曲率

华中科技大学物理系
呜哩天才琪露诺

日期：2025 年 3 月 14 日

1　协变导数

1.1　Christoffel 符号

先考虑平直时空. 即使是平直时空，不同位置的基矢量也可能不同. 但是，这时不同位置的切矢量是可以直接比较的. 我们通过基矢量的导数定义 Christoffel 符号

$$\partial_\beta \mathbf{e}_\alpha = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\mathbf{e}_\gamma \tag{1}$$

则矢量的梯度

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{V} &= \partial_\beta(V^\alpha\mathbf{e}_\alpha)\mathrm{d}x^\beta\\ &= (\partial_\beta V^\alpha\mathbf{e}_\alpha + V^\alpha\partial_\beta\mathbf{e}_\alpha)\mathrm{d}x^\beta\\ &= (\partial_\beta V^\alpha\mathbf{e}_\alpha + V^\alpha\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\mathbf{e}_\gamma)\mathrm{d}x^\beta\\ &= (\partial_\beta V^\alpha + V^\gamma\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})\mathbf{e}_\alpha\mathrm{d}x^\beta\\ &\equiv \nabla_\beta V^\alpha\mathbf{e}_\alpha\mathrm{d}x^\beta\end{aligned}$$

其中 V^α 的协变导数为

$$\nabla_\beta V^\alpha \equiv \partial_\beta V^\alpha + V^\gamma\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \tag{2}$$

式中的 $\partial_\beta V^\alpha$ 和 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}V^\gamma$ 在坐标变换下都不按张量的变换方式变换，但协变导数整体按照张量的变换方式变换.

标量的协变导数和偏导数一致

$$\nabla_\beta\phi = \partial_\beta\phi \tag{3}$$

为了得到对偶矢量的协变导数的表达式，将协变导数作用于矢量和对偶矢量的标量积 $p_\alpha A^\alpha$ 上

$$\begin{aligned}\nabla_\beta(p_\alpha A^\alpha) &= \partial_\beta(p_\alpha A^\alpha)\\ &= (\partial_\beta p_\alpha)A^\alpha + p_\alpha(\partial_\beta A^\alpha)\\ &= (\partial_\beta p_\alpha)A^\alpha + p_\alpha(\nabla_\beta A^\alpha - A^\gamma\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})\end{aligned}$$

此外，我们要求协变导数遵循 Leibniz 律

$$\nabla_\beta(p_\alpha A^\alpha) = p_\alpha\nabla_\beta A^\alpha + A^\alpha\nabla_\beta p_\alpha \tag{4}$$

由此可得

$$\nabla_\beta p_\alpha = \partial_\beta p_\alpha - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}p_\gamma \tag{5}$$

推而广之，对一般的张量，有

$$\nabla_\beta T^{\mu\nu\cdots}_{\rho\sigma\ldots} = \partial_\beta T^{\mu\nu\cdots}_{\rho\sigma\ldots} + \Gamma^\mu_{\beta\alpha} T^{\alpha\nu\cdots}_{\rho\sigma\ldots} + \cdots - \Gamma^\alpha_{\beta\rho} T^{\mu\nu\cdots}_{\alpha\sigma\ldots} \tag{6}$$

我们考虑标量的二阶梯度

$$\nabla\nabla\Phi = \nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi\left(\hat{\theta}^\alpha\otimes\hat{\theta}^\beta\right) \tag{7}$$

在惯性参考系中，二阶协变导数即为二阶偏导数 $\partial_\alpha\partial_\beta\Phi\left(\hat{\theta}^\alpha\otimes\hat{\theta}^\beta\right)$. 偏导数有对称性 $\partial_\alpha\partial_\beta\Phi = \partial_\beta\partial_\alpha\Phi$，张量关系式在坐标系变换下不变，故协变导数也要有相同的对称性

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi = \nabla_\beta\nabla_\alpha\Phi \tag{8}$$

此即 $\partial_\alpha\partial_\beta\Phi - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma\Phi = \partial_\beta\partial_\alpha\Phi - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\partial_\gamma\Phi$，即 $(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha})\partial_\gamma\Phi = 0$，于是

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \tag{9}$$

即 Christoffel 符号关于两个下指标对称.

