

# Laboratorio di Calcolo Numerico: Interpolazione e approssimazione di funzioni

Giacomo Elefante

Laboratorio di calcolo numerico  
16/05/23

# Scopo di oggi

Analizzare algoritmi per l'interpolazione e approssimazione di dati e funzioni:

- Problema di interpolazione
- Interpolazione su nodi equispaziati
- Interpolazione su nodi di Chebyshev

# Problema di interpolazione

Dato  $\mathbb{P}_n$  lo spazio dei polinomi di gradi al più  $n$ , ovvero i polinomi del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

con  $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$  allora il problema di interpolazione, ovvero trovare una funzione  $p(x)$  che dati  $n + 1$  coppie  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  soddisfa alla relazione

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

ha una soluzione con  $p(x) \in \mathbb{P}_n$  ed è unica.

# Problema di interpolazione

In particolare, il polinomio si può costruire utilizzando le basi di Lagrange  $\ell_i(x)$ , ovvero

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

definendo il polinomio come

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \ell_i(x) y_i,$$

poiché i polinomi di Lagrange sono tali che

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

# Esercizio

## Esercizio

Il polinomio di Lagrange può essere utile da generare, anche se in Matlab esistono comandi più immediati per generare il polinomio di interpolazione. A tal proposito si chiede di creare una function matlab che dati dei nodi, dei punti e l'indice  $i$ -esimo mi valuti il polinomio  $\ell_i$  di Lagrange su tali punti. Per fare ciò si generi la funzione `lagrai_target` che prende i seguenti input

- $z$ : vettore di nodi (riga) di interpolazione
- $x$ : vettore di punti (colonna) di valutazione del polinomio
- $i$ : indice indicante il polinomio da generare considerando però i nodi ordinati da 1 a  $n + 1$  (e non da 0 a  $n$ ).

e che restituisca come output il vettore (colonna)  $I$  delle valutazioni di  $\ell_i$  sui punti  $x$ .

Per creare la function possono essere utili i comandi `repmat` e `prod` di Matlab.

# Interpolazione su Matlab

Su Matlab, gli  $n + 1$  coefficienti  $a_i$ , possono essere trovati attraverso facilmente con il comando `polyfit`, infatti date delle coppie di dati  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ , `polyfit` può generare i coefficienti del polinomio interpolatorio tra questi punti.

In seguito per valutare un polinomio su dei punti, dati i coefficienti, è utile il comando `polyval`.

```

function t=interpol(x,y,s)
% Input:
%      x,y  vettori di ascisse cui si associa il polinomio interpolatore "p_n"
%      s    vettore di ascisse in cui valutare il polinomio interpolatore
% Output:
%      t    vettore di valutazioni "p_n(s)"

m=length(x)-1;
coeff=polyfit(x,y,m);
t=polyval(coeff,s);

```

Figure: Codice per generare le valutazioni del polinomio interpolante.

# Nodi equispaziati

Consideriamo ora come nodi  $n + 1$  punti equispaziati in un intervallo  $[a, b]$ , generabili attraverso i comandi `linspace` oppure `a:h:b` definendo però il passo `h` come

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Essi potranno essere usati per interpolare una funzione  $f$ .



# Esercizio

## Esercizio

Data la funzione  $f(x) = \frac{e^{-2x}}{3} + x^2 + 7x^3$ , si crei uno script dove vengono definiti

- Una variabile  $n$  indicante il grado massimo del polinomio interpolante
- Un vettore  $x$  contenente gli  $n + 1$  nodi equispaziati in  $[-1, 1]$
- Un vettore  $y$  i cui elementi sono  $f(x_i)$
- Un vettore  $s$  con 500 punti di valutazione in  $[-1, 1]$ .

Utilizzare quindi la routine `interp01` per valutare il polinomio interpolante in questi punti e creare un grafico dove vengono sovrascritti la funzione  $f$  in blu e il polinomio interpolante in rosso tratteggiato.

Calcolare quindi l'errore assoluto massimo tra il polinomio e la funzione e stamparne il valore a schermo. Come si comporta al variare di  $n$ ?

In questo caso la convergenza dovrebbe essere assicurata per il tipo di funzione scelta ma al crescere di  $n$  si vede l'interpolante costruita sui nodi equispaziati perdere di efficacia e crescere il suo errore. Infatti, tale interpolante non è molto stabile poiché la sua costante di Lebesgue cresce esponenzialmente con  $n$ .

Per l'interpolazione infatti, si preferisce utilizzare delle distribuzioni di punti migliori più stabili come i punti di Chebyshev-Lobatto

$$x_i = -\cos\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad i = 0, \dots, n,$$

la cui interpolante costruita su questi punti ha una costante di Lebesgue che cresce come  $\log(n)$ , quindi più lentamente.

### Esercizio

Ripetere l'esercizio precedente ma utilizzando i punti di Chebyshev-Lobatto al posto di quelli equispaziati.

## Esercizio

In alcuni casi invece la convergenza con i punti equispaziati può non esserci proprio, come può essere il caso della funzione di Runge in  $I = [-1, 1]$ , ovvero

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

Si costruisca, quindi, uno script dove al variare del grado del polinomio  $n$  da 1 a 25, si calcola il polinomio interpolante sia su nodi equispaziati sia su nodi di Chebyshev-Lobatto, valutandone poi il valore su 1000 punti equispaziati  $s$  in  $I$ .

Trovare quindi l'errore assoluto massimo dei polinomi con la funzione in  $s$  e fare in seguito la sovrapposizione dei grafici in scala semilogaritmica degli errori in funzione del grado del polinomio.

## Esercizio (per casa)

### Esercizio

Creare una funzione `interp02` che prende in input/output gli stessi input/output della funzione `interp01`, ovvero il vettore dei nodi  $x$ , il vettore dei valori della funzione nei nodi  $y$  e il vettore dei punti su cui valutare il polinomio interpolante  $s$  e come output il vettore  $t$  dei valori del polinomio interpolante sui punti  $s$ .

A differenza di ciò che è stato visto a lezione con la funzione `interp01`, per costruire il polinomio interpolante si utilizzi direttamente la definizione di polinomio con basi di Lagrange, ovvero descrivere  $p_n$  come

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \ell_i(x) y_i = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

