LOG : Logique du premier ordre

Syntaxe

Définition : Alphabets
Les alphabets d'un langage du premier ordre sont les ensembles suivants :

- Un ensemble X de symboles de variables, $X = \{x, y, z...\}$
- Un ensemble C de symboles de constantes, $C = \{a, b, c...\}$
- Une suite d'ensemble deux-à-deux disjoints de symboles de fonctions $F = (\mathbb{F}_n)_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$, chaque élément de $\mathbb{F}_n$ est un symbole de fonction d'arité $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Les éléments de F sont notés $f, g, \phi...$
- Une suite d'ensembles deux-à-deux disjoints de symboles de relations (ou symboles de prédicats), $R = (\mathbb{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chaque élément de $\mathbb{R}_n$ est un symbole de relation d'arité n. Les éléments de R sont notés $p, q, r...$
- Le symbole d'égalité = ; symbole de relation que l'on distingue des autres symboles de R. = est d'arité 2 que l'on utilise sous forme indexée.
- L'ensemble des connecteurs logiques $\{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
- Deux quantificateurs $\forall$ ("Pour tout") et $\exists$ ("Il existe")
- Des symboles de ponctuation (et) et ,

Les connecteurs logiques, quantificateurs et symboles de ponctuations sont communs à tous les langages du premier ordre.

Définition : Termes

Soient X un ensemble de symboles de variables, C un ensemble de constantes, F un ensemble de symboles de fonctions muni d'arité, l'ensemble des termes construits sur X, C, F est défini inductivement de la façon suivante :

- Les variables sont des termes
- Les constantes sont des termes
- Si $t_1, ..., t_n$ sont des termes et f est un symbole fonctionnel d'arité n alors $f(t_1, ..., t_n)$ est un terme
- Tous les termes sont générés par les 3 règles précédentes.

On note $T(F, C, X)$ l'ensemble des termes construits sur X, C et F. Les termes peuvent être représentés par des arbres étiquetés par les symboles de $X \cup C \cup F$, les feuilles des armes sont éléments de $X \cup C$ alors que les noeuds internes sont des éléments de F

- Un terme est dit **clos** s'il est sans variable
- Si t est un terme, $V(t)$ est l'ensemble des variables ayant des occurrences dans t
- ***Exemple :*** Soient $X = \{x, y, z...\}$ un ensemble de variables, $C = \{a, b, c\}$ un ensemble de constantes et $F = \{f[2], g[2], s[1]\}$ un ensemble de symboles fonctionnels.
  - a, x, c sont des termes (a et c sont clos)
  - $s(y), s(c), f(a, x), g(a, c), f(y, y), g(x, z), f(a, a)$ sont des termes
  - $s(f(a, x))$ est un terme
  - $t = f(g(a, x)), f(s(z), f(x, b)))$ est un terme et $V(t) = \{x, z\}$

Proposition :

Soit une propriété P dépendant d'un terme t, pour montrer que $P(t)$ est vraie pour tout t, il suffit de montrer les assertions suivantes :

- Les cas de base
  - Pour toute variable x, $P(x)$ est vraie
  - Pour toute constante c, $P(c)$ est vraie
- Cas général : Pour tout terme $t_1, ..., t_n$ et tout symbole f de fonction d'arité n, $P(t_1), ..., P(t_n)$ implique $P(f(t_1, ..., t_n))$

Définition : Substitution

Soient X un ensemble de symboles de variables, C un ensemble de constantes, F un ensemble de symboles de fonctions. Une substitution est une application σ de X vers $T(F,C,)$ telle que $\sigma(x) = x$ sauf pour un nombre fini de variables x. Le domaine d'une substitution σ est l'ensemble des variables qui sont modifiées par cette substitution, on le note $dom(\sigma)$:

$$dom(\sigma) = \{x | x \in X \quad et \quad \sigma(x) \neq x\}$$

Une substitution est définie par les variables de son domaines et leur image, on dénote une substitution sous la forme suivante : $\{x_1 \mapsto t_1, ...x_n \mapsto t_n\}$

