



**POLITECNICO  
DI TORINO**

# REPORT DI PROGETTO

## Impianto di riscaldamento a pavimento

---

**Corso di Metodi e modelli numerici**

**DOCENTE:**

*Prof. Stefano Scialò*

**STUDENTI:**

Ciro Staiti Sellitto s303573

Carlo Molinengo s303643

## Sommario

Introduzione .....	3
Definizione della geometria .....	4
Problema in pressione .....	6
Equazione del calore .....	9
Problema stazionario.....	11
Problema evolutivo .....	13

## **Introduzione**

Questo progetto consiste nella realizzazione di uno script Matlab per analizzare la termodinamica di una porzione dell'impianto di riscaldamento a pavimento progettato nel lavoro di gruppo del corso di Applicazioni avanzate di fisica tecnica.

Le direttive per realizzare lo script sono quindi state integrate con valori e nozioni derivanti proprio dalle scelte progettuali eseguite dal gruppo nello studio del sistema a pannelli radianti, tali scelte saranno opportunamente commentate e riportate in questo report.

Oltre alle scelte progettuali sono poi riportati i procedimenti seguiti e i risultati della nostra analisi opportunamente commentati.

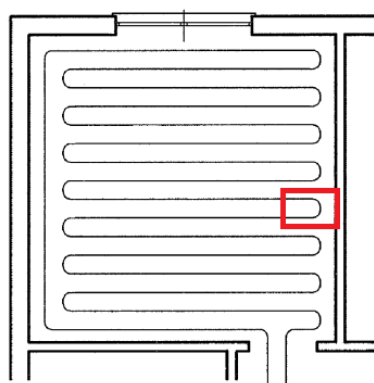
Il transitorio preso in considerazione per quest'analisi fa riferimento all'accensione dell'impianto di riscaldamento a pavimento al giorno più freddo dell'anno. Questo transitorio è di particolare interesse perché fa riferimento alla condizione di progetto per cui l'impianto a pannelli radianti è stato realizzato. In queste condizioni la temperatura esterna è di  $-8^{\circ}\text{C}$  essendo che la struttura presa in esame si trova a Torino, quindi in fascia climatica E (UNI 12831).

## **Definizione della geometria**

Come indicato dal testo del progetto abbiamo scelto una porzione di pavimento di riferimento da studiare che comprende una porzione “ad U” di un tubo dell’impianto di riscaldamento a pavimento. Nello specifico è stato scelto di posizionarsi nel soggiorno dell’immobile studiato, in questo locale secondo i calcoli di progetto e aiutati dal manuale Caleffi l’interasse di posa tra due tubi adiacenti è stato scelto di 30 centimetri. Un’altra condizione rilevante è che i tubi devono stare ad una distanza di almeno 5 centimetri dai muri e pilastri.

Tenendo a mente queste considerazioni per l’analisi è stata scelta una porzione di pavimento contenente una curva nella serpentina del riscaldamento a pavimento a metà stanza.

