标量场的量子化

呜哩天才琪露诺

华中科技大学物理学院

日 期：February 25, 2026

1　经典场论

1.1　符号约定

Lorentz 变换是坐标变换

$$x^\mu \xrightarrow{\Lambda} x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{1}$$

其中 Λ 是 Lorentz 矩阵. Lorentz 变换包含三个转动、三个 boost. 沿三个坐标轴转动 θ 的 Lorentz 变换矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cos\theta & \sin\theta \\ & & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & & \sin\theta \\ & & 1 & \\ & -\sin\theta & & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

沿三个坐标轴 boost 的 Lorentz 变换矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta & & \\ \sinh\beta & \cosh\beta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh\beta & & \sinh\beta & \\ & 1 & & \\ \sinh\beta & & \cosh\beta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh\beta & & & \sinh\beta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \sinh\beta & & & \cosh\beta \end{pmatrix} \tag{3}$$

其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$，$v$ 是两参考系相对运动的速度. β 是快度，满足

$$\cosh\beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \sinh\beta = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \tanh\beta = v \tag{4}$$

可以反解出

$$\beta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \tag{5}$$

在低速极限下有 $\beta \approx v$.

量子场论中考虑的时空为 Minkowski 时空，其度规

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

线元 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ 在 Lorentz 变换下保持不变. 则 Lorentz 变换应当满足

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{7}$$

可以验证 Lorentz 变换对变换的复合封闭. 而我们指出 Lorentz 变换矩阵的逆矩阵 $(\Lambda^{-1})^{\rho}_{\nu} = g_{\nu\mu} g^{\rho\sigma} \Lambda^{\mu}_{\sigma}$ 验证如下

$$g_{\nu\mu} g^{\rho\sigma} \Lambda^{\mu}_{\sigma} \Lambda^{\nu}_{\tau} = g_{\mu\tau} g^{\rho\mu} = \delta^{\rho}_{\tau} \tag{8}$$

四矢量

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}) \tag{9}$$

$$p^{\mu} = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \mathbf{p}) \tag{10}$$

用 $g_{\mu\nu}$ 升降指标

$$x_{\mu} = (t, -\mathbf{x}), \quad p_{\mu} = (E, -\mathbf{p}) \tag{11}$$

四梯度算子

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = (\partial_t, \nabla) \tag{12}$$

四矢量点乘

$$v \cdot w = g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = v^0 w^0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \tag{13}$$

在壳条件为

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \tag{14}$$

若不满足，则称为离壳的.

1.2 定域场论

场是时空坐标的函数. 按照 Lorentz 变换下的行为，场可以分为标量场 $\phi(x)$、矢量场 $A^{\mu}(x)$ 和张量场 $T^{\mu\nu}(x)$ 等，它们遵循的变换规则如下

$$\begin{aligned} \phi(x) &\xrightarrow{\Lambda} \phi'(x') = \phi(x) \\ A^{\mu}(x) &\xrightarrow{\Lambda} A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x) \\ T^{\mu\nu}(x) &\xrightarrow{\Lambda} T'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} T^{\rho\sigma}(x) \end{aligned} \tag{15}$$

对于定域场论，其 Lagrange 量可以写作 Lagrange 量密度的空间积分，则作用量可以写作 Lagrange 量密度的时空积分

$$S = \int \mathrm{d}t \, L = \int \mathrm{d}^4 x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) \tag{16}$$

因为作用量 S 必须是 Lorentz 不变的，而 $\mathrm{d}^4 x$ 本身是 Lorentz 不变量，我们要求 $\mathcal{L}$ 是 Lorentz 不变量. 共轭动量密度

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \tag{17}$$

Hamilton 量也可以写成 Hamilton 量密度的空间积分

$$H = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \, \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \tag{18}$$

之后我们直接把 Lagrange 量密度叫做 Lagrange 量，其它的量同理.

例 1.1 ((Klein-Gordan 场论)). Klein-Gordan 场是可想象的最简单的场论，它是标量场 $\phi(x)$，Lagrange 量为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{KG}} = \frac{1}{2} \partial_{\mu}\phi \partial^{\mu}\phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{19}$$

其共轭动量为

$$\pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi} \tag{20}$$

Hamilton 量为

$$\mathcal{H}=\dot{\phi}\pi-\mathcal{L}=\frac{1}{2}\dot{\pi}^2+\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi+\frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{21}$$

值得注意的是，Hamilton 量是正定的，这符合我们的预期，因为 Hamliton 量的物理意义就是系统的能量（密度）.

系统的 Lagrange 量包含动能项和相互作用项. 自由场只包含动能项，它是场量的二次型. 相互作用项至少包含场量的三次项，比如 $g\phi^3$、$\lambda\phi^4$、$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$、$g\partial_\mu\phi A^\mu\phi^*$ 等等.

和经典力学一样，我们要求实际物理过程的作用量 S 取极值，则可以通过变分法求得场的运动方程.

$$\begin{aligned}
\delta S&=\int \mathrm{d}^4x\,\delta\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\\
&=\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right]\\
&=\int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\right\}\delta\phi+\text{surface term}\\
&=0
\end{aligned} \tag{22}$$

因为 $\delta\phi$ 是任意的变分，要求被积函数总为 0. 于是得到 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]=0 \tag{23}$$

例 1.2 (（KG 场的运动方程）). 对 KG 场的 Lagrange 量求偏导数得 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=-m^2\phi$，$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}=\partial^\mu\phi$，从而得

$$\Box\phi+m^2\phi=0 \tag{24}$$

这和相对论性量子力学中的 KG 方程在形式上是一致的，但是这里的 ϕ 是一个经典场，没有量子力学的几率诠释.

