微分流形

华中科技大学物理系
呜哩天才琪露诺

日期：2025 年 3 月 8 日

1 等效原理

1.1 弱等效原理

Galileo 的自由落体实验指出：置于引力场中同一处的物体，在重力作用下，具有相同的重力加速度. 这说明，若无引力之外的力作用，则引力场中同一处的物体保持它们的相对速度不变. 如果我们取随物体一同下落的参考系，则这个参考系中所有的物体都保持静止或匀速直线运动的状态，引力的效应被完全抵消了. 这就是弱等效原理（WEP）：在足够小的区域内，引力的动力学效应无法与惯性力区分.

但是，我们必须强调，等效性只在局部时空范围内成立. 惯性离心力是和到原点的距离 R 成正比的，而引力平方反比依赖于到引力源的距离；匀加速的惯性力，其力线是均匀的，而引力总是有心的，其力线是会聚的. 所以，引力和惯性力只在局部范围内是成立的.

1.2 Einstein 等效原理及时空的弯曲

我们可以自然地对弱等效原理进行推广：在足够小的区域内，物理规律与狭义相对论给出的相同，无法通过局域的实验检测引力场的存在. 这称为 Einstein 等效原理（EEP）.

从 Einstein 等效原理可以自然地得出"引力是时空的几何"这一结论. 在狭义相对论中，惯性系具有优越的地位，在惯性系中，一切自由运动物体的加速度都为 0. 在广义相对论中，引力和加速度是局部不可分辨的，但引力场并不是均匀的. 比如在地球表面，不同高度的观察者由于引力而具有的重力加速度不同，在他们各自的自由下落参考系中，自己都是没有加速度的，而对方在加速. 所以，引力场存在的情况下，无法找到一个覆盖整个时空的惯性系. 而引力场中每一处的观察者都可以选择自己的自由下落参考系，这个参考系实际上就是局部的惯性参考系（LLF）. 狭义相对论考虑的时空是 Minkowski 时空，是平直的，可以找到一个覆盖整个时空的惯性参考系. 在引力场存在时，这一点无法再做到，这说明**引力场存在的时空背景是弯曲的**. 引力场局部的动力学效应可以通过参考系的选择消除，而整体的效应无法消除. 这说明，**引力实际上等效于时空弯曲**.

2 微分流形

2.1 坐标

下面我们就来研究如何描述弯曲的时空. 我们所研究的时空就是所谓的光滑流形，它具有以下两条性质：

1. 流形的每一点局部看来都像是一个维数相同的 Euclid 空间；

2. 流形上相邻的局部区域可以光滑地缝起来.

局部地，流形同胚于 $\mathbb{R}^n$，所以在流形上点 p 的邻域可以选择一个坐标系，也就是到 $\mathbb{R}^n$ 的映射 $\phi(p)$. 在临近的点 q，也可以选择坐标系 $\psi(q)$. 但是，p 和 q 的邻域可能有重叠，在重叠区域的点可以有两组不同的坐标系来描述，我们要求这两种描述是相容的，即 $\phi\circ\psi^{-1}$ 和它的逆应当是光滑的. 下面我们给出光滑流形的严格定义：

定义 2.1. M 是一个 n 维光滑流形，若

1. M 是一个拓扑流形；
2. M 上有一族坐标卡 $\{(U_i,\varphi_i)\}$，称为图册. 其中 $\bigcup_i U_i = M$ 且每一个 U_i 是开集，φ_i 是 U_i 到 $\mathbb{R}^n$ 中开集 U_i' 的同胚映射；
3. $U_i\cap U_j\neq\emptyset$，则映射 $\psi_{ij}=\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$ 及其逆是光滑的.

2.2 矢量，对偶矢量，张量

我们用内禀的方法考虑流形的切空间. 显然 p 点处的切空间 T_p 可以由通过 p 点的所有曲线的切矢构成，而线性无关的切矢量数目就是切空间的维数. 以球面为例，某一点的切空间是一个切平面，由这一点处经线和纬线的切矢量张成.

考虑 n 维流形 M 上的一条曲线 $\gamma:\mathbb{R}\to M$，其参数为 λ. 切矢可以用函数沿曲线的方向导数刻画，我们考虑函数 $f:M\to\mathbb{R}$，并设曲线上 p 点附近取坐标，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\\ &= \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu}f\end{aligned}$$

所以方向导数算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}$ 可以用基矢 $\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 展开

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\partial_\mu \tag{1}$$

描述 p 点的坐标不唯一，在坐标变换 $x^\mu\to x^{\mu'}$ 下，基矢的变换为

$$\partial_{\mu'}=\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\partial_\mu \tag{2}$$

而矢量本身要维持不变，由 $V^\mu\partial_\mu=V^{\mu'}\partial_{\mu'}=V^{\mu'}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\partial_\mu$ 可得矢量分量的变换为

$$V^{\mu'}=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}V^\mu \tag{3}$$

流形上一点 p 处的余切空间 T_p^* 可以定义为 T_p 上所有线性泛函的集合. 对偶矢量的典型例子是函数 f 的梯度 $\mathrm{d}f$，它作用在矢量上得到函数的方向导数：

$$\mathrm{d}f\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)\equiv\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} \tag{4}$$

