VI. RESONANCIA

DEPENDENCIA DE LA FRECUENCIA

La impedancia de elementos generales tipo serie como los que se muestran en la figura 1, está dada por las ecuaciones (1) y (2).

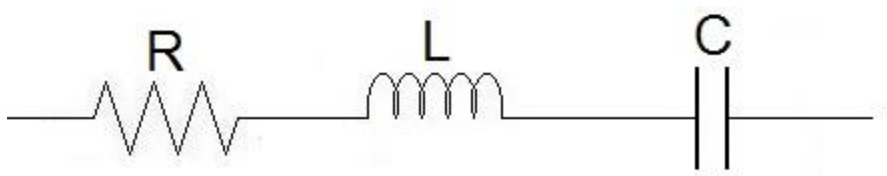


Figura 1. Elementos generales tipo serie.

$$Z_{KL} = R_L + i\left(\omega L_K - \frac{1}{\omega C_K}\right) \qquad si \qquad k = l \tag{1}$$

$$Z_{KL} = i\omega L_{KL} \quad si \quad k \neq l \quad (cuando\ hay\ acoplamientos) \tag{2}$$

La admitancia de elementos generales tipo paralelo como los que se muestran en la figura 2, está dada por las ecuaciones (3) y (4).

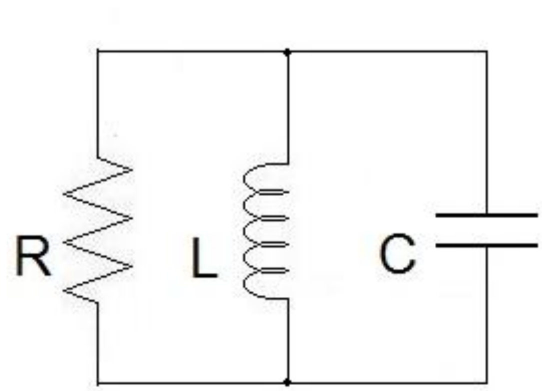


Figura 2. Elementos generales tipo paralelo.

$$Y_{KL} = G_K + i\left(\omega C_K - \frac{\Gamma_K}{\omega}\right) \qquad si \qquad k = l \tag{3}$$

$$Y_{KL} = -\frac{\Gamma_{KL}}{\omega} \quad si \quad k \neq l \quad (cuando\ hay\ acoplamientos) \tag{4}$$

Las frecuencias que se pueden manejar en este caso son dos.

1. ω = frecuencia angular [rad/s]
2. f = frecuencia lineal [Hz]

Se debe considerar.

$$\omega = 2\pi \times f \quad \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Sí varía la frecuencia lineal de un circuito varia también la frecuencia angular; cuando esto sucede varia el valor de la impedancia, por lo que también varía la corriente y con estos variará el voltaje, además de la potencia del circuito.

Por lo tanto, se puede establecer que los valores de impedancia, admitancia, corriente, voltaje y potencia dependerán de la variación de la frecuencia.

Con respecto a la dependencia de la frecuencia en un circuito el fenómeno de la resonancia y antirresonancia es lo más importante y se refiere a los valores máximos y mínimos de la respuesta del circuito para ciertas frecuencias.

El concepto de dependencia de la frecuencia se puede escribir como una razón de polinomios como se muestra a continuación:

$$I = f(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \tag{5}$$

Si los polinomios de la ecuación (5) son racionales y tienen raíces, se pueden descomponer en una serie de binomios multiplicado por una constante, es decir:

$$Q(\omega) = k_1(\omega - a) \tag{6}$$

$$Q(\omega) = a_0(\omega - a_1)(\omega - a_2)\bullet\bullet\bullet(\omega - a_n) \tag{6´}$$

$$P(\omega) = k_2(\omega - b) \tag{7}$$

$$P(\omega) = b_0(\omega - b_1)(\omega - b_2)\bullet\bullet\bullet(\omega - b_m) \tag{7´}$$

Sustituyendo a las ecuaciones (6´) y (7´) en la ecuación (1) se tiene lo siguiente:

$$I(\omega) = \frac{a_0(\omega - a_1)(\omega - a_2)\bullet\bullet\bullet(\omega - a_n)}{b_0(\omega - b_1)(\omega - b_2)\bullet\bullet\bullet(\omega - b_m)} \tag{8}$$

De la ecuación (8) se tiene que:

- a y b son las raíces de los polinomios del numerador y denominador
- m y n son las potencias de las frecuencias de los polinomios

Si en la ecuación (8) se sustituye el valor de ω por cualquier valor de "a" (raíz del numerador), el polinomio Q se hace cero, esto es: $si\ \omega = a_1$, entonces.

$$I = \frac{a_0(a_1 - a_1)(a_1 - a_2)\bullet\bullet\bullet(a_1 - a_n)}{b_0(a_1 - b_1)(a_1 - b_2)\bullet\bullet\bullet(a_1 - b_m)} = \frac{0}{b_0(a_1 - b_1)(a_1 - b_2)\bullet\bullet\bullet(a_1 - b_m)} = 0$$

Por lo tanto, a las constantes a_n (raíces del numerador) se les llama ***ceros de la función***.

Si ahora en la ecuación (8) se sustituye a ω por cualquier valor de "b" (raíz del denominador), el polinomio P se hace cero, esto es: $si\, \omega = b_1$, entonces.

$$I = \frac{a_0(b_1 - a_1)(b_1 - a_2)\bullet\bullet\bullet(b_1 - a_n)}{b_0(b_1 - b_1)(b_1 - b_2)\bullet\bullet\bullet(b_1 - b_m)} = \frac{a_0(b_1 - a_1)(b_1 - a_2)\bullet\bullet\bullet(b_1 - a_n)}{0} = \infty$$

Por lo tanto, a las constantes b_m (raíces del denominador) se les llama ***polos de la función***.

Resumiendo, se tiene:

- a_0 y b_0.- son constantes diferentes de cero
- a_n .- son los ceros de la función
- b_m .- son los polos de la función
- m y n.- son los exponentes de las frecuencias de los polinomios, es decir, son los grados a los cuales están elevadas las frecuencias de los polinomios

Las frecuencias que hacen cero a la función (corriente, voltaje, potencia, impedancia y admitancia), reciben el nombre de frecuencias angulares singulares extremas de antirresonancia; esto debido a que con ello se obtiene un valor mínimo de la función.

A las frecuencias que indeterminan la función; es decir, dan como resultado un valor máximo de la función se les llama: frecuencias angulares singulares extremas de resonancia.