1.3 对称性与守恒律

所谓对称性是指在某一变换下，系统的动力学不变. 这可以从两个视角来看. 第一种视角就是系统的运动方程不变，这是最直接的. 从第二种视角来看，系统的运动方程是由作用量变分为零得到的，所以只需保证系统的作用量不变. 如果变换是 Lorentz 变换，因为 d^4x 不变，只用要求 Lagrange 量不变，即 $\mathcal{L}'(x')=\mathcal{L}(x)$.

下面我们从两种角度检验 KG 场论的 Lorentz 对称性. 在 Lorentz 变换 $x'^\mu=\Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 下 $\phi'(x)=\phi(\Lambda^{-1}x)$，从而

$$\partial_\mu\phi(x)\xrightarrow{\Lambda}\partial_\mu\phi'(x)=\partial_\mu\phi(\Lambda^{-1}x)=(\Lambda^{-1})^\nu_\mu(\partial_\nu\phi)(\Lambda^{-1}x) \tag{25}$$

故

$$\begin{aligned}
[\partial_\mu\phi(x)]^2&\xrightarrow{\Lambda} g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi'(x)\partial_\nu\phi'(x)\\
&=g^{\mu\nu}\left[(\Lambda^{-1})^\rho_\mu\partial_\rho\phi\right]\left[(\Lambda^{-1})^\sigma_\nu\partial_\sigma\phi\right](\Lambda^{-1}x)\\
&=g^{\rho\sigma}(\partial_\rho\phi)(\partial_\sigma\phi)(\Lambda^{-1}x)\\
&=(\partial_\mu\phi)^2(\Lambda^{-1}x)
\end{aligned} \tag{26}$$

即

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2\xrightarrow{\Lambda}\mathcal{L}'(x)=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2(\Lambda^{-1}x)+\frac{1}{2}m^2\phi^2(\Lambda^{-1}x)=\mathcal{L}(\Lambda^{-1}x) \tag{27}$$

即 $\mathcal{L}$ 是 Lorentz 不变的. 另一方面

$$
\begin{aligned}
(\Box + m^2)\phi'(x) &= (g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\phi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \left[g^{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}\partial_\nu(\Lambda^{-1})^{\sigma\mu}\partial_\sigma + m\right]\phi(\Lambda^{-1}x) \\
&= (\Box + m^2)\phi(\Lambda^{-1}x) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{28}
$$

即运动方程不变.

Lorentz 变换是连续变换的，即变换的参数是连续变量，共有 6 个参数刻画 Lorentz 变换. 时空平移变换也是连续的，由 4 个连续参数刻画.Lorentz 变换和平移变换合起来为 Póincare 变换，由 10 个参数刻画. 系统在连续变换下的对称性称为连续对称性，在时空坐标变换下的对称性称为时空对称性. 此外，还存在一些分立的或者与时空无关的场量自身的变换. 系统在分立变换下的对称性称为分立对称性，在场量自身变换下的对称性称为内禀对称性. 比如 $\phi \to -\phi$，KG 场的 Lagrange 量不变，这称为 Z_2 对称性，是一个分立的内禀对称性. 再比如，对复的 KG 场

$$
\mathcal{L}_{\text{CKG}} = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)^* - m^2\phi\phi^* \tag{29}
$$

它在变换 $\phi \to \phi' = e^{\mathrm{i}\theta}\phi, \quad \phi'^* = e^{-\mathrm{i}\theta}\phi^*$ 下不变，这称为 $U(1)$ 对称性，是一个连续的内禀对称性.

下面我们引入现代物理学中地位极高的 Nother 定理. 它指出，如果系统具有某种**连续**对称性，那么，当**运动方程满足**时，该系统存在相应的守恒律. 下面我们来证明这一深刻的定理. 回顾对称性变换的两种视角，主动视角即时空点本身发生了变化，被动观点即时空点没有发生变化，由于参考系的选取不同，造成坐标不同，我们采用被动视角. 时空点 P 固定，在坐标系 x^μ 中，场对坐标的依赖关系为 $f(x^\mu)$. 经过无穷小变换 $x \to x' = x + \delta x$ 得到坐标系 x'^μ，其中场对坐标的依赖关系为 $f'(x'^\mu)$. 坐标变换是可以改变场的位形的，即使是同一物理点的场量在坐标变换前后也可以有不同的数值. 则场点 P 处场的变化为

$$
\begin{aligned}
\delta f &= f'(x') - f(x) \\
&= f'(x + \delta x) - f(x) \\
&= f'(x) - f(x) + \delta x^\mu\partial_\mu f + O(\delta^2) \\
&= \delta_0 f + \delta x^\mu\partial_\mu f
\end{aligned}
\tag{30}
$$

或者简单地写为

$$
\delta = \delta_0 + \delta x^\mu\partial_\mu \tag{31}
$$

其中 δ 是场总的变化，δ_0 是场位形变化引起的变化，最后一项是同一坐标描述的场点已经不同. 坐标变换下系统的作用量必须不变，于是

$$
0 = \delta S = \int \left[\delta(\mathrm{d}^4x)\mathcal{L} + \mathrm{d}^4x\,\delta\mathcal{L}\right] \tag{32}
$$

先看体积元的变分. 利用 $\det(1+M) = 1 + \mathrm{tr}M$，可得

$$
\begin{aligned}
\delta(\mathrm{d}^4x) &= \mathrm{d}^4x' - \mathrm{d}^4x \\
&= \left[\det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) - 1\right]\mathrm{d}^4x \\
&= \left[\det\left(\delta^\mu_\nu + \partial_\nu\delta x^\mu\right) - 1\right]\mathrm{d}^4x \\
&= \mathrm{tr}(\partial_\nu\delta x^\mu)\mathrm{d}^4x \\
&= \partial_\mu(\delta x^\mu)\mathrm{d}^4x
\end{aligned}
\tag{33}
$$