另一方面，在惯性参考系中 $\nabla\eta = 0$，于是对一般的参考系也应有 $\nabla\mathbf{g} = 0$，这要求

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0 \tag{10}$$

轮换三个指标可得

$$\begin{aligned}
\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} &= \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} g_{\mu\beta} - \Gamma^\mu_{\gamma\beta} g_{\mu\alpha} = 0 \\
\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} &= \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} g_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} g_{\mu\beta} = 0 \\
\nabla_\beta g_{\alpha\gamma} &= \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\alpha} g_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} g_{\mu\alpha} = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

前两式相加减去第三式得

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\gamma}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \equiv g^{\mu\gamma}\Gamma_{\alpha\beta\mu} \tag{12}$$

1.2 平行移动

若时空是弯曲的，则不同点处的矢量无法直接相比较. 如果我们要定义矢量的导数，则需要比较 P 处的矢量 $A^\alpha(P)$ 和相距无穷近的 Q 处的矢量 $A^\alpha(Q)$. 我们必须先把 P 处的矢量平移到 Q 处，得到 $A^\alpha(P\to Q)$，如图(1)所示. 我们让

$$A^\alpha_{PT}(P\to Q) = A^\alpha(P) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}A^\gamma \tag{13}$$

则

$$D_\beta A^\alpha = \frac{A^\alpha(Q) - A^\alpha_{PT}(P\to Q)}{\mathrm{d}x^\beta} = \partial_\beta A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}A^\gamma \tag{14}$$

这和前面定义的协变导数是一致的.

沿某参数曲线移动一矢量，则协变导数

$$\frac{DA^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{DA^\alpha}{\mathrm{d}x^\beta}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = u^\beta\nabla_\beta A^\alpha \tag{15}$$

其中 $u^\beta \equiv \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}$ 是曲线的切矢量. 若 $\frac{DA^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} = 0$，则我们说矢量场 A^α 沿参数曲线是平行移动的.

由

$$\left.\frac{DA^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\mathrm{PT}} = u^\beta\nabla_\beta A^\alpha = u^\beta(\partial_\beta A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}A^\gamma) = 0 \tag{16}$$

可知

$$\left.\frac{\mathrm{d}A^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\mathrm{PT}} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta A^\gamma \tag{17}$$

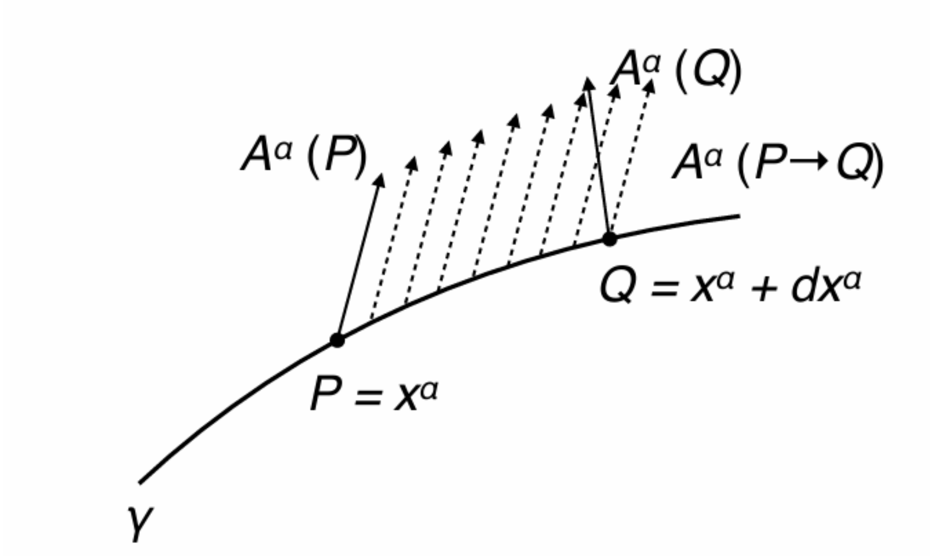

图 1: 平行移动

而在 LLF 中，$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$，所以在局部惯性系中

$$\left.\frac{\mathrm{d}A^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\mathrm{PT}}=0 \tag{18}$$

即我们沿曲线平行移动一矢量，其诸分量不变，这符合我们的直觉.

2 时空的对称性

2.1 Lie 导数

设 P 的坐标为 x^{α}，Q 的坐标为 $x^{\alpha}+\mathrm{d}x^{\alpha}\equiv(x')^{\alpha}$. 我们把从 P 到 Q 的平移看成坐标变换，则

$$\begin{aligned}A^{\alpha}_{\mathrm{LT}}(P\to Q)&=\frac{\partial(x')^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}A^{\beta}(P)\\&=(\delta^{\alpha}_{\beta}+\partial_{\beta}u^{\alpha}\mathrm{d}\lambda)A^{\beta}(P)\\&=A^{\alpha}(P)+\partial_{\beta}u^{\alpha}A^{\beta}(P)\mathrm{d}\lambda\end{aligned} \tag{19}$$

