Graphes
et
Recherche Opérationnelle

Programmation Linéaire

J.-F. Scheid

TELECOM Nancy 2A

2020-2021

Table des matières

1 Introduction générale

De nombreux phénomènes économiques et industriels peuvent se modéliser par des systèmes mathématiques d'inégalités et d'égalités linéaires conduisant à des problèmes d'optimisation linéaire. Dans ces problèmes d'optimisation linéaire, on cherche à minimiser ou maximiser une fonction linéaire sous des contraintes linéaires portant sur les variables du problème. On parle souvent de **programmation linéaire** (ou encore de **programme linéaire**), le terme de *programmation* faisant référence à l'idée d'organisation et de planification lié à la nature des phénomènes modélisés. Ce terme a été introduit pendant la Seconde Guerre mondiale et systématiquement utilisé à partir de 1947 lorsque G. Dantzig inventa la méthode du simplexe pour résoudre les problèmes de programmation linéaire. Les applications industrielles de la programmation linéaire sont très présentes par exemple dans l'industrie pétrolière (pour l'extraction, le raffinage et la distribution du pétrole), dans l'agroalimentaire (composition optimale des ingrédients de plats cuisinés, etc.), industrie du fer et de l'acier (composition optimale des aciers), l'industrie du papier (problèmes de découpe), les transports (plan de vols d'avions, minimisation des coûts de transport...) et les réseaux (optimisation des réseaux informatiques et de communication).

Ce cours présente les propriétés et les concepts fondamentaux de la programmation linéaire puis expose l'algorithme du simplexe pour résoudre un programme linéaire. L'algorithme du simplexe est mis en œuvre selon deux méthodes, la **méthode des dictionnaires** et la **méthode des tableaux**. La première méthode permet de bien comprendre le déroulement du simplexe alors que la méthode des tableaux est plus algébrique et elle conduit à la mise en œuvre effective de l'algorithme du simplexe. Une application de la méthode du simplexe à l'analyse de sensibilité d'un programme linéaire est également présentée ainsi qu'une introduction à la dualité en programmation linéaire.

2 Modélisation et résolution graphique

2.1 Modélisation

En optimisation et plus généralement en Recherche Opérationnelle, modéliser un problème consiste à identifier les variables intrinsèques, les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables et enfin à définir l'objectif visé (optimisation). Dans un problème de programmation linéaire (PL en abrégé) les contraintes et l'objectif sont des fonctions *linéaires* des variables.

On va étudier un exemple particulier de programmation linéaire qui servira d'exemple de référence tout au long de ce cours. Il s'agit d'un problème de production volontairement très simple. Le but ici n'étant pas de résoudre ce problème mais d'introduire les notions et concepts fondamentaux liés à la programmation linéaire. Dans cet exemple, on considère une usine qui fabrique deux produits P_1 et P_2 en utilisant 3 types de ressources : équipement, main d'œuvre et matières premières. Ces besoins sont indiqués dans le Tableau 1 ci-dessous. Par ailleurs, chaque ressource est disponible en quantité limitée (cf. Tableau 1).

	P_1	P_2	disponibilité
équipement	3	9	81
main d'oeuvre	4	5	55
matière première	2	1	20

Table 1 – Un problème de production : ressources nécessaires et équipements disponibles

Les deux produits P_1 et P_2 rapportent à la vente respectivement des bénéfices de 6 euros et 4 euros par unité. On cherche à savoir quelles quantités de produits P_1 et P_2 doit produire l'usine afin de maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits. Les quantités de produits sont des valeurs non nécessairement entières.

- *Choix des variables (les inconnues)* : x_1 et x_2 sont respectivement les quantités des produits P_1 et P_2 fabriqués ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$).
- *Choix de la fonction objectif à maximiser* : La fonction objectif F correspond au bénéfice total provenant de la vente des produits P_1 et P_2 en quantité x_1 et x_2. Elle vaut $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$. Le problème se traduit donc par

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

- *Détermination des contraintes.*
  — La disponibilité de chacune des ressources s'écrit :

$$\begin{array}{ll} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 & \text{(équipement)} \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 & \text{(main-d'oeuvre)} \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 & \text{(matière première)} \end{array}$$

  — Positivité des variables : $x_1, x_2 \geq 0$.

En résumé, le problème de production se modélise sous la forme

$$\begin{array}{l} \max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2\right]. \\ \text{sous les contraintes :} \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{2.1}$$

Remarque. Pour un problème d'optimisation où on cherche à minimiser une fonction objectif F (au lieu de maximiser comme dans l'exemple précédent du problème de production), on peut toujours se ramener à un problème de maximisation grâce à la relation

$$\min(F) = -\max(-F) \tag{2.2}$$

2.2 Résolution graphique

Dans le cas d'un PL à deux variables, on peut envisager une résolution graphique. Les contraintes où apparaissent des inégalités correspondent géométriquement à des demi-plans. L'intersection de ces demi-plans forme l'ensemble des variables satisfaisant à toutes les contraintes (la partie hachurée de la figure 1). A la fonction objectif F correspond une droite $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2 =$ constante, de coefficient directeur $(-1, 6/4)$. La constante précédente qui définie la droite doit être la plus grande possible (maximisation) et rencontrer l'ensemble des variables qui satisfont les contraintes. Pour déterminer cette valeur maximale, on fait donc "glisser" la droite (translation parallèle à la direction de la droite) du haut vers le bas jusqu'à rencontrer l'ensemble des variables satisfaisant les contraintes. Le maximum de F sur cet ensemble des contraintes est alors atteint. On obtient ainsi la solution optimale $(x_1, x_2) = (15/2, 5)$ et ce qui donne une valeur maximale $\max(F) = 65$.

On remarque que l'ensemble des contraintes (la partie hachurée de la figure 1) est un **polygone convexe** et que le maximum de F est atteint en **un sommet** de ce polygone. Cette observation est, en fait, un résultat général que l'on établiera dans les sections suivantes.

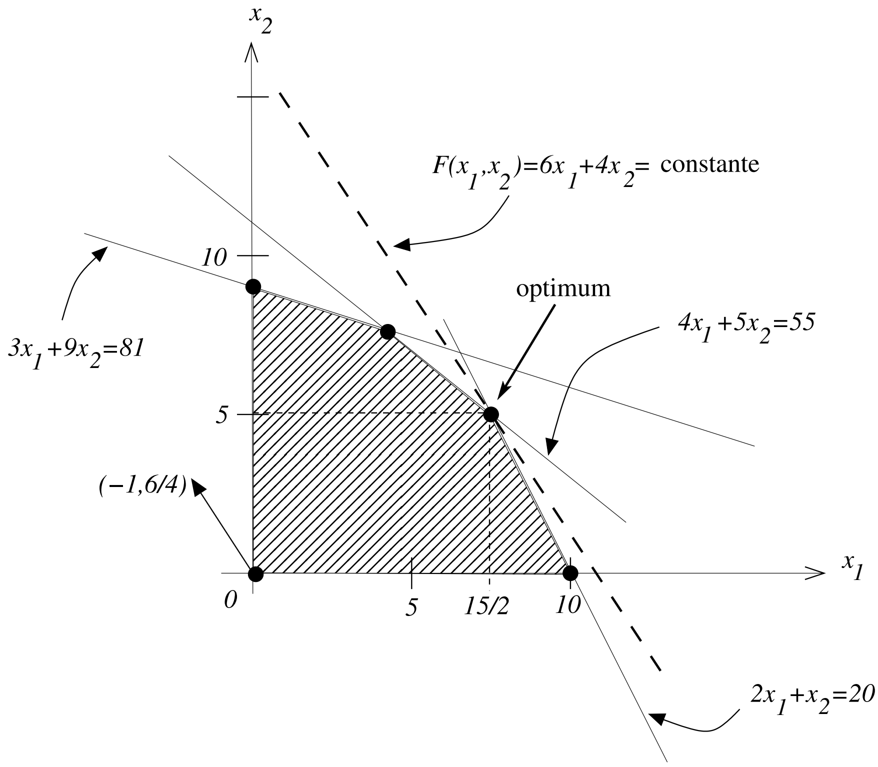

FIGURE 1 – Résolution graphique du problème de production

3 Formes générales d'un programme linéaire

3.1 Forme canonique mixte

Il s'agit d'un problème de programmation linéaire (encore appelé *programme linéaire*) écrit sous la forme suivante.

$$\max_{(x_1,\cdots,x_n)} \left[F(x_1,...,x_n) = c_1x_1 + \cdots c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \right].$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{contraintes inégalités :} & \forall i \in I_1, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ \text{contraintes égalités :} & \forall i \in I_2, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ \text{contraintes de signes :} & \forall j \in J_1, & x_j \geq 0 \\ & \forall j \in J_2, & x_j \text{ de signe quelconque.} \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Les valeurs réelles c_i, b_i et a_{ij} pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, sont données. L'ensemble $I = I_1 \cup I_2$ est l'ensemble des indices de contraintes avec $\text{card}(I) = m$. Autrement dit, il y a <u>m contraintes</u>. L'ensemble $J = J_1 \cup J_2$ est l'ensemble des indices des variables avec $\text{card}(J) = n$. Il y a <u>n variables</u>.

3.2 Forme canonique pure

Sous cette forme, il n'y a pas de contraintes d'égalité c'est-à-dire $I_2 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$.
On note

$$\begin{array}{l} \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)^\top \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

et la matrice A de taille $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme <u>*canonique pure*</u> s'il s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = c_1 x_1 + \cdots c_n x_n \right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right. \end{array}} \tag{3.2}$$

3.3 Forme standard

Sous cette forme, $I_1 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$. Un programme linéaire (PL) est dit sous forme <u>*standard*</u> s'il s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \right] \\ \text{sous les contraintes :} \\ \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right. \end{array}} \tag{3.3}$$

On dit de plus que le PL est sous forme standard <u>*simpliciale*</u> si A de taille $m \times n$ avec $m \leq n$, se décompose en :

$$A = \left(I_m \mid H \right) \tag{3.4}$$

où I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$ et H est une matrice de taille $m \times (n - m)$.

Remarque sur la positivité des variables. Sous forme canonique pure ou standard, on impose toujours la positivité des variables $\mathbf{x} \geq 0$. En fait, on peut toujours se ramener au cas $\mathbf{x} \geq 0$:

- Si la variable x (composante) a une borne inférieure non nulle $x \geq l$, il suffit de considérer la nouvelle variable (composante) $y = x - l$ à la place de x et alors on a $y \geq 0$.
- S'il n'y a pas de borne inférieure sur x (variable libre), on peut toujours poser $x = y - z$ avec les nouvelles variables $y \geq 0$, $z \geq 0$.

3.4 Variable d'écarts

Les variables d'écarts sont des variables supplémentaires qui permettent de transformer des contraintes d'inégalités en contraintes d'égalité.