Définition :

On étend l'application des substitutions aux termes de la façon suivante, si σ est une substitution :

- $\sigma(x)$ est défini si x est une variable
- $\sigma(c) = c$ si c est une constante
- $\sigma(f(t_1,...,t_n)) = f(\sigma(t_1),...,\sigma(t_n))$ (σ est un homomorphisme)

Définition : Unification
Soient t et t' deux termes, t et t' sont unifiables si et seulement s'il existe une substitution σ telle que $\sigma(t) = \sigma(t')$; σ s'appelle un unificateur de t et t'

Définition : Atome

Soient X un ensemble de symboles de variables, C un ensemble de constantes, F un ensemble de symboles de fonctions et R un ensemble de symboles de relations, un atome est de la forme $r(t_1,...,t_n)$ où

- r est un symbole de relation d'arité n
- $t_1,...,t_n$ sont des termes de $T(F,C,X)$

Définition : Formules Soient X un ensemble de symboles de variables, C un ensemble de constantes, F un ensemble de symboles de fonctions et R un ensemble de symboles de relations. L'ensemble $\mathcal{F}or$ des formules est défini instinctivement de la façon suivante :

- Les formules de base sont les tomes construits sur les alphabets X, C, F et R
- Les règles de constructions des formules sont :
  - si $f \in \mathcal{F}or$ alors $\neg f \in \mathcal{F}or$
  - si $f_1 \in \mathcal{F}or$ et $f_2 \in \mathcal{F}or$ alors $f_1 \vee f_2 \in \mathcal{F}or$
  - si $f_1 \in \mathcal{F}or$ et $f_2 \in \mathcal{F}or$ alors $f_1 \wedge f_2 \in \mathcal{F}or$
  - si $f_1 \in \mathcal{F}or$ et $f_2 \in \mathcal{F}or$ alors $f_1 \Rightarrow f_2 \in \mathcal{F}or$
  - si $f_1 \in \mathcal{F}or$ et $f_2 \in \mathcal{F}or$ alors $f_1 \Leftrightarrow f_2 \in \mathcal{F}or$
  - si $f \in \mathcal{F}or$ alors $\exists x f \in \mathcal{F}or$ (où x est un symbole de X, une variable)
  - si $f \in \mathcal{F}or$ alors $\forall x f \in \mathcal{F}or$ (où $x \in X$)

Un langage du premier ordre est constitué des alphabets X, C, F, R et des formules construites sur ces alphabets. ***Propriété : Principe d***

Soit une propriété P dépendant d'une formule f, pour montrer que $P(f)$ est vraie pour toute formule f de $\mathcal{F}or$, il suffit de montrer :

- Cas de base : $P(a)$ est vraie pour tout atome a
- Cas généraux : pour toute formule f, f_1 et f_2 de $\mathcal{F}or$
  - $P(f)$ implique $P(\neg f)$
  - $P(f_1)$ et $P(f_2)$ implique $P(f_1 \vee f_2)$
  - $P(f_1)$ et $P(f_2)$ implique $P(f_1 \wedge f_2)$
  - $P(f_1)$ et $P(f_2)$ implique $P(f_1 \Rightarrow f_2)$
  - $P(f_1)$ et $P(f_2)$ implique $P(f_1 \Leftrightarrow f_2)$
  - $P(f)$ implique $P(\exists x f)$
  - $P(f)$ implique $P(\forall x f)$

Définition : Variables libres d'une formule

Soit f une formule de la logique du premier ordre, l'ensemble des variables libres de f, noté $VL(f)$ est défini récursivement de la façon suivante selon la forme de la formule :