另一方面

$$\begin{aligned}A^{\alpha}(Q)&=A^{\alpha}(x^{\beta}+\mathrm{d}x^{\beta})\\&=A^{\alpha}(P)+(u^{\beta}\mathrm{d}\lambda)\partial_{\beta}A^{\alpha}\end{aligned} \tag{20}$$

故

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{u}}A^{\alpha}&=\frac{A^{\alpha}(Q)-A^{\alpha}_{\mathrm{LT}}(P\to Q)}{\mathrm{d}\lambda}\\&=u^{\beta}(\partial_{\beta}A^{\alpha})-A^{\beta}(\partial_{\beta}u^{\alpha})\end{aligned} \tag{21}$$

不难发现

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}A^{\alpha}=u^{\beta}\nabla_{\beta}A^{\alpha}-A^{\beta}\nabla_{\beta}u^{\alpha} \tag{22}$$

推而广之，对一般的张量，Lie 导数为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{u}} T^{\alpha}_{\beta} &= u^{\lambda}\partial_{\lambda}T^{\alpha}_{\beta} - T^{\lambda}_{\beta}\partial_{\lambda}u^{\alpha} + T^{\alpha}_{\lambda}\partial_{\beta}u^{\lambda} \\ &= u^{\lambda}\nabla_{\lambda}T^{\alpha}_{\beta} - T^{\lambda}_{\beta}\nabla_{\lambda}u^{\alpha} + T^{\alpha}_{\lambda}\nabla_{\beta}u^{\lambda}\end{aligned} \tag{23}$$

2.2 Lie 平移与对称性

对一条参数为 λ 的曲线，可以取坐标系使 $x^0 = \lambda$，则沿这条曲线 $x^1 = x^2 = x^3 = \text{const.}$ 于是，曲线的切矢量

$$u^{\alpha} = \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda} = \delta^{\alpha}_{0} \tag{24}$$

从而在曲线上每一点处都有 $\partial_{\mu}u^{\alpha} = 0$. 现在假设某张量 T 沿这条曲线是 Lie 移动的，即 $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(T) = 0$. 而 $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(T)$ 除了 $u^{\alpha}\partial_{\alpha}(T)$ 之外的项都含 u^{α} 的偏导数，从而为 0. 则

$$u^{\alpha}\partial_{\alpha}(T) = \frac{\partial_{\alpha}(T)}{\partial x^0} = 0 \tag{25}$$

即张量沿这条曲线是不变的，张量与坐标 x^0 无关.

2.3 Killing 矢量

现在我们考虑度规张量 $g_{\alpha\beta}$，根据上一小节的讨论，若 $g_{\alpha\beta}$ 沿某个矢量场 ξ 是 Lie 移动的，则存在某个坐标 x^0 使 $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = 0$. 反过来也是成立的，若 $g_{\alpha\beta}$ 与某个坐标无关，则存在一个矢量场 ξ 使 $g_{\alpha\beta}$ 沿 ξ 是 Lie 移动的. 这种情况下

$$\mathcal{L}_{\xi}g_{\alpha\beta} = \xi^{\gamma}\nabla_{\gamma}g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\gamma}\nabla_{\beta}\xi^{\gamma} + g_{\gamma\beta}\nabla_{\alpha}\xi^{\gamma} = 0 \tag{26}$$

由于度规张量的协变导数为 0，式子中的第一项为 0，且 ∇ 和 g 可以交换顺序，于是

$$\nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \nabla_{\beta}\xi_{\alpha} = 0 \tag{27}$$

此即 Killing 方程.ξ 称为 Killing 矢量场，它刻画了时空所具有的对称性.

2.4 Party tricks

我们要求矢量的散度 $\nabla_{\alpha}A^{\alpha}$，则需要求 $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}$.

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\mu\beta}(\partial_{\mu}g_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha}g_{\mu\beta} - \partial_{\beta}g_{\mu\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\beta}\partial_{\alpha}g_{\mu\beta} \\ &= \frac{1}{2}\partial_{\alpha}\ln|g| \\ &= \frac{\partial_{\alpha}\left(\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}\end{aligned} \tag{28}$$

这里我们用到了

$$\partial_{\alpha}\ln|g| = g^{\mu\beta}\partial_{\alpha}g_{\mu\beta} \tag{29}$$

我们用矩阵证明这一点. 对矩阵 M，若其发生一个变化 δM，则 $\ln\det M$ 的变化

$$\begin{aligned}\delta\ln\det M&=\ln[\det(M+\delta M)]-\ln\det M\\&=\ln\left[\frac{\det(M+\delta M)}{\det M}\right]\\&=\ln[\det(I+M^{-1}\delta M)]\\&=\ln\left[1+\operatorname{tr}(M^{-1}\delta M)\right]\\&=\operatorname{tr}(M^{-1}\delta M)\end{aligned}\tag{30}$$

把 M 换成 $g_{\alpha\beta}$，则 M^{-1} 变成 $g^{\alpha\beta}$，$\delta\ln|g|=\operatorname{tr}\left(g^{\mu\beta}\delta g_{\beta\gamma}\right)=g^{\mu\beta}\delta g_{\beta\mu}$. 除以 δx^α 即得(29).

