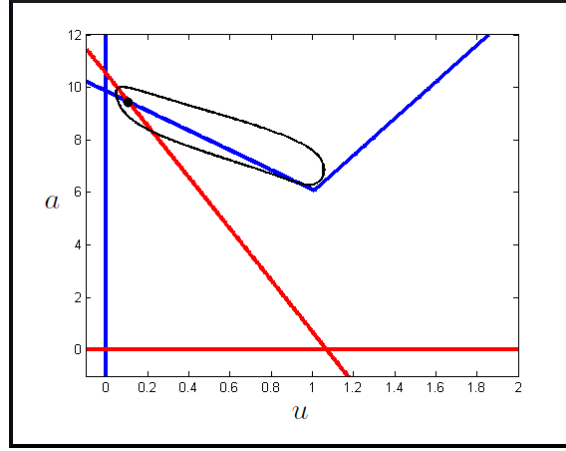


Figura 3.12: Gráfica del campo vectorial del sistema (3.5). $u(t, 50)$ contra $a(t, 50)$. Con parámetros $r_u = 1.067$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$, $d = 10$.

De la figura 3.12, podemos observar el espacio fase para la posición fija $x = 50$. Como condición inicial tomamos a $(u(0, 50), a(0, 50))$ y se puede visualizar que mientras más pasa el tiempo, la solución converge a una órbita cerrada.

Esto fue hecho pensando que el ciclo límite solo esta contenido en la dinámica de $f(u, a)$ para el caso $a \geq a^*$. Este ciclo límite puede observarse en la figura 3.13.

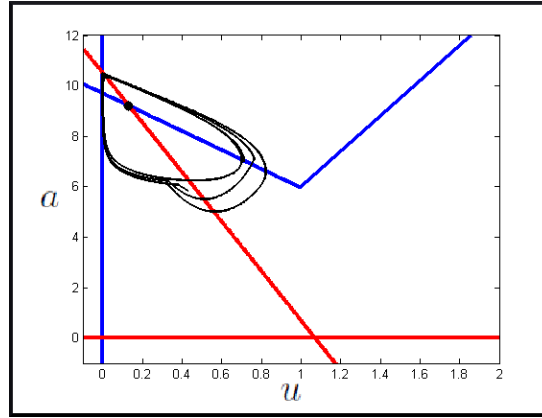


Figura 3.13: Gráfica del campo vectorial del sistema (3.5). $u(t, 50)$ contra $a(t, 50)$. Con parámetros $r_u = 1.05$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.7$, $d = 10$.

Ahora presentaremos las simulaciones de la bifurcación de Turing-Hopf, cuando el ciclo límite toma en las dos dinámicas de la función $f(u, a)$.

