Exact enumeration of satisable 2-SAT formulae 阅读笔记

12312608 熊子豪

目录

1 前言

对于很多图计数问题，传统方法不免在系数层面上操作。高中时期我偶然阅读了 [1]，其中提到了对 symbolic method 进行一些扩展，引入 GGF 和箭积，使得诸如 DAG 计数的问题直接在 GF 的层面上得到解决。我觉得这是一个很优美的思路，值得学习。

而最近我为这次 project 搜索资料时，发现这两位作者使用之前同样的思路，优雅地解决了可满足 2-SAT 的计数这样一个很有实际意义的问题，这激发了我的兴趣。本文是 [2] 的阅读笔记，对其主要的思路进行了整理。

2 2-CNF、蕴图与可满足性

这一节主要给出 2-CNF 问题的定义，以及给出可满足的 2-CNF 的经典特征。

2.1 定义与符号说明

若无特殊说明，我们用 $\wedge, \vee, \rightarrow$ 表示析取、合取与蕴涵，用 $\neg x$ 或 $\overline{x}$ 来表示 x 的否定。

Definition 2.1 (CNF)**.** *定义布尔变量 x 的 literals 为 x 及其否定 $\overline{x}$。n 个变量上的 Conjunctive Normal Form (CNF) 是一组子句的合取，其中每个子句都是不同变量的 literals 的析取。*

Definition 2.2 (2-SAT 与可满足性)**.** *2-CNF（或 2-SAT 公式）是每个子句恰好包含两个不同的 literals 的 CNF。如果存在一种布尔值分配，使得 CNF 每个子句都被满足，则称该 CNF 是可满足的。*

Definition 2.3 (蕴图)**.** *对于 n 个变量(不妨为 $1, 2, \ldots, n$)、m 个子句的 2-CNF,定义其蕴图 (Implication digraph) 为 $2n$ 个结点与 $2m$ 条边的简单有向图，结点的标号为 $1, \overline{1}, 2, \overline{2}, \ldots, n, \overline{n}$。CNF 中的每个子句 (x, y) 对应着蕴图中的两条边 $(\overline{x}, y)$ 与 $(\overline{y}, x)$。*

容易发现 2-CNF 与蕴图是双射关系，所以对于 2-CNF 的计数在后文会转为对可解的蕴图的计数。

Definition 2.4 (矛盾 SCC 与普通 SCC)**.** *若蕴图中存在从 x 到 $\overline{x}$ 与从 $\overline{x}$ 到 x 的路径，则称 x 是矛盾变量。在蕴图中，若 SCC 包含至少一个矛盾变量，则称其矛盾 SCC，否则称其普通 SCC。*

关于 SCC 的定义课上有提及，这里略去。

Definition 2.5 (类源、类汇与孤立 SCC)**.** *称一个 SCC 是类源 (source-like) 的当且仅当不存在从该 SCC 外结点连向该 SCC 内结点的边；称其是类汇 (sink-like) 的当且仅当不存在从其内部结点连向其外结点的边。若其既类源也类汇，则称其是孤立 (isolated) 的。*

Definition 2.6 (否定图)**.** *考虑蕴图中的某个子图 D，定义 D 的否定 $\overline{D}$ 为标号为 D 否定标号且反转边的方向得到的新的图。形式化地，若 D 中存在 (x, y)，则 $\overline{D}$ 中存在 $(\overline{y}, \overline{x})$。*

由蕴图定义，$\overline{D}$ 仍是该蕴图的子图。

2.2 2-CNF 的性质

Proposition 2.7 (矛盾 SCC 性质)**.** *令 C 为矛盾 SCC，则：*

1. C 中所有变量皆为矛盾变量；

2. 若 C 是类源或类汇的，则它是孤立的；

3. 任意两矛盾 SCC 间不存在简单路径。

Proof. 令 $x \rightsquigarrow y$ 表示存在一条从 x 到 y 的路径。

对于第一条性质：若 C 是矛盾 SCC，根据定义其包含至少一个矛盾变量，不妨为 x。令 k 为 C 中除 x 外的另一个变量，则 $x \rightsquigarrow k, \overline{x} \rightsquigarrow k$。由于边的对称性，$\overline{k} \rightsquigarrow x, \overline{k} \rightsquigarrow \overline{x}$。又由于 $x \rightsquigarrow \overline{x}, \overline{x} \rightsquigarrow x$，拼接起来即可得到 $k \rightsquigarrow \overline{k}, \overline{k} \rightsquigarrow k$，所以 k 是矛盾变量。

