

# 黑洞物理简介

鸣哩天才琪露諾  
华中科技大学物理学院

日期：2025年5月30日

## 摘要

本文是我于2025年5月30日在“星系与宇宙学”研讨班上作汇报的notes，系统介绍了广义相对论框架下的黑洞物理基本理论与重要进展。首先从Schwarzschild解出发，讨论了奇异性的消除、事件视界、无限红移面及近视界几何，并引入Lemaître坐标系以消除坐标奇性。随后介绍了Reissner-Nordström(RN)解，分析了带电黑洞的电磁场结构、极端黑洞及多黑洞解。通过Kruskal延拓，进一步揭示了Schwarzschild和RN时空的最大解析延拓结构，并引出虫洞概念。接着介绍了Penrose图，用于研究时空的无穷远结构和因果结构。文中还讨论了稳态与静态时空的定义、事件视界的几何与因果性质，以及奇点定理与宇宙监督假设。重点介绍了Kerr黑洞的几何结构、测地线行为、Penrose图、时间机器可能性及Penrose过程。最后，系统阐述了黑洞热力学的四大定律，包括第零定律（表面引力为常数）、第一定律（质量、面积、角动量和电荷的关系）、第二定律（面积不减定理）和第三定律（表面引力无法在有限时间内降为零），并介绍了Hawking辐射的量子效应、Unruh效应、黑洞熵(Bekenstein-Hawking熵)及其与量子引力的关系，如全息原理和黑洞信息问题。

**关键词：**黑洞，Schwarzschild解，Reissner-Nordström解，Kerr黑洞，事件视界，Kruskal延拓，Penrose图，奇点定理，宇宙监督假设，Penrose过程，黑洞热力学，表面引力，Hawking辐射，Bekenstein-Hawking熵，全息原理，黑洞信息问题，Unruh效应，虫洞，稳态时空，因果结构

## 目录

<b>1 Schwarzschild 奇异性的消除及视界</b>	<b>3</b>
1.1 Lemaître度规	3
1.2 信号的传播，事件视界	3
1.3 无限红移面，时间反演	4
1.4 Schwarzschild 黑洞的近视界几何	4
<b>2 RN 解</b>	<b>5</b>
2.1 弯曲时空中的电磁场	5
2.2 RN 时空	6
2.3 极端黑洞与多黑洞解	8
<b>3 Kruskal 延拓</b>	<b>9</b>
3.1 Kruskal 延拓的一般原理	9
3.2 Schwarzschild 解的延拓	10

3.3 RN 解的延拓 . . . . .	11
3.4 虫洞 . . . . .	13
<b>4 Penrose 图 . . . . .</b>	<b>13</b>
4.1 无穷远 . . . . .	13
4.2 共形变换 . . . . .	14
4.3 Minkowski 时空的 Penrose 图 . . . . .	15
4.4 Schwarzschild 时空的 Penrose 图 . . . . .	16
4.5 RN 时空的 Penrose 图 . . . . .	17
<b>5 演进性质 . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>6 稳态和静态时空 . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>7 事件视界 . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>8 奇点 . . . . .</b>	<b>21</b>
8.1 奇点定理 . . . . .	21
8.2 真实黑洞, 宇宙监督 . . . . .	22
<b>9 Kerr 黑洞 . . . . .</b>	<b>23</b>
9.1 Kerr 几何 . . . . .	23
9.2 Kerr 黑洞的奇异性与测地线 . . . . .	27
9.3 Kerr 黑洞的 Penrose 图, 时间机器 . . . . .	30
9.4 Penrose 过程 . . . . .	31
<b>10 黑洞热力学 . . . . .</b>	<b>32</b>
10.1 第零定律 . . . . .	32
10.2 黑洞热力学三大定律 . . . . .	36
10.3 Hawking 辐射 . . . . .	39

# 1 Schwarzschild 奇异性的消除及视界

## 1.1 Lemaitre 度规

在 Schwarzschild 外部解中引入变换

$$\begin{aligned} r &= r_g^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{3}{2}(R - \tau) \right]^{\frac{2}{3}} \\ -t &= -\tau + 2r_g^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{3}{2}(R - \tau) \right]^{\frac{1}{3}} + r_g \ln \left| \frac{\left[ \frac{3}{2}(R - \tau) \right]^{\frac{1}{3}} - r_g^{\frac{1}{3}}}{\left[ \frac{3}{2}(R - \tau) \right]^{\frac{1}{3}} + r_g^{\frac{1}{3}}} \right| \end{aligned} \quad (1)$$

则度规变为

$$ds^2 = d\tau^2 - \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{R - \tau}{r_g} \right) \right]^{-\frac{2}{3}} dR^2 - \left[ \frac{3}{2}(R - \tau) \right]^{\frac{4}{3}} r_g^{\frac{2}{3}} d\Omega^2 \quad (2)$$

我们很容易发现，在该坐标系中，坐标时和标准时相同。而  $R - \tau$  又会随着  $r$  趋于无穷远而趋于 0，故在无穷远处的观察者看来，Lemaitre 坐标系中任意固定空间坐标点处的粒子是自由下落的。于是 Lemaitre 坐标系又称自由下落坐标系，这是一种动态收缩度规。

取  $\theta$  和  $\phi$  为定值，讨论  $R, \tau$  的时空图解，如图(1)所示。对于  $r = \text{const}$  的二维球面

$$r = r_g^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{3}{2}(R - \tau) \right]^{\frac{2}{3}} = \text{const} \quad (3)$$

即

$$R - \tau = \text{const} \quad (4)$$

即斜率为 1 的平行直线。在 Lemaitre 坐标系中，无论  $r$  与  $r_g$  的大小关系如何， $R$  恒为空间轴， $\tau$  恒为时间轴，Schwarzschild 奇异性被消除。

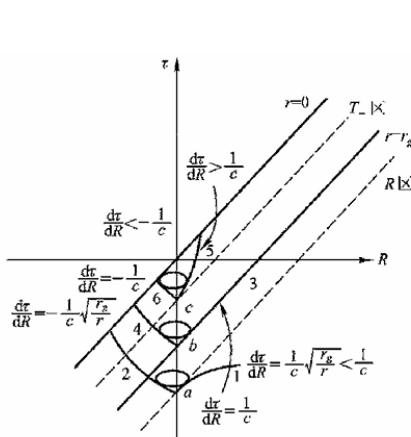


图 1: 收缩 Lemaitre 坐标系

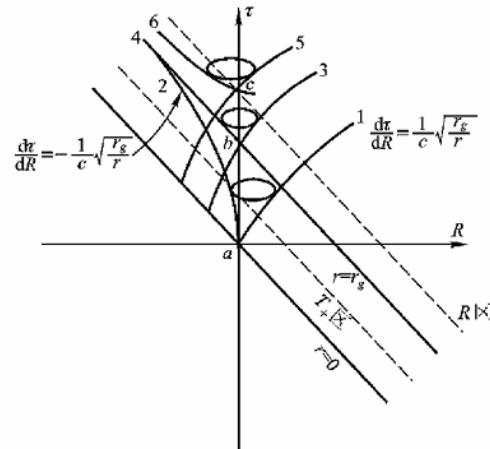


图 2: 膨胀 Lemaitre 坐标系

## 1.2 信号的传播，事件视界

我们考虑径向光信号的行为。光信号走类光线， $ds^2 = 0$ ，即

$$d\tau^2 - \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{R - \tau}{r_g} \right) \right]^{-\frac{2}{3}} dR^2 = 0 \quad (5)$$

故

$$\frac{d\tau}{dR} = \pm \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{R - \tau}{r_g} \right) \right]^{-\frac{1}{3}} = \pm \sqrt{\frac{r_g}{r}} \quad (6)$$

可见,  $\frac{d\tau}{dR} < 0$  的光信号会朝着  $r = 0$  运动, 直至掉入奇点.  $\frac{d\tau}{dR} > 0$  的光信号, 若初始时在  $R$  区, 则  $\frac{d\tau}{dR} < 1$ , 信号远离奇点,  $r$  增大,  $\frac{d\tau}{dR}$  减小, 信号持续远离奇点直至到达无穷远处. 若初始时在  $r = r_g$  上, 则  $\frac{d\tau}{dR} = 1$ , 信号将沿着  $r = r_g$  传播到无穷远点. 若初始时信号在  $T_-$  区, 则  $\frac{d\tau}{dR} > 1$ , 信号靠近奇点,  $r$  减小,  $\frac{d\tau}{dR}$  进一步增大, 信号持续接近直至坠入奇点. 总结一下就是, 任何以光速或亚光速传播的信号都无法逸出 Schwarzschild 球面, 而信号可以通过 Schwarzschild 面由  $R$  区进入  $T_-$  区, 即 Schwarzschild 面是一个单向膜, 我们称之为 Schwarzschild 黑洞的视界. 严格来说所有  $r < r_g$  的球面都是单向膜, 视界特指单向膜开始的界面.

### 1.3 无限红移面, 时间反演

自由粒子 (即空间坐标不变的粒子) 从  $R$  区进入  $T_-$  区, 最后到达奇点, 所需要的固有时是有限的

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0 = \frac{2}{3} \left( \frac{r_0^3}{r_g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

但是

$$-t = -\tau + 2\sqrt{r_g r} + r_g \ln \left| \frac{\sqrt{r} - \sqrt{r_g}}{\sqrt{r} + \sqrt{r_g}} \right| \quad (8)$$

当  $r \rightarrow r_g^+$  时  $t \rightarrow \infty$ . 可见, 尽管随动标准钟测得的粒子从  $R$  区进入  $T_-$  的时间是有限的, 在无穷远处的观测者看来, 粒子进入  $T_-$  区需要的时间是无穷的, 粒子仿佛冻结在视界表面附近. 这可以理解为光信号的引力红移所致.

引力场方程在时间反演下不变, 故时间反演后的(2)仍然是引力场方程的解. 如图(2), 这是一个膨胀坐标系. 光信号在其中的行为正好与在收缩坐标系中的相反, 任何光速与亚光速信号均不能从  $R$  区进入  $T_+$  区, 而  $T_+$  区内的一切信号均要进入  $R$  区, 逆过程是不可能的. Schwarzschild 球面仍是一个单向膜, 但不再是无限红移面. 我们把  $T_+$  区叫做白洞.

### 1.4 Schwarzschild 黑洞的近视界几何

我们首先考虑 Schwarzschild 解的近视界几何. 在视界附近  $A(r) \sim (2\kappa)(r - r_g)$ , 因此度规为

$$ds^2 \sim -(2\kappa)(r - r_g)dt^2 + (2\kappa)^{-1}(r - r_g)^{-1}dr^2 + r_g^2 d\Omega^2 \quad (9)$$

重定义径向坐标

$$\rho = (2\kappa)^{-\frac{1}{2}} 2(r - r_g)^{\frac{1}{2}} \iff \rho^2 = 4r_g(r - r_g) \quad (10)$$

黑洞视界对应于  $\rho = 0$ . 则近视界的度规为

$$ds^2 \sim -\kappa^2 \rho^2 dt^2 + d\rho^2 + r_g^2 d\Omega^2 \quad (11)$$

忽略角度部分, 则径向和时间构成的二维时空的近视界几何

$$ds^2 = -\kappa^2 \rho^2 dt^2 + d\rho^2 \quad (\rho > 0) \quad (12)$$

这样一个  $1+1$  维时空又称作 Rindler 时空. 引入坐标

$$U = -\rho r^{-\kappa t}, \quad V = \rho e^{\kappa t} \quad (13)$$

由此可得

$$ds^2 = -dUdV \quad (14)$$

这就是类光坐标下的二维 Minkowski 时空，引入  $U = T - X, V = T + X$  即得

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 \quad (15)$$

由于我们要求  $x > 0$ ，它只覆盖了 Minkowski 时空中  $U < 0, V > 0$  的区域，这个区域叫做 Rindler 角域。如图(12)所示。

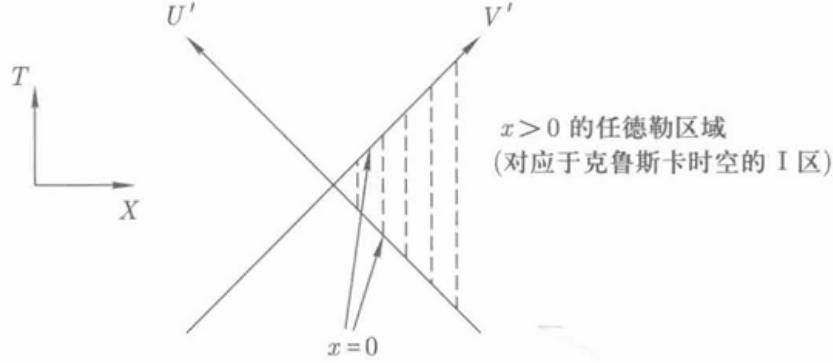


图 3: Rindler 角域

## 2 RN 解

### 2.1 弯曲时空中的电磁场

弯曲时空中电磁场张量为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (16)$$

容易验证

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \quad (17)$$

弯曲时空中电磁场的作用量

$$S_{EM} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (18)$$

由最小作用量原理，得到

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (19)$$

由于  $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$  关于  $\mu, \rho$  对称而  $F^{\mu\rho}$  关于  $\mu, \rho$  反对称， $\Gamma_{\mu\rho}^\nu F^{\mu\rho}$ ，故  $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu F^{\rho\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})$ 。从而

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0 \quad (20)$$

(17)和(20)共同构成弯曲时空中的 Maxwell 方程。

下面我们来求弯曲时空中电磁场的能动张量。

$$\begin{aligned} \delta S_{EM} &= -\frac{1}{4} \int d^4x [\delta(\sqrt{-g}) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{-g}] \\ &= -\frac{1}{4} \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu}) F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} - 2\delta g_{\mu\nu} F_\rho^\mu F^{\nu\rho} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

从而

$$T^{\mu\nu} = F_\rho^\mu F^{\nu\rho} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (22)$$

可见  $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ , 于是电磁场与引力场耦合的方程为

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (23)$$

## 2.2 RN 时空

我们求 Einstein-Maxwell 方程的球对称解, 其度规必定可以写成如下形式

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (24)$$

容易算得  $\sqrt{|g|} = \sqrt{ABr^2 \sin \theta}$

球对称性意味着电磁场张量的独立非零分量只可能为  $F_{tr}$  和  $F_{\theta\phi}$ . 由  $\partial_\theta F_{tr} + \partial_r F_{\theta\phi} + \partial_\theta F_{tr} = \partial_\theta F_{tr}$ , 即知  $F_{tr}$  独立于  $\theta$ , 同理它也独立于  $\theta$ . 即  $F_{tr}$  仅仅只能是  $t, r$  的函数. 类似的, 取  $\theta, \phi$  指标, 用恒等式(17), 即知  $F_{\theta\phi}$  独立于时间  $t$ , 同理它也独立于  $r$ . 所以  $F_{\theta\phi}$  只能是  $\theta$  的函数进而  $F^{tr} = g^{tt} g^{rr} F_{tr} = -\frac{F_{tr}}{AB}$ . 进而由(20)得

$$\partial_t \left( \frac{r^2}{\sqrt{AB}} F_{tr} \right) = 0 \quad (25)$$

由(20)可得

$$\partial_r \left( \frac{r^2}{\sqrt{AB}} F_{tr} \right) = 0 \quad (26)$$

有

$$F_{tr} = \frac{Q_e}{4\pi r^2} \sqrt{AB} \quad (27)$$

式中  $Q_e$  为一个常数. 类似地,  $F^{\theta\phi} = g^{\theta\phi} g^{\theta\phi} F_{\theta\phi} = \frac{F_{\theta\phi}}{r^4 \sin^2 \theta}$ . 进而

$$\partial_\theta \left( \frac{F_{\theta\phi}}{r^2 \sin \theta} \right) = 0 \quad (28)$$

又由(20)得

$$\partial_\phi \left( \frac{F_{\theta\phi}}{r^2 \sin \theta} \right) = 0 \quad (29)$$

由这两个结果即有

$$F_{\theta\phi} = \frac{Q_m}{4\pi} \sin \theta \quad (30)$$

式中  $Q_m$  为一个常数.

下面解 Einstein 场方程. 为此需要具体算出电磁场的能量动量张量. 由  $T_{tt} = g^{rr} F_{tr} F_{tr} - \frac{1}{4} g_{tt} (2F_{tr} F_{tr} g^{tt} g^{rr} + 2F_{\theta\phi} F_{\theta\phi} g^{\theta\theta} g^{\phi\phi})$ , 并代入上面的(27)式和(30)式, 可得

$$T_{tt} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{Q_e}{4\pi} \right)^2 + \left( \frac{Q_m}{4\pi} \right)^2 \right] \frac{A}{r^4} \quad (31)$$

同理可以算得

$$T_{rr} = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{Q_e}{4\pi} \right)^2 + \left( \frac{Q_m}{4\pi} \right)^2 \right] \frac{B}{r^4} \quad (32)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{Q_e}{4\pi} \right)^2 + \left( \frac{Q_m}{4\pi} \right)^2 \right] \frac{1}{r^2} \quad (33)$$

$$T_{\phi\phi} = \sin^2 \theta T_{\theta\theta} \quad (34)$$

能动量张量的非对角分量都等于零. 另外, 由  $T_u$  和  $T_r$  的表达式容易看出

$$\frac{T_{tt}}{A} + \frac{T_{rr}}{B} = 0 \quad (35)$$

我们已经计算过 Ricci 张量的非零分量. 容易得到

$$\frac{R_u}{A} + \frac{R_r}{B} = \frac{1}{rB} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \quad (36)$$

首先, 由  $T_{tr} = 0$  可得  $R_{tr} = 0$ , 进而可知函数  $B$  独立于时间  $t$ , 即

$$\dot{B} = 0 \quad (37)$$

其次, 由 Einstein 场方程有

$$\frac{R_{tt}}{A} + \frac{R_{rr}}{B} = 8\pi G \left( \frac{T_{tt}}{A} + \frac{T_{rr}}{B} \right) \quad (38)$$

进而由 (35) 式和 (36) 式, 可得

$$\left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = [\ln(AB)]' = 0 \quad (39)$$

所以  $AB = f(t)$ ,  $f(t)$  为  $t$  的某函数, 即

$$A(t, r) = \frac{1}{B(r)} f(t) \quad (40)$$

最终球对称度视为

$$ds^2 = -\frac{1}{B(r)} f(t) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (41)$$

重新定义时间, 使得  $\sqrt{f(t)} dt \rightarrow dt$ . 从而可知, 即使考虑到与电磁场的耦合, 球对称时空也有某种推广的 Birkhoff 定理, 即它的度规必定为

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (42)$$

注意式中函数  $A, B$  均只依赖于  $r$ , 不依赖于时间  $t$ , 而且满足

$$AB = 1 \quad (43)$$

考虑到上述结果, 再根据场方程  $R_{\theta\theta} = (8\pi G)T_{\theta\theta}$ , 即可得到

$$R_{\theta\theta} = 1 - \left( \frac{r}{B} \right)' = (8\pi G) \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{Q_e}{4\pi} \right)^2 + \left( \frac{Q_m}{4\pi} \right)^2 \right] \frac{1}{r^2} \quad (44)$$

定义

$$e^2 = \frac{G}{4\pi} (Q_e^2 + Q_m^2) \quad (45)$$

进而可将上面方程重写成

$$1 - \left( \frac{r}{B} \right)' = \frac{e^2}{r^2} \quad (46)$$

积分即得  $B(r) = \left( 1 + \frac{e}{r} + \frac{e^2}{r^2} \right)^{-1}$ , 进而  $A(r) = 1 + \frac{e}{r} + \frac{e^2}{r^2}$ . 与经典近似比较, 可知常数  $c = -2GM$ . 所以, 最终的解为

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{e^2}{r^2} \quad (47)$$

这个解叫做 Reissner-Nordström 解, 简称 RN 解, 这个解是 Einstein-Maxwell 方程唯一的球对称解. 而电磁场张量的 (27) 式和 (30) 式就成为

$$F_{tr} = \frac{Q_e}{4\pi r^2}, \quad F_{\theta\theta} = \frac{Q_m}{4\pi} \sin \theta \quad (48)$$

这描述的是一个静止的带电荷  $Q_e$  和磁荷  $Q_m$  的粒子.