Proposition 3.1. *Tout PL sous forme standard* <u>*s'écrit*</u> *de façon équivalente en un PL sous forme canonique pure et inversement.*

Démonstration. *i)* Soit un PL sous forme canonique pure. On a

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + e_i = b_i,\ \forall i = 1, \cdots, m$$

avec les variables supplémentaires $e_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 0$, pour tout $i = 1, \cdots, m$. Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} A \mid I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \\ \tilde{\mathbf{x}} \geq 0 \end{array} \right.$$

On a introduit les m variables supplémentaires $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_m)^\top$ qui sont appelées **variables d'écart**.

ii) Soit un PL sous forme standard. Montrons qu'on peut le transformer en un programme linéaire sous forme canonique pure. On a

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ -A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tilde{\tilde{A}}\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{b}}$$

où $\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $2m \times n$ et $\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$. □

Exemple. Le problème de production (2.1) est sous forme canonique pure. Mettons le sous forme standard en introduisant 3 variables d'écarts . La forme standard s'écrit

$$\begin{array}{l} \max\limits_{(x_1,x_2,e_1,e_2,e_3)} \left[F(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = 6x_1 + 4x_2 \right]. \\ \text{sous les contraintes :} \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{3.5}$$

Il y a désormais 5 variables x_1, x_2, e_1, e_2, e_3.

4 Solutions de base réalisables

On considère désormais (sauf mention contraire) un PL toujours sous *forme standard* c'est-à-dire avec des contraintes de la forme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$. Faisons à présent une hypothèse sur la matrice A.

Hypothèse de rang plein : On suppose que la matrice A est de taille $m \times n$ avec $\boxed{\text{rang}(A) = m \leq n}$.

On rappelle que le rang de A est le nombre maximal de lignes de A linéairement indépendantes. C'est aussi le nombre de colonnes de A linéairement indépendantes.

Sous l'hypothèse de rang plein :
- le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet toujours des solutions ;
- si $m < n$, le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une infinité de solutions ;
- si $m = n$, la matrice A est inversible. Dans ce cas, la solution du système linéaire est unique et vaut $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ et il n'y a rien à maximiser.

L'hypothèse de rang plein n'est pas restrictive car si rang$(A) < m$ le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ n'a pas de solution *en général*. Si rang$(A) < m$ et $b \in \mathrm{Im}(A)$, il y a des équations redondantes dans le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, qu'on peut donc supprimer pour obtenir un nouveau système de rang plein.

Définition 4.1. *On appelle* **solution réalisable** *tout vecteur* $\mathbf{x}$ *qui satisfait les contraintes du PL i.e. tel que* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *et* $\mathbf{x} \geq 0$.

Remarque. Pour la forme canonique pure avec $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, l'hypothèse de rang plein n'est pas non plus restrictive car si rang$(A) < m$, il y a des contraintes inégalités redondantes qu'on peut supprimer pour obtenir un système de rang plein.

Définition 4.2. *Soit* $B \subset \{1, \cdots, n\}$ *un ensemble d'indices avec card*$(B) = m$ *tel que les colonnes* A^j, $j \in B$, *de* A *sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée* A_B *formée des colonnes* A^j, $j \in B$, *est* **inversible**. *On dit que l'ensemble* B *des indices est une* **base**.

- *Les variables* $\mathbf{x}_B = (x_j,\ j \in B)$ *sont appelées* **variables de base**.
- *Les variables* $\mathbf{x}_H = (x_j,\ j \notin B)$ *sont appelées* **variables hors-base**.

On notera $H = \{j \in \{1, \cdots, n\}, j \notin B\}$ *l'ensemble des indices correspondants aux variables hors-base.*

Remarques.
- Sous l'hypothèse de rang plein, il existe toujours une base non vide.
- Quitte à renuméroter les indices, on peut toujours écrire les décompositions par blocs :

$$A = (A_B|\ A_H) \text{ où } A_H \text{ est la matrice formée des colonnes } A^j,\ j \notin B$$
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}.$$

Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est équivalent à

$$A_B\mathbf{x}_B + A_H\mathbf{x}_H = \mathbf{b}.$$

Par la relation précédente et du fait que la matrice A_B est inversible, on peut fixer les variables hors-base et les variables de base sont alors complètement déterminées.

Définition 4.3. *On dit que* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}$ *est* **solution de base** *associée à la base* B *si* $\mathbf{x}_H = 0$.

Propriétés des solutions de base réalisables : Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_H \end{pmatrix}$ est une <u>solution de base réalisable</u> alors $\mathbf{x}_H = 0$ et $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$.

Exemple. Reprenons l'exemple du problème de production de l'introduction. Sous forme standard (cf. (3.5)) , le PL s'écrit

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

On a $m=3$, $n=5$, $\mathrm{rang}(A)=m=3$. Une base est donnée par $B=\{3,4,5\}$ avec $A_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
La solution de base réalisable correspondante est $\mathbf{x}=(x_1,x_2,e_1,e_2,e_3)^\top=(\underbrace{0,0}_{\mathbf{x}_H},\underbrace{81,55,20}_{\mathbf{x}_B=A_B^{-1}\mathbf{b}})^\top$.

Remarque. Il y a *au plus* C_n^m solutions de base (toutes ne sont pas réalisables).

5 Propriétés géométriques des solutions de base réalisables

On note

$$\mathcal{D}_R=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x}=\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geq 0\}, \tag{5.1}$$

l'ensemble des solutions réalisables d'un PL sous forme standard.

Commençons par rappeler les notions de polyèdre et d'ensemble convexe :

- Un *polyèdre* Q de $\mathbb{R}^n$ est défini par $Q=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \mathcal{A}\mathbf{x}\leq\mathbf{d}\}$ où $\mathcal{A}$ est une matrice $m\times n$ et $\mathbf{d}$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

- Un ensemble E est dit *convexe* si $\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in E$, $\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\in E$ pour tout $0\leq\lambda\leq 1$.

Proposition 5.1. *L'ensemble $\mathcal{D}_R$ des solutions réalisables est un polyèdre convexe, fermé.*

Exemple. L'ensemble $\mathcal{D}_R=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \mid 2x_1+\frac{3}{2}x_2+x_3=3,\ x_1,x_2,x_3\geq 0\right\}$ est représenté sur la figure 2.

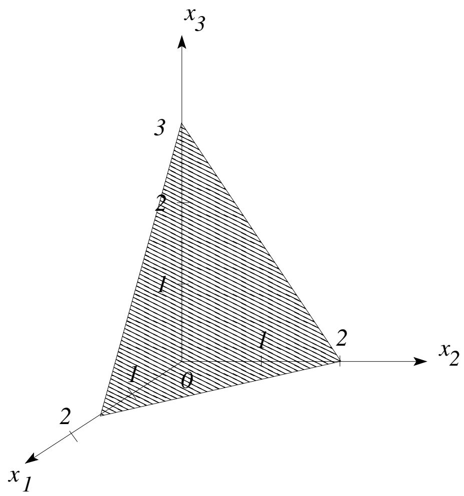

Figure 2 – Polyèdre des solutions réalisables

A la notion de polyèdre est associée la notion de sommet.

Définition 5.1. *Un point $\mathbf{x}\in\mathcal{D}_R$ est un* **sommet** *(ou point extrême) si et seulement s'il n'existe pas $\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathcal{D}_R$, $\mathbf{y}\neq\mathbf{z}$ tels que $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z}$ avec $0<\lambda<1$.*

Le lien entre sommet et solution de base réalisable est établi avec les résultats suivants.

Théorème 5.1. $\mathbf{x}$ *est une solution de base réalisable si et seulement si* $\mathbf{x}$ *est un sommet de* $\mathcal{D}_R$.

On a vu sur l'exemple de l'introduction que la solution était atteinte sur un sommet de $\mathcal{D}_R$ et correspond donc à une solution de base. Le résultat général s'énonce ainsi :

Théorème 5.2. *L'optimum de la fonction objectif* F *sur* $\mathcal{D}_R$*, s'il existe, est atteint en au moins un sommet de* $\mathcal{D}_R$.

Pour une preuve de ces résultats, on renvoit à [5, Théorème 1.5 et Corollaire 1.6] et aussi à [6] (voir également la démonstration en TD).

Ainsi, d'après le Théorème 5.2, pour résoudre un PL sous forme standard, il suffit de se restreindre aux solutions de base réalisables (les sommets de $\mathcal{D}_R$). Tout se passe donc avec les solutions de base.

L'ensemble $\mathcal{D}_R$ n'est pas nécessairement borné. En fait pour un PL, 3 situations (et seulement 3) peuvent se produire :

1. $\mathcal{D}_R = \emptyset$: le PL n'a pas de solution.
2. $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ mais la fonction objectif F n'est pas majorée sur $\mathcal{D}_R$: le maximum de F vaut $+\infty$. Si $\mathcal{D}_R$ est borné, ce cas est exclu.
3. $\mathcal{D}_R \neq \emptyset$ et la fonction objectif F est majorée sur $\mathcal{D}_R$: le PL admet une solution optimale (non nécessairement unique).

Remarque. On a vu qu'il y a au plus C_n^m solutions de base réalisables. Pour déterminer une solution de base, on doit résoudre un système linéaire ($\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$). La résolution d'un système linéaire par une méthode directe de type Gauss/LU requière de l'ordre de m^3 opérations. Si on explore toutes les solutions de base et que l'on compare les coûts correspondants, on effectue de l'ordre de $m^3 C_n^m$ opérations. Ce nombre est vite très grand avec n et m. Par exemple, avec $n = 20$ et $m = 10$, on a $3 \cdot 10^8$ opérations. Dans la méthode du simplexe, on va explorer seulement les sommets qui permettent d'augmenter la fonction objectif. On va réduire ainsi le nombre de solution de base à explorer et donc le nombre de système linéaire à résoudre.

6 Algorithme du simplexe

La méthode du simplexe est due à G. Dantzig (1947). Elle comporte 2 phases.

- **Phase 1 - Initialisation** : Trouver une solution de base réalisable (ou bien détecter l'impossibilité : $\mathcal{D}_R = \emptyset$).
- **Phase 2 - Progression** : On passe d'un sommet à un sommet voisin pour augmenter la fonction objectif F (ou bien on détecte une fonction objectif F non majorée).

La terminologie de la méthode du simplexe vient du fait qu'on appelle *n-simplexe* ou simplement *simplexe*, l'enveloppe convexe d'un ensemble de $n+1$ points ($n = 1$: un segment, $n = 2$: un triangle, $n = 3$: un tétraèdre).

On commence par décrire la phase 2 c'est-à-dire la progression de la méthode du simplexe.

6.1 L'algorithme du simplexe proprement dit : la phase 2

On dispose d'une solution de base réalisable $\underline{\mathbf{x}}$ d'un PL sous forme standard. A une permutation près des colonnes, la matrice A peut s'écrire (cf. Remarque page 9)

$$A = (A_B \mid A_H)$$

avec A_B une matrice carrée de taille $m \times m$, *inversible*, correspondant aux variables de base et A_H une matrice de taille $m \times (n-m)$, correspondant aux variables hors-base. On décompose également (à la même permutation près des composantes)

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}_B \\ \underline{\mathbf{x}}_H \end{pmatrix}$$

Le but est de trouver une autre base B^* et une solution de base $\mathbf{x}^*$ associée telles $\mathbf{x}^*$ est meilleur que $\underline{\mathbf{x}}$ au sens où

$$F(\mathbf{x}^*) > F(\underline{\mathbf{x}})$$

La méthode du simplexe consiste à faire rentrer une variable hors-base dans la nouvelle base (on parlera de **variable entrante**) et faire sortir à la place une variable de base (on parlera de **variable sortante**).

6.2 Calcul des coûts réduits et variable entrante

On exprime la fonction objectif F en fonction des variables hors-base $\mathbf{x}_H$.

