引力波的场论分析

呜哩天才琪露诺

华中科技大学物理学院

日期：2025 年 11 月 2 日

1 经典场论

1.1 电磁场类比

电磁场的 Lagrange 量是

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{1}$$

根据 Noether 定理给出的守恒流

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{em}} = -\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}\partial^\nu A_\rho + \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\text{em}} = F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^2 \tag{2}$$

考虑规范变换

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu\theta \tag{3}$$

它不改变电磁场 $F^{\mu\nu}$，因而不改变可观测量. 在规范变换下

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{em}} \longrightarrow \theta^{\mu\nu}_{\text{em}} - F^{\mu\rho}\partial^\nu\partial_\rho\theta \tag{4}$$

这样定义的电磁场的能量密度 θ^{00} 不是规范不变的，这意味着同样的电磁场却会有不同的能量密度，这不合理. 为了解决这个问题，重写

$$\begin{aligned}
\theta^{\mu\nu}_{\text{em}} &= F^{\mu\rho}(\partial^\nu A_\rho - \partial_\rho A^\nu + \partial_\rho A^\nu) - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^2 \\
&= \left(F^{\mu\rho}F^\nu_\rho - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^2\right) + F^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu \\
&= \left(F^{\mu\rho}F^\nu_\rho - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^2\right) + \partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu)
\end{aligned} \tag{5}$$

定义 $T^{\mu\nu}_{\text{em}} = F^{\mu\rho}F^\nu_\rho - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^2, \quad C^{\rho\mu\nu} = F^{\mu\rho}A^\nu$，则

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{em}} = T^{\mu\nu}_{\text{em}} + \partial_\rho C^{\rho\mu\nu} \tag{6}$$

现在 $T^{\mu\nu}_{\text{em}}$ 是一个规范不变的量，它的 00 分量给出能量密度

$$T^{00}_{\text{em}}(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \tag{7}$$

我们直接扔掉了非规范不变项 $\partial_\mu C^{\rho\mu\nu}$，这样做的合理性基于以下考量

- 因为 $\partial_\mu\partial_\rho C^{\rho\mu\nu} = 0$，所以 $\theta^{\mu\nu}_{\text{em}}$ 守恒和 $T^{\mu\nu}_{\text{em}}$ 守恒是一致的；
- 因为 $C^{00\nu} = F^{00}A^\nu = 0$，$\theta^{\mu\nu}_{\text{em}}$ 和 $T^{\mu\nu}_{\text{em}}$ 的 Noether 荷相差

$$\int_V \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\partial_\rho C^{\rho 0\nu} = \int_V \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\partial_i C^{i0\nu} \tag{8}$$

  这是散度的空间积分，只要 C 在 V 的边界减小得足够快，这个积分就等于 0，从而用 $\theta^{\mu\nu}_{\text{em}}$ 和 $T^{\mu\nu}_{\text{em}}$ 计算的 Noether 荷 P^ν 是相同的.

这个例子给我们的启示是，Noether 定理给出的能动张量未必是一个物理上的可观测量. 它的平均值，才能无模糊地给出能量密度，即

$$\langle \theta_{\mathrm{em}}^{00} \rangle = \langle T_{\mathrm{em}}^{00} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \rangle \tag{9}$$

1.2 引力波的能动张量

现在我们考虑一个引力波波包，它的约化波长在 $\bar{\lambda}$ 附近. 根据前面的讨论，Noether 定理，在一个尺度 $L \gg \bar{\lambda}$ 的盒子里，我们可以计算引力波的平均能量

$$t^{\mu\nu} = \left\langle -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu h_{\alpha\beta})} \partial^\nu h_{\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\rangle \tag{10}$$

而当我们问引力波的定域能量动量密度是多少时，Noether 定理给出的答案是模糊的. 这一点不难料到，在引力波的几何分析中我们就已经知道，引力波的能动张量必须表示为几个约化波长或几个周期尺度上的平均，因为要研究引力波对背景时空的影响，我们必须对场方程作粗粒化.

要计算(10)，我们必须得求出支配 $h_{\mu\nu}$ 动力学的 $\mathcal{L}$，也就必须要把引力场作用量展开到 $h_{\mu\nu}$ 的二阶项. 引力场的作用量是

$$S_E = \frac{c^3}{16\pi G} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}\, R \tag{11}$$

经过计算

$$S_E = -\frac{c^3}{64\pi G} \int \mathrm{d}^4 x (\partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial^\mu h^{\alpha\beta} - \partial_\mu h \partial^\mu h + 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\rho h_\nu^\rho) \tag{12}$$

对应的 Lagrange 量密度是

$$\mathcal{L} = -\frac{c^3}{64\pi G} (\partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial^\mu h^{\alpha\beta} - \partial_\mu h \partial^\mu h + 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\rho h_\nu^\rho) \tag{13}$$

我们来计算 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu h_{\alpha\beta})}$，第二、三、四项都会给出 h 或 $\partial^\mu h_{\mu\nu}$ 的线性项，如果我们取规范 $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad h = 0$，则这些项都不贡献. 唯一的非零贡献只来自于第一项

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu h_{\alpha\beta})} \right|_{\partial^\mu h_{\mu\nu} = h = 0} = -\frac{c^4}{32\pi G} \partial^\mu h^{\alpha\beta} \tag{14}$$

我们接着计算 $\langle \mathcal{L} \rangle$，第二、三、四项显然不贡献. 回忆起 $\langle \cdot \rangle$ 内部可以随便分部积分，于是第一项变成 $-h_{\alpha\beta} \Box h^{\alpha\beta}$. 因为 $\Box h_{\mu\nu} = 0$，所以 $\langle \mathcal{L} \rangle = 0$. 于是

$$\boxed{t^{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial^\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta} \rangle} \tag{15}$$

我们接着探讨引力波能量的定域性问题，也就是说，$E = P^0$ 的诸多表达式中（它们都是某个函数的空间积分），有没有哪个被积函数可以提升为物理可观测量，从而定义为定域的能量密度. 在电磁学中，$T_{\mathrm{em}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ 是很合理的选择，它既是守恒量，又是规范不变的. 对引力场就不是这样. $\partial^\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta}$ 不是规范不变的，也找不到什么定域的规范不变的量，因为等效原理告诉我们，在任何一个点附近，总能找到一个自由下落坐标系，使引力效应消除. 这是电磁相互作用和引力的重要区别.

但是，对电磁波和引力波，就没有太大差别，我们能观测的都只是几个波长或周期内的平均能量，这可以从量子力学的角度加以说明. 量子力学中平面波由零质量粒子描述，考虑一群这样的自由粒子，要确定某一时刻体积 V 内系统的能量，我们就得知道 V 里面有多少粒子. 考虑尺度小于约化波长 $\bar{\lambda}$ 的体积，要确定光子/引力子是否在体积里，我们必须把位置测量到精度 $\Delta x < \bar{\lambda}$. 由 Heisenberg 不确定性原理，动量的不确定性 $\Delta p > \frac{\hbar}{\bar{\lambda}}$，于是我们已经完全丢失了关于粒子动量的信息，也就完全丢失了能量 $E = c|\mathbf{p}|$ 的信息. 所以，我们没法把能量定域到比几个约化波长更小的尺度了.

1.3 引力波的角动量

在空间转动下，对称张量 $h_{\mu\nu}$ 可以解耦为

- h_{00} 和空间部分的 h^i_i，它们在转动变换下都是标量，因此对应 0 自旋场；
- h_{01}，在转动变换下是矢量，对应 1 自旋场；
- 对称无迹张量 h'_{ij}，对应 2 自旋场.

