# TP1 DE OPTIMIZACIÓN

Ciro Carvallo

April 25, 2018

**Resumen:** Definimos r tal que $r_i = f_i(\alpha, X) - Y_i$. El problema a resolver en este TP fue $minimizar \|r\|^2$ pensada como una función del parámetro $\alpha$. Para esto utilicé el método de Gauss-Newton y analicé los parámetros obtenidos para la ciudad A y la ciudad B y comparé el error $\|r\|^2$ con los diferentes métodos propuestos.

**Primer Ejercicio**

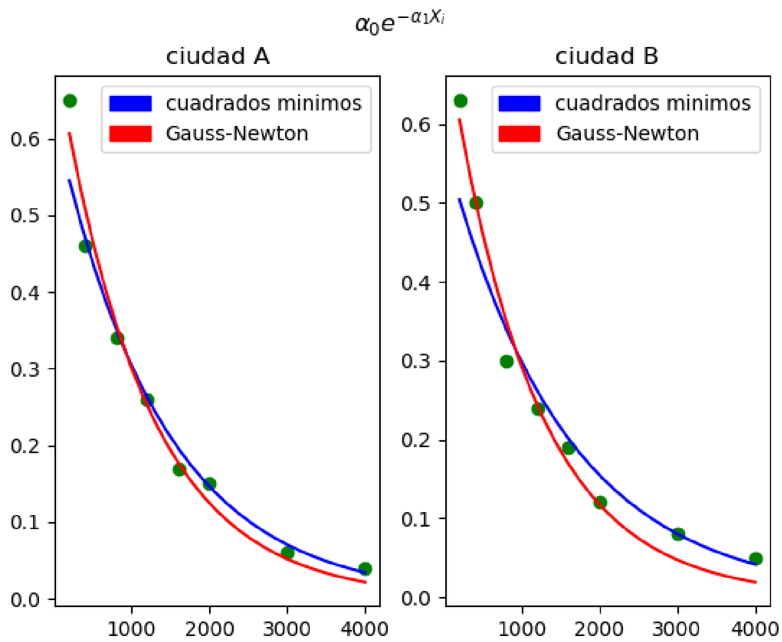
En este ejercicio analicé los datos de dos ciudades y utilicé el modelo $\alpha_0 e^{-\alpha_1 X_i} = Y_i$ para ajustar estos datos. Para encontrar los parametros con los cuales mejor se aproxima realicé dos pasos. Primero resolví la linealización $\log \alpha_0 - \alpha_1 X_i = \log Y_i$ utilizando cuadrados mínimos y luego, tomando como $\bar{\alpha}$ inicial [$e^{\alpha_0}$,$\alpha_1$] donde $\alpha$ es el vector que conseguí con cuadrados mínimos, usé el metodo de Gauss-Newton con el modelo inicial. Finalicé este algoritmo cuando $\|\nabla r\|$ era menor que $10^{-10}$. En la siguiente tabla pueden observarse los parámetros obetenidos para cada de una de las respectivas ciudades con el metodo de cuadrados minimos aplicado a $\log \alpha_0 - \alpha_1 X_i = \log Y_i$.

| Modelo $\alpha_0 e^{-\alpha_1 X_i}$ | | |
|---|---|---|
| | Ciudad A | Ciudad B |
| $\alpha$ | [ 0.57446539 0.00065562] | [ 0.63116564 0.00073129] |
| $\|r\|^2$ | 0.0227508316426 | 0.0120581778886 |

La siguiente tabla muestra los datos obtenidos con el método de Gauss-Newton.

| Modelo $\alpha_0 e^{-\alpha_1 X_i}$ | | |
|---|---|---|
| | Ciudad A | Ciudad B |
| $\alpha$ | [ 0.72606666 0.00091003] | [ 0.72330585 0.00087973] |
| $\|r\|^2$ | 0.00566379803694 | 0.00575889609124 |

En los graficos se observan las curvas obtenidas por cuadrados minimos y utilizando Gauss-Newton.