对于第二条性质：不妨 C 类源，假设存在 $x \in C, y \notin C, x \rightsquigarrow y$，则 $\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}$。由第一条性质可知，$\overline{x} \in C, \overline{y} \notin C$，这与 C 类源是矛盾的，所以 C 是孤立的。类汇同理，略。

对于第三条性质：反证易证，略。

Proposition 2.8 (普通 SCC 性质)**.** *令 C 是普通 SCC，则：*

1. $\overline{C}$ 与 C 无交；

2. 若 C 是类源的，则 $\overline{C}$ 是类汇的。

Proof. 第一条性质容易证明：若有交，则 C 存在矛盾变量。

对于第二条性质：若 $\overline{C}$ 不是类汇的，则存在 $x \notin \overline{C}, y \in \overline{C}, x \rightsquigarrow y$。由边的对称性，$\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}$，而注意到 $\overline{y} \in C, \overline{x} \notin C$，这与 C 类源是矛盾的，所以 $\overline{C}$ 是类汇的。

Proposition 2.9 (可满足性判定)**.** *2-CNF 是可满足的当且仅当其蕴图不存在矛盾变量。*

Proof. 归纳证明，不妨包含更少变量的 2-CNF 此结论都成立。

- 必要性：反证易证，略。
- 充分性：蕴图一定包含至少一个类源 SCC，记作 C。由于其不存在矛盾变量，则 C 是普通的。由 Proposition 1.2 可知 $\overline{C}$ 与 C 无交，且是类汇的。令 $\overline{C}$ 全部为真，C 全部为假，而后删除这两个子图中的所有变量，此时删除的蕴涵关系只有 $\text{False} \rightarrow x$ 与 $x \rightarrow \text{True}$ 的形式，都是永真的。而删除后的图是一个包含更少变量的 2-CNF 问题，所以结论是成立的。

3 GGF 与箭积

关于 OGF 的定义与应用，在课上有所提及，这里略去。

3.1 EGF 与 GGF 的定义

若无特殊说明，下文全部用 z 刻画点数，w 刻画边数。

Definition 3.1 (EGF 与 GGF)**.** *$\mathcal{A}$ 是一个有标号有向图族。令 $a_n(w)$ 表示 $\mathcal{A}$ 中，n 个顶点的图的 OGF。定义级数序列 $(a_n(w))_{n=0}^{\infty}$ 的指数生成函数 (Exponential GF) $\mathrm{A}(z,w)$ 和图论生成函数 (Graphic GF) $\mathbf{A}(z,w)$ 为：*

$$\mathrm{A}(z,w)=\sum_{n\geq 0}a_n(w)\frac{z^n}{n!},\quad \mathbf{A}(z,w)=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n(w)}{(1+w)^{\binom{n}{2}}}\frac{z^n}{n!}$$

二者使用粗体进行区分。英文语境下 graph 特指无向图，而有向图是 digraph 或 directed graph，所以 GGF 名字中的“graphic”可能有误导。我们一般用 EGF 对无向图计数，而用 GGF 对有向图计数，但出于历史原因我们仍采用这个名字。

Lemma 3.2. 令 $G(z,w)$ 表示全体有标号简单无向图的 *EGF*，$\mathbf{D}(z,w)$ 表示全体有标号简单有向图 *GGF*，$\mathbf{Set}(z,w)$ 表示全体没有边的有标号图的 *GGF*。

$$\mathrm{G}(z,w)=\mathbf{D}(z,w)=\sum_{n\geq 0}(1+w)^{\binom{n}{2}}\frac{z^n}{n!}$$

$$\mathbf{Set}(z,w)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(1+w)^{\binom{n}{2}}}\frac{z^n}{n!}$$

Proof. trivial.

3.2 组合运算

对于 symbolic method 相关理论，这里省略标号系统以及一些其他概念的定义。

Proposition 3.3 (不交并)**.** 对于有标号简单有向图族 $\mathcal{A},\mathcal{B}$，其不交并的 *EGF*、*GGF* 为 $\mathrm{A}(z,w)+\mathrm{B}(z,w)$ 与 $\mathbf{A}(z,w)+\mathbf{B}(z,w)$。

Proof. trivial.

