

# 引力波的几何分析

鸣哩天才琪露諾  
华中科技大学物理学院

日期：2025年11月2日

## 1 场方程的线性化

设时空度规相对于平直时空度规有小偏移

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (1)$$

由

$$g'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\lambda (\eta_{\rho\lambda} + h_{\rho\lambda}) \equiv \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} \quad (2)$$

可知

$$h'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\lambda h_{\rho\lambda} \quad (3)$$

即  $h_{\mu\nu}$  像平直时空上的张量一样变换，所以我们用  $\eta$  升降  $h_{\mu\nu}$  的指标。设  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + m^{\mu\nu}$ ，其中  $m^{\mu\nu}$  和  $h^{\mu\nu}$  是同阶小量。由

$$\delta_\nu^\mu = g^{\mu\rho} g_{\nu\rho} = (\eta^{\mu\rho} + m^{\mu\rho})(\eta_{\nu\rho} - h_{\nu\rho}) = \delta_\nu^\mu + (m_\nu^\mu - h_\nu^\mu) + O(h^2) \quad (4)$$

得  $m_\nu^\mu = h_\nu^\mu$ ，故

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2) \quad (5)$$

考虑  $(x^\mu)' = x^\mu + \varepsilon^\mu(x^\nu)$ ，则

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\nu'}} g_{\rho\lambda} \\ &= (\delta_\mu^\rho - \partial_\mu \varepsilon^\rho)(\delta_\nu^\lambda - \partial_\nu \varepsilon^\lambda)(\eta_{\rho\lambda} + h_{\rho\lambda}) \\ &= \eta_{\mu\nu} - (\partial_\mu \varepsilon^\nu + \partial_\nu \varepsilon^\mu) + h_{\mu\nu} \\ &= g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \varepsilon^\nu + \partial_\nu \varepsilon^\mu) \end{aligned} \quad (6)$$

这和电磁学中的规范变换是一致的。

我们考虑弱场下的 Christoffel 符号

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} (\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) + O(h^2) \end{aligned} \quad (7)$$

Riemann 张量

$$\begin{aligned}
R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda} &= \partial_{\mu}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} \\
&= \frac{1}{2}\{\partial_{\mu}[\eta^{\lambda\rho}(\partial_{\sigma}h_{\rho\nu} + \partial_{\nu}h_{\rho\sigma} - \partial_{\rho}h_{\sigma\nu})] - \partial_{\nu}[\eta^{\lambda\rho}(\partial_{\sigma}h_{\rho\mu} + \partial_{\mu}h_{\rho\sigma} - \partial_{\rho}h_{\sigma\mu})]\} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h_{\rho\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h_{\rho\mu} + \partial_{\nu}\partial_{\rho}h_{\sigma\mu} - \partial_{\mu}\partial_{\rho}h_{\sigma\nu}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h_{\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h_{\mu}^{\lambda} + \partial_{\nu}\partial^{\lambda}h_{\sigma\mu} - \partial_{\mu}\partial^{\lambda}h_{\sigma\nu})
\end{aligned} \tag{8}$$

缩并

$$\begin{aligned}
R_{\sigma\nu} &= \eta_{\lambda}^{\mu}R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}h_{\nu}^{\mu} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h_{\mu}^{\mu} + \partial_{\nu}\partial^{\mu}h_{\sigma\mu} - \partial_{\mu}\partial^{\mu}h_{\sigma\nu}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_{\sigma}\partial^{\mu}h_{\mu\nu} + \partial_{\nu}\partial^{\mu}h_{\mu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h - \square h_{\sigma\nu})
\end{aligned} \tag{9}$$

再缩并得

$$\begin{aligned}
R &= \eta^{\nu\sigma}R_{\sigma\nu} \\
&= \frac{1}{2}(\partial^{\nu}\partial^{\mu}h_{\mu\nu} + \partial^{\sigma}\partial^{\mu}h_{\mu\sigma} - \square h - \square h) \\
&= \partial^{\mu}\partial^{\nu}h_{\mu\nu} - \square h
\end{aligned} \tag{10}$$

从而 Einstein 张量

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R \\
&= \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}\partial^{\mu}h_{\mu\beta} + \partial_{\beta}\partial^{\mu}h_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}\partial_{\beta}h - \square h_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}\square h - \eta_{\alpha\beta}\partial^{\mu}\partial^{\nu}h_{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{11}$$

这个表达式还是不够简洁. 我们作反迹处理, 取

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h \tag{12}$$

则  $\bar{h} = \eta^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} = h - \frac{1}{2}(4)h = -h$ . 得

$$h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h} \tag{13}$$

从而

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left\{\partial^{\gamma}\left[\partial_{\alpha}\left(\bar{h}_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\gamma}\bar{h}\right) + \partial_{\beta}\left(\bar{h}_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\gamma}\bar{h}\right)\right] + \partial_{\alpha}\partial_{\beta}\bar{h} - \square\left(\bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial^{\gamma}(\partial_{\alpha}\bar{h}_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}\bar{h}_{\alpha\gamma}) - \square\left(\bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}\right)\right]
\end{aligned} \tag{14}$$

缩并

$$R = \partial^{\alpha}\partial^{\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\square\bar{h} \tag{15}$$

则 Einstein 张量

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[-\square\bar{h}_{\alpha\beta} + \partial^{\gamma}(\partial_{\alpha}\bar{h}_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}\bar{h}_{\alpha\gamma}) - \eta_{\alpha\beta}\partial^{\mu}\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu}] \tag{16}$$

注意到除了  $-\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\alpha\beta}$  外的项都含  $\partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu}$ , 我们设法使其为 0. 考虑规范变换

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\partial_{\mu}\varepsilon^{\nu} + \partial_{\nu}\varepsilon^{\mu}) \tag{17}$$

缩并

$$h' = h - 2\partial^{\mu}\varepsilon^{\mu} \tag{18}$$

取反

$$\begin{aligned}
\bar{h}'_{\mu\nu} &= h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h' \\
&= h_{\mu\nu} - (\partial_\mu\varepsilon^\nu + \partial_\nu\varepsilon^\mu) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h - 2\partial^\mu\varepsilon^\mu) \\
&= \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\mu\varepsilon^\nu + \partial_\nu\varepsilon^\mu) + \eta_{\mu\nu}\partial^\lambda\varepsilon^\lambda
\end{aligned} \tag{19}$$

可见

$$\partial^\mu\bar{h}'_{\mu\nu} = \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} - \square\varepsilon^\mu - \partial_\nu(\partial^\mu\varepsilon^\mu) + \eta_{\mu\nu}\partial^\mu(\partial^\lambda\varepsilon^\lambda) = \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} - \square\varepsilon^\mu \tag{20}$$

只要取  $\partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} - \square\varepsilon^\mu = 0$  即可使  $\partial^\mu\bar{h}'_{\mu\nu} = 0$  从而

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} \tag{21}$$

规范条件

$$\partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{22}$$

称为 de Donder 规范.