Proposition 6.1. *Pour tout* $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$*, on a*

$$F(\mathbf{x}) = F(\underline{\mathbf{x}}) + \mathbf{L}_H^\top \mathbf{x}_H \tag{6.1}$$

où le vecteur $\mathbf{L}_H \in \mathbb{R}^{n-m}$ *appelé vecteur des* **coûts réduits***, vaut*

$$\mathbf{L}_H^\top = \mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1} A_H \tag{6.2}$$

avec la décomposition $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_H \end{pmatrix}$.

Démonstration. On a $\mathbf{b} = A\mathbf{x} = A_B\mathbf{x}_B + A_H\mathbf{x}_H$ avec A_B inversible donc $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}(\mathbf{b} - A_H\mathbf{x}_H)$. On obtient donc

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^\top\mathbf{x} = \mathbf{c}_B^\top\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_H^\top\mathbf{x}_H \quad \text{avec} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_H \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}(\mathbf{b} - A_H\mathbf{x}_H) + \mathbf{c}_H^\top\mathbf{x}_H \\ &= \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}A_H)\mathbf{x}_H \end{aligned}$$

Or $\underline{\mathbf{x}}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$ (car $\underline{\mathbf{x}}_H = 0$) et $\mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}^\top\underline{\mathbf{x}} = F(\underline{\mathbf{x}})$ donc

$$F(\mathbf{x}) = F(\underline{\mathbf{x}}) + (\mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1}A_H)\mathbf{x}_H, \tag{6.3}$$

d'où le résultat. □

Variable entrante.

— Si les coûts réduits sont **tous négatifs** i.e. $\mathbf{L}_H \leq 0$, il n'est alors pas possible d'augmenter la fonction objectif F : l'algorithme se termine *normalement* c'est-à-dire qu'on a trouvé une solution de base réalisable **optimale**.

— Dans le cas contraire (i.e. il existe une composante $(\mathbf{L}_H)_i > 0$), on a intérêt à faire entrer dans la base, la variable hors-base qui a **le coût réduit positif le plus grand possible**.

Choix de la variable entrante.

On note $e \notin B$ l'indice de la **variable entrante** et on note x_e la variable entrante. L'indice e est choisi tel que

$$(\mathbf{L}_H)_e = \max_j \left\{ (\mathbf{L}_H)_j,\ (\mathbf{L}_H)_j > 0 \right\}$$

ce qu'on note par

$$\boxed{e = \operatorname*{argmax}_j \left\{ (\mathbf{L}_H)_j,\ (\mathbf{L}_H)_j > 0 \right\}} \tag{6.4}$$

Remarque. **Cas d'une minimisation.** Si on traite d'un problème de minimisation c'est-à-dire avec $\min F(\mathbf{x})$, alors la variable entrante x_e est déterminée par l'indice

$$e = \operatorname*{argmin}_j \left\{ (\mathbf{L}_H)_j,\ (\mathbf{L}_H)_j < 0 \right\} \tag{6.5}$$

Dans le cas d'une minimisation, si tous les coûts réduits sont **positifs** i.e. $\mathbf{L}_H \geq 0$, il n'est plus possible de diminuer la fonction objectif F : on a alors trouvé une solution de base réalisable optimale.

6.3 Variable sortante

Une fois l'indice e choisi, c'est-à-dire une fois que l'on a déterminé la variable entrante, il faut déterminer en contrepartie la variable de base qui doit quitter la base (i.e. devenir une variable hors-base). En maintenant la relation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, on augmente x_e jusqu'à annuler une des variables de base. Cette variable sera alors la **variable sortante**.

On note A^e la e-ième colonne de la matrice A.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad &\Leftrightarrow \quad A_B\mathbf{x}_B + A^e x_e = \mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_B = A_B^{-1}(\mathbf{b} - A^e x_e) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_B = \underline{\mathbf{x}}_B - A_B^{-1}A^e x_e \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_B = \underline{\mathbf{x}}_B - \mathbf{z}x_e \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$\boxed{\mathbf{z} = A_B^{-1}A^e \in \mathbb{R}^m.} \tag{6.6}$$

Pour déterminer la variable sortante, on maintient la contrainte de positivité $\mathbf{x}_B \geq 0$ en faisant varier les valeurs de la variable entrante x_e :

— Si $\mathbf{z} \leq 0$, on peut augmenter x_e autant qu'on veut, on aura toujours la positivité de la variable de base $\mathbf{x}_B$. Dans ce cas, la fonction objectif n'est pas majorée sur $\mathcal{D}_R$ i.e. le maximum de F vaut $+\infty$. Dans ce cas, l'algorithme s'arrête.

— Sinon (i.e. il existe une composante $z_i > 0$), afin de maintenir la positivité $(\underline{\mathbf{x}}_B)_i - z_i x_e \geq 0$ pour tout i, on choisit la variable sortante pour laquelle le rapport

$$\frac{(\underline{\mathbf{x}}_B)_i}{z_i}$$

pour $i = 1, \cdots, m$ avec $z_i > 0$, est **le plus petit possible**.

Choix de la variable sortante.

On note $s \in B$ l'indice de la **variable sortante** et on note x_s la variable sortante. L'indice s est choisi tel que

$$\boxed{s = \underset{i}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{(\underline{\mathbf{x}}_B)_i}{z_i},\ z_i > 0 \right\}} \tag{6.7}$$

On a, dans ce cas, $x_s = 0$ et $\mathbf{x}_B \geq 0$. La valeur de la variable entrante est donnée par

$$\boxed{x_e = \min_i \left\{ \frac{(\underline{\mathbf{x}}_B)_i}{z_i},\ z_i > 0 \right\}} \tag{6.8}$$

Résumé de la méthode du simplexe en phase 2 (progression)

1. *Variables de base réalisables et coûts réduits* :
   - calcul des variables de base réalisables : étant donné $A = (A_B \mid A_H)$, on calcule les variables de base réalisables $\underline{\mathbf{x}}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$.
   - calcul des coûts réduits : $\mathbf{L}_H^\top = \mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_B^{-1} A_H$
   - si $\mathbf{L}_H \leq 0$ alors $\underline{\mathbf{x}}_B$ est une solution optimale ($\to$ arrêt de l'algo.).
2. *Variable entrante x_e* : détermination de l'indice $e = \operatorname{argmax}_j \left\{ (\mathbf{L}_H)_j,\ (\mathbf{L}_H)_j > 0 \right\}$
3. *Variable sortante x_s* :
   - calcul de $\mathbf{z} = A_B^{-1} A^e$
   - détermination de l'indice $s = \operatorname{argmin}_i \left\{ \frac{(\underline{\mathbf{x}}_B)_i}{z_i},\ z_i > 0 \right\}$.
4. On obtient une nouvelle base B^* et une nouvelle matrice A_{B^*} dans laquelle la colonne A^e remplace la colonne A^s. Calcul de $A_{B^*}^{-1}$ et retour en 1 avec la base B^* au lieu de B.

Il existe plusieurs méthodes de mise en œuvre de la méthode du simplexe qui diffèrent essentiellement sur la façon d'effectuer les différents calculs (solution de base réalisable $\mathbf{x}_B$, coûts réduits $\mathbf{L}_H$, etc.). On va présenter deux méthodes de mise en oeuvre. La première méthode appelée **méthode des dictionnaires** permet de traiter des exemples simples ≪ à la main ≫ sans avoir à calculer explicitement la matrice inverse A_B^{-1} ni les coûts réduits $\mathbf{L}_H$. L'avantage de cette méthode est de bien mettre en évidence le fonctionnement de la méthode du simplexe. La seconde méthode de mise en œuvre est appelée **méthode des tableaux**. Il s'agit d'une méthode plus algébrique qui repose notamment sur la mise à jour de l'inverse $A_{B^*}^{-1}$ à partir de l'inverse A_B^{-1} lorsque la matrice A est sous forme simpliciale.

7 Mises en œuvre de l'algorithme du simplexe

7.1 Méthode des dictionnaires

On considère un PL sous forme standard, c'est-à-dire de la forme

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$$
$$\begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

On se place à une itération donnée dans la méthode du simplexe. On dispose d'une base B ainsi que des variables de base $\mathbf{x}_B$ et des variables hors-base $\mathbf{x}_H$. On veut obtenir une nouvelle solution de base réalisable en déterminant des variables entrante et sortante pour augmenter F. Le principe de la méthode des dictionnaires est le suivant :

Principe de la méthode des dictionnaires : on exprime les variables de base $\mathbf{x}_B$ ainsi que F en fonction des variables hors-base $\mathbf{x}_H$. On obtient un système linéaire qu'on appelle **dictionnaire**. On choisit la variable entrante comme la variable de $\mathbf{x}_H$ qui fait le plus augmenter F. On détermine la variable sortante en maintenant les conditions de positivité sur les variables de base $\mathbf{x}_B \geq 0$.

Exemple du problème de production. On va résoudre le problème de production (2.1) par la méthode des dictionnaires. Ce problème s'écrit sous forme standard (variables d'écart e_1, e_2, e_3)

$$\max F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e3 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0, \; e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

Solution de base réalisable initiale : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $e_1 = 81$, $e_2 = 55$, $e_3 = 20$ avec $F = 0$.

⋆ **Etape 1**.

— *Dictionnaire* : On exprime les variables de base e_1, e_2, e_3 en fonction des variables hors-base x_1, x_2.

$$\boxed{\begin{array}{l} e_1 = 81 - 3x_1 - 9x_2 \\ e_2 = 55 - 4x_1 - 5x_2 \\ e_3 = 20 - 2x_1 - x_2 \\ \hline F = 6x_1 + 4x_2 \end{array}}$$

— *Variable entrante* x_e : $\max\limits_{>0}\{\mathbf{6},\; 4\} = 6 \Rightarrow \boxed{x_e = x_1}$.

— *Variable sortante* x_s : on maintient les contraintes $e_1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$, $e_3 \geq 0$

$$\Rightarrow x_1 = \min_{>0}\{\frac{81}{3}, \frac{55}{4}, \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{2}}\} = 10 \Rightarrow \boxed{x_s = e_3}.$$

— *Nouvelle Solution de base réalisable* :

$$\underline{\boxed{x_1 = 10}}, x_2 = 0,\; e_1 = 51,\; e_2 = 15,\; \underline{\boxed{e_3 = 0}} \quad \text{avec} \quad F = 60.$$

⋆ **Etape 2**.

— *Dictionnaire* : On exprime la nouvelle variable de base x_1 en fonction de x_2 et e_3 (e_3 est une nouvelle variable hors-base). On utilise la 3ème équation du dictionnaire de l'étape 1 et on substitue x_1 dans les autres relations.

$$\begin{array}{l} x_1 = 10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ e_1 = 81 - 3(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) - 9x_2 \\ e_2 = 55 - 4(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) - 5x_2 \\ \hline F = 6(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) + 4x_2 \end{array}$$

ce qui donne le dictionnaire :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ e_1 = 51 - \frac{15}{2}x_2 + \frac{3}{2}e_3 \\ e_2 = 15 - 3x_2 + 2e_3 \\ \hline F = 60 + x_2 - 3e_3 \end{array}}$$

— *Variable entrante* x_e : $\max\limits_{>0}\{\mathbf{1},\; -3\} = 1 \Rightarrow \boxed{x_e = x_2}$.

