V. POTENCIA

El interés en conocer el valor de la potencia en un circuito radica en que, a veces es necesario conocer que potencia que suministra un generador, la potencia con que emite una radiodifusora, que potencia es consumida por los aparatos eléctricos, etc.

La potencia en un circuito eléctrico puede ser generada o consumida por el mismo.

V.1 POTENCIA INSTANTANEA

La potencia instantánea de cualquier circuito eléctrico está dada por la expresión siguiente.

$$P = VI \;\; [Watts] \qquad (1)$$

En un circuito **puramente resistivo**; la potencia que puede ser determinada o calculada se conoce como **potencia media**, **real** o **efectiva**. Las expresiones que se van a emplear en este caso se obtienen de la manera siguiente. Se sabe que por ley de Ohm la corriente y el voltaje se determinan por las ecuaciones (2) y (3) respectivamente.

$$I = \frac{V}{R} \qquad (2)$$

$$V = IR \qquad (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1), se obtienen las siguientes expresiones.

$$P_m = I(IR) = I^2 R$$

Entonces.

$$P_m = I^2 R \;\; [Watts] \qquad (4)$$

Además.

$$P_m = V\left(\frac{V}{R}\right) = \frac{V^2}{R}$$

Entonces.

$$P_m = \frac{V^2}{R} \;\; [Watts] \qquad (5)$$

La potencia en un circuito resistivo cuando los valores del voltaje y la corriente son senoidales, es la siguiente.

$$P_m = V_{\max} I_{\max} \; sen^2 \; \omega t \qquad (6)$$

Entonces.

$$P_m = \frac{V_{\max} I_{\max}}{2}\left(1 - \cos 2\omega t\right) \qquad (6')$$

V.2 POTENCIA MEDIA

Por definición el valor medio de una función está dado por la siguiente ecuación

$$f_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \qquad (7)$$

Aplicando esta expresión a una función periódica de voltaje y corriente se puede obtener el valor de la potencia media para una red puramente resistiva siendo esta de la siguiente manera.

$$Pm = \frac{1}{T}\int_0^T V_{\max} I_{\max}\ sen^2 \omega t\ dt\ = \frac{V_{\max} I_{\max}}{T}\left[\left(\frac{1}{\omega}\right)\left(\frac{\omega t}{2} - sen\ \omega t \cos \omega t\right)\right]_0^T$$

$$Pm = \frac{V_{\max} I_{\max}}{T}\left[\left(\frac{1}{\omega}\right)\left(\frac{\omega T}{2} - \frac{\omega 0}{2} - sen\ \omega T \cos \omega T - sen\ \omega 0 \cos \omega 0\right)\right]_0^T$$

$$Pm = \frac{V_{\max} I_{\max}}{T}\left[\left(\frac{1}{\omega}\right)\left(\frac{\omega T}{2} - sen\ \omega T \cos \omega T - sen\ 0^o \cos 0^o\right)\right]_0^T \qquad (8)$$

Como $\omega = 2\pi f$; se puede sustituir por grados quedando $\omega = 360^0 f$. Se tiene que:

$$sen\ \omega T = sen(2\pi f)T = sen(360) fT = 0\ .$$

Además.

$$sen\ 0^0 = 0$$

La expresión queda.

$$Pm = \frac{V_{\max} I_{\max}}{2}\ [Watts] \qquad (9)$$

V.3 POTENCIA COMPLEJA DE UNCIRCUITO ELÉCTRICO

Si se considera que el **voltaje** y la **corriente** en un circuito eléctrico son funciones senoidales dadas por las expresiones siguientes.

$$i(t) = i_{\max}\ sen(\omega t + \beta) \qquad (10)$$

$$v(t) = V_{\max}\ sen(\omega t + \alpha) \qquad (11)$$

Los complejos correspondientes de ambas funciones son los siguientes.

$$i(t) = i_{\max} K\angle\beta = |I|\angle\beta \quad donde \quad K = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

$$v(t) = V_{\max}\ K\angle\alpha = |V|\angle\alpha \quad donde \quad K = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{13}$$

Se sabe que por ley de Ohm la corriente y el voltaje cuando se tiene un circuito con impedancias se determinan por las ecuaciones (14) y (15) respectivamente.

$$I = \frac{V}{Z} \tag{14}$$

$$V = IZ \tag{15}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) la ecuación (14) se obtiene.

$$P_C = VI = V\left(\frac{V}{Z}\right) = \frac{|V|^2}{Z}$$

Por lo tanto.