于是

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha A^\alpha&=\partial_\alpha A^\alpha+\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}A^\beta\\&=\partial_\alpha A^\alpha+\Gamma^\beta_{\beta\alpha}A^\alpha\\&=\partial_\alpha A^\alpha+\frac{\partial_\alpha\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}A^\alpha\\&=\partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}A^\alpha\right)\frac{1}{\sqrt{|g|}}\end{aligned}\tag{31}$$

即矢量的散度只含偏导数. 于是，Gauss 定理在弯曲时空上亦成立

$$\int_V(\nabla_\alpha A^\alpha)\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}^4x=\int_V\partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}A^\alpha\right)\,\mathrm{d}^4x=\oint_{\partial V}A^\alpha\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}\Sigma_\alpha\tag{32}$$

这一点对张量是否成立？并不

$$\nabla_\alpha A^{\alpha\beta}=\partial_\alpha A^{\alpha\beta}+\Gamma^\alpha_{\alpha\gamma}A^{\gamma\beta}+\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}A^{\alpha\gamma}\tag{33}$$

由于最后一项的存在，简化是不可行的. 另外，即使可以简化，也毫无意义. 比如，能动张量 $T^{\alpha\beta}$ 的散度 $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}$ 是一个 4-矢量，但弯曲时空中，我们无法对 4-矢量做积分，因为不同点处的切空间是不同的，所以这不能给我们有意义的积分结果.

3 测地线

3.1 弯曲时空中质点的运动

局部惯性系中，自由质点的轨迹为一条直线，而直线的切矢量沿直线是平行移动的. 很自然地，在弯曲时空中，自由质点的轨迹应当是这样一条曲线 γ，其切矢沿自身是平行移动的

$$\frac{Du^\beta}{\mathrm{d}\lambda}=u^\alpha\nabla_\alpha u^\beta=0\tag{34}$$

这类曲线称为测地线. 把协变导数展开可得

$$\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}\lambda}+\Gamma^\beta_{\alpha\mu}u^\alpha u^\mu=0\tag{35}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^\beta_{\alpha\mu}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}=0\tag{36}$$

测地线方程中的参数 λ 称为仿射参数，λ 可以看成沿世界线的“打点计时器”. 对类时世界线，仿射参数可以自然地取为固有时 τ. 显然，若 λ 是仿射参数，则 $\lambda'=a\lambda+b$ 也是仿射参数，a 相当于更换了计时单位，b 相当于改变了初始计时时刻.

3.2 变分法

测地线的另一种导出方式是根据最小作用量原理，即连接时空中两点的世界线应当使得作用量

$$S=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L\left(x^\mu,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda \tag{37}$$

取极小值. 由 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{\alpha\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right)-\frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \tag{38}$$

最后即得测地线方程.

3.3 沿测地线的守恒量

选取固有时为仿射参数时，u_α 即为 4-速度，和 4-动量只差了一个质量，故(34)可以写成

$$p^\alpha\nabla_\alpha p^\beta=0 \tag{39}$$

因为度规和协变导数可对易，有

$$p^\alpha\nabla_\alpha p_\beta=m\frac{\mathrm{d}p_\beta}{\mathrm{d}\tau}-\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}p^\alpha p_\gamma=0 \tag{40}$$

故

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}p_\beta}{\mathrm{d}\tau}&=\Gamma_{\gamma\beta\alpha}p^\alpha p^\gamma\\ &=\frac{1}{2}(\partial_\beta g_{\alpha\gamma}+\partial_\alpha g_{\beta\gamma}-\partial_\gamma g_{\alpha\beta})p^\alpha p^\gamma\\ &=\frac{1}{2}\partial_\beta g_{\alpha\gamma}p^\alpha p^\gamma \end{aligned} \tag{41}$$

后两项相消是因为指标 α,γ 的对称性. 于是，我们可以看到，$\partial_\beta g_{\alpha\gamma}=0$ 则 $\frac{\mathrm{d}p_\beta}{\mathrm{d}\tau}=0$. 即：若度规不依赖于某个坐标，则该坐标对应的动量沿世界线是守恒的.

