VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES.

I. Modélisa°

Déf :

Soit un ep $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une var X déf sur cet espace.
X est dite discrète si $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$. L'ensemble des valeurs ~~de~~ prises par X est fini ou dénombrable.

On note $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

Déf.

Soit une var X déf. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle loi de proba de X la distribu° des probas $(p_i)_{i \in I}$ associées aux valeurs $\{x_i, i \in I\}$.

Rq. La distribu° des p_i vérifie $(*)$: $\begin{cases} 0 \leq p_i \leq 1 \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases}$

Une suite $(x_i, p_i)_{i \in I}$ peut ê considérée comme loi de proba d'une va si $(*)$ est vérifiée.

Théorème :

Soit X une var déf sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La fonc° de réparti° de X est déterminée par :

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Théorème :

Soient X, Y des var sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $X+Y$, λX et XY sont des var déf par :

$$X+Y : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto X(\omega)+Y(\omega) \end{array}$$

$$\lambda X : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \to \lambda X(\omega) \end{array}$$

$$XY : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto X(\omega)Y(\omega) \end{array}$$

Théorème :

Soit X une var déf. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une applica°.

L'applica° $g(X)$ déf. par : $g(X) : \begin{array}{l} X(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto g(X(\omega)) \end{array}$

est une var dont la loi est donnée par $g(X)(\Omega) = \{g(x_i)\}_{x_i \in I}$

et $\forall y \in g(X)(\Omega)$, $\mathbb{P}(g(X) = y) = \sum_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ g(x_i) = y}} \mathbb{P}(X = x_i)$

II. Caractéristiques d'une var.

Déf : Espérance.

Soit X une va déf sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si X est intégrable (cad $\sum_{i \in I} |x_i| \mathbb{P}(X = x_i) < +\infty$),

l'espérance est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} |x_i| \mathbb{P}(X = x_i)$$

Rq : Quand $X(\Omega)$ est fini, X est intégrable.

Donc une var discrète finie admet toujours une espérance

Déf :

Une var X est <u>centrée</u> si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Propriétés de l'espérance

Soient X, Y des var déf sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant toutes les deux une espérance. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Linéarité : $\begin{cases} \mathbb{E}(\alpha X) = \alpha \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \end{cases}$

- $E(\alpha) = \alpha$ et $\alpha X + \beta$ admet une esperence et $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$
- Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$ (Positivité)
- Si $X \geq Y$ alors $E(X) \geq E(Y)$ (Croissance)

Thm de transfert

Soit X une vad def sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une applica°.

La va $g(X)$ est integrable si $\sum |g(x_i)| \mathbb{P}(X = x_i) < +\infty$

Sous cette hyp: $E(g(X)) = \sum g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$

Exercice:

Soit X tq $X(\Omega) = [\![-n, n]\!]$, $P(X = i) = \dfrac{1}{2n+1}$.

$$E(X) = \sum_{i=-n}^{n} i \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} i + n$$

$$= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2n(2n+1)}{2} + n \right)$$

$$= n + \frac{n}{2n+1} = n \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=-n}^{n} i^2\, \mathbb{P}(X=i) \quad \text{(Thm transfert).}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} (i-n)^2}$$

$$= \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} i^2$$

$$= \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{n} i^2 \quad \text{(Parité)}$$

$$= \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{3}.$$

Sinon en déterminant la loi de X^2 :

$$Z = X^2, \text{ d'où } Z(\Omega) = \{0, 1, 4, \dots, n^2\}.$$

D'où $\mathbb{P}(Z = z_0) = \frac{1}{2n+1}$ et $\mathbb{P}(Z = z_i) = \frac{2}{2n+1}$.

Donc $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2\, \mathbb{P}(Z = z_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{2}{2n+1} = \frac{n(n+1)}{3}$$

Variance d'une vad.

Def :

Soit X une va def sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et de carré intégrable

On appelle variance de la v.a X :

$$Var(X) = V(X) = s_X^2 = \sigma^2 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$$

Si X est une vad, on a $V(X) = \sum_{i \in I} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i$

Thm de Koenig - Huygens

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$= \sum_{i \in I} x_i^2 p_i - (\mathbb{E}(X))^2 \quad \text{(cas discret)}$$

Def :

Soit X une va def sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de carré intégrable

On appelle écart-type de X : $s_X = \sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Prop de la variance

Soient 2 va X, Y admettant une variance et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $Var(X) \geq 0$

- $Var(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$.