然后处理第二项

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \delta_0\mathcal{L} + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \\
&= \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0(\partial_\mu\phi) \\
&= \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi\right] + \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\right\}\delta_0\phi
\end{aligned}
\tag{34}
$$

根据运动方程，末式最后一项为 0. 我们之所以这么大费周章是因为 δ_0 才是固定 x 不变的变分（即等时变分），才能与 ∂_μ 交换位置. 于是

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta S \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left\{\partial_\mu(\delta x^\mu)\mathcal{L} + (\delta x^\mu)\partial_\mu\mathcal{L} + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi\right]\right\} \\
&= \int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu\left[\delta x^\mu\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi\right]
\end{aligned}
\tag{35}
$$

因为 δx^μ 和 $\delta_0\phi$ 都是任意变分，被积函数必须为 0，从而

$$
\partial_\mu j^\mu \equiv \partial_\mu\left[\delta x^\mu\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi\right] = 0 \tag{36}
$$

即 j^μ 的 4-通量为 0，我们称之为守恒流. 注意到

$$
\begin{aligned}
0 &= \int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu j^\mu \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\, (\partial_0 j^0 + \nabla\cdot\mathbf{j}) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \partial_0 \int j^0 \mathrm{d}^3x \\
&\equiv Q(t_2) - Q(t_1)
\end{aligned}
\tag{37}
$$

其中 $\nabla\cdot\mathbf{j}$ 消失是因为这是一个表面项，守恒荷

$$
Q \equiv \int j^0 \mathrm{d}^3x \tag{38}
$$

是一个演化过程中不随时间变化的量.

我们来仔细地考虑一下时空平移变换 $\delta x^\mu = a^\mu$. 对标量场而言 $\delta\phi = 0$，则我们可以知道场位形的变化 $\delta_0\phi = -\delta x^\mu\partial_\mu\phi = -a^\mu\partial_\mu\phi$. 构造守恒流

$$
j^\mu = \left[\mathcal{L}\delta^\mu_\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial_\nu\phi\right]a^\nu \tag{39}
$$

因为 a^ν 与坐标无关，故它左边中括号里的式子的 4-通量也为零. 乘以度规，可以构造能动张量

$$
T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial^\nu\phi - \mathcal{L}g^{\mu\nu} \tag{40}
$$

对应的守恒荷

$$
P^\nu = \int \mathrm{d}^3x\, T^{o\nu} \tag{41}
$$

对 $\nu = 0$，$P^0 = \int \mathrm{d}^3x\mathcal{H}$ 就是能量，对 $\nu = 1, 2, 3$

$$
\mathbf{P} = \int \mathrm{d}^3x\, \pi\cdot\nabla\phi \tag{42}
$$

为动量.

再考虑内禀变换. 内禀变换只包括场量的变换，故

$$
j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \tag{43}
$$

例 1.3 (（零质量 KG 场）). 零质量 KG 场的 Lagrange 量 $\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2$. 它具有一个移位 (shift) 对称性，即 $\phi\to\phi'=\phi+\alpha$ 下的对称性. 对应的守恒流 $j^\mu=\partial^\mu\phi\,\alpha$，可以通过 $\partial_\mu j^\mu=\Box\phi=0$ 验证这确是一个守恒流.

例 1.4 (（复 KG 场的 U(1) 对称性）). 复 KG 场的 Lagrange 量为 $\mathcal{L}=|\partial_\mu\phi|^2-m^2|\phi|^2$，在变换 $\phi\to\phi'=e^{\mathrm{i}\alpha}\phi,\quad \phi^*\to\phi'^*=e^{-\mathrm{i}\alpha}\phi^*$ 不变. 此变换对应的无穷小变换为 $\delta\phi=\mathrm{i}\alpha\phi,\quad \delta\phi^*=-\mathrm{i}\alpha\phi^*$. 对应的守恒流为

$$j^\mu=\mathrm{i}\alpha(\phi\partial^\mu\phi^*-\phi^*\partial^\mu\phi) \tag{44}$$

对应的守恒荷

$$Q=\int\mathrm{d}^3x j^\mu=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x\,(\dot\phi^*\phi-\phi^*\dot\phi) \tag{45}$$

2 KG 场的量子化

2.1 正则量子化条件

要将 KG 场量子化，我们回想一下非相对论性量子力学中我们是怎么量子化一个系统的. 那时，我们采用的是正则量子化条件，即

$$[q_i,p_j]=\mathrm{i}\delta_{ij},\quad [q_i,q_j]=[p_i,p_j]=0 \tag{46}$$

其中 i,j 标记系统的自由度. 对场，自由度是空间坐标，ϕ 刻画了场的位形，与经典力学系统的 $\mathbf{q}$ 作用一致，而 π 则对应着经典力学系统的动量. 于是，场的正则量子化条件应当为

$$[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\quad [\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)]=[\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=0 \tag{47}$$

因为场的自由度是连续的，我们用 Dirac delta 替换了 Kronecker delta. 这个条件叫做 KG 场的等时量子化条件.