— *Variable sortante x_s :* on maintient $x_1 \geq 0$, $e_1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$

$$\Rightarrow x_2 = \min_{>0}\{\frac{10}{1/2}, \frac{51}{15/2}, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{3}}\} = 5 \Rightarrow \boxed{x_s = e_2}.$$

— *Nouvelle solution de base réalisable (étape 2) :*

$$x_1 = \frac{15}{2},\ \underline{\boxed{x_2 = 5}}, e_1 = \frac{27}{2},\ \underline{\boxed{e_2 = 0}}, e_3 = 0 \text{ avec } F = 65.$$

⋆ **Etape 3**.

— *Dictionnaire* : On exprime la nouvelle variable de base x_2 en fonction des variables hors-base e_2 et e_3. On utilise la 3ème équation du dictionnaire de l'étape 2 et on substitue x_2 dans les autres relations. On obtient le dictionnaire :

$$\begin{array}{|l|}\hline x_2 = 5 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 \\ x_1 = \frac{15}{2} + \frac{1}{6}e_2 - \frac{5}{6}e_3 \\ e_1 = \frac{27}{2} + \frac{5}{2}e_2 - \frac{7}{2}e_3 \\ \hline F = 65 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}e_2 - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}e_3 \\ \hline \end{array}$$

Les coûts réduits sont donnés par $\mathbf{L}_H^\top = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right)$. Tous les coûts réduits sont négatifs donc on ne peut plus augmenter F : l'optimum est atteint et la solution optimale est

$$x_1^* = \frac{15}{2},\ x_2^* = 5,\ e_1^* = \frac{27}{2},\ e_2^* = 0,\ e_3^* = 0 \text{ avec } \max F = 65.$$

Interprétation des variables d'écart. Le plan de production optimal qui maximise les bénéfices consiste à produire $x_1^* = \frac{15}{2}$ unités de produit P_1 et $x_2^* = 5$ unités de produit P_2. Les variables d'écart e_2^* et e_3^* sont nulles ce qui signifie qu'à l'optimum les inégalités dans les 2ème et 3ème contraintes de (7.1) sont en fait des égalités. En particulier, à l'optimum toutes les ressources en main d'œuvre (2ème contrainte) et en matière première (3ème contrainte) disponibles dans l'usine sont utilisées. En revanche, il reste $e_1^* = \frac{27}{2}$ unités d'équipement non utilisées.

7.2 Méthode des tableaux

Les calculs précédents peuvent se simplifier si on s'arrange pour avoir toujours $A_B = I_d$. On dit ≪ qu'on maintient l'identité sous la base ≫. De cette façon, la résolution d'un système $A_B\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ est immédiate, puisque $\mathbf{x}_B = b$. On va donc chercher à travailler avec la forme *simpliciale* de PL (cf. (3.4)). On suppose donc que la matrice A se décompose en

$$A = (I_m \mid A_H)$$

où I_m est la matrice identité d'ordre m, et on dispose d'une solution de base réalisable $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}_B \\ \underline{\mathbf{x}}_H \end{pmatrix}$ avec $\underline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{b}$ et $\underline{\mathbf{x}}_H = 0$. Dans ce cas, les coûts réduits se simplifient en :

$$\boxed{\mathbf{L}_H^\top = \mathbf{c}_H^\top - \mathbf{c}_B^\top A_H} \tag{7.2}$$

et les indices e et s des variables entrante et sortante sont données par :

$$\boxed{\begin{aligned} e &= \operatorname*{argmax}_j \left\{(\mathbf{L}_H)_j, \quad \text{avec } (\mathbf{L}_H)_j > 0\right\} \\ s &= \operatorname*{argmin}_i \left\{\frac{b_i}{a_{ie}}, \quad \text{avec } a_{ie} = (A_H)_{i,e} > 0\right\} \end{aligned}} \tag{7.3}$$

avec

$$\boxed{x_e = \frac{b_s}{a_{se}}}. \tag{7.4}$$

Une fois les variables entrante et sortante choisies, on doit retrouver un système *simplicial.*

7.2.1 Retour à un système simplicial et mise à jour des matrices de base

Après permutation des variables entrante et sortante, la nouvelle base $\tilde{B}$ et le nouvel ensemble des indices hors-base $\tilde{H}$ valent

$$\boxed{\begin{array}{l} \widetilde{B} = B + \{e\} - \{s\} \\ \widetilde{H} = H - \{e\} + \{s\} \end{array}} \tag{7.5}$$

La nouvelle matrice s'écrit alors

$$A' = \left(A_{\widetilde{B}} \mid A_{\widetilde{H}}\right).$$

La matrice $A_{\widetilde{B}}$ est donnée par :

$$A_{\widetilde{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & (s) & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & a_{1,e} & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & a_{s,e} & & \\ & & & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & a_{m,e} & & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Puisque $a_{s,e} > 0$, la matrice $A_{\widetilde{B}}$ est inversible et on a :

$$A_{\widetilde{B}}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & (s) & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & -a_{1,e}/a_{s,e} & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ & 1 & & & \\ & & 1/a_{s,e} & & \\ & & & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & -a_{m,e}/a_{s,e} & & 1 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{7.6}$$

Plus précisément, pour tout $i = 1, \cdots, m$, on a

$$\left(A_{\widetilde{B}}^{-1}\right)_{ij} = \delta_{ij} \;\; \text{si } j \neq s \qquad \text{et} \qquad \left(A_{\widetilde{B}}^{-1}\right)_{is} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ie}}{a_{se}}, & \text{si } i \neq s \\ \dfrac{1}{a_{se}}, & \text{si } i = s \end{cases}$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker. On factorise alors la matrice A' par $A' = A_{\widetilde{B}}\left(I_m \mid \widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right)$ avec la matrice $\widetilde{A}_{\widetilde{H}}$ de taille $m \times (n-m)$ donnée par

$$\boxed{\widetilde{A}_{\widetilde{H}} = A_{\widetilde{B}}^{-1} A_{\widetilde{H}}}. \tag{7.7}$$

On note $\mathbf{x}'$ la nouvelle solution de base après permutation des variables entrante et sortante. On obtient

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad & \Leftrightarrow \quad A'\mathbf{x}' = \mathbf{b} \\ & \Leftrightarrow \quad A_{\widetilde{B}}\left(I_m \mid \widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right)\mathbf{x}' = \mathbf{b} \\ & \Leftrightarrow \quad \left(I_m \mid \widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right)\mathbf{x}' = \widetilde{\mathbf{b}}. \end{aligned}$$

avec le second membre

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{b}} = A_{\widetilde{B}}^{-1}\mathbf{b}}. \tag{7.8}$$

Après échange des variables entrante et sortante, on obtient ainsi un nouveau système sous forme *simplicial*.

En tenant compte de la forme explicite de $A_{\widetilde{B}}^{-1}$ donné par (7.6), on a les formules suivantes pour le calcul de $\widetilde{A}_{\widetilde{H}}$.

Proposition 7.1. *On note $[M]_i$ la i-ème ligne (vecteur) d'une matrice M. On a les relations pour les matrices*

$$\boxed{\begin{aligned} \left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_i &= \left[A_{\widetilde{H}}\right]_i - \frac{a_{ie}}{a_{se}}\left[A_{\widetilde{H}}\right]_s, \quad \forall i \neq s \\ \left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s &= \frac{1}{a_{se}}\left[A_{\widetilde{H}}\right]_s. \end{aligned}} \tag{7.9}$$

et de même avec le second membre :

$$\boxed{\begin{aligned} \widetilde{b}_i &= b_i - \frac{a_{ie}}{a_{se}} b_s, \quad \forall i \neq s \\ \widetilde{b}_s &= \frac{b_s}{a_{se}}. \end{aligned}} \tag{7.10}$$

7.2.2 Mise à jour des coûts réduits

D'après la proposition 6.1, la fonction objectif F se décompose en $F(\mathbf{x}) = F_{opt} + \mathbf{L}_H^\top \mathbf{x}_H$ où $F_{opt} = F(\underline{\mathbf{x}})$ avec $\underline{\mathbf{x}}$ une solution de base réalisable associée à la base B. On veut exprimer F dans la nouvelle base $\widetilde{B} = B + \{e\} - \{s\}$ et avec le nouvel ensemble d'indices des variables hors-base $\widetilde{H} = H - \{e\} + \{s\}$.

Proposition 7.2. *On a* $F(\mathbf{x}) = \widetilde{F}_{opt} + \widetilde{\mathbf{L}}_{\widetilde{H}}^\top \mathbf{x}_{\widetilde{H}}$ *avec*

$$\boxed{\widetilde{F}_{opt} = F_{opt} + (\mathbf{L}_H)_e \widetilde{b}_s} \tag{7.11}$$

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{L}}_{\widetilde{H}}^\top = \mathbf{L}_{\widetilde{H}}^\top - (\mathbf{L}_H)_e \left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s} \tag{7.12}$$

avec $\widetilde{b}_s = \dfrac{b_s}{a_{se}}$ *et où* $\left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s$ *désigne la s-ième ligne de* $\widetilde{A}_{\widetilde{H}}$.

Démonstration. Si on note

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{L}_H \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

alors la fonction objectif s'écrit

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{x}) &= F_{opt} + \mathbf{L}^\top \mathbf{x} = F_{opt} + \sum_{j\in H} L_j x_j \\
&= F_{opt} + \sum_{j\in H-\{e\}+\{s\}} L_j x_j + \underbrace{L_e}_{=(\mathbf{L}_H)_e} x_e - \underbrace{L_s}_{=0} x_s \\
&= F_{opt} + \sum_{j\in \widetilde{H}} L_j x_j + (\mathbf{L}_H)_e x_e \\
&= F_{opt} + \mathbf{L}_{\widetilde{H}}^\top \mathbf{x}_{\widetilde{H}} + (\mathbf{L}_H)_e x_e. \qquad (7.13)
\end{aligned}
$$

On exprime ensuite x_e par rapport aux nouvelles variables hors-base, en écrivant la relation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sur la composante s :

$$\mathbf{x}_B + A_H \mathbf{x}_H = \mathbf{b}$$

ce qui donne

$$x_s + \sum_{j\in H} a_{sj} x_j = b_s.$$

On écrit alors

$$x_s + \sum_{j\in H-\{e\}} a_{sj} x_j + a_{se} x_e = b_s. \qquad (7.14)$$

Puisque $a_{ss} = 1$ (car sous forme simplicial $A_B = I_m$), on obtient

$$x_s + \sum_{j\in H-\{e\}} a_{sj} x_j = \sum_{j\in H-\{e\}+\{s\}} a_{sj} x_j = \sum_{j\in \widetilde{H}} a_{sj} x_j.$$

La relation (7.14) donne $x_e = \dfrac{b_s}{a_{se}} - \displaystyle\sum_{j\in\widetilde{H}} \dfrac{a_{sj}}{a_{se}} x_j$. En notant $\widetilde{b}_s = \dfrac{b_s}{a_{se}}$ et en remarquent que $\left(\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right)_{sj} = \dfrac{a_{sj}}{a_{se}}$, on obtient

$$x_e = \widetilde{b}_s - \left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s \mathbf{x}_{\widetilde{H}},$$

où $\left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s$ désigne la s-ième ligne de $\widetilde{A}_{\widetilde{H}}$. En injectant l'expression de x_e dans (7.13), on obtient :

$$F(\mathbf{x}) = \underbrace{F_{opt} + (\mathbf{L}_H)_e \widetilde{b}_s}_{\widetilde{F}_{opt}} + \underbrace{\left(\mathbf{L}_{\widetilde{H}}^\top - (\mathbf{L}_H)_e \left[\widetilde{A}_{\widetilde{H}}\right]_s\right)}_{\widetilde{\mathbf{L}}_{\widetilde{H}}^\top} \mathbf{x}_{\widetilde{H}}.$$