Proposition 3.4 (有标号积)**.** 对于有标号简单有向图族 $\mathcal{A},\mathcal{B}$，其有标号积（仅重新分配标号，不连边）的 *EGF* 为 $\mathrm{A}(z,w)\mathrm{B}(z,w)$。

Proof. trivial.

Definition 3.5 (箭积, arrow product)**.** 对于有标号简单有向图族 $\mathcal{A},\mathcal{B}$，定义 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 的箭积由其有标号积中的所有重标号的有序二元组 (A,B) 组成，且对每个 A 中的顶点，都向 B 中任一顶点子集连边。

Proposition 3.6. 有标号简单有向图族 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 箭积的 *GGF* 为 $\mathbf{A}(z,w)\mathbf{B}(z,w)$。

Proof. 不妨其箭积为 $\mathcal{C}$。令 $a_n(w),b_n(w),c_n(w)$ 为族 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ 中 n 个结点的图的 OGF，$\mathbf{A}(z,w),\mathbf{B}(z,w),\mathbf{C}(z,w)$ 为其 GGF。则根据箭积的定义，存在如下关系：

$$c_n(w)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1+w)^{i(n-i)}a_i(w)b_{n-i}(w)$$

代入 GGF：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}(z,w) &= \sum_{n\geq 0}\frac{c_n(w)}{(1+w)^{\binom{n}{2}}}\frac{z^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1+w)^{i(n-i)-\binom{n}{2}}a_i(w)b_{n-i}(w)\frac{z^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{a_i(w)}{(1+w)^{\binom{i}{2}}}\frac{z^i}{i!}\right)\left(\frac{b_{n-i}(w)}{(1+w)^{\binom{n-i}{2}}}\frac{z^{n-i}}{(n-i)!}\right)\\
&= \mathbf{A}(z,w)\mathbf{B}(z,w)
\end{aligned}
$$

这样就完成了证明。

但此时 EGF 和 GGF 符号化构造没有统一，我们还需要定义指数 Hadamard 积。

Definition 3.7 (指数 Hadamard 积). 对于两个形式幂级数 $A(z)$ 与 $B(z)$：

$$
\mathrm{A}(z)=\sum_{n\geq 0}a_n\frac{z^n}{n!},\quad \mathrm{B}(z)=\sum_{n\geq 0}b_n\frac{z^n}{n!}
$$

定义其关于 z 的指数 *Hadamard* 积 $\mathrm{A}(z)\odot_z\mathrm{B}(z)$ 为：

$$
\mathrm{A}(z)\odot_z\mathrm{B}(z)=\sum_{n\geq 0}a_nb_n\frac{z^n}{n!}
$$

Proposition 3.8. 族 $\mathcal{A}$ 的 *EGF,GGF* 分别为 $\mathrm{A}(z,w),\mathbf{A}(z,w)$，则：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(z,w) &= \mathrm{A}(z,w)\odot\mathbf{Set}(z,w)\\
\mathrm{A}(z,w) &= \mathbf{A}(z,w)\odot\mathrm{G}(z,w)
\end{aligned}
$$

Proof. trivial.

Proposition 3.9. 对于任何实数 α 与形式幂级数 $A(z),B(z)$，有：

$$
A(\alpha z)\odot B(z)=A(z)\odot B(\alpha z)
$$

Proof. trivial.

4 DAG 与 SCC 计数

简单描述一下传统的方法：在 DAG 的基础上去除一个源点的子集得到一个规模更小的 DAG，这一步使用容斥原理解决，这样就可以写出递推式，而后将其改写为 EGF 形式即可。这个方法不多做说明，我们主要介绍如何应用上面的理论。

首先容易想到使用点集与任意 DAG 做箭积，得到的是源点被二染色的 DAG，这是可以通过增设一元刻画源点来表示的。

Lemma 4.1. 令 $\mathbf{DAG}(z,w,u)$ 表示标记源点的 *DAG* 的 *GGF*，其中 u 刻画源点。则：

$$
\mathbf{Set}(zu,w)\mathbf{DAG}(z,w,1)=\mathbf{DAG}(z,w,u+1)
$$

Proof. 从左到右的单射证明是显然的；考虑箭积中的二元组，使被 u 标记的源点来自点集而不被标记的源点来自 DAG，则从右到左也是单射。所以左右两边是双射。

Theorem 4.2. 令 $\mathbf{DAG}(z,w)$ 表示 *DAG* 的 *GGF*，则：

$$\mathbf{DAG}(z,w)=\frac{1}{\mathbf{Set}(-z,w)}$$

Proof. 注意到 $\mathbf{DAG}(z,w,0)=1$，代入 $u=-1$ 至 Lemma 3.1 立得。实际上代入 $u=-1$ 的过程就是对应传统方法的容斥，但是直接使用 GF 去叙述简洁太多。

