Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
"Алтайский государственный технический
университет им. И.И.Ползунова"

С.А. КАНТОР

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Издание второе, исправленное и дополненное

Барнаул, 2010

УДК 517

Кантор, С.А. Специальные главы высшей математики: Учебное пособие / С.А. Кантор. - Алт. госуд. технич. ун-т им. И.И.Ползунова. Барнаул, 2010. — 203с.

Учебное пособие предназначено для студентов вуза с повышенным объемом математической подготовки, в частности, для обучения по специальности 230105 — "Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем".

Рекомендовано на заседании кафедры прикладной математики
протокол N 5 от 27 января 2010 г.

Рецензент к.ф.-м.н., доцент Г.Ш.Лев (АлтГТУ)

ВВЕДЕНИЕ

Курс "Специальные главы высшей математики" предназначен для начального ознакомления с некоторыми, достаточно интенсивно развивающимися, разделами математики. К ним в первую очередь относятся функциональный анализ и уравнения математической физики.

Учебное пособие состоит из двух частей, каждая из которых включает в себя по четыре главы.

Первая часть посвящена вопросам функционального анализа и некоторым его приложениям.

Функциональный анализ — сравнительно молодой раздел математики, который является своего рода языком современной математики. В настоящее время ни одна серьезная работа по теории дифференциальных уравнений, вычислительной математике, методам оптимизации, теории управления и многим другим разделам математики не мыслится без идей, методов, терминологии, обозначений функционального анализа. Возникнув в начале 20-го века в результате обобщения различных понятий и методов, использовавшихся в линейной алгебре, геометрии, математическом анализе, функциональный анализ окончательно оформился в математическую дисциплину в 20-30 годах благодаря работам Д. Гильберта, Ф. Рисса, С. Банаха.

Важнейшую роль в функциональном анализе играет понятие оператора, представляющее обобщение понятия функции. Обобщение строилось путем перехода на более высокую ступень математической абстракции, что позволило уловить глубокие закономерности и связи за счет того, что не имеющие значения детали каждой отдельной задачи отбрасываются и не заслоняют существа дела.

В качестве примеров применения аппарата функционального анализа рассматриваются интегральные уравнения и вариационное исчисление.

Частные примеры интегральных уравнений начали появляться в работах математиков в первой половине 19 века, однако построение общей теории линейных интегральных уравнений началось только в конце века в работах В.Вольтерра, Э. Фредгольма, Д.Гильберта.

Вариационное исчисление — раздел математики о нахождении экстремумов функционалов, зависящих от одной или нескольких функций при разного рода ограничениях. Исследование экстремумов проводится методом вариации, то есть методом малого возмущения аргументов. Теоретические основы вариационного исчисления были заложены Л. Эйлером, Ж. Лагранжем еще в 18 веке.

Во второй части пособия изучаются уравнения математической физики. Предметом этого раздела математики являются дифференциальные уравнения с частными производными. Несмотря на то, что изучение их началось достаточно давно, до сих пор здесь существует еще много нерешенных проблем. Свое название этот раздел математики получил в связи с тем, что первые уравнения, которые начали рассматриваться еще в 18 веке, описывали те или иные процессы, изучаемые в физике.

Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями теории множеств, линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа. В связи с ограниченностью объема пособия, примеры, которые иллюстрируют основные понятия предмета, вынесены большей частью в упражнения и задачи. Поэтому для более полного усвоения материала **необходимо** уделить время изучению примеров решения типовых задач и решению задач, находящихся в конце каждой главы. Следует, однако, отметить, что во многих случаях очень трудно выделить типовые задачи. Это относится прежде всего к первым трем главам.

Каждая глава заканчивается тестами для самостоятельной оценки знаний студентами. Среди перечисленных вариантов возможных ответов или утверждений необходимо выбрать один правильный ответ на вопрос или верное утверждение.

К сожалению, учебный план предусматривает небольшой объем дисциплины "Специальные главы высшей математики"(34 часа лекций и 51 час практических занятий). Поэтому в учебное пособие не вошли многие вопросы, традиционно включаемые в университетские курсы функционального анализа и уравнений математической физики для математических специальностей. Студентам, желающим более подробно познакомиться с перечисленными разделами математики, можно порекомендовать учебники, список которых приведен в конце пособия.

Часть I

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

1 МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Одной из важнейших операций анализа является предельный переход, в основе которого лежит тот факт, что на числовой прямой определено понятие расстояния между точками. Многие важные положения анализа при этом не связаны с алгебраической природой чисел (то есть с алгебраическими операциями над числами), а опираются лишь на понятие расстояния. Тогда, рассматривая совокупность чисел лишь как множество, где задано расстояние, приходят к понятию метрического пространства. Введем его, следуя принятому в математике аксиоматическому подходу.

Определение 1.1.1 *Пусть $\mathcal{X}$ — множество. Предположим, что каждой паре элементов x, y из $\mathcal{X}$ поставлено в соответствии число $\rho(x,y)$ такое, что*

а) для любых x, y из $\mathcal{X}$ выполняется неравенство $\rho(x,y) \geq 0$, причем $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

б) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

в) для всех x, y, z из $\mathcal{X}$ справедливо неравенство $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (неравенство треугольника).

*Тогда число $\rho(x,y)$ называется **расстоянием** между x и y, а множество $\mathcal{X}$ с заданным на нем расстоянием $\rho(x,y)$ называется **метрическим пространством**.*

Если не будут возникать двусмысленности, то в дальнейшем пространство будет обозначаться той же буквой, что и множество.

Элементы пространства обычно называют ***точками***.

Примеры:

1) $\mathcal{X}$ — множество точек плоскости. $\rho(x,y)$ — длина отрезка, соединяющего точки x и y (***пространство*** R^2). Неравенство треугольника означает, в частности, что одна сторона треугольника с вершинами в точках x, y, z меньше суммы двух других сторон;

2) $\mathcal{X}$ — множество непрерывных функций, заданных на отрезке $[a,b]$,

$$\rho(x,y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

(***пространство*** $C(a,b)$).

Определение 1.1.2 ***Открытым шаром*** *с центром в точке a из $\mathcal{X}$ радиуса $R > 0$ (обозначим $S(a,R)$) назовем множество всех точек из $\mathcal{X}$, расстояние от которых до центра меньше радиуса, то есть*

$$S(a,R) = \{x \,:\, x \in \mathcal{X},\ \rho(x,a) < R\}.$$

Определение 1.1.3 *Множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ называется* ***открытым****, если вместе с каждой своей точкой оно содержит открытый шар с центром в этой точке.*

Согласно определению, множество $\mathcal{A}$ из $\mathcal{X}$ открыто, если для любой точки $x \in \mathcal{A}$, найдется такое число $R > 0$, что $S(x, R) \subset \mathcal{A}$.

Лемма 1.1.1 *Открытый шар — открытое множество.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку x из $S(a, R)$ и покажем, что найдется такой радиус $r > 0$, что $S(x, r) \subset S(a, R)$. Поскольку $x \in S(a, R)$, выполняется неравенство $R - \rho(x, a) > 0$. Пусть r произвольное число такое, что $0 < r < R - \rho(x, a)$ и $y \in S(x, r)$. Для доказательства того, что $S(x, r) \subset S(a, R)$, достаточно показать, что $y \in S(a, R)$. Это следует из неравенства треугольника:

$$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r + \rho(x, a) < R.$$

Перечислим и докажем некоторые свойства открытых множеств.

1) Пустое множество $\emptyset$ и все пространство $\mathcal{X}$ открыты.

Действительно, $\emptyset$ открыто, так как если предположить противное, то это означает, что существует точка $x \in \emptyset$, такая, что для любых $R > 0$ шар $S(x, R)$ не содержится в $\emptyset$. Это утверждение не выполняется, так как в $\emptyset$ нет точек.

Очевидно, что все пространство $\mathcal{X}$ открыто.

2) Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Пусть множества $\mathcal{A}_i$ открыты, $i = 1, \ldots, n$ и $\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$. Тогда, если $x \in \mathcal{A}$, то $x \in \mathcal{A}_i$ для всех i. Так как множества $\mathcal{A}_i$ открыты, существуют такие числа $R_i > 0$, что $S(x, R_i) \subset \mathcal{A}_i$. В этом случае $S(x, R) \subset \mathcal{A}$, если $R = \min_{i=1,\ldots,n} R_i$, а это означает, что $\mathcal{A}$ — открытое множество.

3) Объединение открытых множеств открыто.

Пусть множества $\mathcal{A}_\alpha$ из $\mathcal{X}$ открыты (индекс α меняется в некотором множестве A) и $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha$. Если $x \in \mathcal{A}$, то существует такое α_0, что $x \in \mathcal{A}_{\alpha_0}$. Тогда существует $R > 0$ такое, что $S(x, R) \subset \mathcal{A}_{\alpha_0} \subset \mathcal{A}$, что и требовалось доказать.

Определение 1.1.4 *Множество $\mathcal{A}$ называется* ***замкнутым****, если его дополнение до всего пространства, то есть множество $C\mathcal{A} = \{x : x \in \mathcal{X},\ x \notin \mathcal{A}\}$ — открыто.*

Рассмотрим теперь свойства замкнутых множеств.

1) Пустое множество $\emptyset$ и все пространство $\mathcal{X}$ замкнуты.

2) Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

3) Пересечение замкнутых множеств замкнуто.

Справедливость первого свойства, очевидно, следует из первого свойства открытых множеств. Доказательство свойств 2) и 3) легко получить из того, что

$$C(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i) = \bigcap_{i=1}^{n} C\mathcal{A}_i, \quad C(\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{A}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} C\mathcal{A}_\alpha$$

и соответствующих свойств открытых множеств.

Определение 1.1.5 ***Внутренностью множества*** *$\mathcal{A}$ называется объединение всех открытых множеств из $\mathcal{A}$.*

Согласно определению, внутренность $\mathcal{A}$ это наибольшее открытое множество, содержащееся в $\mathcal{A}$ (обозначается $\overset{o}{\mathcal{A}}$).

Можно было бы определить внутренность по-другому.

Лемма 1.1.2 *Внутренность — это множество точек из $\mathcal{A}$, каждая из которых является центром открытого шара, целиком лежащего в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $x \in \overset{o}{\mathcal{A}}$. Поскольку внутренность — открытое множество, существует шар с центром в точке x, лежащей в $\overset{o}{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Таким образом, x является центром открытого шара, целиком лежащего в $\mathcal{A}$. Обратно, если x — центр шара $S(x,R)$ из $\mathcal{A}$, то по определению $\overset{o}{\mathcal{A}}$ шар $S(x,R) \subset \overset{o}{\mathcal{A}}$ и значит $x \in \overset{o}{\mathcal{A}}$.

Определение 1.1.6 ***Внешность множества*** *$\mathcal{A}$ — это внутренность дополнения, то есть это наибольшее открытое множество, которое не пересекается с $\mathcal{A}$ (обозначается $\overset{o}{C\mathcal{A}}$).*

Определение 1.1.7 ***Границей множества*** *$\mathcal{A}$ (обозначается $\dot{\mathcal{A}}$) называется дополнение к объединению внутренности и внешности.*

Лемма 1.1.3 *Для того чтобы $a \in \dot{\mathcal{A}}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $R > 0$ шар $S(a,R)$ имел непустое пересечение с $\mathcal{A}$ и $C\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть точка a принадлежит границе множества. Тогда, если бы существовал такой радиус R, что $S(a,R) \bigcap C\mathcal{A} = \emptyset$, то $S(a,R) \subset \mathcal{A}$. Отсюда следовало бы, что $a \in \overset{o}{\mathcal{A}}$ и, значит, не принадлежит $\dot{\mathcal{A}}$. Полученное противоречие показывает, что любой шар с центром в точке a пересекается с дополнением множества $\mathcal{A}$. Аналогично доказывается, что любой шар с центром в точке a пересекается с самим множеством.

Обратно, если для всех $R > 0$ шар $S(a,R)$ пересекается с $\mathcal{A}$ и $C\mathcal{A}$, то $a \in \dot{\mathcal{A}}$, так как в противном случае $a \in \overset{o}{\mathcal{A}} \bigcup \overset{o}{C\mathcal{A}}$. Если, например, $a \in \overset{o}{\mathcal{A}}$, то по предыдущей лемме существует $R > 0$, что $S(a,R) \subset \overset{o}{\mathcal{A}}$ и значит, не пересекается с $C\mathcal{A}$.

Определение 1.1.8 ***Замыкание множества*** *$\mathcal{A}$ (обозначается $\bar{\mathcal{A}}$) — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих $\mathcal{A}$, то есть $\bar{\mathcal{A}}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее $\mathcal{A}$.*

Из определения следует, что $C\bar{\mathcal{A}}$ — это наибольшее открытое множество, не пересекающееся с $\mathcal{A}$, то есть внешность. Но так как дополнение к внешности есть $\overset{o}{\mathcal{A}} \bigcup \dot{\mathcal{A}}$ получаем, что $\overset{o}{\mathcal{A}} \bigcup \dot{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{A}}$.

Лемма 1.1.4 *Для того чтобы точка $a \in \bar{\mathcal{A}}$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $R > 0$ шар $S(a,R)$ имел непустое пересечение с $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $a \in \bar{\mathcal{A}}$. Если при этом существует такой радиус R_0, что $S(a,R_0) \bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, то $S(a,R_0) \subset \overset{o}{C\mathcal{A}}$. Значит $a \in \overset{o}{C\mathcal{A}}$, а это противоречит тому, что $a \in \bar{\mathcal{A}}$.

Обратно, пусть $S(a,R) \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ для всех $R > 0$ и $a \notin \bar{\mathcal{A}}$. Тогда $a \in \overset{o}{C\mathcal{A}}$, следовательно, существует R_0, что $S(a,R_0) \subset \overset{o}{C\mathcal{A}}$, то есть $S(a,R_0) \bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, что противоречит предположению.

Важным свойством метрического пространства является тот факт, что в нем можно ввести понятие ***предела последовательности***.

Определение 1.1.9 *Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек пространства $\mathcal{X}$ **сходится** к точке $x \in \mathcal{X}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon)$ такое, что при любых $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. Точка x называется при этом **пределом последовательности** $x_1, x_2, \ldots$.*

Как и в математическом анализе, для обозначения того, что x — предел последовательности $x_1, x_2, \ldots$, используется запись $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема 1.1.1 *Если последовательность $x_1, x_2, \ldots$ имеет предел, то он единственный.*

Доказательство. Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\;y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Покажем, что $x = y$. Действительно, в силу неравенства треугольника $\rho(x, y) \le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y)$. При $n \to \infty$ расстояния $\rho(x_n, x)$ и $\rho(x_n, y)$ стремятся к нулю. Значит $\rho(x, y) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 1.1.2 *Для того, чтобы точка $a \in \bar{\mathcal{A}}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность точек из $\mathcal{A}$, сходящаяся к этой точке.*

Доказательство. Пусть $a \in \bar{\mathcal{A}}$. Тогда для любого целого положительного числа n согласно лемме 1.1.4 $S(a, \frac{1}{n}) \bigcap \mathcal{A} \ne \emptyset$. Это означает, что существуют $a_n \in \mathcal{A}$ такие, что $\rho(a, a_n) < \frac{1}{n}$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Обратно, если $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $a_n \in \mathcal{A}$, то из определения предела следует при всех $R > 0$ существование $a_n \in \mathcal{A}$ таких, что $\rho(a, a_n) < R$. Значит, при любом $R > 0$ пересечение $S(a, R) \bigcap \mathcal{A}$ не пусто и по лемме 1.1.4 $a \in \bar{\mathcal{A}}$.

Определение 1.1.10 *Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$, принадлежащих метрическому пространству, называется **фундаментальной** или **последовательностью Коши**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для любых n и m, больших $N(\varepsilon)$, справедливо неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Если последовательность сходится, то она фундаментальна. Это следует из неравенства $\rho(x_n, x_m) \le \rho(x, x_n) + \rho(x, x_m)$. Обратное утверждение не верно. Пусть, например, $\mathcal{X}$ — множество рациональных чисел, $\rho(x, y) = |x - y|$, а x_n — n-е десятичное приближение к $\sqrt{2}$. Последовательность, очевидно, фундаментальна, но не сходится, так как $\sqrt{2} \notin \mathcal{X}$.

Определение 1.1.11 *Метрическое пространство называется **полным**, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.*

Пространство $C(a, b)$ является полным пространством.

Для доказательства заметим, что если последовательность $x_1, x_2, \ldots$ фундаментальна в $C(a, b)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число $N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ при любых целых $n, m > N(\varepsilon)$ и любых $t \in [a, b]$. Если зафиксировать значение t получается числовая последовательность $x_1(t), x_2(t) \ldots$, которая удовлетворяет условию Коши. По свойству числовых последовательностей, доказанному в курсе математического анализа, такая последовательность сходится. Обозначим ее предел через $x(t)$. Так как t — произвольная точка из отрезка $[a, b]$, предел $x(t)$ есть функция, определенная на этом отрезке и по построению последовательность $x_1(t), x_2(t) \ldots$ сходится к ней поточечно. Переходя теперь к пределу в неравенстве $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ при $m \to \infty$, получим, что $|x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon$, если $t \in [a, b]$ и

$n > N(\varepsilon)$. Это означает, что последовательность равномерно сходится. Как доказывалось в курсе математического анализа, предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть функция непрерывная. Таким образом, последовательность $x_1(t), x_2(t) \dots$ равномерно сходится к непрерывной функции $x(t)$. Это в свою очередь означает, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ в $C(a,b)$. Действительно, по определению сходимости в пространстве $C(a,b)$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$ что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Последнее означает, что при всех $t \in [a,b]$ справедливо неравенство $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$, а это и есть равномерная сходимость.

Всякое подмножество $\mathcal{A}$ метрического пространства $\mathcal{X}$ может рассматриваться как самостоятельное метрическое пространство, если для любых двух точек из $\mathcal{A}$ сохранить то определение расстояния, которое было в $\mathcal{X}$.

Теорема 1.1.3 *Всякое замкнутое множество $\mathcal{A}$ полного метрического пространства $\mathcal{X}$ само является полным метрическим пространством.*

Доказательство. Пусть точки $x_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ и последовательность, составленная из этих точек фундаментальна. Так как $\mathcal{X}$ полно, то предел этой последовательности существует. Так как $\mathcal{A}$ — замкнуто, то предел принадлежит $\mathcal{A}$, то есть последовательность $x_1, x_2, \dots$ сходится в $\mathcal{A}$.

1.2 КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Важным свойством ограниченных множеств на числовой прямой является тот факт, что из любой последовательности, состоящей из элементов этого множества, можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для произвольных метрических пространств такое утверждение не справедливо (см. параграф 1.4.1 пример 5). В связи с этим вводится следующее понятие:

Определение 1.2.1 *Множество $\mathcal{A}$ из метрического пространства $\mathcal{X}$ называется **компактным**, если из любой последовательности, состоящей из элементов множества $\mathcal{A}$, можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Если само $\mathcal{X}$ обладает таким свойством, то пространство называется компактным.

Определение 1.2.2 *Назовем множество **ограниченным**, если существует шар, содержащий это множество.*

Теорема 1.2.1 *Компактное множество ограничено.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\mathcal{A}$ — компактное, но не ограниченное множество. Возьмем произвольную точку $x_1 \in \mathcal{A}$, и $r_1 = 1$. Тогда $\mathcal{A}$ не является подмножеством $S(x_1, r_1)$, так как оно не ограничено. Значит существует $x_2 \in \mathcal{A}$, причем $x_2 \notin S(x_1, r_1)$, то есть $\rho(x_1, x_2) > r_1$.

Пусть $r_2 = \rho(x_1, x_2) + 1$. Тогда $\mathcal{A} \notin S(x_1, r_2)$ так как $\mathcal{A}$ не ограничено. Следовательно, существует $x_3 \in \mathcal{A}$, такое, что $x_3 \notin S(x_1, r_2)$, то есть $\rho(x_1, x_3) > r_2$. Возьмем $r_3 = \rho(x_1, x_3) + 1$ и так далее. В результате получим последовательность

$x_1, x_2, \dots$ точек из $\mathcal{A}$, последовательность чисел $r_1 < r_2 < r_3 < ...$, причем $\rho(x_1, x_n) = r_n - 1,\ \rho(x_1, x_{n+1}) > r_n$.

Если $m < n$, то

$$r_m \leq r_{n-1} < \rho(x_1, x_n) \leq \rho(x_1, x_m) + \rho(x_n, x_m).$$

Тогда из равенства $\rho(x_1, x_m) = r_m - 1$ следует, что $\rho(x_n, x_m) \geq 1$ и значит из последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность (сходящаяся подпоследовательность должна быть фундаментальной). Полученное противоречие доказывает теорему.

Для формулировки критерия компактности множества введем следующее определение:

Определение 1.2.3 *Пусть $\varepsilon > 0$. Множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ называется **ε-сетью** для множества $\mathcal{A}$, если для любого $x \in \mathcal{A}$ найдется $y \in \mathcal{B}$ такое, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.*

Другими словами $\mathcal{B}$ будет ε-сетью, если

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{b \in \mathcal{B}} S(b, \varepsilon)$$

.

Теорема 1.2.2 (Хаусдорф) *Для того, чтобы множество $\mathcal{A}$ было компактным, необходимо, а в случае полноты пространства достаточно, чтобы для этого множества существовала конечная ε-сеть, то есть ε-сеть, состоящая из конечного числа элементов.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что множество $\mathcal{A}$ компактно, но конечная ε-сеть при некотором ε не существует. Пусть $x_1 \in \mathcal{A}$. При этом $\mathcal{A} \notin S(x_1, \varepsilon)$ (в противном случае ε-сеть состоит из одного элемента x_1). Значит, существует такая точка x_2, что $x_2 \in \mathcal{A}$ и $x_2 \notin S(x_1, \varepsilon)$, то есть $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon$. Аналогично $\mathcal{A} \notin S(x_1, \varepsilon) \bigcup S(x_2, \varepsilon)$ (в противном случае ε-сеть состоит из двух точек — x_1, x_2). Следовательно, существует такая точка x_3, что $x_3 \in \mathcal{A}$ и кроме того $\rho(x_1, x_3) > \varepsilon,\ \rho(x_2, x_3) > \varepsilon$. Тогда $\mathcal{A} \notin S(x_1, \varepsilon) \bigcup S(x_2, \varepsilon) \bigcup S(x_3, \varepsilon)$ и так далее.

В результате получим последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots$ точек из $\mathcal{A}$ такую, что при любых $n \neq m$ справедливо неравенство $\rho(x_n, x_m) > \varepsilon$, а это значит, что из последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, следовательно множество $\mathcal{A}$ не компактно. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Достаточность. Пусть $\mathcal{X}$ - полное пространство и для любых $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. Пусть $\varepsilon_n = 1/n$. Возьмем ε_1-сеть. Тогда $\mathcal{A}$ содержится в объединении конечного числа шаров радиуса ε_1. Выберем произвольную последовательность $x_1, x_2, \dots$ из $\mathcal{A}$. Вся последовательность (вместе с $\mathcal{A}$) находится в объединении конечного числа шаров. Значит, в одном из шаров будет содержаться бесконечное число членов последовательности. Возьмем этот шар и выделим те члены последовательности, которые лежат в нем:

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots \tag{1.1}$$

Выберем ε_2-сеть. Тогда в конечном числе шаров находится бесконечное число членов последовательности (1.1). Выберем шар, в который попадет бесконечное число членов последовательности (1.1), и обозначим попавшие в него члены последовательности

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots \tag{1.2}$$

По построению (1.2) — подпоследовательность последовательности (1.1) и находится в шаре радиуса ε_2. Берем ε_3-сеть и так далее.

Выберем теперь последовательность $x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \ldots$. Она по построению подпоследовательность исходной последовательности $x_1, x_2, \ldots$. Кроме того заметим, что $x_m^{(m)}, x_{m+1}^{(m+1)}, \ldots$ подпоследовательность последовательности с номером m. Значит, по построению она лежит в некотором шаре радиуса $1/m$, и тогда, если a — центр этого шара и $m < n$, то

$$\rho(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}) \leq \rho(x_m^{(m)}, a) + \rho(x_n^{(n)}, a) < \frac{2}{m}$$

Отсюда следует, что подпоследовательность $x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots$ фундаментальная, и так как пространство $\mathcal{X}$ полное, она сходится. Таким образом, из произвольной последовательности выделена сходящаяся подпоследовательность, что означает компактность множества $\mathcal{A}$.

Теорема 1.2.3 (Арцела) *Для того чтобы множество $\mathcal{A} \subset C(a, b)$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы функции этого множества удовлетворяли условиям:*

- *существует такая константа $C > 0$, что для всех $x(t) \in \mathcal{A}$ выполняется неравенство $|x(t)| < C$ (**равномерная ограниченность**);*
- *для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что для всех $x(t) \in \mathcal{A}$ и любых $t_1, t_2 \in [a, b]$ из того, что $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ следует, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ (**равностепенная непрерывность**).*

Рассмотрим пример применения теоремы Арцела. Пусть $\mathcal{A} \subset C(a, b)$ — ограниченное множество и $k(t, s)$ — непрерывная функция, определенная на множестве $[a, b] \times [a, b]$. Определим в $C(a, b)$ множество

$$\mathcal{A}_1 = \{y(t) : y(t) = \int\limits_a^b k(t, s)x(s)\, ds,\ x(s) \in \mathcal{A}\}.$$

Тогда множество $\mathcal{A}_1$ компактно.

Для доказательства этого утверждения заметим сначала, что множество ограничено в пространстве $C(a, b)$ тогда и только тогда, когда все элементы этого множества не превосходят по модулю некоторой константы. Действительно, если все элементы множества не превосходят некоторой константы, то все множество лежит в шаре, центром которого является функция тождественно равная нулю, а радиус — любое число, большее этой константы. Обратно, если множество $\mathcal{A}$ ограничено, то оно лежит в некотором шаре. Пусть x_0 — центр шара и R — радиус. Тогда для любого $x \in \mathcal{A}$ справедливо неравенство $\max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - x_0(t)| < R$ или $x_0(t) - R < x(t) < x_0(t) + R$. Отсюда следует, что все функции из $\mathcal{A}$ меньше, чем $\max\limits_{t \in [a,b]} |x_0(t)| + R$.

Вернемся теперь к доказательству компактности множества $\mathcal{A}_1$. Так как множество $\mathcal{A}$ ограничено, существует такая константа M, что все элементы этого множества не превосходят M. Тогда

$$|y(t)| = \left|\int\limits_a^b k(t,s)x(s)\,ds\right| \le \int\limits_a^b |k(t,s)||x(s)|\,ds \le$$
$$\le M\int\limits_a^b |k(t,s)|\,ds \le M\max_{t\in[a,b]}\int\limits_a^b |k(t,s)|\,ds.$$

Полученное неравенство означает, что функции из множества $\mathcal{A}_1$ равномерно ограничены.

В силу непрерывности функции $k(t,s)$ из неравенства

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left|\int\limits_a^b k(t_1,s)x(s)\,ds - \int\limits_a^b k(t_2,s)x(s)\,ds\right| \le$$
$$\le \int\limits_a^b |k(t_1,s) - k(t_2,s)||x(s)|\,ds \le M\int\limits_a^b |k(t_1,s) - k(t_2,s)|\,ds$$

следует, что функции из множества $\mathcal{A}_1$ равностепенно непрерывны.

1.3 ОПЕРАТОРЫ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — два метрических пространства, $\rho_{\mathcal{X}}$ — расстояние в пространстве $\mathcal{X}$, $\rho_{\mathcal{Y}}$ — в $\mathcal{Y}$.

Определение 1.3.1 *Говорят, что на $\mathcal{X}$ задан **оператор** со значениями в $\mathcal{Y}$, если каждому элементу $x \in \mathcal{X}$ ставится в соответствие по определенному закону единственный элемент $y \in \mathcal{Y}$.*

Будем обозначать это соответствие $y = \mathcal{U}x$. Здесь $\mathcal{U}$ — оператор, x — элемент пространства $\mathcal{X}$, на который действует оператор, y — результат действия оператора. Часто используется терминология "$\mathcal{U}$ отображает $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$" и обозначение $\mathcal{U} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

В том случае, когда пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ совпадают, говорят, что оператор действует в пространстве $\mathcal{X}$.

Если $\mathcal{Y}$ — числовая прямая (или комплексная плоскость), то оператор называют ***функционалом*** и применяют обозначение $y = \mathcal{U}(x)$. Иногда оператор будет определен не на всем $\mathcal{X}$, а на некотором его подмножестве.

Примеры:

- пусть $\mathcal{X}$ — произвольное метрическое пространство, и $f_a(x) = \rho_{\mathcal{X}}(x,a)$ расстояние до некоторой фиксированной точки $a \in \mathcal{X}$, тогда f_a — функционал;
- $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a,b),\ \ \mathcal{U}x = x^2 + 5x;$
- $\mathcal{X} = C(a,b),\ \ \mathcal{Y} = R^2,\ \ \mathcal{U}x = (x(a), x(b)).$

Определение 1.3.2 *Оператор $\mathcal{U}$ называется **непрерывным в точке** $x_0 \in \mathcal{X}$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, выполняется равенство $\mathcal{U}x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{U}x_n$.*

Другими словами непрерывность в точке x_0 означает следующее: из того, что $\rho_{\mathcal{X}}(x_n, x_0) \to 0$ следует, что $\rho_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}x_n, \mathcal{U}x_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 1.3.3 *Оператор называется* ***непрерывным****, если он непрерывен в каждой точке.*

Многие свойства непрерывных функций, определенных на замкнутых ограниченных множествах, переносятся на непрерывные функционалы, определенные на замкнутых компактных множествах. Справедливы, например, следующие утверждения (доказательства аналогичны доказательствам соответствующих теорем из математического анализа):

- Если $f(x)$ — непрерывный функционал, заданный на замкнутом компактном множестве, то он ограничен.
- Если $f(x)$ — непрерывный функционал, заданный на замкнутом компактном множестве, то он принимает на этом множестве свое наибольшее и наименьшее значение.

В математике часто встречается задача решения уравнений. Пер ейдем к одному случаю, когда можно доказать разрешимость уравнения и указать метод нахождения решений. Для этого сформулируем и докажем одну из важнейших теорем функционального анализа, а затем рассмотрим различные примеры применения этой теоремы.

Пусть пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ совпадают, следовательно, $\rho_{\mathcal{X}} = \rho_{\mathcal{Y}} = \rho$.

Определение 1.3.4 *Оператор $\mathcal{U}$ называют* ***сжимающим****, если существует такое число $\alpha \in (0, 1)$, что для всех $x, y \in \mathcal{X}$ выполняется неравенство*

$$\rho(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) \leq \alpha\rho(x, y). \tag{1.3}$$

Если оператор сжимающий, то он непрерывен, так как $\rho(\mathcal{U}x_n, \mathcal{U}x^*) \leq \alpha\rho(x_n, x^*)$. Отсюда следует, что $\rho(\mathcal{U}x_n, \mathcal{U}x^*) \to 0$, если $\rho(x_n, x^*) \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 1.3.5 *Точка x называется* ***неподвижной точкой*** *оператора $\mathcal{U}$, если $\mathcal{U}x = x$.*

Теорема 1.3.1 (теорема Банаха о неподвижной точке) *Пусть $\mathcal{U}$ сжимающий оператор, действующий в полном метрическом пространстве $\mathcal{X}$. Тогда у оператора $\mathcal{U}$ существует единственная неподвижная точка x^*. Независимо от выбора точки $x_0 \in \mathcal{X}$, последовательность точек $x_{n+1} = \mathcal{U}x_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ сходится к неподвижной точке x^*(точки x_n называются* ***последовательными приближениями*** *).*

Доказательство. Докажем сначала единственность. Пусть есть две точки x, y, которые неподвижны и различны. Тогда $\mathcal{U}x = x$, $\mathcal{U}y = y$. Так как

$$\rho(x, y) = \rho(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) \leq \alpha\rho(x, y)$$

и $\rho(x, y) \neq 0$, получим отсюда $1 \leq \alpha < 1$, что невозможно.

Пусть x_0 — произвольная точка из $\mathcal{X}$. Для доказательства существования неподвижной точки покажем, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \mathcal{U}x_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ фундаментальна. Действительно, учитывая (1.3), имеем

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(\mathcal{U}x_{n-1}, \mathcal{U}x_n) \leq \alpha\rho(x_{n-1}, x_n) =$$
$$= \alpha\rho(\mathcal{U}x_{n-2}, \mathcal{U}x_{n-1}) \leq \alpha^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \alpha^n\rho(x_0, x_1).$$

Используя теперь это неравенство и неравенство треугольника, имеем:

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+p}) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+p}) \leq \ldots \\ &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \alpha^i\rho(x_0, x_1) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \alpha^i\rho(x_0, x_1) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).\end{aligned} \tag{1.4}$$

В силу этого неравенства заключаем, что последовательность фундаментальна, так как $0 < \alpha < 1$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.

Из полноты пространства $\mathcal{X}$ следует сходимость последовательности $\{x_n\}$.

Пусть $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда, переходя к пределу в равенстве $x_n = \mathcal{U}x_{n-1}$ и учитывая непрерывность оператора $\mathcal{U}$, получаем, что $x^* = \mathcal{U}x^*$, то есть x^* — неподвижная точка оператора, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если в неравенстве (1.4) перейти к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\rho(x^*, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).$$

Это неравенство является оценкой погрешности, получающейся при приближении неподвижной точки x^* точкой x_n. Из неравенства следует, что для нахождения точки x^* с заданной точностью $\varepsilon > 0$ достаточно взять x_n, где

$$n > \frac{\ln\varepsilon + \ln(1-\alpha) - \ln\rho(x_0, x_1)}{\ln\alpha}.$$

Заметим также, что чем число α ближе к нулю, тем n меньше, то есть метод сходится быстрее.

Замечание 2. Так как по теореме 1.1.3 всякое замкнутое подмножество полного пространства само является полным, теорема Банаха верна, если оператор сжатия задан на некотором замкнутом подмножестве $\mathcal{X}_1$ из $\mathcal{X}$ и его значения лежат в этом подмножестве. Точка x_0 при этом должна выбираться из $\mathcal{X}_1$.

Приведем некоторые примеры применения теоремы Банаха.

1) Требуется решить уравнение $F(x) = 0$, где $F(x)$ — гладкая функция, определенная на отрезке $[a, b]$ числовой прямой. Перепишем уравнение в виде $x = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ задана на $[a, b]$ и отображает этот отрезок в себя, причем $|f'(x)| \leq \alpha < 1$. Тогда

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| \leq \alpha|x - y|, \quad \xi \in [a, b].$$

Значит функцию $f(x)$ можно рассматривать как сжимающий оператор, действующий на точки отрезка $[a, b]$ числовой прямой. Отсюда следует однозначная разрешимость уравнения и метод его приближенного решения.

Согласно теореме Банаха последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots,$ сходится к решению уравнения, при этом в качестве x_0 можно взять произвольную точку их отрезка $[a, b]$. Такой метод нахождения решения уравнения $x = f(x)$ называется ***методом простой итерации.***

От уравнения $F(x) = 0$ к уравнению $x = f(x)$ можно перейти различными способами. Следует выбрать такой способ, чтобы величина $\max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ была как можно меньше, причем обязательно меньше 1. Например, требуется решить уравнение

$$x^5 + 3x^2 - x = 250. \tag{1.5}$$

Здесь $F(x) = x^5 + 3x^2 - x - 250$. Заметим, что $F(x) < 0$ при $x \le 2$ и $F'(x) > 0$ при $x > 2$. Кроме того, $F(3) = 17$. В силу непрерывности, функция $F(x)$ принимает на отрезке $[2, 3]$ все значения между $F(2)$ и $F(3)$ и, следовательно, в какой-то точке обращается в ноль. Так как функция монотонно возрастает при $x > 2$, есть только одна точка на отрезке, в которой функция равно нулю. Поэтому уравнение имеет единственное решение x^*, которое находится на отрезке $[2, 3]$. Для того, чтобы уравнение (1.5) переписать в виде $x = f(x)$ достаточно перенести x в правую часть, а 250 в левую. В результате получим $x = x^5 + 3x^2 - 250$. Таким образом, $f(x) = x^5 + 3x^2 - 250$. Следовательно, $f'(x) = 5x^4 + 6x > 1$ при $x > 2$. Поэтому такая запись не позволяет решать уравнение методом последовательных приближений. Можно поступить иначе, переписав (1.5) в виде

$$x = \sqrt[5]{250 + x - 3x^2}.$$

В этом случае $f(x) = \sqrt[5]{250 + x - 3x^2}$. Заметим, что на промежутке $[2, 3]$ подкоренная функция убывает, поэтому на этом отрезке свое наибольшее и наименьшее значение функция $f(x)$ принимает на концах отрезка. Так как $f(2) = \sqrt[5]{240} \in [2, 3]$, $f(3) = \sqrt[5]{226} \in [2, 3]$, то $f(x) \in [2, 3]$ при $x \in [2, 3]$. Таким образом эта функция отображает отрезок $[2, 3]$ в себя. Кроме того, при $x \in [2, 3]$

$$|f'(x)| = \left| \frac{1 - 6x}{5\sqrt[5]{(250 + x - 3x^2)^4}} \right| \le \frac{17}{5\sqrt[5]{226^4}} < 0.045 = \alpha,$$

то есть число $\alpha \ll 1$. Поэтому метод последовательных приближений сходится, причем достаточно быстро. Действительно, решение уравнения (1.5) $x^* = 2,9586230860\ldots$. Если положить $x_0 = 2$, то $x_1 = 2,99256$, $x_2 = 2,95713$, $x_3 = 2,95869$, $x_4 = 2,95862 \approx x^*$.

2) Покажем, как из теоремы Банаха можно получить теорему существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Рассмотрим уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{1.6}$$

с начальным условием

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{1.7}$$

Пусть в прямоугольнике $\Delta = (|x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b)$ функция $f(x, y)$ непрерывна и $|f(x, y)| \le M$. Пусть, кроме того существует такая константа $K > 0$, что выполняется неравенство

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le K|y_1 - y_2| \tag{1.8}$$

при любом x из промежутка $[x_0 - a, x_0 + a]$ и любых двух значениях y_1, y_2 из промежутка $[y_0 - b, y_0 + b]$. Последнее условие, как и для функций одного переменного, называется ***условием Липшица***.

Докажем, что при выполнении вышеперечисленных условий найдется такое достаточно малое положительное число h, что в промежутке $[x_0 - h, x_0 + h]$ существует единственное решение уравнения (1.6), удовлетворяющее начальному условию (1.7).

Для доказательства придадим уравнению (1.6) другую — интегральную форму. С этой целью, считая y функцией от x, проинтегрируем обе части уравнения (1.6) от x_0 до x. При этом, благодаря начальному условию (1.7), $\int\limits_{x_0}^{x} y'\,dx = y - y_0$, а поэтому приходим к уравнению

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \tag{1.9}$$

Пусть теперь $y = y(x)$ — решение (1.9). Подставляя ее в уравнение (1.9) и дифференцируя полученное тождество по x, получим, что $y = y(x)$ — решение уравнения (1.6). Кроме того, непосредственно видно, что если функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению (1.9), то $y = y_0$, при $x = x_0$. Таким образом, уравнение (1.9) равносильно дифференциальному уравнению (1.6), взятому вместе с начальным условием (1.7).

Примем за h любое число, удовлетворяющее условию

$$0 < h < \min(\frac{1}{K}, a, \frac{b}{M}),$$

и рассмотрим пространство $C(\delta)$ непрерывных функций, заданных на отрезке $\delta = [x_0 - h, x_0 + h]$. Обозначим через $\mathcal{X}_1$ подмножество пространства $C(\delta)$, состоящее из всех функций $y = y(x)$, для которых при всех $x \in \delta$

$$y_0 - b \le y(x) \le y_0 + b$$

Легко заметить, что если последовательность функций из $\mathcal{X}_1$ сходится, то предельная функция принадлежит $\mathcal{X}_1$. Следовательно, $\mathcal{X}_1$ — замкнутое множество в $C(\delta)$.

Рассмотрим на $\mathcal{X}_1$ оператор, заданный посредством правой части уравнения (1.9), то есть для каждого $y \in \mathcal{X}_1$ положим

$$\mathcal{U}y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx, \quad x \in \delta. \tag{1.10}$$

Очевидно, что решение уравнения (1.9) является неподвижной точкой оператора $\mathcal{U}$.

Проверим, что все значения оператора $\mathcal{U}$ лежат в $\mathcal{X}_1$ и что $\mathcal{U}$ — сжимающий оператор.

Если $y \in \mathcal{X}_1$, то при любом $x \in \delta$ точка $(x, y(x)) \in \Delta$, следовательно, правая часть (1.10) имеет смысл и $\mathcal{U}y \in C(\delta)$. Кроме того, $|f(x, y(x))| \le M$, потому при всяком $x \in \delta$

$$|\mathcal{U}y - y_0| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx\right| \le M|x - x_0| \le Mh \le M\frac{b}{M} = b,$$

следовательно, $\mathcal{U}y \in \mathcal{X}_1$.

Пусть $y,\ \bar{y} \in \mathcal{X}_1$. Тогда при любом $x \in \delta$, учитывая условие Липшица (1.8), получим

$$|\mathcal{U}y - \mathcal{U}\bar{y}| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx - \int\limits_{x_0}^{x} f(x, \bar{y}(x))\, dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(x, y(x)) - f(x, \bar{y}(x))|\, dx \right| \leq K \left| \int\limits_{x_0}^{x} |y(x) - \bar{y}(x)|\, dx \right| \leq$$

$$\leq K \max_{x\in\delta} |y(x) - \bar{y}(x)||x - x_0| \leq K\rho(y, \bar{y})h = \alpha\rho(y, \bar{y}),$$

где $\alpha = Kh < 1$.

Таким образом, теорема Банаха, согласно замечанию 2, применима к оператору $\mathcal{U}$. Он имеет единственную неподвижную точку, а это и есть единственное решение уравнения (1.9) в промежутке δ. Кроме того, теорема Банаха обеспечивает возможность получения этого решения методом последовательных приближений. За начальную функцию можно принять, например, $y \equiv y_0$.

1.4 ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 1

1.4.1 Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что определение 1.1.1 расстояния, эквивалентно следующему:

Определение 1.4.1 *Пусть $\mathcal{X}$ — множество. Предположим, что каждой паре элементов x, y из $\mathcal{X}$ поставлено в соответствии число $\rho(x, y)$ такое, что*

а) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

б) для всех x, y, z из $\mathcal{X}$ справедливо неравенство $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$.

Тогда число $\rho(x, y)$ называется ***расстоянием*** *между x и y.*

Решение. Очевидно, что если выполнены аксиомы из определения 1.1.1, то выполнены требования, налагаемые на расстояние определением 1.4.1. Поэтому достаточно проверить, что из 1.4.1 следует 1.1.1. Для этого надо показать, что из 1.4.1 следует, что расстояние неотрицательно и не меняется при перестановке местами элементов.

В неравенстве из аксиомы б) определения 1.4.1 положим $x = y$. Тогда, в силу аксиомы а), получим $0 \leq 2\rho(x, z)$, то есть для любых $x, z \in \mathcal{X}$ выполняется неравенство $\rho(x, z) \geq 0$.

Если теперь в неравенстве из аксиомы б) определения 1.4.1 положить $x = z$, то из а) получим $\rho(x, y) \leq \rho(y, x)$, то есть при перестановке аргументов расстояние не убывает. Следовательно, $\rho(x, y) \leq \rho(y, x) \leq \rho(x, y)$, откуда $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. Утверждение доказано.

Пример 2. Будет ли метрическим пространство, элементами которого являются числа, а расстояние задается по формуле $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$.

Решение. В соответствии с определением метрического пространства необходимо проверить выполнение аксиом расстояния.

Очевидно, что расстояние, определенное в задаче, неотрицательно и в силу строгой монотонности функции e^x расстояние $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$. Выполнение второго условия следует из равенств

$$\rho(x,y)=|e^x-e^y|=|e^y-e^x|=\rho(y,x).$$

И, наконец, в силу свойств модуля имеем

$$\rho(x,y)=|e^x-e^y|=|(e^x-e^z)+(e^z-e^y)|\le|e^x-e^z|+|e^z-e^y|=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Таким образом, выполнены все требования, налагаемые при определении расстояния. Следовательно, пространство является метрическим.

Пример 3. Всегда ли из того, что $S(a_1,R_1)\subset S(a_2,R_2)$ следует, что $R_1<R_2$?

Решение. Для ответа на вопрос представим себе, как выглядят шары в пространстве, например, определенном в предыдущем примере. По определению $S(a,R)=\{x:\rho(a,x)<R\}$. Таким образом, учитывая определение расстояния, получим, что открытым шаром с центром в точке a радиуса R будет множество таких чисел x, что $|e^a-e^x|<R$. Отсюда следует, что $e^a-R<e^x<e^a+R$ или

$$\ln(e^a+R)>x>\begin{cases}-\infty, & \text{при } e^a\le R,\\ \ln(e^a-R), & \text{при } e^a>R.\end{cases}$$

Пусть, например, $a_1=-\ln 10$, $R_1=1.5$, $a_2=0$, $R_2=1$. Тогда $S(a_1,R_1)=(-\infty,\ln 1.6)$, $S(a_2,R_2)=(-\infty,\ln 2)$. Таким образом, $S(a_1,R_1)\subset S(a_2,R_2)$, однако $R_2<R_1$. Следовательно, в метрическом пространстве шар меньшего радиуса может содержать шар большего радиуса.

Пример 4. Сходятся ли следующие последовательности функций: а) $\{x_n(t)=\sin nt\}$ в пространстве $C_L(0,\pi)$; б) $\{x_n(t)=n\sin\dfrac{t}{n}\}$ в пространстве $C(0,1)$? Для сходящихся последовательностей найти предел.

Решение. Проверим, прежде всего, фундаментальны ли эти последовательности. Рассмотрим первую последовательность. Для простоты выкладок возьмем $m=2n$. Из периодичности функции $\sin nt$ следует

$$\rho(x_n,x_{2n})=\int\limits_0^{\pi}|\sin nt-\sin 2nt|\,dt=n\int\limits_0^{\pi/n}|\sin nt-\sin 2nt|\,dt=$$

$$=n\int\limits_0^{\pi/(2n)}|\sin nt-\sin 2nt|\,dt+n\int\limits_{\pi/(2n)}^{\pi/n}|\sin nt-\sin 2nt|\,dt>n\int\limits_{\pi/(2n)}^{\pi/n}|\sin nt-\sin 2nt|\,dt=$$

$$=n\int\limits_{\pi/(2n)}^{\pi/n}\sin nt\,dt-n\int\limits_{\pi/(2n)}^{\pi/n}\sin 2nt\,dt=2.$$

Таким образом, нашлись такие n и m, что как бы велики они не были, расстояние между x_n и x_m больше 2. Значит, последовательность не фундаментальна и, поэтому, не сходится. Заметим, что если бы оказалось, что $\rho(x_n,x_{2n})\to 0$ при $n\to\infty$, то нельзя было бы сделать вывод о том, что последовательность фундаментальна, так как в определении фундаментальности n и m должны быть произвольными достаточно большими числами. Здесь же они связаны соотношением $m=2n$.

Для второй последовательности

$$\rho(x_n, x_m) = \max_{t\in[0,1]} \Big| n\sin\frac{t}{n} - m\sin\frac{t}{m}\Big|.$$

Для нахождения максимума найдем нули производной функции, стоящей под знаком модуля,

$$\Big(n\sin\frac{t}{n} - m\sin\frac{t}{m}\Big)' = \cos\frac{t}{n} - \cos\frac{t}{m} = 2\sin\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\Big)t\,\sin\Big(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\Big)t.$$

Так как $n \neq m$, это выражение обращается в ноль только при $t = 0$. Таким образом, функция $\left|n\sin\frac{t}{n} - m\sin\frac{t}{m}\right|$ свое максимальное значение принимает на концах отрезка $[0,1]$. Так как в точке $t = 0$ значение этой функции равно 0, максимальное значение принимается в точке 1. Следовательно,

$$\rho(x_n, x_m) = \Big|n\sin\frac{1}{n} - m\sin\frac{1}{m}\Big|.$$

Из первого замечательного предела отсюда следует, что при $n, m \to \infty$ выражение справа стремится к 0, следовательно, последовательность фундаментальна. Так как пространство $C(0,1)$ полное, последовательность сходится.

Как отмечалось при доказательстве полноты пространства $C(a,b)$, сходимость в этом пространстве равномерная. Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. В то же время, из первого замечательного предела следует, что последовательность $n\sin\frac{t}{n}$ поточечно сходится к функции t. А, так как уже доказано, что последовательность сходится равномерно, следовательно, она равномерно сходится к функции $x(t) = t$.

В случае второй последовательности можно было рассуждать иначе. Сначала заметить, что последовательность функций $n\sin\dfrac{t}{n}$ при $n \to \infty$ поточечно сходится к функции t и затем доказывать, что она сходится в $C(0,1)$ к этой же функции. Для этого достаточно воспользоваться разложения синуса в ряд, откуда следует, что

$$\Big|t - n\sin\frac{t}{n}\Big| = \Big|\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k-1}}{n^{2k-2}(2k-1)!}\Big|.$$

Так как ряд знакочередующийся, его остаток не превосходит модуля первого отброшенного члена, то есть

$$\Big|t - n\sin\frac{t}{n}\Big| \leq \frac{t^3}{n^2 3!} \leq \frac{1}{n^2 3!} \leq \varepsilon.$$

Это неравенство выполняется, если $n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\sqrt{6\varepsilon}}\right]$. Здесь [ ] означает целую часть числа. Таким образом, показано, что для произвольного $\varepsilon > 0$ нашелся такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\rho(t, n\sin\dfrac{t}{n}) < \varepsilon$. Это как раз и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{t}{n} = t$.

Пример 5. Показать, что шары в пространстве $C(a,b)$ не являются компактными множествами.

Решение. Для того чтобы показать, что шары не являются компактными множествами, достаточно привести пример такой последовательности функций принадлежащих шару, из которой нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Такую последовательность образуют, например, функции, расстояние между которыми не меньше некоторого фиксированного числа.

Возьмем шар, центром которого является функция тождественно равная нулю, и радиус $R > 1$. В этом шаре находятся все непрерывные функции, определенные на отрезке $[a, b]$, модуль которых меньше R.

Введем точки $t_i = a + (b - a)/i,\ t_{i+1/2} = (t_i + t_{i+1})/2,\ i = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим теперь функции (нарисуйте графики этих функций)

$$x_i(t) = \begin{cases} 0, & a \le t \le t_{i+1}, \\ \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+1/2} - t_{i+1}}, & t_{i+1} < t \le t_{i+1/2}, \\ \frac{t - t_i}{t_{i+1/2} - t_i}, & t_{i+1/2} < t \le t_i, \\ 0, & t_i < t \le b. \end{cases}$$

При всех i значения этих функций лежат в промежутке между 0 и 1. Это означает, что все функции $x_i(t)$ находятся в выбранном шаре.

Найдем

$$\rho(x_i, x_j) = \max_{t \in [a,b]} |x_i(t) - x_j(t)|.$$

Пусть для определенности $i > j$. Тогда

$$x_i(t) - x_j(t) = \begin{cases} 0, & a \le t \le t_{i+1}, \\ \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+1/2} - t_{i+1}}, & t_{i+1} < t \le t_{i+1/2}, \\ \frac{t - t_i}{t_{i+1/2} - t_i}, & t_{i+1/2} < t \le t_i, \\ 0, & t_i \le t \le t_{j+1}, \\ -\frac{t - t_{j+1}}{t_{j+1/2} - t_{j+1}}, & t_{j+1} < t \le t_{j+1/2}, \\ -\frac{t - t_j}{t_{j+1/2} - t_j}, & t_{j+1/2} < t \le t_j, \\ 0, & t_j < t \le b. \end{cases}$$

Очевидно теперь, что $\rho(x_i, x_j) = 1$. Из предложенной последовательности функций нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность.

Как построить аналогичный пример для произвольного шара?

Пример 6. Доказать, что если некоторая степень непрерывного оператора A, отображающего полное метрическое пространство $\mathcal{X}$ в себя, является сжимающим оператором, то оператор A имеет единственную неподвижную точку. По определению $A^2 x = A(Ax)$ и, если оператор A^{n-1} уже определен, то $A^n x = A(A^{n-1}x)$.

Решение. Покажем сначала, что если у оператора A неподвижная точка существует, то она единственна. Для этого заметим прежде всего, что всякая неподвижная точка оператора A будет неподвижной точкой любой степени этого оператора. Действительно, если x^* — неподвижная точка, то есть $Ax^* = x^*$, то

$$A^2 x^* = A(Ax^*) = Ax^* = x^*$$

и так далее.

Пусть A^k — сжимающий оператор и предположим, что у оператора A есть по крайней мере две неподвижные точки. Тогда эти точки будут неподвижными точками оператора A^k, однако это невозможно потому, что согласно теореме Банаха о неподвижной точке у сжимающего оператора есть только одна неподвижная точка.

Теперь установим существование неподвижной точки оператора A. Пусть x^* — неподвижная точка оператора A^k. Она существует согласно теореме о неподвижной точке. Тогда

$$Ax^* = A(A^k x^*) = A^{k+1} x^* = A^k(Ax^*).$$

Полученное равенство означает, что Ax^* — неподвижная точка оператора A^k. Однако у этого оператора есть только одна неподвижная точка. Значит $x^* = Ax^*$, то есть x^* — неподвижная точка оператора A.

Пример 7. Пусть $k(t,s)$ — непрерывная на $[a,b] \times [a,b]$ функция, $f(t)$ — непрерывная на $[a,b]$ функция. Уравнение

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^t k(t,s)x(s)\,ds + f(t)$$

называется ***уравнением Вольтерра***. Доказать, что это уравнение при любых λ имеет единственное решение в $C(a,b)$.

Решение. В пространстве $C(a,b)$ введем оператор A по формуле

$$Ax = \lambda \int\limits_a^t k(t,s)x(s)\,ds + f(t).$$

Тогда очевидно, что задача решения уравнения Вольтерра эквивалентна задаче нахождения неподвижной точки оператора A. Поэтому для того, чтобы доказать существование решения уравнения, достаточно показать, что некоторая степень оператора A является сжимающим оператором (см. предыдущий пример).

Функция $k(t,s)$ непрерывна на множестве $[a,b] \times [a,b]$, поэтому она ограничена, то есть существует такая константа N, что $|k(t,s)| \le N$. Вследствие этого имеем:

$$|Ax - Ay| = \left|\lambda \int\limits_a^t k(t,s)x(s)\,ds + f(t) - \lambda \int\limits_a^t k(t,s)y(s)\,ds - f(t)\right| =$$

$$= |\lambda| \left|\int\limits_a^t k(t,s)(x(s) - y(s))\,ds\right| \le |\lambda| \int\limits_a^t |k(t,s)||x(s) - y(t)|\,ds \le$$

$$\le |\lambda| N \int\limits_a^t |x(s) - y(s)|\,ds. \quad (1.11)$$

Если теперь под интегралом в правой части неравенства заменить $|x(s) - y(s)|$ на максимальное значение этой функции, то есть на расстояние между x и y, то получим

$$|Ax - Ay| \le |\lambda| N \rho(x,y) \int\limits_a^t ds = |\lambda| N (t-a) \rho(x,y). \quad (1.12)$$

Отсюда следует, что

$$\rho(Ax, Ay) = \max_{t \in [a,b]} |Ax - Ay| \le |\lambda| N (b-a) \rho(x,y).$$

Если окажется, что $|\lambda| N (b-a) < 1$, то это будет означать сжимаемость оператора A и значит, утверждение доказано. В противном случае воспользуемся неравенством (1.11), заменив в нем x на Ax, y на Ay. В результате получим

$$|A^2x - A^2y| = |A(Ax) - A(Ay)| \le |\lambda| N \int\limits_a^t |(Ax)(s) - (Ay)(s)|\,ds.$$

Из неравенства (1.12) теперь следует, что

$$|A^2x - A^2y| \le (|\lambda|N)^2 \int\limits_a^t (s-a)\,ds\rho(x,y) = \frac{\big(|\lambda|N(t-a)\big)^2}{2}\rho(x,y). \tag{1.13}$$

Значит

$$\rho(A^2x, A^2y) \le \frac{\big(|\lambda|N(b-a)\big)^2}{2}\rho(x,y).$$

При $\big(|\lambda|N(b-a)\big)^2/2 < 1$ утверждение доказано. Если же неравенство не выполнено, то снова воспользуемся (1.11), заменив теперь x на A^2x, y на A^2y, и (1.13). Получим

$$|A^3x - A^3y| \le |\lambda|N \int\limits_a^t |(A^2x)(s) - (A^2y)(s)|\,ds \le \frac{(|\lambda|N)^3}{2}\rho(x,y)\int\limits_a^t (s-a)^2\,ds =$$
$$= \frac{\big(|\lambda|N(t-a)\big)^3}{3!}\rho(x,y).$$

Отсюда

$$\rho(A^3x, A^3y) \le \frac{\big(|\lambda|N(b-a)\big)^3}{3!}\rho(x,y).$$

Продолжая рассуждать подобным образом, получим

$$\rho(A^kx, A^ky) \le \frac{\big(|\lambda|N(b-a)\big)^k}{k!}\rho(x,y).$$

Так как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\big(|\lambda|N(b-a)\big)^k}{k!} = 0,$$

начиная с некоторого момента дробь

$$\frac{\big(|\lambda|N(b-a)\big)^k}{k!}$$

станет меньше 1 и, следовательно, оператор A^k будет сжимающим.

1.4.2 Задачи

1. Доказать, что для любых трех точек метрического пространства

$$|\rho(x,y) - \rho(y,z)| \le \rho(x,z),$$

а для любых четырех точек

$$|\rho(x,z) - \rho(y,t)| \le \rho(x,y) + \rho(z,t).$$

2. Проверить, что следующие пространства являются метрическими.
а) $\mathcal{X} = \{x : x = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n),\ \xi_i \in R,\ i = 1, 2, \dots, n\}$, где R — числовая прямая,

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2\right)^{1/2},\ \ y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

(n *- мерное евклидово пространство* R^n).

б) $\mathcal{X}$ — множество бесконечных числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < \infty$. Расстояние задается формулой $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|$, где $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ (***пространство*** l_1).

в) Множество всех ограниченных бесконечных числовых последовательностей с расстоянием, определенным для точек $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ по формуле $\rho(x,y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|$. Ограниченность последовательности означает, что $\sup_i |\xi_i| < \infty$ (***пространство*** l_∞).

