Chapitre 3-3 :

Variables aléatoires absolument continues.

I. Intro - Théorie de la mesure.

- **Mesure de Lebesgue.**

- Soit E un ss espace de $\mathbb{R}$ et soit $(I_j)_{j\in J}$ un recouvrement de E par un ensemble fini ou ∞ d'int. ouverts de E.

- On appelle <u>mesure extérieure</u> de E la qté $M_{ext}(E) = \inf \ell(I_j)_{j\in J}$

avec $\ell(I_j)$ la longueur de I_j.

- Soit $F(E)$ l'ensemble des parties fermées de E, on déf la mesure intérieure $M_{int}(E) = \sup_{K\subset F(E)} M_{ext}\, K$

- Si $M_{ext}(E) = M_{int}(E)$ on dit que E est mesurable au sens de Lebesgue et on note $\lambda(E) = M_{ext}(E) = M_{int}(E)$ la mesure de Lebesgue.

Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tq $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ on a :

- $\lambda([a,b]) = \lambda(]a,b[) = \lambda(]a,b]) = \lambda([a,b[) = b-a$
- $\lambda(]-\infty,b]) = \lambda(]-\infty,b[) = \lambda([a,+\infty[) = \lambda(]a,+\infty[) = +\infty$
- $\lambda(\{a\}) = 0$

C'est la mesure de ~~Lebb~~ Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Def :

Une prop est dite vraie λ-presque partout (λ pp) si l'ensemble des points où elle n'est pas vérifiée est de mesure nulle.

Il faut définir la notion d'$\int$ sur un ep.

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

On appelle fct étagée positive toute fonction $e : \Omega \to \mathbb{R}$ de la forme :

$$e(\omega) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$$

où $A_i \subset \mathcal{A}$

- L' $\int$ d'une telle fct est déf par :

$$\int_\Omega e \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \mu(A_i)$$

- Toute fct mesurable $f : \Omega \to [0, +\infty[$ peut s'écrire ~~$f : \Omega \to [0,+\infty[$~~

$f = \lim_{n \to +\infty} e_n$ pour une suite $\nearrow$ de fct étagées positives e_n

De plus, $\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega e_n \, d\mu \in [0, +\infty]$ existe et ne dépend pas de e_n

D'où :

Déf :

- Soit $f : \Omega \to [0, +\infty[$ mesurable, son $\int$ est déf par :

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega e_n \, d\mu$$

Où e_n est une suite $\nearrow$ de fct étagées $\oplus$ cvg vers f.

• Soit $f : \Omega \to]-\infty, +\infty[$ mesurable, on a :

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f_+ \, d\mu - \int_\Omega f_- \, d\mu$$

où $f_+(\omega) = \max(f(\omega), 0)$ et $f_-(\omega) = \max(-f(\omega), 0)$

Propriétés :

• Pour tout $A \subset \Omega$, $\int_A f \, d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_A f \, d\mu$

• Positivité : Si f et g sont intégrables avec $f \leq g$ λ pp

Alors $\int f \, d\lambda \leq \int g \, d\lambda$ avec égalité ssi $f = g$ λ pp.

• Linéarité : Si f et g sont intégrables, $a, b \in \mathbb{R}$

Alors $af + bg$ est intégrable et $\int af + bg \, d\lambda = a \int f \, d\lambda + b \int g \, d\lambda$

• Thm de la cvg monotone : Si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite $\nearrow$ de fct mesurables positives convergeant pp vers f.

Alors la suite $\left(\int f_n \, d\lambda\right)$ cvg vers $\int f \, d\lambda$

• Thm de la convergence dominée.

Soit A un ss ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ et soient $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ une suite cvg pp sur A vers $f(x)$

Si il existe $g(x) \geq 0$ intégrable sur A tq :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in A$ alors la fct f est intégrable sur A et on a :

$$\int_A f(x)\, d\lambda(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_A f_n(x)\, d\lambda(x)$$

Def :

Soit un ep. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P})$ et une var X.

On dit que X est absolument continue (ou C^0 à densité) s'il existe une fct f_X positive et intégrable, appelée fonction de densité, tq :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$$

On dit qu'une va est à densité si sa fct de répartiᵒ vérifie :

(i) $F_X \in C^0(\mathbb{R})$

(ii) F_X est C^1 sauf en 1 nb fini de points.
Sa dérivée sera alors égale presque partout à la fct de densité.

Prop : Caract. de la densité

- $f_X(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
- f_X est C^0 sur $\mathbb{R}^n$ sauf éventuellement en un nb fini de points
- $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)\,dx$

Prop :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

- Loi uniforme.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

- Si $x < a$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

- Si $a \leq x < b$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt$$

$$= 0 + \frac{x-a}{b-a}$$

- Si $x > b$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt + \int_{b}^{x} 0\,dt$$

$$= 1$$

Calculs pour les va absolument continues.

- Proba ponctuelle : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X=x) = 0$

- Proba sur un sous-espace : $\mathbb{P}(X \in S) = \int_S f_X(x)\,dx$

En part dans $\mathbb{R}$, si $S = (a;b)$:

$$\mathbb{P}(a \leqslant (<) X \leqslant (<) b) = F_X(b) - F_X(a)$$
$$= \int_a^b f_X(x)\,dx$$

Def : Espérance.

On dit que X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ cvg absolument.

Alors $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx.$

Def Variance

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x)\,dx$$

Rq : Par lin. de l'$\int$, la formule de K-H reste vraie :

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx - \mathbb{E}(X)^2$$

Def : Moments.