Es importante el estudio de los circuitos resonantes debido a que tienen una gran gama de aplicaciones en la electrónica, se les encuentra en circuitos sintonizadores, sistemas de alarmas, radares, etc. Los circuitos resonantes más importantes son:

a) Circuitos RLC serie
b) Circuitos RLC paralelo
c) Circuitos RLC serie – paralelo

VI.1 Circuitos serie RLC

Considerando el circuito mostrado en la figura 3 para su análisis.

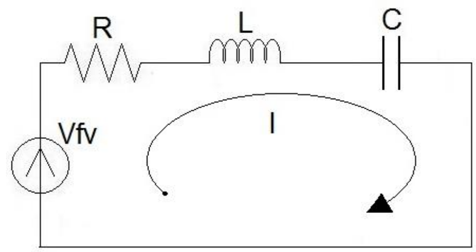


Figura 3. Circuito serie RLC.

Por ser un circuito serie se va a determinar o a calcular un valor de corriente máximo. La corriente en este caso se determina por la ecuación (9).

$$I = \frac{V_{fv}}{Z} \tag{9}$$

Entonces.

$$I = \frac{V_{fv}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \tag{9´}$$

Como es de interés que la corriente sea máxima; se va a determinar el valor de la frecuencia a la cual está trabajando el circuito ya que esta modifica el valor de la impedancia que se podría tener. Para obtener el valor de la frecuencia de resonancia $[\omega_0]$. Se va a aplicar el método de la derivada. Es decir; se va a calcular el valor de las raíces reales de la ecuación para establecer si se tiene un valor máximo o mínimo de la función. En este caso se desea obtener una raíz que de un valor máximo a la ecuación; entonces.

$$\frac{d|I|^2}{d\omega} = 0 \tag{10}$$

Determinando primero el valor de la magnitud de la corriente de la ecuación (9´) para sustituirlo en la ecuación (10).

$$|I| = \frac{|V_{fv}|}{\sqrt{\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\left[R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}} = \frac{|V_{fv}|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Elevando al cuadrado el valor de la magnitud de la corriente, se obtiene la ecuación (11).

$$|I|^2 = \frac{|V_{fv}|^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{11}$$

Sustituyendo el valor de la ecuación (11) en la ecuación (10) se tiene.

$$\frac{d}{d\omega}\left[\frac{|V_{fv}|^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\right] = 0 \tag{12}$$

Realizando la derivada:

$$-\frac{|V_{fv}|^2 2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right)}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^2} = 0 \tag{13}$$

Como se desea conocer el valor de ω que haga máxima a la función de la corriente; esta se va a despejar de la ecuación (13); se observa de la misma que si el denominador es igual a **cero** la función se indetermina, por lo tanto, lo que se puede igualar a cero será:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right) = 0 \tag{14}$$

De la ecuación (14) se observa que se tienen dos posibilidades de determinar el valor de ω, las cuales son:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \tag{a}$$

$$L + \frac{1}{\omega^2 C} = 0 \tag{b}$$

Como no existen valores de frecuencia imaginarios; no se toma cuenta a la expresión (b) porque daría como resultado una frecuencia imaginaria. Considerando a la ecuación (a), para despejar el valor de ω.

$$\omega^2 L - \frac{1}{C} = 0$$

Entonces.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{15}$$

Sustituyendo la ecuación (15) en la ecuación (9) para determinar si el valor de la función es máximo o mínimo, se tiene.

$$I = \frac{Vfv}{R + i\left(\dfrac{L}{\sqrt{LC}} - \dfrac{1}{\dfrac{C}{\sqrt{LC}}}\right)} \tag{16}$$

Realizando operaciones solo con lo que está dentro del paréntesis de la ecuación (16).

$$\frac{L}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{\dfrac{C}{\sqrt{LC}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{\sqrt{LC}} - \frac{\sqrt{LC}}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{LC - LC}{\left(\sqrt{LC}\right)C} = 0$$

La corriente queda.

$$I = \frac{Vfv}{R} \tag{17}$$

Como la parte imaginaria es cero resulta máximo el valor de la función corriente, la frecuencia ω corresponde a la **Frecuencia de Resonancia**, la cual se indicará como ω_0 y está dada por la ecuación (18).

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\left[\frac{rad}{s}\right] \tag{18}$$

Curva Universal de Resonancia

Si se grafica la respuesta en corriente contra frecuencia, se obtiene una curva de respuesta en función de la frecuencia, llamada ***curva universal de resonancia***. Se debe tener siempre en cuenta que no existen frecuencias negativas o imaginarias. Al realizar la gráfica; el eje x corresponderá siempre a la frecuencia mientras que el eje y será la corriente. Cuando ω es diferente de ω_0, la ecuación de la corriente está dada por la ecuación (19).

$$|I| = \frac{|Vfv|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad (19)$$

Proponiendo los valores de frecuencia angular diferentes al valor de la frecuencia de resonancia y sustituyéndolos en la ecuación (19), se obtienen las gráficas mostradas en las figuras (4) y (5).

$1°)\ \omega \langle \omega_0\ ;\ \omega L \langle \frac{1}{\omega C}$

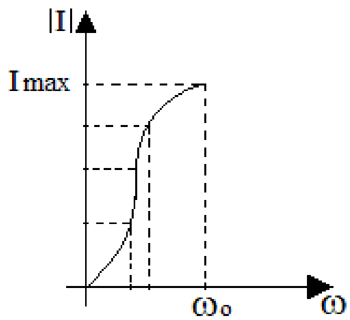


Figura 4. Frecuencias menores a la de Resonancia

$2°)\ \omega \rangle \omega_0\ ;\ \omega L \rangle \frac{1}{\omega C}$

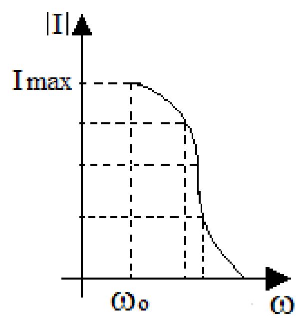


Figura 5. Frecuencias mayores a la de Resonancia

La conclusión es que, cuando ω es diferente de ω_0, la respuesta de la corriente siempre es menor, graficando estos resultados la curva tiene la forma de la mostrada en la figura 6.

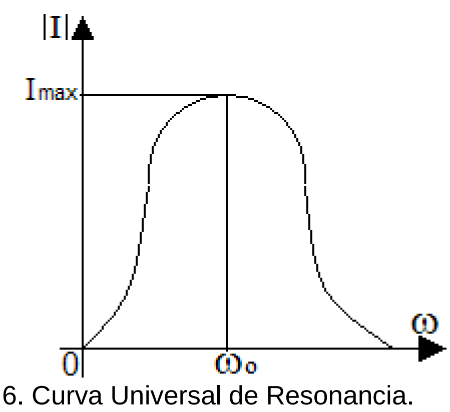


Figura 6. Curva Universal de Resonancia.