г) Множество непрерывных функций $x(t)$, заданных на замкнутом ограниченном множестве $\Omega \subset R^n$. Расстояние определяется по формуле

$$\rho(x,y) = \max_{t \in \Omega} |x(t) - y(t)|$$

(***пространство*** $C(\Omega)$, при $n = 1$ и $\Omega = [a,b]$ применяется обозначение $C(a,b)$).

д) Множество k раз непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, определенных на замкнутом ограниченном множестве $\Omega \subset R^n$. Расстояние задается формулой

$$\rho(x,y) = \sum_{0 \le \alpha_1 + \dots + \alpha_n \le k} \max_{t \in \Omega} \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}(x(t) - y(t))}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_n^{\alpha_n}} \right|, \ t = (t_1, \dots, t_n),$$

где α_i, $i = 1, \dots, n$ — целые неотрицательные числа (***пространство*** $C^k(\Omega)$ или $C^k(a,b)$ при $\Omega = [a,b]$).

е) Множество непрерывных функций, определенных на замкнутом ограниченном множестве $\Omega \subset R^n$, с расстоянием

$$\rho(x,y) = \int\limits_{\Omega} |x(t) - y(t)| \, dt$$

(***пространство*** $C_L(\Omega)$).

ж) $\mathcal{X}$ — произвольное множество,

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

(***дискретное пространство***).

3. Являются ли метрическими следующие пространства:

а) множество точек числовой прямой, если $\rho(x,y) = \sin^2(x-y)$;

б) множество точек числовой прямой, если $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$;

в) множество точек числовой прямой, если $\rho(x,y) = |F(x) - F(y)|$, где $F(x)$ произвольная, вещественная, строго монотонная функция вещественной переменной;

г) множество точек плоскости, если расстояние между точками $x = (\xi_1, \xi_2)$ и $y = (\eta_1, \eta_2)$ определено по формуле $\rho(x,y) = |\xi_1 - \eta_1|$;

д) множество точек на окружности, если расстояние между двумя точками x и y равно длине кратчайшей дуги этой окружности, соединяющей точки x и y.

4. Определить как выглядят шары $S(a,R)$

а) в пространствах R^1, R^2, R^3;

б) в пространстве, состоящем из точек плоскости, расстояние между точками $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$ задается формулой $\rho(x,y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|$;

в) в пространстве, состоящем из точек плоскости, расстояние между точками $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$ задается формулой $\rho(x,y) = \max(|\xi_1 - \eta_1|, |\xi_2 - \eta_2|)$;

г) в дискретном пространстве(см. задачу 2 ж).

5. Доказать, что в **произвольном** метрическом пространстве ни при каких a и b невозможно строгое включение $S(a, 1) \subset S(b, 2)$.

6. Показать, что в дискретном пространстве любое подмножество открыто и замкнуто одновременно.

7. Привести примеры открытых и замкнутых множеств, лежащих в пространствах R^1, R^2, R^3.

8. Привести в R^1 пример множества, которое не является ни открытым, ни замкнутым.

9. Привести пример бесконечной системы открытых множеств, пересечение которых не является открытым множеством.

10. Привести пример бесконечной системы замкнутых множеств, объединение которых не является замкнутым множеством.

11. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый открытый шар из пространства R^2. Найти $\overset{o}{\mathcal{A}}, \dot{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{A}}$.

12. Показать, что, вообще говоря, открытый шар $S(a, R)$ и внутренность замкнутого шара не совпадают (***замкнутым шаром*** называется множество таких точек пространства, расстояние от которых до центра шара не превосходит радиус шара). Сравните с задачей 11.

Указание. Рассмотреть единичный шар в дискретном пространстве.

13. Пусть $\mathcal{X} = R^1$, $\mathcal{A}$ — множество рациональных чисел. Определить $\overset{o}{\mathcal{A}}, \dot{A}, \overline{A}$.

14. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на R^n. Показать, что для любого числа a множество точек, где $f(x) > a$, является открытым множеством.

15. Доказать, что операция замыкания обладает следующими свойствами:
а) $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$;
б) $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$;
в) если $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$;
г) $\overline{\mathcal{A} \bigcup \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \bigcup \overline{\mathcal{B}}$;
д) $\overline{\mathcal{A} \bigcap \mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A}} \bigcap \overline{\mathcal{B}}$.
Привести пример, когда $\overline{\mathcal{A} \bigcap \mathcal{B}} \neq \overline{A} \bigcap \overline{\mathcal{B}}$.

16. Показать, что расстояние — непрерывная функция своих аргументов, то есть из сходимости $x_n \to x,\ y_n \to y$ следует, что $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$ при $n \to \infty$.

17. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность ограничена.

18. Показать, что пространство $C_L(\Omega)$ не является полным.

19. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две фиксированные функции, непрерывные на $[a, b]$, причем всюду на $[a, b]$ выполнено неравенство $f(x) \leq g(x)$. Доказать, что подмножество пространства $C(a, b)$, состоящее из всех непрерывных функций $h(x)$, удовлетворяющих неравенству $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, есть полное пространство.

20. Является ли полным дискретное пространство?

21. Пусть $\mathcal{X}$ — числовая прямая и $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ (см. задачу 3 в). Будет ли в этом пространстве последовательность $1, 2, 3, \ldots$ фундаментальной, сходящейся?

22. Исследовать на сходимость в пространствах $C(0,1)$, $C_L(0,1)$ последовательности функций:

а) $x_n(t) = t^n$, б) $x_n(t) = \sin(t/n)$, в) $x_n(t) = e^{-nt}$, г) $x_n(t) = e^{nt}$,

д) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$, е) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$, ж) $x_n(t) = \dfrac{1}{1 + n(t-0.5)^2}$.

23. Показать, что из сходимости в $C(a,b)$ следует сходимость в $C_L(a,b)$ и что обратное утверждение, вообще говоря, ложно.

24. Сходятся ли в пространствах l_1, l_∞ (см. задачу 2 б,в) следующие последовательности:

$x_n = (1, 2, \ldots, n, 0, \ldots)$;
$x_n = (1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots)$;
$x_n = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n, 0, \ldots)$?

25. В множестве $\mathcal{X}$ всевозможных последовательностей натуральных чисел для элементов $x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, $y = (m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots)$ обозначим через $k_0(x,y)$ наименьший индекс, при котором $n_k \neq m_k$. Доказать, что:

а)

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} & x = y, \\ \frac{1}{k_0(x,y)} \quad \text{при} & x \neq y \end{cases}$$

определяет расстояние в множестве $\mathcal{X}$;

б) для аксиомы треугольника в $\mathcal{X}$ выполняется более сильное утверждение:

$$\rho(x,z) \leq \max(\rho(x,y), \rho(y,z));$$

в) если $\rho(x,y) \neq \rho(y,z)$, то $\rho(x,z) = \max(\rho(x,y), \rho(y,z))$;

г) любой открытый шар $S(x,R)$ является одновременно замкнутым множеством и $S(y,R) = S(x,R)$ для любого $y \in S(x,R)$;

д) если два шара в $\mathcal{X}$ имеют общую точку, то один из них содержится в другом;

е) расстояние между двумя различными открытыми шарами радиуса R, содержащимися в замкнутом шаре радиуса R, равно R;

ж) для того, чтобы последовательность $x_n \in \mathcal{X}$ была фундаментальна, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(x_n, x_{n+1}) \to 0$ при $n \to \infty$.

з) пространство $\mathcal{X}$ полно.

26. Пусть $\mathcal{X}$ — множество рациональных чисел, $\rho(x,y) = |x - y|$. Доказать, что в этом пространстве множество положительных рациональных чисел x, удовлетворяющих неравенству $2 < x^2 < 3$, образует замкнутое ограниченное, но не компактное множество. Найти границу этого множества.

27. Показать, что шары в пространствах l_∞, l_1 не являются компактными множествами.

28. Пусть $\mathcal{A}$ — ограниченное в пространстве $C^1(a,b)$ (см. задачу 2 д) множество. Показать, что он компактно, как подмножество пространства $C(a,b)$.

29. Доказать, что пересечение K последовательности не пустых, замкнутых, компактных множеств K_n таких, что $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$, не пусто. Справедливо ли это утверждение, если отбросить требование компактности множеств?

30. Пусть A — оператор отображающий, $C^1(a,b)$ в $C(a,b)$ по закону $Ax = dx/dt$. Доказать, что A — непрерывный оператор. Будет ли непрерывным оператор B, определенный на множестве D непрерывно дифференцируемых функций, рассматривае-

мых как подмножество пространства $C(a,b)$ и отображающий D в $C(a,b)$ по закону $Bx = dx/dt$?

31. Пусть $\mathcal{X} = (1,\infty)$, $\rho(x,y) = |x-y|$, $Ax = x + 1/x$. Уменьшается ли после действия оператора A расстояние между двумя различными точками? Является ли оператор A сжимающим? Имеет ли он неподвижные точки?

32. Показать, что ***линейное уравнение Фредгольма II рода***:

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b k(t,s)x(s)\,ds + f(t),$$

где $k(t,s)$ — непрерывная на $[a,b]\times[a,b]$ функция, $f(t)$ — непрерывная функция и λ — числовой параметр, имеет единственное решение в $C(a,b)$ при

$$|\lambda| < (\max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |k(t,s)|\,ds)^{-1}.$$

33. Показать, что ***нелинейное уравнение Фредгольма второго рода***

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b k(t,s,x(s))\,ds + f(t)$$

имеет единственное решение в пространстве $C(a,b)$, если k, f — непрерывные функции, k удовлетворяет условию Липшица

$$|k(x,y,z_1) - k(x,y,z_2)| \le M|z_1 - z_2|,\ M = const$$

и $|\lambda| < M^{-1}(b-a)^{-1}$.

34. ***Метод простой итерации*** решения уравнения $x = \varphi(x)$ определяется формулой $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0,1,2,\ldots$, где n — номер итерации, x_0 — произвольно заданное начальное приближение. Пусть на отрезке $\Delta = [x_0-\delta, x_0+\delta]$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le q|x-y|, \quad x,y \in \Delta,$$

причем $0 < q < 1$ и $|x_0 - \varphi(x_0)| \le (1-q)\delta$. Показать, что

а) $x_n \in \Delta$ при всех n;

б) последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x^*, которая является единственным решением уравнения $x = \varphi(x)$ на отрезке Δ.

35. Решить уравнение $x = \cos x$ методом простой итерации. Корень уравнения найти с точностью до 0.05.

36. Доказать, что уравнение $2xe^x = 1$ $(x \in R^1)$ имеет единственное решение, это решение лежит на интервале $(0,1)$.

37. Доказать, что для любого числа $a \in (0,1)$ и любой непрерывной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0,1]$, существует единственная непрерывная на $[0,1]$ функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению: $y(x) - a\sin(y(x)) + f(x) = 0$.

38. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

39. Пусть A и B — отображения полного метрического пространства в себя. Доказать: если отображение B — сжимающее, и отображения A и B коммутируют, то есть $A(Bx) = B(Ax)$ для всех x, то уравнение $Ax = x$ имеет решение.

40. В вычислительной математике для решения системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{A} = (a_{ij}),\ i,j = 1,\dots,m,\quad \mathbf{b} = (b_1,\dots,b_m)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{x} = (x_1,\dots,x_m)^{\mathrm{T}}$ [1] иногда применяется метод Якоби, который заключается в следующем. Произвольным образом задается начальное приближение к решению $\mathbf{x}^0 = (x_1^0,\dots,x_m^0)^{\mathrm{T}}$. Приближение $\mathbf{x}^{n+1}$ находится из соотношений

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1^{n+1} + a_{12}x_2^n + \dots + a_{1m}x_m^n = b_1,\\
a_{21}x_1^n + a_{22}x_2^{n+1} + \dots + a_{2m}x_m^n = b_2,\\
\dots\ \dots\ \dots\\
a_{m1}x_1^n + a_{m2}x_2^n + \dots + a_{mm}x_m^{n+1} = b_m.
\end{gathered}$$

Доказать, что при выполнении условия

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} |a_{ij}| \tag{1.14}$$

векторы $\mathbf{x}^n$ сходятся к решению системы $\mathbf{x}$ при $n\to\infty$.

Указание. В пространстве m-мерных векторов ввести расстояние по формуле $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\limits_i |x_i - y_i|$. Переписать систему в виде

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j,\quad i = 1,\dots,m$$

или в векторной форме $\mathbf{x} = \mathbf{d} - \mathbf{Bx}$. Доказать, что при выполнении условия (1.14) оператор $U\mathbf{x} = \mathbf{d} - \mathbf{Bx}$ сжимающий.

1.4.3 Тест к главе 1

1. Объединение всех открытых подмножеств множества $\mathcal{A}$ называется
а) границей множества $\mathcal{A}$;
б) замыканием множества $\mathcal{A}$;
в) внутренностью множества $\mathcal{A}$.

2. В пространстве $C(-1,1)$ последовательность $\{t^{2n}\}$
а) является фундаментальной;
б) расходится;
в) сходится.

3. Какое из утверждений является истинным ?
а) граница объединения двух множеств равна объединению границ;
б) граница объединения двух множеств содержится в объединении границ этих множеств;
в) граница объединения двух множеств содержит объединение границ этих множеств.

[1] Индекс "Т"означает операцию транспонирования.

4. В каком из приведенных ниже примеров задан функционал с областью определения $C(a,b)$?

а) $Af = \max\limits_{t \in [a,b]} f(t)$;

б) значение Af равно значению аргумента, на котором функция $f(t)$ принимает максимальное значение;

в) $Af = |f|$.

5. Какой из операторов является сжимающим в пространстве l_∞ (задача 2в)?

а) $Ax = x$;

б) $Ax = (\xi_1, 1/2\xi_2, 1/3\xi_3, \dots)$;

в) $Ax = (1, 1/2\xi_2, 1/3\xi_3, \dots)$.

6. Среди перечисленных ниже множеств числовой прямой компактным является множество

а) иррациональных чисел, абсолютная величина которых меньше 3.14;

б) целых чисел;

в) иррациональных чисел, абсолютная величина которых больше 3.14.

2 ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Операция предельного перехода чаще всего встречается в совокупности с другими операциями, среди которых наиболее распространены, изучаемые в линейной алгебре, операции сложения элементов и умножения их на числа.

Напомним известное из линейной алгебры определение.

Определение 2.1.1 *Множество $\mathcal{E}$ называют* ***линейным*** *или* ***векторным пространством****, если определены операции сложения элементов из $\mathcal{E}$ и умножения элементов из $\mathcal{E}$ на числа (вещественные или комплексные), причем для любых $x, y, z \in \mathcal{E}$ и любых чисел λ, μ выполняются свойства:*

1) $x + y = y + x$ — коммутативность сложения;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ — ассоциативность сложения;

3) существует нулевой элемент $\theta \in \mathcal{E}$, то есть такой элемент, что $x + \theta = x$;

4) для каждого x существует противоположный $(-x)$, то есть такой элемент, что $x + (-x) = \theta$;

5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ — ассоциативность умножения;

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ — дистрибутивность;

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ — дистрибутивность;

8) $1 \cdot x = x$.

В случае, когда числа, умножение на которые определено в пространстве, являются вещественными (комплексными), говорят, что линейное пространство над полем действительных (комплексных) чисел.

Определение 2.1.2 *Линейное пространство $\mathcal{E}$ назовем* ***линейным нормированным пространством****, если каждому элементу $x \in \mathcal{E}$ ставится в соответствие число $\|x\|$, называемое* ***нормой*** *этого элемента, причем выполнены следующие условия (аксиомы нормированного пространства):*

1) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ — однородность нормы;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ — неравенство треугольника.

В линейном нормированном пространстве можно ввести расстояние по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Действительно, первое свойство расстояния следует из первой аксиомы нормы.

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x),$$

таким образом выполнено второе свойство расстояния. И, наконец,

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \le \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

то есть выполнено неравенство треугольника для расстояния.

Следовательно, все понятия и теоремы, которые справедливы в метрических пространствах, переносятся на нормированные пространства. В частности, последовательность $\{x_n\}$ сходится к x, если $\rho(x_n, x) = \|x - x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 2.1.3 *Полное линейное нормированное пространство называется* ***банаховым пространством****.*

Легко доказать, что если $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n$, то $x + y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n$, $\lambda x = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n x_n$.

Заметим также, что если $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Это следует из неравенства $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$, которое вытекает из аксиом линейного нормированного пространства:

$$\|x\| = \|x - y + y\| \le \|x - y\| + \|y\|, \ \|y\| = \|y - x + x\| \le \|x - y\| + \|x\|.$$

Для того, чтобы привести примеры важных для приложения пространств $L_p(a, b)$, докажем сначала вспомогательные неравенства.

Лемма 2.1.1 (неравенство Гельдера) *Пусть определенные на* (a, b) *функции* $x(t)$ *и* $y(t)$ *таковы, что существуют и ограничены интегралы* $\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt$ *и* $\int\limits_a^b |y(t)|^q\,dt$, *где* $p, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_a^b |x(t)y(t)|\,dt \le \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Если хотя бы один из интегралов, стоящих в правой части неравенства (2.1), равен нулю, то нулю равен и интеграл, находящийся в левой части неравенства. Значит в этом случае неравенство справедливо. Поэтому в дальнейшем при доказательстве будем считать, что оба интеграла из правой части неравенства (2.1) положительны.

Пусть $\eta = \xi^{p-1}$. Из равенства $1/p + 1/q = 1$ следует, что $(p-1)(q-1) = 1$ и, значит, $\xi = \eta^{1/(p-1)} = \eta^{q-1}$.

Пусть ξ_0, η_0 произвольные положительные числа, S_1 — площадь области, ограниченной линиями $\eta = 0$, $\xi = \xi_0$, $\eta = \xi^{p-1}$, а S_2 — площадь области, ограниченной линиями $\xi = 0$, $\eta = \eta_0$, $\xi = \eta^{q-1}$ (см. рисунок 2.1). Тогда

$$S_1 = \int\limits_0^{\xi_0} \xi^{p-1}\,d\xi = \frac{\xi_0^p}{p}, \quad S_2 = \int\limits_0^{\eta_0} \eta^{q-1}\,d\eta = \frac{\eta_0^q}{q}. \tag{2.2}$$

Из рисунка 2.1 следует, что $\xi_0\eta_0 \le S_1 + S_2$, поэтому, учитывая (2.2), имеем

$$\xi_0\eta_0 \le \frac{\xi_0^p}{p} + \frac{\eta_0^q}{q}. \tag{2.3}$$

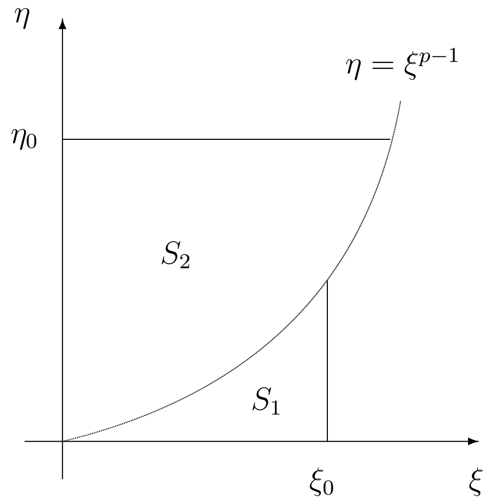

Рис. 2.1

Подставим в неравенство (2.3)

$$\xi_0 = \frac{|x(t)|}{\left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}}, \quad \eta_0 = \frac{|y(t)|}{\left(\int\limits_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}}$$

и проинтегрируем его в пределах от a до b. Тогда получим

$$\frac{\int\limits_a^b |x(t)y(t)|\,dt}{\left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}} \le \frac{\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt}{p\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt} + \frac{\int\limits_a^b |y(t)|^q\,dt}{q\int\limits_a^b |y(t)|^q\,dt} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Из этого неравенства следует (2.1).

Лемма 2.1.2 (неравенство Минковского) *Пусть функции $x(t), y(t)$ определены на промежутке (a,b), причем при некотором $p \ge 1$ существуют и конечны интегралы $\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt$, $\int\limits_a^b |y(t)|^p\,dt$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\int\limits_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \le \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Если $p = 1$, то неравенство очевидно. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $p > 1$. Заметим, что для любых чисел α, β выполняется неравенство $|\alpha+\beta|^p \le 2^p(|\alpha|^p + |\beta|^p)$. Это следует из того, что если $|\alpha| < |\beta|$, то

$$|\alpha+\beta|^p \le (2|\beta|)^p = 2^p|\beta|^p \le 2^p(|\alpha^p| + |\beta|^p),$$

случай $|\beta| \le |\alpha|$ рассматривается аналогично. Значит

$$|x(t)+y(t)|^p \le 2^p(|x(t)|^p + |y(t)|^p),$$

откуда следует, что

$$\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt \le 2^p\left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt + \int_a^b |y(t)|^p\,dt\right) < \infty,$$

то есть интеграл $\int\limits_a^b |x+y|^p\,dt$ конечен. Тогда на основании неравенства Гельдера

$$\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt = \int_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1}|x(t)+y(t)|\,dt \le$$

$$\le \int_a^b |x(t)||x(t)+y(t)|^{p-1}\,dt + \int_a^b |y(t)||x(t)+y(t)|^{p-1}\,dt \le$$

$$\le \left[\left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\right]\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q},$$

где $(p-1)q = pq - q = p$. Разделив обе части этого неравенства на число

$$\left(\int_a^b |x+y|^p\,dt\right)^{1/q},$$

получим неравенство Минковского.

Пусть $\mathcal{L}_p(a,b)$ — множество интегрируемых в p-ой степени ($p \ge 1$) функций, то есть таких функций $x(t)$, для которых $\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt < \infty$. Очевидно, что такие функции образуют линейное пространство и если ввести норму по формуле

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p},$$

то $\|x\| \ge 0,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ и, в силу неравенства Минковского, $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Однако, из того что $\|x\| = 0$, то есть $\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt = 0$ еще не следует, что $x(t) \equiv 0$ так как функция может быть отлична от нуля на некотором, например, конечном множестве точек. Следовательно, первая аксиома нормы не выполняются. Для того, чтобы все же получить нормированное пространство поступим следующим образом.

Определение 2.1.4 *Будем считать, что две функции $x(t)$ и $y(t)$* ***эквивалентны****, если они могут отличаться друг от друга только на множестве меры 0.*

Под ***множеством меры 0*** будем понимать жорданову меру нуль. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ множество можно покрыть конечным числом интервалов, сумма длин которых меньше ε.

Заметим, что значения функции на множестве меры 0 не влияют на значение интеграла от функции. Поэтому, если отождествлять эквивалентные функции, то в этом случае будет выполнена и первая аксиома нормы.

Определение 2.1.5 *Пространство, состоящее из классов функций интегрируемых в p-ой степени $p \geq 1$, причем в один класс включены только эквивалентные функции, назовем* ***пространством*** $L_p(a,b)$. *Норма в этом пространстве определяется по формуле*

$$\|x\|_p = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Можно доказать, что пространство $L_p(a,b)$ — полное.

Аналогично можно ввести пространство L_p для функций многих переменных.

2.2 ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — линейные нормированные пространства, A — оператор, действующий из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, $\|.\|_x$ и $\|.\|_y$ — нормы в пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно.

Определение 2.2.1 *Оператор A называется* ***линейным***, *если для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ и для любых чисел α, β*

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

Примеры: 1) Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a,b)$, тогда оператор $Ax = \int\limits_a^t x(r)\, dr$ — линейный. Действительно,

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \int\limits_a^t (\alpha x_1(r) + \beta x_2(r))\, dr =$$

$$= \alpha \int\limits_a^t x_1(r)\, dr + \beta \int\limits_a^t x_2(r)\, dr == \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

2) Пусть $\mathcal{X} = R^n$, $\mathcal{Y} = R^m$, где R^n — n- мерное евклидово пространство, то есть пространство, элементами которого являются n- мерные вектора. Если $A = (a_{i,j})$ — матрица размерности $m \times n$, то из линейной алгебры известно, что при умножении этой матрицы справа на n- мерный вектор–столбец, получим m- мерный вектор, причем эта операция обладает свойством линейности. Следовательно, операция умножения матрицы на вектор задает линейный оператор, отображающий пространство $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$.

3) $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ — числовая прямая. Оператор $Ax = ax + b$, где a, b числа, причем $b \neq 0$, не является линейным. Это следует, например, из того, что $A(\alpha x) = a(\alpha x) + b \neq \alpha(ax + b) = \alpha(Ax)$.

Лемма 2.2.1 *Если A — линейный оператор, то $A\theta_x = \theta_y$, где θ_x, θ_y —нулевые элементы пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно.*

Доказательство. Заметим, что в силу линейности $A(0\theta_x) = 0A\theta_x = \theta_y$, откуда следует справедливость утверждения леммы.

Лемма 2.2.2 *Если линейный оператор A непрерывен в точке x_0, то он непрерывен в любой точке пространства, то есть непрерывен.*

Доказательство. Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, тогда $x - x_n + x_0 \to x_0$ при $n \to \infty$ и из непрерывности оператора в точке x_0 следует, что $A(x - x_n + x_0) \to Ax_0$. Так как $A(x-x_n+x_0) = Ax - Ax_n + Ax_0$, то отсюда следует, что $Ax_n \to Ax$, то есть оператор непрерывен в точке x.

Определение 2.2.2 *Линейный оператор A называется* ***ограниченным****, если существует неотрицательная константа C такая, что для всех $x \in \mathcal{X}$ справедливо неравенство*

$$\|Ax\|_y \le C\|x\|_x. \tag{2.4}$$

Наименьшая константа C, при которой выполняется неравенство (2.4), называется ***нормой оператора*** *и обозначается $\|A\|$.*

Таким образом можно записать, что $\|Ax\|_y \le \|A\|\|x\|_x$. Из определения также следует, что

$$\|A\| = \sup_{x\neq\theta_x} \frac{\|Ax\|_y}{\|x\|_x} = \sup_{x\neq\theta_x} \left\| A\frac{x}{\|x\|_x} \right\|_y = \sup_{\|x\|_x=1} \|Ax\|_y.$$

Теорема 2.2.1 *Для того чтобы линейный оператор был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен.*

Доказательство. Пусть A - ограничен, $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\|Ax - Ax_n\|_y \le \|A\|\|x - x_n\|_x \to 0,$$

а это означает, что A непрерывен.

Предположим теперь, что A непрерывен, но не ограничен. Это означает, что для любого числа n существует в $\mathcal{X}$ элемент x_n такой, что

$$\|Ax_n\|_y > n\|x_n\|_x. \tag{2.5}$$

Пусть $x_n^1 = (n\|x_n\|_x)^{-1}x_n$. Тогда $\|x_n^1\|_x = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^1 = \theta_x$. Из (2.5) следует, что $\|Ax_n^1\|_y = (n\|x_n\|_x)^{-1}\|Ax_n\|_y > 1$. Однако это противоречит тому, что в силу непрерывности $Ax_n^1 \to \theta_y$ при $n \to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что если оператор непрерывен, то он ограничен.

В множестве линейных операторов можно ввести понятие ***суммы операторов*** и ***произведения операторов на числа***. Пусть A и B — линейные операторы, которые отображают линейное нормированное пространство $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$, α — число. Тогда по определению будем полагать, что операторы αA и $A+B$ действуют из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ по правилам: $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$, $(A+B)x = Ax + Bx$. Легко показать, что при таком определении $A + B$ и αA — линейные операторы. Линейность, например, $A + B$ следует из равенств

$$\begin{aligned}(A+B)(\alpha x_1 + \beta x_2) = A(\alpha x_1 + \beta x_2) + B(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \\ = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 + \alpha Bx_1 + \beta Bx_2 &= \\ = \alpha(Ax_1 + Bx_1) + \beta(Ax_2 + Bx_2) &= \alpha(A+B)x_1 + \beta(A+B)x_2.\end{aligned}$$

Покажем, что оператор $A + B$ ограничен, если операторы A и B ограничены.

$$\|(A+B)x\|_y = \|Ax + Bx\|_y \le \|A\|\|x\|_x + \|B\|\|x\|_x = (\|A\| + \|B\|)\|x\|_x \ .$$

Из этого неравенства следует, что

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|. \tag{2.6}$$

Заметим также, что

$$\|\alpha A\| = \sup_{x \neq \theta_x} \frac{\|\alpha Ax\|_y}{\|x\|_x} = |\alpha| \sup_{x \neq \theta_x} \frac{\|Ax\|_y}{\|x\|_x} = |\alpha| \|A\|.$$

Определим ***нулевой оператор*** Θ как оператор, который каждый элемент $x \in \mathcal{X}$ переводит в θ_y. Это, очевидно, линейный оператор и его норма равна 0. Обратно, если норма некоторого оператора равна нулю, то в множестве его значений не может быть ненулевых элементов, следовательно, это нулевой оператор.

Таким образом, приведенные выше рассуждения показывают, что множество всевозможных линейных ограниченных операторов, отображающих линейное нормированное пространство $\mathcal{X}$ в линейное нормированное пространство $\mathcal{Y}$ в свою очередь является линейным нормированным пространством. Это пространство будем обозначать $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Если линейные операторы A и B действуют из $\mathcal{Y}$ в $\mathcal{Z}$ и из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ соответственно, то можно определить ***произведение операторов*** AB: оператор AB действует из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Z}$ по закону $(AB)x = A(Bx)$. Полученный при этом оператор оказывается линейным, так как

$$\begin{aligned}(AB)(\alpha x_1 + \beta x_2) = A\left(B(\alpha x_1 + \beta x_2)\right) = A(\alpha Bx_1 + \beta Bx_2) = \\ = \alpha A(Bx_1) + \beta A(Bx_2) = \alpha(AB)x_1 + \beta(AB)x_2.\end{aligned}$$

Докажем, что если операторы A и B ограничены, то AB — ограниченный оператор. Это следует из неравенств

$$\|(AB)x\|_z = \|A(Bx)\|_z \leq \|A\| \|Bx\|_y \leq \|A\| \|B\| \|x\|_x \ .$$

Отсюда, в частности, имеем: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

В том случае, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{Z}$ можно определить операторы AB и BA. Следует отметить, что в отличии от операции суммирования, операция умножения операторов не коммутативна, то есть в общем случае $AB \neq BA$. Пусть, например, $\mathcal{X} = C(0,1),\ Ax = tx(t),\ Bx = x(0)$. Тогда $(AB)x = tx(0),\ (BA)x = (tx(t))\,|_{t=0} \equiv 0$. Значит, если $x(0) \neq 0$, то $ABx \neq BAx$.

Пусть линейный оператор A действует из линейного пространства $\mathcal{X}$ в линейное пространство $\mathcal{Y}$ и обладает свойством: $Ax = \theta_y$ тогда и только тогда, когда $x = \theta_x$. Это означает, что оператор различные элементы пространства $\mathcal{X}$ переводит в различные элементы пространства $\mathcal{Y}$. Действительно, если $x_1 \neq x_2$, то $Ax_1 \neq Ax_2$. В противном случае имеем $Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2) = \theta_y$, откуда следует, что $x_1 = x_2$. Для такого оператора A можно ввести оператор, обозначаемый A^{-1}, который назовем ***обратным к оператору*** A.

Оператор A^{-1} определен на множестве значений оператора A, то есть на множестве $R(A) = \{y : y = Ax,\ x \in \mathcal{X}\}$, его значения лежат в $\mathcal{X}$. Оператор A^{-1} действует таким образом: пусть $y = Ax$, тогда $A^{-1}y = x$. В силу того, что каждому элементу $y \in R(A)$ соответствует при этом только один $x \in \mathcal{X}$, получаем, что A^{-1} — оператор. По определению $A^{-1}Ax = x$. Заметим, что область значений оператора A^{-1} совпадает со всем пространством $\mathcal{X}$.

Лемма 2.2.3 *Обратный к линейному оператору — линейный.*

Доказательство. Пусть $Ax_i = y_i,\ i = 1, 2$, то есть $x_i = A^{-1}y_i$. Тогда утверждение леммы следует из равенства:

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = A^{-1}(\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2) = \\ = A^{-1}A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2.$$

Вопрос о существовании обратного оператора тесно связан с задачей о разрешимости уравнения $Ax = y$ относительно x. Если обратный оператор существует, то это означает, что для любого $y \in R(A)$ существует единственное решение этого уравнения равное $x = A^{-1}y$. При этом если обратный оператор ограничен, то малые ошибки в задании y приводят к малым ошибкам в определении решения x. Действительно, если вместо уравнения $Ax = y$ решается уравнение $A\bar{x} = y + \delta y$, то, в силу линейности оператора

$$A(\bar{x} - x) = A\bar{x} - Ax = y + \delta y - y = \delta y,$$

откуда $\bar{x} - x = A^{-1}\delta y$ и $\|x - \bar{x}\|_x \le \|A^{-1}\|\|\delta y\|_y$.

Для формулировки последующих в этом разделе теорем будем считать, что $\mathcal{X}$ — линейное нормированное пространство, содержащее ненулевые элементы.

Теорема 2.2.2 *Для того, чтобы у линейного оператора A существовал обратный оператор A^{-1} и этот оператор был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа $m > 0$ такая, что для всех $x \in \mathcal{X}$ выполняется неравенство*

$$\|Ax\|_y \ge m\|x\|_x. \tag{2.7}$$

При этом $\|A^{-1}\| \le \frac{1}{m}$.

Доказательство. Предположим, что обратный оператор существует и ограничен. Тогда, учитывая, что $y = Ax,\ x = A^{-1}y$, имеем

$$\|x\|_x = \|A^{-1}y\|_x \le \|A^{-1}\|\|y\|_y = \|A^{-1}\|\|Ax\|_y.$$

Отсюда следует, что $\|Ax\|_y \ge \|A^{-1}\|^{-1}\|x\|_x$, то есть $m = \|A^{-1}\|^{-1}$. Заметим, что в приведенных выше неравенствах деление возможно, так как $\|A^{-1}\| \ne 0$. Если бы $\|A^{-1}\| = 0$, то оператор A^{-1} был бы нулевым, то есть его область значений совпадала бы с множеством, которое состоит из одного нулевого элемента. Это невозможно, потому, что область значений оператора A^{-1} равна $\mathcal{X}$.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы. Тогда из неравенства (2.7) следует, что если $Ax = \theta_y$, то $x = \theta_x$, поэтому существует A^{-1}. Переписав это неравенство в виде

$$\|A^{-1}y\|_x \le \frac{1}{m}\|y\|_y,$$

получим, что A^{-1} ограниченный оператор и $\|A^{-1}\| \le \frac{1}{m}$. Теорема доказана.

Теорема 2.2.3 *Пусть линейный оператор A отображает пространство $\mathcal{X}$ в себя, где $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $\|A\| \le q < 1$ и I — тождественный оператор, то есть $Ix = x$. Тогда для оператора $I - A$ существует ограниченный обратный оператор $(I - A)^{-1}$ и $\|(I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{1-q}$. При любом $y \in \mathcal{X}$ уравнение $(I - A)x = y$ имеет единственное решение, причем:*

$$x = (I - A)^{-1}y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} A^i y \overset{\text{def}}{=} \Big(\sum_{i=0}^{\infty} A^i\Big) y.$$

Здесь под оператором A^0 подразумевается тождественный оператор.

Доказательство. Заметим, что

$$\|(I-A)x\| \geq \|x\| - \|Ax\| \geq (1-q)\|x\|$$

Тогда по предыдущей теореме существует $(I-A)^{-1}$ и $\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}$.

Введем оператор $\mathcal{U}x = Ax + y$, где y — произвольная точка из $\mathcal{X}$. Оператор $\mathcal{U}$ сжимающий, так как

$$\rho(\mathcal{U}x_1, \mathcal{U}x_2) = \|(Ax_1 + y) - (Ax_2 + y)\| = \|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \\ \leq \|A\|\|x_1 - x_2\| \leq q\|x_1 - x_2\| = q\rho(x_1, x_2).$$

Тогда по теореме Банаха о неподвижной точке уравнение $\mathcal{U}x = x$ разрешимо, решение единственно и находится методом последовательных приближений. Выбрав начальное приближение $x_0 = y$, получим, что $x_1 = \mathcal{U}x_0 = Ay + y$, $x_2 = \mathcal{U}x_1 = \mathcal{U}(Ay + y) = Ay^2 + Ay + y$ и так далее. Отсюда следует, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} A^i y$, что и требовалось доказать.

Ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} A^i$ носит название ***ряда Неймана***.

В качестве примера применения этой теоремы рассмотрим уравнение:

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_a^b k(t,s)\varphi(s)\, ds = f(t),$$

называемое ***интегральным уравнением Фредгольма II рода***. Здесь $k(t,s)$ — заданная функция, называемая ***ядром интегрального уравнения***, $f(t)$ — заданная функция, λ — заданное число, φ — неизвестная функция.

Пусть $\mathcal{X} = L_2(a,b)$, $k \in L_2((a,b)\times(a,b))$, $f \in L_2(a,b)$. Тогда, если

$$|\lambda|^2 \int\limits_a^b \int\limits_a^b k^2(t,s)\, dtds < 1,$$

то уравнение имеет единственное решение, принадлежащее $L_2(a,b)$.

Для доказательства введем оператор $A\varphi = \lambda \int\limits_a^b k(t,s)\varphi(s)\, ds$.

В силу теоремы достаточно заметить, что $\|A\| < 1$. Это следует из неравенства Гельдера

$$\|A\varphi\|^2 = \lambda^2 \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b k(t,s)\varphi(s)\, ds \right)^2 dt \leq \\ \leq \lambda^2 \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b k^2(t,s)\, ds \int\limits_a^b \varphi^2(s)\, ds \right) dt = \\ = \lambda^2 \int\limits_a^b \int\limits_a^b k^2(t,s)\, dsdt \int\limits_a^b \varphi^2(s)\, ds = \lambda^2 \int\limits_a^b \int\limits_a^b k^2(t,s)\, dsdt\, \|\varphi\|^2.$$

2.3 ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 2

2.3.1 Примеры решения задач

Пример 1. Можно ли в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций ввести норму следующим образом:

а) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$; б) $\|x\| = |x(a)| + |x(b)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$?

Решение. В первом случае не выполнено первое свойство нормы, так как из равенства нулю второй производной не следует, что функция равна нулю.

В втором случае из того, что норма равна нулю получаем

$$|x(a)| = |x(b)| = \max_{t\in[a,b]} |x''(t)| = 0.$$

Из равенства нулю второй производной заключаем, что $x(t) = c_1 t + c_2$. Равенства $|x(a)| = |x(b)| = 0$ выполнимы только при условии $c_1 = c_2 = 0$, откуда заключаем, что $x(t) = 0$. Итак, первое свойство нормы выполнено. Справедливость второго свойства очевидна. Выполнение третьего свойства следует из неравенств

$$\|x + y\| = |x(a) + y(a)| + |x(b) + y(b)| + \max_{t\in[a,b]} \big|\big(x(t) + y(t)\big)''\big| \le$$
$$\le |x(a)| + |y(a)| + |x(b)| + |y(b)| + \max_{t\in[a,b]} (|x''(t)| + |y(t)''|) \le \|x\| + \|y\|.$$

Пример 2. Показать, что следующие операторы являются линейными ограниченными операторами, действующими из пространства $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$ и найти их нормы:

а) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(0, 1)$, $Ax = tx(t)$;

б) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2(0, 1)$, $Bx = tx(t)$.

Решение. Оба оператора действуют по одному и тому же закону — функции, на которую они действуют, ставят в соответствие произведение этой функции и независимой переменной. Различаются операторы только тем, что действуют они в разных пространствах. Поэтому линейность операторов доказывается одинаково, а ограниченность по-разному.

Покажем сначала линейность операторов.

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = t\big(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\big) = \alpha t x_1(t) + \beta t x_2(t) = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

Проверим теперь ограниченность операторов. Ограниченность оператора A означает, что существует такое число C, что для всех x выполняется неравенство

$$\|Ax\| \le C\|x\|. \tag{2.8}$$

Для проверки выполнения неравенства (2.8) имеем:

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} |tx(t)| \le \max_{t\in[0,1]} |t| \max_{t\in[0,1]} |x(t)| = 1 \cdot \|x\|. \tag{2.9}$$

Таким образом, неравенство (2.8) выполняется при $C = 1$. Норма оператора A — это минимальная константа C, при которой выполняется неравенство (2.8). Поэтому из неравенства (2.9) следует, что $\|A\| \le 1$.

Для того, чтобы найти значение нормы оператора A заметим, что если найдется такая ненулевая функция $x^*(t)$, что в неравенстве (2.9) при подстановке этой функции будет выполняться знак равенства, то в качестве константы C нельзя будет взять величину меньшую, чем 1. Тогда это будет означать, что $\|A\| = 1$. Легко заметить, что в качестве такой функции достаточно взять $x^*(t) \equiv 1$.

Норма оператора A по-другому определялась как

$$\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Нахождение функции $x^*(t)$ означало, что есть такое значение x, при котором дробь $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ принимает наибольшее значение. Поскольку не всегда существует точка, в которой дробь принимает значение равное верхней грани, такой подход нахождения нормы оператора не всегда приводит к успеху.

Покажем теперь ограниченность оператора B и проиллюстрируем другой подход нахождения нормы.

$$\|Bx\|^2 = \int_0^1 (tx(t))^2\,dt \le \max_{t\in[0,1]} t^2 \int_0^1 x^2(t)\,dt = 1 \cdot \|x\|^2. \tag{2.10}$$

Значит, как и для оператора A, получаем, что оператор B ограничен и его норма не превосходит 1. Однако не удастся найти такую ненулевую функцию, чтобы в неравенстве (2.10) выполнялся знак равенства. Это следует, например, из геометрического смысла интеграла. Действительно, площади криволинейных трапеций для функций $x^2(t)$ и $t^2x^2(t)$ на промежутке $(0,1)$ при функции $x(t)$ такой, что $\|x\| \neq 0$, очевидно, разные.

Из неравенства (2.10) следует, что

$$\|B\| = \sup_{x\neq\theta} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \le 1. \tag{2.11}$$

Если удастся подобрать последовательность таких функций x_n, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|Bx_n\|}{\|x_n\|} = 1, \tag{2.12}$$

то в силу неравенства (2.11) можно сделать вывод, что $\|B\| = 1$.

Возьмем $x_n(t) = 0$ при $0 \le t \le 1 - 1/n$ и $x_n(t) = 1$ при $1 - 1/n < t \le 1$. Тогда

$$\|Bx_n\|^2 = \int_{1-1/n}^{1} t^2\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^3}, \quad \|x_n\|^2 = \int_{1-1/n}^{1} dt = \frac{1}{n}$$

и, следовательно, равенство (2.12) выполнено.

Пример 3. Оператор $Lx = x'' + x$ определим на подмножестве пространства $C(a,b)$, которое состоит из дважды непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю на концах отрезка $[a,b]$. Будем считать, что значения оператора лежат в $C(a,b)$.

а) Показать, что существует обратный оператор L^{-1} и найти его, если $a = 0,\ b = \pi/2$. Существует ли обратный оператор, если $a = 0,\ b = \pi$?

б) Доказать, что при $a = 0,\ b = \pi/2$ оператор L^{-1} ограничен и его область определения совпадает со всем пространством $C(a,b)$.

Решение. Легко проверить, что L — линейный оператор. Поэтому обратный оператор существует, если из равенства $Lx = 0$ следует, что $x = 0$. Равенство $Lx = 0$ может рассматриваться как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно x. Общее решение этого уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Так как функции, на которых определен оператор на концах отрезка равны нулю, получаем $0 = x(0) = C_2, \quad 0 = x(\pi/2) = C_1$. Таким образом, получаем, что $x = 0$ и значит L^{-1} существует.

Если же $a = 0,\ b = \pi$, то равенство $Lx = 0$ возможно и в том случае, когда $x \neq 0$, например, при $x(t) = \sin t$, поэтому обратный оператор не существует.

Вернемся к случаю $a = 0,\ b = \pi/2$ и найдем обратный оператор. По определению обратного оператора, для нахождения результата действия L^{-1} на непрерывную функцию $f(t)$, необходимо отыскать такую дважды непрерывно дифференцируемую функцию $x(t)$, что $x(a) = x(b) = 0$ и $Lx = f$. Если для любой непрерывной функции $f(t)$ удастся подыскать такую функцию $x(t)$, то это будет означать, что область определения оператора L^{-1} (или что одно и то же самое — область значения оператора L) совпадает со всем пространством $C(a, b)$ и $L^{-1} f = x$.

Для нахождения x получили краевую задачу:

$$x'' + x = f, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 0.$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных. Для этого его решение ищем в том же виде, что и общее решение однородного уравнения, только коэффициенты считаем не константами, а функциями от t. Имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t, \\ x'(t) &= C_1(t) \cos t - C_2(t) \sin t + C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t. \end{aligned}$$

Наложим на коэффициенты условие

$$C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = 0. \tag{2.13}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x'(t) &= C_1(t) \cos t - C_2(t) \sin t, \\ x''(t) &= -C_1(t) \sin t - C_2(t) \cos t + C_1'(t) \cos t - C_2'(t) \sin t. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в дифференциальное уравнение, и приводя подобные, получим

$$C_1'(t) \cos t - C_2'(t) \sin t = f(t). \tag{2.14}$$

Из системы линейных алгебраических уравнений (2.13),(2.14) находим теперь C_1', C_2'. Получаем $C_1' = f(t) \cos t,\ C_2' = -f(t) \sin t$. Проинтегрировав полученные выражения, найдем C_1, C_2. Подставив найденные коэффициенты в выражение для x, определим общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$x(t) = \left(\int\limits_0^t f(s) \cos s \, ds + c_1 \right) \sin t - \left(\int\limits_0^t f(s) \sin s \, ds + c_2 \right) \cos t,$$

где c_1, c_2 — константы, полученные при интегрировании. Из условия $x(0) = 0$ следует, что $c_2 = 0$. Условие $x(\pi/2) = 0$ дает

$$c_1 = - \int\limits_0^{\pi/2} f(s) \cos s \, ds.$$

Если заметить, что

$$\int_0^t f(s)\cos s\,ds + c_1 = -\int_t^{\pi/2} f(s)\cos s\,ds,$$

то искомая функция $x(t)$ запишется в виде

$$x(t) = -\cos t\int_0^t f(s)\sin s\,ds - \sin t\int_t^{\pi/2} f(s)\cos s\,ds.$$

Введем функцию

$$G(t,s) = -\begin{cases}\cos t\sin s, & 0\le s\le t,\\ \sin t\cos s, & t<s\le \pi/2.\end{cases}$$

Тогда решение $x(t)$ или по-другому — результат действия обратного оператора на функцию f примет вид

$$L^{-1}f = x = \int_0^{\pi/2} G(t,s)f(s)\,ds.$$

Так как $|G(t,s)|\le 1$, имеем

$$|x(t)| = \left|\int_0^{\pi/2} G(t,s)f(s)\,ds\right| \le \int_0^{\pi/2}|G(t,s)||f(s)|\,ds \le$$

$$\le \int_0^{\pi/2}\max_{s\in[0,\pi/2]} f(s)\,ds = \frac{\pi}{2}\|f\|.$$

Следовательно,

$$\|L^{-1}f\| = \|x\| = \max_{t\in[0,\pi/2]}|x(t)| \le \frac{\pi}{2}\|f\|.$$

Полученное неравенство означает, что оператор L^{-1} ограничен.

2.3.2 Задачи

1. Рассмотрим множество числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p < \infty$. Показать, что если в этом множестве ввести операции: $x+y = (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \dots)$, $\lambda x = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \dots)$, где $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$, то пространство является линейным. Доказать, что если в пространстве ввести норму $\|x\| = (\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{1/p}$, то при $p\ge 1$ пространство становится банаховым (пространство l_p).

2. В множестве n — мерных векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ вводятся нормы

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}|x_i|,\ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,\ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n {x_i}^2}.$$

Доказать, что $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$.

Замечание.

Определение 2.3.1 *Две нормы $\|\cdot\|_I$, $\|\cdot\|_{II}$ называются **эквивалентными**, если существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что*

$$C_1\|x\|_I \le \|x\|_{II} \le C_2\|x\|_I \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Таким образом, утверждение задачи означает, что в пространстве n-мерных векторов перечисленные нормы эквивалентны.

3. Доказать, что нормы $\|x\|_I = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ и $\|x\|_{II} = \int\limits_a^b |x(t)|\,dt$, заданные на множестве непрерывных функций не эквивалентны.

4. Показать, что в линейном нормированном пространстве шар является ***выпуклым множеством***, то есть если точки x, y принадлежат шару, то шару принадлежат точки $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, где $0 \le \alpha \le 1$ (точки z образуют отрезок, соединяющий точки x и y).

5. Показать, что в линейном нормированном пространстве ***сфера*** не является выпуклым множеством. Сферой с центром в точка $a \in \mathcal{X}$ радиуса $R > 0$ называется множество точек, расстояние от которых до точки a равно радиусу.

6. Доказать, что в пространстве двумерных векторов $x = (x_1, x_2)$ выражение $\|x\| = (\sum\limits_{i=1}^{2} |x_i|^p)^{1/p}$ не является нормой при $p < 1$.

Указание. Изобразить на плоскости шар $\{x : \|x\| \le 1\}$ и убедиться, что он не является выпуклым множеством (см. задачу 4).

7. Показать, что в линейном нормированном пространстве множество ограничено тогда и только тогда, когда существует такая константа, что нормы всех элементов множества не превосходят эту константу.

8. Доказать, что $L_p(a,b) \subset L_q(a,b)$ при $p \ge q$.

9. Доказать обобщенное неравенство Гельдера: если $p > 1,\ q > 1,\ r > 1$, и $1/p + 1/q + 1/r = 1$, а функции $x(t),\ y(t),\ z(t)$ таковы, что существуют интегралы $\int\limits_a^b |x|^p\,dt,\ \int\limits_a^b |y|^q\,dt,\ \int\limits_a^b |z|^r\,dt$, то

$$\int\limits_a^b |xyz|\,dt \le \left(\int\limits_a^b |x|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_a^b |y|^q\,dt\right)^{1/q} \left(\int\limits_a^b |z|^r\,dt\right)^{1/r}.$$

10. Пусть $x_n \in \mathcal{X}$ — фундаментальная последовательность и некоторая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится. Доказать, что вся последовательность сходится.

11. Являются ли следующие операторы линейными ограниченными операторами, действующими из пространства $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$:

а) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a,b), \quad Ax = t^4 x\big((a+b)/2\big)$;

б) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a,b), \quad Ax = \int\limits_a^b k(t,s)x(s)\,ds$, где $k(t,s)$ непрерывная функция, заданная на $[a,b]\times[a,b]$;

в) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2(a,b)$, $\quad Ax = \int\limits_a^b k(t,s)x(s)\,ds$, где $k(t,s) \in L_2((a,b)\times(a,b))$;

г) $\mathcal{X} = C^1(a,b)$, $\mathcal{Y} = C(a,b)$, $\quad Ax = dx(t)/dt$;

д) $\mathcal{X}$ — множество непрерывно дифференцируемых функций с нормой $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$, $\mathcal{Y} = C(a,b)$, $\quad Ax = dx(t)/dt$;

е) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a,b)$, $\quad Ax = \int\limits_a^t x(\xi)\,d\xi$;

ж) $\mathcal{X} = C(a,b)$, $\mathcal{Y} = C^1(a,b)$, $\quad Ax = \int\limits_a^t x(\xi)d\,\xi$;

з) $\mathcal{X} = C^r(a,b)$, $\mathcal{Y} = C(a,b)$

$$Ax = \sum_{i=0}^{r} a_i(t)\frac{d^i x(t)}{dt^i},$$

где $a_i(t)$ — непрерывные функции, заданные на $[a,b]$, r — заданное целое положительное число.

12. Пусть A квадратная матрица размерности n с элементами $a_{i,j}$. В пространстве n — мерных векторов зададим оператор, который вектору x ставит в соответствие произведение матрицы A на этот вектор. В дальнейшем будем оператор, порожденный матрицей A, обозначать тем же символом A и нормой матрицы называть норму оператора, порожденного этой матрицей.

Доказать, что A — линейный оператор и что в пространствах n — мерных векторов, определенных в задаче 2, норма этого оператора вычисляются по формулам:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|, \quad \|A\|_2 \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

13. Для каких $\alpha > 0$ оператор $Ax(t) = x(t^\alpha)$ линеен и непрерывен а) в $C(0,1)$, б) в $L_2(0,1)$. Найти его норму в каждом из пространств.

14. Найдите норму оператора, ставящего в соответствие функции из $L_p(a,b)$ ту же функцию, но рассматриваемую как элемент пространства $L_q(a,b)$ при $p \ge q$.

15. Пусть $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$ и $g(t)$ — фиксированный элемент пространства $L_q(a,b)$. Доказать, что равенство

$$l_g(f) = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$$

определяет линейный ограниченный функционал в пространстве $L_p(a,b)$.

Замечание. Можно доказать, что $\|l_g\| = \|g\|_{L_q}$, более того, справедливо утверждение: для любого линейного ограниченного функционала l, определенного на $L_p(a,b)$ существует такой элемент $g \in L_q(a,b)$, что для любого $f \in L_p(a,b)$ справедливо равенство

$$l(f) = \int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt$$

и $\|l\| = \|g\|_{L_q}$.

16. Пусть A — линейный ограниченный оператор, отображающий линейное нормированное пространство $\mathcal{X}$ в линейное нормированное пространство $\mathcal{Y}$. Множество $Ker_A = \{x : x \in \mathcal{X},\ Ax = \theta_y\}$ называется ***ядром оператора*** A. Доказать, что: а) линейная комбинация точек ядра принадлежит ядру; б) ядро — замкнутое множество.

Замечание Множество, обладающее свойствами а),б) называется ***подпространством.***

17. Пусть A — линейный ограниченный оператор, отображающий линейное нормированное пространство $\mathcal{X}$ в себя. Показать, что для любого целого положительного числа n выполняется неравенство $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

18. Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — линейные пространства, A — линейный оператор, определенный на $\mathcal{X}$ и принимающий значения в $\mathcal{Y}$.

Предположим, что система элементов $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathcal{X}$ линейно зависима. Доказать, что система элементов $Ax_1, Ax_2, \dots Ax_n$ линейно зависима.

Пусть система элементов $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathcal{X}$) линейно независима. Верно ли, что система элементов $Ax_1, Ax_2, \dots Ax_n$ линейно независима?

19. Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — линейные пространства, $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — линейный оператор, у которого существует обратный. Доказать, что системы элементов $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathcal{X}$ и $Ax_1, Ax_2, \dots Ax_n$ одновременно линейно зависимы или линейно независимы.

20. Пусть оператор A переводит элемент $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ в элемент $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots) \in l_2$, где λ_n — ограниченная числовая последовательность.

а) Доказать, что при любых λ_n оператор A — линейный ограниченный оператор. Какова его норма?

б) При каких условиях на последовательность λ_n существует обратный оператор A^{-1}? Когда он будет ограничен?

21. Существует ли обратный оператор для оператора $Ax = x'(t)$, который отображает $C^1(a, b)$ в $C(a, b)$?

22. Найти множество значений оператора $Ax = \int\limits_a^t x(\tau) d\tau$, действующего в $C(a, b)$. Существует ли для данного оператора обратный? Если существует, то является ли он ограниченным?

23. Дан оператор

$$Ax = \begin{cases} x(0), & t = 0, \\ \frac{1}{t} \int\limits_0^t x(s)\, ds, & t > 0, \end{cases}$$

отображающий $C(0, 1)$ в $C(0, 1)$. Показать, что существует оператор A^{-1} и найти его.

24. Определить какие из рассмотренных ниже операторов, действующих в l_1 имеют обратный, и найти его в тех случаях, когда он существует:

$$A(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_2, \xi_3, \dots), \qquad A(\xi_1, \xi_2, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots),$$
$$A(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_1, \xi_2 + \xi_1, \xi_3 + \xi_2, \dots), \quad A(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \dots).$$

25. Пусть $\mathcal{X}$ — линейное нормированное пространство, $A, B : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейные операторы, удовлетворяющие соотношениям $AB + A + I = 0,\ BA + B + I = 0$. Доказать, что операторы A^{-1}, B^{-1} существуют.

26. Пусть $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный оператор в линейном нормированном пространстве $\mathcal{X}$, и в $\mathcal{X}$ существует такая последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, что $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \to \theta$ при $n \to \infty$. Доказать, что у оператора A не существует ограниченного обратного.

27. Линейный оператор A, действующий из линейного нормированного пространства $\mathcal{X}$ в линейное нормированное пространство $\mathcal{Y}$, называется ***непрерывно обратимым***, если его область значений совпадает со всем пространством $\mathcal{Y}$ и существует ограниченный обратный оператор A^{-1}.

Непрерывно обратимы ли действующие в пространстве $C(0,1)$ операторы:

а) $Ax = tx(t)$, б) $Ax = x(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$, в) $Ax = e^t x(t)$, г) $Ax = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$?

28. Пусть $\mathcal{X}$ — множество определенных на отрезке $[0, a]$ дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$ таких, что $x(0) = x(a) = 0$. Зададим в $\mathcal{X}$ норму по формуле $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,a]} |x(t)|$. Определим операторы A и B, действующие из $\mathcal{X}$ в $C(0, a)$:

$$Ax = x'' + x, \qquad Bx = x'' - x.$$

Исследовать вопрос о существовании обратного оператора для каждого из операторов A и B в зависимости от числа a.

29. Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство, A — линейный оператор, отображающий пространство $\mathcal{X}$ в себя и $\|I - A\| < 1$. Доказать, что оператор A непрерывно обратим.

30. Доказать следующие утверждения относительно существования решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

.

а) При выполнении условия

$$\sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$$

система имеет единственное решение $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$ для любой последовательности $b = (b_1, b_2, \ldots) \in l_1$.

б) При выполнении условия

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$$

система имеет единственное решение $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_\infty$ для любой последовательности $b = (b_1, b_2, \ldots) \in l_\infty$.

в) При условии

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < 1$$

система имеет единственное решение $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ для любой последовательности $b = (b_1, b_2, \ldots) \in l_2$.

31. Пусть

$$\begin{cases} \xi_1 = a_{1\,1}\xi_1 + a_{1\,2}\xi_2 + \dots + a_{1\,m}\xi_m + \eta_1, \\ \xi_2 = a_{2\,1}\xi_1 + a_{2\,2}\xi_2 + \dots + a_{2\,m}\xi_m + \eta_2, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots, \\ \xi_m = a_{m\,1}\xi_1 + a_{m\,2}\xi_2 + \dots + a_{m\,m}\xi_m + \eta_m \end{cases}$$

система линейных алгебраических уравнений, причем $\sum\limits_{j=1}^{m} |a_{i\,j}| \le 1, \quad i = 1, \dots, m$. Доказать, что

а) система имеет единственное решение;

б) если при любых $i, j = 1, \dots m$ справедливы неравенства $a_{i\,j} \ge 0,\ \eta_i \ge 0$, то все компоненты вектора решения неотрицательны.

