Laboratorio di Calcolo Numerico: Cancellazione numerica e stabilità di algoritmi

Giacomo Elefante

Laboratorio di calcolo numerico
04/05/23

Scopo di oggi

Analizzare la stabilità di algoritmi in Matlab:

- Cancellazione numerica
- Come evitare cancellazione numerica

Cancellazione numerica

L'aritmetica finita del calcolatore può causare errori numerici: per esempio quando si cancellano cifre significative si perde precisione nella rappresentazione del risultato. Tale fenomeno è detto cancellazione numerica. È possibile quantificare gli errori commessi nell'ottenere un valore approssimato $\widetilde{y}$ rispetto ad un valore esatto y attraverso gli errori assoluti e relativi.

$$\text{Errore assoluto: } |\widetilde{y} - y|,$$

$$\text{Errore relativo: } \frac{|\widetilde{y} - y|}{|\widetilde{y}|}.$$

Un'operazione aritmetica si dice stabile quando l'errore sul risultato ha lo stesso ordine di grandezza dell'errore (massimo) sui dati.
La sottrazione $x - y$ può presentare instabilità nel caso in cui $|x|$ e $|y|$ siano vicini in termini relativi, cioè $|x - y| << |x|, |y|$.

Esercizio

Si calcoli il valore dell'espressione

$$f(x) = \frac{(1+x)-1}{x}$$

al variare di x in un piccolo intervallo (per esempio l'intervallo $[-1e-10, 1e-10]$) vicino a zero. Si osservi il fenomeno della cancellazione numerica rispetto al valore vero (che è ovviamente $y = 1$) calcolandone l'errore relativo e facendo dei grafici della funzione e dell'errore relativo al variare di x nell'intervallo.

```
clear all;
clc;

% Creazione di una suddivisione dell'intervallo e quindi
% x: vettore di 2000 nodi equispaziati in [-1e-10,1e-10]
yexact = 1;   %soluzione esatta
x = linspace(-1e-10,1e-10,2000);

% Calcolo y in funzione del vettore x
y = ((1+x)-1)./x;

% Calcolo l'errore relativo
errRel = abs(y-yexact)/abs(yexact);

% Grafico 1
figure(1);
plot(x,y);
title('Valore di f(x)');
xlabel('x');

% Grafico 2
figure(2);
semilogy(x,errRel);
title('Errore relativo');
xlabel('x');
```

Figure: Una possibile soluzione dell'esercizio proposto.

Come evitare cancellazione numerica

Si noti che è la formula ad essere instabile, cioè l'algoritmo, infatti la funzione rappresentata $f(x) \equiv 1$, è perfettamente stabile e potrebbe essere rappresentata stabilmente dalla funzione costantemente uguale a 1.

Esercizio

Dato il polinomio $x^2 + 2px - q$, con $p^2 + q \geq 0$ vogliamo confrontare due algoritmi in Matlab che calcolino la radice positiva ovvero,

$$y = -p + \sqrt{p^2 + q},$$

mediante la valutazione diretta e la riscrittura della radice attraverso razionalizzazione, ovvero

$$\begin{aligned} y &= \left(-p + \sqrt{p^2 + q}\right) \cdot \frac{p + \sqrt{p^2 + q}}{p + \sqrt{p^2 + q}} \\ &= \frac{q}{p + \sqrt{p^2 + q}}. \end{aligned}$$

Per un confronto si utilizzino i valori

p = 4.999999999995 * 10^4 ;

q = 10^{-2};   sol_esatta = 10^{-7}

```
clear all;
clc;

p=4.999999999995*10^4;
q=10^(-2);
sol=10^(-7);

% ALGORITMO 1
s=sqrt(p^2+q);
alg1=-p+s;  % Risultato del primo algoritmo

% ALGORITMO 2
s=sqrt(p^2+q);
v=p+s;
alg2=q/v;   % Risultato del secondo algoritmo

% Soluzione fornita dal primo algoritmo.
fprintf('\n \t [ALG.1]: %10.19f',alg1);

% Soluzione fornita dal secondo algoritmo.
fprintf('\n \t [ALG.2]: %10.19f',alg2);

% Errore relativo del primo algoritmo.
rerr1 =abs(alg1-sol)/abs(sol);
% Errore relativo del secondo algoritmo.
rerr2=abs(alg2-sol)/abs(sol);
% Stampa risultati.
fprintf('\n \t [REL.ERR.ALG.1]: %2.2e',rerr1);
fprintf('\n \t [REL.ERR.ALG.2]: %2.2e',rerr2);

fprintf('\n \n');
```