## 2.3 极端黑洞与多黑洞解

在 RN 解中,  $|e| = GM$  时, 度规变成

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{GM}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{GM}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (49)$$

度规在  $r = GM$  处奇异. 我们考察极端 RN 黑洞的近视界几何, 记  $R = GM$  并设  $r = R + \eta$ , 其中  $\eta$  为小量. 则度规为

$$ds^2 = -\frac{\eta^2}{R^2} dt^2 + R^2 \frac{d\eta^2}{\eta^2} + R^2 d\Omega^2 \quad (50)$$

这与 Schwarzschild 时空和 RN 时空的近视界几何是截然不同的. 前两项是二维 AdS 时空的度规, 后一项是固定半径  $R$  的二维球面, 这样的几何记为  $\text{AdS}_2 \times \text{S}^2$ .

考虑仅带电荷的极端黑洞, 即磁荷  $Q_m = 0$ , 电荷为  $Q$ , 则电磁场张量只有  $F_{tr} = \frac{Q}{4\pi r^2}$ , 电磁势

$$A_t = \frac{Q}{4\pi r} \quad (51)$$

这样的极端黑洞满足条件  $\frac{Q^2}{4\pi} = GM^2$ . 考虑两个这样的极端黑洞, 电荷分别为  $Q_1 > 0, Q_2 >$ , 质量分别为  $M_1, M_2$ , 则极端条件意味着

$$\frac{Q_1 Q_2}{4\pi} = G M_1 M_2 \quad (52)$$

意味着两个黑洞之间的 Coulomb 推斥力刚好和万有引力平衡. 可以预想, 多个极端黑洞放在一起, 最后的解也是稳定的, 但这样的解没有球对称性.

为此重新求解 Maxwell-Einstein 方程. 定义径向坐标

$$\rho = r - GM \quad (53)$$

则极端 RN 解为

$$ds^2 = -H(\rho)^{-2} dt^2 + H(\rho)^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2) \quad (54)$$

其中  $H(\rho) = 1 + \frac{GM}{\rho}$ . 现在电磁势可以写为

$$A_t = \frac{1}{\sqrt{4\pi G}} \left[ 1 - \frac{1}{H(\rho)} \right] \quad (55)$$

将三维空间坐标写成  $\mathbf{x}$ , 则  $\rho = |\mathbf{x}|$ , 而  $d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2 = (d\mathbf{x})^2$ .

受此启发, 设多黑洞解为

$$ds^2 = -H(\mathbf{x})^{-2} dt^2 + H(\mathbf{x})^2 (d\mathbf{x})^2 \quad (56)$$

电磁势

$$A_t = \frac{1}{\sqrt{4\pi G}} \left[ 1 - \frac{1}{H(\mathbf{x})} \right] \quad (57)$$

代入 Einstein-Maxwell 方程, 得

$$\nabla^2 H(\mathbf{x}) = 0 \quad (58)$$

要求无穷远处电磁势为 0, 则一般解为

$$H(\mathbf{x}) = 1 + \sum_{a=1}^N \frac{GM}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|} \quad (59)$$

其中  $\mathbf{x}_a$  为一组任意给定的常矢量. 这个解描述的是  $N$  个极端 RN 黑洞, 分别位于空间位置  $\mathbf{x}_a$ , 它们之间的 Coulomb 推斥力与万有引力刚好平衡, 因此不相对运动.

### 3 Kruskal 延拓

#### 3.1 Kruskal 延拓的一般原理

考察一般的球对称时空

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (60)$$

视界必然对应  $f(r)$  的零点, 设为  $r_h$ , 在  $r = r_h$  附近, 有

$$f(r) \sim (2\kappa)(r - r_h) + \dots \quad (61)$$

显然, 在  $r = r_h$  处坐标是奇异的, 无法同时覆盖  $r < r_h$  和  $r > r_h$  两个区域. 我们把(60)改写为

$$ds^2 = -f(r) \left[ dt + \frac{dr}{f(r)} \right] \left[ dt - \frac{dr}{f(r)} \right] + r^2d\Omega^2 \quad (62)$$

引入  $r_*$  使得  $dr_* = \frac{dr}{f(r)}$  或

$$r_* = \int \frac{dr}{f(r)} \quad (63)$$

则  $f(r)$  的零点对应此积分的极点. 定义

$$v = t + r_*, \quad u = t - r_* \quad (64)$$

则

$$ds^2 = -f(r)dvdu + r^2d\Omega^2 \quad (65)$$

可见  $u, v$  为类光坐标但其在  $r = r_h$  处仍然是奇异的. 有

$$\begin{aligned} v - u &= 2 \int \frac{dr}{f(r)} \\ &= \int \left[ \frac{1}{\kappa(r - r_h)} + g(r) \right] dr \\ &= \frac{1}{\kappa} \ln \left| \frac{r - r_h}{r_h} \right| + G(r) \end{aligned} \quad (66)$$

其中  $g(r)$  为不含极点的项, 从而  $G(r)$  在邻域上必然是光滑的. 则

$$e^{\kappa(v-u)} = \left| \frac{r - r_h}{r_h} \right| e^{\kappa G(r)} \quad (67)$$

$r < r_h$  时

$$e^{\kappa(v-u)} = - \left( \frac{r - r_h}{r_h} \right) e^{\kappa G(r)} \quad (68)$$

我们知道这对应于黑洞或白洞区域. 合理的想法是考虑新的坐标  $V, U$  使得黑洞区域和白洞区域分布处于新坐标系的第一和第三象限, 从物理上说, 对应着未来和过去. 定义

$$V = \pm e^{\kappa v}, \quad U = \pm e^{-\kappa u} \quad (69)$$

从而

$$VU = - \left( \frac{r - r_h}{r_h} \right) e^{\kappa G(r)}, \quad \frac{U}{V} = e^{-\kappa(v+u)} = e^{-2\kappa t} \quad (70)$$

对于  $r > r_h$  的外部区域

$$e^{\kappa(v-u)} = \left( \frac{r - r_h}{r_h} \right) e^{\kappa G(r)} \quad (71)$$

只剩下  $(V, U)$  的第二、四象限可以占据. 定义

$$V = \pm e^{\kappa v}, \quad U = \mp e^{-\kappa u} \quad (72)$$

从而

$$VU = -\left(\frac{r-r_h}{r_h}\right)e^{\kappa G(r)}, \quad \frac{U}{V} = -e^{-\kappa(v+u)} = -e^{-2\kappa t} \quad (73)$$

可以看到,  $r = r_h$  的视界面正好对应于  $V = 0$  和  $U = 0$  的两个坐标轴, 且它们正好与  $t = \pm\infty$  的超曲面重合. 不难验证, 无论是  $r < r_h$  还是  $r > r_h$  都有

$$dVdU = -\kappa^2 VU dv du = \kappa^2 \left(\frac{r-r_h}{r_h}\right) e^{\kappa G(r)} dv du \quad (74)$$

从而度规为

$$ds^2 = -\frac{r_h}{\kappa^2} \frac{f(r)}{r-r_h} e^{-\kappa G(r)} dVdU + r^2 d\Omega^2 \quad (75)$$

此式中,  $f(r)$  的零点恰好被分母中的  $r - r_h$  消除, 从而消除了  $(V, U)$  在  $r = r_h$  处的奇异性.

### 3.2 Schwarzschild 解的延拓

对 Schwarzschild 解而言  $f(r) = 1 - \frac{r_g}{r}$ , 故  $r_h = r_g$ ,  $\kappa = \frac{1}{2r_g}$ ,  $g(r) = 2$ , 从而  $G(r) = 2r$ . 由此可引入 Kruskal 坐标, 度规成为

$$ds^2 = -\frac{r_g}{\kappa^2} \frac{1}{r} e^{-2\kappa r} dVdU + r^2 d\Omega^2 \quad (76)$$

其中

$$VU = -\frac{r-r_g}{r_g} e^{2\kappa r} \quad (77)$$

时空中禀奇异性  $r = 0$  现在成为

$$VU = 1 \quad (78)$$

这是第一、三象限内的一条双曲线, 第三象限内的部分描述时间的起始, 第一象限的部分描述时间的终止,  $VU = 1$  为时空的边界, 边界之外的时空是不存在的. 可见, Schwarzschild 时空的奇异性是类空的. 我们画出 Kruskal 图, 如(4)所示. 其中  $V = \tau^* + R^*$ ,  $U = \tau^* - R^*$ , 度规为

$$ds^2 = -\frac{r_g}{\kappa^2} \frac{1}{r} e^{-2\kappa r} (d\tau^{*2} - dR^{*2}) + r^2 d\Omega^2 \quad (79)$$

$\tau^*$  为类时坐标而  $R^*$  为类空坐标 (按照线元对应项前面的符号确定), Kruskal 图中类时曲线与  $\tau^*$  的夹角小于  $45^\circ$  而类光曲线与  $\tau^*$  的夹角为  $45^\circ$  ( $U$  和  $V$  都是类光坐标), 坐标变换不改变曲线的因果性, 故这里的类时与类光和  $(t, r)$  坐标中的一致. 对  $T_-$  区域内的任何一条类光或类时曲线, 显然可以知道曲线无法穿过  $r = r_g$ , 一定与  $r = 0$  相交, 这再一次说明掉入黑洞事件视界的粒子一定坠向奇点. 而  $T_+$  区域内的任何类时或者类光曲线都会穿过视界逃离这个区域, 这就是白洞.

我们还可以用 Kruskal 坐标研究红移. 假设一观察者  $B$  在视界外固定空间点处观察  $A$  掉向视界, 观察者对应第二、四象限内的某双曲线

$$VU = c, \quad c < 0 \quad (80)$$

而视界  $V = 0$  是它的渐近线. 当  $A$  离视界很近时,  $A$  发出的光子要么走  $-45^\circ$  直线掉向奇点, 要么几乎沿着  $V = 0$  运动, 因而永远无法到达  $B$ , 此即无限红移现象.

最后, 我们来说明, Kruskal 延拓是 Schwarzschild 时空的最大延拓. 判断一个时空是否能被进一步延拓的办法是, 观察时空中的测地线, 看它们在哪里终止. 假如你能跟着一条测地线跑到其固有时参数或者仿射参数的无穷值处, 那这时候你也就跑到时空的无穷远处去. 假如测地线在仿射参数的有限值处终止, 要么是这条测地线遇到了时空奇性, 要么是它遇到了坐标奇性. 假设只是遇到了坐标奇性, 那换一个更好的坐标系, 测地线就还能继续延伸, 这时候我们就说时空能被这个更好的坐标系延拓. 而假如测地线遇到的是时空奇性,

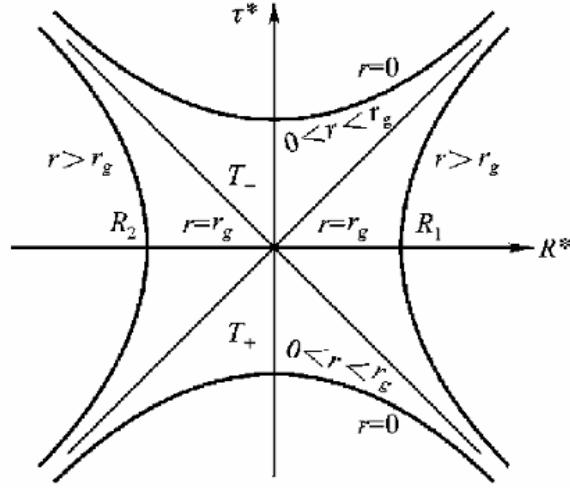


图 4: Schwarzschild 时空的 Kruskal 图

它就真的无法进一步延伸了. 最大延拓于是可以解释为, 任何在固有时参数的有限值处终止的测地线所遇到的都是时空奇性的那种延拓.

### 3.3 RN 解的延拓

对 RN 黑洞,  $f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{e^2}{r^2}$ , 它有两个零点

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - e^2} \quad (81)$$

进而可以把  $f(r)$  重写为

$$f(r) = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2} \quad (82)$$

可见,  $r_- < r < r_+$  为单向膜区,  $r_+$  为单向膜区开始的地方, 称为外视界, 也即未来事件视界.  $r = r_-$  为单向膜区结束的地方, 称为内视界, 也即 Cauchy 视界. 可以看到

$$\begin{aligned} \frac{2}{f(r)} &= \frac{2r^2}{(r - r_+)(r - r_-)} \\ &= \frac{2r_+^2}{(r_+ - r_-)(r - r_+)} + \frac{2r_-^2}{(r_- - r_+)(r - r_-)} + 2 \\ &\equiv \frac{1}{\kappa_+(r - r_+)} + \frac{1}{\kappa_-(r - r_-)} + 2 \end{aligned} \quad (83)$$

现在有两个极点, 所以每个极点的邻域内都要有对应的  $g(r)$  以及  $G(r)$ , 记作  $g_{\pm}(r)$  和  $G_{\pm}(r)$ . 每个极点的邻域内都要引入一组  $(V, U)$  坐标, 记作  $(V_{\pm}, U_{\pm})$ .

在  $r = r_+$  的邻域内,  $g_+(r) = \frac{1}{\kappa_-(r - r_-)} + 2$ , 从而

$$G_+(r) = \frac{1}{\kappa_-} \ln \left( \frac{r - r_-}{r_+} \right) + 2r \quad (84)$$

相应地

$$e^{\kappa_+(v-u)} = \left| \frac{r - r_+}{r_+} \right| e^{\kappa_+ G_+(r)} \quad (85)$$

类似，在 $r = r_-$ 的邻域内， $g_-(r) = \frac{1}{\kappa_+(r-r_+)} + 2$ ，从而

$$G_-(r) = \frac{1}{\kappa_+} \ln \left( \frac{r_+ - r}{r_+} \right) + 2r \quad (86)$$

相应地

$$e^{\kappa_-(v-u)} = \left| \frac{r - r_-}{r_-} \right| e^{\kappa_- G_-(r)} \quad (87)$$

这两个区域有重叠，即 $r_- < r < r_+$ 的单向膜区。在 $r = r_+$ 的邻域，定义 $V_+, U_+$ 使得

$$U_+ V_+ = - \left( \frac{r - r_+}{r_+} \right) e^{\kappa_+ G_+(r)} \quad (88)$$

坐标 $(V_+, U_+)$ 可以劈成四片，对 $r_- < r < r_+$ 取

$$V_+ = \pm e^{\kappa_+ v}, \quad U_+ = \pm e^{-\kappa_+ u} \quad (89)$$

它覆盖坐标系的第一、三象限。对于 $r > r_+$ ，取

$$V_+ = \pm e^{\kappa_+ v}, \quad U_+ = \mp e^{-\kappa_+ u} \quad (90)$$

它覆盖坐标系的第二、四象限。

对于 $r = r_-$ 的邻域，因为我们以及把 $r_- < r < r_+$ 的交叠区定义在 $(V_+, U_+)$ 的第一、三象限，为了 $(V_-, U_-)$ 和 $(V_+, U_+)$ 能够拼成一个整体， $r_- < r < r_+$ 的交叠区也应定义在 $(V_-, U_-)$ 的第一、三象限。所以， $r_- < r < r_+$ 时，定义

$$V_- = e^{\kappa_- v}, \quad U_- = \pm e^{-\kappa_- u} \quad (91)$$

进而 $0 < r < r_-$ 的区域只能定义在 $(V_-, U_-)$ 坐标系的第二、四象限，定义

$$V_- = \pm e^{\kappa_- v}, \quad U_- = \mp e^{-\kappa_- u} \quad (92)$$

可见

$$U_- V_- = \left( \frac{r - r_-}{r_-} \right) e^{\kappa_- G_-(r)} \quad (93)$$

代入 $G_{\pm}(r)$ 的表达式，则

$$\begin{aligned} U_+ V_+ &= - \left( \frac{r - r_+}{r_+} \right) \left( \frac{r_-}{r - r_-} \right)^{\frac{r^2}{r_+^2}} e^{2\kappa_+ r} \\ U_- V_- &= \left( \frac{r - r_-}{r_-} \right) \left( \frac{r_+}{r_+ - r} \right)^{\frac{r^2}{r_-^2}} e^{2\kappa_- r} \end{aligned} \quad (94)$$

可见， $r \rightarrow r_-$ 时， $U_+ V_+ \rightarrow \infty$ ，故 $r = r_-$ 在 $(V_+, U_+)$ 坐标系的第一、三象限的无穷远处。同样可以说明， $r = r_+$ 在 $(V_-, U_-)$ 坐标系第一、三象限的无穷远处。 $r = 0$ 处的奇异性对应 $U_- V_- = -1$ ，这是位于 $(V_-, U_-)$ 坐标系第二、四象限的双曲线。说明，与 Schwarzschild 时空不同，RN 时空的奇异性是类时的。