要描述引力波，我们采用 TT 规范，$h_{0\mu}=0$，只剩下空间部分的对称张量 h^{TT}_{ij}. 这个张量还满足无迹条件 $(h^{\mathrm{TT}})^i_i=0$ 和横向条件 $\partial^i h^{\mathrm{TT}}_{ij}=0$，于是只剩下两个自由度（三维对称张量有 6 个自由度，无迹条件施加一个约束，横向条件施加三个约束），对应自旋为 2 的无质量粒子. 为了计算方便，我们把 Lagrange 量取为

$$\mathcal{L}=-\frac{c^4}{64\pi G}\partial_\mu h^{\mathrm{TT}}_{ij}\partial^\mu h^{\mathrm{TT}}_{ij} \tag{16}$$

角动量是无穷小转动变换

$$x^i\longrightarrow R^{ij}x^j,\quad R^{ij}=\delta^{ij}+\omega^{ij} \tag{17}$$

对应的 Noether 荷. R 是正交矩阵，要求 $\omega^{ij}=-\omega^{ji}$. 坐标和场量的变分

$$\begin{aligned}\delta x^i&=R^{ij}x^j-x^i\\&=\omega^{ij}x^j\\&=\sum_{k<l}\omega^{kl}(\delta^{ik}x^l-\delta^{il}x^k)\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\delta h^{\mathrm{TT}}_{ij}&=R^k_iR^l_jh^{\mathrm{TT}}_{kl}-h^{\mathrm{TT}}_{ij}\\&=\omega^l_jh^{\mathrm{TT}}_{il}+\omega^k_ih^{\mathrm{TT}}_{kj}\\&=\sum_{k<l}\omega^{kl}(\delta_{ik}h^{\mathrm{TT}}_{jl}-\delta_{il}h^{\mathrm{TT}}_{jk}+\delta_{jk}h^{\mathrm{TT}}_{il}-\delta_{jl}h^{\mathrm{TT}}_{ik})\end{aligned} \tag{19}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0h^{\mathrm{TT}}_{ij})}&=-\frac{c^4}{32\pi G}\partial^0h^{\mathrm{TT}}_{ij}\\&=+\frac{c^3}{32\pi G}\dot{h}^{\mathrm{TT}}_{ij}\end{aligned} \tag{20}$$

从而

$$j^0_{kl}=\frac{c^3}{32\pi G}\left[-\dot{h}^{\mathrm{TT}}_{ab}(x^k\partial^l-x^l\partial^k)h^{\mathrm{TT}}_{ab}+2\dot{h}^{\mathrm{TT}}_{ab}(\delta_{bl}h^{\mathrm{TT}}_{ak}+\delta_{al}h^{\mathrm{TT}}_{bk})\right] \tag{21}$$

角动量定义为为

$$J^i=\frac{1}{2c}\varepsilon^{ijk}\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,j^0_{kl}=\frac{c^2}{32\pi G}\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\left(-\dot{h}^{\mathrm{TT}}_{ab}x^k\partial^lh^{\mathrm{TT}}_{ab}+2h^{\mathrm{TT}}_{ak}\dot{h}^{\mathrm{TT}}_{al}\right)\varepsilon^{ikl} \tag{22}$$

表达式中的两项分别具有什么物理意义呢？要弄清这一点，我们考虑标量场和矢量场的角动量. 由 Noether 定理，可以算出实标量场的角动量为

$$J^i=-\varepsilon^{ikl}\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,(\partial_0\phi)x^k(\partial^l\phi) \tag{23}$$

这和(22)的第一项形式上是一致的，只是差了一个系数. 对满足 Klein-Gordon 方程 $\Box\phi=0$ 的场位形，定义内积

$$\langle\phi|\phi'\rangle=\frac{\mathrm{i}}{2}\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,(\phi\partial_0\phi'-\phi'\partial_0\phi) \tag{24}$$

通过 $\partial_0\langle\phi|\phi'\rangle=\partial_0\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}(\phi\partial_0\phi'-\phi'\partial_0\phi)=\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}(\phi\partial_0^2\phi'-\phi'\partial_0^2\phi)=\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}(\phi\nabla^2\phi'-\phi'\nabla^2\phi)=\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\nabla(\phi\nabla\phi'-\phi'\nabla\phi)=0$ 可知内积是时间无关的，因此不难预想守恒荷可以表示为内积中间插入某个算符的形式，量子力

学的诠释中这就是某个力学量算符的期望值. 考虑轨道角动量算子 $L^i = -\mathrm{i}\varepsilon^{ikl}x^k\partial^l$，则其期望

$$\begin{aligned}\langle\phi|L^i|\phi\rangle &= \frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\left[\phi L^i(\partial_0\phi) - (\partial_0\phi)L^i\phi\right] \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\left[\phi x^k\partial^l\partial_0\phi - (\partial_0\phi)x^k\partial^l\phi\right] \\ &= -\varepsilon^{ikl}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,(\partial_0\phi)x^k\partial^l\phi\end{aligned} \tag{25}$$

这正是前面我们算出来的标量场的角动量

$$J^i = \langle\phi|L^i|\phi\rangle \tag{26}$$

对标量场而言，角动量只能是轨道角动量，没有(22)中的第二项. Maggiore 的书中考虑的是矢量场，但我们这里考虑 Dirac 旋量场. 设我们的变换是绕 z 轴转动一个无穷小的角度 θ，即 $\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu}x_\nu$，$\omega^{12} = -\omega^{21} = \theta$. 我们要求的是 j^0 的空间积分，$\delta x^0 = 0$，有

$$j^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}\delta_0\psi = \mathrm{i}\psi^\dagger\delta_0\psi \tag{27}$$

其中 $\delta_0\psi = \psi'(x') - \psi(x)$ 而

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\theta\Sigma_3}{2}\right)\psi(x^\mu - \omega^\mu_\nu x^\nu) \\ &\sim \left(\mathbf{1} - \frac{\mathrm{i}\theta\Sigma_3}{2}\right)\left[\psi(x) + \theta(y\partial_x\psi - x\partial_y\psi)\right] \\ &\sim \psi(x) + \theta(y\partial_x\psi - x\partial_y\psi)\end{aligned} \tag{28}$$

从而

$$\delta_0\psi = -\theta\left(\frac{\mathrm{i}\Sigma_3}{2} + x\partial_y - y\partial_x\right)\psi \tag{29}$$

$$j^0 = -\mathrm{i}\theta\psi^\dagger\left(\frac{\mathrm{i}\Sigma_3}{2} + x\partial_y - y\partial_x\right)\psi \tag{30}$$

从而可以定义 z 方向上的角动量

$$J_z = \int j^0\mathrm{d}^3\mathbf{x} = -\mathrm{i}\theta\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\psi^\dagger\left(\frac{\mathrm{i}\Sigma_3}{2} + x\partial_y - y\partial_x\right)\psi \tag{31}$$

推广到任意方向

$$\mathbf{J} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\left[\mathbf{x}\times(-\mathrm{i}\nabla) + \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}\right]\psi \tag{32}$$

对满足 Dirac 方程

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \\ -\mathrm{i}(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0\end{aligned} \tag{33}$$

的场位形，定义内积

$$\langle\psi|\psi'\rangle = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\psi \tag{34}$$

则由

$$
\begin{aligned}
\partial_0\langle\psi|\psi'\rangle &= \partial_0\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\psi \\
&= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\left[(\partial_0\bar{\psi})\gamma^0\psi + \bar{\psi}\gamma^0(\partial_0\psi)\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\left[-(\partial_i\bar{\psi}\gamma^i + \mathrm{i}m\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(-\gamma^i\partial_i\psi - \mathrm{i}m\psi)\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\left[(\partial_i\bar{\psi})\gamma^i\psi + \bar{\psi}\gamma^i(\partial_i\psi)\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\partial_i(\bar{\psi}\gamma^i\psi) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{35}
$$

可知标量积是守恒的. 所以(32)中的第一项无非就是 $\mathbf{L} = -\mathrm{i}\mathbf{x}\times\nabla$ 对应此内积的期望值. 要明确第二项的含义，我们考察 $J_z\,|\mathbf{p}=\mathbf{0},l\rangle$. 因为 $J_z\,|0\rangle = 0$，所以只用计算 $[J_z, a_{\mathbf{0}}^{l\dagger}]\,|0\rangle$. 因为只有 $\mathbf{p}=\mathbf{0}$ 的产生湮灭算子与 $a_{\mathbf{0}}^{l\dagger}$ 的对易子才不为 0，而轨道角动量部分的 ∂ 会从指数上拉下来 $\mathbf{p}$，所以轨道角动量部分对对易子无贡献，自旋角动量部分为