我们知道，若 $\partial_\beta g_{\alpha\gamma}=0$，则存在 Killing 矢量 ξ^β，考虑 $p^\beta\xi_\beta$ 沿世界线的变化

$$\begin{aligned} m\frac{D}{\mathrm{d}\tau}\left(p^\beta\xi_\beta\right)&=p^\alpha\nabla_\alpha(p^\beta\xi_\beta)\\ &=p^\alpha(\nabla_\alpha p^\beta)\xi_\beta+p^\alpha p^\beta(\nabla_\alpha\xi_\beta)\\ &=0+p^\alpha p^\beta\nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)}\\ &=\frac{1}{2}p^\alpha p^\beta(\nabla_\alpha\xi_\beta+\nabla_\beta\xi_\alpha)\\ &=0 \end{aligned} \tag{42}$$

4 曲率张量

4.1 Riemann 张量及其对称性

曲率的直观图像是，将矢量沿曲面上一条闭合曲线平移一周，则矢量会发生变化. 如图(2)所示，矢量沿 $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}$ 平移，则平移后的矢量与原来矢量会有一个 90° 的夹角，这在平面上是不可能的.

取图(3)所示的菱形闭合轨迹，且只考虑 x^σ 和 x^λ 两个坐标. 将矢量 V^α 沿 $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{A}$ 平行移动. 因为是平行移动，所以 $\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\sigma}=-\Gamma^\alpha_{\sigma\mu}V^\mu$. 故

$$V^\alpha(B)=V^\alpha_I-\int_{\mathrm{I}}\Gamma^\alpha_{\sigma\mu}V^\mu\mathrm{d}x^\sigma \tag{43}$$

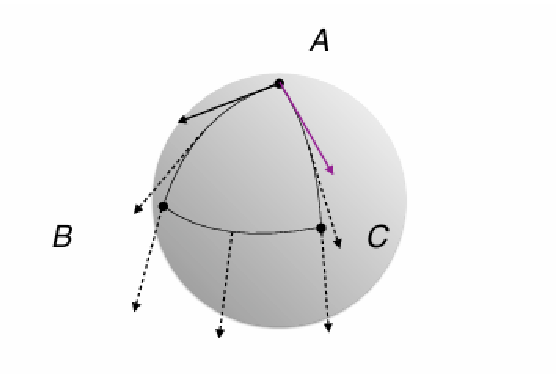

图 2: 球面上的平移

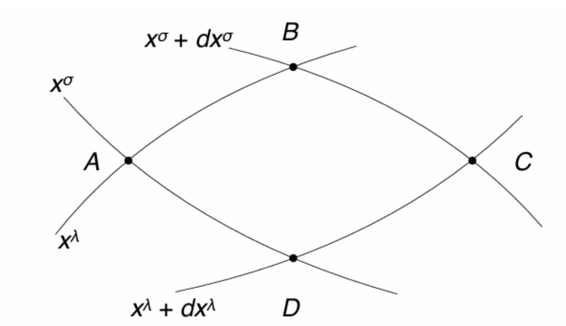

图 3: 菱形闭合轨迹

对其它几段路径也是类似. 最终

$$\begin{aligned}\delta V^\alpha &= V_F^\alpha - V_I^\alpha \\ &= \int_{\mathrm{IV}} \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} V^\mu \mathrm{d}x^\lambda - \int_{\mathrm{II}} \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} V^\mu \mathrm{d}x^\lambda + \int_{\mathrm{III}} \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} V^\mu \mathrm{d}x^\sigma - \int_{\mathrm{I}} \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} V^\mu \mathrm{d}x^\sigma \\ &= -\delta x^\sigma \int_{\mathrm{II}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} V^\mu\right) \mathrm{d}x^\lambda + \delta x^\lambda \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} V^\mu\right) \mathrm{d}x^\sigma \\ &= \delta x^\lambda \delta x^\sigma \left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} V^\mu\right) - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} V^\mu\right)\right] \\ &= \delta x^\lambda \delta x^\sigma (\partial_\lambda \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} V^\mu - \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} V^\mu + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \partial_\lambda V^\mu - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \partial_\sigma V^\mu) \\ &= \delta x^\lambda \delta x^\sigma V^\mu (\partial_\lambda \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} + \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} \Gamma^\beta_{\sigma\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} \Gamma^\beta_{\lambda\mu})\end{aligned} \tag{44}$$

我们定义

$$R^\alpha_{\mu\lambda\sigma} \equiv \partial_\lambda \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} + \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} \Gamma^\beta_{\sigma\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} \Gamma^\beta_{\lambda\mu} \tag{45}$$

为 Riemann 曲率张量. 它的前两项是 Christoffel 符号的导数，也就是度规张量的二阶导，这些项无法通过参考系的选择消去. 后两项是 Christoffel 符号的非线性项，这说明由 Riemann 曲率张量导出的微分方程都是非线性的.

