VII. Multifrecuencia

El objetivo de este tema es aplicar un sistema por medio del cual se puedan resolver circuitos excitados con fuentes de corriente o voltaje senoidales o con funciones no senoidales llamadas funciones periódicas. Las funciones periódicas pueden representarse como la suma de un número infinito de funciones senoidales cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. A la suma de estas funciones senoidales de diferente frecuencia que son armónicas de una frecuencia fundamental se le llama Serie de Fourier.

Existen dos tipos de funciones importantes, utilizadas para alimentar circuitos, las cuales son:

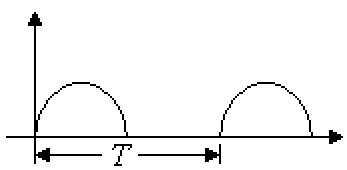
VII.1 Funciones periódicas.

Son todas aquellas funciones que se repiten en un intervalo de tiempo (t) y satisfacen las siguientes expresiones.

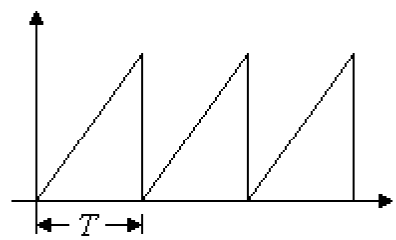
$$f(t) = f(t+T)$$

$$f(t) = f(t+nT)$$

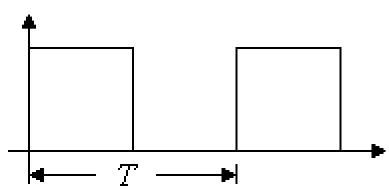
Por ejemplo:



Media Onda Rectificada

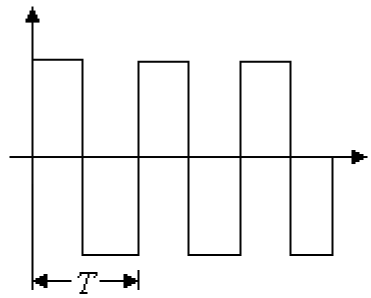


Diente de Sierra



Onda Cuadrada

Existen funciones periódicas que no pueden ser representadas como una función sencilla, sin embargo, esto puede lograrse por medio de intervalos de tiempo. Como la siguiente función.

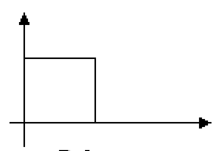


$$f(t) = \begin{cases} f(t) = V & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ f(t) = -V & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

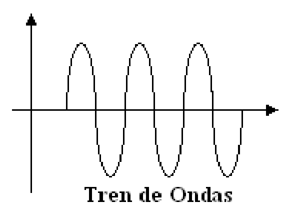
VII.2 Funciones no periódicas.

Son todas aquellas funciones que varían en un intervalo de tiempo y son cero para cualquier otro valor.

Por ejemplo:



Pulso



Tren de Ondas

Las funciones periódicas no senoidales pueden ser representadas por una Serie de Fourier; para que la función se pueda representar como una suma de senoides; es decir, una Serie de Fourier, es estrictamente necesario que cumplan con las condiciones de Dirichlet las cuales son:

1) Que la función tenga un valor medio finito en un periodo de tiempo T
2) Que la función tenga un numero finito de máximos positivos y negativos en un periodo de tiempo T
3) Que la función en caso de ser discontinua tenga un numero finito de discontinuidades en un periodo de tiempo T

Si la función cumple con las condiciones anteriores, entonces puede ser representada como una suma de senoides a diferente frecuencia, es decir, una serie de Fourier.

Para una función de tiempo $f(t)$ que es periódica y satisface las condiciones de Dirichlet la serie de Fourier será la siguiente manera:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + \ldots + a_n \cos(n\omega t) + b_1 sen(\omega t) + b_2 sen(2\omega t) + \ldots + b_n sen(n\omega t)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_0^n (a_n \cos n\omega t + b_n sen\, n\omega t)$$

en donde cada coeficiente de la serie de Fourier se determina a partir de las expresiones siguientes:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

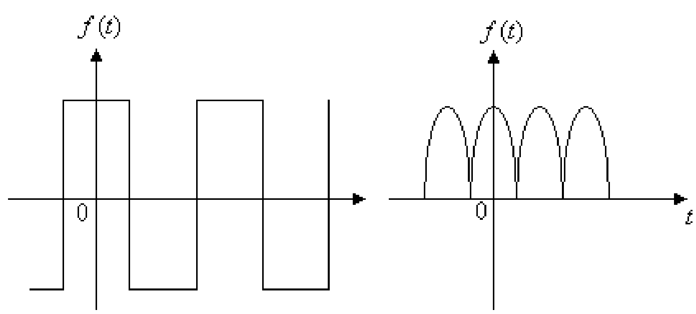
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) sen\, n\omega t\, dt$$

Si se conoce la simetría de la forma de onda de las funciones periódicas, se reduce el cálculo de los coeficientes de la Serie de Fourier. Los tipos de simetría que se reconocen fácilmente son: la simetría de funciones pares, impares y de media onda.

