10/09
MAP.

CHAP 2.
Le MODELE PROBABILISTE.

I. Modélisa° d'une exp. aléa

Def : Exp aléa.

On nomme aléatoire une exp. dont le résultat est dû au hasard.

Modélisa° :

- e.a
- Résultat possible ω.
- Ensemble fondamental ou univers Ω.

Def : Evenement.

Un evnt est une proposi° dont la vérifica° est déterminée par le résultat de l'e.a

Evnt A : On obtient au moins 2 faces.

Evnt B : On obtient face au 1er.

Opéra° sur les evnts :

- Evt élémentaire = Résultat possible de l'ea. $\{\omega\} \in \Omega$
- Evt certain : Ω
- Evt impossible : $\emptyset$
- $A \Rightarrow B$; Si A est réalisé, B l'est aussi : $A \subset B$.
- Evt contraire : $\bar{A}$: A n'est pas réalisé ; $\bar{A} = \Omega \setminus A$
- Intersec° / Conjonc° de 2 evnts : C est réalisé ssi A et B le sont simultanément. $C = A \cap B$

◦ Union de 2 evts : C est réalisé si A l'est ou B ou les 2 : $C = A \cup B$

Prop opéra° sur les evts :

◦ Idempotence : $A \cap A = A$
Élément absorbant : $A \cap \emptyset = \emptyset$
Élément neutre : $A \cap \Omega = A$

◦ Commutativité : $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$

◦ Associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$

◦ Distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

◦ Lois de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

• Généralisé : $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

Déf : Incompatibilité.
2 evts sont incompatibles s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément. (A et B sont disjoints $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$)

Def : Syst. complet d'evts

Une suite d'evts $(E_i)_{i \in I}$ associés à une m̄ exp. aléa. forment un sce lorsque 2 d'entre eux ne peuvent être réalisés simul^t et à chaque répéti° de l'ea l'un d'entre eux est réalisé. (Parti° de Ω).

- $\forall i, j \in I,\ i \neq j,\ E_i \cap E_j = \emptyset$
- $\forall \omega,\ \exists i \in I,\ \omega \in E_i \iff \Omega = \bigcup_{i \in I} E_i$

3.

Soit Ω un univers et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ non vide.

- (C_1) : $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$ (Stab. complé)
- (C_2) : $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \cup B \in \mathcal{A}$ (Stab union finie).
- (C_3) : Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'élts de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{A}$

Def :

- Si $\mathcal{A}$ vérifie (C_1) et (C_2), alors $\mathcal{A}$ est une algèbre de Ω
- S'il vérifie de plus (C_3), alors $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre ou tribu de Ω.

Def :

On appelle ensemble probabilisable un ensemble $(\Omega, \mathcal{A})$ avec $\mathcal{A}$ une tribu.

Prop. Tribus :

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $\emptyset \in \mathcal{A}$

- $(C_2) \Leftrightarrow (C_2')$: stab. par intersec° :
$\forall, A, B \in \mathcal{A}, \ A \cap B \in \mathcal{A}$ sous (C_1).

- $(C_3) \Leftrightarrow$ Stab. par intersec° dénombrable

Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'élmts de $\mathcal{A}$,

$$\bigcap_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{A}$$

- $A_j \in \mathcal{A}, \ \forall 1 \leq j \leq n, \ \bigcup_{j \geq 1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$.

Def : Probabilité.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
Une probabilité est une applica° $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ qui à chaque $A \in \mathcal{A}$ associe $P(A)$ "probabilité de l'evt A) tq :

a_1 : $0 \leq P(A) \leq 1$

a_2 : $P(\Omega) = 1$

axiome des probas totales ou de σ-additivité. → a_3 : Pour toute suite finie ou ∞ d'evt 2 à 2 incomp. $(A_i)_{i \in I}$:

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.

Exercice :

Les fonc° sont-elles des lois de proba :

① $\Omega = [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k}(-1)^k 2^{n-k}$.

② $\Omega = [\![1, 2n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}\left|1 - \frac{k}{n}\right|$.

①. $$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k 2^{n-k}$$

$$= (-1+2)^n - 2^n = 1^n - 2^n \neq 1$$

Donc pas une proba.

②. $$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n}\left|1 - \frac{k}{n}\right| = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right) + \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{k}{n} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n} + \frac{n+k}{n} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = 1.$$

Et $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\}) \geq 0$.

Donc c'est une proba.

$\Omega = (\omega_1, \_, \omega_N)$

Def : Equiprobabilité :

Chaque résultat de l'exp a la m̄ proba de se réaliser

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \_ = \mathbb{P}(\omega_N)$$

Alors $\forall i \in 1, \_ N, \quad \mathbb{P}(\omega_i) = \dfrac{1}{N}$

Et $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{N}$

$$= \frac{\text{Nb de cas favorables}}{\text{Nb de cas total}}$$

Props :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un ep ; $(A_i)_{i \in 1, \_ N}$ des evt et A, B associés à celui-ci.

- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Si $A \Rightarrow B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \text{ si } A, B \text{ incompatibles.}$$

• Généralisa° : Formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots A_{i_k})$$

ou $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{k<k'} \mathbb{P}(A_k \cap A_{k'})$$

$$+ \dots + (-1)^{k+1} \sum_{i_1<\dots<i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Ex : Calculer $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$$

Donc
$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cup A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap (A_2 \cup A_3))$$

$$= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap (A_2 \cup A_3))$$

$$= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) !!$$

- Pour un sce $(A_i)_{i \in I}$, on a :

$$\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

- Soit B un evt et $(A_i)_{i \in I}$ un sce, alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

- Une proba est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tq $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

- Continuité : Soit une suite monotone d'evt $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associés à $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ Alors $\mathbb{P}(\text{"}\lim_n\text{"} A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$

En part :
- Si la suite est strict $\nearrow$ $(A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N})$

Alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

- Si la suite est strict $\searrow$ $(A_{n+1} \subset A_n)$

Alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

- Inégalité de Boole : Pour $\forall$ suite d'evt $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

III. Conditionnement et indépendance

Def : Proba. conditionnelle

Soit un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ associé à une e.a. Soient A et B deux evts tq $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On appelle proba conditionnelle de A sachant B la proba que A soit réalisé sachant que B l'est. On a :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Props :

- $\mathbb{P}(\bar{A}|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B | C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C) - \mathbb{P}(A \cap B | C)$

Atten° : On ne parle pas de conditionnel pour un evt.

- Cas part. de l'équiproba :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\# A \cap B}{\# Total}, \quad \mathbb{P}(A|B) = \frac{\# A \cap B}{\# B}$$

On dit que la proba cond. est portée par B :

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = 0 \text{ et } B \subset A \Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = 1$$

On peut déf une applica° : $\mathbb{P}_B(\cdot) = \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \mathbb{P}(A|B) \end{cases}$

Formule des proba composées :

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une suite d'events sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tq $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \_ \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \_ \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 | A_1) \_ \mathbb{P}(A_{n-1} | A_1 \cap \_ \cap A_{n-2}) \times \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \_ \cap A_{n-1}).$$

Ex : Rang 2 : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A|B)$
$= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A)$

Vient de la déf de la proba conditionnelle.

Exercice : 10 G et 15 F descendent de façon désordonnée d'un bus. Quelle est la proba que les 3 premiers soient des G et la 4^e soit une F ?

X_i " C'est un X qui sort à l'arrêt i "

On cherche $\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap F_4)$

$$= \mathbb{P}(G_1)\,\mathbb{P}(G_2 | G_1)\,\mathbb{P}(G_3 | G_2 \cap G_1)\,\mathbb{P}(F_4 | G_3 \cap G_2 \cap G_1)$$

$$= \frac{10}{25} \times \frac{9}{24} \times \frac{8}{23} \times \frac{15}{22} = \frac{9}{253} \simeq 0{,}035$$

Théorème des proba totales.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un scc de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Supposons que $\forall i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors :

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Ex : 10 boules B, 20 boules R et 30 boules N dans une urne.

On fait 2 tirages sans remise.

Proba que la 2^e boule tirée soit rouge ?

$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|N_1)\mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(R_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)$$

$$= \frac{19}{59} \times \frac{20}{60} + \frac{20}{59} \times \frac{30}{60} + \frac{20}{59} \times \frac{10}{60}$$

$$= \frac{19}{59} \times \frac{1}{3} + \frac{20}{59}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{19}{59} \times \frac{1}{3} + \frac{20}{59} \cdot \frac{4}{6}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

Théo de Bayes.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un sce de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tq $\forall i \in I,\ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$.

Soit B un evt de m̄ ep tq $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

$$\forall j \in I,\quad \mathbb{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(B|A_j)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}.$$

Def : Independance.

Soient 2 evt associés à $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on dit que A et B sont indep. ssi $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$
- Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, A et B sont indep ssi $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Thm :

A et B sont indep. ssi $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

A et B indep. $\Leftrightarrow$ A et $\bar{B}$ indep $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ et B indep
$\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ et $\bar{B}$ indep.

A et B indep $\Rightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

On $\mathbb{P}(A\cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(A|\overline{B})$

$$= \mathbb{P}(A)\,\frac{\mathbb{P}(A\cap \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{B})}$$

Def : Independance 2-à-2.

Soit une famille d'évt $(A_i)_{i\in I}$.

Ils sont 2-à-2 indep. ssi $\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j,\ A_i \perp\!\!\!\perp A_j$

Def : Indep. mutuelle.

- Une famille finie $(A_i)_{i\in I}$ d'évt est mutuellement indep. si pour toute partie non vide $J\subset I$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in I} \mathbb{P}(A_j)$$

- Une famille ∞ d'évt est mutuellement indep. si toute sous-famille finie est mutuellement indep.