2.3.3 Тест к главе 2

1. Какие операторы, действующие из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, являются линейными?
а) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a,b),\ Af = f^2$;
б) $\mathcal{X} = C(a,b),\ \mathcal{Y} = R^2,\ Af = \big(f(a), f(b)\big)$;
в) $\mathcal{X} = R^2,\ \mathcal{Y} = C(a,b),\ Ax = 1 + x_1 \sin t + x_2 \cos t$, где $x = (x_1, x_2)$.

2. Норма каких операторов, действующих в пространстве $C(a,b)$, больше 1 ?
а) $Af = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ a = -1,\ b = 0$;
б) $Af = f(\frac{a+b}{2})$.
в) $Af = \sin t\, f(t)$;

3. Какие из приведенных ниже операторов, действующих в $C(a,b)$, не имеют обратный?
а) $Af = f(\frac{a+b}{2})$;
б) $Af = (1 + x^2) f(x)$;
в) $Af = f(a) + f(x)$.

4. Для каких операторов, действующих в $C(a,b)$, не существует ограниченный обратный оператор?
а) $Af = f(x) + f(b)$;
б) $Af = f(x) + \frac{1}{2(b-a)} \int\limits_a^b f(t)\,dt$;
в) $Af = \int\limits_a^x f(t)\,dt$.

5. Пусть A — линейный оператор, действующий в линейном нормированном пространстве. Какое из утверждений является ложным?
а) Если оператор A ограничен, то он непрерывен.
б) Если оператор A непрерывен, то он ограничен.
в) Если оператор A ограничен, то для него существует обратный.

6. Какое из утверждений является истинным?
а) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.
б) Если линейный оператор A имеет обратный, то A^{-1} — линейный.
в) Если линейные операторы A и B имеют обратные, то оператор $A + B$ тоже имеет обратный.

3 ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

3.1 ГЕОМЕТРИЯ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

В аналитической геометрии вводилось понятие скалярного произведения векторов, с помощью которого можно было выразить угол между векторами. Обобщим это понятие на произвольное линейное нормированное пространство.

Определение 3.1.1 *Пусть $\mathcal{H}$ линейное пространство над полем действительных (комплексных) чисел и каждой паре элементов x, y из $\mathcal{H}$ поставлено в соответствие число (x, y) таким образом, что для любых x, y, z из $\mathcal{H}$ и произвольного числа α выполняются условия:*

(a) $(x, x) \geq 0$, *причем* $(x, x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \theta$*;*

(b) $(x, y) = (y, x)$ *(* $(x, y) = \overline{(y, x)}$ *в случае поля комплексных чисел, где черта означает переход к комплексно сопряженному числу);*

(c) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$*;*

(d) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$*.*

Тогда число (x, y) называется ***скалярным произведением****.*

Элементы пространства $\mathcal{H}$ часто называют векторами, а само пространство — ***евклидовым*** в случае поля действительных чисел и ***унитарным*** в случае поля комплексных чисел.

В дальнейшем будет рассматриваться пространство над полем действительных чисел.

Если в пространстве задано скалярное произведение, то в нем можно ввести норму по правилу

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Для проверки аксиомы треугольника потребуется доказать ***неравенство Коши-Буняковского-Шварца***:

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|. \tag{3.1}$$

Для этого заметим, что для любого числа λ согласно аксиомам скалярного произведения

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y).$$

Так как квадратный трехчлен при любых λ не отрицателен, его дискриминант не положителен, то есть $(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$, откуда следует требуемое неравенство.

Замечание. В неравенстве (3.1) знак равенства возможен тогда и только тогда, когда вектора x и y пропорциональны.

Если вектора x и y пропорциональны, то есть существует такая константа λ, что $y = \lambda x$, то

$$|(x,y)| = |(x,\lambda x)| = |\lambda|(x,x) = |\lambda|\|x\|^2 = \|x\|\|\lambda x\| = \|x\|\|y\|.$$

Таким образом, в неравенстве (3.1) выполняется знак равенства.

Обратно, пусть в неравенстве (3.1) выполняется знак равенства. Тогда из доказательства неравенства (3.1) следует, что дискриминант равен нулю, значит, существует такое число λ_0, при котором квадратичный трехчлен обращается в 0, то есть

$$(x + \lambda_0 y, x + \lambda_0 y) = 0.$$

Поэтому из первой аксиомы нормы имеем, что $x + \lambda_0 y = \theta$, то есть вектора x и y пропорциональны.

Вернемся к неравенству треугольника. Его справедливость вытекает из соотношений:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq \\ \leq (x,x) + 2\sqrt{(x,x)(y,y)} + (y,y) = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Проверка остальных аксиом нормы не вызывает труда.

Замечание. Из доказательства неравенства треугольника следует, что знак равенства возможен тогда и только тогда, когда

$$(x,y) = \|x\|\|y\|. \tag{3.2}$$

Значит в неравенстве (3.1) должен выполняться знак равенства. Согласно предыдущему замечанию это возможно тогда и только тогда, когда вектора x и y пропорциональны. Непосредственно проверкой убеждаемся, что коэффициент пропорциональности должен быть положителен.

Таким образом, показано, что в неравенстве треугольника знак равенства возможен тогда и только тогда, когда вектора пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности положителен.

Так как в евклидовом пространстве может быть введена норма, для него справедливы все понятия и свойства, установленные для линейных нормированных пространств. В частности, в таком пространстве можно определить сходимость и полноту.

Определение 3.1.2 *Если в линейном пространстве задано скалярное произведение и полученное пространство полное, то оно называется **гильбертовым пространством**.*

В качестве примера гильбертова пространства рассмотрим пространство $L_2(a,b)$. Выше отмечалось, что это банахово пространство. Зададим в нем скалярное произведение по формуле

$$(x,y) = \int\limits_a^b x(t)y(t)\,dt. \tag{3.3}$$

Из неравенства $xy \leq 0.5(x^2 + y^2)$ и определения пространства $L_2(a,b)$ следует, что интеграл, стоящий в правой части равенства (3.3) конечен. Легко проверяется теперь выполнение всех свойств скалярного произведения. Это скалярное произведение согласуется с введенной ранее в пространстве $L_2(a,b)$ нормой в том смысле, что $(x,x) = \int\limits_a^b x^2(t)\,dt$.

Если в пространстве задано скалярное произведение, то в нем можно ввести понятие угла между векторами, в частности, определить ортогональность.

Определение 3.1.3 *Будем говорить, что вектора x и y* ***ортогональны*** *(обозначается это следующим образом: $x \perp y$), если $(x, y) = 0$.*

Перечислим и докажем свойства ортогональных векторов:

1) $\theta \perp \mathcal{H}$, так как для любого x из $\mathcal{H}$ справедливы равенства: $(\theta, x) = (0\theta, x) = 0(\theta, x) = 0$.

2) Если $x_1, \ldots, x_n \perp y$, то $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \perp y$, где α_i произвольные числа. Действительно,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y) = 0.$$

3) Если $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $x_n \perp y$ при всех n, то $x \perp y$. Для доказательства заметим, что если $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y)$. Это следует из того, что

$$|(x, y) - (x_n, y)| = |(x - x_n, y)| \leq \|x - x_n\| \|y\| \to 0.$$

Тогда в силу ортогональности x_n и y имеем $(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y) = 0$.

4) Если $x \perp \mathcal{H}$, то $x = \theta$. Действительно, $x \perp \mathcal{H}$ означает, что $(x, y) = 0$ для всех $y \in \mathcal{H}$. Тогда, взяв $y = x$, имеем $(x, x) = 0$, то есть $x = \theta$.

5) Если $x_i \perp x_j$ $(i \neq j)$, то

$$\| \sum_i x_i \|^2 = \sum_i \|x_i\|^2$$

(***теорема Пифагора***). В этом равенстве суммы могут содержать как конечное, так (в случае сходимости) и бесконечное число слагаемых.

$$\| \sum_i x_i \|^2 = \left(\sum_i x_i, \sum_j x_j\right) = \sum_i \sum_j (x_i, x_j) = \sum_i \|x_i\|^2.$$

Последнее равенство здесь выполняется потому, что в силу ортогональности сумма $\sum_j (x_i, x_j)$ содержит только одно ненулевое слагаемое, соответствующее $j = i$.

В пространстве, в котором можно ввести скалярное произведение, справедливо ***равенство параллелограмма***:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \tag{3.4}$$

то есть сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон. Для доказательства достаточно сложить равенства:

$$(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \ ,$$
$$(x - y, x - y) = (x, x) - 2(x, y) + (y, y) \ .$$

Заметим, что для пространства $C(a, b)$ в общем случае равенство (3.4) не справедливо. Действительно, пусть $a = 0$, $b = \pi/2$, $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$. Тогда $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $\|x + y\| = \sqrt{2}$, $\|x - y\| = 1$. Отсюда следует, что в пространстве $C(a, b)$ нельзя задать скалярное произведение так, чтобы превратить это пространство в гильбертово.

3.2 РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПОДПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе для случая произвольного гильбертова пространства будет распространена задача, решение которой хорошо известно из геометрии в трехмерном пространстве. Имеется плоскость и точка h, не лежащая в этой плоскости. Требуется найти в плоскости точку, ближайшую к заданной точке. Очевидно, что для нахождения такой точки достаточно из h опустить перпендикуляр на плоскость. Рассмотрим теперь как решается задача в общем случае.

Пусть $\mathcal{H}$ гильбертово пространство, $\mathcal{H}_1$ ***подпространство***, то есть такое множество из $\mathcal{H}$, что линейные комбинации элементов из $\mathcal{H}_1$ принадлежит $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_1$ замкнутое множество.

Теорема 3.2.1 *Пусть $h \notin \mathcal{H}_1$. Тогда в $\mathcal{H}_1$ существует единственный вектор g, такой что $\|h-g\| = \inf\limits_{g' \in \mathcal{H}_1} \|h-g'\|$. При этом $h - g \perp \mathcal{H}_1$. Вектор g называют **ближайшим к вектору** h или **проекцией** h **на подпространство**. .*

Доказательство. Докажем сначала, что если ближайший вектор существует, то он единственный. Пусть $\inf\limits_{g' \in \mathcal{H}_1} \|h-g'\| = \delta$ и пусть $\|h-g_1\| = \|h-g_2\| = \delta$, то есть оба вектора g_1 и g_2 - ближайшие.

Тогда, так как $(g_1+g_2)/2 \in \mathcal{H}_1$, из определения δ следует, что

$$\delta \le \|h - \frac{g_1+g_2}{2}\| \le \frac{1}{2}\|h-g_1\| + \frac{1}{2}\|h-g_2\| = \delta.$$

Значит, в неравенстве треугольника выполняется знак равенства. В параграфе 3.1 отмечалось, что такое возможно тогда и только тогда, когда $h - g_1 = \alpha(h-g_2)$ и $\alpha > 0$. Так как, кроме того, выполняется равенство $\|h-g_1\| = \|h-g_2\|$, получаем, что $\alpha = 1$. Отсюда следует, что $g_1 = g_2$.

Для доказательства существования заметим, что по определению нижней грани существует последовательность векторов $g_n \in \mathcal{H}_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такая, что $\delta = \lim\limits_{n\to\infty} \|h-g_n\|$. Если показать, что последовательность $\{g_n\}$ фундаментальна, то в силу полноты $\mathcal{H}$ получим сходимость последовательности и так как $\mathcal{H}_1$ замкнуто, $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n \in \mathcal{H}_1$. Тогда $\|h-g\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|h-g_n\| = \delta$. Таким образом g — искомый вектор.

Следовательно, надо доказать, что последовательность $\{g_n\}$ фундаментальна. Заметим, что поскольку $g_n, g_m, (g_n+g_m)/2 \in \mathcal{H}_1$, имеем

$$\delta \le \|h - \frac{g_n+g_m}{2}\| \le \frac{1}{2}\|h-g_n\| + \frac{1}{2}\|h-g_m\|. \tag{3.5}$$

Из левой части неравенства (3.5) следует, что[1]

$$\delta \le \varliminf_{n,m\to\infty} \|h - \frac{g_n+g_m}{2}\|.$$

Из правой части неравенства (3.5) получаем

$$\varlimsup_{n,m\to\infty} \|h - \frac{g_n+g_m}{2}\| \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|h-g_n\| + \frac{1}{2}\lim_{m\to\infty} \|h-g_m\| = \delta.$$

[1]Напомним, что $\varliminf$ означает нижний предел, а $\varlimsup$ — верхний.

Таким образом

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}}\|h - \frac{g_n + g_m}{2}\| \le \delta \le \underline{\lim_{n,m\to\infty}}\|h - \frac{g_n + g_m}{2}\|. \tag{3.6}$$

Так как нижний предел всегда не больше верхнего, из неравенства(3.6) следует, что пределы совпадают и значит существует просто предел

$$\lim_{n,m\to\infty}\|h - \frac{g_n + g_m}{2}\| = \delta. \tag{3.7}$$

Возьмем теперь в равенстве параллелограмма $x = h - g_n,\ y = h - g_m$. Тогда

$$\|g_n - g_m\|^2 = 2\|h - g_n\|^2 + 2\|h - g_m\|^2 - 4\|h - \frac{g_n + g_m}{2}\|^2. \tag{3.8}$$

Из определения последовательности $\{g_n\}$ и равенства (3.7) следует, что правая часть равенства (3.8) сходится к 0 при $n, m \to \infty$. Таким образом показано, что последовательность фундаментальна.

Докажем теперь, что $h - g \perp \mathcal{H}_1$. Предположим противное, то есть что существует $g_1 \in \mathcal{H}_1$, для которого $(h - g, g_1) = A \ne 0$. Заметим, что в силу этого условия $g_1 \ne \theta$. Тогда при любом числе α вектор $g + \alpha g_1$ лежит в $\mathcal{H}_1$.

Отсюда следует, что

$$\delta^2 \le (h - (g + \alpha g_1), h - (g + \alpha g_1)) = \|h - g\|^2 - 2\alpha(h - g, g_1) + \alpha^2\|g_1\|^2 = \\ = \delta^2 - 2\alpha A + \alpha^2\|g_1\|^2. \tag{3.9}$$

Подберем α так, что $-2\alpha A + \alpha^2\|g_1\|^2 < 0$. Для этого достаточно взять α из интервала $0 < \alpha < 2A\|g_1\|^{-2}$ при $A > 0$ или $2A\|g_1\|^{-2} < \alpha < 0$ при $A < 0$. Тогда из (3.9) следует $\delta < \delta$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассмотрим вопрос о нахождении ближайшего вектора. Пусть $\mathcal{H}_1$ — конечномерное подпространство, $g_1, g_2, \dots, g_n$ — базисные вектора в нем. Тогда ближайший к h вектор g представим в виде линейной комбинации базисных векторов

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i \tag{3.10}$$

и $h - g \perp \mathcal{H}_1$. Следовательно, выполняются равенства

$$(h - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i, g_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (g_i, g_j) = (h, g_j). \tag{3.11}$$

Решив эту систему относительно α_i и подставив их в (3.10) получим g. Из теоремы о расстоянии от точки до подпространства следует, что система всегда имеет единственное решение, то есть определитель матрицы этой системы всегда отличен от нуля.

Проще всего система (3.11) решается, если вектора базиса таковы, что $\|g_i\| = 1$ и $(g_i, g_j) = 0$ при $i \ne j$. Тогда система (3.11) примет вид $\alpha_i = (h, g_i)$ и значит

$$g = \sum_{i=1}^{n} (h, g_i) g_i. \tag{3.12}$$

Коэффициенты (h, g_i) в формуле (3.12) называются ***коэффициентами Фурье.***

В связи с простотой нахождения проекции в случае ортонормированного[2] базиса встает вопрос о том, существует ли такой базис и если да, то как его отыскать. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3.2.2 *Пусть $g_1, g_2 \ldots$ линейно независимые вектора. Тогда существуют вектора $e_1, e_2, \ldots$ такие, что $e_i \perp e_j$ при $i \neq j$, $\|e_i\| = 1$. Для любого целого числа n выполняется равенство $L(g_1, \ldots, g_n) = L(e_1, \ldots, e_n)$, где $L(g_1, \ldots, g_n)$ — множество всевозможных линейных комбинаций векторов $g_1, \ldots, g_n$.*

Доказательство. Построим вектора $e_1, e_2, \ldots$. Метод их построения называется ***процессом ортогонализации Шмидта***.

Заметим, что $g_1 \neq \theta$, так как вектора $g_1, g_2 \ldots$ линейно независимы. Поэтому можно определить $e_1 = g_1/\|g_1\|$.

Предположим, что $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ построены и опишем процесс нахождения e_n. Положим

$$e'_n = g_n - \sum_{i=1}^{n-1} (g_n, e_i) e_i.$$

В силу того, что $\sum\limits_{i=1}^{n-1} (g_n, e_i) e_i$ — проекция вектора g_n на $L(e_1, \ldots, e_{n-1})$ имеем $e'_n \perp L(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Кроме того $e'_n \neq \theta$, ибо в противном случае вектор g_n линейно выражается через $g_1, \ldots, g_{n-1}$, а это противоречит линейной независимости векторов $g_1, g_2 \ldots$. Тогда $e_n = e'_n/\|e'_n\|$ — искомый вектор.

Из построения следует, что $L(g_1, \ldots, g_n) = L(e_1, \ldots, e_n)$, так как g_n линейно выражается через $e_1, \ldots, e_n$, а e_n через $g_1, \ldots, g_n$. Теорема доказана.

Теорема о расстоянии от точки до подпространства дает возможность решить следующую задачу вычислительной математики: дана функция $h(x)$ и линейно независимые функции $g_1(x), \ldots, g_n(x)$. Найти такую функцию $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x)$, что норма $\|h(x) - g(x)\|$ минимальна (***задача аппроксимации***). Согласно теореме о расстоянии от точки до подпространства эта задача всегда однозначно разрешима если, например, в качестве нормы выбрать норму пространства L_2. Часто функции $g_1, \ldots, g_n$ выбираются вида $1, x, x^2, \ldots x^n$. Тогда $g(x)$ — полином степени не выше n, то есть находится полином, лучше всего приближающий заданную функцию. Для нахождения проекции удобно тогда выбирать в качестве базиса ортогональные полиномы, например, в случае пространства $L_2(-1, 1)$ такими полиномами являются ***полиномы Лежандра***:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

норма которых равна $\|P_n\| = \sqrt{2/(2n+1)}$.

3.3 РЯДЫ ФУРЬЕ

В случае бесконечномерного гильбертова пространства возникает ряд вопросов. Как ведут себя суммы в формуле (3.12) и коэффициенты Фурье с ростом n, если при $n \to \infty$ существует предел, то как этот предел связан с h? В этом параграфе получим ответы на эти вопросы.

[2]Ортонормированность означает, что вектора попарно ортогональны и их норма равна 1

Пусть $\mathcal{H}$ — бесконечномерное гильбертово пространство. Это означает, что для любого натурального числа n в нем существует n линейно независимых векторов. Применив к векторам процесс ортогонализации, получим последовательность ортонормированных векторов $e_1, e_2, \ldots$. Пусть $h \in \mathcal{H}$. Тогда для любого числа n вектор h можно представить в виде

$$h = f_n + \sum_{i=1}^{n}(h, e_i)e_i, \tag{3.13}$$

причем $f_n \perp e_i \;\; i = 1, \ldots, n$. Тогда по теореме Пифагора

$$\|h\|^2 = \|f_n\|^2 + \|\sum_{i=1}^{n}(h, e_i)e_i\|^2 = \|f_n\|^2 + \sum_{i=1}^{n}(h, e_i)^2. \tag{3.14}$$

Следовательно, для любого n справедливо неравенство $\|h\|^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{n}(h, e_i)^2$. Если перейти в нем к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство

$$\|h\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty}(h, e_i)^2,$$

которое называется ***неравенство Бесселя***.

Пусть $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(h, e_i)e_i$. Последовательность таких сумм фундаментальна, так как при $n > m$ имеем

$$\|S_n - S_m\|^2 = \|\sum_{i=m+1}^{n}(h, e_i)e_i\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n}(h, e_i)^2. \tag{3.15}$$

В силу неравенства Бесселя числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(h, e_i)^2$ сходится. Поэтому из признака сходимости числовых рядов следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что при любых $n, m > N(\varepsilon)$ выражение, стоящее в правой части равенства (3.15), меньше ε, что и означает фундаментальность. Так как пространство полное, последовательность S_n сходится. Если S — предел этой последовательности, то естественно ввести обозначение

$$S = \sum_{i=1}^{\infty}(h, e_i)e_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(h, e_i)e_i.$$

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(h, e_i)e_i$ называется ***рядом Фурье*** вектора h, а число (h, e_i), как уже отмечалось, — ***коэффициентом ряда Фурье***.

Ответим теперь на вопрос, как связаны вектор h и сумма его ряда Фурье, совпадают ли они. Из (3.13) следует, что $h = S$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \theta$. Тогда из (3.14) имеем, что вектор равен сумме своего ряда Фурье тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\|h\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(h, e_i)^2.$$

Это равенство называется ***равенством Парсеваля***.

Определение 3.3.1 *Система векторов $e_1, e_2, \dots$, для которой при любом векторе $h \in \mathcal{H}$ выполнено равенство Парсеваля, называется* ***замкнутой****.*

Из приведенных выше рассуждений следует, что для любого вектора $h \in \mathcal{H}$ выполнено равенство Парсеваля тогда и только тогда, когда этот вектор равен сумме своего ряда Фурье.

Определение 3.3.2 *Система векторов называется* ***полной****, если в пространстве не существует отличного от нулевого вектора, который был бы ортогонален всем векторам системы.*

Теорема 3.3.1 *Для того, чтобы система была замкнутой необходимо и достаточно, чтобы она была полной.*

Доказательство. Пусть система замкнута и в то же время существует отличный от нулевого вектор h, который ортогонален всем векторам системы. Тогда из равенства Парсеваля следует, что $\|h\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(h, e_i)^2 = 0$. Отсюда следует, что $h = \theta$, а это противоречит предположению.

Обратно, пусть система $\{e_i\}$ полна, то есть для любого $f \in \mathcal{H}$ из того, что $f_{\perp}e_i$ следует, что $f = \theta$. Положим $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(h, e_i)e_i$, где h — произвольный вектор и $f = S - h$. Тогда для произвольного j имеем

$$(f, e_j) = (S, e_j) - (h, e_j) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(h, e_i)e_i, e_j\right) - (h, e_j) = (h, e_j) - (h, e_j) = 0.$$

Из предположения следует при этом, что $f = \theta$, значит $h = S$, что означает, что система векторов замкнута.

В пространстве $L_2(-1, 1)$ замкнутые системы векторов образуют полиномы Лежандра, тригонометрические функции $\{1,\ \cos(\pi n x),\ sin(\pi n x),\ n = 1, 2, \dots\}$.

3.4 ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Докажем прежде всего теорему, которая считается одной из основных теорем функционального анализа. Эта теорема позволяет найти общий вид произвольного линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

Теорема 3.4.1 (Ф. Рисс) *Всякий линейный ограниченный функционал в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ имеет вид $\Phi(h) = (h, f)$, где f — некоторый элемент из $\mathcal{H}$, однозначно определяемый функционалом Φ. При этом выполняется равенство $\|\Phi\| = \|f\|$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех тех элементов $g \in \mathcal{H}$, для которых $\Phi(g) = 0$. Из линейности функционала следует, что если $g_1, g_2 \in \mathcal{L}$, то

$$\Phi(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 \Phi(g_1) + \alpha_2 \Phi(g_2) = 0.$$

Это означает, что $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \in \mathcal{L}$. Кроме того, если $g_n \in \mathcal{L}$ и $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$, то

$$\Phi(g) = \lim_{n\to\infty} \Phi(g_n) = 0,$$

то есть $g \in \mathcal{L}$. Таким образом установлено, что $\mathcal{L}$ — подпространство.

Если окажется, что $\mathcal{L} = \mathcal{H}$, то функционал Φ всюду равняется нулю. В этом случае для доказательства теоремы Рисса достаточно взять $f = \theta$. Предположим поэтому, что $\mathcal{L} \neq \mathcal{H}$. Тогда существует элемент $h_0 \in \mathcal{H}$ такой, что $h_0 \notin \mathcal{L}$. Ранее было показано, что элемент h_0 представим в виде $h_0 = g_0 + f_0$, где $g_0 \in \mathcal{L}$, а $f_0 \perp \mathcal{L}$. Из того, что $h_0 \notin \mathcal{L}$ следует, что $f_0 \neq \theta$.

Рассмотрим элементы вида $\Phi(h)f_0 - \Phi(f_0)h$, где h пробегает $\mathcal{H}$. Эти элементы принадлежат $\mathcal{L}$, так как

$$\Phi\big(\Phi(h)f_0 - \Phi(f_0)h\big) = \Phi(h)\Phi(f_0) - \Phi(f_0)\Phi(h) = 0.$$

Следовательно,

$$\big(\Phi(h)f_0 - \Phi(f_0)h, f_0\big) = 0,$$

откуда

$$\Phi(h)(f_0, f_0) = (h, \Phi(f_0)f_0). \tag{3.16}$$

Если положим

$$f = \frac{\Phi(f_0)}{(f_0, f_0)} f_0,$$

то из равенства (3.16) вытекает, что $\Phi(h) = (h, f)$. Это и есть требуемое представление функционала.

Докажем, что такое представление единственно. Полагая противное, придем к равенству $(h, f') = (h, f'')$, верному для любых h, где f', f'' — два различных элемента. Но это невозможно, так как из равенства следует, что $f' - f'' \perp \mathcal{H}$, а всему пространству может быть ортогонален только нулевой элемент.

Осталось доказать, что $\|\Phi\| = \|f\|$. Так как $\Phi(h) = (h, f)$, то $|\Phi(h)| \leq \|h\|\|f\|$ и, значит, $\|\Phi\| \leq \|f\|$. С другой стороны, беря $h = f$, получим $\Phi(f) = \|f\|^2$, откуда следует, что $\|f\| \leq \|\Phi\|$.

Таким образом теорема Рисса доказана.

Перейдем теперь к изучению операторов в гильбертовом пространстве.

Пусть A — линейный ограниченный оператор в $\mathcal{H}$.

Определение 3.4.1 *Оператор A^* называется **сопряженным** к оператору A, если при любых $f, g \in \mathcal{H}$ выполняется равенство $(Af, g) = (f, A^*g)$.*

Теорема 3.4.2 *Для любого линейного ограниченного оператора A существует единственный сопряженный оператор A^*, причем $\|A\| = \|A^*\|$.*

Доказательство. Рассмотрим функционал $\Phi(f) = (Af, g)$, где g — фиксированный элемент из $\mathcal{H}$. Очевидно, что Φ — линейный функционал, а так как

$$|\Phi(f)| = |(Af, g)| \leq \|Af\|\|g\| \leq \|A\|\|f\|\|g\|,$$

то функционал ограничен, причем

$$\|\Phi\| \leq \|A\|\|g\|. \tag{3.17}$$

Поэтому по теореме Рисса существует элемент $g^* \in \mathcal{H}$ такой, что $\Phi(f) = (f, g^*)$, то есть

$$(Af, g) = (f, g^*). \tag{3.18}$$

Элемент g^* однозначно определяется функционалом Φ и, следовательно, в конечном счете элементом g. Таким образом, сопоставляя элементу g элемент g^*, мы получаем оператор в $\mathcal{H}$. Обозначим этот оператор A^*. Заменяя в (3.18) g^* на A^*g, получим соотношение, определяющее сопряженный оператор.

Покажем, что сопряженный оператор линеен. Имеем

$$\begin{gathered}\big(f, A^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)\big) = (Af, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \\ = \alpha_1 (Af, g_1) + \alpha_2 (Af, g_2) = \alpha_1 (f, A^* g_1) + \alpha_2 (f, A^* g_2) = (f, \alpha_1 A^* g_1 + \alpha_2 A^* g_2).\end{gathered}$$

В силу того, что полученное равенство выполняется для любого элемента f, имеем

$$A^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 A^* g_1 + \alpha_2 A^* g_2,$$

что означает линейность оператора A^*.

Осталось доказать, что $\|A\| = \|A^*\|$. Так как $\|\Phi\| = \|g^*\|$, то неравенство (3.17), переписанное в форме

$$\|g^*\| = \|A^* g\| \leq \|A\| \|g\|,$$

показывает, что оператор A^* ограничен, причем

$$\|A^*\| \leq \|A\|. \tag{3.19}$$

Нетрудно видеть, что оператор $A^{**} = (A^*)^*$ совпадает с оператором A. В самом деле,

$$(f, Ag) = (A^* f, g) = (f, (A^*)^* g),$$

откуда $(f, Ag) = (f, A^{**} g)$, так что $Ag = A^{**} g$ при любом $g \in \mathcal{H}$.

Применяя уже доказанное неравенство (3.19) к операторам A^{**} и A^*, получим

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leq \|A^*\|,$$

что вместе с неравенством (3.19) приводит к равенству $\|A\| = \|A^*\|$. Таким образом, утверждение полностью доказано.

Легко проверить следующие свойства сопряженных операторов:

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

Например, для доказательства второго свойства имеем:

$$((AB)f, g) = (A(Bf), g) = (Bf, A^* g) = (f, B^*(A^* g)) = (f, (B^* A^*) g).$$

Определение 3.4.2 *Оператор называется* ***самосопряженным****, если он равен своему сопряженному. Это означает, что при любых $f, g \in \mathcal{H}$ выполняется равенство $(Af, g) = (f, Ag)$.*

Например, оператор $Af = xf(x)$, действующий в $L_2(a, b)$ — самосопряженный потому, что

$$(Af, g) = \int\limits_a^b (xf(x))\, g(x)\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, (xg(x))\, dx = (f, Ag).$$

Если в $L_2(a,b)$ определить оператор $Af = \int\limits_a^b k(x,s)f(s)\,ds$, где $k(x,t)$ — фиксированная функция из $L_2\left((a,b)\times(a,b)\right)$, то

$$(Af,g) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b k(x,s)f(s)\,ds\right) g(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b f(s)\left(\int\limits_a^b k(x,s)g(x)\,dx\right) ds = (f, A^*g).$$

Отсюда следует, что $A^*f = \int\limits_a^b k(s,x)f(s)\,ds$. Поэтому $A = A^*$, если $k(x,s) = k(s,x)$.

Определение 3.4.3 *Если оператор A определен на линейном подмножестве $\mathcal{H}_1$ из $\mathcal{H}$, линеен и при любых $f,g\in\mathcal{H}_1$ выполняется равенство $(Af,g) = (f,Ag)$, то оператор называется* ***симметричным****.*

Пример: $\mathcal{H}_1 \in L_2(a,b)$ — подмножество дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих на концах отрезка условиям

$$\alpha_1 f'(a) - \alpha_2 f(a) = 0,\ \ \beta_1 f'(b) + \beta_2 f(b) = 0,$$

где α_i, β_i $i = 1,2$ — неотрицательные числа, причем $\alpha_1+\alpha_2 > 0,\ \beta_1+\beta_2>0$. Зададим оператор A, который назовем ***оператором Штурма-Лиувилля*** соотношением

$$Af = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df}{dx}\right) + q(x)f(x),\ \ p>0,\ \ q\ge 0.$$

После интегрирования по частям имеем (предполагается для определенности, что $\alpha_1,\ \beta_1 \neq 0$):

$$(Af,g) = \int\limits_a^b p\frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}\,dx + \int\limits_a^b qfg\,dx - \left(p\frac{df}{dx}g\right)\Bigg|_a^b =$$

$$= \int\limits_a^b p\frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}\,dx + \int\limits_a^b qfg\,dx + p(b)f(b)g(b)\frac{\beta_2}{\beta_1} + p(a)f(a)g(a)\frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \quad (3.20)$$

В правую часть равенства (3.20) функции f и g входят симметрично, значит ничего не изменится, если их поменять местами, откуда следует, что $(Af,g) = (Ag,f)$. Аналогично рассматривается случай, когда α_1 или β_1 равны нулю. Заметим также, что из (3.20) следует неравенство $(Af,f)\ge 0$.

Лемма 3.4.1 *Если A — самосопряженный оператор, то*

$$\|A\| = \sup_{f\ne\theta}\frac{|(Af,f)|}{\|f\|^2} = \sup_{\|f\|=1}|(Af,f)|.$$

Доказательство. Положим $C = \sup_{\|f\|=1} |(Af, f)|$, тогда

$$|(Af, f)| \leq \|Af\|\|f\| \leq \|A\|\|f\|^2.$$

Тогда

$$C = \sup_{\|f\|=1} |(Af, f)| \leq \sup_{\|f\|=1} \|Af\|\|f\| \leq \sup_{\|f\|=1} \|A\|\|f\|^2 = \|A\|.$$

Для того, чтобы показать, что $\|A\| = C$, достаточно теперь доказать справедливость неравенства $\|A\| \leq C$.

Из определения C и равенства параллелограмма имеем для любых f и g, норма которых равна 1:

$$|(Af, g)| = \frac{1}{4}|(A(f+g), f+g) - (A(f-g), f-g)| \leq \frac{1}{4}|(A(f+g), f+g)| + \\ + \frac{1}{4}|(A(f-g), f-g)| \leq \frac{C}{4}(\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2) = \frac{C}{2}(\|f\|^2 + \|g\|^2) = C. \quad (3.21)$$

Возьмем теперь $g = Af/\|Af\|$. Тогда получим $\|g\| = 1$ и из неравенства (3.21) следует, что $\|Af\| \leq C$, то есть $\|A\| \leq C$. Лемма доказана.

Определение 3.4.4 *Число λ называется* ***собственным числом*** *линейного оператора A, если существует такой ненулевой вектор h, что $Ah = \lambda h$. При этом вектор h называют* ***собственным вектором, соответствующим собственному числу*** *λ.*

Рассмотрим некоторые свойства собственных чисел и собственных векторов.

Лемма 3.4.2 *Пусть A — линейный оператор и $\mathcal{L}$ — множество, состоящее из собственных векторов оператора A соответствующих числу λ и нулевого вектора. Тогда множество $\mathcal{L}$ — линейное. Если, кроме того, оператор A ограничен, то $\mathcal{L}$ — подпространство.*

Доказательство. Пусть $h_1, h_2 \in \mathcal{L}$. Требуется доказать, что $\alpha h_1 + \beta h_2 \in \mathcal{L}$.

$$A(\alpha h_1 + \beta h_2) = \alpha A h_1 + \beta A h_2 = \alpha\lambda h_1 + \beta\lambda h_2 = \lambda(\alpha h_1 + \beta h_2),$$

значит $\alpha h_1 + \beta h_2 \in \mathcal{L}$.

Если оператор ограничен, то для доказательства того, что $\mathcal{L}$ подпространство достаточно проверить, что если $h = \lim_{n\to\infty} h_n$ и $h_n \in \mathcal{L}$, то $h \in \mathcal{L}$. Из равенств

$$Ah = \lim_{n\to\infty} Ah_n = \lim_{n\to\infty} \lambda h_n = \lambda h$$

следует, что вектор h собственный или нулевой. По определению это означает, что он лежит в $\mathcal{L}$.

Лемма 3.4.3 *Пусть $\mathcal{L}$ — множество собственных векторов линейного оператора A, соответствующих числу λ, $\mathcal{M}$ — множество собственных векторов оператора A^* соответствующих числу μ, причем $\lambda \neq \mu$. Тогда $\mathcal{L} \perp \mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $Af = \lambda f,\ A^*g = \mu g$. Тогда

$$\mu(f,g) = (f,\mu g) = (f,A^*g) = (Af,g) = (\lambda f,g) = \lambda(f,g).$$

Значит $(\mu - \lambda)(f,g) = 0$, откуда следует, что $(f,g) = 0$.

Из леммы следует, что собственные вектора, соответствующие различным собственным числам самосопряженного оператора, будут ортогональны.

Аналогично показывается, что это же утверждение справедливо для симметричного оператора, в частности, собственные функции оператора Штурма-Лиувилля, соответствующие различным собственным числам, будут ортогональны.

Лемма 3.4.4 *Если λ — собственное число линейного, ограниченного оператора A, то $|\lambda| \le \|A\|$.*

Доказательство. Пусть $Af = \lambda f,\ f \ne \theta$. Тогда

$$|\lambda|\|f\| = \|\lambda f\| = \|Af\| \le \|A\|\|f\|.$$

Отсюда следует, что $|\lambda| \le \|A\|$, так как $\|f\| > 0$.

Лемма 3.4.5 *Если существует такое число α, что для любого h из $\mathcal{H}_1$, где $\mathcal{H}_1$ — область определения линейного оператора A, выполняется неравенство $(Ah,h) \ge \alpha(h,h)$ (или $(Ah,h) \le \alpha(h,h)$), то $\lambda \ge \alpha$ (или $\lambda \le \alpha$).*

Доказательство. Пусть для определенности $(Ah,h) \ge \alpha(h,h)$. Выбирая в качестве h собственный вектор, который соответствует числу λ, получим

$$\lambda(h,h) = (Ah,h) \ge \alpha(h,h).$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

Из этой леммы, в частности, следует, что собственные числа оператора Штурма-Лиувилля неотрицательны.

Следует отметить, что вопрос о существовании собственных чисел тесно связан с вопросом об однозначной разрешимости уравнения

$$(A - \lambda I)h = \theta \tag{3.22}$$

относительно h. Это уравнение (A — линейный оператор) всегда имеет нулевое решение. Если при каких-то λ есть ненулевое решение, то это означает, что λ — собственное число. В этом случае неоднородное уравнение

$$(A - \lambda I)h = f \tag{3.23}$$

если имеет решение, то оно не единственно. Два решения неоднородного уравнения отличаются на собственный вектор, соответствующий числу λ.

Если же уравнение (3.22) имеет только нулевое решение, то существует обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, а число λ не является собственным. При этом возможны две ситуации обратный оператор либо ограничен, либо неограничен. В том случае, когда $|\lambda| > \|A\|$ обратный оператор ограничен, причем неоднородное уравнение (3.23) имеет единственное решение при любом $f \in \mathcal{H}$. Доказательство этого утверждения следует из теоремы 2.2.3, примененной к уравнению, получившемуся из уравнения (3.23) делением на $-\lambda$. Таким образом, обратный оператор может оказаться неограниченным только в том случае, когда $|\lambda| \le \|A\|$. Например, пусть $Af = xf(x)$, оператор, действующий в $L_2(0,1)$. Как уже отмечалось, у этого оператора нет собственных чисел, и, значит, оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ существует. Однако при $0 \le \lambda \le 1$ он неограничен. Действительно, пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} (\lambda - x)^{1/2n+1/2}, & 0 \le x \le \lambda, \\ (x-\lambda)^{1/2n+1/2}, & \lambda \le x \le 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\|f_n\|^2 = \int\limits_0^\lambda (\lambda - x)^{1/n+1}\,dx + \int\limits_\lambda^1 (x-\lambda)^{1/n+1}\,dx = \frac{n}{2n+1}\big((1-\lambda)^{2+1/n} + \lambda^{2+1/n}\big),$$

$$(A-\lambda I)^{-1} f_n = \frac{f_n}{x-\lambda} = \begin{cases} -(\lambda - x)^{1/2n-1/2}, & 0 \le x \le \lambda, \\ (x-\lambda)^{1/2n-1/2}, & \lambda \le x \le 1, \end{cases}$$

$$\|(A-\lambda I)^{-1} f_n\|^2 = \int\limits_0^\lambda (\lambda - x)^{1/n-1}\,dx + \int\limits_\lambda^1 (x-\lambda)^{1/n-1}\,dx = n\big((1-\lambda)^{1/n} + \lambda^{1/n}\big).$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\|(A-\lambda I)^{-1} f_n\|^2}{\|f_n\|^2} \to \infty$ при $n \to \infty$, что означает неограниченность оператора.

Если в пространстве $\mathcal{H}$ существует базис $e_1, e_2, \dots$, состоящий из собственных векторов линейного ограниченного оператора A, соответствующих собственным числам λ_i и уравнение (3.23) имеет решение, то его можно выразить следующим образом. Разложим решение h и правую часть f по базису. В результате получим $h = \sum\limits_{i=1}^\infty \chi_i e_i$, $f = \sum\limits_{i=1}^\infty \gamma_i e_i$. Подставляя эти выражения в (3.23), получим

$$\sum_{i=1}^\infty \gamma_i e_i = f = (A-\lambda I)h = (A-\lambda I)\sum_{i=1}^\infty \chi_i e_i = \sum_{i=1}^\infty \chi_i (A-\lambda I)e_i = \sum_{i=1}^\infty \chi_i(\lambda_i - \lambda)e_i.$$

Отсюда, учитывая линейную независимость базисных векторов, имеем $\gamma_i = (\lambda_i - \lambda)\chi_i$ или $\chi_i = \dfrac{\gamma_i}{\lambda_i - \lambda}$. Таким образом, решение h имеет вид

$$h = \sum_{i=1}^\infty \frac{\gamma_i}{\lambda_i - \lambda} e_i.$$

Полученная формула хорошо объясняет явление резонанса. Если λ близко к собственному числу λ_k, то при $\gamma_k \ne 0$ соответствующее слагаемое в формуле для h велико, причем оно неограниченно растет с приближением λ к λ_k.

3.5 ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА

Введем один класс операторов, которые всегда имеют собственные числа.

Определение 3.5.1 *Линейный оператор A , отображающий линейное нормированное пространство $\mathcal{X}$ в линейное нормированное пространство $\mathcal{Y}$, называется* ***вполне непрерывным****, если он всякое ограниченное множество из $\mathcal{X}$ переводит в компактное множество.*

Лемма 3.5.1 *Вполне непрерывный оператор ограничен.*

Доказательство. Множество $\{x: \ \|x\|_x = 1\}$ ограничено, поэтому множество $\{Ax: \ \|x\|_x = 1\}$ — компактно и значит ограничено. Отсюда следует, что существует константа K такая, что норма любого элемента из $\{Ax\}$ не превосходит K, то есть $\|A\| = \sup_{\|x\|_x=1} \|Ax\|_y \leq K$. Лемма доказана.

Лемма 3.5.2 *Линейная комбинация вполне непрерывных операторов является вполне непрерывным оператором.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}_1$ — ограниченное в $\mathcal{X}$ множество, $C = \alpha A + \beta B$, где A и B — вполне непрерывные операторы, действующие из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}_c = \{Cx: \ x \in \mathcal{X}_1\}$. Возьмем произвольную последовательность $y_1, y_2, \dots$ из $\mathcal{Y}_c$. Это означает, что существуют такие элементы $x_i \in \mathcal{X}_1$, что $y_i = \alpha Ax_i + \beta Bx_i$. Покажем, что из последовательности $\{y_i\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Из последовательности $\{Ax_i\}$ можно выделить подпоследовательность $\{Ax_{i_n}\}$, которая сходится. Из последовательности $\{Bx_{i_n}\}$ выделяется сходящаяся подпоследовательность $\{Bx_{i_{n_k}}\}$. Тогда последовательность $\{y_{i_{n_k}}\}$ сходится, что означает компактность множества $\mathcal{Y}_c$.

Из лемм 3.5.1,3.5.2 следует, что вполне непрерывные операторы, отображающие линейное нормированное пространство $\mathcal{X}$ в линейное нормированное пространство $\mathcal{Y}$, образуют линейное подмножество $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ в пространстве линейных ограниченных операторов $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Приведем пример вполне непрерывного оператора. Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a, b)$ и $k(x, s)$ непрерывная функция, определенная на множестве $[a, b] \times [a, b]$. Тогда ***интегральный оператор***

$$Af = \int_a^b k(x, s) f(s)\, ds \tag{3.24}$$

будет вполне непрерывным. Это следует из примера применения теоремы Арцела (см. параграф 1.2).

Оператор A, определенный формулой (3.24), вполне непрерывен и в том случае, когда $\mathcal{Y} = C(a, b)$, $\mathcal{X} = L_2(a, b)$. Действительно, если $\mathcal{X}_1$ — ограниченное в $L_2(a, b)$ множество, то существует такая константа C, что для всех $f \in \mathcal{X}_1$ выполняется неравенство $\|f\| \leq C$. Тогда, применяя неравенство Гельдера, имеем

$$|Af| \ = \ \left| \int_a^b k(x, s) f(s)\, ds \right| \ \leq \ \sqrt{\int_a^b k^2(x, s)\, ds \int_a^b f^2(s)\, ds} \ \leq \ C \max_{x \in [a,b]} \sqrt{\int_a^b k^2(x, s)\, ds}.$$

Доказанное неравенство означает, что функции Af равномерно ограничены.

Из неравенства

$$\left| \int_a^b k(x_1, s) f(s)\, ds - \int_a^b k(x_2, s) f(s)\, ds \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_a^b (k(x_1, s) - k(x_2, s))^2\, ds \int_a^b f^2(s)\, ds} = C \sqrt{\int_a^b (k(x_1, s) - k(x_2, s))^2\, ds}$$

следует, что функции Af равностепенно непрерывны. Тогда по теореме Арцела множество $\{Af: \ f \in \mathcal{X}_1\}$ компактно.

Если теперь рассмотреть интегральный оператор A как оператор, действующий из $L_2(a,b)$ в $L_2(a,b)$, то он снова окажется вполне непрерывным. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что если взять ограниченное множество в $L_2(a,b)$ и подействовать на него оператором A, то получится некоторое множество непрерывных функций. Если рассмотреть это множество как подмножество из $C(a,b)$, то по доказанному выше оно компактно и, следовательно, из любой последовательности, состоящей из элементов этого множества, можно будет выделить сходящуюся в $C(a,b)$ подпоследовательность. Эта же подпоследовательность будет сходиться в $L_2(a,b)$, так как из сходимости в $C(a,b)$ следует сходимость в $L_2(a,b)$. Последнее утверждение следует из неравенства

$$\int\limits_a^b (y(x) - y_n(x))^2 \, dx \le (b-a) \left(\max_{x \in [a,b]} |y(x) - y_n(x)| \right)^2 .$$

Можно доказать, что интегральный оператор вполне непрерывен и в том случае, когда $k(x,t) \in L_2((a,b) \times (a,b))$.

Теорема 3.5.1 *Всякий ненулевой вполне непрерывный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, имеет хотя бы одно отличное от нуля собственное число.*

Доказательство. Пусть $\lambda = \sup\limits_{\|f\|=1} |(Af,f)|$. Тогда, согласно лемме 3.4.1, выполняется равенство $\lambda = \|A\|$. По определению точной верхней грани существует последовательность $\{f_n\}$ такая, что $\|f_n\| = 1$ и

$$\lim_{n \to \infty} (Af_n, f_n) = \lambda \tag{3.25}$$

(или $-\lambda$). Будем для определенности считать, что предел равен λ.

Так как оператор вполне непрерывен, существует подпоследовательность $\{Af_{n_k}\}$, которая сходится. Пусть $g = \lim\limits_{k \to \infty} Af_{n_k}$. Тогда, учитывая 3.25, имеем

$$0 \le \|\lambda f_{n_k} - Af_{n_k}\|^2 = \lambda^2 - 2\lambda(Af_{n_k}, f_{n_k}) + \|Af_{n_k}\|^2 \to \\ \to -\lambda^2 + \|g\|^2 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.26}$$

Следовательно, $\|g\| \ge \lambda$.

С другой стороны $\|Af_{n_k}\| \le \|A\| \|f_{n_k}\| = \lambda$. Отсюда в пределе при $k \to \infty$ получим, что $\|g\| \le \lambda$. Значит $\|g\| = \lambda$ и из (3.26) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} (Af_{n_k} - \lambda f_{n_k}) = \theta. \tag{3.27}$$

Следовательно, $\lambda \lim\limits_{k \to \infty} f_{n_k} = g$ или $\lim\limits_{k \to \infty} f_{n_k} = g/\lambda = h$.

Заметим, что полученный вектор h не равен нулевому, так как

$$\|h\| = \frac{\|g\|}{\lambda} = 1.$$

Из непрерывности оператора A следует, что $\lim\limits_{k \to \infty} Af_{n_k} = Ah$. Отсюда, из (3.27) и определения h получаем, что $Ah = \lambda h$. Значит λ — собственное число.

Рассмотрим вопрос о разрешимости относительно h в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ уравнения

$$h - Ah = f, \tag{3.28}$$

где A — вполне непрерывный оператор, а f — заданный вектор из пространства $\mathcal{H}$. Наряду с (3.28) рассмотрим ***однородное уравнение***

$$h - Ah = \theta \tag{3.29}$$

и ***союзное однородное уравнение***

$$h - A^*h = \theta \tag{3.30}$$

Справедливы следующие ***теоремы Фредгольма.***

Теорема 3.5.2 (альтернатива Фредгольма.) *Уравнение (3.28) при любом $f \in \mathcal{H}$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение (3.29) имеет только нулевое решение.*

Теорема 3.5.3 *Однородные уравнения (3.29), (3.30) имеют одно и то же, и притом конечное, число линейно независимых решений.*

Теорема 3.5.4 *Уравнение (3.28) разрешимо тогда и только тогда, когда вектор f ортогонален каждому решению уравнения (3.30).*

3.6 ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 3

3.6.1 Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что в евклидовом пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Решение. Из определения нормы в евклидовом пространстве и свойств скалярного произведения имеем

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y).$$

Отсюда следует, что равенство $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ возможно тогда и только тогда, когда $(x,y) = 0$, то есть элементы x и y ортогональны.

Пример 2. Пусть $\mathcal{X}$ — линейное нормированное пространство над полем вещественных чисел и для любых $x, y \in \mathcal{X}$ выполняется равенство параллелограмма. Доказать, что формула

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \tag{3.31}$$

задает в $\mathcal{X}$ скалярное произведение, согласующееся с нормой в $\mathcal{X}$, то есть такое, что $(x,x) = \|x\|^2$.

Решение. Положив в (3.31) $y = x$ и воспользовавшись свойствами нормы, получим, что $(x,x) = \|x\|^2$. Из этого равенства следует, что выполнена первая аксиома скалярного произведения и, если равенство (3.31) определяет скалярное произведение, то оно согласуется с нормой в $\mathcal{X}$. Выполнение второй аксиомы скалярного произведения очевидно.

Проверим теперь выполнение четвертого свойства скалярного произведения. Для этого применим равенство параллелограмма к параллелограммам, построенным на сторонах 1) $x+z, y$; 2) $x, y+z$; 3) $x-z, y$; 4) $x, y-z$. Имеем

$$\begin{aligned}
2(\|x+z\|^2+\|y\|^2) &= \|x+z+y\|^2+\|x+z-y\|^2,\\
2(\|x\|^2+\|y+z\|^2) &= \|x+z+y\|^2+\|x-z-y\|^2,\\
2(\|x-z\|^2+\|y\|^2) &= \|x-z+y\|^2+\|x-z-y\|^2,\\
2(\|x\|^2+\|y-z\|^2) &= \|x-z+y\|^2+\|x+z-y\|^2.
\end{aligned}$$

Прибавим к первому равенству второе и из полученной суммы вычтем третье и четвертое равенства. В результате после приведения подобных и сокращения на 2 получим

$$(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2)+(\|y+z\|^2-\|y-z\|^2)=\|x+z+y\|^2-\|x-z+y\|^2$$

Согласно формуле (3.31) полученное равенство переписывается в виде $(x,z)+(y,z)=(x+y,z)$. Тем самым четвертое свойство скалярного произведения доказано.

Проверим выполнение третьего свойства скалярного произведения. При $\alpha=0$ имеем

$$(0x,y)=\frac{1}{4}(\|0x+y\|^2-\|0x-y\|^2)=0=0(x,y).$$

Предположим теперь, что $\alpha=n$ — целое положительное число. Тогда в силу уже доказанного четвертого свойства

$$(nx,y)=(x+\dots+x,y)=(x,y)+\dots+(x,y)=n(x,y). \tag{3.32}$$

Если α — положительное рациональное число, то оно представимо в виде p/q, где p и q — целые положительные числа. Тогда, применяя (3.32), получим

$$(\frac{p}{q}\,x,y)=(p\,\frac{1}{q}x,y)=p\,(\frac{1}{q}\,x,y)=\frac{p}{q}q\,(\frac{1}{q}x,y)=\frac{p}{q}\,(x,y).$$

Таким образом, для неотрицательных, рациональных чисел α доказано равенство

$$\alpha(x,y)=\frac{1}{4}(\|\alpha x+y\|^2-\|\alpha x-y\|^2).$$

Правая и левая части этого равенства — непрерывные функции от α. Поэтому, переходя в равенстве к пределу при α, стремящемуся к иррациональному числу, получим, что третье свойство скалярного произведения выполняется для всех неотрицательных чисел.

Пусть, наконец, $\alpha<0$. Тогда

$$\begin{aligned}
\alpha(x,y)=-|\alpha|(x,y)&=-\frac{1}{4}(\big\||\alpha|x+y\big\|^2-\big\||\alpha|x-y\big\|^2)=\\
&=-\frac{1}{4}\left(\big\|-|\alpha|x-y\big\|^2-\big\|-|\alpha|x+y\big\|^2\right)=-\frac{1}{4}(\|\alpha x-y\|^2-\|\alpha x+y\|^2)=(\alpha x,y).
\end{aligned}$$

Тем самым показали, что (x,y) обладает всеми свойствами скалярного произведения.

Пример 3. Показать, что в пространстве l_p при $p\neq 2$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

Решение. Если бы в пространстве можно были ввести скалярное произведение, в нем выполнялось бы равенство параллелограмма. Возьмем

$$x=(1,1,0,0,\dots),\quad y=(1,-1,0,0,\dots).$$

Имеем

$$x + y = (2, 0, 0, 0, \dots), \quad x - y = (0, 2, 0, 0, \dots).$$

Тогда

$$\|x\| = \|y\| = 2^{1/p}, \quad \|x + y\| = \|x - y\| = 2,$$

следовательно, равенство параллелограмма не выполняется.

Пример 4. Показать, что многочлен

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

(многочлен Лежандра) ортогонален x^k $(k = 0, 1, \dots, n - 1)$ в $L_2(-1, 1)$.

Решение. Необходимо показать, что $(L_n, x^k) = 0$. Учитывая, определение скалярного произведения в пространстве $L_2(-1, 1)$, имеем

$$2^n n! (L_n, x^k) = \int\limits_{-1}^{1} x^k \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \, dx.$$

Для вычисления интеграла применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \, dx = x^k \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} \bigg|_{-1}^{1} - k \int\limits_{-1}^{1} x^{k-1} \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} \, dx.$$

Слагаемое, стоящее в правой части равенства вне интеграла, равно нулю, так как при $n - 1$ кратном дифференцировании функции $(x^2 - 1)^n$ останется множитель $x^2 - 1$, который обратиться в ноль при подстановке пределов. Полученный интеграл снова проинтегрируем по частям и так далее. В результате после интегрирования по частям k раз получим

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \, dx = (-1)^k k! \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{n-k} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-k}} \, dx = (-1)^k k! \frac{d^{n-k-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-k-1}} \bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

Пример 5. Доказать, что многочлены Лежандра образуют в $L_2(-1, 1)$ ортогональную систему.

Решение. Из предыдущего примера следует, что многочлен $L_n(x)$ ортогонален функциям $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$. Из свойств ортогональности следует, что $L_n(x)$ ортогонален произвольной линейной комбинации этих функций, то есть любому многочлену степени меньше чем n, в частности, $L_m(x)$ при $m < n$.

Пример 6. Найти норму многочлена Лежандра.

Решение. Для вычисления нормы многочлена Лежандра заметим, что его можно представить в виде

$$L_n(x) = \frac{2n(2n - 1) \dots (n + 1)}{2^n n!} x^n + P_{n-1}(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ многочлен степени не выше чем $n - 1$. По определению

$$\|L_n\|^2 = (L_n, L_n) = \left(L_n, \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + P_{n-1} \right) =$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} (L_n, x^n) + (L_n, P_{n-1}) = \frac{(2n)!}{(2^n)^2 (n!)^3} \left(\frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, x^n \right) + (L_n, P_{n-1}). \quad (3.33)$$

Из утверждения, доказанного в примере 5, следует, что последнее слагаемое, стоящее в правой части формулы (3.33), равно нулю. Следовательно, необходимо вычислить величину

$$\left(\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, x^n\right) = \int\limits_{-1}^{1} x^n \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\, dx.$$

Для вычисления интеграла n раз воспользуемся формулой интегрирования по частям (см. пример 4). В результате получим

$$\left(\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, x^n\right) = (-1)^n n! \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n\, dx = n! \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx.$$

Из (3.33) следует, что

$$\|L_n\|^2 = \frac{(2n)!}{(2^n)^2(n!)^2} \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx = \frac{(2n)!}{(2^n)^2(n!)^2} I_n. \tag{3.34}$$

Итак, осталось вычислить I_n. Для этого снова воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$I_n = \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx = 2n \int\limits_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{n-1}\, dx = 2n(I_{n-1} - I_n).$$

Отсюда следует рекуррентное соотношение $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$, из которого получаем

$$I_n = \frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 1} I_0 = \frac{(2^n)^2(n!)^2}{(2n+1)!} I_0.$$

Подставляя полученное для I_n выражение в (3.34) и учитывая, что $I_0 = 2$, получим

$$\|L_n\|^2 = \frac{(2n)!}{(2^n)^2(n!)^2} \frac{(2^n)^2(n!)^2}{(2n+1)!} 2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом $\|L_n\| = \sqrt{2/(2n+1)}$.

Пример 7. Пусть A — линейный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}$ и существует A^{-1}. Доказать, что собственные вектора операторов A и A^{-1} совпадают. Как связаны между собой соответствующие собственные числа этих операторов?

Решение. Пусть e — собственный вектор оператора A, соответствующий числу λ. Тогда $Ae = \lambda e$. Подействуем на обе части этого равенства оператором A^{-1}. Учитывая линейность обратного оператора и то, что $A^{-1}A$ — тождественный оператор, получим $e = \lambda A^{-1} e$. Полученное равенство означает, что e — собственный вектор оператора A^{-1} и λ^{-1} — собственное число. Таким образом показано, что всякий собственный вектор оператора A является собственным вектором оператора A^{-1}. Аналогично показывается, что каждый собственный вектор оператора A^{-1} является собственным вектором оператора A.

Пример 8. В пространстве $C(-1, 1)$ найти собственные функции и собственные числа оператора $Af = f(-x)$.

