Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
"Алтайский государственный технический
университет им. И.И. Ползунова"

С.А. КАНТОР

Уравнения математической физики и функциональный анализ

Учебное пособие

Барнаул 2010

УДК 517

Кантор С.А. Уравнения математической физики и функциональный анализ: Учебное пособие / Алт. госуд. технич. ун-т им. И.И.Ползунова. Барнаул, 2010. — 136с.

Учебное пособие предназначено для студентов вуза с повышенным объемом математической подготовки, в частности, для обучения дипломированных специалистов по специальности — "Вычислительные машины, комплексы, системы и сети".

Рекомендовано Алтайским государственным техническим университетом им. И.И. Ползунова в качестве учебного пособия для студентов АлтГТУ, обучающихся по направлению 230100 "Информатика и вычислительная техника".
Протокол № 8 от 21 апреля 2010 г.

Рецензенты:
к.ф.м.-н., доцент А.С. Киркинский,
к.ф.-м.н., доцент Г.Ш. Лев.

ВВЕДЕНИЕ

Курс "Уравнения математической физики и функциональный анализ" предназначен для начального ознакомления с двумя разделами математики, которые в настоящее время продолжают достаточно интенсивно развиваться.

Как уравнения математической физики, так и элементы функционального анализа входят в качестве дидактических единиц в Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки дипломированного специалиста "Информатика и вычислительная техника". В это направление, в частности, входит специальность "Вычислительные машины, комплексы, системы и сети", в соответствии с учебным планом которой и написано настоящее учебное пособие. К сожалению, небольшое количество часов (85 часов), которое отводится учебным планом специальности для изучения курса, не позволяет достаточно подробно, полно и строго осветить указанные разделы математики. Оно позволяет получить только первоначальный, минимальный объем знаний, который необходим, в частности, для освоения других дисциплин, таких как "Вычислительная математика", "Основы теории управления".

Учебное пособие состоит из двух частей, кроме того, в него включены задачи для выполнения индивидуального задания.

Первая часть посвящена вопросам функционального анализа. Функциональный анализ — сравнительно молодой раздел математики, который является своего рода языком современной математики. В настоящее время ни одна серьезная работа по теории дифференциальных уравнений, вычислительной математике, методам оптимизации, теории управления и другим разделам математики не мыслится без идей, методов, терминологии, обозначений функционального анализа. Возникнув в начале 20-го века в результате обобщения различных понятий и методов, использовавшихся в линейной алгебре, геометрии, математическом анализе, функциональный анализ окончательно оформился в математическую дисциплину в 20-30 годы благодаря работам Д. Гильберта, Ф. Рисса, С. Банаха.

Важнейшую роль в функциональном анализе играет понятие оператора, представляющее обобщение понятия функции. Обобщение строилось путем перехода на более высокую ступень математической абстракции, что позволило уловить более глубокие закономерности и связи за счет того, что не имеющие значения детали каждой отдельной задачи отбрасывались и не заслоняли существа дела.

Во второй части изучаются уравнения математической физики. Предметом этого раздела математики являются дифференциальные уравнения с частными производными. Несмотря на то, что изучение их началось достаточно давно, до сих пор здесь существует еще много нерешенных проблем. Свое название этот раздел математики получил в связи с тем, что первые уравнения, которые начали рассматриваться еще в 18 веке, описывали те или иные процессы, изучаемые в физике.

Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями теории множеств, линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа. В связи с ограниченностью объема пособия, примеры, которые иллюстрируют основные понятия предмета, вынесены, большей частью, в упражнения и задачи. Поэтому, для усвоения материала **необходимо** уделить время решению задач, которые помещены в конце каждого параграфа. **Без самостоятельного решения задач освоение изучаемых разделов математики невозможно.** Задачи, решение которых осуществляется по известной схеме, включены в индивидуальное задание, приведенное в конце учебного пособия. Такая схема изучения дисциплины предусмотрена учебным планом, который отводит для самостоятельной работы 3/5 от общего числа выделенных на нее часов.

Каждый параграф содержит также примеры решения типовых задач. Следует отметить, что в некоторых случаях очень трудно выделить типовые задачи. Это относится, прежде всего, к первой части пособия. Некоторые факты, на которые имеются ссылки в учебном пособии, сформулированы и доказаны в ходе решения типовых задач. Поэтому эта часть пособия **является обязательной** при изучении.

Как уже отмечалось, учебный план предусматривает небольшой объем дисциплины "Уравнения математической физики и функциональный анализ". Поэтому в учебное пособие не вошли многие вопросы, традиционно включаемые в университетские курсы функционального анализа и уравнений математической физики для математических специальностей. Студентам, желающим более подробно познакомиться с перечисленными разделами математики, можно порекомендовать учебники и задачники, список которых приведен в конце пособия.

Автор благодарит А.С. Киркинского, ознакомившегося с рукописью учебного пособия и сделавшего ряд полезных замечаний.

1 НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

1.1 МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

1.1.1 Метрические пространства

Одной из важнейших операций математического анализа является предельный переход, в основе которого лежит тот факт, что на числовой прямой определено понятие расстояния между точками. Многие важные положения анализа при этом не связаны с алгебраической природой чисел (то есть с алгебраическими операциями над числами), а опираются лишь на понятие расстояния. Тогда, рассматривая совокупность чисел лишь как множество, где задано расстояние, приходят к понятию метрического пространства. Введем его, следуя принятому в математике аксиоматическому подходу.

Определение 1.1.1 *Пусть $\mathcal{X}$ — множество. Предположим, что каждой паре элементов x, y из $\mathcal{X}$ поставлено в соответствии число $\rho(x, y)$ такое, что*

а) для любых x, y из $\mathcal{X}$ выполняется неравенство $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

в) для всех x, y, z из $\mathcal{X}$ справедливо неравенство $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Тогда число $\rho(x, y)$ называется ***расстоянием*** *между x и y, а множество $\mathcal{X}$ с заданным на нем расстоянием $\rho(x, y)$ называется* ***метрическим пространством****.*

Если не будут возникать двусмысленности, то в дальнейшем пространство будет обозначаться той же буквой, что и множество.

Элементы пространства обычно называют ***точками***.

Примеры:

1) $\mathcal{X}$ — множество точек плоскости, $\rho(x, y)$ — длина отрезка, соединяющего точки x и y (пространство R^2). Неравенство треугольника означает, в частности, что одна сторона треугольника с вершинами в точках x, y, z меньше суммы двух других сторон;

2) $\mathcal{X}$ — множество непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$,

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

(пространство $C(a, b)$);

3) Дискретное пространство. Структура элементов множества, из которых оно состоит, не имеет значения, расстояние между двумя точками равно 1, если точки различны и нулю, если точки одинаковы.

1.1.2 Нормированные пространства

Операция предельного перехода чаще всего встречается в совокупности с другими операциями, среди которых наиболее распространены изучаемые в линейной алгебре операции сложения элементов и умножения их на числа.

Напомним известное из линейной алгебры определение.

Определение 1.1.2 *Множество $\mathcal{E}$ называют* ***линейным*** *или* ***векторным пространством****, если определены операции сложения элементов из $\mathcal{E}$ и умножения элементов из $\mathcal{E}$ на числа (вещественные или комплексные), причем для любых $x, y, z \in \mathcal{E}$ и любых чисел λ, μ выполняются свойства:*

1) $x + y = y + x$ — коммутативность сложения;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ — ассоциативность сложения;

3) в $\mathcal{E}$ существует нулевой элемент θ, то есть такой элемент, что $x + \theta = x$;

4) для каждого x существует противоположный $(-x)$, то есть такой элемент, что $x + (-x) = \theta$;

5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ — ассоциативность умножения;

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ — дистрибутивность;

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ — дистрибутивность;

8) $1 \cdot x = x$.

В случае, когда числа, умножение на которые определено в пространстве, являются действительными (комплексными), говорят, что рассматривается линейное пространство над полем действительных (комплексных) чисел.

Определение 1.1.3 *Линейное пространство $\mathcal{E}$ назовем* ***линейным нормированным пространством****, если каждому элементу $x \in \mathcal{E}$ ставится в соответствие действительное число $\|x\|$, называемое* ***нормой*** *этого элемента, причем выполнены следующие условия (аксиомы нормированного пространства):*

1) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ — однородность нормы;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ — неравенство треугольника.

Понятие нормы является обобщением на произвольное линейное нормированное пространство хорошо известного из линейной алгебры понятия длины вектора. В примерах, приведенных выше, пространства R^2 и $C(a, b)$ являются линейными нормированными пространствами. В первом случае, если точки заданы своими координатами, то есть $x = (x_1, x_2)$, норма задается по формуле $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Во втором — $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$.

В линейном нормированном пространстве можно ввести расстояние по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Действительно, первое свойство расстояния следует из первой аксиомы нормы. Далее,

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x),$$

таким образом выполнено второе свойство расстояния. И, наконец,

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \le \|x-z\| + \|z-y\| = \rho(x,z) + \rho(z,y),$$

то есть выполнено неравенство треугольника для расстояния.

Таким образом, все понятия и свойства, определенные и установленные для метрических пространств автоматически переносятся на нормированные пространства.

1.1.3 Пространства со скалярным произведением

В аналитической геометрии вводилось понятие скалярного произведения векторов, с помощью которого можно было выразить угол между векторами. Напомним, что если, например, на плоскости два вектора в прямоугольной декартовой системе координат определялись своими координатами, то их скалярное произведение равно произведению длин векторов на косинус угла между векторами, а само скалярное произведение вычисляется как сумма произведений соответствующих координат векторов.

Обобщим это понятие на произвольное линейное пространство.

Определение 1.1.4 *Пусть $\mathcal{H}$ линейное пространство над полем действительных (комплексных) чисел и каждой паре элементов x, y из $\mathcal{H}$ поставлено в соответствие число (x,y) таким образом, что для любых x,y,z из $\mathcal{H}$ и произвольного числа α выполняются условия:*

(a) $(x,x) \ge 0$, *причем* $(x,x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \theta$*;*

(b) $(x,y) = (y,x)$ *(* $(x,y) = \overline{(y,x)}$ *в случае поля комплексных чисел, где черта означает переход к комплексно сопряженному числу);*

(c) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$*;*

(d) $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$.

Тогда число (x,y) называется ***скалярным произведением****.*

Элементы пространства $\mathcal{H}$ часто называют векторами.

В дальнейшем будет рассматриваться пространство над полем действительных чисел.

В качестве примера пространств, в которых можно задать скалярное произведение, рассмотрим множество числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ таких, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i^2$ сходится. Будем обозначать такое множество l_2. Если $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$, то по определению положим

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots), \quad \alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \dots).$$

Из соотношений

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i + \eta_i)^2 \le 2\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha\xi_i)^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2$$

следует, что если $x, y \in l_2$, то $x + y$ и αx лежат в l_2. Таким образом, в пространстве l_2 введены операции сложения и умножения на числа. Проверка выполнения аксиом линейного пространства осуществляется теперь без труда. Легко показать также, что выражение $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$ задает скалярное произведение.

Если в пространстве задано скалярное произведение, то в нем можно ввести норму по правилу

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Для проверки аксиомы треугольника потребуется доказать ***неравенство Коши-Буняковского-Шварца***:

$$|(x, y)| \le \|x\| \|y\|. \tag{1.1}$$

Для этого заметим, что для любого числа λ согласно аксиомам скалярного произведения

$$0 \le (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + 2\lambda(x, y) + \lambda^2 (y, y).$$

Так как квадратный трехчлен при любых λ не отрицателен, его дискриминант не положителен, то есть $(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \le 0$, откуда следует требуемое неравенство.

Замечание. В неравенстве (1.1) знак равенства возможен тогда и только тогда, когда вектора x и y пропорциональны.

Действительно, если вектора x и y пропорциональны, то есть существует такая константа λ, что $y = \lambda x$, то

$$|(x, y)| = |(x, \lambda x)| = |\lambda| (x, x) = |\lambda| \|x\|^2 = \|x\| \|\lambda x\| = \|x\| \|y\|.$$

Таким образом, в (1.1) левая и правая части равны.

Обратно, пусть в (1.1) левая часть равна правой. Тогда из доказательства неравенства (1.1) следует, что дискриминант равен нулю, значит, существует такое число λ_0, при котором квадратичный трехчлен обращается в 0, то есть

$$(x + \lambda_0 y, x + \lambda_0 y) = 0.$$

Поэтому из первой аксиомы нормы имеем, что $x + \lambda_0 y = \theta$, то есть вектора x и y пропорциональны.

Вернемся к неравенству треугольника. Его справедливость вытекает из соотношений:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \le \\ \le (x, x) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)} + (y, y) = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Проверка остальных аксиом нормы не вызывает труда.

Замечание. Из доказательства неравенства треугольника следует, что знак равенства возможен тогда и только тогда, когда

$$(x, y) = \|x\| \|y\|.$$

Значит в неравенстве (1.1) должен выполняться знак равенства. Согласно предыдущему замечанию это возможно тогда и только тогда, когда вектора x и y пропорциональны. Непосредственно проверкой убеждаемся, что коэффициент пропорциональности должен быть положителен.

Таким образом, показано, что в неравенстве треугольника знак равенства возможен тогда и только тогда, когда вектора пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности положителен.

Если в пространстве задано скалярное произведение, то в нем можно ввести понятие угла между векторами, в частности, определить ортогональность. В аналитической геометрии доказывалось, что скалярное произведение векторов равно произведению длин векторов на косинус угла между ними. Значит, если вектора ортогональны, их скалярное произведение равно нулю. По аналогии, вводят следующее определение для любого пространства, в котором задано скалярное произведение.

Определение 1.1.5 *Будем говорить, что вектора x и y* ***ортогональны*** *(обозначается это следующим образом: $x \perp y$), если $(x, y) = 0$.*

Перечислим и докажем свойства ортогональных векторов:

1) $\theta \perp \mathcal{H}$. Действительно, для любого x из $\mathcal{H}$ справедливы равенства: $(\theta, x) = (0\theta, x) = 0(\theta, x) = 0$, то есть θ ортогонален любому вектору из $\mathcal{H}$.

2) Если $x \perp \mathcal{H}$, то $x = \theta$. Для доказательства заметим, что $x \perp \mathcal{H}$ означает, что $(x, y) = 0$ для всех $y \in \mathcal{H}$. Тогда, взяв $y = x$, имеем $(x, x) = 0$, то есть $x = \theta$.

3) Если $x_1, \ldots, x_n \perp y$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \perp y$, где α_i произвольные числа. Действительно,

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y) = 0.$$

4) Если $x_i \perp x_j$ $(i \neq j)$, то

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

(***теорема Пифагора***).

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\|^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Последнее равенство здесь выполняется потому, что в силу ортогональности сумма $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_i, x_j)$ содержит только одно ненулевое слагаемое, соответствующее $j = i$.

В пространстве, в котором норма определена через скалярное произведение, справедливо ***равенство параллелограмма***:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1.2}$$

Такое название это равенство получило потому, что в геометрии оно означает, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон. Для доказательства достаточно сложить равенства:

$$(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y)\ ,$$
$$(x - y, x - y) = (x, x) - 2(x, y) + (y, y)\ .$$

Заметим, что для пространства $C(a, b)$ в общем случае равенство (1.2) не справедливо (соответствующий пример приведен ниже).

1.1.4 Примеры решения задач к параграфу 1.1

Пример 1. Будет ли метрическим пространство, элементами которого являются числа, а расстояние задается по формуле $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$.

Решение. В соответствии с определением метрического пространства необходимо проверить выполнение аксиом расстояния.

Очевидно, что расстояние, определенное в задаче, неотрицательно и в силу строгой монотонности функции e^x расстояние $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Выполнение второго условия следует из равенств

$$\rho(x, y) = |e^x - e^y| = |e^y - e^x| = \rho(y, x).$$

И, наконец, в силу свойств модуля имеем

$$\rho(x, y) = |e^x - e^y| = |(e^x - e^z) + (e^z - e^y)| \le |e^x - e^z| + |e^z - e^y| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Таким образом, выполнены все требования, налагаемые при определении расстояния. Следовательно, пространство является метрическим.

Пример 2. ***Открытым шаром*** с центром в точке a из $\mathcal{X}$ радиуса $R > 0$ (обозначается $S(a, R)$) называется множество всех точек из $\mathcal{X}$, расстояние от которых до центра меньше радиуса, то есть

$$S(a, R) = \{x \,:\, x \in \mathcal{X},\ \rho(x, a) < R\}.$$

Всегда ли из того, что $S(a_1, R_1) \subset S(a_2, R_2)$ следует, что $R_1 < R_2$?

Решение. Для ответа на вопрос представим себе, как выглядят шары в пространстве, например, определенном в предыдущем примере. По определению $S(a, R) = \{x : \rho(a, x) < R\}$. Таким образом, учитывая определение расстояния, получим, что открытым шаром с центром в точке a радиуса R будет множество таких чисел x, что $|e^a - e^x| < R$. Отсюда следует, что $e^a - R < e^x < e^a + R$ или

$$\ln(e^a + R) > x > \begin{cases} -\infty, & \text{при } e^a \le R, \\ \ln(e^a - R), & \text{при } e^a > R. \end{cases}$$

Пусть, например, $a_1 = -\ln 10$, $R_1 = 1.5$, $a_2 = 0$, $R_2 = 1$. Тогда $S(a_1, R_1) = (-\infty, \ln 1.6)$, $S(a_2, R_2) = (-\infty, \ln 2)$. Таким образом, $S(a_1, R_1) \subset S(a_2, R_2)$, однако $R_2 < R_1$. Следовательно, в метрическом пространстве шар меньшего радиуса может содержать шар большего радиуса.

Пример 3. Можно ли на множестве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций ввести норму следующим образом:

а) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$; б) $\|x\| = |x(a)| + |x(b)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$?

Решение. В первом случае не выполнено первое свойство нормы, так как из равенства нулю второй производной не следует, что функция равна нулю.

В втором случае из того, что норма равна нулю получаем

$$|x(a)| = |x(b)| = \max_{t\in[a,b]} |x''(t)| = 0.$$

Из равенства нулю второй производной заключаем, что $x(t) = c_1 t + c_2$. Равенства $|x(a)| = |x(b)| = 0$ выполнимы только при условии $c_1 = c_2 = 0$, откуда заключаем, что

$x(t) = 0$. Итак, первое свойство нормы выполнено. Справедливость второго свойства очевидна. Выполнение третьего свойства следует из неравенств

$$\|x+y\| = |x(a)+y(a)| + |x(b)+y(b)| + \max_{t\in[a,b]}\left|\big(x(t)+y(t)\big)''\right| \le$$
$$\le |x(a)| + |y(a)| + |x(b)| + |y(b)| + \max_{t\in[a,b]}\left(|x''(t)| + |y''(t)|\right) \le \|x\| + \|y\|.$$

Пример 4. Можно ли в пространстве $C(a,b)$ задать скалярное произведение, которое согласуется с нормой этого пространства, то есть ввести скалярное произвадание так, чтобы $\sqrt{(x,x)} = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$?

Решение. Нет, нельзя. Если бы можно было превратить пространство $C(a,b)$ в пространство со скалярным произведением, то в нем выполнялось бы равенство параллелограмма (1.2). Приведем пример, который показывает, что в общем случае в пространстве $C(a,b)$ это равенство не выполняется. Пусть $a = 0,\ b = \pi/2$, $x(t) = \sin t,\ y(t) = \cos t$. Тогда $\|x\| = 1,\ \|y\| = 1,\ \|x+y\| = \sqrt{2},\ \|x-y\| = 1$.

1.1.5 Задачи к параграфу 1.1

1. Доказать, что для любых трех точек метрического пространства

$$|\rho(x,y) - \rho(y,z)| \le \rho(x,z),$$

а для любых четырех точек

$$|\rho(x,z) - \rho(y,t)| \le \rho(x,y) + \rho(z,t).$$

2. Проверить, что следующие пространства являются метрическими.

а) $\mathcal{X} = \{x : x = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n),\ \xi_i \in R,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, где R — числовая прямая,

$$\rho(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2\Big)^{1/2},\ y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

(***n-мерное евклидово пространство*** R^n). При $n = 1$ будем опускать индекс 1, то есть $R^1 = R$.

б) $\mathcal{X}$ — множество бесконечных числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, которые удовлетворяют условию $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < \infty$. Если $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$, то расстояние между x и y задается формулой $\rho(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|$ (***пространство*** l_1).

в) Множество всех ограниченных бесконечных числовых последовательностей с расстоянием, определенным для точек $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots),\ y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ по формуле $\rho(x,y) = \sup\limits_i |\xi_i - \eta_i|$. Ограниченность последовательности означает, что $\sup\limits_i |\xi_i| < \infty$ (***пространство*** l_∞).

г) Множество k раз непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, определенных на замкнутом ограниченном множестве $\Omega \subset R^n$. Расстояние задается формулой

$$\rho(x,y) = \sum_{0\le\alpha_1+\cdots+\alpha_n\le k} \max_{t\in\Omega} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}(x(t)-y(t))}{\partial t_1^{\alpha_1}\ldots\partial t_n^{\alpha_n}} \right|,\ t = (t_1, \ldots, t_n),$$

где α_i, $i = 1, \ldots, n$ — целые неотрицательные числа (***пространство*** $C^k(\Omega)$ ***или*** $C^k(a,b)$ ***при*** $n = 1$ ***и*** $\Omega = [a,b]$). [1]

3. Являются ли метрическими следующие пространства:

а) множество чисел, если $\rho(x,y) = \sin^2(x-y)$;

б) множество чисел, если $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$;

в) множество чисел, если $\rho(x,y) = |F(x) - F(y)|$, где $F(x)$ произвольная, вещественная, строго монотонная функция вещественной переменной;

г) множество точек плоскости, если расстояние между точками $x = (\xi_1, \xi_2)$ и $y = (\eta_1, \eta_2)$ определено по формуле $\rho(x,y) = |\xi_1 - \eta_1|$;

д) множество точек на окружности, если расстояние между двумя точками x и y равно длине кратчайшей дуги этой окружности, соединяющей точки x и y.

