暴胀的物理机制

呜哩天才琪露诺

华中科技大学物理学院

日期：2025 年 9 月 3 日

1 视界疑难

均匀各项同性宇宙的时空度规为 FRW 度规

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2}+r^2\mathrm{d}\Omega^2\right] \tag{1}$$

$k=0,\quad 1,\quad -1$ 分别对应平坦、正曲率和负曲率的宇宙，简单起见我们取 $k=0$. 尺度因子 $a(t)$ 演化的方程为 Friedmann 方程

$$H^2=\frac{1}{3M_{\mathrm{pl}}^2}\rho,\quad \dot{H}+H^2=-\frac{1}{6M_{\mathrm{pl}}^2}(\rho+3p) \tag{2}$$

其中 $H=\mathrm{d}\ln a=\frac{\dot{a}}{a}$ 是 Hubble 参数，ρ 和 p 是物质场（假定为理想流体）的密度和压强. 定义共形时间

$$\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}t}{a(t)} \tag{3}$$

则 FRW 度规变成 Minkowski 度规乘以共形系数

$$\mathrm{d}s^2=a^2(\tau)(-\mathrm{d}\tau^2+\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\Omega^2) \tag{4}$$

忽略角方向，光的测地线方程为

$$\mathrm{d}s^2=a^2(\tau)(-\mathrm{d}\tau^2+\mathrm{d}r^2)\Longrightarrow r(\tau)=\pm\tau+\mathrm{const} \tag{5}$$

是 τ-r 平面内的一条 45° 直线. 定义大爆炸奇点 $t=0$ 为 $a(t=0)=0$，则光子（同时是所有粒子）从大爆炸奇点开始能走的最大距离

$$\Delta r_{\max}(t)=\tau(t)-\tau(0)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} \tag{6}$$

称为共形视界.

共形时间可以用更具启发性的形式写出

$$\tau\equiv\int\frac{\mathrm{d}t}{a(t)}=\int(aH)^{-1}\mathrm{d}\ln a \tag{7}$$

其中 $(aH)^{-1}$ 称为共动 Hubble 半径. 对于状态方程为 $\frac{p}{\rho}=\omega$ 的理想流体支配的宇宙，Hubble 半径的演化为

$$(aH)^{-1}\propto a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)} \tag{8}$$

这是因为，由(2)可知 $H\propto\rho^{\frac{1}{2}}$. 另外，由 $\mathrm{d}(\rho a^3)=-p\mathrm{d}(a^3)$（这可以简单地看作体积 a^3 内能量的减少等于体积 a^3 对外界所作的功）可知 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\frac{3(\omega+1)\mathrm{d}a}{a}$，从而 $\rho\propto a^{-3(\omega+1)}$，进而 $(aH)^{-1}\propto a^{-1}\rho^{-\frac{1}{2}}\propto a^{-1}a^{\frac{3(\omega+1)}{2}}=a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}$. 我们熟知的物质都满足强能量条件 $1+3\omega>0$，所以我们理所当然地认为 Hubble 半径随宇宙膨胀而增加. 把(7)积出来得

$$\tau\propto\frac{2}{1+3\omega}a^{\frac{1+3\omega}{2}} \tag{9}$$

至多相差一个积分常数. 对常见的物质，大爆炸奇点的共形时间于是是为

$$\tau_i \propto a_i^{\frac{1+3\omega}{2}} = 0, \quad \text{for } \omega > -\frac{1}{3} \tag{10}$$

共动视界是有限的

$$\Delta\tau_{\max} \propto a(t)^{\frac{1+3\omega}{2}}, \quad \text{for } \omega > -\frac{1}{3} \tag{11}$$

但这就带来一个问题：从大爆炸奇点到光子脱耦时刻的共形时间是有限的，这意味着 CMB 中的大部分点的过去光锥都没有重叠部分，也就没有办法产生因果关联. 为什么 CMB 的温度分布如此均匀呢?

2 缩小的 Hubble 半径

解决视界疑难的一个很简单的办法就是，在宇宙历史的早期加上一个 Hubble 半径减小的阶段. Hubble 半径的减少需要破坏强能量条件，则大爆炸奇点的共形时间被推前到 $-\infty$，也即

$$\tau_i \propto a_i^{\frac{1+3\omega}{2}} = -\infty, \quad \text{for } \omega < -\frac{1}{3} \tag{12}$$

光子脱耦时刻和大爆炸奇点之间的共形时间远比我们想象的要多. CMB 上两点的过去光锥在 $\tau = 0$ 之前有充分的机会相交，如图(1)所示. 暴胀宇宙学中，$\tau = 0$ 并不是大爆炸奇点，而是再加热的奇点. $\tau = 0$ 前后，时间都是有定义的.

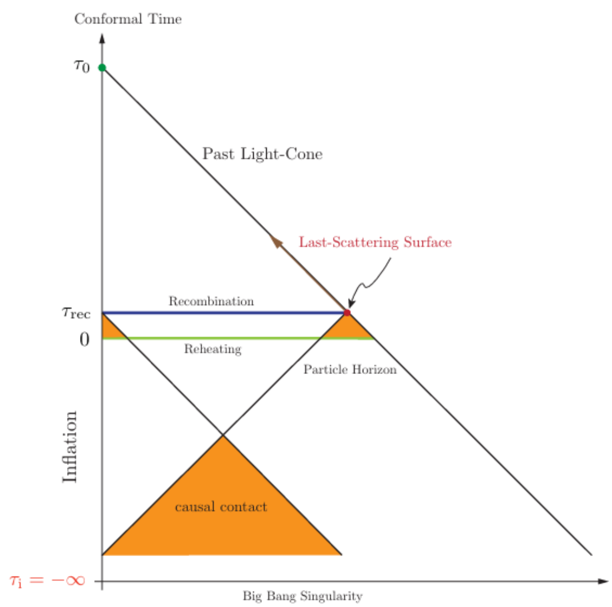

图 1: 暴胀宇宙学的 Penrose 图

除了 Hubble 视界减少之外，暴胀还有另外几种等价定义

- **加速膨胀** 通过 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(aH)^{-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{a})^{-1} = -\frac{\ddot{a}}{(\dot{a})^2}$ 可以推出暴胀的第二种定义