Ancho de banda

Cuando la corriente máxima $(I_{máx})$, disminuye en un 70.7% de su valor, se determinan sobre la curva de resonancia dos puntos de interés. Para este valor de corriente se traza una línea paralela al eje de la frecuencia, cortando a la curva en los puntos a y b, de estos puntos se trazan líneas perpendiculares al eje de la frecuencia, se determinan dos puntos los cuales corresponden a ω_1 y ω_2, llamadas ***frecuencias de potencia media***, esto se muestra en la figura 7.

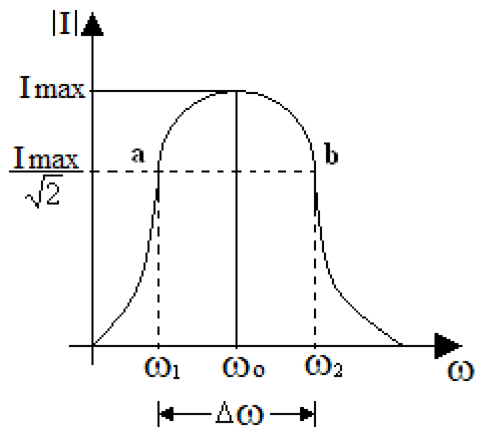


Figura 7. Grafica para determinar el valor del ancho de banda.

De la gráfica de la figura 7, se observa que el ancho de banda $(\Delta\omega)$ se puede determinar por la ecuación (20).

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \left[\frac{rad}{s}\right] \tag{20}$$

El ancho de banda también puede ser obtenido por l siguiente ecuación.

$$\Delta f = f_2 - f_1 \, [Hz] \tag{21}$$

Frecuencias de potencia media

La potencia en un circuito eléctrico está dada por: $P = I^2 Z$, si se está trabajando a frecuencia de resonancia, se aplica la ecuación (22).

$$P_{res} = I_{máx}^2 Z \tag{22}$$

En los puntos a y b la corriente tiene el valor de siguiente.

$$I = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}} \tag{23}$$

Al sustituir la ecuación (23) en la ecuación (22), se obtiene.

$$P_{ab} = \frac{Z I_{máx}^2}{2} \tag{24}$$

Se sabe que a frecuencia de resonancia $P_{res} = I_{máx}^2 Z$, al sustituir este valor en la ecuación (24), se obtiene.

$$P_{ab} = \frac{P_{res}}{2} \tag{25}$$

Se observa de la ecuación (25) que la potencia en los puntos a y b es la mitad de la potencia que existe a ω_0; por esto se le conoce como ***puntos de potencia media*** y a las frecuencias ω_1 y ω_2, se les conoce como ***frecuencias de potencia media***.

En los puntos de potencia media la corriente está dada por la ecuación (26).

$$|I_{ab}| = \frac{|V_{fv}|}{\sqrt{2} \times R} \tag{26}$$

Para cualquier valor de $\omega \neq \omega_0$ la corriente se determina por la ecuación (27).

$$|I| = \frac{|V_{fv}|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{27}$$

Como las ecuaciones (27) y (28) determinan la magnitud de la corriente, igualándolas se tiene.

$$\sqrt{2} \times R = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow 2R^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \Rightarrow R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$$

Por lo tanto, se obtiene la ecuación (28).

$$R = \omega L - \frac{1}{\omega C} \tag{28}$$

Para la ecuación (28) dependiendo del valor de la frecuencia, se presentan dos casos, que son los siguientes.

$$1) \quad Si\ \omega \langle\ \omega_0\ ; se\ tiene: \omega_1 L \langle\ \frac{1}{\omega_1 C}$$

Entonces.

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \text{-}R \tag{29}$$

Además.

$$2)\quad Si\ \omega \rangle\ \omega_0\ ;se\ tiene:\omega_2 L \rangle\ \frac{1}{\omega_2 C}$$

Se obtiene.

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R \tag{30}$$

Despejando a ω_1 de la ecuación (29).

$$\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \text{-}R\right)(\omega_1 C)$$

$$\omega_1^2 LC - 1 = \text{-}R\omega_1 C$$

Se obtiene una ecuación de segundo orden.

$$\omega_1^2 L\,\mathrm{C} + \mathrm{R}\omega_1 C - 1 = 0 \tag{31}$$

Determinando el ω_1.

$$\omega_1 = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} = -\frac{RC}{2LC} \pm \sqrt{\frac{R^2C^2}{4L^2C^2} + \frac{4LC}{4L^2C^2}}$$

Por lo tanto ω_1 se obtiene a partir de la ecuación siguiente.

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}\ \left[\frac{rad}{s}\right] \tag{32}$$

La ecuación (32) sirve para obtener el valor de ω_1 recordando que no se deben de considerar las frecuencias negativas o imaginarias.

Para determinar el valor de la frecuencia ω_2 se utiliza a la ecuación (30), obteniéndose la siguiente ecuación.

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}\ \left[\frac{rad}{s}\right] \tag{33}$$

Al sustituir los valores de las frecuencias de potencia media ω_1 y ω_2 en la ecuación (21) se tiene.

$$\Delta\omega = \left[\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \right] - \left[-\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \right] = \left(\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \right) + \left(\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \right)$$

Por lo tanto, el ancho de banda también puede obtenerse a partir de la siguiente ecuación.

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} \left[\frac{rad}{s} \right] \tag{34}$$

Angulo de fase de la corriente

A frecuencia de resonancia la magnitud de la corriente está dada por la ecuación (35).

$$|I_0| = \frac{|V_{fv}|\angle\alpha}{R} \tag{35}$$

Se observa de la ecuación (35) que el ángulo de la corriente es igual al ángulo del voltaje; si ahora se considera a una ω diferente de ω_0; la ecuación para la corriente tiene la siguiente forma.

$$|I| = \frac{|V_{fv}|\angle \propto}{|Z|} \tag{36}$$

Donde.

$$Z = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Entonces.

$$|I| = \frac{|V_{fv}|\angle \propto}{|Z|} = \frac{|V_{fv}|\angle \propto}{\left[\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \right] \left[\tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \right]}$$

Considerando que.

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \tag{37}$$

La ecuación de la corriente cuando $\omega \neq \omega_0$ se la siguiente.

$$|I| = \frac{|V_{fv}|\angle \propto}{\left[\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\right]\angle \theta} \tag{38}$$

Si se considera a $\omega \langle \omega_0$; se está haciendo referencia a la frecuencia ω_1; partiendo de la ecuación (29).

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \text{-}R$$

Se tiene que para $\omega \langle \omega_0$.