Решение. По определению собственного числа должно выполняться равенство $f(-x) = \lambda f(x)$. Заменяя в этом равенстве x на $-x$, получим $f(x) = \lambda f(-x)$. Подставляя сюда из первого равенства выражение для $f(-x)$, получим $f(x) = \lambda^2 f(x)$. Сокращая на $f(x)$ (из определения собственного числа следует, что функция $f(x)$ тождественно не равна нулю), получим $\lambda^2 = 1$. Значит $\lambda = \pm 1$. При $\lambda = 1$ имеем $f(x) = f(-x)$, то есть $f(x)$ — четная функция. При $\lambda = -1$ получаем $f(x) = -f(-x)$, то есть $f(x)$ — нечетная функция.

3.6.2 Задачи

1. Показать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$.

2. Пусть $\rho(x)$ — интегрируемая на интервале (a, b) функция, причем всюду кроме множества меры ноль $\rho(x) > 0$. Обозначим через $L_{2,\rho}(a, b)$ множество определенных на (a, b) функций $f(x)$ таких, что существует и конечен интеграл $\int\limits_a^b \rho |f|^2\, dx$, причем две функции считаются равными, если они различаются не более, чем на множестве меры ноль. Доказать, что:

а) $(f, g) = \int\limits_a^b \rho(x) f(x) g(x)\, dx$ — скалярное произведение в $L_{2,\rho}(a, b)$;

б) $L_2(a, b) \subset L_{2,\rho}(a, b)$, если функция $\rho(x)$ ограничена на (a, b);

в) $L_{2,\rho}(a, b) \subset L_2(a, b)$, если $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ на (a, b).

3. Показать, что если $\rho(x) = x, f(x) = \sqrt{x^{-1}}$, то $f \in L_{2,\rho}(0, 1)$. Принадлежит ли f пространству $L_2(0, 1)$?

4. Пусть $f_0 \neq \theta$ — фиксированный элемент гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Показать, что существует такой линейный ограниченный функционал l, определенный на $\mathcal{H}$, что $l(f_0) = \|f_0\|$ и $\|l\| = 1$.

5. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ — такие системы векторов из $\mathcal{H}$, что

$$(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } \; i = j, \\ 0, & \text{при } \; i \neq j. \end{cases}$$

Доказать, что каждая из этих систем линейно независима.

6. Пусть h_0 — фиксированный элемент из гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Доказать, что множество $\mathcal{H}_1 = \{g : g \perp h_0\}$ является подпространством.

7. Пусть x_n, y_n — элементы гильбертова пространства $\mathcal{H}$, причем $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ при всех n и $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = 1$. Доказать, что $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

8. Применив процесс ортогонализации к функциям $1, x, x^2, x^3, \ldots$, найти 4 многочлена ортогональных в $L_2(-1, 1)$.

9. Найти в пространстве $L_2(-1, 1)$ многочлен степени не выше 2, который был бы ближайшим к функции $y = e^x$.

10. Доказать, что если n — целое число, то

а) функции $Z_n(X) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$ являются многочленами степени n (полиномы Лаггера);

б) $Z_n(x) \perp x^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ в пространстве $L_{2,e^{-x}}(0, \infty)$;

в) $Z_n(x)$ образуют ортогональную систему в $L_{2,\,e^{-x}}(0,\infty)$.

11. Показать, что если n — целое число, то

а) функции

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

являются многочленами степени n (полиномы Эрмита);

б) $H_n(x) \perp x^k$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ в пространстве $L_{2,e^{-x^2}}(-\infty,\infty)$;

в) $H_n(x)$ образуют ортогональную систему в $L_{2,e^{-x^2}}(-\infty,\infty)$.

12. Найти операторы, сопряженные к следующим операторам:

а) $Ax = (\xi_2, \xi_3, \dots)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$;

б) $Af = \int_a^b e^x \sin y f(y)\, dy,\ f \in L_2(a,b)$;

в) $A_+ f = 0.5(f(x) + f(-x)), f \in L_2(-1,1)$;

г) $A_- f = 0.5(f(x) - f(-x)), f \in L_2(-1,1)$;

д) $Af = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le 0.5, \\ 0, & 0.5 < x \le 1 \end{cases},\quad f \in L_2(0,1)$;

е) пусть a_{ij} — заданные числа, $i, j = 1, 2, \dots, n$,

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,\xi_j,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,\xi_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\,\xi_j\right), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n;$$

ж) $Af = \int\limits_0^x f(\xi)\, d\xi, \quad f \in L_2(0,1)$.

13. Пусть A — самосопряженный оператор и существует A^{-1}. Доказать, что A^{-1} также самосопряженный.

14. Имеет ли оператор $Af = \int\limits_0^x f(z)\, dz$, действующий в пространстве $C(0,1)$, собственные числа?

15. Пусть A — оператор, который определен в задаче 12а. Показать, что любое число, модуль которого меньше 1, является собственным числом этого оператора, а сопряженный оператор A^* не имеет собственных чисел.

16. Доказать, что оператор, определенный в задаче 12е, и его сопряженный имеют одинаковые собственные числа.

17. Пусть $\mathcal{H}_1$ — подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Оператор P определен на $\mathcal{H}$ следующим образом : $Ph = g$, где $g \in \mathcal{H}_1,\ h - g \perp \mathcal{H}_1$. Доказать, что $P^2 = P,\ P^* = P$. Найти собственные числа оператора P.

18. Пусть Ω — ограниченная область из R^2 с границей Γ, которая является гладкой кривой. Обозначим через D множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $\Omega \cup \Gamma$ и принимающих на Γ значения равные 0. Оператор A действует в $L_2(\Omega)$ и определен на D по формуле

$$Af = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + q(x_1,x_2) f,$$

$$p(x_1,x_2) \in C^1(\Omega \cup \Gamma), \quad q(x_1,x_2) \in C(\Omega \cup \Gamma),\ p > 0,\ q \ge 0.$$

Доказать, что

а) $(Af, g) = (f, Ag)$ для любых $f, g \in D$, б) $(Af, f) \geq 0$ для всех $f \in D$.

19. Пусть A и B линейные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем A — вполне непрерывный, а B — ограниченный. Доказать, что AB и BA вполне непрерывны.

20. Показать, что если A и A^* — сопряженные операторы, то $A + A^*,\ AA^*,\ A^*A$ — самосопряженные.

21. Показать, что если A и A^* — сопряженные операторы, то $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

22. Пусть A — вполне непрерывный оператор и $\{e_i\}$ — ортонормированная система из собственных векторов оператора, соответствующих собственным числам λ_i, причем все собственные числа по модулю превосходят некоторое положительное число δ. Показать, что система векторов $\{e_i\}$ конечна.

Указание. Проверить, что $\|Ae_i - Ae_j\| > 2\delta$ при $i \neq j$.

23. Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и A^* — сопряженный оператор. Показать, что ненулевые собственные числа операторов A^*A и AA^* совпадают.

24. Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и A^* — сопряженный оператор. Тогда, для того, чтобы вектор $h \in \mathcal{H}$ был ортогонален области значений оператора A необходимо и достаточно, чтобы этот вектор принадлежал ядру оператора A^*, то есть $A^*h = \theta$.

3.6.3 Тест к главе 3

1. Какие функции образуют ортогональную систему в $L_2(a, b)$?

а) $\sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$, $a = 0$, $b = 2\pi$;

б) x^n, $n = 1, 2, \ldots$, $a = -1$, $b = 1$;

в) $\sin nx$, $\cos nx$, $n = 1, 2, \ldots$, $a = 0$, $b = \pi/2$.

2. Какие из приведенных ниже последовательностей не могут быть коэффициентами Фурье?

а) $1, 1/2, 1/4, \ldots$;

б) $1, 1/2, 1/3, \ldots$;

в) $1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, \ldots$.

3. Пусть A и B — вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Какие утверждения являются ложными?

а) $A - B$ — вполне непрерывный оператор.

б) AB — вполне непрерывный оператор.

в) A^{-1} — вполне непрерывный оператор.

4. Какой из операторов является сопряженным к оператору $Af = e^x f(x)$ в пространстве $L_2(-1, 1)$?

а) $Bf = e^x f(x)$;

б) $Bf = e^{-x} f(x)$;

в) $Bf = e^{-x} f(-x)$.

5. Пусть $Af = \sin x\, f(x)$ — оператор, действующий в пространстве $L_2(0, \pi)$. Какие числа являются собственными для этого оператора?

а) -1;

б) 1;

в) у оператора нет собственных чисел.

6. При каком λ уравнение $\varphi - \lambda A\varphi = 0$, где $A\varphi = \varphi(-x)$, имеет несколько решений в $L_2(-a, a)$?

а) $\lambda = 0$;

б) $\lambda = 1$;

в) $\lambda = 2$.

4 ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

4.1 ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1.1 Классификация линейных интегральных уравнений. Теоремы разрешимости

Интегральными принято называть такие уравнения, которые содержат искомую функцию под знаком интеграла.

Уравнение вида

$$y(t) = \int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds + f(t), \tag{4.1}$$

где $y(t)$ — искомая функция, $f(t)$ — заданная на отрезке $[a,b]$ функция, $k(t,s)$ — заданная на $[a,b]\times[a,b]$ функция, называется ***линейным интегральным уравнением Фредгольма II рода***, а уравнение

$$\int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds = f(t) \tag{4.2}$$

— .

Функция $k(t,s)$ называется ***ядром*** интегрального уравнения, функция $f(t)$ — it**свободным членом** уравнения.

При $f(t) \neq 0$ уравнение называется ***неоднородным***, если же $f(t) \equiv 0$, то уравнение ***однородное***.

Решением интегрального уравнения называется функция, определенная на $[a,b]$, которая при подстановке ее в уравнение обращает его в тождество.

Заметим, что однородные уравнения Фредгольма I и II рода всегда имеют решение $y(t) \equiv 0$.

Если ядро $k(t,s)$ имеет специальный вид:

$$k(t,s) = \begin{cases} k(t,s), & a \le s \le t, \\ 0, & t < s \le b. \end{cases}$$

то уравнения (4.1), (4.2) принимают вид

$$y(t) = \int\limits_a^t k(t,s)y(s)\,ds + f(t),$$

$$\int\limits_a^t k(t,s)y(s)\,ds = f(t)$$

и называются ***уравнениями Вольтерра*** второго и первого рода соответственно.

Таким образом, уравнения Вольтерра являются частными случаями уравнений Фредгольма.

При изучении уравнений Фредгольма II рода иногда удобно ввести в их запись параметр и писать уравнение в виде

$$y(t) = \mu \int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds + f(t). \tag{4.3}$$

Пусть

$$Ky = \int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds$$

оператор, действующий в некотором пространстве, элементами которого являются функции, например, $C(a,b)$ или $L_2(a,b)$. Тогда уравнение(4.3) запишется в виде

$$y = \mu K y + f.$$

Из примера, приведенного в параграфе 2.2, следует, что если $f(t) \in L_2(a,b)$, существует и конечен $\int\limits_a^b\int\limits_a^b k^2(t,s)\,dtds$, то при $\mu^2 \int\limits_a^b\int\limits_a^b k^2(t,s)\,dtds < 1$ существует единственное решение уравнения (4.3), принадлежащее $L_2(a,b)$.

Будем считать, что $f(t) \in L_2(a,b),\ k(t,s) \in L_2((a,b)\times(a,b))$. Тогда в параграфе 3.4 было показано, что оператор K вполне непрерывен. Поэтому для него справедливы теоремы Фредгольма (параграф 3.5), которые для рассматриваемого случая можно сформулировать следующим образом:

1) уравнение (4.3) имеет единственное решение, принадлежащее $L_2(a,b)$ при любой функции $f(t)$ тогда и только тогда, когда однородное уравнение

$$y(t) = \mu \int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds \tag{4.4}$$

имеет только нулевое решение;

2) уравнение(4.4) и соответствующее ему союзное однородное уравнение

$$y(t) = \mu \int\limits_a^b k(s,t)y(s)\,ds \tag{4.5}$$

имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений;

3) для того, чтобы уравнение (4.3) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $y(t)$ уравнения (4.5) выполнялось равенство

$$\int\limits_a^b f(t)y(t)\,dt = 0.$$

Заметим, что если $k(t,s), f(t)$ непрерывные функции и существует решение уравнения (4.3), то это решение — непрерывная функция. Это следует из непрерывности функции $\int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds$. Поэтому сформулированные выше три утверждения справедливы и для того случая, когда $k(t,s)$, $f(t)$ непрерывные функции, причем решение при этом лежит в $C(a,b)$.

Запишем однородное уравнение в виде $y = \mu K y$. Те значения параметра μ, при которых это уравнение имеет отличные от нуля решения, называются ***характеристическими значениями или числами ядра*** $k(t,s)$ ***(оператора*** K***, однородного уравнения)*** , а соответствующие решения — ***собственными функциями ядра*** $k(t,s)$ ***(оператора*** K***, однородного уравнения)***. Очевидно, что в соответствии с терминологией предыдущей главы собственное число λ оператора K и характеристическое число μ связаны соотношениями $\mu = \lambda^{-1}$.

Первая теорема Фредгольма может быть теперь переформулирована следующим образом: уравнение (4.3) однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда число μ не является характеристическим значением ядра $k(t,s)$.

Из параграфа 3.5 следует, что если $k(t,s) = k(s,t) \neq 0$ и $k(t,s) \in L_2((a,b)\times(a,b))$, то ядро имеет отличное от нуля характеристическое значение.

4.1.2 Интегральные уравнения Фредгольма первого рода

Выяснение вопроса о разрешимости уравнения (4.2) представляет значительные трудности.

Прежде всего заметим, что это уравнение не всегда имеет решение. Рассмотрим, например, уравнение

$$\int\limits_0^1 (2s+5t)y(s)\,ds = \sin t.$$

Ясно, что при любой непрерывной функции $y(s)$ левая часть этого равенства представляет собой линейную функцию $at+b$, которая ни при каких значениях коэффициентов a и b не равна тождественно на $[0,1]$ функции $\sin t$. Следовательно, такое уравнение не имеет решений.

Приведем без доказательства достаточное условие существования решения уравнения (4.2).

Теорема 4.1.1 (теорема Пикара) *Интегральное уравнение (4.2) имеет решение, и притом единственное в классе функций из* $L_2(a,b)$*, если выполняются условия:*

- *ядро* $k(t,s)$ *симметричное;*
- *ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 f_i^2$ *сходится, где* μ_i *— характеристические значения ядра* $k(t,s)$*, а* $f_i = \int\limits_a^b f(s)\varphi_i(s)\,ds$*, где* $\varphi_1(s)$ *нормированные собственные функции ядра* $k(t,s)$*, соответствующие числам* μ_i*;*
- *система собственных функций* $\{\varphi_i(s)\}$ *полная в пространстве* $L_2(a,b)$*.*

Решение уравнения (4.2) в этом случае представимо в виде

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i f_i \varphi_i(t).$$

Другая существенная особенность уравнения Фредгольма 1-го рода состоит в том, что если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ две близкие между собой функции и уравнения

$$\int_a^b k(t,s)y_1(s)\,ds = f_1(t), \quad \int_a^b k(t,s)y_2(s)\,ds = f_2(t)$$

разрешимы, то соответствующие решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$ могут существенно отличаться друг от друга (задачи, решения которых обладают таким свойством, принято называть ***некорректными***).

Покажем, например, что уравнение $\int_0^1 k(t,s)y^{(m)}(s)\,ds = f^{(m)}(t)$, где

$$k(t,s) = \begin{cases} (1-t)s, & 0 \le s \le t, \\ t(1-s), & t \le s \le 1, \end{cases}$$

$$f^{(m)}(t) = \frac{\sqrt{2}}{m^2\pi^2}\sin m\pi t$$

имеет при любом целом m единственное решение из $L_2(a,b)$, причем $\|f^{(m)} - f^{(k)}\| \to 0$ при $m,k \to \infty$ в то время как $\|y^{(m)} - y^{(k)}\|$ не стремится к 0.

Для того, чтобы доказать существование и единственность решения, воспользуемся теоремой Пикара. С этой целью определим сначала характеристические значения и собственные функции ядра $k(t,s)$. Воспользуемся определением характеристического значения:

$$\varphi(t) = \mu\int_0^1 k(t,s)\varphi(s)\,ds$$

. Подставляя сюда выражения для $k(t,s)$, получим

$$\varphi(t) = \mu\int_0^t (1-t)s\varphi(s)\,ds + \mu\int_t^1 t(1-s)\varphi(s)\,ds. \tag{4.6}$$

Продифференцируем дважды (4.6) по t. После первого дифференцирования получим

$$\varphi'(t) = -\mu\int_0^t s\varphi(s)\,ds + \mu\int_t^1 (1-s)\varphi(s)\,ds.$$

После повторного дифференцирования получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\varphi''(t) = -\mu t\varphi(t) - \mu(1-t)\varphi(t) = -\mu\varphi(t). \tag{4.7}$$

Из (4.6) следует, что

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 0. \tag{4.8}$$

Общее решение уравнения (4.7) имеет вид :

$$\varphi(t) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{-\mu}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\mu}t} & \text{при } \mu < 0, \\ c_1 \sin\sqrt{\mu}t + c_2\cos\sqrt{\mu}t & \text{при } \mu > 0. \end{cases}$$

Так как при $\mu < 0$ условия (4.8) выполняются только при $c_1 = c_2 = 0$, получим что $\varphi(t) \equiv 0$. Значит среди чисел $\mu < 0$ нет характеристических значений. Если же

$\mu > 0$, то из условия $\varphi(0) = 0$ следует, что $c_2 = 0$. Условие $\varphi(1) = 0$ может теперь быть выполнено либо при $c_1 = 0$, но тогда $\varphi(t) \equiv 0$, либо при $\sin\sqrt{\mu} = 0$, то есть $\mu_n = n^2\pi^2,\ n = 1, 2, \ldots$. При этом $\varphi_n(t) = C_n \sin\pi nt$. Подбирая C_n так, чтобы

$$\|\varphi_n\|^2 = \int\limits_0^1 \varphi_n^2(t)\,dt = C_n^2 \int\limits_0^1 \sin^2\pi nt\,dt = 1,$$

получаем окончательно $\varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin\pi nt$.

Таким образом, характеристические значения ядра $\mu_n = (\pi n)^2$, соответствующие собственные функции: $\varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin\pi nt$.

Проверим теперь выполнение условий теоремы. Первое условие, очевидно, выполнено. Для проверки второго условия вычислим значения $f_n^{(m)}$.

$$f_n^{(m)} = \int\limits_0^1 f^{(m)}(t)\varphi_n(t)\,dt = \frac{2}{m^2\pi^2}\int\limits_0^1 \sin m\pi t\sin n\pi t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1/(m^2\pi^2) & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu_i f_i^{(m)}$ состоит из одного слагаемого и, следовательно, сходится, то есть второе условие теоремы Пикара выполнено. Наконец, любая функция из $L_2(a,b)$ может быть разложена в ряд Фурье по функциям $\varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin\pi nt\ \ (n = 1, 2, \ldots)$ и так как эти функции ортогональны и по построению нормированы, система функций $\{\varphi_n(t)\}$ является полной ортонормированной системой, то есть все условия теоремы Пикара выполнены.

Решение, согласно теореме Пикара, запишется в виде

$$y^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i f_i^{(m)}\varphi_i(t) = \varphi_m(t).$$

Заметим теперь, что

$$\|y^{(m)} - y^{(k)}\|^2 = \int\limits_0^1 (y^{(m)}(t) - y^{(k)}(t))^2\,dt = 2 \text{ при } k \neq m,$$

$$\|f^{(m)} - f^{(k)}\|^2 = \int\limits_0^1 (f^{(m)}(t) - f^{(k)}(t))^2\,dt = \left(\frac{1}{m^4} + \frac{1}{k^4}\right)\frac{1}{\pi^4} \to 0 \text{ при } k, m \to \infty.$$

4.1.3 Некоторые методы решения интегральных уравнений

4.1.3.1 Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

Рассмотрим уравнение (4.1) с ядром $k(t,s)$ вида

$$k(t,s) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\psi_i(s), \tag{4.9}$$

которое называется ***вырожденным ядром***.

Можно считать, что в каждый из наборов функций $\varphi_i, \psi_i,\ i = 1, \ldots, n$ входят линейно независимые функции.

Действительно, если это не так, например ψ_i линейно зависимы, то, представив каждую из функций ψ_i как линейную комбинацию независимых, получим, что то же самое ядро $k(t,s)$ можно записать в виде суммы меньшего числа слагаемого вида $\bar{\varphi}_j(t)\bar{\psi}_j(s)$, причем функции $\bar{\psi}_j$ линейно независимы.

Подставив в (4.1) выражение (4.9), получим

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \int_a^b \psi_i(s) y(s)\, ds + f(t).$$

Вводя обозначения

$$\alpha_i = \int_a^b \psi_i(s) y(s)\, ds, \tag{4.10}$$

перепишем уравнение в виде:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t) + f(t). \tag{4.11}$$

Таким образом, если решение существует, то оно имеет вид, определяемый равенством (4.11). Осталось найти только коэффициенты α_i. Для этого подставим (4.11) в (4.10):

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_a^b \psi_i(s)\varphi_j(s)\, ds + \int_a^b \psi_i(s) f(s)\, ds.$$

Положив

$$a_{ij} = \int_a^b \psi_i(s)\varphi_j(s)\, ds, \quad b_i = \int_a^b \psi_i(s) f(s)\, ds$$

имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j + b_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.12}$$

решив которую найдем числа α_i. Решение $y(t)$ определяется теперь по формуле (4.11). Подставив эту функцию в уравнение (4.1) и повторив все выкладки, с помощью которых пришли от уравнения (4.1) к системе (4.12), убеждаемся, что функция y является решением уравнения (4.1).

Итак, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к решению соответствующей ему системы (4.12) линейных алгебраических уравнений.

4.1.3.2 Решение интегральных уравнений с помощью интегральных преобразований

Пусть $f(t) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Определение 4.1.1 ***Образом Фурье*** *функции $f(t)$ называется функция $F(\omega)$ такая, что*

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt, \;\; \textit{где } i^2 = -1. \tag{4.13}$$

Формула (4.13) называется ***преобразованием Фурье***. Зная функцию $F(\omega)$, можно найти функцию $f(t)$ по формуле

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\,\omega. \tag{4.14}$$

Формула (4.14) носит название ***обратного преобразования Фурье***.

Заметим, что формула (4.13) может рассматриваться как интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно функции $f(t)$. Формула (4.14) дает тогда решение этого уравнения.

Решим с помощью преобразования Фурье уравнение

$$\varphi(t) = f(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\,ds,$$

где $f(t), k(t) \in L_1(-\infty, \infty)$. Обозначим образы Фурье функций f, k, φ через F, K, Φ соответственно. Тогда имеем:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\,ds \right) e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= F(\omega) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s) e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= F(\omega) + \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) e^{-i\omega s}\,ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t-s) e^{-i\omega(t-s)}\,dt =$$

$$= F(\omega) + \sqrt{2\pi}\Phi(\omega)K(\omega).$$

Отсюда

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi}K(\omega)}$$

и, следовательно,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi}K(\omega)} e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{4.15}$$

Аналогично решается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t).$$

Его решение имеет вид:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{K(\omega)} e^{i\omega t}\,d\omega$$

Определение 4.1.2 *Пусть $\varphi(s) \in L_1(0,\infty)$. Функция*

$$\overline{\varphi}^{(s)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \varphi(s) \sin(st)\, ds$$

называется ***синус-образом Фурье*** *функции $\varphi(t)$, а переход от функции φ к функции $\overline{\varphi}^{(s)}$ —**синус-преобразованием Фурье**.*

Функция

$$\overline{\varphi}^{(c)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \varphi(s) \cos(st)\, ds$$

называется ***косинус-образом Фурье*** *функции $\varphi(t)$, а переход от функции φ к функции $\overline{\varphi}^{(c)}$ —**косинус-преобразованием Фурье**. .*

Имеют место следующие формулы обращения синус и косинус-преобразований Фурье:

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \overline{\varphi}^{(s)}(s) \sin(ts)\, ds, \qquad \varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \overline{\varphi}^{(c)}(s) \cos(ts)\, ds.$$

Эти формулы означают, что обратное преобразование к синус(косинус)-преобразованию совпадает с синус(косинус)-преобразованием. Следствием этих формул является тот факт, что решение, например, уравнения

$$f(t) = \int\limits_0^\infty \varphi(s) \sin(st)\, ds$$

имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty f(s) \sin(st)\, ds.$$

Пусть $f(t)$ относится к классу функций, для которых интеграл

$$\int\limits_0^\infty |f(t)| e^{-\eta t}\, dt$$

сходится, если η выбрано достаточно большим.

Определение 4.1.3 *Формула*

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt,$$

где $p = \eta + i\omega$ называется ***преобразованием Лапласа*** *функции $f(t)$, а сама функция $F(p)$ —* ***изображением или образом по Лапласу*** *функции $f(t)$*

Имеет место формула обращения (***обратное преобразование Лапласа***)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\eta - i\infty}^{\eta + i\infty} F(p) e^{pt} \, dp.$$

Найдем с помощью преобразования Лапласа решение интегрального уравнения Вольтерра.

$$\varphi(t) = f(t) + \int\limits_0^t k(t-s)\varphi(s) ds, \tag{4.16}$$

предполагая, что существует преобразования Лапласа функций $f(t), k(t)$. Пусть $\Phi(p), F(p), K(p)$ преобразования Лапласа функций $\varphi(t), f(t), k(t)$ соответственно. Тогда, проводя вычисления аналогичные приведенным выше, получим

$$\Phi(p) = F(p) + K(p)\Phi(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}.$$

Решение $\varphi(t)$ получается теперь посредством применения обратного преобразования Лапласа.

4.2 ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В математическом анализе для нахождения экстремумов функций, зависящих от одной или нескольких переменных успешно применялось дифференциальное исчисление. Однако, на практике зачастую возникают задачи, для решения которых методы, изучавшиеся в математическом анализе, не применимы. Например, пусть на плоскости заданы две точки (a, A), (b, B). Требуется найти такую гладкую кривую, соединяющую эти точки, чтобы площадь поверхности, образованной вращением этой кривой вокруг оси абсцисс, была минимальной. Поскольку площадь поверхности вращения кривой $y = y(x)$ равна $S(y) = 2\pi \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$[1] задача, сводится к нахождению такой кривой $y = y(x)$, которая удовлетворяет условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$ и на которой величина $S(y)$ минимальна. В отличие от математического анализа, речь здесь идет не об экстремуме функции, а об экстремуме функционала $S(y)$.

Решение отдельных задач на отыскание максимума или минимума функционалов привело к созданию математической дисциплины — вариационного исчисления, предметом которого является исследование общих методов определения экстремумов функционалов.

4.2.1 Понятие вариации. Необходимое условие экстремума

Подобно тому, как при нахождении экстремума функции, основную роль играет дифференциал, в вариационном исчислении основную роль играет понятие дифференциала (вариации) функционала. Перейдем к определению этого понятия.

[1]Эта формула была получена при изучении в курсе "Математический анализ" приложений интегрального исчисления.

Пусть $J(y)$ — функционал, заданный в некотором линейном нормированном пространстве $\mathcal{Y}$ и точка y этого пространства фиксирована. Тогда $\Delta J = J(y+h) - J(y)$ является функционалом, зависящим от h.

Определение 4.2.1 ***Дифференциалом*** *или* ***первой вариацией*** *функционала J в точке y назовем главную линейную часть приращения ΔJ , то есть линейный непрерывный функционал $\varphi(h)$, отличающийся от $\Delta J(h)$ на бесконечно малую величину, порядка выше первого по отношению к $\|h\|$.*

Если дифференциал функционала $J(y)$ существует для любой точки $y \in \mathcal{Y}$, то функционал будем называть ***дифференцируемым****.*

Таким образом, приращение функционала представимо в виде

$$\Delta J = \varphi(h) + \alpha\|h\|, \tag{4.17}$$

где $\alpha \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

Для вариации функционала $J(y)$ принято использовать обозначение $\delta J(y,h)$.

Покажем, что дифференциал функционала (если он существует) определяется однозначно. Для этого сначала докажем лемму.

Лемма 4.2.1 *Пусть $\varphi(h)$ — линейный функционал и $\varphi(h)/\|h\| \to 0$ при $\|h\| \to 0$, тогда $\varphi(h) \equiv 0$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(h_0) = \lambda \neq 0$. Положим $h_n = h_0/n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \|h_n\| = 0$, поэтому $\varphi(h_n)/\|h_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(h_n)}{\|h_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(h_0)/n}{\|h_0\|/n} = \frac{\lambda}{\|h_o\|} \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Предположим теперь, что дифференциал функционала определяется неоднозначно, то есть приращение функционала различными способами может быть разбито на линейную и бесконечно малую составляющие. Пусть

$$\Delta J = \varphi_1(h) + \alpha_1\|h\|, \quad \Delta J = \varphi_2(h) + \alpha_2\|h\|,$$

где $\varphi_1(h)$ и $\varphi_2(h)$ — линейные функционалы и $\alpha_1, \alpha_2 \to 0$ при $\|h\| \to 0$. Но тогда, с одной стороны, $\varphi_1(h) - \varphi_2(h) = \alpha_1\|h\| - \alpha_2\|h\|$ — линейный функционал, с другой стороны, $\varphi_1(h) - \varphi_2(h)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\|h\|$, откуда в силу леммы следует, что $\varphi_1(h) = \varphi_2(h)$.

Следующая лемма дает один из методов нахождения вариации функционала.

Лемма 4.2.2 *Если функционал $J(y)$ дифференцируем при $y = y_0$, то при любом h функция $J(y_0 + th)$ как функция от числа t дифференцируема в обычном смысле по t при $t = 0$ и ее производная равна $\delta J(y_0, h)$.*

Доказательство. По определению производной

$$\left.\frac{dJ(y_0 + th)}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{J(y_0 + th) - J(y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\delta J(y_0, th) + \alpha\|th\|}{t}.$$

Из этого равенства, учитывая, что $\delta J(y_0, th) = t\delta J(y_0, h)$ и $\alpha \to 0$, при $t \to 0$, имеем $\left.\dfrac{dJ(y_0 + th)}{dt}\right|_{t=0} = \delta J(y_o, h)$.

Рассмотрим в качестве примера функционал

$$J(y) = \int\limits_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

в пространстве $C^1(a,b)$. Будем считать, что $f(x,y,y')$ — непрерывная функция, имеющая непрерывные вторые производные в области $a \le x \le b$, $-\infty < y, y' < \infty$. Тогда, используя формулу Тейлора, получим:

$$\Delta J(y) = J(y+h) - J(y) =$$

$$= \int\limits_a^b \left(f(x, y(x)+h(x), y'(x)+h'(x)) - f(x, y(x), y'(x))\right)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} h(x) + \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} h'(x)\right)\, dx + \int\limits_a^b r(x,y,y',h,h')\, dx, \quad (4.18)$$

$$r(x,y,y',h,h') = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} hh' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} h'^2\right), \quad (4.19)$$

причем вторые производные функции f вычислены в точке $(x, y+\theta_1 h, y'+\theta_2 h')$. Здесь θ_i некоторые числа такие, что $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2$.

В каждой ограниченной по y, y' области вторые производные функции f ограничены по модулю некоторым числом N, тогда функция r допускает оценку:

$$|r| \le \frac{N}{2}\left(h^2 + 2|h||h'| + h'^2\right) = \frac{N}{2}\left(|h| + |h'|\right)^2 \le \frac{N}{2}\|h\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_a^b r\, dx \le \frac{N}{2}(b-a)\|h\|^2,$$

то есть является бесконечно малой величиной порядка выше первого относительно $\|h\|$. Тогда из (4.18) получаем

$$\delta J(y,h) = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h'\right)\, dx,$$

так как этот функционал, очевидно, линеен относительно приращения h.

Введем понятие экстремума, то есть минимума или максимума функционала.

Определение 4.2.2 *Точку y_0 назовем точкой* ***относительного минимума (максимума)*** *функционала $J(y)$, если существует $\varepsilon > 0$, такое что для всех y, удовлетворяющих условию $\|y - y_0\| < \varepsilon$, выполняется неравенство $J(y) \ge J(y_0)$ ($J(y) \le J(y_0)$).*

В математическом анализе для определения точек экстремума функции приравнивали нулю ее дифференциал. Покажем, что аналогичное правило справедливо для функционалов.

Следующая теорема дает необходимое условие экстремума дифференцируемого функционала.

Теорема 4.2.1 *Во всякой точке y_0, где дифференцируемый функционал $J(y)$ достигает экстремума, первая вариация $\delta J(y_o, h)$ равна нулю при любом h.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(t) = J(y_0 + th)$ при произвольном фиксированном h . Согласно лемме 4.2.2 эта функция дифференцируема при $t = 0$ и имеет в этой точке экстремальное значение. Поэтому $F'(0) = 0$, а из того, что $F'(0) = \delta J(y, h)$, получаем требуемое утверждение.

Всякая точка y_0, в которой первая вариация $\delta J(y_0, h)$ функционала $J(y)$ обращается в 0 при любом h, называется ***стационарной точкой*** функционала. Из теоремы следует, что если дифференцируемый функционал принимает в какой-то точке экстремальное значение, то это стационарная точка. Обратное утверждение, вообще говоря, не выполняется.

Замечание. Все приведенные выше построения остаются справедливыми, если функционал задан не на всем пространстве $\mathcal{Y}$, а на некотором подмножестве $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}$, обладающим тем свойством, что из принадлежности точек $y, y + h$ множеству $\mathcal{Y}_1$ следует, что $y + th \in \mathcal{Y}_1$ при $-\infty < t < \infty$. Такое подмножество называется ***линейным многообразием***.

4.2.2 Уравнение Эйлера

Докажем сначала ряд вспомогательных лемм.

Лемма 4.2.3 *Пусть $A(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция и*

$$\int\limits_a^b A(x)h(x)\,dx = 0$$

для любой непрерывной функции $h(x)$, имеющей непрерывную производную и удовлетворяющей условию $h(a) = h(b) = 0$, Тогда $A(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Доказательство. Предположим, что $A(x) \neq 0$. Тогда существует точка c, в которой $A(c) \neq 0$. Из непрерывности функции $A(x)$ следует, что точка c может быть выбрана внутри отрезка. Будем считать для определенности, что $A(c) > 0$. Тогда найдется интервал $\xi_1 < c < \xi_2$, содержащийся в (a, b), в котором $A(x) > 0$. Положим $h(x) = (\xi_1 - x)^2(\xi_2 - x)^2$ на (ξ_1, ξ_2) и $h(x) = 0$ вне этого интервала. Функция $h(x)$, очевидно, удовлетворяет условиям леммы. В то же время

$$\int\limits_a^b A(x)h(x)\,dx = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} A(x)(\xi_1 - x)^2(\xi_2 - x)^2\,dx > 0,$$

так как под интегралом стоит положительная функция. Полученное неравенство противоречит условию леммы, значит предположение не справедливо.

Лемма 4.2.4 *Если $\int\limits_a^b B(x)h'(x)\,dx = 0$ для всех $h(x) \in C^1(a, b)$ таких, что $h(a) = h(b) = 0$, то $B(x) = const$.*

Доказательство. Выберем постоянную C так, чтобы $\int\limits_a^b (B(x)-C)\,dx=0$. Покажем, что тогда для любой непрерывной функции $f(x)$ выполняется равенство

$$\int\limits_a^b (B(x)-C)f(x)\,dx=0. \tag{4.20}$$

Всякую непрерывную функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x)=g(x)+\lambda$, где $\int\limits_a^b g(x)\,dx=0,\ \lambda=const$, для чего достаточно взять $\lambda=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Тогда для интеграла получим представление:

$$\int\limits_a^b (B(x)-C)f(x)\,dx=\int\limits_a^b (B(x)-C)g(x)dx+\lambda\int\limits_a^b (B(x)-C)\,dx.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю потому, что $g(x)$ есть производная от функции $\int\limits_a^x g(t)\,dt$, удовлетворяющей всем требованиям, наложенным условиями леммы на функцию $h(x)$. Второе слагаемое равно нулю в силу выбора C.

Возьмем в (4.20) $f(x)=B(x)-C$. Получим $\int\limits_a^b (B(x)-C)^2\,dx=0$, откуда следует, что $B(x)\equiv C$.

Лемма 4.2.5 *Если* $\int\limits_a^b (A(x)h(x)+B(x)h'(x))\,dx=0$ *для всех* $h(x)\in C^1(a,b)$ *таких, что* $h(a)=h(b)=0$, *то* $B(x)$ *дифференцируема и* $A(x)-B'(x)=0$.

Доказательство. Положим $\overline{A}=\int\limits_a^x A(t)\,dt$. Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_a^b A(x)h(x)\,dx=-\int\limits_a^b \overline{A}(x)h'(x)\,dx.$$

Из этого равенства и условия леммы получим:

$$\int\limits_a^b \left(-\overline{A}(x)+B(x)\right)h'(x)\,dx=0.$$

Из леммы 4.2.4 следует, что $\overline{A}(x)-B(x)=const$. В силу этого равенства и определения $\overline{A}(x)$ получаем $B'(x)=A(x)$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь функционал

$$J(y)=\int\limits_a^b f\left(x,y(x),y'(x)\right)\,dx,$$

определенный на множестве непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, заданных на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющих условию $y(a)=A$, $y(b)=B$. Такие функции, очевидно, образуют линейное многообразие. Для того, чтобы функция $y(x)+h(x)$ на концах отрезка принимала те же значения, что и $y(x)$, необходимо, чтобы $h(a) = h(b) = 0$.

Как было установлено в предыдущем параграфе

$$\delta J(y) = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h' \right) dx. \tag{4.21}$$

В точке экстремума первая вариация должна быть равна нулю для всех допустимых приращений h, поэтому, учитывая лемму 4.2.5, получим что в точке экстремума должно выполняться равенство

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

которое называется ***уравнением Эйлера***.

Раскрывая полную производную по x (в предположение существования y''), можно переписать уравнение Эйлера в виде

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, его решения принято называть ***экстремалями***. Общее решение уравнения Эйлера содержит две произвольные постоянные, которые могут быть найдены из граничных условий для функции $y(x)$. Тем самым находится функция, на которой функционал может принимать экстремальное значение.

Теорема о равенстве нулю первой вариации, которой воспользовались при выводе уравнения Эйлера, дает только необходимое условие экстремума. Однако, если существование экстремума ясно из каких- либо других соображений (физических, геометрических и т.д.) и если существует лишь единственная экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, то именно она и будет непременно той кривой, которая реализует экстремум.

Укажем простейшие случаи, когда уравнение Эйлера может быть сведено к уравнению первого порядка или даже полностью проинтегрировано в квадратурах.

1) Подынтегральная функция $f(x, y, z)$ не зависит от y, то есть функционал имеет вид $J(y) = \int\limits_a^b f(x, y')\,dx$. Тогда уравнение Эйлера перепишется следующим образом: $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$. Из этого равенства следует, что $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = const$. Это уравнение первого порядка, не содержащее y. Решив его относительно y', получаем $y' = g(x)$, откуда y находится путем интегрирования.

2) Подынтегральная функция не зависит от x, то есть функционал имеет вид $J(y) = \int\limits_a^b f(y, y')\,dx$. Запишем для этого случая уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0.$$

Умножим это равенство на y', тогда его можно будет переписать в виде

$$\frac{d}{dx}\left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0,$$

следовательно, первый интеграл уравнения Эйлера имеет вид

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = const.$$

3) f не зависит от y'.

Уравнение Эйлера тогда имеет тогда вид $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$. Это не дифференциальное, а алгебраическое уравнение. Решив его относительно y, получим решение, которое определяет одну или несколько кривых. Если окажется, что эти кривые не удовлетворяют условиям на концах отрезка, наложенным функции, на которых определен функционал, то у функционала нет экстремума.

Рассмотрим теперь так называемую ***задачу со свободными концами***: среди всех кривых, концы которых лежат на двух заданных вертикалях $x = a,\ y = b$ найти ту, которая дает экстремум функционалу $J(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')\,dx$.

Вариация этого функционала как и раньше определяется формулой (4.21). Однако здесь, в отличие от задачи с закрепленными концами, функция $h(x)$ не должна уже быть равной нулю на концах отрезка $[a, b]$. Поэтому, представляя интеграл в правой части (4.21) в виде суммы интегралов, и, интегрируя второй интеграл по частям, получаем

$$\delta J = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) h\,dx + \frac{\partial f}{\partial y'}h\bigg|_{x=b} - \frac{\partial f}{\partial y'}h\bigg|_{x=a}. \tag{4.22}$$

Рассмотрим сначала такие функции $h(x)$, что $h(a) = h(b) = 0$. Тогда, из условия $\delta J = 0$ получим, что должно выполняться уравнение Эйлера. Итак, для того, чтобы кривая была решением задачи со свободными концами, она должна быть экстремалью, то есть быть решением уравнения Эйлера. Пусть теперь $y = y(x)$ — экстремаль. Тогда в выражении (4.22) для δJ интегральный член исчезает и условие $\delta J = 0$ примет вид :

$$\frac{\partial f}{\partial y'}h\bigg|_{x=b} - \frac{\partial f}{\partial y'}h\bigg|_{x=a} = 0.$$

В силу произвольности h отсюда следует, что $\dfrac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=b} = 0,\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=a} = 0$, откуда определяются произвольные постоянные в общем решении уравнения Эйлера.

Наряду со случаями, изученными выше, аналогично можно рассмотреть задачу, когда один конец закреплен, а второй свободен. Если, например, $y(a) = A,\ y(b)$ — свободный конец, то краевые условия будут такими: $\dfrac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=b} = 0,\ \ y(a) = A.$

4.2.3 Вторая вариация. Достаточное условие экстремума

В математическом анализе для того, чтобы определить достигается ли в точке экстремум у функции многих переменных и если да, то какой, минимум или максимум, используется второй дифференциал. Близкое по смыслу понятие применяется и при исследовании экстремума функционалов.

Для нахождения достаточного условия экстремума введем понятие второй вариации функционала.

Определение 4.2.3 *Функционал $G(x, y)$, зависящий от двух аргументов x и y, называется **билинейным,** если при фиксированном x он является линейным функционалом от y, а при фиксированном y — линейным функционалом от x. Полагая в билинейном функционале $y = x$, получим функционал $Q(x) = G(x, x)$, называемый **квадратичным функционалом.***

Определение 4.2.4 *Квадратичный функционал $G(x, x)$ называется **положительно определенным,** если $G(x, x) > 0$ для любого $x \neq 0$. Квадратичный функционал называется **сильно положительным,** если существует такое число $k > 0$, что $G(x, x) \geq k\|x\|^2$ для всех x.*

Как было сказано выше, функционал $J(y)$ дифференцируем (имеет первую вариацию), если

$$\Delta J = J(y + h) - J(y) = \varphi_1(h) + \alpha\|h\|,$$

$\varphi_1(h)$ линейный функционал, $\alpha \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

Определение 4.2.5 *Будем говорить, что функционал $J(y)$ имеет **вторую вариацию**, если его приращение можно записать в виде*

$$\Delta J = J(y + h) - J(y) = \delta J(y, h) + \frac{1}{2}\varphi_2(h) + \beta\|h\|^2,$$

где $\varphi_2(h)$ — квадратичный функционал, а $\beta \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

*Квадратичный функционал $\varphi_2(h)$ называют **второй вариацией или вторым дифференциалом** и обозначают $\delta^2 J(y, h)$.*

Так же как и первая вариация, вторая вариация определяется однозначно.

В дальнейшем будем предполагать, что вторая вариация $\delta^2 J(y, h)$ у рассматриваемых функционалов существует.

Теорема 4.2.2 *Для того, чтобы функционал $J(y)$ при $y = y_0$ имел минимум (максимум) необходимо, чтобы выполнялось условие $\delta^2 J(y_0, h) \geq 0$ (≤ 0) для всех допустимых приращений h.*

Доказательство. Предположим для определенности, что $y = y_0$ — точка минимума функционала. В точке экстремума $\delta J(y_0, h) = 0$, поэтому

$$\Delta J = J(y_0 + h) - J(y_0) = \frac{1}{2}\delta^2 J(y_0, h) + \beta\|h\|^2.$$

Предположим, что $\delta^2 J(y_0, h_0) < 0$ при некотором h_0. Тогда при любом $\varepsilon \neq 0$ имеем

$$\delta^2 J(y_0, \varepsilon h_0) = \varepsilon^2 \delta^2 J(y_0, h_0) < 0$$

и, значит,

$$\Delta J = J(y_0 + \varepsilon h_0) - J(y_0) = \varepsilon^2 \Big(\frac{1}{2}\delta^2 J(y_0, h_0) + \beta\|h_0\|^2\Big). \tag{4.23}$$

При достаточно малом ε знак скобки, стоящей в правой части равенства (4.23), совпадает со знаком $\delta^2 J(y_0, h_0)$, так как $\beta \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, $J(y_0 + \varepsilon h_0) - J(y_0) < 0$ при малых ε, значит в точке y_0 минимума нет. Полученное противоречие доказывает теорему.

Требование неотрицательности второй вариации является необходимым, но не достаточным для того, чтобы функционал достигал минимума. Рассмотрим, например, следующий функционал, определенный в пространстве $C(0,1)$:

$$F(y) = \int\limits_0^1 \left(xy^2(x) - y^3(x)\right)\,dx.$$

Тогда

$$F(y+h) - F(y) = \int\limits_0^1 \left[x\left((y+h)^2 - y^2\right) - \left((y+h)^3 - y^3\right)\right]\,dx =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(2xy - 3y^2\right)h\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (2x - 6y)h^2\,dx - \int\limits_0^1 h^3\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$\delta F(y,h) = \int\limits_0^1 \left(2xy - 3y^2\right)h\,dx, \quad \delta^2 F(y,h) = \int\limits_0^1 (2x - 6y)h^2\,dx.$$

Приравнивая нулю первую вариацию и учитывая лемму 4.2.3, получим $2xy - 3y^2 = 0$, откуда следует, что $y(x) = 0$. Итак, стационарная точка функционала $F(y)$ найдена и в ней функционал равен нулю. В стационарной точке имеем при $h \neq 0$:

$$\delta^2 F(0,h) = 2\int\limits_0^1 xh^2\,dx > 0.$$

Однако стационарная точка не является точкой минимума, так как в любой окрестности нуля функционал принимает отрицательные значения. Действительно, пусть $0 < \varepsilon < 1$ — произвольное число. Выбирая $y(x) = \varepsilon - x$ при $0 \le x \le \varepsilon$ и $y(x) = 0$ при $x > \varepsilon$, непосредственно вычислениями убеждаемся, что $F(y) = -\dfrac{\varepsilon^4}{6} < 0$.

Теорема 4.2.3 *Пусть y_0 — стационарная точка функционала $J(y)$ и при $y = y_0$ его вторая вариация $\delta^2 J(y_0,h)$ сильно положительна. Тогда y_0 — точка минимума функционала.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы при $\|h\| < \varepsilon$ величина β в представлении приращения функционала удовлетворяла условию $|\beta| < k/4$. Тогда

$$\Delta J = \frac{1}{2}\delta^2 J(y_0,h) + \beta\|h\|^2 \ge \frac{k}{4}\|h\|^2 \ge 0.$$

Полученное неравенство означает, что y_0 — точка минимума функционала.

Найдем выражение для второй вариации функционала

$$J(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')\,dx,$$

полагая, что функция $f(x,y,y')$ дважды непрерывно дифференцируема. Из непрерывности е„ вторых производных и формул (4.18), (4.19) получаем

$$\Delta J = \delta J(y,h) + \\ + \frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{\partial^2 f(x,y,y')}{\partial y^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y,y')}{\partial y \partial y'}hh' + \frac{\partial^2 f(x,y,y')}{\partial y'^2}h'^2\right) dx + \\ + \frac{1}{2}\int_a^b \left(\varepsilon_1 h^2 + 2\varepsilon_2 hh' + \varepsilon_3 h'^2\right) dx,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$ при $\|h\| \to 0$. Отсюда получаем:

$$\delta^2 J(y,h) = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 f(x,y,y')}{\partial y^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y,y')}{\partial y \partial y'}hh' + \frac{\partial^2 f(x,y,y')}{\partial y'^2}h'^2\right) dx.$$

Используя теорему 4.2.2, докажем теперь следующее утверждение, которое называют ***условием Лежандра***.

Теорема 4.2.4 *Для того, чтобы стационарная точка $y_0(x)$ функционала*

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

являлась точкой минимума этого функционала, необходимо, чтобы

$$f_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) = \frac{\partial^2 f(x, y_0(x), y'_0(x))}{\partial y'^2} \geq 0.$$

Доказательство. В предположении достаточной гладкости всех функций преобразуем среднее слагаемое в выражении для $\delta^2 J$:

$$\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} hh'\, dx = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\, dh^2 = -\frac{1}{2}\int_a^b h^2 \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\, dx.$$

Тогда

$$\delta^2 J = \int_a^b \left(P(x)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}h'^2\right) dx,$$

где

$$P(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}.$$

Покажем теперь, что если в какой-нибудь точке $x_0 \in (a,b)$ не выполнено условие Лежандра, то есть $f_{y'y'}(x_0, y_0(x_0), y'_0(x_0)) < 0$, то при некоторых $h(x)$ вторая вариация $\delta^2 J(y_0, h)$ принимает отрицательные значения, что противоречит теореме 4.2.2. Действительно, в силу непрерывности вторых производных функции f, существует окрестность Δ точки x_0 такая, что $\Delta \in (a,b)$ и при всех $x \in \Delta$ выполняется неравенство $f_{y'y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) < 0$.

Пусть $h_0(x-x_0)$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что $h_0(x_0) = 1$, $h_0(x - x_0) = 0$ при x не принадлежащем Δ и $0 \le h_0 \le 1$. Тогда очевидно, существует константа $c > 0$ и интервал δ, лежащий внутри Δ такой, что для точек x этого интервала выполняется неравенство $|h_0'(x - x_0)| \ge c > 0$. Выберем $h_m(x) = h_0(m(x - x_0))$, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда в выражении для $\delta^2 J(y_0, h_m)$ при всех m первое слагаемое ограничено по модулю величиной $\int\limits_a^b |P(x)|\, dx$. Второе же слагаемое стремится к $-\infty$, так как $f_{y'y'} < 0$ на Δ и в этой окрестности на интервале длины δ/m выполняется неравенство $h'^2 > m^2c^2$. Поэтому при достаточно больших m вторая вариация $\delta^2 J(y_0, h_m) < 0$, что и требовалось доказать.

Получение достаточного условия экстремума для функционала

$$J(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')\, dx$$

значительно сложнее, поэтому сформулируем его без доказательства.

Теорема 4.2.5 (Условие Вейерштрасса) *Предположим, что*

- *экстремаль $y = y(x)$ можно включить в однопараметрическое семейство экстремалей $y = y(x, \alpha)$, где $-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$ и $y(x, 0) = y(x)$;*
- *существует $\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}$, причем $\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} > 0$;*
- *при различных значениях α кривые $y = y(x, \alpha)$ не пересекаются;*
- *при всех x, y, лежащих в области, покрытой экстремалями $y = y(x, \alpha)$ и при любых τ выполняется неравенство*

$$\frac{\partial^2 f(x, y, \tau)}{\partial \tau^2} > 0 \quad (< 0).$$

Тогда экстремаль $y = y(x)$ — точка минимума (максимума) функционала.

Применение условий Лежандра и Вейерштрасса рассматривается в параграфе 4.4 в примере 6.

4.3 ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.3.1 Примеры решения типовых задач

Пример 1. Решить интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$y(t) - 2\int\limits_0^\pi \sin(t - s) y(s)\, ds = \cos t.$$

Решение. Прежде всего заметим, что ядро уравнения становится вырожденным после преобразования:

$$k(t, s) = \sin(t - s) = \sin t\ coss - \sin s \cos t.$$

Запишем уравнение в следующем виде:

$$y(t) = 2\sin t \int\limits_0^\pi \cos s\, y(s)\, ds - 2\cos t \int\limits_0^\pi \sin s\, y(s)\, ds + \cos t =$$
$$= 2C_1 \sin t + (1 - 2C_2)\cos t. \quad (4.24)$$

Здесь введены обозначения:

$$C_1 = \int\limits_0^\pi \cos s\, y(s)\, ds, \quad C_2 = \int\limits_0^\pi \sin s\, y(s)\, ds. \quad (4.25)$$

Таким образом, для того чтобы найти решение $y(t)$, достаточно определить C_1, C_2 и подставить их в (4.24). Для нахождения коэффициентов C_1, C_2 подставим выражение $y(t)$ из (4.24) в соотношения (4.25):

$$C_1 = \int\limits_0^\pi \cos s\, y(s)\, ds = C_1 \int\limits_0^\pi \sin 2s\, ds + (1 - 2C_2)\int\limits_0^\pi \cos^2 s\, ds,$$
$$C_2 = \int\limits_0^\pi \sin s\, y(s)\, ds = 2C_1 \int\limits_0^\pi \sin^2 s\, ds + \left(\frac{1}{2} - C_2\right)\int\limits_0^\pi \sin 2s\, ds.$$

Вычисляя входящие в эти равенства интегралы, получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных C_1, C_2.

$$\begin{cases} C_1 + \pi C_2 = \frac{\pi}{2}, \\ -\pi C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение:

$$C_1 = \frac{\pi}{2(1+\pi^2)}, \quad C_2 = \frac{\pi^2}{2(1+\pi^2)}.$$

Подставляя найденные значения C_1, C_2 в (4.24), получим решение уравнения

$$y(t) = \frac{\cos t + \pi \sin t}{1 + \pi^2}.$$

Пример 2. Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения

$$y(t) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (ts + t^2 s^2) y(s)\, ds.$$

Решение. Из уравнения имеем

$$y(t) = \lambda \left(t \int\limits_{-1}^{1} s y(s)\, ds + t^2 \int\limits_{-1}^{1} s^2 y(s)\, ds \right) = \lambda (C_1 t + C_2 t^2), \quad (4.26)$$

где

$$C_1 = \int\limits_{-1}^{1} s y(s)\, ds, \quad C_2 = \int\limits_{-1}^{1} s^2 y(s)\, ds. \quad (4.27)$$

Подставляя (4.26) в (4.27), получим

$$
\begin{aligned}
C_1 =& \lambda \int\limits_{-1}^{1} s(C_1 s + C_2 s^2) ds = \frac{2}{3}\lambda C_1, \\
C_2 =& \lambda \int\limits_{-1}^{1} s^2(C_1 s + C_2 s^2) ds = \frac{2}{5}\lambda C_2.
\end{aligned}
$$

Таким образом, система для нахождения C_1, C_2 принимает вид:

$$
\begin{cases}
\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) C_1 & = 0, \\
\left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) C_2 & = 0.
\end{cases}
\tag{4.28}
$$

Для того чтобы полученная система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю. Из этого условия получаем уравнение для нахождения характеристических чисел λ:

$$
\begin{vmatrix}
1 - \frac{2}{3}\lambda & 0 \\
0 & 1 - \frac{2}{5}\lambda
\end{vmatrix} = 0.
$$

Характеристические числа: $\lambda_1 = 3/2,\ \lambda_2 = 5/2$.

При $\lambda_1 = 3/2$ система (4.28) примет вид

$$
\begin{cases}
0 \cdot C_1 & = 0, \\
\left(1 - \frac{3}{5}\right) C_2 & = 0,
\end{cases}
$$

откуда C_1 произвольно, $C_2 = 0$, и, значит, собственная функция будет $y_1(t) = C_1\lambda_1 t$, или, полагая $C_1\lambda_1 = c$, получим $y_1(t) = ct$.

При $\lambda_1 = 5/2$ система (4.28) примет вид

$$
\begin{cases}
\left(1 - \frac{5}{3}\right) C_1 & = 0, \\
0 \cdot C_2 & = 0,
\end{cases}
$$

откуда C_2 произвольно, $C_1 = 0$, и, значит, собственная функция будет $y_2(t) = C_2\lambda_2 t$, или, полагая $C_2\lambda_2 = \widetilde{c}$, получим $y_2(t) = \widetilde{c}t^2$. Итак, характеристические числа: $\lambda_1 = 3/2,\ \lambda_2 = 5/2$; соответствующие им собственные функции: $y_1(t) = ct,\ y_2(t) = \widetilde{c}t^2$, где $c, \widetilde{c}$ — произвольные ненулевые константы. Зачастую в ответах эти константы берут равными 1, то есть записывают собственные функции с точностью до произвольного множителя.

Пример 3. Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения с симметричным ядром

$$
y(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi} k(t,s) y(s)\, ds = 0,
$$

где

$$
k(t,s) = \begin{cases}
\cos t \sin s, & 0 \le t \le s, \\
\cos s \sin t, & s \le t \le \pi,
\end{cases}.
$$

Решение. Данное уравнение представим в виде

$$y(t) = \lambda \int_0^t k(t,s)y(s)\,ds + \lambda \int_t^\pi k(t,s)y(s)\,ds$$

или

$$y(t) = \lambda \sin t \int_0^t y(s)\cos s\,ds + \lambda \cos t \int_t^\pi y(s)\sin s\,ds. \tag{4.29}$$

Дифференцируя обе части (4.29), находим

$$y'(t) = \lambda \cos t \int_0^t y(s)\cos s\,ds + \lambda \sin t \cos t y(t) -$$

$$- \lambda \sin t \int_t^\pi y(s)\sin s\,ds - \lambda \sin t \cos t y(t) =$$

$$= \lambda \cos t \int_0^t y(s)\cos s\,ds - \lambda \sin t \int_t^\pi y(s)\sin s\,ds. \tag{4.30}$$

Повторное дифференцирование дает

$$y''(t) = -\lambda \sin t \int_0^t y(s)\cos s\,ds + \lambda \cos^2 t y(t) -$$

$$- \lambda \cos t \int_t^\pi y(s)\sin s\,ds + \lambda \sin^2 t y(t) =$$

$$= \lambda y(t) - \left[\lambda \sin t \int_0^t y(s)\cos s\,ds + \lambda \cos t \int_t^\pi y(s)\sin s\,ds\right]. \tag{4.31}$$

Выражение в квадратных скобках равно $y(t)$, так что

$$y''(t) = (\lambda - 1)y(t). \tag{4.32}$$

Из равенств (4.29),(4.30) находим

$$y(\pi) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{4.33}$$

Итак, данное интегральное уравнение сводится к краевой задаче (4.32),(4.33). Здесь возможны три случая.

1) $\lambda = 1$. Уравнение (4.32) принимает вид $y''(t) = 0$. Его общее решение будет $y(t) = C_1 t + C_2$. Используя краевые условия (4.33), получим для нахождения неизвестных C_1, C_2 систему

$$\begin{cases} C_1\pi + C_2 &= 0, \\ C_1 &= 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $C_1 = C_2 = 0$, а следовательно, интегральное уравнение имеет единственное решение $y(t) \equiv 0$.

