Formalia.

- Ausgabe in der Übung am 24. November 2016
- Abgabe in der Übung am 15. Dezember 2016 oder per Mail an Marc Otto
- Gesamtpunktzahl 50 (30 Punkte plus 20 Zusatzpunkte)

Vorbereitung.

- Bezeichne $\hat{\boldsymbol{a}}$ den Vektor mit Länge eins in Richtung von $\boldsymbol{a}$, also $\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$.
  Insbesondere bezeichne $\hat{\boldsymbol{n}}$ den Einheitsvektor in Richtung einer Rotationsachse.
- Bezeichne $\boldsymbol{a}^{\otimes}$ die schiefsymmetrische Matrix zu $\boldsymbol{a}$, also $\boldsymbol{a}^{\otimes} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Der Rotationswinkel ϕ um eine Rotationsachse sei immer so gewählt, dass $\phi \in (-\pi, +\pi]$ gilt.
- Für Rechenaufgaben kann etwa das `‘ipython notebook’` verwendet werden.[1]
- Für Zeichenaufgaben kann etwa das Geometrie-Programm `‘geogebra’` verwendet werden.[2]

Aufgabe A (Rotation in der Ebene). [5 P | 3 ZP]

1. Gegeben sei der Winkel $\phi = 2\pi \cdot \frac{47°}{360°}$.
   (a) Berechne $z = \exp(i \cdot \phi)$.
   (b) Zeichne z in ein Koordinatensystem zusammen mit dem Einheitskreis.
   (c) Approximiere den Kreisauschnitt zwischen $(1,0)^T$ und z durch die Strecke s zwischen den beiden Punkten, zeichne s ins Koordinatensystem ein.
   (d) Berechne die Länge der Strecke s.

Aufgabe B (Gerichtete Winkel). [5 P | 3 ZP]

1. Zeichne das Dreick, das durch die Punkte mit den Koordinaten $A = (0,0)^T$, $B = (5,0)^T$ und $C = (4,5)^T$ aufgespannt wird.
2. Berechne die (positiven) Innenwinkel des Dreiecks, berechne die Summe der Innenwinkel (in Radiant und Grad).
3. Berechne die Vektoren $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BC} = C - B$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{CA} = A - C$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB} = B - A$.
4. Bestimme die gerichteten Winkel $\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ $\measuredangle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, und $\measuredangle(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$, berechne Ihre Summe der gerichteten Winkel (in Radiant und Grad). Benutze dazu die Funktion `atan2`.

Aufgabe C (Tangens-Substitution). [5 P | 3 ZP]

1. Zeichne ein Koordinatenkreuz mit x-Achse einschließlich $[-4, +2]$ und y-Achse einschließlich $[-3, +3]$.
2. Zeichne den Kreis C' um $\boldsymbol{c}' = (0,0)^T$ mit Radius $r' = 1$ und den C'' um $\boldsymbol{c}'' = (-1,0)^T$ mit $r'' = 2$.
3. Sei hier $\boldsymbol{R}(\phi) := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$. Zeichne das Abbild $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{v}$ des Vektors $\boldsymbol{v} = (1,0)^T$ nach Rotation mit $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}(\phi_1)$ für $\phi_1 = 2\pi \cdot \frac{47°}{360°}$. Zeichne das Abbild $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{v}$ des Vektors $\boldsymbol{v} = (1,0)^T$ nach Rotation mit $\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}(\phi_2)$ für $\phi_2 = 2\pi \cdot \frac{-108°}{360°}$.
4. Zeichne den Vektor $\boldsymbol{u}_1$ von $\boldsymbol{c}''$ durch $\boldsymbol{w}_1$ auf C'' und zeichne den Vektor $\boldsymbol{u}_2$ von $\boldsymbol{c}''$ durch $\boldsymbol{w}_2$ auf C''.

[1] siehe `http://ipython.org/ipython-doc/dev/interactive/htmlnotebook.html`
[2] siehe `http://www.geogebra.org/`

5. Was sind die Lagewinkel der beiden Vektoren $\boldsymbol{u}_1$ und $\boldsymbol{u}_2$ in der Ebene (`atan2`, Werte in Radiant und Grad)? Nenne die beiden Winkel φ_1 und φ_2. Was ist das Verhältnis von φ_i zu ϕ_i für $i = 1$ und $i = 2$?
6. Berechne die Werte $\tan(\phi_1/2)$ und $\tan(\phi_2/2)$. Könnt Ihr Streckenabschnitte in der Skizze finden, die diese Länge haben?

Aufgabe D (Rotation im Raum). [15 P | 11 ZP]

1. Gegeben sei folgende Rotationsmatrix:

$$\boldsymbol{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.87461971 & -0.48480962 & 0 \\ 0.48480962 & 0.87461971 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimme die zwei zugehörigen Einheits-Quaternionen der Form $\hat{q} = (q_0, \boldsymbol{q})$.
   Benutze dazu die Formel aus der Übung („4-fach") und notiere alle vier berechneten Ausdrücke.

   (b) Bestimme über die Quaternionen die Rotationsachse $\hat{\boldsymbol{n}}$ und den Rotationswinkel ϕ.
   Benutze dazu die Formeln aus der Übung („cos-sin").

2. Gegeben sei die Rotationsachse über den Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{n}} = (0, 1, 0)^T$ und der Rotationswinkel $\phi = 2\pi \cdot \frac{70°}{360°}$.

   (a) Bestimme die Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}^{(2)}$.
   Benutze dazu die Formel aus der Übung („Euler-Rodrigues").

   (b) Bestimme die zugehörigen Einheits-Quaternion der Form $\hat{q} = (q_0, \boldsymbol{q})$.
   Benutze dazu die Formel aus der Übung („cos-sin").

3. Gegeben sei folgende Rotationsmatrix:

$$\boldsymbol{R}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Verfahre wie in Aufgabe 1.

4. Warum stellt die Matrix

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   keine Rotation dar? Beschreibe die geometrische Transformation der Matrix (yz-Skizze).

5. Warum stellt die Matrix

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{5}{13} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{12}{13} \end{pmatrix}$$

   keine Rotation dar? Beschreibe die geometrische Transformation der Matrix (yz-Skizze).

6. Warum stellt die Matrix

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   keine Rotation dar? Beschreibe die geometrische Transformation der Matrix (yz-Skizze).

7. Benutze die ersten drei Berechnungen.

   (a) Berechne die Rotationsmatrix

$$\boldsymbol{R}^{(1,3)} = \boldsymbol{R}^{(1)} \cdot \boldsymbol{R}^{(2)} \cdot \boldsymbol{R}^{(3)} .$$

   (b) Berechne die Rotationsmatrix

$$\boldsymbol{R}^{(3,1)} = \boldsymbol{R}^{(3)} \cdot \boldsymbol{R}^{(2)} \cdot \boldsymbol{R}^{(1)} .$$

   (c) Berechne für $\boldsymbol{R}^{(1,3)}$ und $\boldsymbol{R}^{(3,1)}$ sowohl die zugehörigen Quaternionen als auch Rotationachsen und -Winkel, wie gehabt.

8. Berechne die Abbilder der Vektoren $\boldsymbol{b}_1 = (2, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1, 0)^T$ und $\boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (0, 1, 2)^T$, die mittels der beiden Rotationen $\boldsymbol{R}^{(1,3)}$ und $\boldsymbol{R}^{(3,1)}$ erzeugt werden.
9. Berechne die gleichen Abbilder über die Quaternionen $\hat{q}^{(1,3)}$ und $\hat{q}^{(3,1)}$. Benutze dazu die Quaternionen-Regel („Konjugation").