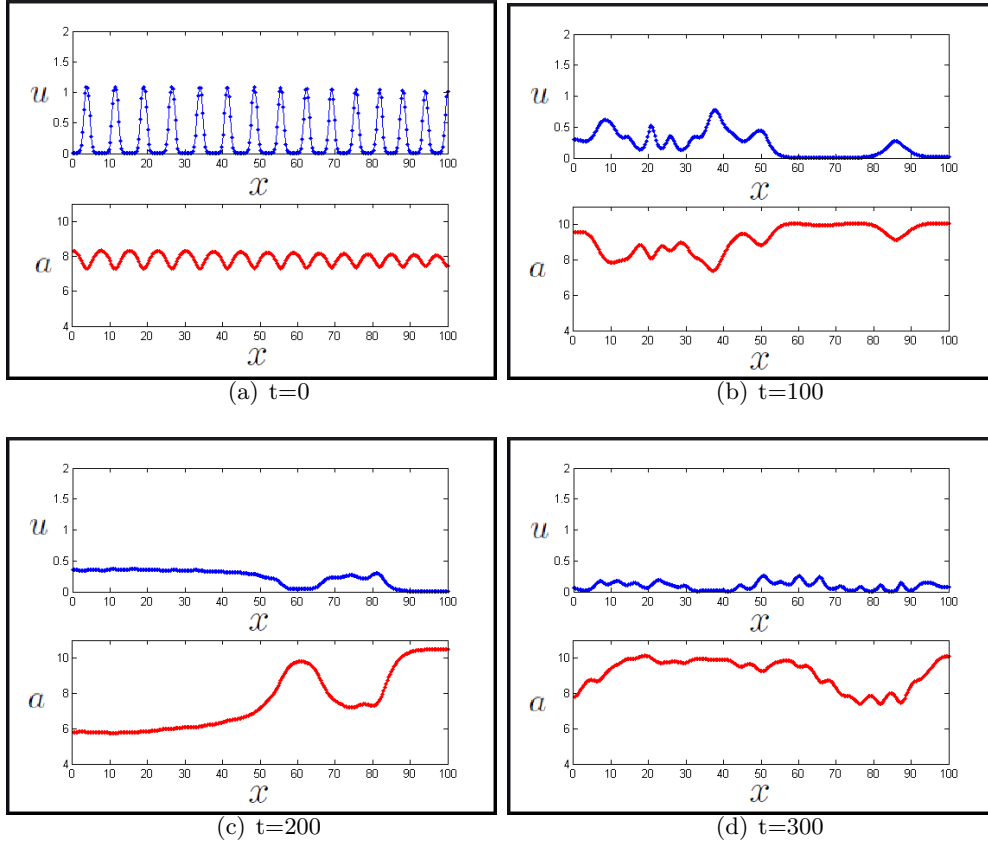


Figura 3.14: Soluciones a diferentes tiempo del sistema (3.5), con parámetros $r_u = 1.05$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.7$, $d = 10$ y con condiciones iniciales la solución que se muestra en la gráfica 3.7 b). En la figura (a) se presenta la condición inicial la cual es el patrón de Turing para los valores de parámetros dados, en la figura (b) la solución del sistema (3.5) en el tiempo $t = 100$, en la figura (c) la solución del sistema (3.5) en el tiempo $t = 200$ y en la figura (d) la solución del sistema (3.5) en el tiempo $t = 300$.

Como en las gráficas de 3.14, las componentes toman valores en ambas dinámicas, esto provoca que haya perturbaciones distintas que en el caso de las gráficas de 3.9. Las perturbaciones se conservan cuando la dinámica esta en $a \geq a^*$, cuando las soluciones cruzan el valor crítico a^* , los patrones se rompen.

CAPÍTULO 4

Simulaciones en dos dimensiones

Ahora consideraremos el caso bidimensional, para ello estableceremos un dominio cuadrado $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$. En este caso veremos en que pueden cambiar las condiciones de Turing, ya que las requerimos para las condiciones de Turing-Hopf. Entonces consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}u_t &= \gamma f(u, v) + \Delta u \\v_t &= \gamma g(u, v) + d\Delta v\end{aligned}\tag{4.1}$$

con condiciones inicial $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$, $v(x, y, 0) = v_0(x, y)$ y condiciones de frontera $u_x = u_y = 0$ y $v_x = v_y = 0$ para (x, y) en $\partial\Omega$. Al igual que en el caso de una dimensión, queremos que el sistema (4.1) en ausencia de difusión tenga un punto de equilibrio (u_0, v_0) estable, con $u_0, v_0 > 0$. Entonces necesitamos que $\text{tr}(A) < 0$ y $\det(A) > 0$, donde A es la matriz de Jacobi evaluada en el punto de equilibrio, en ausencia de difusión.

Además volvamos a considerar la traslación

$$w = \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}.\tag{4.2}$$

El sistema (4.1) se convierte en

$$w_t = \gamma Aw + D\Delta w, \text{ donde } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\tag{4.3}$$

como es un sistema lineal, propondremos una solución de la forma $w(x, y, t) = T(t)W(x, y)$, donde $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sustituyendo en (4.3) obtenemos

$$T'(t)W(x, y) = \gamma AT(t)W(x, y) + D\Delta T(t)W(x, y).$$

También supongamos que $W(x, y) = X(x)Y(y)$, entonces

$$T'(t)X(x)Y(y) = \gamma AT(t)X(x)Y(y) + D\Delta T(t)X(x)Y(y).$$

Para resolver el sistema anterior, restringimos a $W(x, y)$ a que cumpla

$$\Delta W(x, y) = -k^2 W(x, y) \quad (4.4)$$

con la condición de frontera $w_x(x, y, t) = w_y(x, y, t) = 0$ para todo (x, y) en $\partial\Omega$. Sustituyendo $W(x, y) = X(x)Y(y)$ en (4.4) obtenemos