我们画出 RN 时空的两个坐标卡，如(5)所示。左边的是 $(V_+, U_+)$ 坐标卡，位于下方的第三象限是白洞区，上部的第一象限是黑洞区。右边的是 $(V_-, U_-)$ 坐标卡，位于下方的第三象限是黑洞区，上部的第一象限是白洞区。 $(V_+, U_+)$ 坐标卡的第二、四象限是无边界的，代表渐进平坦的时空区域，而 $(V_-, U_-)$ 坐标卡的第二、四象限有边界 $U_- V_- = -1$ ，边界代表时空奇异性，以外的时空是无意义的。

两个坐标卡可以拼接起来。我们既可以把 $(V_-, U_-)$ 坐标卡拼在 $(V_+, U_+)$ 坐标卡的下面，也可以把 $(V_+, U_+)$ 坐标卡拼在 $(V_-, U_-)$ 坐标卡的上面。于是，我们可以交错地拼接两种坐标卡，进而将时空无穷地延拓下去。

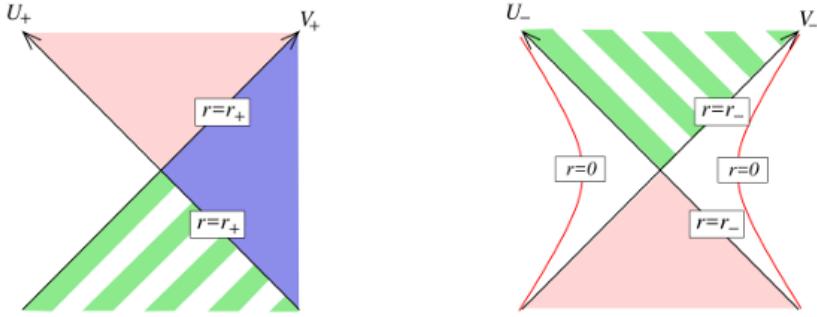


图 5: RN 时空的两种 Kruskal 坐标卡

### 3.4 虫洞

Kruskal 延拓中黑洞和白洞以外的部分有两片，即  $(V, U)$  坐标系的第二象限和第四象限，它们在无穷远处渐进平坦，而通过黑洞和白洞被连接起来。但是两个区域是无法互相通信的，因为从黑洞视界进入的信号总会无可避免地掉到时空奇性上去，我们来研究连接两个区域的 **空间几何**。

考察  $t = 0$ ，则  $U = V, R^*$ ，这是一条穿过原点的水平轴，它的左半部分和右半部分均对应黑洞（或白洞）的外部，空间度规均为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (95)$$

两部分通过  $U = V = 0$  连接起来，这个点（的空间部分）代表一个半径为  $r = r_g$  的二维球面。于是  $t = 0$  的空间几何是两片渐进平坦的空间在  $r = r_g$  的二维球面部分粘连起来。为了方便画图，取定  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，则二维球面退化为一个圆周，作出 Kruskal 时空在  $t = 0$  的空间几何，如图(6)所示。连接两片渐近平坦时空的粘合区（也就是图中的“喉”）称为 Einstein-Rosen 桥，它是所谓时空“虫洞”的一种。

## 4 Penrose 图

利用度规可以很好地研究时空的局部行为，但是我们尚未讨论时空的整体结构，这需要我们知道无穷远处发生了什么。

### 4.1 无穷远

首先我们对无穷远进行分类。

类时未来无穷远是对于任意有限  $r$  值，当  $t \rightarrow +\infty$  时，类时线伸展的区域，记为  $i^+$ ；

类时过去无穷远是对于任意有限  $r$  值，当  $t \rightarrow -\infty$  时，类时线伸展的区域，记为  $i^-$ ；

类空无穷远是对于任意有限  $t$  值，当  $r \rightarrow \infty$  时，类空线伸展的区域，记为  $i^0$ ；

类光未来无穷远是  $t - r$  为一有限定值，而  $t + r \rightarrow \infty$  的区域，或所有出射类光世界线的伸展区域，记为  $\mathcal{I}^+$ ；

类光过去无穷远是  $t + r$  为一有限定值，而  $t - r \rightarrow \infty$  的区域，或所有入射类光世界线的伸展区域，记为  $\mathcal{I}^-$ 。

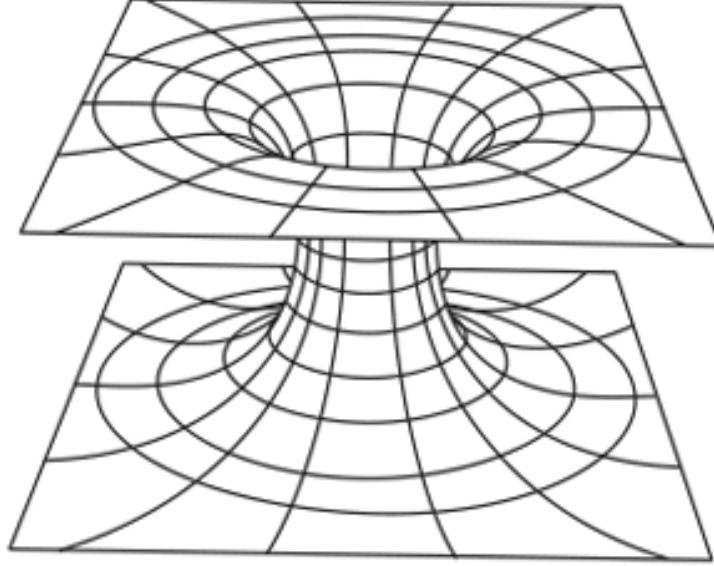


图 6: Einstein-Rosen 桥或“虫洞”

## 4.2 共形变换

为了研究无穷远处的物理，需要我们把无穷远点拉到某个有穷远处的位置，标准的办法是通过共形变换。给定一个时空  $M$  和一个度规场  $g_{\mu\nu}(x)$ ，可以通过共形变换构建新的度规场

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (96)$$

其中  $\Omega(x)$  是非零的光滑函数。共形变换相当于把时空距离在每一点进行局部的伸缩，伸缩因子是  $\Omega(x)$ 。这种局部伸缩是保角的，即对于非类光的切矢量场  $X^\mu$  和  $Y^\mu$  有

$$\frac{\langle X, Y \rangle_{\tilde{g}}}{\sqrt{\langle X, X \rangle_{\tilde{g}}} \sqrt{\langle Y, Y \rangle_{\tilde{g}}}} = \frac{\langle X, Y \rangle_g}{\sqrt{\langle X, X \rangle_g} \sqrt{\langle Y, Y \rangle_g}} \quad (97)$$

且，对于类光矢量场  $Z^\mu$ ，有

$$\langle Z, Z \rangle_{\tilde{g}} = 0 \iff \langle Z, Z \rangle_g = 0 \quad (98)$$

故类光矢量在共形变换以后的度规下依然类光。类似地，类时矢量在变换后依然类时，类空矢量在变换后依然类空。即，共形变换保持时空的局部光锥结构，换言之，共形变换保持时空的因果结构。

设有一测地线，其方程为

$$\frac{d^2 x^\rho}{dx^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (99)$$

共形变换后，Christoffel 符号变为

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \Omega^{-2} g^{\rho\lambda} [\partial_\mu (\Omega^2 g_{\nu\lambda}) + \partial_\nu (\Omega^2 g_{\mu\lambda}) - \partial_\lambda (\Omega^2 g_{\mu\nu})] \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Omega^{-1} (\delta_\mu^\rho \nabla_\nu \Omega + \delta_\nu^\rho \nabla_\mu \Omega - g_{\mu\nu} \nabla^\rho \Omega) \end{aligned} \quad (100)$$

变换后的度规下

$$\frac{d^2x^\rho}{d\lambda^2} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \Omega^{-1} (\delta_\mu^\rho \nabla_\nu \Omega + \delta_\nu^\rho \nabla_\mu \Omega - g_{\mu\nu} \nabla^\rho \Omega) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (101)$$

类时测地线或类空测地线在变换之后不一定仍是类时测地线或类空测地线（当然，仍然是类时或类空的）。但对类光测地线，由于  $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$ ，(101)中等式右边的最后一项为零，从而

$$\frac{d^2x^\rho}{d\lambda^2} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 2 \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\lambda} \quad (102)$$

通过重参数化可以将此式变为标准的测地线方程。可见，共形变换将一条类光测地线变为一条类光测地线。

变无穷为有限的关键技巧就在于通过合适的伸缩因子  $\Omega(x)$  将无穷收缩到有限，伸缩因子必须满足如下条件

$$\Omega(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad \text{or} \quad |t| \rightarrow \infty \quad (103)$$

于是，“无穷”可以等同于使得  $\Omega(\mathbf{x}, t) = 0$  的时空点，这些无穷点并不存在于原来的时空之中，但是可以额外添加到时空图上，作为时空的边界（这些边界本身不是时空的一部分），这样的操作称之为时空的共形紧化。

### 4.3 Minkowski 时空的 Penrose 图

Minkowski 时空的球坐标表示为

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (104)$$

引入坐标变换

$$\begin{aligned} t + r &= \tan(\psi + \xi) \\ t - r &= \tan(\psi - \xi) \end{aligned} \quad (105)$$

其中  $\psi, \xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . 则

$$ds^2 = \frac{d\psi^2 - d\xi^2}{\cos^2(\psi + \xi) \cos^2(\psi - \xi)} - r^2 d\Omega^2 \quad (106)$$

对  $r = 0$  应有  $\psi + \xi = \psi - \xi$  即  $\xi = 0$ ，对应于  $\psi$  轴上  $\psi = -\frac{\pi}{2}$  与  $\psi = \frac{\pi}{2}$  之间的开线段。对  $I^+$ ,  $r = \text{const}$ ,  $t \rightarrow +\infty$ , 应有  $\tan(\psi \pm \xi) = +\infty$ , 故  $\psi \pm \xi = \frac{\pi}{2}$ , 即  $\psi = \frac{\pi}{2}, \xi = 0$ , 对应于 Penrose 图上一点。对  $\mathcal{I}^+$ ,  $t - r = \text{const}$ ,  $t + r = \infty$ , 应有  $\psi + \xi = \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \psi - \xi < \frac{\pi}{2}$ , 即为去掉两端点  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  和  $(0, \frac{\pi}{2})$  的开线段。其它情况可类似分析，最终得到如图(7)所示的 Penrose 图。

图中三角形域的内部与 Minkowski 相对应，域内任何一点代表 Minkowski 时空中的一个二维球面。从共形变换的角度看待这一问题，(106)可写为

$$ds^2 = \omega^{-2}(\psi, \xi) (d\psi^2 - d\xi^2 - \sin^2 \xi d\Omega^2) \quad (107)$$

其中  $\omega(\psi, \xi) = \cos(\psi + \xi) \cos(\psi - \xi)$  在三角形的两直角边上为 0，造成度规的病态（这是流形还是 Minkowski 流形，只是换了坐标系）。做共形变换

$$d\tilde{s}^2 = \omega^2 ds^2 = d\psi^2 - d\xi^2 - \sin^2 \xi d\Omega^2 \quad (108)$$

则得到一个新流形，即  $R \times S^3$ ，忽略掉两个角分量即得 Penrose 图。流形  $R \times S^3$  的边界不能与 Minkowski 流形上任何一个点对应，它对应的是 Minkowski 流形的“无穷远处”，从共形变换因子  $\omega(\psi, \xi) = 0$  这一点也能看出。于是，通过共形变换，我们把流形无穷远处的点拉到有限远处，这一过程叫做共形紧化。

在 Penrose 图中， $\psi$  是时间坐标而  $\xi$  是空间坐标，故类光曲线和竖直方向的夹角是  $45^\circ$ ，类时曲线和竖直方向的夹角小于  $45^\circ$ ，和之前的讨论完全类似。

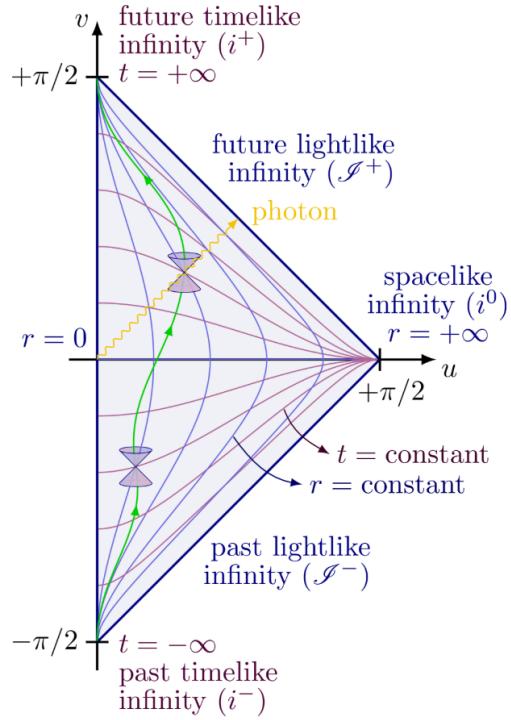


图 7: Minkowski 时空的 Penrose 图

#### 4.4 Schwarzschild 时空的 Penrose 图

Kruskal 延拓后的 Schwarzschild 时空为

$$ds^2 = -\frac{r_g}{\kappa^2} \frac{1}{r} e^{-2\kappa r} (dv^2 - du^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (109)$$

这里为简便起见用  $v, u$  代替之前的  $\tau^*, R^*$ , 有  $u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{-2\kappa r}$ , 且  $r > r_g$  时  $\frac{v}{u} = \tanh(\kappa t)$  而  $r < r_g$  时  $\frac{u}{v} = \tanh(\kappa t)$ . 引入坐标变换

$$\begin{aligned} v + u &= \tan \frac{1}{2}(\psi + \xi) \\ v - u &= \tan \frac{1}{2}(\psi - \xi) \end{aligned} \quad (110)$$

得

$$ds^2 = -\frac{r_g}{\kappa^2} \frac{e^{-2\kappa r}}{4 \cos^2 \frac{1}{2}(\psi + \xi) \cos^2 \frac{1}{2}(\psi - \xi)} (d\psi^2 - d\xi^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (111)$$

且

$$v^2 - u^2 = \tan \frac{\psi + \xi}{2} \tan \frac{\psi - \xi}{2} \quad (112)$$

对  $r = 0$ , 有  $v^2 - u^2 = 1$ , 即  $\tan \frac{\psi + \xi}{2} \tan \frac{\psi - \xi}{2} = 1$ , 即  $\psi - \xi = \pi - (\psi + \xi)$  或  $\psi - \xi = -\pi - (\psi + \xi)$ , 故  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\xi$  任取.

对  $i^+$  和  $i^-$ ,  $r = \text{const}$ ,  $t \rightarrow \pm\infty$ . 由前者可知  $\tan \frac{\psi + \xi}{2} \tan \frac{\psi - \xi}{2} = \text{const}$ . 由后者可知

$$\begin{cases} \tanh^{-1} \left( \frac{v}{u} \right) = \pm\infty, & \text{inside black hole} \\ \tanh^{-1} \left( \frac{u}{v} \right) = \pm\infty, & \text{inside white hole} \end{cases} \quad (113)$$

故  $\frac{v}{u} \rightarrow \pm 1$ , 故  $\tan \frac{\psi - \xi}{2} = 0$  或  $\tan \frac{\psi + \xi}{2} = 0$ , 从而  $\tan \frac{\psi \pm \xi}{2} = \infty$ , 即  $\psi \pm \xi = \pm\pi$  或  $\psi = \pm\xi = \pm\frac{\pi}{2}$

作出 Kruskal 时空的 Penrose 图, 如图(8)所示. 坚直方向  $\psi$  为类时方向, 水平方向  $\xi$  为类时方向, Penrose 图中曲线时空性质的讨论完全类似. 区域 III 和区域 I 的时空结构完全是对称的, 区域 I 代表我们的宇宙, 区域 III 被称为平行宇宙. 可以验证, 区域 II 中的任何一条类时曲线都不可避免地与时空奇性相交, 黑洞内部  $r$  表现得像外部的  $t$ , 这就是所谓的时空互换. 黑洞内部  $r$  只能一直减小, 就像在外部  $t$  只能增加. 区域 IV 中的任何一条类时曲线都会不可避免地进入区域 I 或 III, 与黑洞恰好相反. 从我们的宇宙出发, 没有信号能够进入平行宇宙, 因为掉入黑洞视界的一切信号不可避免地落入奇性.

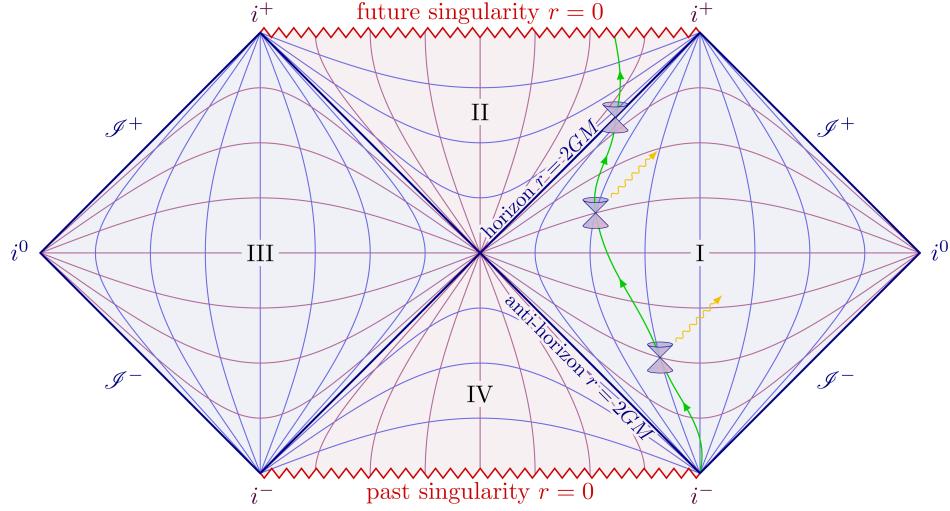


图 8: Schwarzschild 时空的 Penrose 图

#### 4.5 RN 时空的 Penrose 图

对 RN 时空, 在  $r_+$  和  $r_-$  处分别有两张 Kruskal 坐标卡, 其 Penrose 图如(9)所示, 外部的坐标卡没有奇异性. 把两种坐标卡的 Penrose 图沿单向膜区交替地拼接起来, 就得到 RN 解完整的 Penrose 图, 如图(10)所示.