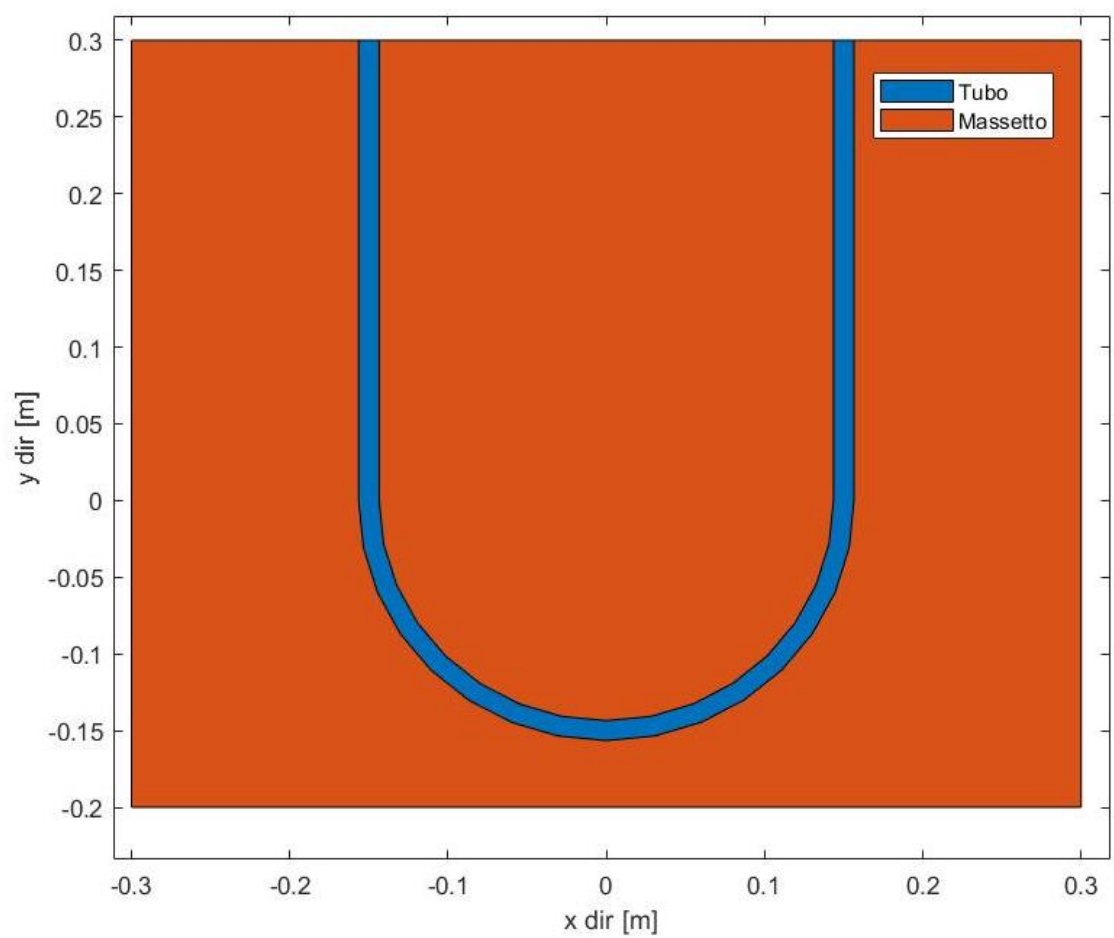
In figura 1 è riportata una piantina della serpentina dell’impianto di riscaldamento a pavimento utile per capire la posizione della porzione di impianto presa in considerazione, così come le condizioni al contorno del dominio.



*Figura 1 - Piantina dell’impianto a pannelli radianti con il dominio preso in esame in rosso*

La conoscenza della posizione del dominio rispetto al resto della stanza e alla geometria della stessa è fondamentale per l’impostazione delle condizioni al contorno per risolvere l’equazione del calore. A tal proposito si evidenzia la quasi adiabaticità che si presenta tra massetto e muro, questa condizione viene realizzata con uno spesso strato di isolante con l’obiettivo di limitare i flussi di calore laddove rappresentano una perdita.

Per chiarire meglio la geometria viene riportata la Figura 2:



*Figura 2 –Dominio preso in considerazione per l'analisi agli elementi finiti*

## **Problema in pressione**

La prima parte del progetto consiste nella soluzione del problema in pressione per l'acqua all'interno della sezione di tubo presa in considerazione. Questo è necessario per il calcolo della velocità dell'acqua all'interno dell'impianto, componente fondamentale per il calcolo del termine convettivo nell'equazione del calore. Per questo primo problema da risolvere come dominio è stata presa una sezione orizzontale del tubo.

Di seguito sono riportate la formulazione forte e la formulazione variazionale che viene usata per la risoluzione del problema necessario per valutare la velocità all'interno del tubo:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (K \nabla p) = 0 & \text{in } \Lambda \\ p = p_{in} & \text{su } \Gamma_{in} \\ p = 0 & \text{su } \Gamma_{out} \end{cases}$$

*Equazione 1 Formulazione forte del problema in pressione*

$$Vh(0) = \{vh \in C^0(\bar{\Lambda}): vh|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \tau, vh|_{\partial\Lambda} = 0\}$$

$$Vh(p_{in}) = \{vh \in C^0(\bar{\Lambda}): vh|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \tau, \quad vh(x_j) = P_{in} \quad \forall x_j \in \Gamma_{in}\}$$

