引力理论

华中科技大学物理系
呜哩天才琪露诺

日期：2025 年 3 月 18 日

1 Einstein 场方程

1.1 场方程的导出

如何把物理定律推广到弯曲时空中？我们知道惯性参考系中的物理定律，根据等效原理，自由下落参考系中的物理定律与惯性系中的相同. 我们把定律写成协变的、张量的形式，便得到了弯曲时空中的物理定律. 例如，局部惯性系中自由质点的轨迹为 $\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}=0$，推广到整个时空中，便是 $u^\alpha\nabla_\alpha u^\mu=0$. 局部惯性系中能动张量守恒 $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$，推广到整个时空中，便是 $\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$.

要建立起相对论性的引力理论，则这个理论的经典极限应该为 Newton 引力理论，即

$$\nabla^2\Phi=\delta^{ij}\partial_i\partial_j\Phi=4\pi G\rho \tag{1}$$

这里 Φ 便是引力势，ρ 为物质密度. 在 Newton 力学中，运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}=-\delta^{ij}\partial_j\Phi \tag{2}$$

弯曲时空（引力场）中，自由质点的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}=0$$

在经典极限下，$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\gg\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}$（这里运用了自然单位制，即 $c=1$，$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\ll 1$ 即为低速），故运动方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}+\Gamma^\mu_{00}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=0 \tag{3}$$

Christoffel 符号展开为 $\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_0g_{\nu0}+\partial_0g_{0\nu}-\partial_\nu g_{00})$，经典极限下引力场是静态的，时空度规不会随时间变化，故 Christoffel 符号变为 $\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{00}$. 设

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}\ ,\ \|h_{\mu\nu}\|\ll 1 \tag{4}$$

不难说明

$$g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}-h^{\mu\nu}+O(h^2) \tag{5}$$

则

$$\Gamma^\mu_{00}=-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00}+O(h^2) \tag{6}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}=0 \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\tau^2}=\frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_j h_{00}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\Rightarrow\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00} \tag{8}$$

与(2)一致，且 $h_{00}=-2\Phi$，$g_{00}=\eta_{00}+h_{00}=-(1+2\Phi)$.

(1)右端的 ρ 实际上是 T_{00}，要把 Newton 引力理论推广到弯曲时空中，很自然的想法是把等式右边写成 $T_{\mu\nu}$. 而等式左边的 $\partial_i\partial_j\Phi$ 含度规的二阶导数，推广后的等式左边也应该含度规的二阶导数的项，并且与曲率张量有关. 注意到 $T_{\mu\nu}$ 是无散的，而 Einstein 张量 $G_{\mu\nu}$ 也是无散的，于是，可构想的最简单的引力理论便是

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{9}$$

这里的 κ 是某个常数.

为了检验这种引力理论的合理性，并且确定常数 κ，我们取静止的理想流体作为引力的源. 它的能动张量为

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \approx \rho u_\mu u_\nu \tag{10}$$

对非相对论性流体而言声速远小于光速，即 $\frac{\partial P}{\partial \rho} = c_s^2 \ll 1$，故 $\rho \gg P$. 另一方面，静止要求流体的 4-速度为 $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$.4-速度的归一化条件 $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ 可以导出

$$u^0 = \sqrt{\frac{-1}{g_{00}}} = \sqrt{\frac{-1}{-1 + h_{00}}} = (1 - h_{00})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}h_{00} + O(h^2) \tag{11}$$

下降指标得到

$$u_0 = g_{0\mu}u^\mu = g_{00}u^0 = (-1 + h_{00})\left(1 + \frac{1}{2}h_{00}\right) = -1 + \frac{1}{2}h_{00} + O(h^2) \tag{12}$$

能动张量的 00 分量

$$T_{00} \approx \rho u_0^2 = \rho[1 + h_{00} + O(h^2)] \tag{13}$$

对能动张量求迹

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \approx \rho g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = -\rho \tag{14}$$

则

$$R_{00} = \kappa\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right) = \kappa\left(\frac{1}{2}\rho + \frac{3}{2}h_{00}\rho\right) = \frac{1}{2}\rho\kappa \tag{15}$$

另一方面（其中 i 表示空间指标）

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^\mu_{0\mu 0} \\ &= R^i_{0i0} \\ &= \partial_i\Gamma^i_{00} - \partial_0\Gamma^i_{00} \\ &= -\frac{1}{2}\partial_i(\eta^{i\mu}\partial_\mu h_{00}) \\ &= -\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} \\ &= -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \\ &= \nabla^2\phi \end{aligned} \tag{16}$$

故场方程退回到

$$\nabla^2\phi = \frac{\kappa}{2}\rho \tag{17}$$

与 Newton 引力理论比较可知 $\kappa = 8\pi G$，故 Einstein 场方程为

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{18}$$

1.2 关于场方程的讨论

我们对 Einstein 场方程做一些讨论. 首先，场方程包含 10 个方程，由于 $\nabla_\mu G^{\mu\nu}=0$ 的存在，场方程包含的独立方程数目为 6.