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\frac{\Sigma_3}{2}\psi \\
&= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}2E_{\mathbf{q}}}}\sum_{rs}[a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}u^{r\dagger}(\mathbf{p}) + b_{-\mathbf{p}}^{r}v^{r\dagger}(-\mathbf{p})]e^{+\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\frac{\Sigma_3}{2} \\
&[a_{\mathbf{q}}^{s}u^{s}(\mathbf{q}) + b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}v^{s}(-\mathbf{q})]e^{+\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\sum_{s}[a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}u^{r\dagger}(\mathbf{p}) + b_{-\mathbf{p}}^{r}v^{r\dagger}(-\mathbf{p})]\frac{\Sigma_3}{2}[a_{\mathbf{q}}^{s}u^{s}(\mathbf{q}) + b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}v^{s}(-\mathbf{q})]
\end{aligned}
\tag{36}
$$

先不要急着往下算. 观察可知展开的项大概会有 $a^\dagger a,\quad a^\dagger a,\quad ba,\quad bb^\dagger$ 四种，因为 $[AB,C] = A\{B,C\} - \{A,C\}B$ 以及非零反对易子只有 $\{a,a^\dagger\}$ 这一事实，只有包含 a 的项 $a^\dagger a$ 和 ba 对对易子才有非零贡献. 而 ba 的贡献为 $b\{a,a^\dagger\}$，b 作用在 $|0\rangle$ 上为 0. 所以非零贡献的项只有 $a^\dagger a$. 这样我们的运算就大大简化了.

$$
\begin{aligned}
J_z\,|\mathbf{0},l\rangle &= [J_z, a_{\mathbf{0}}^{l\dagger}]\,|0\rangle \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\sum_{rs}u^{r\dagger}(\mathbf{p})\frac{\Sigma_3}{2}u^{s}(\mathbf{p})[a_{\mathbf{p}}^{r\dagger}a_{\mathbf{q}}^{s}, a_{\mathbf{0}}^{l}] \\
&= \frac{1}{2E_{\mathbf{0}}}\sum_{r}u^{r\dagger}(\mathbf{0})\frac{\Sigma_3}{2}u^{l}(\mathbf{0})a_{\mathbf{0}}^{r\dagger}\,|0\rangle \\
&= \sum_{r}\xi^{r\dagger}\frac{\sigma^3}{2}\xi^{l}a_{\mathbf{0}}^{r\dagger}\,|0\rangle \\
&= \sum_{r}\xi^{r\dagger}\frac{\sigma^3}{2}\xi^{l}\,|\mathbf{0},r\rangle
\end{aligned}
\tag{37}
$$

我们取 $l=1$，则

$$
\begin{aligned}
J_z\,|\mathbf{0},1\rangle &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}|\mathbf{0},1\rangle + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}|\mathbf{0},2\rangle \\
&= +\frac{1}{2}\,|\mathbf{0},1\rangle
\end{aligned}
\tag{38}
$$

可见 $|\mathbf{0},1\rangle = a_{\mathbf{0}}^{1\dagger}$ 就是 z 方向自旋向上的一个静止粒子，且 J_z 的本征值为 $+\frac{1}{2}$. 取 $s=2$，则

$$\begin{aligned} J_z\left|\mathbf{0},2\right\rangle &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\left|\mathbf{0},1\right\rangle + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\left|\mathbf{0},2\right\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\left|\mathbf{0},2\right\rangle \end{aligned} \tag{39}$$

可见 $|\mathbf{0},2\rangle = a_{\mathbf{0}}^{2\dagger}$ 就是 z 方向自旋向下的一个静止粒子，且 J_z 的本征值为 $-\frac{1}{2}$. 对反粒子，通过相似的步骤可以证明

$$J_z\left|\mathbf{0},s=1,2\right\rangle = \mp\frac{1}{2}\left|\mathbf{0},s=1,2\right\rangle \tag{40}$$

即 $|\mathbf{0},s=1\rangle$ 对应自旋向下的粒子而 $|\mathbf{0},s=2\rangle$ 对应自旋向上的粒子. 湮灭了一个自旋向上的负能量粒子，相当于产生了一个自旋向下的正能量空穴.

现在我们就能理解(22)中两项的物理含义了. 因为 $\Box h_{ab}^{TT}=0$，守恒的标量积定义为

$$\langle h|h'\rangle = \frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\left(h_{ab}^{\mathrm{TT}}\partial_0 h_{ab}'^{\mathrm{TT}} - h_{ab}'^{\mathrm{TT}}\partial_0 h_{ab}^{\mathrm{TT}}\right) \tag{41}$$

(22)的第一项就是轨道角动量算子在这个内积下的期望值，而 $2\varepsilon^{ikl}h_{ak}^{\mathrm{TT}}\dot{h}_{al}^{\mathrm{TT}}$ 是自旋的贡献，因子 2 表明引力场的自旋为 2，对应引力子的螺旋度为 ± 2.

之前我们看到，Noether 流不能在比几个波长更小的尺度定域化，所以有物理意义的角动量密度也应当是几个波长尺度上的平均

$$\frac{j^i}{c} = \frac{c^2}{32\pi G}\langle -\varepsilon^{ikl}\dot{h}_{ab}^{\mathrm{TT}}x^k\partial^l h_{ab}^{\mathrm{TT}} + 2\varepsilon^{ikl}\dot{h}_{al}^{\mathrm{TT}}h_{ak}^{\mathrm{TT}}\rangle \tag{42}$$

考虑从源向外传播的引力波，于 t 时刻在波前上取面元，其与波源的距离为 r，对应立体角为 $\mathrm{d}\Omega$. 在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻这个面元扫过体积为 $\mathrm{d}^3\mathbf{x} = r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega = r^2(c\mathrm{d}t)\mathrm{d}\Omega$. 鉴于每单位体积的角动量是 $\frac{j^i}{c}$，引力波携带的角动量 $\mathrm{d}J^i = r^2(c\mathrm{d}t)\mathrm{d}\Omega\frac{j^i}{c}$. 引力波的角动量辐射率为

$$\frac{\mathrm{d}J^i}{\mathrm{d}t} = \frac{c^3}{32\pi G}\int r^2\mathrm{d}\Omega\frac{j^i}{c} = \frac{c^2}{32\pi G}\langle -\varepsilon^{ikl}\dot{h}_{ab}^{\mathrm{TT}}x^k\partial^l h_{ab}^{\mathrm{TT}} + 2\varepsilon^{ikl}\dot{h}_{al}^{\mathrm{TT}}h_{ak}^{\mathrm{TT}}\rangle \tag{43}$$

2 量子场论

2.1 Why a spin-2?

在量子场论中，所有相互作用都通过玻色子的交换传递. 我们来寻找平直时空背景中的量子场论，在非相对论性极限下它回到 Newton 引力理论. 要得到一个定域的场论，我们需要把引力同一个局域的量耦合起来，在非相对论性极限下引力与质量耦合，在 Einstein 引力中引力也与能量耦合，所以我们要寻找一个将引力场与 $T_{\mu\nu}(x)$ 耦合起来的量子场. 因为时空背景是平直的，我们忽略引力场自身对 $T_{\mu\nu}$ 的贡献，$T_{\mu\nu}$ 只是物质场的能动张量. 守恒条件为 $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$.