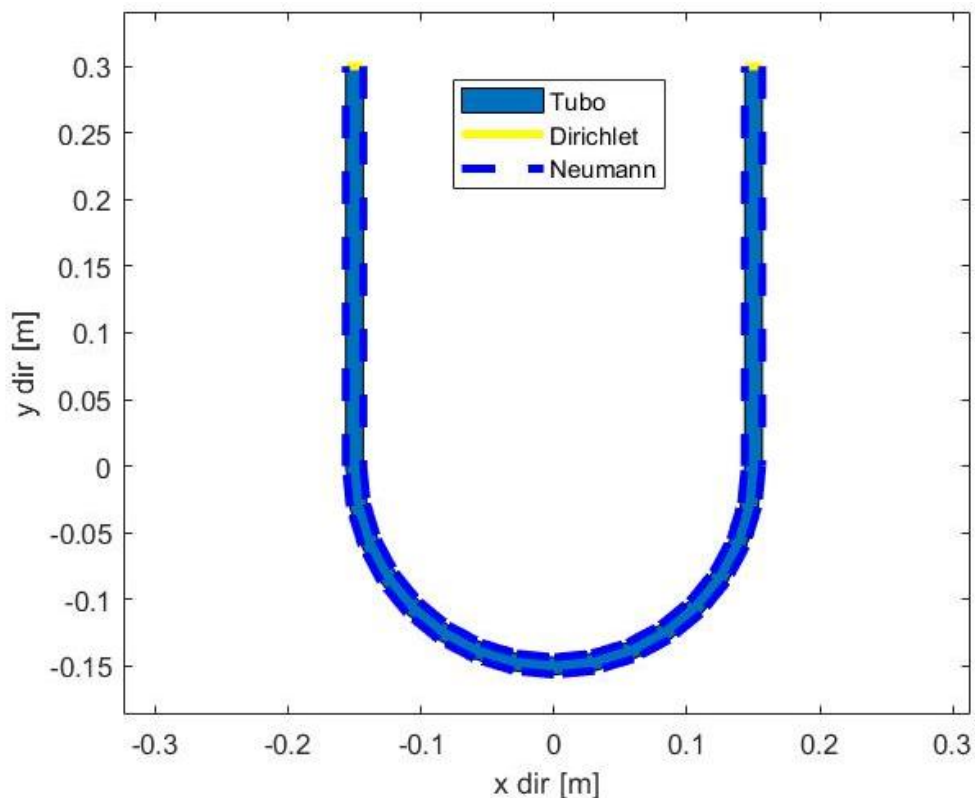
$$\begin{cases} \text{Trovare } ph = ph^0 + ph^{in} \text{ con } ph^0 \in Vh(0) \\ \int_{\Lambda} k \nabla ph \cdot \nabla vh = - \int_{\Lambda} k \nabla ph^{in} \cdot \nabla vh \end{cases}$$

*Equazione 2 Formulazione variazionale del problema in pressione*

Si riporta di seguito anche l'equazione risolutiva con i termini che compongono le varie matrici:

$$\begin{aligned} Ap &= f \\ A &= \int_{\Lambda} k \partial \varphi_j \cdot \partial \varphi_k \\ f &= - \int_{\Lambda} k \nabla \varphi_j^{in} \nabla \varphi_k \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno sono state imposte delle condizioni di Dirichlet all'entrata e all'uscita del tubo e delle condizioni di Neumann omogenee su tutti gli altri bordi. L'obiettivo è infatti calcolare la velocità nel tubo e sappiamo che il liquido non può attraversare le pareti dello stesso.



*Figura 3 – Dominio relativo al problema in pressione e relative condizioni al contorno*

I valori di pressione posti all'ingresso e all'uscita sono stati calcolati a partire dai dati del progetto di Applicazione avanzate di fisica tecnica, a partire dalle perdite di carico distribuite per l'intero tubo del locale e note le perdite concentrate in una curva "ad U" è stato possibile ricavare il salto di pressione presente nel nostro dominio  $\Delta p$ .

<b>Perdite distribuite</b>	241,36	[mm c.a.]
<b>Perdite concentrate</b>	212,79	[mm c.a.]
<b>Perdite totali</b>	454,15	[mm c.a.]

*Tabella 1 - Perdite di carico nel dominio*

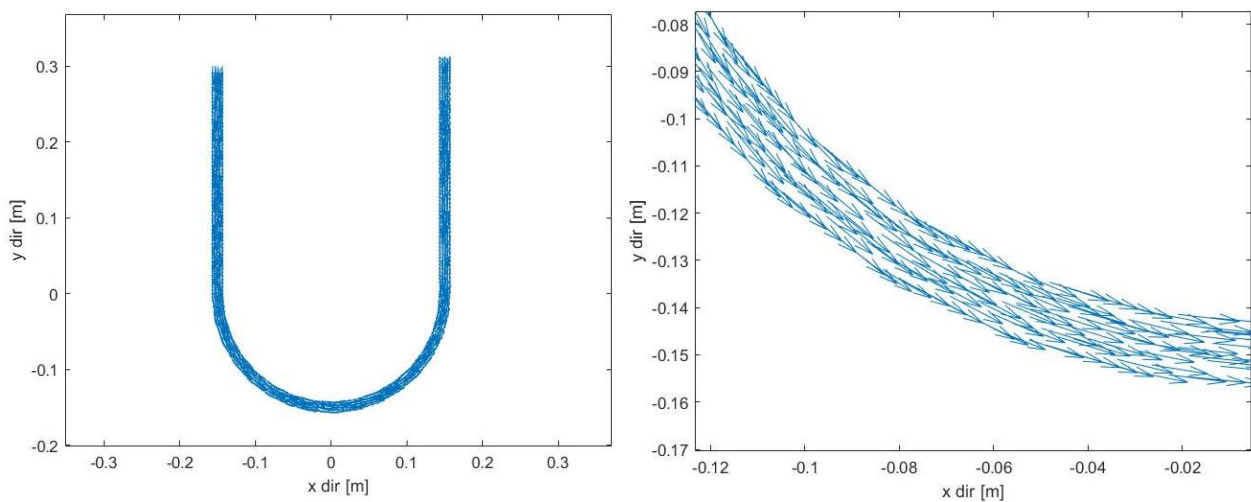
Note le perdite di pressione il valore della pressione in ingresso è stato preso uguale al valore delle perdite di carico totali mentre il valore della pressione in uscita è stato preso come nullo. Questa scelta è stata fatta perché per valutare la velocità nella porzione di tubo presa in considerazione non è necessario conoscere le pressioni assolute ma è sufficiente conoscere il