4. Определить как выглядят шары $S(a,R)$

а) в пространствах R^1, R^2, R^3;

б) в пространстве, состоящем из точек плоскости, если расстояние между точками $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$ задается формулой $\rho(x,y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|$;

в) в пространстве, состоящем из точек плоскости, если расстояние между точками $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$ задается формулой $\rho(x,y) = \max(|\xi_1 - \eta_1|, |\xi_2 - \eta_2|)$;

г) в дискретном пространстве.

5. В множестве n — мерных векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ вводятся нормы

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}.$$

Доказать, что $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$.

Замечание. Две нормы $\|\cdot\|_I$, $\|\cdot\|_{II}$ называются ***эквивалентными***, если существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что для всех точек x

$$C_1\|x\|_I \le \|x\|_{II} \le C_2\|x\|_I.$$

Таким образом, утверждение задачи означает, что в пространстве n-мерных векторов перечисленные нормы эквивалентны.

6. Доказать, что нормы $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ и $\|x\|_1 = \int\limits_a^b |x(t)|dt$, заданные на множестве непрерывных функций, не эквивалентны.

7. Назовем замкнутым шаром с центром в точке $a \in \mathcal{X}$ радиуса $R > 0$ множество таких точек $x \in \mathcal{X}$, что $\rho(a,x) \le R$. Показать, что в линейном нормированном пространстве открытый и замкнутый шары являются выпуклыми множествами, то есть если точки x, y принадлежат шару, то шару принадлежат точки $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, где $0 \le \alpha \le 1$ (точки z образуют отрезок, соединяющий точки x и y).

8. Определим сферу с центром в точке a радиуса $R > 0$ как множество точек, расстояние от которых до центра равно радиусу. Показать, что в линейном нормированном пространстве сфера, не является выпуклым множеством.

---

[1] Для того, чтобы пояснить формулу, по которой вычисляется норма, приведем пример для случая $n = 2$ и $k = 1$:

$$\rho(x,y) = \max_{t\in\Omega} |x(t) - y(t)| + \max_{t\in\Omega} \left| \frac{\partial(x(t) - y(t))}{\partial t_1} \right| + \max_{t\in\Omega} \left| \frac{\partial(x(t) - y(t))}{\partial t_2} \right|.$$

9. Доказать, что в пространстве двумерных векторов $x = (x_1, x_2)$ выражение $\|x\| = (\sum\limits_{i=1}^{2} |x_i|^p)^{1/p}$ не является нормой при $p < 1$.

Указание. Изобразить на плоскости шар $\{x : \|x\| \le 1\}$ и убедиться, что он не является выпуклым множеством (см. задачу 7).

10. Показать, что в пространствах l_1 и l_∞ нельзя ввести скалярные произведения, согласующиеся с нормами этих пространств.

1.2 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПОЛНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1.2.1 Пределы, фундаментальность, полнота

Важным свойством метрического пространства является тот факт, что в нем можно ввести понятие *предела последовательности.*

Определение 1.2.1 *Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек пространства $\mathcal{X}$* ***сходится*** *к точке $x \in \mathcal{X}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что при любых $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. Точка x называется при этом* ***пределом последовательности*** *$x_1, x_2, \ldots$.*

Как и в математическом анализе, для обозначения того, что x — предел последовательности $x_1, x_2, \ldots$, используется запись $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема 1.2.1 *Если последовательность $x_1, x_2, \ldots$ имеет предел, то он единственный.*

Доказательство. Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \quad y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Покажем, что $x = y$. Предположим противное, то есть, что $x \ne y$. Согласно этому предположению $\rho(x, y) > 0$. Пусть $\varepsilon = \rho(x, y) > 0$. По определению предела найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$\rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \rho(y, x_n) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

В силу неравенства треугольника при $n > N(\varepsilon)$

$$\rho(x, y) \le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\rho(x, y)}{2}.$$

Так как $\rho(x, y) > 0$, отсюда следует, что $1<1/2$. Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что $x \ne y$ ошибочно.

Определение 1.2.2 *Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$, принадлежащих метрическому пространству, называется* ***фундаментальной*** *или* ***последовательностью Коши****, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для любых n и m, больших $N(\varepsilon)$, справедливо неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Если последовательность сходится, то она фундаментальна. Это следует из неравенства $\rho(x_n, x_m) \le \rho(x, x_n) + \rho(x, x_m)$. Обратное утверждение не верно. Пусть, например, $\mathcal{X}$ — множество рациональных чисел, $\rho(x, y) = |x - y|$, а x_n — n-е десятичное приближение к $\sqrt{2}$. Последовательность, очевидно, фундаментальна, но не сходится, так как $\sqrt{2} \notin \mathcal{X}$.

Определение 1.2.3 *Метрическое пространство называется* ***полным****, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.*

Как уже отмечалось, нормированное пространство является метрическим, и, значит, определения предела, фундаментальности и полноты распространяются на нормированные пространства.

Определение 1.2.4 *Полное линейное нормированное пространство называется* ***банаховым****.*

В качестве примера покажем, что пространство $C(a, b)$ является полным пространством.

Прежде всего заметим, что сходимость последовательности в пространстве $C(a, b)$ и, изучаемая в курсе математического анализа, равномерная сходимость последовательности непрерывных функций это одно и то же. Действительно, по определению сходимости в пространстве $C(a, b)$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$ что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Последнее означает, что при всех $t \in [a, b]$ справедливо неравенство $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$, то есть, последовательность сходится равномерно. Обратно, если последовательность сходится равномерно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$ что при $n > N(\varepsilon)$ и при всех $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$. Но тогда $\max\limits_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$, то есть последовательность сходится в $C(a, b)$.

Перейдем теперь к доказательству полноты пространства $C(a, b)$. Заметим, что если последовательность $x_1, x_2, \ldots$ фундаментальна в $C(a, b)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число $N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ при любых целых $n, m > N(\varepsilon)$ и любых $t \in [a, b]$. Если зафиксировать значение t, получается числовая последовательность $x_1(t), x_2(t) \ldots$, которая удовлетворяет условию Коши. По свойству числовых последовательностей, доказанному в курсе математического анализа, такая последовательность сходится. Обозначим ее предел через $x(t)$. Так как t — произвольная точка из отрезка $[a, b]$, предел $x(t)$ есть функция, определенная на этом отрезке и по построению последовательность $x_1(t), x_2(t) \ldots$ сходится к ней поточечно. Переходя теперь к пределу в неравенстве $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ при $m \to \infty$, получим, что $|x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon$, если $t \in [a, b]$ и $n > N(\varepsilon)$. Это означает, что последовательность равномерно сходится. Как доказывалось в курсе математического анализа, предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть функция непрерывная. Таким образом, последовательность $x_1(t), x_2(t) \ldots$ равномерно сходится к непрерывной функции $x(t)$. Утверждение доказано, так как равномерная сходимость последовательности непрерывных функций и сходимость в пространстве $C(a, b)$ одно и то же.

Рассмотрим теперь пример пространства, не являющегося полным. На множестве непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций зададим норму по формуле $\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|\,dt$

(***пространство*** $C_L(a,b)$). Легко проверить, что все аксиомы нормы выполнены. Возьмем последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} t^n, & \text{при } 0 \le t \le 1, \\ 1, & \text{при } 1 < t \le 2, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots . \tag{1.3}$$

Эти функции непрерывны на отрезке $[0,2]$ и, следовательно, принадлежат пространству $C_L(0,2)$. Проверим, что последовательность (1.3) фундаментальна. Пусть для определенности $m > n$. Тогда

$$|x_n - x_m| = \begin{cases} t^n - t^m, & \text{при } 0 \le t \le 1, \\ 0, & \text{при } 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Поэтому

$$\rho(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\| = \int\limits_0^1 (t^n - t^m)\, dt = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \le \frac{1}{n+1} \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Однако, в пространстве $C_L(0,2)$ последовательность (1.3) не сходится, так как предельная функция $x(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \le t \le 1, \\ 1, & \text{при } 1 < t \le 2, \end{cases}$ является разрывной[2].

Так как в пространстве, в котором задано скалярное произведение может быть введена норма, для него справедливы все понятия и свойства, установленные для линейных нормированных пространств. В частности, в таком пространстве можно определить сходимость и полноту.

Определение 1.2.5 *Если в линейном пространстве задано скалярное произведение и полученное пространство полное, то оно называется* ***гильбертовым пространством.***

Замечание Некоторые авторы при определении гильбертова пространства требуют еще, чтобы оно было бесконечномерным, то есть чтобы в нем для любого натурального числа n существовало множество n линейно независимых векторов. Конечномерные же пространства со скалярным произведением при этом называют ***евклидовыми пространствами***.

Важнейший для приложений пример гильбертова пространства будет приведен в следующем пункте.

В линейном нормированном пространстве можно ввести понятие суммы ряда. По аналогии с соответствующим определением из математического анализа, выражение $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ используется для обозначения $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ (если он существует).

Лемма 1.2.1 *Пусть в пространстве задано скалярное произведение и* $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. *Тогда* $(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} (x, y_n)$.

[2]Докажите, что $\rho(x, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$, если норму вычислять по той же формуле, что и в пространстве $C_L(0,2)$.

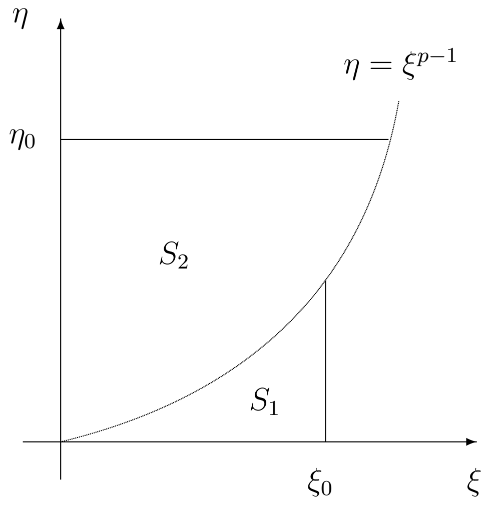

Рис. 1.1

Доказательство. Доказательство следует из неравенства Коши-Буняковского-Шварца, если заметить, что $|(x,y)-(x,y_n)| = |(x, y-y_n)| \le \|y-y_n\|\|x\| \to 0$.

Из леммы получаем следующие следствия.

Следствие 1 Если $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $x \perp y_n$ при всех n, то $x \perp y$.

Следствие 2 В случае сходимости рядов, в формулировках свойств 3,4 ортогональных векторов (см. пункт 1.1.3) суммы могут содержать как конечное, так и бесконечное число слагаемых.

1.2.2 Неравенства Гёльдера и Минковского, пространства $L_p(a,b)$

Для того, чтобы привести примеры важных для приложения пространств $L_p(a,b)$, докажем сначала вспомогательные неравенства.

Лемма 1.2.2 (неравенство Гёльдера) *Пусть определенные на (a,b) функции $x(t)$ и $y(t)$ таковы, что существуют и конечны интегралы $\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt$ и $\int\limits_a^b |y(t)|^q\,dt$, где $p, q > 1,\ 1/p + 1/q = 1$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_a^b |x(t)y(t)|\,dt \le \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Если хотя бы один из интегралов, стоящих в правой части неравенства (1.4), равен нулю, то нулю равен и интеграл, находящийся в левой части неравенства. Значит в этом случае неравенство справедливо. Поэтому в дальнейшем при доказательстве будем считать, что оба интеграла из правой части неравенства (1.4) положительны.

Пусть $\eta = \xi^{p-1}$. Из равенства $1/p + 1/q = 1$ следует, что $(p-1)(q-1) = 1$ и, значит, $\xi = \eta^{1/(p-1)} = \eta^{q-1}$.

Пусть $\xi_0,\ \eta_0$ произвольные положительные числа, S_1 — площадь области, ограниченной линиями $\eta = 0,\ \xi = \xi_0,\ \eta = \xi^{p-1}$, а S_2 — площадь области, ограниченной линиями $\xi = 0,\ \eta = \eta_0,\ \xi = \eta^{q-1}$ (см. рисунок 1.1). Тогда

$$S_1 = \int\limits_0^{\xi_0} \xi^{p-1}\, d\xi = \frac{\xi_0^p}{p}, \quad S_2 = \int\limits_0^{\eta_0} \eta^{q-1}\, d\eta = \frac{\eta_0^q}{q}. \tag{1.5}$$

Из рисунка 1.1 следует, что $\xi_0\eta_0 \leq S_1 + S_2$, поэтому, учитывая (1.5), имеем

$$\xi_0\eta_0 \leq \frac{\xi_0^p}{p} + \frac{\eta_0^q}{q}. \tag{1.6}$$

Подставим в неравенство (1.6)

$$\xi_0 = \frac{|x(t)|}{\left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}}, \quad \eta_0 = \frac{|y(t)|}{\left(\int\limits_a^b |y(t)|^q\, dt\right)^{1/q}}$$

и проинтегрируем его в пределах от a до b. Тогда получим

$$\frac{\int\limits_a^b |x(t)y(t)|\, dt}{\left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_a^b |y(t)|^q\, dt\right)^{1/q}} \leq \frac{\int\limits_a^b |x(t)|^p\, dt}{p\int\limits_a^b |x(t)|^p\, dt} + \frac{\int\limits_a^b |y(t)|^q\, dt}{q\int\limits_a^b |y(t)|^q\, dt} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Из этого неравенства следует (1.4).

Лемма 1.2.3 (неравенство Минковского) *Пусть функции $x(t), y(t)$ определены на промежутке (a,b), причем при некотором $p \geq 1$ существуют и конечны интегралы $\int\limits_a^b |x(t)|^p\, dt$, $\int\limits_a^b |y(t)|^p\, dt$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\int\limits_a^b |x(t) + y(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b |y(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Если $p = 1$, то неравенство очевидно. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $p > 1$. Заметим, что для любых чисел α, β выполняется неравенство $|\alpha + \beta|^p \leq 2^p(|\alpha|^p + |\beta|^p)$. Это следует из того, что если $|\alpha| < |\beta|$, то

$$|\alpha + \beta|^p \leq (2|\beta|)^p = 2^p|\beta|^p \leq 2^p(|\alpha^p| + |\beta|^p),$$

случай $|\beta| \leq |\alpha|$ рассматривается аналогично. Значит

$$|x(t) + y(t)|^p \leq 2^p(|x(t)|^p + |y(t)|^p),$$

откуда следует, что

$$\int\limits_a^b |x(t) + y(t)|^p\, dt \leq 2^p \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\, dt + \int\limits_a^b |y(t)|^p\, dt\right) < \infty,$$

то есть интеграл $\int\limits_a^b |x+y|^p\,dt$ конечен. Тогда на основании неравенства Гёльдера

$$\int\limits_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt = \int\limits_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1}|x(t)+y(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b |x(t)||x(t)+y(t)|^{p-1}\,dt + \int\limits_a^b |y(t)||x(t)+y(t)|^{p-1}\,dt \leq$$

$$\leq \left[\left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\right]\left(\int\limits_a^b |x(t)+y(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q},$$

где $(p-1)q = pq-q = p$. Разделив обе части этого неравенства на число

$$\left(\int\limits_a^b |x+y|^p\,dt\right)^{1/q},$$

получим неравенство Минковского.

Пусть $\mathcal{L}_p(a,b)$ — множество интегрируемых в p-ой степени ($p \geq 1$) функций, то есть таких функций $x(t)$, для которых $\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt < \infty$. Очевидно, что такие функции образуют линейное пространство. Если попытаться ввести норму по формуле

$$\|x\| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p},$$

то $\|x\| \geq 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ и, в силу неравенства Минковского, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Однако, из того что $\|x\| = 0$, то есть $\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt = 0$ еще не следует, что $x(t) \equiv 0$. Следовательно, аксиомы нормы не выполняются.

Определение 1.2.6 *Будем считать, что две функции $x(t)$ и $y(t)$* ***эквивалентны****, если они отличаются друг от друга только на множестве меры 0.*

Под множеством меры 0 будем понимать ***жорданову меру ноль***. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ множество можно покрыть конечным числом интервалов, сумма длин которых меньше ε. Заметим, что значения функции на множестве меры 0 не влияют на значение интеграла от функции.

Если отождествлять эквивалентные функции, то в этом случае будет выполнена и первая аксиома нормы.

Определение 1.2.7 *Пространство, состоящее из классов функций интегрируемых в p-ой степени ($p \geq 1$), причем в один класс включены только эквивалентные функции, назовем пространством $L_p(a,b)$. Норма в этом пространстве определяется по формуле*

$$\|x\|_p = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Можно доказать, что пространство $L_p(a,b)$ — полное. Таким образом, при $p \geq 1$ пространство $L_p(a,b)$ является банаховым.

Аналогично можно ввести пространство L_p для функций многих переменных.

В качестве примера гильбертова пространства рассмотрим пространство $L_2(a,b)$. Выше отмечалось, что это банахово пространство. Зададим в нем скалярное произведение по формуле

$$(x,y) = \int\limits_a^b x(t)y(t)\,dt. \tag{1.7}$$

Из неравенства $xy \leq 0.5(x^2+y^2)$ и определения пространства $L_2(a,b)$ следует, что интеграл, стоящий в правой части равенства (1.7) конечен. Легко проверяется теперь выполнение всех свойств скалярного произведения. Это скалярное произведение согласуется с введенной ранее в пространстве $L_2(a,b)$ нормой в том смысле, что $(x,x) = \int\limits_a^b x^2(t)\,dt = \|x\|_2^2$.

1.2.3 Примеры решения задач к параграфу 1.2

Пример 1. Показать, что расстояние — непрерывная функция своих аргументов, то есть из сходимости $x_n \to x,\ y_n \to y$ следует, что $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y)$ при $n \to \infty$.

Решение. По определению, из сходимости $x_n \to x$, $y_n \to y$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие номера N_1 и N_2, что при $n > N_1$ выполняется неравенство

$$\rho(x,x_n) < \varepsilon/2, \tag{1.8}$$

а при $n > N_2$

$$\rho(y,y_n) < \varepsilon/2. \tag{1.9}$$

Значит, если $n > \max(N_1,N_2)$, то при $n > N$ одновременно выполняются неравенства 1.8 и 1.9. Если воспользоваться вторым из утверждений задачи 1 из 1.1.5, получим при $n > N$

$$|\rho(x,y) - \rho(x_n,y_n)| \leq \rho(x,x_n) + \rho(y,y_n) < \varepsilon.$$

Это как раз и означает, что $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y)$ при $n \to \infty$.

Замечание. Легко проверить теперь, что при произвольном z из сходимости x_n к x при $n \to \infty$ следует равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,z) = \rho(x,z)$.

Пример 2. Сходятся ли следующие последовательности: а) $x_n(t) = \sin nt$ в пространстве $L_2(0,\pi)$; б) $x_n(t) = n\sin\dfrac{t}{n}$ в пространстве $C(0,1)$? Для сходящихся последовательностей найти предел.

Решение. Проверим, прежде всего, фундаментальны ли эти последовательности. Имеем для первой последовательности при $n \neq m$

$$\rho^2(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|^2 = \int\limits_0^{\pi} (\sin nt - \sin mt)^2 \, dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin^2 nt \, dt + \int\limits_0^{\pi} \sin^2 mt \, dt - 2 \int\limits_0^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} (1 - \cos 2nt) \, dt + \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} (1 - \cos 2mt) \, dt - \int\limits_0^{\pi} \big(\cos(n-m)t - \cos(n+m)t\big) \, dt = \pi.$$

Таким образом, последовательность не фундаментальна и, значит, не сходится.

Для второй последовательности

$$\rho(x_n, x_m) = \max_{t \in [0,1]} \Big| n \sin \frac{t}{n} - m \sin \frac{t}{m} \Big|.$$

Для нахождения максимума найдем нули производной функции, стоящей под знаком модуля,

$$\Big(n \sin \frac{t}{n} - m \sin \frac{t}{m} \Big)' = \cos \frac{t}{n} - \cos \frac{t}{m} = 2 \sin \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \Big) t \, \sin \Big(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \Big) t.$$

Так как $n \neq m$, это выражение обращается в ноль только при $t = 0$. Таким образом, функция $\big| n \sin \frac{t}{n} - m \sin \frac{t}{m} \big|$ свое максимальное значение принимает на концах отрезка $[0, 1]$. Так как в точке $t = 0$ значение этой функции равно 0, максимальное значение принимается в точке 1. Следовательно,

$$\rho(x_n, x_m) = \Big| n \sin \frac{1}{n} - m \sin \frac{1}{m} \Big|.$$

Из первого замечательного предела отсюда следует, что при $n, m \to \infty$ выражение справа стремится к 0, следовательно, последовательность фундаментальна. Так как пространство $C(0, 1)$ полное, последовательность сходится.

Как отмечалось при доказательстве полноты пространства $C(a, b)$, сходимость в этом пространстве равномерная. Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. В то же время, из первого замечательного предела следует, что последовательность $n \sin \frac{t}{n}$ поточечно сходится к функции t. А, так как уже доказано, что последовательность сходится равномерно, следовательно, она равномерно сходится к функции $x(t) = t$.