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -k^2 X(x)Y(y) \quad (4.5)$$

colocando términos que dependen de la misma variable en un lado de la igualdad tenemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 - \frac{Y''(y)}{Y(y)}. \quad (4.6)$$

Esto solo se puede si cada lado de la igualdad es constante, es decir, podemos tener a $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, donde

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \text{ y } \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2. \quad (4.7)$$

Estas ecuaciones diferenciales ordinarias tienen por solución general

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \sin(k_x x) + A_2 \cos(k_x x) \\ Y(y) &= B_1 \sin(k_y y) + B_2 \cos(k_y y) \end{aligned}$$

Mediante la condiciones de frontera de cero flujo, tenemos

$$X'(x) = 0 \text{ si } x = 0 \text{ o } x = L_x$$

lo cual nos dice que

$$k_x A_1 \cos(k_x x) - k_x A_2 \sin(k_x x) = 0 \text{ para } x = 0 \text{ o } x = L_x.$$

Entonces si $x = 0$ tenemos $k_x A_1 = 0$, lo que implica que $A_1 = 0$. Por otro lado, si $x = L_x$, entonces $-k_x A_2 \sin(k_x L_x) = 0$. Para no tener la solución trivial elegiremos $A_2 \neq 0$, por lo tanto, $k_x = \frac{n\pi}{L_x}$, para todo \mathbb{Z} . Teniendo por solución $X_{k_x} = A_2 \cos(k_x x)$, cada X_{k_x} es solución de (4.7). Para el caso de la función $Y(y)$, los cálculos son iguales y obtenemos $Y_{k_y}(y) = B_2 \cos(k_y y)$ con $k_y = \frac{m\pi}{L_y}$ para todo m en \mathbb{Z} .

Como resultado obtenemos la solución

$$W(x, y) = A_2 B_2 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \quad (4.8)$$

Ahora, al sustituir la ecuación (4.5) en la ecuación (4.4), tenemos

$$T'(t)X(x)Y(y) = \gamma AT(t)X(x)Y(y) - k^2 DT(t)X(x)Y(y)$$

cancelando las funciones $X(x)$ y $Y(y)$ llegamos a

$$T'(t) = \gamma AT(t) - k^2 DT(t)$$

simplificando la expresión tenemos la ecuación diferencial

$$T'(t) = [\gamma A - k^2 D]T(t)$$

la función T es de la forma $T(t) = V_{k^2} e^{\lambda(k^2)t}$. Llegando a que la solución general para el caso de dos dimensiones es

$$w(x, y, t) \approx \sum_{m,n} C_{m,n} \cos(k_x x) \cos(k_y y). \quad (4.9)$$

En el caso bidimensional la constante k satisface las condiciones $k_{min}^2 < k^2 < k_{max}^2$, es decir, el valor de k en dos dimensiones es válido para las condiciones de la bifurcación de Turing.

A continuación mostraremos las simulaciones para la bifurcación de Turing y de Turing-Hopf en dos dimensiones para el sistema (3.5).

4.1 Simulación: Bifurcación Turing dos dimensiones

En esta sección presentamos la simulación de la bifurcación de Turing en dos dimensiones. Para la cual, mediante la información que se obtuvo se propuso tomar el mismo conjunto de parámetros, que en el caso de una dimensión. Ya que como se pudo apreciar en el análisis de las condiciones de Turing en dos dimensiones, solo el número de onda sufre un cambio y todas las condiciones de Turing quedan sin cambios.

Además que el número de onda en esta ocasión estará conformado de la siguiente manera $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, entonces elegimos los valores de $k_x = 0.5$ y $k_y = 0.5$ y formamos la condición inicial $u_0 = u_3 + 0.03 \cos(0.5x) \cos(0.5y)$, $a_0 = a_3 + 0.03 \cos(0.5x) \cos(0.5y)$.