最简单的可能是引力由零自旋玻色子 ϕ 传递. 标量场 ϕ 没有 Lorentz 指标，只能和能动张量的迹 T 耦合. 描述引力子的动力学及其与物质的耦合的 Lagrange 量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \mu^2\phi^2) + g\phi T \tag{44}$$

g 是耦合常数，μ 是标量场的质量. 考虑这么一个过程，质量为 m_1 和 m_2 的两个静止的物质粒子交换一个 ϕ 玻色子，我们来计算其相互作用势 $V(\mathbf{x})$. 它应当是树图阶散射振幅的 Fourier 变换（差一个负号）

$$V(\mathbf{x}) = -\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}M_{fi}(\mathbf{q})e^{\mathrm{i}\mathbf{q}\mathbf{x}} \tag{45}$$

我们需要处理(1)所示的 Feynamn 图，把 $T^{\mu\nu}$ 看作经典外场，则散射振幅为

$$\mathrm{i}M_{fi}(\mathbf{q}) = (-\mathrm{i}g)^2 \tilde{T}_1(\mathbf{q})\tilde{D}(\mathbf{q})\tilde{T}_2(-\mathbf{q}) \tag{46}$$

其中 $D(q) = \frac{-\mathrm{i}}{q^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}$ 是标量场 ϕ 的传播子，T_1， T_2 是能动张量的迹. 于是

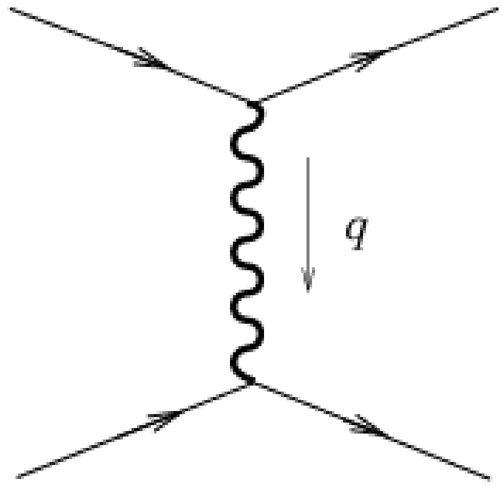

图 1: 树图阶散射振幅

$$V(\mathbf{x}) = -\mathrm{i}g^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \hat{T}_1(\mathbf{q})\tilde{D}(\mathbf{q})\tilde{T}_2(-\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \tag{47}$$

对于一个沿着轨迹 $\mathbf{x}_0(t)$ 运动的相对论性经典粒子，其能量-动量张量由下式给出

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x},t) = \frac{p^\mu p^\nu}{p^0}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(t)) \tag{48}$$

其中 p^μ 是四动量. 利用 $p^\mu p_\mu = -m^2$ 以及，对于静止粒子，$p^0 = m$，一个重源的能动张量的迹变为 $T(\mathbf{x}) = -m\,\delta^{(3)}(\mathbf{x})$，这进而给出 $T(\mathbf{q}) = -m$. 因此

$$V(\mathbf{x}) = -\mathrm{i}g^2 m_1 m_2 D(\mathbf{x}) \tag{49}$$

如果质量 μ 为零

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-i}{\mathbf{q}^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{-\mathrm{i}}{4\pi r} \end{aligned} \tag{50}$$

其中 $r = |\mathbf{x}|$，因此我们得到了正确的牛顿势

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \tag{51}$$

一旦我们做出等价关系 $g^2/(4\pi) = G$. 如果质量 μ 非零，我们则得到一个 Yukawa 势

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{Gm_1m_2}{r} e^{-\mu r} \tag{52}$$

这一结果表明，就非相对论性牛顿极限而言，一个自旋为 0 的无质量标量场是一个可行的可能性.

但是，我们看到电磁场的能量-动量张量是无迹的，

$$T_{\text{em}} = F^{\mu\nu}F_{\mu\rho} - \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F^2 = 0 \tag{53}$$

因此，在此理论中，光子不与引力耦合. 实验上，来自大质量物体的光线的引力弯曲是已被充分证实的. 因此，自旋为 0 的引力理论被排除.

下一个可能性是自旋为 1 的场. 为了获得长程势，我们再次需要一个无质量场，但一个无质量矢量场 A_μ 只有在我们考虑规范不变性的情况下才能被一致地耦合. 在电动力学中，这可以通过耦合 $A_\nu j^\mu$ 来实现，要求 j^μ 是一个守恒流. 在规范变换下，$A_\mu \to A_\mu - \partial_\nu\theta$，并且在分部积分之后，项 $-(\partial_\mu\theta)j^\nu \to \theta\partial_\nu j^\nu = 0$，所以作用量是不变的. 因此，此矢量场 A_μ 与能量-动量张量之间形式为 $A_\mu A_\nu T^{\mu\nu}$ 的耦合立即被排除，因为它不是规范不变的. 导数耦合 $(\partial_\mu A_\nu)T^{\mu\nu}$ 也是不可行的，因为在分部积分后，由于能量-动量守恒，它给出零.

我们可以写出一个矢量场与点状粒子的耦合形式为

$$\int d^4x\, A_\mu(x)\, m\, \frac{dx_0^\mu}{d\tau}\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(t)) \tag{54}$$

其中 $x_0^\mu(\tau)$ 是粒子的世界线. 然而,在量子场论中,四矢量 $j^\mu(x)$ 在点状粒子的极限下约化为 $m(dx_0^\mu/d\tau)\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(t))$，它是一个 $U(1)$ 流. 那么 $Q \equiv \int d^3x\, j^0$ 等于质量 m 乘以（粒子数减去反粒子数），所以它不是正定的，并且 $\int d^3x\, j^0$ 不能被解释为质量. 此外，即使我们忽略这个问题并将 j^0 解释为质量密度，构建自旋为 1 的引力理论的这种尝试仍然失败，因为正如我们从经典电磁学中所知，光子介导的两个相同（引力）“电荷” 粒子之间的相互作用是排斥的. 从技术上讲，这是因为方程 (47) 中的项 $\tilde{T}_1(\mathbf{q})\tilde{D}(\mathbf{q})\tilde{T}_2(-\mathbf{q})$ 现在被替换为

$$\tilde{j}^\nu(\mathbf{q})\tilde{D}_{\mu\nu}(\mathbf{q})\tilde{j}^\nu(-\mathbf{q}) \tag{55}$$

其中 $\tilde{D}_{\mu\nu}(q)$ 是无质量矢量场 A_μ 的传播子. 在动量空间中

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2}\,\eta_{\mu\nu} \tag{56}$$

在静态极限下 $q^2 = -(q^0)^2 + \mathbf{q}^2 \to \mathbf{q}^2$，传播子变为

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = \frac{-i}{\mathbf{q}^2}\,\eta_{\mu\nu} \tag{57}$$

由于因子 $\eta_{\mu\nu}$，空间分量 A_i 的传播子与标量场的传播子相同，但 A_0 的传播子具有相反的符号. 在非相对论极限下 $j^\mu \to (j^0, 0)$. 那么在方程 (55) 中只有 D_{00} 分量有贡献，因此我们得到与标量情况相反的符号，即正质量之间的排斥势. 总之，自旋为 1 也被排除. 自旋 $j \geqslant 3$ 的值也被排除，因为长程力的需要再次要求一个无质量场，它只能与守恒张量一致地耦合. 指标数大于等于 3 的张量一定含有全导数项. 所以 $j \geq 3$ 的粒子一定不能产生长程力.