В случае второй последовательности можно было рассуждать иначе. Сначала заметить, что последовательность функций $n \sin \dfrac{t}{n}$ при $n \to \infty$ поточечно сходится к функции t и затем доказывать, что она сходится в $C(0, 1)$ к этой же функции. Для этого достаточно воспользоваться разложения синуса в ряд, откуда следует, что

$$\Big| t - n \sin \frac{t}{n} \Big| = \Bigg| \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k-1}}{n^{2k-2}(2k-1)!} \Bigg|.$$

Так как ряд знакочередующийся, его сумма не превосходит модуля первого слагаемого, то есть

$$\Big| t - n \sin \frac{t}{n} \Big| \leq \frac{t^3}{n^2 3!} \leq \frac{1}{n^2 3!} \leq \varepsilon.$$

Это неравенство выполняется, если $n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\sqrt{6\varepsilon}}\right]$. Здесь [ ] означает целую часть числа. Таким образом, показано, что для произвольного $\varepsilon > 0$ нашелся такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\rho(t, n\sin\dfrac{t}{n}) < \varepsilon$. Это как раз и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{t}{n} = t$.

1.2.4 Задачи к параграфу 1.2

1. Доказать, что если в линейном пространстве $\mathcal{X}$ введено расстояние, обладающее двумя дополнительными свойствами:

для любых трех точек $x, y, z \in \mathcal{X}$ выполняется равенство $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$;

для любого числа α и любого $x \in \mathcal{X}$ выполняется равенство $\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\rho(x, y)$,
то в этом пространстве можно ввести норму по формуле $\|x\| = \rho(x, \theta)$.

2. Доказать, что если в линейном нормированном пространстве $\mathcal{X}$ $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

3. Множество A из метрического пространства $\mathcal{X}$ называется ***ограниченным***, если существует открытый шар, содержащий это множество. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность ограничена.

4. Доказать, что если пространство $\mathcal{X}$ является линейным нормированным пространством, то ограниченность множества A означает, что существует такое число M, что для любого $x \in A$ выполняется неравенство $\|x\| \le M$.

5. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две фиксированные функции, непрерывные на $[a, b]$, причем всюду на $[a, b]$ выполнено неравенство $f(x) \le g(x)$. Доказать, что подмножество пространства $C(a, b)$, состоящее из всех непрерывных функций $h(x)$, удовлетворяющих неравенству $f(x) \le h(x) \le g(x)$, есть полное пространство.

6. Является ли полным дискретное пространство?

7. Пусть $\mathcal{X}$ — множество чисел и $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Будет ли в этом пространстве последовательность $1, 2, 3, \ldots$ фундаментальной, сходящейся?

8. Исследовать на сходимость в пространствах $C(0, 1)$, $C_L(0, 1)$ последовательности функций:

а) $x_n(t) = t^n$, б) $x_n(t) = \sin(t/n)$, в) $x_n(t) = e^{-nt}$, г) $x_n(t) = e^{nt}$,

д) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$, е) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$, ж) $x_n(t) = \dfrac{1}{1 + n(t-0.5)^2}$.

9. Показать, что из сходимости в $C(a, b)$ следует сходимость в $C_L(a, b)$ и что обратное утверждение, вообще говоря, ложно.

10. Сходятся ли в пространствах l_1, l_∞ следующие последовательности:

$x_n = (1, 2, \ldots, n, 0, \ldots)$;

$x_n = (1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots)$;

$x_n = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n, 0, \ldots)$?

11. Рассмотрим множество числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$, где $p \ge 1$ — фиксированное число. Показать, что если в этом множестве ввести операции: $x+y = (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots)$, $\lambda x = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots)$, где $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$, то получим линейное пространство. Доказать, что если в этом

пространстве ввести норму $\|x\| = (\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p}$, то при $p \geq 1$ пространство становится банаховым (пространство l_p).

12. Доказать, что $L_p(a,b) \subset L_q(a,b)$ при $p \geq q$.

13. Доказать обобщенное неравенство Гёльдера: если $p > 1$, $q > 1$, $r > 1$, и $1/p + 1/q + 1/r = 1$, а функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ таковы, что существуют интегралы $\int\limits_a^b |x|^p\,dt$, $\int\limits_a^b |y|^q\,dt$, $\int\limits_a^b |z|^r\,dt$, то

$$\int\limits_a^b |xyz|\,dt \leq \left(\int\limits_a^b |x|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_a^b |y|^q\,dt\right)^{1/q} \left(\int\limits_a^b |z|^r\,dt\right)^{1/r}.$$

14. Пусть $x_n \in \mathcal{X}$ — фундаментальная последовательность и некоторая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится. Доказать, что вся последовательность сходится.

15. Пусть $\rho(x)$ — интегрируемая на интервале (a,b) функция, причем всюду кроме множества меры ноль $\rho(x) > 0$. Обозначим через $L_{2,\rho}(a,b)$ множество определенных на (a,b) функций $f(x)$ таких, что существует и конечен интеграл $\int\limits_a^b \rho|f|^2\,dx$, причем две функции считаются равными, если они различаются не более, чем на множестве меры ноль. Доказать, что:

а) $(f,g) = \int\limits_a^b \rho(x)f(x)g(x)\,dx$ — скалярное произведение в $L_{2,\rho}(a,b)$;

б) $L_2(a,b) \subset L_{2,\rho}(a,b)$, если функция $\rho(x)$ ограничена на (a,b);

в) $L_{2,\rho}(a,b) \subset L_2(a,b)$, если $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ на (a,b).

16. Показать, что если $\rho(x) = x, f(x) = \sqrt{x^{-1}}$, то $f \in L_{2,\rho}(0,1)$. Принадлежит ли $f(x)$ пространству $L_2(0,1)$?

1.3 ОПЕРАТОРЫ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

1.3.1 Общие определения

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — два метрических пространства, $\rho_{\mathcal{X}}$ — расстояние в пространстве $\mathcal{X}$, $\rho_{\mathcal{Y}}$ — в $\mathcal{Y}$.

Определение 1.3.1 *Говорят, что на $\mathcal{X}$ задан **оператор** со значениями в $\mathcal{Y}$, если каждому элементу $x \in \mathcal{X}$ ставится в соответствие по определенному закону единственный элемент $y \in \mathcal{Y}$.*

Будем обозначать это соответствие $y = Ux$. Здесь U — оператор, x — элемент пространства $\mathcal{X}$, на который действует оператор, y — результат действия оператора.

Часто используется обозначение $U : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ и терминология "U отображает $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$".

В том случае, когда пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ совпадают, говорят, что оператор действует в пространстве $\mathcal{X}$.

Если $\mathcal{Y}$ — числовая прямая (или комплексная плоскость), то оператор называют **функционалом** и применяют обозначение $y = U(x)$. Иногда оператор будет определен не на всем $\mathcal{X}$, а на некотором его подмножестве.

Примеры:

- пусть $\mathcal{X}$ — произвольное метрическое пространство, и $f_a(x) = \rho_{\mathcal{X}}(x, a)$ расстояние до некоторой фиксированной точки $a \in \mathcal{X}$, тогда f_a — функционал;
- $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a, b), \quad Ux = x^2 + 5x;$
- $\mathcal{X} = C(a, b), \quad \mathcal{Y} = R^2, \quad Ux = (x(a), x(b)).$

Определение 1.3.2 *Оператор U называется **непрерывным в точке** $x_0 \in \mathcal{X}$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, выполняется равенство $Ux_0 = \lim\limits_{n\to\infty} Ux_n$.*

Другими словами непрерывность в точке x_0 означает следующее: из того, что $\rho_{\mathcal{X}}(x_n, x_0) \to 0$ следует, что $\rho_{\mathcal{Y}}(Ux_n, Ux_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 1.3.3 *Оператор называется **непрерывным**, если он непрерывен в каждой точке.*

Многие свойства непрерывных функций, которые изучались в математическом анализе, переносятся на непрерывные функционалы, определенные на множествах, обладающих следующими двумя свойствами:

- ***множество замкнуто***, то есть содержит пределы всех своих сходящихся последовательностей;
- ***множество компактно***, то есть из любой последовательности, состоящей из элементов этого множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Справедливы, например, следующие утверждения (доказательства аналогичны доказательствам соответствующих теорем из математического анализа):

- Если $f(x)$ — непрерывный функционал, заданный на замкнутом компактном множестве, то он ограничен.
- Если $f(x)$ — непрерывный функционал, заданный на замкнутом компактном множестве, то он принимает на этом множестве свое наибольшее и наименьшее значение.

1.3.2 Теорема Банаха о неподвижной точке

В математике часто встречается задача решения уравнений. Перейдем к одному случаю, когда можно доказать разрешимость уравнения и указать метод нахождения решений. Для этого докажем одну из важнейших теорем функционального анализа, а примеры ее применения рассмотрим в следующем пункте.

Пусть пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ совпадают, следовательно, $\rho_{\mathcal{X}} = \rho_{\mathcal{Y}} = \rho$.

Определение 1.3.4 *Оператор U называют* ***сжимающим****, если существует такое число $\alpha \in (0,1)$, что для всех $x, y \in \mathcal{X}$ выполняется неравенство*

$$\rho(Ux, Uy) \leq \alpha\rho(x, y). \tag{1.10}$$

Заметим, что если оператор сжимающий, то он непрерывен. Действительно, из неравенства $\rho(Ux_n, Ux^*) \leq \alpha\rho(x_n, x^*)$ следует, что $\rho(Ux_n, Ux^*) \to 0$, если $\rho(x_n, x^*) \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 1.3.5 *Точка x называется* ***неподвижной точкой*** *оператора U, если $Ux = x$.*

Теорема 1.3.1 (теорема Банаха о неподвижной точке) *Пусть U сжимающий оператор, действующий в полном метрическом пространстве $\mathcal{X}$. Тогда у оператора U существует единственная неподвижная точка x^*. Независимо от выбора точки $x_0 \in \mathcal{X}$, последовательность точек $x_{n+1} = Ux_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ сходится к неподвижной точке x^*(точки x_n называются* ***последовательными приближениями*** *).*

Доказательство. Докажем сначала единственность. Пусть есть две точки x, y, которые неподвижны и различны. Тогда $Ux = x,\ Uy = y$. Так как

$$\rho(x, y) = \rho(Ux, Uy) \leq \alpha\rho(x, y)$$

и $\rho(x, y) \neq 0$, получим отсюда $1 \leq \alpha < 1$, что невозможно.

Пусть x_0 — произвольная точка из $\mathcal{X}$. Для доказательства существования неподвижной точки покажем, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = Ux_{n-1},\quad n = 1, 2, \ldots$ фундаментальна. Действительно, учитывая (1.10), имеем

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(Ux_{n-1}, Ux_n) \leq \alpha\rho(x_{n-1}, x_n) = \\ = \alpha\rho(Ux_{n-2}, Ux_{n-1}) \leq \alpha^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \alpha^n\rho(x_0, x_1).\end{aligned}$$

Используя теперь это неравенство и неравенство треугольника, получим:

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+p)} &\leq \rho(x_n, x_{n+1)} + \rho(x_{n+1}, x_{n+p}) \leq \ldots \\ &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \alpha^i\rho(x_0, x_1) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \alpha^i\rho(x_0, x_1) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).\end{aligned} \tag{1.11}$$

В силу этого неравенства заключаем, что последовательность фундаментальна, так как $0 < \alpha < 1$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.

Из полноты пространства $\mathcal{X}$ следует сходимость последовательности $\{x_n\}$.

Пусть $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда, переходя к пределу в равенстве $x_n = Ux_{n-1}$ и учитывая непрерывность оператора U, получаем, что $x^* = Ux^*$, то есть x^* — неподвижная точка оператора, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если в неравенстве (1.11) перейти к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\rho(x^*, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).$$

Это неравенство является оценкой погрешности, получающейся при приближении неподвижной точки x^* точкой x_n. Из этого неравенства следует, в частности, что для нахождения точки x^* с заданной точностью $\varepsilon > 0$ достаточно взять x_n, где

$$n > \frac{\ln \varepsilon + \ln (1-\alpha) - \ln \rho(x_0, x_1)}{\ln \alpha}.$$

Заметим также, что чем число α ближе к нулю, тем число n меньше и, значит, заданную точность можно получить за меньшее число шагов. В этом случае говорят, что метод сходится быстрее.

Замечание 2. Теорема Банаха верна, если оператор сжатия задан на некотором замкнутом подмножестве $\mathcal{X}_1$ из $\mathcal{X}$ и его значения лежат в этом подмножестве. Точка x_0 при этом должна выбираться из $\mathcal{X}_1$.

Доказательство этого утверждения следует из того, что при $x_0 \in \mathcal{X}_1$ все члены последовательности $x_n \in \mathcal{X}_1$. А так как $\mathcal{X}_1$ замкнуто, то предел этой последовательности лежит в этом же множестве.

1.3.3 Примеры применения теоремы Банаха

Приведем некоторые примеры применения теоремы Банаха.

1) Требуется решить уравнение $F(x) = 0$, где $F(x)$ — гладкая функция, определенная на отрезке $[a, b]$ числовой прямой. Перепишем уравнение в виде $x = f(x)$. Если функция $f(x)$ задана на $[a, b]$ и отображает этот отрезок в себя, причем выполнено неравенство $|f'(x)| \le \alpha < 1$, то

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| \le \alpha |x-y|, \quad \xi \in [a, b].$$

Значит функцию $f(x)$ можно рассматривать как сжимающий оператор, действующий на точки отрезка $[a, b]$ числовой прямой. Отсюда следует однозначная разрешимость уравнения и метод его приближенного решения. Согласно теореме Банаха последовательность $x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, \ldots,$ сходится к решению уравнения, при этом в качестве x_0 можно взять произвольную точку из отрезка $[a, b]$. Такой метод нахождения решения уравнения $x = f(x)$ называется ***методом простой итерации.***

От уравнения $F(x) = 0$ к уравнению $x = f(x)$ можно перейти различными способами. Следует выбрать такой способ, чтобы величина $\max\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ была как можно меньше, причем обязательно меньше 1. Например, требуется решить уравнение

$$x^5 + 3x^2 - x = 250. \tag{1.12}$$

Здесь $F(x) = x^5 + 3x^2 - x - 250$. Заметим, что $F(x) < 0$ при $x \le 2$ и $F'(x) > 0$ при $x > 2$. Кроме того, $F(3) = 17$. В силу непрерывности, функция $F(x)$ принимает на отрезке $[2, 3]$ все значения между $F(2)$ и $F(3)$ и, следовательно, в какой-то точке обращается в ноль. Так как функция монотонно возрастает при $x > 2$, есть только одна точка на отрезке, в которой функция равна нулю. Поэтому уравнение имеет единственное решение x^*, которое находится на отрезке $[2, 3]$. Для того, чтобы уравнение (1.12) переписать в виде $x = f(x)$ достаточно перенести x в правую часть, а 250 в левую. В результате получим $x = x^5 + 3x^2 - 250$. Таким образом, $f(x) = x^5 + 3x^2 - 250$. Следовательно, $f'(x) = 5x^4 + 6x > 1$ при $x > 2$. Поэтому такая запись не позволяет решать уравнение методом последовательных приближений.

Можно поступить иначе, переписав (1.12) в виде $x = \sqrt[5]{250 + x - 3x^2}$. В этом случае $f(x) = \sqrt[5]{250 + x - 3x^2}$. Заметим, что на промежутке $[2, 3]$ подкоренная функция убывает, поэтому на этом отрезке свое наибольшее и наименьшее значение функция $f(x)$ принимает на концах отрезка. Так как $f(2) = \sqrt[5]{240} \in [2, 3]$, $f(3) = \sqrt[5]{226} \in [2, 3]$, то $f(x) \in [2, 3]$ при $x \in [2, 3]$. Таким образом эта функция отображает отрезок $[2, 3]$ в себя. Кроме того, при $x \in [2, 3]$

$$|f'(x)| = \left| \frac{1 - 6x}{5\sqrt[5]{(250 + x - 3x^2)^4}} \right| \leq \frac{17}{5\sqrt[5]{226^4}} < 0.045 = \alpha,$$

то есть число $\alpha \ll 1$. Поэтому метод последовательных приближений сходится, причем достаточно быстро. Действительно, решение уравнения (1.12) $x^* = 2,9586230860\ldots$. Если взять $x_0 = 2$, то $x_1 = 2,99256,\ x_2 = 2,95713,\ x_3 = 2,95869,\ x_4 = 2,95862 \approx x^*$.

2) Покажем, как из теоремы Банаха можно получить теорему существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Рассмотрим уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{1.13}$$

с начальным условием

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{1.14}$$

Пусть в прямоугольнике $\Delta = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$ функция $f(x, y)$ непрерывна и $|f(x, y)| \leq M$. Пусть, кроме того, существует такая константа $K > 0$, что выполняется неравенство

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \tag{1.15}$$

при любом x из промежутка $[x_0 - a, x_0 + a]$ и любых двух значениях y_1, y_2 из промежутка $[y_0 - b, y_0 + b]$. Последнее условие, как и для функций одного переменного, называется условием Липшица.

Докажем, что при выполнении вышеперечисленных условий найдется такое достаточно малое положительное число h, что в промежутке $[x_0 - h, x_0 + h]$ существует единственное решение уравнения (1.13), удовлетворяющее начальному условию (1.14).

Для доказательства придадим уравнению (1.13) другую — интегральную форму. С этой целью, считая y функцией от x, проинтегрируем обе части уравнения (1.13) от x_0 до x. При этом, благодаря начальному условию (1.14), $\int\limits_{x_0}^{x} y'\,dx = y - y_0$, а поэтому приходим к уравнению

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \tag{1.16}$$

Пусть теперь $y = y(x)$ — решение (1.16). Подставляя эту функцию в уравнение (1.16) и дифференцируя полученное тождество по x, получим, что $y = y(x)$ — решение уравнения (1.13). Кроме того, непосредственно видно, что если функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению (1.16), то $y = y_0$, при $x = x_0$. Таким образом, уравнение (1.16) равносильно дифференциальному уравнению (1.13), взятому вместе с начальным условием (1.14).

Примем за h любое число, удовлетворяющее условию

$$0 < h < \min(\frac{1}{K}, a, \frac{b}{M}),$$

и рассмотрим пространство $C(\delta)$ непрерывных функций, заданных на отрезке $\delta = [x_0 - h, x_0 + h]$. Обозначим через $\mathcal{X}_1$ подмножество пространства $C(\delta)$, состоящее из всех функций $y = y(x)$, для которых при всех $x \in \delta$

$$y_0 - b \leq y(x) \leq y_0 + b$$

Легко заметить, что если последовательность функций из $\mathcal{X}_1$ сходится, то предельная функция принадлежит $\mathcal{X}_1$. Следовательно, $\mathcal{X}_1$ — замкнутое множество в $C(\delta)$.

Рассмотрим на $\mathcal{X}_1$ оператор, заданный посредством правой части уравнения (1.16), то есть для каждого $y \in \mathcal{X}_1$ положим

$$Uy = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx, \quad x \in \delta. \tag{1.17}$$

Очевидно, что решение уравнения (1.16) является неподвижной точкой оператора U.

Проверим, что все значения оператора U лежат в $\mathcal{X}_1$ и что U — сжимающий оператор.

Если $y \in \mathcal{X}_1$, то при любом $x \in \delta$ точка $(x, y(x)) \in \Delta$, следовательно, правая часть (1.17) имеет смысл и $Uy \in C(\delta)$. Кроме того, $|f(x, y(x))| \leq M$, потому при всяком $x \in \delta$

$$|Uy - y_0| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx\right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq M\frac{b}{M} = b,$$

следовательно, $Uy \in \mathcal{X}_1$.

Пусть $y,\ \bar{y} \in \mathcal{X}_1$. Тогда при любом $x \in \delta$, учитывая условие Липшица (1.15), получим

$$|Uy - U\bar{y}| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx - \int\limits_{x_0}^{x} f(x, \bar{y}(x))\, dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(x, y(x)) - f(x, \bar{y}(x))|\, dx\right| \leq K\left|\int\limits_{x_0}^{x} |y(x) - \bar{y}(x)|\, dx\right| \leq$$

$$\leq K \max_{x \in \delta} |y(x) - \bar{y}(x)||x - x_0| \leq K\rho(y, \bar{y})h = \alpha\rho(y, \bar{y}),$$

где $\alpha = Kh < 1$.

Таким образом, теорема Банаха, согласно замечанию 2, применима к оператору U. Он имеет единственную неподвижную точку, а это и есть единственное решение уравнения (1.16) в промежутке δ. Кроме того, теорема Банаха обеспечивает возможность получения этого решения методом последовательных приближений. За начальную функцию можно принять, например, $y \equiv y_0$.

3) Докажем теперь теорему существования и единственности решения для другого типа уравнений — интегральных. ***Интегральными*** принято называть такие уравнения, которые содержат искомую функцию под знаком интеграла.

Уравнение вида

$$y(t) = \lambda \int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds + f(t), \tag{1.18}$$

где $y(t)$ — искомая функция, λ — заданное число, $f(t)$ — заданная на отрезке $[a,b]$ функция, $k(t,s)$ — заданная на $[a,b]\times[a,b]$ функция, называется ***линейным интегральным уравнением Фредгольма II рода***, а уравнение

$$\int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds = f(t) \tag{1.19}$$

— ***линейным интегральным уравнением Фредгольма I рода***.

Функция $k(t,s)$ называется **ядром** интегрального уравнения, функция $f(t)$ — **свободным членом** уравнения.

Решением интегрального уравнения называется функция $y(t)$, определенная на $[a,b]$, которая при подстановке ее в уравнение обращает его в тождество.