## 2 引力波的传播

在真空中, 引力场方程变为

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{23}$$

它有平面波解

$$\bar{h}_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}e^{ik_\rho x^\rho} \tag{24}$$

波矢  $k^\rho$  满足  $k^\rho k_\rho$ , 说明真空中引力波以光速传播. 由(22)得

$$k^\mu H_{\mu\nu} = 0 \tag{25}$$

我们从(20)不难看出, 如果  $\bar{h}_{\mu\nu}$  满足 de Donder 规范且  $\square\varepsilon^\mu = 0$ , 则  $(x^\mu)' = x^\mu + \varepsilon^\mu$  导出的  $\bar{h}'_{\mu\nu}$  也符合 de Donder 规范. 这个  $\varepsilon$  会带来自由度的冗余.  $\square\varepsilon^\mu = 0$  有平面波解

$$\varepsilon^\mu = \lambda^\mu e^{ik_\rho x^\rho} \tag{26}$$

可见

$$H'_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - i(k_\mu\lambda_\nu + k_\nu\lambda_\mu - \eta_{\mu\nu}k_\rho\lambda^\rho) \tag{27}$$

于是可以取规范使得

$$H_{0\mu} = 0 \quad H_\mu^\mu = 0 \tag{28}$$

称为横向无迹规范或 TT 规范.

我们考察引力波的物理自由度. 首先  $H_{\mu\nu}$  有 10 个独立分量, de Donder 规范条件和 TT 规范各减少 4 个自由度, 真正物理的独立极化分量只有  $10 - 4 - 4 = 2$  个. TT 规范中, 必有

$$H_{00} = 0, \quad H_{0i} = 0, \quad k^i H_{ij} = 0, \quad H_i^i = 0 \tag{29}$$

因为  $\bar{h} = 0$ , 亦可以写为

$$h^{00} = h^{0i} = 0, \quad h_i^i = 0, \quad \partial^i h_{ij} = 0 \tag{30}$$

取  $k^i$  沿着  $z$  轴方向, 则  $H$  必有以下形式

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_+ & H_\times & 0 \\ 0 & H_\times & -H_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

$H_+, H_\times$  就是极化张量  $H$  的两个独立物理分量. 等价地

$$h_{ab}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \cos[\omega(t - z)], \quad a, b = 1, 2 \quad (32)$$

度规

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + \{1 + h_+ \cos[\omega(t - z)]\} dx^2 + \{1 - h_+ \cos[\omega(t - z)]\} dy^2 + 2h_\times \cos[\omega(t - z)] dxdy \quad (33)$$

随便给定一个沿  $\mathbf{n}$  方向传播的平面波解  $h_{\mu\nu}(x)$ , 它满足 Lorentz 规范条件但不满足 TT 规范条件. 我们可以通过下述方法找到 TT 规范中波的形式. 首先引入

$$P_{ij}(\mathbf{n}) = \delta_{ij} - n_i n_j \quad (34)$$

此张量对称、横向 (即  $n^i P_{ij}(\mathbf{n}) = 0$ ) 且是投影算子 ( $P_{ik} P_{kj} = P_{ij}$ ), 其迹为  $P_{ii} = 3 - 1 = 2$ . 构造 Lambda 张量

$$\Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \quad (35)$$

仍有

$$\Lambda_{ij,kl} \Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn} \quad (36)$$

且它对所有指标都是横向的, 譬如  $n^i \Lambda_{ij,kl} = n^i P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} n^i P_{ij} P_{kl} = -$ . 它对指标  $(i, j)$  和  $(k, l)$  是无迹的, 例如

$$\Lambda_{ii,kl} = P_{ik} P_{il} - \frac{1}{2} P_{ii} P_{kl} = P_{kl} - P_{kl} = 0 \quad (37)$$

并且, 它在同时交换指标  $(i, j) \leftrightarrow (k, l)$  下是反对称的. 它的完整形式是

$$\Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} + \frac{1}{2} n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2} n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2} n_i n_j n_k n_l \quad (38)$$

现在, 我们构造

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl} \quad (39)$$

显然  $h_{ij}^{TT}$  对指标  $i, j$  是横向无迹的. 而  $h_{kl}$  是 Lorentz 规范下的平面波解, 可以推出  $\square h_{ij}^{TT} = 0$ . 故  $h_{ij}^{TT}$  就是 TT 规范下的解.

### 3 引力波的能量

#### 3.1 引力波的频率分解

引力波当然携带能量, 这一点从探测器固有参照系中测试质量会因随波起伏就可以看出. 根据广义相对论, 任何形式的能量都会贡献时空曲率, 所以引力波自己是否会弯曲时空? 在线性近似引力理论中这是不可想象的, 因为时空背景总是 Minkowski 度规  $\eta_{\mu\nu}$ , 引力波只是这个背景上的涨落, 如果引力波弯曲了这个背景时空, 它也就不再是平直时空背景上的涨落了. 所以, 我们需要把引力波定义为某个动态的、弯曲的时空背景上的涨落

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x), \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (40)$$

但这又会带来模糊性. 我们没法决定  $g_{\mu\nu}$  的哪一部分属于背景, 哪一部分属于涨落.

但是, 如果存在明显的尺度差异, 我们就能够划清时空背景和引力波. 如果时空背景变化的空间尺度为  $L_B$ , 附加扰动的空间尺度由波长  $\lambda$  表征, 满足

$$\bar{\lambda} \ll L_B \quad (41)$$

或者  $\bar{g}_{\mu\nu}$  的变化频率至多  $f_B$ , 而  $h_{\mu\nu}$  在频率空间是  $f$  附近的一个峰, 其中

$$f \gg f_B \quad (42)$$

即  $h_{\mu\nu}$  是静态或缓变时空背景上的一个高频扰动. 尽管对引力波而言  $\lambda = f$ , 时空背景的  $f_B$  和  $L_B$  并无确定关系, 故两个条件是彼此独立的, 一般只要满足一个就行了. 这样的划分方法称为短波展开.