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R}\right)$$

Entonces.

$$\theta_1 = tan^{-1}\left(\frac{-R}{R}\right)$$

Por lo tanto.

$$\theta_1 = \tan^{-1}(-1) \tag{39}$$

Por lo tanto, el ángulo de fase para el punto de frecuencia media a; será de $\theta_1 = -45^o$; en este caso la corriente estará determinada por la ecuación siguiente.

$$|I| = \frac{|V_{fv}|\angle \propto +45^0}{|Z|} \begin{cases} \text{La corriente esta adelantada } 45^0 \text{ con respecto del voltaje} \\ \text{en los puntos de potencia media correspondiente a } \omega_1. \end{cases} \tag{40}$$

Si ahora se considera que $\omega \rangle \omega_0$; se está haciendo referencia a la frecuencia ω_2; empleando la ecuación (30).

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R$$

Se tiene que para $\omega \rangle \omega_0$.

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_2 L - \dfrac{1}{\omega_2 C}}{R}\right)$$

Entonces.

$$\theta_2 = tan^{-1}\left(\frac{R}{R}\right)$$

Por lo tanto.

$$\theta_2 = \tan^{-1}(1) \qquad (40)$$

Por lo tanto, el ángulo de fase para el punto de frecuencia media b ; será de $\theta_1 = 45^o$; en este caso la corriente estará determinada por la ecuación siguiente.

$$|I| = \frac{|V_{fv}|\angle \propto -45^0}{|Z|} \begin{cases} \text{La corriente esta atrazada } 45^0 \text{ con respecto del voltaje} \\ \text{en los puntos de potencia media correspondiente a } \omega_2. \end{cases} \qquad (41)$$

Factor de calidad de un circuito RLC serie

El factor de calidad se indica con la letra Q, y expresa el grado de selectividad de un circuito, y se está determinado por la ecuación (42).

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía máxima almacenada}}{\text{energía disipada por ciclo}} \qquad (42)$$

La energía máxima almacenada de un circuito serie RLC está en la bobina y se expresa por la ecuación siguiente.

$$P = \frac{I^2_{máx} L}{2} \qquad (43)$$

La energía disipada se manifiesta en la resistencia.

$$P = \frac{I^2_{máx} R}{2} \qquad (44)$$

Para obtener energía disipada por ciclo.

$$P = \left(\frac{I^2_{máx} R}{2}\right)\left(\frac{1}{f}\right) \qquad (45)$$

Al sustituir las ecuaciones (43) y (44) en la ecuación (42) se obtiene.

$$Q = 2\pi \frac{\left(\frac{I_{máx}^{2}R}{2}\right)}{\left(\frac{I_{máx}^{2}R}{2}\right)\left(\frac{1}{f}\right)} = \frac{2\pi fL}{R} = \frac{\omega L}{R} \tag{46}$$

Partiendo de la ecuación (46) a frecuencia de resonancia el factor de calidad se obtiene a partir de la siguiente ecuación.

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \tag{47}$$

Se observa de la ecuación (47) que la ecuación del factor de calidad esta en función de la ovina. Si ahora se expresa al factor de calidad en función de la capacidad del circuito, se debe considerar que.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Entonces.

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} \tag{48}$$

Sustituyendo la ecuación (48) en la ecuación (47).

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\frac{\omega_0}{\omega_0^2 C}}{R}$$

Por lo tanto:

$$Q_0 = \frac{1}{\omega_0 RC} \tag{49}$$

Si ahora se despeja a el valor de $\frac{R}{L}$ en la ecuación (47).

$$\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q_0} \tag{50}$$

Sustituyendo la ecuación (50) en la ecuación (34).

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0} \tag{51}$$

Si ahora se expresa a ω_1 y ω_2 en función de ω_0 y Q_0 se tiene.

$$\omega_1 = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q_0} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q_0^2} + 1} \right) \tag{52}$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q_0} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q_0^2} + 1} \right) \tag{53}$$

Selectividad

Es la propiedad del circuito resonante para seleccionar una banda de frecuencias deseadas; entre más pequeño sea el ancho de banda, mayor será la selectividad del circuito. La forma de la curva esta en función de los valores de RLC, las figuras 8 y 9 muestran la curva de un circuito con alta selectividad y de un circuito de baja selectividad respectivamente.

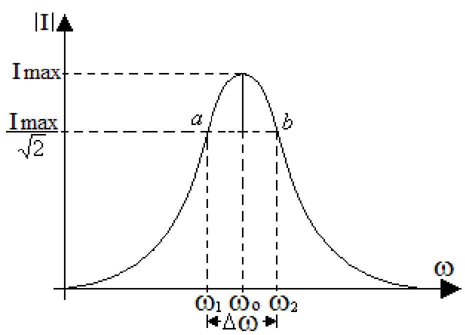


Figura 8. Circuito con alta selectividad

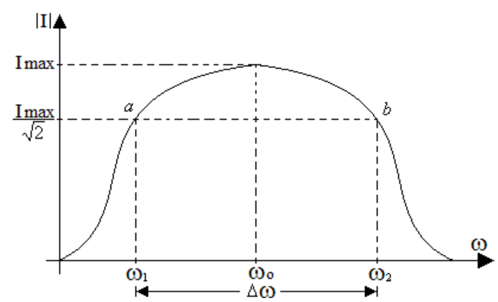


Figura 9. Circuito con baja selectividad.

VI.2 Circuito paralelo RLC

Considerando el circuito mostrado en la figura 10 para su análisis.

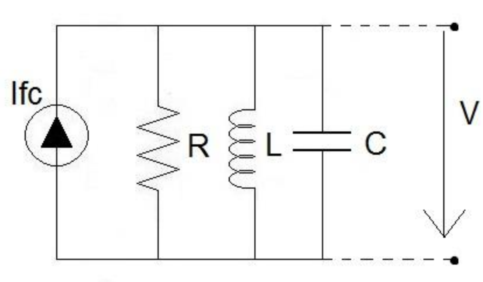


Figura 10. Circuito RLC paralelo.