Пусть функция $k(t,s)$ такова, что существует конечный интеграл $\int\limits_a^b\int\limits_a^b k^2(t,s)\,dtds$, то есть $k(t,s)\in L_2((a,b)\times(a,b))$. Обозначим через $\|k\|^2$ значение этого интеграла. Докажем, что если $f(t)\in L_2(a,b)$ и $|\lambda| < 1/\|k\|$, то существует единственная функция $y^*(t)\in L_2(a,b)$, которая является решением уравнения (1.18).

Прежде всего заметим, что если $y(t)\in L_2(a,b)$, то $z(t) = \int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds \in L_2(a,b)$. Действительно, на основании неравенства Гёльдера, примененного к внутреннему интегралу, имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b z^2(t)\,dt = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds\Big]^2 dt \le \\ \le \int\limits_a^b \left[\Big(\int\limits_a^b k^2(t,s)\,ds\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_a^b y^2(s)\,ds\Big)^{1/2}\right]^2 dt = \|k\|^2\|y\|^2. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Следовательно, интеграл, стоящий в левой части (1.20) конечен, а это означает, что $z(t)\in L_2(a,b)$. Тогда соотношение $Uy = \lambda\int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds + f(t)$ задает оператор U, действующий в пространстве $L_2(a,b)$. Уравнение (1.18) перепишется теперь в виде $y = Uy$, то есть решение уравнения (1.18) является неподвижной точкой оператора U. Для доказательства существования единственного решения уравнения достаточно теперь установить, что у оператора U есть единственная неподвижная точка. Для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что при сделанных предположениях этот оператор сжимающий. Применяя неравенство (1.20), в котором y заменяется на

$x - y$, имеем

$$\rho(Ux, Uy) = \|Ux - Uy\| = \Big(\int\limits_a^b (Ux - Uy)^2\,dt\Big)^{1/2} =$$

$$= \left[\int\limits_a^b \Big(\lambda\int\limits_a^b k(t,s)x(s)\,ds + f(t) - \lambda\int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds - f(t)\Big)^2 dt\right]^{1/2} =$$

$$= |\lambda|\left[\int\limits_a^b \Big(\int\limits_a^b k(t,s)(x(s) - y(s))\,ds\Big)^2 dt\right]^{1/2} \le |\lambda|\|k\|\|x - y\| = |\lambda|\|k\|\rho(x,y).$$

Так как по условию $|\lambda|\|k\| < 1$, оператор сжимающий, что и требовалось доказать.

1.3.4 Примеры решения задач к параграфу 1.3

Пример 1. Доказать, что если некоторая степень непрерывного оператора A, отображающего полное метрическое пространство $\mathcal{X}$ в себя, является сжимающим оператором, то оператор A имеет единственную неподвижную точку. По определению $A^2x = A(Ax)$ и, если оператор A^{n-1} уже определен, то $A^n x = A(A^{n-1}x)$.

Решение. Покажем сначала, что если у оператора A неподвижная точка существует, то она единственна. Для этого заметим прежде всего, что всякая неподвижная точка оператора A будет неподвижной точкой любой степени этого оператора. Действительно, если x^* — неподвижная точка, то есть $Ax^* = x^*$, то

$$A^2x^* = A(Ax^*) = Ax^* = x^*$$

и так далее.

Пусть A^k — сжимающий оператор и предположим, что у оператора A есть по крайней мере две неподвижные точки. Тогда эти точки будут неподвижными точками оператора A^k, однако это невозможно потому, что согласно теореме Банаха о неподвижной точке у сжимающего оператора есть только одна неподвижная точка.

Теперь установим существование неподвижной точки оператора A. Пусть x^* — неподвижная точка оператора A^k. Она существует согласно теореме о неподвижной точке. Тогда

$$Ax^* = A(A^k x^*) = A^{k+1}x^* = A^k(Ax^*).$$

Полученное равенство означает, что Ax^* — неподвижная точка оператора A^k. Однако у этого оператора есть только одна неподвижная точка. Значит $x^* = Ax^*$, то есть x^* — неподвижная точка оператора A.

Пример 2. Пусть $k(t,s)$ — непрерывная на $[a,b] \times [a,b]$ функция, $f(t)$ — непрерывная на $[a,b]$ функция. Линейное интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda\int\limits_a^t k(t,s)x(s)\,ds + f(t)$$

называется ***уравнением Вольтерра***. Доказать, что это уравнение при любых λ имеет единственное решение в $C(a,b)$.

Решение. В пространстве $C(a,b)$ введем оператор A по формуле

$$Ax = \lambda \int\limits_a^t k(t,s)x(s)\,ds + f(t).$$

Тогда очевидно, что задача решения уравнения Вольтерра эквивалентна задаче нахождения неподвижной точки оператора A. Поэтому для того, чтобы доказать существование решения уравнения, достаточно показать, что некоторая степень оператора A является сжимающим оператором (см. предыдущий пример).

Функция $k(t,s)$ непрерывна на множестве $[a,b]\times[a,b]$, поэтому она ограничена, то есть существует такая константа N, что $|k(t,s)| \le N$. Вследствие этого имеем:

$$|Ax - Ay| = \left|\lambda \int\limits_a^t k(t,s)x(s)\,ds + f(t) - \lambda \int\limits_a^t k(t,s)y(s)\,ds - f(t)\right| =$$

$$= |\lambda| \left|\int\limits_a^t k(t,s)(x(s)-y(s))\,ds\right| \le |\lambda| \int\limits_a^t |k(t,s)||x(s)-y(t)|\,ds \le$$

$$\le |\lambda| N \int\limits_a^t |x(s)-y(s)|\,ds. \quad (1.21)$$

Если теперь под интегралом в правой части неравенства заменить $|x(s)-y(s)|$ на максимальное значение этой функции, то есть на расстояние между x и y, то получим

$$|Ax - Ay| \le |\lambda| N \rho(x,y) \int\limits_a^t ds = |\lambda| N (t-a)\rho(x,y). \quad (1.22)$$

Отсюда следует, что

$$\rho(Ax, Ay) = \max_{t\in[a,b]} |Ax - Ay| \le |\lambda| N (b-a)\rho(x,y).$$

Если окажется, что $|\lambda|N(b-a) < 1$, то это будет означать сжимаемость оператора A и значит, утверждение доказано. В противном случае воспользуемся неравенством (1.21), заменив в нем x на Ax, y на Ay. В результате получим

$$|A^2x - A^2y| = |A(Ax) - A(Ay)| \le |\lambda| N \int\limits_a^t |(Ax)(s) - (Ay)(s)|\,ds.$$

Из неравенства (1.22) теперь следует, что

$$|A^2x - A^2y| \le (|\lambda|N)^2 \int\limits_a^t (s-a)\,ds\rho(x,y) = \frac{\big(|\lambda|N(t-a)\big)^2}{2}\rho(x,y). \quad (1.23)$$

Значит

$$\rho(A^2x, A^2y) \le \frac{\big(|\lambda|N(b-a)\big)^2}{2}\rho(x,y).$$

При $\big(|\lambda|N(b-a)\big)^2/2 < 1$ утверждение доказано. Если же неравенство не выполнено, то снова воспользуемся (1.21), заменив теперь x на A^2x, y на A^2y. Получим, учитывая (1.23)

$$|A^3x - A^3y| \le |\lambda|N \int\limits_a^t |(A^2x)(s) - (A^2y)(s)|\, ds \le \frac{(|\lambda|N)^3}{2}\rho(x,y) \int\limits_a^t (s-a)^2\, ds =$$

$$= \frac{\big(|\lambda|N(t-a)\big)^3}{3!}\rho(x,y).$$

Отсюда

$$\rho(A^3x, A^3y) \le \frac{\big(|\lambda|N(b-a)\big)^3}{3!}\rho(x,y).$$

Продолжая рассуждать подобным образом, получим

$$\rho(A^kx, A^ky) \le \frac{\big(|\lambda|N(b-a)\big)^k}{k!}\rho(x,y).$$

Так как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\big(|\lambda|N(b-a)\big)^k}{k!} = 0,$$

начиная с некоторого момента дробь

$$\frac{\big(|\lambda|N(b-a)\big)^k}{k!}$$

станет меньше 1 и, следовательно, оператор A^k будет сжимающим.

1.3.5 Задачи к параграфу 1.3

1. В каких из приведенных ниже случаях заданы операторы U, действующие из пространства $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$:

а) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a,b)$, $\;Ux = \dfrac{dx}{dt}$;

б) $\mathcal{X} = C^1(a,b)$, $\mathcal{Y} = C(a,b)$, $\;Ux = \dfrac{dx}{dt}$;

в) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2(0,1)$, $\;Ux = x^2(t)$;

г) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2(0,1)$, $\;Ux = \sqrt{|x(t)|}$;

д) $\mathcal{X} = l_\infty$, $\mathcal{Y} = R$, $\;Ux = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$;

г) $\mathcal{X} = l_1, \mathcal{Y} = R$, $\;Ux = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$?

2. Непрерывны ли следующие функционалы:

а) $f(x) = \int\limits_a^b x^2(t)\, dt$, $\quad x \in C(a,b)$;

б) $f_a(x) = \rho(x,a)$, $\mathcal{X}$ — произвольное метрическое пространство, a — фиксированная точка из $\mathcal{X}$;

в) $f(x) = \|x\|$, $\mathcal{X}$ — произвольное линейное нормированное пространство;

г) $f(x) = x'(0)$, $\quad x \in C^1(0,1)$?

3. Пусть A — оператор, отображающий $C^1(a,b)$ в $C(a,b)$ по закону $Ax = dx/dt$. Доказать, что A — непрерывный оператор. Будет ли непрерывным оператор B, определенный на множестве D непрерывно дифференцируемых функций, рассматриваемых как подмножество пространства $C(a,b)$ и отображающий D в $C(a,b)$ по закону $Bx = dx/dt$?

4. Пусть $\mathcal{X} = (1,\infty)$, $\rho(x,y) = |x-y|$, $Ax = x + 1/x$. Уменьшается ли после действия оператора A расстояние между двумя различными точками? Является ли оператор A сжимающим? Имеет ли он неподвижные точки?

5. Показать, что нелинейное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b k(t,s,x(s))\,ds + f(t)$$

имеет единственное решение в пространстве $C(a,b)$, если k, f — непрерывные функции, k удовлетворяет условию Липшица

$$|k(x,y,z_1) - k(x,y,z_2)| \le M|z_1 - z_2|,\ M = const$$

и $|\lambda| < M^{-1}(b-a)^{-1}$.

6. Решить уравнение $x = \cos x$ методом простой итерации. Корень уравнения найти с точностью до 0.05.

7. Доказать, что для любого числа $a \in (0,1)$ и любой непрерывной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0,1]$, существует единственная непрерывная на $[0,1]$ функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению: $y(x) - a\sin(y(x)) + f(x) = 0$.

8. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

9. Пусть A и B — отображения полного метрического пространства в себя. Доказать: если отображение B — сжимающее, и отображения A и B коммутируют, то есть $A(Bx) = B(Ax)$ для всех x, то уравнение $Ax = x$ имеет решение.

10. В вычислительной математике для решения системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{A}$ — матрица с элементами a_{ij}, $i,j = 1,\ldots,m$, $\mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_m)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m)^{\mathrm{T}}$ [3] иногда применяется метод Якоби, который заключается в следующем. Произвольным образом задается начальное приближение к решению $\mathbf{x}^0 = (x_1^0,\ldots,x_m^0)^{\mathrm{T}}$. Приближение $\mathbf{x}^{n+1}$ находится из соотношений

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1^{n+1} + a_{12}x_2^n + \cdots + a_{1m}x_m^n = b_1,\\
a_{21}x_1^n + a_{22}x_2^{n+1} + \cdots + a_{2m}x_m^n = b_2,\\
\cdots\ \cdots\ \cdots\\
a_{m1}x_1^n + a_{m2}x_2^n + \cdots + a_{mm}x_m^{n+1} = b_m.
\end{gathered}$$

Доказать, что при выполнении условия

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^m |a_{ij}| \tag{1.24}$$

[3] Индекс "T" означает операцию транспонирования.

векторы $\mathbf{x}^n$ сходятся к решению системы $\mathbf{x}$ при $n \to \infty$.

Указание. В пространстве m-мерных векторов ввести расстояние по формуле $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\limits_i |x_i - y_i|$. Переписать систему в виде

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j, \quad i = 1, \ldots, m$$

или в векторной форме $\mathbf{x} = \mathbf{d} - \mathbf{B}\mathbf{x}$. Доказать, что при выполнении условия (1.24) оператор $U\mathbf{x} = \mathbf{d} - \mathbf{B}\mathbf{x}$ сжимающий.

1.4 ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1.4.1 Норма оператора, операции в пространстве линейных операторов

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — линейные нормированные пространства, A — оператор, действующий из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, $\|.\|_x$ и $\|.\|_y$ — нормы в пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно.

Определение 1.4.1 *Оператор A называется **линейным**, если для любых x_1, x_2 из $\mathcal{X}$ и для любых чисел α, β*

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

Примеры: 1) Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a, b)$, тогда оператор $Ax = \int\limits_a^t x(r)\, dr$ — линейный. Действительно,

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \int\limits_a^t (\alpha x_1(r) + \beta x_2(r))\, dr =$$

$$= \alpha \int\limits_a^t x_1(r)\, dr + \beta \int\limits_a^t x_2(r)\, dr == \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

2) Пусть $\mathcal{X} = R^n$, $\mathcal{Y} = R^m$, где R^n — n- мерное евклидово пространство, то есть пространство, элементами которого являются n- мерные вектора. Если $A = (a_{i,j})$ — матрица размерности $m \times n$, то из линейной алгебры известно, что при умножении этой матрицы справа на n- мерный вектор–столбец, получим m- мерный вектор, причем эта операция обладает свойством линейности. Следовательно, операция умножения матрицы на вектор задает линейный оператор, отображающий пространство $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$.

3) $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ — числовая прямая. Оператор $Ax = ax + b$, где a, b числа, причем $b \neq 0$, не является линейным. Это следует, например, из того, что

$$A(\alpha x) = a(\alpha x) + b \neq \alpha(ax + b) = \alpha(Ax).$$

Лемма 1.4.1 *Если A — линейный оператор, то $A\theta_x = \theta_y$, где θ_x, θ_y —нулевые элементы пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из равенства

$$A(0\theta_x) = 0A\theta_x = \theta_y.$$

Лемма 1.4.2 *Если линейный оператор A непрерывен в точке x_0, то он непрерывен в любой точке пространства, то есть непрерывен.*

Доказательство. Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, тогда $x - x_n + x_0 \to x_0$ при $n \to \infty$ и из непрерывности оператора в точке x_0 следует, что $A(x - x_n + x_0) \to Ax_0$. Так как $A(x - x_n + x_0) = Ax - Ax_n + Ax_0$, то отсюда следует, что $Ax_n \to Ax$, то есть оператор непрерывен в точке x.

Определение 1.4.2 *Линейный оператор A называется* ***ограниченным****, если существует неотрицательная константа C такая, что для всех $x \in \mathcal{X}$ справедливо неравенство*

$$\|Ax\|_y \le C\|x\|_x. \tag{1.25}$$

Наименьшая константа C, при которой выполняется неравенство (1.25), называется ***нормой оператора*** *и обозначается $\|A\|$.*

Таким образом можно записать, что $\|Ax\|_y \le \|A\|\|x\|_x$. Из определения также следует, что

$$\|A\| = \sup_{x\neq\theta_x} \frac{\|Ax\|_y}{\|x\|_x} = \sup_{x\neq\theta_x}\left\|A\frac{x}{\|x\|_x}\right\|_y = \sup_{\|x\|_x=1}\|Ax\|_y.$$

Теорема 1.4.1 *Для того чтобы линейный оператор был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен.*

Доказательство. Пусть A - ограничен, $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\|Ax - Ax_n\|_y \le \|A\|\|x - x_n\|_x \to 0,$$

а это означает, что A непрерывен.

Предположим теперь, что A непрерывен, но не ограничен. Это означает, что для любого числа n существует в $\mathcal{X}$ элемент x_n такой, что

$$\|Ax_n\|_y > n\|x_n\|_x. \tag{1.26}$$

Пусть $x_n^1 = (n\|x_n\|_x)^{-1}x_n$. Тогда $\|x_n^1\|_x = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^1 = \theta_x$. Из (1.26) следует, что $\|Ax_n^1\|_y = (n\|x_n\|_x)^{-1}\|Ax_n\|_y > 1$. Однако это противоречит тому, что в силу непрерывности $Ax_n^1 \to \theta_y$ при $n \to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что если оператор непрерывен, то он ограничен.

В множестве линейных операторов можно ввести понятия ***суммы операторов*** и ***умножения операторов на числа***. Пусть A и B — линейные операторы, которые отображают линейное нормированное пространство $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$, α — число. Тогда по определению будем полагать, что операторы αA и $A + B$ действуют из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ по правилам: $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$, $(A + B)x = Ax + Bx$. Легко показать, что при таком определении $A+B$ и αA — линейные операторы. Линейность, например, $A+B$ следует из равенств

$$
\begin{aligned}
(A+B)(\alpha x_1+\beta x_2) &= A(\alpha x_1+\beta x_2)+B(\alpha x_1+\beta x_2) = \\
&= \alpha A x_1+\beta A x_2+\alpha B x_1+\beta B x_2 = \\
&= \alpha(Ax_1+Bx_1)+\beta(Ax_2+Bx_2) = \alpha(A+B)x_1+\beta(A+B)x_2.
\end{aligned}
$$

Покажем, что оператор $A+B$ ограничен, если операторы A и B ограничены.

$$\|(A+B)x\|_y = \|Ax+Bx\|_y \le \|A\|\|x\|_x+\|B\|\|x\|_x = (\|A\|+\|B\|)\|x\|_x \;.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\|A+B\| \le \|A\|+\|B\|. \tag{1.27}$$

Заметим также, что

$$\|\alpha A\| = \sup_{x\neq\theta_x}\frac{\|\alpha Ax\|_y}{\|x\|_x} = |\alpha|\sup_{x\neq\theta_x}\frac{\|Ax\|_y}{\|x\|_x} = |\alpha|\|A\|.$$

Определим нулевой оператор Θ как оператор, который каждый элемент $x\in\mathcal{X}$ переводит в θ_y. Это, очевидно, линейный оператор и его норма равна 0. Обратно, если норма некоторого оператора равна нулю, то в множестве его значений не может быть ненулевых элементов, следовательно, это нулевой оператор.

Таким образом, приведенные выше рассуждения показывают, что множество всевозможных линейных ограниченных операторов, отображающих линейное нормированное пространство $\mathcal{X}$ в линейное нормированное пространство $\mathcal{Y}$ в свою очередь является линейным нормированным пространством.

Если линейные операторы A и B действуют из $\mathcal{Y}$ в $\mathcal{Z}$ и из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ соответственно, то можно определить ***произведение операторов*** AB: оператор AB действует из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Z}$ по закону $(AB)x = A(Bx)$. Полученный при этом оператор оказывается линейным, так как

$$
\begin{aligned}
(AB)(\alpha x_1+\beta x_2) &= A\left(B(\alpha x_1+\beta x_2)\right) = A(\alpha Bx_1+\beta Bx_2) = \\
&= \alpha A(Bx_1)+\beta A(Bx_2) = \alpha(AB)x_1+\beta(AB)x_2.
\end{aligned}
$$

Докажем, что если операторы A и B ограничены, то AB — ограниченный оператор. Это следует из неравенств

$$\|(AB)x\|_z = \|A(Bx)\|_z \le \|A\|\|Bx\|_y \le \|A\|\|B\|\|x\|_x \;.$$

Отсюда, в частности, имеем: $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.

В том случае, когда $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=\mathcal{Z}$ можно определить операторы AB и BA. Следует отметить, что в отличии от операции суммирования, операция умножения операторов не коммутативна, то есть в общем случае $AB \neq BA$. Пусть, например, $\mathcal{X}=C(0,1)$, $Ax = tx(t)$, $Bx = x(0)$. Тогда $(AB)x = tx(0)$, $(BA)x = (tx(t))\,|_{t=0} \equiv 0$. Значит, если $x(0)\neq 0$, то $ABx \neq BAx$.

1.4.2 Обратные операторы

Пусть линейный оператор A определен на линейном пространстве $\mathcal{X}$, принимает значения в линейном пространстве $\mathcal{Y}$ и обладает свойством: $Ax = \theta_y$ тогда и только тогда, когда $x = \theta_x$. Это означает, что оператор различные элементы пространства $\mathcal{X}$ переводит в различные элементы пространства $\mathcal{Y}$. Действительно, если $x_1 \neq x_2$, то $Ax_1 \neq Ax_2$. В противном случае имеем $Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2) = \theta_y$, откуда следует, что $x_1 = x_2$. Для такого оператора A можно ввести оператор, обозначаемый A^{-1}, который назовем ***обратным к оператору** A.*

Оператор A^{-1} определен на множестве значений оператора A, то есть на множестве $R(A) = \{y : y = Ax,\ x \in \mathcal{X}\}$, его значения лежат в $\mathcal{X}$. Оператор A^{-1} действует таким образом: пусть $y = Ax$, тогда $A^{-1}y = x$. В силу того, что каждому элементу $y \in R(A)$ соответствует при этом только один $x \in \mathcal{X}$, получаем, что A^{-1} — оператор. По определению $A^{-1}Ax = x$. Заметим, что область значений оператора A^{-1} совпадает со всем пространством $\mathcal{X}$.

