Laboratorio di Calcolo Numerico: Ricerca di zeri di funzioni

Giacomo Elefante

Laboratorio di calcolo numerico
11/05/23

Scopo di oggi

Analizzare algoritmi per la ricerca di zeri di funzioni in Matlab:

- Bisezione
- Punto fisso
- Newton

Metodo di bisezione

Il metodo di bisezione genera una successione di intervalli $[a_k, b_k]$ con

- $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$
- $[a_k, b_k] \subset [a_{k+1}, b_{k+1}]$
- $|b_k - a_k| = \frac{1}{2}|b_{k-1} - a_{k-1}|$.

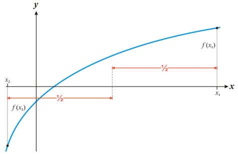

Figure: Bisezione di un intervallo.

Dato $a_{k-1} < b_{k-1}$ e $x_{k-1} = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$, allora il nuovo intervallo $[a_k, b_k]$ è definito come

$$a_k = a_{k-1}, b_k = x_{k-1} \text{ se } f(a_{k-1}) \cdot f(x_{k-1}) < 0,$$
$$a_k = x_{k-1}, b_k = b_{k-1} \text{ se } f(x_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) < 0.$$

Utilizzeremo quindi il residuo non pesato come criterio di arresto

$$|f(x_{k-1})| \leq \mathtt{tol}.$$

Per la convergenza ad una radice è necessario individuare un intervallo $[a, b]$ della funzione f tale che

- $f(a) \cdot f(b) < 0$,
- f sia strettamente monotona in $[a, b]$.

```
function [x,xall,iter] = bisezione(f,a,b,tol,max_iter)
% ----------- Inputs ---------
% f   : funzione (inline) di cui vogliamo lo zero
% a,b : estremi dell'intervallo
% tol : tolleranza
% max_it: numero massimo di iterazioni
%----------- Outputs ---------
% x   : la soluzione
% xall: tutti i punti medi dell'iterazione
% iter: numero d'iterazioni fatte
%--------------------------------
if f(a)*f(b) > 0
   error('Metodo di bisezione non applicabile');
elseif f(a)*f(b) == 0
   error('La funzione e'' zero su uno dei bordi');
end

iter = 1;          % iter = n + 1 (nella lezione di teoria)
x = (a+b)/2;       % punto medio di [a,b]
xall(iter) = x;    % salva il primo punto medio

while (abs(f(x)) > tol) && (iter <  max_iter)  % continua se condizioni soddisfatte

    if f(x) == 0
       return;                             % stop se x e' uno zero
    elseif f(x)*f(a) < 0
       b = x;                              % aggiorna bordo destro b
    elseif f(b)*f(x) < 0
       a = x;                              % aggiorna bordo sinistro a
    end

    iter = iter + 1;
    x = (a+b)/2;                           % aggiorna punto medio
    xall(iter) = x;                        % salva il nuovo punto medio

end
```

Figure: Codice del metodo di bisezione.

Esercizio

Esercizio

Per la funzione $f(x) = \exp(x) - 2 + x$ si trovi un punto $x \in [0, 1]$ tale che $|f(x)| < 10^{-8}$.

- Si crei il grafico della funzione f.
- Si mostri che $f(0)f(1) < 0$ stampando il segno a schermo.
- Si usi il metodo di bisezione per la funzione f e si indichi con `x_all` il vettore comprendente tutte le iterate.
- Dato $x^* = 0.4428544010023885$, si disegni il grafico in scala semilogaritmica dell'errore relativo $|x^* - \texttt{x\_all}|/|x^*|$.

Metodo di punto fisso

L'idea del metodo di punto fisso applicato alla ricerca di zeri di funzione è di riformulare l'equazione $f(x^*) = 0$ in un problema equivalente di punto fisso ovvero

$$f(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = g(x^*)$$

e di calcolare il punto fisso tramite la iterazione

$$x_k = g(x_{k-1}), k \geq 1 \text{ dato } x_0 \text{ un punto iniziale.}$$

Esempio di riformulazione:

$$\cos(x) - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos(x)$$

Convergenza del metodo di punto fisso

La convergenza è garantita nel caso valga il seguente teorema.