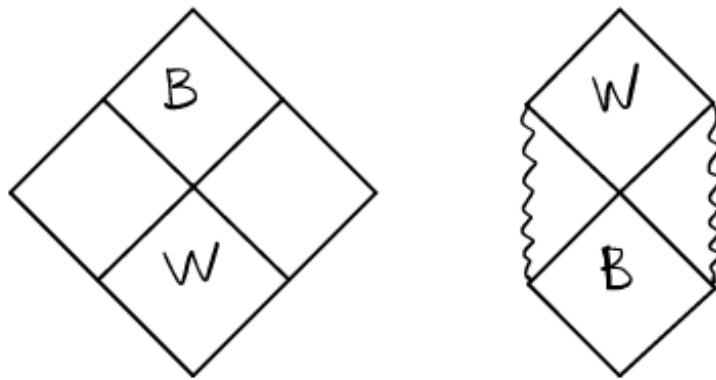


图 9: RN 解两种坐标卡的 Penrose 图

我们从黑洞外部出发, 沿着类时线行进. 穿过外视界  $r = r_+$  后, 和 Schwarzschild 黑洞一样, 粒子无法回到外界, 沿着  $r$  减少的方向下坠. 但是, 粒子还会遇到内视界  $r = r_-$ , 此后时空再次互换, 粒子不一定会奇点  $r = 0$  坠落. 而是可能转向, 从另一个内视界区域出去. 从这个内视界中出来以后的粒子会继续穿过外视界到达另一个渐进平坦的时空.

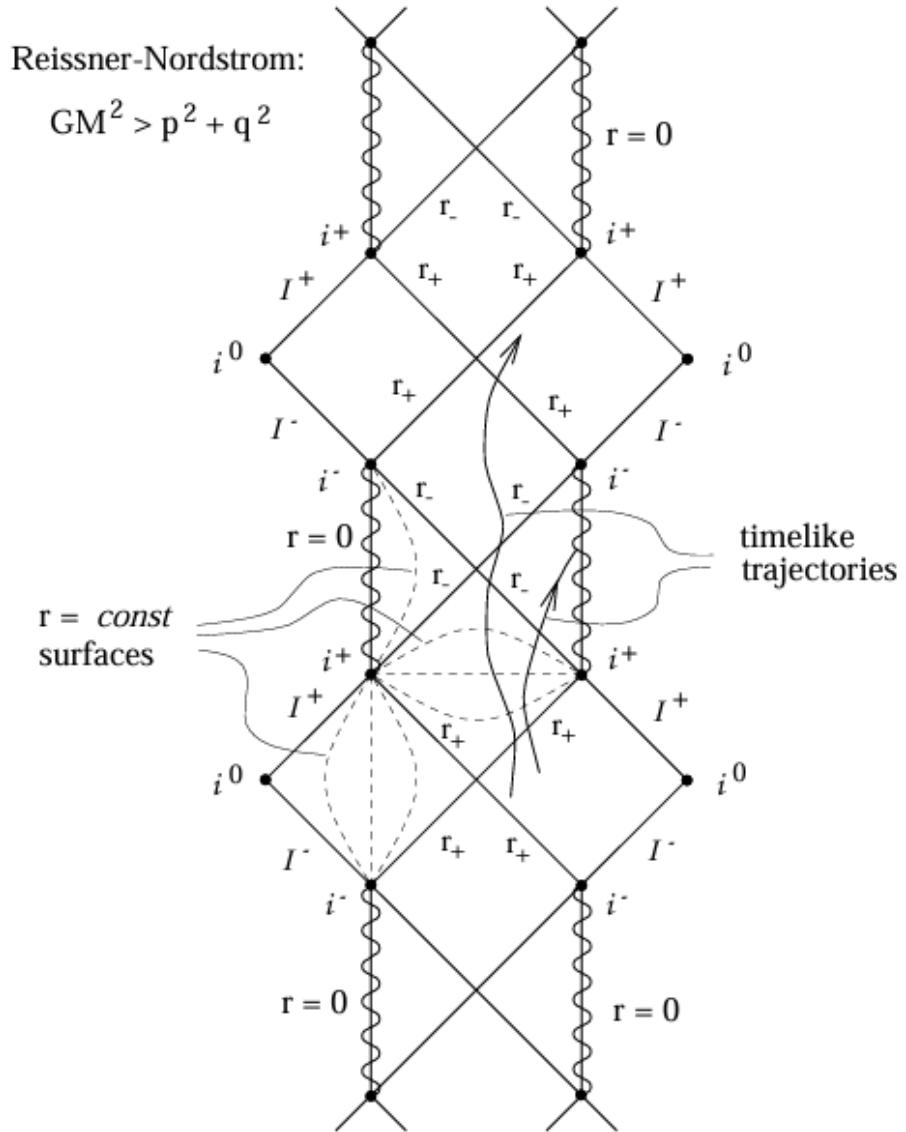


图 10: RN 解的 Penrose 图

## 5 漸进性质

我们来考察流形在无穷远处的漸进性质. 称一个流形  $(M, g)$  是漸进简单的, 若存在带边流形  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  和連續嵌入  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  使得

- $\tilde{M}$  上存在光滑函数  $\Omega$  满足  $\Omega > 0$  且  $\tilde{g} = \Omega^2 f(g)$ ;
- $\partial \tilde{M}$  上  $\Omega = 0$  而  $d\Omega \neq 0$ ;

上面两条保证  $M$  可以共形紧化.

- $M$  上的每一条零测地线在  $\partial M$  上都有两个端点.

称流形为漸进空且简单的, 若还满足

- $\bar{M} = M \cup \partial M$  中  $\partial M$  的任何一个开邻域上  $R_{\mu\nu} = 0$ .

可以证明边界必然是零超曲面, 包括两个零超曲面  $\mathcal{J}^+$  和  $\mathcal{J}^-$ , 分别具有拓扑  $R^1 \times S^2$ .  $i^0$  和  $i^\pm$  并不在边界上, 因为这些点上共形边界并非光滑流形.

漸进空和简单的时空排除了黑洞时空, 因为对黑洞时空而言, 存在着端点不在  $\mathcal{J}^+$  或  $\mathcal{J}^-$  上的类光测地线. 为此我们稍稍放弱一下条件, 一个流形  $(M, g)$  称为弱漸进空且简单的, 若有一个漸进空且简单的流形  $(M', g')$  和  $\partial M'$  的邻域  $u'$ , 使得  $u' \cap M'$  与  $M$  的某开子集  $u$  同构. 弱漸进空且简单的时空又称漸进平坦时空, 它包含了我们知道的三种黑洞时空. 漸进平坦时空和 Minkowski 时空对  $\mathcal{J}^\pm$  和  $i^0$  具有相同的结构.

## 6 稳态和静态时空

稳态时空是指存在类时 Killing 矢量场  $\xi$  的时空. 设  $\xi$  的积分曲线的参数为  $t$ , 则

$$\xi = \partial_t \quad (114)$$

因为  $\xi$  类时, 总可以在时空上取到以参数  $t$  为  $x^0$  的局部坐标系, 其中 Killing 方程为

$$0 = \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \partial_t g_{\mu\nu} \quad (115)$$

可见, 对于稳态时空, 我们总可以取到一个局部坐标系, 使得  $g_{\mu\nu}$  不依赖于  $x^0 = t$ . 度规为

$$ds^2 = g_{tt}(\mathbf{x})dt^2 + 2g_{ti}(\mathbf{x})dtdx^i + g_{ij}(\mathbf{x})x^i x^j \quad (116)$$

如果能够进一步取合适的局部坐标, 使得上式中的时间空间交叉项等于零, 即使得

$$g_{ti}(\mathbf{x}) = 0 \quad (117)$$

或

$$ds^2 = g_{tt}(\mathbf{x})dt^2 + g_{ij}(\mathbf{x})x^i x^j \quad (118)$$

这样的稳态时空就称作静态时空. 对于静态时空中的类时 Killing 矢量场, 必定存在空间超曲面与其积分曲线正交, 这样的类时 Killing 矢量场称为超曲面正交的. 于是静态时空, 即存在超曲面正交的类时 Killing 矢量场的时空.

稳态时空和静态时空都是时空本身内禀的性质, 和具体的局部坐标无关.

## 7 事件视界

我们严格讨论事件视界这一概念. 事件视界把时空分割开来, 视界外的观测者对事件视界内部发生的一切一无所知. 要定义事件视界, 必须了解时空的整体因果结构, 一个观察者无从真正地知道自己是否在黑洞区域内, 除非他知道时空的整个未来演化.

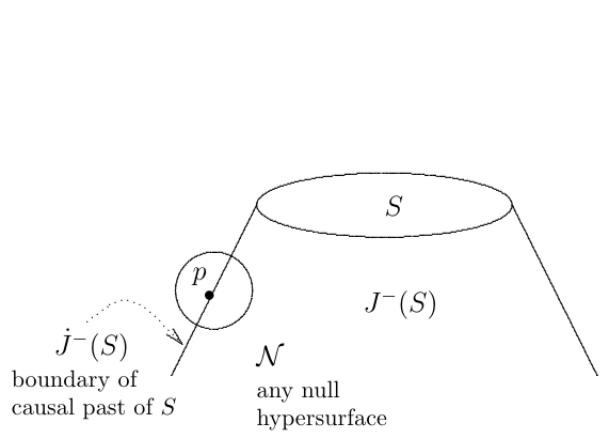


图 11: 集合  $S$  的因果过去

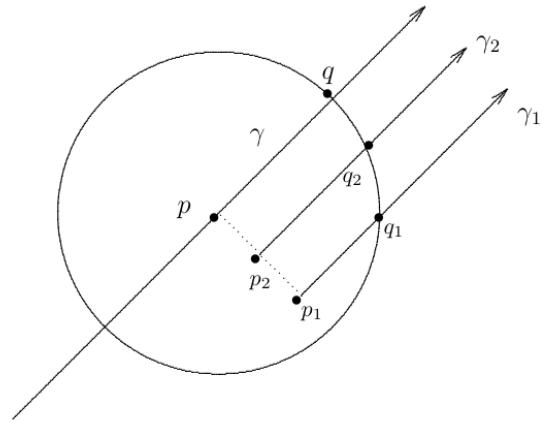


图 12:  $p$  点邻域中一个序列点集

设时空  $M$  是弱渐进平坦的, 定义  $J^-(U)$  为  $U$  的因果过去, 即对于  $J^-(U)$  中的点  $P$ , 存在穿过  $U$  的类时曲线, 其向过去延伸穿过  $P$ . 物理上, 这意味着  $J^-(U)$  中的事件是能对  $U$  产生影响的.  $\bar{J}^-(U)$  是  $J^-(U)$  的拓扑闭包, 则

$$\dot{J}^-(U) = \bar{J}^-(U) - J^-(U) \quad (119)$$

为  $J^-(U)$  的边界. 考虑流形  $M$  的类时未来无穷远  $\mathcal{I}^+$ , 它的因果过去的拓扑闭包的边界定义了未来事件视界

$$\mathcal{H}^+ = \dot{J}^-(\mathcal{I}^+) \quad (120)$$

未来事件视界有以下性质

- 类空无穷远  $i^0$  和类光过去无穷远  $\mathcal{I}^- \in J^-(\mathcal{I}^+)$  都不属于未来事件视界.
- $\mathcal{H}^+$  是一个类光超曲面, 其上两点无法通过类时曲线相连.

**证明.** 假设在  $\mathcal{H}^+$  上存在着两个类时曲线连接的两点  $p$  和  $q$ , 且  $q \in J^-(p)$ . 稍微变形, 使端点  $p' \in J^-(\mathcal{I})$  且  $q' \in J^-(\mathcal{I})$ . 但由于  $q' \in J^-(p') \in J^-(\mathcal{I})$ , 矛盾!  $\square$

- $\mathcal{H}^+$  的零测地线向过去延拓时可能碰到奇点.
- (Penrose)  $\mathcal{H}^+$  的零测地线可以向未来无限延拓.

**证明.** 考虑集合  $S$  的因果过去  $J^-(S)$ , 如图(11)所示. 在边界上面取一点  $p$ ,  $p \notin S$ . 在  $\dot{J}^-(S)$  上取穿过  $p$  的零测地线, 与其邻域相交于  $q$ . 在此邻域取一点列  $\{p_i\}$  使其聚点为  $p$ , 考虑由  $\{p_i\}$  出发的类时测地线簇  $\{\gamma_i\}$ , 它们与邻域边界的交点为  $\{q_i\}$ , 序列  $\{q_i\}$  的聚点为  $q$ . 连接  $p$  和  $q$  的曲线是类时测地线的极限, 因而是类时测地线或零测地线, 而连接零超曲面上两点的测地线不能是类时的, 因而是零测地线段. 同样的讨论可以对  $q$  重复, 对临近  $q$  的一点  $r$ , 会有一段新的零测地线段, 而这两者必然属于同一零测地线, 否则存在连接  $p$  和  $r$  的类时曲线, 这是不可能的. 取  $S = \mathcal{I}^+$ , 则证明了 Penrose 定理.  $\square$

简言之, 零测地线可以进入  $\mathcal{H}^+$ , 但不能离开它. 过去事件视界  $\mathcal{H}^- = \dot{J}^+(\mathcal{I}^-)$  的讨论是完全类似的.

我们可以从零测地线与事件视界的关系看出事件视界必然是零超曲面. 设四维时空中有超曲面  $S$ :  $f(x) = 0$ , 引入其法矢量

$$n_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad (121)$$

在  $S$  上一点  $P$  处可以引入局部 Lorentz 参考系，线元为

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (122)$$

局部光锥面为  $ds^2 = 0$ . 对局部 Lorentz 坐标系进行纯空间转动，使得此点处  $S$  的法矢量为

$$n^\mu = (n^0, n^1, 0, 0), \quad n_\mu = (n^0, -n^1, 0, 0) \quad (123)$$

故

$$n^\mu n_\mu = (n^0)^2 - (n^1)^2 \quad (124)$$

对  $S$  在此处的切矢量  $t^\mu$  成立

$$n_\mu t^\mu = n^0 t^0 - n^1 t^1 = 0 \quad (125)$$

从而有

$$\frac{t^0}{n^1} = \frac{t^1}{n^0} \equiv \lambda \quad (126)$$

则

$$t^\mu = \lambda(n^1, n^0, a, b) \quad (127)$$

其中  $a$  和  $b$  为任意实数. 在局部 Lorentz 参考系中

$$t_\mu t^\mu = -\lambda^2[n_\mu n^\mu + (a^2 + b^2)] \quad (128)$$

当  $n^\mu$  是类时矢量时， $n_\mu n^\mu > 0$ ，必有  $t_\mu t^\mu < 0$ ，即超曲面  $S$  的所有切矢量都在局部光锥面外，粒子只能超曲面的一侧进入未来光锥面内. 当  $n^\mu$  是类光矢量时， $n_\mu n^\mu = 0$ ，有  $t_\mu t^\mu \leq 0$ （当且仅当  $a = b = 0$  取等），即超曲面  $S$  与局部光锥面相切，粒子只能超曲面的一侧进入未来光锥面内. 当  $n^\mu$  是类空矢量时， $n_\mu n^\mu < 0$ ， $t^\mu$  的时空特性不定，即超曲面  $S$  与局部光锥面相割，粒子可以从超曲面的两侧进入未来光锥面内. 可见， $f(x) = 0$  为单向膜的条件为，其法矢量  $n_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$  为非类空矢量. 超曲面成为事件视界的必要条件为，其任意法矢量均为类光矢量. 换句话说，事件视界为零超曲面.

事件视界不只是零超曲面，还应当是反映时空对称性的零超曲面. 比如 Schwarzschild 黑洞的事件视界就取为  $f(r) = \text{const}$  的形式，反映球对称性.

## 8 奇点

### 8.1 奇点定理

首先我们引入时空的因果性条件，最弱的条件为编时条件，即时空中不存在闭合的类时曲线. 这是我们可设想的对因果性最低的要求. 最强的条件是整体双曲条件，即时空存在 Cauchy 面，时空中所有的类时和类光曲线都与它相交，且只交一次.

对流形上的曲线，我们可以定义共轭点. 如果测地线簇的 Jacobi 场除了两点外处处不为 0，则称这两点为共轭点. 完备时空中的测地线簇不能存在共轭点，否则就会形成闭合类时曲线，违背编时条件. 如果时空中存在物质，则一定会有曲率，导致平行测地线的交汇. 如果时空还具有时间反演对称性，则将测地线反向延伸必然会有共轭点. 唯一的可能性是，测地线在某处断掉了，也就是说时空存在奇点. 这就是 Penrose-Hawking 的奇点定理的简单说明.

**定理 8.1** (奇点定理 (Penrose,Hawking) ). 如果

- 编时条件成立；

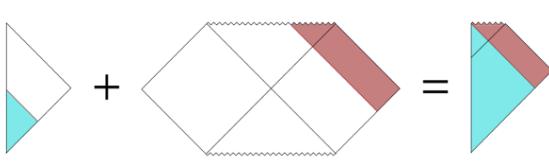


图 13: 光子球壳坍缩的 Penrose 图

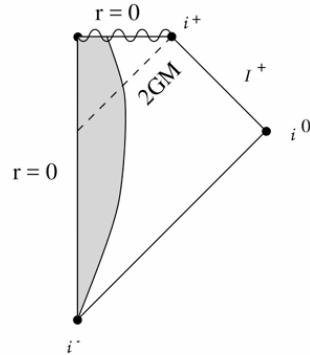


图 14: 真实黑洞的 Penrose 图

- 广义相对论正确;
- 强能量条件成立;
- 时空存在物质.

则时空存在奇点.