VII.3 SIMETRIA PAR

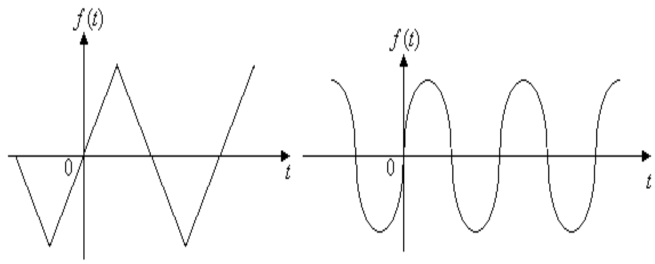
Una función $f(t)$ se dice que tiene simetría par, si cumple con la condición siguiente: $f(t) = f(-t)$. Este tipo de simetría se reconoce fácilmente, porque en su grafica hay simetría con respecto al eje $f(t)$. Si la función es par, la Serie de Fourier contiene solo un término constante y términos cósenos, en este tipo de funciones $b_n = 0$.



Ejemplo de Funciones Tipo Par

SIMETRIA IMPAR

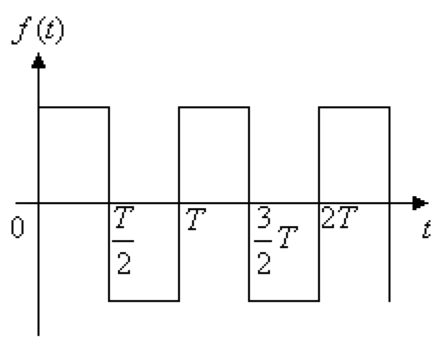
Una función $f(t)$ se dice que tiene simetría impar, si cumple con la condición siguiente: $f(t) = -f(-t)$. Este tipo de simetría se reconoce gráficamente, porque hay simetría con respecto al origen. Si la función es impar, la Serie de Fourier contiene solo términos senoidales, en este tipo de funciones $a_0 = 0$ y $a_n = 0$.



Ejemplo de Funciones Tipo Impar

VII.4 SIMETRIA DE MEDIA ONDA

Una función $f(t)$ se dice que tiene simetría impar, si cumple con la condición siguiente: $f(t) = -f(t + T/2)$. Este tipo de simetría se reconoce gráficamente, porque cada medio ciclo es igual a los medios ciclos adyacentes, los medios ciclos positivos y negativos, son idénticos. Si la función es de media onda, la Serie de Fourier contiene únicamente armónicos impares, esta serie contiene términos seno y coseno a menos que la función $f(t)$ sea par o impar, en cualquier caso $a_0 = 0$ y $b_n = 0$ para $n = 2,4,6,8,10,....$



Ejemplo de Funciones de Media Onda

VII.5 VALOR EFICAZ DE VOLTAJE Y CORRIENTE.

El valor eficaz, efectivo o RMS de cualquier función está determinado por la siguiente expresión.

$$f(t) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$$

para una función senoidal al aplicar la expresión anterior se encontró que el valor efectivo era:

$$f(t)_e = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Donde "A" es la amplitud de la señal senoidal o también se le conoce como voltaje pico de la señal senoidal.

Para una función periódica, el voltaje efectivo, eficaz o RMS es:

$$Ve = \sqrt{V_0^2 + \frac{V_1^2}{2} + \frac{V_2^2}{2} + ... + \frac{V_n^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad Ve = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2}\ [Volts] \qquad (1)$$

El valor efectivo, eficaz o RMS para la corriente de una función periódica es:

$$Ie = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}\ [Ampers] \qquad (2)$$

VII.6 POTENCIA MEDIA.

La potencia media consumida por un circuito eléctrico, o suministrada por el generador es: $P = VI$; se tiene:

$$P = \left[V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n sen(n\omega t + \alpha_n)\right]\left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n sen(n\omega t + \beta_n)\right]$$

Como el valor medio de una función es:

$$f(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

La potencia media del circuito será:

$$P_M = \frac{1}{T}\int_0^T \left[V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n sen(n\omega t + \alpha_n)\right]\left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n sen(n\omega t + \beta_n)\right]$$

$$\therefore \quad P_M = V_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\alpha_n - \beta_n) \qquad (3)$$