Chap 3 1 :

VARIABLES ALEATOIRES - GENERALITES.

I - Variable aléatoire

Def :

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable associé à une ea

On appelle va toute application mesurable de Ω dans un espace E mesurable.

$$X : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow X(\Omega) \subset E \\ \omega \longmapsto X(\omega). \end{array}$$

- Une va est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou ∞ dénombrable.

- Une va est continue si $X(\Omega)$ est ∞ non dénombrable.

Def : Loi de proba (Mesure image)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un e.p. Soit $X : \Omega \to X(\Omega)$ une v.a.

La loi de proba (ou mesure image) de X est :

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{l} X(\Omega) \to [0,1] \\ S \mapsto \mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(X^{-1}(S)) = \mathbb{P}(\{\omega \mid X(\omega) \in S\}) \end{array}$$

Def : Fonction de repartition.

Soit X une v.a $\mathbb{R}$ déf sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle fct de repartition de X la fonction déf par :

$$F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) \end{array}$$

Prop des fct de repartition.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ 0 \leq F_X(x) \leq 1$
- F_X est $\nearrow$
- $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$
- $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$
- F_X est continue à droite avec des limites à gauche (cadlag)

□ F_X $\mathcal{C}^0$ à droite en a :

$$\lim_{x \to a^+} F_X(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} F_X(x) = F_X(a)$$

□ F_X a une lim à gauche en a :

$$F_X(a^-) = \lim_{x \to a^-} F_X(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} F_X(x)$$

◦ On a :

□ $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

□ $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$

□ $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$

◦ $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$.

Def : Vecteur aléatoire.

Soient n v.a déf sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; $X_i : \Omega \to E_i$

On appelle X vecteur aléatoire de dim. n :

$$X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

Def : Loi de proba conjointe

La loi de proba. conjointe de X est $\{\mathbb{P}(X \in S), S \in E_1 \times \ldots \times E_n\}$

Def :

Les v.a X_i sont (mutuellement indep) si pour $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{A}$ les $\{X_i \in S_i\}_{i=1,\ldots,n}$ sont indep :

$$\forall (S_1, \ldots, S_n) \in E_1 \times \ldots E_n ,$$

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in S_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \in S_n\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \in S_1, \ldots, X_n \in S_n\})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_i \in S_i\}).$$