LOG : Rappels

Définition : Principe de récurrence sur $\mathbb{N}$ à 1 cran
Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$, le principe de récurrence à un cran s'exprime ainsi :

$$[P(0) \;\; et \;\; \forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+1)] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} P(n)$$

Définition : Principe de récurrence sur $\mathbb{N}$ à k crans

Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$, le principe de récurrence à k crans s'exprime ainsi :

$$[(P(0) \;\; et \;\; P(1) \;\; ... \;\; et P(k-1)) \;\; et \;\; \forall n \in \mathbb{N}(P(n) \;\; et \;\; P(n+1) \;\; ... \;\; et P(n+k-1) \Rightarrow P(n+k))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n)$$

Définition : Ensemble défini inductivement

Un ensemble E défini inductivement est la donnée d'un ensemble B et d'un ensemble d'opérations $\mathcal{O}_p$ tels que :

- $B \subseteq E$
- Pour toute opération ϕ de $\mathcal{O}_p$, pour tout $x_1, ..., x_n \in E, \phi(x_1, ..., x_n) \in E$
- E est le plus petit ensemble vérifiant les 2 propriétés précédentes

B est "la base"; les opérations peuvent faire intervenir d'autres ensembles que E.

Définition : Principe d'induction
Soit E un ensemble défini inductivement par une base B et un ensemble d'opérations $\mathcal{O}_p$, soit P une propriété définie sur E. Le principe d'induction sur E s'exprime ainsi :

$$[\forall x \in B, P(x) \;\; et \;\; \forall \phi \in \mathcal{O}_p, [\forall x_1, ... x_n \in E, [P(x_1) \;\; et \;\; ... \;\; et \;\; P(x_n) \Rightarrow P(\phi(x_1, ..., x_n))]] \Rightarrow \forall x \in E, P(x)$$

Définition : Fonction récursive

Soient E un ensemble défini inductivement à partir de B et $\mathcal{O}_p$ et F un ensemble quelconque, la définition d'une fonction $f : E \to F$ récursive consiste à donner

- Pour tout x de B des valeurs $f(x) \in F$
- Pour toute règle ϕ de $\mathcal{O}_p$ des valeurs de $f(\phi(x_1, ..., x_n))$ pouvant dépendre de $f(x_1), ..., f(x_n)$ et $x_1, ..., x_n$

Définition : Principe des tiroirs (de Dirichlet)
Le principe des tiroirs affirme que si m chaussettes occupent n tiroirs, et si $m > n$ alors au moins un tiroir doit contenir plus d'une chaussette.
Mathématiquement, on a : Si E et F sont 2 ensembles finis tels que $card(E) > card(F)$ et si $f : E \to F$ est une application, alors il existe un élément de F qui admet au moins 2 antécédents par f, i.e. qu'il n'existe pas d'application injective de E dans F.