- $VL(r(t_1,...,t_n)) = V(t_1) \cup ... \cup V(t_n)$ si $r(t_1,...,t_n)$ est un terme
- $VL(t_1 = t_2) = V(t_1) \cup V(t_2)$ si t_1 et t_2 sont des termes
- $VL(\neg f) = VL(f)$ si f est une formule
- $VL(f_1 \vee f_2) = VL(f_1 \wedge f_2) = VL(f_1 \Rightarrow f_2) = VL(f_1) \cup VL(f_2)$ si f_1 et f_2 sont des formules
- $VL(\exists x f_1) = VL(f_1) \backslash \{x\}$ si x est une variable et f_1 est une formule
- $VL(\forall x f_1) = VL(f_1) \backslash \{x\}$ si x est une variable et f_1 est une formule

Remarques :

- Une variable est libre si elle possède une occurrence qui n'est pas sous l'influence d'un quantificateur
- Une formule f est dite close si et seulement si $VL(f) = 0$

Définition : variables liées d'une formule
L'ensemble des variables liées (ou muettes) $VM(f)$ d'une formule f est défini récursivement selon la forme de la formule de la façon suivante :

- $VM(r(t_1,...,t_n)) = \emptyset$ si r est un symbole de relation et $t_1,...,t_n$ sont des termes (i.e. $r(t_1,...,t_n)$ est un atome), de même $VM(t_1 = t_2) = \emptyset$
- $VM(\neg f) = VM(f)$ si f est une formule
- $VM(f_1 \vee f_2) = VM(f_1) \cup VM(f_2)$ si f_1 et f_2 sont des formules, de même $VM(f_1 \wedge f_2) = VM(f_1 \Rightarrow f_2) = VM(f_1) \cup VM(f_2)$
- $VM(\forall x f) = VM(f) \cup \{x\}$ si x est une variable et f une formule
- $VM(\exists x f) = VM(f) \cup \{x\}$ si x est une variable et f une formule

Remarque :
Les variables liées (ou muettes) sont celles qui sont sous l'influence d'un quantificateur *Définition : formule polie*

Une formule f est polie si et seulement si les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

- $VL(f) \cap VM(f) = \emptyset$
- Deux occurrences d'une même variable liée correspondent à la même occurrence de quantificateur

Définitions: formule close, clôtures

- Une formule **close** est une formule sans variables libres
- Soit f une formule dont les variables libres sont $x_1,...,x_n$. La **clôture universelle** de f est la formule $\forall x_1 ... \forall x_n f$
- Soit f une formule dont les variables libres sont $x_1,...,x_n$. La **clôture existentielle** de f est la formule $\exists x_1 ... \exists x_n f$

Sémantique

Définition : valuation
Soient X un ensemble de variables et E un ensemble, une valuation δ des variables de X est une application de X vers E : $\delta : X \to E$
Définition :

Soient δ une valuation de X vers E et $e \in E$, $\delta[x := E]$ est la valuation définie par :

- $\delta[x := e](y) = \delta(y)$ si $y \neq x$
- $\delta[x := e](x) = e$

Autrement dit, $\delta[x := e]$ coïncide avec δ sauf en x ou elle vaut e
Définition : interprétation
Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre , une interprétation I pour $\mathcal{L}$ est déterminée par les données suivantes :

- Un ensemble E **non vide** appelé le domaine de l'interprétation I on le note aussi $|I|$
- A chaque constante c on associe $I(c) \in E$
- A chaque symbole de fonction f d'arité n, on associe une application $I(f) : E^n \to E$
- A chaque symbole de relation r d'arité n, on associe une relation $I(r)$ sur E^n, c'est-à-dire une application $I(r) : E^n \to \{0,1\}$
- Au symbole d'égalité = on fait correspondre l'égalité = sur E, c'est-à-dire $=: ExE \to \{0,1\}$

Définition : Interprétation d'un terme
Soient I une interprétation de domaine E et δ une valuation, la valeur du terme t dans l'interprétation I relativement à la valuation δ est un élément de E noté $val_I(t,\delta)$ et défini par induction sur la structure des termes :

- Si t est une variable x alors $val_I(x,\delta) = \delta(x)$
- Si t est une constate c alors $val_I(c,\delta) = I(c)$
- Si t est de la forme $f(t_1,\dots,t_n)$ alors $val_I(f(t_1,\dots,t_n),\delta) = I(f)(val_I(t_1,\delta),\dots,(val_I(t_n,\delta))$