2) $\lambda > 1$. Общее решение уравнения (4.32) имеет вид

$$y(t) = C_1 e^{\sqrt{\lambda-1}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda-1}\,t},$$

откуда

$$y'(t) = \sqrt{\lambda-1}\left(C_1 e^{\sqrt{\lambda-1}\,t} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda-1}\,t}\right).$$

Для нахождения значений C_1, C_2 краевые условия дают систему

$$\begin{cases} C_1 e^{\sqrt{\lambda-1}\pi} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda-1}\pi} & = 0, \\ \sqrt{\lambda-1}(C_1 - C_2) & = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $C_1 = C_2 = 0$, то есть $y(t) \equiv 0$. Итак, при $\lambda \geq 0$ интегральное уравнение не имеет характеристических чисел, а значит и собственных функций.

3) $\lambda < 1$. Общее решение уравнения (4.32) будет

$$y(t) = C_1 \cos\sqrt{1-\lambda}t + C_2 \sin\sqrt{1-\lambda}t.$$

Отсюда находим, что

$$y'(t) = \sqrt{1-\lambda}\left(-C_1 \sin\sqrt{1-\lambda}t + C_2 \cos\sqrt{1-\lambda}t\right).$$

Краевые условия (4.33) в этом случае дают для нахождения C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1 \cos\sqrt{1-\lambda}\pi + C_2 \sin\sqrt{1-\lambda}\pi & = 0, \\ \sqrt{1-\lambda}C_2 & = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $C_2 = 0$. Тогда из первого уравнения заключаем, что либо $C_1 = 0$, и следовательно решение тривиальное, либо $\cos\sqrt{1-\lambda}\pi = 0$, а C_1 — любое. Отсюда находим, что $\pi\sqrt{1-\lambda} = \pi/2 + \pi n$, где n — любое целое число. Отсюда следует, что характеристические числа и собственные функции данного интегрального уравнения

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \qquad y_n(t) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t,$$

где n — любое целое число.

Пример 4. Найти решение уравнения с симметричным ядром

$$y(t) + 3\int\limits_0^{\pi} k(t,s)y(s)\,ds = 1,$$

где

$$k(t,s) = \begin{cases} \cos t \sin s, & 0 \leq t \leq s, \\ \cos s \sin t, & s \leq t \leq \pi, \end{cases}.$$

Решение. Как и в предыдущем примере, данное уравнение представим в виде

$$y(t) = 1 - 3\sin t\int\limits_0^{t} y(s)\cos s\,ds - 3\cos t\int\limits_t^{\pi} y(s)\sin s\,ds. \tag{4.34}$$

Дифференцируя уравнение (4.34) дважды и проводя выкладки аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере, получим

$$y'(t) = -3\cos t \int_0^t y(s)\cos s\, ds + 3\sin t \int_t^{\pi} y(s)\sin s\, ds, \tag{4.35}$$

$$y''(t) = -4y(t) + 1. \tag{4.36}$$

Уравнение (4.35) дает $y'(0) = 0$, из уравнения (4.34) заключаем, что $y(\pi) = 1$. Итак, для нахождения решения получили краевую задачу

$$y''(t) + 4y(t) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 1.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{4}.$$

Из первого граничного условия следует, что $C_2 = 0$. Второе условие дает $C_1 = 3/4$. Таким образом решение уравнения имеет вид $y(t) = \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{1}{4}$.

Пример 5. При различных значениях параметров исследовать на разрешимость уравнение

$$y(t) - \lambda \int_{-1}^{1} (t^2 - 2ts) y(s)\, ds = \alpha t^3 - \beta t.$$

Решение. Воспользуемся для решения теоремами Фредгольма. Рассмотрим сначала союзное однородное уравнение

$$y(t) - \lambda \int_{-1}^{1} (s^2 - 2ts) y(s)\, ds = 0.$$

Найдем характеристические числа и собственные функции для этого уравнения. Имеем

$$y(t) = \lambda \left(\int_{-1}^{1} s^2 y(s)\, ds - 2t \int_{-1}^{1} s y(s)\, ds \right) = \lambda (C_1 - 2tC_2),$$

где

$$C_1 = \int_{-1}^{1} s^2 y(s)\, ds, \quad C_2 = \int_{-1}^{1} s y(s)\, ds.$$

Подставляя в равенства, определяющие C_1, C_2, выражение для $y(t)$, получим

$$C_1 = \lambda \int_{-1}^{1} s^2 (C_1 - 2C_2 s)\, ds = \frac{2}{3}\lambda C_1, \quad C_2 = \lambda \int_{-1}^{1} s (C_1 - 2C_2 s)\, ds = -\frac{4}{3}\lambda C_2.$$

Таким образом, для коэффициентов имеем систему

$$\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) C_1 = 0, \quad \left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right) C_2 = 0.$$

Решая систему, получим:

$\lambda_1 = 3/2,\ C_2 = 0,\ C_1$ — произвольное число и с точностью до произвольного множителя $y_1(t) = 1$;

$\lambda_2 = -3/4,\ C_1 = 0,\ C_2$ — произвольное число и с точностью до произвольного множителя $y_2(t) = t$.

Пусть $\lambda \neq 3/2$ и $\lambda \neq -3/4$. В этом случае союзное однородное уравнение имеет только нулевое решение. Тогда по второй теореме Фредгольма однородное уравнение тоже имеет только нулевое решение. На основании первой теоремы Фредгольма заключаем, что исходное неоднородное уравнение имеет единственное решение при любой правой части, следовательно, α и β — любые.

В случае, когда $\lambda = 3/2$, из третьей теоремы Фредгольма следует, что для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы правая часть была ортогональна любому решения союзного однородного уравнения, то есть

$$\int\limits_{-1}^{1} y_1(t)(\alpha t^3 - \beta t)\, dt = 0.$$

Это равенство выполняется при любых α и β, то есть при любых α и β неоднородное уравнение разрешимо.

Пусть $\lambda = -3/4$. Тогда, рассуждая как и выше, получим

$$0 = \int\limits_{-1}^{1} y_2(t)(\alpha t^3 - \beta t)\, dt = \int\limits_{-1}^{1} t(\alpha t^3 - \beta t)\, dt = \frac{2}{5}\alpha - \frac{2}{3}\beta.$$

После приведения к общему знаменателю отсюда следует, что неоднородное уравнение разрешимо, если $3\alpha - 5\beta = 0$.

Пример 6. Решить интегральное уравнение

$$y(t) - \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-s|} y(s)\, ds = e^{-|t|} \quad (\lambda < \frac{1}{2}).$$

Решение. Пусть $Y(x), F(x)$ и $K(x)$ — преобразования Фурье решения $y(t)$, правой части $f(t)$ и ядра $k(t)$ соответственно. В данном примере $f(t) = k(t)$, поэтому

$$F(x) = K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-itx}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{t(1-ix)}\, dt + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t(1+ix)}\, dt \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}.$$

Применяя преобразование Фурье к обеим частям данного уравнения, получим

$$Y(x) - \lambda\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2} Y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2},$$

откуда

$$Y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + x^2 - 2\lambda}.$$

Заметим, что при $\lambda < 1/2$ знаменатель не обращается в нуль ни при каком вещественном значении x.

Применяя обратное преобразование Фурье, находим решение:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x) e^{itx} \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1 + x^2 - 2\lambda} \, dx.$$

Пример 7. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} y(s) \sin ts \, ds = e^{-t} \quad (t > 0).$$

Решение. Функция $\sqrt{2/\pi} e^{-t}$, очевидно, является синус-преобразованием искомой функции $y(t)$. Применяя формулу обратного синус-преобразования, будем иметь

$$y(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-s} \sin ts \, ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-s} \sin ts \, ds.$$

Интеграл в правой части вычислим с помощью двукратного интегрирования по частям. Получим

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-s} \sin ts \, ds = \frac{2}{\pi} \frac{t}{1 + t^2}.$$

Пример 8. Решить систему интегральных уравнений

$$y_i(t) = f_i(t) + \sum_{j=1}^{2} \int_0^t k_{ij}(t - s) y_j(s) \, ds \qquad (i = 1, 2),$$

где $f_1(t) = 1,\ f_2(t) = 4t,\ k_{11}(t) = -2e^{2t},\ k_{12} = 1,\ k_{21} = -1,\ k_{22} = 4t.$

Решение. Применяя преобразование Лапласа к системе уравнений, получим

$$Y_i(p) = F_i(p) + \sum_{j=1}^{2} K_{ij}(p) Y_j(p) \qquad (i = 1, 2), \tag{4.37}$$

где Y_i, F_i, K_{ij} — преобразования Лапласа функций y_i, f_i, k_{ij} соответственно. Имеем

$$F_1(p) = K_{12}(p) = -K_{21}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \, dt = \frac{1}{p},$$

$$F_2(p) = K_{22}(p) = \int_0^{\infty} 4te^{-pt} \, dt = \frac{4}{p^2},$$

$$K_{11}(p) = \int_0^{\infty} (-2e^{2t}) e^{-pt} \, dt = -\frac{2}{p - 2}.$$

Подставляя полученные значения F_i, K_{ij} в систему (4.37) и решая полученную систему относительно Y_1, Y_2, найдем

$$Y_1(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2},$$
$$Y_2(p) = \frac{3p+2}{(p-2)(p+1)^2} = \frac{8}{9}\frac{1}{p-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{8}{9}\frac{1}{p+1}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа (для этого можно воспользоваться таблицами), получаем решение:

$$y_1(t) = e^{-t} - te^{-t}, \qquad y_2(t) = \frac{8}{9}e^{2t} + \frac{1}{3}te^{-t} - \frac{8}{9}e^{-t}.$$

4.3.2 Задачи

1. Решить интегральные уравнения с вырожденным ядром:

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos s \varphi(s)\, ds = \sin t,$$

$$\varphi(t) = t + \lambda \int\limits_0^1 (t-s)\varphi(s)\, ds.$$

2. Найти характеристические значения и собственные функции для однородных уравнений

а) с вырожденным ядром:

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin t \cos s \varphi(s)\, ds = 0;$$

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_0^1 (2ts - 4t^2)\varphi(s)\, ds = 0;$$

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_0^1 \left(\sqrt{t}s - \sqrt{s}t\right)\varphi(s)\, ds = 0;$$

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 \left(5ts^3 + 4t^2s + 3st\right)\varphi(s)\, ds = 0;$$

б) с симметричным ядром:

$$k(t,s)=\begin{cases}\sin t\cos s, & 0\le t\le s,\\ \sin s\cos t, & s\le t\le \frac{\pi}{2}\end{cases};$$

$$k(t,s)=\begin{cases}\sin t\cos s, & 0\le t\le s,\\ \sin s\cos t, & s\le t\le \pi,\end{cases};$$

$$k(t,s)=\begin{cases}(t+1)(s-2), & 0\le t\le s\\ (s+1)(t-2), & s\le t\le 1\end{cases};$$

$$k(t,s)=\begin{cases}s(t+1), & 0\le t\le s\\ t(s+1), & s\le t\le 1.\end{cases}.$$

3. Решить уравнения:

$$\varphi(t)-\frac{\pi}{4}\int\limits_0^1 k(t,s)\varphi(s)\,ds=\frac{t}{2},$$

$$k(t,s)=\begin{cases}\frac{t(2-s)}{2}, & 0\le t\le s,\\ \frac{s(2-t)}{2}, & s\le t\le 1;\end{cases}$$

$$\varphi(t)-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} k(t,s)\varphi(s)\,ds=\cos 2t,$$

$$k(t,s)=\begin{cases}\sin t\cos s, & 0\le t\le s,\\ \sin s\cos t, & s\le t\le \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

4. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметров следующие уравнения:

$$\varphi(t)-\lambda\int\limits_{-1}^1 te^s\varphi(s)\,ds=t;$$

$$\varphi(t)-\lambda\int\limits_0^1 (2ts-4t^2)\varphi(s)\,ds=1-2t;$$

$$\varphi(t)=\lambda\int\limits_{-1}^1 ts\varphi(s)\,ds+\alpha t^2+\beta t+\gamma;$$

$$\varphi(t)=\lambda\int\limits_0^1 (t+s)\varphi(s)\,ds+\alpha e^t+\beta t.$$

5. Выяснить, какие из заданных интегральных уравнений разрешимы:

$$\int\limits_0^1 (st-4)s\varphi(s)\,ds = t^3+2t-1;$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos(t+s)\varphi(s)\,ds = \pi\cos t.$$

6. Решить следующие интегральные уравнения:

$$\varphi(t) = \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-s|}\varphi(s)\,ds + \begin{cases} e^{-t}, & t>0,\\ 0, & t<0, \end{cases} \quad \lambda<0.5;$$

$$\int\limits_0^{\infty} \varphi(s)\sin ts\,ds = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin t, & 0\le t\le\pi,\\ 0, & t>\pi \end{cases};$$

$$\int\limits_0^{\infty} \varphi(s)\cos ts\,ds = \frac{1}{1+t^2}, \quad t>0;$$

$$\varphi(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-s)^2}\varphi(s)\,ds = e^{-|t|};$$

$$\varphi(t) - e^{|t|} + \int\limits_0^t e^{t-s}\varphi(s)\,ds = 0;$$

$$\varphi(t) = t\int\limits_0^t \sin(t-s)\varphi(s)\,ds.$$

7. Решить системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \sin t + \int\limits_0^t \varphi_2(s)\,ds,\\ \varphi_2(t) = 1-\cos t - \int\limits_0^t \varphi_1(s)\,ds; \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_1(t) = e^{2t} + \int\limits_0^t \varphi_2(s)\,ds,\\ \varphi_2(t) = 1 - \int\limits_0^t e^{2(t-s)}\varphi_1(s)\,ds. \end{cases}$$

4.4 ЗАДАЧИ ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

4.4.1 Примеры решения типовых задач

Пример 1. Дифференцируем ли функционал $F(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt$, определенный в пространстве $C(0,1)$?

Решение. Рассмотрим

$$\Delta F = F(x+h) - F(x) = \int\limits_0^1 (|x(t)+h(t)| - |x(t)|)\,dt.$$

Если взять $x \equiv 0$, то $\Delta = \int\limits_0^1 |h(t)|\,dt$. Отсюда следует, что приращение функционала нельзя представить в виде суммы линейного функционала и бесконечно малой величины, так как, например, при $h \geq 0$ приращение функционала имеет вид $\Delta = \int\limits_0^1 h(t)\,dt$ и $\Delta = -\int\limits_0^1 h(t)\,dt$ при $h \leq 0$.

Пример 2. Показать, что функционал $F^2(x)$ дифференцируем, если дифференцируем $F(x)$. Найти $\delta F^2(x,h)$.

Решение. В силу дифференцируемости $F(x)$ имеем:

$$\Delta F^2 = F^2(x+h) - F^2(x) = (F(x+h) - F(x))(F(x+h) + F(x)) =$$
$$(\delta F(x,h) + \alpha\|h\|)(2F(x) + \delta F(x,h) + \alpha\|h\|) =$$
$$= 2F(x)\delta F(x,h) + [2F(x)\alpha\|h\| + (\delta F(x,h))^2 + \alpha^2\|h\|^2].$$

Очевидно, что $2F(x)\delta F(x,h)$ — линейный непрерывный относительно h функционал. Покажем, что

$$\lim_{h\to\theta} \frac{(\delta F(x,h))^2}{\|h\|} = 0.$$

Действительно, первая вариация является непрерывным, а значит и ограниченным функционалом. Поэтому утверждение следует из неравенства

$$\frac{(\delta F(x,h))^2}{\|h\|} \leq const \cdot \|h\|.$$

Из установленного факта и определения α получим, что выражение в квадратной скобке есть бесконечно малая величина более высокого порядка чем $\|h\|$ и, следовательно, $\delta F^2(x,h) = 2F(x)\delta F(x,h)$.

Пример 3 Найти $\delta F(x,h)$ для функционала

$$F(x) = \int\limits_a^b f(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), \ldots, x_n'(t))\,dt,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор-функция, которая непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$,

$$\|x\| = \max_{i=1,\ldots,n}\left(\max_{t\in[a,b]}|x_i(t)| + \max_{t\in[a,b]}|x_i'(t)|\right),$$

f — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Решение. Предполагая, что вторые производные функции f ограничены числом N, оценим приращение функционала F, когда вектор-функция $x = (x_1, \ldots, x_n)$ получит приращение $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Применим для этого формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\Delta F = \int\limits_a^b f(t, x_1 + h_1, \ldots, x_n' + h_n')\,dt - \int\limits_a^b f(t, x_1, \ldots, x_n')\,dt =$$
$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n'}h_n'\right)\,dt + \int\limits_a^b r(t, x_1, \ldots, x_n', h_1, \ldots, h_n')\,dt.$$

В выражение остаточного члена r входят всевозможные вторые производные функции f по $x_1, \dots, x'_n$, умноженные на соответствующие функции $h_1, \dots, h'_n$. Поэтому интеграл от модуля r допускает оценку

$$\int_a^b |r(t, x_1, \dots, x'_n, h_1, \dots, h'_n)|\, dt \le n^2 N(b-a)\|h\|^2.$$

Это величина второго порядка по сравнению с $\|h\|$. Так как первое слагаемое в правой части выражения для ΔF линейно зависит от $h_1, \dots, h_n$, получаем, что

$$\delta F(x, h) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x'_n} h'_n \right) dt.$$

Пример 4. Пусть функционал, определенный в предыдущем примере, задан на множестве вектор-функций таких, что $x_i(a) = A_i,\ x_i(b) = B_i$. Показать, что если у стационарной точки есть вторая производная, то эта точка удовлетворяет системе уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Решение. В связи с тем, что вектор-функции, на которых определен функционал, принимают на концах отрезка заданные значения, вектора x и $x+h$ на концах отрезка совпадают, следовательно $h_i(a) = h_i(b) = 0$. В стационарной точке при всех h равна нулю первая вариация. Учитывая выражение для первой вариации, найденное в примере 3, имеем:

$$\delta F(x, h) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i\, dt + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x'_i} h'_i\, dt \right) = 0.$$

Интегрирование по частям второго интеграла, стоящего в правой части этого выражения, дает

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x'_i} h'_i\, dt = \frac{\partial f}{\partial x'_i} h_i \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'_i} h_i\, dt = -\int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'_i} h_i\, dt.$$

Отсюда следует, что

$$\delta F(x, h) = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'_i} \right) h_i\, dt = 0. \qquad (4.38)$$

Так как вектор h может быть произвольным, выберем его таким, чтобы все его координаты, кроме i-ой были равны нулю. Тогда уравнение (4.38) примет вид

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'_i} \right) h_i\, dt = 0.$$

Из леммы 4.2.3 в этом случае следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'_i} = 0.$$

В силу произвольности i отсюда следует требуемое утверждение.

Пример 5. Найти экстремали функционала, зависящего от нескольких функций

$$F(x,y)=\int\limits_0^{\pi/4}\left(2y-4x^2+x'^2-y'^2\right)dt,\quad x(0)=y(0)=0,\quad x(\pi/4)=y(\pi/4)=1.$$

Решение. В соответствии с утверждением, полученным в примере 4, для нахождения x и y имеем систему дифференциальных уравнений (здесь используются обозначения $x_1=x,\ x_2=y,\ f(t,x,y,x',y')=2y-4x^2+x'^2-y'^2$)

$$-8x-\frac{d(2x')}{dt}=0,\quad 2+\frac{d(2y')}{dt}=0.$$

Первое из этих уравнений перепишем в виде $x''+4x=0$, откуда следует, что его решение имеет вид $x=C_1\sin 2t+C_2\cos 2t$. Из граничных условий для x получаем, что $C_2=0,\ C_1=1$, то есть $x(t)=\sin 2t$.

Второе дифференциальное уравнение дает $y''+1=0$, тогда $y(t)=-t^2/2+c_1t+c_2$. Из условия $y(0)=0$ следует, что $c_2=0$. В силу условия $y(\pi/4)=1$ имеем $-\pi^2/32+c_1\pi/4=1$ откуда получаем $c_2=(32+\pi^2)/(8\pi)$. Значит $y=-t^2/2+(32+\pi^2)t/(8\pi)$. Таким образом, функции x и y найдены.

Пример 6. Исследовать на экстремум функционал

$$J(y)=\int\limits_a^b\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx\quad y(a)=A,\quad y(b)=B.$$

Решение. Составим сначала уравнение Эйлера. Здесь $f=\sqrt{1+y'^2}$ не зависит от y, поэтому уравнение имеет вид:

$$-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0,$$

откуда $y'/\sqrt{1+y'^2}=const$ и, следовательно, $y'=const$.

Таким образом, общее решение уравнения Эйлера, то есть множество экстремалей, запишется виде $y=c_1x+c_2$. Из множества экстремалей выделим теперь те, которые проходят через точки $(a,A),(b,B)$. С этой целью запишем условия прохождения экстремалей через это точки:

$$c_1a+c_2=A,\ c_1b+c_2=B.$$

Из этих уравнений получаем

$$c_1=\frac{A-B}{a-b},\ c_2=\frac{aB-bA}{a-b}.$$

Следовательно, единственной функцией, на которой функционал может принимать экстремальное значение, является функция

$$y_0(x)=\frac{A-B}{a-b}x+\frac{aB-bA}{a-b}.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=(1+y'^2)^{-1.5}>0.$$

Значит, если функционал принимает экстремальное значение, то согласно условию Лежандра это минимум.

Проверим теперь выполнение условия Вейерштрасса. Оно очевидно, выполнено, так как экстремаль $y = y_0(x)$ можно включить в однопараметрическое свойство экстремалей

$$y = \frac{A - B}{a - b}x + \frac{aB - bA}{a - b} + \alpha.$$

Таким образом, на прямой $y = y_0(x)$ функционал принимает минимальное значение. Результат этот был бы очевиден, если бы решенную задачу сформулировали следующим образом: среди кривых, соединяющих точки (a, A), (b, B), найти ту, которая имеет минимальную длину (значение функционала $J(y)$ равно длине кривой $y = y(x)$, $x \in [a, b]$).

4.4.2 Задачи

1. Показать, что если F—линейный непрерывный функционал, то $\delta F(x, h) = F(x)$.

2. Дифференцируемы ли следующие функционалы, определенные в $C(a, b)$:
а) $F(x) = x(a)$; б) $F(x) = x^2(a)$; в) $F(x) = |x(a)|$;
г) $F(x) = \int\limits_a^b f(t, x(t))\,dt$, где $f(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная при $t \in [a, b]$, $|x| < \infty$?

3. Пусть $\mathcal{H}$—гильбертово пространство. Найти $\delta F(x, h)$, если
а) $F(x) = (x, x)$; б) $F(x) = \|x\|$;
в) $F(x) = (Ax, x)$, где A—самосопряженный оператор, действующий в $\mathcal{H}$.

4. Найти $\delta F(x, h)$ для функционала

$$F(x) = \int\limits_a^b f\left(t, x(t), x'(t), \ldots x^{(n)}(t)\right)\,dt,$$

определенного на $C^n(a, b)$, если f—дважды непрерывно дифференцируемая функция.

5. Найти $\delta F(x, h)$ для функционала

$$F(x) = \iint\limits_{\Omega} f\left(t, \tau, x(t, \tau)), \frac{\partial x(t, \tau)}{\partial t},\ \frac{\partial x(t, \tau)}{\partial \tau}\right)\,dtd\tau,$$

определенного на $C^1(\Omega)$, где $\Omega \subset R^2$, а f — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

6. Показать, что линейный функционал, отличный от тождественного нуля, не имеет экстремумов.

7. Для функционала $F(x) = \int\limits_a^b f(t, x(t))\,dt$ показать, что:
а) стационарная точка $x = x_0(t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial f(t, x_0(t))}{\partial x} = 0$;
б) условие $\dfrac{\partial^2 f(t, x_0(t))}{\partial x^2} \geq 0$ является необходимым условием минимума;
в) если $x = x_0(t)$ — стационарная точка и $\dfrac{\partial^2 f(t, x_0(t))}{\partial x^2} > 0$, то x_0 является минимумом функционала.

8. Пусть функционал, определенный в задаче 5, задан на множестве функций $x(t,\tau)$ таких, что $x(t,\tau) = g(t,\tau)$ при $(t,\tau) \in \partial\Omega$, где $\partial\Omega$ — гладкая граница области Ω, а $g(t,\tau)$ — заданная функция. Показать, что если стационарная точка имеет в области Ω непрерывные вторые производные, то эта точка удовлетворяет уравнению Эйлера-Остроградского:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x'_t} - \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial x'_\tau} = 0.$$

Здесь $x'_t = \dfrac{\partial x}{\partial t},\ x'_\tau = \dfrac{\partial x}{\partial \tau}$.

9. Пусть функционал, определенный в задаче 4, задан на множестве таких функций $x(t)$, что $x^{(i)}(a) = A_i,\ x^{(i)}(b) = B_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$. Доказать, что если стационарная точка принадлежит $C^{2n}(a,b)$, то она удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial f}{\partial x''} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}} = 0.$$

10. Пусть A — симметричный линейный оператор, который определен на линейном множестве D гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и отображает его в $\mathcal{H}$, причем $(Ax,x) \geq 0$ для любых $x \in D$. Доказать, что задача о решении уравнения $Ax = b$, эквивалентна задаче нахождения минимума функционала $F(x) = (Ax,x) - 2(b,x)$.

11. Доказать, что решение задачи

$$-\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right) + q(t)x = f(t),\ x(0) = x(1) = 0,$$

$p > 0,\ q \geq 0,\ p \in C^1(0,1),\ q, f \in C(0,1)$ сводится к нахождению минимума функционала

$$F(x) = \int\limits_0^1 \left(p\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + qx^2 - 2fx\right)dt,$$

определенного на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю в точках $t = 0,\ t = 1$.

Указание. Воспользоваться свойствами оператора Штурма-Лиувилля и утверждением предыдущей задачи.

12. Исследовать на экстремум функционалы:

$$F(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (y^2 + 2xyy')\,dx,\ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2,$$

$$F(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (xy + y^2 - 2y^2y')\,dx,\ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2,$$

$$F(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (x^2 + y^2 + yy')\,dx,\ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2.$$

13. Среди гладких кривых, соединяющих точки A и B, найти ту, на которой интеграл принимает минимальное значение.

$$\int\limits_0^1 (12xy + yy' + y'^2)\,dx,\ A(0,1),\ B(1,4);\ \int\limits_1^2 (xy'^2 - y)\,dx,\ A(1,0),\ B(2,1).$$

14. Найти экстремали функционалов (решения уравнения Эйлера-Пуассона).

$$F(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left(2xy + y''^2\right) dx; \quad F(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left(16y^2 - y''^2 + x^2\right) dx.$$

15. Найти экстремали функционала

$$F(y,z) = \int_{x_1}^{x_2} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)\, dx.$$

16. Показать, что если подынтегральная функция интеграла

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y')\, dx$$

не содержит явно y, то каждая экстремаль может быть включена в однопараметрическое семейство экстремалей и для минимума (максимума) достаточно выполнения условия $\dfrac{\partial^2 f(x,y')}{\partial y'^2} > 0 \ (< 0)$.

17. Исследовать на экстремум функционалы

$$F(y) = \int_0^2 (xy' + y'^2)\, dx, \quad y(0) = 1,\ y(2) = 0;$$

$$F(y) = \int_{-1}^{2} y'\left(1 + x^2 y'\right) dx, \quad y(-1) = 1,\ y(2) = 4.$$

4.4.3 Тест к главе 4

1. Какие из приведенных ниже ядер являются вырожденными?
а) $K(t,s) = \ln(t+s)$;
б) $K(t,s) = \ln(ts)$;
в) $K(t,s) = \ln(t-s)$.

2. Какие из перечисленных ниже функций являются собственными функциями уравнения

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^1 te^s \varphi(s)\, ds = 0\ ?$$

а) $\varphi(t) = t$;
б) $\varphi(t) = e^t$;
в) $\varphi(t) = t^2/2$.

3. Уравнение $\int\limits_{-1}^{1} (t^2 s^2 - ts)\varphi(s)\, ds = e^t$
а) имеет единственное решение;

б) не имеет решения;
в) имеет бесконечно много решений.

4. Какие из приведенных ниже функций являются экстремалями функционала

$$\int_0^1 (y'^2 - x)\, dx\ ?$$

а) $y = 2x + 5$;
б) $y = e^x - 1$;
в) $y = \sin x$.

5. Для функционала $J(y) = \int_0^1 y(x)\, dx$ первая вариация имеет вид:
а) $\delta J(y, h) = 1$;
б) $\delta J(y, h) = y^2(0)/2$;
в) $\delta J(y, h) = \int_0^1 h(x)\, dx$.

6. Условие равенства нулю первой вариации функционала является
а) необходимым и достаточным условием экстремума;
б) достаточным условием экстремума;
в) необходимым условием экстремума.

Часть II

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

5 КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

5.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными. Так, например:

1) при изучении различных видов волн — упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений приходят к ***волновому уравнению***:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) ,$$

где C — скорость распространения волны в данной среде, $u = u(t, x, y, z)$ — неизвестная функция, подлежащая определению;

2) процессы распределения тепла в однородном изотропном (то есть свойства вещества во всех направлениях одинаковы) теле и явление диффузии описываются ***уравнением теплопроводности (диффузии)***:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) ;$$

3) при рассмотрении установившегося теплового состояния в однородном изотропном теле, изучении потенциалов поля тяготения или стационарного электрического поля получают ***уравнение Пуассона***:

$$\Delta u = f \qquad (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) ;$$

4) прохождение электрического тока по проводу характеризуется силой тока I и напряжением V, которые являются функцией положения точки x и времени t. Если R, L, C, G — заданные постоянные коэффициенты сопротивления, самоиндукции, емкости и утечки, рассчитанные на единицу длины, то приходят к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial x} + C\dfrac{\partial V}{\partial t} + GV = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial x} + L\dfrac{\partial I}{\partial t} + RI = 0. \end{cases}$$

Эта система называется ***системой телеграфных уравнений***;

5) движение сжимаемой жидкости или газа при постоянной температуре описывается системой уравнений газовой динамики (полагают, что вязкость и теплопроводность газа равны 0, то есть отсутствует внутреннее трение и частицы жидкости или газа теплоизолированы одна от другой)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial v_x}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} - X = 0\ , \\
\dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial v_y}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} - Y = 0\ , \\
\dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} - Z = 0\ , \\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0.
\end{cases}
$$

Здесь компоненты скорости движения жидкости (v_x, v_y, v_z) и плотность жидкости ρ — искомые функции, а (X, Y, Z) — заданные компоненты внешних сил, действующих в жидкости. При этом еще задается связь между давлением P и плотностью, так называемое уравнение состояния.

В общем случае определение дифференциального уравнения в частных производных можно сформулировать следующим образом. Пусть Ω область n-мерного евклидового пространства R^n, $n \geq 2$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Пусть, далее $F \equiv F(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots)$ — заданная функция точек x и переменных $p_{i_1 \ldots i_n}$ с неотрицательными целочисленными индексами $i_1, \ldots, i_n$, причем $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = k,\ k = 0, \ldots, m,\ m \geq 1$, причем по крайней мере одна из частных производных $\dfrac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}}$ для набора индексов, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = m$, отлична от нуля. Тогда уравнение

$$
F\Big(x, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \ldots\Big) = 0, \quad x \in \Omega \tag{5.1}
$$

называется ***дифференциальным уравнением с частными производными порядка*** m относительно неизвестной функции u. Левая часть равенства (5.1) представляет собой дифференциальный оператор с частными производными, действующий на гладкую функцию u.

Из сказанного выше следует, что ***порядком уравнения*** называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

В том случае, когда $F, p_{i_1 \ldots i_n}, u$ — N-мерные вектора, векторное равенство (5.1) называется ***системой*** N ***дифференциальных уравнений с частными производными порядка*** m относительно неизвестных функции $u_1, \ldots, u_N$.

Определение 5.1.1 *Функция (набор функций), которая при подстановке в уравнение (систему уравнений) обращает его в тождество, называется* ***решением уравнения*** *(системы уравнений).*

В том случае, когда F линейно зависит от функции u и ее производных, уравнение называется ***линейным***. В общем виде линейное уравнение может быть записано в виде $Lu = f$, где L — линейный оператор. Линейное уравнение называют ***однородным***, если $f \equiv 0$ и ***неоднородным*** в противном случае.

В перечисленных примерах уравнения теплопроводности, Пуассона и волновое — линейные уравнения второго порядка, система телеграфных уравнений — линейная система первого порядка.

Если дифференциальное уравнение не является линейным, его называют ***нелинейным***.

Среди нелинейных уравнений выделяют квазилинейные уравнения.

Определение 5.1.2 *Уравнение или систему уравнений называют* ***квазилинейной****, если она линейна относительно всех старших производных от неизвестных функций.*

Система уравнений газовой динамики — это пример квазилинейной системы уравнений первого порядка.

Перечисленные выше уравнения (кроме системы уравнений движения сжимаемой жидкости), а также некоторые другие уравнения будут рассматриваться в этой части пособия. Изучаемые примеры не будут случайными с точки зрения математической теории. Исследование уравнений математической физики привело к тому, что появилась классификация уравнений, согласно которой выбранные нами уравнения и системы являются типичными представителями наиболее важных классов уравнений.

Мы будем интересоваться такими вопросами, как корректность постановки задач (строгое определение понятия корректности дадим ниже), то есть вопросами, как надо поставить задачу, чтобы у этой задачи существовало единственное решение, которое удовлетворяет еще требованию устойчивости. Кроме того, нас будут интересовать вопросы построения решений поставленных задач.

Существует большое число учебников и задачников по уравнениям математической физики, выпущенных в разные годы. Как правило, все они рассчитаны на изучение предмета в существенно большем объеме. Поэтому желающих познакомиться более подробно с этим разделом математики отсылаем к учебникам и задачникам, список которых приведен в конце пособия.

5.2 КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА

Линейное уравнение второго порядка можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F \ , \tag{5.2}$$

где $A_{ij} = A_{ji}, B_i, C, F$ — заданные функции, вообще говоря, зависящие от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Оно называется ***однородным***, если $F = 0$, и ***неоднородным*** в противном случае.

Поставим вопрос: как следует совершить невырожденную замену независимых переменных, чтобы в новых переменных уравнение (5.2) имело наиболее простой вид. Для ответа на этот вопрос изучим сначала, как изменяются коэффициенты при произвольной замене переменных.

Введем вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ новые переменные

$$y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n = y_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Допустим, что эти функции обладают вторыми производными и замена переменных невырожденная в окрестности некоторой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, то есть в окрестности этой точки якобиан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Тогда, если

$$v(y_1,\ldots,y_n) = v\big(y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_n(x_1,\ldots,x_n)\big) = u(x_1,\ldots,x_n)\ ,$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\ , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}\ .$$

Подставляя полученные выражения в (5.2) и меняя порядок суммирования, имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial y_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right) + Cv = F\ . \tag{5.3}$$

Обозначим через $\overline{A}_{kl}$ коэффициенты при вторых производных в уравнении (5.3), а через $\overline{B}_k$ коэффициенты при первых производных, то есть

$$\overline{A}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}, \qquad \overline{B}_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\ . \tag{5.4}$$

Зафиксируем в пространстве точку $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ и положим

$$\alpha_{ki} = \frac{\partial y_k(x_1^0,\ldots,x_n^0)}{\partial x_i}\ . \tag{5.5}$$

Тогда формулы преобразования $\overline{A}_{kl} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{lj}$ совпадают с формулами преобразования квадратичной формы $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}p_i p_j$, если в ней сделать замену переменных

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} q_k\ , \tag{5.6}$$

переводящую ее в форму $\sum\limits_{k,l=1}^{n} \overline{A}_{kl} q_k q_l$. Поэтому если хотим упростить уравнение (5.2), то вместо этой задачи можно теперь решать вопрос об упрощении вида квадратичной формы при помощи замены переменных (5.6).

Такая задача решалась в курсах линейной алгебры и аналитической геометрии. Там доказывалось, что всегда можно так подобрать коэффициент преобразования, что квадратичная форма примет вид:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}p_i p_j = \sum_{i=1}^{n} k_i {q_i}^2\ , \tag{5.7}$$

где k_i — некоторые числа, равные ±1 или 0. Кроме того, доказывался закон инерции квадратичных форм. Согласно этому закону, если осуществляется невырожденное преобразование (5.6), то число положительных, а также число отрицательных чисел среди коэффициентов $k_1, \ldots, k_n$ не зависят от выбора замены переменных. К виду (5.7) формулу можно привести, например, путем выделения полных квадратов.

Итак, в каждой точке пространства переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ можно сделать замену независимых переменных p_i таким образом, чтобы в этой точке форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} p_i p_j$ превратилась в выражение

$$\sum_{i=1}^{r} {q_i}^2 - \sum_{i=r+1}^{m} q_i^2 \ , \tag{5.8}$$

где r — это число положительных, а $(m-r)$ — отрицательных коэффициентов.

Допустим, что подстановка, приводящая квадратичную форму к виду (5.8), найдена и записывается формулой

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha^*_{ki} q_k \ .$$

Вернемся теперь к дифференциальным уравнениям и введем линейную замену независимых переменных $y_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^*_{ki} x_i$. Тогда из (5.8) следует, что $\overline{A}_{kl} = 0$ при $k \neq l$, $\overline{A}_{kk} = \pm 1$ или 0, и, следовательно, совокупность членов уравнения, содержащих вторые производные, примет вид:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 v}{\partial {y_i}^2} - \sum_{i=r+1}^{m} \frac{\partial^2 v}{\partial {y_i}^2} \ .$$

Если коэффициенты уравнения (5.2) постоянны, то линейная замена приведет его снова к уравнению с постоянными коэффициентами. Следовательно, во всем пространстве уравнение приведется к виду, когда в новых координатах коэффициенты при смешанных производных равны 0, а остальные — либо 0, либо ± 1. Такой вид уравнения называется ***каноническим***. Если коэффициенты уравнения переменные, то, в общем случае, приведение к каноническому виду во всем пространстве становится невозможным. Тогда ограничиваются приведением к каноническому виду в каждой точке пространства отдельно. При этом в каждой точке пространства могут получиться свои значения чисел r и m.

Введем понятие о типе уравнения.

Определение 5.2.1 *Уравнение будем называть* ***эллиптическим в точке****, если в этой точке оно имеет следующий канонический вид:* $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial {y_i}^2} = \ldots$*, где слагаемые, не содержащие вторые производные, заменены на многоточие.*

Определение 5.2.2 *Уравнение называется* ***гиперболическим в точке****, если его канонический вид:* $\frac{\partial^2 v}{\partial {y_1}^2} - \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial {y_i}^2} = \ldots$.

Определение 5.2.3 *Уравнение называется* ***параболическим в точке****, если его канонический вид:* $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v}{\partial {y_i}^2} = \ldots$.

Замечание. Очевидно, что если в каноническом виде уравнение выглядит, например, следующим образом $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial {y_i}^2} \right) = \ldots$, то, после умножения на -1, оно приводится к эллиптическому типу.

Определение 5.2.4 *Уравнение называется* ***параболическим (эллиптическим, гиперболическим) в некоторой области****, если оно параболическое (эллиптическое, гиперболическое) в каждой точке этой области.*

5.3 ХАРАКТЕРИСТИКИ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями можно сделать вывод, что решение уравнения с частными производными однозначно не определяется самим уравнением. И если общее решение обыкновенные дифференциальных уравнений содержало произвольные константы, то при решении уравнений с частными производными появляются произвольные функции. Например, непосредственно дифференцированием убеждаемся, что функция $u(x,y) = f(x) + g(y)$ является решением уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ при любых гладких функциях $f(x)$ и $g(y)$.

Для выделения одного, конкретного решения, таким образом, нужны дополнительные условия. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений одним из видов таких дополнительных условий являлись условия Коши, когда в некоторой точке промежутка, на котором ищется решение, задается значение решения и некоторого числа его производных. При этом количество таких условий совпадает с порядком уравнения, то есть число задаваемых значений производных на единицу меньше порядка уравнения. Аналогично поступают и в случае уравнений с частными производными, однако вместо точки, где задаются дополнительные данные, выбирается кривая в случае функций двух независимых переменных и поверхность размерности $n-1$ в случае функций n переменных. А вместо значений решения и его производных в точке, то есть чисел, задаются значения решения и его производных на кривой (поверхности), то есть задаются функции. Естественно возникает вопрос: можно ли произвольным образом задавать кривую (поверхность) и значения решения и его производных или требуются определенные ограничения. Попытаемся в этом параграфе хотя бы частично ответить на этот вопрос. Для простоты будем считать, что решение, это функция зависящая от двух переменных.

Пусть S — $(n-1)$ – мерная поверхность в n – мерном пространстве.

Определение 5.3.1 ***Задачей Коши*** *для уравнения 2-го порядка (5.2) называют задачу о нахождении в окрестности S решения этого уравнения, удовлетворяющего на поверхности S условиям:*

$$u|_S = \varphi_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_S = \varphi_1, \tag{5.9}$$

где l — некоторое не касательное к S направление, а φ_0, φ_1 — заданные функции.

Заданные значения функции u и ее производной в направлении l будем называть ***условиями (данными) Коши*** .

Предположим, что поверхность S задается уравнением $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 > 0$, то есть на поверхности нет особых точек, и что все фигурирующие в рассмотрении функции являются гладкими. Последнее означает, что у них существует столько производных, сколько необходимо для проведения соответствующих выкладок.

Поставим перед собой более простую задачу: найти на поверхности S все производные решения первого и второго порядка. Очевидно, что если задача Коши разрешима, то имеет решение и эта задача, так как, найдя решение уравнения в окрестности поверхности S и продифференцировав его, можно получить значения производных на поверхности.

Для того, чтобы решить поставленную задачу сделаем замену переменных. Выберем $y_1(x_1,\dots,x_n)=\varphi(x_1,\dots,x_n)$, а функции $y_2(x_1,\dots,x_n)$, $\dots,y_n(x_1,\dots,x_n)$ подберем так, чтобы замена была невырожденной. В новых переменных поверхность S будет задаваться уравнением $y_1=0$, а условие $u|_S=\varphi_0$, перепишется в виде

$$v(0,y_2,\dots,y_n)=\widetilde{\varphi}_0(y_2,\dots,y_n)$$

и позволит вычислить любые производные по $y_2\dots y_n$, то есть производные в касательном направлении. Условие $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_S=\varphi_1$ перепишется в новых переменных в виде

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \widetilde{l}}\right|_{y_1=0}=\widetilde{\varphi}_1(y_2,\dots,y_n)\ ,$$

где $\widetilde{l}$ задает в новых координатах направление дифференцирования. По определению производной по направлению $\dfrac{\partial v}{\partial \widetilde{l}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{l}_i\dfrac{\partial v}{\partial y_i}$, где $\widetilde{l}_i$ — компоненты вектора $\widetilde{l}$. Направление $\widetilde{l}$ не касательное к поверхности $y_1=0$, то есть $\widetilde{l}_1\neq 0$. Поэтому, имея значение $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \widetilde{l}}\right|_{y_1=0}$ и значения производных $\left.\dfrac{\partial v}{\partial y_i}\right|_{y_1=0}$ $(i=2,\dots,n)$, можно будет найти сначала $\left.\dfrac{\partial v}{\partial y_1}\right|_{y_1=0}$, а затем $\left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_i}\right|_{y_1=0}$ $(i=2,\dots)$. Подставляя все известные величины в (5.3), и выражая $\overline{A}_{11}\dfrac{\partial^2 v}{\partial {y_1}^2}$ получим

$$\overline{A}_{11}\left.\frac{\partial^2 v}{\partial {y_1}^2}\right|_{y_1=0}=\dots\ , \tag{5.10}$$

где $\dots$ обозначает известные величины, зависящие от функций φ_0,φ_1 и их производных. Если окажется, что $\overline{A}_{11}\neq 0$, из (5.10) находится $\left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial {y_1}^2}\right|_{y_1=0}$. Таким образом, задача о нахождении значений производных на поверхности S решена.

Если же $\overline{A}_{11}=0$, то равенство (5.10) представляет собой соотношение, связывающее φ_0 и φ_1 и их производные на поверхности S, и следовательно, не при любых φ_0, φ_1 будет иметь решение задача о нахождении производных, а значит, и задача Коши.

Определение 5.3.2 *Пусть поверхность S задана уравнением $\varphi(x_1,\dots,x_n)=0$. Назовем эту поверхность **характеристической поверхностью** для уравнения (5.2), если на ней выполняется равенство*

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=0.$$

Таким образом, если поверхность S характеристическая, то на этой поверхности выполняется равенство

$$\overline{A}_{11} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0.$$

Поэтому в условиях (5.9) функции φ_0 и φ_1 нельзя задавать произвольно.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} .$$

Здесь $A_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и при $i = j = 1$, $A_{ii} = 1$ при $i = 2, \ldots, n$. Тогда для поверхности, которая задается уравнением $x_1 = 0$, имеем $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$ при $i > 1$. Отсюда следует, что $\overline{A}_{11} = 0$. Значит плоскость $x_1 = 0$ является характеристической поверхностью для заданного уравнения. Если, например, взять $l = (1, 0, \ldots, 0)$, то это направление является нормалью к плоскости $x_1 = 0$. Тогда условия (5.9) принимают вид $u|_{x_1=0} = \varphi_0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \varphi_1$, а соотношение (5.10) запишется следующим образом

$$0 = \varphi_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial {x_i}^2} .$$

Отсюда видно, что функции φ_0 и φ_1 связаны между собой и не могут быть заданы произвольным образом. Задав φ_0, мы однозначно определяем φ_1.

5.4 КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В случае, когда функции зависят от n независимых переменных, преобразование подбиралось в общем случае так, что уравнение приводилось к каноническому виду в точке. Покажем, что если $n = 2$, можно так подобрать преобразование, что уравнение приведется к каноническому виду сразу в некоторой окрестности точки.

Рассмотрим уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + au = f, \tag{5.11}$$

где A, B, C, D, E, a, f — функции от x, y, причем одновременно A, B, C в ноль не обращаются.

Этому уравнению соответствует квадратичная форма $Ap_1^2 + 2Bp_1p_2 + Cp_2^2$. В курсе аналитической геометрии такие формы приводились к каноническому виду и им соответствовали кривые второго порядка:

если $B^2 - AC > 0$ — гипербола;
если $B^2 - AC = 0$ — парабола;
если $B^2 - AC < 0$ — эллипс.

Исследуем канонический вид уравнения (5.11).

Введем переменные $\xi = \xi(x, y),\ \eta = \eta(x, y)$, причем так, чтобы замена была невырожденной, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

в окрестности некоторой фиксированной точки (x_0, y_0). В новых переменных уравнение перепишется в виде

$$\overline{A}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\overline{B}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \overline{D}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \overline{E}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \overline{a}v = \overline{f}\ , \tag{5.12}$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\ , \\
\overline{C} &= A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\ , \\
\overline{B} &= A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\ , \\
\overline{D} &= A\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + D\frac{\partial \xi}{\partial x} + E\frac{\partial \xi}{\partial y}\ , \\
\overline{E} &= A\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D\frac{\partial \eta}{\partial x} + E\frac{\partial \eta}{\partial y}\ .
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Это следует из формул (5.3), (5.4), если в них записать вместо переменных x_1 и x_2 переменные x и y, вместо y_1 и y_2 — ξ и η, а вместо коэффициентов $A_{11}, A_{12}, A_{22}, B_1, B_2$ — A, B, C, D, E соответственно. Легко видеть, что $\overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C} = (B^2 - AC)\Delta^2$, следовательно, преобразование не меняет тип уравнения.

Пусть $B^2 - AC > 0$. Покажем, что можно так подобрать функции $\xi(x, y), \eta(x, y)$, что в окрестности точки (x_0, y_0) будут выполнены равенства $\overline{A} = \overline{C} = 0$.

Предположим, что либо A, либо C не равны 0, так как в противном случае требуемый вид уже получен.

Пусть, например, $A \neq 0$. Тогда, так как $B^2 - AC > 0$, уравнение

$$A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{5.14}$$

(заметим, что при $\varphi = \xi$, левая часть (5.14) совпадает с $\overline{A}$, а при $\varphi = \eta$ — с $\overline{C}$) представимо в виде

$$\left(A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\left(A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0\ ,$$

которое в свою очередь распадается на два:

$$\begin{aligned}
A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0\ , \\
A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0\ .
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Пусть $\varphi = \varphi_1(x,y),\ \varphi = \varphi_2(x,y)$ — решения этих уравнений. Эти решения можно выбрать так, чтобы в окрестности точки (x_0, y_0) функции φ_1 и φ_2 были независимыми. Действительно, так как $A \neq 0$, то из уравнений имеем

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = -2\frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \ ,$$

то есть достаточно выбрать такие решения (5.15), чтобы

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \neq 0,\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \neq 0 \ .$$

Итак, произведя замену $\xi = \varphi_1(x,y),\ \eta = \varphi_2(x,y)$, получим, что уравнение (5.12) примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + \overline{F}\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial\xi}, \frac{\partial v}{\partial\eta}\right) = 0 \ .$$

Если теперь выполнить еще одну замену $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, то получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} = \widetilde{F}(\alpha, \beta, v, \frac{\partial v}{\partial\alpha}, \frac{\partial v}{\partial\beta}) \ ,$$

то есть уравнение гиперболического типа.

Кривые $\varphi_1(x,y) = C_1,\ \varphi_2(x,y) = C_2$ согласно терминологии, введенной в определении 5.3.2, являются ***характеристическими кривыми*** или кратко ***характеристиками***, так как вдоль них выполняются соответственно равенства $\overline{A} = 0,\ \overline{C} = 0$.

Пусть теперь $B^2 - AC = 0$. Уравнения (5.15) вырождаются в одно уравнение:

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \ . \tag{5.16}$$

Заметим, что из условия $B^2 - AC = 0$ следует равенство $B/A = C/B$. Значит, существует такое λ, что $B = A\lambda,\ C = B\lambda$. Следовательно, если функция φ удовлетворяет (5.16), то она удовлетворяет и уравнению

$$B\frac{\partial\varphi}{\partial x} + C\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \ .$$

Пусть $\xi = \varphi(x,y)$, где φ — решение (5.16), η — любая гладкая функция, такая, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

В уравнении (5.12) коэффициент $\overline{A}$ будет равен 0, а

$$\overline{B} = \left(\underbrace{A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial y}}_{0}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\underbrace{B\frac{\partial\varphi}{\partial x} + C\frac{\partial\varphi}{\partial y}}_{0}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0 \ .$$

Заметим, что $\overline{C} \neq 0$, так как в противном случае функция $\eta = \eta(x, y)$ удовлетворяет тому же уравнению (5.16), что и функция $\xi = \xi(x, y)$, а это в свою очередь противоречит условию невырожденности замены переменных. Следовательно, в окрестности точки (x_0, y_0) имеем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \overline{F}\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) .$$

Это канонический вид уравнения параболического типа.

Заметим, что кривые $\varphi(x, y) = C$ являются характеристиками уравнения (5.11) в рассматриваемом случае.

Предположим теперь, что $B^2 - AC < 0$. Покажем, что можно так подобрать функции ξ, η, что в уравнении (5.12) $\overline{A} = \overline{C}$, $\overline{B} = 0$. Заметим, что коэффициенты уравнений (5.15) являются комплексно-сопряженными. Тогда решения этих уравнений могут быть выбраны также комплексно-сопряженными.

Пусть $\varphi = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$ — решение одного из уравнений (5.15), причем такое, что $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 \neq 0$. Пусть $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$. Тогда, так как φ — решение (5.14), при подстановке его в (5.14) получим тождество, в левой части которого стоит комплекснозначная функция. Следовательно, ее действительная и мнимая части тождественно равны нулю. Выражая эти действительные и мнимые части и приравнивая их нулю, получим после простых преобразований $\overline{A} = \overline{C}$, $\overline{B} = 0$. Так как $\overline{A} = \overline{C} \neq 0$ (в противном случае $\overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C} = 0$), то в новых переменных уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \overline{F}\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) .$$

В заключение отметим, что гиперболические уравнения имеют 2 семейства действительных характеристик, параболические — одно, а эллиптические уравнения действительных характеристик не имеют.

5.5 ХАРАКТЕРИСТИКИ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Перейдем теперь к вопросу классификации систем уравнений первого порядка. Пусть задана система:

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f \; , \tag{5.17}$$

где A,B — матрицы, $u = (u_1, \ldots, u_n)^{\text{т}}$, $f = (f_1, \ldots, f_n)^{\text{т}}$. Здесь индекс "т" означает операцию транспонирования.

Пусть γ — некоторая кривая в плоскости (t, x) и предположим, что значение решения системы (5.17) на кривой γ известно.

Определение 5.5.1 *Задача о нахождении решения системы (5.17) в некоторой окрестности кривой γ, принимающего на γ заданное значение, называется* ***задачей Коши****.*

Поставим более простую задачу: найти значения первых производных решения вдоль кривой γ.

Можно найти дифференциал du, отвечающий смещениям dx, dt вдоль кривой

$$\underline{du} = \frac{\partial u}{\partial t}\underline{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}\underline{dx} \ , \tag{5.18}$$

где подчеркнутые дифференциалы известны, они определяют смещение вдоль кривой γ. Объединяя (5.17), (5.18) имеем систему $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \ \dfrac{\partial u}{\partial x}$:

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial u}{\partial t} + B\dfrac{\partial u}{\partial x} = f \\ dtE\dfrac{\partial u}{\partial t} + dxE\dfrac{\partial u}{\partial x} = du \end{cases} , \tag{5.19}$$

где E — единичная матрица.

Чтобы при произвольных f, du можно было разрешить указанную систему необходимо, чтобы определитель матрицы системы был отличен от нуля, то есть

$$\det \begin{Vmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{Vmatrix} \neq 0 \ .$$

Определение 5.5.2 *Линии, вдоль которых*

$$\det \begin{Vmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{Vmatrix} = 0$$

(dt, dx — дифференциалы смещения вдоль линий), называются ***характеристиками системы*** *(5.17).*

Если γ — характеристика, то система (5.19) тем не менее может иметь решение, однако не при любом значении u, заданном на γ. Из теоремы Кронекера-Капелли следует, что решение (5.19) существует, если

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \end{Vmatrix} = \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{Vmatrix} \ .$$

Это соотношение называется **соотношением на характеристике**.

Примеры

а) Система уравнений акустики

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \rho, c - \text{const} \ . \tag{5.20}$$

В матричном виде система примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/\rho \\ \rho c^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Уравнение характеристик имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 1 & \rho c^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = (dx - cdt)(dx + cdt) = 0 \ ,$$

то есть $dx \pm cdt = 0$ и, следовательно, характеристики — линии $x \pm ct = \mathrm{const}$.

Чтобы удовлетворить соотношению на характеристике, должно выполняться равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho c^2 & 0 \\ dt & 0 & dx & du \\ 0 & dt & 0 & dp \end{vmatrix} = dxdp + \rho c^2 dudt = 0$$

Если $dx = \pm cdt$, то $d(u \pm p/(\rho c)) = 0$, то есть вдоль прямых $x \pm ct = const$ выражение $u \pm p/(\rho c) = const$.

Замечание. Соотношения на характеристиках иногда позволяют найти решение системы уравнений. Предположим, что система уравнений акустики имеет решение. Тогда, как было показано, вдоль характеристик, то есть вдоль прямых $x \pm ct = M$ выполняется условие $u \pm p/(\rho c) = N$, где $N, M = const$, то есть

$$\begin{aligned} u + \frac{p}{\rho c} &= f(x + ct)\ , \\ u - \frac{p}{\rho c} &= \varphi(x - ct)\ . \end{aligned}$$

Эти равенства как раз и означают, что вдоль характеристик соответствующие комбинации функций принимают постоянное значение, однако, для различных характеристик эти значения различны. Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\big(f(x + ct) + \varphi(x - ct)\big)\ , \\ p &= \frac{\rho c}{2}\big(f(x + ct) + \varphi(x - ct)\big)\ . \end{aligned} \tag{5.21}$$

Легко проверить теперь, что если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — любые непрерывно дифференцируемые функции, то функции $u(t, x)$, $p(t, x)$, определенные по формулам (5.21), являются решением системы (5.20).

б) Система Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0\ .$$

Уравнение характеристик имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ dx & 0 & dy & 0 \\ 0 & dx & 0 & dy \end{vmatrix} = (dy)^2 + (dx)^2 = 0\ .$$

Из полученного равенства следует, что у системы нет вещественных характеристик. Такие системы называются **эллиптическими**.

Вернемся к системе (5.17). В качестве кривой γ, на которой задается значение решения, обычно выбирается отрезок оси $t = 0$. Условие того, что этот отрезок не является характеристикой, означает, что $det A \neq 0$, то есть существует A^{-1}. Тогда систему (5.17) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A^{-1} B \frac{\partial u}{\partial x} = A^{-1} f$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} = g \ , \tag{5.22}$$

где $C = A^{-1}B$, $g = A^{-1}f$.

Уравнение характеристик запишется теперь

$$\det \begin{Vmatrix} E & C \\ dtE & dxE \end{Vmatrix} = dt^n \det \begin{Vmatrix} E & C \\ E & (dx/dt)E \end{Vmatrix} =$$

$$= dt^n \det \begin{Vmatrix} 0 & C-(dx/dt)E \\ E & (dx/dt)E \end{Vmatrix} = (-1)^n dt^n \det \begin{Vmatrix} C-(dx/dt)E \end{Vmatrix} = 0 \ .$$

Следовательно, характеристиками являются линии

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i \ ,$$

где λ_i — собственные числа матрицы C.

Если все собственные числа матрицы C различны и вещественны в некоторой области, то систему уравнений (5.22) будем называть ***гиперболической*** в этой области.

5.6 КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Постановка задач математической физики содержит помимо дифференциальных уравнений или систем некоторые дополнительные функции, назовем их входными условиями. Этими условиями являются, например, значение решения на некоторых кривых, поверхностях, которые задают для однозначного определения решения. Значения входных условий находятся из опыта и поэтому неизбежна некоторая погрешность в их определении. Эта погрешность будет сказываться на решении и не всегда погрешность в решении будет мала.

Определение 5.6.1 *Будем говорить, что задача* ***поставлена корректно****, если она разрешима при любых входных данных, принадлежащих некоторому классу, имеет единственное решение и это решение непрерывно зависит от входных данных.*

Последнее означает, что в пространствах входных данных и решений можно ввести расстояния, причем для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что если входные данные отличаются не более чем на $\delta(\varepsilon)$, то соответствующие им решения отличаются не более чем на ε. Это свойство задачи называется ***устойчивостью***.