Theorem 4.3. 令 $\mathrm{SCC}(z,w)$ 表示强连通图的 *EGF*，则：

$$\mathrm{SCC}(z,w)=-\ln\left(\mathrm{G}(z,w)\odot\frac{1}{\mathbf{D}(z,w)}\right)$$

Proof. 注意到任意有向图都可以分解为由 SCC 组成的 DAG，这部分其实是 trivial 的。

简单描述一下过程：原先的点集对应 SCC 带标号积的生成集合，也就是 $e^{u\,\mathrm{SCC}(z,w)}$。我们同理定义 $\mathbf{D}(z,w,u+1)$ 并与 Theorem 4.2 相似地去证明。

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(z,w,u+1)&=\left(\mathbf{Set}(z,w)\odot e^{u\,\mathrm{SCC}(z,w)}\right)\mathbf{D}(z,w)\\1&=\left(\mathbf{Set}(z,w)\odot e^{-\,\mathrm{SCC}(z,w)}\right)\mathbf{D}(z,w)\\\mathrm{SCC}(z,w)&=-\ln\left(\mathrm{G}(z,w)\odot\frac{1}{\mathbf{D}(z,w)}\right)\end{aligned}$$

5 IGF 与蕴积

5.1 IGF 的定义

Definition 5.1 (蕴涵生成函数, Implication GF, IGF)**.** $\mathcal{B}$ 是一个蕴图族。令 $b_n(w)$ 表示 $\mathcal{B}$ 中，$2n$ 个顶点的图的 *OGF*，此时 w 刻画边数的一半。定义级数序列 $(b_n(w))_{n=0}^{\infty}$ 的蕴涵生成函数 *(Implication GF)* $\ddot{\mathbf{B}}(z,w)$ 为：

$$\ddot{\mathbf{B}}(z,w)=\sum_{n\ge 0}\frac{b_n(w)}{(1+w)^{n(n-1)}}\frac{z^n}{2^n n!}$$

与 GGF 用两个点进行区分。

Lemma 5.2. 令 $\ddot{\mathbf{Set}}(z,w)$ 表示没有边的蕴图的 *IGF*，则：

$$\ddot{\mathbf{Set}}(z,w)=\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(1+w)^{n(n-1)}}\frac{z^n}{2^n n!}$$

Proof. trivial.

5.2 组合运算

Proposition 5.3 (不交并)**.** 对于有标号蕴图族 $\mathcal{A},\mathcal{B}$，其不交并的 *IGF* 为 $\ddot{\mathbf{A}}(z,w)+\ddot{\mathbf{B}}(z,w)$。

Proof. trivial.

Definition 5.4 (蕴积, implication product)**.** *定义有标号简单有向图族 $\mathcal{A}$ 与有标号蕴图族 $\mathcal{B}$ 的蕴积，其包含以以下方式生成的蕴图：*

1. *任取有标号图 $A \in \mathcal{A}$ 与蕴图 $B \in \mathcal{B}$，不妨 A, B 有 $n, 2m$ 个结点；*
2. *从 $\{1, 2, \ldots, n+m\}$ 重分配标号（仅作数字的重分配，取反标记不变）；*
3. *选取 A 的任意一个子集打取反标记，而后将 A 复制一份并全体取反，记作 A'；*
4. *对于 A 中每个结点 x，都向 B 中任意子集连边。若连接了 $x \to y$，则必须同时连接 $\bar{y} \to \bar{x}$（其中 $\bar{x} \in A'$）。*
5. *A 向 A' 任意连边，但不能连 $(x, \bar{x})$。若连接了 $x \to y$，则必须同时连接 $\bar{y} \to \bar{x}$。*

Proposition 5.5. *有标号简单有向图族 $\mathcal{A}$ 与有标号蕴图族 $\mathcal{B}$ 的箭积的 IGF 为 $\mathbf{A}(z, w) \cdot \ddot{\mathbf{B}}(z, w)$。*