弹簧床是一个经典场，它同时又可以看作是无穷多个谐振子相耦合. 我们合理地猜想 KG 场的位形也可以由无穷多个模式叠加产生. 于是，对 KG 场作平面波展开

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\tilde\phi(\mathbf{p},t) \tag{48}$$

代入 KG 方程(24)得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+|\mathbf{p}^2+m^2|\right)\tilde\phi(\mathbf{p},t)=0 \tag{49}$$

这正是一个谐振子的运动方程！且其频率 $E_\mathbf{p}=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ 和一个相对论性粒子的能量在形式上是一致的. 回忆在非相对论性量子力学中处理谐振子时，我们引入了产生湮灭算符

$$\mathbf{x}=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a+a^\dagger),\quad \mathbf{p}=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a-a^\dagger) \tag{50}$$

类似地，我们也用产生湮灭算符表示 KG 场及其正则动量

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x})&=\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}(a_\mathbf{p}e^{+\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}+a_\mathbf{p}^\dagger e^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}})\\ \pi(\mathbf{x})&=-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_\mathbf{p}}{2}}(a_\mathbf{p}e^{+\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}-a_\mathbf{p}^\dagger e^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}})\end{aligned} \tag{51}$$

这里我们假设了 $t=0$. 之所以会有 $a^\dagger$，是因为我们必须保证 KG 场算符是厄米的. 可以验证 KG 场的等时量

子化条件确实能得到满足

$$\begin{aligned}
[\phi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{y})] &= \int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\sqrt{\frac{E_\mathbf{q}}{E_\mathbf{p}}}\left([a^\dagger_{-\mathbf{p}},a_\mathbf{q}]-[a_\mathbf{p},a^\dagger_{-\mathbf{q}}]\right)e^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}\\
&= \mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_\mathbf{q}}{E_\mathbf{p}}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{q})e^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{q}\cdot\mathbf{y})}\\
&= \mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\\
&= \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})
\end{aligned}\tag{52}$$

2.2 KG 场的能谱，真空能

我们来考察 KG 场的 Hamilton 量

$$\begin{aligned}
H &= \int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\left(\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi+\frac{1}{2}m^2\phi^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}e^{\mathrm{i}(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{x}}\left[-\frac{\mathbf{pq}}{\sqrt{2E_\mathbf{p}2E_\mathbf{q}}}(a_\mathbf{p}+a^\dagger_{-\mathbf{p}})(a_\mathbf{q}+a^\dagger_{-\mathbf{q}})\right.\\
&\left.-\frac{\sqrt{E_\mathbf{p}E_\mathbf{q}}}{2}(a_\mathbf{p}-a^\dagger_{-\mathbf{p}})(a_\mathbf{q}-a^\dagger_{-\mathbf{q}})+\frac{m^2}{\sqrt{2E_\mathbf{p}2E_\mathbf{q}}}(a_\mathbf{p}+a^\dagger_{-\mathbf{p}})(a_\mathbf{q}+a^\dagger_{-\mathbf{q}})\right]\\
&= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left[(a_\mathbf{p}+a^\dagger_{-\mathbf{p}})(a_{-\mathbf{p}}+a^\dagger_\mathbf{p})\left(\frac{m^2-\mathbf{p}^2}{2E_\mathbf{p}}\right)-\frac{E_\mathbf{p}}{2}(a_\mathbf{p}-a^\dagger_{-\mathbf{p}})(a_{-\mathbf{p}}-a^\dagger_\mathbf{p})\right]\\
&= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}E_\mathbf{p}(a_\mathbf{p}a^\dagger_\mathbf{p}+a^\dagger_{-\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}})\\
&= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}E_\mathbf{p}(a_\mathbf{p}a^\dagger_\mathbf{p}+a^\dagger_\mathbf{p}a_\mathbf{p})\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}E_\mathbf{p}\left(a^\dagger_\mathbf{p}a_\mathbf{p}+\frac{1}{2}[a_\mathbf{p},a^\dagger_\mathbf{p}]\right)
\end{aligned}\tag{53}$$

$a^\dagger a$ 正是粒子数算符，这与谐振子的 Hamilton 量

$$H_{\mathrm{HSO}}=\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\omega\tag{54}$$

极其类似. 但是，我们注意到，$[a_\mathbf{p},a^\dagger_\mathbf{p}]=\delta^{(3)}(\mathbf{0})(2\pi)^3$，即 KG 场的 Hamilton 量是发散的！我们定义 KG 场的基态 $|0\rangle$ 是被任意的 a 湮灭的场态

$$a_\mathbf{p}\,|0\rangle=0\tag{55}$$

则

$$H\,|0\rangle=(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{0})\,|0\rangle\tag{56}$$

即 KG 场基态的能量是发散的，KG 场具有无穷大的零点能. 不过，我们无需担心，因为物理上我们关心的不是能量的绝对数值，而是能级间距（比如，在研究跃迁时）. 所以，我们可以校准使得 $H\,|0\rangle=0$.

我们看到 KG 场和谐振子系统是很类似的. 谐振子那里我们通过把升算符 $a^\dagger$ 连续作用在 $|0\rangle$ 上得到各个能级，对 KG 场也可以通过 $a^\dagger_\mathbf{p}$ 连续作用在 $|0\rangle$ 上得到粒子数不同的各种态. 对谐振子，有

$$[H,a^\dagger]=\omega a^\dagger,\quad [H,a]=-\omega a\tag{57}$$

对 KG 场

$$
\begin{aligned}
[H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] &= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{q}}[a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{q}}\left(a_{\mathbf{q}}^\dagger[a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{p}}] + [a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}]a_{\mathbf{q}}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{q}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})a_{\mathbf{q}} \\
&= \omega_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}
\end{aligned} \tag{58}
$$

$$
[H, a_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} \tag{59}
$$

单粒子态定义为

$$
|\mathbf{p}\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \tag{60}
$$

它对应一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子. 因为

$$
\begin{aligned}
Ha_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle &= a_{\mathbf{p}}^\dagger H |0\rangle + [H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] |0\rangle \\
&= \omega_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle
\end{aligned} \tag{61}
$$

所以 $a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ 是能量本征态，其能量为 $E_{\mathbf{p}}$. 双粒子态为 $(a_{\mathbf{p}}^\dagger)^2 |0\rangle$，这对应两个动量为 $\mathbf{p}$，也可以是 $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle$，对应着有两个粒子，其中一个的动量为 $\mathbf{p}$ 而另一个为 $\mathbf{q}$. 由

$$
\begin{aligned}
Ha_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle &= [H, a_{\mathbf{p}}^\dagger]a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle + a_{\mathbf{p}}^\dagger Ha_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle \\
&= [H, a_{\mathbf{p}}^\dagger]a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle + a_{\mathbf{p}}^\dagger[H, a_{\mathbf{q}}^\dagger] |0\rangle \\
&= E_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle + E_{\mathbf{q}}a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle \\
&= (E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle
\end{aligned} \tag{62}
$$

即 $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle$ 是能量为 $E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}$ 的本征态. n 粒子态类似.