Задача ***поставлена некорректно***, если она разрешима не при любых начальных данных из некоторого класса, либо имеет не единственное решение, либо нельзя выбрать такие расстояния, чтобы в них была непрерывная зависимость от входных данных.

Ниже приводятся примеры некорректных задач.

Пример Адамара (задача Коши для уравнения Лапласа)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , \quad u|_{t=0} = f(x) \ , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x)$$

Пусть
$$u_n = e^{-\sqrt{n}} e^{nt} \cos nx, \quad f_n = e^{-\sqrt{n}} \cos nx, \quad \varphi_n = n e^{-\sqrt{n}} \cos nx \ .$$

Легко проверить, что u_n — решение поставленной задачи с $f = f_n$, $\varphi = \varphi_n$, и, кроме того, функции $u_n(t,x) \to \infty$ при $n \to \infty$ и $t > 0$, в то время как $f_n(x), \varphi_n(x)$ и все их производные сходятся к 0 при $n \to \infty$. Таким образом, малое изменение начальных данных (по сравнению с нулевыми) приводит к большому (по сравнению с нулевым) изменению решения.

Аналогичное свойство выполняется и для обратной задачи теплопроводности, то есть для задачи определения истории изменения температуры тела по известному значению температуры в настоящий момент времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \quad u|_{t=0} = f(x), \ t < 0 \ .$$

Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно взять

$$u_n = e^{-\sqrt{n}} e^{-n^2 t} \sin nx \ , \quad f_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \sin nx.$$

В дальнейшем нас, прежде всего, будет интересовать вопрос о корректности постановки той или иной задачи для различных типов уравнений и систем.

5.7 ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 5

5.7.1 Примеры решения типовых задач

Пример 1. Привести к каноническому виду

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 12\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Решение. Для нахождения замены переменных составим квадратичную форму, соответствующую дифференциальному уравнению:

$$\Phi(p) = 4p_1^2 + 4p_1p_2 - 4p_1p_3 + 2p_2^2 - 4p_3^2 + 2p_2p_3.$$

Приведем полученную форму к каноническому виду путем выделения полных квадратов. Для этого сначала сгруппируем все слагаемые, содержащие p_1, и добавим к ним члены, недостающие до полного квадрата (необходимо не забыть вычесть эти слагаемые). Затем сгруппируем все оставшиеся слагаемые, содержащие p_2 и так далее. В результате получим

$$\Phi(p) = (4p_1^2 + 4p_1p_2 - 4p_1p_3 + p_2^2 + p_3^2 - 2p_2p_3) - p_2^2 - p_3^2 + 2p_2p_3 + 2p_2^2 - 4p_3^2 + 2p_2p_3 =$$
$$(2p_1+p_2-p_3)^2+(p_2^2+4p_2p_3+4p_3^2)-9p_3^2 = (2p_1+p_2-p_3)^2+(p_2+2p_3)^2-(3p_3)^2 = q_1^2+q_2^2-q_3^2,$$

где
$$q_1 = 2p_1 + p_2 - p_3, \quad q_2 = p_2 + 2p_3, \quad q_3 = 3p_3.$$

Выражая p_i через q_i, получим

$$p_1 = 1/2(q_1 - q_2 + q_3), \quad p_2 = q_2 - 2/3q_3, \quad p_3 = 1/3q_3.$$

Таким образом, матрица преобразования $\{\alpha^*_{ki}\}$ (см. обозначения параграфа 5.2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно ввести новые переменные

$$x_1 = 1/2x, \quad y_1 = -1/2x + y, \quad z_1 = 1/2x - 2/3y + 1/3z.$$

В соответствии с каноническим видом квадратичной формы коэффициенты при смешанных производных равны нулю. Коэффициенты при вторых производных по x_1 и y_1 равны 1, а при второй производной по z_1 коэффициент равен -1. Осталось вычислить коэффициенты при первых производных. Для этого воспользуемся формулой (5.4) с учетом того, что переменной x_1 в формуле соответствует переменная x в задаче, x_2 — y, x_3 — z, y_1 — x_1, y_2 — y_1, y_3 — z_1. Вторые производные функций, задающих новые переменные равны нулю. Кроме того $B_1 = -12,\ B_2 = B_3 = 0$. Поэтому коэффициент $\bar{B}_1$ при производной по x_1 равен $\bar{B}_1 = -12\dfrac{\partial x_1}{\partial x} = -12 \cdot 0.5 = -6$. Коэффициент $\bar{B}_2$ при производной по y_1 равен $\bar{B}_2 = -12\dfrac{\partial y_1}{\partial x} = -12 \cdot (-0.5) = 6$. Коэффициент $\bar{B}_3$ при производной по z_1 равен $\bar{B}_3 = -12\dfrac{\partial z_1}{\partial x} = -12 \cdot 0.5 = -6$.

Окончательно получаем уравнение в каноническом виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial {y_1}^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial {z_1}^2} - 6\frac{\partial v}{\partial x_1} + 6\frac{\partial v}{\partial y_1} - 6\frac{\partial v}{\partial z_1} = 0.$$

Уравнение является уравнением гиперболического типа.

Замечание. При приведении к каноническому виду уравнения

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 12\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

после вычислений, аналогичных предыдущим, получается квадратичная форма

$$4p_1^2 + 4p_1p_2 - 4p_1p_3 + 2p_2^2 + 5p_3^2 + 2p_2p_3 = (2p_1 + p_2 - p_3)^2 + (p_2 + 2p_3)^2 = q_1^2 + q_2^2.$$

Отсюда следует, что

$$q_1 = 2p_1 + p_2 - p_3, \quad q_2 = p_2 + 2p_3\ .$$

Для того, чтобы сделать замену переменных, необходимо ввести еще q_3. Это можно сделать произвольным образом, но так, чтобы матрица преобразования была невырожденной. Например, если, как это было сделано выше, взять $q_3 = 3p_3$, получим то же самое преобразование, что и выше и канонический вид уравнения будет

$$\frac{\partial^2 v}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial {y_1}^2} - 6\frac{\partial v}{\partial x_1} + 6\frac{\partial v}{\partial y_1} - 6\frac{\partial v}{\partial z_1} = 0\ ,$$

то есть это уравнение параболического типа.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. Используя обозначения параграфа 5.4 имеем $A = 1,\ B = 0,\ C = y$. Тип уравнения зависит от знака выражения $B^2 - AC$. В нашем примере $B^2 - AC = -y$. Поэтому, при $y > 0$ получаем эллиптическое уравнение, при $y < 0$ — гиперболическое, а при $y = 0$ — параболическое. Рассмотрим сначала случай $y < 0$. Для того, чтобы найти замену переменных запишем уравнения (5.15)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sqrt{-y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \sqrt{-y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0\ .$$

Это уравнения с частными производными первого порядка, однако, методы их решения изучаются в курсе "Обыкновенные дифференциальные уравнения". Для их решения записываются обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\sqrt{-y}}, \qquad \frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\sqrt{-y}}. \tag{5.23}$$

Решения этих уравнений представляют в виде, разрешенном относительно произвольных постоянных, то есть в виде

$$c_1 = x + 2\sqrt{-y}, \qquad c_2 = x - 2\sqrt{-y}, \tag{5.24}$$

откуда получаем решения уравнений (5.23) как произвольные функции от правых частей равенств (5.24). Поскольку нас интересуют какие-нибудь из этих решений, выберем

$$\varphi_1(x,y) = x + 2\sqrt{-y}, \qquad \varphi_2(x,y) = x - 2\sqrt{-y}\ .$$

Совершим теперь замену переменных $\xi = x + 2\sqrt{-y},\ \eta = x - 2\sqrt{-y}$ и по формулам (5.13) найдем коэффициенты преобразованного уравнения. Замена переменных выбрана так, что $\overline{A} = 0,\ \overline{C} = 0$.

$$\overline{B} = A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 1\cdot 1\cdot 1 - y\cdot(-y)^{-1/2}\cdot(-y)^{-1/2} = 2\ ,$$

$$\overline{D} = A\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\xi}{\partial x} + E\frac{\partial\xi}{\partial y} = 1\cdot 0 + y\cdot\frac{-1}{2}(-y)^{-3/2} = \frac{1}{2}(-y)^{-1/2} = \frac{2}{\xi - \eta}\ ,$$

$$\overline{E} = A\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + D\frac{\partial\eta}{\partial x} + E\frac{\partial\eta}{\partial y} = 1\cdot 0 + y\cdot\frac{1}{2}(-y)^{-3/2} = \frac{-1}{2}(-y)^{-1/2} = \frac{-2}{\xi - \eta}.$$

Подставляя полученные коэффициенты в (5.12) получим канонический вид дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi} - \frac{\partial v}{\partial\eta}\right) = 0, \quad \xi > \eta\ .$$

Пусть теперь $y > 0$. Возьмем любое из уравнений (5.23), например, первое. Его решение запишется в виде $\varphi(x,y) = x + 2i\sqrt{y}$, где $i^2 = -1$. Теперь следует сделать замену $\xi = x,\ \eta = 2\sqrt{y}$. Новые переменные подобраны так, что $\overline{A} = \overline{C}$ и $\overline{B} = 0$. Вычисляя по формулам (5.13), получим $\overline{A} = 1,\ \overline{D} = 0,\ \overline{E} = -\frac{1}{\eta}$. Таким образом, уравнение приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial v}{\partial\eta} = 0, \quad \eta > 0\ .$$

Пример 3. Привести к каноническому виду

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

.

Решение. Здесь $A=y^2,\ B=xy,\ C=x^2$, поэтому $B^2-AC=0$, следовательно уравнение параболического типа. Запишем уравнение (5.16):

$$y^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+xy\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Для его решения имеем

$$\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{xy},$$

откуда $c=1/2(x^2-y^2)$ и, следовательно, $\xi=1/2(x^2-y^2)$. Вторую функцию для замены выбираем произвольно, например, возьмем $\eta=1/2(x^2+y^2)$. Тогда в новых переменных уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}+\frac{\xi}{2(\xi^2-\eta^2)}\frac{\partial v}{\partial\xi}-\frac{\eta}{2(\xi^2-\eta^2)}\frac{\partial v}{\partial\eta}=0.$$

5.7.2 Задачи

1. Являются ли приведенные ниже равенства дифференциальными уравнениями с частными производными:

$$\text{а)}\quad \sin^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)+\cos^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)-u=0\ ,$$

$$\text{б)}\quad \sin^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)-\cos^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)-u=0\ ,$$

$$\text{в)}\quad \ln\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|+\ln\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|-\ln\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|+u-\sin(xy)=0\ .$$

2. Определить порядок уравнений:

$$\text{а)}\quad \sin^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)+\cos^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)+2\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=5e^x\ ,$$

$$\text{б)}\quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(u^2\Big)-2u\frac{\partial u}{\partial x}+2u\frac{\partial u}{\partial y}=(x^2+y^2)u\ ,$$

$$\text{в)}\quad \Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)^2=u^7-x^3y^6\ .$$

3. Определить, какие из следующих уравнений являются линейными однородны-

ми, линейными неоднородными, квазилинейными, нелинейными

а) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2+\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)^2=0$,

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big)^2=0$,

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=u^7-x^3y^6$,

г) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-x^3y^2u+\sin(x+y)=0$,

д) $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(y\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big)=u$,

е) $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(u\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big)-u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2+\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 (yu)}{\partial x^2}+u=0$.

4. Привести к каноническому виду уравнения второго порядка:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$,

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0$.

5. Показать, что поверхность $a(t-t_0)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2}$ является характеристической для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} .$$

6. Привести к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(3+\sin^2 x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$,

б) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,

в) $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

7. Доказать, что при переходе к цилиндрическим координатам оператор Лапласа $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ преобразуется к виду:

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} .$$

8. Показать, что если $\lambda_i\neq 0,\ i=1,\dots,n$, то замена

$$v(x_1,\dots,x_n)=u(x_1,\dots,x_n)\exp\left(0.5\sum_{i=1}^{n}b_ix_i/\lambda_i\right)$$

приводит уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f(x_1, \ldots, x_n),$$

где λ_i, b_i — константы, к виду

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial^2 v}{\partial {x_i}^2} + C_1 v = f_1(x_1, \ldots, x_n) \ .$$

9. Найти характеристики и соотношения на характеристиках для систем уравнений

$$\text{а)} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + v = 0 \ , \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} + u = 0 \ , \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \ , \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial t} - 3\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \ . \end{cases}$$

10. Является ли следующая система гиперболической

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} = f?$$

11. Найти условие гиперболичности системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \ , \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \delta \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \ . \end{cases}$$

5.7.3 Тест к главе 5

1. К какому типу относится волновое уравнение ?
а) параболическому;
б) гиперболическому;
в) эллиптическому.

2. Какая из перечисленных ниже задач является задачей Коши для уравнения второго порядка:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u, \ \ u(0, x) = x, \ u(10, x) = x^2;$

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = u - tx, \ u(x^2, x) = x, \ \dfrac{\partial u(x^3, x)}{\partial x} = x^2;$

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = tx, \ u(t, 1) = t, \ \dfrac{\partial u(t, 1)}{\partial x} = t^2$?

3. К какому типу относится уравнение

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x} \ ?$$

а) параболическому;
б) гиперболическому;
в) эллиптическому.

4. Для системы

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

характеристиками являются кривые:
а) $x + t = 4, \ x - 4t = 0$;
б) $x - t = 0, \ x + 4t = 1$;
в) $x = 0, \ t = 0$.

5. Какой является система в предыдущем вопросе?
а) параболической;
б) гиперболической;
в) эллиптической?

6. Какое из приведенных ниже высказываний является истинным:
а) для того, чтобы задача была поставлена корректно достаточно чтобы она имела решение;
б) для того, чтобы задача была поставлена корректно необходимо, но не достаточно, чтобы она имела единственное решение;
в) для того, чтобы задача была поставлена корректно достаточно, чтобы она имела единственное решение.

6 УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

6.1 ЗАДАЧА КОШИ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Рассмотрим ***уравнение колебания струны***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; . \tag{6.1}$$

Здесь $u(t, x)$ — величина отклонения точки с координатой x струны в момент времени t от положения покоя. Предполагается, что в состоянии покоя струна совпадает с осью x.

Положим $\xi = x - at, \; \eta = x + at$. Легко видеть, что прямые $x \pm at = const$ являются характеристиками уравнения (6.1). В новых переменных уравнение перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0 \; .$$

Отсюда, интегрируя, получим, что

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \Theta(\eta) \; ,$$

где $\Theta(\eta)$ — произвольная функция. После повторного интегрирования, учитывая, что интеграл от произвольной функции — произвольная функция, имеем

$$v = \Theta_1(\xi) + \Theta_2(\eta) \; ,$$

или в старых переменных

$$u(t, x) = \Theta_1(x - at) + \Theta_2(x + at) \; . \tag{6.2}$$

Легко проверить путем дифференцирования, что для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций Θ_1, Θ_2 функция $u(t, x)$, определенная формулой (6.2), является решением уравнения (6.1). Формула (6.2) называется ***формулой Даламбера.***

Таким образом, чтобы получить форму струны в различные моменты времени, достаточно изобразить графики функций $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x)$, затем сместить их графики на величину at соответственно вправо и влево и полученные смещенные графики сложить.

Найдем теперь решение уравнения (6.1), удовлетворяющее условиям Коши:

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{6.3}$$

считая, что струна не ограничена, то есть $|x| < \infty$. Первое из этих условий задает начальную форму струны, второе — скорости точек струны в начальный момент времени. Поэтому эти условия часто называют ***начальными.***

В решении (6.2) надо так подобрать функции Θ_1 и Θ_2, чтобы удовлетворить (6.3):

$$\Theta_1(x) + \Theta_2(x) = \varphi_0(x) \ , \tag{6.4}$$

$$-a\Theta_1'(x) + a\Theta_2'(x) = \varphi_1(x) \ . \tag{6.5}$$

Интегрируя равенство (6.5), находим

$$-\Theta_1(x) + \Theta_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_0^x \varphi_1(\xi)\,d\xi + c \ .$$

Из этого равенства и (6.4) получаем:

$$\begin{aligned} \Theta_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \varphi_1(\xi)\,d\xi - \frac{c}{2} \ , \\ \Theta_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \varphi_1(\xi)\,d\xi + \frac{c}{2} \ . \end{aligned} \tag{6.6}$$

Подставляя (6.6) в (6.2), имеем

$$u(t,x) = \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\xi)\,d\xi \ . \tag{6.7}$$

Формула (6.7) дает решения задачи Коши (6.1), (6.3), если $\varphi_0 \in C_2(-\infty,\infty)$, $\varphi_1 \in C_1(-\infty,\infty)$. Это утверждение легко проверяется путем подстановки (6.7) в (6.1), (6.3).

Можно заключить теперь, что задача Коши поставлена корректно если рассматривать ее на конечном промежутке времени длиной T. Действительно, показано, что решение существует при гладких начальных данных. Единственность следует из того, что, если решение существует, то, согласно приведенному выше выводу, оно должно иметь вид (6.7). Ясно также, что если $\overline{\varphi_0}$ и $\overline{\varphi_1}$ таковы, что $|\varphi_0 - \overline{\varphi_0}| < \varepsilon/2$, $|\varphi_1 - \overline{\varphi_1}| < \varepsilon/(2T)$, $0 \le t \le T$, то из (6.7) следует, что $|u - \overline{u}| < \varepsilon$, где $\overline{u}$ — решение задачи Коши с начальными данными $\overline{\varphi_0}, \overline{\varphi_1}$. Таким образом, имеет место непрерывная зависимость от начальных условий.

Формула (6.7) также называется ***формулой Даламбера*** для решения задачи Коши.

Рассмотрим теперь струну длины l, закрепленную на концах отрезка. Задача о колебании такой струны записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le l,\ t \ge 0 \ , \tag{6.8}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad 0 \le x \le l \ , \tag{6.9}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \tag{6.10}$$

Условия (6.10) заданы на концах струны и описывают закон движения крайних (граничных) точек струны. Поэтому их называют ***краевыми*** или ***граничными.*** Решение Даламбера (6.2) годится и теперь, однако определение Θ_1, Θ_2 по формулам (6.6) возможно не всегда из-за того, что φ_0, φ_1 определены лишь при $x \in [0, l]$, а величины $x \pm at$ могут принимать значения вне этого промежутка. Значит, для построения решения надо продолжить эти функции или, что эквивалентно, функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ на всю прямую. Физически, это сводится к нахождению такого начального возмущения бесконечной струны, чтобы движение ее участка $[0, l]$ было таким же, как если бы этот участок был закреплен на концах.

Из граничных условий имеем:

$$\Theta_1(-at) + \Theta_2(at) = 0\ , \qquad \Theta_1(l - at) + \Theta_2(l + at) = 0\ ,$$

или, обозначая at через x,

$$\Theta_1(-x) = -\Theta_2(x)\ , \qquad \Theta_2(l + x) = -\Theta_1(l - x)\ . \tag{6.11}$$

Так как при $x \in (0, l)$ функции Θ_1 и Θ_2 определены (см. формулы (6.6)), то первое из этих равенств позволяет доопределить Θ_1 на промежутке $[-l, 0]$, второе — Θ_2 для $x \in (l, 2l)$. Значит, обе функции могут быть определены на промежутке длины $2l$. Далее из (6.11) имеем

$$\Theta_2(2l + x) = -\Theta_1(l - (l + x)) = -\Theta_1(-x) = \Theta_2(x)\ ,$$
$$\Theta_1(x) = -\Theta_2(-x) = -\Theta_2(l - (l + x)) = \Theta_1(2l + x)\ ,$$

то есть функции периодические с периодом $2l$.

Так как $\varphi_0 = \Theta_1(x) + \Theta_2(x),\ \varphi_1 = a(\Theta_2'(x) - \Theta_1'(x))$, то они также периодические и, кроме того,

$$\varphi_0(-x) = \Theta_1(-x) + \Theta_2(-x) = -\Theta_2(x) - \Theta_1(x) = -\varphi_0(x)\ .$$

Дифференцируя первое из равенств (6.11), получим, что $\Theta_2'(x) = \Theta_1'(-x)$. Поэтому

$$\varphi_1(-x) = a(\Theta_2'(-x) - \Theta_1'(-x)) = a(\Theta_1'(x) - \Theta_2'(x)) = -\varphi_1(x),$$

то есть функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ следует продолжить сначала нечетным образом на промежуток $(-l, 0)$, а затем периодическим образом с периодом $2l$. Для непрерывности производных второго порядка функции $u(t, x)$ следует потребовать выполнение условий

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = \varphi_1(0) = \varphi_1(l) = \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0\ ,$$

которые называют ***условиями согласования начальных и граничных данных***.

Действительно, рассмотрим, например, границу $x = 0$. Из (6.10) следует, что на ней $u = \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Тогда, в силу (6.9), должны выполняться равенства $\varphi_0(0) = 0$, $\varphi_1(0) = 0$. Если же принять во внимание (6.8) и (6.9), то ${\varphi_0}''(0) = 0$, то есть начальные и граничные данные должны быть согласованы.

Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, легко доказать, что решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x > 0\ ,$$
$$u|_{x=0} = 0\ ,\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1\ ,\ \ u|_{t=0} = \varphi_0$$

задается также формулой Даламбера, функции φ_0, φ_1 при этом следует доопределить нечетным образом на отрицательные значения аргументов. В частности, в области, где $x - at < 0$ формула примет вид

$$u(t,x) = \frac{\varphi_0(at+x) - \varphi_0(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{at-x}^{at+x} \varphi_1(\xi)\, d\xi \ . \tag{6.12}$$

Замечание. Было отмечено, что функция определенная формулой (6.7) является решением задачи Коши, если φ_0, φ_1 гладкие. Если же φ_0, φ_1 не дифференцируемы достаточное число раз, то нельзя говорить о решении задачи, так как функцию $u(t,x)$, определенную формулой (6.7), нельзя подставить в уравнение. При решении некоторых конкретных физических задач может оказаться, что функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ не удовлетворяют условиям гладкости. Тогда нельзя утверждать, что существует решение. В этом случае приходится вводить понятие обобщенного решения. Для этого отметим, что, если немного изменить начальные условия φ_0, φ_1, заменив их дифференцируемыми функциями, то этим новым функциям уже будет соответствовать решение уравнения. Заметим также, что непрерывная зависимость от начальных данных была доказана без предположения о дифференцируемости φ_0, φ_1. Поэтому может оказаться, что при некоторых φ_0, φ_1 нет решения, однако есть функция, к которой можно приблизиться с помощью последовательности решений уравнения колебания с немного сглаженными начальными условиями. Полученные таким предельным переходом функции называются ***обобщенными решениями.***

Определение 6.1.1 *Функция $u(t,x)$ называется **обобщенным решением** задачи (6.1), (6.3), если она является пределом равномерно сходящейся последовательности функций $u_n(t,x)$, таких, что $u_n(t,x)$ удовлетворяет уравнению (6.1) и*

$$u_n|_{t=0} = \varphi_{0n}(x), \quad \left.\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_{1n}(x) \ ,$$

а $\varphi_{0n}(x), \varphi_{1n}(x)$ — гладкие функции, равномерно сходящиеся к $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ соответственно.

Поскольку

$$u_n(t,x) = \frac{\varphi_{0n}(x-at) + \varphi_{0n}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_{1n}(\xi)\, d\xi \ ,$$

переходя в этом равенстве к пределу с учетом равномерной сходимости, получим, что обобщенное решение также определяется формулой (6.7).

6.2 ФОРМУЛА КИРХГОФА

Перейдем к выводу формулы для решения волнового уравнения в трехмерном случае:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \ , \\ u|_{t=0} = \varphi_0(x,y,z) \ , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x,y,z) \ . \end{gathered} \tag{6.13}$$

Будем считать, что решение задачи существует, и попытаемся найти формулу, задающую это решение. Введем функцию

$$\overline{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r} u(t,x,y,z)ds = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} u(t,x_0+\alpha r, y_0+\beta r, z_0+\gamma r)\,d\omega\ ,$$

где S_r — сфера радиуса r с центром в точке (x_0,y_0,z_0); ds — элемент площади сферы радиуса r; α,β,γ — координаты точки на единичной сфере; $d\omega = \dfrac{1}{r^2}ds$ — элемент площади единичной сферы.

Запись $\overline{u}$ в сферической системе координат имеет вид

$$\overline{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} u(t, x_0 + r\sin\Theta\cos\varphi, y_0 + r\sin\Theta\sin\varphi, z_0 + r\cos\Theta)\sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi\ .$$

Предположим, что решение задачи (6.13) существует. Подставим его в уравнение и проинтегрируем полученное тождество по шару D с центром в точке x_0, y_0, z_0, радиуса r. Интеграл по шару в левой части тождества запишем как интеграл по сфере радиуса ρ, который изменяется от 0 до r. Кроме того, поменяем в нем порядок интегрирования и дифференцирования. К правой части применим формулу Гаусса-Остроградского. В результате получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^r\iint\limits_{S_\rho} u\,dsd\rho == a^2\iint\limits_{S_r}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z}\right)ds =$$

$$= a^2\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} r^2\frac{\partial}{\partial r}u(t,x_0+\alpha r, y_0+\beta r, z_0+\gamma r)\,d\omega =$$

$$= a^2 r^2\frac{\partial}{\partial r}\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} u(t,x_0+\alpha r, y_0+\beta r, z_0+\gamma r)\,d\omega = a^2r^2 4\pi\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}\ .$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^r\iint\limits_{S_\rho} u\,dsd\rho = 4\pi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^r \rho^2\overline{u}(t,\rho)\,d\rho\ ,$$

имеем

$$\int\limits_0^r \rho^2\frac{\partial^2\overline{u}(t,\rho)}{\partial t^2}\,d\rho = a^2r^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}\ .$$

Дифференцируя обе части этого равенства по r и сокращая на r^2, получим

$$\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}\right)\ . \tag{6.14}$$

Если обозначить $\overline{\overline{u}} = \overline{u}r$, то

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\overline{\overline{u}}}{\partial r} - \frac{\overline{\overline{u}}}{r^2}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}) = r\frac{\partial^2\overline{\overline{u}}}{\partial r^2} + \frac{\partial\overline{\overline{u}}}{\partial r} - \frac{\partial\overline{\overline{u}}}{\partial r} = r\frac{\partial^2\overline{\overline{u}}}{\partial r^2}\ .$$

Отсюда и из (6.14) имеем:

$$\frac{\partial^2\overline{\overline{u}}}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\overline{\overline{u}}}{\partial r^2}\ ,\quad r>0\ .$$

Очевидно, что при $r=0$ выполняется равенство $\overline{\overline{u}}(0,t)=0$. Из начальных условий для u находим:

$$\overline{\overline{u}}|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r}\iint\limits_{S_r} u(0,x,y,z)\,ds = \frac{1}{4\pi r}\iint\limits_{S_r} \varphi_0(x,y,z)\,ds = \Phi_0(r)\ ,$$

$$\left.\frac{\partial\overline{\overline{u}}}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r}\iint\limits_{S_r} \frac{\partial}{\partial t}u(0,x,y,z)\,ds = \frac{1}{4\pi r}\iint\limits_{S_r} \varphi_1(x,y,z)\,ds = \Phi_1(r)\ .$$

Таким образом, для функции $\overline{\overline{u}}(t,r)$ пришли к задаче, рассмотренной в конце предыдущего параграфа. Используя формулу (6.12), имеем при $at>r$:

$$\overline{\overline{u}}(t,r) = \frac{\Phi_0(r+at)-\Phi_0(at-r)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-r}^{at+r}\Phi_1(\xi)\,d\xi\ .$$

Заметим, что $\lim_{r\to 0}\overline{u}(t,r) = u(t,x_0,y_0,z_0,)$. Действительно, это легко следует из представления функции $\overline{u}$ в сферической системе координат. Поэтому, учитывая полученное представление для функции $\overline{\overline{u}}(t,r)$, имеем:

$$u(t,x_0,y_0,z_0,) = \overline{u}(t,0) = \lim_{r\to 0}\frac{\overline{\overline{u}}(t,r)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{\overline{\overline{u}}(t,r)-\overline{\overline{u}}(t,0)}{r} =$$

$$= \frac{\partial\overline{\overline{u}}(t,0)}{\partial r} = \Phi_0'(at) + \frac{1}{a}\Phi_1(at)\ .$$

Используя определение Φ_0, Φ_1 получаем:

$$u(t,x_0,y_0,z_0,) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{4\pi r}\iint\limits_{S_r(x_0,y_0,z_0)}\varphi_0(x,y,z)\,ds\right]_{r=at} +$$

$$+\left[\frac{1}{4\pi a r}\iint\limits_{S_r(x_0,y_0,z_0)}\varphi_1(x,y,z)\,ds\right]_{r=at} =$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{at}\iint\limits_{S_{at}}\varphi_0\,ds\right) + \frac{1}{at}\iint\limits_{S_{at}}\varphi_1\,ds\right]\ .$$

Полученная формула называется ***формулой Кирхгофа.*** В силу произвольности выбора точки x_0, y_0, z_0 имеем формулу для нахождения решения в любой точке области.

Покажем, что формула Кирхгофа действительно дает решение задачи Коши. Такое обоснование необходимо, так как при выводе формулы предполагалось, что решение задачи Коши существует.

Лемма 6.2.1 *Пусть U дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда функция*

$$V(t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at(x_0,y_0,z_0)}} U(x,y,z)\,ds$$

обладает свойствами

$$V(0)=0\ ,\quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = U(x_0,y_0,z_0)\ ,\quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right|_{t=0} = 0\ .$$

Доказательство. Записав представление функции $V(t)$ в сферической системе координат и используя формулу Тейлора, имеем:

$$
\begin{aligned}
V(t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} U(x_0+ \\
&+ at\sin\Theta\cos\varphi\ , y_0 + at\sin\Theta\sin\varphi\ , z_0 + at\cos\Theta)a^2t^2\sin\Theta\, d\Theta d\varphi = \\
&= \frac{t}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin\Theta\Big[U_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x}at\cos\varphi\sin\Theta + \frac{\partial U_0}{\partial y}at\sin\varphi\sin\Theta + \\
&\quad + \frac{\partial U_0}{\partial z}at\cos\Theta + \frac{a^2t^2}{2}\left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}\sin^2\Theta\cos^2\varphi + \ldots\right. \\
&\quad \left.\cdots + 2\frac{\partial^2 U_0}{\partial y\partial z}\sin\varphi\sin\Theta\cos\Theta\right) + o(t^2)\Big]\, d\Theta d\varphi = tU_0 + At^3 + o(t^3)\ ,
\end{aligned}
$$

где индекс "0"означает, что функция вычислена в точке (x_0, y_0, z_0). Из полученной формулы следует утверждение леммы.

Применяя лемму к формуле Кирхгофа, получим, что функция, определенная этой формулой, удовлетворяет начальным условиям задачи (6.13).

Лемма 6.2.2 *Пусть $u(t,x,y,z)$ — гладкое решение уравнения (6.13). Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ также удовлетворяет уравнению (6.13).*

Доказательство. Пусть $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$. Тогда

$$
\frac{\partial^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}}{\partial t^2} - a^2\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u\right) = 0\ ,
$$

что и требовалось доказать.

Благодаря лемме достаточно показать, что функция вида

$$
u(t,x,y,z) = \frac{1}{at}\iint\limits_{S_{at(x,y,z)}} U(\xi,\eta,\zeta)\, ds
$$

является решением волнового уравнения.

Запишем u в виде

$$
u(t,x,y,z) = at\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} U(x+\alpha at, y+\beta at, z+\gamma at)\, d\omega \tag{6.15}
$$

и продифференцируем по t

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{u}{t} + a^2t\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1}\left(\alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \beta\frac{\partial U}{\partial y} + \gamma\frac{\partial U}{\partial z}\right)d\omega = \\
&= \frac{u}{t} + a^2t\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1}\frac{\partial U}{\partial N}\, d\omega = \frac{u}{t} + \frac{1}{t}\iint\limits_{S_{at}}\frac{\partial U}{\partial N}\, ds\ ,
\end{aligned}
$$

где N — внешняя единичная нормаль к поверхности шара. По формуле Гаусса-Остроградского тогда получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u}{t}+\frac{1}{t}\iiint\limits_{D_{at}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta=\frac{u}{t}+\frac{I}{t}\ .$$

Дифференцируя это равенство еще раз по t, имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u}{t}+\frac{I}{t}\right)=-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{u}{t}+\frac{I}{t}\right)+\frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}-\frac{1}{t^2}I=\frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}\ .$$

Так как

$$I=\iiint\limits_{D_{at}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta=\int\limits_0^{at}\iint\limits_{S_\rho}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)ds\,d\rho\ ,$$

то

$$\frac{\partial I}{\partial t}=a\iint\limits_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)ds\ .$$

Следовательно, окончательно имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a}{t}\iint\limits_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right)ds=a^2\Delta u\ .$$

Последнее равенство проверяется простым дифференцированием функции u, записанной в виде (6.15).

Из рассуждений этого параграфа следует, что если $\varphi_0\in C_3(R^3),\varphi_1\in C_2(R^3)$, то задача (6.13) имеет решение, которое определяется формулой Кирхгофа. Это решение единственно (согласно выводу формулы). Так же как и для формулы Даламбера проверяется непрерывная зависимость от начальных данных.

6.3 МЕТОД СПУСКА. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

6.3.1 Для получения решения задачи о колебании мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\ ,\quad u|_{t=0}=\varphi_0(x,y)\ ,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x,y)$$

заметим, что ее решение является одновременно и решением задачи (6.13), так как можно формально считать, что функция u зависит еще и от переменной z и при всех значениях z принимает одно и то же значение. Значит, решение этой задачи определяется формулой Кирхгофа и остается только упростить соответствующую формулу.

Пусть $U(x,y)$ не зависит от z. Тогда

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}U(x+at\sin\Theta\cos\varphi,y+at\sin\Theta\sin\varphi)a^2t^2\sin\Theta\,d\Theta\,d\varphi=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}U(x+at\sin\Theta\cos\varphi,y+at\sin\Theta\sin\varphi)a^2t^2\sin\Theta\,d\Theta\,d\varphi\ .$$

Действительно, внутренний интеграл представляет собой функцию вида $f(\sin\Theta)$ и поэтому требуемое утверждение следует из равенств

$$\int\limits_0^{\pi} f(\sin\Theta)d\Theta = \int\limits_0^{\pi/2} f(\sin\Theta)d\Theta + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin\Theta)d\Theta \ ,$$

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} f(\sin\Theta)d\Theta = \left|{}^{\alpha=\pi-\Theta}_{d\alpha=-d\Theta}\right| = -\int\limits_{\pi/2}^{0} f\left(\sin(\pi-\alpha)\right)d\alpha = \int\limits_0^{\pi/2} f(\sin\alpha)d\alpha \ .$$

Пусть $at\sin\Theta = \rho$. Тогда, учитывая, что $\Theta \in (0, \pi/2)$, имеем

$$d\rho = at\cos\Theta\, d\Theta \ ,$$

$$\cos\Theta = \sqrt{1-\sin^2\Theta} = \sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2t^2}} = \frac{1}{at}\sqrt{a^2t^2-\rho^2} \ .$$

Поэтому

$$I = 2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2} U(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{at\sin\Theta}{\cos\Theta}at\cos\Theta\, d\Theta\, d\varphi =$$

$$= 2at\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{at} U(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\,d\rho\, d\varphi \ .$$

Подставляя эти формулы в формулу Кирхгофа, получим

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{at}\varphi_0(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\,d\rho\, d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{at}\varphi_1(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\,d\rho\, d\varphi\right) \ .$$

Полученная формула носит название ***формулы Пуассона***. Заметим, что областью интегрирования в формуле Пуассона является круг с центром в точке (x, y) радиуса at.

6.3.2 Проанализируем формулы Кирхгофа, Пуассона и Даламбера.

Пусть начальные данные отличны от 0 только в некоторой ограниченной области Ω и точка A не принадлежит Ω. Тогда в точке A возмущение среды будет равно 0, при достаточно малых t (так как решение — это интеграл по сфере с центром в точке A, а при малых t сфера с Ω не пересекается). С ростом t сфера начнет пересекаться с Ω и в точке A решение u станет отличным от 0. Затем, когда область Ω попадает целиком во внутрь сферы, решение в точке A снова равно нулю.

Аналогичное рассмотрение можно провести в двумерном случае. Так же как и выше, сначала в точке A решение будет нулевым, затем начнет меняться. Однако в отличие от трехмерного случая, когда область Ω целиком попадает в круг, по которому производится интегрирование, оно, вообще говоря, будет отличным от нуля.

Для одномерного случая (формула Даламбера) решение ведет себя качественно как и в трехмерном случае, если $\varphi_1 \equiv 0$ и как в двумерном при $\varphi_1 \neq 0$.

Введем следующие понятия. ***Передний фронт волны*** в заданный момент t — это поверхность, отделяющая точки, которые еще не начали колебаться от точек, которые уже колеблются. Передний фронт — огибающая для семейства сфер, имеющих центры на поверхности области Ω, радиус которых at.

Задний фронт волны в заданный момент t — поверхность, отделяющая точки, которые еще колеблются, от точек, в которых колебание прекратилось.

В общем случае n измерений справедливо следующее утверждение (***принцип Гюйгенса***): *если n — нечетное и $n \neq 1$, то у волны есть передний и задний фронт, если же n — четное — есть передний и нет заднего.*

Замечание. ***Областью зависимости решения в точке*** A называется такая область, расположенная в области задания начальных данных, что изменение начальных данных вне этой области не приводит к изменению решения в точке A. Для всех рассмотренных в этом параграфе уравнений область зависимости конечна.

6.3.3 Рассмотрим теперь вопрос о решении задачи Коши для неоднородного уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(t,x) \ , \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \ , \quad \Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} \ , \\ u|_{t=0} = \varphi_0(x) \ , \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \ . \end{cases} \tag{6.16}$$

Очевидно, что $u = v + w$, где v — решение однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями, а w — решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta w + f, \quad w|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \ .$$

Функция v в зависимости от значения n определяется формулой Кирхгофа, Пуассона либо Даламбера.

Для нахождения w рассматривается вспомогательная задача

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \Delta z \ ,$$
$$z|_{t=\tau} = 0 \ , \quad \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=\tau} = f(\tau, x) \ , \quad z = z(t, x, \tau) \ .$$

Тогда $w = \int\limits_0^t z(t,x,\tau) d\tau$. Действительно,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = z(t,x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial z}{\partial t}(t,x,\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t \frac{\partial z}{\partial t}(t,x,\tau) d\tau \ ,$$

так как согласно первому начальному условию для z имеем $z(t,x,t) = 0$. Дифференцируя повторно по t, получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\, d\tau + \frac{\partial z(t,x,t)}{\partial t} \ .$$

Из второго начального условия для z

$$\frac{\partial z(t,x,t)}{\partial t} = f(t,x) \ .$$

Поэтому, учитывая уравнение для z,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} d\tau + f(t,x) = \int\limits_0^t a^2 \Delta z d\tau + f(t,x) =$$

$$= a^2 \Delta \int\limits_0^t z d\tau + f(t,x) = a^2 \Delta w + f(t,x) \ .$$

Кроме того, из выражений для w и $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ имеем, что при $t = 0$ эти функции принимают значение 0.

Для того, чтобы при нахождении z воспользоваться выведенными формулами, достаточно вместо t ввести новую переменную $t_1 = t - \tau$ и заметить, что $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t_1}$. Тогда для z получается задача

$$\frac{\partial^2 z}{\partial {t_1}^2} = a^2 \Delta z \ ,$$

$$z|_{t_1=0} = 0 \ , \quad \left. \frac{\partial z}{\partial t_1} \right|_{t_1=0} = f(\tau, x) \ ,$$

для решения которой формула уже получена.

Теперь легко выписать решение задачи (6.16). Например, при $n = 1$ имеем

$$u(t,x) = \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau \ .$$

6.4 ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В этом параграфе будет изучаться система

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial x} + Du = f \ ,$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n)^{\text{т}}$, C, D — матрицы, $f = (f_1, \ldots, f_n)^{\text{т}}$.

Покажем сначала как можно привести систему к специальному виду, называемому ***каноническим***. Поскольку по определению гиперболической системы C — матрица, имеющая n различных действительных собственных чисел λ_i, существует n линейно независимых собственных векторов z_i матрицы C. Пусть $z_i = (z_{1i}, \ldots, z_{ni})^{\text{т}}$ — собственные вектора матрицы C, то есть $C z_i = \lambda_i z_i$ Составим матрицу Z, столбцами которой являются собственные вектора z_i и диагональную матрицу Λ, на диагонали которой стоят собственные числа.

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix} , \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Тогда $CZ = Z\Lambda$ и $Z^{-1}CZ = \Lambda$. Учитывая это, введем новые переменные $v = Z^{-1}u$. Так как $u = Zv$, имеем:

$$\frac{\partial Zv}{\partial t} + C\frac{\partial Zv}{\partial x} + DZv = f \ ,$$

$$Z^{-1}Z\frac{\partial v}{\partial t} + Z^{-1}CZ\frac{\partial v}{\partial x} + Z^{-1}\frac{\partial Z}{\partial t}v + Z^{-1}C\frac{\partial Z}{\partial x}v + Z^{-1}DZv = Z^{-1}f \ .$$

Таким образом, v является решением системы уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial v}{\partial x} + \bar{D}v = \bar{f} \ , \tag{6.17}$$

где $\bar{D} = Z^{-1}\left(\frac{\partial Z}{\partial t} + C\frac{\partial Z}{\partial x} + DZ\right), \quad \bar{f} = Z^{-1}f$.

Полученная система уравнений характерна тем, что в i-ом уравнении дифференцируется только одна функция v_i. Такой вид системы называется ***каноническим***, а переменные v_i называются ***инвариантами Римана.***

В дальнейшем будем считать, что система записана в каноническом виде и будем опускать черту у матрицы D и вектора f.

Покажем, как можно оценить решение. Умножим систему скалярно на $2v$:

$$2\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v\right) + 2\left(\Lambda\frac{\partial v}{\partial x}, v\right) + 2(Dv, v) = 2(f, v).$$

Заметим, что

$$2\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v\right) = \frac{\partial}{\partial t}(v, v),$$

$$\left(2\Lambda\frac{\partial v}{\partial x}, v\right) = \left(\Lambda\frac{\partial v}{\partial x}, v\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \Lambda v\right) =$$

$$= \left(\Lambda\frac{\partial v}{\partial x}, v\right) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x}v, v\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \Lambda v\right) - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x}v, v\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\Lambda v, v) - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x}v, v\right) \ .$$

Здесь учитывалось, что матрица Λ — диагональная и, следовательно, симметричная. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(v, v) + \frac{\partial}{\partial x}(\Lambda v, v) + (\widetilde{D}v, v) = 2(f, v) \ ,$$

где $\widetilde{D} = 2D - \frac{\partial \Lambda}{\partial x}$. Проинтегрируем это равенство по некоторой области Ω с границей Γ, находящейся в плоскости (t, x). Предполагается, что в этой области решение существует. Тогда, используя формулу Грина, получим

$$\int\limits_{\Gamma} (\Lambda v, v)\, dt - (v, v)\, dx + \iint\limits_{\Omega} (\widetilde{D}v, v)\, dt\, dx = 2\iint\limits_{\Omega} (f, v)\, dt\, dx \ .$$

Это равенство называется ***интегралом энергии*** для системы (6.17). Пусть

$$\underline{\lambda} = \min_{i=1,\dots,n} \lambda_i,\ \overline{\lambda} = \max_{i=1,\dots,n} \lambda_i\ ,$$

a,b — числа, причем $a < b$. Обозначим через $\underline{X}(t)$ — решение задачи Коши $\underline{X}'(t) = \underline{\lambda},\ \underline{X}|_{t=0} = b$, а через $\overline{X}$ — решение задачи $\overline{X}'(t) = \overline{\lambda},\ \overline{X}|_{t=0} = a$.

В качестве Ω выберем область, ограниченную прямыми $t = t_1,\ t = t_2$ $(0 \le t_1 < t_2 \le T)$ и кривыми γ_1 и γ_2, уравнения которых $x = \overline{X},\ x = \underline{X}$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} (\Lambda v, v)\, dt - (v, v)\, dx =$$

$$= \int\limits_{t=t_2} (v, v)\, dx - \int\limits_{t=t_1} (v, v)\, dx + \int\limits_{\gamma_1 \cup \gamma_2} (\Lambda v, v)\, dt - (v, v)\, dx\ . \quad (6.18)$$

На γ_1 $dx = \overline{\lambda} dt$ и поэтому, учитывая, что обход границы совершается против часовой стрелки

$$\int\limits_{\gamma_1} (\Lambda v, v)\, dt - (v, v)\, dx = -\int\limits_{t_2}^{t_1} \left(\left(\Lambda - \overline{\lambda} E\right) v, v\right)\ dt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\left(\overline{\lambda} E - \Lambda\right) v, v\right)\ dt \ge\ 0\ , \quad (6.19)$$

так как $\overline{\lambda} E - \Lambda$ – диагональная матрица с неотрицательными элементами.

Аналогично

$$\int\limits_{\gamma_2} (\Lambda v, v)\, dt - (v, v)\, dx \ge\ 0\ . \quad (6.20)$$

Обозначим $|v|^2 = (v, v)$. Тогда из (6.18)–(6.20) и интеграла энергии следует:

$$\int\limits_{t=t_2} |v|^2\, dx \le \int\limits_{t=t_1} |v|^2\, dx - \iint\limits_{\Omega} (\widetilde{D} v, v)\, dx\, dt + \iint\limits_{\Omega} 2(f, v)\, dx\, dt,$$

$$|(\widetilde{D} v, v)| \le \|\widetilde{D}\| |v|^2 \le M |v|^2\ ,$$

$$2 \iint\limits_{\Omega} |(f, v)|\, dx\, dt \le 2 \iint\limits_{\Omega} \sqrt{(f, f)} \sqrt{(v, v)}\, dx\, dt \le$$

$$\le 2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\int\limits_{t=const} (f, f)\, dx \int\limits_{t=const} (v, v)\, dx} dt \le N \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\int\limits_{t=const} |v|^2\, dx} dt\ ,$$

где $N = 2 \max\limits_{t} \sqrt{\int\limits_{t=const} |f|^2\, dx}$.

Итак, имеем окончательно

$$\int\limits_{t=t_2} |v|^2\, dx\ \le\ \int\limits_{t=t_1} |v|^2\, dx\ +\ M \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{t=const} |v|^2\, dx\, dt\ +\ N \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\int\limits_{t=const} |v|^2\, dx}\, dt\ . \quad (6.21)$$

Лемма 6.4.1 (Об интегральном неравенстве) *Пусть при* $0 \le t \le T$ *функция* $I(t) \ge 0$, *непрерывна и дифференцируема. Если она для любых* t_1, t_2 *таких, что* $0 \le t_1 < t_2 \le T$ *удовлетворяет неравенству*

$$I(t_2) \le I(t_1) + M \int\limits_{t_1}^{t_2} I(t)\, dt + N \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{I(t)\, dt}\ ,$$

где $M > 0, \quad N \ge 0$, *то*

$$\sqrt{I(t)} \le \sqrt{I(0)} e^{Mt/2} t + \frac{N}{M}(e^{Mt/2} - 1).$$

Доказательство. Используя теорему о среднем, из условия леммы получаем:

$$\frac{I(t_2) - I(t_1)}{t_2 - t_1} \le \frac{1}{t_2 - t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} (MI + N\sqrt{I}) dt = MI(t^*) + N\sqrt{I(t^*)}\ ,$$

где t^* — точка, лежащая между t_1 и t_2. Переходя теперь к пределу при $t_1, t_2 \to t$, имеем

$$\frac{dI}{dt} \le MI(t) + N\sqrt{I(t)}\ . \tag{6.22}$$

Пусть $\hat{t} \in [0, T]$. Если $I(\hat{t}) = 0$, то для такого значения утверждение леммы выполнено. Если $I(\hat{t}) > 0$, то пусть

$$t_1 = \begin{cases} 0, \text{ если } \ I(t) > 0 \text{ для всех } t \in (0, \hat{t})\ , \\ \max\limits_{t < \hat{t}} t, \ t \text{ таково, что } I(t) = 0\ . \end{cases}$$

Тогда на интервале $(t_1, \hat{t})$ функция $I(t) \neq 0$ и, разделив (6.22) на $2\sqrt{I(t)}$, получим

$$\frac{d\sqrt{I(t)}}{dt} \le \frac{M}{2}\sqrt{I(t)} + \frac{N}{2}\ .$$

Умножим обе части неравенства на $e^{-Mt/2}$

$$e^{-Mt/2} \left(\frac{d\sqrt{I}}{dt} - \frac{M}{2}\sqrt{I} \right) \le e^{-Mt/2} \frac{N}{2}\ .$$

Перепишем это неравенство в виде

$$\frac{d(e^{-Mt/2}\sqrt{I(t)})}{dt} \le \frac{N}{2} e^{-Mt/2}$$

и проинтегрируем по t от t_1 до $\hat{t}$:

$$e^{-M\hat{t}/2}\sqrt{I(\hat{t})} - e^{-Mt_1/2}\sqrt{I(t_1)} \le \frac{N}{M}\left[e^{-Mt_1/2} - e^{-M\hat{t}/2} \right]\ .$$

После простых преобразований получаем:

$$\sqrt{I(\hat{t})} \le \sqrt{I(t_1)} e^{M(\hat{t} - t_1)/2} + \frac{N}{M}\left[e^{M(\hat{t} - t_1)/2} - 1 \right]\ .$$

Так как $\hat{t} - t_1 \le \hat{t}$ и $I(t_1) \le I(0)$, отсюда следует требуемое неравенство.

Вернемся теперь к (6.21). Если $I(t) = \int\limits_{t=const} |v|^2\,dx$, то согласно лемме

$$\sqrt{\int\limits_{t=const} |v|^2\,dx} \le \sqrt{\int\limits_{t=0} |v|^2\,dx}\, e^{Mt/2} + \frac{N}{M}\left(e^{Mt/2} - 1\right) \ . \tag{6.23}$$

Полученная оценка решения v называется ***априорной оценкой***. Она позволяет оценить решение v (не находя самого решения) через исходные данные задачи Коши: правую часть f и начальные данные $v(0,x)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial v}{\partial x} + Dv = f,\ v|_{t=0} = v_0 \ . \tag{6.24}$$

Используя априорную оценку, легко доказать единственность решения задачи Коши. Пусть существуют два решения v_1 и v_2 одной и той же задачи Коши. Тогда $v = v_1 - v_2$ — решение задачи Коши для однородного уравнения и нулевых начальных условий. Используем для v оценку (6.23). При этом учтем, что поскольку $f = 0$, то $N \equiv 0$ и так как начальные условия нулевые, то $\int\limits_{t=0} |v|^2\,dx = 0$. Поэтому получим, что всюду в области, ограниченной кривыми $x = \overline{X},\ x = \underline{X}$, выполняется равенство $\int\limits_{t=const} |v|^2\,dx = 0$, то есть $v \equiv 0$.

Аналогично тому, как в обыкновенных дифференциальных уравнениях доказывалась теорема существования решения задачи Коши с использованием теоремы Банаха о неподвижной точке, можно доказать следующую теорему существования.

Теорема 6.4.1 *Пусть $t \in [0,T], |x| < \infty$. Если $\Lambda(t,x), D(t,x), f(t,x), v_0(x)$ непрерывно дифференцируемые функции, то задача Коши (6.24) имеет единственное решение.*

Докажем теперь непрерывную зависимость решения задачи Коши от входных данных Пусть $\bar{v} = v + \delta v$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + D\bar{v} = \bar{f},\ \bar{v}|_{t=0} = \bar{v}_0 \ , \tag{6.25}$$

где $\bar{f} = f + \delta f, \quad \bar{v}_0 = v_0 + \delta v_0$. Вычитая из системы (6.25) систему (6.24), получим, что δv является решением задачи Коши

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial \delta v}{\partial x} + D\delta v = \delta f,\ \delta v|_{t=0} = \delta v_0 \ .$$

Применяя теперь априорную оценку (6.23) к решению этой задачи и вспоминая определение N получим

$$\sqrt{\int\limits_{t=const} (\delta v)^2\,dx} \le \sqrt{\int\limits_{t=0} (\delta v_0)^2\,dx}\, e^{Mt/2} + \frac{2}{M}\max_t \sqrt{\int\limits_{t=const} (\delta f)^2\,dx}\,\left(e^{Mt/2} - 1\right) \ .$$

Из этого неравенства следует, что $\delta v \to 0$ при $\delta v_0, \delta f \to 0$. Таким образом, суммируя все, что было установлено в этом параграфе, можно сделать вывод о корректности постановки задачи Коши (6.24).

6.5 НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ. УСЛОВИЯ НА РАЗРЫВАХ

Задача построения и даже определения существования решения значительно усложняется, если от рассмотрения линейных уравнений и систем уравнений перейти к изучению нелинейных уравнений. В частности, для систем квазилинейных гиперболических уравнений еще не до конца создана строгая математическая теория. Не существует даже теорем, устанавливающих существование и единственность решения, вернее эти теоремы доказаны для частных случаев.

Поясним трудности, которые встречаются при построении теории нелинейных дифференциальных уравнений на примере простейшего квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{6.26}$$

(напомним, что квазилинейность означает линейное вхождение в уравнение производных).

Прежде всего напомним, как в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений решалось уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x)\ .$$

Сначала через каждую точку $(0, x_0)$ проводилась кривая, удовлетворяющая уравнению $dx/dt = a(t,x)$. Обозначим эту кривую $x = X(t, x_0)$.

Тогда вдоль кривой уравнение записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dX}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du(t,X)}{dt} = 0\ ,$$

то есть вдоль кривой функция u принимает постоянное значение и поэтому

$$u(t, X(t, x_0)) = u_0(x_0).$$

Если нас интересует решение в виде $u = u(t,x)$, то необходимо разрешить равенство $x = X(t,x_0)$ относительно x_0, то есть получить $x_0 = X^{-1}(t,x) = x_0(t,x)$ [1]. Тогда $u(t,x) = u_0(x_0(t,x))$. Кривая $x = X(t,x_0)$ называлась ***характеристикой***.

Точно так же следует поступить при решении задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u|_{t=0} = u_0(x)\ . \tag{6.27}$$

Рассмотрим кривую $dx/dt = u(t,x)$, проходящую через точку $t = 0,\ x = x_0$. Для того, чтобы определить эту кривую, надо, конечно, знать функцию $u(t,x)$, которая нам неизвестна. Однако предположим, что мы нашли эту функцию и кривую $x = X(t,x_0)$. Тогда вдоль нее $du/dt = 0$, то есть $u = const = u_0(x_0)$. Значит, вдоль решения задачи $dx/dt = u(t,x),\quad x|_{t=0} = x_0$ правая часть постоянная и равна $u_0(x_0)$, то есть $dX/dt = u_0(x_0)$ и значит $X(t,x_0) = x_0 + tu_0(x_0),\quad u(t, X(t,x_0)) = u_0(x_0)$. Следовательно, для уравнения (6.26) характеристики — это прямые линии.

При изучении систем линейных уравнений с одной пространственной переменной формулировалась теорема существования, согласно которой, если начальные данные непрерывно дифференцируемы, решение задачи Коши существует и является

[1]Здесь $X^{-1}(t,x)$ означает обратную к $X(t,x)$ функцию при фиксированном значении t.

непрерывно дифференцируемым, причем решение существует в любом интервале $0 \le t \le T$, где T — любое фиксированное число.

Для квазилинейных систем, в частности, уже для простейшего уравнения дело может обстоять иначе. Пусть, например, $u_0(x)$ — монотонно убывающая, гладкая функция. Возьмем две точки x_0^1, x_0^2 такие, что $x_0^1 < x_0^2$. Тогда $u_0(x_0^1) > u_0(x_0^2)$.

Рассмотрим характеристики, выходящие из точек x_0^1, x_0^2.

$$x = x_0^1 + u_0(x_0^1)t,\ x = x_0^2 + u_0(x_0^2)t\ .$$

Так как $\left(u_0(x_0^1)\right)^{-1} < u_0(x_0^2)^{-1}$, то угловой коэффициент прямой, выходящей из точки x_0^1 (считая угол между осью x и характеристикой), меньше чем угловой коэффициент прямой, выходящей из точки x_0^2. Следовательно, эти прямые пересекутся. В точке А пересечения прямых с одной стороны $u(A) = u_0(x_0^1)$, с другой $u(A) = u_0(x_0^2)$, то есть решение терпит разрыв и, значит, для произвольного промежутка времени $[0, T]$ непрерывного решения не существует. Следовательно, не для любых, даже очень гладких начальных данных существует непрерывное решение.

В связи с этим встает вопрос каким-то образом обобщить понятие решения, чтобы в понятие решения включить, в частности, такие разрывные решения.

Пусть $\varphi(t, x)$ — произвольная гладкая функция, отличная от нуля только на ограниченном множестве. Перепишем уравнение (6.26) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0\ ,$$

умножим его на $\varphi(t, x)$ и проинтегрируем по области $R_2^+ = \{(t, x),\ t \ge 0, |x| < \infty\}$. После интегрирования по частям, учитывая ограничение на функцию $\varphi(t, x)$, получим

$$\iint\limits_{R_2^+} \left(u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dxdt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(0, x)u_0(x)dx = 0\ . \tag{6.28}$$

Заметим, что если для любой функции φ, удовлетворяющей описанным выше условиям, справедливо (6.28) с функцией $u(t, x)$, имеющей непрерывные производные, то, интегрируя (6.28) по частям, имеем

$$-\iint\limits_{R_2^+} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}\right) \varphi dxdt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(0, x)\left(u_0(x) - u(0, x)\right) dx = 0\ . \tag{6.29}$$

Отсюда, выбирая сначала φ так, что $\varphi(0, x) = 0$, получаем, что для любой функции φ первое слагаемое равно нулю. Из того, что φ произвольно, можно сделать вывод о том, что равно нулю выражение, стоящее в скобке в первом интеграле, то есть функция $u(t, x)$ является решением уравнения (6.26) [2]. Пусть теперь $\varphi(0, x) \ne 0$. Так как $u(t, x)$ — решение уравнения (6.26), первый интеграл в левой части (6.29) равен 0. Поэтому при любом значении $\varphi(0, x)$ равен нулю второй интеграл в левой части (6.29), откуда следует, что $u(0, x) = u_0(x)$. Таким образом, доказано, что для гладких функций $u(t, x)$ всякая функция, удовлетворяющая (6.27), удовлетворяет (6.28) и наоборот. Однако в соотношении (6.28) функция u не дифференцируется и поэтому можно говорить о подстановке в (6.28) даже разрывных функций.