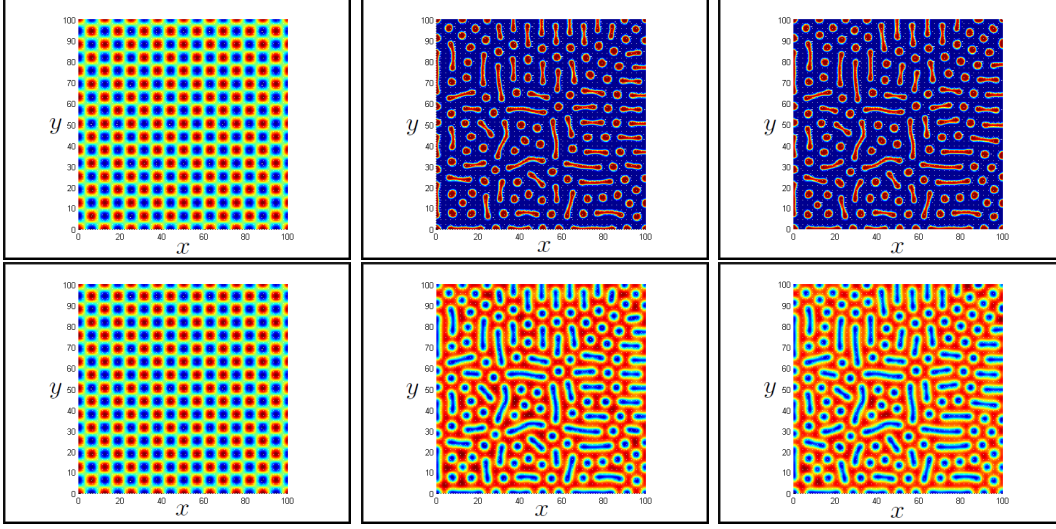


Figura 4.1: Soluciones a diferentes tiempo del sistema (3.5) en dos dimensiones, con parámetros $r_u = 1$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$, $d = 40$. Con condición inicial $u_0 = u_3 + 0.03\cos(0.5x)\cos(0.5y)$, $a_0 = a_3 + 0.03\cos(0.5x)\cos(0.5y)$.

En la figuras 4.1 podemos apreciar que los depredadores y las presas comienzan a difundirse en el medio, y al mismo tiempo se puede apreciar que donde estan los depredadores, las presas tienen una menor densidad de población. La condición inicial en dos dimensiones converge a un patrón similar al de una dimensión. Es decir, los chipotes convergen a unos con mayor amplitud.

4.2 Simulación: Bifurcación Turing-Hopf dos dimensiones

En esta sección presentamos la simulación de la bifurcación de Turing-Hopf en dos dimensiones. Para la cual, mediante la información que se obtuvo en las simulaciones de Turing en dos dimensiones, es decir, en está ocasión tomaremos como condición inicial los datos obtenidos en la figura 4.1.

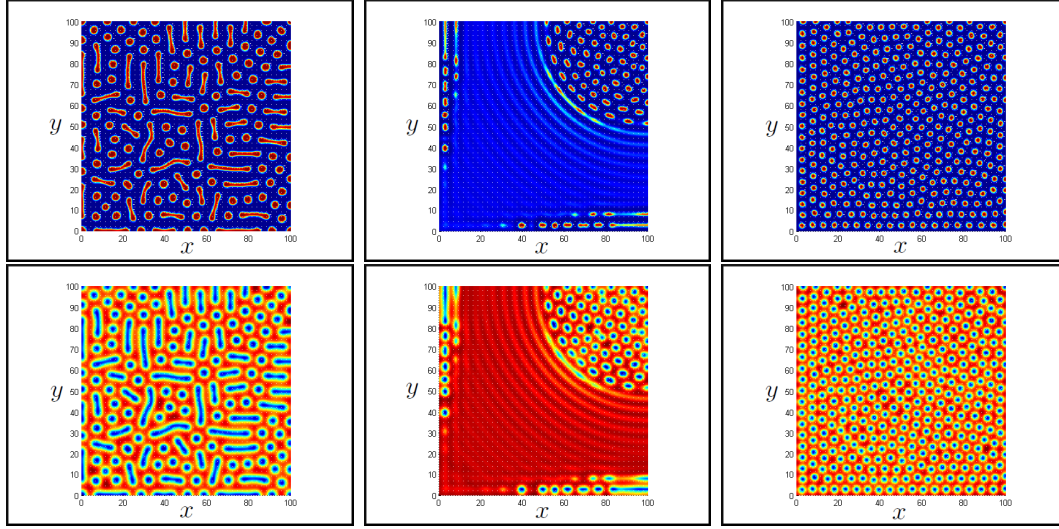


Figura 4.2: Soluciones a diferentes tiempo del sistema (3.5) en dos dimensiones, con parámetros $r_u = 1.067$, $k_1 = 3.75$, $k_2 = 7$, $\eta_u = 1$, $\gamma_a = 4.6$, $k_a = 10.5$, $\delta_a = 4.3$, $\beta_u = 9.85$, $d = 10$. Con condición inicial 4.1 (c).