salto di pressione tra ingresso e uscita. Imponendo la pressione in uscita dal tratto di tubo uguale a zero si evita un calcolo inutile e complesso per ricavare le reali pressioni assolute ai capi del dominio.

Il coefficiente K che lega la velocità con il salto di pressione è stato scelto di modo da ottenere una velocità nel tubo uguale a quella che è stata calcolata nel progetto di applicazioni avanzate di fisica tecnica, ovvero  $\beta=0,38$  m/s. La formula usata per valutare K risulta quindi essere:

$$K = \frac{\beta}{\Delta p} = 0,000832[m/s]$$

Avendo calcolato il valore di K che ci permette di avere delle velocità realistiche all'interno dei tubi è stato possibile implementare uno script Matlab per la soluzione del problema in pressione.



*Figura 4*

*Rappresentazione del gradiente di velocità nel tubo del dominio studiato.*

*A sinistra è presentato il gradiente su tutto il dominio, a destra un dettaglio*



## **Equazione del calore**

Dopo aver risolto il problema in pressione e aver calcolato la velocità in tutti i punti della Mesh è possibile valutare il termine convettivo nell'equazione del calore. L'obiettivo di questa seconda parte del progetto è quella di valutare la temperatura in ogni punto del dominio data la temperatura di ingresso del fluido scaldante.

Per il calcolo della temperatura il dominio viene allargato, a differenza dell'acqua infatti il calore fluisce attraverso le pareti del tubo nel massetto andando a scaldarlo. Il dominio sarà quindi composto dalla porzione di tubo già analizzata nella prima parte assieme con il relativo massetto come si può vedere nella figura 5.

Dalla posizione scelta del dominio devono essere ricavate le condizioni al contorno da implementare nello script Matlab per valutare la trasmissione del calore nel pavimento.

Per quanto riguarda il lato in basso del dominio vicino alla curva ad U è stato ipotizzato fosse a contatto con la parete e lì stato imposto un flusso di calore nullo, tra massetto e muro perimetrale viene infatti inserito uno spesso strato di isolante che assieme all'elevato spessore del muro conferma nella realtà la non possibilità del calore di attraversare quella parte di dominio.

Il lato opposto a quello di cui si è appena discusso è anch'esso stato studiato con una condizione di scambio di calore nullo grazie alla particolare simmetria dell'impianto a serpentina. Allontanandosi a sufficienza dalla porzione "ad U" del tubo e considerata la piccola diminuzione di temperatura nella direzione assiale dei tubi è infatti possibile trascurare la componente di scambio termico parallela all'asse dei tubi. Questa semplificazione è anche possibile grazie all'ipotesi che la temperatura del liquido all'interno del tubo non vari molto tra la sezione precedente e quella analizzata nel caso in esame.

Per quanto riguarda i due lati paralleli all'asse dei tubi nella serpentina sono state imposte delle condizioni periodiche nel problema del calore. Il dominio preso in considerazione può infatti essere considerato essere una cella elementare che viene ripetuta ad ogni successiva curva della serpentina dell'impianto di riscaldamento a pavimento.

Si può poi vedere come nella sezione di ingresso del tubo siano state imposte delle condizioni di Dirichelet per fissare la temperatura del liquido all'ingresso del dominio mentre sono state imposte delle condizioni di Neumann all'uscita del tubo. Quest'ultima condizione è un'ipotesi semplificativa usata per non considerare che il flusso di acqua in uscita dal dominio porta via con se altro calore che serve alle parti più a valle dell'impianto.

Infine nei bordi tra tubo e massetto non sono state inserite condizioni al contorno poiché essendo bordi di interfaccia non devono avere condizioni particolari per non avere vincoli sulla trasmissione del calore.