[2] Доказательство этого факта аналогично доказательству леммы 4.2.3

Определение 6.5.1 ***Обобщенным решением*** *задачи (6.27) называется функция $u(t,x)$, удовлетворяющая уравнению (6.28) при любой гладкой функции $\varphi(t,x)$, отличной от нуля только на ограниченном множестве.*

При определении обобщенного решения надо еще оговориться о том, какой допускается класс функций $u(t,x)$. Договоримся, что что мы будем рассматривать только такие функции $u(t,x)$, которые в ограниченной части полуплоскости $t \geq 0$ имеют только конечное число точек и линий разрыва, вне этих точек и линий они обладают непрерывными производными. Потребуем, кроме того, чтобы на линии разрыва существовали левые и правые предельные значения.

Выведем соотношения, которым должны удовлетворять левые и правые предельные значения $u(t,x(t)-0) = u_-$, $\ u(t,x(t)+0) = u_+$ на линии $x = x(t)$, если $x = x(t)$ — линия разрыва функции $u(t,x)$.

Пусть D — область полуплоскости $t > 0$, внутри которой есть только одна линия разрыва функции $u(t,x)$. Эта линия делит D на две части D_1 и D_2. Поскольку в этих частях разрыва функции $u(t,x)$ нет, в них уравнение выполняется в обычном смысле, то есть выполнено уравнение (6.26) и, значит,

$$\iint\limits_{D_i} \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2}\right) dx\,dt = 0, \quad i = 1,2\ .$$

Если выбрать функцию φ так, что вне области D она тождественно равна 0, то в силу (6.28)

$$\iint\limits_{D_1} \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\,dt + \iint\limits_{D_2} \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\,dt = 0\ ,$$

следовательно,

$$\iint\limits_{D_1} \left[\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}\right)^2\right)\right] dx\,dt +$$
$$+ \iint\limits_{D_2} \left[\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}\right)^2\right)\right] dx\,dt = 0\ ,$$

или применяя формулу Грина

$$\int\limits_{\Gamma_-} -\varphi u\,dx + \varphi\frac{u^2}{2}\,dt - \int\limits_{\Gamma_+} -\varphi u\,dx + \varphi\left(\frac{u^2}{2}\right) dt = 0\ ,$$

где Γ — линия разрыва, Γ_- означает, что значения функции берутся при стремлении к Γ слева, Γ_+ — справа. Последнее равенство можно переписать в виде:

$$0 = \int\limits_{\Gamma} \varphi\left[(u_+ - u_-)\,dx + \left(\frac{u_-^2}{2} - \frac{u_+^2}{2}\right) dt\right] =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi\left[x'(t)(u_+ - u_-) + \frac{1}{2}(u_-^2 - u_+^2)\right] dt\ .$$

В силу произвольности φ имеем что $x'(t)(u_+ - u_-) = 0.5(u_+^2 - u_-^2)$, то есть $x'(t) = 0.5(u_+ + u_-)$ — условие на линии разрыва ***(условие Гюгонио)***.

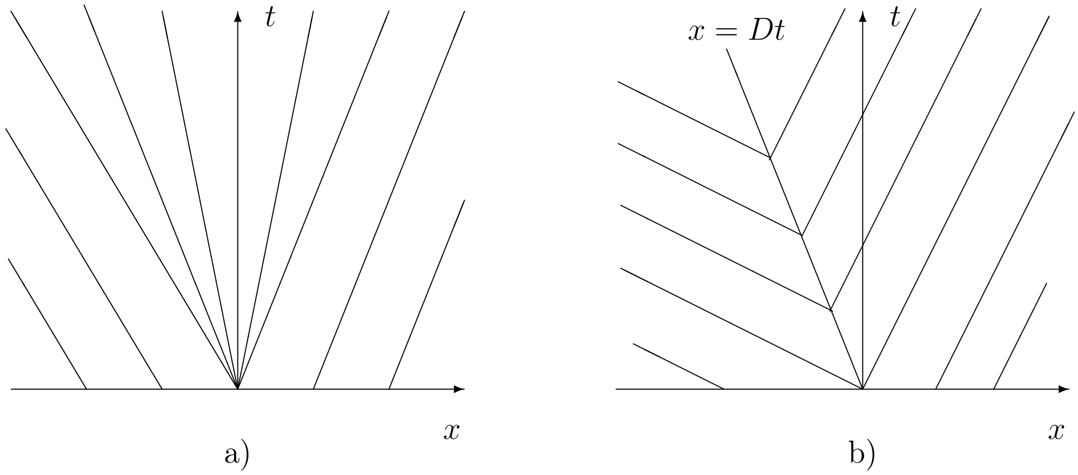

Рис. 6.1 Характеристики a) для решения u_1, b) для решения u_2 ($u_- < u_+$).

Покажем, что для разрывных решений задание начальных условий еще не обеспечивает единственности решения.

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения (6.26) ***(задачу о распаде разрыва):***

$$u_0(x) = \begin{cases} u_-, & \text{при } x < 0 \ , \\ u_+, & \text{при } x \geq 0 \ , \end{cases}$$

u_-, u_+ — константы, $u_- < u_+$. Пусть $D = \dfrac{u_- + u_+}{2}$ и

$$u_1 = \begin{cases} u_-, & x < u_- t \ , \\ x/t, & u_- t \leq x \leq u_+ t \ , \\ u_+, & x > u_+ t \ , \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} u_-, & x < Dt \ , \\ u_+, & x \geq Dt \ . \end{cases}$$

Легко проверить, что обе функции являются решением поставленной задачи Коши.

Характеристики для решений u_1 и u_2 изображены на рисунке 6.1

Пусть $u = u_\delta(t, x)$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t} + u_\delta \frac{\partial u_\delta}{\partial x} = 0, \quad u_\delta|_{t=0} = u_\delta^0,$$

причем $\lim\limits_{\delta \to 0} u_\delta^0 = u_0(x)$ всюду, кроме $x = 0$. Предположим, кроме того, что u_δ^0 — монотонно возрастающая функция, например,

$$u_\delta^0 = u_- + \frac{u_+ - u_-}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{\delta} \right).$$

Тогда характеристики для $u_\delta(t, x)$ имеют вид, изображенный на рисунке 6.2.

Если дополнительно потребовать от обобщенного решения, чтобы предел классических (то есть гладких) решений являлся решением, то сравнивая картины характеристик видим, что "истинным" решением следует признать u_1, а не u_2. Решение u_2 называют ***неустойчивым решением***, так как сглаживание начальной функции приводит к решению далекому от u_2, то есть нет непрерывной зависимости от

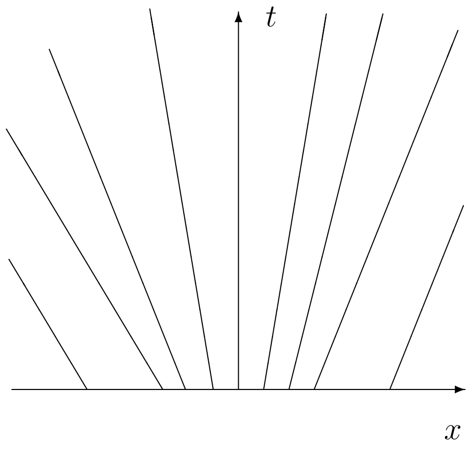

Рис. 6.2 Характеристики для решения u_δ ($u_- < u_+$)

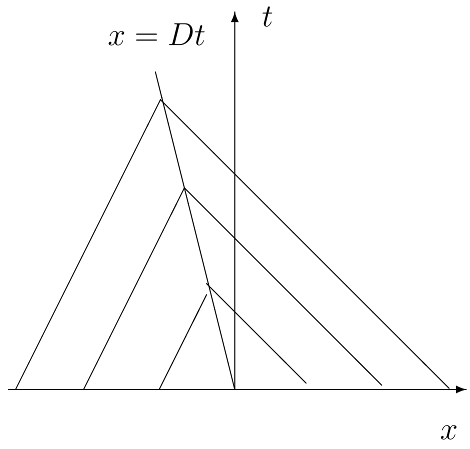

Рис. 6.3 Характеристики для решения u_2 ($u_+ < u_-$)

начальных данных. Причина неустойчивости u_2 в том, что на линии разрыва пересекаются не характеристики, выходящие из точек оси $t = 0$ (и, следовательно, несущие начальные данные), а характеристики, выходящие из точек линии $x = Dt$. В этом смысле говорят, что разрыв "придуман", а не вызван пересечением характеристик, несущих начальные данные. Такой разрыв называют ***неустойчивым разрывом***.

Если же $u_- > u_+$, то u_2 имеет характеристики, изображенные на рисунке 6.3. В этом случае не существует непрерывного решения при сглаженном начальном условии (см. начало параграфа). Поэтому в этом случае "истинным" решением будет u_2, а разрыв называют ***устойчивым.***

Ясно, что для более сложного уравнения и начальных условий проведение подобного анализа решений становится чрезвычайно сложной проблемой.

6.6 ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 6

6.6.1 Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти решение задачи Коши

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=x^2} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=x^2} = x.$$

Решение. Найдем сначала общее решение дифференциального уравнения. Для этого приведем его к каноническому виду. Для нахождения замены переменных составляем уравнения

$$x^2\frac{\partial \varphi}{\partial x} \pm xy\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

решения которых имеют вид $\varphi_1(x, y) = xy,\ \varphi_2(x, y) = y/x$. Отсюда следует замена переменных $\xi = xy,\ \eta = y/x$. В новых переменных уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2\eta}\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0.$$

Если ввести функцию $w = \dfrac{\partial v}{\partial \xi}$, то уравнение перепишется в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{w}{2\eta} = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Переменная ξ входит а это уравнение как параметр, поэтому общее решение уравнения вместо произвольной константы будет содержать произвольную функцию от ξ. Решая уравнение, получим

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = w(\xi, \eta) = \frac{C(\xi)}{\sqrt{\eta}}.$$

Отсюда, интегрируя по ξ и учитывая, что интеграл от произвольной функции — произвольная функция, получим

$$v(\xi, \eta) = \frac{F(\xi)}{\sqrt{\eta}} + G(\eta),$$

где F, G — произвольные функции.

Имеем теперь

$$u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \sqrt{\frac{x}{y}} F(xy) + G\left(\frac{y}{x}\right). \tag{6.30}$$

Это и есть общее решение исходного уравнения.

Теперь следует так подобрать функции F и G, чтобы удовлетворить условиям, заданным на кривой $y = x^2$. Для этого найдем прежде всего производную $\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -0.5x^{0.5}y^{-1.5}F(xy) + x^{1.5}y^{-0.5}F'(xy) + x^{-1}G'\left(\frac{y}{x}\right)$$

и затем запишем равенства, означающие, что функция u и полученная производная на кривой $y = x^2$ удовлетворяют заданным условиям Коши. В результате получим

$$u(x, x^2) = x^{-0.5}F(x^3) + G(x) = 0\ , \tag{6.31}$$

$$\frac{\partial u(x, x^2)}{\partial y} = -0.5x^{-2.5}F(x^3) + x^{0.5}F'(x^3) + x^{-1}G'(x) = x. \tag{6.32}$$

Продифференцировав равенство (6.31) по x, имеем

$$G'(x) = 0.5x^{-1.5}F(x^3) - 3x^{1.5}F'(x^3).$$

Подставляя полученное значение $G'(x)$ в (6.32) получим $F'(x^3) = -0.5x^{0.5}$ или это же равенство можно записать другим способом: $F'(x) = -0.5x^{1/6}$. После интегрирования находим F и затем из (6.31) определяем G:

$$F(x) = -\frac{3}{7}x^{7/6} + c, \qquad G(x) = \frac{3}{7}x^3 - cx^{-1/2}.$$

Осталось подставить полученные функции в (6.30), чтобы найти решение задачи Коши

$$u(x, y) = \frac{3}{7}(y^3x^{-3} - x^{5/3}y^{2/3})\ .$$

Непосредственно подстановкой легко проверить, что функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению и условиям на кривой $y = x^2$.

Пример 2. Привести к каноническому виду и решить задачу Коши:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} - 5\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\[2ex] 3\dfrac{\partial u_1}{\partial t} - 3\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 5\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - 7\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

$$u_1(0) = 3x^2, \quad u_2(0) = 6\sin x.$$

Решение. Запишем сначала систему в матричном виде. Для этого введем вектор $u = (u_1, u_2)^{\text{т}}$. Тогда система примет вид :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} + \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Перепишем систему в таком виде, чтобы при производной по t стояла множителем единичная матрица. С этой целью умножим систему слева на матрицу обратную к той матрице, которая сейчас стоит множителем при производной по t. Имеем после перемножения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 11 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{6.33}$$

Для получения канонического вида необходимо найти матрицу преобразования, столбцами которой являются собственные вектора матрицы, стоящей в системе (6.33) множителем при производной по x. Собственные числа находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1/3 - \lambda & 4/3 \\ -4/3 & 11/3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \ .$$

Таким образом, $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$. Собственные вектора, соответствующие этим числам, получим, находя ненулевые решения систем уравнений

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

При $i = 1$ получим вектор $(2, 1)^{\text{т}}$, при $i = 2$ — $(1, 2)^{\text{т}}$.

Введем вектор $v = (v_1, v_2)^{\text{т}}$ по формуле

$$u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v. \tag{6.34}$$

Подставим (6.34) в (6.33) и умножим слева полученную систему на матрица обратную матрице преобразования. В результате получим канонический вид системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial v_2}{\partial t} + 3\dfrac{\partial v_2}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{6.35}$$

Канонический вид системы характеризуется тем, что в каждом уравнении дифференцируется только одна функция. Поэтому в рассматриваемом случае система

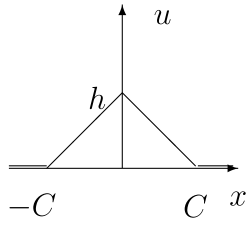

Рис. 6.4

распалась на два независимых уравнения, каждое из которых легко решается. Из (6.35) получаем общее решение этой системы $v_1 = f_1(x-t),\ v_2 = f_2(x-3t)$, где f_1, f_2 — произвольные непрерывно дифференцируемые функции. Учитывая связь между векторами u и v, находим общее решение исходной системы

$$u_1 = 2f_1(x-t) + f_2(x-3t), \quad u_2 = f_1(x-t) + 2f_2(x-3t). \tag{6.36}$$

Осталось подобрать функции f_1, f_2 так, чтобы удовлетворить начальным условиям. Для этого имеем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} u_1(0) = 2f_1 + f_2 = 3x^2, \\ u_2(0) = f_1 + 2f_2 = 6\sin x. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$f_1(x) = 2x^2 - 2\sin x, \quad f_2(x) = 4\sin x - x^2 \ .$$

Подставляя эти функции в (6.36), получаем решение задачи Коши:

$$u_1 = 4(x-t)^2 - 4\sin(x-t) + 4\sin(x-3t) - (x-3t)^2,$$
$$u_2 = 2(x-t)^2 - 2\sin(x-t) + 8\sin(x-3t) - 2(x-3t)^2.$$

Легко проверить, что эти функции удовлетворяют начальным условиям и системе уравнений.

Пример 3. Начальная форма неограниченной струны изображена на рисунке 6.4, начальная скорость струны равна 0. Изобразить струну в моменты времени $t_k = \frac{kC}{4a}$, где $k = 0, 1, 2, 3, 5$

Решение. Форма струны в момент времени t определяется формулой Даламбера. Так как начальная скорость равна нулю, имеем

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x-at) + \frac{1}{2}\varphi(x+at),$$

где $\varphi_0(x)$ — функция, график которой изображен на на рисунке 6.4. Таким образом, функция является суммой двух бегущих волн $\frac{1}{2}\varphi_0(x-at)$ и $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$. В начальный момент времени они совпадают и равны $\frac{1}{2}\varphi_0(x)$ (рисунок 6.5 тонкие линии). Прямая волна $\frac{1}{2}\varphi_0(x-at)$ движется вдоль оси $0x$ вправо со скоростью a, обратная волна $\frac{1}{2}\varphi_0(x+at)$ движется влево со той же скоростью a. Для того, чтобы изобразить форму струны достаточно нарисовать графики бегущих волн (рисунки 6.5-6.9 тонкие линии) и затем их сложить (рисунки 6.5-6.9 толстые линии).

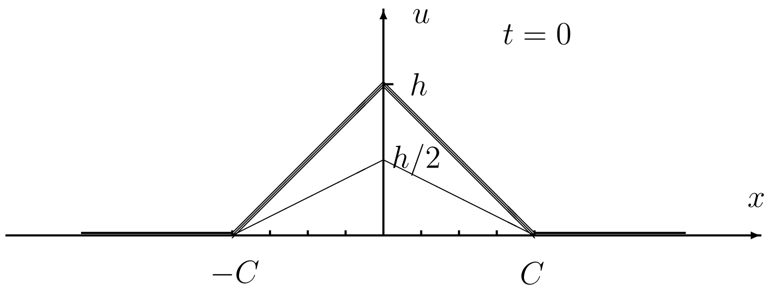

Рис. 6.5 Форма струны в момент времени $t = 0$.

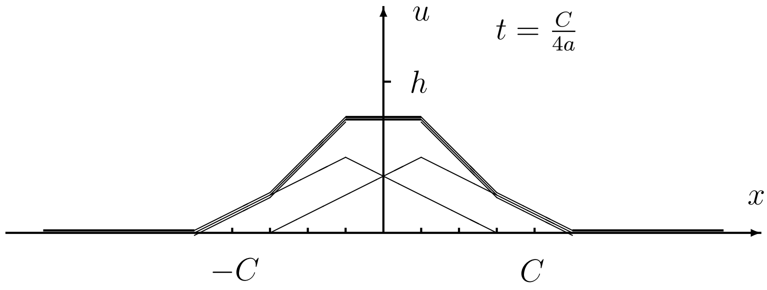

Рис. 6.6 Форма струны в момент времени $t = \frac{C}{4a}$.

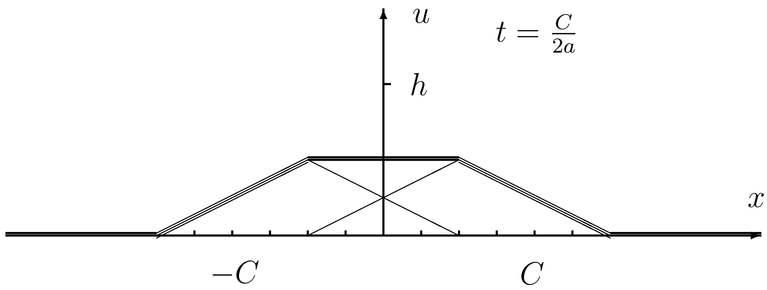

Рис. 6.7 Форма струны в момент времени $t = \frac{C}{2a}$.

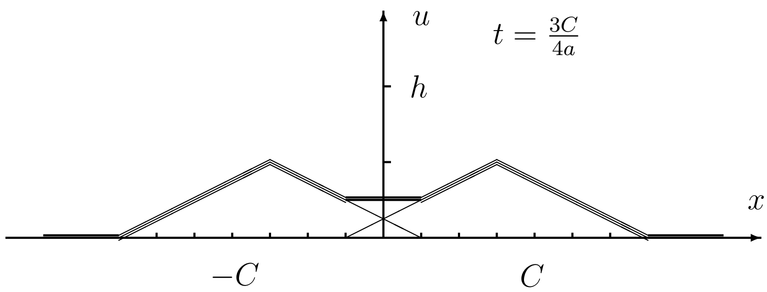

Рис. 6.8 Форма струны в момент времени $t = \frac{3C}{4a}$.

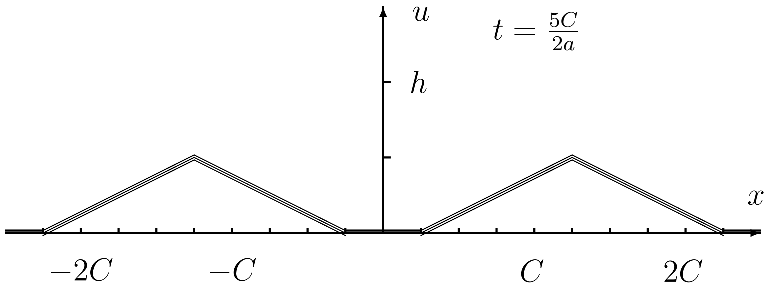

Рис. 6.9 Форма струны в момент времени $t = \frac{5C}{4a}$.

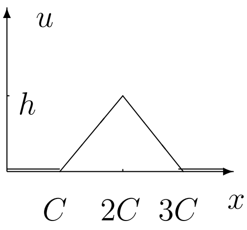

Рис. 6.10

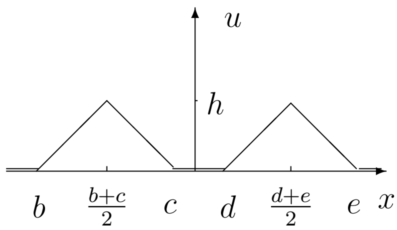

Рис. 6.11

6.6.2 Задачи

1. Начальная форма полуограниченной струны изображена на рисунке 6.10, начальная скорость струны равна 0. Изобразить струну в моменты времени $t_k = \frac{kC}{2a}$, где $k = 2, 3, 4, 7$.

2. Начальная форма неограниченной струны изображена на рисунке 6.11, начальная скорость струны равна 0. В какой момент времени при $t > 0$ отклонение струны будет максимальным? Чему равна величина этого отклонения?

3. Привести к каноническому виду и найти общие решения уравнений:

$$\text{а) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ ,$$

$$\text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ y > 0 \ .$$

4. Найти решения задач Коши:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ u\,|_{y=0} = 3x^2, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0;$

б) $4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1-y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{2y}{1+y^2}\left(2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$

$u|_{y=0} = \sin x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = x^2.$

5. Привести к каноническому виду и решить следующие задачи Коши в области

$|x| < \infty,\ t \geq 0$:

$$\text{а)} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0\ , \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = 2x,\ v(x,0) = x^2; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0\ , \\ \\ 5\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0\ , \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + 2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = 1,\ v(x,0) = x,\ w(x,0) = x^2; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 5\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 7\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0\ , \\ \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0,\ u_1(x,0) = e^x,\ u_2(x,0) = 1 - x\ . \end{cases}$$

6. Найти решение задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ x > 0,\ u|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\ u|_{x=0} = g(t)\ .$$

7. Решить задачу Гурса с данными на характеристиках в области $at \geq |x|$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u|_{x=at} = f_1(t),\ u|_{x=-at} = f_2(t),\ f_1(0) = f_2(0)\ .$$

8. Пусть для трехмерного волнового уравнения начальные данные отличны от нуля только в параллелепипеде $0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ 0 < z < l_3$. Определить в какие моменты времени в точке с координатами $(2l_1, 0, 0)$ решение будет отлично от нуля. Решить ту же задачу для двумерного волнового уравнения, прямоугольника $0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2$ и точки $(2l_1, 0)$.

9. Пусть $u(t,x)$ — гладкая функция, удовлетворяющая уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Показать, что этому же уравнению удовлетворяют функции:

$$\text{а)}\ v(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\ ,$$

$$\text{б)}\ x\frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial t}\ ,$$

$$\text{в)}\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\ .$$

10. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k \tau(x_1, \ldots, x_n) + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k \nu(x_1, \ldots, x_n)\right]\ , \tag{6.37}$$

где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$, а τ и ν — бесконечно дифференцируемые функции, является решением уравнения $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, удовлетворяющим начальным условиям

$$u(x,0) = \tau(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \nu(x)\ ,$$

предполагая, что ряд в правой части формулы (6.37), а также ряды, полученные из него почленным дифференцированием дважды по $x_1, \ldots, x_n, t$, равномерно сходятся.

11. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_3}^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\text{а) } u|_{t=0} = x_1 x_2 x_3,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x_1^2 x_2^2 x_3^2\ ,$$
$$\text{б) } u|_{t=0} = e^{x_1}\cos x_2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x_1^2 - x_2^2\ ,$$
$$\text{в) } u|_{t=0} = x_1^2 + x_2^2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 1\ .$$

Указание. Воспользоваться утверждением предыдущей задачи.

12. Найти решение задач $t > 0,\ |x| < \infty$:

$$\text{а) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6,\ u|_{t=0} = x^2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 4x\ ,$$
$$\text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + tx,\ u|_{t=0} = \sin x,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x^2\ .$$

13. Показать, что уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} + 1/2\dfrac{\partial u^2}{\partial x} = 0$ и $1/2\dfrac{\partial u^2}{\partial t} + 1/3\dfrac{\partial u^3}{\partial x} = 0$ имеют одни и те же решения в классе гладких решений. Если же рассматривать разрывные решения, то эти уравнения могут иметь различные решения.

6.6.3 Тест к главе 6

1. Какая из следующих функций является решением уравнения колебания струны (коэффициент $a = 1$)?
а) $u = e^x \sin t$;
б) $u = xt$;
в) $u = x^2 - t^2$.

2. Общее решение уравнения колебания струны имеет вид (F, G — произвольные функции, $a = 1$):
а) $u = F(x-t)G(x+t)$;
б) $u = F(x) - G(t)$;
в) $u = F(x-t) + G(x+t)$.

3. Для сведения задачи о колебании струны, закрепленной на концах к задаче Коши необходимо

а) начальные данные продлить сначала нечетным, а затем периодическим образом;

б) начальные данные продлить сначала четным, а затем периодическим образом;

в) начальные данные продлить периодическим образом.

4. Формула Кирхгофа определяет решение задачи Коши для волнового уравнения в случае n простанственных переменных. Чему равно n?

а) $n = 1$;

б) $n = 2$;

в) $n = 3$.

5. Согласно принципу Гюйгенса при четном n у волны есть

а) только передний фронт;

б) только задний фронт;

в) передний и задний фронт.

6. Канонический вид гиперболической системы уравнений первого порядка в случае двух независимых переменных характеризуется тем, что

а) каждое уравнение содержит операцию дифференцирования только по одной переменной;

б) каждое уравнение содержит только одну зависимую переменную;

в) в каждом уравнении дифференцируется только одна функция.

7 ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

7.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В этой главе будет изучаться ***уравнение теплопроводности:***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(t,x) \ , \tag{7.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$, $a = const.$

Основными для этого уравнения являются следующие задачи:

1) ***Задача Коши.*** Найти функцию $u(t,x) \in C([0,T] \times R^n)$, имеющую непрерывные производные по t и вторые производные по x при $t > 0$, удовлетворяющую уравнению (7.1) и начальному условию $u|_{t=0} = \varphi(x)$.

2) ***Первая краевая задача или задача Дирихле.*** Пусть Ω — ограниченная в R^n область с границей $\partial\Omega$. Требуется найти функцию $u(t,x) \in C([0,T] \times (\Omega \cup \partial\Omega))$, имеющую непрерывную производную по t и вторые непрерывные производные по x при $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$, удовлетворяющую уравнению (7.1), начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega \tag{7.2}$$

и граничному (краевому) условию

$$u(t,x) = \psi(t,x) \ \text{ при } x \in \partial\Omega, \quad t \in (0,T) \ .$$

Таким образом, область, в которой ищут решение первой краевой задачи, представляет собой цилиндр в пространстве переменных (t,x), причем известно значение решения на нижнем основании (начальное условие) и на боковой поверхности цилиндра (граничное условие). На рисунке 7.1 изображена эта область для случая $n = 2$.

3) ***Вторая краевая задача или задача Неймана.*** Найти функцию $u(t,x)$ такую, что она и ее первые производные по пространственным переменным принадлежат пространству $C([0,T] \times (\Omega \cup \partial\Omega))$, у функции u существуют непрерывные производные по t и вторые производные по x, если $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$, функция $u(t,x)$ удовлетворяет (7.1), (7.2) и граничному условию:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \psi(t,x), \quad \text{где } N \text{ – нормаль к } \partial\Omega, \ x \in \partial\Omega, \ t \in (0,T) \ .$$

4) ***Третья краевая задача.*** Эта задача формулируется как и предыдущая, однако граничное условие заменяется на условие вида:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial N} + \beta u = \psi(t,x) \text{ при } x \in \partial\Omega, \ t \in (0,T) \ .$$

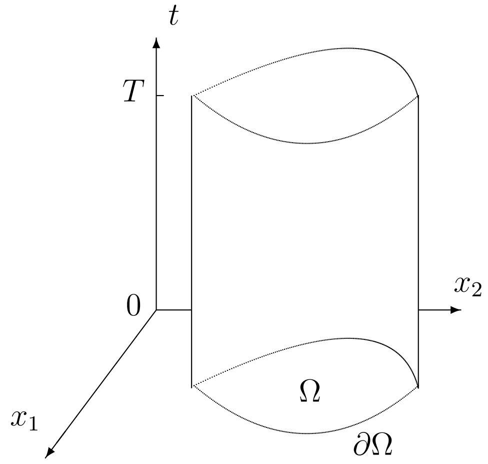

Рис. 7.1 Область, в которой ищется решение краевых задач.

Первая краевая задача описывает распределение температуры внутри тела, если известна начальная температура тела и температура точек границы тела. Для второй краевой задачи, в отличие от первой, на границе задается тепловой поток, третья же получается при описании процессов теплообмена тела с внешней средой, температура которой известна.

7.2 ПРИНЦИП МАКСИМУМА, ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

В основе доказательства единственности и непрерывной зависимости решения от входных данных лежат априорные оценки. К таким оценкам для уравнения теплопроводности относится принцип максимума.

Рассмотрим сначала принцип максимума для первой краевой задачи.

Теорема 7.2.1 (Принцип максимума для первой краевой задачи) *Пусть*

$$M = \max\left(\max_{\substack{x\in\partial\Omega\\ t\in[0,T]}} \psi(t,x),\ \max_{x\in\Omega\cup\partial\Omega}\varphi(x)\right)\ ,$$

$$m = \min\left(\min_{\substack{x\in\partial\Omega\\ t\in[0,T]}} \psi(t,x),\ \min_{x\in\Omega\cup\partial\Omega}\varphi(x)\right)\ .$$

Тогда, если $u(t,x)$ решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u,\quad u|_{t=0} = \varphi(x),\quad u|_{x\in\partial\Omega} = \psi(t,x),\quad t\in(0,T)\ ,$$

то $m \le u(t,x) \le M$, то есть решение первой краевой задачи принимает наибольшее и наименьшее значение либо на нижнем основании, либо на боковой поверхности цилиндра.

Доказательство. Пусть v — функция, имеющая ту же гладкость, что и решение первой краевой задачи и v принимает максимальное значение в точке (x_0, t_0), лежащей либо внутри, либо на верхнем основании цилиндра. Заметим тогда, что

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v\right)\Big|_{t_0, x_0} \geq 0,$$

так как в точке максимума $\dfrac{\partial v}{\partial t} \geq 0$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial {x_i}^2} \leq 0$.

Если взять функцию $u_\varepsilon = u + \varepsilon |x|^2$, где $\varepsilon > 0$, $|x|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2$, то

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - a^2 \Delta u_\varepsilon = -2a^2 n \varepsilon < 0,$$

и в силу замечания, сделанного выше, u_ε не может принимать максимальное значение внутри цилиндра либо на его верхнем основании. Значит

$$u_\varepsilon \leq M + \varepsilon \max_{x \in \Omega \cup \partial\Omega} |x|^2 .$$

Тогда

$$u \leq M + \varepsilon (\max_{x \in \Omega \cup \partial\Omega} |x|^2 - |x|^2) .$$

Отсюда, при $\varepsilon \to 0$ имеем $u \leq M$.

Для доказательства второй половины неравенства введем функции $w = -u$. Тогда w является решением задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \Delta w = 0, \quad w|_{t=0} = -\varphi, \quad w|_{x \in \partial\Omega} = -\psi$$

и в силу доказанного выше

$$w \leq \max(\max(-\varphi), \max(-\psi)) = -\min(\min \varphi, \min \psi) = -m ,$$

то есть $-u \leq -m$ и, следовательно, $m \leq u$.

Применяя принцип максимума, легко доказать единственность решения первой краевой задачи.

Пусть, например, имеется два решения u_1 и u_2 задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad u|_{x \in \partial\Omega} = \psi . \tag{7.3}$$

Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x \in \partial\Omega} = 0$$

и, согласно принципу максимума, $u = 0$.

Теорема 7.2.2 *Существует константа $c > 0$ такая, что для решения задачи (7.3) справедлива оценка*

$$|u| \leq \max(\max_{x \in \Omega \cup \partial\Omega} |\varphi|, \max_{\substack{x \in \partial\Omega \\ t \in [0,T]}} |\psi|) + c \max_{\substack{t \in [0,T] \\ x \in \Omega \cup \partial\Omega}} |f(t,x)| .$$

Доказательство. Воспользуемся идеей доказательства теоремы 7.2.1, выбрав вспомогательную функцию u_ε в виде

$$u_\varepsilon(t,x) = u(t,x) + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{2na^2}\right)|x|^2\ ,$$

где $\alpha = \max\limits_{\substack{t\in[0,T]\\ x\in\Omega\cup\partial\Omega}} |f(t,x)|$. Тогда

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - a^2\Delta u_\varepsilon = f - \alpha - 2a^2 n\varepsilon < 0.$$

Поэтому, как и в теореме 7.2.1, функция u_ε не может принимать максимальное значение внутри цилиндра либо на его верхнем основании. Отсюда следует, что

$$u \le u_\varepsilon \le M + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{2na^2}\right) \max_{x\in\Omega\cup\partial\Omega} |x|^2.$$

Устремляя в этом неравенстве ε к нулю, получаем

$$u \le M + c\alpha, \tag{7.4}$$

где

$$c = \frac{\max\limits_{x\in\Omega\cup\partial\Omega} |x|^2}{2na^2}.$$

Как и в теореме 7.2.1 показывается, что $-u \le -m + c\alpha$ или

$$m - c\alpha \le u. \tag{7.5}$$

Утверждение теоремы следует теперь из неравенств (7.4),(7.5), определения α и неравенства

$$-\max\Big(\max_{x\in\Omega\cup\partial\Omega}|\varphi|, \max_{\substack{x\in\partial\Omega\\ t\in[0,T]}}|\psi|\Big) \le m \le M \le \max\Big(\max_{x\in\Omega\cup\partial\Omega}|\varphi|, \max_{\substack{x\in\partial\Omega\\ t\in[0,T]}}|\psi|\Big).$$

Теорема 7.2.2 позволяет утверждать, что малому изменению функций φ, ψ, f соответствует малое изменение решения задачи (7.3). Действительно, пусть $\tilde{u} = u + \delta u$ — решение задачи

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a^2\Delta\tilde{u} + \tilde{f}, \quad \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}, \quad \tilde{u}|_{x\in\partial\Omega} = \tilde{\psi}\ ,$$

где $\tilde{\varphi} = \varphi + \delta\varphi,\ \tilde{\psi} = \psi + \delta\psi,\ \tilde{f} = f + \delta f$. Тогда $\delta u = \tilde{u} - u$ — решение задачи

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} = a^2\Delta\delta u + \delta f, \quad \delta u|_{t=0} = \delta\varphi, \quad \delta u|_{x\in\partial\Omega} = \delta\psi\ .$$

Значит, согласно теореме 7.2.2

$$|\delta u| \le \max\Big(\max_{x\in\Omega\cup\partial\Omega}|\delta\varphi|, \max_{\substack{x\in\partial\Omega\\ t\in[0,T]}}|\delta\psi|\Big) + c\max_{\substack{t\in[0,T]\\ x\in\Omega\cup\partial\Omega}}|\delta f(t,x)|\ .$$

Перейдем теперь к рассмотрению принципа максимума для задачи Коши.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать только ограниченные решения задачи Коши.

Теорема 7.2.3 (Принцип максимума для задачи Коши) *Пусть u — ограниченное решение задачи*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u, \quad u|_{t=0} = \varphi \ .$$

Тогда

$$m = \inf_{x\in R^n} \varphi(x) \le u \le \sup_{x\in R^n} \varphi(x) = M \ .$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $u_\varepsilon = u - \varepsilon(|x|^2 + 2a^2tn)$. Тогда u_ε удовлетворяет уравнению теплопроводности. Так как функция u ограничена, то $u_\varepsilon \to -\infty$ при $|x| \to \infty$, значит, $u_\varepsilon(t,x) < M$ при достаточно больших $|x|$. Применим теорему 7.2.1 к цилиндру $\{|x| \le R,\ t \in [0,T]\}$, где R выбрано так, что $u_\varepsilon(t,x) \le M$ при $R \le |x|$. Тогда, учитывая, что $u_\varepsilon(0,x) \le u(0,x) \le M$, имеем $u_\varepsilon(t,x) = u(t,x) - \varepsilon(|x|^2+2a^2tn) \le M$ внутри цилиндра. Так как в силу выбора R это же неравенство выполнено и вне цилиндра, получаем, что оно справедливо всюду и в силу произвольности ε имеем $u(t,x) \le M$.

Вторая часть неравенства доказывается так же как в теореме 7.2.1.

Аналогично тому, как это было сделано выше для первой краевой задачи, легко доказать, что если в классе ограниченных решений задача Коши $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$ имеет решение, то оно единственно.

7.3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Получим явную формулу для решения задачи Коши для однородного ($f \equiv 0$) уравнения теплопроводности, используя преобразование Фурье. Нам потребуются следующие факты из теории преобразования Фурье. Если $f(x) \in L_1(R^n)$, то существует интеграл

$$(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} f(x) e^{-ix\xi} dx = \overline{f}(\xi) \ .$$

Здесь используется обозначение $x\xi = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\xi_j$, i – мнимая единица. Функция $\overline{f}(\xi)$ называется ***образом Фурье*** функции $f(x)$. Переход к функции $\overline{f}(\xi)$ называется ***преобразованием Фурье функции*** $f(x)$. Зная функцию $\overline{f}(x)$, легко найти функцию $f(x)$. Для этого следует воспользоваться так называемым ***обратным преобразованием Фурье***: $f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} \overline{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$.

Предположим, что однородная задача Коши (7.1)(7.2) имеет решение, причем само решение и все его производные обращаются в 0 при $|x| \to \infty$.

Положим в уравнении (7.1) $f = 0$, умножим полученное уравнение на $(2\pi)^{-n/2}e^{-ix\xi}$ и проинтегрируем по x

$$(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-ix\xi}\, dx - (2\pi)^{-n/2} a^2 \int\limits_{R^n} \Delta u e^{-ix\xi}\, dx = 0 \ . \tag{7.6}$$

Если обозначить через $\overline{u}$ образ Фурье функции u, то из (7.6) следует, что

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - a^2 \sum_{j=1}^{n} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2} e^{-ix\xi}\, dx = 0 \ . \tag{7.7}$$

В каждом слагаемом суммы дважды произведем интегрирование по частям с учетом того, что $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \to 0$ при $|x| \to \infty$. После простых преобразований получим

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + a^2|\xi|^2\overline{u} = 0 \ , \tag{7.8}$$

$$\overline{u}|_{t=0} = \overline{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} \varphi(x)e^{-ix\xi}\,dx \ . \tag{7.9}$$

Таким образом, функция $\overline{u}$ является решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. В сведении задачи Коши для уравнения в частных производных к более простой задаче и заключается суть применения преобразования.

Решая задачу Коши (7.8), (7.9), имеем

$$\overline{u}(t,\xi) = \overline{\varphi}(\xi)e^{-a^2|\xi|^2 t} \ .$$

Для нахождения u применяется теперь обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} \overline{u}(t,\xi)e^{ix\xi}\,d\xi = \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n}\left((2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n}\varphi(y)e^{-iy\xi}e^{-a^2|\xi|^2 t}\,dy\right)e^{ix\xi}\,d\xi = \\
&= (2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n}\varphi(y)e^{-i(y-x)\xi}e^{-a^2|\xi|^2 t}dy\,d\xi = \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n}\left((2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n}e^{-a^2|\xi|^2 t}e^{-i(y-x)\xi}\right)d\xi\varphi(y)dy \ .
\end{aligned}$$

Для вычисления внутреннего интеграла воспользуемся тем, что преобразование Фурье функции $e^{-|x|^2/2}$ совпадает с ней самой. Введем новые переменные z_j по формуле $z_j = \sqrt{2ta^2}\xi_j$, тогда $d\xi_j = \left(\sqrt{2a^2t}\right)^{-1} dz_j$ и

$$(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} e^{-a^2|\xi|^2 t}e^{-i(y-x)\xi}d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} e^{-|z|^2/2}e^{-i(y-x)z/\sqrt{2a^2t}}\,dz(2a^2t)^{-n/2} = (2a^2t)^{-n/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} \ .$$

Таким образом, имеем

$$u(t,x) = (4\pi a^2 t)^{-n/2}\int\limits_{R^n}\varphi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}dy \ .$$

Полученная формула, требует обоснования, так как она выведена в предположении существования решения задачи Коши, обладающего определенными свойствами. Кроме того, при ее выводе пользовались, например, без обоснования правомерности возможностью дифференцирования интеграла по параметру.

Для обоснования того, что функция $u(t,x)$ действительно является решением задачи Коши, введем функцию

$$I(t,x-y) = (4\pi a^2 t)^{-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \ , \tag{7.10}$$

которую называют ***фундаментальным решением задачи Коши*** или ***функцией источника***.

Докажем сначала следующие свойства функции источника:

а) $I(t,x)$ и любая ее производная экспоненциально убывают при $|x| \to \infty$ и фиксированном $t > 0$;

б) $\dfrac{\partial I}{\partial t} - a^2 \Delta I = 0$ при $t > 0$;

в) $I(t,x) \to 0$ при $t \to 0$, если $x \neq 0$, причем $\int\limits_{|x|>\delta>0} I(t,x)\,dx \to 0$ при $t \to 0$;

г) $\int\limits_{R^n} I(t,x)\,dx = 1$ при $t > 0$.

Свойства а), б) проверяются дифференцированием.

Свойство в) следует из того, что при замене переменных $y_i = x_i/\sqrt{4a^2 t}$

$$(4\pi a^2 t)^{-n/2} \int\limits_{|x|>\delta} e^{-|x|^2/(4a^2 t)}\,dx = \pi^{-n/2} \int\limits_{|y|>\delta/(4a^2 t)} e^{-|y|^2}\,dy \ .$$

Из математического анализа известно, что несобственный интеграл $\int\limits_{R^n} e^{-|y|^2}\,dy$ сходится и, так как $\delta/t \to \infty$ при $t \to 0$, из определения несобственного интеграла следует, что при $t \to 0$

$$\int\limits_{|y|>\delta/(4a^2 t)} e^{-|y|^2}\,dy \to 0 \ .$$

Для доказательства свойства г) проделаем ту же замену переменных, что и в предыдущем пункте.

$$\int\limits_{R^n} I(t,x)\,dx = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y_i^2}\,dy_i = 1$$

Теорема 7.3.1 *Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная функция. Тогда функция*

$$u(t,x) = (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\,dy \tag{7.11}$$

бесконечно дифференцируема при $t > 0$, ограничена, удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0$ и $u(t,x) \to \varphi(x)$ при $t \to +0$.

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость и тот факт, что функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению, следует из возможности дифференцирования под знаком интеграла [1] и свойств а), б) функции $I(t,x)$. Ограниченность функции $u(t,x)$

[1] В связи с громоздкостью, доказательство этого факта опускается. Его можно найти, например, в [8] стр.227-228

вытекает из ограниченности φ и свойства г):

$$|u(t,x)| \le (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} |\varphi(y)|\, dy \le$$

$$\le \sup_{y\in R^n} |\varphi(y)| (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\, dy = \sup_{y\in R^n} |\varphi(y)| \ .$$

Для проверки последнего утверждения теоремы заметим, что в силу свойства г) и определения $u(t,x)$ имеем:

$$|\varphi(x) - u(t,x)| = (4\pi a^2 t)^{-n/2} \left| \int\limits_{R^n} (\varphi(x) - \varphi(y)) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\, dy \right| \le$$

$$\le (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int\limits_{R^n} |\varphi(x) - \varphi(y)| e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\, dy =$$

$$= (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int\limits_{|x-y|>\delta} |\varphi(x) - \varphi(y)| e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\, dy +$$

$$+ (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int\limits_{|x-y|<\delta} |\varphi(x) - \varphi(y)| e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\, dy \ .$$

Оценим теперь каждое слагаемое в правой части этого неравенства. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция φ — непрерывна, то можно так подобрать $\delta > 0$, что при $|x-y| < \delta$ выполняется неравенство $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon/2$. Тогда

$$(4\pi a^2 t)^{-n/2} \int\limits_{|x-y|<\delta} |\varphi(x) - \varphi(y)| e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\, dy \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int\limits_{|x-y|<\delta} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} dy \le \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{R^n} I(t, x-y)\, dy = \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Зафиксируем теперь δ. Тогда, учитывая свойство в), при достаточно малом t получим:

$$(4\pi a^2 t)^{-n/2} \int\limits_{|x-y|>\delta} |\varphi(x) - \varphi(y)| e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\, dy \le$$

$$\le 2 \sup_{x\in R^n} |\varphi(x)| \int\limits_{|x-y|>\delta} I(t, x-y)\, dy \le \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Отсюда следует, что $\varphi(x) = \lim\limits_{t\to+0} u(t,x)$.

Формула (7.11) называется ***формулой Пуассона.***

7.4 ПРОСТЕЙШИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

7.4.1 Решение неоднородного уравнения теплопроводности легко получить аналогично тому, как это делалось для волнового уравнения.

Пусть требуется решить задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(t,x), \quad u|_{t=0} = 0 \ .$$

Рассмотрим для этого вспомогательную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v = 0, \quad v|_{t=\tau} = f(\tau,x) \ .$$

Пусть $v = v(t,x,\tau)$ — решение этой задачи. Согласно теореме 7.3.1 оно имеет вид:

$$v = \left(4\pi a^2(t-\tau)\right)^{-n/2} \int\limits_{R^n} f(\tau,y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}\, dy \ .$$

Покажем, что

$$u(t,x) = \int\limits_0^t v(t,x,\tau)\, d\tau \ .$$

Действительно, $u(0,x) = \int\limits_0^0 v\, d\tau = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v(t,x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial v(t,x,\tau)}{\partial t}\, d\tau = f(t,x) + \int\limits_0^t a^2 \Delta v\, d\tau =$$

$$= f(t,x) + a^2 \Delta \int\limits_0^t v\, d\tau = f(t,x) + a^2 \Delta u \ .$$

7.4.2 Всюду в этой главе точка x принадлежала n-мерному пространству. В этом пункте предположим, что $n = 1$ и рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{x=0} = 0, \quad x > 0 \ , \quad t > 0 \ ,$$

где $\varphi(x)$ ограниченная непрерывная функция и $\varphi(0) = 0$. Продолжим функцию φ нечетным образом на область отрицательных значений x и покажем, что тогда решение этой задачи имеет вид

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}}\, dy \ .$$

Согласно предыдущему параграфу функция $u(t,x)$, определенная этой формулой, удовлетворяет уравнению и начальному условию. Поэтому достаточно установить, что эта функция удовлетворяет краевому условию.

Действительно

$$u(t,0) = \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{y^2}{4a^2 t}}\, dy \ .$$

Функция $\varphi(y)$ — нечетная, $e^{-y^2/(4a^2 t)}$ — четная, значит под интегралом стоит нечетная функция и, так как интеграл вычисляется в симметричных пределах, он равен 0.

Полученную формулу для u можно преобразовать, используя нечетность функции $\varphi(y)$:

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} dy + \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\, dy \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \left(\int\limits_{0}^{\infty} -\varphi(y) e^{-\frac{|x+y|^2}{4a^2t}} dy + \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\, dy \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(y) \left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{|x+y|^2}{4a^2t}} \right) dy\ .$$

Для решения задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad x > 0,\ t > 0$$

заметим, что если $\varphi(x)$ продолжить четным образом, то

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\, dy$$

является решением поставленной задачи. Это следует из рассуждений, аналогичных предыдущим, и того, что

$$\left.\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\right|_{x=0}$$

нечетная функция.

Нетрудно теперь заметить, что выражение для $u(t,x)$ преобразуется следующим образом:

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(y) \left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} + e^{\frac{|x+y|^2}{4a^2t}} \right) dy\ .$$

7.5 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ (ФУРЬЕ) К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Одним из распространенных методов решения краевых задач для уравнений с частными производными является так называемый метод разделения переменных, который часто встречается под названием метода Фурье.

Основная идея этого метода, которая будет проиллюстрирована ниже на различных примерах, состоит в том, что решение данной краевой задачи для уравнения в частных производных сводится к решению вспомогательных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений или для уравнений в частных производных, но с меньшим числом независимых переменных. Для этого решения исходного уравнения в частных производных записываются в виде произведений решений вспомогательных задач. Затем, линейные комбинации этих решений, взятые со специально подобранными коэффициентами, образуют решение исходной краевой задачи.

7.5.1 Рассмотрим сначала задачу о распространении тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре. Задача состоит в отыскании решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.12}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \tag{7.13}$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \ . \tag{7.14}$$

Попытаемся сначала найти не равное тождественно нулю решение уравнения (7.12), удовлетворяющее условиям (7.13), причем будем искать это решение в виде

$$u(t,x) = X(x)T(t) \ ,$$

где $X(x)$ — функция одного переменного x, а $T(t)$ — функция зависящая только от t.

Подставляя функцию $u(t,x)$ в (7.12), имеем $a^2 X'' T = T' X$. Разделив это равенство на $a^2 TX$ (тем самым разделяем переменные), получим

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \ . \tag{7.15}$$

Равенство (7.15) должно выполняться при всех $t > 0$ и $x \in (0,l)$. Так как правая часть этого равенства зависит только от x, а левая — от t, фиксируя, например, x и меняя t или наоборот, убеждаемся, что правая и левая части при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение. Обозначим это значение через $-\lambda$ (знак минус выбран только для удобства последующих выкладок). Тогда из (7.15) получим

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \ , \tag{7.16}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \ . \tag{7.17}$$

Из граничных условий (7.13) имеем

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

Поскольку $T(t) \not\equiv 0$ (иначе решение $u(t,x)$ было бы тождественно равно нулю), получаем

$$X(0) = X(l) = 0 \ . \tag{7.18}$$

Таким образом, для нахождения функции $X(x)$ получилась следующая задача, носящая название ***задачи Штурма-Лиувилля***: найти те значения параметра λ, при которых существует нетривиальное решение уравнения (7.17), удовлетворяющее краевым условиям (7.18). Те значения параметра λ, при которых существует ненулевое решение задачи (7.17), (7.18), называются ***собственными числами***, а сами решения — ***собственными функциями*** задачи Штурма-Лиувилля.

Для нахождения решения задачи Штурма-Лиувилля предположим сначала, что $\lambda < 0$. Тогда общее решение уравнения (7.17) имеет вид:

$$X(x) = c_1 e^{-x\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{x\sqrt{-\lambda}} \ .$$

Из граничных условий имеем $c_1 + c_2 = 0$, $\ c_1 e^{-l\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{l\sqrt{-\lambda}} = 0$, откуда следует, что $c_1 = c_2 = 0$, значит $X(x) \equiv 0$ и $\lambda < 0$ не может быть собственным числом.[2]s1.9

В случае, когда $\lambda = 0$, решение уравнения (7.17) имеет вид $X(x) = c_1 + c_2 x$ и из граничных условий следует, что $c_1 = c_2 = 0$ и, следовательно, $X(x) \equiv 0$.

При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (7.17) имеет вид:

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x \ . \tag{7.19}$$

Из условия $X(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$. Из условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_2 \sin l\sqrt{\lambda} = 0$. Если $c_2 = 0$, получается тривиальное решение $X(x) \equiv 0$. Таким образом, следует считать, что $c_2 \neq 0$. Тогда $\sin l\sqrt{\lambda} = 0$, откуда $\sqrt{\lambda} = k\pi/l$, где k — любое целое положительное число.

Итак, собственные числа задачи Штурма-Лиувилля (7.17), (7.18) $\lambda_k = (k\pi/l)^2$, $k = 1, 2, \ldots$, а соответствующие им собственные функции $X_k(x) = \sin(k\pi x/l)$ определяются с точностью до произвольного множителя, который выберем равным 1.

При $\lambda = \lambda_k$ решение уравнения (7.16) имеет вид:

$$T_k(t) = a_k e^{-a^2 \lambda_k t} = a_k e^{-a^2 k^2 \pi^2 t / l^2} \ .$$

Таким образом, функции

$$u_k(t, x) = X_k T_k = a_k e^{-a^2 k^2 \pi^2 t / l^2} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяют уравнению (7.12) и граничным условиям (7.13) при любых постоянных значениях a_k.

Так как уравнение (7.12) линейное и однородное, всякая конечная сумма решений уравнения также будет решением, удовлетворяющим граничным условиям.

Это же утверждение, очевидно, справедливо и для бесконечной суммы, то есть ряда, если он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и один раз по t.

Итак, пусть

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-a^2 k^2 \pi^2 t / l^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \ . \tag{7.20}$$

Осталось так подобрать коэффициенты a_k, чтобы удовлетворить начальному условию (7.14). Полагая в (7.20) $t = 0$, получим:

$$u(0, x) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \ . \tag{7.21}$$

Эта формула представляет собой разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам на интервале $(0, l)$. Из математического анализа известно, что коэффициенты этого разложения определяются по формулам

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \ . \tag{7.22}$$

[2]То, что $\lambda < 0$ не является собственным числом, можно было получить, используя свойства оператора Штурма-Лиувилля, который рассматривался в параграфе 3.4

Таким образом, решение задачи (7.12)-(7.14) определяется по формуле (7.20), где коэффициенты вычисляются по формуле (7.22) (предполагается, что ряд сходится и возможно его почленное дифференцирование).

Покажем, что если $\varphi(x)$ непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную производную, причем $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, то ряд сходится равномерно и абсолютно и его можно почленно дифференцировать любое число раз по x и t при $t > 0$. В силу условий, наложенных на функцию $\varphi(x)$, равномерная и абсолютная сходимость ряда (7.21) является следствием известной теоремы из теории тригонометрических рядов. Поскольку при $t \geq 0$

$$0 < e^{-a^2k^2\pi^2t/l^2} \leq 1 \ ,$$

а при $t > 0$ и достаточно больших k

$$0 < \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 e^{-a^2k^2\pi^2t/l^2} < 1, \quad 0 < \frac{k\pi}{l} e^{-a^2k^2\pi^2t/l^2} < 1 \ ,$$

члены ряда (7.20) при $t = 0$ и ряды, получаемые из (7.20) почленным дифференцированием по t или x при $t > 0$ и больших k мажорируются членами ряда (7.21). Отсюда следует, что все эти ряды также сходятся абсолютно и равномерно. Тогда из теории рядов следует, что функция $u(t, x)$ непрерывна при $t \geq 0$ и дифференцируема при $t > 0$, причем ряд можно дифференцировать почленно. Аналогично проверяется существование производных любого порядка при $t > 0$.

В дальнейшем ограничимся формальной процедурой построения решения, не выясняя условий сходимости получаемых рядов.

7.5.2 Рассмотрим теперь неоднородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x) \ . \tag{7.23}$$

Решение задачи (7.23),(7.13),(7.14) будем искать в виде

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \ , \tag{7.24}$$

где $X_k(x)$ — собственные функции соответствующей задачи Штурма-Лиувилля, которая получается при решении однородного уравнения. В нашем случае функции $X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$.

Предположим, что функция $f(t, x)$ такова, что разлагается в ряд по функциям $X_k(x)$, то есть

$$f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \ . \tag{7.25}$$

Здесь $f_k(t)$ — коэффициенты Фурье функции $f(t, x)$, которые, как известно, находятся по формуле

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(t, x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \ . \tag{7.26}$$

Подставляя ряды (7.24), (7.25) в уравнение (7.23) и полагая, что ряд можно почленно дифференцировать, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k'(t) + \left(\tfrac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) - f_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = 0 \ . \tag{7.27}$$

Отсюда, в силу линейной независимости функций $\sin\frac{k\pi x}{l}$ следует, что функции $T_k(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$T_k'(t) + \left(\tfrac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) - f_k(t) = 0 \ . \tag{7.28}$$

Из начального условия следует, что

$$\varphi(x) = u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) \ ,$$

откуда заключаем, что

$$T_k(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = a_k \ . \tag{7.29}$$

Решая обыкновенные дифференциальные уравнения (7.28) с начальными условиями (7.29), получим:

$$T_k(t) = a_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau \ .$$

Подставляя это выражение в (7.24), имеем окончательно

$$u(t,x) \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l} \ + \ \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau\,\sin\frac{k\pi x}{l} \quad .$$

7.5.3 Рассмотрим теперь случай, когда граничные условия неоднородные, то есть требуется найти решение уравнения (7.23), удовлетворяющее условию (7.14), и такое, что

$$u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,l) = \mu_2(t) \ .$$

Эта задача легко сводится к предыдущей в случае гладких функций $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$. Действительно, введем новую функцию $v(t,x)$ такую, что $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$. Гладкую функцию $w(t,x)$ подберем так, чтобы она удовлетворяла тем же граничным условиям, что и функция $u(t,x)$. Таких функций существует бесконечно много. Например, можно взять $w(t,x) = \mu_1(t) + x\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)/l$. Тогда для функции $v(t,x)$ получается следующая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial w}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f(t,x)\right) \ ,$$
$$v(t,0) = v(t,l) = 0, \ v(0,x) = \varphi(x) - w(0,x) \ .$$

7.5.4 Метод разделения переменных может применяться не только для параболических, но и для уравнений других типов. Функции могут зависеть от произвольного (не обязательно двух) числа аргументов.