Лемма 1.4.3 *Обратный к линейному оператору — линейный.*

Доказательство. Пусть $Ax_i = y_i,\ i = 1, 2$, то есть $x_i = A^{-1}y_i$. Тогда утверждение леммы следует из равенства:

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = A^{-1}(\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2) =$$
$$= A^{-1}A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2.$$

Вопрос о существовании обратного оператора тесно связан с задачей о разрешимости уравнения $Ax = y$ относительно x. Если обратный оператор существует, то это означает, что для любого $y \in R(A)$ существует единственное решение этого уравнения равное $x = A^{-1}y$. При этом если обратный оператор ограничен, то малые ошибки в задании y приводят к малым ошибкам в определении решения x. Действительно, если вместо уравнения $Ax = y$ решается уравнение $A\bar{x} = y + \delta y$, то, в силу линейности оператора,

$$A(\bar{x} - x) = A\bar{x} - Ax = y + \delta y - y = \delta y$$

откуда $\bar{x} - x = A^{-1}(\delta y)$ и $\|x - \bar{x}\|_x \leq \|A^{-1}\| \|\delta y\|_y$.

В свою очередь, линейность обратного оператора означает, что при необходимости решения уравнения $Ax = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ достаточно найти решения уравнений $Ax_1 = y_1,\ Ax_2 = y_2$. Тогда $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.

Для формулировки последующих в этом разделе теорем будем считать, что $\mathcal{X}$ — линейное нормированное пространство, содержащее ненулевые элементы.

Теорема 1.4.2 *Для того, чтобы у линейного оператора A существовал обратный оператор A^{-1} и этот оператор был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа $m > 0$ такая, что для всех $x \in \mathcal{X}$ выполняется неравенство*

$$\|Ax\|_y \geq m\|x\|_x. \tag{1.28}$$

При этом $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.

Доказательство. Предположим, что обратный оператор существует и ограничен. Тогда, учитывая, что $y = Ax,\ x = A^{-1}y$, имеем

$$\|x\|_x = \|A^{-1}y\|_x \leq \|A^{-1}\| \|y\|_y = \|A^{-1}\| \|Ax\|_y.$$

Отсюда следует, что $\|Ax\|_y \geq \|A^{-1}\|^{-1}\|x\|_x$, то есть $m = \|A^{-1}\|^{-1}$. Заметим, что в приведенных выше неравенствах деление возможно, так как $\|A^{-1}\| \neq 0$. Если бы $\|A^{-1}\| = 0$, то оператор A^{-1} был бы нулевым, то есть его область значений совпадала бы с множеством, которое состоит из одного нулевого элемента. Это невозможно, потому, что область значений оператора A^{-1} равна $\mathcal{X}$.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы. Тогда из неравенства (1.28) следует, что если $Ax = \theta_y$, то $x = \theta_x$, поэтому существует A^{-1}. Переписав это неравенство в виде

$$\|A^{-1}y\|_x \leq \frac{1}{m}\|y\|_y,$$

получим, что A^{-1} ограниченный оператор и $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$. Теорема доказана.

Теорема 1.4.3 *Пусть линейный оператор A отображает пространство $\mathcal{X}$ в себя, где $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $\|A\| \leq q < 1$ и I — тождественный оператор, то есть $Ix = x$. Тогда для оператора $I - A$ существует ограниченный обратный оператор $(I - A)^{-1}$ и $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}$. При любом $y \in \mathcal{X}$ уравнение $(I - A)x = y$ имеет единственное решение, причем:*

$$x = (I - A)^{-1}y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} A^i y \overset{\text{def}}{=} \Big(\sum_{i=0}^{\infty} A^i\Big) y.$$

Здесь под оператором A^0 подразумевается тождественный оператор.

Доказательство. Заметим, что

$$\|(I - A)x\| \geq \|x\| - \|Ax\| \geq (1 - q)\|x\|$$

Тогда по предыдущей теореме существует $(I - A)^{-1}$ и $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}$.

Введем оператор $Ux = Ax + y$, где y — произвольная фиксированная точка из $\mathcal{X}$. Оператор U сжимающий, так как

$$\rho(Ux_1, Ux_2) = \|(Ax_1 + y) - (Ax_2 + y)\| = \|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \\ \leq \|A\|\|x_1 - x_2\| \leq q\|x_1 - x_2\| = q\rho(x_1, x_2).$$

Тогда по теореме Банаха о неподвижной точке уравнение $Ux = x$ разрешимо, решение единственно и находится методом последовательных приближений. Выбрав начальное приближение $x_0 = y$, получим, что $x_1 = Ux_0 = Ay + y$, $x_2 = Ux_1 = U(Ay + y) = Ay^2 + Ay + y$ и так далее. Отсюда следует, что

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} A^i y, \tag{1.29}$$

что и требовалось доказать.

Ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} A^i$ носит название ***ряда Неймана***.

В качестве примера применения этой теоремы рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 1.4.4 *Пусть*

$$\begin{cases} \xi_1 = a_{1\,1}\xi_1 + a_{1\,2}\xi_2 + \cdots + a_{1\,m}\xi_m + \eta_1, \\ \xi_2 = a_{2\,1}\xi_1 + a_{2\,2}\xi_2 + \cdots + a_{2\,m}\xi_m + \eta_2, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots, \\ \xi_m = a_{m\,1}\xi_1 + a_{m\,2}\xi_2 + \cdots + a_{m\,m}\xi_m + \eta_m \end{cases} \tag{1.30}$$

система линейных алгебраических уравнений, причем $\sum\limits_{j=1}^{m} |a_{i\,j}| < 1, \quad i = 1, \ldots, m$. *Тогда система имеет единственное решение. При этом, если при любых* $i, j = 1, \ldots m$ *справедливы неравенства* $a_{i\,j} \geq 0, \;\; \eta_i \geq 0$, *то все компоненты вектора решения неотрицательны*[4].

Доказательство. В пространстве m-мерных векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)^T$, где знак "T" означает операцию транспонирования, введем норму $\|x\| = \max\limits_{i=1,\ldots,m} |\xi_i|$. Получившееся в результате пространство $\mathcal{X}$ является банаховым (проверьте этот факт).

Введем теперь в пространстве $\mathcal{X}$ оператор A, который вектору x ставит в соответствие вектор z, получающийся в результате умножения матрицы с элементами $a_{i\,j}$ на вектор x. Это означает, что если $z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)^T$, то $\zeta_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{i\,j}\xi_j$. Заметим, что если $a_{i\,j} \geq 0$ и $\xi_j \geq 0$, то $\zeta_i \geq 0$. В результате система уравнений (1.30) запишется в виде $(I - A)x = y$, где $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)^T$. Покажем, что $\|A\| < 1$. Действительно,

$$\|Ax\| = \max_{i=1,\ldots,m}\Big|\sum_{j=1}^{m} a_{i\,j}\xi_j\Big| \leq \max_{i=1,\ldots,m}\Big(\sum_{j=1}^{m} |a_{i\,j}||\xi_j|\Big) \leq$$

$$\leq \max_{i=1,\ldots,m}\Big(\sum_{j=1}^{m} |a_{i\,j}| \max_{j=1,\ldots,m} |\xi_j|\Big) = \Big(\max_{i=1,\ldots,m}\sum_{j=1}^{m} |a_{i\,j}|\Big)\|x\| = q\|x\|, \;\; q = \max_{i=1,\ldots,m}\sum_{j=1}^{m} |a_{i\,j}| < 1.$$

Существование решения следует теперь непосредственно из теоремы 1.4.3. Неотрицательность компонент решения является следствием формулы (1.29) в которой все слагаемые получаются векторами, координаты которых, неотрицательны.

1.4.3 Примеры решения задач к параграфу 1.4

Пример 1. Показать, что следующие операторы являются линейными ограниченными операторами, действующими из пространства $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$ и найти их нормы:

а) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(0, 1)$, $Ax = tx(t)$;

б) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2(0, 1)$, $Bx = tx(t)$.

Решение. Оба оператора действуют по одному и тому же закону — функции, на которую они действуют, ставят в соответствие произведение этой функции и независимой переменной. Различаются операторы только тем, что действуют они в разных пространствах. Поэтому линейность операторов доказывается одинаково, а ограниченность по-разному.

Покажем сначала линейность операторов.

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = t\big(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\big) = \alpha t x_1(t) + \beta t x_2(t) = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

Проверим теперь ограниченность операторов. Ограниченность оператора A означает, что существует такое число M, что для всех x выполняется неравенство

$$\|Ax\| \leq M\|x\|. \tag{1.31}$$

[4]К изучению подобных систем линейных алгебраических уравнений приводит, в частности, линейная модель многоотраслевой экономики, предложенная лауреатом Нобелевской премии В.Леонтьевым.

Для доказательства этого неравенства (1.31) имеем:

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} |tx(t)| \le \max_{t\in[0,1]} |t| \max_{t\in[0,1]} |x(t)| = 1\cdot \|x\|. \tag{1.32}$$

Таким образом, неравенство (1.31) выполняется при $M = 1$. Норма оператора A — это минимальная константа M, при которой выполняется неравенство (1.31). Поэтому из неравенства (1.32) следует, что $\|A\| \le 1$.

Для того, чтобы найти значение нормы оператора A заметим, что если найдется такая ненулевая функция $x^*(t)$, что в неравенстве (1.32) при подстановке этой функции будет выполняться знак равенства, то в качестве константы M нельзя будет взять величину меньшую, чем 1. Тогда это будет означать, что $\|A\| = 1$. Легко заметить, что в качестве такой функции достаточно взять $x^*(t) \equiv 1$.

Норма оператора A по-другому определялась как

$$\|A\| = \sup_{x\ne\theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Наличие функции $x^*(t)$ означает, что есть такая функция $x(t)$, при которой дробь $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ принимает наибольшее значение. Поскольку не всегда существует точка, в которой дробь принимает значение равное верхней грани, такой подход нахождения нормы оператора не всегда приводит к успеху.

Покажем теперь ограниченность оператора B и проиллюстрируем другой способ нахождения нормы оператора. В пространстве $L_2(0,1)$ норма определяется с помощью интеграла:

$$\|Bx\|^2 = \int_0^1 (tx(t))^2\,dt \le \max_{t\in[0,1]} t^2 \int_0^1 x^2(t)\,dt = 1\cdot\|x\|^2. \tag{1.33}$$

Значит, как и для оператора A, получаем, что оператор B ограничен и его норма не превосходит 1. Однако не удастся найти такую ненулевую функцию, чтобы в неравенстве (1.33) выполнялся знак равенства. Это следует, например, из геометрического смысла интеграла. Действительно, площади криволинейных трапеций для функций $x^2(t)$ и $t^2x^2(t)$ на промежутке $(0,1)$ при функции $x(t)$ такой, что $\|x\| \ne 0$, очевидно, разные.

Из неравенства (1.33) следует, что

$$\|B\| = \sup_{x\ne\theta} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \le 1. \tag{1.34}$$

Если удастся подобрать последовательность таких функций x_n, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|Bx_n\|}{\|x_n\|} = 1, \tag{1.35}$$

то в силу неравенства (1.34) можно сделать вывод, что $\|B\| = 1$.

Возьмем $x_n(t) = 0$ при $0 \le t \le 1 - 1/n$ и $x_n(t) = 1$ при $1 - 1/n < t \le 1$. Тогда

$$\|Bx_n\|^2 = \int_{1-1/n}^1 t^2\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^3}, \quad \|x_n\|^2 = \int_{1-1/n}^1 dt = \frac{1}{n}$$

и, следовательно, равенство (1.35) выполнено.

Пример 2. Оператор $Lx = x'' + x$ определим на подмножестве пространства $C(a, b)$, которое состоит из дважды непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю на концах отрезка $[a, b]$. Будем считать, что значения оператора лежат в $C(a, b)$.

а) Показать, что для оператора L существует обратный оператор L^{-1} и найти его, если $a = 0,\ b = \pi/2$. Существует ли обратный оператор, если $a = 0,\ b = \pi$?

б) Доказать, что при $a = 0,\ b = \pi/2$ оператор L^{-1} ограничен и его область определения совпадает со всем пространством $C(a, b)$.

Решение. Легко проверить, что L — линейный оператор. Поэтому обратный оператор существует, если из равенства $Lx = 0$ следует, что $x = 0$. Равенство $Lx = 0$ может рассматриваться как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно x. Общее решение этого уравнения имеет вид $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Так как функции, на которых определен оператор на концах отрезка равны нулю, получаем $0 = x(0) = C_2,\quad 0 = x(\pi/2) = C_1$. Таким образом, получаем, что $x = 0$ и значит L^{-1} существует.

Если же $a = 0,\ b = \pi$, то равенство $Lx = 0$ возможно и в том случае, когда $x \neq 0$, например, при $x(t) = \sin t$, поэтому обратный оператор не существует.

Вернемся к случаю $a = 0,\ b = \pi/2$ и найдем обратный оператор. По определению обратного оператора, для нахождения результата действия L^{-1} на непрерывную функцию $f(t)$, необходимо отыскать такую дважды непрерывно дифференцируемую функцию $x(t)$, что $x(a) = x(b) = 0$ и $Lx = f$. Если для любой непрерывной функции $f(t)$ удастся подыскать такую функцию $x(t)$, то это будет означать, что область определения оператора L^{-1} (или что одно и то же самое — область значения оператора L) совпадает со всем пространством $C(a, b)$ и $L^{-1} f = x$.

Для нахождения x получили краевую задачу:

$$x'' + x = f, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 0.$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных. Для этого его решение ищем в том же виде, что и общее решение однородного уравнения, только коэффициенты считаем не константами, а функциями от t. Имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t, \\ x'(t) &= C_1(t) \cos t - C_2(t) \sin t + C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t. \end{aligned}$$

Наложим на коэффициенты условие

$$C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = 0. \tag{1.36}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x'(t) &= C_1(t) \cos t - C_2(t) \sin t, \\ x''(t) &= -C_1(t) \sin t - C_2(t) \cos t + C_1'(t) \cos t - C_2'(t) \sin t. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в дифференциальное уравнение, и приводя подобные, получим

$$C_1'(t) \cos t - C_2'(t) \sin t = f(t). \tag{1.37}$$

Из системы линейных алгебраических уравнений (1.36),(1.37) находим теперь C_1', C_2'. Получаем $C_1' = f(t) \cos t,\ C_2' = -f(t) \sin t$. Проинтегрировав полученные выражения, найдем C_1, C_2. Подставив найденные коэффициенты в выражение для x, определим общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$x(t) = \left(\int\limits_0^t f(s)\cos s\, ds + c_1 \right) \sin t - \left(\int\limits_0^t f(s)\sin s\, ds + c_2 \right) \cos t,$$

где c_1, c_2 — константы, полученные при интегрировании. Из условия $x(0) = 0$ следует, что $c_2 = 0$. Условие $x(\pi/2) = 0$ дает

$$c_1 = -\int\limits_0^{\pi/2} f(s)\cos s\, ds.$$

Если заметить, что

$$\int\limits_0^t f(s)\cos s\, ds + c_1 = -\int\limits_t^{\pi/2} f(s)\cos s\, ds,$$

то искомая функция $x(t)$ запишется в виде

$$x(t) = -\cos t \int\limits_0^t f(s)\sin s\, ds - \sin t \int\limits_t^{\pi/2} f(s)\cos s\, ds.$$

Введем функцию

$$G(t, s) = -\begin{cases} \cos t \sin s, & 0 \le s \le t, \\ \sin t \cos s, & t < s \le \pi/2. \end{cases}$$

Тогда решение $x(t)$ (или по-другому — результат действия обратного оператора на функцию f) примет вид

$$L^{-1} f = x = \int\limits_0^{\pi/2} G(t, s) f(s)\, ds.$$

Так как $|G(t, s)| \le 1$, имеем

$$|x(t)| = \left| \int\limits_0^{\pi/2} G(t, s) f(s)\, ds \right| \le \int\limits_0^{\pi/2} |G(t, s)||f(s)|\, ds \le$$

$$\le \int\limits_0^{\pi/2} \max_{s \in [0, \pi/2]} f(s)\, ds = \frac{\pi}{2} \|f\|.$$

Следовательно,

$$\|L^{-1} f\| = \|x\| = \max_{t \in [0, \pi/2]} |x(t)| \le \frac{\pi}{2} \|f\|.$$

Полученное неравенство означает, что оператор L^{-1} ограничен.

Пример 3. Пусть оператор A действует в пространстве $C(a,b)$ по правилу

$$Ax = x(t) - 2\int\limits_0^\pi \sin(t-s)x(s)\,ds.$$

Найти результат действие оператора A^{-1} на функцию $f(t) = \cos t$.

Решение. Данную задачу по-другому можно сформулировать так: решить интегральное уравнение Фредгольма II рода

$$y(t) - 2\int\limits_0^\pi \sin(t-s)y(s)\,ds = \cos t. \tag{1.38}$$

Если $y = y(t)$ является решением этого уравнения, то $A^{-1}f = y$.

В общем виде решить произвольное интегральное уравнение невозможно. Однако, есть один класс уравнений, которые решаются достаточно просто. Это уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.

Рассмотрим уравнение

$$y(t) - \lambda\int\limits_a^b k(t,s)y(s)\,ds = f(t) \tag{1.39}$$

с ядром $k(t,s)$ вида

$$k(t,s) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\vartheta_i(s), \tag{1.40}$$

которое называется ***вырожденным***.

Можно считать, что в каждый из наборов функций $\varphi_i, \vartheta_i,\ i = 1,\dots,n$ входят линейно независимые функции.

Действительно, если это не так, например ϑ_i линейно зависимы, то, представив каждую из функций ϑ_i как линейную комбинацию независимых, получим, что то же самое ядро $k(t,s)$ можно записать в виде суммы меньшего числа слагаемого вида $\bar\varphi_j(t)\bar\vartheta_j(s)$, причем функции $\bar\vartheta_j$ линейно независимы.

Рассмотрим метод решения такого уравнения. Предположим, что оно имеет решение. Подставив в (1.39) выражение (1.40), получим

$$y(t) = \lambda\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\int\limits_a^b \vartheta_i(s)y(s)\,ds + f(t).$$

Вводя обозначения

$$\alpha_i = \int\limits_a^b \vartheta_i(s)y(s)\,ds, \tag{1.41}$$

перепишем уравнение в виде:

$$y(t) = \lambda\sum_{i=1}^n \alpha_i\varphi_i(t) + f(t). \tag{1.42}$$

Таким образом, если решение существует, то оно имеет вид, определяемый равенством (1.42). Осталось найти только коэффициенты α_i. Для этого подставим (1.42) в (1.41):

$$\alpha_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int\limits_a^b \vartheta_i(s)\varphi_j(s)\,ds + \int\limits_a^b \vartheta_i(s)f(s)\,ds.$$

Положив

$$a_{ij} = \int\limits_a^b \vartheta_i(s)\varphi_j(s)\,ds, \quad b_i = \int\limits_a^b \vartheta_i(s)f(s)\,ds$$

имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j + b_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.43}$$

решив которую найдем числа α_i. Решение $y(t)$ определяется теперь по формуле (1.42). Подставив эту функцию в уравнение (1.39) и повторив все выкладки, с помощью которых пришли от уравнения (1.39) к системе (1.43), убеждаемся, что функция y является решением уравнения (1.39).

Итак, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к решению соответствующей ему системы (1.43) линейных алгебраических уравнений.

Теперь можно перейти к уравнению (1.38). Прежде всего заметим, что ядро уравнения становится вырожденным после преобразования:

$$k(t, s) = \sin(t - s) = \sin t \cos s - \sin s \cos t.$$

Запишем уравнение в следующем виде:

$$y(t) = 2\sin t \int\limits_0^\pi \cos s\, y(s)\,ds - 2\cos t \int\limits_0^\pi \sin s\, y(s)\,ds + \cos t =$$
$$= 2\alpha_1 \sin t + (1 - 2\alpha_2)\cos t. \tag{1.44}$$

Здесь введены обозначения:

$$\alpha_1 = \int\limits_0^\pi \cos s\, y(s)\,ds, \quad \alpha_2 = \int\limits_0^\pi \sin s\, y(s)\,ds. \tag{1.45}$$

Таким образом, для того чтобы найти решение $y(t)$, достаточно определить α_1, α_2 и подставить их в (1.44). Для нахождения коэффициентов α_1, α_2 подставим выражение $y(t)$ из (1.44) в соотношения (1.45):

$$\alpha_1 = \int\limits_0^\pi \cos s\, y(s)\,ds = \alpha_1 \int\limits_0^\pi \sin 2s\,ds + (1 - 2\alpha_2) \int\limits_0^\pi \cos^2 s\,ds,$$
$$\alpha_2 = \int\limits_0^\pi \sin s\, y(s)\,ds = 2\alpha_1 \int\limits_0^\pi \sin^2 s\,ds + \left(\frac{1}{2} - \alpha_2\right) \int\limits_0^\pi \sin 2s\,ds.$$

Вычисляя входящие в эти равенства интегралы, получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных α_1, α_2:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \pi\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \\ -\pi\alpha_1 + \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2(1+\pi^2)}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi^2}{2(1+\pi^2)}.$$

Подставляя найденные значения α_1, α_2 в (1.44), получим решение уравнения и, следовательно, найдем $A^{-1}f$:

$$A^{-1}f = y(t) = \frac{\cos t + \pi \sin t}{1+\pi^2}.$$

Пример 4. При каких числах λ у оператора

$$Ay = y(t) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (ts + t^2 s^2) y(s)\, ds,$$

действующего в пространстве $C(-1,1)$, нет обратного?

Решение. У оператора A нет обратного, если из того, что $Ay = 0$ не следует, что $y = 0$. Другими словами, обратный оператор не существует, если уравнение $Ay = 0$ имеет решение y отличное от нуля.