Figure: Una possibile soluzione dell'esercizio proposto.

Esercizio

Esercizio

Consideriamo la successione

$$S_n = \sqrt{6 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$$

convergente a π per $n \to \infty$. Essa è stabile perché coinvolge solo operazioni stabili, ma ha una convergenza molto lenta. Alternativamente, la successione (di Archimede) definita per ricorrenza

$$x_2 = 2, \qquad x_{n+1} = 2^{n-1/2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - 4^{1-n}x_n^2}}, \; n = 2, 3, \ldots$$

ha una convergenza esponenziale verso π ma la sua formulazione è instabile, per cui è necessario utilizzare la formulazione stabile (ottenuta attraverso razionalizzazione)

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{2}x_n}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4^{1-n}x_n^2}}}, \; n = 2, 3, \ldots.$$

Descrivere il tutto in Matlab, assieme al grafico in scala semilogaritmica degli errori relativi delle tre formulazioni.

```matlab
clear all;
clc;

n  = 1e+2;

% Costruzione con l'uso del ciclo FOR
Sn1(1) = 1;
for i = 2:n
    Sn1(i) = Sn1(i-1) + 1/i^2;
end

% Possibile costruzione senza l'utilizzo del ciclo
Sn2 = cumsum(1./((1:n).^2));

% Approssimazione di Pi
SN1 = sqrt(6*Sn1);
SN2 = sqrt(6*Sn2);

% Errore relativo con Pi
err_relSn1 = abs(SN1-pi)/pi;
err_relSn2 = abs(SN2-pi)/pi;

% Plot della differenza per mostrare che i due costrutti sono uguali avendo
% la differenza sempre valore 0
diff_errZero = err_relSn2 - err_relSn1;
figure;
plot(1:n, diff_errZero)

% Plot in scala logaritmica dell'errore relativo
figure;
semilogy(1:n,err_relSn1,'-.k')
```

```matlab
% Costruzione instabile della sequenza ricorsiva
x(1) = 2;
for i=3:n
    x(i-1) = 2^((i-1)-1/2)*sqrt(1-sqrt(1-4^(1-(i-1))*x(i-2)^2));
end

% Costruzione stabile
y(1) = 2;
for i=3:n
    y(i-1) = sqrt(2)*y(i-2)/sqrt(1+sqrt(1-4^(1-(i-1))*y(i-2)^2));
end

% Calcolo degli errori relativi
err_rel1 = abs(x-pi)/pi;
err_rel2 = abs(y-pi)/pi;

% Plot in scala logaritmica sovrascritti con il precedente
hold on;
semilogy(1:(n-1),err_rel1,'-r')
semilogy(1:(n-1),err_rel2,'--b')
```

Figure: Una possibile soluzione dell'esercizio proposto.

Esercizi (per casa)

Esercizio

Si valutino le espressioni analiticamente equivalenti

$$y_1 = (1-x)^6 \text{ e } y_2 = x^6 - 6x^6 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

in 100 punti equidistanti nell'intervallo $[1-\delta, 1+\delta]$ per $\delta = 0.1, 0.01, 0.005, 0.0025$. Si rappresentino graficamente y_1 e y_2 per ciascun δ assegnato. Quali differenze si notano?

Esercizio

In Matlab si valutino le espressioni analiticamente equivalenti

$$y_1 = \frac{1-\cos(x)}{x^2} \text{ e } y_2 = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}$$

nel punto $x = 1.2e-5$. Quale delle due valutazioni è più corretta?