□

7.2.3 Mise en place de la méthode des tableaux

A chaque étape de la méthode des tableaux, on regroupe dans un seul tableau (d'où le nom de la méthode), la matrice A et second membre $\mathbf{b}$, les coûts réduits $\mathbf{L}_H$ et la valeur F_{opt} de la fonction objectif F sur la solution de base courante. Dans le tableau, on sépare les variables de base des variables hors-base (voir le tableau 2).

variables de base $\mathbf{x}_B$	variables hors-base $\mathbf{x}_H$	
$A_B = I_m$	A_H	$\mathbf{b}$
$\mathbf{L}_B = 0$	$\mathbf{L}_H$	F_{opt}

TABLE 2 – Méthode des tableaux

On utilise les formules de mise à jour données par les propositions 7.1 et 7.2. En traduisant ces formules sur le tableau ci-dessus, la méthode des tableaux s'écrit alors :

1. *choix de la variable entrante* ($e \in H$) : $e = \underset{j}{\operatorname{argmax}} \Big\{ (\mathbf{L}_H)_j, \quad \text{avec } (\mathbf{L}_H)_j > 0 \Big\}$.
2. *choix de la variable sortante* ($s \in B$) : $s = \underset{i}{\operatorname{argmin}} \left\{ \dfrac{b_i}{a_{ie}}, \quad \text{avec } a_{ie} = (A_H)_{ie} > 0 \right\}$.
3. pour $i \neq s$, $\text{ligne}[i] \leftarrow \text{ligne}[i] - \dfrac{a_{ie}}{a_{se}} \times \text{ligne}[s]$.
4. $\text{ligne}[s] \leftarrow \dfrac{1}{a_{se}} \times \text{ligne}[s]$.

Remarque pratique importante. Compte tenu des relations (7.9)–(7.12), les transformations sur les lignes concernent également *le second membre*$\mathbf{b}$ et F_{opt} et *la ligne des coûts réduits* $\mathbf{L}_H$. Au début de l'étape suivante, on commence par permuter les variables entrante et sortante dans le tableau.

7.2.4 Exemple

On reprend encore une fois le problème de production (sous forme standard) :

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2 \right].$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e_1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e_2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e_3 = 20 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Une solution de base réalisable évidente est donnée par $e_1 = 81$, $e_2 = 55$, $e_3 = 20$ (variables de base) et $x_1 = x_2 = 0$ (variables hors-base), ce qui donne une valeur de la fonction objectif $F_{opt} = 0$. La base initiale est $B_0 = \{3, 4, 5\}$ avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2, e_1, e_2, e_3)^\top$.

$\star$ **Etape 1.**

variables de base			variables hors-base		
e_1	e_2	e_3	x_1	x_2	$\mathbf{b}$
1	0	0	3	9	81
0	1	0	4	5	55
0	0	1	2	1	20
0	0	0	6	4	$F_{opt} = 0$

variable entrante : $\max_j\{(\mathbf{L}_H)_j,\ (\mathbf{L}_H)_j > 0\} = 6 \ \Rightarrow\ x_e^{(1)} = x_1$ variable entrante.
variable sortante : $x_e^{(1)} = x_1 = \min\left(\frac{81}{3}, \frac{55}{4}, \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{2}}\right) = \frac{20}{2} \ \Rightarrow x_s^{(1)} = e_3$ variable sortante.
La nouvelle base est donnée par $B_1 = \{3, 4, 1\}$. L'inverse de la matrice de base est donnée par

$$A_{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

⋆ **Etape 2.**

e_1	e_2	x_1	e_3	x_2	$\widetilde{\mathbf{b}}$
1	0	0	-3/2	15/2	51
0	1	0	-2	3	15
0	0	1	1/2	1/2	10
0	0	0	-3	1	$F_{opt} = 60$

variable entrante : $\max_j\{(\mathbf{L}_H)_j,\ (\mathbf{L}_H)_j > 0\} = 1 \ \Rightarrow\ x_e^{(2)} = x_2$ variable entrante.
variable sortante : $x_e^{(2)} = x_2 = \min\left(\frac{51}{15/2}, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{3}}, \frac{10}{1/2}\right) = \frac{15}{3} \ \Rightarrow x_s^{(2)} = e_2$ variable sortante.
La nouvelle base est donnée par $B_2 = \{3, 2, 1\}$. L'inverse de la matrice de base est donnée par

$$A_{B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette étape correspond à l'examen du sommet $\mathbf{x} = (x_1 = 10,\ x_2 = 0)$ de l'ensemble $\mathcal{D}_R$ des solutions réalisables (cf. Figure 1).

⋆ **Etape 3.**

e_1	x_2	x_1	e_3	e_2	$\widetilde{\mathbf{b}}$
1	0	0	7/2	-5/2	27/2
0	1	0	-2/3	1/3	5
0	0	1	5/6	-1/6	15/2
0	0	0	-11/3	-1/3	$F_{opt} = 65$
			< 0	< 0	

Les nouveaux coûts réduits $\mathbf{L}_H = (-7/3, -1/3)$ sont tous négatifs. L'optimum est donc atteint avec $\max F = 65$.

Solution optimale $\mathbf{x}^*$ *:*

$$\begin{cases} e_1^* = 27/2,\ x_2^* = 5,\ x_1^* = 15/2 \\ e_3^* = e_2^* = 0 \end{cases}$$

8 Convergence du simplexe

A chaque étape de l'algorithme du simplexe (en phase 2), on peut distinguer des cas remarquables qui conduisent tous à l'arrêt de l'algorithme.

1. Si les coûts réduits sont tous strictement négatifs i.e. $\mathbf{L}_H < 0$, alors la solution de base réalisable courante est l'unique optimum.

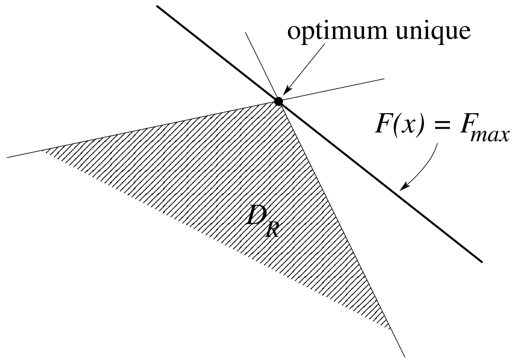

FIGURE 3 – Cas d'un optimum unique

2. Si les coûts réduits sont négatifs ou nuls i.e. $\mathbf{L}_H \leq 0$, alors il y a deux cas remarquables :

   i) Si le coût réduit de la variable entrante est nul, i.e. $(\mathbf{L}_H)_e = 0$ et si $x_e > 0$, alors l'optimum n'est pas unique.

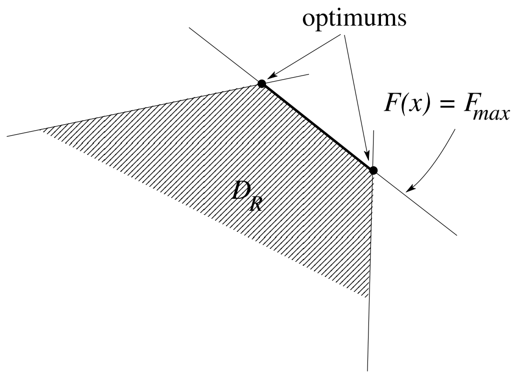

FIGURE 4 – Cas de non unicité de l'optimum.

   ii) Si $(\mathbf{L}_H)_e = 0$ et $x_e = 0$, alors l'optimum est unique (a priori). Dans ce cas, la base est dite **dégénérée** c'est-à-dire qu'il existe une variable de base *nulle*.

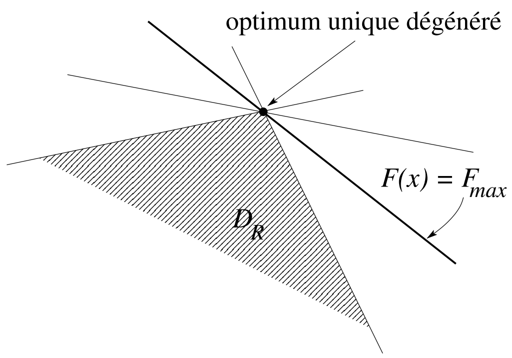

FIGURE 5 – Cas d'un optimum dégénéré (unicité)

3. Si le coût réduit de la variable entrante est strictement positif i.e. $(\mathbf{L}_H)_e > 0$ et si x_e n'est pas borné alors la fonction objectif F n'est pas majorée : $\max_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}_R} F(x) = +\infty$.

Une solution de base réalisable est dite **dégénérée** si au moins une des variables de base est *nulle*.

Théorème 8.1. *Si au cours de l'algorithme du simplexe, aucune base rencontrée n'est dégénérée, alors l'algorithme se termine en un nombre fini d'itérations.*

Démonstration. A une itération donnée de l'algorithme, soit on détecte une fonction objectif non majorée ($\rightarrow$ arrêt de l'algo.), soit elle est strictement croissante car $\widetilde{F}_{opt} - F_{opt} = (\mathbf{L}_H)_e \dfrac{b_s}{a_{se}} = (\mathbf{L}_H)_e x_e > 0$ puisque $(L_H)_e > 0$ et $x_e > 0$ (par hypothèse, aucune base rencontrée n'est dégénérée). Par conséquent, on ne rencontre jamais une base déjà rencontrée à une itération précédente. Le nombre de solution de base réalisable étant fini ($\leq C_n^m$), l'algorithme s'arrête nécessairement en un nombre fini d'itérations. □

Remarques :
- S'il existe une base dégénérée, alors on peut rencontrer un éventuel *cyclage* de l'algorithme : on retrouve une base déjà rencontrée et on boucle indéfiniment. Pour traiter les cas de dégénérescence, on peut appliquer la règle de Bland (1977) qui assure l'arrêt de l'algorithme en un nombre fini d'itérations. Cette règle s'énonce de la façon suivante : *Lorsque plusieurs variables sont susceptibles d'entrer ou de sortir de la base, on choisit toujours celle qui a l'indice le plus petit.*
- **Complexité de la méthode du simplexe.** On peut construire des exemples de programmes linéaires sous forme canonique pure (Klee-Minty, 1972) pour lesquelles le nombre d'itérations nécessaires dans la méthode du simplexe (i.e. la complexité) est exponentielle en $O(2^n)$ où n est le nombre de variables. Dans la pratique la complexité du simplexe croît peu avec le nombre de variables et le nombre d'itérations nécessaires est proportionnel au nombre de contraintes (de m à $3m$ itérations).