对引力波探测器而言, 一般采用频率条件. 地基探测器能接收到的引力波的典型频率是  $f \sim 10^2 - 10^3 \text{ Hz}$ , 对应约化波长  $\bar{\lambda} \sim 500 - 50 \text{ km}$ . 在这个空间尺度上, 相较于引力波, 地球引力场并不是平滑的, 山川起伏造成的度规涨落 ( $\sim 10^{-9}$ ) 比引力波 ( $\sim 10^{-21}$ ) 还要大十几个数量级. 但是, 地球的引力场是相对静态的, 很难找到与引力波同频的变化. 此外, 地基引力波探测器比它们要探测的引力波的波长要小得多, 它们并不检测大尺度上引力场的空间变化, 它们寻找引力波路过造成的短暂的引力场变化.

现在, 我们的问题是, 高频扰动如何在时空背景中传播? 以及, 这些扰动如何影响时空背景本身? 前者让我们看到这种扰动确实是“波”, 后者帮助我们搞清楚引力波的能量究竟是什么. 我们在  $\bar{g}_{\mu\nu}$  附近展开 Einstein 场方程. 这涉及两个小量, 扰动的振幅  $h \equiv O(|h_{\mu\nu}|)$ , 以及扰动和时空背景的尺度之比  $\frac{\bar{\lambda}}{L_B}$  或  $\frac{f_B}{f}$ , 取决于采用哪个条件. 首先, 把 Ricci 张量展开到  $O(h^2)$  阶

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (43)$$

这里  $\bar{R}_{\mu\nu}$  只与  $\bar{g}_{\mu\nu}$  有关,  $R_{\mu\nu}^{(1)}$  和  $R_{\mu\nu}^{(2)}$  分别是  $h_{\mu\nu}$  的线性和二次项.  $\bar{R}_{\mu\nu}$  只含  $\bar{g}_{\mu\nu}$  有关的项, 从而只包含低频模式.  $R_{\mu\nu}^{(1)}$  是  $h_{\mu\nu}$  的线性项, 从而只含高频模式.  $R_{\mu\nu}^{(2)}$  是  $h_{\mu\nu}$  的二次项, 可能出现正频和负频彼此抵消的情况 (注意度规相乘其频率相加), 因此既含高频模式又含低频模式. 于是场方程可以分解为低频和高频部分

$$\bar{R}_{\mu\nu} = - \left[ R_{\mu\nu}^{(2)} \right]^{\text{Low}} + 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)^{\text{Low}} \quad (44)$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = - \left[ R_{\mu\nu}^{(2)} \right]^{\text{High}} + 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)^{\text{High}} \quad (45)$$

上标 Low 和 High 分别指低频和高频, 或者长波和短波, 取决于用哪个条件.

我们计算出  $R_{\mu\nu}^{(1)}$ , 是

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\bar{D}^\alpha \bar{D}_\mu h_{\nu\alpha} + \bar{D}^\alpha \bar{D}_\nu h_{\mu\alpha} - \bar{D}^\alpha \bar{D}_\alpha h_{\mu\nu} - \bar{D}_\nu \bar{D}_\mu h) \quad (46)$$

以及

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{g}^{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{2} \bar{D}_\mu h_{\rho\alpha} \bar{D}_\nu h_{\sigma\beta} + (\bar{D}_\rho h_{\nu\alpha})(\bar{D}_\sigma h_{\mu\beta} - \bar{D}_\beta h_{\mu\sigma}) \right. \\ & + h_{\rho\alpha} (\bar{D}_\nu \bar{D}_\mu h_{\sigma\beta} + \bar{D}_\beta \bar{D}_\sigma h_{\mu\nu} - \bar{D}_\beta \bar{D}_\nu h_{\mu\sigma} - \bar{D}_\beta \bar{D}_\mu h_{\nu\sigma}) \\ & \left. + \left( \frac{1}{2} \bar{D}_\alpha h_{\rho\sigma} - \bar{D}_\rho h_{\alpha\sigma} \right) (\bar{D}_\nu h_{\mu\beta} + \bar{D}_\mu h_{\nu\beta} - \bar{D}_\beta h_{\mu\nu}) \right] \end{aligned} \quad (47)$$

### 3.2 低频模式与粗粒化

考虑没有物质源的情况,  $T_{\mu\nu} = 0$ . 首先我们发现, (44)的右边是  $h$  的 2 阶项, 左边却是 0 阶项, 同样地, (45)的左边是 1 阶项, 这是否矛盾? 并不矛盾, 因为我们还有  $\frac{\bar{\lambda}}{L_B}$  这个小量, 可以与小量  $h$  相抵消. 至于两个小量之间的关系如何, 我们将在下面导出. 顺带指出  $\bar{g}_{\mu\nu} \sim O(1)$ . 从(44)可以看出  $\bar{R}_{\mu\nu}$  只由  $[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{\text{Low}}$ . 从(47)可

以看出  $R_{\mu\nu}^{(2)}$  是  $(\partial h)^2$  和  $h\partial^2 h$  这样的项的和, 可以预见,  $[R_{\mu\nu}^{(2)}]_{\text{Low}}$  只含  $(\partial h)^2$  项, 则

$$\bar{R}_{\mu\nu} \sim (\partial h)^2 \quad (48)$$

这表明是扰动  $h_{\mu\nu}$  的导数影响着背景时空的曲率.  $\bar{g}_{\mu\nu}$  变化的空间尺度是  $L_B$ ,  $h$  的空间变化尺度是  $\bar{\lambda}$ , 所以

$$\partial \bar{g}_{\mu\nu} \sim \frac{1}{L_B} \quad (49)$$

且

$$\partial h \sim \frac{h}{\bar{\lambda}} \quad (50)$$

因为  $\bar{R}_{\mu\nu}$  只含背景时空度规的二阶导数, 所以

$$\bar{R}_{\mu\nu} \sim \partial^2 \bar{g}_{\mu\nu} \sim \frac{1}{L_B^2} \quad (51)$$

比对可得

$$\frac{1}{L_B^2} \sim \left(\frac{h}{\bar{\lambda}}\right)^2 \quad (52)$$

也即

$$h \sim \frac{\bar{\lambda}}{L_B} \quad (\text{curvature determined by GWs}) \quad (53)$$

如果  $T_{\mu\nu} \neq 0$ , 则相比于物质源, 引力波对背景时空曲率的贡献是可忽略不计的. 则  $\frac{1}{L_B^2} \sim \frac{h^2}{\bar{\lambda}^2} + \text{matter contribution} \gg \frac{h^2}{\bar{\lambda}^2}$ , 即

$$h \ll \frac{\bar{\lambda}}{L_B} \quad (\text{curvature determined by matter}) \quad (54)$$

现在我们也能够明白为什么线性近似引力理论中我们为什么只把度规展开到线性阶了. 如果我们把背景度规取为  $\eta_{\mu\nu}$ , 则强制要求  $\frac{1}{L_B} = 0$  严格成立 ( $\eta$  不依赖于空间坐标, 变化尺度为  $\infty$ ). 这样, 任何有限的  $h$ , 不管多么小, 都将违背  $h \leq \frac{\bar{\lambda}}{L_B}$  的条件, 从而不可能将时空度规展开到线性以上的阶.