$$P_{C_K} = \frac{|V_K|^2}{Z_K}[Volts - Ampers] \tag{16}$$

Donde.

$$Z = R \pm iX\ [\Omega] = |Z|\angle\theta[\Omega]$$

Entonces la ecuación (16) de la potencia compleja queda.

$$P_{C_K} = \frac{|V_K|^2}{|Z_K|\angle\theta_K} = \frac{|V_K|^2}{|Z_K|}\angle-\theta_K\ [Volts - Ampers] \tag{17}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación (1) la ecuación (15) se obtiene.

$$P_C = VI = I(IZ) = |I|^2 Z$$

Por lo tanto.

$$P_C = |I|^2 Z \tag{18}$$

Donde.

$$Z = R \pm iX\ [\Omega] = |Z|\angle\theta[\Omega]$$

Entonces la ecuación (18) de la potencia compleja queda.

$$P_{C_K} = |I_K|^2 |Z_K|\angle\theta_K \tag{19}$$

Se observa de la ecuación (19) que el ángulo θ_K es positivo y de acuerdo a la ecuación (17) este ángulo es negativo, por lo que en la ecuación (18) para que esto se cumpla, debe ser.

$$P_C = |I|^2 \overline{Z} \qquad (20)$$

Por lo tanto, la ecuación de la potencia compleja empleando a la corriente queda de la siguiente manera.

$$P_{C_K} = |I_K|^2 \overline{Z_K} \; [Volts - Ampers] \qquad (21)$$

Entonces.

$$P_{C_K} = |I_K|^2 |Z_K| \angle -\theta_K \; [Volts - Ampers] \qquad (22)$$

Empleando ahora ley de Ohm para determinar el valor de impedancia de un circuito eléctrico, considerando a la corriente de la ecuación (12) y el voltaje de la ecuación (13); se tiene.

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{|V|\angle\alpha}{|I|\angle\beta} = \frac{|V|}{|I|}\angle\alpha - \beta = |Z|\angle\alpha - \beta \qquad (23)$$

Para simplificar la ecuación (23) se puede considerar que: $\theta = \angle\alpha - \beta$; por lo que la ecuación (23) queda de la manera siguiente.

$$Z = |Z|\angle\theta \qquad (24)$$

Sustituyendo en la ecuación (1) de la potencia instantánea los valores del voltaje de la ecuación (13) y la corriente de la ecuación (12); lo que se obtiene es el valor de la potencia compleja en un circuito eléctrico, siendo esta.

$$P_C = VI = (|V|\angle\alpha)(|I|\angle\beta) = |V||I|\angle\alpha + \beta$$

Por lo tanto.

$$Pc = |V||I|\angle\alpha + \beta \qquad (25)$$

Se observa que el ángulo obtenido es: $\angle\alpha + \beta$, pero de las ecuaciones (17) y (22) se establece que el ángulo de potencia es el ángulo de la impedancia; para que esto se cumpla el producto apropiado para el cálculo de la potencia compleja debe ser.

$$P_C = V\,\overline{I} \qquad (26)$$

Por lo que se define a la potencia compleja, como el producto del voltaje por el conjugado de la corriente, entonces.

$$Pc = V\bar{I} = (|V|\angle\alpha)(|I|\angle-\beta) = |V||I|\angle\alpha-\beta \qquad (27)$$

Lo que se obtuvo es la expresión de la potencia en forma polar, transformándola a su manera rectangular.

$$Pc = |V||I|\cos(\alpha-\beta) + i|V||I|sen(\alpha-\beta) \qquad (28)$$

La potencia compleja, por ser un número complejo puede expresarse con parte real y parte imaginaria esto es.

$$Pc = P_m \pm iP_R\ [Volt - Ampers] \qquad (29)$$

Donde:

$$Pc = Potencia\ Compleja\ [Volts - Ampers]$$
$$P_m = Potencia\ Media, \mathrm{Re}al\ o\ Activa\ [Watts]$$
$$P_R = Potencia\ \mathrm{Re}activa\ [VARS]$$

V.4 POTENCIA APARENTE

A la magnitud de la potencia compleja se le conoce como potencia aparente y está determinada por la siguiente expresión.

$$P_A = |Pc| = \sqrt{P_m{}^2 + P_R{}^2}\ [VA] \qquad (30)$$

V.5 FACTOR DE POTENCIA

El factor de potencia en un circuito eléctrico con impedancia este definido como el coseno del ángulo de la impedancia (θ). El factor de potencia puede ser de atraso o de adelanto según sea, el valor de la reactancia que tenga la impedancia del circuito o de la potencia reactiva que se obtenga. Este se obtiene de la siguiente manera:

$$fp = \cos\theta \qquad (31)$$

$$fp = \cos(\alpha - \beta) \qquad (32)$$

V.6 TRIANGULO DE POTENCIAS

La potencia **activa**, **reactiva** y **aparente** pueden ser representadas geométricamente mediante los lados de un triángulo, llamado triángulo de potencias.