Como se puede observar en la figura 4.2, la solución para u y a comienzan a oscilar, como fue cuando se hicieron las simulaciones en una dimensión. También se puede apreciar que tanto las presas como los depredadores se esparcen en el medio, donde se puede encontrar mayor concentración poblacional en las secciones de color rojo.

Las simulaciones hechas en este capítulo, solo son para poder apreciar ambos patrones, tanto Turing como Turing-Hopf en dos dimensiones. Las cuales nos indicaron que con un conjunto apropiado de valores en los parámetros pueden replicarse ambos efectos en dos dimensiones.

Conclusiones y Discusiones.

En este trabajo se ha hecho, en su primera parte, una presentación de los conceptos más importantes para que ocurra la bifurcación de Turing-Hopf. En los cuales intervienen el análisis de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales del tipo de reacción-difusión.

En el capítulo 2, se estudió un modelo de presa-depredador, en el cual interviene un término de depredación, distinto a la población de depredadores. El modelo presentó muchas propiedades cualitativas interesantes desde el punto de vista de la teoría de bifurcaciones. Se hizo un estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio, utilizando el teorema de Sotomayor y se presentaron los diagramas de bifurcación utilizando el programa AUTO07p. También se presentó un teorema en el cual se demostró algunos tipos de sistemas de reacción-difusión no presentan la bifurcación de Turing.

En el capítulo 3, se estudió un modelo de presa-depredador, en el cual los depredadores dependen del número de presas que hay para poder existir y reproducirse. El modelo no presentó la riqueza de dinámicas obtenidas con el modelo estudiado en el Capítulo 2. Se hizo un estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio, utilizando el teorema de Sotomayor y se presentó el diagrama de bifurcación utilizando el programa AUTO07p. Se analizó el sistema de reacción-difusión y se dieron las condiciones para que ocurra la bifurcación de Turing, y después, las condiciones para que ocurra la bifurcación de Turing-Hopf. Se presentaron simulaciones de la bifurcación de Turing y Turing-Hopf.

Finalmente en el capítulo 4, se presentaron las condiciones generales para la bifurcación de Turing y Turing-Hopf en dos dimensiones. También se presentan simulaciones para ambas bifurcaciones.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Weiming Wang, Lei Zhang, Yakui Xue, Zhen Jin, Spatiotemporal pattern formation of Beddington-DeAngelis-type predator-prey model, arXiv:0801.0797v1 [q-bio.PE], 2013.
- [2] Blanco J.A., Modelos ecológicos: descripción, explicación y predicción, Asociación Española de Ecología Terrestre, DOI: 10.7818/ECOS.2013.22-3.01
- [3] Polo V., Modelos matemáticos en ecología: aplicación al dilema halcón vs. paloma, Asociación Española de Ecología Terrestre, DOI 10.7818/ECOS.2013.22-3.02.
- [4] Dilao Rui, Turing instabilities and patterns near a Hopf bifurcation, Applied Mathematics and Computation, DOI:10.1016/j.amc.2004.06.036, 2004.
- [5] Díaz-Rodrigues Luiz A., Mistro Diomar C., Petrovskii Sergei, Pattern Formation, Long-Term Transients, and the Turing-Hopf Bifurcation in a Space and Time-Discrete Predator-Prey System, Society for Mathematical Biology, DOI 10.1007/s11538-010-9593-5, 2010.
- [6] Peña-Pellicer B. (2002), Inestabilidades de Turing en Sistemas de Reacción-Difusión, Tesis de Doctorado, DPTO. Física y Matemática aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Navarra.
- [7] Chaidez-Félix Jesús M. (2010), Formación de patrones mediante el mecanismo de Turing. Tesis de Licenciatura, Departamento de Matemáticas, Unison.
- [8] Rovinsky A., Menzinger M. (1992), Interaction of Turing and Hopf bifurcations in chemical systems, Department of Chemistry, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada, PACS number(s): 05.70.-a, 47.20.Ky, 82.20.-w.
- [9] Alonso S., Mígduez D. G., Sagués F. (2008), Differential susceptibility to noise of mixed Turing and Hopf modes in a photosensitive chemical medium, EPL A Letters Journal Exploring the Frontiers of Physics, doi: 10.1209/0295-5075/81/30006.
- [10] Strogatz Steven H., Nonlinear Dynamics and Chaos, Perseus Books 1994.
- [11] Edelstein-Keshet L., Mathematical models in biology, SIAM 2005.
- [12] Ledesma-Durán A. (2012), Patrones de Turing en Sistemas Biológicos. Tesis de Maestría, División de Ciencias Básicas e ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.