此外, (53)和(54)告诉我们引力波的振幅不可能是任意的, 必须有  $h \ll 1$ . 如果  $h$  和 1 相近, 则  $\frac{\bar{\lambda}}{L_B}$  与 1 相近或远大于 1. 无论无何, 都无法从背景时空中分离出引力波.

当背景时空的空间尺度  $L_B$  和引力波波长  $\bar{\lambda}$  界限分明时, 有一种办法能够很方便地找到长波模式. 我们引入尺度  $\bar{l}$  以使  $\bar{\lambda} \ll \bar{l} \ll L_B$ , 并在边为  $\bar{l}$  的立方体内求评价. 波长阶为  $L_B$  的模式不受影响, 因为它在立方体内几乎不变, 而波长阶为  $\bar{\lambda}$  的模式剧烈震荡, 平均后为 0. 类似地, 若  $h_{\mu\nu}$  是准静态时空背景上的一个高频扰动, 可以引入时标  $\bar{t}$  满足  $\frac{1}{f} \ll \bar{t} \ll \frac{1}{f_B}$  并取平均. 从而(44)可以重写为

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle + 8\pi G \left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right\rangle \quad (55)$$

这里的操作也体现了重整化的思想: 我们“积去”微小尺度上的涨落, 得到描述我们关心尺度上的有效理论. 现在我们定义物质的有效能动张量

$$\left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right\rangle = \bar{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{T} \quad (56)$$

其中  $\bar{T} = \bar{g}_{\mu\nu} \bar{T}^{\mu\nu}$  为背景时空度规升降指标得到的迹. 按定义,  $\bar{T}^{\mu\nu}$  是一个低频量, 是原先能动张量的光滑版本. 我们引入另一个量

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G} \left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} R^{(2)} \right\rangle \quad (57)$$

其中  $R^{(2)}$  同样也是用背景时空度规升降指标得到的迹.  $t_{\mu\nu}$  的迹 (鉴于  $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)} = \bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)} + o(h^3)$ , 用什么度规定义迹实际上无所谓)

$$t = \bar{g}^{\mu\nu} t_{\mu\nu} = +\frac{1}{8\pi G} \langle R^{(2)} \rangle \quad (58)$$

其中利用了  $\bar{g}^{\mu\nu}$  为低频量，可以自由进出求平均值的尖括号，以及  $\bar{g}^{\mu\nu}\bar{g}_{\mu\nu} = 4$ . 把(58)代入(62)得到

$$-\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = 8\pi G \left( t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} t \right) \quad (59)$$

与(55)联合，得到

$$\boxed{\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} = 8\pi G (\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})} \quad (60)$$

这可以看作是 Einstein 场方程的粗粒化. 时空度规低频部分  $\bar{g}_{\mu\nu}$  的动力学行为，完全由能动张量的低频部分  $\bar{T}_{\mu\nu}$  和只依赖于引力波的  $t_{\mu\nu}$  所决定.

### 3.3 引力波的能动张量

(60)中，引力波的贡献  $t^{\mu\nu}$  在形式上和物质的能动张量是一致的，我们于是可以给引力波定义一个能动张量. 首先我们来算出  $t_{\mu\nu}$  的具体形式. 我们所关心的引力波携带着能量和动量从遥远的波源而来，于是可以把时空背景取为平直的. 只要把(47)中的  $\bar{\nabla}$  替换成  $\partial^\mu$ ，得到

对称张量  $h_{\mu\nu}$  有 10 个自由度，但其中有 8 个是规范自由度，只有两个物理自由度. 自然， $t_{\mu\nu}$  也既包含物理自由度又包含规范自由度. 前者给出引力波的能动张量，无法通过规范的选取消去. 如何得到物理自由度？最简单的办法是取横向无迹规范，则  $\partial^i h_{ij} = 0, h = 0, h_{00} = 0, h_{0i} = 0$ . 粗粒化求平均时通过分部积分可得

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle \quad (61)$$

同理得  $\langle R^{(0)} \rangle = 0$ . 于是

$$\boxed{t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle} \quad (62)$$

现在我们可以检验冗余的规范自由度对这个表达式无贡献. 取规范变换  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu$ ，则

$$\begin{aligned} \delta t_{\mu\nu} &= \frac{1}{32\pi G} [\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu (\delta h^{\alpha\beta}) + (\mu \leftrightarrow \nu) \rangle] \\ &= \frac{1}{32\pi G} [\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu (\partial^\alpha \varepsilon^\beta + \partial^\beta \varepsilon^\alpha) + (\mu \leftrightarrow \nu) \rangle] \\ &= \frac{1}{16\pi G} [\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu \partial^\alpha \varepsilon^\beta + (\mu \leftrightarrow \nu) \rangle] \end{aligned} \quad (63)$$

对  $\partial^\alpha$  分部积分，并运用 Lorentz 规范条件  $\partial^\alpha h_{\alpha\beta} = 0$ ，可知此式为 0. 于是  $t_{\mu\nu}$  只与物理模式  $h_{ij}^{TT}$  有关，(62)中的  $h$  可以换成  $h^{TT}$ . 可以算出规范不变的能量密度为

$$t^{00} = \frac{1}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle = \frac{1}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (64)$$

对于沿  $z$  轴传播的平面波， $h_{ij}^{TT}$  只与  $t - z$  有关，从而  $t^{01} = t^{02} = 0$  且  $\partial_z h_{ij}^{TT} = -\partial_0 h_{ij}^{TT} = +\partial^0 h_{ij}^{TT}$ ，从而

$$t^{03} = t^{00} \quad (65)$$

最后，我们观察到，根据 Bianchi 恒等式，(60)的左侧的协变导数  $\bar{\nabla}^\mu (\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R})$  为 0. 从而有

$$\boxed{\bar{\nabla}^\mu (\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) = 0} \quad (66)$$