- Moment d'ordre k :

$$m_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\,dx$$

- Moment centré d'ordre k.

$$\cancel{\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f}$$

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f_X(x)\,dx$$

Théorème de Transfert

Soit X une var de densité f_X. Pour $\forall$ fonc° $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f mesurable (sut C^0 et bornée),

si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx$ |cvg| alors on a :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx$$

III. Lois usuelles continues.

Loi uniforme :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tq $a < b$.

La variable X suit la loi uniforme sur $[a,b]$ lorsque la densité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

- $$E(X) = \frac{a+b}{2}$$
- $$s_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Fct de répartiᵒ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

- Toute transfo. affine d'une va suivant une loi uniforme suit encore une loi uniforme.

Loi exponentielle

Soit un réel $\lambda > 0$. X suit la loi exponentielle de param. λ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et sa densité est :

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Nota : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{E}xp(\lambda)$

- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad$ $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

- Loi sans mémoire :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \mathbb{P}(X > s+t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

Retour sur la loi uniforme ... :

Thm :

Soit $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ $\nearrow$ cad vérifiant $\lim_{-\infty} F = 0$, $\lim_{+\infty} F = 1$

On note F^{-1} son inverse : $F^{-1} : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \inf\{x \mid F(x) \geq y\} \end{array}$

Soit $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. Alors $X = F^{-1}(U)$ admet F comme fct de répartition.

Loi normale (gaussienne / de Laplace-Gauss)

Soit $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, la variable $X \hookrightarrow$ loi normale de ~~densité~~ moyenne m et d'écart-type σ si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et elle admet pour densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left| -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right|$$

~~Loi~~ Notation : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(m, \sigma)$

Prop : stabilité.

Soient $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.

Si $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ et $\mathcal{L}(X_1) = \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{L}(X_2) = \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$

Alors $\mathcal{L}(X_1 + X_2) = \mathcal{N}\left(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$

Déf : produit de convol°

Soient X et Y deux vac de densités resp. f_X, f_Y.

Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ on a :

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x)\, f_X(x)\, dx$$

Loi normale centrée réduite

C'est la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Sa densité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

On l'obtient par transformation affine d'une $\mathcal{N}(m,\sigma)$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma) \iff Y = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$$

On note ϕ la fct de répartition :

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\cancel{X}}(y)\,dy$$

Moments de la loi normale centrée réduite

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad m_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad ; \quad m_{2k+1} = 0$$

On en déduit bien $E(Y) = m_1 = 0$ et $V(Y) = m_2 - m_1^2 = 1$.

Moments centrés de la loi normale

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mu_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k} \quad ; \quad \mu_{2k+1} = 0$$

D'où $E(X) = \sigma E(Y) + m = m$

$V(X) = \sigma^2 V(Y) = \sigma^2$

Def: fonction generatrice des moments

La fonction gen. des moments d'une va X de densité f_X est, sous cond. d'exis, la fct $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \infty$ tq :

$$\phi(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\cancel{x}} f_X(x)\,dx$$

Prop:

- On peut calculer les moments d'ordre n :

$$\phi^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$$

- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\,\phi_Y(t)$
- Si $\phi_X = \phi_Y$, alors X et Y ont même loi.

Def: Fonction caractéristique

Soit $t = i\tau$

Transfo. de Fourier

$$\Phi(\tau) = \phi(i\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau x} f_X(x)\,dx$$

On a $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau x}\, \Phi(\tau)\,d\tau$

On a $\mathbb{E}(X^n) = i^{-n}\, \Phi^{(n)}(0)$, $\Phi_{X+Y}(\tau) = \Phi_X(\tau)\,\Phi_Y(\tau)$ si $X \perp\!\!\!\perp Y$

et si $\Phi_X = \Phi_Y$ alors X et Y ont même loi.

IV. Vecteurs aléatoires

Def :

- Soient n va $X_i : \Omega \to E_i$ déf sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et abs. c°.

On appelle vecteur aléatoire l'applica° mesurable :

$$X : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow X(\Omega) \subset E_1 \times \dots \times E_n \\ \omega \longmapsto X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{array}$$

- Loi de proba conjointe de X :

La fonction de répartition est déf par :

$$F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \end{array}$$

: X admet une densité $f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si :

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots t_n$$

La densité doit vérifier : $\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots t_n = 1$

Def :

- Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vect ac déf sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, la loi marginale de X_i est :

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(t_1, \dots, t_{i-1}, x_i, t_{i+1}, \dots, t_n)\, dt_1 \dots t_{i-1} t_{i+1} \dots t_n$$

- Les $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indép. ssi :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f_X(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

Def : Densité conditionnelle

La densité conditionnelle de X sachant $X_j = x_j$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ s'écrit :

$$f_{X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_n}(x \mid X_j = x_j) = \frac{f_X(x_1, \ldots, x_n)}{f_{X_j}(x_j)}$$

Def : covariance

La covariance d'un couple aléatoire continu (X, Y) défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ s'écrit :

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))(y - E(Y)) f(x, y) \, dx \, dy$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(X.Y) - E(X)E(Y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy f(x, y) \, dx \, dy - E(X)E(Y).$$

On peut déf la matrice de covariance :

$$\begin{pmatrix} V(X_1) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_1, X_n) & \cdots & V(X_n) \end{pmatrix}$$

Fonction d'un vect. aléatoire.

Prop:

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ vect aléatoire de densité $f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
soit $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert tq $\mathbb{P}(X \in U) = 1$. Soit V un autre ouvert
et soit $g : U \to V$ bijective : $g(x_1, \ldots, x_n) = (g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots$

Posons $Y = g(X)$ et notons $h = g^{-1}$. Si h est $\mathcal{C}^1$ (i.e g est un difféomorphisme) alors Y est une vac de fct de densité conjointe :

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |J_h(y)| \cdot \mathbb{1}_{y \in V}$$

où J_h est le jacobien de h :

$$J_h(y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$