- [13] Vanegas J., Landinez N., Garzón D., Análisis de la Inestabilidad de Turing en Modelos Biológicos, Universidad de Colombia, Dyna 2009 76(158).
- [14] Murray J.D., Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications, Third Edition, Springer.
- [15] Castillo Jorge A., Sánchez Faustino, Padilla Pablo, A Turing-Hopf Bifurcation Scenario for Pattern Formation on Growing Domains, Society for Mathematical Biology, Bull Math Biol (2016) 78:1410-1449, DOI 10.1007/s11538-016-0189-6.
- [16] Rodríguez-Ricard M., On Turing-Hopf Inestabilities in Reaction-Diffusion Systems, World Scientific, (2008) Biophys. Rev. Lett. 2008.03:257-274.
- [17] Tzou J.C., Matkowsky B.J., Volpert V.A., Interaction of Turing and Hopf modes in the superdiffusive Brusselator model, Elsevier, (2009) doi:10.1016/j.aml.2009.01.054.
- [18] Ling Wang, Hongyong Zhao, Hopf bifurcation and Turing instability of 2-D Lengyel-Epstein system with reaction-diffusion terms, Elsevier, (2013) DOI: 10.1016/j.amc.2013.03.071.
- [19] Yongli Song, Xingfu Zou, Spatiotemporal dynamics in a diffusive ratio-dependent predator-prey model near a Hopf-Turing bifurcation point, Elsevier, (2014) DOI: 10.1016/j.camwa.2014.04.015.
- [20] Jia-Fang Zhang, Wan-Tong Li, Xiang-Ping Yan, Hopf bifurcation and Turing instability in spatial homogeneous and inhomogeneous predator-prey models, Elsevier, (2011) DOI: 10.1016/j.amc.2011.06.071.
- [21] Xin Li, Weihua Jiang, Hopf bifurcation and Turing instability in the reaction-diffusion Holling-Tanner predator-prey model, IMA Journal of Applied Mathematics, (2011) doi:10.1093/imamat/hxr050.
- [22] Tlidi M., Haelterman M., Robust Hopf-Turing mixed-mode in optical frequency conversion systems, Elsevier, (1998) DOI: 10.1016/s0375-9601(97)00948-1.
- [23] Baca-Carrasco D. (2009), Análisis y Control de Bifurcaciones Estacionarias. Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Unison.
- [24] AUTO-07P :Continuation and Bifurcation software for ordinary differential equations, Concordia University, Montreal, Canada, 2012.
- [25] Olmos-Liceaga D., Villavicencio-Pulido G., Acuña-Zegarra M. A., Diffusion as a strategy for survival in an invasion predator-prey model, Natural Resource Modeling, Artículo Aceptado para publicación (2017).
- [26] Chapra Steven C., Canale Raymond P., Métodos numéricos para ingenieros, sexta edición, McGrawHill, 2011.

APÉNDICE A

Diferencias Finitas

Para resolver una ecuación diferencial parcial se utilizan distintos métodos, no se resuelve de manera sencilla o fácil. Lo que haremos es implementar métodos para convertirla a una ecuación diferencial ordinaria [26]. Primero utilizaremos diferencias finitas para transformar las ecuaciones diferenciales parcial a ordinarias. Para ello, tomemos la ecuación

$$u_t = Du_{xx} \quad (\text{A.1})$$

también consideraremos que el dominio es $X_L \leq x \leq X_R$, y la condición inicial está dada por

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad X_L \leq x \leq X_R. \quad (\text{A.2})$$