Proof. 先讨论上述过程中每一步的方案数：第二步 $\binom{n+m}{n}$ 种方案，第三步选取子集 2^n 种，第四步左边 $2m$ 右边 n 一共 $(1+w)^{2mn}$，第五步注意到 $\bar{y} \in A$ 所以相当于边已被两两配对，所以是 $(1+w)^{\binom{n}{2}}$。

令 $\ddot{\mathbf{C}}(z, w)$ 为其箭积的 IGF，令 $a_n(w), b_n(w), c_n(w)$ 为族 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 中 n 个结点的图的 OGF。

$$\begin{aligned}
c_n(w) &= \sum_{i=0} \binom{n}{i} 2^i (1+w)^{2i(n-i)+\binom{i}{2}} a_i(w) b_{n-i}(w) \\
&= \sum_{i=0} \binom{n}{i} 2^n (1+w)^{n(n-i)+n(i-1)} \frac{a_i(w)}{(1+w)^{\binom{i}{2}}} \cdot \frac{1}{(1+w)^{(n-i)(n-i-1)}} \frac{b_{n-i}(w)}{2^{n-i}} \\
\frac{c_n(w)}{n! 2^n (1+w)^{n(n-1)}} &= \sum_{i=0} \frac{a_i(w)}{(1+w)^{\binom{i}{2}} i!} \cdot \frac{1}{(1+w)^{(n-i)(n-i-1)}} \frac{b_{n-i}(w)}{2^{n-i}(n-i)!} \\
[z^n]\ddot{\mathbf{C}}(z, w) &= \sum_{i=0} [z^i]\mathbf{A}(z, w) \cdot [z^{n-i}]\ddot{\mathbf{B}}(z, w) \\
\ddot{\mathbf{C}}(z, w) &= \mathbf{A}(z, w) \cdot \ddot{\mathbf{B}}(z, w)
\end{aligned}$$

Proposition 5.6. *族 $\mathcal{A}$ 的 EGF,IGF 分别为 $\mathrm{A}(z, w), \ddot{\mathbf{A}}(z, w)$，则：*

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{A}}(z, w) &= A(z, w) \odot \ddot{\mathbf{Set}}(z, w) \\
A(z, w) &= \ddot{\mathbf{A}}(z, w) \odot D(2z, w)
\end{aligned}$$

Proof. trivial.

6 可满足的 2-SAT 问题的计数

既然所有 SCC 都是普通 SCC，首先我们有一个初步的想法，模仿 DAG 计数那样将类源 SCC 黑白染色，合并的时候拿一个 SCC 做蕴积。但这样我们就遇到了一个问题：孤立的普通 SCC 显然应该成对产出，但是我们原先的染色方案会任意对二者染色，由此双射就无法形成。

修正以下我们所套用的的方案，我们需要多引入一个元来刻画对于孤立 SCC 的处理。

Lemma 6.1. *仅由两个普通 SCC 组成且两 SCC 一黑一白的有色蕴图的 EGF 为 $\mathrm{SCC}(2z, w)$。*

Proof. 考虑黑色的 SCC，如果默认所有编号不带取反标记，那么生成该 SCC 时每个点编号是否取反有两种选择，故为 $\mathrm{SCC}(2z, w)$。

Theorem 6.2. *令 $\mathrm{SAT}(z, w, u, v)$ 表示全体可满足的 2-CNF 的蕴图的 EGF，其中 u 刻画非隔离的类源普通 SCC，v 刻画隔离普通 SCC 对（隔离普通 SCC 数量的一半）；$\ddot{\mathbf{SAT}}(z, w)$ 表示全体可满足的 2-CNF 的蕴图的 GGF。有：*

$$\mathrm{SAT}(z, w, u+1, 2u+2v+1) = \left(\left(\left(e^{u\,\mathrm{SCC}(z,w)} \odot \mathbf{Set}(z, w)\right) \ddot{\mathbf{SAT}}(z, w)\right) \odot D(2z, w)\right) e^{v\,\mathrm{SCC}(2z,w)}$$

Proof. 令族 $\mathcal{F}$ 包含满足以下条件的有色蕴图：

- 一开始所有点皆为无色。
- 对于非隔离类源普通 SCC，挑选出一个子集，并染成黑色；
- 隔离普通 SCC 是成对出现的。挑选出所有隔离普通 SCC 对的一个子集 T，对于 T 的每个 SCC 对，将其中之一染成黑或白色。

根据定义，不加证明地指出 $\mathcal{F}$ 的 EGF 是 $\mathrm{SAT}(z, w, u+1, 2u+2v+1)$，接下来说明右式的含义。