2.2 Pauli-Fierz 作用量

前面我们看到，Lorentz 群的不可约张量表示对任意一对指标要么是反对称的要么是对称无迹的. Lorentz 群的不可约表示自然也是 SO(3) 群的表示，但未必不可约. 比如，四矢量 A_μ 是 Lorentz 群的不可约表示，但在转动变换下，A_0 是不变的，A_i 按矢量方式变换，A_μ 解耦为一个标量和一个矢量，即

$$A_\mu \in \mathbf{0}\oplus\mathbf{1} \tag{58}$$

则我们用 $\oplus$ 表示表示的直和，用 $\mathbf{s}$ 表示对应于自旋 s 的转动群表示，$\mathbf{0}$ 是标量表示而 $\mathbf{1}$ 是矢量表示. 表示 $\mathbf{s}$ 是 $2s+1$ 维的. 再比如，反对称张量 $A^{\mu\nu}$ 可以解耦为两个矢量

$$A_{\mu\nu} \in \mathbf{1}\oplus\mathbf{1} \tag{59}$$

电磁场张量 $F^{\mu\nu}$ 就可以解耦为电场强度矢量和磁场强度矢量. 而对称无迹张量 $S^{\mu\nu}$ 可以解耦为一个标量（S^{00}）、一个矢量（S^{0i}）和一个迹固定为 $-S^{00}$ 的对称张量（S^{ij}）

$$S_{\mu\nu} \in \mathbf{0}\oplus\mathbf{1}\oplus\mathbf{2} \tag{60}$$

对称无迹张量是包含转动群的自旋-2 表示的最简单张量，但我们还需要消除掉多余的自由度. $S_{\mu\nu}$ 有 1 个标量自由度，3 个矢量自由度和 5 个张量自由度，一共 9 个自由度. 由于我们考虑的是无质量粒子，问题的复杂性增加了. 量子场论告诉我们，自旋为 $\pm j$ 的无质量粒子只有两个自由度，对应螺旋度 $\pm j$，因此无质量粒子的表示也只有两个自由度，所以用 $S_{\mu\nu}$ 描述引力子会带来 7 个冗余自由度. 消除冗余自由度的方法是利用规范不变性. 电磁理论在规范变换

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu\theta \tag{61}$$

下是不变的. 我们可以取定 $\theta(x)$ 使得 $A_0 = 0$，进一步地，我们可以调整 $\theta(\mathbf{x})$ 的形式使得 $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$. 这样，我们就消除了两个冗余自由度，剩下的两个自由度正好对应光子的两种偏振模式. 对引力理论，我们也希望构造一个局域规范不变的 Lagange 量，这样就可以通过规范变换消掉多余的自由度. 在技术上，从对称但并非无迹的张量 $h_{\mu\nu}$ 反而是方便的，这样的张量可以解耦为 $h_{\mu\nu} \in \mathbf{0}\oplus(\mathbf{0}\oplus\mathbf{1}\oplus\mathbf{2})$，通过规范变换消掉多余的自由度.

电磁学的规范变换(61)可以自然地推广为

$$h_{\mu\nu}(x) \longrightarrow h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu) \tag{62}$$

这和线性化引力理论那里的对称变换是一样的. 下面我们来构造自由理论的规范不变作用量. 包含"$\partial h\partial h$" 项的最一般的形式为

$$S_2 = \int \mathrm{d}^4x(a_1\partial_\rho h_{\mu\nu}\partial^\rho h^{\mu\nu} + a_2\partial_\rho h_{\mu\nu}\partial^\nu h^{\mu\rho} + a_3\partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\mu h + a_4\partial^\mu h\partial_\mu h) \tag{63}$$

其中下标 2 表示这个量是 $h_{\mu\nu}$ 的二次项，h 是迹. 令 $a_1 = -\frac{1}{2}$（负号是出于能量正定性考虑），并代入规范不变条件，则

$$S_2 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x(-\partial_\rho h_{\mu\nu}\partial^\rho h^{\mu\nu} + 2\partial_\rho h_{\mu\nu}\partial^\nu h^{\mu\rho} - 2\partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\mu h + \partial^\mu h\partial_\mu h) \tag{64}$$

这叫做 Pauli-Fierz 作用量. 这和线性化引力理论的 Einstein 作用量只差了一个全导数项以及系数 $(32\pi G)^{-\frac{1}{2}}$. 于是我们发现，线性化的引力场作用量是描述自由的自旋-2 无质量粒子的唯一作用量. 现在我们只要重复几何分析中所进行的种种操作，用 de Donder 规范和 TT 规范分别消去 4 个自由度，就能得到引力波的两个物理模式以及运动方程.

相互作用项

$$S_{\text{int}} = \frac{\kappa}{2}\int \mathrm{d}^4x\, h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \tag{65}$$

κ 为待定的耦合常数. S_{int} 在规范变换(62)下也是不变的，因为 $(\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu)T^{\mu\nu}$ 在分部积分之后是 $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ 这样的项，由能动量守恒可知为 0.

我们回忆起在 QED 中，Maxwell 场的 Feynamn 传播子应当满足 $(\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)D_F^{\nu\rho}(x-y) = \mathrm{i}\delta_\mu^\rho\delta^{(4)}(x-y)$ 也即

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu)\tilde{D}_F^{\nu\rho}(k) = \mathrm{i}\delta_\mu^\rho \tag{66}$$

可是，$\det(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) = 0$，这个方程是无解的. 为此需要引入 Feynamn 规范固定项 $\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{2}(\partial^\mu A\mu)^2$，在该规范下电磁场的动能项简化为 $-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu$，传播子也简化为 $-\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}$. 对引力场，也要引入规范固定项

$$\begin{aligned} S_{\text{gf}} &= -\int \mathrm{d}^4x(\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu})^2 \\ &= -\int \mathrm{d}^4x\left(\partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\nu h\right)^2 \\ &= \int \mathrm{d}^4x\left(-\partial_\rho h_{\mu\nu}\partial^\nu h^{\mu\rho} + \partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\mu h - \frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu h\right) \end{aligned} \tag{67}$$

最后一行的第一项中我们用分部积分法交换了导数顺序. 最终

$$\boxed{S = S_2 + S_{\text{gf}} + S_{\text{int}} = \int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{2}\partial_\rho h_{\mu\nu}\partial^\rho h^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \right)} \tag{68}$$

通过对作用量变分可以得到运动方程

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \right) \tag{69}$$

显然应当有 $\kappa = (32\pi G)^{\frac{1}{2}}$.

2.3 补充：规范不变性的详细说明

Maggiore 书上对规范不变性的解释太不详细，下面我们来系统地考察规范不变性. 参考资料为 S. Weinberg 的 *Gravitation and Cosmology* 和 *The Quantum Theory of Fields*.

2.3.1 动力学自由度

对电磁理论而言，其 Lagrange 量为

$$\mathcal{L}_{\text{Max}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \tag{70}$$

因为 $F^{00} = 0$，Lagrange 量不显含 $\dot{A}_0$，所以我们的运动方程中也没有 $\dot{A}_0$. 于是，我们只要给出了初始时刻的 A_i 和 $\dot{A}_i$，就能确定系统的演化. 至于 A_0，完全可以由 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ 即

$$-\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla^2 A^0 = \rho \tag{71}$$

算出. 对真空，则是

$$A^0(\mathbf{x}, t) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \frac{\left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)(\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{72}$$

所以 A^0 并不是一个动力学自由度，(71)是一个约束条件，称为第一类约束. 此外，由运动方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{73}$$

不能唯一地解出 A^μ，因为如果 A^μ 是运动方程的解，$A'^\mu = A^\mu + \varepsilon^\mu$ 也是一个解. 所以，用 A^μ 描述系统本身就有一个规范冗余. 要取定一个规范，比如 Lorenz 规范，于是又消去一个自由度. 这样，只剩下 $4 - 1 - 1 = 2$ 个自由度，正好对应电磁波的两种横向极化.

对 Einstein 引力理论来说，其 Lagrange 量为

$$\mathcal{L}_{\text{G}} = \sqrt{-g}\, R \tag{74}$$

R 中 $\partial^2 g$ 项为

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}(\partial_\kappa\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\mu\partial_\lambda g_{\kappa\nu} - \partial_\nu\partial_\mu g_{\kappa\lambda} + \partial_\nu\partial_\lambda g_{\mu\kappa}) \tag{75}$$

没有 $\partial_0^2 g_{00}$ 项，运动方程不含 $\partial_0^2 g_{00}$ 项，$g_{00} = 1 + 2\Phi$ 由 Newton 引力确定. 不止如此，由 Bianchi 恒等式 $\nabla_0 G^{0\nu} = \nabla_i G^{i\nu}$，右边不含 $\partial_0^3 g$，所以左边不含 $\partial_0^3 g$，故 $G^{0\nu}$ 不含 $\partial_0^2 g_{\mu\nu}$，所有 $-8\pi T^{0\nu} = G^{0\nu}$ 都不给出演化方程. 从另一个方面看，Bianchi 恒等式 $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ 要求只有满足 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 的物质才能与引力场耦合，这是对物质的要求，本身不带来新的运动方程. 此外，和电磁理论一致，引力场也有 4 个规范冗余自由度

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \xi^\mu(x) \tag{76}$$

若坐标系 x^μ 下 $g^{\mu\nu}$ 是方程的解，则 $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ 对应的 $g'^{\mu\nu}$ 也是方程的解. 于是，自由度减少到 $10-4-4 = 2$，对应引力波的两种极化模式.