Riemann 张量的另一种定义是

$$[\nabla_\lambda, \nabla_\sigma] V^\alpha \equiv R^\alpha_{\mu\lambda\sigma} V^\mu \tag{46}$$

此式可以推广为

$$[\nabla_\sigma, \nabla_\lambda] T^{\gamma\delta\dots}_{\alpha\beta\dots} = R^\gamma_{\mu\sigma\lambda} T^{\mu\delta\dots}_{\alpha\beta\dots} + \cdots - R^\mu_{\alpha\sigma\lambda} T^{\gamma\delta\dots}_{\mu\beta\dots} \tag{47}$$

下面我们来考虑 Riemann 张量的对称性. 首先，显然有

$$R^\alpha_{\mu\lambda\sigma} = -R^\alpha_{\mu\sigma\lambda} \tag{48}$$

交换 λ, σ 指标相当于闭合路径取反向，曲率也取反. 其次，我们将 Riemann 张量的上指标下降，即 $R_{\alpha\mu\lambda\sigma} = g_{\alpha\nu} R^\nu_{\mu\lambda\sigma}$. 取局部惯性系，则 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \Gamma = 0$ 而 $\partial\Gamma \neq 0$，则

$$R_{\alpha\mu\lambda\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\sigma} + \partial_\sigma \partial_\alpha g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \partial_\alpha g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \partial_\mu g_{\alpha\lambda}) \tag{49}$$

从而显然有下面的对称性

$$R_{\alpha\mu(\lambda\sigma)} = 0 \tag{50}$$

$$R_{\alpha\mu\lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\alpha\mu} \tag{51}$$

$$R_{\alpha[\mu\lambda\sigma]}=0 \tag{52}$$

Riemann 张量有 4 个指标，n 维空间中每个指标有 n 个可能取值，共 n^4 个自由度，但是对称性的限制会使自由度减少. 两个指标的交换反对称性(50)会使 n^2 变成 $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$（不允许两个指标相同，因为对应的张量分量为 0）. 而分块对称性(51)使我们把 $\alpha\mu$ 和 $\lambda\sigma$ 看成两个指标，每个指标有 $N=\frac{n(n-1)}{2}$ 种可能取值，两指标的对称性使得自由度减为 $\binom{N}{2}+N=\frac{N(N+1)}{2}=\frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}$（允许两个指标相同）. 最后考虑循环对称性(52)，综合考虑其它几个对称性，实际上可以写 $R_{[\alpha\mu\lambda\sigma]}=0$. 这带来 $\binom{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ 个约束. 最终，Riemann 张量总的自由度数目为

$$\frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=\frac{n^2(n^2-1)}{12} \tag{53}$$

$n=1$ 时，自由度数目为 0，这说明一维流形没有内禀曲率，这是符合直觉的.$n=2$ 时，自由度数目为 1，这说明曲面的曲率可以用曲率半径来描述.$n=4$ 时，自由度数目为 20，这正是之前 Riemann 法坐标中使 $\partial\partial g=0$ 时缺少的 20 个自由度.

4.2 Ricci 张量与 Ricci 标量

我们可以对 Riemann 张量的第 $1,3$ 指标取迹（由于对称性，其它指标对应的迹都是 0），得到 Ricci 张量

$$R_{\mu\nu}\equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}=g^{\alpha\beta}R_{\beta\mu\alpha\nu} \tag{54}$$

将 Riemann 曲率张量展开

$$R_{\mu\nu}=\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu}-\partial_\nu\Gamma^\alpha_{\alpha\nu}+\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\nu\mu}-\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\mu} \tag{55}$$

后两项相互抵消，第一项显然关于 μ,ν 对称，第二项是 $\partial_\nu\partial_\mu\left(\ln\sqrt{|g|}\right)$ 也关于 μ,ν 对称. 于是，Ricci 张量关于它的两个下指标对称. 在 4 维时空中，Ricci 张量有 $\binom{4}{2}+4=10$ 个独立分量，可以启发性地把它看成“半个 Riemann 张量”.Ricci 张量的迹称为 Ricci 标量

$$R\equiv R^\mu_\mu=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{56}$$

我们可以定义 Weyl 张量

$$C_{\alpha\mu\lambda\sigma}=R_{\alpha\mu\lambda\sigma}-\frac{2}{n-2}\left(g_{\alpha[\lambda}R_{\sigma]\mu}-g_{\mu[\lambda}R_{\sigma]\alpha}\right)+\frac{2}{(n-2)(n-1)}g_{\alpha[\lambda}g_{\sigma]\mu}R \tag{57}$$