其次，Einstein 场方程是非线性的，不仅 Riemann 张量是度规的二阶导数，$T_{\alpha\beta}$ 本身往往也是度规的函数. 但是，我们知道，Newton 引力是线性的，两个质点的引力势等于两个质点各自引力势的和. 物理上，这可以解释为广义相对论中引力场和自身是耦合的，这是等效原理的自然结果. 考虑两个被引力束缚在一起的粒子，若引力场不与自身耦合，则两个粒子的引力质量简单地等于各自引力质量之和，而由于引力势能的存在，两个粒子的惯性质量并不等于其惯性质量之和（相对论里质量就是能量），与等效原理矛盾. 在引力场很弱时，这种耦合也极其微弱，可以忽略不计，就过渡到 Newton 的线性引力.

1.3 宇宙学常数

我们可以在场方程中再加一些无散的项. 度规本身就是无散的，所以，我们可以把场方程改写为

$$G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=8\pi G T_{\mu\nu} \tag{19}$$

这里的 Λ 称为宇宙学常数. 等价地，我们相当于给能动张量加上了一个附加项

$$T'_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}-\frac{8\pi G}{\Lambda}g_{\mu\nu}\equiv T_{\mu\nu}-T^{\Lambda}_{\mu\nu} \tag{20}$$

这个附加项可以看成局部惯性系中

$$\rho=\frac{\Lambda}{8\pi G}\,,\, P=-\rho \tag{21}$$

的理想流体.

2 变分法

2.1 Einstein-Hilbert 作用量

假设场由 $\phi(x_\mu)$ 描述，其作用量为

$$S=\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\hat{\mathcal{L}} \tag{22}$$

其中 $\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$ 是场 ϕ 及其导数的函数. 泛函导数 $\frac{\delta S}{\delta\phi}=0$ 可以导出 Euler-Lagrange 方程

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu(\partial_\nu\phi)}\right]-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\nu\phi}=0 \tag{23}$$

例如，对自由标量场

$$\mathcal{L}=-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\frac{1}{2}m\phi^2 \tag{24}$$

可以导出著名的 Klein-Gordon 方程

$$\Box\phi-m^2\phi=0 \tag{25}$$

对重力场，如何确定 $\mathcal{L}$ 的形式呢？首先，作用量 S 必须是标量. 其次，$\mathcal{L}$ 必须取决于曲率张量，所以它不会因为坐标系的选取而被消除. 最简单的取法便是把 Lagrange 量密度直接取为

$$\hat{\mathcal{L}}=R\sqrt{-g} \tag{26}$$

即

$$S_H=\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,R \tag{27}$$

R 是标量，$\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}$ 是不变体积元，才能保证作用量为标量，$\sqrt{-g}R$ 为标量密度. 对作用量变分得

$$\begin{aligned}\delta S_H &= \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\delta\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\right)\\ &= \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\left[\delta\left(\sqrt{-g}\right)g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}+\sqrt{-g}(\delta g^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta}+\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}(\delta R_{\alpha\beta})\right]\end{aligned} \tag{28}$$

很容易算出

$$\delta\left(\sqrt{-g}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{29}$$

故前两项即为

$$\sqrt{-g}\,\delta g^{\alpha\beta}\left(R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\right)=\sqrt{-g}\,\delta g^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} \tag{30}$$