В теории интегральных уравнений уравнение вида

$$y(t) - \lambda \int\limits_{a}^{b} k(t,s) y(s)\, ds = 0 \tag{1.46}$$

называется однородным, те числа λ, при которых существует ненулевое решение этого уравнения называются ***характеристическими числами интегрального уравнения***, а сами ненулевые решения — ***собственными функциями***. Поэтому та же задача может быть сформулирована следующим образом: найти характеристические числа однородного уравнения

$$y(t) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (ts + t^2 s^2) y(s)\, ds.$$

Расширим еще задачу, найдя не только характеристические числа, но и собственные функции, соответствующие этим числам.

Из уравнения имеем

$$y(t) = \lambda \left(t \int\limits_{-1}^{1} s y(s)\, ds + t^2 \int\limits_{-1}^{1} s^2 y(s)\, ds \right) = \lambda (C_1 t + C_2 t^2), \tag{1.47}$$

где

$$C_1 = \int\limits_{-1}^{1} s y(s)\, ds, \quad C_2 = \int\limits_{-1}^{1} s^2 y(s)\, ds. \tag{1.48}$$

Подставляя (1.47) в (1.48), получим

$$\begin{aligned} C_1 =&\lambda \int\limits_{-1}^{1} s(C_1 s + C_2 s^2) ds = \frac{2}{3}\lambda C_1, \\ C_2 =&\lambda \int\limits_{-1}^{1} s^2(C_1 s + C_2 s^2) ds = \frac{2}{5}\lambda C_2. \end{aligned}$$

Таким образом, система для нахождения C_1, C_2 принимает вид:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) C_1 & = 0, \\ \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) C_2 & = 0. \end{cases} \tag{1.49}$$

Для того чтобы полученная система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю. Из этого условия получаем уравнение для нахождения характеристических чисел λ:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{3}\lambda & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2}{5}\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристические числа: $\lambda_1 = 3/2,\ \lambda_2 = 5/2$.

При $\lambda_1 = 3/2$ система (1.49) примет вид

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 & = 0, \\ \left(1 - \frac{3}{5}\right) C_2 & = 0, \end{cases}$$

откуда C_1 произвольно, $C_2 = 0$, и, значит, собственная функция будет $y_1(t) = C_1\lambda_1 t$, или, полагая $C_1\lambda_1 = c$, получим $y_1(t) = ct$.

При $\lambda_1 = 5/2$ система (1.49) примет вид

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{5}{3}\right) C_1 & = 0, \\ 0 \cdot C_2 & = 0, \end{cases}$$

откуда C_2 произвольно, $C_1 = 0$, и, значит, собственная функция будет $y_2(t) = C_2\lambda_2 t$, или, полагая $C_2\lambda_2 = \widetilde{c}$, получим $y_2(t) = \widetilde{c}t^2$. Итак, имеем характеристические числа: $\lambda_1 = 3/2,\ \lambda_2 = 5/2$; соответствующие им собственные функции: $y_1(t) = ct,\ y_2(t) = \widetilde{c}t^2$, где $c, \widetilde{c}$ — произвольные ненулевые константы.

1.4.4 Задачи к параграфу 1.4

1. Являются ли следующие операторы линейными ограниченными операторами, действующими из пространства $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$:

а) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a, b),\quad Ax = t^4 x\big((a+b)/2\big)$. Здесь $x\big((a+b)/2\big)$ — значение функции $x(t)$ в точке $(a+b)/2$;

б) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a, b),\quad Ax = \int\limits_a^b k(t, s)x(s)\, ds$, где $k(t, s)$ непрерывная функция, заданная на $[a, b] \times [a, b]$;

в) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2(a, b),\quad Ax = \int\limits_a^b k(t, s)x(s)\, ds$, где $k(t, s) \in L_2((a, b) \times (a, b))$;

г) $\mathcal{X} = C^1(a,b),\ \mathcal{Y} = C(a,b), \quad Ax = dx(t)/dt;$

д) $\mathcal{X}$ — множество непрерывно дифференцируемых функций. Норма в $\mathcal{X}$ определяется равенством $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|,\ \mathcal{Y} = C(a,b), \quad Ax = dx(t)/dt;$

е) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = C(a,b), \quad Ax = \int\limits_a^t x(\xi)\,d\xi;$

ж) $\mathcal{X} = C(a,b),\ \mathcal{Y} = C^1(a,b), \quad Ax = \int\limits_a^t x(\xi)d\,\xi;$

з) $\mathcal{X} = C^r(a,b),\ \mathcal{Y} = C(a,b),\ Ax = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i(t)\dfrac{d^i x(t)}{dt^i}$, где $a_i(t)$ — непрерывные функции, заданные на $[a,b]$, r — заданное положительное целое число.

2. Пусть A квадратная матрица размерности $n\times n$ с элементами $a_{i\,j}$. В пространстве n-мерных векторов зададим оператор, который вектору x ставит в соответствие произведение матрицы A на этот вектор. В дальнейшем будем оператор, порожденный матрицей A, обозначать тем же символом A и нормой матрицы называть норму оператора, порожденного этой матрицей.

Доказать, что A — линейный оператор и что в пространствах n-мерных векторов, определенных в задаче 5 из пункта 1.1.5, норма этого оператора вычисляются по формулам:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|, \quad \|A\|_2 \le \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\Big)^{1/2}.$$

3. Пусть $p>1$, $1/p+1/q=1$ и $g(t)$ — фиксированный элемент пространства $L_q(a,b)$. Доказать, что равенство

$$l_g(f) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

определяет линейный ограниченный функционал в пространстве $L_p(a,b)$.

Замечание. Можно доказать, что $\|l_g\| = \|g\|_{L_q}$, более того, справедливо утверждение: для любого линейного ограниченного функционала l, определенного на $L_p(a,b)$ существует такой элемент $g\in L_q(a,b)$, что для любого $f\in L_p(a,b)$ справедливо равенство

$$l(f) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

и $\|l\| = \|g\|_{L_q}$.

4. Пусть A — линейный ограниченный оператор, отображающий линейное нормированное пространство $\mathcal{X}$ в линейное нормированное пространство $\mathcal{Y}$. Множество $Ker_A = \{x : x\in\mathcal{X},\ Ax = \theta_y\}$ называется ***ядром оператора*** A. Доказать, что: а) линейная комбинация точек ядра принадлежит ядру; б) ядро — замкнутое множество.

5. Пусть A — линейный ограниченный оператор, отображающий линейное нормированное пространство $\mathcal{X}$ в себя. Показать, что для любого целого положительного числа n выполняется неравенство $\|A^n\| \le \|A\|^n$.

6. Пусть оператор A переводит точки $x=(x_1,x_2,\dots)$ пространства l_2 в точки $Ax=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\dots)\in l_2$, где λ_n — ограниченная числовая последовательность.

а) Доказать, что при любых λ_n оператор A — линейный ограниченный оператор. Какова его норма?

б) При каких условиях на последовательность λ_n существует обратный оператор A^{-1}? Когда он будет ограничен?

7. Существует ли обратный оператор для оператора $Ax = x'(t)$, действующего из $C^1(a,b)$ в $C(a,b)$?

8. Найти множество значений оператора $Ax = \int\limits_a^t x(\tau)d\,\tau$, действующего в $C(a,b)$. Существует ли для данного оператора обратный? Если существует, то является ли он ограниченным?

9. Дан оператор

$$Ax = \begin{cases} x(0), & t = 0, \\ \frac{1}{t}\int\limits_0^t x(s)\,ds, & t > 0, \end{cases}$$

отображающий $C(0,1)$ в $C(0,1)$. Показать, что существует оператор A^{-1} и найти его.

10. Определить какие из рассмотренных ниже операторов, действующих в l_1, имеют обратный, и найти его в тех случаях, когда он существует:

$$A(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_2, \xi_3, \dots), \qquad A(\xi_1, \xi_2, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots),$$
$$A(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_1, \xi_2 + \xi_1, \xi_3 + \xi_2, \dots), \quad A(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \dots).$$

11. Доказать следующие утверждения относительно существования решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

.

а) При выполнении условия

$$\sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$$

система имеет единственное решение $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_1$ для любой последовательности $b = (b_1, b_2, \dots) \in l_1$.

б) При выполнении условия

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$$

система имеет единственное решение $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_\infty$ для любой последовательности $b = (b_1, b_2, \dots) \in l_\infty$.

в) При условии

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < 1$$

система имеет единственное решение $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ для любой последовательности $b = (b_1, b_2, \dots) \in l_2$.

12. Решить интегральные уравнения с вырожденным ядром:

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos s \varphi(s)\, ds = \sin t,$$

$$\varphi(t) = t + \lambda \int\limits_0^1 (t-s)\varphi(s)\, ds.$$

13. Найти характеристические значения и собственные функции для однородных уравнений

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin t \cos s \varphi(s)\, ds = 0;$$

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_0^1 (2ts - 4t^2)\varphi(s)\, ds = 0;$$

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_0^1 \left(\sqrt{t}s - \sqrt{s}t\right)\varphi(s)\, ds = 0;$$

$$\varphi(t) - \lambda \int\limits_{-1}^1 \left(5ts^3 + 4t^2 s + 3st\right)\varphi(s)\, ds = 0.$$

1.5 ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО. ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1.5.1 Наилучшее приближение и ортогональные системы

В произвольном гильбертовом пространстве может быть решена задача, которая хорошо известна из геометрии трехмерного пространства. Имеется плоскость и точка h, не лежащая в этой плоскости. Требуется найти в плоскости точку, ближайшую к заданной точке. Очевидно, что для нахождения такой точки достаточно из h опустить перпендикуляр на плоскость. При этом расстоянием от точки до плоскости является длина это перпендикуляра. Рассмотрим теперь как решается задача в общем случае.

Пусть $\mathcal{H}$ гильбертово ***пространство***, $\mathcal{H}_1$ подпространство, то есть такое множество из $\mathcal{H}$, что

- линейные комбинации элементов из $\mathcal{H}_1$ принадлежит $\mathcal{H}_1$;
- пределы последовательностей элементов из $\mathcal{H}_1$ лежат в $\mathcal{H}_1$.

Справедлива следующая ***теорема о расстоянии от точки до подпространства***:

Теорема 1.5.1 *Пусть $h \notin \mathcal{H}_1$. Тогда в $\mathcal{H}_1$ существует единственный вектор g, такой что $\|h-g\| = \inf\limits_{g' \in \mathcal{H}_1} \|h-g'\|$. При этом $h - g \perp \mathcal{H}_1$. Вектор g называют ближайшим к вектору h или проекцией h на подпространство.*

Замечание. Из теоремы следует, что любой вектор $h \in \mathcal{H}$ единственным образом может быть представлен в виде $h = f + g$, где $g \in \mathcal{H}_1$, а $f \perp \mathcal{H}_1$. Действительно, для того, чтобы получить такое представление, в качестве g достаточно взять ближайший к h вектор. Для доказательства единственности заметим, что если есть два таких представления $h = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, причем $g_1, g_2 \in \mathcal{H}_1$, а $f_1, f_2 \perp \mathcal{H}_1$, то $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$. Так как $(f_1 - f_2) \perp \mathcal{H}_1$, а $(g_2 - g_1) \in \mathcal{H}_1$, получилось, что один и тот же вектор лежит в $\mathcal{H}_1$ и ортогонален $\mathcal{H}_1$. Значит, он ортогонален сам себе. Такое возможно только в том случае, когда вектор нулевой, то есть $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 = \theta$ или $f_1 = f_2$, $g_1 = g_2$.

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении ближайшего вектора. Из замечания, сделанного выше, следует, что для того, чтобы найти в подпространстве $\mathcal{H}_1$ ближайший к h вектор g, достаточно найти в $\mathcal{H}_1$ такой вектор g, что $h - g \perp \mathcal{H}_1$.

Пусть $\mathcal{H}_1$ — конечномерное подпространство, $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — базисные вектора в нем. Тогда ближайший к h вектор g представим в виде линейной комбинации базисных векторов

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i. \tag{1.50}$$

Вектор $h - g$ должен быть ортогонален $\mathcal{H}_1$. Следовательно, потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$(h - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i, g_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (g_i, g_j) = (h, g_j). \tag{1.51}$$

Согласно теореме о расстоянии от точки до подпространства, система (1.51) всегда имеет единственное решение (так как ближайший вектор всегда существует) и, значит, определитель матрицы этой системы всегда отличен от нуля. Решив эту систему относительно α_i и подставив их в (1.50) получим g.

Проще всего система (1.51) решается, если вектора базиса таковы, что $\|g_i\| = 1$ и $(g_i, g_j) = 0$ при $i \neq j$. Такие вектора называют ***ортонормированными.*** Тогда система (1.51) примет вид $\alpha_i = (h, g_i)$ и значит

$$g = \sum_{i=1}^{n} (h, g_i) g_i. \tag{1.52}$$

Коэффициенты (h, g_i) в формуле (1.52) называются ***коэффициентами Фурье.***

В связи с простотой нахождения проекции в случае ортонормированного базиса встает вопрос о том, существует ли такой базис и если да, то как его отыскать. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1.5.2 *Пусть $g_1, g_2 \ldots$ линейно независимые вектора. Тогда существуют вектора $e_1, e_2, \ldots$ такие, что $e_i \perp e_j$ при $i \neq j$, $\|e_i\| = 1$. Для любого целого числа n выполняется равенство $L(g_1, \ldots, g_n) = L(e_1, \ldots, e_n)$, где $L(g_1, \ldots, g_n)$ — множество всевозможных линейных комбинаций векторов $g_1, \ldots, g_n$.*

Доказательство. Построим вектора $e_1, e_2, \ldots$. Метод их построения носит название ***процесс ортогонализации Шмидта***.

Заметим, что $g_1 \neq \theta$, так как вектора $g_1, g_2 \ldots$ линейно независимы. Поэтому можно определить $e_1 = g_1/\|g_1\|$.

Предположим, что $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ построены и опишем процесс нахождения e_n. Положим

$$e'_n = g_n - \sum_{i=1}^{n-1} (g_n, e_i) e_i.$$

В силу того, что $\sum\limits_{i=1}^{n-1} (g_n, e_i) e_i$ — проекция вектора g_n на $L(e_1, \ldots, e_{n-1})$ получаем, что $e'_n \perp L(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Кроме того $e'_n \neq \theta$, ибо в противном случае вектор g_n линейно выражается через $g_1, \ldots, g_{n-1}$, а это противоречит линейной независимости векторов $g_1, g_2 \ldots$. Тогда $e_n = e'_n/\|e'_n\|$ — искомый вектор.

Из построения следует, что $L(g_1, \ldots, g_n) = L(e_1, \ldots, e_n)$, так как g_n линейно выражается через $e_1, \ldots, e_n$, а e_n через $g_1, \ldots, g_n$. Теорема доказана.

Теорема о расстоянии от точки до подпространства дает возможность решить следующую задачу вычислительной математики: дана функция $h(x)$ и линейно независимые функции $g_1(x), \ldots, g_n(x)$. Найти такую функцию $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x)$, чтобы норма $\|h(x) - g(x)\|$ была минимальной (задача аппроксимации). Согласно теореме о расстоянии от точки до подпространства эта задача всегда однозначно разрешима если, например, в качестве нормы выбрать норму пространства L_2. Часто функции $g_1, \ldots, g_n$ выбираются вида $1, x, x^2, \ldots x^n$. Тогда $g(x)$ — полином степени не выше n, то есть ищется полином, лучше всего приближающий заданную функцию. Для нахождения полинома $g(x)$, как отмечалось выше, удобно выбирать в качестве базиса ортогональные полиномы. Например, в случае пространства $L_2(-1, 1)$ такими полиномами являются ***полиномы Лежандра***:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

норма которых равна $\|P_n\| = \sqrt{2/(2n+1)}$ (см. примеры 1-3 из пункта 1.5.5).

1.5.2 Ряды Фурье

В случае бесконечномерного гильбертова пространства возникает ряд вопросов. Как ведут себя суммы в формуле (1.52) и коэффициенты Фурье с ростом n? Если при $n \to \infty$ существует предел, то как этот предел связан с h? В этом параграфе получим ответы на эти вопросы.

Пусть $\mathcal{H}$ — бесконечномерное гильбертово пространство. Это означает, что для любого натурального числа n в нем существует n линейно независимых векторов. Применив к векторам процесс ортогонализации, получим последовательность ортонормированных векторов $e_1, e_2, \ldots$. Пусть $h \in \mathcal{H}$. Тогда для любого числа n вектор h можно представить в виде

$$h = f_n + \sum_{i=1}^{n} (h, e_i) e_i, \tag{1.53}$$

причем $f_n \perp e_i \;\; i = 1, \dots, n$. Тогда по теореме Пифагора

$$\|h\|^2 = \|f_n\|^2 + \|\sum_{i=1}^{n}(h, e_i)e_i\|^2 = \|f_n\|^2 + \sum_{i=1}^{n}(h, e_i)^2. \tag{1.54}$$

Следовательно, для любого n справедливо неравенство $\|h\|^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{n}(h, e_i)^2$. Если перейти в нем к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство

$$\|h\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty}(h, e_i)^2,$$

которое называется ***неравенство Бесселя***.

Пусть $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(h, e_i)e_i$. Последовательность таких сумм фундаментальна, так как при $n > m$ имеем

$$\|S_n - S_m\|^2 = \|\sum_{i=m+1}^{n}(h, e_i)e_i\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n}(h, e_i)^2. \tag{1.55}$$

В силу неравенства Бесселя числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(h, e_i)^2$ сходится. Поэтому из признака сходимости числовых рядов следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что при любых $n, m > N(\varepsilon)$ выражение, стоящее в правой части равенства (1.55), меньше ε, что и означает фундаментальность. Так как пространство полное, последовательность S_n сходится. Если S — предел этой последовательности, то естественно ввести обозначение

$$S = \sum_{i=1}^{\infty}(h, e_i)e_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(h, e_i)e_i.$$

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(h, e_i)e_i$ называется ***рядом Фурье*** вектора h, а число (h, e_i), как уже отмечалось, — ***коэффициентом ряда Фурье***. Еще раз подчеркнем, что, как было установлено в предыдущем пункте, из всевозможных линейных комбинаций векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ лучше всего приближает вектор h отрезок ряда Фурье.

Ответим теперь на вопрос, как связаны вектор h и сумма его ряда Фурье, совпадают ли они. Из (1.53) следует, что $h = S$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \theta$. Тогда из (1.54) имеем, что вектор равен сумме своего ряда Фурье тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\|h\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(h, e_i)^2.$$

Это равенство называется ***равенством Парсеваля***.

Определение 1.5.1 *Система векторов $e_1, e_2, \dots,$ для которой при любом векторе $h \in \mathcal{H}$ выполнено равенство Парсеваля, называется* ***замкнутой***.

Из приведенных выше рассуждений следует, что для любого вектора $h \in \mathcal{H}$ выполнено равенство Парсеваля тогда и только тогда, когда этот вектор равен сумме своего ряда Фурье.

Определение 1.5.2 *Система векторов называется* ***полной****, если в пространстве не существует отличного от нулевого вектора, который был бы ортогонален всем векторам системы.*

Теорема 1.5.3 *Для того, чтобы система была замкнутой необходимо и достаточно, чтобы она была полной.*

Доказательство. Пусть система замкнута и в то же время существует отличный от нулевого вектор h, который ортогонален всем векторам системы. Тогда из равенства Парсеваля следует, что $\|h\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(h, e_i)^2 = 0$. Отсюда следует, что $h = \theta$, а это противоречит предположению.

Обратно, пусть система $\{e_i\}$ полна, то есть для любого $f \in \mathcal{H}$ из того, что $f \perp e_i$ следует, что $f = \theta$. Положим $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(h, e_i)e_i$, где h — произвольный вектор и $f = S - h$. Тогда для произвольного j имеем

$$(f, e_j) = (S, e_j) - (h, e_j) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(h, e_i)e_i, e_j\right) - (h, e_j) = (h, e_j) - (h, e_j) = 0.$$

Из предположения следует при этом, что $f = \theta$, значит $h = S$, что означает, что система векторов замкнута.

В пространстве $L_2(-1, 1)$ замкнутые системы векторов образуют полиномы Лежандра, тригонометрические функции $\{1,\ \cos(\pi nx),\ sin(\pi nx),\ n = 1, 2, \dots\}$.

1.5.3 Сопряженные и самосопряженные операторы

Перейдем теперь к изучению тех дополнительных свойств, которые приобретают операторы, действующие в гильбертовом пространстве.

Пусть A — линейный ограниченный оператор в $\mathcal{H}$.

Определение 1.5.3 *Оператор A^* называется* ***сопряженным*** *к оператору A, если при любых $f, g \in \mathcal{H}$ выполняется равенство $(Af, g) = (f, A^*g)$.*

Доказано, что для любого линейного ограниченного оператора A существует единственный сопряженный оператор A^*, причем $\|A\| = \|A^*\|$.

Легко проверить следующие свойства сопряженных операторов:

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^*A^*.$$

Например, для доказательства второго свойства имеем:

$$((AB)f, g) = (A(Bf), g) = (Bf, A^*g) = (f, B^*(A^*g)) = (f, (B^*A^*)g).$$

Определение 1.5.4 *Оператор A называется* ***самосопряженным****, если $A = A^*$, то есть при любых $f, g \in \mathcal{H}$ выполняется равенство $(Af, g) = (f, Ag)$.*

Например, оператор $Af = xf(x)$, действующий в $L_2(a, b)$ — самосопряженный потому, что

$$(Af, g) = \int\limits_a^b (xf(x))\, g(x)\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, (xg(x))\, dx = (f, Ag).$$

Если в $L_2(a,b)$ определить оператор $Af = \int\limits_a^b k(x,s)f(s)\,ds$, где $k(x,t)$ — фиксированная функция из $L_2\left((a,b)\times(a,b)\right)$, то

$$(Af,g) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b k(x,s)f(s)\,ds\right) g(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b f(s)\left(\int\limits_a^b k(x,s)g(x)\,dx\right) ds = (f, A^*g).$$

Отсюда следует, что $A^*f = \int\limits_a^b k(s,x)f(s)\,ds$. Поэтому $A = A^*$, если $k(x,s) = k(s,x)$.