Las condiciones de frontera son dadas en los extremos X_L y X_R para $t > 0$. Hay varias condiciones de fronteras, las cuales son, de tipo Dirichlet, Neumann o Robin. Las condiciones de frontera de tipo Dirichlet son aquellas que la función u toma valores en los puntos extremos del dominio:

$$u(X_L, t) = u_L(t), \quad u(X_R, t) = u_R(t), \quad (\text{A.3})$$

donde u_L y u_R son funciones solo del tiempo. Las condiciones de frontera de tipo Neumann son aquellas que la derivada de la función u respecto a x , toma valores en los puntos extremos del dominio:

$$u_x(X_L, t) = u_L(t), \quad u_x(X_R, t) = u_R(t), \quad (\text{A.4})$$

las condiciones de frontera de tipo Robin son una combinación lineal de la función u y la función u_x , la cual toma valores en los puntos extremos del dominio:

$$au(X_L, t) + bu_x(X_L, t) = u_L(t), \quad cu(X_R, t) + du_x(X_R, t) = u_R(t), \quad (\text{A.5})$$

donde a , b , c y d son constantes fijas, las cuales se determinan por las propiedades de lo que se esté modelando. Para nuestros fines el tipo de condición de frontera será de

tipo Neumann, así que, usaremos diferencias finitas solo en condiciones de frontera de tipo Neumann.

Ahora discretizaremos el espacio de la siguiente manera. Dados los valores X_L y X_R , escogeremos un número N , de tal manera que obtengamos el tamaño entre cada valor de la malla como

$$h = \frac{X_R - X_L}{N}$$

así que nuestra malla del espacio contiene los puntos localizados en

$$X_j = X_L + jh, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Comenzando por el punto $x_0 = X_L$ y finalizando con $x_N = X_R$. Ahora representaremos la solución del problema como el vector $U(t)$ de tamaño $N + 1$, cuyas componentes

$$U_j(t) \approx u(x_j, t), \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Falta por ver como se discretizara el lapaciano de la ecuación para ellos utilizaremos diferencias finitas centras y laterales.

Diferencia finita hacia adelante

$$u'_j(t) = \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h}.$$

Diferencia finita hacia atras

$$u'_j(t) = \frac{u_j(t) - u_{j-1}(t)}{h}.$$

Diferencia finita centrada

$$u'_j(t) = \frac{u_{j+1}(t) - u_{j-1}(t)}{2h}.$$

Hay una última diferencia finita que se utiliza habitualmente para derivadas de orden superior. La cual se concentra en utilizar diferencias finitas centradas, teniendo como partida para la segunda derivada la discretización de la primera derivada. Tomaremos la siguiente diferencia finita

$$u''_j(t) = \frac{u_{j-1}(t) - 2 * u_j(t) + u_{j+1}(t)}{h^2}.$$

Primero discretizaremos la condición de frontera en el punto X_L , utilizaremos diferencias centradas, así que

$$u_L(t) \approx \frac{U_1(t) - U_{-1}(t)}{2h}$$

con

$$U_{-1}(t) = U_1(t) - 2hu_L(t)$$

obteniendo para el punto X_L la siguiente ecuación para la primera componente del laplaciano

$$u_{xx}(X_L, t) \approx \frac{U_1(t) - 2U_0(t) + U_{-1}(t)}{h^2} = \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2} - \frac{2u_L(t)}{h}.$$

Similarmente para el caso en el punto extremo X_R

$$u_R(t) \approx \frac{U_{N+1}(t) - U_{N-1}(t)}{2h}$$

con

$$U_{N+1}(t) = U_{N-1}(t) - 2hu_R(t)$$

por lo tanto

$$u_{xx}(X_R, t) \approx \frac{U_{N+1}(t) - 2U_N(t) + U_{N-1}(t)}{h^2} = \frac{2U_{N-1}(t) - 2U_N(t)}{h^2} + \frac{2u_R(t)}{h}.$$

Con todo lo que acabamos de obtener hemos aproximado a u_{xx} , con las condiciones de frontera de Neumann en el dominio $[X_L, X_R]$. Teniendo por sistema el siguiente

$$U'(t) = MU + R.$$

Donde M es una matriz de $(N+1) \times (N+1)$ tridiagonal y R es un vector de $N+1$ componentes

$$M = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, R(t) = \frac{2}{h} \begin{pmatrix} -u_L(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_R(t) \end{pmatrix}$$

Solo faltaría agregarle los términos de reacción para tener una discretización de un sistema de reacción-difusión pero eso es fácil de hacer, además que esta teoría será utilizada para el sistema (3.1).