2.3.2 （局域）规范不变性带来相互作用

我们都知道，带电粒子（如电子）对应的量子场有一个 $U(1)$ 整体对称性

$$\psi^l \longrightarrow \tilde{\psi}^l = e^{\mathrm{i}\varepsilon q^l}\psi^l, \quad \delta\psi^l(x) = \mathrm{i}\varepsilon q^l \psi^l(x) \tag{77}$$

由 Noether 定理，$U(1)$ 对称性对应一个守恒荷，即电荷. 相位 $e^{\mathrm{i}\varepsilon q^l}$ 在经典电动力学中并无观测效应，但量子力学中，相位区别有观测效应，比如 AB 效应.

现在，如果我们要求系统具有更强的对称性，即不仅对常数 ε 不变，对 $\varepsilon(x)$ 也不变，这称为（局域的）规范不变性. 我们来看这对理论有什么限制. 首先，$\psi^\dagger$ 和 ψ 的相因子相消，所以 $\psi^\dagger\psi$ 是规范不变的. 其次，在规范变换下

$$\partial_\mu\psi^l \longrightarrow \partial_\mu\tilde{\psi}^l = e^{\mathrm{i}\varepsilon(x)q^l}\partial_\mu\psi + \mathrm{i}q^l e^{\mathrm{i}\varepsilon(x)q^l}\psi\partial_\mu\varepsilon \tag{78}$$

所以动能项 $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ 不是规范不变的. 如何强制动能项不变？我们必须引入规范场，满足

$$A_\mu(x) \longrightarrow \tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\varepsilon(x) \tag{79}$$

把普通导数改成协变导数

$$\nabla_\mu\psi^l = \partial_\mu\psi^l - \mathrm{i}q^l A_\mu\psi^l \tag{80}$$

则规范变换下

$$\nabla_\mu\psi^l \longrightarrow \nabla_\mu\tilde{\psi}^l = e^{\mathrm{i}\varepsilon(x)q^l}\nabla_\mu\psi^l \tag{81}$$

则动能项 $\bar{\psi}^l\gamma^\mu\nabla_\mu\psi^l$ 中相因子相消，是规范不变的. 电磁场的

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{82}$$

对引力也是类似的. 狭义相对论中，物理定律在全局的 Lorentz 变换和时空平移下不变，这是整体对称性. Einstein 的等效原理将这种对称性局域化了. 在任意时空点，都可以找到一个局部惯性系，其中物理定律和狭义相对论一样. 这意味着物理定律在随地点而变的 Lorentz 变换和坐标变换（微分同胚）下不变. 微分同胚不变性是广义相对论的核心规范对称性.

为了实现在任意坐标变换下协变，必须引入一个动态的对象来描述时空的几何，即度规张量 $g_{\mu\nu}$. 它定义了时空各点的距离和角度，相当于定义了时空的“形状”. 物质与引力场的耦合方式同样是通过协变导数. 这里的协变导数包含了由度规决定的 Christoffel 符号 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. 例如，描述粒子运动的方程从狭义相对论的直线方程 $\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$ 变成了测地线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{83}$$

这不再是外来的“力”，而是时空弯曲的几何效应. 度规场 $g_{\mu\nu}$ 的场强就是 Riemann 曲率张量 $R^\rho_{\mu\nu\sigma}$，它和 $F_{\mu\nu}$ 一样都是规范不变的（也就是协变的）. Einstein 场方程

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{84}$$

描述“物质（能动张量 $T_{\mu\nu}$，作为源）如何告诉时空如何弯曲（由曲率张量描述），而时空弯曲又如何告诉物质如何运动”.

2.3.3 零质量要求规范不变性

单粒子态定义为

$$P^\mu\,|p,\sigma\rangle = p^\mu\,|p,\sigma\rangle \tag{85}$$

在 Lorentz 变换下的变换为

$$U(\Lambda)\,|p,\sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}\,|\Lambda p,\sigma'\rangle \tag{86}$$

定义标准动量 k^μ，任意动量都可以用对应的 Lorentz 变换 L^μ_ν 得到

$$p^\mu = L^\mu_\nu(p)k^\nu \tag{87}$$

则任意单粒子态

$$|p,\sigma\rangle \equiv U\left[L(p)\right]|k,\sigma\rangle \tag{88}$$

则

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)\,|p,\sigma\rangle &= U(\Lambda)U[L(p)]\,|k,\sigma\rangle \\
&= U[\Lambda L(p)]\,|k,\sigma\rangle \\
&= U[L(\Lambda p)]U[L^{-1}(\Lambda p)]U[\Lambda L(p)]\,|k,\sigma\rangle \\
&= U[L(\Lambda p)]U[L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)]\,|k,\sigma\rangle
\end{aligned} \tag{89}$$

$L(p)$ 先把 k 变成 p，Λ 把 p 变成 Λp，$L^{-1}(\Lambda p)$ 把 Λp 变回 k，故 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ 不改变标准动量 k，我们把它记作 $W(\Lambda,p)$. 这些变换构成一个群，称为小群. 有

$$W^\mu_\nu k^\nu = k^\mu \tag{90}$$

从而

$$U(W)\,|k,\sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\,|k,\sigma'\rangle \tag{91}$$

$D_{\sigma'\sigma}(W)$ 是 W 的有限维表示，表示空间为 $\{|k,\sigma\rangle\}$. 从而

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)\,|p,\sigma\rangle &= U[L(\Lambda p)]U[L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)]\,|k,\sigma\rangle \\
&= U[L(\Lambda p)]U[W(\Lambda,p)]\,|k,\sigma\rangle \\
&= U[L(\Lambda p)]\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\,|k,\sigma'\rangle \\
&= \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)U[L(\Lambda p)]\,|k,\sigma'\rangle \\
&= \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}[W(\Lambda,p)]\,|\Lambda p,\sigma'\rangle
\end{aligned} \tag{92}$$

接下来的任务就是研究小群的表示了. 对有质量粒子，其标准动量为 $k^\mu = (m,\mathbf{0})$，保持这个动量不变的变换显然就是旋转变换，对应的群就是 SO(3). 对光子，标准动量为 $k^\mu = (k,0,0,k)$，对应的小群是什么呢? 我们考虑类时矢量 $t^\mu = (1,\mathbf{0})$，看 W 作用在 t 上得到什么. 一方面，由变换的幺正性

$$(Wt)^\mu (Wt)_\mu = t^\mu t_\mu = 1 \tag{93}$$

另一方面

$$(Wt)^\mu k_\mu = (Wt)^\mu (Wk)_\mu = t^\mu k_\mu = k \tag{94}$$

由这两式解得

$$(Wt)^\mu = (1+\xi,\alpha,\beta,\xi) \quad \xi = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \tag{95}$$

取

$$S(\alpha,\beta)^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1+\xi & \alpha & \beta & -\xi \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \xi & \alpha & \beta & 1-\xi \end{pmatrix} \tag{96}$$

则 $S(\alpha,\beta)t = Wt, \quad S(\alpha,\beta)k = Wk$，也就是 $S^{-1}Wt = t, \quad S^{-1}Wk = k$. $S^{-1}W$ 既保持类时矢量 t 不变又保持类光矢量 k 不变，它只能是绕 z 轴的旋转变换，于是

$$W(\alpha,\beta,\theta) = S(\alpha,\beta)R_z(\theta) \tag{97}$$

$W(\alpha,\beta,\theta)$ 构成的群为二维 Eculid 空间等距群 ISO(2).