Si se tiene una carga inductiva el triángulo de potencias se muestra en la figura 1.

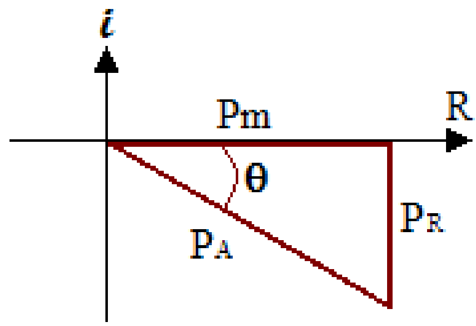

Figura 1. Triangulo de potencias para una carga inductiva.

Si se tiene una carga capacitiva el triángulo de potencias se muestra en la figura 2.

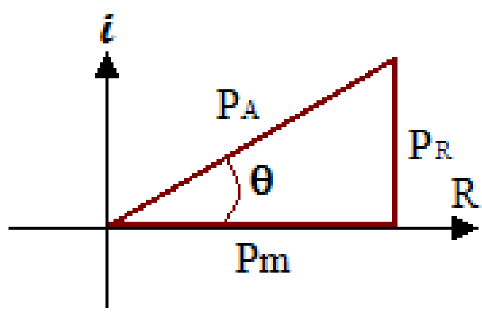

Figura 1. Triangulo de potencias para una carga capacitiva.

V.7 TEOREMA DE MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

Se considera que se tiene máxima transferencia de potencia cuando la corriente que circula a través de un circuito hacia una carga es máxima por lo que el voltaje obtenido también será máximo.

Para determinar el valor de la carga que nos permita obtener máxima transferencia de potencia nos vamos a auxiliar del circuito equivalente de Thévenin debido a que cualquier circuito eléctrico en sus terminales de salida presenta un voltaje y una impedancia de acoplamiento se van a presentar dos casos para el valor de la carga los cuales son:

a) Cuando la carga de un circuito eléctrico es una impedancia como se muestra en la figura 3.

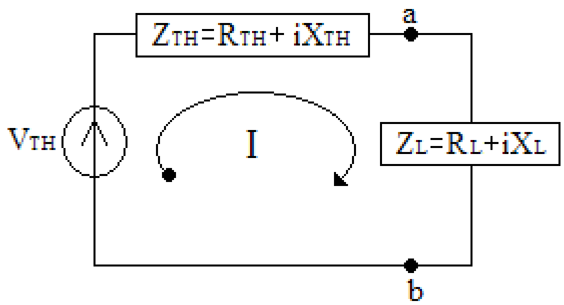

Figura 3. Circuito eléctrico con una impedancia como carga

Del circuito se observa que.

$$I = \frac{V_{TH}}{Z_{TH} + Z_L}$$

Donde.

$$Z_{TH} = R_{TH} + iX_{TH}$$
$$Z_L = R_L + iX_L$$

Sustituyendo se tiene.

$$I = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + iX_{TH} + R_L + iX_L} = \frac{V_{TH}}{(R_{TH} + R_L) + i(X_{TH} + X_L)}$$

Para que la corriente del circuito sea máxima la reactancia del circuito debe ser cero; entonces.

$$X_{TH} + X_L = 0$$

Por lo tanto:

$$X_L = -X_{TH}$$

(33)

La corriente máxima será.

$$I_{\max} = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L}$$

Entonces.

$$P_{\max} = |I_{\max}|^2 R_L \quad donde \quad |I_{\max}|^2 = \frac{|V_{TH}|^2}{(R_{TH} + R_L)^2}$$

La ecuación de la potencia queda:

$$P_{\max} = \left[\frac{|V_{TH}|^2}{(R_{TH} + R_L)^2} \right] R_L$$

Para obtener un valor máximo de R_L que de la máxima potencia; se va a derivar la expresión de la potencia con respecto de R_L e igualándola cero.