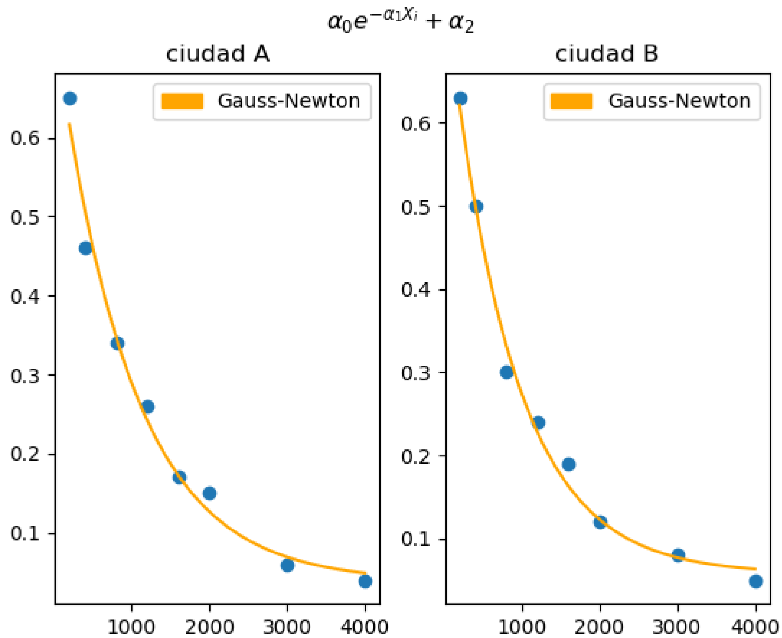

A partir de los gráficos y la tabla se puede concluir que el modelo es adecuado para ambas ciudades y que los parametros que minimizan el error son practicamente identicos, incluso la diferencia en $\alpha_0$ es menor que $5.10^{-3}$ y en $\alpha_1$ es menor que $10^{-4}$.
También se puede observar que al aplicar el metodo de Gauss-Newton el error pasa de ser de orden $10^{-2}$ a $10^{-3}$.

## Segundo Ejercicio

El segundo modelo utiliizado fue $\alpha_0 e^{-\alpha_1 X_i} + \alpha_2 = Y_i$. En este caso utilicé el método de Gauss-Newton para encontrar los parámetros con los cuales mejor se aproxima. El $\alpha$ inicial fue [0.723,0.00088,0] cuyas primeras dos coordenadas son similares al parámetro obtenido en el ejercicio anterior. Nuevamente finalicé el algoritmo una vez que la $\|\nabla r\|$ era menor que una tolerancia de 0.0001.En la siguiente tabla pueden verse los datos mas relevantes obetenidos para cada de una de las respectivas ciudades.

| Modelo $\alpha_0 e^{-\alpha_1 X_i} + \alpha_2$ | | |
|---|---|---|
| | Ciudad A | Ciudad B |
| $\alpha$ | [0.71243305, 0.00104252, 0.0379576] | [0.71614257, 0.00119491, 0.05733051] |
| $\|r\|^2$ | 0.00449259190288 | 0.00220189296574 |

En los gráficos se observan las curvas obtenidas utilizando Gauss-Newton.