Определение 1.5.5 *Если оператор A определен на линейном подмножестве $\mathcal{H}_1$ из $\mathcal{H}$, линеен и при любых $f,g\in\mathcal{H}_1$ выполняется равенство $(Af,g) = (f,Ag)$, то оператор называется* ***симметричным****.*

Пример: $\mathcal{H}_1 \subset L_2(a,b)$ — подмножество дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих на концах отрезка условиям

$$\alpha_1 f'(a) - \alpha_2 f(a) = 0,\ \ \beta_1 f'(b) + \beta_2 f(b) = 0,$$

где α_i, β_i $(i=1,2)$ — неотрицательные числа, причем $\alpha_1+\alpha_2 > 0,\ \beta_1+\beta_2 > 0$. Зададим оператор A, который назовем ***оператором Штурма-Лиувилля***, соотношением

$$Af = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df}{dx}\right) + q(x)f(x),\ \ p > 0,\ \ q \geq 0.$$

После интегрирования по частям имеем (предполагается для определенности, что $\alpha_1,\ \beta_1 \neq 0$):

$$(Af,g) = \int\limits_a^b p\frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}\,dx + \int\limits_a^b qfg\,dx - \left(p\frac{df}{dx}g\right)\Bigg|_a^b =$$

$$= \int\limits_a^b p\frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}\,dx + \int\limits_a^b qfg\,dx + p(b)f(b)g(b)\frac{\beta_2}{\beta_1} + p(a)f(a)g(a)\frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \quad (1.56)$$

В правую часть равенства (1.56) функции f и g входят симметрично, значит ничего не изменится, если их поменять местами, откуда следует, что $(Af,g) = (Ag,f)$. Аналогично рассматривается случай, когда α_1 или β_1 равны нулю. Заметим также, что из (1.56) следует неравенство $(Af,f) \geq 0$.

1.5.4 Собственные числа и собственные вектора операторов

Перейдем к изучению важного для многих приложений понятию собственных чисел и собственных векторов операторов. Отметим, что большинство сформулированных ниже утверждений справедливы для линейных операторов, действующих в нормированных пространствах.

Определение 1.5.6 *Число λ называется* ***собственным числом*** *линейного оператора A, если существует такой ненулевой вектор h, что $Ah = \lambda h$. При этом вектор h называют* ***собственным вектором, соответствующим собственному числу*** *λ.*

Рассмотрим некоторые свойства собственных чисел и собственных векторов.

Лемма 1.5.1 *Пусть A — линейный оператор и $\mathcal{L}$ — множество, состоящее из собственных векторов оператора A соответствующих числу λ и нулевого вектора. Тогда множество $\mathcal{L}$ — линейное. Если, кроме того, оператор A ограничен, то $\mathcal{L}$ — подпространство.*

Доказательство. Пусть $h_1, h_2 \in \mathcal{L}$. Требуется доказать, что $\alpha h_1 + \beta h_2 \in \mathcal{L}$.

$$A(\alpha h_1 + \beta h_2) = \alpha A h_1 + \beta A h_2 = \alpha \lambda h_1 + \beta \lambda h_2 = \lambda(\alpha h_1 + \beta h_2),$$

значит $\alpha h_1 + \beta h_2 \in \mathcal{L}$.

Пусть оператор ограничен. Для доказательства того, что $\mathcal{L}$ подпространство достаточно проверить, что если $h = \lim\limits_{n\to\infty} h_n$ и $h_n \in \mathcal{L}$, то $h \in \mathcal{L}$. Из равенств

$$Ah = \lim_{n\to\infty} Ah_n = \lim_{n\to\infty} \lambda h_n = \lambda h$$

следует, что вектор h собственный или нулевой. По определению это означает, что он лежит в $\mathcal{L}$.

Лемма 1.5.2 *Пусть $\mathcal{L}$ — множество собственных векторов линейного оператора A, соответствующих числу λ, $\mathcal{M}$ — множество собственных векторов оператора A^* соответствующих числу μ, причем $\lambda \neq \mu$. Тогда $\mathcal{L} \perp \mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $Af = \lambda f,\ A^* g = \mu g$. Тогда

$$\mu(f,g) = (f, \mu g) = (f, A^* g) = (Af, g) = (\lambda f, g) = \lambda(f,g).$$

Значит $(\mu - \lambda)(f,g) = 0$, откуда следует, что $(f,g) = 0$.

Из леммы следует, что собственные вектора, соответствующие различным собственным числам самосопряженного оператора, будут ортогональны.

Аналогично показывается, что это же утверждение справедливо для симметричного оператора, в частности, собственные функции оператора Штурма-Лиувилля, соответствующие различным собственным числам, будут ортогональны.

Лемма 1.5.3 *Если λ — собственное число линейного, ограниченного оператора A, то $|\lambda| \leq \|A\|$.*

Доказательство. Пусть $Af = \lambda f,\ f \neq \theta$. Тогда

$$|\lambda| \|f\| = \|\lambda f\| = \|Af\| \leq \|A\| \|f\|.$$

Отсюда следует, что $|\lambda| \leq \|A\|$, так как $\|f\| > 0$.

Лемма 1.5.4 *Пусть λ — собственное число линейного оператора A. Если существует такое число α, что для любого h из $\mathcal{H}_1$, где $\mathcal{H}_1$ — область определения оператора A, выполняется неравенство $(Ah, h) \geq \alpha(h,h)$ (или $(Ah,h) \leq \alpha(h,h)$), то $\lambda \geq \alpha$ (или $\lambda \leq \alpha$).*

Доказательство. Пусть для определенности $(Ah, h) \geq \alpha(h, h)$. Выбирая в качестве h собственный вектор, который соответствует числу λ, получим

$$\lambda(h, h) = (Ah, h) \geq \alpha(h, h).$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

Из этой леммы, в частности, следует, что собственные числа оператора Штурма-Лиувилля неотрицательны.

Не каждый оператор имеет собственные числа. Так, например, действующий в $L_2(0, 1)$, оператор $Af = xf(x)$ не имеет собственных чисел, так как если бы существовало собственное число λ, должно было бы выполняться равенство $xf(x) = \lambda f(x)$. Отсюда имеем $x = \lambda$, что невозможно.

Следует отметить, что вопрос о существовании собственных чисел тесно связан с вопросом об однозначной разрешимости уравнения

$$(A - \lambda I)h = \theta \tag{1.57}$$

относительно h. Это уравнение (A — линейный оператор) всегда имеет нулевое решение. Если при каких-то λ есть ненулевое решение, то это означает, что λ — собственное число. В этом случае неоднородное уравнение

$$(A - \lambda I)h = f \tag{1.58}$$

если имеет решение, то оно не единственно. Два решения неоднородного уравнения отличаются на слагаемое, которое является собственным вектором, соответствующим числу λ.

Если же уравнение (1.57) имеет только нулевое решение, то существует обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, а число λ не является собственным. При этом возможны две ситуации: обратный оператор либо ограничен, либо неограничен. В том случае, когда $|\lambda| > \|A\|$ обратный оператор ограничен, причем неоднородное уравнение (1.58) имеет единственное решение при любом $f \in \mathcal{H}$. Доказательство этого утверждения следует из теоремы 1.4.3, примененной к уравнению, получившемуся из уравнения (1.58) делением на $-\lambda$. Таким образом, обратный оператор может оказаться неограниченным только в том случае, когда $|\lambda| \leq \|A\|$. Например, пусть $Af = xf(x)$, оператор, действующий в $L_2(0, 1)$. Как уже отмечалось, у этого оператора нет собственных чисел, и, значит, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует. Однако при $0 \leq \lambda \leq 1$ он неограничен. Действительно, пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} (\lambda - x)^{1/2+1/2n}, & 0 \leq x \leq \lambda, \\ (x - \lambda)^{1/2+1/2n}, & \lambda \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\|f_n\|^2 = \int_0^\lambda (\lambda - x)^{1+1/n}\, dx + \int_\lambda^1 (x - \lambda)^{1+1/n}\, dx = \frac{n}{2n+1}\big((1-\lambda)^{2+1/n} + \lambda^{2+1/n}\big),$$

$$(A - \lambda I)^{-1} f_n = \frac{f_n}{x - \lambda} = \begin{cases} -(\lambda - x)^{-1/2+1/2n}, & 0 \leq x \leq \lambda, \\ (x - \lambda)^{-1/2+1/2n}, & \lambda \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\|(A - \lambda I)^{-1} f_n\|^2 = \int_0^\lambda (\lambda - x)^{-1+1/n}\, dx + \int_\lambda^1 (x - \lambda)^{-1+1/n}\, dx = n\big((1-\lambda)^{1/n} + \lambda^{1/n}\big).$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\|(A-\lambda I)^{-1}f_n\|^2}{\|f_n\|^2} \to \infty$ при $n \to \infty$, что означает неограниченность оператора.

Если в пространстве $\mathcal{H}$ существует базис $e_1, e_2, \dots$, состоящий из собственных векторов линейного ограниченного оператора A, соответствующих собственным числам λ_i и уравнение (1.58) имеет решение, то его можно выразить следующим образом. Разложим решение h и правую часть f по базису. В результате получим $h = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \chi_i e_i,\ f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_i$. Подставляя эти выражения в (1.58), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_i = f = (A-\lambda I)h = (A-\lambda I)\sum_{i=1}^{\infty} \chi_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i (A-\lambda I)e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(\lambda_i - \lambda)e_i.$$

Отсюда, учитывая линейную независимость базисных векторов, имеем $\gamma_i = (\lambda_i - \lambda)\chi_i$ или $\chi_i = \dfrac{\gamma_i}{\lambda_i - \lambda}$. Таким образом, решение h имеет вид

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{\lambda_i - \lambda} e_i.$$

Полученная формула хорошо объясняет явление резонанса. Если λ близко к собственному числу λ_k, то при $\gamma_k \neq 0$ соответствующее слагаемое в формуле для h велико, причем оно неограниченно растет с приближением λ к λ_k.

1.5.5 Примеры решения задач к параграфу 1.5

Пример 1. Показать, что многочлен

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

(многочлен Лежандра) ортогонален x^k $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ в $L_2(-1,1)$.

Решение. Необходимо показать, что $(L_n, x^k) = 0$. Учитывая определение скалярного произведения в пространстве $L_2(-1,1)$, имеем

$$2^n n! (L_n, x^k) = \int\limits_{-1}^{1} x^k \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\, dx.$$

Для вычисления интеграла применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\, dx = x^k \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\bigg|_{-1}^{1} - k\int\limits_{-1}^{1} x^{k-1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\, dx.$$

Первое слагаемое, стоящее в правой части равенства, равно нулю потому, что при $(n-1)-$кратном дифференцировании функции $(x^2-1)^n$ останется множитель x^2-1, который обратится в ноль при подстановке пределов. Полученный интеграл снова проинтегрируем по частям, и так далее. В результате после интегрирования по частям k раз получим

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\, dx = (-1)^k k! \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}(x^2-1)^n}{dx^{n-k}}\, dx = (-1)^k k! \frac{d^{n-k-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}}\bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

Пример 2. Доказать, что многочлены Лежандра образуют в $L_2(-1,1)$ ортогональную систему.

Решение. Из предыдущего примера следует, что многочлен $L_n(x)$ ортогонален функциям $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$. Из свойств ортогональности следует, что $L_n(x)$ ортогонален произвольной линейной комбинации этих функций, то есть любому многочлену степени меньше чем n, в частности, $L_m(x)$ при $m < n$.

Пример 3. Найти норму многочлена Лежандра.

Решение. Для вычисления нормы многочлена Лежандра заметим, что его можно представить в виде

$$L_n(x) = \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{2^n n!}x^n + P_{n-1}(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}x^n + P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ многочлен степени не выше чем $n-1$. По определению

$$\begin{aligned} \|L_n\|^2 = (L_n, L_n) = \left(L_n, \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}x^n + P_{n-1}\right) = \\ = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}(L_n, x^n) + (L_n, P_{n-1}) = \frac{(2n)!}{(2^n)^2 (n!)^3}\left(\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, x^n\right) + (L_n, P_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.59}$$

Из утверждения, доказанного в примере 2, следует, что последнее слагаемое, стоящее в правой части формулы (1.59), равно нулю. Следовательно, необходимо вычислить величину

$$\left(\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, x^n\right) = \int_{-1}^{1} x^n \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\, dx.$$

Для вычисления интеграла n раз воспользуемся формулой интегрирования по частям (см. пример 1). В результате получим

$$\left(\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, x^n\right) = (-1)^n n! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\, dx = n! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx.$$

Из (1.59) следует, что

$$\|L_n\|^2 = \frac{(2n)!}{(2^n)^2 (n!)^2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx = \frac{(2n)!}{(2^n)^2 (n!)^2} I_n. \tag{1.60}$$

Итак, осталось вычислить I_n. Для этого снова воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx = 2n \int_{-1}^{1} x^2 (1-x^2)^{n-1}\, dx = 2n(I_{n-1} - I_n).$$

Отсюда следует рекуррентное соотношение $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$, из которого получаем

$$I_n = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 1} I_0 = \frac{(2^n)^2 (n!)^2}{(2n+1)!} I_0.$$

Подставляя полученное для I_n выражение в (1.60) и учитывая, что $I_0 = 2$, получим

$$\|L_n\|^2 = \frac{(2n)!}{(2^n)^2(n!)^2}\frac{(2^n)^2(n!)^2}{(2n+1)!}2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом $\|L_n\| = \sqrt{2/(2n+1)}$.

Пример 4. Пусть A — линейный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}$ и существует A^{-1}. Доказать, что собственные вектора операторов A и A^{-1} совпадают. Как связаны между собой соответствующие собственные числа этих операторов?

Решение. Пусть e — собственный вектор оператора A, соответствующий числу λ. Тогда $Ae = \lambda e$. Подействуем на обе части этого равенства оператором A^{-1}. Учитывая линейность обратного оператора и то, что $A^{-1}A$ — тождественный оператор, получим $e = \lambda A^{-1}e$. Полученное равенство означает, что e — собственный вектор оператора A^{-1} и λ^{-1} — собственное число. Таким образом, показано, что всякий собственный вектор оператора A является собственным вектором оператора A^{-1}. Аналогично показывается, что каждый собственный вектор оператора A^{-1} является собственным вектором оператора A.

Пример 5. В пространстве $C(-1,1)$ найти собственные функции и собственные числа оператора $Af = f(-x)$.

Решение. По определению собственного числа должно выполняться равенство $f(-x) = \lambda f(x)$. Заменяя в этом равенстве x на $-x$, получим $f(x) = \lambda f(-x)$. Подставляя сюда из первого равенства выражение для $f(-x)$, получим $f(x) = \lambda^2 f(x)$. Сокращая на $f(x)$ (из определения собственного числа следует, что функция $f(x)$ тождественно не равна нулю), получим $\lambda^2 = 1$. Значит $\lambda = \pm 1$. При $\lambda = 1$ имеем $f(x) = f(-x)$, то есть $f(x)$ — любая ненулевая четная функция. При $\lambda = -1$ получаем $f(x) = -f(-x)$, то есть $f(x)$ — любая ненулевая нечетная функция.

1.5.6 Задачи к параграфу 1.5

1. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $\mathcal{H}_1$ — подпространство. Доказать, что любой вектор $h \in \mathcal{H}$ однозначно представим в виде $h = g + f$, где $g \in \mathcal{H}_1,\ f \perp \mathcal{H}_1$.

2. Применив процесс ортогонализации к функциям $1, x, x^2, x^3, \dots$, найти 4 многочлена ортогональных в $L_2(-1,1)$.

3. Найти в пространстве $L_2(-1,1)$ многочлен степени не выше 2, который был бы ближайшим к функции $y = e^x$.

4. Доказать, что если n — целое число, то
а) функции $Z_n(X) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$ являются многочленами степени n (***полиномы Лаггера***);
б) $Z_n(x) \perp x^k$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ в пространстве $L_{2,e^{-x}}(0,\infty)$;
в) $Z_n(x)$ образуют ортогональную систему в $L_{2,e^{-x}}(0,\infty)$.

5. Показать, что если n — целое число, то
а) функции

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

являются многочленами степени n (***полиномы Эрмита***);
б) $H_n(x) \perp x^k$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ в пространстве $L_{2,e^{-x^2}}(-\infty,\infty)$;

в) $H_n(x)$ образуют ортогональную систему в $L_{2,e^{-x^2}}(-\infty,\infty)$.

6. Найти операторы, сопряженные к следующим операторам:
а) $Ax = (\xi_2, \xi_3, \dots)$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$;
б) $Af = \int\limits_a^b e^{xy} \sin y f(y)\, dy,\ \ f \in L_2(a,b)$;
в) $A_+ f = 0.5(f(x) + f(-x)), f \in L_2(-1,1)$;
г) $A_- f = 0.5(f(x) - f(-x)), f \in L_2(-1,1)$;
д) $Af = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le 0.5, \\ 0, & 0.5 < x \le 1 \end{cases},\ \ f \in L_2(0,1)$;
е)

$$Ax = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,\xi_j,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\,\xi_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\,\xi_j\Big),$$

$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n$, a_{ij} — заданные числа;
ж) $Af = \int\limits_0^x f(\xi)\, d\xi,\ \ \ f \in L_2(0,1)$.

7. Пусть A — самосопряженный оператор и существует A^{-1}. Доказать, что A^{-1} также самосопряженный.

8. Имеет ли оператор $Af = \int\limits_0^x f(z)\, dz$, действующий в пространстве $C(0,1)$, собственные числа?

9. Пусть A — оператор, который определен в задаче 6а. Показать, что любое число, модуль которого меньше 1, является собственным числом этого оператора, а сопряженный оператор A^* не имеет собственных чисел.

10. Доказать, что оператор, определенный в задаче 6е, и его сопряженный имеют одинаковые собственные числа.

11. Пусть A и B — линейные операторы, действующие в линейном пространстве $\mathcal{X}$. Показать, что любое, отличное от нуля собственное число оператора AB является собственным числом оператора BA и наоборот.

Выбирая в качестве A оператор, определенный в задаче 6а, и $B = A^*$, убедиться, что множества всех собственных чисел операторов AB и BA могут не совпадать.

12. Пусть $\mathcal{H}_1$ — подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Оператор P определен на $\mathcal{H}$ следующим образом : $Ph = g$, где $g \in \mathcal{H}_1,\ h - g \perp \mathcal{H}_1$. Доказать, что $P^2 = P,\ P^* = P$. Найти собственные числа оператора P.

Оператор P называется ***оператором проектирования на подпространство*** $\mathcal{H}_1$.

2 УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2.1 ВВОДНАЯ ЧАСТЬ

2.1.1 Примеры уравнений с частными производными

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными. Так, например:

1) при изучении различных видов волн — упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений приходят к ***волновому уравнению***:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

где C — скорость распространения волны в данной среде, которую будем считать постоянной, $u = u(t, x, y, z)$ — неизвестная функция, подлежащая определению;

2) процессы распределения тепла в однородном изотропном (то есть свойства вещества во всех направлениях одинаковы) теле и явление диффузии описываются ***уравнением теплопроводности***:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);$$

3) при рассмотрении установившегося теплового состояния в однородном изотропном теле, изучении потенциалов поля тяготения или стационарных электрических полей получают ***уравнение Пуассона***:

$$\Delta u = f(x, y, z) \qquad (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \ ;$$

4) прохождение электрического тока по проводу характеризуется силой тока I и напряжением V, которые являются функцией положения точки x и времени t. Если R, L, C, G — заданные постоянные коэффициенты сопротивления, самоиндукции, емкости и утечки, рассчитанные на единицу длины, то приходят к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial x} + C\dfrac{\partial V}{\partial t} + GV = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial x} + L\dfrac{\partial I}{\partial t} + RI = 0. \end{cases}$$

Эта система называется ***системой телеграфных уравнений***;

5) движение сжимаемой жидкости или газа при постоянной температуре описывается системой уравнений газовой динамики (полагают, что вязкость и теплопроводность газа равны 0, то есть отсутствует внутреннее трение и частицы жидкости или газа теплоизолированы одна от другой)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_x}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} - X = 0 \ , \\
\dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_y}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} - Y = 0 \ , \\
\dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} - Z = 0 \ , \\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0.
\end{cases}
$$

Здесь компоненты скорости движения жидкости (v_x, v_y, v_z) и плотность жидкости ρ — искомые функции, а (X, Y, Z) — заданные компоненты внешних сил, действующих в жидкости. При этом еще задается связь между давлением P и плотностью, так называемое уравнение состояния.

В общем случае дифференциальное уравнение в частных производных можно сформулировать следующим образом. Пусть Ω область n-мерного евклидового пространства R^n, $n \geq 2$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Пусть, далее $F \equiv F(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots)$ — заданная функция точек x и переменных $p_{i_1 \ldots i_n}$ с неотрицательными целочисленными индексами $i_1, \ldots, i_n$, причем $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = k,\ k = 0, \ldots, m,\ m \geq 1$, причем по крайней мере одна из частных производных $\dfrac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}}$ для набора индексов, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = m$, отлична от нуля. Тогда уравнение

$$
F\Big(x, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \ldots\Big) = 0, \quad x \in \Omega \tag{2.1}
$$

называется ***дифференциальным уравнением с частными производными порядка*** m относительно неизвестной функции u. Левая часть равенства (2.1) представляет собой дифференциальный оператор с частными производными, действующий на гладкую функцию u.