$$\frac{d}{dR_L}\left[\frac{|V_{TH}|^2}{(R_{TH}+R_L)^2}\right]R_L = 0$$

Entonces.

$$|V_{TH}|^2\left\{\frac{(R_{TH}+R_L)^2 - R_L\left[2(R_{TH}+R_L)\right]}{(R_{TH}+R_L)^4}\right\} = 0$$

Despejando al numerador.

$$(R_{TH}+R_L)^2 - R_L\left[2(R_{TH}+R_L)\right] = 0$$

Desarrollando.

$$R_{TH}{}^2 + 2R_{TH}R_L + R_L{}^2 - 2R_{TH}R_L - 2R_L{}^2 = 0$$

$$R_{TH}{}^2 - R_L{}^2 = 0$$

$$R_{TH}{}^2 = R_L{}^2$$

$$R_{TH} = \sqrt{R_L{}^2}^{\,2}$$

Por lo tanto.

$$R_{TH} = R_L \qquad (34)$$

De las ecuaciones (33) y (34) se puede establecer.

$$Z_L = R_{TH} - iX_{TH}$$

Por lo tanto.

$$Z_L = \overline{Z_{TH}}\,[\Omega, Ohms] \qquad (35)$$

De la ecuación (35), se puede establecer que para obtener máxima transferencia de potencia cuando la carga es una impedancia, que el valor de esta debe ser el conjugado que la impedancia de Thévenin.

b) cuando la carga es puramente resistiva como se muestra en la figura 4.

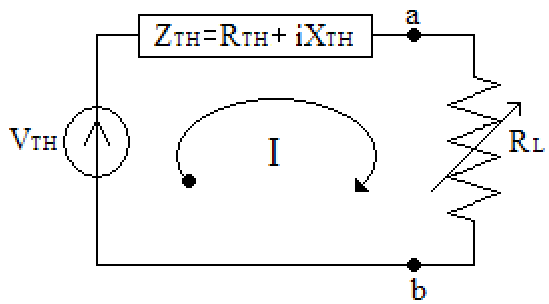

Figura 4. Circuito eléctrico con una resistencia como carga

Para determinar el valor de la corriente del circuito.

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_{TH}}{Z_{TH} + R_L}$$

Donde.

$$Z_{TH} = R_{TH} + iX_{TH}$$

Sustituyendo en la expresión de la corriente se tiene.

$$I = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + iX_{TH} + R_L}$$

La potencia en la carga será.

$$P = |I|^2 R_L = \left|\frac{V_{TH}}{R_{TH} + iX_{TH} + R_L}\right|^2 (R_L) = \frac{|V_{TH}|^2 R_L}{(R_L + R_{TH})^2 + X_{TH}{}^2}$$

Entonces.

$$P = \frac{|V_{TH}|^2 R_L}{(R_L + R_{TH})^2 + X_{TH}{}^2}$$

Para determinar el valor de R_L con el cual se obtenga máxima transferencia de potencia, se va a derivar a la potencia con respecto a R_L y se va a igualar a cero. Esto es.

$$\frac{dP}{dR_L} = 0$$

Esto es:

$$\frac{d}{dR_L}\left[\frac{|V_{TH}|^2 R_L}{(R_L + R_{TH})^2 + X_{TH}{}^2}\right] = 0$$

$$|V_{TH}|^2 \left\{ \frac{(R_L + R_{TH})^2 + X_{TH}{}^2 - R_L 2(R_L + R_{TH})}{\left[(R_L + R_{TH})^2 + X_{TH}{}^2\right]^2} \right\} = 0$$

Despejando el numerador se tiene.

$$(R_L + R_{TH})^2 + X_{TH}{}^2 - R_L 2(R_L + R_{TH}) = 0$$

Desarrollando.

$$R_L{}^2 + 2R_L R_{TH} + R_{TH}{}^2 + X_{TH}{}^2 - 2R_L{}^2 - 2R_L R_{TH} = 0$$

$$R_{TH}{}^2 + X_{TH}{}^2 - R_L{}^2 = 0$$

$$R_L{}^2 = R_{TH}{}^2 + X_{TH}{}^2$$

$$R_L = \sqrt{R_{TH}{}^2 + X_{TH}{}^2}$$

Por lo tanto.

$$R_L = |Z_{TH}| \ [\Omega, Ohms] \tag{36}$$

De la ecuación (36) se puede establecer que para obtener máxima transferencia de potencia cuando la carga es una resistencia, que el valor de esta es la magnitud de la impedancia de Thévenin.