## 8.2 真实黑洞，宇宙监督

Kruskal 延拓后的 Schwarzschild 解包含一些非物理的东西，比如白洞。真实的 Schwarzschild 时空不是先有一个白洞区域，然后接着一个黑洞区域，而是是由非常大质量的恒星发生引力坍缩所形成的。

我们姑且不研究恒星坍缩的具体机制，而考虑一个 toy model，一个均匀填充满光子的薄层球壳以光速向内坍缩，所有的光子都以光速朝  $r = 0$  飞行。在所有的光子都汇聚到  $r = 0$  点时，由于光子能量密度的高度集中，时空会形成一个黑洞。球壳包围的空腔一定保持平坦时空，因此将平坦时空 Penrose 图的蓝色部分和 Schwarzschild 时空 Penrose 图的红色部分拼接起来，就得到坍缩光子球壳的 Penrose 图。图中与竖直方向成  $45^\circ$  的斜线段也代表黑洞视界，但是从左边的  $r = 0$  处开始的，所以视界面积并不是恒定不变的  $4\pi r_g^2$ ，而是从零开始逐渐增加到这个稳定值。对真实的坍缩过程，星体表面必定走的是类时世界线，故 Penrose 图应大致如(14)所示。可见真实的黑洞并没有一个白洞区域。另外可以发现，黑洞的时空奇性必定被一个未来事件视界所包围，黑洞的时空奇性对无穷远处的观察者完全不能产生影响。能够对无穷远处观察者产生影响的奇点称为裸奇性。Einstein 方程允许裸奇点的存在，比如 Kruskal 时空中的白洞或宇宙大爆炸开始时的时空奇性，Schwarzschild 解中取  $M < 0$  也会有裸奇性出现。

我们相信裸奇性是非物理的，并引入

**定理 8.2** (弱宇宙监督准则). 假设物质满足所谓的主能量条件，并假定度规场和物质场都具有一般性的、光滑的初始条件，那么渐近平坦时空中将不会演化形成裸奇性。

RN 解的内外两个视界

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - e^2} \quad (129)$$

对  $|e| > GM$  是不存在的。但  $r = 0$  处的时空奇异性依然存在，这就会变成一个裸奇性，这是与宇宙监督准则相悖的，因而是非物理的。这种解称为超极端黑洞。假设超极端仅仅带电荷，则  $|e| > GM$  变为

$$\frac{Q^2}{4\pi} > GM^2 \quad (130)$$

意味着 Coulomb 推斥力大于万有引力，无法通过引力坍缩的机制形成这种黑洞。

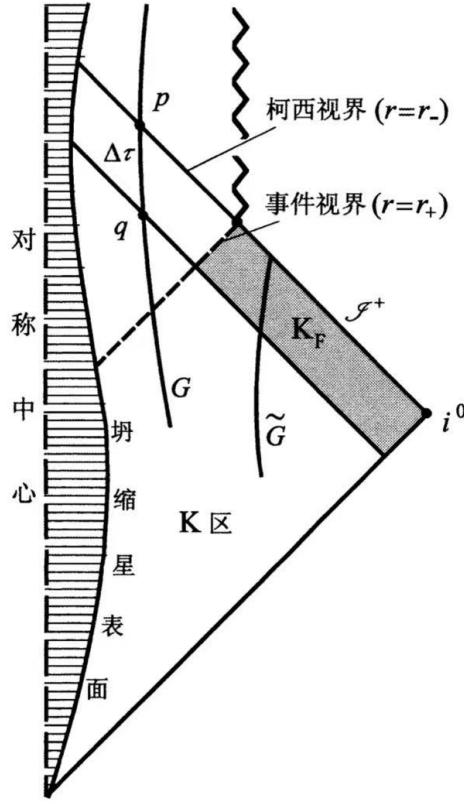


图 15: 恒星坍缩形成的 RN 黑洞的 Penrose 图

宇宙大爆炸开始时的时空奇性的确是裸奇性，但是由于它处于时间的开端处，而不是在时空动力学演化的未来自动形成的，所以它并不破坏弱宇宙监督猜测。

另外，研究 RN 时空时我们看到，粒子进入内视界后可能不坠入奇点，而是从另一个内视界逃出，到达另一个渐进平坦时空。遗憾的是，这种结构也是不稳定的。恒星坍缩形成的 RN 黑洞的 Penrose 图如(15)所示。

假设黑洞外部有一个光源以恒定频率向黑洞发射光信号，则对沿测地线  $G$  的观测者而言，他将在有限的固有时  $\tau$  内接收到外部无穷时间发射的光子，随着越来越靠近内视界，光会发生无限蓝移。近乎无穷的光子能量堆积在内视界附近，必然会导致内视界处时空的剧烈弯曲，所以内视界是不稳定的。我们引入

**定理 8.3** (强宇宙监督准则). 对于满足适当能量条件的物质，一般的初始条件将不会导致出现 *Cauchy* 视界，类时的时空奇性也不会形成。

就是说，整个时空都可以由 *Cauchy* 面上的初始数据演化决定，物理的时空都是整体双曲的。

强弱宇宙监督准则在逻辑上是互相独立的，并没有强弱之分。

## 9 Kerr 黑洞

### 9.1 Kerr 几何

考虑一个转动物体的外部时空。若转动是稳定的，则时空是稳态的，有一个类时 Killing 矢量  $\partial_t$ 。另一方面，时空是轴对称的，有一个类空 Killing 矢量  $\partial_\phi$ ，其中  $\phi = x^3$  为类空转动角。取度规为另外坐标的函数，即

$g_{\mu\nu}(x^1, x^2)$ , 时空几何在时间反演和转动反向下不变, 则

$$g_{01} = g_{02} = g_{13} = g_{23} = 0 \quad (131)$$

线元为

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dtd\phi + g_{33}d\phi^2 + [g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2] \quad (132)$$

二维 Riemann 流形是共形平坦的, 故  $(x^1, x^2)$  的子流形度规为  $g_{ab} = \Omega^2(x)\eta_{ab}$ , 取  $x^1 = r$  和  $x^2 = \theta$ , 则

$$ds^2 = -Adt^2 + B(d\phi - \omega dt)^2 + Cdr^2 + Dd\theta^2 \quad (133)$$

其中  $A, B, C, D, \omega$  是  $r, \theta$  的任意函数.

在此时空中考虑光子在固定的  $(r, \theta)$  处, 沿  $\pm\phi$  方向分别发射. 光子的路径满足

$$\begin{aligned} ds^2 = 0 &\Rightarrow g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 \\ &\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \left[ \left( \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (134)$$

如果  $g_{tt} < 0$ ,  $\frac{d\phi}{dt}$  可正可负, 光子可以沿着正  $\phi$  方向或负  $\phi$  方向自由地运动. 如果  $g_{tt} > 0$ ,  $\frac{d\phi}{dt}$  与  $-g_{t\phi}$  同号, 光子的运动方向必然与时空旋转方向一致. $g_{tt} = 0$  时

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{2g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = 2\omega \quad \text{or} \quad 0 \quad (135)$$

对无穷远处的观察者而言, 与时空旋转方向一致发射的光子, 其角速度更快, 而逆着时空旋转方向发射的光子速度为 0, 看起来是径向发射的. 由  $g_{tt} = 0$  的超曲面叫做稳态极限面. 稳态极限面内的粒子必须随时空一起转动, 设粒子固定在  $(r, \theta, \phi)$  位置, 则其四速度应满足  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{tt}t^2 = -1$ , 而  $g_{tt} > 0$ , 这是不可能的. 显然还能知道,  $g_{tt} = 0$  还是一个无限平移面.

上面的讨论只限于轴对称性, 不要求时空满足 Einstein 方程, 但即使作此要求, 还是不能唯一地确定度规. 这不同于球对称时空的情形, 说明轴对称性弱于球对称性. 我们作额外的要求

- 时空是渐进 Minkowski 的, 即无穷远处时空度规回到 Minkowski 度规;
- 存在一个光滑的凸事件视界, 其外的时空几何是非奇异的.

做此要求后, Carter 和 Robinson 证明了轴对称时空是唯一的, 可以由 Kerr 时空几何描述. Hawking 和 Wald 证明了, 对于黑洞, 稳态可以导出轴对称, 故 Carter-Robinson 定理的条件可以放弱. 稳态对应着系统的平衡态, 我们可以期望, 引力坍缩的最终状态为稳态时空, 由唯一性定理, 黑洞唯一地由质量和角动量来刻画, 这意味着引力场中高于偶极的极矩都被辐射掉.

如果考虑与电磁场的耦合, 则唯一性定理可以推广, 最终得到的解由质量、角动量和电荷三个参数描述, 称为 Kerr-Newman 解. 这个定理称为黑洞无毛定理.

历史上是 Kerr 先发现旋转不带电黑洞的 Kerr 度规. 但 1964 年, Newman 在 Journal of matheoremathical physics 上发表了一篇论文, 像变魔术一样从 RN 度规直接得到了旋转带电的 Kerr-Newman 度规. 这里我们介绍他的工作.

做变换

$$\begin{aligned} r' &= r \\ \theta' &= \theta \\ \phi' &= \phi \\ du &= dt - \frac{r^2}{r^2 - 2mr + Q^2} dr \end{aligned} \quad (136)$$

则 RN 度规式便变为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) du^2 + 2du dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (137)$$

或

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (138)$$

利用  $g = -r^4 \sin^2 \theta$  可得

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (139)$$

引入

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu \\ n^\mu &= \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \delta_1^\mu \\ m^\mu &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}r}\right) \left[\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu\right] \end{aligned} \quad (140)$$

引入 4 矢标架

$$\begin{aligned} \lambda_{(\alpha)}^\mu &= (l^\mu \ n^\mu \ -m^\mu \ -\bar{m}^\mu) \\ \tau_{(\alpha)}^\nu &= (n^\nu \ l^\nu \ \bar{m}^\nu \ m^\nu) \end{aligned} \quad (141)$$

则

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + n^\mu l^\nu - m^\mu \bar{m}^\nu - \bar{m}^\mu m^\nu \quad (142)$$

可以证明

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = 0 \quad (143)$$

即  $\lambda_{(\alpha)}^\mu, \tau_{(\alpha)}^\mu$  在标架空间的每一个分量都是坐标空间的类光矢量。应当注意， $\lambda_{(\alpha)}^\mu, \tau_{(\alpha)}^\mu$  并非正交标架且  $l^\mu, n^\mu, m^\mu$  和  $\bar{m}^\mu$  均线性无关把  $r$  延拓到复数空间并把标架改写为

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu \\ n^\mu &= \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[1 - m \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}}\right) + \frac{Q^2}{r^2}\right] \delta_1^\mu \\ m^\mu &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}r}\right) \left[\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu\right] \end{aligned} \quad (144)$$

作变换

$$\begin{aligned} dr' &= dr - ia \sin \theta d\theta \\ d\theta' &= d\theta \\ du' &= du + ia \sin \theta d\theta \\ d\phi' &= d\phi \end{aligned} \quad (145)$$

考虑到标架是坐标空间的4-矢量，即得

$$\begin{aligned} l'^\mu &= \delta_1^\mu \\ n'^\mu &= \delta_0^\mu - \left[ \frac{1}{2} - \left( mr' - \frac{1}{2}Q^2 \right) (r'^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{-1} \right] \delta_1^\mu \\ m^\mu &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia \cos \theta)} \right] \left[ ia \sin \theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu \right] \end{aligned} \quad (146)$$

在上述变换后我们又从复  $r$  空间回到了实  $r$  空间。由

$$g'^{\mu\nu} = l'^\mu n'^\nu + n'^\mu l'^\nu - m'^\mu \bar{m}'^\nu - \bar{m}'^\mu m'^\nu \quad (147)$$

得

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma(-a^2 \sin^2 \theta) & \gamma(r^2 + a^2) & 0 & -\gamma a \\ \gamma(r^2 + a^2) & \gamma[2mr - (r^2 + a^2) - Q^2] & 0 & \gamma a \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ -\gamma a & \gamma a & 0 & \gamma(-\sin^{-2} \theta) \end{pmatrix} \quad (148)$$

其中  $\gamma = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{-1}$ 。所以

$$\begin{aligned} ds^2 &= [1 + \gamma(Q^2 - 2mr)]du^2 + 2dudr + 2\gamma(\sin^2 \theta)(2mr - Q^2)dud\phi \\ &\quad - 2a \sin^2 \theta dr d\phi - \gamma^{-1}d\theta^2 - \sin^2 \theta[r^2 + a^2 + \gamma a^2 \sin^2 \theta(2mr - Q^2)]d\phi^2 \end{aligned} \quad (149)$$

最后采用坐标变换

$$\begin{cases} du = dt - (r^2 + a^2) \frac{dr}{r^2 + a^2 - 2mr + Q^2} \\ dr = dr' \\ d\theta = d\theta' \\ d\phi = d\phi' - a \frac{dr}{r^2 + a^2 - 2mr + Q^2} \end{cases} \quad (150)$$

便可得到 Kerr-Newman 度规的形式

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (cdt - a \sin^2 \theta d\phi')^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\phi' - acdt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (151)$$

式中  $\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2 + Q^2$ ,  $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ .

考察单向膜开始和结束的地方，设其为  $f(r, \theta) = 0$ ，则

$$\frac{\Delta}{\rho^2} (\partial_r f)^2 + \frac{1}{\rho^2} (\partial_\theta f)^2 = 0 \quad (152)$$

因为  $\partial_r f$  和  $\partial_\theta f$  不同时为 0，可得此方程的解为

$$\begin{aligned} \partial_r f &= 0 \\ \Delta &= 0 \end{aligned} \quad (153)$$

前一个方程看出  $f(r, \theta)$  与  $r$  无关，后一个方程给出内外视界

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - a^2} \quad (154)$$

令  $r = r_\pm$  且取  $t$  为常数，空间度规

$$d\sigma^2 = \rho_\pm^2 d\theta^2 + \left( \frac{2\mu r_\pm}{\rho_\pm} \right)^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (155)$$

这并非球面几何，而是一个沿转轴被压扁的椭球，可以直观地理解为球面由于转动离心力变成了椭球面。

可以看到，只有在参数满足

$$a^2 < \mu^2 \quad (156)$$

时, 奇点才被视界包围起来, 满足宇宙监督法则.  $a^2 = \mu^2$  时,  $r_+ = r_- = \mu$ , 是一个极端黑洞.  $a^2 > \mu^2$  时, 没有视界存在, 奇点为裸奇点.

对 Kerr 黑洞, 无穷大红移面

$$r_S^\pm = \mu \pm (\mu^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (157)$$

当  $r = r_S^\pm$ ,  $t$  为常数时, 空间度规

$$d\sigma^2 = (\rho_S^\pm)^2 d\theta^2 + \left[ \frac{2\mu r_S^\pm (2\mu r_S^\pm + 2a^2 \sin^2 \theta)}{(\rho_S^\pm)^2} \right] \quad (158)$$

这是一个轴对称椭球面. 取 Schwarzschild 极限可见

$$r_S^+ \rightarrow r = r_g, \quad r_S^- \rightarrow 0 \quad (159)$$

首先, 我们考虑零角动量观察者. 角动量密度为  $L = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}$ , 其中  $\boldsymbol{\eta} = \partial_\phi$ . 零角动量意味着

$$g_{\phi t} \dot{t} + g_{\phi\phi} \dot{\phi} = 0 \quad (160)$$

即

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \quad (161)$$

可见, 零动量观察者具有角速度  $\omega$ , 随着观察者接近黑洞, 这个角速度增加, 且与黑洞本身的转动同向. 这称为惯性系的拖曳效应.

其次, 考虑静止观测者, 其 4-速度正比于 Killing 矢量  $\xi$ , 即

$$u^\mu = \sqrt{-g_{00}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (162)$$

这样的观察者必须通过外在的推动才能保持静止, 其运动轨迹非测地线. 并且, 由于  $\xi$  并非总是类时的, 在稳态极限面内无法定义这样的观察者.

最后, 考察稳态观察者, 他们沿着  $\phi$  方向运动, 具有恒定角速度  $\Omega$ . 其 4-速度为

$$u^\mu = \gamma(\xi^\mu + \Omega \eta^\mu) \quad (163)$$

这里  $\xi + \Omega \eta$  仍是 Killing 矢量. 归一化因子

$$\begin{aligned} \gamma^{-2} &= -g_{\mu\nu}(\xi^\mu + \Omega \eta^\mu)(\xi^\nu + \Omega \eta^\nu) \\ &= -g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi} \\ &= -g_{\phi\phi} \left( \Omega^2 - 2\omega\Omega + \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}} \right) \end{aligned} \quad (164)$$

稳态观测者的存在要求  $\xi + \Omega \eta$  是类时的, 即  $\gamma^{-2} > 0$ . 这即是说

$$\Omega_- < \Omega < \Omega_+ \quad \text{within} \quad \Omega_\pm = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} = \omega \pm \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\Sigma^2 \sin \theta} \quad (165)$$

稳态观察者的  $\Omega = 0$  时, 成为静态观察者. 因为进入稳态极限面后观察者必然具有非零的角速度, 静态观察者只能在稳态观测量外面定义. 观测者从稳态极限面径向下降时,  $\Omega_-$  增加而  $\Omega_+$  减小, 直至  $\Omega_- = \Omega_+ = \omega$ , 只能有  $\Omega = \omega$ . 这要求  $\Delta = 0$ , 即抵达了事件视界, 此时, 观测者角速度与黑洞角速度相同.

## 9.2 Kerr 黑洞的奇异性与测地线

通过计算 Riemann 曲率张量, 可以确定, Kerr 解的奇异性出现在

$$\rho^2 = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{and} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (166)$$

给定时间  $t$ , 考察 Kerr 度规在  $r = 0$  处的诱导度规

$$ds^2 = a^2(\cos^2 \theta d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (167)$$

可见,  $(\theta, \phi)$  描述的二维闭合曲面没有退化为一个点, 其度规也不是标准的球面度规, 因为 Kerr 时空没有 SO(3) 对称性. 将度规限制在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  处的时空奇性, 则

$$ds^2 = a^2 d\phi^2 \quad (168)$$

这是一个半径为  $a$  的环, 称为奇环, 其角坐标  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

一般而言, 由于缺乏球对称性, Kerr 时空中的粒子无法保证在一个平面上运动. 然而轨道可以被限制在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  的赤道面上. 在此赤道面上的粒子, 其运动在  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  下不变, 所以  $u^\theta = 0$ , 粒子可以等效地看作在度规

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dt^2 - \frac{4a\mu}{r} dt d\phi + \frac{r^2}{4} dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu a^2}{r}\right) d\phi^2 \quad (169)$$

中运动. 由 Killing 对称性, 我们可以定义粒子的守恒能量密度和角动量密度:

$$E = -\xi \cdot \mathbf{u} = -(g_{tt} u^t + g_{t\phi} u^\phi) \quad (170)$$

$$L = \eta \cdot \mathbf{u} = g_{\phi t} u^t + g_{\phi u} u^\phi \quad (171)$$

而粒子的 4-速度分量可写作

$$u^t = \frac{dt}{dr} = \frac{1}{\Delta} \left[ \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu a^2}{r}\right) E - \frac{2\mu a}{r} L \right] \quad (172)$$

$$u^\phi = \frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{\Delta} \left[ \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) L + \frac{2\mu a}{r} E \right] \quad (173)$$

利用 4-速度的归一化条件, 以及  $u^\phi = 0$ , 我们最终得到

$$\frac{E^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r, E, L) \quad (174)$$

其中

$$V_{\text{eff}}(r, E, L) = -\frac{\mu}{r} + \frac{L^2 - a^2(E^2 - 1)}{2r^2} - \frac{\mu(L - aE)^2}{r^3} \quad (175)$$

可见, 粒子在赤道面上的运动同样被约化到一个势  $V_{\text{eff}}$  中的一维运动.