Por ser un circuito paralelo se va a determinar o a calcular un valor del voltaje máximo, en este caso se determina por la ecuación (54).

$$V = \frac{I_{fc}}{Y} \tag{54}$$

Entonces.

$$V = \frac{I_{fc}}{G + i\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)} \tag{54´}$$

Como es de interés que el voltaje sea máximo; se va a determinar el valor de la frecuencia a la cual está trabajando el circuito; ya que esta modifica el valor de la admitancia que se podría tener. Para obtener el valor de la frecuencia de resonancia $[\omega_0]$ se va a aplicar el método de la derivada. Es decir; se va a calcular el valor de las raíces reales de la ecuación para establecer si se tiene un valor máximo o mínimo de la función. En este caso se desea obtener una raíz que de un valor máximo a la ecuación (54); entonces.

$$\frac{d|V|^2}{d\omega} = 0 \tag{55}$$

Determinando primero el valor de la magnitud del voltaje de la ecuación (54´) para sustituirlo en la ecuación (55).

$$|V| = \frac{|I_{fc}|}{\sqrt{\left[G + i\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)\right]\left[G - i\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)\right]}} = \frac{|I_{fc}|}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

Elevando al cuadrado el valor de la magnitud del voltaje, se obtiene la ecuación (56).

$$|V|^2 = \frac{|I_{fc}|}{G^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2} \tag{56}$$

Sustituyendo el valor de la ecuación (56) en la ecuación (55) se tiene.

$$\frac{d}{d\omega}\left[\frac{|I_{fc}|}{G^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}\right] = 0 \tag{57}$$

Realizando la derivada:

$$-\frac{\left|I_{fc}\right|^2 2\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)\left(C+\frac{1}{\omega^2 L}\right)}{\left[G^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2\right]^2}=0 \tag{58}$$

Como se desea conocer el valor de ω que haga máxima a la función del voltaje; este se va a despejar de la ecuación (58); se observa de la misma que si el denominador es igual a **cero** la función se indetermina, por lo tanto, lo que se puede igualar a cero será:

$$\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)\left(C+\frac{1}{\omega^2 L}\right)=0 \tag{59}$$

De la ecuación (59) se observa que se tienen dos posibilidades de determinar el valor de ω, las cuales son:

$$\omega C-\frac{1}{\omega L}=0 \tag{a}$$

$$C+\frac{1}{\omega^2 L}=0 \tag{b}$$

Como no existen valores de frecuencia imaginarios; no se toma cuenta a la expresión (b) porque daría como resultado una frecuencia imaginaria. Considerando a la ecuación (a), para despejar el valor de ω.

$$\omega C-\frac{1}{\omega L}=0$$

Entonces.

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{60}$$

Sustituyendo la ecuación (60) en la ecuación (54´) para determinar si el valor de la función es máximo o mínimo, se tiene.

$$I=\frac{Vfv}{R+i\left(\frac{C}{\sqrt{LC}}-\frac{1}{\frac{L}{\sqrt{LC}}}\right)} \tag{61}$$

Realizando operaciones solo con lo que está dentro del paréntesis de la ecuación (61).

$$\frac{C}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{\frac{L}{\sqrt{LC}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{\sqrt{LC}} - \frac{\sqrt{LC}}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{LC - LC}{\left(\sqrt{LC}\right)L} = 0$$

El voltaje queda.

$$V = \frac{Ifc}{R} \tag{62}$$

Como la parte imaginaria es cero resulta máximo el valor del voltaje, la frecuencia ω corresponde a la **Frecuencia de Resonancia**, la cual se indicará como ω_0 y está dada por la ecuación (62).

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\left[\frac{rad}{s}\right] \tag{63}$$

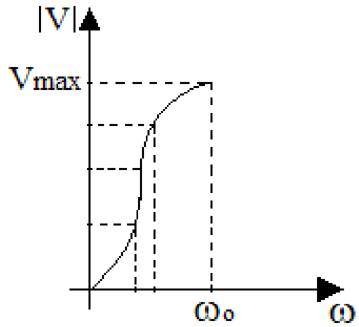
Curva Universal de Resonancia

Si se grafica la respuesta del voltaje contra la frecuencia, se obtiene una curva de respuesta en función de la frecuencia, llamada ***curva universal de resonancia***. Se debe tener siempre en cuenta que no existen frecuencias negativas o imaginarias. Al realizar la gráfica; el eje x corresponderá siempre a la frecuencia mientras que el eje y será el voltaje. Cuando ω es diferente de ω_0, la ecuación del voltaje está dada por la ecuación (64).

$$|V| = \frac{|I_{fc}|}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \tag{64}$$

Proponiendo los valores de frecuencia angular diferentes al valor de la frecuencia de resonancia y sustituyéndolos en la ecuación (64), se obtienen las gráficas mostradas en las figuras (11) y (12).

$$1°)\ \omega \langle\ \omega_0\ ;\ \omega \mathrm{L} \langle\ \frac{1}{\omega \mathrm{C}} \qquad\qquad 2°)\ \omega \rangle\ \omega_0\ ;\ \omega \mathrm{L} \rangle\ \frac{1}{\omega \mathrm{C}}$$



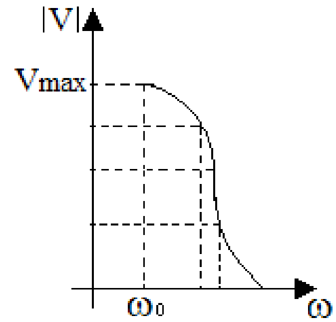


Figura 11. Frecuencias menores a la de Resonancia Figura 12. Frecuencias mayores a la de Resonancia

La conclusión es que, cuando ω es diferente de ω_0, la respuesta de la corriente siempre es menor, graficando estos resultados la curva tiene la forma de la mostrada en la figura 13.

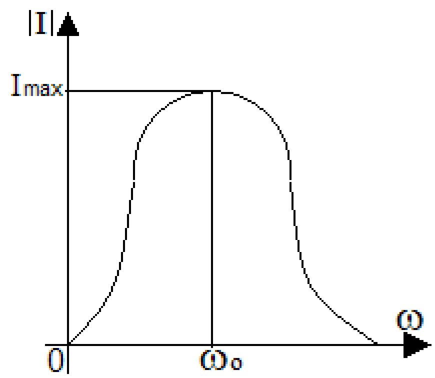


Figura 13. Curva Universal de Resonancia.

Ancho de banda

Cuando el voltaje máximo $(V_{máx})$, disminuye en un 70.7% de su valor, se determinan sobre la curva de resonancia dos puntos de interés. Para este valor de voltaje se traza una línea paralela al eje de la frecuencia, cortando a la curva en los puntos a y b, de estos puntos se trazan líneas perpendiculares al eje de la frecuencia, se determinan dos puntos los cuales corresponden a ω_1 y ω_2, llamadas ***frecuencias de potencia media*** esto se muestra en la figura 14.

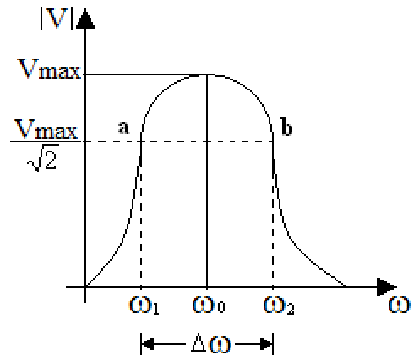


Figura 14. Grafica para determinar el valor del ancho de banda.

De la gráfica de la figura 14, se observa que el ancho de banda ($\Delta\omega$) se puede determinar por la ecuación (20).