9 Initialisation et variables artificielles : la phase 1

9.1 Problème auxiliaire

Pour un PL sous forme canonique pure avec les contraintes $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$, on peut déterminer facilement une solution de base réalisable dans le cas où $\mathbf{b} \geq 0$. En effet, sous forme standard les contraintes deviennnent $A\mathbf{x}+\mathbf{e} = \mathbf{b}$, avec $\mathbf{x}, \mathbf{e} \geq 0$ où $\mathbf{e}$ désignent les variables d'écarts. Une solution de base réalisable évidente est alors $\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{e} = \mathbf{b} \geq 0$. Cependant, pour un PL sous forme standard, il n'y a pas toujours de solution de base réalisable évidente. On va voir comment contruire des solutions de base réalisable : c'est la phase d'initialisation du simplexe encore appelée « phase 1 ».

Considèrons le PL sous forme standard

$$(PL) \quad \begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \tag{9.1}$$

On ne suppose pas que la matrice A de taille $m \times n$ est de rang plein, ni qu'il existe bien des solutions réalisables. En revanche, pour le programme linéaire (9.1) sous *forme standard*, on suppose que $\mathbf{b} \geq 0$. Pour une forme standard, on peut toujours se ramener à la situation $\mathbf{b} \geq 0$ en changeant le signe des coefficients de la ligne de la matrice A correspondant à une composante de négative. Bien entendu, cette hypothèse n'est pas valable pour un programme linéaire avec des contraintes inégalités c'est-à-dire sous forme canonique pure car changer le signe des coefficients change le sens de l'inégalité.

Pour obtenir une solution de base réalisable ou bien pour détecter l'impossibilité, on introduit un problème de programmation linéaire **auxiliaire** pour des variables supplémentaires appelées **variables artificielles**.

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_m)$ les variables artificielles auxquelles on associe le problème

$$(PLA) \quad \begin{cases} \min\limits_{(\mathbf{x},\mathbf{a})} \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \\ A\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{a} \geq 0 \end{cases} \tag{9.2}$$

On a la propriété (évidente) suivante.

Proposition 9.1. *Un PL sous forme standard admet une solution réalisable si et seulement si le problème auxiliaire (PLA) admet une solution de base optimale avec* $\mathbf{a} = 0$.

Ce résultat fournit un procédé pratique pour obtenir une solution de base réalisable pour le problème (PL). On applique l'algorithme du simplexe au problème auxiliaire (PLA). A la fin du simplexe, le coût minimal est nul sinon on a détecté l'impossibilité pour (PL) (i.e. $\mathcal{D}_R = \emptyset$). A la fin du simplexe sur (PLA), si tout s'est déroulé normalement (coût nul), on cherche à éliminer de la base toutes les variables artificielles. Deux cas de figure se présentent alors :

1. On a réussi à faire sortir toutes les variables artificielles. On passe à la phase 2 du simplexe.
2. S'il reste des variables artificielles dans la base (base *dégénérée*) alors les lignes associées à ces variables sont des contraintes redondantes qu'on supprime.

Résumé de la phase d'initialisation du simplexe (phase 1).

On note F^*_{aux} la valeur de la fonction objectif du problème auxiliaire (PLA) à la fin du simplexe, c'est-à-dire $F^*_{aux} = \min\limits_{(\mathbf{x},\mathbf{a})} \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$.

1. Si $F^*_{aux} = 0$ et $\nexists a_j \in X_B$ où X_B désigne l'ensemble des variables de base pour (PLA), alors fin normale de la phase 1. On passe à la phase 2 du simplexe.
2. Si $F^*_{aux} = 0$ et $\exists a_j \in X_B$ avec $a_j = 0$, alors on supprime les lignes et colonnes associées aux a_j et on passe à la phase 2.
3. Si $F^*_{aux} > 0$ alors pas de solution réalisable ($\mathcal{D}_R = \emptyset$).

9.2 Exemple

Considérons le programme linéaire suivant, pour lequel il n'y a pas de solution de base réalisable évidente.

$$\max_{(x_1,x_2,x_3)} \left[F(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 + 4x_2 - 3x_3\right].$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \tag{9.3}$$

Pour déterminer une solution de base réalisable, on introduit le problème auxiliaire ci-dessous avec les variables auxiliaires a_1 et a_2 :

$$\min_{(x_1,x_2,x_3,a_1,a_2)} \left[F_{aux}(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2) = a_1 + a_2\right].$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + a_1 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + a_2 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases} \tag{9.4}$$

Pour résoudre le problème auxiliaire (9.4), on utilise la méthode du simplexe avec, par exemple, la méthode des dictionnaires. Une solution de base réalisable évidente est donnée par $a_1 = 9$, $a_2 = 3$ (variables de base) et $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (variables hors-base). A la dernière étape, on obtient le dictionnaire

$$\boxed{\begin{array}{l} x_2 = 3 + \frac{8}{5}x_3 - \frac{2}{5}a_1 + \frac{a_2}{5} \\ x_1 = 3 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{a_1}{5} - \frac{2}{5}a_2 \\ \hline F_{aux} = a_1 + a_2 \end{array}}$$

Les coûts réduits sont tous **positifs** (attention, on cherche le minimum de F_{aux}, cf. (6.5)) donc on ne peut plus diminuer la fonction objectif auxiliaire F_{aux}. L'optimum est atteint avec $x_1^* = 3$, $x_2^* = 3$ (variables de base), $x_3^* = a_1^* = a_2^* = 0$ (variables hors-base) et $F_{aux}^* = \min F_{aux} = 0$. On est dans la configuration où $F_{aux}^* = 0$ et à la fin du simplexe aucune variable auxiliaire n'est une variable de base (fin normale). On peut donc supprimer les variables auxiliaires et on a trouvé une solution de base réalisable du programme linéaire (9.3) donnée par $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$ et on peut passer à la phase 2 du simplexe pour résoudre (9.3) avec le dictionnaire initial :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_2 = 3 + \frac{8}{5}x_3 \\ x_1 = 3 - \frac{1}{5}x_3 \\ \hline F = 33 + 2x_3 \end{array}}$$

A l'étape suivante tous les coûts réduits sont **négatifs** (attention, cette fois-ci on cherche le maximum de F), l'optimum est atteint et il vaut $F^* = \max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = 63$ avec $x_1^* = 0$, $x_2^* = 27$, $x_3^* = 15$.

10 Analyse post-optimale

L'analyse optimale (ou analyse de sensibilité) permet de déterminer des intervalles de variations des données pour lesquels la base optimale B^* n'est pas modifiée et reste toujours optimale. Cette analyse permet de déterminer la sensibilité d'un PL par rapport aux données. Une faible variation des données entraine-t-elle un changement important de la solution optimale ?

On considère un programme linéaire sous la forme standard qui admet une base optimale B^* c'est-à-dire un programme linéaire pour lequel l'algorithme du simplexe se termine normalement. A une permutation près des colonnes, la matrice se décompose en

$$A = (A_{B^*} | A_{H^*})$$

où A_{B^*} est inversible.

10.1 Analyse de sensibilité de l'objectif

On regarde l'influence des coefficients $\mathbf{c}$ de la fonction objectif F sur la solution optimale.

10.1.1 Condition d'optimalité

Les coefficients $\mathbf{c}$ se décomposent en $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{B^*} \\ \mathbf{c}_{H^*} \end{pmatrix}$ et la solution optimale s'écrit $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{B^*}^* \\ \mathbf{x}_{H^*}^* \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{x}_{B^*}^* = A_{B^*}^{-1} A_{H^*} \mathbf{x}_{H^*}^*$. On introduit la matrice $A_{H^*}^*$ définie par

$$\boxed{A_{H^*}^* = A_{B^*}^{-1} A_{H^*}} \tag{10.1}$$

La matrice $A_{H^*}^*$ est la matrice obtenue dans le tableau ou le dictionnaire (**au signe près**) de la dernière étape du simplexe (à l'optimum). Cette matrice intervient dans la caractérisation de l'optimum.

Proposition 10.1. Condition d'optimalité.

La condition

$$\boxed{\mathbf{L}_{H^*}^\top = \mathbf{c}_{H^*}^\top - \mathbf{c}_{B^*}^\top A_{H^*}^* \leq 0} \tag{10.2}$$

est une **condition suffisante** *pour qu'une solution de base réalisable associée à* B^* *soit optimale.*

Démonstration. D'après la Proposition 6.1, pour tout $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{B^*} \\ \mathbf{x}_{H^*} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_R$, on a

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^*) + \mathbf{L}_{H^*}^\top \mathbf{x}_{H^*}$$

où $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{B^*}^* \\ \mathbf{x}_{H^*}^* = 0 \end{pmatrix}$ est une solution de base réalisable associée à la base B^* avec $\mathbf{x}_{B^*}^* = A_{B^*}^{-1}\mathbf{b}$. Par conséquent, sous la condition d'optimalité (10.2) c'est-à-dire avec $\mathbf{L}_{H^*}^\top \leq 0$, on a

$$F(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{x}^*), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_R$$

c'est-à-dire que $\mathbf{x}^*$ est optimale. □

Application de la condition d'optimalité. On utilise la condition d'optimalité pour déterminer l'influence d'un coefficient de la fonction objectif F. On remplace ce coefficient par un paramètre et on calcule la condition d'optimalité. On obtient alors une condition sur ce paramètre. Cette condition est une condition nécessaire pour que la solution de base optimale soit inchangée et une condition suffisante pour que la solution obtenue soit optimale.

10.1.2 Exemple d'analyse de sensibilité de l'objectif

On reprend l'exemple du problème de production de l'introduction et on veut regarder la sensibilité de l'optimum par rapport au prix de vente unitaire du produit P_1 qui vaut 6. On cherche à déterminer de combien peux-t-on faire varier ce prix unitaire sans changer le plan de production ?

Avec la **méthode des dictionnaires**, on a trouvé la solution de base optimale $\mathbf{x}_{B^*}^* = (x_2^*, x_1^*, e_1^*)^\top$, $\mathbf{x}_{H^*} = (e_2^*, e_3^*)^\top = (0,0)^\top$ avec $x_2^* = 5$, $x_1^* = 15/2$, $e_1^* = 27/2$ et $F^* = 65$. On a obtenu le dernier dictionnaire suivant

$$\boxed{\begin{array}{l} x_2 = 5 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 \\ x_1 = \frac{15}{2} + \frac{1}{6}e_2 - \frac{5}{6}e_3 \\ e_1 = \frac{27}{2} + \frac{5}{2}e_2 - \frac{7}{2}e_3 \\ \hline F = 65 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{7}{3}e_3 \end{array}}$$

On rappelle que $\mathbf{x}_{B^*}^* = A_{B^*}^{-1}\mathbf{b} - A_{H^*}^*\mathbf{x}_{H^*}^*$. On lit donc la matrice $A_{H^*}^*$ **au signe près** dans le dernier dictionnaire :

$$A_{H^*}^* = \begin{pmatrix} +1/3 & -2/3 \\ -1/6 & +5/6 \\ -5/2 & +7/2 \end{pmatrix}.$$

On remplace le coefficient 6 par un paramètre c_1 dans F (*attention : respecter bien l'ordre des variables*) :

$$\mathbf{c}_{B^*}^\top = (4,\, c_1,\, 0), \quad \mathbf{c}_{H^*}^\top = (0,\, 0).$$

Les coûts réduits valent donc

$$\mathbf{L}_{H^*}^\top = \mathbf{c}_{H^*}^\top - \mathbf{c}_{B^*}^\top A_{H^*}^* = \left(\frac{c_1}{6} - \frac{4}{3},\ \frac{8}{3} - \frac{5}{6}c_1\right).$$

La condition d'optimalité $\mathbf{L}_{H^*}^\top \leq 0$ donne alors

$$\frac{16}{5} \leq c_1 \leq 8.$$

Interprétation. Si on choisit $\dfrac{16}{5} \leq c_1 \leq 8$, la solution de base optimale est inchangée c'est-à-dire que le plan de production ne change pas. On a $F^* = \dfrac{15}{2}c_1 + 20$. Avec $c_1 = 8$ (la valeur max. permise pour c_1), on obtient $F^* = 80$ soit un écart de $\Delta F = 15$.