守恒量是  $\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}$ ，而它们各自不一定守恒，这表明物质源和引力波之间存在着能动量交换. 在远离物质源的地方， $\bar{T}_{\mu\nu} = 0$ ，且时空趋于平直，方程(66)简化为

$$\partial^\mu t_{\mu\nu} = 0 \quad (67)$$

下面我们来计算引力波的能量流，即远离物质源的地方，单位时间内流过单位面积的引力波能量. 从(67)得到

$$\int_V d^3x (\partial_0 t^{00} + \partial_i t^{i0}) = 0 \quad (68)$$

其中  $V$  是远离物质源的空间区域，其边界为  $S$ . 区域内的引力波能量

$$E_V = \int_V d^3x t^{00} \quad (69)$$

则

$$\frac{dE_V}{dt} = - \int_V d^3x \partial_i t^{0i} = - \int_S dA n_i t^{0i} \quad (70)$$

取 TT 规范，并取  $S$  为远离源的  $r$  处的球面，其面源为  $dA = r^2 d\Omega$  而法矢量为  $\mathbf{n} = \mathbf{r}$ . 则

$$\frac{dE_V}{dt} = - \frac{1}{32\pi G} \int dA \langle \partial^0 h_{ij}^{TT} \partial_r h_{ij}^{TT} \rangle \equiv - \int dA t^{0r} \quad (71)$$

向外辐射的引力波，在足够远的距离  $r$ ，其形式是统一的

$$h_{ij}^{TT}(t, r) = \frac{f_{ij}(t-r)}{r} \quad (72)$$

其中  $t_{\text{rec}} = t - r$  为推迟时间，与电动力学中的一致. 故

$$\begin{aligned} \partial_r h_{ij}^{TT}(t, r) &= -\frac{1}{r^2} f_{ij}(t-r) + \frac{1}{r} \partial_r f_{ij}(t-r) \\ &= -\frac{1}{r^2} f_{ij}(t-r) - \frac{1}{r} \partial_t f_{ij}(t-r) \\ &= O\left(\frac{1}{r^2}\right) + \partial^0 \left[\frac{1}{r} f_{ij}(t-r)\right] \\ &= \partial^0 h_{ij}^{TT}(t, r) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (73)$$

于是，从(71)我们看出，在远离源的地方  $t^{0r} = t^{00}$ . 从而

$$\frac{dE_V}{dt} = - \int dA t^{00} \quad (74)$$

体积  $V$  内能量的减少意味着引力波携带走了一部分能量，能流

$$\frac{dE}{dAdt} = t^{00} = \frac{1}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (75)$$

即

$$\frac{dE}{dt} = \frac{r^2}{32\pi G} \int d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (76)$$

用两种模式表示

$$\frac{dE}{dAdt} = \frac{1}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (77)$$

从  $t = -\infty$  到  $t = +\infty$  流过  $dA$  的总能量

$$\frac{dE}{dA} = \frac{1}{16\pi G} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (78)$$

依照之前的讨论，对实际的引力波探测器，这里的平均是几个引力波周期上的时间平均. 于是我们可以交换积分次序，先算  $-\infty$  到  $+\infty$  的  $dt$  的积分，消去所有的时间依赖后，余下的积分只是对常数的积分. 于是(78)中的求平均操作可以略去，得到

$$\frac{dE}{dA} = \frac{1}{16\pi G} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (\dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2) \quad (79)$$

插入  $h_{+, \times}(t)$  的平面波展开，得到

$$\frac{dE}{dA} = \frac{1}{16\pi G} \int_{-\infty}^{+\infty} df (2\pi f)^2 (|\tilde{h}_+|^2 + |\tilde{h}_\times|^2) = \frac{\pi}{4G} \int_{-\infty}^{+\infty} df f^2 (|\tilde{h}_+|^2 + |\tilde{h}_\times|^2) \quad (80)$$

鉴于被积函数是偶函数，我们可以只对正频部分积分

$$\frac{dE}{dA} = \frac{\pi}{2G} \int_{-\infty}^{+\infty} df f^2 (|\tilde{h}_+|^2 + |\tilde{h}_\times|^2) \quad (81)$$

是故

$$\frac{dE}{dAdf} = \frac{\pi}{2G} f^2 (|\tilde{h}_+|^2 + |\tilde{h}_\times|^2) \quad (82)$$

取  $dA = r^2 d\Omega$ , 在以源为球心的一个球上积分, 得到能谱

$$\frac{dE}{df} = \frac{\pi f^2 r^2}{2G} \int d\Omega (|\tilde{h}_+|^2 + |\tilde{h}_\times|^2) \quad (83)$$

同理可以计算动量流. 在远离源的一个球壳  $V$  内的引力波动量为

$$P_V^k = \int_V d^3x t^{0k} \quad (84)$$

考虑向外辐射的引力波, 重复之前的步骤, 得到

$$\partial_0 P_V^k = \int_V d^3x \partial_0 t^{0k} = - \int_S dA t^{0k} \quad (85)$$

故其携带的动量流为

$$\frac{dP^k}{dAdt} = t^{0k} \quad (86)$$

从而

$$\frac{dP^k}{dt} = - \frac{1}{32\pi G} r^2 \int \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \partial^k h_{ij}^{\text{TT}} \rangle \quad (87)$$

注意到, 如果  $t^{0k}$  的字称为奇, 则此式为 0.

## 4 背景时空中的传播

无外部物质存在时,  $T_{\mu\nu} = 0$ , (45) 变为

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{\text{high}} \quad (88)$$

同样地, 我们有两个小量  $h$  和  $\frac{\bar{\lambda}}{L_B}$ . 但是, 之前我们已经看到, 无外源时, 这两个小量的阶是相同的, 我们可以用  $\epsilon$  统一标记

$$\epsilon = O(h) = O\left(\frac{\bar{\lambda}}{L_B}\right) \quad (89)$$

为记号简洁, 取  $L_B$ , 从而  $h \sim \bar{\lambda} \sim \epsilon$ . 从(46)可知  $R_{\mu\nu}^{(1)}$  的领头阶 (我们简要地说一下判断阶的方法,  $\bar{\nabla} \sim \partial + \bar{\Gamma}$ ,  $\partial$  贡献一个  $\frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{\epsilon}$ ,  $h$  贡献一个  $\epsilon$ )

$$R_{\mu\nu}^{(1)} \sim \partial^2 h \sim \frac{h}{\bar{\lambda}^2} \sim \frac{1}{\epsilon} \quad (90)$$

从(47)可知

$$R_{\mu\nu}^{(2)} \sim \partial^2 h^2 \sim \frac{h^2}{\bar{\lambda}^2} \sim 1 \quad (91)$$

故  $[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{\text{high}}$  至多  $O(1)$  阶, 可以忽略. 从而  $R_{\mu\nu}^{(1)}$  的领头阶为 0, 即

$$[R_{\mu\nu}^{(1)}]_{\frac{1}{\epsilon}} = 0 \quad (92)$$

展开为

$$\eta^{\rho\sigma} (\partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\mu h_{\rho\sigma} - \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu}) \approx 0 \quad (93)$$

这不是别的, 就是线性理论中  $h$  的运动方程.