场的动量

$$
\mathbf{P} = -\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\pi(\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\mathbf{p}a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \tag{63}
$$

可以验证

$$
[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \mathbf{p}a_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad [\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}] = -\mathbf{p}a_{\mathbf{p}} \tag{64}
$$

并且可以知道粒子态同时也是动量本征态，即

$$
\mathbf{P}a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \mathbf{p}a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \tag{65}
$$

$$
\mathbf{P}(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)(a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)\cdots(a_{\mathbf{p}_n}^\dagger) |0\rangle = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n)(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)(a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)\cdots(a_{\mathbf{p}_n}^\dagger) |0\rangle \tag{66}
$$

我们知道，$a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle$ 对应第一个粒子动量为 $\mathbf{p}_1$ 而第二个粒子的动量为 $\mathbf{p}_2$ 的态，$a_{\mathbf{p}_2}^\dagger a_{\mathbf{p}_1}^\dagger |0\rangle$ 对应第一个粒子动量为 $\mathbf{p}_2$ 而第二个粒子的动量为 $\mathbf{p}_1$ 的态，由 $[a_{\mathbf{p}_1}^\dagger, a_{\mathbf{p}_2}^\dagger] = 0$ 可知这两个态是相同的，这就是 Bose 子的 Bose-Einstein 统计. 另外，$(a_{\mathbf{p}}^\dagger)^n \neq 0$，说明可以有宏观数目的粒子凝聚在同一个态上，这就是 BEC.

从 $\langle 0|a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle = \langle 0|\, a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} |0\rangle + \langle 0|\, [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] |0\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 可以看到，$a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ 还没有被合理地归一化，因为 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 不是 Lorentz 不变的. 要构造一个归一化的粒子态，我们先考察 $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 在

Lorentz 变换下的行为. 不妨设进行了一个 z 方向上的 boost，则 $p'_z=\gamma(p_z+\beta E),\quad E'=\gamma(E+\beta p_z)$. 从而

$$\begin{aligned}
&\delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{q}')=\delta(p'_z-q'_z)=\frac{\delta(p_z-q_z)}{\frac{\mathrm{d}p'_z}{\mathrm{d}p_z}}\\
&\Rightarrow\gamma\left(1+\beta\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p_z}\right)\delta(p'_z-q'_z)=\delta(p_z-q_z)\\
&\Rightarrow\gamma\left(1+\frac{\beta p_z}{E}\right)\delta(p'_z-q'_z)=\delta(p_z-q_z)\\
&\Rightarrow E'\delta(p'_z-q'_z)=E\delta(p_z-q_z)\\
&\Rightarrow E'\delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{q}')=E\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})
\end{aligned}\tag{67}$$

即 $E\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ 是一个 Lorentz 不变量. 于是，我们应当把粒子态定义为

$$|\mathbf{p}\rangle=\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}a^\dagger_{\mathbf{p}}|0\rangle\tag{68}$$

归一化条件为

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{p}_1|\mathbf{p}_2\rangle&=\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}2E_{\mathbf{p}_2}}\langle 0|a_{\mathbf{p}_1}a^\dagger_{\mathbf{p}_2}|0\rangle\\
&=\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}2E_{\mathbf{p}_2}}\langle 0|[a_{\mathbf{p}_1},a^\dagger_{\mathbf{p}_2}]|0\rangle\\
&=2E_{\mathbf{p}_1}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)
\end{aligned}\tag{69}$$

是 Lorentz 不变的.

我们来看一看 $\phi(\mathbf{x})$ 的物理意义. 把它作用在真空上

$$\phi(\mathbf{x})|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}(a_{\mathbf{p}}e^{\mathrm{i}\mathbf{px}}+a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{-\mathrm{i}\mathbf{px}})|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}|\mathbf{p}\rangle\tag{70}$$

与非相对论性量子力学中的

$$|\mathbf{x}\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{\mathrm{i}\mathbf{px}}|\mathbf{p}\rangle\tag{71}$$

对比，可以把 $\phi(\mathbf{x})|0\rangle$ 诠释为 $\mathbf{x}$ 处有一个粒子. 当然，在量子场论中，$\mathbf{x}$ 只是自由度，永远不是力学量算符，并没有 $|\mathbf{x}\rangle$ 的概念. 考察

$$\langle 0|\phi(\mathbf{x})|\mathbf{p}\rangle=\langle 0|\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}(a_{\mathbf{q}}e^{+\mathrm{i}\mathbf{qx}}+a^\dagger_{\mathbf{q}}e^{-\mathrm{i}\mathbf{qx}})\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}a^\dagger_{\mathbf{q}}|0\rangle=e^{\mathrm{i}\mathbf{px}}\tag{72}$$

与 $\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle=e^{\mathrm{i}\mathbf{px}}$ 类似.