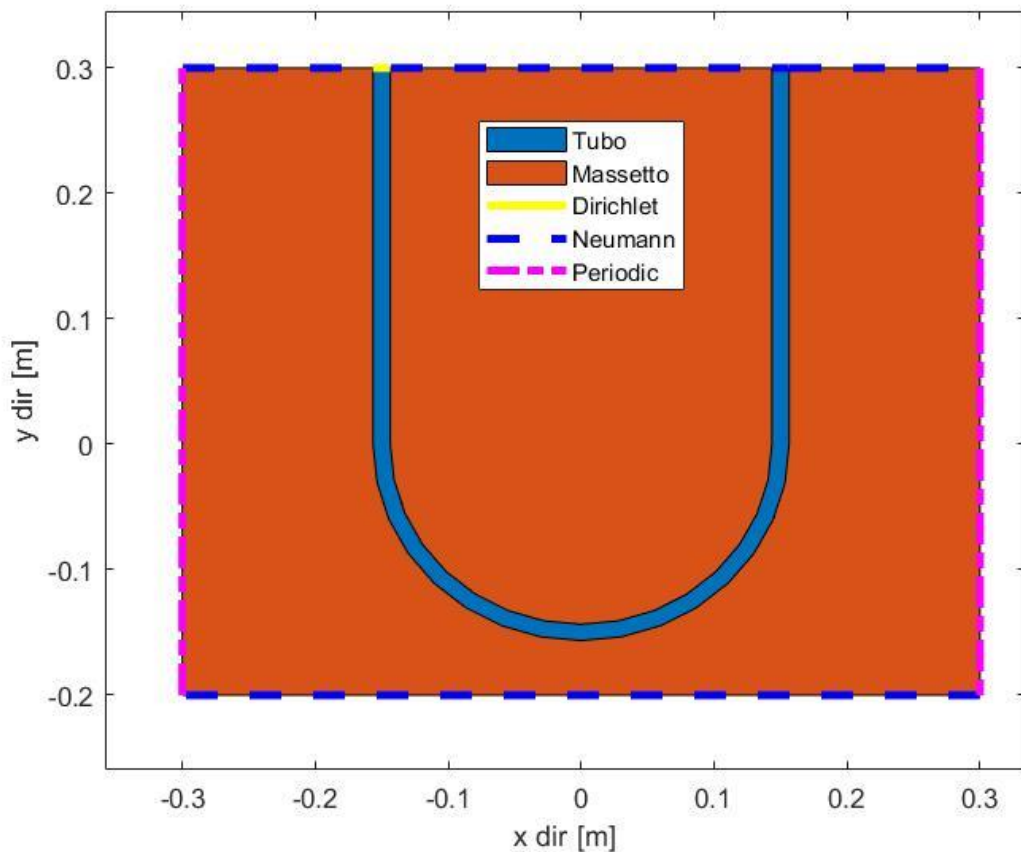


Figura 5 – Dominio e condizioni al contorno del problema del calore

In tabella 2 sono riportate alcune proprietà dell'acqua e del massetto che saranno necessarie per il corretto svolgimento del progetto. I valori relativi al massetto derivano da scelte progettuali effettuate nel progetto del corso di fisica tecnica o sono state ricavate dal manuale Caleffi per i pannelli radianti. Sono inoltre riportati i valori di diffusività termica di aria e terreno sotto al pavimento con le relative temperature di progetto. Questi ultimi valori sono utili per la valutazione dei termini pozzo-sorgente nell'equazione del calore, ovvero quei termini relativi ai flussi di calore che rispetto al dominio preso in esame vanno verso il basso (come perdita verso il terreno) o verso l'alto (espletando la funzione scaldante verso l'ambiente riscaldato).

		Acqua	Massetto	
Conducibilità termica	$\lambda$	0,606	1,3	[W/(m*K)]
	Densità	1000	2000	[kg/m <sup>-3</sup> ]
	Calore specifico	4186	1000	[J/(kg*K)]

		Aria	Suolo	
Diffusività termica	$\alpha$	7,7	1	[m <sup>2</sup> /s]
Temperatura	T	293,15	281,15	[K]

*Tabella 2 – Proprietà di acqua e massetto (sopra) e di aria e terreno (sotto)*

Si evidenzia che la temperatura dell'aria in tabella 2 è quella che si deve avere a regime nella stanza, la temperatura del suolo è invece quella stimata a cui si trova il terreno sotto un locale riscaldato secondo la UNI 11300-1.

Come ultimo dato si riporta che la temperatura del sistema prima dell'inizio del transitorio di accensione risulta essere  $T_0=290K$ . In questa maniera si tiene conto di un possibile transitorio a seguito dello spegnimento dell'impianto e se ne valuta la reattività.