若源存在,  $T_{\mu\nu} \neq 0$ . 由之前的讨论可知这时  $h \ll \frac{\bar{\lambda}}{L_B} \ll 1$ , 对  $h$  展开和对  $\frac{\bar{\lambda}}{L_B}$  展开是不同的. 只保留  $h$  的线性阶, 对  $\frac{\bar{\lambda}}{L_B}$  逐阶展开. 要估算  $(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T)^{\text{High}}$ , 我们注意到, 若  $T_{\mu\nu}$  是光滑的, 则高频部分取决于度规  $g_{\mu\nu}$ , 从而有一个高频成分  $O(h)$ . 另外  $g_{\mu\nu} T = (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) T$  也有高频  $O(h)$  阶部分, 来自于  $\bar{g}_{\mu\nu}$

与  $T$  的高频  $O(h)$  阶部分相乘, 以及  $h_{\mu\nu}$  与  $T$  的低阶部分相乘. 从而  $(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)^{\text{High}} = O\left(\frac{h}{L_B^2}\right)$ . 但是  $R_{\mu\nu}^{(1)} \sim \partial^2 h \sim \frac{h}{\lambda^2}$ .  $(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)^{\text{High}}$  比  $R_{\mu\nu}^{(1)}$  小一个  $O\left(\frac{\lambda^2}{L_B^2}\right)$  阶的因子. 只保留领头阶和次领头阶, 则(46)变为

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = 0 \quad (94)$$

现在  $\bar{g}_{\mu\nu}$  由  $T^{\mu\nu}$  主导, 不再平坦,  $R_{\mu\nu}^{(1)}$  包含的也应当是一般的协变导数. 故

$$\bar{g}^{\rho\sigma}(\bar{D}_\rho\bar{D}_\nu h_{\mu\sigma} + \bar{D}_\rho\bar{D}_\mu h_{\nu\sigma} - \bar{D}_\nu\bar{D}_\mu h_{\rho\sigma} - \bar{D}_\rho\bar{D}_\sigma h_{\mu\nu}) = 0 \quad (95)$$

引入  $h = \bar{g}^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$  及  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}h$ , 并引入 Lorentz 规范

$$\boxed{\bar{\nabla}^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0} \quad (96)$$

则

$$\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\rho \bar{h}_{\mu\nu} + 2\bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma} \bar{h}^{\rho\sigma} - \bar{R}_{\mu\rho} \bar{h}_\nu^\rho - \bar{R}_{\mu\rho} \bar{h}_\mu^\rho = 0 \quad (97)$$

(44)告诉我们  $\bar{R}_{\mu\nu}$  只有  $[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{\text{Low}}$  的贡献, 从而是  $O(\frac{h^2}{\lambda^2})$  阶的, 因为我们只关心  $h$  阶的情况, 可以扔掉  $\bar{R}\bar{h}$  的两项. 另外,  $\bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma} \bar{h}^{\rho\sigma} = O\left(\frac{h}{L_B^2}\right)$  而  $\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\rho \bar{h}_{\mu\nu} = O\left(\frac{h}{\lambda^2}\right)$ , 因为我们只考虑  $\frac{\bar{\lambda}}{L_B}$  的领头阶和次领头阶, 得到

$$\boxed{\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\rho \bar{h}_{\mu\nu} = 0} \quad (98)$$

(96)和(98)决定了  $\bar{\lambda} \ll L_B$  的引力波如何在弯曲背景时空中传播.

## 4.1 弯曲时空中的几何光学

我们知道电磁场的 Lagrange 量密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (99)$$

在度规为  $\bar{g}_{\mu\nu}$  的弯曲时空中, 作用量为

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}_{\mu\alpha} \bar{g}_{\nu\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \quad (100)$$

变分得到运动方程

$$\bar{\nabla}_\mu (\bar{\nabla}^\mu A^\nu - \bar{\nabla}^\nu A^\mu) = 0 \quad (101)$$

这就是平直时空 Maxwell 方程  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$  的推广. 取弯曲时空的 Lorentz 规范

$$\bar{\nabla}_\mu A^\mu = 0 \quad (102)$$

根据  $[\bar{\nabla}_\mu, \bar{\nabla}^\nu]A^\mu = R_\mu^\nu A^\mu$  以及  $\bar{\nabla}_\mu A^\mu = 0$ , 可得

$$\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\rho A^\mu - R_\rho^\mu A^\rho = 0 \quad (103)$$

当电磁波的波长  $\bar{\lambda}$  远小于背景度规的典型空间变化尺度  $L_B$  时, 几何光学才是有效的. 此外, 还应当有  $\bar{\lambda} \ll L_c$ , 其中  $L_c$  是电磁场振幅、偏振或波长变化的典型空间尺度, 也就是说, 电磁波的波长应当远小于波前的曲率半径. 这些条件满足时, 我们就可以采用程函近似, 即寻找一个解, 其相位  $\theta$  以  $\bar{\lambda}$  的尺度迅速变化, 而振幅按  $L = \min\{L_B, L_c\}$  的尺度缓慢变化. 记

$$A^\mu(x) = [a^\mu(x) + \varepsilon b^\mu(x) + \varepsilon^2 c^\mu(x) + \dots] e^{\frac{i\theta(x)}{\varepsilon}} \quad (104)$$

这里的  $\varepsilon$  只是为了提醒我们各项的阶, 系数为  $\varepsilon^n$  的项, 其阶为  $\left(\frac{\bar{\lambda}}{L}\right)^n$ . 它最终会被取为 1.