- $V(\alpha) = 0$ et $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$

- $Var(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,cov(X,Y)$

avec :

Def :
Soient X, Y admettant des variance.
On appelle covariance de X et Y :

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}(X)\right)\mathbb{E}\left(Y - \mathbb{E}(Y)\right).$$

$$= \sum_{i,j} \left(x_i - \mathbb{E}(X)\right)\left(y_j - \mathbb{E}(Y)\right) P(X = x_i, Y = y_j)$$

Prop. de la covariance.

Soient X, Y, Z des va admettant des var. et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- $cov(X, X) = V(X) \geq 0$ (Positivité).
- $cov(X, Y) = cov(Y, X)$ (Symetrie).
- $cov(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha\, cov(X, Z) + \beta\, cov(Y, Z)$
  $cov(X, \alpha Y + \beta Z) = \alpha\, cov(X, Y) + \beta\, cov(X, Z)$

  (Bilinéarité)

- $cov(X, \alpha) = 0$
- X, Y indep $\Rightarrow cov(X, Y) = 0$
  la réciproque est fausse.

Def:
Une var X est dite reduite si $V(X) = 1$

Def:
Soit X, Y des va.d admettant toutes les 2 une variance.
On appelle coef. de corrélation linéaire : $\rho(X, Y) = \dfrac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

On a : • $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

• $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \rho(X,Y)$

• Si $\rho(X,Y) \simeq \pm 1$ Dependance lin. forte.

Déf.

Soit X une va et $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un moment d'ordre k si X^k est intégrable.
Le moment d'ordre k est déf. par $\mathbb{E}(X^k)$ et on le note m_k.

Déf

Soit X une va et $k \in \mathbb{N}^*$. Le moment centré d'ordre k est $\mu_k = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k)$.

III. Lois usuelles

oi de Bernoulli

Soit une épreuve comportant 2 issues (succes et echec) = euve de Bernoulli.
On déf. la va. indicatrice de l'évt "succes" : $X(\Omega) = \{0, 1\}$

$$X \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si succes} & \mathbb{P}(X=1) = p \\ 0 \text{ si echec} & \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$$

Notation : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}_e(p)$

On a :

- $\mathbb{E}(X) = p$
- $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$

Loi binomiale.

Une va Y est dite binomiale de param. $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ notée $\mathcal{B}(n,p)$ si $Y(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Binomiale = n répét° d'une épreuve de Bernoulli indép

On a $\mathbb{E}(Y) = np$

$\mathbb{V}(Y) = np(1-p)$.

- $X_1, \ldots, X_N$ mut $\perp\!\!\!\perp$ $\hookrightarrow \mathcal{B}(n_i, p)$.

Alors $Y = X_1 + \ldots + X_N$ est ~~donc~~ vadc $\mathcal{B}(n_1 + \ldots + n_N ; p)$.

- $\mathcal{L}(n - Y) = \mathcal{B}(n, 1-p)$ en comptant les échecs.

Loi géométrique

Répétition d'exp. de Bernoulli et on s'arrête au 1^er succès.

$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ $p \in]0,1]$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$.

- Loi sans mémoire :

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k + \ell \mid X > k) = \mathbb{P}(X = \ell)$

- Caractéristiques.

$E(Y) = \dfrac{1}{p}$ $\qquad V(Y) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \, \mathbb{P}(X=k)$$

([illegible])

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1} p.$$

$$= p \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1}$$

$$= p \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{k} \right)'$$

$$= p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

On a $\mathbb{E}(X^2) = \sum k^2 P(X=k) = \sum k^2 (1-p)^{k-1} p$

=

Loi hypergéométrique.

X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n, p avec $N, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ tq $Np \in \mathbb{N}$ et $N \geq n$ si :

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\} \text{ et}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$

- Caractéristiques

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}.$$

- Qd $N \to +\infty$, $\mathcal{H}(N, n, p)$ tend vers $\mathcal{B}(n, p)$

(Vrai dès que $N \geq 10n$).

Loi de Poisson.

X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$
lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

- Caractéristiques

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$

Alors $Z = X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

- Si n suffisamment grand alors $\mathcal{P}(np)$ est une bonne approx. de $\mathcal{B}(n,p)$
($n \geq 20$, $p \leq 0,05$ usuellement admis)

Fonctions génératrices.