Come temperatura del fluido scaldante che arriva nel sistema si è presa la temperatura di 312,15 K, ovvero 39°C. Questa temperatura è stata scelta in quanto è la media delle temperature di ingresso e di uscita dal pannello, ed è rappresentativa del nostro dominio essendo questa posta a metà della lunghezza del tubo.

Problema stazionario

Di seguito viene riportata la formulazione forte e la formulazione variazionale del problema stazionario utilizzate per la sua risoluzione:

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \beta \nabla T = f$$

$$f = f_1 + f_2 \quad f_1 = \alpha_{air}(T_{air} - T) \quad f_2 = \alpha_{soil}(T_{soil} - T)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \beta \nabla T + (\alpha_{air} + \alpha_{soil})T = \alpha_{air}T_{air} + \alpha_{soil}T_{soil} \quad in \Lambda \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad su \Gamma_N \\ T = 315,15 \quad su \Gamma_D \\ T|_{\Gamma_{P1}} = T|_{\Gamma_{P2}}; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{P1}} = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{P2}} \quad su \Gamma_P \end{array} \right.$$

*Equazione 3 Formulazione forte del problema in calore stazionario*

$$Vh(0) = \{vh \in C^0(\bar{\Lambda}): vh|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \tau, vh|_{\partial\Lambda} = 0\}$$

$$Vh(g) = \{vh \in C^0(\bar{\Lambda}): vh|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \tau, \quad vh(x_j) = g(x_j) \quad \forall x_j \in \Gamma_D\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trovare } Th = Th^0 + Th^D \text{ con } Th^0 \in Vh(0) \\ \int_{\Lambda} \rho \frac{\partial Th}{\partial t} + \int_{\Lambda} \lambda \nabla Th^0 \cdot \nabla vh + \int_{\Lambda} \beta \nabla Th^0 vh + \int_{\Lambda} (\alpha_{air} + \alpha_{soil}) Th^0 vh = \int_{\Lambda} f vh - \int_{\Lambda} \lambda \nabla Th^D \cdot \nabla vh \end{array} \right.$$

*Equazione 4 Formulazione variazionale del problema in calore stazionario*

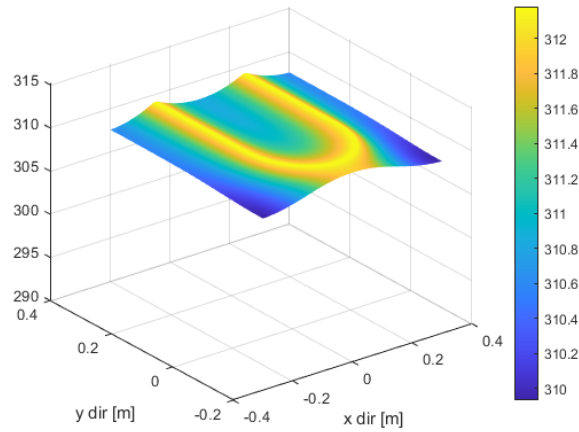
Viene anche riportata l'equazione con le relative matrici utilizzate per la risoluzione del problema:

$$AT = f$$

$$A = \int_{\Lambda} \lambda \partial \varphi_j \cdot \partial \varphi_k + \int_{\Lambda} \beta \nabla \varphi_j \cdot \varphi_k + \int_{\Lambda} (\alpha_{air} + \alpha_{soil}) \varphi_j \cdot \varphi_k$$

$$f = \int_{\Lambda} f \varphi_k - \int_{\Lambda} \lambda \nabla \varphi_j^D \nabla \varphi_k$$

Dopo aver ricavato tutti i parametri utili per la soluzione dell'equazione del calore è stato implementato uno script Matlab per calcolare la distribuzione di temperatura nel massetto. In figura 6 è riportata la distribuzione di temperatura a regime nel dominio.