我们来考察 ISO(2) 群的生成元. 即

$$U[W(\alpha,\beta,\theta)] = 1 + \mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B + \mathrm{i}\theta J_3 \tag{98}$$

其中 $A = J_2 + K_1, \quad B = -J_1 + K_2$. 这当然可以通过暴力计算得到，但我们可以考虑哪些变换是保持类光矢量 k^μ 不变的. 首先，绕 z 轴的旋转显然是保持类光矢量不变的. 其次，先沿 x 轴作一个无穷小 boost，再绕 y 轴作一个无穷小旋转，参数都为 α，则

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\alpha & & \sin\alpha \\ & & 1 & \\ & -\sin\alpha & & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha & & \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O(\alpha^2) \tag{99}$$

是保持类光矢量不变的，则 $J_2 + K_1$ 是小群的生成元. 同理 $-J_1 + K_2$ 也是小群的生成元. 生成元非平庸的对易关系

$$\begin{aligned} [A,B] &= 0 \\ [J_3,A] &= +\mathrm{i}B \\ [J_3,B] &= -\mathrm{i}A \end{aligned} \tag{100}$$

于是可以引入 A, B 的共同本征态 $|k,a,b\rangle$ 满足

$$\begin{aligned} A\,|k,a,b\rangle &= a\,|k,a,b\rangle \\ B\,|k,a,b\rangle &= b\,|k,a,b\rangle \end{aligned} \tag{101}$$

定义

$$|k^\theta,a,b\rangle \equiv U^{-1}[R(\theta)]\,|k,a,b\rangle \tag{102}$$

则根据对易关系可以算出

$$\begin{aligned} A\,|k^\theta,a,b\rangle &= (a\cos\theta - b\sin\theta)\,|k^\theta,a,b\rangle \\ B\,|k^\theta,a,b\rangle &= (a\sin\theta + b\cos\theta)\,|k^\theta,a,b\rangle \end{aligned} \tag{103}$$

这会导致有连续的简并的单光子态，但是没有什么实验发现过这样的自由度 θ. 必须有 $a = b = 0$. 还剩 J_3，定义 $|k,\sigma\rangle$ 满足

$$\begin{aligned} J_3\,|k,\sigma\rangle &= \sigma\,|k,\sigma\rangle \\ A\,|k,\sigma\rangle &= B\,|k,\sigma\rangle = 0 \end{aligned} \tag{104}$$

它在小群变换下只差一个相因子

$$U(W)\,|k,\sigma\rangle = U[S(\alpha,\beta)R(\theta)]\,|k,\sigma\rangle = e^{\mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B}e^{\mathrm{i}J_3\theta}\,|k,\sigma\rangle = e^{\mathrm{i}\sigma\theta}\,|k,\sigma\rangle \tag{105}$$

σ 正是螺旋度，通过

$$U(\Lambda)|p,\sigma\rangle = e^{\mathrm{i}\sigma\theta(\Lambda,p)}|\Lambda p,\sigma\rangle \tag{106}$$

可以再一次看出螺旋度是 Lorentz 不变的. 由单粒子态的定义

$$|p,\sigma\rangle = \sqrt{2|\mathbf{p}|}a_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger}|0\rangle \tag{107}$$

得

$$U(\Lambda)a_{\mathbf{p}}^{\sigma\dagger}U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{|\Lambda\mathbf{p}|}{|\mathbf{p}|}}a_{\Lambda\mathbf{p}}^{\sigma\dagger}e^{\mathrm{i}\sigma\theta(\Lambda,p)} \tag{108}$$

考察矢量场的平面波展开

$$A^\nu(x) = \int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|}}\sum_\sigma\left[a_{\mathbf{p}}^\sigma\varepsilon^{(\sigma)\nu}(p)e^{-\mathrm{i}px} + \text{h.c.}\right]_{p^0=|\mathbf{p}|} \tag{109}$$

Lorentz 变换下

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)A^\nu(x)U^{-1}(\Lambda) &= \int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2|\mathbf{p}|}\sqrt{2|\Lambda\mathbf{p}|}\sum_\sigma\left[a_{\Lambda p}^{\sigma\dagger}\varepsilon^{(\sigma)\nu}(p)e^{-\mathrm{i}px}e^{-\mathrm{i}\sigma\theta(\Lambda,p)} + \text{h.c.}\right] \\
&\equiv \int[\mathrm{d}\mathbf{p}]\sqrt{2|\Lambda\mathbf{p}|}\sum_\sigma\left[a_{\Lambda p}^{\sigma\dagger}\varepsilon^{(\sigma)\nu}(p)e^{-\mathrm{i}px}e^{-\mathrm{i}\sigma\theta(\Lambda,p)} + \text{h.c.}\right] \\
&= \int[\mathrm{d}\Lambda\mathbf{p}]\sqrt{2|\Lambda\mathbf{p}|}\sum_\sigma\left[a_{\Lambda p}^{\sigma\dagger}\varepsilon^{(\sigma)\nu}(p)e^{-\mathrm{i}\Lambda p\Lambda x}e^{-\mathrm{i}\sigma\theta(\Lambda,p)} + \text{h.c.}\right]
\end{aligned} \tag{110}$$

我们希望

$$U(\Lambda)A^\nu(x)U^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu A^\mu(\Lambda x) \tag{111}$$

这要求

$$\varepsilon^{(\sigma)\nu}(p)e^{-\mathrm{i}\sigma\theta(\Lambda,p)} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu\varepsilon^{(\sigma)\mu}(\Lambda p) \tag{112}$$

即

$$\Lambda^\mu_\nu\varepsilon^{(\sigma)\nu}(p) = e^{\mathrm{i}\sigma\theta(\Lambda,p)}\varepsilon^{(\sigma)\mu}(\Lambda p) \tag{113}$$

但这能成立吗？我们取 $p = k$， $\Lambda = L(q)$，则 $\Lambda p = L(q)k = q$，小群 $W(\Lambda,p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) = L^{-1}(q)L(q)L(k) = L(k) = I$，故 $\theta(\Lambda,p) = 0$. 从而

$$\varepsilon^{(\sigma)\mu}(q) = \Lambda^\mu_\nu\varepsilon^{(\sigma)\nu}(k) = L(q)^\mu_\nu\varepsilon^{(\sigma)\nu}(k) \tag{114}$$

特比地，如果我们取 Λ 为小群变换，比如 $R(\theta)$ 或者 $S(\alpha,\beta)$，则它们对应的 $\theta(\Lambda,p)$ 是 θ 或 0. 从而

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(\sigma)\mu}(k)e^{\mathrm{i}\sigma\theta} &= R(\theta)^\mu_\nu\varepsilon^{(\sigma)\nu}(k) \\
\varepsilon^{(\sigma)\mu}(k) &= S(\alpha,\beta)\varepsilon^{(\sigma)\nu}(k)
\end{aligned} \tag{115}$$

代入 $\varepsilon^{(\pm1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,\pm\mathrm{i},0)$ 会发现

$$R(\theta)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\\pm\mathrm{i}\\0\end{pmatrix} = e^{\pm\theta}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\\pm\mathrm{i}\\0\end{pmatrix} \tag{116}$$

而

$$S(\alpha,\beta)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\\pm\mathrm{i}\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\alpha\pm\mathrm{i}\beta\\1\\\pm\mathrm{i}\\\alpha\pm\mathrm{i}\beta\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\\pm\mathrm{i}\\0\end{pmatrix} + (\alpha\pm\mathrm{i}\beta)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right] \tag{117}$$

出现了冗余项. 一般地

$$W(\theta,\alpha,\beta)^{\mu}_{\nu}\varepsilon^{(\pm1)\nu}(k)=S(\alpha,\beta)^{\mu}_{\lambda}R(\theta)^{\lambda}_{\nu}\varepsilon^{(\pm1)\nu}(k)=e^{\pm\mathrm{i}\theta}\left[\varepsilon^{(\pm1)\mu}(k)+\frac{\alpha\pm\mathrm{i}\beta}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|}k^{\mu}\right]\tag{118}$$

这个结果极其重要. 小群的平移变换 $S(\alpha,\beta)$ 并没有改变物理态（因为 A 和 B 作用在态上给出 0），但它改变了描述这个态的场 A_μ 的极化矢量. 这种改变是加上一个与光子的四动量 k^μ 成正比的项. 在坐标空间中，这正好对应于给四势 A_μ 加上一个四维梯度 $\partial_\mu\Lambda$，即规范变换.