Teorema

Se esiste un intervallo $[a, b]$, *tale che*

- $g : [a, b] \to [a, b]$
- $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$ *(g è continuamente differenziabile)*
- $|g'(x)| \leq \gamma < 1, \forall x \in [a, b]$

allora g ha un unico punto fisso x^* *in* $[a, b]$ *e se* $x_0 \in [a, b]$, *allora l'iterazione di punto fisso converge ad* x^* *(almeno) linearmente. Inoltre abbiamo la seguente stima (a priori) dell'errore*

$$|x_k - x^*| \leq \gamma^k |x_0 - x^*|.$$

Altrimenti è possibile usare il risultato locale.

Teorema

Sia $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$ *una funzione con un punto fisso* x^* *e*

$$|g'(x^*)| = \gamma < 1,$$

allora esiste un intorno del punto fisso $I_\delta(x^*) = [x^* - \delta, x^* + \delta] \subset [a, b]$ *tale che* x^* *è l'unico punto fisso di g in* I_δ *e l'iterazione di punto fisso converge per ogni punto iniziale* $x_0 \in I_\delta$.
Inoltre,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = |g'(x^*)| = \gamma.$$

In genere il metodo di punto fisso ha convergenza lineare, tuttavia se le sue derivate

$$g^{(1)}(x^*) = g^{(2)}(x^*) = \cdots = g^{(p-1)}(x^*) = 0, g^{(p)}(x^*) \neq 0$$

allora l'ordine di convergenza è (almeno) p

Definizione

Sia $\{x_k\}$ una successione convergente a x^*. Se esiste $p \geq 1$ e una costante $\gamma > 0$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \gamma,$$

allora si dice che la successione $\{x_k\}$ ha ordine di convergenza p.

```
function [x,xall,iter] = puntofisso(g,x0,tol,max_iter)

% Iterazione di punto fisso per la soluzione di equazioni nonlineari
% Input:
%               g        funzione di cui vogliamo trovare il punto fisso
%               x0       valore iniziale
%               tol      tolleranza per la condizione di arresto
%               max_iter numero massimo di iterazioni
% Output:
%               x        soluzione finale
%               xall     vettore con tutte le iterazioni
%               iter     numero di iterazioni

iter = 1;       % iter corresponde all n della lezione
x = g(x0);                                  % Prima iterazione
xall(iter) = x;

while (abs(x-x0) > tol) && (iter < max_iter)         % ciclo iterativo con condizioni di arresto
  x0 = x;
  x = g(x0);                                  % nuova valutazione di g
  iter = iter + 1;                            % nuovo numero di iterazione
  xall(iter) = x;                             % salva x in xall
end

end
```

Figure: Codice del metodo di punto fisso.

Esercizio

Esercizio

Sia $f(x) = \sin(x) + x - 1$, si trovi quindi la radice x^* di f con il metodo di punto fisso.

- Si crei il grafico della funzione f e dal grafico si trovi un intervallo $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ di lunghezza 1 e contenente lo zero della funzione.
- Si trovi una funzione g tale che il metodo di punto fisso converga per ogni $x_0 \in [a, b]$ alla radice x^*.
- Si crei il grafico della funzione g sovrapposto alla funzione $h(x) = x$ nell'intervallo $[a, b]$ e si scelga un punto x_0 adeguato.
- Si usi il metodo di punto fisso per trovare una approssimazione (usando come tolleranza `tol` $= 10^{-8}$), della radice $x^* = 0.510973429388569$.
- Si faccia il grafico in scala semilogaritmica dell'errore relativo tra tutte le iterate e il valore esatto.

Metodo di Newton

Il metodo di Newton è un metodo di punto fisso con funzione di iterazione

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

per la ricerca dello zero x^* di una funzione f.
Ovvero, l'iterazione è

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

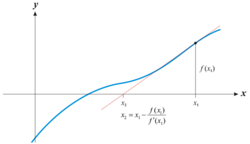

Figure: Interpretazione geometrica dell'iterazione di Newton.