于是，某坐标中坐标函数 x^μ 的梯度给出了余切空间的自然基底

$$\hat{\theta}^\mu\equiv\mathrm{d}x^\mu \tag{5}$$

满足

$$\hat{\theta}^\mu(\hat{e}_\nu)=\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}=\delta^\mu_\nu \tag{6}$$

对偶矢量可以通过对偶基展开 $\hat{\omega}=\omega_\mu\hat{\theta}^\mu$，坐标变换下，基底和对偶矢量的分量的变换规律为

$$\mathrm{d}x^{\mu'}=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu \tag{7}$$

$$\omega_{\mu'}=\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\omega_\mu \tag{8}$$

2.3 矢量场，积分曲线

流形上的矢量场 $\hat{V}(x)$ 在流形上每一点 p 处都指定一个矢量. 矢量场定义了一个映射 $\hat{V}:\mathcal{F}(M)\to C^\infty(M), f\mapsto \hat{V}(f)$. 若 $\hat{V}(f)$ 对所有的 f 都是光滑的，则称 $\hat{V}$ 是光滑的.

可以把矢量场看成流形上矢量的集合，对于光滑矢量场，如果把矢量串起来，可以得到覆盖整个流形的曲线簇. 对一个光滑矢量场 $\hat{V}(x)$，可以定义它的积分曲线，这条曲线在某点的切矢量正好给出矢量场在这一点处的矢量. 用 $x^\mu(\lambda)$ 刻画这条曲线，则

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = V^\mu(x(\lambda)) \tag{9}$$

$$x^\mu(\lambda=0) = x_0 \tag{10}$$

由常微分方程解的存在唯一性定理可知，上面的方程至少局域地存在唯一的解. 这个解可以延拓到相邻的坐标片，从而延展下去. 对于紧致流形，积分曲线对所有的 λ 都是存在的.

3 张量代数

3.1 张量

(k,l) 型张量定义了一个映射，作用在 k 个余切空间和 l 个切空间的张量积上

$$\hat{T}: T_p^*\otimes\cdots\otimes T_p^*\otimes T_p\otimes\cdots\otimes T_p\to R \tag{11}$$

对 (k,l) 型张量，其基矢为

$$\hat{e}_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\hat{e}_{\mu_k}\otimes\hat{\theta}^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\hat{\theta}^{\nu_l} \tag{12}$$

则张量可以展开为

$$\hat{T} = T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_l}\hat{e}_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\hat{e}_{\mu_k}\otimes\hat{\theta}^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\hat{\theta}^{\nu_l} \tag{13}$$

坐标变换下，张量分量的变换规律为

$$T^{\mu_1'\cdots\mu_k'}_{\nu_1'\cdots\nu_l'} = \frac{\partial x^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_k'}}{\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu_1'}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu_l'}}T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_l} \tag{14}$$

这个规律不必死记，只要注意上下标的匹配就行了.

3.2 度规与指标升降

度规张量是一个对称 $(0,2)$ 型张量，记为 $\hat{g}$ 或 $g_{\mu\nu}$. 度规的逆是一个对称的 $(2,0)$ 型张量，满足

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma \tag{15}$$

度规给出了局部几何. 考虑同一坐标系中两个间隔无穷小的点 $P: x^\mu$ 和 $Q: x^\mu+\mathrm{d}x^\mu$，则它们间的间隔为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \tag{16}$$

这里 $\mathrm{d}x^\mu$ 是无穷小矢量的分量，而不是坐标函数的梯度. 另一方面，$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\hat{s}\cdot\mathrm{d}\hat{s} = (\hat{e}_\mu\cdot\hat{e}_\nu)\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$，故 $g_{\mu\nu} = \hat{e}_\mu\cdot\hat{e}_\nu$ 也给出了两个基矢的内积.

我们用度规张量及其逆来提升或下降指标

$$T^{\alpha\beta\mu}_{\delta} = g^{\mu\gamma}T^{\alpha\beta\mu}_{\gamma\delta}\,,\, T^{\delta}_{\alpha\beta\mu} = g_{\mu\gamma}T^{\gamma\delta}_{\alpha\beta\mu} \tag{17}$$

3.3 对称与反对称

如果交换两个指标，张量的值不变，则称张量关于这两个指标对称. 如果交换两个指标，张量的值改变反号，则称张量关于这两个指标反对称. 如果张量对于任意两个指标都是对称的，则称张量为全对称张量，如果张量对于任意两个指标都是反对称的，则称张量为全反对称张量. 可以通过对称化或反对称化操作把张量变成全对称张量或全反对称张量

$$T^{\sigma}_{(\mu_1\cdots\mu_n)\rho} \equiv \frac{1}{n!}\sum_{\pi} T^{\sigma}_{\pi(\mu_1)\cdots\pi(\mu_n)\rho} \tag{18}$$

$$T^{\sigma}_{(\mu_1\cdots\mu_n)\rho} \equiv \frac{1}{n!}\sum_{\pi} \tau(\pi) T^{\sigma}_{\pi(\mu_1)\cdots\pi(\mu_n)\rho} \tag{19}$$

这里是对置换 π 遍历求和，$\tau(\pi)$ 表示 π 的逆序数. 诸如 $T_{(\mu|\nu|\rho)}$ 表示对 μ 和 ρ 对称化，而 μ 不参与其中，但是指标顺序必须保持.