3 完整的引力理论

自旋-2 的无质量粒子的理论是规范不变的，可以取定 Lorenz 规范

$$\partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu}=0\tag{119}$$

在此规范下运动方程为

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu}=-\frac{\kappa}{2}T_{\mu\nu}\tag{120}$$

由此可见物质的能动张量满足守恒定律 $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$. 但是这只有当我们把 $T^{\mu\nu}$ 看成给定的外场，也就是忽略引力自身的贡献时才成立. 一旦我们考虑动力学的物质场，就一定会有物质和物质场之间的能量交换. 守恒的不是物质的能动张量本身，而是物质和引力场总的能动张量. 应当作替换

$$T_{\mu\nu}\longrightarrow T_{\mu\nu}+t^{(2)}_{\mu\nu}\tag{121}$$

$t^{(2)}_{\mu\nu}$ 是用 Noether 定理从 Pauli-Fierz 作用量算出的引力子的能动张量，它应当是 h 的二次项，呈 $\partial h\partial h$ 形式，上标 (2) 就是为了提醒这一点. 此时运动方程应该改写为

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu}=-\frac{\kappa}{2}(T_{\mu\nu}+t^{(2)}_{\mu\nu})\tag{122}$$

规范条件自动保证守恒定律

$$\partial^\mu(T_{\mu\nu}+t^{(2)}_{\mu\nu})=0\tag{123}$$

如今运动方程(122)中有 $-\frac{\kappa}{2}t^{(2)}_{\mu\nu}$，这是 $h_{\mu\nu}$ 的二次项，同时正比于 κ，所以我们必须在作用量里加上一个正比于 κ 的 $h_{\mu\nu}$ 的三次项. 形式上，应当是

$$S_3=\frac{\kappa}{2}\int\mathrm{d}^4x\,h_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}(\partial h)\tag{124}$$

其中 $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 具有如下形式

$$\mathcal{S}^{\mu\nu}(\partial h)=A^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\rho h_{\alpha\beta}\partial_\sigma h_{\gamma\delta}\tag{125}$$

$A^{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\rho h_{\alpha\beta}\partial_\sigma$ 是一大堆平直时空度规的乘积. 从而，物质和引力场总的作用量为

$$S=\int\mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{2}\partial_\rho h_{\mu\nu}\partial^\rho h^{\mu\nu}+\frac{1}{4}\partial^\mu h\partial_\mu h+\frac{\kappa}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}+\frac{\kappa}{2}h_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}(\partial h)\right]\tag{126}$$

$\mathcal{S}^{\mu\nu}$ 和 $t^{(2)}_{\mu\nu}$ 并不一样，引力场与物质耦合的能动张量，和引力场与自己耦合的能动张量是不同的. 也就是说，引力波能动张量和物质能动张量的地位在运动方程中才是相同的，在作用量中并不相同.

作用量中出现立方项，意味着引力子和自己是非线性耦合的. 把引力与电动力学和 Yang-Mills 理论比较是很有益的. 电动力学中，光子只负责传递相互作用，自己不带电荷，因此它不会和自己耦合，对电流也没贡献. Yang-Mills 理论中，规范玻色子会携带规范群对应的荷（比如在 QCD 中就是色荷），从而与自己有非线性耦合. 对引力是相似的，承当流的是能动张量，引力与自己的能动张量是耦合的. 为了更清楚地看到立方

阶的引力理论与非 Abel 规范理论的相似性，我们证明(126)在规范变换(62)下

$$\begin{aligned}\delta \int d^4x\, \frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} &= \kappa \int d^4x\, (\partial_\mu \xi_\nu) T^{\mu\nu} \\ &= -\kappa \int d^4x\, \xi_\nu\, \partial_\mu T^{\mu\nu} \\ &= +\kappa \int d^4x\, \xi_\nu\, \partial_\mu t^{\mu\nu(2)} \\ &= -\kappa \int d^4x\, (\partial_\mu \xi_\nu)\, t^{\mu\nu(2)} \,.\end{aligned} \tag{127}$$

然而，我们已经看到，局域规范不变性的存在对于消除 $h_{\mu\nu}$ 中的冗余自由度至关重要，我们不能在 κ 的高阶项中失去它. 为了补救这一点，可以观察到这个额外项可以在 $O(\kappa)$ 阶被抵消，方法是将线性规范变换 (62) 提升为如下形式的非线性变换

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) + \kappa O(h\partial\xi)\,. \tag{128}$$

于是，引力子动能项的变换会产生一个 $O(\kappa)$ 阶的项，并且可以选择 $O(h\partial\xi)$ 项的张量结构，使其抵消来自等式 (127) 的额外项. 因此，等式 (62)仅在无穷小水平上是理论的规范对称性，而在有限水平上会出现非线性规范变换，正如非 Abel 规范理论中的情况一样.

很明显，迭代过程不会止步于此，无论是作用量还是规范变换都不会. 一旦我们在作用量中加入三次于 $h_{\mu\nu}$ 且正比于 κ 的项 S_3，这会通过 Noether 定理对引力子的能量-动量张量产生一个贡献，该贡献再次三次于 $h_{\mu\nu}$ 且正比于 κ. 我们发现显式写出 κ 的幂次是有用的，因此将其记为 $\kappa^{(3)}_{\mu\nu}$. 应用 Noether 定理，现在得到：

$$\partial^\mu (T_{\mu\nu} + t^{(2)}_{\mu\nu} + \kappa t^{(3)}_{\mu\nu}) = 0\,. \tag{129}$$

因此，与 $\partial^\mu \tilde{h}_{\mu\nu} = 0$ 的一致性现在要求

$$\Box \tilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2}(T_{\mu\nu} + t^{(2)}_{\mu\nu} + \kappa\, t^{(3)}_{\mu\nu})\,. \tag{130}$$

进而，生成此运动方程的作用量（它有一个三次于 $h_{\mu\nu}$ 且正比于 κ^2 的项）必须包含一个额外的四次于 $h_{\mu\nu}$ 且正比于 κ^2 的项，因此其相关的能量-动量张量也有一个进一步的四次于场且正比于 κ^2 的项，我们将其记为 $\kappa^2 t^{(4)}_{\mu\nu}$，于是有：

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2}(T_{\mu\nu} + t^{(2)}_{\mu\nu} + \kappa\, t^{(3)}_{\mu\nu} + \kappa^2 t^{(4)}_{\mu\nu} + \ldots)\,, \tag{131}$$

其中省略号表示迭代持续到所有阶次. 我们看到了爱因斯坦引力中典型的完全非线性结构，包含任意高次幂的 $h_{\mu\nu}$，以及一个非线性规范不变性. 广义相对论可以“自下而上”地推断出来. 然而，这种重构过程的某些方面并非唯一. 特别地，完整的爱因斯坦作用量包含一个边界项，因为它可以写为：

$$S_E = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x\, \sqrt{-g}\, R = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x\, \left[\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_2 - \partial_\mu K^\mu\right]\,, \tag{132}$$

其中

$$\mathcal{L}_2 = g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\right) \tag{133}$$

是度规一阶导数的二次项，且

$$K^\mu = \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\alpha\nu} - g^{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right)\,. \tag{134}$$

后一项是全散度，因此不影响运动方程. 然而，边界项在量子理论中是相关的，特别是等式 (132) 中的边界项在半经典量子引力中变得物理相关，与黑洞热力学相关联. 很明显，边界项超出了从 Pauli-Fierz 作用量开始的迭代过程所能达到的范围，因为在该过程的每个阶段，我们都存在与丢弃边界项的可能性相关的模糊性.