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \left[\frac{rad}{s}\right] \tag{65}$$

El ancho de banda también puede ser obtenido por l siguiente ecuación.

$$\Delta f = f_2 - f_1 \left[Hz\right] \tag{66}$$

La potencia en los puntos a y b es la mitad de la potencia que hay a ω_0; por esto se le conoce como ***puntos de potencia media*** y a las frecuencias ω_1 y ω_2, se les conoce como ***frecuencias de potencia media***.
En los puntos de potencia media:

$$\left|V_{ab}\right| = \frac{\left|I_{fv}\right|}{\sqrt{2} \times G}$$

Frecuencias de potencia media

La potencia en un circuito eléctrico está dada por: $P = \frac{V^2}{Y}$, si se está trabajando a frecuencia de resonancia, se aplica la ecuación (67).

$$P_{res} = \frac{V_{máx}^2}{Y} \tag{67}$$

En los puntos a y b la corriente tiene el valor de siguiente.

$$V = \frac{V_{máx}}{\sqrt{2}} \tag{68}$$

Al sustituir la ecuación (68) en la ecuación (67), se obtiene.

$$P_{ab} = \frac{V_{máx}^2}{2Y} \tag{69}$$

Se sabe que a frecuencia de resonancia $P_{res} = \frac{V_{máx}^2}{Y}$, al sustituir este valor en la ecuación (69), se obtiene.

$$P_{ab} = \frac{P_{res}}{2} \tag{70}$$

Se observa de la ecuación (70) que la potencia en los puntos a y b es la mitad de la potencia que existe a ω_0; por esto se le conoce como ***puntos de potencia media*** y a las frecuencias ω_1 y ω_2, se les conoce como ***frecuencias de potencia media***.

En los puntos de potencia media el voltaje está dado por la ecuación (71).

$$|V_{ab}| = \frac{|I_{fv}|}{\sqrt{2} \times G} \tag{71}$$

Para cualquier valor de $\omega \neq \omega_0$ el voltaje se determina por la ecuación (72).

$$|V| = \frac{|I_{fc}|}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \tag{72}$$

Como las ecuaciones (71) y (72) determinan la magnitud del voltaje, igualándolas se tiene.

$$\sqrt{2} \times G = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \Rightarrow 2G^2 = G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 \Rightarrow G^2 = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2$$

Por lo tanto, se obtiene la ecuación (73).

$$G = \omega C - \frac{1}{\omega L} \tag{73}$$

Para la ecuación (73) dependiendo del valor de la frecuencia, se presentan dos casos, que son los siguientes.

$$1) \quad Si\, \omega \langle\, \omega_0 \;; se\, tiene : \omega_1 C \,\langle\, \frac{1}{\omega_1 L}$$

Entonces.

$$\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L} = \text{-}G \tag{74}$$

Además.

$$2) \quad Si\, \omega \,\rangle\, \omega_0 \;; se\, tiene : \omega_2 C \,\rangle\, \frac{1}{\omega_2 L}$$

Se obtiene.

$$\omega_2 C - \frac{1}{\omega_2 L} = G \tag{75}$$

Despejando a ω_1 de la ecuación (74).

$$\left(\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L} = \text{-}G \right) (\omega_1 L)$$

$$\omega_1^2 LC - 1 = \text{-}G\omega_1 L$$

Se obtiene una ecuación de segundo orden.

$$\omega_1^2 L\, C + \omega_1 GC - 1 = 0 \tag{76}$$

Determinando el ω_1.

$$\omega_1 = \frac{-GL \pm \sqrt{(GL)^2 + 4LC}}{2LC} = -\frac{GL}{2LC} \pm \sqrt{\frac{\mathrm{G}^2 L^2}{4L^2 C^2} + \frac{4LC}{4L^2 C^2}}$$

Por lo tanto ω_1 se obtiene a partir de la ecuación siguiente.

$$\omega_1 = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\frac{G^2}{4C^2} + \frac{1}{LC}} \left[\frac{rad}{s} \right] \tag{77}$$

La ecuación (77) sirve para obtener el valor de ω_1 recordando que no se deben de considerar las frecuencias negativas o imaginarias.

Determinando el valor de ω_1 en función de R.

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}} \left[\frac{rad}{s}\right] \tag{78}$$

Para determinar el valor de la frecuencia ω_2 se utiliza a la ecuación (76), obteniéndose la siguiente ecuación.

$$\omega_2 = \frac{G}{2C} \pm \sqrt{\frac{G^2}{4C^2} + \frac{1}{LC}} \left[\frac{rad}{s}\right] \tag{79}$$

Determinando el valor de ω_2 en función de R.

$$\omega_2 = \frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}} \left[\frac{rad}{s}\right] \tag{80}$$

Al sustituir los valores de las frecuencias de potencia media ω_1 y ω_2 en la ecuación (65) se tiene.

$$\Delta\omega = \left[\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\frac{G^2}{4C^2} + \frac{1}{LC}}\right] - \left[-\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\frac{G^2}{4C^2} + \frac{1}{LC}}\right] = \left(\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\frac{G^2}{4C^2} + \frac{1}{LC}}\right) + \left(\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\frac{G^2}{4C^2} + \frac{1}{LC}}\right)$$

Por lo tanto, el ancho de banda también puede obtenerse a partir de la siguiente ecuación.

$$\Delta\omega = \frac{G}{C} \left[\frac{rad}{s}\right] \tag{81}$$

Determinando el valor del ancho de banda en función de R.

$$\Delta\omega = \frac{1}{RC} \left[\frac{rad}{s}\right] \tag{82}$$

Angulo de fase del voltaje.

A frecuencia de resonancia la magnitud del voltaje esta dado por la ecuación (83).

$$|V_0| = \frac{|I_{fc}|\angle\beta}{G} \tag{83}$$

Se observa de la ecuación (83) que el ángulo del voltaje es igual al ángulo de la corriente; si ahora se considera a una ω diferente de ω_0; la ecuación para el voltaje tiene la siguiente forma.

$$|V| = \frac{|I_{fc}|\angle\beta}{|Y|} \tag{84}$$

Donde.

$$Z = G + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Entonces.

$$|V| = \frac{|I_{fc}|\angle\beta}{\left[\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}\right]\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right)\right]}$$

Considerando que.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right) \tag{85}$$

La ecuación de la corriente cuando $\omega \neq \omega_0$ se la siguiente.

$$|V| = \frac{|V_{fv}|\angle \propto}{\left[\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\right]\angle\theta} \tag{86}$$

Si se considera a $\omega \langle\, \omega_0$; se está haciendo referencia a la frecuencia ω_1; partiendo de la ecuación (74).

$$\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L} = -G$$

Se tiene que para $\omega \langle\, \omega_0$.