它有着与 Riemann 张量相同的对称性，且其关于 $1,3$ 指标的迹为 0. 故 Weyl 张量有 10 个独立分量，它可以看成“另外半个 Riemann 张量”，即

$$\text{Riemann}\longleftrightarrow\text{Ricci}+\text{Weyl} \tag{58}$$

4.3 测地线偏离

曲率的另一个直观图像是 Eculid 第五公设的破坏，即平行线可以相交. 比如，在球面上相互平行的纬线，会在南北极点汇聚. 直线在弯曲时空中的对应就是测地线，于是，我们要研究两条初始平行的测地线如何“偏离”平行. 如图(4)，两条测地线 $\gamma_{\mathbf{u}}$ 和 $\gamma_{\mathbf{v}}$，其切矢量场分别为 $\mathbf{u}(\lambda)$ 和 $\mathbf{v}(\lambda)$. 在 A 点和 A' 点，两曲线的参数同为 λ_0，且 $\mathbf{u}(\lambda_0)=\mathbf{v}(\lambda_0)$. 取 $\xi(\lambda)=\mathbf{x}(\lambda)|_{\gamma_{\mathbf{v}}}-\mathbf{x}(\lambda)|_{\gamma_{\mathbf{u}}}$，求 ξ 随 λ 的演化.

取 A 处的局部惯性系，则 $g_{\mu\nu}|_A=\eta_{\mu\nu}$, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}|_A=0$, $g_{\mu\nu}|_{A'}=\eta_{\mu\nu}$, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}|_{A'}=\partial_\beta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\xi^\beta$.$A$ 处和 A' 处的测地线方程分别为

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\lambda^2}\right|_{\gamma_{\mathbf{u}}} = 0 \tag{59}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\lambda^2}\right|_{\gamma_{\mathbf{v}}} = -\partial_\rho\Gamma^\beta_{\mu\nu}\xi^\rho u^\mu u^\nu \tag{60}$$

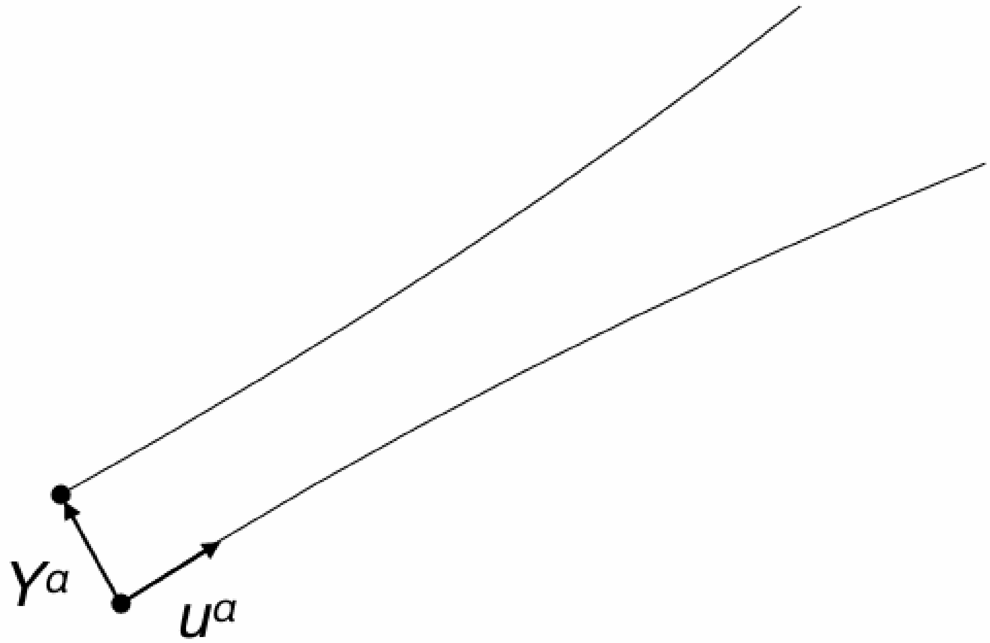

图 4: 测地线偏离

故

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\xi^\beta}{\mathrm{d}\lambda^2}\right|_{\lambda_0} = -\partial_\rho\Gamma^\beta_{\mu\nu}\xi^\rho u^\mu u^\nu \tag{61}$$