3 因果律

3.1 Heisenberg 绘景

截至目前，我们考虑的都是 $t=0$ 等时的情况，但是我们需要研究时间演化的问题. 为此，我们应当采用 Heisenberg 绘景

$$O_H(t,\mathbf{x})=e^{\mathrm{i}Ht}O_S(t,\mathbf{x})e^{-\mathrm{i}Ht}=e^{\mathrm{i}Ht}O_S(t=0,\mathbf{x})e^{-\mathrm{i}Ht}\tag{73}$$

算符的对易子 $[A_H,B_H]=\left[e^{\mathrm{i}Ht}Ae^{-\mathrm{i}Ht},e^{\mathrm{i}Ht}Be^{-\mathrm{i}Ht}\right]=e^{\mathrm{i}Ht}[A,B]e^{-\mathrm{i}Ht}$. ϕ 和 π 的对易子要么是 0 要么是 $\delta^{(3)}$，都是 c-数，所以 Heisenberg 绘景下场和动量的等时对易关系都保持不变. H 和 $e^{-\mathrm{i}Ht}$ 对易从而不随时间演化. 此外，由于 $e^{\mathrm{i}Ht}\phi^2(\mathbf{x})e^{-\mathrm{i}Ht}=e^{\mathrm{i}Ht}\phi(\mathbf{x})e^{-\mathrm{i}Ht}e^{\mathrm{i}Ht}\phi(\mathbf{x})e^{-\mathrm{i}Ht}=\phi^2(\mathbf{x},t)$，$H$ 可以用 t 时刻的场及动量表示. 算符的演化方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}O_H=[O_H,H]\tag{74}$$

t 时刻的场为

$$\phi_H(x) = \phi(\mathbf{x}, t) = e^{\mathrm{i}Ht}\phi(\mathbf{x})e^{-\mathrm{i}Ht} \tag{75}$$

场的时间演化

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) &= [\phi(\mathbf{x}, t), H] \\
&= \left[\phi(\mathbf{x}, t), \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}' \left\{\frac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x}', t) + \frac{1}{2}\left[\nabla\phi(\mathbf{x}', t)\right]^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2(\mathbf{x}', t)\right\}\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}'\mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\pi(\mathbf{x}', t) \\
&= \mathrm{i}\pi(\mathbf{x}, t)
\end{aligned} \tag{76}$$

同理可证

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\pi(\mathbf{x}, t) = [\pi(\mathbf{x}, t), H] = \mathrm{i}(\nabla^2 - m^2)\phi(\mathbf{x}, t) \tag{77}$$

由此可以导出

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x) = \frac{\partial}{\partial t}\pi(x) = (\nabla^2 - m^2)\phi(x) \tag{78}$$

即

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \tag{79}$$

由

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}, t) &= e^{\mathrm{i}Ht}\phi(\mathbf{x})e^{-\mathrm{i}Ht} \\
&= e^{\mathrm{i}Ht}\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}(a_\mathbf{p}e^{+\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}} + a_\mathbf{p}^\dagger e^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}})e^{-\mathrm{i}Ht} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}[a_\mathbf{p}(t)e^{+\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}} + a_\mathbf{p}^\dagger(t)e^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}}]
\end{aligned} \tag{80}$$

可见 t 时刻的场可以用 t 时刻的升降算子表示，对动量也是这样. 我们来研究升降算子随时间的演化

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_\mathbf{p}(t) &= \mathrm{i}e^{\mathrm{i}Ht}Ha_\mathbf{p}e^{-\mathrm{i}Ht} - \mathrm{i}e^{\mathrm{i}Ht}a_\mathbf{p}He^{-\mathrm{i}Ht} \\
&= \mathrm{i}e^{\mathrm{i}Ht}[H, a_\mathbf{p}]e^{-\mathrm{i}Ht} \\
&= -\mathrm{i}E_\mathbf{p}a_\mathbf{p}(t)
\end{aligned} \tag{81}$$

加上初值条件 $a_\mathbf{p}(0) = a_\mathbf{p}$，解这个微分方程得

$$a_\mathbf{p}(t) = a_\mathbf{p}e^{-\mathrm{i}E_\mathbf{p}t} \tag{82}$$

同理可得

$$a_\mathbf{p}^\dagger(t) = a_\mathbf{p}^\dagger e^{+\mathrm{i}E_\mathbf{p}t} \tag{83}$$

所以

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \phi(\mathbf{x}, t) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}[a_\mathbf{p}(t)e^{+\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}} + a_\mathbf{p}^\dagger(t)e^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}}] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}(a_\mathbf{p}e^{-\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}e^{+\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}} + a_\mathbf{p}^\dagger e^{+\mathrm{i}E_\mathbf{p}t}e^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}}) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_\mathbf{p}}}(a_\mathbf{p}e^{-\mathrm{i}px} + a_\mathbf{p}^\dagger e^{+\mathrm{i}px})\Big|_{p=(E_\mathbf{p}, \mathbf{p})}
\end{aligned} \tag{84}$$

进而

$$\pi(x) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}}(a_{\mathbf{p}}e^{-\mathrm{i}px} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{+\mathrm{i}px})\Big|_{p=(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p})} \tag{85}$$

时间演化可以看作时间平移，与之类似，可以考虑空间平移变换. 从

$$\begin{aligned}\nabla(e^{-\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}}a_{\mathbf{p}}e^{+\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}}) &= -\mathrm{i}\mathbf{P}e^{-\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}}a_{\mathbf{p}}e^{+\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}} + e^{-\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}}a_{\mathbf{p}}(+\mathrm{i}\mathbf{P})e^{-\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}} \\ &= -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}}(\mathbf{P}a_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}\mathbf{P})e^{+\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}} \\ &= \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}}\mathbf{p}a_{\mathbf{p}}e^{+\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}}\end{aligned} \tag{86}$$

以及边值条件 $\left(e^{-\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}}a_{\mathbf{p}}e^{+\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}}\right)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = a_{\mathbf{p}}$ 可得

$$e^{-\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}}a_{\mathbf{p}}e^{+\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}} = a_{\mathbf{p}}e^{+\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}} \tag{87}$$