Définition :
Soit I une interprétation de domaine E, soit δ une valuation des variables et soit Φ une formule du premier ordre. La valeur de la formule Φ dans l'interprétation I par rapport à la valuation δ notée $val_I(\Phi,\delta)$ est un élément de $\mathbb{B} = \{0,1\}$ défini inductivement sur la structure des formules de la façon suivante :

- $val_I(r(t_1,\dots,t_n),\delta) = I(r)(val_I(t_1,\delta),\dots,val_I(t_n,\delta))$
- $val_I(t_1 = t_2),\delta) = val_I(t_1,\delta) = val_I(t_2,\delta)$
- $val_I(\neg\Phi,\delta) = \overline{val_I(\Phi,\delta)}$
- $val_I(\Phi_1 \vee \Phi_2,\delta) = val_I(\Phi_1,\delta) + val_I(\Phi_2,\delta)$
- $val_I(\Phi_1 \wedge \Phi_2,\delta) = val_I(\Phi_1,\delta).val_I(\Phi_2,\delta)$
- $val_I(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2,\delta) = \overline{val_I(\Phi_1,\delta)} + val_I(\Phi_2,\delta)$
- $val_I(\forall x\Phi,\delta) = \begin{cases} 1 \text{ si pour tout élément } e \text{ de } E, \ \ val_I(\Phi,\delta[x := E] = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
- $val_I(\exists x\Phi,\delta) = \begin{cases} 1 \text{ s'il existe un élément } e \text{ de } E, \ \ val_I(\Phi,\delta[x := E] = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Proposition :
Pour I fixé, $val_I(\Phi,\delta)$ ne dépend de δ que par l'intermédiaire des variables libres de Φ

Définition : modèle
Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, I une interprétation de $\mathcal{L}$, Φ une formule de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ un ensemble de formules de $\mathcal{L}$

- I est un modèle de Φ si et seulement si pour toute valuation δ, $val_I(\Phi,\delta) = 1$
- I est un modèle de $\mathcal{A}$ si et seulement si I est un modèle de chacune des formules de $\mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ est contradictoire si et seulement si $\mathcal{A}$ n'a pas de modèle

Proposition

- I est un modèle de Φ si et seulement si I est un modèle de la clôture universelle de Φ
- I est un modèle de $\mathcal{A}$ si et seulement si I est un modèle des clôtures universelles des formules de $\mathcal{A}$

Définitions : Déduction sémantique, théorème
Soient Φ une formule et $\mathcal{A}$ un ensemble de formules

- On dit que Φ se **déduit sémantiquement** de $\mathcal{A}$ si et seulement si tout modèle de $\mathcal{A}$ est un modèle de Φ, on note $\mathcal{A} \models \Phi$
- Φ est un **théorème** (de la logique du premier ordre) si et seulement si toute interprétation est un modèle de Φ, on note $\models \Phi$
- On dit que deux formules Φ et Ψ sont équivalentes si et seulement si $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ est un théorème de la logique du premier ordre, on note $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$

Système basé sur la résolution et les clauses

Définitions : Soit α une formule de la logique du premier ordre

- α est un théorème de la logique du premier ordre *si et seulement si* tout interprétation I est un modèle de α *si et seulement si* pour toute interprétation I, pour toute valuation δ, $val_I(\alpha,\delta) = 1$
- Si α est une formule close, α est un théorème de la logique du premier ordre *si et seulement si* pour toute interprétation I, $val_I(\alpha) = 1$

Définition : clause
Une clause est un disjonction de littéraux *Définition : Forme prénexe*

Une formule α est sous forme prénexe si elle est de la forme $Q_1 x_1 ... Q_n x_n \alpha'$ où

- $Q_i = \forall$ ou $Q_i = \exists$ et α' est une formule sans quantificateurs
- $Q_1 x_1 ... Q_n x_n$ est le préfixe de α et α' la matrice de α
- Le préfixe peut être vide