这个式子的右边并不是张量，因此我们应该考虑二阶协变导数而不是二阶导数. 二阶协变导数

$$\begin{aligned}
\frac{D^2\xi^\beta}{\mathrm{d}\lambda^2} &= \frac{D}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}\xi^\beta}{\mathrm{d}\lambda} + u^\nu\xi^\rho\Gamma^\beta_{\nu\rho}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}\xi^\beta}{\mathrm{d}\lambda} + u^\nu\xi^\rho\Gamma^\beta_{\nu\rho}\right) + u^\alpha\Gamma^\beta_{\alpha\sigma}\left(\frac{\mathrm{d}\xi^\sigma}{\mathrm{d}\lambda} + u^\nu\xi^\rho\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2\xi^\beta}{\mathrm{d}\lambda^2} + u^\nu\xi^\rho\frac{\mathrm{d}\Gamma^\beta_{\nu\rho}}{\mathrm{d}\lambda} + \text{terms that contain } \Gamma \\
&= \frac{\mathrm{d}^2\xi^\beta}{\mathrm{d}\lambda^2} + u^\mu u^\nu\xi^\rho\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\rho} \\
&= (\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\beta_{\mu\nu})\xi^\rho u^\mu u^\nu \\
&= R^\beta_{\rho\mu\nu}\xi^\rho u^\mu u^\nu
\end{aligned} \tag{62}$$

即在局部参考系中 $\frac{D^2\xi^\beta}{\mathrm{d}\lambda^2} = R^\beta_{\rho\mu\nu}\xi^\rho u^\mu u^\nu$. 等式两侧都是张量，故在一切参考系中都成立.

4.4 Bianchi 恒等式与 Einstein 张量

首先，由(47)可得

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\nabla_\gamma p_\delta = -R^\mu_{\gamma\alpha\beta}\nabla_\mu p_\delta - R^\mu_{\delta\alpha\beta}\nabla_\gamma p_\mu \tag{63}$$

其次

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha[\nabla_\rho,\nabla_\gamma]p_\delta &= \nabla_\alpha(-R^\mu_{\delta\beta\gamma}p_\mu)\\ &= -p_\mu\nabla_\alpha R^\mu_{\delta\beta\gamma} - R^\mu_{\delta\beta\gamma}\nabla_\alpha p_\mu\\ &= -p^\mu\nabla_\alpha R_{\mu\delta\beta\gamma} - R^\mu_{\delta\beta\gamma}\nabla_\alpha p_\mu\end{aligned} \tag{64}$$

最后一行利用度规与协变导数对易，同时下降和上升了 R 和 p 的指标. 此外，显然由轮换关系

$$[\nabla_{[\alpha},\nabla_\beta]\nabla_{\gamma]}p_\delta = \nabla_{[\alpha}[\nabla_\beta,\nabla_{\gamma]}]p_\delta \tag{65}$$

可得

$$R^\mu_{[\gamma\alpha\beta]}\nabla_\mu p_\delta + R^\mu_{\delta[\alpha\beta}\nabla_{\gamma]}p_\mu = p^\mu\nabla_{[\alpha}R_{\beta\gamma]\mu\delta} + R^\mu_{\delta[\beta\gamma}\nabla_{\alpha]}p_\mu \tag{66}$$

左边和右边的第二项相同，且由对称性可知左边的第一项为 0，故 $p^\mu\nabla_{[\alpha}R_{\beta\gamma]\mu\delta}=0$. 因为 p^μ 是任意的，所以得到 Bianchi 恒等式

$$\nabla_{[\alpha}R_{\beta\gamma]\mu\delta}=0 \tag{67}$$

或者

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma\mu\nu}+\nabla_\beta R_{\gamma\alpha\mu\nu}+\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\mu\nu}=0 \tag{68}$$

乘以 $g^{\beta\mu}$ 得

$$\nabla_\alpha R_{\gamma\nu}+\nabla^\mu R_{\gamma\alpha\mu\nu}-\nabla_\gamma R_{\alpha\nu}=0 \tag{69}$$

再乘 $g^{\gamma\nu}$ 得

$$\nabla_\alpha R-\nabla^\mu R_{\alpha\mu}-\nabla^\nu R_{\alpha\nu}=0 \tag{70}$$

μ 和 ν 是哑指标，且 $\nabla_\alpha=\nabla^\mu g_{\alpha\mu}$，故

$$\nabla^\mu\left(R_{\alpha\mu}-\frac{1}{2}g_{\alpha\mu}R\right)=0 \tag{71}$$

定义 $G_{\mu\nu}\equiv R_{\alpha\mu}-\frac{1}{2}g_{\alpha\mu}R$ 为 Einstein 张量，则

$$\nabla^\mu G_{\mu\alpha}=0 \tag{72}$$

即 Einstein 张量是无散的.