因为  $R_\rho^\mu A^\rho = O\left(\frac{A}{L_B^2}\right)$  而  $\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\rho A^\mu = O\left(\frac{A}{\lambda^2}\right)$ . 只保留  $\frac{\bar{\lambda}}{L_B}$  的领头阶及次领头阶的情况下, 可以忽略  $R_\rho^\mu A^\rho$ , 运动方程变为

$$\bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\rho A^\mu = 0 \quad (105)$$

定义波矢  $k_\mu = \partial_\mu \theta$ , 将(105)代入(102), 只保留最低阶, 得

$$\bar{g}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = k^\mu k_\mu = 0 \quad (106)$$

这叫做程函方程. 由此可知  $0 = \bar{\nabla}_\nu(k^\mu k_\mu) = 2k^\mu \bar{\nabla}_\nu k_\mu$ . 因为  $\theta$  是标量,  $\bar{\nabla}_\nu \partial_\mu \theta = \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu \theta = \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \theta = \bar{\nabla}_\mu \partial_\nu \theta$ , 从而  $\bar{\nabla}_\nu k_\mu = \bar{\nabla}_\mu k_\nu$ . 从而

$$k^\mu \bar{\nabla}_\mu k_\nu = 0 \quad (107)$$

这恰好是测地线方程. 这说明, 与等相面垂直的曲线, 也就是光线, 正是  $\bar{g}_{\mu\nu}$  的零测地线.

取到  $\varepsilon$  的次领头阶, (105)给出

$$2k_\rho \bar{\nabla}^\rho a^\mu + (\bar{\nabla}^\rho k_\rho) a^\mu = 0 \quad (108)$$

引入  $a = (a^\mu a_\mu^*)^{\frac{1}{2}}$  以及极化矢量  $a^\mu = ae^\mu$  满足  $e^\mu e_\mu^* = 1$ . 则由  $2ak^\mu \partial_\mu a = k^\mu \partial_\mu (a^2) = k^\mu \bar{\nabla}_\mu (a^\rho a_\rho^*) = -(\bar{\nabla}^\rho k_\rho) a^2$ , 即得到标量振幅的方程

$$k^\mu \partial_\mu a = -\frac{1}{2}(\bar{\nabla}_\mu k^\mu)a \quad (109)$$

把  $a^\mu = ae^\mu$  代入(108)并结合(109), 得

$$k^\rho \bar{\nabla}_\rho e^\mu = 0 \quad (110)$$

(110)告诉我们光的偏振矢量沿着零测地线是平行移动的. 而(109)告诉我们几何光学极限下光子数是守恒的, 要看出这一点, 我们把(109)换一种形式

$$\bar{\nabla}^\mu (a^2 k^\mu) = 0 \quad (111)$$

这告诉我们  $a^2 k^\mu$  是协变守恒流, 从而  $a^2 k^0$  的空间积分是守恒荷. 在  $A_0 = 0$  规范中, 电场就是  $\mathbf{E} = \partial_0 \mathbf{A}$ , 其振幅为  $k^0 a$ , 电磁波的能量密度正比于  $(k^0 a)^2$ , 而每个光子的能量是  $k^0$ , 所有  $k^0 a^2$  的物理意义就是光子数密度, 它的空间积分守恒, 意味着光子数守恒.

对引力波, 同样可以进行程函近似. 设

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = [A_{\mu\nu}(x) + \varepsilon B_{\mu\nu}(x) + \dots] e^{\frac{i\theta(x)}{\varepsilon}} \quad (112)$$

定义  $k_\mu \partial_\mu \theta$  并用  $A_{\mu\nu} = A e_{\mu\nu}$  定义引力波的归一化极化矢量,  $A$  为标量振幅. 与电磁波相似, 仍有

- $k_\mu k^\mu = 0$ ,  $k^\mu \bar{\nabla}_\mu k_\nu = 0$ . 即引力子沿零测地线传播;
- $\bar{\nabla}^\mu (A^2 k^\mu) = 0$ . 即引力子数量守恒;
- $k^\nu e_{\mu\nu} = 0$ . 即极化张量是横向的 (垂直于传播方向) .
- $k^\rho \bar{\nabla}_\rho e_{\mu\nu} = 0$ . 即极化张量沿零测地线是平行移动的.

## 4.2 微引力透镜

几何光学适用的范围内, 引力子在弯曲时空中的传播行为和光子是相同的. 比如, 引力子的轨迹在大质量物体附近会偏折, 且偏折角与光子一样; 引力子在引力阱内也会红移.

如图(1)是引力透镜的光路图,  $S$  为波源,  $O$  为观察者,  $L$  为透镜天体, 其质量为  $M$ , 光的碰撞参数为  $b$ . 观察者与透镜天体、光源的距离分别为  $D_l$  和  $D_s$ , 透镜天体与光源的距离为  $D_{ls}$ , 且  $D_s \gg b$ ,  $D_{ls} \gg b$ . 假设由引力透镜引起的光的偏折  $\alpha$  非常小, 包含  $L$  和  $D$  的透镜面以及与其平行且包含  $S$  的光源面, 都与光经过的路线近似垂直. 根据光线在球对称引力场中的偏折公式

$$\alpha = \frac{4GM}{b} \quad (113)$$

由几何关系

$$D_{ls} \vec{\alpha} = D_s (\vec{\theta} - \vec{\phi}), \quad \vec{\alpha} = \frac{4GM}{b^2} \vec{b} = \frac{4GM}{D_l \theta^2} \vec{\theta} \quad (114)$$

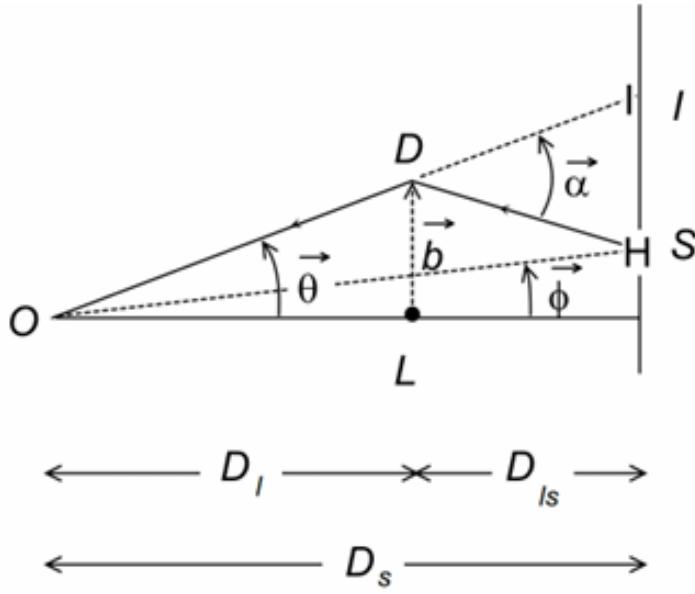


图 1: 引力透镜光路图

这里  $\vec{b}$  是透镜面上偏折点的位置矢量,  $\vec{\alpha}$  是偏折角的角度矢量,  $\vec{\theta}$  和  $\vec{\phi}$  分别是像和光源的角度矢量 (相对于观察者的天球面) . 定义  $\alpha_0^2 = \frac{4GM D_{ls}}{D_s D_l}$ , 由于  $\vec{\phi} \propto \vec{\theta}$ , 可以改写为标量方程

$$\phi = \theta - \frac{\alpha_0^2}{\theta} \quad (115)$$

解得

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \phi \pm \sqrt{\phi^2 + 4\alpha_0^2} \right) \quad (116)$$