要计算第三项，首先我们指出

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta})-\nabla_\alpha(\delta\Gamma^\beta_{\mu\beta}) &= \partial_\mu(\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta})-\Gamma^\mu_{\mu\nu}\delta\Gamma^\nu_{\alpha\beta}-\Gamma^\nu_{\mu\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\nu}-\Gamma^\nu_{\mu\alpha}\delta\Gamma^\mu_{\nu\beta}\\ &\quad-\partial_\alpha(\delta\Gamma^\mu_{\mu\beta})+\Gamma^\mu_{\alpha\nu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\beta}+\Gamma^\nu_{\alpha\mu}\delta\Gamma^\mu_{\nu\beta}+\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\mu\nu}\\ &= \delta(\partial_\mu\Gamma^\mu_{\alpha\beta})-\delta(\partial_\alpha\Gamma^\beta_{\mu\beta})-(\Gamma^\mu_{\mu\nu}\delta\Gamma^\nu_{\alpha\beta}+\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\mu\nu})\\ &\quad-(\Gamma^\nu_{\mu\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\nu}+\Gamma^\mu_{\alpha\nu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\beta})\\ &= \delta(\partial_\mu\Gamma^\mu_{\alpha\beta}-\partial_\alpha\Gamma^\mu_{\mu\beta}-\Gamma^\mu_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}-\Gamma^\nu_{\mu\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\nu})\\ &= \delta R_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{31}$$

再计算 $\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$，对 $0=\nabla_\gamma g_{\alpha\beta}$ 两端取变分得

$$\begin{aligned}0 &= \delta(\partial_\gamma g_{\alpha\beta}-\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}g_{\lambda\beta}-\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}g_{\lambda\alpha})\\ &= \delta(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})-(\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma})g_{\lambda\beta}-\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}(\delta g_{\lambda\beta})-(\delta\Gamma^\lambda_{\beta\gamma})g_{\lambda\alpha}-\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}(\delta g_{\lambda\alpha})\\ &= \partial_\gamma(\delta g_{\alpha\beta})-\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}(\delta g_{\lambda\beta})-\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}(\delta g_{\lambda\alpha})-(\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma})g_{\lambda\beta}-(\delta\Gamma^\lambda_{\beta\gamma})g_{\lambda\alpha}\\ &= \nabla_\gamma(\delta g_{\alpha\beta})-(\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma})g_{\lambda\beta}-(\delta\Gamma^\lambda_{\beta\gamma})g_{\lambda\alpha}\end{aligned} \tag{32}$$

轮换 α,β,γ 指标可得

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha(\delta g_{\beta\gamma})-(\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta})g_{\lambda\gamma}-(\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma})g_{\lambda\beta}=0\\ \nabla_\beta(\delta g_{\alpha\gamma})-(\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta})g_{\lambda\gamma}-(\delta\Gamma^\lambda_{\beta\gamma})g_{\lambda\alpha}=0\\ \nabla_\gamma(\delta g_{\alpha\beta})-(\delta\Gamma^\lambda_{\gamma\beta})g_{\lambda\alpha}-(\delta\Gamma^\lambda_{\gamma\alpha})g_{\lambda\beta}=0\end{aligned} \tag{33}$$

可得

$$\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\lambda\gamma}[\nabla_\alpha(\delta g_{\beta\gamma})+\nabla_\beta(\delta g_{\alpha\gamma})-\nabla_\gamma(\delta g_{\alpha\beta})] \tag{34}$$

从而

$$\begin{aligned}g^{\alpha\beta}(\delta R_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g^{\lambda\gamma}[\nabla_\lambda\nabla_\alpha(\delta g_{\gamma\beta})+\nabla_\lambda\nabla_\beta(\delta g_{\gamma\alpha})-\nabla_\lambda\nabla_\gamma(\delta g_{\alpha\beta})\\ &\quad+\nabla_\beta\nabla_\gamma(\delta g_{\lambda\alpha})-\nabla_\beta\nabla_\lambda(\delta g_{\gamma\alpha})-\nabla_\beta\nabla_\alpha(\delta g_{\lambda\gamma})]\\ &= \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\beta(g^{\alpha\lambda}g^{\beta\gamma}\delta g_{\gamma\lambda}+g^{\lambda\beta}g^{\alpha\gamma}\delta g_{\gamma\lambda}-2\delta g^{\alpha\beta}g^{\lambda\gamma}g_{\lambda\gamma})\\ &= \nabla_\alpha\nabla_\beta(g^{\alpha\lambda}g^{\beta\gamma}g_{\gamma\lambda}-g^{\alpha\beta}g^{\lambda\gamma}\delta g_{\lambda\gamma})\end{aligned} \tag{35}$$

故积分的第三项为

$$\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\nabla_\alpha(V^\alpha)=0 \tag{36}$$

这里我们假定 V^α 在无穷远处为 0. 从而

$$\frac{\delta S_H}{\delta g^{\alpha\beta}}=\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,G_{\alpha\beta}=0 \tag{37}$$