同理有

$$e^{-\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}}a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{+\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}} = a_{\mathbf{p}}^{\dagger}e^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}} \tag{88}$$

从而

$$\phi(\mathbf{x}) = e^{-\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}}\phi(\mathbf{0})e^{+\mathrm{i}\mathbf{P}\mathbf{x}} \tag{89}$$

如果记时空平移算符 $P = (H, \mathbf{P})$，则

$$\phi(x) = e^{-\mathrm{i}Px}\phi(0)e^{\mathrm{i}Px} \tag{90}$$

3.2 两点关联函数

首先，$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0$，其物理意义即，虽然真空是涨落的，但其期望为 0. 然后我们重点考虑两点关联函数

$$D(x-y) = \langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle \tag{91}$$

我们来计算这个量. 观察可知，$\phi(x)\phi(y)$ 展开后会有 aa, $aa^{\dagger}$, $a^{\dagger}a$, $a^{\dagger}a^{\dagger}$ 四项，因为 a 作用在真空上为 0，只有 $aa^{\dagger}$ 项有非零贡献. 故

$$\begin{aligned}D(x-y) &= \langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{q}}}}e^{-\mathrm{i}(px-qy)}\langle 0|\,a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\,|0\rangle \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-\mathrm{i}p(x-y)}\end{aligned} \tag{92}$$

要验证这是一个 Lorentz 不变量，需要验证测度 $\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}$ 是 Lorentz 不变的，只需注意到 $\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\delta(p^2-m^2)\Theta(p^0)$. 验证过程如下

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}p^0\delta(p^2-m^2)\Theta(p^0) &= \int\mathrm{d}p^0\delta[(p^0)^2 - E_{\mathbf{p}}]\Theta(p^0) \\ &= \int\mathrm{d}p^0\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[\delta(p^0-E_{\mathbf{p}}) + \delta(p^0+E_{\mathbf{p}})]\theta(p^0) \\ &= \int\mathrm{d}p^0\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\delta(p^0-E_{\mathbf{p}}) \\ &= \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\end{aligned} \tag{93}$$

两点关联函数是 Lorentz 不变的这一点在物理上很好理解，因为真空和场在 Lorentz 变换下都是不变的. 为什么两点关联函数只依赖于 $x-y$ 而不是 $x^3\sin y$ 这样的东西呢？这是由时空平移不变性决定的. 我们可以把

$\phi(x)\phi(y)$ 写成 $e^{\mathrm{i}py}\phi(x-y)e^{-\mathrm{i}py}e^{\mathrm{i}py}\phi(0)e^{-\mathrm{i}py}=e^{\mathrm{i}py}\phi(x-y)\phi(0)e^{-\mathrm{i}py}$ 的形式，真空是平移不变的，故把 $e^{-\mathrm{i}py}$ 对 p 展开，领头阶以上的项都无贡献，即 $e^{-\mathrm{i}py}\left|0\right\rangle=0$，从而

$$D(x-y)=\left\langle 0\right|\phi(x-y)\phi(0)\left|0\right\rangle \tag{94}$$

这明显只依赖于 $x-y$.

若 $x-y$ 是类时间隔，可以选取一个坐标系使得 $x^0-y^0=t,\quad \mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{0}$. 则

$$\begin{aligned}D(x-y)&=\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}t}\\&=\int\frac{4\pi p^2\mathrm{d}p}{(2\pi)^3}\frac{e^{-\mathrm{i}\sqrt{p^2+m^2}t}}{2\sqrt{p^2+m^2}}\\&\sim e^{-\mathrm{i}mt},\quad t\to\infty\end{aligned} \tag{95}$$

若 $x-y$ 是类时间隔，可以选取一个坐标系使得 $x^0-y^0=0,\quad \mathbf{x}-\mathbf{y}=r\mathbf{e}_z$. 从而

$$\begin{aligned}D(x-y)&=\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}e^{\mathrm{i}\mathbf{pr}}\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\mathrm{d}p\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\, p^2\sin\theta\frac{e^{\mathrm{i}pr\cos\theta}}{2\sqrt{p^2+m^2}}\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\mathrm{d}p\int_{-1}^1\mathrm{d}x\frac{e^{\mathrm{i}prx}}{2\sqrt{p^2+m^2}}\end{aligned} \tag{96}$$

$r\to\infty$ 时，$D(x-y)\sim e^{\mathrm{i}mr}$，指数衰减但不为 0. 这说明粒子有概率在类空的两时空点之间传播，这似乎违背因果律.

我们需要更加严格地定义因果律. 量子力学中有意义的只是观测，所以我们把因果律定义为类空的两时空点处的测量彼此独立. 即若设 $O_1(x)$ 和 $O_2(y)$ 是两时空点处的力学量算符，则

$$[O_1(x),O_2(y)]=0\quad \text{if}\quad (x-y)^2<0 \tag{97}$$

满足这样条件的算符称为 Bose 型算符. 我们来考察 KG 场 $\phi(x)$ 是否是 Bose 型的.

$$\begin{aligned}[\phi(x),\phi(y)]&=\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}2E_{\mathbf{q}}}\left\{[a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{q}}^\dagger]e^{-\mathrm{i}(px-qy)}+[a_{\mathbf{p}}^\dagger,a_{\mathbf{q}}]e^{+\mathrm{i}(px-qy)}\right\}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}[e^{-\mathrm{i}p(x-y)}-e^{+\mathrm{i}p(x-y)}]\\&=D(x-y)-D(y-x)\end{aligned} \tag{98}$$

如果 $x-y$ 是类空的，可以通过连续的 Lorentz 变换把第二项的 $D(y-x)$ 变成 $D(x-y)$，从而 $[\phi(x),\phi(y)]=0$. 若为类时的，则 $[\phi(x),\phi(y)]\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}e^{-\mathrm{i}mt}-e^{+\mathrm{i}mt}\neq 0$，从而两个测量之间有因果关系.