我们也可以考虑光子的运动. 此时光子的 4-速度是零矢量  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ , 其运动依赖于入射参数  $b = |L/E|$ . 此外, 其运动还依赖于光子是顺着黑洞的转动方向还是逆着黑洞的转动方向, 这由角动量密度  $L$  的符号  $\sigma = \text{sign}(L)$  决定. 最终我们得到径向方程

$$\frac{1}{L^2} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - V_{\text{eff}}(r, b, \sigma) \quad (176)$$

其中

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{r^2} \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{2\mu}{r} \left( 1 - \sigma \frac{a}{b} \right)^2 \right] \quad (177)$$

显然, 由于转动黑洞的参考系拖曳效应,  $\sigma > 0$  的顺动光子与  $\sigma < 0$  的逆动光子的运动是不同的.

仅讨论对称轴上的二维几何, 取  $\theta = 0$  或  $\pi$ . 线元

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2}\right) dt^2 + \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 - 2Mr} dr^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2}\right)^{-1} dr^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2}\right) dv^2 + 2dvdr \end{aligned} \quad (178)$$

其中

$$dv = dt + \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 - 2Mr} dr \quad (179)$$

为超前类光坐标. 对称轴上没有内禀奇异性, 故采用此坐标后, 对称轴上无奇异性. 视界与无限红移面重合在

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (180)$$

粒子的 Lagrange 量可以取为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right) \dot{v}^2 - \dot{v} \dot{r} \quad (181)$$

由 Euler-Lagrange 方程得

$$\left( 1 - \frac{2M}{r^2 + a^2} \right) \ddot{v} - \ddot{r} = 0 \Rightarrow \dot{v} = \left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right)^{-1} (\dot{r} + E) \quad (182)$$

另外

$$-\left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right) \dot{v}^2 + 2\dot{v}\dot{r} = \varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{time-like} \\ 0 & \text{null} \\ 1 & \text{space-like} \end{cases} \quad (183)$$

且对于类光测地线, 总可以重参数化使得  $E = 1$ . 得

$$\dot{r} = \pm \left[ E^2 + \varepsilon \left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (184)$$

当  $a^2 > M^2$  时,  $r^2 + a^2 - 2Mr = 0$  无实根. 此时, 仿射参数取  $(-\infty, \infty)$  内的任何值,  $\dot{v}$  和  $\dot{r}$  都是有界的,  $v$  和  $r$  的取值范围都是  $(-\infty, \infty)$ . 仿射参数可以从  $-\infty$  取到  $\infty$ , 所以此时流形  $\mathcal{M}(v, r)$  是测地完备的.

当  $a^2 < M^2$  时,  $r^2 + a^2 - 2Mr = 0$  有两个实根. 对零测地线

$$\dot{v} \left[ -\left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right) \dot{v} + 2\dot{r} \right] = 0 \quad (185)$$

此方程的一个解是

$$\dot{v} = 0 \quad (186)$$

代入(182)得

$$\dot{r} = -1 \quad (187)$$

积分得

$$v = \text{const}, \quad r = -\lambda \quad (188)$$

其中  $\lambda$  是类光测地线的仿射参数. 说明零测地线的仿射参数为  $-r$ , 能从  $-\infty$  取到  $\infty$ , 此时流形  $\mathcal{M}(v, r)$  是测地完备的.

方程的另一个解是

$$\dot{v} = 2\dot{r} \left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right)^{-1} \quad (189)$$

代入(182)得

$$\dot{r} = 1 \quad (190)$$

积分得

$$v = \text{const} + 2r + 4M \left( \frac{r_+}{r_+ - r_-} \ln |r - r_+| - \frac{r_-}{r_+ - r_-} \ln |r - r_-| \right) \quad (191)$$

这族零测地线的仿射参数为  $r$ , 且  $r \rightarrow r_{\pm}$  时  $F(r) \rightarrow \mp\infty$ , 这表明零测地线在  $\lambda = r \rightarrow r_{\pm}$  处断掉. 对非类光测地线也是如此. 当  $0 < a^2 < M^2$  时, 流形  $\mathcal{M}(v, r)$  没有内禀奇异性, 但测地线在  $r = r_{\pm}$  要断掉, 流形不是

测地完备的. 两视界  $r_{\pm}$  把时空分为三个区域, 在  $(-\infty, r_-)$  上,  $v$  随  $r$  单调上升直至  $+\infty$ ; 在  $(r_-, r_+)$  上,  $v$  随  $r$  单调下降到  $-\infty$ ; 在  $(r_+, +\infty)$  上,  $v$  随  $r$  单调上升.  $(v, r)$  无法覆盖整个时空, 即  $\mathcal{M}(v, r)$  是可延拓的.

### 9.3 Kerr 黑洞的 Penrose 图, 时间机器

类似地, 可以引入另一类光坐标

$$du = dt - \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 - 2Mr} dr \quad (192)$$

对称轴上的二维线元

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right) du^2 - 2du dr \quad (193)$$

此二维流形记作  $\mathcal{M}(u, r)$ , 则  $a^2 < M^2$  时, 流形也不是测地完备的.

同时采用  $u, v$  两组类光坐标时, 对称轴上的二维线元为

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right) du dv \quad (194)$$

对  $a^2 > M^2$ ,  $\mathcal{M}(u, v)$  是测地完备的, 与  $\mathcal{M}(r, t)$  描述的时空一致, 时空有奇性却不被视界包围起来, 违背宇宙监督定则.  $a^2 < M^2$  时,  $\mathcal{M}(u, v)$  是可延拓的, 定义新坐标

$$v = \pm \tan(\psi + \xi), \quad u = \pm \tan(\psi - \xi) \quad (195)$$

此坐标变换把  $\mathcal{M}(u, v)$  流形中  $u, v$  的无穷远点变到直线

$$\begin{aligned} v = \infty : \psi + \xi &= \frac{2n+1}{2}\pi \\ u = \infty : \psi - \xi &= \frac{2p+1}{2}\pi \end{aligned} \quad (196)$$

其中  $n, p$  为整数. 线元

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right) du dv \\ &= - \left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right) \frac{d\psi^2 - d\xi^2}{\cos^2(\psi + \xi) \cos^2(\psi - \xi)} \end{aligned} \quad (197)$$

取共形变换因子

$$\Omega^2 = \frac{1}{\cos^2(\psi + \xi) \cos^2(\psi - \xi)} \quad (198)$$

则

$$d\tilde{s}^2 = \left( 1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right) (-d\psi^2 + d\xi^2) \quad (199)$$

给出  $a^2 < M^2$  时 Kerr 时空沿对称轴最大延拓时空的 Penrose 图, 如(16)所示. 可以看到, Kerr 黑洞有无穷多个渐进平坦区域, 有质量粒子的测地线可以从一个渐进区域进入, 穿过两个视界后从另一个区域出来.

另外, 我们观察到, 对 Kerr 时空, 奇性并不是时空的终点, 在时空奇性那根线的两侧都各有一个时空“三角块”. 故, 粒子也可以直接穿过奇点进入新的渐进平坦区域. 时空奇性左侧对应  $r < 0$  的区域, 这个区域允许存在闭合的类时曲线, 沿着这种曲线, 观察者可以回到过去. 考察一条固定  $t, r$  且  $\theta = \frac{\pi}{2}$  的闭合曲线, 则曲线上的诱导度规

$$ds^2 = \left[ -\frac{a^2 \Delta}{r^2} + \frac{(r^2 + a^2)^2}{r^2} \right] d\phi^2 = \left( r^2 + a^2 + \frac{2GMr^2}{r} \right) d\phi^2 \quad (200)$$

只要  $r < 0$  且绝对值足够小, 这条闭合曲线前面的度规系数就为负, 则这条曲线为类时曲线,  $\phi$  成为这条闭合类时线的时间参数.

可惜的是, 这台在 Kerr 黑洞内部的时间机器是非物理的. 因为它藏在 Cauchy 视界的后面, 而强宇宙监督法则认为 Cauchy 视界是不稳定的.

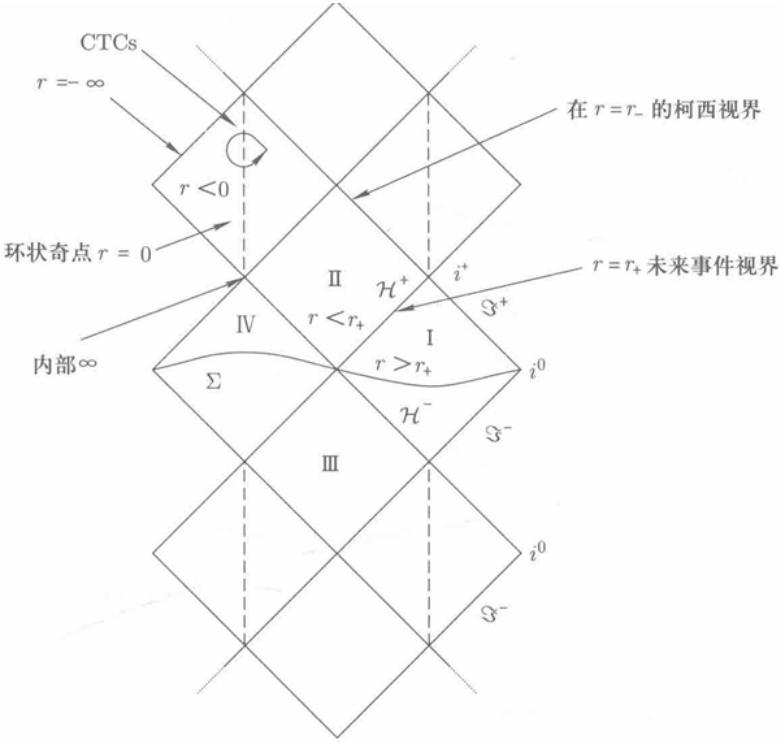


图 16: Kerr 时空的 Penrose 图 ( $a^2 < M^2$ )



图 17: Back To The Future

## 9.4 Penrose 过程

在 Kerr 黑洞中, 由于无穷大红移面  $r_{S+}$  与事件视界  $r^+$  不重合, 存在一个中间区域, 称为能层. 这个区域内存在时空拖曳现象. Penrose 设计了一个过程, 可以从能层中抽取 Kerr 黑洞的转动能量, 称为 Penrose 过程. 假设无穷远处固定位置的观察者向黑洞发射粒子  $A$  进入能层中, 对无穷远观察者, 粒子的能量

$$E^A = -\mathbf{P}^A(\mathcal{E}) \cdot \mathbf{u}_{\text{obs}} = -P_t^A(\mathcal{E}) \quad (201)$$

其中  $u_{\text{obs}}^\mu = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$  是观测者的 4-速度. 设在能层  $\mathcal{D}$  处粒子发生衰变  $A \rightarrow B + C$ . 局域地, 粒子的 4-动量守恒

$$\mathbf{P}^A(\mathcal{D}) = \mathbf{P}^B(\mathcal{D}) + \mathbf{P}^C(\mathcal{D}) \quad (202)$$

如果  $C$  回到无穷远处, 观测者发现其能量为  $E^C = -\mathbf{P}_t^C(\mathcal{R})$ . 因为  $\partial_t$  是时空的 Killing 矢量,  $\mathbf{P}_t^C(\mathcal{R}) = \mathbf{P}_t^C(\mathcal{D})$ ,  $\mathbf{P}_t^A(\mathcal{D}) = \mathbf{P}_t^A(\mathcal{E})$ . 因此

$$E^C = P_t^B(\mathcal{D}) + E^A \quad (203)$$

另一方面,  $P_t^B = \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{P}^B$  而  $\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t = g_{tt}$ , 若  $B$  逃出  $r_{S+}$ , 则  $\mathbf{e}_t$  是类时的

$$-P_t^B = E^B > 0 \Rightarrow E^C < E^A \quad (204)$$

出射粒子  $C$  的能量小于入射粒子  $A$  的能量. 如果  $B$  不能逃出  $r_{S+}$  而掉入黑洞视界, 则  $\mathbf{e}_t$  是一个类空矢量,  $P_t^B$  可正可负, 若其为正, 则

$$E^C > E^A \quad (205)$$

即出射粒子的能量大于入射粒子的能量.

能量不可能平白无故地产生, Penrose 过程是通过降低黑洞的角动量提取转动能量的. 粒子  $B$  掉进视界后, 黑洞的质量和角动量发生变化

$$M \rightarrow M - \frac{P_t^B}{c^2}, \quad J \rightarrow J + P_\phi^B \quad (206)$$

$P_t^B > 0$ , 故黑洞的质量减少. 下面我们说明  $P_\phi^B < 0$ , 考虑一个能层内固定于  $r$  和  $\theta$  处的观测者, 具有 4-速度

$$u^\mu = u^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Omega \end{pmatrix}, \quad \Omega = \frac{d\phi}{dt} \quad (207)$$

他看到的粒子能量为正

$$\begin{aligned} E^B &= -P_\mu^B u^\mu = -u^t (P_t^B + P_\phi^B \Omega) > 0 \\ &\Rightarrow P_t^B + P_\phi^B \Omega < 0 \\ &\Rightarrow P_\phi^B < -\frac{P_t^B}{\Omega} \end{aligned} \quad (208)$$

因此由  $P_t^B > 0$  得  $P_\phi^B < 0$ , 即落入黑洞的粒子, 若  $P_t^B > 0$ , 则必然具有负的角动量, 从而减少黑洞的角动量.

## 10 黑洞热力学

### 10.1 第零定律

对 Schwarzschild 时空, 由于其为静态的,  $\xi = \partial_t$  是一个 Killing 矢量,  $\langle \xi, \xi \rangle = g_{tt} = -(1 - \frac{r_g}{r})$ .  $r > r_g$  处,  $\xi$  是类时的, 且在无穷远处归一化为  $\langle \xi, \xi \rangle_\infty = -1$ .  $r < r_g$  处,  $\xi$  是类空的. 视界面  $r = r_g$  上,  $\xi$  类光, 满足  $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ . 为考察  $\xi$  在视界面上的行为, 考察其在近视界几何坐标  $(V, U)$  中的表达式. 设在近视界处作无穷小时间平移  $t \rightarrow t + \delta t$ , 则

$$V \rightarrow V e^{\kappa \delta t}, \quad U \rightarrow U e^{-\kappa \delta t} \quad (209)$$

则

$$\delta V = \kappa V \delta t, \quad \delta U = -\kappa U \delta t \quad (210)$$

得到 Killing 矢量场在  $(V, U)$  中的表达式

$$\xi = \partial_t = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial}{\partial V} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial}{\partial U} = \kappa \left( V \frac{\partial}{\partial V} - U \frac{\partial}{\partial U} \right) \quad (211)$$

即

$$\xi^\mu = \kappa(V, -U) \quad (212)$$

对于  $(V, U)$  坐标的原点,  $V = U = 0$ ,  $\xi = 0$ , 这样的点叫做 Killing 分岔点, 加上角度部分的坐标, 叫做 Killing 分岔球. 视界面  $U = 0$  或  $V = 0$  都是由分岔球上发出的类光测地线扫出的. 在  $U = 0$  的视界面上, Killing 矢量  $\xi^\mu = \kappa(V, 0)$ , 这是视界上的一个类光切矢量, 因为  $U = 0$  为类光超曲面, 所以  $\xi$  同时也是它的类光法矢量. 类似地, 在  $V = 0$  的视界面上,  $\xi^\mu = \kappa(0, -U)$  是一个类光法矢量. 如果一个类光超曲面以一个 Killing 矢量为类光法矢量, 则称之为类光 Killing 视界. Schwarzschild 黑洞的事件视界同时也是 Killing 视界. 在  $(V, U)$  坐标中, 近视界几何的度规是  $-dU dV$ , 从而在这个坐标系中, 联络系数等于零, 从而

$$\begin{aligned} \xi^\mu \nabla_\mu \xi^\nu &= \xi^\mu \partial_\mu \xi^\nu \\ &= \kappa \left( V \frac{\partial}{\partial V} - U \frac{\partial}{\partial U} \right) \kappa(V, -U) \\ &= \kappa^2(V, U) \end{aligned} \quad (213)$$

从而在  $U = 0$  和  $V = 0$  的 Killing 视界上，分别

$$\begin{aligned}\xi^\mu \nabla_\mu \xi^\nu &= \kappa^2(V, 0) = \kappa \xi^\nu \\ \xi^\mu \nabla_\mu \xi^\nu &= \kappa^2(0, U) = -\kappa \xi^\nu\end{aligned}\tag{214}$$

我们对 Killing 视界进行一般性的讨论。设有 Killing 视界  $\mathcal{N}$ ，与之对应的 Killing 矢量为  $K^\mu$ 。Killing 视界是类光超曲面，由类光测地线铺成，设类光切矢量为  $l^\mu$ ，则

$$l^\mu \nabla_\mu l^\nu = 0\tag{215}$$

因为类光切矢量和 Killing 矢量皆垂直于视界，两者必然平行，即

$$k^\mu = \chi(x) l^\mu\tag{216}$$

从而

$$\begin{aligned}k^\mu \nabla_\mu k^\nu &= \chi l^\mu \nabla_\mu (\chi l^\nu) \\ &= \chi l^\mu (\partial_\mu \chi) l^\nu \\ &= (l^\mu \partial_\mu \chi) k^\nu \\ &\equiv \omega k^\nu\end{aligned}\tag{217}$$

令  $S(x) = k^\mu k_\mu$ ，则  $\nabla_\nu S = 2k^\mu \nabla_\nu k_\mu$ ，而  $\nabla_\nu k_\mu + \nabla_\mu k_\nu = 0$ ，从而  $\nabla_\nu S = -2k^\mu \nabla_\mu k_\nu$ ，从而在  $\mathcal{N}$

$$\nabla_\nu S = -2\omega(x) k_\nu\tag{218}$$

即

$$k_\mu = -\frac{1}{2\omega(x)} \nabla_\mu S \equiv f(x) \nabla_\mu S = f(x) \partial_\mu S\tag{219}$$

另外，因为  $k^\mu$  是类光法矢量，在  $\mathcal{N}$  上必然有

$$S(x) = k^\mu k_\mu = 0\tag{220}$$

因为 Christoffel 符号是对称的

$$\begin{aligned}K_{[\mu} \nabla_\nu K_{\rho]} &= K_{[\mu} \partial_\nu K_{\rho]} \\ &= f(x) \partial_{[\mu} S \partial_{\rho]} K_{\rho]} \\ &= 0\end{aligned}\tag{221}$$

这是所谓的 Frobenius 定理，结合 Killing 方程，得

$$(K_\rho \nabla_\mu K_\nu + K_\mu \nabla_\nu K_\rho - K_\nu \nabla_\mu K_\rho)|_{\mathcal{N}} = 0\tag{222}$$

用  $\nabla^\mu K^\nu$  缩并，在  $\mathcal{N}$  上得

$$\begin{aligned}K_\rho \nabla^\mu K^\nu \nabla_\mu K_\nu &= -(\nabla^\mu K^\nu) K_\mu \nabla_\nu K_\rho + (\nabla^\mu K^\nu) K_\nu \nabla_\mu K_\rho \\ &= -(\nabla^\mu K^\nu) K_\mu \nabla_\nu K_\rho - (\nabla^\nu K^\mu) K_\nu \nabla_\mu K_\rho \\ &= -2(\nabla^\mu K^\nu) K_\mu \nabla_\nu K_\rho \\ &= -2\omega(x) K^\nu \nabla_\nu K_\rho \\ &= -2\omega^2(x) K_\rho\end{aligned}\tag{223}$$

所以只要  $K_\rho \neq 0$ ，就有

$$\omega^2(x) = -\frac{1}{2}(\nabla^\mu K^\nu)(\nabla_\mu K_\nu)|_{\mathcal{N}}\tag{224}$$

对 Killing 视界  $\mathcal{N}$ ，其 Killing 矢量场  $K^\mu$  满足

$$\nabla_\nu \nabla_\rho K_\mu = K_\sigma R^\sigma_{\nu\rho\mu}\tag{225}$$

另外,  $K^\mu$  既是  $\mathcal{N}$  的类光法矢量也是其切矢量, 在  $\mathcal{N}$  上  $K^\mu$  的积分曲线是扫出整个  $\mathcal{N}$  的类光测地线,  $\mathcal{N}$  由这些类光测地线铺成. 任取  $\mathcal{N}$  的一个切矢量场  $t^\mu$ , 则

$$\begin{aligned} t^\rho \partial_\rho \omega^2 &= t^\rho \nabla_\rho \omega^2 \\ &= -t^\rho (\nabla^\mu K^\nu) (\nabla_\rho \nabla_\mu K_\nu)|_{\mathcal{N}} \\ &= -t^\rho (\nabla^\mu K^\nu) K_\sigma R_{\rho\mu\nu}^\sigma|_{\mathcal{N}} \\ &= -(\nabla^\mu K^\nu) R_{\sigma\rho\mu\nu} K^\sigma t^\rho|_{\mathcal{N}} \end{aligned} \quad (226)$$

沿着  $K^\rho$  的积分曲线, 用  $K^\rho$  代替  $t^\rho$ , 有

$$K^\rho \partial_\rho \omega^2 = -(\nabla^\mu K^\nu) R_{\sigma\rho\mu\nu} K^\sigma K^\rho|_{\mathcal{N}} = 0 \quad (227)$$

最后一步利用了  $R_{\sigma\rho\mu\nu}$  关于  $\sigma, \rho$  的反对称性. 即沿着 Killing 视界  $\mathcal{N}$  上每一条  $K^\mu$  的积分曲线,  $\omega^2(x)$  都是常数.