*Figura 6 – Distribuzione di temperatura nel dominio*

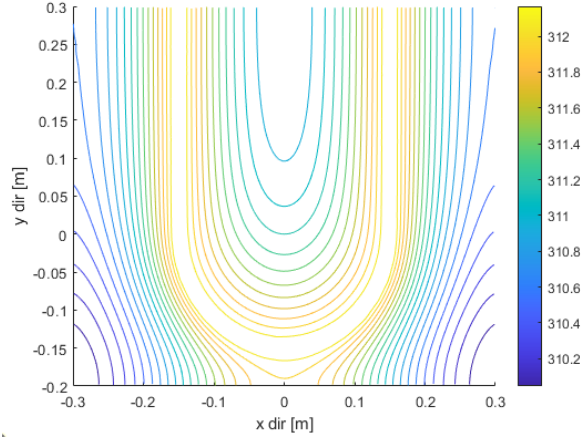


Figura 7 – Andamento della temperatura mostrato con linee isoterma

Dal risultato del problema stazionario riportato in figura 6 si può come prima cosa notare che le condizioni periodiche tra il lato destro e sinistro del dominio siano completamente rispettate, infatti l'andamento della temperatura è simmetrico. Si può notare come il tratto di pavimento più freddo sia quello che si trova ad una distanza maggiore dal tubo, e quindi in concomitanza degli angoli del nostro dominio. Si può poi vedere come la temperatura all'interno del dominio vari di pochi gradi, precisamente il punto a più bassa temperatura è a 36.9 °C. Questa differenza di temperatura così bassa è dovuta all'alta conduttività termica del problema.

#### Problema evolutivo

Successivamente, dopo aver studiato il problema stazionario, si è studiato il problema evolutivo considerando una situazione ideale in cui si accende il riscaldamento in modo da capire quanto è reattivo l'intero sistema, ovvero quanto in fretta si riesce a riportare in condizioni stazionarie il sistema.

Le condizioni al contorno nel problema evolutivo sono le stesse che sono state scelte per il problema stazionario, ma la formulazione forte e la formulazione variazionale vanno comunque aggiornate per la presenza del termine evolutivo nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \beta \nabla T + (\alpha_{air} + \alpha_{soil})T = \alpha_{air}T_{air} + \alpha_{soil}T_{soil} \quad in \Lambda \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad su \Gamma_N \\ T = 315,15 \quad su \Gamma_D \\ T|_{\Gamma_{P1}} = T|_{\Gamma_{P2}}; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{P1}} = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{P2}} \quad su \Gamma_P \end{array} \right.$$

*Equazione 5 Formulazione forte per la risoluzione del problema in calore evolutivo*

$$Vh(0) = \{vh \in C^\circ(\bar{\Lambda}): vh|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \tau, vh|_{\partial\Lambda} = 0\}$$

$$Vh(g) = \{vh \in C^\circ(\bar{\Lambda}): vh|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \tau, \quad vh(x_j) = g(x_j) \quad \forall x_j \in \Gamma_D\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trovare } Th = Th^0 + Th^D \quad \text{con } Th^0 \in Vh(0) \\ \int_{\Lambda} \rho \frac{\partial Th}{\partial t} + \int_{\Lambda} \lambda \nabla Th^0 \cdot \nabla vh + \int_{\Lambda} \beta \nabla Th^0 vh + \int_{\Lambda} (\alpha_{air} + \alpha_{soil}) Th^0 vh = \int_{\Lambda} f vh - \int_{\Lambda} \lambda \nabla Th^D \cdot \nabla vh \end{array} \right.$$

*Equazione 6 Formulazione variazionale per la risoluzione del problema in calore evolutivo*

Viene anche riportata l'equazione con le relative matrici utilizzate per risoluzione del problema su Matlab:

$$BT' + AT = f$$

$$B = \int_{\Lambda} \rho \partial \varphi_j \partial \varphi_k$$

$$A = \int_{\Lambda} \lambda \partial \varphi_j \cdot \partial \varphi_k + \int_{\Lambda} \beta \nabla \varphi_j \cdot \varphi_k + \int_{\Lambda} (\alpha_{air} + \alpha_{soil}) \varphi_j \cdot \varphi_k$$