Def: Fct génératrice

La fonction $s \in [0,1[\mapsto g_X(s) := \mathbb{E}(s^X)$ est s'appelle fonction génératrice de X. On a:

$$g_X(s) = \sum_{k \in X(\Omega)} s^k \, \mathbb{P}(X=k)$$

- g_X est indéfiniment dérivable sur $[0,1[$:

$$g_X^{(p)}(s) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq p}} p_k \, k(k-1)\ldots(k-p+1) s^{k-p}$$

- La fct. gén. caractérise la loi:

$$\forall p \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X=p) = \frac{1}{p!} g_X^{(p)}(0)$$

- On a:

$$\mathbb{E}(X) = g_X'(1)$$

$$V(X) = g_X''(1) + g_X(1) - \left(g_X'(1)\right)^2$$

- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors ~~Z+~~ $g_{X+Y} = g_X g_Y$

Fonctions génératrices :

$$B_e(p) : (1-p) + ps$$

$$B(n,p) : (1-p+ps)^n$$

$$\mathcal{G}(p) : \frac{ps}{1-(1-p)s}$$

$$\mathcal{P}(\lambda) : e^{-\lambda(1-s)}.$$

Loi de Poisson :

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{0}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda s}$$

$$= e^{-\lambda+\lambda s} = e^{-\lambda(1-s)}$$

Déf : Fct génératrice des moments

La fct gen. des moments d'une va X discrète (ou c°) est, sous réserve de cvg, la fonc° :

$$\phi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\infty \\ t \longmapsto \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_i e^{tX_i} p_i \end{array}$$

Si X admet des moments et ϕ admet un DSE au voisinage de l'origine, on a :

$$\phi(t) = m_0 + m_1 t + m_2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

· VECTEUR ALÉATOIRE DISCRET.

Déf :

· Soient n v.a $X_i : \Omega \to E$ discrètes.

On appelle vecteur aléatoire l'applicat° mesurable :

$$X : \begin{array}{l} \Omega \to X(\Omega) \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \\ \omega \mapsto X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{array}$$

· Loi de proba conjointe de X :

$$\{ \mathbb{P}(X = (x_1, \ldots, x_n)) \mid x_i \in E_i \ \forall i \}$$

$$= \{ \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \mid x_i \in E_i \ \forall i \}.$$

· Pour $j \in [\![1, n]\!]$, la loi marginale de X_j est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_j = x_j) = \sum_{\substack{(x_1, x_2, \ldots x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \\ \in \\ E_1 \times \ldots \times E_n}} \mathbb{P}(X = (x_1, \ldots, x_n))$$

- Loi de la somm de 2 vad X et Y.

Soit un couple de va (X,Y).

- $\mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega) \\ z-x\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X=x,\ Y=z-x)$.

- Si X et Y sont indep.

$$\mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega) \\ z-x\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=z-x)$$

(Prod. de convolu° des lois de X et Y)

- LOI DE PROBABILITE CONDITIONNELLE

Def:

Soit un couple de var (X,Y), de loi jointe $(\mathbb{P}(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij})_{i\in I, j\in J}$. Notons $(x_i, p_{i\cdot})_{i\in I}$ et $(y_j, p_{\cdot j})_{j\in J}$ les lois marginales.

La loi Y conditionelle à $\{X=x_i\}$ est :

$$b_i(j) = \mathbb{P}(Y=y_j \mid X=x_i) = \frac{\mathbb{P}(X=x_i,\ Y=y_j)}{\mathbb{P}(X=x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

• Extension de la loi binomiale : Loi multinomiale.

Supposons qu'une e.a possède m issues $R_1, \dots, R_m$ de probabilités $p_1, \dots, p_m$ ($p_1 + \dots + p_m = 1$).
On réalise n épreuves ⫫, on cherche la proba d'obtenir n_1 résultats R_1, ..., n_m résultat R_m.

Une va Y est dite multinomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \dots, p_m \in [0,1]$ (avec $p_1 + \dots + p_m = 1$), si $Y = (X_1, \dots, X_m)$ chaque X_i étant le nb. d'occurrences de R_i,

$$Y(\Omega) = [\![0, n]\!]^m \text{ et } \forall n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}^*, n_1 + \dots + n_m = n :$$

$$\mathbb{P}(X_1 = n_1, \dots, X_m = n_m) = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}.$$

Ex : On lance une pièce non biaisée une fois.
On considère 2 cas pour le 2^{nd} lancer :
1. On la repose sur la même face qu'après le 1er lancer
2. On la relance indépendamment du 1er lancer.

Loi de proba du couple (X, Y) ? X : Résultat 1er lancer
Y : Résultat 2e lancer.
Comparer lois et lois marginales.

__Cas 1 :__

$$\mathbb{P}(X = F, Y = F) = 1/2 \; ; \quad \mathbb{P}(X = F, Y = P) = \mathbb{P}(X = P, Y = F) = 0$$

$$\mathbb{P}(X = P, Y = P) = 1/2$$