$\phi = 0$  时  $\theta_{\pm} = \pm \alpha_0$ , 像在天球上描绘的是半径为  $\alpha_0$  的圆, 称为 Einstein 环, 角度  $\alpha_0$  称为 Einstein 半径.  $2\alpha_0$  大致表示由引力透镜可以看见多个像时, 像之间的分离角大小. 这一点可以从

$$\theta_+ - \theta_- = \sqrt{\phi^2 + 4\alpha_0^2} \approx 2\alpha_0 \quad (117)$$

一般  $\phi$  都是小角, 若  $\phi$  太大, 则无法观测到引力透镜效应, 与傍轴条件类似.

利用透镜方程式, 可以计算出像的明亮程度相对于光源来说增加了多少. 假设从观测者看到的像在天球上所张的立体角为  $d\Omega(\theta)$ , 观测到的光度为  $f$ , 光源的表面亮度为  $I$ , 则有

$$f = I d\Omega(\theta) \quad (118)$$

另一方面, 取无透镜时观测到的光度为  $f_0$ , 而这时的像在天球上所张的立体角为  $d\Omega(\phi)$ , 又由于表面亮度  $I$  是光源的固有性质, 所以

$$f_0 = I d\Omega(\phi) \quad (119)$$

由此, 由引力透镜引起的光度的增长率一般由

$$\mathcal{A} := \frac{f}{f_0} = \frac{d\Omega(\theta)}{d\Omega(\phi)} = \left( \det \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^{-1} \quad (120)$$

给出. 将此式应用于 (116) 式之情形, 得

$$\mathcal{A}_{\pm} = \frac{d\theta_{\pm}^2}{d\phi^2} = \pm \frac{1}{4} \left( \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + 4\alpha_0^2}} + \frac{\sqrt{\phi^2 + 4\alpha_0^2}}{\phi} \pm 2 \right) \quad (121)$$

这里  $\mathcal{A}_+ > 1$ ,  $\mathcal{A}_- < 0$ . 这意味着

1.  $\theta = \theta_+$  的像是和光源方向相同的顺像，且必然比原来明亮；
2.  $\theta = \theta_-$  的像是和光源方向相反的逆像。

另外， $\theta = \theta_\pm$  两像相加所得的总增幅率  $\mathcal{A}_{\text{tot}}$  为

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = \mathcal{A}_+ + |\mathcal{A}_-| = \frac{1}{2} \left( \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + 4\alpha_0^2}} + \frac{\sqrt{\phi^2 + 4\alpha_0^2}}{\phi} \right) \quad (122)$$

但是，当光线交叉时，因为波前变化的空间尺度不再小于  $\bar{\lambda}$ ，程函近似条件实际上是不成立的。要研究焦点附近的实际行为，需要考虑衍射，或者用量子力学的语言来说，不确定性原理。我们考虑一束环形光线，它们是某平面波前的一部分，环的半径为  $b$ . 光线被质量为  $M$  的天体偏折，碰撞参数也为  $b$ ，偏折角  $\theta = \frac{4GM}{b}$ . 偏折后的光线在焦距  $d_F$  处会聚，满足  $\frac{b}{d_F} = \tan \theta \approx \theta$ , 即

$$d_F \approx \frac{b^2}{4GM} \quad (123)$$

实际上，不确定性原理禁戒这样完美的会聚。如果我们把光子的初始位置定死为  $b$ ，其不确定性  $\Delta y$  要小于  $b$ . 由 Heisenberg 测不准原理，其横向动量的不确定性  $\Delta k_y \geq \frac{\hbar}{b}$ , 会带来角度的不确定性

$$\Delta\theta_s \approx \frac{\Delta k_y}{k_x} \geq \frac{\bar{\lambda}}{b} \quad (124)$$

从而带来横向位置的不确定性

$$\Delta y_s \approx d_F \Delta\theta_s \geq \frac{\bar{\lambda}b}{4GM} \quad (125)$$

如果要求光线较好地会聚，则  $\Delta y_s \ll b$ , 从而

$$\bar{\lambda} \ll 4GM \quad (126)$$

对质量大致在  $M_\odot$  的天体，这意味着对  $\bar{\lambda} \ll O(10^6)\text{km}$  也就是  $f \gg O(10^{10})\text{kHz}$  的波才能有较明显的引力透镜效应。对电磁波，这正落在可见光频段。但对引力波，没有什么天体能产生这么高频的引力波。

### 4.3 引力波的吸收与散射

引力波会被显著地吸收和散射吗？之后用场论描述引力波时，将看到引力子-物质-物质顶点正比于  $\sqrt{G}$ ，于是树图阶引力子-物质振幅正比于  $G$ ，散射截面就正比于  $G^2$ 。在自然单位制下，散射截面具有量纲  $[M]^{-2}$ ，引力常数具有量纲  $[M]^{-2}$ ，因此散射截面

$$\sigma \sim G^2 E^2 \quad (127)$$

考虑具有 4-动量  $k^\mu = (k, 0, 0, k)$  的引力子经过太阳，与具有 4-动量  $p^\mu = (m_p, 0, 0, 0)$  的静止质子碰撞， $E = -(k+p)^2 = m_p^2 + 2m_p k$ . 而天文来源的引力波能量相比较子质量可忽略，因此  $\sigma \sim G^2 m_p^2$ .

光子经过太阳主要是与电子发生 Thomson 散射，其截面  $\sigma = \frac{8\pi a_e^2}{3m_e^2}$ . 太阳基本上由等离子体组成，质子与电子数密度相当，我们可以计算平均自由程  $l = \frac{1}{n\sigma}$ ，代入数值将发现引力子的平均自由程是光子的  $O(10^{80})$  倍。如果再代入数密度具体计算，可以得到引力子平均自由程为  $O(10^{78})\text{m}$ ，这远大于可观测宇宙直径。除非途经中子星或黑洞这样的致密星，引力波不会被显著吸收。