$$\frac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}t^2} > 0 \tag{13}$$

- **缓变 Hubble 参数** 通过 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1-\varepsilon), \quad \varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} > 0$ 可以得到暴胀的第三种定义

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \equiv \frac{\mathrm{d}\ln H}{\mathrm{d}N} < 1 \tag{14}$$

其中我们定义了 $\mathrm{d}N=\mathrm{d}\ln a$，暴胀是指数级的，尺度因子 $a(t)$ 每增加为原本的 e 倍，就称宇宙经历了一次 e-fold，则 $N\propto\ln a$ 衡量了宇宙所经历的 e-fold 的次数. 参数 ε 衡量的是每个 e-fold 期间 Hubble 参数的相对增长率（增长率 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ 比上其初始值）. (14)告诉我们单次 e-fold 中 Hubble 参数的相对变化很小. 不仅如此，我们还希望暴胀持续足够长的时间（一般至少 40 到 60 个 e-fold），ε 在整个暴胀期间都应该充分小，这就要求 ε 的变化率也不大. 我们再引入另一个参数

$$\eta=\frac{\mathrm{d}\ln\varepsilon}{\mathrm{d}N} \tag{15}$$

即单次 e-fold 中 ε 的相对变化率，我们要求 $|\eta|<1$.

- **负压强** 从(8)可以看出，$(aH)^{-1}$ 若是减函数，只能是

$$1+3\omega<0 \tag{16}$$

即需要破坏强能量条件的物质.

3 暴胀的物理机制：慢滚暴胀

我们用一个标量场 ϕ 来描述暴胀，它与引力场最小耦合

$$S=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{\mathrm{pl}}^2}{2}R-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-V(\phi)\right] \tag{17}$$

其中 $\mathcal{L}=-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-V(\phi)$ 是暴胀场的 Lagrange 量密度，$V(\phi)$ 是势能项，具体形式未定. 最小耦合的意思就是没有暴胀场和引力场直接混合的项，和一般的物质场一样，暴胀场通过 Einstein 场方程影响时空曲率，时空背景通过度规影响暴胀场的运动学. 考虑暴胀场的均匀模式 $\phi(t)$，其运动方程为

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}=-V' \tag{18}$$

Hubble 参数的演化方程为

$$H^2=\frac{1}{3M_{\mathrm{pl}}^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V\right) \tag{19}$$

对第二式求导得 $2H\dot{H}=\frac{1}{3M_{\mathrm{pl}}^2}(\ddot{\phi}+V')\dot{\phi}$，代入第一式得

$$\dot{H}=-\frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}}{M_{\mathrm{pl}}^2} \tag{20}$$

从而

$$\varepsilon=\frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{M_{\mathrm{pl}}^2H^2} \tag{21}$$

暴胀要求 $\varepsilon<1$，也就是暴胀场的势能 V 占主导而动能 $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ 次之. 这要求场的加速度必须足够小，我们定义无量纲的

$$\delta=-\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \tag{22}$$

显然有

$$\eta=2(\varepsilon-\delta) \tag{23}$$

所以，如果 $\varepsilon,|\delta|\ll 1$，则 $\varepsilon,|\eta|\ll 1$ 也能得到满足. 在慢滚近似下

$$3H\dot{\phi}\approx -V' \tag{24}$$

$$\varepsilon=-\frac{\dot{H}}{H^2}\approx\frac{M_{\mathrm{pl}}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\equiv\epsilon_V \tag{25}$$

对(24)求导可得

$$3\dot{H}\dot{\phi}+3H\ddot{\phi}=-V''\dot{\phi} \tag{26}$$

进而

$$\delta+\varepsilon=-\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}-\frac{\dot{H}}{H^2}\approx M_{\rm pl}^2\frac{V''}{V}\equiv\eta_V \tag{27}$$

于是可以用势慢滚参数写出慢滚条件

$$\epsilon_V\ll 1,\quad |\eta_V|\ll 1 \tag{28}$$

我们用加速膨胀经过的折叠数衡量暴胀的总量

$$N\equiv\int_{a_i}^{a_f}\mathrm{d}\ln a=\int_{t_i}^{t_f}H(t)\mathrm{d}t \tag{29}$$

其中 $\varepsilon(t_i)=\varepsilon(t_f)=1$. 在慢滚近似下

$$H\mathrm{d}t=\frac{H}{\dot{\phi}}\mathrm{d}\phi\approx-\frac{3H}{V'}H\mathrm{d}\phi\approx\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_V}}\frac{\mathrm{d}\phi}{M_{\rm pl}} \tag{30}$$

于是

$$N=\int_{\phi_i}^{\phi_f}\frac{1}{\sqrt{2\epsilon_V}}\frac{\mathrm{d}\phi}{M_{\rm pl}} \tag{31}$$

CMB 的观测限制

$$N_{\rm cmb}\approx 40\sim 60 \tag{32}$$