10.2 Analyse de sensibilité du second membre des contraintes

On examine à présent l'influence du second membre $\mathbf{b}$ des contraintes sur une solution de base réalisable $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{B^*} \\ \mathbf{x}_{H^*} \end{pmatrix}$ associée à une base optimale B^*.

10.2.1 Condition de faisabilité

A l'optimum, la solution réalisable est positive.

Proposition 10.2. Condition de faisabilité.

A l'optimum, la solution de base réalisable $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{B^*} \\ \mathbf{x}_{H^*} \end{pmatrix}$ *associée à une base optimale* B^* *vérifie la condition*

$$\boxed{\mathbf{x}_{B^*} = A_{B^*}^{-1}\mathbf{b} \geq 0.} \tag{10.3}$$

Application de la condition de faisabilité. Pour déterminer l'influence d'un coefficient du second membre $\mathbf{b}$ sur la solution optimale, on remplace ce coefficient par un paramètre. On obtient ainsi un second membre $\mathbf{d}$. On calcule alors la solution de base $\mathbf{x}_{B^*} = A_{B^*}^{-1}\mathbf{d}$ et on impose la *condition de faisabilité* (10.3). On obtient de cette façon une condition sur le paramètre introduit. Cette condition est une condition nécessaire pour que la base optimale B^* soit inchangée. En revanche, les valeurs de la solution de base $\mathbf{x}_{B^*}$ changent, mais $\mathbf{x}_{B^*}$ est toujours une solution de base réalisable optimale car on maintient les coûts réduits $\mathbf{L}_{H^*}^\top \leq 0$ inchangés.

Pour appliquer la condition de faisabilité, on doit connaitre la matrice inverse $A_{B^*}^{-1}$. Avec la méthode des tableaux, on calcule $A_{B^*}^{-1}$ directement à partir des tableaux du simplexe. Si l'algorithme du simplexe se déroule en $q+1$ étapes, alors $A_{B^*}^{-1} = A_{B_q}^{-1} \times A_{B_{q-1}}^{-1} \times \cdots \times A_{B_2}^{-1} \times A_{B_1}^{-1}$ où la matrice $A_{B_k}^{-1}$ est déterminée par (7.6) à l'étape k du simplexe. Avec la méthode des dictionnaires, cette matrice n'est pas en général accessible directement.

10.2.2 Détermination de $A_{B^*}^{-1}$ pour un PL sous forme standard simpliciale à partir de la méthode des dictionnaires.

On se place dans le cas d'un PL où les contraintes s'écrivent $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ avec

$$A = (I_m \mid H)$$

où I_m est la matrice identité d'ordre m et H une matrice de taille $m \times (n-m)$. On suppose qu'on a obtenu une solution optimale avec une base optimale B^* et $A_{H^*}^* = A_{B^*}^{-1}A_{H^*}$ est la matrice obtenue (**au signe près**) avec le dernier dictionnaire.

On note $\mathbf{e}^i$ le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ i.e.

$$\mathbf{e}^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}.$$

Proposition 10.3. *1. Si la j-ème colonne de la matrice A_{H^*} est égale à $\mathbf{e}^i$ alors la i-ème colonne de $A^{-1}_{B^*}$ est égale à la j-ème colonne de la matrice $A^*_{H^*}$:*

$$(A_{H^*})^j = \mathbf{e}^i \Rightarrow \left(A^{-1}_{B^*}\right)^i = (A^*_{H^*})^j.$$

2. Si la j-ème colonne de la matrice A_{B^*} est égale à $\mathbf{e}^i$ alors la i-ème colonne de $A^{-1}_{B^*}$ est égale j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$:

$$(A_{B^*})^j = \mathbf{e}^i \Rightarrow \left(A^{-1}_{B^*}\right)^i = \mathbf{e}^j.$$

Démonstration.

1. On a $(A^*_{H^*})^j = \left(A^{-1}_{B^*}A_{H^*}\right)^j = A^{-1}_{B^*}(A_{H^*})^j$. Or, par hypothèse $(A_{H^*})^j = \mathbf{e}^i$ donc $(A^*_{H^*})^j = A^{-1}_{B^*}\mathbf{e}^i = \left(A^{-1}_{B^*}\right)^i$.
2. On a $A^{-1}_{B^*}A_{B^*} = I_m$ donc $\left(A^{-1}_{B^*}A_{B^*}\right)^j = (I_m)^j = \mathbf{e}^j$. Par ailleurs, $\left(A^{-1}_{B^*}A_{B^*}\right)^j = A^{-1}_{B^*}(A_{B^*})^j = A^{-1}_{B^*}\mathbf{e}^i = \left(A^{-1}_{B^*}\right)^i$ d'où le résultat. $\square$

Exemple. Avec l'exemple de production, on a obtenu (cf. dernier dictionnaire)

variables de base : $\mathbf{x}^*_{B^*} = (x^*_2,\, x^*_1,\, e^*_1)^\top$
variables hors-base : $\mathbf{x}^*_{H^*} = (e^*_2,\, e^*_3)^\top = (0,\, 0)^\top$

$$A^*_{H^*} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/6 & 5/6 \\ -5/2 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a

$$A_{B^*} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{H^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient $A^{-1}_{B^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & -1/6 & 5/6 \\ 1 & -5/2 & 7/2 \end{pmatrix}$.

10.2.3 Exemple d'analyse de sensibilité du second membre des contraintes.

Avec l'exemple du problème de production, on veut examiner la sensibilité de la solution optimale par rapport à la quantité disponible de main d'oeuvre qui vaut 55 unités. On introduit donc un paramètre $d_2 \in \mathbb{R}$ avec le second membre

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 81 \\ d_2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

et on calcule $\mathbf{x}_{B^*} = A_{B^*}^{-1}\mathbf{d}$ avec $A_{B^*}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & -1/6 & 5/6 \\ 1 & -5/2 & 7/2 \end{pmatrix}$. On obtient

$$\mathbf{x}_{B^*} = \begin{pmatrix} x_2^* \\ x_1^* \\ e_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(d_2 - 40) \\ \frac{1}{6}(-d_2 + 100) \\ 151 - \frac{5}{2}d_2 \end{pmatrix}. \tag{10.4}$$

La condition de faisabilité $\mathbf{x}_{B^*} \geq 0$ donne alors :

$$40 \leq d_2 \leq 60.4$$

Interprétation. Si on choisit $40 \leq d_2 \leq 60.4$ alors la base optimale B^* est inchangée et la solution de base réalisable $\mathbf{x}_{B^*}$ donnée par (10.4) est optimale.

11 Dualité

11.1 Introduction et définition

Revenons encore une fois au problème de production (2.1). Supposons à présent qu'un acheteur se présente pour acheter toutes les ressources $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top = (81, 55, 20)^\top$ disponibles dans l'entreprise. L'acheteur propose à l'entreprise un prix unitaire $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^\top$ pour chacune des ressources. L'entreprise acceptera de lui vendre toutes ses ressources uniquement si elle obtient pour chaque produit P_j un prix de vente au moins égal au profit c_j qu'elle ferait en vendant ses produits. On doit donc avoir

$$\begin{array}{l} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq c_1 = 6 \\ 9y_1 + 5y_2 + 1y_3 \geq c_2 = 4 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{array} \tag{11.1}$$

De son côté, l'acheteur cherche à minimiser le prix total d'achat afin de dépenser le moins possible. On se demande alors quels sont les prix unitaires $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^\top$ que l'acheteur doit proposer à l'entreprise pour qu'elle accepte de vendre toutes ses ressources. Le problème peut donc s'écrire

$$\begin{array}{l} \min\limits_{\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)} [G(\mathbf{y}) = 81y_1 + 55y_2 + 20y_3] \\ \text{avec les contraintes (11.1).} \end{array} \tag{11.2}$$

Le problème de programmation linéaire (11.2) est étroitement lié au problème (2.1). On dit que le problème (11.2) est le **dual** du problème (2.1). La définition générale de la dualité est la suivante.

Définition 11.1. *Au programme linéaire primal*

$$(PL) \quad \begin{array}{l} \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] \\ \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

où A est une matrice de taille $m \times n$, on associe le programme linéaire dual

$$(PLD) \quad \boxed{\begin{array}{l} \min\limits_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m} \left[G(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}\right] \\ \begin{cases} A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{cases} \end{array}}$$

Dans le tableau suivant, on compare les éléments apparaissant dans les problèmes primal et dual.
Comparaison primal/dual.

$$\begin{array}{rcl} \boxed{\textit{Primal}} & & \boxed{\textit{Dual}} \\ \max(F) & \leftrightarrow & \min(G) \\ \text{coefficient } \mathbf{c} \text{ de } F & \leftrightarrow & \text{second membre } \mathbf{c} \\ \text{second membre } \mathbf{b} & \leftrightarrow & \text{coefficient } \mathbf{b} \text{ de } G \\ m \text{ contraintes inégalités } (\leq) & \leftrightarrow & m \text{ contraintes de positivité} \\ n \text{ contraintes de positivité} & \leftrightarrow & n \text{ contraintes inégalités } (\geq) \end{array}$$

Si le problème primal est sous forme *standard* avec les contraintes $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alors on passe à la forme canonique pure en écrivant les contraintes $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}$.

De façon générale, on a la définition suivante lorsque le problème primal est sous forme *canonique mixte* :

$$\begin{array}{ll} \boxed{\text{Primal}} & \boxed{\text{Dual}} \\ \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \left[F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] & \min\limits_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m} \left[G(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}\right] \\ \forall i \in I_1,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i & \forall i \in I_1,\ y_i \geq 0 \\ \forall i \in I_2,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & \forall i \in I_2,\ y_i \text{ de signe quelconque} \\ \forall j \in J_1,\ x_j \geq 0 & \forall j \in J_1,\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j \\ \forall j \in J_2,\ x_j \text{ de signe quelconque} & \forall j \in J_2,\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j \end{array}$$

11.2 Propriétés - Théorèmes de dualité

On commence par un premier résultat sur la dualité.

Proposition 11.1. *Le dual du dual est le primal*

Démonstration. On donne la preuve dans le cas d'un programme linéaire sous forme canonique pure. En utilisant la relation (2.2), on a

$$\begin{array}{c} \min\limits_{\mathbf{y}} \left[G(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}\right] \\ \begin{cases} A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{cases} \end{array} \iff \begin{array}{c} \max\limits_{\mathbf{y}} \left[-G(\mathbf{y}) = (-\mathbf{b})^\top \mathbf{y}\right] \\ \begin{cases} -A^\top \mathbf{y} \leq -\mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Si on prend le dual du dual, on a donc

$$\begin{array}{c} \min\limits_{\mathbf{x}} \left[(-\mathbf{c})^\top \mathbf{x}\right] \\ \begin{cases} \left(-A^\top\right)^\top \mathbf{x} \geq -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{array} \iff \begin{array}{c} \max\limits_{\mathbf{x}} \left[\mathbf{c}^\top \mathbf{x}\right] \\ \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

et on reconnait le problème primal du départ. □

On s'intéresse à présent au lien entre les solutions de programmes linéaires en dualité.