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L}}{G}\right)$$

Entonces.

$$\theta_1 = tan^{-1}\left(\frac{-G}{G}\right)$$

Por lo tanto.

$$\theta_1 = \tan^{-1}(-1) \qquad (87)$$

Por lo tanto, el ángulo de fase para el punto de frecuencia media a; será de $\theta_1 = -45^o$; en este caso el voltaje estará determinado por la ecuación siguiente.

$$|V| = \frac{|I_{fC}|\angle\beta + 45^0}{|Y|} \begin{cases} \text{El voltaje esta adelantado } 45^0 \text{ con respecto de la corriente} \\ \text{en los puntos de potencia media correspondiente a } \omega_1. \end{cases}$$

(88)

Si ahora se considera que $\omega \rangle \omega_0$; se está haciendo referencia a la frecuencia ω_2; empleando la ecuación (75).

$$\omega_2 C - \frac{1}{\omega_2 L} = G$$

Se tiene que para $\omega \rangle \omega_0$.

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_2 C - \frac{1}{\omega_2 L}}{G}\right)$$

Entonces.

$$\theta_2 = tan^{-1}\left(\frac{G}{G}\right)$$

Por lo tanto.

$$\theta_2 = \tan^{-1}(1) \qquad (89)$$

Por lo tanto, el ángulo de fase para el punto de frecuencia media b; será de $\theta_1 = 45^o$; en este caso el voltaje estará determinada por la ecuación siguiente.

$$|I| = \frac{|V_{fv}|\angle\beta - 45^0}{|Z|} \begin{cases} \text{El voltaje esta atrazado } 45^0 \text{ con respecto de la corriente} \\ \text{en los puntos de potencia media correspondiente a } \omega_2. \end{cases}$$

(90)

Factor de calidad de un circuito RLC paralelo.

El factor de calidad se indica con la letra Q, y expresa el grado de selectividad de un circuito, y está determinado por la ecuación (42).

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía máxima almacenada}}{\text{energía disispada por ciclo}} \tag{91}$$

La energía máxima almacenada de un circuito paralelo RLC está en el capacitor y se expresa por la ecuación siguiente.

$$P = \frac{V_{máx}^2 C}{2} \tag{92}$$

La energía disipada se manifiesta en la conductancia, pero en función de la resistencia se tiene:

$$P = \frac{V_{máx}^2 G}{2} = \frac{V_{máx}^2}{2R} \tag{93}$$

Para obtener energía disipada por ciclo.

$$P = \left(\frac{V_{máx}^2}{2R}\right)\left(\frac{1}{f}\right) \tag{94}$$

Al sustituir las ecuaciones (93) y (94) en la ecuación (91) se obtiene.

$$Q = 2\pi \frac{\left(\frac{V_{\max}^2 C}{2}\right)}{\left(\frac{V_{\max}^2}{2R}\right)\left(\frac{1}{f}\right)} = \frac{2\pi C}{\frac{1}{Rf}} = 2\pi fRC = \omega RC \tag{95}$$

Partiendo de la ecuación (95) a frecuencia de resonancia el factor de calidad se obtiene a partir de la siguiente ecuación.

$$Q_0 = \omega_0 RC \tag{96}$$

Se observa de la ecuación (96) que la ecuación del factor de calidad está en función del capacitor. Si ahora se expresa al factor de calidad en función de la bobina, se debe considerar que.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Entonces.

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} \tag{97}$$

Sustituyendo la ecuación (97) en la ecuación (96).

$$Q_0 = \frac{\omega_0 R}{\omega_0^2 L}$$

Por lo tanto:

$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} \qquad (98)$$

Si ahora se despeja a el valor de $\frac{1}{RC}$ en la ecuación (96).

$$\frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q_0} \qquad (99)$$

Sustituyendo la ecuación (99) en la ecuación (82).

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0} \qquad (100)$$

Si ahora se expresa a ω_1 y ω_2 en función de ω_0 y Q_0 se tiene.

$$\omega_1 = -\frac{Q_0}{2\omega_0} \pm \sqrt{\frac{Q_0^2}{4\omega_0^2} + \omega_0^2} \qquad (101)$$

Además.

$$\omega_2 = \frac{Q_0}{2\omega_0} \pm \sqrt{\frac{Q_0^2}{4\omega_0^2} + \omega_0^2} \qquad (102)$$

Selectividad

Es la propiedad del circuito resonante para seleccionar una banda de frecuencias deseadas; entre más pequeño sea el ancho de banda, mayor será la selectividad del circuito. La forma de la curva está en función de los valores de RLC, las figuras 15 y 16 muestran la curva de un circuito con alta selectividad y de un circuito de baja selectividad respectivamente.

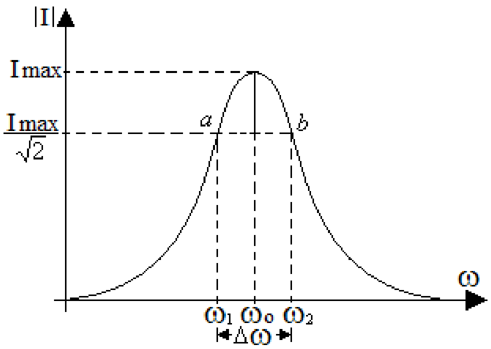


Figura 15. Circuito con alta selectividad

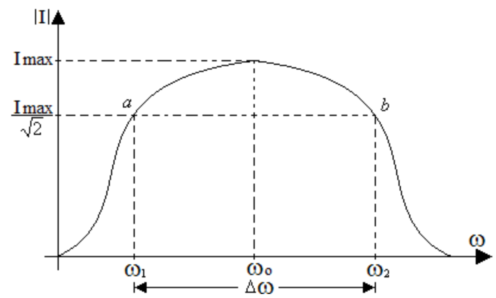


Figura 16. Circuito con baja selectividad

En un circuito resonante, la frecuencia de resonancia es el lugar geométrico de las frecuencias de corte. Esto se cumple en un circuito serie o un circuito paralelo. Se puede demostrar partiendo de las ecuaciones (74) y (75) del circuito serie o de las ecuaciones (29) y (30) del circuito paralelo. En este caso consideraremos las expresiones (74) y (75); entonces:

$$\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L} = \text{-G} \tag{74}$$

$$\omega_2 C - \frac{1}{\omega_2 L} = \text{G} \tag{75}$$

Igualando las expresiones (74) y (75), se tiene:

$$\omega_2 C - \frac{1}{\omega_2 L} = -\omega_1 C + \frac{1}{\omega_1 L} \;\Rightarrow\; \omega_2 C + \omega_1 C = \frac{1}{\omega_1 L} + \frac{1}{\omega_2 L} \;\Rightarrow\; C(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right)$$

$$C(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{L}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \omega_2}\right) \;\Rightarrow\; \frac{1}{LC} = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{\left(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \omega_2}\right)}$$

Entonces.

$$\frac{1}{\text{LC}} = \omega_1 \omega_2 \tag{103}$$

Se sabe que:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Por lo tanto:

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \tag{104}$$

VI.3 Circuitos serie-paralelo RLC

Este tipo de circuitos es muy empleado como sintonizador de frecuencias y se muestra en la figura 17.