要更清楚地看到因果律会造成哪些物理效应，我们考察复的 KG 理论. 对 CKG 理论而言 ϕ 和 ϕ^* 是独立的场量，且都可观测. 对易子是 c-数，从而可以插在真空中间，则

$$\begin{aligned}[\phi(x),\phi^*(y)]&=\left\langle 0\right|[\phi(x),\phi^*(y)]\left|0\right\rangle\\&=\left\langle 0\right|\phi(x)\phi^*(y)\left|0\right\rangle-\left\langle 0\right|\phi^*(y)\phi(x)\left|0\right\rangle\end{aligned} \tag{99}$$

因为复的 KG 场不一定是厄米的，应当有两种产生湮灭算子，分别对应粒子和“反粒子”. 即 ϕ 包含 $a+b^\dagger$ 而 ϕ^* 包含 $a^\dagger+b$，从而 $\phi(x)\phi^*(y)$ 展开后包含 $aa^\dagger,\quad ab,\quad b^\dagger a^\dagger,\quad b^\dagger b$，真空被 a 和 b 化为 0，从而只有 $aa^\dagger$ 项有非零贡献，对 $\phi^*(y)$ 而言则只有 $bb^\dagger$ 项有非零贡献. 从而应当有 $\left\langle 0\right|aa^\dagger\left|0\right\rangle=\left\langle 0\right|bb^\dagger\left|0\right\rangle$. 这说明，$b^\dagger$ 作用在真空上必然不为 0，即反粒子是存在的. 而且，反粒子的质量也应当与正粒子相同.

3.3 传播子

我们接着考察 $\langle 0|\,[\phi(x),\phi(y)]\,|0\rangle$，有

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\,[\phi(x),\phi(y)]\,|0\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[e^{-\mathrm{i}p(x-y)}-e^{+\mathrm{i}p(x-y)}\right]_{p^0=E_{\mathbf{p}}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[e^{-\mathrm{i}p(x-y)}|_{p^0=E_{\mathbf{p}}}-e^{-\mathrm{i}p(x-y)}|_{p^0=-E_{\mathbf{p}}}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{\mathrm{i}\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[e^{-\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}-e^{+\mathrm{i}E_{\mathbf{p}}(x^0-y^0)}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{\mathrm{i}\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\int\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[\frac{e^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^0-E_{\mathbf{p}}}-\frac{e^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{p^0+E_{\mathbf{p}}}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{\mathrm{i}\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\int\frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi\mathrm{i}}\frac{e^{-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2-(\mathbf{p}^2+m^2)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2}e^{-\mathrm{i}p(x-y)}
\end{aligned}
\tag{100}
$$

$\pm E_{\mathbf{p}}$ 是两个极点，取如图(1)所示的围道，从下方封闭围道. 如果我们从上方封闭围道，则围道不包围任何奇点，积分为 0. 所以，如果我们定义推迟传播子

$$
D_R(x-y)=\langle 0|\,[\phi(x),\phi(y)]\,|0\rangle\,\Theta(x^0-y^0) \tag{101}
$$

则

$$
D_R(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2}e^{-\mathrm{i}p(x-y)} \tag{102}
$$

积分围道取决于 x^0 和 y^0 的大小关系. 如果 $x^0>y^0$，就从下方封闭围道，否则就从上方封闭围道.

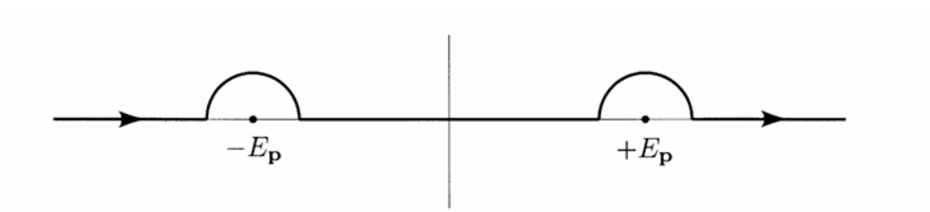

图 1: 推迟传播子的围道

在动量空间中，则有

$$
\tilde{D}_R(p)=\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2} \tag{103}
$$

从而 $(-p^2+m^2)\tilde{D}_R(p)=-\mathrm{i}m$，变回到坐标空间有

$$
(\Box+m^2)D_R=-\mathrm{i}\delta^{(4)}(x-y) \tag{104}
$$

可见 $D_R(x-y)$ 是标量场的 Green 函数.

另外一种重要的传播子是 Feynman 传播子，它的定义为

$$
D_F(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2}e^{-\mathrm{i}p(x-y)} \tag{105}
$$

但是其围道如图(2)所示. 无论我们从上方还是下方封闭围道，总有一个极点被包围，从而该积分不为 0. 我们可以引入 Feynman's iε prescription，则

$$
D_F(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon}e^{-\mathrm{i}p(x-y)} \tag{106}
$$

图 2: Feynamn 传播子的围道

在动量空间中

$$\tilde{D}_F(p) = \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{107}$$

我们也可以引入编时算符

$$TO_1(x)O_2(y) = \begin{cases} O_1(x)O_2(y), & x^0 > y^0 \\ O_2(y)O_1(x), & x^0 < y^0 \end{cases} \tag{108}$$

即它把时序在前的算子放在左边. 从而

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \theta(x^0 - y^0)D(x-y) + \theta(y^0 - x^0)D(y-x) \\ &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\,\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\,\phi(y)\phi(x)\,|0\rangle \\ &\equiv \langle 0|\,T\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle \end{aligned} \tag{109}$$