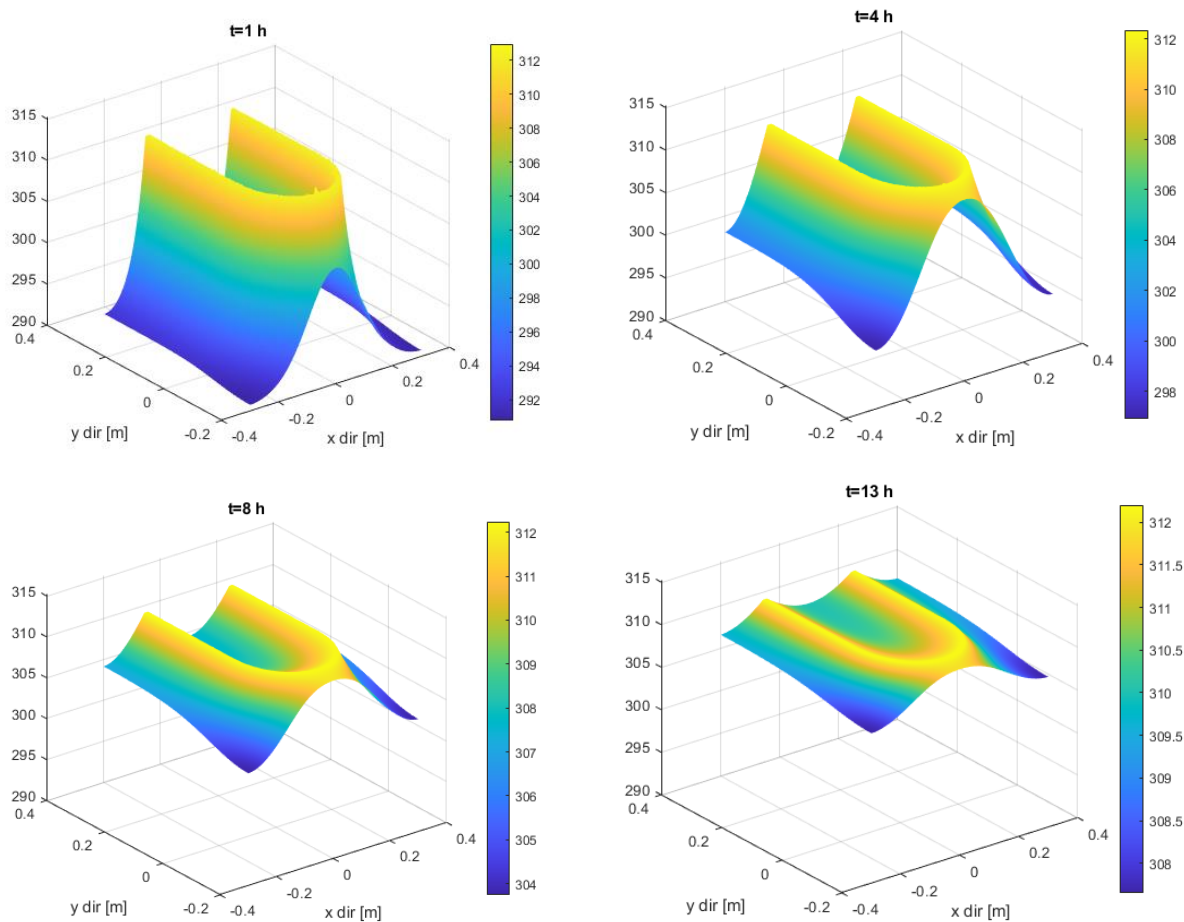
$$f = \int_{\Lambda} f \varphi_k - \int_{\Lambda} \lambda \nabla \varphi_j^D \nabla \varphi_k$$

Per vedere l'andamento della temperatura del problema evolutivo si è deciso di mostrare l'andamento delle temperature medie che si hanno nella porzione di pavimento analizzata, in modo da poi confrontarla con la temperatura media che si ha nel caso stazionario. Di seguito viene riportata la tabella con le temperature medie:

Ora	T media [K]	$\Delta T$
1	298,3	12,9
2	301,7	9,5
3	303,9	7,3
4	305,5	5,7
5	306,8	4,4
6	307,7	3,5
7	308,5	2,7
8	309,1	2,1
9	309,5	1,7
10	309,9	1,3
11	310,2	1,0
12	310,4	0,8
13	310,6	0,6
14	310,7	0,5
15	310,8	0,4
16	310,9	0,3
17	311	0,2
18	311	0,2
19	311	0,2
20	311,1	0,1
21	311,1	0,1
22	311,1	0,1
23	311,2	0,0

*Tabella 1 – Temperature medie ad ogni istante temporale*

In tabella viene indicato il tempo passato in ore dall'accensione del sistema, la temperatura media e la differenza tra la temperatura media del sistema in condizioni stazionarie che risulta essere di 311.2 K e la temperatura media di quell'istante temporale. Si può notare subito come la temperatura media inizialmente sale abbastanza velocemente per poi dopo 13 ore di funzionamento andare molto a stabilizzarsi. Il sistema raggiunge la condizione stazionaria dopo 23 ore di funzionamento però la variazione di temperatura nelle ultime 7 ore è molto piccola. Di conseguenza si può dire che inizialmente il sistema è molto reattivo e pronto per poi raggiungere la stazionarietà in modo molto più lento e graduale. Bisogna precisare che nonostante la condizione stazionaria venga raggiunta dopo così tante ore che il confort termo-igrometrico all'interno della stanza viene soddisfatto ampiamente. Di seguito vengono mostrati alcuni grafici di temperatura per avere anche un'informazione visiva dell'andamento della temperatura:



*Figura 8 – Andamento della temperatura dopo 1,4,8 e 13 ore dall'avvio del riscaldamento*

Da quest'ultima figura si può anche notare visivamente come l'andamento della temperatura vari molto nelle prime ore di funzionamento e come l'andamento della temperatura dopo 13 ore dall'avvio sia molto simile a quello mostrato nella figura 6.