

CONVERGENCES DE VAR ET THEOREMES LIMITES

I. Convergence de suites de var

Def :

La suite $(X_n)_n$ cvg vers X de fonction de repartition F_x quand $n \rightarrow +\infty$:

- en Poi : si la suite des fct de repartit^o F_{X_n}, \dots, F_{X_n} tend vers F_x pour tout x pour lequel F_x est e^0 .

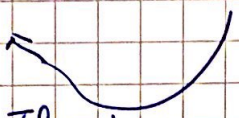
On note $X_n \xrightarrow{\text{Poi}} X$.

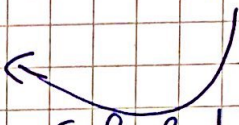
- en probabilités : si pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| < \varepsilon) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$. On note $X_n \xrightarrow{P} X$.

- presque sûrement : si $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \forall \omega \in \Omega$ quand $n \rightarrow +\infty$ sauf sur un ensemble de probabilité nulle. On note $X_n \xrightarrow{ps} X$.

Liens entre les types de cvg:

Convergence \Rightarrow Cvg en P \Rightarrow Cvg en Poi
PS


Il existe une
sous-suite qui cvg PS


Si P_n limite en
Poi est cste

Inégalité de Markov :

Soit X une va à valeurs positive et $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E(X).$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Soit X une va de moyenne $E(X)$ et d'écart type $\sigma > 0$

Pour tout $t > 0$,
$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

Loi faible des grands nombres :

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de va II, de m p.i. et intégrables.

Alors, Puisque n tend vers $+\infty$:

$$\bar{X}_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{+ \infty} E(X_1) \text{ en probabilités.}$$

Théorème central limite :

Soit une suite de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n II et de m p.i. (iid), d'espérance m et de variance σ^2 .

Soit la va $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Alors puisque $n \rightarrow +\infty$ avec $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Z \text{ en loi}$$