引入分岔 Killing 视界的概念, 它是 Killing 视界, 且其上所有类光测地线都是从一个满足  $K^\mu = 0$  的分岔球  $B$  发出. 则有

**定理 10.1.** 若  $\mathcal{N}$  是一个分岔 Killing 视界, 则  $\omega^2(x)$  在整个  $\mathcal{N}$  上都是常数.

**证明.** 由于  $\omega^2(x)$  沿着  $\mathcal{N}$  的每一条类光测地线都是常数, 而所有这些类光测地线都从分岔球  $B$  发出, 因此只要证明  $\omega^2(x)$  在  $B$  上是一个常数. 另一方面, 由于  $K^\sigma|_B = 0$ , 根据(226), 沿着  $B$  的任意切矢量  $t^\rho$ , 我们有

$$t^\rho \partial_\rho \omega^2 = -(\nabla^\mu K^\nu) R_{\sigma\rho\mu\nu} t^\rho K^\sigma|_B = 0 \quad (228)$$

□

由上述定理,  $\omega(x)$  在整个分岔 Killing 视界  $\mathcal{N}$  上必定和某个  $\kappa$  相差正负号, 由  $\omega(x) = \pm\kappa$ , 则在分岔 Killing 视界上

$$K^\mu \nabla_\mu K^\nu = \pm\kappa K^\nu \quad (229)$$

常数  $\kappa$  称为表面引力.

地表的引力  $F_g = \frac{mMG}{R_{\text{earth}}^2}$ . 一般性地考虑度规

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (230)$$

一个静质量为  $m_0$  的粒子在距离中心  $r$  的位置保持不动, 其 4-速度

$$u^\mu = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (231)$$

由归一化条件

$$u^0 = \dot{t} = f^{-\frac{1}{2}}, \quad u^i = 0 \quad (232)$$

考虑其 4-加速度

$$a^\mu = u^\lambda \nabla_\lambda u^\mu = u^0 \nabla_0 u^\mu = f^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{00}^\mu \quad (233)$$

对给的度规, 非零的 Christoffel 符号只有

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} f \frac{df}{dr} \equiv \frac{1}{2} f f' \quad (234)$$

所以, 4-加速度只有非零径向分量

$$a^1 = \frac{1}{2} f' \quad (235)$$

其大小

$$a = \sqrt{g_{11} a^1 a^1} = \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f' \quad (236)$$

对 Schwarzschild 时空

$$a(r) = \frac{\mu}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\mu}{r}}} \quad (237)$$

由 Newton 第二定律, 保持粒子不动的力是  $F = m_0 a$ . 当粒子接近视界时, 局域地使之保持固定的是无穷大的. 设粒子通过无穷长的无质量细丝与无穷远观察者相连, 对观察者, 让细丝移动固有距离  $\delta s$  需要做的功为  $\delta W(\infty) = m_0 a(\infty) \delta s$ , 在粒子所在位置, 做的功却是  $\delta W(r) = m_0 a(r) \delta s$ . 设功以辐射形式传到无穷远, 被红移, 故

$$\delta W(\infty) = f^{\frac{1}{2}} \delta W(r) \quad (238)$$

即得

$$a(\infty) = f^{\frac{1}{2}} a(r) = \frac{1}{2} f'(r) \quad (239)$$

因此, 无穷远观察者需要施加  $F_\infty = m_0 a(\infty)$  保持粒子不动. 这个力即使当粒子接近视界也是有限的. 把

$$\kappa = a_\infty(r_H) = \frac{1}{2} f'(r_H) \quad (240)$$

叫做黑洞的表面引力.

还可以通过考虑不同观测者间时间的差异来讨论上面的加速度. 对粒子自身, 其固有加速度在接近视界时变为无穷大. 但对于具有坐标时  $t$  的无穷远的观察者, 粒子的加速度

$$a_\infty = \frac{d\tau}{dt} \times a = f^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f' = \frac{1}{2} f' \quad (241)$$

即表面引力是一个接近视界的静止粒子被无穷远观察者测量到的加速度.

我们对分岔的黑洞 Killing 视界证明了第零定律, 对于正在坍缩的黑洞而言, 不存在分岔的二维球, 只有部分的 Killing 视界, 需要引入一般的第零定律

**定理 10.2.** 如果能动张量  $T_{\mu\nu}$  满足主能量条件, 则在未来事件视界上表面引力  $\kappa$  是一个常数.

**证明.** 令  $\xi$  是一个 Killing 矢量, 在 Killing 视界  $\mathcal{N}$  上有  $\xi = f \mathbf{l}$ , 其中  $\mathbf{l} \cdot \nabla \mathbf{l} = 0$ , 则

$$\begin{aligned} \nabla_\nu l_\mu &\equiv B_{\mu\nu} \\ &= B_{(\mu\nu)} \\ &= P_\mu^\lambda B_{(\lambda\rho)} P_\nu^\rho \\ &= P_\mu^\lambda (\partial_{(\rho} f^{-1}) \xi_{\lambda)} P_\nu^\rho \\ &= 0 \end{aligned} \quad (242)$$

在  $\mathcal{N}$  上  $\theta = B_\mu^\mu$  处处为 0, 所以  $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$ . 再根据 Raychaudhuri 方程, 得

$$R_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu |_{\mathcal{N}} = 0 \quad (243)$$

因为  $\mathcal{H}^+$  本身也是一个基灵视界, 令  $\xi$  是垂直于  $\mathcal{H}^+$  的基灵矢量, 则由上面的命题及推论可知  $R_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = 0$  且在  $\mathcal{H}^+$  上  $\xi^2 = 0$ , 由爱因斯坦方程可知

$$0 = -T_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu |_{\mathcal{H}^+} \equiv J_\mu \xi^\mu |_{\mathcal{H}^+} \quad (244)$$

即  $\mathbf{J} = (-T^{\mu\nu} \xi^\nu) \partial_\mu$  切于  $\mathcal{H}^+$ . 因此,  $\mathbf{J}$  可以通过利用  $\mathcal{H}^+$  切空间上的基矢展开,

$$\mathbf{J} = a \xi + b_1 \eta^{(1)} + b_2 \eta^{(2)} \quad (245)$$

但由于  $\xi \cdot \eta^{(i)} = 0$ , 这个矢量是类空的或者零的 (当  $b_1 = b_2 = 0$  时). 然而, 由主能量条件, 它必然是类时

的或者零的. 因此, 主能量条件给出  $\mathbf{J} \propto \xi$ , 由此

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{[\sigma} J_{\rho]}|_{\mathcal{H}^+} \\ &= -\xi_{[\sigma} T_{\rho]} \lambda_{\xi\lambda}|_{\mathcal{H}^+} \\ &= \xi_{[\sigma} R_{\rho]} \lambda_{\xi\lambda}|_{\mathcal{H}^+} \\ &= \xi_{[\rho} \partial_{\sigma]} \kappa|_{\mathcal{H}^+} \end{aligned} \tag{246}$$

所以有  $\partial_\sigma \kappa \propto \xi_\sigma$ . 进一步地, 对  $\mathcal{H}^+$  的任意切矢  $\mathbf{t}$ , 都有  $\mathbf{t} \cdot \partial \kappa = 0$ , 也就是说  $\kappa$  在视界  $\mathcal{H}^+$  上必然是一个常数. 得证.  $\square$

## 10.2 黑洞热力学三大定律

我们已经看到, Penrose 过程会减少 Kerr 黑洞的质量, 那么, 这会不会破坏条件  $GM \geq a$  进而制造出裸奇性呢? 不会的. 我们考察 Kerr 黑洞视界面的表面积

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}}|_{r=r_+} \\ &= 4\pi(r_+^2 + a^2) \\ &= 8\pi GM \left[ GM + \sqrt{(GM)^2 - a^2} \right] \\ &= 8\pi \left[ G^2 M^2 + G \sqrt{G^2 M^4 - J^2} \right] \end{aligned} \tag{247}$$

假如 Kerr 黑洞丢失了  $\delta M$  的质量和  $\delta J$  的角动量, 则

$$\begin{aligned} \frac{\delta A}{4G} &= 2\pi \left[ 2GM\delta M + \frac{2G^2 M^3 \delta M - J\delta J}{\sqrt{G^2 M^4 - J^2}} \right] \\ &= \frac{2\pi J}{\sqrt{G^2 M^4 - J^2}} \left( \frac{\delta M}{\Omega_H} - \delta J \right) \end{aligned} \tag{248}$$

由  $\delta M \geq \Omega_H \delta J$  显然可见

$$\delta A \geq 0 \tag{249}$$

即 Penrose 过程中 Kerr 黑洞的视界面积永不减小, 所以 Penrose 过程不可能使得 Kerr 黑洞的视界消失, 从而出现裸奇性. 这是黑洞热力学第二定律 (Hawking 面积不减定律) 的一个例子.

下面我们来计算 Kerr 黑洞的表面引力. Kerr 时空中,  $\xi^\mu = \partial_t$  的模长

$$\xi^\mu \xi_\mu = -\frac{1}{\rho^2}(\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \tag{250}$$

外视界处  $\xi^\mu \xi_\mu \geq 0$ , 除了南北极  $\theta = 0$  外 Killing 矢量都是类空的.  $\xi$  对应的 Killing 视界应为

$$(r - \mu)^2 = \mu^2 - a^2 \cos^2 \theta \tag{251}$$

这正是无限红移面. 这只能说明事件视界不是  $\partial_t$  的 Killing 视界, 黑洞的外事件视界依然是 Killing 视界, 其对应的 Killing 矢量为  $\xi_H = \partial_t + \Omega_H \partial_\phi$ , 其中  $\Omega_H = \frac{d\phi}{dt}\Big|_{r=r_+} = \frac{a}{2\mu r_+}$ .

记  $r = r_+$  为  $\mathcal{H}$ . 注意到  $\partial_\mu \langle \xi_H, \xi_H \rangle = 2\langle \xi_H, \nabla_\mu \xi_H \rangle = 2\xi_H^\nu \nabla_\mu \xi_{H\nu}$ , 利用 Killing 方程  $\nabla_\mu \xi_{H\nu} + \nabla_\nu \xi_{H\mu} = 0$ , 则  $\partial_\mu \langle \xi_H, \xi_H \rangle = -2\xi_H^\nu \nabla_\nu \xi_{H\mu}$ , 限制在视界面上则有  $-2\xi_H^\nu \nabla_\nu \xi_{H\mu}|_{\mathcal{H}} = -2\kappa \xi_{H\mu}|_{\mathcal{H}}$ . 从而

$$\partial_\mu \langle \xi_H, \xi_H \rangle|_{\mathcal{H}} = -2\kappa \xi_{H\mu}|_{\mathcal{H}} \tag{252}$$

这里只有普通导数, 规避了协变导数的计算, 要简便一些. 但上式在视界面上是奇异的. 为消除奇异性, 引入

$$dv = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\chi = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr \tag{253}$$

则

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\frac{\Delta}{\rho^2}(dv - a \sin^2 \theta d\chi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\chi - adv]^2 + \\
&\quad 2(dv - a \sin^2 \theta d\chi)dr + \rho^2 d\theta^2 \\
&= -\left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2}\right)dv^2 + \frac{\Sigma}{\rho^2} \sin^2 \theta d\chi^2 + \rho^2 d\theta^2 + 2dvd\chi - \\
&\quad 2a \sin^2 \theta d\chi dr - \frac{4GMar}{\rho^2} \sin^2 \theta dv d\chi
\end{aligned} \tag{254}$$

度规中的  $g_{rr}$  分量为零, 且  $\Delta$  不再出现在度规分量的分母上, 所以消除了视界面处的奇异性. Eddington-Finkelstein 坐标中的 Killing 矢量

$$\xi_H = \partial_t + \Omega_H \partial_\phi = \partial_v + \Omega \partial_\chi \tag{255}$$

在  $(v, \chi, r, \theta)$  坐标系中  $\xi_H^\mu = (1 \quad \Omega_H \quad 0 \quad 0)$ . 有

$$\begin{aligned}
\langle \xi_H, \xi_H \rangle &= g_{vv} + 2g_{v\chi}\Omega_H + g_{\chi\chi}\Omega_H^2 \\
&= g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega_H + g_{\phi\phi}\Omega_H^2 \\
&= g_{\phi\phi}(\Omega_H - \omega)^2 + g_{tt} - \frac{g_{t\phi}^2}{g_{\phi\phi}} \\
&= g_{\phi\phi}(\Omega_H - \omega)^2 - \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma}
\end{aligned} \tag{256}$$

在视界上  $\Omega_H = \omega|_{\mathcal{H}}$  以及  $\Delta|_{\mathcal{H}} = 0$ , 得到

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \langle \xi_H, \xi_H \rangle|_{\mathcal{H}} &= -\frac{\rho^2}{\Sigma} (\partial_\mu \Delta)|_{\mathcal{H}} \\
&= -\frac{r_+^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta}{(r_+^2 + a^2)^2} (0 \quad 0 \quad r_+ - r_- \quad 0) \\
&= -\frac{1 - \Omega_H a \sin^2 \theta}{r_+^2 + a^2} (0 \quad 0 \quad r_+ - r_- \quad 0)
\end{aligned} \tag{257}$$

接下来我们求  $\xi_{H\mu}$ , 降下  $\xi_H^\mu = (1 \quad \Omega_H \quad 0 \quad 0)$  的指标, 即

$$\begin{aligned}
\xi_{H\mu} &= (g_{vv} + \Omega_H g_{v\chi} \quad \Omega_H g_{\chi\chi} + g_{v\chi} \quad g_{vr} + \Omega_H g_{\chi r} \quad 0) \\
&= (g_{tt} + \Omega_H g_{t\phi} \quad \Omega_H g_{\phi\phi} + g_{t\phi} \quad g_{vr} + \Omega_H g_{\chi r} \quad 0)
\end{aligned} \tag{258}$$

在视界面上,  $g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = \Delta \sin^2 \theta = 0$ , 所以  $-\omega = \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{g_{tt}}{g_{t\phi}}$ , 故

$$\begin{aligned}
\xi_{H\mu}|_{\mathcal{H}} &= (g_{tt} + \Omega_H g_{t\phi} \quad \Omega_H g_{\phi\phi} + g_{t\phi} \quad g_{vr} + \Omega_H g_{\chi r} \quad 0)|_{\mathcal{H}} \\
&= (g_{t\phi}(\Omega - \omega|_{\mathcal{H}}) \quad g_{\phi\phi}(\Omega_H - \omega|_{\mathcal{H}}) \quad g_{vr} + \Omega_H g_{\chi r} \quad 0) \\
&= (0 \quad 0 \quad 1 - \Omega_H a \sin^2 \theta \quad 0)
\end{aligned} \tag{259}$$

代入(252)得 Kerr 黑洞视界的表面引力

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)} \tag{260}$$

由此可得

$$\kappa = \Omega_H \frac{\sqrt{G^2 M^4 - J^2}}{J} \tag{261}$$

从而将(248)改写为

$$\frac{\delta A}{4G} = \frac{2\pi}{\kappa} (\delta M - \Omega_H \delta J) \tag{262}$$

即

$$\delta M = \frac{\kappa}{2\pi} \delta \left( \frac{A}{4G} \right) + \Omega_H \delta J \quad (263)$$

这称为黑洞的热力学第一定律.

上面的讨论并不严格. 下面我们对黑洞的热力学第一、二定律给出严格表述，并作证明.