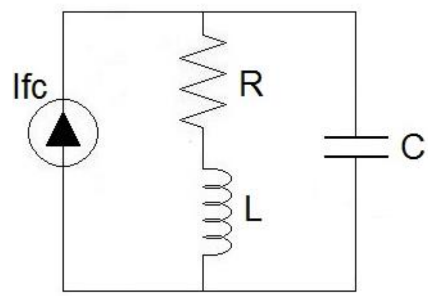


Figura 17. Circuito Serie – Paralelo RLC

El voltaje del circuito se obtiene de la ecuación siguiente.

$$V = \frac{I_{fc}}{Y} \tag{105}$$

Donde.

$$Y = \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C \tag{106}$$

De la ecuación (106) separando parte real de imaginaria.

$$Y = \left[\left(\frac{1}{R + i\omega L}\right)\left(\frac{R - i\omega L}{R - i\omega L}\right)\right] + i\omega C = \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega C = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega C$$

Por lo tanto.

$$Y = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right) \tag{107}$$

Sustituyendo la ecuación (107) en la ecuación (105).

$$V = \frac{I_{fc}}{\dfrac{R}{R^2+\omega^2 L^2} + i\left(\omega C - \dfrac{\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}\right)} \tag{108}$$

De la ecuación (108) se observa que para que el voltaje sea máximo, el valor de la admitancia debe ser mínimo; esto es posible si la parte imaginaria es cero. Entonces:

$$\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \omega R^2 C + \omega^3 L^2 C - \omega L = 0 \;\Rightarrow\; \omega^3 L^2 C = \omega\left(L - R^2 C\right)$$

$$\omega^2 L^2 C = L - R^2 C \tag{109}$$

Despejando el valor de ω en la ecuación (109).

$$\omega^2 = \frac{L - R^2 C}{L^2 C} \tag{110}$$

A frecuencia de resonancia:

$$\omega_0^2 = \frac{L - R^2 C}{L^2 C} \tag{111}$$

Entonces.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L - R^2 C}{L^2 C}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

Por lo tanto:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \tag{112}$$

Otro tipo de circuito RLC serie-paralelo es el que se muestra en la figura 18.

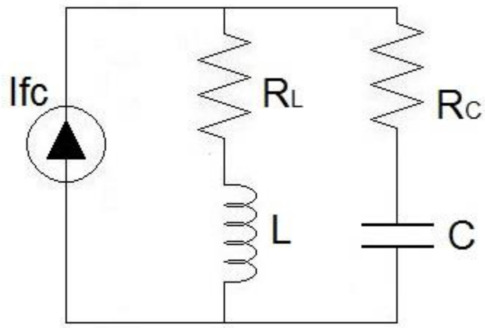


Figura 17. Circuito Serie – Paralelo RLC

El voltaje del circuito se obtiene de la ecuación siguiente.

$$V = \frac{I_{fc}}{Y} \tag{113}$$

Donde.

$$Y = \frac{1}{R + iX_L} + \frac{1}{R - iX_C} \tag{114}$$

Separando parte real de imaginaria.

$$Y = \left[\left(\frac{1}{R_L + iX_L}\right)\left(\frac{R_L - iX_L}{R_L - iX_L}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{R_C - iX_C}\right)\left(\frac{R_C + iX_C}{R_C + iX_C}\right)\right] = \frac{R_L - iX_L}{R_L{}^2 + X_L^2} + \frac{R_C + iX_C}{R_C{}^2 + X_C^2}$$

$$Y = \frac{R_L}{R_L{}^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C{}^2 + X_C^2} + i\left(\frac{X_C}{R_C{}^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L{}^2 + X_L^2}\right) \tag{115}$$

Sustituyendo la ecuación (115) en la ecuación (113).

$$V = \frac{I_{fc}}{\frac{R_L}{R_L{}^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C{}^2 + X_C^2} + i\left(\frac{X_C}{R_C{}^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L{}^2 + X_L^2}\right)} \tag{116}$$

De la expresión (116) se observa que para que el voltaje sea máximo, el valor de la admitancia debe ser mínimo; esto es posible si la parte imaginaria es cero. Entonces:

$$\left(\frac{X_L}{R_L{}^2 + X_L^2} - \frac{X_L}{R_C{}^2 + X_C^2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{X_C}{R_C{}^2 + X_C^2} = \frac{X_L}{R_L{}^2 + X_L^2} \;\Rightarrow\; X_C\left(R_L{}^2 + X_L^2\right) = X_L\left(R_C{}^2 + X_C^2\right)$$

$$X_C R_L{}^2 + X_C X_L^2 = X_L R_C{}^2 + X_L X_C^2$$

Por lo tanto.

$$X_C R_L{}^2 + X_C X_L^2 - X_L R_C{}^2 - X_L X_C^2 = 0 \tag{117}$$

Se sabe que.

$$X_L = \omega L \tag{118}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \tag{119}$$

Al sustituir las ecuaciones (118) y (119) en la ecuación (117).

$$\frac{R_L^2}{\omega C} + \frac{\omega L^2}{C} - \omega L R_C{}^2 - \frac{L}{\omega C^2} = 0 \tag{120}$$

Eliminando las fracciones de la ecuación (120) y ordenando términos se obtiene.

$$R_L^2 C + \omega_0^2 L^2 C - \omega_0^2 L C^2 R_C{}^2 - L = 0 \tag{A}$$

De la expresión (A) se puede determinar las siguientes expresiones:

$$\omega_0^2\left(L^2 C - R_C^2 L C^2\right) + R_L^2 C - L = 0 \tag{121}$$

$$L^2 \omega_0^2 C - L\left(R_C^2 \omega_0^2 C^2 + 1\right) + R_L^2 C = 0 \tag{122}$$

$$C^2 R_C^2 \omega_0^2 L - C\left(R_L^2 + \omega_0^2 L^2\right) + L = 0 \tag{123}$$

De la expresión (121) se puede determinar a la ***“Frecuencia de Resonancia”*** (ω_0)

De la expresión (122) se determina el valor de la ***“Bobina”*** para que el circuito entre en resonancia.

De la expresión (123) se determina el valor del ***“Capacitor”*** para que el circuito entre en resonancia.