从而有

$$G_{\alpha\beta} = 0 \tag{38}$$

也可见 Einstein 张量与 Lagrange 量密度的关系

$$\sqrt{-g}\, G_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu g^{\alpha\beta})} \right] \tag{39}$$

2.2 Palatini 变分及有源情形

我们可以把 R 看成 Γ 的函数，对 g 和 Γ 独立变分，按之前的结果

$$\delta S_H = \frac{1}{16\pi G} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \left\{ \delta g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \left[\nabla_\gamma (\delta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) - \nabla_\beta (\delta \Gamma^\gamma_{\gamma\alpha}) \right] \right\} \tag{40}$$

对 g 的变分给出

$$G_{\alpha\beta} = 0 \tag{41}$$

下面我们计算关于 Γ 的变分

$$\begin{aligned}
\delta_\Gamma S_H &= \frac{1}{16\pi G} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \left[\nabla_\gamma (\delta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) - \nabla_\beta (\delta \Gamma^\gamma_{\gamma\alpha}) \right] \\
&= \frac{1}{16\pi G} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \Big[\partial_\gamma (\delta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\beta}) - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\alpha}) + \Gamma^\gamma_{\gamma\mu} (\delta \Gamma^\mu_{\alpha\beta}) \\
&\quad - \partial_\beta (\delta \Gamma^\alpha_{\gamma\alpha}) + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\alpha}) + \Gamma^\mu_{\beta\alpha} (\delta \Gamma^\gamma_{\gamma\mu}) - \Gamma^\gamma_{\beta\mu} (\delta \Gamma^\mu_{\gamma\alpha}) \Big] \\
&= \frac{1}{16\pi G} \int \mathrm{d}^4 x \Big\{ (-\delta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) \left[\partial_\gamma (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) + \sqrt{-g} (\Gamma^\alpha_{\gamma\mu} g^{\mu\beta} + \Gamma^\beta_{\gamma\mu} g^{\mu\alpha}) \right] \\
&\quad + (\delta \Gamma^\alpha_{\gamma\alpha}) \left[\partial_\beta (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) + \sqrt{-g} (\Gamma^\alpha_{\beta\mu} g^{\mu\beta} + \Gamma^\beta_{\beta\mu} g^{\mu\alpha}) \right] \Big\} \\
&= \frac{1}{16\pi G} \mathrm{d}^4 x \int \left[(\delta \Gamma^\alpha_{\gamma\alpha}) \nabla_\beta (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) - (\delta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) \nabla_\gamma (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) \right]
\end{aligned} \tag{42}$$

$\delta_\Gamma S_H = 0$ 给出

$$\nabla_\gamma (g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) = 0 \tag{43}$$

我们在作用量中加上描述引力源的项

$$S_M = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}\, \mathcal{L}_M \tag{44}$$

则 $\delta S = \delta S_H + \delta S_M$ 给出

$$\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} G_{\alpha\beta} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\alpha\beta}} = 0 \tag{45}$$

定义能动张量

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\alpha\beta}} \tag{46}$$

则回到 Einstein 场方程(18).

2.3 修正引力理论

我们没有理由认为引力场的 Lagrange 量密度就一定是 R，这个形式简单得可疑，因此，我们可以尝试其它形式的 Lagrange 量，从而得出其它形式的引力理论.

比如，取

$$\hat{\mathcal{L}} = R - \frac{\kappa}{R} \tag{47}$$

时得到的场方程为

$$G_{\alpha\beta}+\frac{\kappa}{R^2}\left(R_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\right)+k[g_{\alpha\beta}\nabla_\mu\nabla^\mu-\nabla_{(\alpha}\nabla_{\beta)}]R^{-2}=8\pi GT_{\alpha\beta} \tag{48}$$

它在 $R\ll\sqrt{\kappa}$ 时，即大尺度上与 Einstein 场方程有显著偏离.

再比如，取

$$\hat{\mathcal{L}}=R+kR^2 \tag{49}$$

其中 $k\sim\hbar^{-1}$，它在 $R\gg\frac{1}{k}$ 时与 Einstein 场方程有显著偏离.

我们也可以假想宇宙间存在着一个标量场 ϕ 与时空耦合，即

$$\begin{aligned}S_g&=\frac{1}{16\pi G}\int\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,Rf(\phi)\\S_\phi&=\int\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}[g(\phi)\nabla^\mu\nabla_\mu\phi-V(\phi)]\end{aligned} \tag{50}$$