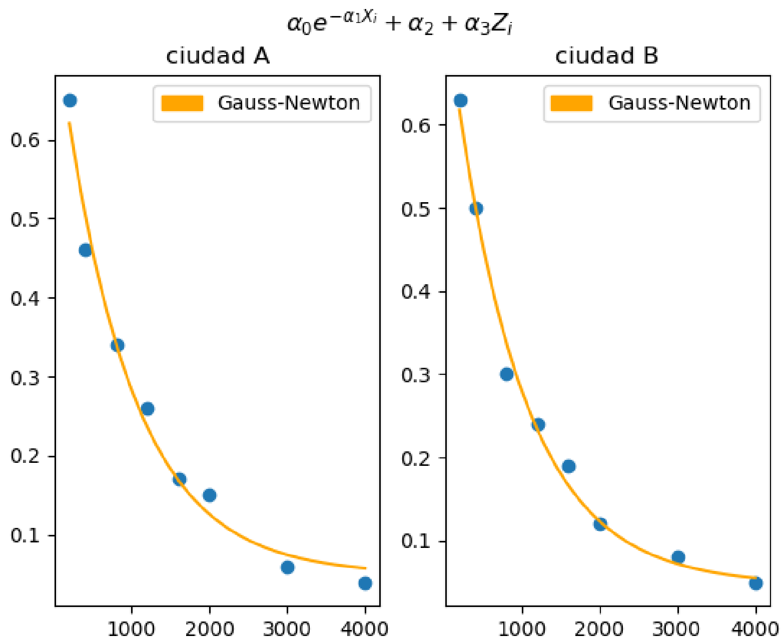

Aquí se puede apreciar que este modelo logra ajustar mejor los datos que el primero. Esta observación se justifica cuantitativamente al comparar ambas tablas, especificamente para ambas ciudades el error obtenido con el segundo método es menor que aquel obtenido con el primero,aunque este continua siendo del orden de $10^{-3}$. En el caso de la ciudad A, el error disminuye en 0.001 y en la ciudad B disminuye en 0.003 aproximadamente.
Por otro lado, para ambas ciudades los parametros $\alpha$ obtenidos son similares. La mayor diferencia se observa en $\alpha_2$ que difiere en 0.02, mientras que $\alpha_0$ difiere en menos de 0.004 y $\alpha_1$ en menos de 0.0002.

**Tercer Ejercicio**

En este caso el modelo ulizado fue $\alpha_0 e^{-\alpha_1 X_i} + \alpha_2 + \alpha_3 Z_i = Y_i$ donde $Z_i = 1$ en la ciudad A y $Z_i = 0$ en la ciudad B. Nuevamente utilice el método de Gauss-Newton para encontrar los parámetros con los cuales mejor se aproxima. El $\alpha$ inicial fue [0.723,0.00088,0,0], cuyas primeras tres coordenadas son idénticas a las del $\alpha$ inicial del modelo anterior. En este caso tambien finaliza el algoritmo una vez que la $\|\nabla r\|$ era menor que una tolerancia de 0.0001. En la siguiente tabla pueden verse los datos mas relevantes obetenidos para ambas ciudades

| Modelo $\alpha_0 e^{-\alpha_1 X_i} + \alpha_2 + \alpha_3 Z_i$ | |
|---|---|
| | Ciudad A y B |
| $\alpha$ | [ 0.71341331 0.00111736 0.0469767 0.0025 ] |
| $\|r\|^2$ | 0.00704508229339 |

En los gráficos se observan las curvas obtenidas utilizando Gauss-Newton.




Para comparar este nuevo modelo con el anterior considero por separado las aproximaciones a los datos dadas por la curva $Y_i = \alpha_0 e^{-\alpha_1 X_i} + \alpha_2 + \alpha_3$ y $Y_i = \alpha_0 e^{-\alpha_1 X_i} + \alpha_2$ para las ciudades A y B respectivamente.
Llamamos $\|r_A\|^2$ al error obtenido solamente considerando la ciudad A y $\|r_B\|^2$ al obtenido con la ciudad B. Entonces $\|r_A\|^2$=0.00467059164767 y $\|r_B\|^2$=0.00237449064573. Se puede observar que para ambas ciudades el error en el $\alpha$ obtenido empeora con respecto al modelo anterior. Posiblemente se deba a que en el segundo ejercicio hay tres paramentros para cada ciudad mientras que en el último nos limitamos a cuatro parametros para las dos ciudades. Sin embargo, la diferencia es menor a $3.10^{-4}$ para la ciudad A y a $2.10^{-4}$ para la ciudad B. Por lo tanto, este método obtiene errores casi idénticos a los conseguidos en el ejercicio anterior.