Théorème 11.1. Théorème faible de dualité
Soit $\mathbf{x}$ *une solution réalisable d'un (PL) sous forme canonique mixte et* $\mathbf{y}$ *une solution réalisable du problème dual (PLD) associé. Alors :*

1. $F(\mathbf{x}) \leq G(\mathbf{y})$
2. *Si* $F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y})$ *alors* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *sont des solutions optimales de (PL) et (PLD) respectivement.*

Démonstration. On établit la preuve dans le cas où (PL) est sous forme canonique pure :

1. On a d'une part $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ et d'autre part $A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq 0$. Par conséquent,
$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \left(A^\top \mathbf{y}\right)^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \underbrace{A\mathbf{x}}_{\leq \mathbf{b}} \leq \mathbf{y}^\top \mathbf{b} = G(\mathbf{y}) \text{ car } \mathbf{y} \geq 0$$
2. Soient $\mathbf{x}^*$ et $\mathbf{y}^*$ des solutions réalisables de (PL) et (PLD) respectivement telles que $F(\mathbf{x}^*) = G(\mathbf{y}^*)$. D'après 1., pour toute solution réalisable $\mathbf{x}$ de (PL), on a $F(\mathbf{x}) \leq G(\mathbf{y}^*) = F(\mathbf{x}^*)$ donc $\mathbf{x}^*$ est une solution réalisable optimale qui réalise le maximum de F. Idem pour $\mathbf{y}^*$. □

Théorème 11.2. Théorème fort de dualité
Si le problème primal (PL) admet une solution réalisable optimale $\mathbf{x}^*$ *alors le problème dual (PLD) associé admet lui aussi une solution réalisable optimale* $\mathbf{y}^*$ *et on a*
$$F(\mathbf{x}^*) = G(\mathbf{y}^*).$$

Démonstration. On établit la preuve pour un (PL) est sous forme standard. Si (PL) admet une solution réalisable optimale, il admet une *solution de base* réalisable optimale (cf. Théorème 5.2). On note B^* la base optimale et on désigne par $\mathbf{x}^*$ la solution de base réalisable optimale : $\mathbf{x}^* = A_{B^*}^{-1}\mathbf{b}$. On choisit alors
$$\boxed{\mathbf{y}^* = \left(A_{B^*}^{-1}\right)^\top \mathbf{c}_{B^*}}.$$
Montrons que $\mathbf{y}^*$ est une solution réalisable optimale pour le dual (PLD). On a
$$\begin{array}{rcl} A_{H^*}^\top \mathbf{y}^* & = & A_{H^*}^\top \left(A_{B^*}^{-1}\right)^\top \mathbf{c}_{B^*} \\ & = & \left(A_{B^*}^{-1} A_{H^*}\right)^\top \mathbf{c}_{B^*} \\ & = & \mathbf{c}_{H^*} - \mathbf{L}_{H^*}. \end{array}$$
Or, à l'optimum tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls ($\mathbf{L}_{H^*} \leq 0$) donc $A_{H^*}^\top \mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}_{H^*}$. Par définition, on a $A_{B^*}^\top \mathbf{y}^* = \mathbf{c}_{B^*}$ et donc on obtient
$$\begin{array}{l} A^\top \mathbf{y}^* \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y}^* \text{ de signe quelconque.} \end{array}$$
Par conséquent, $\mathbf{y}^*$ est une <u>solution réalisable</u> du dual (PLD). On remarquera que le problème primal (PL) étant mis sous forme standard, il n'y a pas de contrainte de positivité sur les variables $\mathbf{y}$ du dual. Par ailleurs,
$$\begin{array}{rcl} F(\mathbf{x}^*) & = & \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{c}_{B^*}^\top A_{B^*}^{-1}\mathbf{b} \\ & = & \Big(\underbrace{\left(A_{B^*}^{-1}\right)^\top \mathbf{c}_{B^*}}_{\mathbf{y}^*}\Big)^\top \mathbf{b} \quad = \quad G(\mathbf{y}^*) \end{array}$$
et donc par le Théorème faible de dualité, $\mathbf{y}^*$ est optimale pour (PLD). □

On a vu qu'il y avait 3 cas possibles (et seulement 3) pour le problème primal (PL) :

(1) il existe (au moins) une solution optimale.

(2) l'ensemble $\mathcal{D}_R$ des solutions réalisables n'est pas borné et l'optimum est infini.

(3) pas de solution réalisable ($\mathcal{D}_R = \emptyset$).

Les mêmes situations se retrouvent pour le problème dual. Plus précisément, le lien entre les deux problèmes en dualité est donné par le résultat suivant.

Théorème 11.3. *Etant donnés un problème primal (PL) et son dual (PLD), une et une seule des trois situations suivantes peut se produire.*

(a) les deux problèmes possèdent chacun des solutions optimales (à l'optimum, les coûts sont égaux).

(b) un des problèmes possède une solution réalisable avec un optimum infini, l'autre n'a pas de solution.

(c) aucun des deux problèmes ne possède de solution réalisable.

Il y a donc 3 situations (au lieu de 9) qui peuvent se résumer dans le tableau suivant :

		Dual		
		(1) Solution optimale	*(2) Optimum infini*	*(3) pas de solution*
Primal	*(1) Solution optimale*	(a)	impossible	impossible
	(2) Optimum infini	impossible	impossible	(b)
	(3) pas de solution	impossible	(b)	(c)

11.3 Conditions d'optimalité primal-dual (COPD)

On s'intéresse au cas (a) du tableau précédent où les problèmes primal et dual possèdent chacun des solutions optimales (optimum fini). On peut alors calculer l'une à partir de l'autre.

Théorème 11.4. *Soient* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *des solutions réalisables respectivement du problème primal (PL) et du problème dual (PLD). Alors* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *sont des solutions réalisables optimales si et seulement si les conditions d'optimalité primal-dual (COPD) suivantes sont vérifiées :*

— *Si une contrainte est satisfaite en tant qu'inégalité stricte dans (PL) (resp. dans (PLD)) alors la variable correspondante de (PLD) (resp. de (PL)) est nulle.*

— *Si la valeur d'une variable dans (PL) ou (PLD) est strictement positive alors la contrainte correspondante de l'autre programme est une égalité.*

Supposons que le problème primal s'écrive sous forme canonique mixte. Alors $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont optimales respectivement pour le problème primal et le problème dual *si et seulement si* on a les COPD :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall i \in I_1,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ \textbf{ou}\ \ y_i = 0 \\[2ex] \bullet\ \forall j \in J_1,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \ \ \textbf{ou}\ \ x_j = 0 \end{cases}$$

Démonstration de la condition nécessaire du Théorème 11.4. Supposons pour simplifier que le problème primal (PL) soit mis sous forme canonique pure. Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ des solutions réalisables *optimales* de (PL) et (PLD) respectivement. On a donc $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ et $A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq 0$. En introduisant les variables d'écart $\mathbf{e}$ et ε respectivement pour (PL) et (PLD), on a

$$\begin{array}{lcl} A\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{b} & \multirow{2}{*}{et} & A^\top \mathbf{y} - \varepsilon = \mathbf{c} \\ \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{e} \geq 0 & & \mathbf{y} \geq 0,\ \varepsilon \geq 0 \end{array}$$

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = (A^\top \mathbf{y} - \varepsilon)^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} - \varepsilon^\top \mathbf{x} \\ G(\mathbf{y}) &= \mathbf{b}^\top \mathbf{y} = (A\mathbf{x} + \mathbf{e})^\top \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^\top \mathbf{y} + \mathbf{e}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} + \mathbf{e}^\top \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Or d'après le Théorème de la dualité forte, $F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y})$ donc on obtient

$$\boxed{\varepsilon^\top \mathbf{x} + \mathbf{e}^\top \mathbf{y} = 0}. \tag{11.3}$$

Puisque $\mathbf{x} \geq 0$ et $\mathbf{y} \geq 0$, on a nécessairement

$$\begin{cases} \varepsilon_i x_i = 0, & \forall i \\ e_j y_j = 0, & \forall j \end{cases}$$

ce qui donne les COPD (encore appelées "relations d'exclusion") :

$$\begin{cases} \text{Si } \varepsilon_i \neq 0 \text{ alors } x_i = 0 \\ \text{Si } x_i \neq 0 \text{ alors } \varepsilon_i = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Si } e_j \neq 0 \text{ alors } y_j = 0 \\ \text{Si } y_j \neq 0 \text{ alors } e_j = 0. \end{cases}$$

La réciproque (condition suffisante) se démontre à partir du Théorème faible de dualité. □

Utilisation pratique des COPD.

La dualité et les COPD permettent souvent de vérifier si une solution réalisable d'un (PL) est optimale ou non, à partir de la connaissance d'une solution optimale du problème dual. Lorsque (PL) et (PLD) ont des solutions réalisables optimales $\mathbf{x}^*$ et $\mathbf{y}^*$ respectivement, on a :

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \ \Rightarrow\ y_i^* = 0$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j \ \Rightarrow\ x_j^* = 0$

et

- $\displaystyle y_i^* > 0 \ \Rightarrow\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$
- $\displaystyle x_j^* > 0 \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$

Exemple. Le problème dual du problème de production s'écrit

$$\min_{\mathbf{y}} \left[G(\mathbf{y}) = 81y_1 + 55y_2 + 20y_3\right]$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 6 \\ 9y_1 + 5y_2 + 1y_3 \geq 4 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Le problème primal (PL) admet la solution optimale :

$$\begin{array}{lcl}
e_1^* = 27/2 > 0 & \overset{\text{COPD}}{\Longrightarrow} & y_1^* = 0 \\
x_1^* = 15/2 > 0 & \overset{\text{COPD}}{\Longrightarrow} & 3y_1^* + 4y_2^* + 2y_3^* = 6 \ (\varepsilon_1^* = 0) \\
x_2^* = 5 > 0 & \overset{\text{COPD}}{\Longrightarrow} & 9y_1^* + 5y_2^* + y_3^* = 4 \ (\varepsilon_2^* = 0) \\
e_2^* = e_3^* = 0 & &
\end{array}$$

En résolvant le système pour $\mathbf{y}^*$, on obtient la solution optimale du problème dual :

$$y_1^* = 0, \quad y_2^* = 1/3, \quad y_3^* = 7/3.$$

Références

[1] BILLIONNET Alain, *Optimisation discrète – De la modélisation à la résolution par des logiciels de programmation mathématique*, Dunod (2007).

[2] BREZINSKI Claude, *Initiation à la programmation linéaire et à l'algorithme du simplexe*, Ellipse, Paris, (2006).

[3] CHVATAL Vasek, *Linear programming*. W. H. Freeman, (1983).

[4] DANTZIG George, THAPA Mukund, *Linear Programming 1 : Introduction*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering (2013).

[5] DANTZIG George, THAPA Mukund, *Linear Programming 2 : Theory and Extensions*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering (2013).

[6] HECHE Jean-François, LIEBLING Thomas, DE WERRA Dominique, *Recherche opérationnelle pour ingénieurs, Tome 1 : modèles déterministes*. Presses Polytechniques Romandes (2003).