Рассмотрим, например, задачу о колебании прямоугольной мембраны, закрепленной по периметру. Если предположить, что в положении равновесия мембрана находится в плоскости Oxy, и $u(t,x,y)$ — величина отклонения точки с координатой

x, y в момент времени t от положения равновесия, то эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{7.30}$$

с граничными условиями

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0,\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=q} = 0 \tag{7.31}$$

и начальными условиями

$$u|_{t=0} = f(x, y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x, y)\ . \tag{7.32}$$

Будем искать нетривиальное решение уравнения (7.30), удовлетворяющее условиям (7.31), в виде $u(t, x, y) = T(t)v(x, y)$. Подставляя эту функцию в (7.30) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \frac{1}{v}\ .$$

Рассуждая как и ранее, получим, что равенство возможно только в том случае, когда обе части равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $-\lambda$. Тогда, получим два уравнения:

$$T'' + a^2 \lambda T = 0\ , \tag{7.33}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda v = 0\ . \tag{7.34}$$

Из граничных условий следует, что

$$v|_{x=0} = 0,\ v|_{x=l} = 0,\ v|_{y=0} = 0,\ v|_{y=q} = 0\ . \tag{7.35}$$

Таким образом, как и ранее пришли к задаче Штурма- Лиувилля (7.34),(7.35). Для того, чтобы определить знак λ, при котором могут существовать нетривиальные решения, умножим уравнение (7.34) на $v(x, y)$ и проинтегрируем по прямоугольнику:

$$\int\limits_0^q \int\limits_0^l v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dxdy + \lambda \int\limits_0^q \int\limits_0^l v^2\, dxdy = 0$$

Учитывая граничные условия (7.35), и тождества

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

получаем, что

$$\lambda \int_0^q \int_0^l v^2\, dxdy = \int_0^q \int_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy -$$

$$- \int_0^q \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x}\Big(v\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(v\frac{\partial v}{\partial y}\Big) \right] dxdy =$$

$$= \int_0^q \int_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy - \int_0^q \Big(v\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0}^{x=l} dy - \int_0^l \Big(v\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\Big|_{y=0}^{y=q} dx =$$

$$= \int_0^q \int_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy \ ,$$

откуда следует, что $\lambda \geq 0$. Заметим, что собственное число λ не равно 0, так как если $\lambda = 0$, то интеграл в правой части равен нулю, откуда следует, что частные производные функции $v(x, y)$ равны нулю, то есть $v(x, y) \equiv const$. Но так как на границе прямоугольника $v = 0$, то $v(x, y) \equiv 0$, что невозможно.

Для решения задачи Штурма-Лиувилля (7.34), (7.35) снова применим метод Фурье. Пусть $v(x, y) = X(x)Y(y)$. Подставляя это выражение в (7.34) имеем после деления на XY:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = -\frac{X''(x)}{X(x)} \ ,$$

откуда получаем два уравнения:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0,\ Y''(y) + \nu Y(y) = 0 \ , \tag{7.36}$$

где $\nu = \lambda - \mu$. Из граничных условий (7.35) следует, что

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0,\ Y(0) = 0,\ Y(q) = 0 \ . \tag{7.37}$$

Полученные задачи Штурма-Лиувилля уже решались:

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\ \nu_n = \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2,\ k, n = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_{kn} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{q^2}\right),\ X_k = \sin\frac{k\pi x}{l},\ Y_n = \sin\frac{n\pi y}{q} \ .$$

Тогда

$$v_{kn} = \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{n\pi y}{q} \ . \tag{7.38}$$

Из уравнения (7.33) следует, что

$$T_{kn}(t) = a_{kn}\cos a\sqrt{\lambda_{kn}}t + b_{kn}\sin a\sqrt{\lambda_{kn}}t$$

Следовательно, частное решение уравнения (7.30), удовлетворяющее граничным условиям (7.31), имеет вид:

$$u_{kn}(t, x, y) = \Big(a_{kn}\cos a\sqrt{\lambda_{kn}}t + b_{kn}\sin a\sqrt{\lambda_{kn}}t\Big) \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{n\pi y}{q} \ .$$

Как и ранее составим теперь ряд:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{kn}\cos a\sqrt{\lambda_{kn}}t + b_{kn}\sin a\sqrt{\lambda_{kn}}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{q}\ . \tag{7.39}$$

В случае равномерной сходимости этого ряда и рядов, получающихся из него двукратным почленным дифференцированием, очевидно, сумма также будет удовлетворять уравнению (7.30) и граничным условиям (7.31).

Подберем теперь соответствующим образом коэффициенты a_{kn} и b_{kn}, для того, чтобы удовлетворить начальным условиям.

Первое из условий (7.32) дает:

$$u|_{t=0} = f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}\sin\frac{n\pi y}{q}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\ . \tag{7.40}$$

Если обозначить выражение в скобке через $A_k(y)$, то (7.40) перепишется в виде

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}A_k(y)\sin\frac{k\pi x}{l}\ ,$$

то есть $A_k(y)$ — коэффициенты разложения функции $f(x,y)$ в ряд Фурье по синусам и, следовательно,

$$A_k(y) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\ .$$

Учитывая, что

$$A_k(y) = \sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}\sin\frac{n\pi y}{q}\ ,$$

получаем, что a_{kn} — коэффициенты разложения функции $A_k(y)$ по синусам, то есть

$$a_{kn} = \frac{2}{q}\int\limits_0^q A_k(y)\sin\frac{n\pi y}{q}\,dy = \frac{4}{lq}\int\limits_0^q\int\limits_0^l f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dxdy\ .$$

Второе начальное условие и выражение (7.39) дают:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a\sqrt{\lambda_{kn}}b_{kn}\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{k\pi x}{l}\ ,$$

откуда, рассуждая как это было сделано выше, получаем:

$$b_{kn} = \frac{4}{alq\sqrt{\lambda_{kn}}}\int\limits_0^q\int\limits_0^l g(x,y)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dxdy\ .$$

7.6 ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 7

7.6.1 Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9u = 4\sin 2t \cos 3x - 9x^2 - 2, \tag{7.41}$$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(t,\pi)}{\partial x} = 2\pi, \tag{7.42}$$

$$u(0,x) = x^2 + 2, \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0. \tag{7.43}$$

Решение. Совершим замену зависимой переменной u таким образом, чтобы для новой функции граничные условия были однородными. Для этого подберем сначала какую-нибудь функцию, которая удовлетворяет тем же граничным условиям, что и функция u. В качестве такой функции можно взять, например, $w = x^2$, которая, очевидно, удовлетворяет граничным условиям (7.42). Пусть теперь $u = v + x^2$. Найдем, каким условиям должна удовлетворять функция v. Для этого подставим функцию $u = v + x^2$ в (7.41), (7.42), (7.43). В результате получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 9v = 4\sin 2t \cos 3x, \tag{7.44}$$

$$\frac{\partial v(t,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v(t,\pi)}{\partial x} = 0, \tag{7.45}$$

$$v(0,x) = 2, \quad \frac{\partial v(0,x)}{\partial t} = 0. \tag{7.46}$$

Таким образом, для нахождения функции v получили задачу (7.44), (7.45), (7.46). Главное отличие этой задачи от задачи (7.41), (7.42), (7.43) — однородность граничных условий. Будем искать функцию v в виде

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t). \tag{7.47}$$

В качестве функций X_k выберем собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, соответствующей (7.44), (7.45). Для их нахождения подставим в однородное уравнение (7.44) и условия (7.45) вместо функции v функцию $X(x)T(t)$, считая, что X и T не равны нулю тождественно. В результате получим

$$XT'' - X''T - 9XT = 0, \quad X'(0)T(t) = X'(\pi)T(t) = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{T'' - 9T}{T} = \frac{X''}{X}, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

В первом равенстве справа стоит функция, зависящая только от t, а слева — от x, причем t и x независимы. Такое возможно тогда и только тогда, когда правая и левая чести этого равенства константы. Обозначим эту константу $-\lambda$. В результате получим задачу Штурма-Лиувилля, то есть задачу о нахождении таких чисел λ и соответствующих им ненулевых функций X, которые удовлетворяют условиям

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{7.48}$$

$$X'(0) = X'(\pi) = 0. \tag{7.49}$$

Рассмотрим несколько случаев. Пусть $\lambda < 0$. Тогда решение дифференциального уравнения (7.48) имеет вид

$$X = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

Требование выполнения условий (7.49) приводит к равенствам

$$\sqrt{-\lambda}(-C_1 + C_2) = 0, \quad \sqrt{-\lambda}(-C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi}) = 0,$$

из которых следует что $C_1 = C_2 = 0$, то есть $X \equiv 0$.

Если $\lambda = 0$, то $X = C_1 x + C_2$ и из условий (7.49) следует, что $C_1 = 0$. При этом C_2 может быть любым числом. Таким образом задача Штурма-Лиувилля имеет решение $\lambda_0 = 0,\ X_0(x) = 1$.

Пусть теперь $\lambda > 0$. В этом случае общим решением уравнения (7.48) является функция $X = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x$. Из первого условия (7.49) получаем $C_1\sqrt{\lambda} = 0$, откуда следует $C_1 = 0$. Второе условие (7.49) дает $C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$. При $C_2 = 0$ получаем нулевое решение X. Если же $C_2 \neq 0$, то $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$. Отсюда заключаем, что $\sqrt{\lambda}\pi = k\pi,\ k = 1, 2 \ldots$. Следовательно, у задачи Штурма-Лиувилля есть еще решения: $\lambda_k = k^2,\ X_k(x) = \cos kx$.

Таким образом, для нахождения v по формуле (7.47) осталось найти функции $T_k(t)$. Для этого подставим (7.47) в (7.44). Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k'' X_k - \sum_{k=0}^{\infty} T_k X_k'' - 9\sum_{k=0}^{\infty} T_k X_k = 4\sin 2t \cos 3x.$$

Учитывая, что $X_k'' = -\lambda_k X_k,\ \lambda_k = k^2$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k\big(T_k'' + (k^2 - 9)T_k\big) = 4\sin 2t\cos 3x. \tag{7.50}$$

Разложим правую часть этого равенства в ряд по X_k, то есть представим ее в виде

$$4\sin 2t\cos 3x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) X_k(x). \tag{7.51}$$

Коэффициенты a_k находятся по формуле [3]

$$a_k = \frac{\int\limits_0^{\pi} X_k 4\sin 2t\cos 3x\,dx}{\int\limits_0^{\pi} X_k^2\,dx}.$$

Подставляя разложение (7.51) в (7.50) получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k\big(T_k'' + (k^2 - 9)T_k\big) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) X_k(x).$$

Отсюда имеем уравнения для нахождения T_k:

$$T_k'' + (k^2 - 9)T_k = a_k\ . \tag{7.52}$$

[3]В данном случае проще воспользоваться не общей формулой для нахождения коэффициентов a_k, а подобрать их, так как требуемое разложение в ряд имеет вид

$$4\sin 2t\cos 3x = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \ldots.$$

Из этого равенства легко заметить, что $a_3 = 4\sin 2t$, а остальные коэффициенты равны нулю.

Функция v должна удовлетворять начальным условиям (7.46). Подставляя (7.47) в (7.46) получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(0) = 2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} X_k T_k'(0) = 0.$$

Отсюда, рассуждая так же, как и при нахождении коэффициентов a_k, заключаем, что $T_0(0) = 2,\ T_k(0) = 0$ при $k > 0$, $T_k'(0) = 0$ при всех k.

Таким образом, для определения T_k получили задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (7.52), зависящего от параметра k. Для его решения целесообразно рассмотреть несколько случаев.

Пусть $k = 0$. Тогда имеем $T_0'' - 9T_0 = 0,\ T_0(0) = 2,\ T_0'(0) = 0$. Общее решение этого уравнения $T_0(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$. Из начальных условий имеем

$$C_1 + C_2 = 2, \quad 3C_1 - 3C_2 = 0,$$

то есть $C_1 = C_2 = 1$ и, следовательно, $T_0(t) = e^{3t} + e^{-3t}$.

При $k = 3$ имеем задачу $T_3'' = 4\sin 2t,\ T_3(0) = T_3'(0) = 0$. Отсюда следует, что $T_3(t) = 2t - \sin 2t$.

При всех остальных значениях k получаем $T_k'' + (k^2 - 9)T_k = 0$, $T_k(0) = T_k'(0) = 0$, откуда следует, что $T_k(t) = 0$.

Итак, все значения T_k определены. Теперь, учитывая (7.47) и определение функции v, можно выписать решение задачи (7.41),(7.42),(7.43)

$$u(t,x) = x^2 + e^{3t} + e^{-3t} + (2t - \sin 2t)\cos 3x.$$

Пример 2. Вывести формулу для решения задачи:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x, t < \infty,\\ &\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = g(t), \quad 0 < t < \infty,\\ &u(0,x) = 0, \qquad 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

Решение. Применим косинус-преобразование Фурье, считая, что функция u и ее производные по x стремятся достаточно быстро к нулю при $x \to \infty$. Это предположение нужно для того, чтобы все интегралы, фигурирующие ниже существовали. Для применения косинус-преобразования Фурье умножим дифференциальное уравнение на $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(x\xi)$ и проинтегрируем по x от 0 до ∞. Используя граничное условие $\dfrac{\partial u(t,0)}{\partial x} = g(t)$, интегрируя по частям, и, учитывая, что при $x \to \infty$ функция u и ее производные по x равны нулю, получим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\cos(x\xi)\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u\cos(x\xi)\,dx = \frac{\partial \overline{u}^{(c)}(t,\xi)}{\partial t} = a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos(x\xi)\,dx =$$

$$= a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\partial u}{\partial x}\cos(x\xi)\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} + a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi\int_0^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\sin(x\xi)\,dx =$$

$$= -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}g(t) + a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}u\xi\sin(x\xi)\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} - a^2\xi^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u\cos(x\xi)\,dx =$$

$$= -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}g(t) - a^2\xi^2\overline{u}^{(c)}(t,\xi).$$

Таким образом, для функции $\overline{u}^{(c)}$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\overline{u}^{(c)}(t,\xi)}{dt} + a^2\xi^2\overline{u}^{(c)}(t,\xi) = -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}g(t). \tag{7.53}$$

Для нахождения начального условия для этого уравнения применим косинус-преобразование к начальному условию $u(0,x) = 0$:

$$\overline{u}^{(c)}(0,\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty u(0,x)\cos(x\xi)\,dx = 0. \tag{7.54}$$

Функция $\overline{u}^{(c)}$ может быть найдена теперь как решение задачи Коши (7.53), (7.54). Уравнение (7.53) это линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Для его решения представим $\overline{u}^{(c)}$ в виде $\overline{u}^{(c)} = vw$, где w — какое-нибудь невырожденное решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (7.53):

$$\frac{dw}{dt} + a^2\xi^2 w = 0. \tag{7.55}$$

Отсюда находим $w = e^{-a^2\xi^2 t}$. Подставляя теперь $\overline{u}^{(c)} = vw$ в (7.53), имеем

$$\frac{dv}{dt}w + v\Big(\frac{dw}{dt} + a^2\xi^2 w\Big) = -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}g(t).$$

Учитывая (7.55) и вид функции w, получаем

$$\frac{dv}{dt} = -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}g(t)e^{a^2\xi^2 t},$$

откуда

$$v = C - a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t g(\tau)e^{a^2\xi^2\tau}\,d\tau.$$

Следовательно

$$\overline{u}^{(c)} = vw = \Big(C - a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t g(\tau)e^{a^2\xi^2\tau}\,d\tau\Big)e^{-a^2\xi^2 t}.$$

Из условия Коши (7.54) следует, что $C = 0$, поэтому имеем

$$\overline{u}^{(c)}(t,\xi) = -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t g(\tau)e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\,d\tau.$$

Применим теперь обратное косинус-преобразование Фурье, найдем решение $u(t,x)$ исходной задачи:

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \overline{u}^{(c)}(t,\xi)\cos(x\xi)\,d\xi = -\frac{2a^2}{\pi}\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^t g(\tau)e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\,d\tau\Big)\,d\xi =$$

$$= -\frac{2a^2}{\pi}\int\limits_0^t g(\tau)\Big(\int\limits_0^\infty e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos(x\xi)\,d\xi\Big)\,d\tau.$$

Выражение в скобках в правой части этого равенства можно упростить, если воспользоваться следующим равенством

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2\xi^2}\cos(x\xi)\,d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}. \tag{7.56}$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos(x\xi)\,d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

и окончательно имеем

$$u(t,x) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau.$$

Для полноты вывода необходимо проверить формулу (7.56). Заметим, что функция $e^{-\alpha^2\xi^2}\cos(x\xi)$ как функция от ξ четная, а $e^{-\alpha^2\xi^2}\sin(x\xi)$ — нечетная. Поэтому

$$\int\limits_0^\infty e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos(x\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos(x\xi)\,d\xi - i\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\sin(x\xi)\,d\xi\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}e^{-ix\xi}\,d\xi$$

Дальнейшие выкладки аналогичны тем, которые были сделаны в параграфе 7.3 при выводе формулы решения задачи Коши.

Замечание. Если бы граничное условие имело вид $u(t,0) = g(t)$, то следовало бы применить синус преобразование Фурье.

7.6.2 Задачи

1. Пусть $\Delta = \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$. Показать, что функция $u(t,x)$, определенная как сумма ряда

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}\Delta^k\tau(x_1,\dots,x_n)\ ,$$

допускающего почленное дифференцирование нужное число раз, является решением уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0\ , \tag{7.57}$$

причем $u(0,x) = \tau(x_1,\dots,x_n)$.

2. Построить решения задачи Коши для уравнения (7.57), удовлетворяющие соответственно условиям:

а) $u(0,x) = \cos l_1x_1 \cos l_nx_n$;
б) $u(0,x) = \sin l_1x_1 + \cos l_nx_n$.

3. Используя преобразование Фурье, получить формулу для решения задачи Коши в области $|x| < \infty,\ t > 0$ $(a, b - const)$:

$$\text{а) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu\ ,$$
$$u\ |_{t=0} = \varphi(x);$$
$$\text{б) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + f(t,x)\ ,$$
$$u\ |_{t=0} = \varphi(x).$$

4. Найти решение следующих задач

$$\text{а) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad 0 < x, t < \infty$$
$$u(0,x) = 0, \quad u(t,0) = 0;$$
$$\text{б) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x, t < \infty$$
$$u(0,x) = 0, \quad u(t,0) = g(t);$$
$$\text{в) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad 0 < x, t < \infty$$
$$u(0,x) = 0, \quad u(t,0) = g(t);$$
$$\text{г) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad 0 < x, t < \infty$$
$$u(0,x) = 0, \quad \frac{du(t,0)}{dx} = 0.$$

5. Методом разделения переменных решить следующие задачи для уравнения колебания струны в области $0 < x < l,\ t > 0$:

$$\text{а) } u(t,0) = u(t,l) = 0,\ u(0,x) = 0,\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 2\sin\frac{2\pi}{l}x + 5\sin\frac{4\pi}{l}x\ ;$$
$$\text{б) } \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t,l)}{\partial x} = 0,\ u(0,x) = 1,\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \cos\frac{\pi}{l}x\ ;$$
$$\text{в) } u(t,0) = t^2,\ u(t,\pi) = t^2\ (l = \pi),\ u(0,x) = \sin x,\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0\ .$$

6. Решить задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2t,\ 0 < x < 1,\ t > 0\ ,$$
$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} = \sin 1 \sin 2t,\ u(0,x) = 0,\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = -2\cos x.$$

7. В области $0 < x < l,\ t > 0$ решить следующие задачи:

$$\text{а) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta u,\ u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0,\ u(0,x) = \sin\frac{3\pi x}{2l}\ ;$$
$$\text{б) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}\cos\frac{5\pi x}{2l},\ \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0,\ u(t,l) = 1,\ u(0,x) = 1\ .$$

8. Координаты точек однородного и изотропного параллелепипеда D удовлетворяют неравенствам: $0 \le x \le l_1$, $0 \le y \le l_2$, $0 \le z \le l_3$. Найти закон изменения температуры внутри параллелепипеда D, если этот параллелепипед изолирован в тепловом отношении от окружающей среды (то есть тепловой поток на поверхности параллелепипеда равен нулю) и если начальная температура точек, лежащих внутри параллелепипеда, определяется равенством $u|_{t=0} = f(x, y, z)$.

9. Найти решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ |x| < \infty,\ y > 0,\ t > 0,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x, y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0\ ,$$

$\varphi(x, y)$ — непрерывная ограниченная функция.

7.6.3 Тест к главе 7

1. Ставится задача изучения изменения температуры тела. В начальный момент времени известна его температура, а на границе тепловой поток. Такая задача носит название

а) первой краевой задачи;

б) второй краевой задачи;

в) третьей краевой задачи.

2. Какая из следующих функций удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности (коэффициент a равен 1)?

а) $u = 2xt$;

б) $u = 2x + t$;

в) $u = 2t + x^2$.

3. Принцип максимума решения первой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности означает, что

а) есть точка, в которой решение принимает максимальное значение;

б) решение принимает максимальное значение только в начальный момент времени или на границе области;

в) нет точки, в которой решение принимает максимальное значение.

4. Применение преобразования Фурье при решении задачи Коши для уравнения теплопроводности позволяет

а) избавиться от начальных условий;

б) получить уравнение в частных производных первого порядка;

в) свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению.

5. Задача Штурма-Лиувилля состоит в том, чтобы

а) найти значение параметра, при котором существует какая-нибудь функция, удовлетворяющая уравнению и краевым условиям;

б) найти значения параметра, при котором существует неотрицательная функция, удовлетворяющая уравнению и краевым условиям;

в) найти значение параметра, при котором существует ненулевая функция, удовлетворяющая уравнению и краевым условиям.

6. Для какого из приведенных ниже уравнений нельзя применить метод Фурье при решении краевой задачи ?
а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (2+\sin(tx))\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; б) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = tx\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = tx$.

8 ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

8.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе будут рассмотрены простейшие из эллиптических уравнений: уравнения Лапласа и Пуассона.

Всюду, кроме последнего параграфа, используются следующие обозначения: x, y — точки n-мерного пространства R^n, то есть, например, $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $|x|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

Пусть $f = f(x)$ — заданная функция. Тогда неоднородное уравнение

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = f(x) \tag{8.1}$$

называется ***уравнением Пуассона***. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (8.1) имеет вид

$$\Delta u = 0\ , \tag{8.2}$$

и назывется ***уравнением Лапласа.*** Таким образом, уравнение Лапласа является частным случаем уравнения Пуассона.

В главе 5 было показано, что задача Коши для уравнения Лапласа является некорректной.

Пусть Ω — ограниченная область из n-мерного евклидового пространства R^n, $\partial\Omega$ — граница области Ω, которую будем всюду в дальнейшем считать кусочно-гладкой. Обозначим через N внешнюю нормаль к $\partial\Omega$. Для уравнения Пуассона обычно формулируются следующие задачи.

Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемую в области Ω функцию $u(x)$, удовлетворяющую в Ω уравнению (8.1) и одному из условий:

1) решение $u = u(x)$ непрерывно в $\Omega \cup \partial\Omega$ и на $\partial\Omega$ принимает заданное значение, то есть

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \tag{8.3}$$

(первая краевая задача или задача Дирихле);

2) функция $u = u(x)$ в каждой точке границы имеет предельное значение нормальной производной [1], принимающее заданное значение, то есть

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{x\in\partial\Omega} = \varphi(x) \tag{8.4}$$

(***вторая краевая задача или задача Неймана***);

---

[1] Под предельным значением понимается $\lim\limits_{\substack{y\to x\in\partial\Omega\\ y\in\Omega}} \dfrac{\partial u(y)}{\partial N}$, где $N = (N_1, \ldots, N_n)$ — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$ в точке x и $\dfrac{\partial u(y)}{\partial N} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u(y)}{\partial y_i} N_i$.

3) $u = u(x)$ — непрерывная в $\Omega \cup \partial\Omega$ функция, в точках границы существует предельное значение нормальной производной и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N} + a(x)u\right)\Bigg|_{x\in\partial\Omega} = \varphi(x),$$

где $a(x), \varphi(x)$ — заданные непрерывные функции (***третья краевая задача***).

Если во всех перечисленных выше случаях решение ищут не внутри ограниченной области Ω, а вне ее, то говорят о ***внешних*** краевых задачах, в отличие от рассмотренных выше ***внутренних*** задач. При рассмотрении внешних задач на решение налагается так называемое условие регулярности на бесконечности. В случае $n = 2$ требуют, чтобы решение было ограниченным при стремлении аргумента к бесконечности. Если же $n > 2$, то требуют, чтобы при $|x| \to \infty$ решение стремилось к нулю не медленнее чем $|x|^{2-n}$.

Функции, удовлетворяющие в некоторой области уравнению Лапласа, называют ***гармоническими*** в этой области.

Можно рассматривать обобщения сформулированных выше задач, когда, например, на части границы области задается условие Дирихле, на другой части — Неймана, на третьей — третье краевое условие.

В предыдущей главе изучалось уравнение теплопроводности, которое описывало нестационарное распределение тепла в теле. Если же температура установилась, то есть не меняется со временем, то производная по t равна нулю и однородное уравнение теплопроводности превращается в уравнение Лапласа. Таким образом, рассмотренные внутренние задачи описывают, в частности, стационарное распределение тепла в теле. При этом в случае первой краевой задачи известна температура границы. Во второй краевой задаче на границе задается тепловой поток, третья краевая задача соответствует процессу теплообмена с внешней средой, температура которой известна.

8.2 ФОРМУЛА ГРИНА

Найдем решение уравнения Лапласа, зависящее только от $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Пусть $v(|x|) = u(x)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(|x|)\frac{x_i}{|x|}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = v''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + v'(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right) .$$

Отсюда следует, что уравнение Лапласа превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение для функции v:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = v'' + \frac{n-1}{|x|}v' = 0 .$$

Решая это уравнение, получаем:

$$v(|x|) = \begin{cases} c_1 + c_2|x|^{2-n}, & n > 2 , \\ c_1 + c_2 \ln|x|, & n = 2 . \end{cases}$$

Определение 8.2.1 *Пусть $x, y \in R^n$, ω_n — площадь единичной сферы в n-мерном пространстве.* [2] *Тогда функция*

$$I(x-y) = \begin{cases} \dfrac{|x-y|^{2-n}}{\omega_n(2-n)}, & n > 2 \ , \\ \dfrac{\ln|x-y|}{2\pi}, & n = 2 \end{cases} \tag{8.5}$$

называется ***фундаментальным решением уравнения Лапласа.***

Очевидно, что при $x \neq y$ фундаментальное решение является бесконечно дифференцируемой функцией и удовлетворяет уравнению Лапласа как по переменной x, так и по переменной y.

Формулы, которые будут получены далее, играют важную роль при исследовании свойств гармонических функций и решении уравнения Пуассона.

Пусть Ω — область в R^n с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а $u(x)$ и $v(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые в Ω функции, имеющие непрерывные производные в $\Omega \cup \partial\Omega$.

Запишем тождества:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + v\Delta u \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = v\Delta u - u\Delta v$$

и проинтегрируем их по Ω. Тогда, согласно формуле Гаусса-Остроградского, имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega} v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial N(y)}\,dS_y = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v}{\partial y_i}\frac{\partial u}{\partial y_i}\,dy + \int\limits_{\Omega} v\Delta u\,dy, \tag{8.6}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left(v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial N(y)} - u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial N(y)}\right)dS_y = \int\limits_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)\,dy, \tag{8.7}$$

где dS элемент площади поверхности $\partial\Omega$, индекс y обозначает интегрирование по переменной y.

Сформулируем и докажем теперь некоторые свойства решений уравнений (8.1), (8.2).

Лемма 8.2.1 *Пусть $u_1(x), u_2(x)$ удовлетворяют уравнению (8.1) и граничному условию (8.4). Тогда $u_1(x) - u_2(x) = const$ для всех $x \in \Omega$.*

Доказательство. Заметим, что $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ является решением уравнения (8.2), причем $\left.\dfrac{\partial u}{\partial N}\right|_{x\in\partial\Omega} = 0$. Подставляя эту функцию в формулу (8.6) и выбирая в ней $v(x) = u(x)$, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)^2 dy = 0 \ ,$$

[2] В общем случае $\omega_n = 2\pi^{n/2}\Gamma^{-1}(n/2)$, где $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$ — гамма-функция Эйлера. В частности, $\omega_2 = 2\pi,\ \omega_3 = 4\pi,\ \omega_4 = 2\pi^2$.

откуда следует, что во всех точках области Ω производные первого порядка функции $u(x)$ равны 0, то есть, $u(x) = const$.

Доказанная лемма означает, что любые два решения задачи (8.1), (8.4) могут отличаться только на константу.

Лемма 8.2.2 *Для того, чтобы задача Неймана для уравнения (8.1) имела решение, необходимо выполнение равенства:*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \varphi(y)\, dS_y = \int\limits_{\Omega} f(y)\, dy \ .$$

Доказательство. Утверждение следует из формулы (8.6), если в ней положить $v \equiv 1$. В частности, если $u(x)$ — гармоническая в области Ω функция, имеющая непрерывные производные в $\Omega \cup \partial\Omega$, то $\int\limits_{\partial\Omega} \dfrac{\partial u(y)}{\partial N(y)}\, dS_y = 0$.

Лемма 8.2.3 *Пусть $u(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая в области Ω функция, имеющая непрерывные производные в $\Omega \cup \partial\Omega$. Тогда справедлива следующая формула (**формула Грина**).*

$$\int\limits_{\Omega} I(x-y)\Delta u(y)\, dy =$$
$$= \begin{cases} u(x), & x \in \Omega\ , \\ 0, & x \notin \Omega \cup \partial\Omega \end{cases} + \int\limits_{\partial\Omega} \left[I(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial N(y)} - u(y)\frac{\partial I(x-y)}{\partial N(y)} \right] dS_y \quad (8.8)$$

Доказательство. Пусть сначала $x \notin \Omega \cup \partial\Omega$. В этом случае точки x и y совпасть не могут, так как точка y находится либо внутри Ω, либо на границе $\partial\Omega$. Тогда формула (8.8) получается из формулы (8.7), если положить в ней $v(y) = I(x-y)$ и воспользоваться тем, что фундаментальное решение бесконечно дифференцируемо при $x \neq y$ и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Предположим теперь, что $x \in \Omega$. Обозначим теперь через Ω_ε область, которая получается из Ω после выбрасывания из нее шара $\{y : \ |x-y| < \varepsilon\}$. Граница области Ω_ε состоит из границы $\partial\Omega$ области Ω и сферы $\{y : |y-x| = \varepsilon\}$. В области Ω_ε фундаментальное решение не имеет особенностей, поэтому если снова воспользоваться формулой (8.7), примененной к области Ω_ε, положив при этом $v(y) = I(x-y)$, получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} I(x-y)\Delta u(y)\, dy = \int\limits_{\partial\Omega} \left(I(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial N(y)} - u\frac{\partial I(x-y)}{\partial N(y)} \right) dS_y +$$
$$+ \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \left(I(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial N(y)} - u\frac{\partial I(x-y)}{\partial N(y)} \right) dS_y \quad (8.9)$$

Сравнивая (8.8) с (8.9) получим, что утверждение будет доказано, если установим, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} I(x-y)\Delta u(y)\, dy = \int\limits_{\Omega} I(x-y)\Delta u(y)\, dy\ , \quad (8.10)$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \left(I(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial N(y)} - u(y)\frac{\partial I(x-y)}{\partial N(y)} \right) dS_y = u(x)\ . \quad (8.11)$$

Равенство (8.10) следует из определения несобственного интеграла. Необходимо только установить, что предел существует. Действительно, пусть для определенности $n > 2$ и $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Так как функция Δu ограничена, существует такая константа C, что в окрестности точки x $|I(x-y)\Delta u(y)| \le C|x-y|^{2-n}$, поэтому

$$\int\limits_{\varepsilon_1<|x-y|<\varepsilon} I(x-y)\Delta u(y)\,dy \le C \int\limits_{\varepsilon_1<|x-y|<\varepsilon} |x-y|^{2-n}\,dy =$$

$$= C\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon}\left(\int\limits_{|x-y|=r} |x-y|^{2-n}\,dS_y\right)dr = C\omega_n\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} r\,dr \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0\ .$$

Таким образом, согласно критерию Коши предел существует.

Для проверки равенств (8.11) заметим, что по определению функции $I(x-y)$

$$\left|\int\limits_{|y-x|=\varepsilon} I(x-y)\frac{\partial u}{\partial N}\,dS_y\right| = \frac{\varepsilon^{2-n}}{\omega_n(n-2)}\left|\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial N}\,dS_y\right| \le$$

$$\le C_1\frac{\varepsilon^{2-n}}{\omega_n(n-2)}\int\limits_{|y-x|=\varepsilon} dS_y = C_1\frac{\varepsilon}{n-2} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0\ . \qquad (8.12)$$

Здесь C_1 — константа, ограничивающая производную $\dfrac{\partial u}{\partial N}$. В точках границы, лежащих на сфере $\{y:\ |x-y| = \varepsilon\}$, внешняя по отношению к области Ω_ε нормаль N направлена по радиусу сферы к ее центру. Значит производная по направлению нормали только знаком отличается от производной по направлению радиуса. Следовательно,

$$\left.\frac{\partial I(x-y)}{\partial N(y)}\right|_{|x-y|=\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\left.\frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\right|_{r=\varepsilon} = -\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} = -\left(\int\limits_{|y-x|=\varepsilon} dS_y\right)^{-1}$$

Поэтому

$$U = \left|u(x) + \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} u(y)\frac{\partial I(x-y)}{\partial N(y)}\,dS_y\right| = \left|u(x) - \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\int\limits_{|y-x|=\varepsilon} u(y)\,dS_y\right| =$$

$$= \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\left|\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}(u(x)-u(y))\,dS_y\right| \le \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}|u(x)-u(y)|\,dS_y\ .$$

Из непрерывности функции u в точке x следует, что для любого $\delta > 0$ найдется такое ε, что при $|x-y| \le \varepsilon$ выполняется неравенство $|u(x)-u(y)| \le \delta$. Учитывая это, последнее неравенство перепишется в виде

$$U \le \delta\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\int\limits_{|y-x|=\varepsilon} dS_y = \delta\ .$$

Таким образом, в силу произвольности δ следует, что $U \to 0$. Отсюда и из (8.12) получим (8.11). Тем самым формула Грина доказана.

Из формулы (8.8) следует, что если $u(x)$ в области Ω удовлетворяет уравнению (8.1) и имеет непрерывные производные в $\Omega \cup \partial\Omega$, то для точек $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} I(x-y) f(y)\, dy - \int\limits_{\partial\Omega} \left[I(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial N(y)} - u(y) \frac{\partial I(x-y)}{\partial N(y)} \right] dS_y. \qquad (8.13)$$

Теорема 8.2.1 (теорема о среднем) *Пусть $u(x)$ — гармоническая в некоторой области функция и замкнутый шар с центром в точке x радиуса R лежит в этой области. Тогда справедливы формулы:*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=R} u(y)\, dS_y = \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|y-x|\le R} u(y)\, dy\ . \qquad (8.14)$$

Доказательство. Докажем сначала первое из этих равенств. Используем формулу (8.13), где в качестве Ω возьмем $\{y : |x-y| < R\}$. Так как $u(x)$ — гармоническая функция, то есть удовлетворяет уравнению (8.2), $f(y) \equiv 0$. Учитывая вид области и определение функции $I(x-y)$ (для определенности считаем $n > 2$), имеем на $\partial\Omega = \{y : |y-x| = R\}$:

$$I(x-y) = \frac{R^{2-n}}{\omega_n (2-n)}, \qquad \frac{\partial I(x-y)}{\partial N} = \frac{R^{1-n}}{\omega_n}\ .$$

Напомним, что для сферы направление нормали и радиуса совпадают. Поэтому

$$u(x) = -\frac{R^{2-n}}{\omega_n(2-n)} \int\limits_{|y-x|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial N(y)}\, dS_y + \frac{R^{1-n}}{\omega_n} \int\limits_{|y-x|=R} u(y)\, dS_y =$$

$$= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=R} u(y)\, dS_y\ .$$

Здесь первое слагаемое обращается в ноль в силу леммы 8.2.2.

Второе из равенств (8.14) следует из уже доказанного выше и соотношений:

$$\frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|y-x|\le R} u(y)\, dy = \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_0^R \left(\int\limits_{|y-x|=\rho} u(y)\, dS_y \right) d\rho =$$

$$= \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_0^R u(x) \omega_n \rho^{n-1}\, d\rho = u(x)\ .$$

8.3 ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теорема 8.3.1 (принцип максимума) *Пусть $u(x)$ — гармоническая в области Ω функция, $M = \sup\limits_{x\in\Omega} u(x)$, $m = \inf\limits_{x\in\Omega} u(x)$. Тогда, если $u(x)$ — отличная от постоянной гармоническая в области функция, то ни в одной точке внутри этой области она не может принимать ни значение M, ни m.*

Доказательство. Для доказательства заметим сначала, что если $M = +\infty$ или $m = -\infty$, то утверждение очевидно, так как в каждой точке области функция $u(x)$ принимает конечное значение. Если же, например, $M < \infty$, и в какой-нибудь точке $x_0 \in \Omega$ выполняется равенство $u(x_0) = M$, то тогда $u(x) \equiv M$. Действительно, покажем сначала, что внутри произвольного шара с центром в точке x_0, целиком лежащего в Ω функция $u(x) \equiv M$. Пусть число R такое, что шар $\{y : |x_0 - y| \le R\} \subset \Omega$, y_0 — точка во внутренности этого шара и $u(y_0) \neq M$. Тогда по определению M возможно только одно соотношение: $u(y_0) < M$ и, из определения непрерывности следует, что это же неравенство справедливо для некоторой окрестности точки y_0. Согласно теореме о среднем

$$M = u(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|y-x_0|\le R} u(y)\, dy < \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|y-x_0|\le R} M\, dy = M \ ,$$

что невозможно. Итак, внутри шара $u(x) \equiv M$.

Пусть теперь z — произвольная точка из Ω. Соединим точки x_0 и z некоторой кривой Γ, целиком лежащей в Ω, и пусть радиус R меньше чем расстояние между кривой Γ и границей $\partial\Omega$ области Ω. Передвигая центр шара из точки x_0 в точку z вдоль кривой Γ и пользуясь тем, что в силу доказанного выше если значение функции u в центре шара равно M, то оно тождественно равно M, получим, что $u(z) = M$. Из произвольности z отсюда следует, что $u \equiv M$ в Ω. Это противоречит условию, значит, равенство $u(x_0) = M$ невозможно. Доказательство того, что ни в одной точке $u(x) \neq m$ проводится аналогично.

Если $u(x)$ отличная от постоянной гармоническая в ограниченной области Ω и непрерывная в $\Omega \cup \partial\Omega$ функция, то она принимает свое наибольшее и наименьшее значение в $\Omega \cup \partial\Omega$. Но, поскольку внутри Ω эти значения приниматься не могут, значит, свое наибольшее и наименьшее значение функция $u(x)$ принимает только на границе области.

Теперь легко получить теорему единственности решения задачи Дирихле.

Теорема 8.3.2 *Если задача Дирихле (8.1), (8.3) имеет решение, то оно единственно.*

Доказательство. Действительно, если бы существовали два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ одной и той же задачи Дирихле, то их разность была бы гармонической функцией, принимающей на границе нулевое значение. Но, так как наибольшее и наименьшее значение функция принимает на границе, получаем, что функция тождественно равна нулю, то есть $u_1(x) = u_2(x)$.

8.4 ФУНКЦИЯ ГРИНА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ШАРЕ

Поставим задачу получить явную формулу для решения задачи Дирихле. Эта задача может быть решена только в случае областей Ω специального вида. Для решения поставленной задачи введем понятие функции Грина.

Определение 8.4.1 *Функция $G(x, y)$ называется **функцией Грина** задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω, если она представима в виде:*

$$G(x, y) = I(x - y) + g(x, y) \ ,$$

где $g(x,y)$ — гармоническая функция как по $x \in \Omega$, так и по $y \in \Omega$, непрерывная по каждой из переменных в $\Omega \cup \partial\Omega$ и обращается в ноль, если точка x или y лежит на границе $\partial\Omega$ области Ω.

Предположим дополнительно, что $g(x,y)$ и решение $u(x)$ задачи (8.1), (8.3) непрерывно дифференцируемы в $\Omega \cup \partial\Omega$. Тогда, вычитая из формулы (8.8) формулу (8.7), в которой функцию $v(y)$ возьмем равной $g(x,y)$ и, используя определение функции Грина, получим при $x \in \Omega$

$$\int\limits_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y)\,dy = u(x) + \int\limits_{\partial\Omega} \left[G(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial N(y)} - u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial N(y)} \right] dS_y \ ,$$

или

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial N(y)}\varphi(y)\,dS_y \ . \tag{8.15}$$

Таким образом, знание функции Грина позволяет выписать решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона, то есть задача нахождения решения, по существу, свелась к проблеме нахождения функции Грина.

Найдем функцию Грина в случае, когда $\Omega = \{x : |x| < R\}$ — шар радиуса R с центром в начале координат. Прежде всего, заметим, что ***преобразование инверсии*** $s_x = R^2 x/|x|^2$ переводит точку x, лежащую внутри сферы в "симметричную"относительно сферы точку, лежащую вне сферы и наоборот. Проверим теперь, что искомая функция Грина имеет вид:

$$G(x,y) = I(x-y) - I\left(\frac{|x|}{R}y - \frac{x}{|x|}R\right) \ ,$$

то есть $g(x,y) = -I\left(\frac{|x|}{R}y - \frac{x}{|x|}R\right)$. Положим для определенности $n > 2$. Тогда

$$g(x,y) = -I\left(\frac{|x|}{R}y - \frac{x}{|x|}R\right) = -\frac{1}{\omega_n(2-n)}\left|\frac{|x|}{R}y - \frac{x}{|x|}R\ \right|^{2-n} =$$
$$= -\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n} I(y - s_x) \ . \tag{8.16}$$

Если $x, y \in \Omega$, то $s_x \notin \Omega \cup \partial\Omega$, то есть точки s_x и y совпасть не могут и тогда согласно свойствам фундаментального решения функция $g(x,y)$ — гармоническая по y при фиксированном x.

Заметим, что выражая длину вектора через скалярное произведение, получим:

$$\left|\frac{|x|}{R}y - \frac{x}{|x|}R\right|^2 = \left(\frac{|x|}{R}y - \frac{x}{|x|}R, \frac{|x|}{R}y - \frac{x}{|x|}R\right) = \frac{|x|^2|y|^2}{R^2} - 2(x,y) + R^2 \ .$$

В выражение, стоящее в правой части точки x и y входят симметрично, значит, левая часть не изменится, если x и y поменять местами. Следовательно,

$$\left|\frac{|x|}{R}y - \frac{x}{|x|}R\right| = \left|\frac{|y|}{R}x - \frac{y}{|y|}R\right| \ , \tag{8.17}$$

то есть, согласно (8.16), (8.17) для функции $g(x,y)$ получается другое представление

$$g(x,y) = -I\left(\frac{|y|}{R}x - \frac{y}{|y|}R\right) = -\left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n} I(x - s_y)$$

откуда, рассуждая как выше, получим, что $g(x,y)$ гармоническая по x при при фиксированном y функция.

Из представления (8.16) при $|x| = R$ или (8.17) при $|y| = R$ заключаем, что если один из аргументов x или y лежит на сфере, то $g(x,y) = -I(x-y)$, то есть выполнены все требования, налагаемые на функцию Грина.

Для того, чтобы воспользоваться формулой (8.15), найдем $\dfrac{\partial G(x,y)}{\partial N(y)}$ на сфере, то есть при $|y| = R$. Заметим, что на сфере $N(y) = y/R$ и следовательно,

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial N(y)}\right|_{|y|=R} = \frac{1}{\omega_n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i(y_i-x_i)}{R|x-y|^n} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\frac{y_i}{R}\frac{\left(y_i - \dfrac{x_i}{|x|^2}R^2\right)}{\left|y - \dfrac{x}{|x|^2}R^2\right|^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\omega_n R}\left(\frac{R^2}{|x-y|^n} - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i y_i}{|x-y|^n} - \frac{|x|^2}{\left|\dfrac{|x|y}{R} - \dfrac{x}{|x|}R\right|^n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i y_i}{\left|\dfrac{|x|y}{R} - \dfrac{x}{|x|}R\right|^n}\right) .$$

Тогда, учитывая (8.17) и то, что $|y| = R$, получим

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial N(y)}\right|_{|y|=R} = \frac{1}{\omega_n R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n} .$$

Из приведенных рассуждений следует, что если решение задачи Дирихле (8.3) для уравнения Лапласа (8.2) в шаре радиуса R с центром в начале координат существует, то оно имеет вид:

$$u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n}\int\limits_{|y|=R}\frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\,dS_y . \tag{8.18}$$

Можно доказать, что если $\varphi(x)$ — непрерывная на сфере функция, то формула (8.18) действительно дает решение рассматриваемой задачи.

8.5 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КОЛЬЦА

В качестве примера применения метода разделения переменных для эллиптических уравнений рассмотрим следующую задачу (здесь, в отличии от всех предыдущих параграфов этой главы, x и y скалярные величины):

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad r < x^2 + y^2 < R , \tag{8.19}$$

$$u|_{\rho=r} = \Phi_1(\varphi), \qquad u|_{\rho=R} = \Phi_2(\varphi) , \tag{8.20}$$

где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ и φ — полярные координаты, $\Phi_1(\varphi), \Phi_2(\varphi)$ — заданные функции от φ, которые, очевидно, должны быть периодическими с периодом 2π.

Запишем уравнение (8.19) в полярных координатах:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{8.21}$$

и найдем нетривиальное решение этого уравнения вида $u = X(\rho)Y(\varphi)$. Подставляя эту функцию в (8.21) и разделяя переменные, получим

$$\frac{Y''(\varphi)}{Y(\varphi)} = -\frac{\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho)}{X(\rho)} = -\lambda \ . \tag{8.22}$$

Для функции $Y(\varphi)$, которая должна быть периодической с периодом 2π, получаем уравнение $Y'' + \lambda Y = 0$. Если $\lambda < 0$, то решение этого уравнения запишется в виде линейной комбинации экспонент и не будет периодическим. При $\lambda = 0$ получается периодическая функция $Y \equiv const$. При $\lambda > 0$ решение имеет вид

$$Y(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi$$

и будет периодическим с периодом 2π только в том случае, когда $\sqrt{\lambda} = n$ — целое число. Итак, $\lambda_n = n^2,\ n = 0, 1, 2, \ldots$.

Для нахождения функции $X(\rho)$ из (8.22) имеем теперь

$$\rho^2 X_n'' + \rho X_n' - n^2 X_n = 0 \ . \tag{8.23}$$

Это линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. При $n = 0$ его линейно независимые решения: 1 и $ln\,\rho$; при $n \neq 0$: ρ^n и ρ^{-n}. Общее решение уравнения (8.23) получается как линейная комбинация этих линейно независимых решений.

Решение уравнения (8.21) запишется теперь в виде (см. главу 7)

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n Y_n = \alpha_0 \ln\rho + \beta_0 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\alpha_n \rho^n + \beta_n \rho^{-n}) \cos n\varphi + (\gamma_n \rho^n + \delta_n \rho^{-n}) \sin n\varphi \right] . \tag{8.24}$$

где $\alpha_0, \beta_0, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ — постоянные, которые определяются из краевых условий (8.20):

$$\Phi_1(\varphi) = \alpha_0 \ln r + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}) \cos n\varphi + (\gamma_n r^n + \delta_n r^{-n}) \sin n\varphi \right] \ , \tag{8.25}$$

$$\Phi_2(\varphi) = \alpha_0 \ln R + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\alpha_n R^n + \beta_n R^{-n}) \cos n\varphi + (\gamma_n R^n + \delta_n R^{-n}) \sin n\varphi \right] \ . \tag{8.26}$$

Если ввести обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \ln r + \beta_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad \alpha_0 \ln R + \beta_0 = \frac{A_0}{2} \ , \\ \alpha_n r^n + \beta_n r^{-n} = a_n, \qquad \alpha_n R^n + \beta_n R^{-n} = A_n \ , \\ \gamma_n r^n + \delta_n r^{-n} = b_n, \qquad \gamma_n R^n + \delta_n R^{-n} = B_n \ , \end{aligned} \tag{8.27}$$

то равенства (8.25), (8.26) перепишутся в виде

$$\Phi_1(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \ ,$$

$$\Phi_2(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \ .$$

Эти соотношения являются разложениями в ряды Фурье функций $\Phi_1(\varphi), \Phi_2(\varphi)$, и, следовательно, позволяют найти коэффициенты $a_0, a_n, b_n, A_0, A_n, B_n$, после чего коэффициенты $\alpha_0, \beta_0, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ находят путем решения системы уравнений (8.27).

8.6 ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 8

8.6.1 Примеры решения типовых задач

Пример 1. Построить функцию Грина для области $\Omega \subset R^3$, представляющую собой двугранный угол $x_2 > 0,\ x_3 > 0$.

Решение Построим функцию Грина методом отражений. Суть его заключается в том, что вне рассматриваемой области помещаются точки, которые служат для вычисления функции Грина. Эти точки в случае плоской границы выбираются как зеркальные отображения исходной точки области относительно плоскостей.

Пусть $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega$. Границей области Ω служат части плоскостей $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. Введем точки $y_{nm} = (y_1, (-1)^n y_2, (-1)^m y_3)$. Точка y_{10} симметрична точке y относительно плоскости $y_2 = 0$. Попробуем взять $g(x, y) = -I(x - y_{10})$. Тогда при $x \in \Omega$, учитывая, что точки x и y_{10} совпасть не могут, из свойств фундаментального решения, получим, что $g(x, y)$ гармоническая как по x так и по y функция. Кроме того, на границе $y_2 = 0$ имеем $I(x - y) + g(x, y) = 0$, так как при $y_2 = 0$ точки y и y_{10} совпадают. Однако область Ω имеет еще одну границу — $y_3 = 0$. Чтобы удовлетворить на этой границе условию, которое налагается на функцию Грина, отобразим относительно этой плоскости точки y и y_{10}. Получим соответственно точки y_{01} и y_{11}. "Подправим" функцию $g(x, y)$, выбрав ее равной

$$g(x, y) = -I(x - y_{10}) - I(x - y_{01}) + I(x - y_{11}).$$

Легко заметить, что теперь все требования, налагаемые на эту функцию, выполнены.

В пространстве R^3 фундаментальное решение имеет вид $I(x-y) = -(4\pi|x-y|)^{-1}$, поэтому окончательно имеем

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{|x-y_{10}|} + \frac{1}{|x-y_{01}|} - \frac{1}{|x-y_{11}|}\right).$$

Пример 2 Найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0,\quad x_2 > 0,\quad x_3 > 0,\quad u(x_1, 0, x_3) = 0,\quad u(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)}.$$

Решение В соответствии с формулой (8.15) решение задачи записывается в виде

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y}{\partial N(y)} \varphi(y)\, dS_y,$$

где $\partial\Omega$ — граница области, в которой ищется решение, $G(x, y)$ — функция Грина, N — внешняя нормаль, φ — значение решения на границе.

В примере граница состоит из двух полуплоскостей $x_2 = 0,\ x_3 > 0$ и $x_3 = 0,\ x_2 > 0$. На первой из этих полуплоскостей выполняется равенство $\varphi = 0$, поэтому в выражении для решения останется только интеграл по полуплоскости $x_3 = 0,\ x_2 > 0$. Внешняя нормаль к этой границе имеет направление противоположное направлению оси Ox_3, поэтому $\dfrac{\partial}{\partial N(y)} = -\dfrac{\partial}{\partial y_3}$. Функция Грина была найдена в предыдущем примере. Следовательно

$$\left.\frac{\partial G(x, y)}{\partial N(y)}\right|_{y_3=0} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y_{10}|} - \frac{1}{|x-y_{01}|} + \frac{1}{|x-y_{11}|}\right)\Bigg|_{y_3=0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y_{10}|}\right)\Bigg|_{y_3=0} = \frac{x_3}{2\pi}\left(\frac{1}{|x-y|^3} - \frac{1}{|x-y_{10}|^3}\right)\Bigg|_{y_3=0}.$$

В результате получим

$$u(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{(1+y_1^2+y_2^2)}\left(\frac{1}{\sqrt{((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2)^3}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{((x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2+x_3^2)^3}}\right)dy_2dy_1.$$

8.6.2 Задачи

1. Пусть $u(x_1,\dots,x_n)$ — гармоническая функция. Являются ли гармоническими функции:

а) $u(x_1+x_1^*,\dots,x_n+x_n^*)$, где $(x_1^*,\dots,x_n^*)$ постоянный вектор ;

б) $u(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n),\ \lambda=const$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial u}{\partial x_2},\ n=2$;

г) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

2. Найти гармоническую внутри единичного круга функцию, удовлетворяющую условию $u|_{r=1}=f(\varphi)$, где:

а) $f(\varphi)=\cos^2\varphi$; б) $f(\varphi)=\sin^3\varphi$; в) $f(\varphi)=\sin^6\varphi+\cos^6\varphi$.

3. Существует ли гармоническая внутри круга радиуса R с центром в начале координат функция такая, что $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=f(\varphi)$, где:

а) $f(\varphi)=\cos\varphi$; б) $f(\varphi)=\cos^2\varphi$; в) $f(\varphi)=\cos 2\varphi$.

4. Найти функцию, гармоническую в кольце $1<r<2$ и такую, что

$$u|_{r=1}=u_1=const,\ u|_{r=2}=u_2=const\ .$$

5. Доказать, что

а) если функция $u(x_1,\dots,x_n)$ является гармонической в шаре $|x|<1$ и кроме того $\left.\dfrac{\partial u}{\partial N}\right|_{|x|=1}=\varphi(x_1,\dots,x_n)$, то функция $v(x_1,\dots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ является решением задачи Дирихле:

$$\Delta v=0,\quad v|_{|x|=1}=\varphi(x_1,\dots,x_n);$$

б) если функция $v(x_1,\dots,x_n)$ — решение задачи Дирихле в шаре $|x|<1$, $u|_{|x|=1}=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ и $\int\limits_{|x|=1}\varphi(x_1,\dots,x_n)\,dS_x=0$, то функция

$$u(x_1,\dots,x_n)=C+\int\limits_0^1\frac{v(rx_1,\dots,rx_n)}{r}\,dr$$

является решением задачи Неймана:

$$\Delta u = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{|x|=1} = \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

6. Построить функцию Грина для следующих областей:
а) область Ω — полупространство $x_3 > 0$ в трехмерном пространстве;
б) область Ω — первая четверть на плоскости.

7. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $x_3 > 0$, $u|_{x_3=0} = \cos x_1 \cos x_2$;

8. Пусть $u(x_1, x_2)$ — гармоническая функция. Имеют ли точки самопересечения линии уровня этой функции в области ее гармоничности?

9. Используя формулу Пуассона и теорему о среднем, показать, что если $u(x)$ — неотрицательная гармоническая в шаре $|x| < R$ функция, то справедлива оценка

$$R^{n-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \le u(x) \le R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)\ .$$

Указание. Учесть, что при $|y| = R$ и $|x| < R$ выполняются неравенства

$$R - |x| \le |x - y| \le R + |x|.$$

10. Используя результаты предыдущей задачи, показать, что если $u(x)$ — гармоническая во всем пространстве, ограниченная сверху или снизу функция, то она равна константе.

11. Тонкая пленка натянута на проволочный каркас, проектирующийся на плоскости Oxy в прямоугольник со сторонами $x = 0, x = l, y = 0, y = m$. Отклонение точек контура от плоскости Oxy задается условиями $u(0, y) = 0$, $u(l, y) = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(x, m) = \psi(x)$. Найти форму поверхности, по которой расположится пленка.
Указание. Функция, задающая поверхность, является гармонической.

12. Решить предыдущую задачу, если в ней условия при $x = 0$ и $x = l$ заменить на следующие: $u(0, y) = g(y)$, $u(l, y) = f(y)$.

8.6.3 Тест к главе 8

1. Какая из следующих функций является гармонической?
а) $u = x_1^2 + x_2^2$;
б) $u = x_1^3 - x_2^3$;
в) $u = x_1 x_2$.

2. Рассмативается задача Неймана для уравнения Лапласа в круге. Для какой из перечисленных ниже функций, задающих значение нормальной производной на границе, задача заведомо не имеет решение?
а) $(\varphi - \pi)^2$, φ — полярный угол;
б) $\sin\varphi$;
в) $\cos\varphi$.

3. Пусть функция u гармоническая в круге, центр которого расположен в начале координат и радиус равен 1. Пусть, кроме того, на окружности радиуса 1 функция равна $\sin 2\varphi$. Чему равно значение функции u в начале координат?
а) 1/2;
б) -1/2;
в) 0.

4. Пусть u гармоническая в ограниченной области Ω функция, принимающая в точках границы области значение $1/(1 + x_1^2 + x_2^2)$. Область Ω содержит начало координат. Какое из утверждений справедливо?
а) В области Ω есть точка, в которой функция u равна нулю.
б) Функция u положительна.
в) В области Ω есть точка, в которой функция u равна 1.

5. Функция Грина позволяет
а) получить решение задачи Коши для уравнения Лапласа;
б) получить решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона;
в) получить решение задачи Неймана для уравнения Пуассона.

6. При нахождении методом разделения переменных гармонической в кольце функции, роль граничных условия для задачи Шурма-Лиувилля играют:
а) условия периодичности;
б) условия ограниченности;
в) условия положительности.

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

	Вопрос 1	Вопрос 2	Вопрос 3	Вопрос 4	Вопрос 5	Вопрос 6
Глава 1	в	б	б	а	в	а
Глава 2	б	а	а	в	в	б
Глава 3	а	в	в	а	в	б
Глава 4	б	а	б	а	в	в
Глава 5	б	в	а	а	б	б
Глава 6	б	в	а	в	а	в
Глава 7	б	в	б	в	в	а
Глава 8	в	а	в	б	а	а

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе, А.В.* Уравнеия математической физики / А.В. Бицадзе. - М.: Наука, 1982.-336 с.

2. *Бицадзе,* Сборник задач по уравнениям математической физики / А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко. - М.: Наука, 1985.-224 с.(Альянс, 2007)

3. *Будак, Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по уравнениям математической физики /Б.М. Будак, , А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.-688 с.

4. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики / С.К. Годунов. - М.: Наука, 1979.-391 с.

5. *Гюнтер, Н.М.* Курс вариационного исчисления / Н.М. Гюнтер. - СПб.: Лань, 2009. - 320с.

6. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. - СПб.:Невский Диалект, 2004. - 816 с.

7. *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 572 с.

8. *Емельянов, В.М.* Уравнения математической физики. Практикум по решению задач / В.М. Емельянов, Е.А. Рыбакина. - СПб.:Лань, 2008. - 213 с.

9. *Кошляков Н.С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов - М.: Наука, 1977.-736 с.

10. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Интегральные уравнения. -М.: Наука, 1976.-215 с.

11. *Люстерник, Л.А.* Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. - СПб.: Лань, 2009. - 272 с.

12. *Садовничий В.А.* Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986. - 368 с.

13. *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Из-во МГУ, 2004.-799 с.

14. *Треногин, В.А.* Функциональный анализ / В.А. Треногин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 488 с.

15. *Треногин, В.А.* Задачи и упражнения по функциональному анализу / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 240 с.

16. *Эльсгольц, Л.Э.* Вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. - М.: ЛКИ, 2008. - 208 с.

Предметный указатель

Оглавление