APÉNDICE B

Método Runge-Kutta

Mediante diferentes métodos podemos resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Los métodos de Runge-Kutta alcanzan la exactitud de un enfoque de la serie de Taylor sin requerir el cálculo de derivadas más altas [26]. Existen muchas variaciones, pero todas pueden expresarse en la forma generalizada de la ecuación:

$$x_{i+1} = x_i + \phi(t_i, x_i, h)h.$$

Donde $\phi(t_i, x_i, h)$ se denomina función de incremento, que puede interpretarse como una pendiente representativa sobre el intervalo. La función de incremento puede escribirse en forma general como

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n.$$

Donde los a son constantes y las k son

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i) \\ k_2 &= f(t_i + p_1h, x_i + q_{11}k_1h) \\ k_3 &= f(t_i + p_2h, x_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(t_i + p_{n-1}h, x_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h). \end{aligned}$$

Donde los p y q son constantes. Observe que las k son relaciones de recurrencia. Es decir, k_1 aparece en la ecuación para k_2 , que aparece en la ecuación para k_3 , y así sucesivamente.

Pueden idearse diversos tipos de métodos de Runge-Kutta empleando diferentes números de términos en la función de incremento como se especifica en n. Obsérvese que el método RK de primer orden con $n = 1$ es, de hecho, el método de Euler.

Por ejemplo, determinaremos las constantes para el caso $n = 2$, la ecuación para este caso es

$$x_{i+1} = x_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \quad (\text{B.1})$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i) \\ k_2 &= f(t_i + p_1 h, x_i + q_{11} k_1 h) \end{aligned}$$

los valores de a_1 , a_2 , p_1 y q_{11} se evalúan ajustando la ecuación (B.1) igual a una expansión de la serie de Taylor al término de segundo orden. Haciendo esto, derivaremos tres ecuaciones para evaluar las cuatro constantes desconocidas.

Estos valores son determinados de la siguiente manera, expandimos la ecuación (B.1) a segundo orden mediante la serie de Taylor como

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i)h + \frac{f'(t_i, x_i)}{2!}h^2 \quad (\text{B.2})$$

donde $f'(t_i, x_i)$ es determinada por la regla de la cadena:

$$f'(t_i, x_i) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t}. \quad (\text{B.3})$$

Sustituyendo la ecuación (B.3) en la ecuación (B.2) obtenemos

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i)h + \left(\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{h^2}{2!} \quad (\text{B.4})$$

los métodos de Runge-Kutta utilizan manipulaciones algebraicas para resolver los valores de a_1 , a_2 , p_1 y q_{11} que hacen que las ecuaciones (B.1) y (B.4) sean equivalente. Para ello, expandimos en la serie de Taylor para dos variables hasta los términos de orden 1.

$$f(t_i + p_1 h, x_i + q_{11} k_1 h) = f(t_i, x_i) + p_1 h \frac{\partial f}{\partial t} + q_{11} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{B.5})$$

Esta ecuación la sustituimos junto con la ecuación para k_1 en la ecuación (B.1) para dar

$$x_{i+1} = x_i + a_1 h f(t_i, x_i) + a_2 h f(t_i, x_i) + a_2 p_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial t} + a_2 q_{11} h^2 f(t_i, x_i) \frac{\partial f}{\partial x} + \mathcal{O}(h^3) \quad (\text{B.6})$$

agrupando los términos en base a h , obtenemos

$$x_{i+1} = x_i + [a_1 f(t_i, x_i) + a_2 f(t_i, x_i)]h + [a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial t} + a_2 q_{11} f(t_i, x_i) \frac{\partial f}{\partial x}]h^2 + \mathcal{O}(h^3). \quad (\text{B.7})$$

Ahora, comparando términos similares en las ecuaciones (B.3) y (B.7), determinamos que para que las dos ecuaciones sean equivalentes. Las tres ecuaciones son

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1, \\ a_2 p_1 &= \frac{1}{2}, \\ a_2 q_{11} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones simultáneas contienen las cuatro constantes desconocidas. Debido a que hay una más desconocida que el número de ecuaciones, no existe un conjunto único de constantes que satisfagan las ecuaciones. Sin embargo, asumiendo un valor para una de las constantes, podemos determinar las otras tres. En consecuencia, hay una familia de métodos de segundo orden en lugar de una sola versión.