Théorème :
Toute formule polie est équivalente à une formule sous forme prénexe.
Pour ce faire, on réalise ces 3 opérations :

1. Élimination de $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$
2. Descente des négations jusqu'aux atomes
3. Remontée des quantificateurs dans la formule jusqu'à obtenir une formule prénexe

Définition :
Soit $\alpha = Q_1 x_1 ... Q_k x_k \alpha'$ une formule prénexe dont l'ensemble des variables libres est $\{y1, ..., y_r\}$, on suppose que $Q_1 x_1 ... Q_s x_s$ contient seulement des quantificateurs universels et que le quantificateur $Q_{s+1} x_{s+1} est \exists x_{s+1}$.
Soit un nouveau symbole fonctionnel φ d'arité $r + s$
La skolémisation de la variable x_{s+1} consiste à remplacer dans α' toutes les occurrences de x_{s+1} par le terme $\varphi(y_1, ..., y_r, x_1, ..., x_s)$.
La transformée de Skolem de α est obtenue en skolémisant toutes les varaibles existentielles de α, on la note α^s ***Théorème :***

Soit α une formule prénexe et soit α^s la formule de Skolem de α

- $\alpha^s \Rightarrow \alpha$ est un théorème de la logique du premier ordre
- Soit une interprétation I et une valuation δ telle que $val_I(\alpha, \delta) = 1$ alors il existe un enrichissement I' de I tel que $val_{I'}(\alpha^s, \delta) = 1$ (Un enrichissement consiste à étendre I aux symboles de Skolem de α^s)
- Si de plus α est une formule close, α admet un modèle si et seulement si α^s admet un modèle
- Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules closes, et soit $\mathcal{A}^s$ l'ensemble des formules de Skolem de $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ admet un modèle si et seulement si $\mathcal{A}^s$ admet un modèle

Définition :
Soit $\mathcal{L}$ un langage de la logique du premier ordre. Soit $Cl(\mathcal{L})$ l'ensemble des clauses construites sur $\mathcal{L}$. Le système formel $\mathcal{S} = (Cl(\mathcal{L}), \emptyset, \mathcal{R})$ suivant est appelé système formel de Robinson. $\mathcal{R} = \{resolution, fact^+, fact^-\}$

- Règle de résolution :
$$\frac{c_1 \vee r(s_1, ..., s_n) \vee c_2, c_3 \vee \neg r(t_1, ..., t_n) \vee c_4}{\sigma(c_1 \vee c_2 \vee c_3 \vee c_4)} \quad (Resolution)$$
- Règle de factorisation positive :
$$\frac{c_1 \vee r(s_1, ..., s_n) \vee c_2 \vee r(t_1, ..., t_n) \vee c_3}{\sigma(c_1 \vee r(s_1, ..., s_n) \vee c_2 \vee c_3} \quad (fact^+)$$
- Règle de factorisation négative :
$$\frac{c_1 \vee r(s_1, ..., s_n) \vee c_2 \vee \neg r(t_1, ..., t_n) \vee c_3}{\sigma(c_1 \vee \neg r(s_1, ..., s_n) \vee c_2 \vee c_3} \quad (fact^-)$$

Où :

- c_1, c_2, c_3, c_4 sont des causes
- $r(s_1, ..., s_n)$ et $r(t_1, ..., t_n)$ sont des atomes
- σ est un unificateur principal de $r(s_1, ..., s_n)$ et de $r(t_1, ..., t_n)$

Théorème de Robinson :
Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. $\mathcal{C}$ est contradictoire si et seulement si il existe une démonstration de $\square$ avec hypothèses dans $\mathcal{C}$. On a donc les équivalences suivantes :

$$\mathcal{A} \models \alpha$$
$$ssi$$
$$\mathcal{C}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{C}(\alpha) \;\; est \;\; contradictoire$$
$$ssi$$
$$\mathcal{C}(\alpha) \cup \mathcal{C}(\neg\alpha) \vdash_{Resolution} \square$$