**定理 10.3** (黑洞的热力学第一定律). 给定具有质量  $M$ 、电荷  $Q$  和角动量  $J$  的一个稳态黑洞，它有未来事件视界、表面引力  $\kappa$ 、表面电势  $\Phi_H$  和角速度  $\Omega_H$ . 如果这个黑洞被微扰，稳定后成为另一个具有质量  $M + \delta M$ 、电荷  $Q + \delta Q$  和角动量  $J + \delta J$  的黑洞，则

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ \quad (264)$$

$Q=0$ . 由黑洞的唯一性定理

$$M = M(A, J) \quad (265)$$

但  $A$  和  $J$  都具有量纲  $M^2$ ，所以  $M(A, J)$  必须是阶  $\frac{1}{2}$  齐次的. 由齐次函数的 Euler 定理

$$A \frac{\partial M}{\partial A} + J \frac{\partial M}{\partial J} = \frac{1}{2} M = \frac{\kappa}{8\pi} A + \Omega_H J \quad (266)$$

故

$$A \left( \frac{\partial M}{\partial A} - \frac{\kappa}{8\pi} \right) + J \left( \frac{\partial M}{\partial J} - \Omega_H \right) = 0 \quad (267)$$

$A$  和  $J$  是任意的，故

$$\frac{\partial M}{\partial A} = \frac{\kappa}{8\pi}, \quad \frac{\partial M}{\partial J} = \Omega_H \quad (268)$$

□

**定理 10.4** (黑洞的热力学第二定理). 如果  $T_{\mu\nu}$  满足弱能量条件，且宇宙监督法则成立，则渐进平坦时空中未来事件视界的面积是时间的单调递增函数.

**证明.** 从略. □

面积不减定理的一个物理结果是对黑洞合并的辐射效率作出了限制. 考虑两个质量分别为  $M_1$  和  $M_2$  的黑洞相互合并，最终形成质量为  $M_3$  的黑洞，这个过程辐射的引力波能量为  $M_1 + M_2 - M_3$ ，因此其效率

$$\eta = \frac{M_1 + M_2 - M_3}{M_1 + M_2} = 1 - \frac{M_3}{M_1 + M_2} \quad (269)$$

设两个黑洞均为 Schwarzschild 黑洞，其视界面积分别为  $A_{1,2} = 16\pi G^2 M_{1,2}^2$ ，合并后的黑洞面积为  $A_3$ ，由面积不减定理

$$A_3 \geq 16\pi G^2 (M_1^2 + M_2^2) \quad (270)$$

另外，合并过程中两黑洞相互绕转，因此其角动量不为零，合并后的黑洞一般来说是 Kerr 黑洞，有

$$A_3 = 8\pi \left[ G^2 M_3^2 + G \sqrt{G^2 M_3^4 - J_3^2} \right] \leq 16\pi G^2 M_3^2 \quad (271)$$

综合两个不等式

$$M_3 \geq \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (272)$$

因此黑洞合并的辐射效率有如下限制

$$\eta \leq 1 - \frac{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}{M_1 + M_2} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (273)$$

这类似于热力学第二定律对热机效率的限制.

面积不减定理的另一个物理结果是禁止了黑洞分裂. 假设黑洞发生了分裂,  $M_3 \rightarrow M_1 + M_2$ , 则

$$M_3 \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \leq M_1 + M_2 \quad (274)$$

另一方面分裂过程只可能通过引力波辐射损失能量,  $M_3 \geq M_1 + M_2$ . 这导致了矛盾, 因此黑洞不能分裂.

黑洞的热力学第三定律如下

**定理 10.5** (黑洞的热力学第三定律). 如果能动张量是有界的, 且满足弱能量条件, 则该黑洞的表面引力无法在有限的时间内变为零.

由于极端黑洞的表面引力等于零, 所以第三定律的意思就是不可能通过有限的过程将一个非极端黑洞转变成极端黑洞, 因为如果这可能的话, 那我们就可能进一步进行这样的过程, 从而创造出裸奇性, 这是宇宙监督假设所不允许的. 这一定理的证明在技术上是相当复杂的, 我们不在此展开, 有兴趣的读者可参阅 Eric Poisson, A Relativist's Tool kit—The Mathematics of Black-Hole Mechanics, 第 5.5.6 节.

黑洞热力学的三定律如表(1)所示.

	普通热力学	黑洞热力学
第零定律	$T$ 在热平衡态中是一个常数	$\kappa$ 在稳态黑洞视界处是一个常数
第一定律	$dU = TdS + \text{做功项}$	$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J$
第二定律	$\delta S > 0$ , 熵增原理	$\delta A > 0$ , 黑洞面积不减
第三定律	绝对零度 $T = 0$ 无法达到	极端黑洞无法实现

表 1: 普通热力学与黑洞热力学定律对比

### 10.3 Hawking 辐射

对 Schwarzschild 时空的视界  $r = 2GM$ , 它对应于 Rindler 时空的  $x = 0$  以及  $U = V = 0$ . 它是  $\partial_t$  的 Killing 视界, 具有表面引力  $\pm\kappa$ . 在 Rindler 时空中,  $x \rightarrow \infty$  时  $\xi^2 = -(\kappa x)^2 \rightarrow -\infty$ ,  $\xi$  无法归一化, Rindler 时空中的  $\kappa$  没有确定的值, 那么,  $\kappa$  的物理意义是什么呢?

考察 Rindler 时空中一个处在  $x = a^{-1}$  处的粒子, 其世界线是  $\xi$  的一条轨道, 其 4-速度正比于 Killing 矢量

$$u^\mu = \frac{\xi^\mu}{(-\xi^\mu \xi_\mu)^{\frac{1}{2}}} \quad (275)$$

粒子的 4-加速度为

$$\begin{aligned} a^\mu &= u^\nu \nabla_\nu u^\mu \\ &= \frac{\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu}{-\xi^2} + \frac{(\xi^\nu \partial_\nu \xi^2) \xi^\mu}{2\xi^2} \\ &= \frac{\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu}{-\xi^2} \end{aligned} \quad (276)$$

对 Rindler 时空

$$a^\mu \partial_\mu = \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial U} \quad (277)$$

所以固有加速度

$$|a| = (g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu)^{\frac{1}{2}} = \left( -\frac{1}{U'V'} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{x} \quad (278)$$

可见, Rindler 时空中 Killing 矢量  $\partial_t$  的轨道是具有常固有加速度的世界线.  $x \rightarrow 0$  时固有加速度趋于无穷大, 故  $x = 0$  处的 Killing 视界称为加速视界. 在 Minkowski 时空中, 对于一个匀加速观察者, 其随动坐标系就是一个 Rindler 坐标系.

Rindler 度规的完整形式为

$$ds^2 \sim -\kappa^2 \rho^2 dt^2 + d\rho^2 + r_g^2 d\Omega^2 \quad (279)$$

球面可以共形为平面, 如图(18). 再作重参数化  $d\omega = \frac{dt}{4M}$ , 则 Rindler 度规可以用直角坐标表述为

$$ds^2 = -\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2 + dy^2 + dz^2 \quad (280)$$

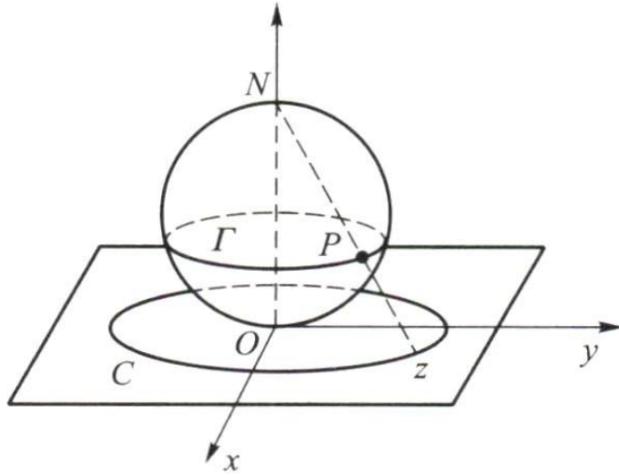


图 18: Riemann 球可以建立球面和平面的共形映射

可以进一步用指数坐标描述这个曲线坐标

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2) + dy^2 + dz^2 \quad (281)$$

这个形式下表面引力作为指标明确地显示出来

$$\kappa_+ = e^{a\xi} \frac{1}{2} e^{-a\xi} e^{-2a\xi} 2ae^{2a\xi} = a \quad (282)$$

由 Rindler 坐标  $\{\eta, \xi, y, z\}$  可以定义一组波函数, 分别为动量空间中粒子和反粒子的正负能态

$$\begin{aligned} \phi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{i(k\xi - \omega\eta)} \\ \phi_- &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{i(k\xi + \omega\eta)} \\ \phi_+^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{i(-\kappa\xi + \omega\eta)} \\ \phi_-^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i(k\xi + \omega\eta)} \end{aligned} \quad (283)$$

波函数可以展开为

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \frac{dk^3}{\sqrt{(2\pi)^3}} [c(k)\phi_- + c^\dagger(k)\phi_+] \\ \Phi^\dagger &= \int \frac{dk^3}{\sqrt{(2\pi)^3}} [c(-k)\phi_+^\dagger + c^\dagger(-k)\phi_-^\dagger] \end{aligned} \quad (284)$$

Rindler 时空的真空靠湮灭算符  $c$  定义

$$c|0\rangle_R = 0 \quad (285)$$

用 Minkowski 坐标可以定义另一组坐标作为正负能态，根据两组坐标之间的变换关系，得

$$\begin{aligned} \psi_+ &= e^{\frac{\pi\omega}{2a}}\phi_+ + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}\phi_-^\dagger \\ \psi_- &= e^{\frac{\pi\omega}{2a}}\phi_- + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}\phi_+^\dagger \end{aligned} \quad (286)$$

波函数可以展开为

$$\begin{aligned} \Psi &= \int \frac{dk^3}{\sqrt{(2\pi)^3}} [d(k)\psi_- + d^\dagger(k)\psi_+] \\ \Psi^\dagger &= \int \frac{dk^3}{\sqrt{(2\pi)^3}} [d(-k)\psi_+^\dagger + d^\dagger(-k)\psi_-^\dagger] \end{aligned} \quad (287)$$

此坐标下的真空由湮灭算符  $d$  定义

$$d|0\rangle_M = 0 \quad (288)$$

两个产生湮灭算子之间的关系为

$$\begin{aligned} c(k) &= \left( \sqrt{2 \sinh \frac{\pi\omega}{a}} \right)^{-1} [e^{\frac{\pi\omega}{2a}} d(k) + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} d^\dagger(-k)] \\ c^\dagger(k) &= \left( \sqrt{2 \sinh \frac{\pi\omega}{a}} \right)^{-1} [e^{\frac{\pi\omega}{2a}} d^\dagger(k) + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} d(-k)] \end{aligned} \quad (289)$$

这就是著名的 Bogoliubov 变换。对于 Minkowski 时空，Rindler 坐标产生湮灭算子构成的粒子数算符给出

$${}_M\langle 0| c^\dagger c |0\rangle_M = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{k_B T}} - 1} \quad (290)$$

其中

$$T = \frac{a}{2\pi k_B} \quad (291)$$

称为 Unruh 温度。这是一个黑体辐射谱！说明对于 Rindler 坐标系中的观察者来说，Minkowski 真空是进行黑体辐射的，真空态的选取还依赖于时空。

与加速运动有关的惯性问题也得到了一种可能的解释，惯性既不像 Newton 认为的那样来自于绝对参考系，也不像 Mach 认为的那样，来自于遥远星系的相对运动，而是加速运动导致的形变真空场产生的反作用力，是一个局域作用。

我们定性地分析 Hawking 辐射的机制。平坦时空的量子场论告诉我们，量子场会在平坦时空中不断涨落，有各种正反虚粒子对不断产生并湮灭，一般来说，能量守恒会阻止这些虚粒子对变成真实的粒子，因为真实的粒子和真实的反粒子都具有大于零的能量，因此从真空涨落中凭空产生真实粒子对会破坏能量守恒。但是，如果有一个外加的场，那虚粒子对就有可能从这个外场中吸收能量，并进而转化成真实的正反粒子对。在黑洞这样的弯曲时空中，引力场的存在也有可能将真空涨落的虚粒子对转化为真实粒子对。

下面我们来具体估算一下 Hawking 温度。以 Schwarzschild 黑洞为例，它的表面引力是  $\frac{1}{4GM}$ ，恢复一般单位制，其 Hawking 温度为

$$k_B T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} \sim \frac{\hbar c^3}{GM} \quad (292)$$

Hawking 温度反比于黑洞质量，质量越大的黑洞温度越低。代入常数的值，可知

$$T \sim 6.2 \times 10^{-8} \text{K} \cdot \frac{M_\odot}{M} \quad (293)$$

可以看到，除了质量非常微小的原初黑洞，通常黑洞的温度都非常低，很难从宇宙背景中分辨出这么微小的温度。

下面估算黑洞蒸发完大约需要多长时间. 由 Stefan 定律

$$\frac{dE}{dt} \sim -\sigma AT^4 \quad (294)$$

对 Schwarzschild 黑洞, 并由  $E = Mc^2, A \sim \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2$  得

$$\frac{dM}{dt} \sim -\frac{\hbar c^4}{G^2 M^2} \quad (295)$$

可得黑洞的寿命

$$\tau \sim \frac{G^2}{\hbar c^4} M^3 \quad (296)$$

以上估算过程忽略了 Hawking 辐射所产生的反作用. 对于一个太阳质量大小的黑洞, 其远远大于宇宙年龄. 随着黑洞质量的减少, Hawking 辐射是越来越快的, 在一颗黑洞寿命的最后阶段, 它可能会终结于一场剧烈的“小爆炸”.

把一杯热咖啡和一杯冷咖啡倒在一起, 则系统的熵会增加. 把混合物丢进黑洞, 会抹除熵增加的痕迹. 宇宙的熵不应当减小, 于是, 黑洞本身应当具有一个熵. 对(264), 从  $T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}$ , 想凑出  $TdS$  项, 则熵应当具有

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4G\hbar} \quad (297)$$

的形式, 称为 Beckenstein-Hawking 熵.

从经典物理的角度来看, Beckenstein-Hawking 熵的存在, 是不可思议的, 因为 Kerr 黑洞只依赖于两个参数  $M$  和  $a$ , 经典的 Kerr 黑洞只有两个自由度. 而热力学熵却是系统自由度数目的衡量, 一个正比于面积的熵就意味着系统存在正比于面积的自由度数目. 对于一个真实的黑洞, 这个自由度数目是巨大的. 这些自由度当然不可能仅仅是经典解的  $M$  和  $a$ , 那么与黑洞熵所对应的这些微观自由度是什么呢? 这是一个远没有完全解决的问题, 目前只有超弦理论对于一些具有超对称性的极端黑洞给出了正确的解释, 对于像 Schwarzschild 黑洞这样的黑洞, 其熵的微观起源是什么, 人们还远远没有了解, 这是一个非常重要、非常困难的问题. 注意到 Beckenstein-Hawking 熵的表达式依赖于 Plank 常数, 而且它和引力常数  $G$  一起出现在表达式的分母上, 所以这意味着两件事情:

- 黑洞熵所对应的微观自由度一定是量子的, 只有用量子引力才能解释;
- 由于  $G$  出现在分母上, 所以黑洞熵必定不是一个微扰量子引力效应, 它必定有一个非微扰的起源.

另外, Beckenstein-Hawking 熵正比于黑洞表面积也是一个奇异的特征. 通常的量子场论体系在给定能标或者给定温度之下, 其熵一定是正比于体积的, 但是黑洞熵却是正比于表面积. 另外还可以论证, 给定一个总能量等于黑洞质量的区域, 其总的熵(自由度数)一定小于相应黑洞的熵. 基于这两点观察, 't Hooft 提出, 在量子引力中, 一个给定时空区域完全可以由分布在这个区域表面上的某些场论自由度来描述, 特别的, 黑洞区域可以由黑洞表面的某些场论自由度描述, 这也就是所谓的量子引力的全息原理. 全息的意思就是区域表面全息性地编码了整个区域的信息, 就好像一张全息图一样. 目前来说, 全息原理已经不仅仅是一个猜测了, 因为的确有量子引力的例子精确地实现了全息原理, 这例子就是 Maldacena 提出来的 AdS/CFT 对应, 也就是 AdS 时空的某种量子引力完全由其边界上的某个共形场论描述. 但是, 对于我们生活的这个真实的宇宙, 其量子引力怎样符合全息原理, 则目前人们还完全不知道.

另外, 在考虑 Hawking 辐射时, 黑洞能量可以减少, 同时保持角动量不变, 黑洞面积就可能减少. 这与黑洞热力学的第二定律并不矛盾. 因为 Hawking 辐射是热辐射. 在蒸发的黑洞本身不是一个孤立系统, 再加上黑洞外面描写 Hawking 辐射的量子场以后整个系统才可以看成孤立系统. 用  $S_q$  表示量子场的熵, 与黑洞熵加起来成为广义熵. 广义熵依然满足热力学第二定律.

Hawking 辐射是一个热辐射, 其谱是一个黑体谱, 是不携带任何信息的, 这导致 Hawking 提出黑洞信息损失问题. 假设在量子引力中考虑一团物质坍缩成黑洞, 然后这黑洞再通过 Hawking 辐射蒸发掉, 在黑洞形

成之前，物质和引力是处于一个量子的纯态，而在坍缩成黑洞以后，辐射出来的却是一个热谱，这样原来的信息就凭空损失掉了。在量子力学中，一个纯态只会随着时间公正演化，它永远也不会自发变成一个混态。基于以上想法，Hawking 提出，黑洞原则上不可能满足量子力学规律。因此为了能在量子的层次上描述黑洞，我们的量子力学原理需要修改。

但也有不少物理学家相信，Hawking 辐射的热谱只是一个半经典的结果，如果对黑洞蒸发过程进行真正量子引力的研究就会发现，辐射可以用某种微妙的方式携带信息，整个黑洞的演化过程是信息守恒的，和当前的量子力学原理兼容。

在某种意义上，这两派观点的争论由于 AdS/CFT 的发现而得以了结，因为 AdS/CFT 对应告诉我们，AdS 时空中的一切过程，包括黑洞的形成和蒸发，都可以用边界上的普通量子场论系统来描述，因此当然是信息守恒的。但是，Hawking 辐射是如何携带信息从而使得信息守恒的，即所谓的黑洞信息问题，目前依然远远没有解决。这方面的最新进展可以参看 Ahmed Almheiri, Thomas Hartman, Juan Maldacena, Edgar Shaghoulian, Amirhossein Tajdini 的综述文章 [The entropy of Hawking radiation](#)。

## 参考文献

1. 陈斌. 广义相对论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2018.
2. 刘辽, 赵峰. 广义相对论 [M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004.
3. 陈童. [引力论讲义](#) [Z].
4. Tong D. [Lectures on General Relativity](#) [Z].
5. Carroll S M. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity[M]. San Francisco: Addison Wesley, 2004.
6. Townsend P K. Black Holes[J]. arXiv: gr-qc/9707012, 1997.