$T_{\mu\nu\rho\sigma} = T_{(\mu\nu)\rho\sigma} + T_{[\mu\nu]\rho\sigma}$，但一般没有 $T_{\mu\nu\rho\sigma} = T_{(\mu\nu\rho)\sigma} + T_{[\mu\nu\rho]\sigma}$，即对多个指标不能进行简单的拆分. 由此可以推导出 $X^{(\mu\nu)}Y_{\mu\nu} = X^{(\mu\nu)}Y_{(\mu\nu)} + X^{(\mu\nu)}Y_{[\mu\nu]} = X^{(\mu\nu)}Y_{(\mu\nu)}$，因为反对称张量与对称张量的求和显然为 0.

对 $(1,1)$ 型张量，它的迹定义为 $X = X^{\mu}_{\mu}$，就是其对角项的求和. 对一个 $(0,2)$ 型或 $(2,0)$ 型张量，其迹不是对角项的求和，应该现把它变成 $(1,1)$，再求迹

$$Y = Y^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}Y_{\nu\mu} \tag{20}$$

比如，Minkowski 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 的迹并不是其对角项的和 $-1+1+1+1=2$，而是 $\eta^{\nu\mu}\eta_{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$.

3.4 Riemann 法坐标与局部惯性系

我们需要验证局部惯性系的讨论，即时空的每一点的邻域都存在局部惯性系，这个惯性系中度规取 $\eta_{\mu\nu}$ 的形式. 我们证明如下命题：在流形某点 p 的邻域，存在坐标系，使得度规及其导数满足：

$$g_{\mu\nu}|_p = 0\,,\ \partial_\sigma g_{\mu\nu}|_p = 0 \tag{21}$$

而更高阶的导数则不一定为 0.

在坐标变换下，度规场变换为

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu} \tag{22}$$

不失一般性地把 p 取为两个坐标系的原点，则在 p 点附近的坐标可以有 Taylor 展开

$$x^{\mu} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\right)_p x^{\mu'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x^{\mu'_1}\partial x^{\mu'_2}}\right)_p x^{\mu'_1}x^{\mu'_2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 x^{\mu}}{\partial x^{\mu'_1}\partial x^{\mu'_2}\partial x^{\mu'_3}}\right)_p x^{\mu'_1}x^{\mu'_2}x^{\mu'_3} + \cdots \tag{23}$$

$$g_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})_p + (\partial g)_p \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)_p x' + (\partial g)_p \left(\frac{\partial^2 x}{\partial x'\partial x'}\right)_p x'x' + (\partial^2 g)_p \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial x'}\right)_p x'x' + \cdots \tag{24}$$

这里我们忽略了指标结构. 假定我们要寻找的是 $x^{\mu'}$，把(22)的两边展开到 x' 的二阶，有

$$\begin{aligned}
&(g')_p + (\partial' g')_p x' + (\partial'\partial' g')_p x'x' \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial x'} g\right)_p \\
&+ \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial^2 x}{\partial x'\partial x'} g + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial x'}\partial' g\right)_p x' \\
&+ \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial^3}{\partial x'\partial x'\partial x'} g + \frac{\partial^2 x}{\partial x'\partial x'}\frac{\partial^2 x}{\partial x'\partial x'} g + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial^2 x}{\partial x'\partial x'}\partial g' + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial x'}\partial' g \partial' g\right) x'x'
\end{aligned}$$

下面我们对各阶进行讨论：

1. 左边的 g' 有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个自由度，右边由 $\frac{\partial x}{\partial x'}|_p$ 确定，有 n^2 个自由度. 因此，有足够的自由度使 $g'(p)=\eta$，额外多出的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个自由度正好是局部惯性系中 Lorentz 群生成元的个数；
2. 左边 $\partial'_\sigma g'_{\mu\nu}$ 有 $\frac{n^2(n+1)}{2}$ 个自由度，右边由 $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x'\partial x'}\right)_p$ 确定，有 $\frac{n^2(n+1)}{2}$ 个自由度. 因此，刚好有足够的自由度使得 $\partial' g=0$；
3. 左边 $\partial'\partial' g'$ 有 $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ 个自由度，右边由 $\left(\frac{\partial^3 x}{\partial x'\partial x'\partial x'}\right)_p$ 确定，有 $\frac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$ 个自由度，没有足够多的自由度使得 $\partial'\partial' g'=0$. 后面我们会看到，缺乏的 $\frac{n^2(n-1)^2}{12}$ 正好是曲率张量的个数，故度规的二阶导数反映了流形的曲率.