CONVERGENCES DE VAR
ET
THEOREMES LIMITES

I. Convergence de suites de var

Def :

La suite $(X_n)_n$ cvg vers X de fonction de repartition F_X quand $n \to +\infty$:

- **en Loi** : si la suite des fct de repartition $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ tend vers F_X pour tout x pour lequel F_X est C^0. On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}oi} X$.

- **en probabilité** : si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| < \varepsilon) \to 1$ quand $n \to +\infty$. On note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

- **presque sûrement** : si $X_n(\omega) \to X(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$ quand $n \to +\infty$ sauf sur un ensemble de probabilité nulle. On note $X_n \xrightarrow{PS} X$

Liens entre les types de cvg:

$$\begin{tikzcd} \text{Convergence ps} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Cvg en } \mathbb{P} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, bend left, "\text{Il existe une sous-suite qui cvg ps}"] & \text{Cvg en Loi} \arrow[l, bend left, "\text{Si la limite en loi est cste}"] \end{tikzcd}$$

Inégalité de Markov :

Soit X une va à valeurs positive et $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(X).$$

Inégalité de Bienaymé - Tchebycheff

Soit X une va de moyenne $\mathbb{E}(X)$ et d'écart type $\sigma > 0$

Pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$.

Loi faible des grands nombres :

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de va $\perp\!\!\!\perp$, de même loi et intégrables.

Alors, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\overline{X_n} := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{+\infty} \mathbb{E}(X_1) \text{ en probabilités.}$$

Théorème central limite :

Soit une suite de n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ $\perp\!\!\!\perp$ et de même loi (iid), d'espérance m et de variance σ^2.
Soit la va $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors lorsque $n \to +\infty$ avec $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$:

$$\sqrt{n} \, \frac{\overline{X_n} - m}{\sigma} \xrightarrow{n \to +\infty} Z \text{ en loi}$$