La funzione g ha derivata

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

e essa si annulla nello zero x^*, infatti la convergenza di questo metodo è quadratica, ovvero ha ordine di convergenza $p = 2$ (se $f'(x^*) \neq 0$, ovvero se x^* è uno zero semplice di f).

```
function [x,xall,iter] = newton(f,Df,x0,tol,max_iter)

% Iterazione di Newton per la soluzione di equazioni nonlineari
%
% Input:
%               f        funzione di cui vogliamo trovare lo zero
%               Df       derivata di f
%               x0       valore iniziale
%               tol      tolleranza per la condizione di arresto
%               max_iter numero massimo di iterazioni
% Output:
%               x        soluzione finale
%               xall     vettore con tutte le iterazioni
%               iter     numero di iterazioni

if Df(x0) == 0
   error('Warning: Df(x0) = 0');
end

% Prima iterazione del metodo di Newton
dx = -f(x0)/Df(x0);    % primo incremento
x = x0+dx;             % prima iterata
iter = 1;
xall(iter) = x;

while (abs(dx) > tol) && (iter < max_iter)           % ciclo iterativo
  x0 = x;
  if Df(x0) == 0
      break
  end
  dx = -f(x0)/Df(x0);                                 % nuovo incremento
  x = x0 + dx;                                        % nuova iterazione
  iter = iter + 1;                                    % nuovo numero di iterazione
  xall(iter) = x;
end

end
```

Figure: Codice del metodo di Newton.

Esercizio

Esercizio

Sia $f(x) = \exp(x) - 2 + x$, si trovi la radice x^* di f con il metodo di Newton.

- Si crei il grafico della funzione f nell'intervallo $[-2.2]$.
- Si trovi la radice approssimata di f partendo dal valore iniziale 0 con tolleranza $\texttt{tol} = 10^{-6}$.
- Si calcoli l'errore relativo con lo zero $x^* = 0.442854401002389$.
- Si faccia il grafico in scala semilogaritmica dell'errore relativo tra tutte le iterate e il valore esatto.

Esercizio (per casa)

Esercizio

Si modifichi la funzione `bisezione`, creando una funzione denominata `bisezione2` dove, come criterio di arresto, al posto del residuo non pesato si utilizza il residuo pesato, visto a lezione, ovvero dato il peso

$$w = \left(\frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})} \right),$$

allora le iterazioni si concluderanno se

$$|w \cdot f(x_{k-1})| \leq \mathtt{tol}$$

e si applichi la funzione `bisezione2` alla funzione dell'esercizio precedente, andando a sovrapporre il grafico dell'errore a quello di bisezione con il criterio di arresto sul residuo non pesato.

Esercizio (per casa)

Esercizio

Nel caso x^* sia uno zero multiplo, con molteplicità $m > 1$, il metodo di Newton converge linearmente. Per questo la formula di Newton può essere modificata per garantirci la convergenza almeno quadratica. In particolare, l'iterata modificata diventa

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k}{f'(x_k)}.$$

- Si modifichi la funzione `newton` per creare la funzione `newton_mod` contenente un input aggiuntivo corrispondente alla molteplicità dello zero della funzione f e che utilizzi l'iterata modificata.
- Applicare in seguito sia Newton che Newton modificato alla funzione $f(x) = \log(x+2)^2$ per trovare lo zero partendo da $x_0 = 0$ e con $\texttt{tol} = 10^{-8}$ e fare il grafico in scala semilogaritmica degli errori assoluti tra le iterate e lo zero della funzione f, sovrapponendo gli errori di Newton e quelli di Newton modificato.

Esercizio (per casa)

Esercizio

Si modifichi la funzione `newton` per creare una nuova function `secante`, sostituendo la derivata $f'(x_k)$ nella funzione di iterazione del metodo di Newton con il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

E si testi la function creata per trovare lo zero della funzione descritta nell'esercizio sul metodo di Newton, paragonando poi i due metodi