考虑 $\mathcal{F}$ 的生成方式，无色点的 IGF 为 $\ddot{\mathbf{SAT}}(z, w, 1, 1)$，它需要先跟一块黑点做蕴积，再跟一块白点做带标号积。

- 黑点是普通 SCC 做带标号积的生成集合，其 EGF 为 $e^{u\,\mathrm{SCC}(z,w)}$，GGF 为 $e^{u\,\mathrm{SCC}(z,w)} \odot \mathbf{Set}(z, w)$。
- 白点是普通 SCC 对做带标号积的生成集合，根据 Lemma 5.1，EGF 为 $e^{v\,\mathrm{SCC}(2z,w)}$。

所以 $\mathcal{F}$ 的 EGF 也等于右式。

Lemma 6.3. $\mathrm{SAT}(z, w, 0, v) = e^{v\,\mathrm{SCC}(2z,w)/2}$.

Proof. $\mathrm{SAT}(z, w, 0, v)$ 的意义是不存在非孤立普通 SCC 的可满足的 2-CNF 问题的蕴图的 EGF，即无序的普通 SCC 二元组做带标号积的生成集合。

Theorem 6.4. *令 $\ddot{\mathbf{SAT}}(z, w)$ 表示全体可满足的 2-CNF 的蕴图的 GGF，则：*

$$\ddot{\mathbf{SAT}}(z, w) = \left(\sqrt{\mathrm{G}(z, w) \odot \frac{1}{G(z, w)}} \odot \ddot{\mathbf{Set}}(2z, w)\right) G(z, w)$$

Proof. 将 $u = -1$ 代入 Lemma 6.2，并对左式应用 Lemma 6.3：

$$e^{(2v-1)\,\mathrm{SCC}(2z,w)/2} = \left(\left(\left(e^{-\,\mathrm{SCC}(z,w)} \odot \mathbf{Set}(z, w)\right) \ddot{\mathbf{SAT}}(z, w)\right) \odot D(2z, w)\right) e^{v\,\mathrm{SCC}(2z,w)}$$

$$e^{-\,\mathrm{SCC}(2z,w)/2} = \left(\left(e^{-\,\mathrm{SCC}(z,w)} \odot \mathbf{Set}(z, w)\right) \ddot{\mathbf{SAT}}(z, w)\right) \odot D(2z, w)$$

$$e^{-\,\mathrm{SCC}(2z,w)/2} \odot \ddot{\mathbf{Set}}(z, w) = \left(e^{-\,\mathrm{SCC}(z,w)} \odot \mathbf{Set}(z, w)\right) \ddot{\mathbf{SAT}}(z, w)$$

$$\ddot{\mathbf{SAT}}(z, w) = \frac{e^{-\,\mathrm{SCC}(2z,w)/2} \odot \ddot{\mathbf{Set}}(z, w)}{e^{-\,\mathrm{SCC}(z,w)} \odot \mathbf{Set}(z, w)}$$

由 Theorem 3.3：

$$\mathrm{SCC}(z,w) = -\ln\left(\mathrm{G}(z,w) \odot \frac{1}{\mathbf{D}(z,w)}\right)$$

$$\begin{aligned} e^{-\,\mathrm{SCC}(z,w)} \odot \mathbf{Set}(z,w) &= \mathrm{G}(z,w) \odot \frac{1}{G(z,w)} \odot \mathbf{Set}(z,w) \\ &= \frac{1}{G(z,w)} \end{aligned}$$

代入并应用 Proposition 3.9：

$$\begin{aligned} \mathbf{S\ddot{A}T}(z,w) &= \left(e^{-\,\mathrm{SCC}(2z,w)/2} \odot \ddot{\mathbf{Set}}(z,w)\right) \cdot G(z,w) \\ &= \left(\sqrt{\mathrm{G}(z,w) \odot \frac{1}{G(z,w)}} \odot \ddot{\mathbf{Set}}(2z,w)\right) \cdot G(z,w) \end{aligned}$$

参考文献

[1] Élie de Panafieu and Sergey Dovgal. Symbolic method and directed graph enumeration. *arXiv preprint arXiv:1903.09454*, 2019.

[2] Sergey Dovgal, Élie de Panafieu, and Vlady Ravelomanana. Exact enumeration of satisfiable 2-sat formulae. *arXiv preprint arXiv:2108.08067*, 2021.