Из сказанного выше следует, что ***порядком уравнения*** называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

В том случае, когда $F, p_{i_1 \ldots i_n}, u$ — N-мерные вектора, векторное равенство (2.1) называется ***системой*** N ***дифференциальных уравнений с частными производными порядка*** m относительно неизвестных функции $u_1, \ldots, u_N$.

Определение 2.1.1 *Функция (набор функций), которая при подстановке в уравнение (систему уравнений) обращает его в тождество, называется* ***решением уравнения*** *(системы уравнений).*

В том случае, когда F линейно зависит от функции u и ее производных, уравнение называется ***линейным***. В общем виде линейное уравнение может быть записано в виде $Lu = f$, где L — линейный оператор. Линейное уравнение называют ***однородным***, если $f \equiv 0$ и ***неоднородным*** в противном случае.

В перечисленных примерах уравнения теплопроводности, Пуассона и волновое — линейные уравнения второго порядка, система телеграфных уравнений — линейная система первого порядка.

Если дифференциальное уравнение не является линейным, его называют ***нелинейным***.

Среди нелинейных уравнений выделяют квазилинейные уравнения.

Определение 2.1.2 *Уравнение или систему уравнений называют* ***квазилинейной****, если она линейна относительно всех старших производных от неизвестных функций.*

Система уравнений газовой динамики — это пример квазилинейной системы уравнений первого порядка.

Перечисленные выше уравнения (кроме системы уравнений движения сжимаемой жидкости), а также некоторые другие уравнения будут рассматриваться в этой части пособия. Изучаемые примеры не будут случайными с точки зрения математической теории. Исследование уравнений математической физики привело к тому, что появилась классификация уравнений, согласно которой выбранные нами уравнения и системы являются типичными представителями наиболее важных классов уравнений.

Мы будем интересоваться такими вопросами, как корректность постановки задач (строгое определение понятия корректности дадим ниже), то есть вопросами, как надо поставить задачу, чтобы у этой задачи существовало единственное решение, которое удовлетворяет еще требованию устойчивости. Кроме того, нас будут интересовать вопросы построения решений поставленных задач.

Существует большое число учебников и задачников по уравнениям математической физики, выпущенных в разные годы. Как правило, все они рассчитаны на изучение предмета в существенно большем объеме. Поэтому желающих познакомиться более подробно с этим разделом математики отсылаем к учебникам и задачникам, список которых приведен в конце пособия.

2.1.2 Канонический вид и классификация уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

Как уже отмечалось выше, существует определенная классификация уравнений с частными производными. Для каждого класса уравнений определяется свой набор корректно поставленных задач. Поэтому от умения правильно определить тип уравнения зависит успех его дальнейшего использования при решении прикладных задач. Классификация для уравнений с частными производными второго порядка тесно связана с преобразованием уравнений к определенному виду, называемому каноническим. Уравнение, записанное в каноническом виде, как правило, проще исследовать, в некоторых случаях они поддаются аналитическому решению. Вопросам приведения уравнений к каноническому виду и классификации уравнений посвящен этот параграф.

Линейное уравнение второго порядка можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = f, \tag{2.2}$$

где $A_{ij} = A_{ji}, A_i, a, f$ — заданные функции, вообще говоря, зависящие от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Оно называется ***однородным***, если $f = 0$, и ***неоднородным*** в противном случае.

Поставим вопрос: как следует совершить невырожденную замену независимых переменных, чтобы в новых переменных уравнение (2.2) имело наиболее простой вид. Точнее, упрощать будем только ту часть уравнения, которая содержит вторые производные неизвестной функции. Для ответа на этот вопрос изучим сначала, как изменяются коэффициенты при произвольной замене переменных.

Введем вместо переменных $x_1, \dots, x_n$ новые переменные

$$y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n = y_n(x_1, \dots, x_n).$$

Допустим, что эти функции обладают вторыми производными и замена переменных невырожденная в окрестности некоторой точки $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, то есть в окрестности этой точки якобиан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & & \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Тогда, если

$$v(y_1, \dots, y_n) = v\big(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)\big) = u(x_1, \dots, x_n)\ ,$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\ , \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Подставляя полученные выражения в (2.2) и меняя порядок суммирования, имеем:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\Big) + \\ + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\Big) + av = f. \quad (2.3)$$

Обозначим через $\overline{A}_{kl}$ коэффициенты при вторых производных в уравнении (2.3), а через $\overline{A}_k$ коэффициенты при первых производных, то есть

$$\overline{A}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}, \qquad \overline{A}_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i}. \quad (2.4)$$

В случае, когда функции зависят от n независимых переменных, в каждой фиксированной точке пространства можно подобрать свое преобразование так, чтобы уравнение не содержало смешанных производных. Покажем, что если $n = 2$, можно так подобрать преобразование, что уравнение приведется в некоторой области к специальному виду, называемому каноническим.

Рассмотрим уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + au = f, \quad (2.5)$$

где A, B, C, D, E, a, f — функции от x, y, причем одновременно A, B, C в ноль не обращаются. Этому уравнению соответствует квадратичная форма $Ap_1^2 + 2Bp_1p_2 + Cp_2^2$. В курсе аналитической геометрии такие формы путем замены переменных упрощались, они приводились к, так называемому, каноническому виду и им соответствовали кривые второго порядка:

если $B^2 - AC > 0$ — гипербола;

если $B^2 - AC = 0$ — парабола;

если $B^2 - AC < 0$ — эллипс.

Покажем, что вид уравнения (2.5) можно упростить. Полученный вид будем называть ***каноническим*** и он зависит от знака выражения $B^2 - AC$. По аналогии с аналитической геометрией при $B^2-AC > 0$ уравнение будем называть ***гиперболическим***, при $B^2-AC = 0$ — ***параболическим*** и при $B^2-AC < 0$ — ***эллиптическим.***

Введем переменные $\xi = \xi(x, y),\ \eta = \eta(x, y)$, причем так, чтобы замена была невырожденной, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

в окрестности некоторой фиксированной точки (x_0, y_0). В новых переменных уравнение перепишется в виде

$$\overline{A}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\overline{B}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \overline{D}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \overline{E}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \overline{a}v = \overline{f}\ , \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\ , \\
\overline{C} &= A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\ , \\
\overline{B} &= A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\ , \\
\overline{D} &= A\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + D\frac{\partial \xi}{\partial x} + E\frac{\partial \xi}{\partial y}\ , \\
\overline{E} &= A\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D\frac{\partial \eta}{\partial x} + E\frac{\partial \eta}{\partial y}\ .
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Это следует из формул (2.3), (2.4), если в них записать вместо переменных x_1 и x_2 переменные x и y, вместо y_1 и y_2 — ξ и η, а вместо коэффициентов $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_1, A_2$ — A, B, C, D, E соответственно. Легко видеть, что $\overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C} = (B^2 - AC)\Delta^2$, следовательно, преобразование не меняет тип уравнения.

Пусть $B^2 - AC > 0$, то есть уравнение гиперболического типа. Покажем, что можно так подобрать функции $\xi(x, y), \eta(x, y)$, что в окрестности точки (x_0, y_0) будут выполнены равенства $\overline{A} = \overline{C} = 0$.

Предположим, что либо A, либо C не равны 0, так как в противном случае требуемый вид уже получен.

Пусть, например, $A \neq 0$. Тогда, так как $B^2 - AC > 0$, уравнение

$$A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{2.8}$$

(заметим, что при $\varphi = \xi$, левая часть (2.8) совпадает с выражением для $\overline{A}$, а при $\varphi = \eta$ — с выражением для $\overline{C}$) представимо в виде

$$\left(A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\left(A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0,$$

которое в свою очередь распадается на два:

$$
\begin{aligned}
&A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0\ ,\\
&A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Пусть $\varphi = \varphi_1(x, y),\ \varphi = \varphi_2(x, y)$ — решения этих уравнений. Эти решения можно выбрать так, чтобы в окрестности точки (x_0, y_0) функции φ_1 и φ_2 были независимыми. Действительно, так как $A \neq 0$, то из уравнений имеем

$$
\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = -2\frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\ ,
$$

то есть достаточно выбрать такие решения (2.9), чтобы

$$
\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \neq 0,\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \neq 0\ .
$$

Итак, произведя замену $\xi = \varphi_1(x, y),\ \eta = \varphi_2(x, y)$, получим, что уравнение (2.6) примет вид

$$
\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = \overline{F}\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial\xi}, \frac{\partial v}{\partial\eta}\right).
$$

где

$$
\overline{F}\Big(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial\xi}, \frac{\partial v}{\partial\eta}\Big) = \frac{1}{\overline{\overline{B}}}\Big(\overline{f} - \overline{D}\frac{\partial v}{\partial\xi} - \overline{E}\frac{\partial v}{\partial\eta} - \overline{a}v\Big).
$$

Такой вид принято называть ***вторым каноническим видом для уравнения гиперболического типа***. В записи канонического вида специально выделили часть уравнения, содержащую вторые производные и записали в общем виде все остальные слагаемые, чтобы подчеркнуть, что канонический вид характеризуется только вторыми производными.

Если теперь выполнить еще одну замену $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, то получим

$$
\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} = \widetilde{F}(\alpha, \beta, v, \frac{\partial v}{\partial\alpha}, \frac{\partial v}{\partial\beta})\ .
$$

Это и есть ***канонический вид для уравнения гиперболического типа***.

Кривые $\varphi_1(x, y) = C_1,\ \varphi_2(x, y) = C_2$ называют ***характеристическими кривыми*** или кратко ***характеристиками*** уравнения (2.5). Вдоль них выполняются соответственно равенства $\overline{A} = 0,\ \overline{C} = 0$.

Пусть теперь $B^2 - AC = 0$. Уравнения (2.9) вырождаются в одно уравнение:

$$
A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0\ . \tag{2.10}
$$

Заметим, что из условия $B^2 - AC = 0$ следует равенство $B/A = C/B$. Значит, существует такое λ, что $B = A\lambda,\ C = B\lambda$. Следовательно, если функция φ удовлетворяет (2.10), то она удовлетворяет и уравнению

$$
B\frac{\partial\varphi}{\partial x} + C\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0\ .
$$

Пусть $\xi = \varphi(x,y)$, где φ — решение (2.10), η — любая гладкая функция, такая, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

В уравнении (2.6) коэффициент $\overline{A}$ будет равен 0, а

$$\overline{B} = \left(\underbrace{A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y}}_{0}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\underbrace{B\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C\frac{\partial \varphi}{\partial y}}_{0}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \ .$$

Заметим, что $\overline{C} \neq 0$, так как в противном случае функция $\eta = \eta(x,y)$ удовлетворяет тому же уравнению (2.10), что и функция $\xi = \xi(x,y)$, а это в свою очередь противоречит условию невырожденности замены переменных. Следовательно, в окрестности точки (x_0, y_0) имеем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \overline{F}\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) \ .$$

Это канонический вид уравнения параболического типа.

В рассматриваемом случае кривые $\varphi(x,y) = C$ называются характеристиками уравнения (2.5) .

Предположим теперь, что $B^2 - AC < 0$. Покажем, что можно так подобрать функции ξ, η, что в уравнении (2.6) $\overline{A} = \overline{C}$, $\overline{B} = 0$. Заметим, что коэффициенты уравнений (2.9) являются комплексно-сопряженными. Тогда решения этих уравнений могут быть выбраны также комплексно-сопряженными.

Пусть $\varphi = \varphi_1(x,y) + i\varphi_2(x,y)$ — решение одного из уравнений (2.9), причем такое, что $\left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 \neq 0$. Пусть $\xi = \varphi_1(x,y)$, $\eta = \varphi_2(x,y)$. Тогда, так как φ — решение (2.8), при подстановке его в (2.8) получим тождество, в левой части которого стоит комплекснозначная функция. Следовательно, ее действительная и мнимая части тождественно равны нулю. Выражая эти действительные и мнимые части и приравнивая их нулю, получим после простых преобразований $\overline{A} = \overline{C}$, $\overline{B} = 0$. Так как $\overline{A} = \overline{C} \neq 0$ (в противном случае $\overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C} = 0$), то в новых переменных уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \overline{F}\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) \ .$$

В заключение отметим, что гиперболические уравнения имеют 2 семейства действительных характеристик, параболические — одно, а эллиптические уравнения действительных характеристик не имеют.

2.1.3 Задача Коши для уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями можно сделать вывод, что решение уравнения с частными производными однозначно не определяется самим уравнением. И если общее решение обыкновенного дифференциального уравнения содержало произвольные константы, то при решении уравнений с частными производными появляются произвольные функции. Например, непосредственно дифференцированием убеждаемся, что функция $u(x,y) = f(x) + g(y)$ является решением уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ при любых гладких функциях $f(x)$ и $g(y)$.

Для выделения одного, конкретного решения, таким образом, нужны дополнительные условия. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений одним из видов таких дополнительных условий являлись условия Коши, когда в некоторой точке промежутка, на котором ищется решение, задается значение решения и некоторого числа его производных. При этом количество таких условий совпадает с порядком уравнения, то есть число задаваемых значений производных на единицу меньше порядка уравнения. Аналогично поступают и в случае уравнений с частными производными, однако вместо точки, где задаются дополнительные данные, выбирается кривая в случае функций двух независимых переменных и поверхность размерности $n-1$ в случае функций n переменных. А вместо значений решения и его производных в точке, то есть чисел, задаются значения решения и его производных на кривой (поверхности), то есть задаются функции. Естественно возникает вопрос: можно ли произвольным образом задавать кривую (поверхность) и значения решения и его производных или требуются определенные ограничения. Попытаемся в этом параграфе хотя бы частично ответить на этот вопрос. Для простоты будем считать, что решение — это функция зависящая от двух переменных.

Пусть S некоторая гладкая кривая в двумерном пространстве. Предположим, что кривая S задается уравнением $\varphi(x,y) = 0$, причем $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 > 0$, то есть на кривой нет особых точек. Пусть, далее, в каждой точке кривой S задано некоторое не касательное к S направление $l = (l_1, l_2)$, $l_1^2 + l_2^2 = 1$. Напомним, что в математическом анализе вводились понятие "производная функции u по направлению l" , которая обозначалась $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ и равна $\dfrac{\partial u}{\partial l} \stackrel{def}{=} l_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} + l_2 \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Определение 2.1.3 ***Задачей Коши*** *для уравнения 2-го порядка (2.5) называют задачу о нахождении в окрестности S решения этого уравнения, удовлетворяющего на кривой S условиям:*

$$u|_S = \varphi_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_S = \varphi_1, \tag{2.11}$$

где φ_0, φ_1 — заданные на S функции.

Предполагается, что все функции, фигурирующие в рассмотрении, являются гладкими. Последнее означает, что у них существует столько производных, сколько необходимо для проведения соответствующих выкладок. Заданные значения функции u и ее производной в направлении l будем называть ***данными или условиями Коши***.

Поставим перед собой более простую задачу: найти на кривой S все производные решения первого и второго порядка. Очевидно, что если задача Коши разрешима, то имеет решение и эта задача, так как, найдя решение уравнения в окрестности кривой S и продифференцировав его, можно получить значения производных на кривой.

Для того, чтобы решить поставленную задачу сделаем замену переменных. Выберем $\xi(x,y) = \varphi(x,y)$, а функцию $\eta(x,y)$, подберем так, чтобы замена была невырожденной. В новых переменных (ξ, η) кривая S будет задаваться уравнением $\xi = 0$, направление l перейдет в направление $\bar{l} = (\bar{l}_1, \bar{l}_2)$, а касательным к кривой S является направление $(0,1)$. Поэтому, поскольку направление l и, значит, $\bar{l}$ не является касательным к S, выполняется неравенство $\bar{l}_1 \neq 0$.

Условие $u|_S = \varphi_0$, перепишется в виде

$$v(0, \eta) = \overline{\varphi}_0(\eta)$$

и позволит вычислить любые производные по η, то есть производные в касательном направлении.

Условие $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_S = \varphi_1$ перепишется в новых переменных в виде $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \bar{l}}\right|_{\xi=0} = \overline{\varphi}_1(\eta)$. По определению производной по направлению $\dfrac{\partial v}{\partial \bar{l}} = \bar{l}_1 \dfrac{\partial v}{\partial \xi} + \bar{l}_2 \dfrac{\partial v}{\partial \eta}$. Как уже отмечалось, направление $\bar{l}$ не касательное к кривой $\xi = 0$, поэтому $\bar{l}_1 \neq 0$. Значит, имея значение $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \bar{l}}\right|_{\xi=0}$ и значения производной $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\xi=0}$, можно будет найти сначала $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}$, а затем $\left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\right|_{\xi=0}$. Подставляя все известные величины в (2.6), и выражая $\overline{A}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}$ получим

$$\left.\overline{A}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\right|_{y_1=0} = \overline{f} - 2\overline{B}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \overline{C}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \overline{D}\frac{\partial v}{\partial \xi} - \overline{E}\frac{\partial v}{\partial \eta} - \overline{a}v \; . \tag{2.12}$$

Здесь в правой части находятся известные величины, зависящие от функций φ_0, φ_1 и их производных. Обозначим выражение в правой части через $G(\xi, \eta; \varphi_0, \varphi_1)$. Здесь в обозначении указывается, что G является функцией от ξ, η и зависит от функций φ_0, φ_1 и их производных.

Если окажется, что $\overline{A} \neq 0$, из (2.12) находится $\left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=0}$. Таким образом, задача о нахождении значений производных на кривой S решена.

Пусть теперь $\overline{A} = 0$. Тогда уравнение (2.12) превращается в равенство

$$G(\xi, \eta; \varphi_0, \varphi_1) = 0, \tag{2.13}$$

которое показывает, что функции φ_0, φ_1 нельзя выбирать произвольно. Равенство (2.13)накладывает ограничение на выбор функций φ_0, φ_1. Если условие (2.13) выполнено, то производная $\left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=0}$ может принимать любые значения, если же (2.13) не выполнено, то задача о нахождении на кривой S производных решения не имеет решения и, значит, не имеет решения задача Коши.

Итак, вопрос о разрешимости поставленной задачи свелся к анализу выражения для $\overline{A}$. Из (2.7) имеем

$$\overline{A} = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \; .$$

Условие $\overline{A} = 0$ с учетом выбора замены переменных записывается в виде

$$A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \; . \tag{2.14}$$

Таким образом, (2.14) является условием на кривую S.

Определение 2.1.4 *Пусть кривая S задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$. Назовем эту кривую* ***характеристикой*** *или* ***характеристической кривой*** *для уравнения (2.5), если вдоль нее выполняется равенство (2.14).*

Анализ, сделанный выше, показывает, что при условии задания данных Коши на характеристической кривой и при произвольном задании этих данных, решение задачи Коши не существует. Решение может существовать только в том случае, когда выполнено равенство (2.13), которое называют ***соотношением на характеристике***.

В случае функций от произвольного числа переменных задача Коши ставится следующим образом.

Пусть S — $(n-1)$-мерная поверхность в n-мерном пространстве.

Определение 2.1.5 ***Задачей Коши*** *для уравнения 2-го порядка (2.2) называют задачу о нахождении в окрестности S решения этого уравнения, удовлетворяющего на поверхности S условиям:*

$$u|_S = \varphi_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_S = \varphi_1, \tag{2.15}$$

где l — некоторое не касательное к S направление, а φ_0, φ_1 — заданные функции.

Определение 2.1.6 *Пусть поверхность S задана уравнением $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Назовем эту поверхность* ***характеристической поверхностью для уравнения (2.2)****, если на ней выполняется равенство*

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0.$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}\ .$$

Здесь $A_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и при $i = j = 1$, $A_{ii} = 1$ при $i = 2, \ldots, n$. Тогда для поверхности, которая задается уравнением $x_1 = 0$, имеем $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$ при $i > 1$. Отсюда следует, что $\overline{A}_{11} = 0$. Значит плоскость $x_1 = 0$ является характеристической поверхностью для заданного уравнения. Если, например, выбрать $l = (1, 0, \ldots, 0)$, то это направление является нормалью к плоскости $x_1 = 0$. Тогда условия (2.15) принимают вид $u|_{x_1=0} = \varphi_0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \varphi_1$, а соотношение на характеристике запишется следующим образом

$$0 = \varphi_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial {x_i}^2}\ .$$

Отсюда видно, что функции φ_0 и φ_1 связаны между собой и не могут быть выбраны произвольным образом. Задание φ_0, однозначно определяет φ_1.

2.1.4 Корректность постановки задач математической физики

Постановка задач математической физики содержит помимо дифференциальных уравнений или систем некоторые дополнительные функции, назовем их входными условиями. Этими условиями являются, например, значения решения на некоторых кривых, поверхностях, которые задают для однозначного определения решения. Значения входных условий находятся из опыта и поэтому неизбежна некоторая погрешность в их определении. Эта погрешность будет сказываться на решении, и не всегда погрешность в решении будет мала.

Определение 2.1.7 *Будем говорить, что задача* ***поставлена корректно****, если она разрешима при любых входных данных, принадлежащих некоторому классу, имеет единственное решение и это решение непрерывно зависит от входных данных.*

Последнее означает, что в пространствах входных данных и решений можно ввести расстояния, причем для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что если входные данные отличаются не более чем на $\delta(\varepsilon)$, то соответствующие им решения отличаются не более чем на ε. Это свойство зачастую называют ***устойчивостью***.

Задача ***поставлена некорректно***, если она разрешима не при любых начальных данных из некоторого класса, либо имеет не единственное решение, либо нельзя выбрать такие расстояния, чтобы в них была непрерывная зависимость от входных данных.

Ниже приводятся примеры некорректных задач.

Пример Адамара (задача Коши для уравнения Лапласа)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , \quad u|_{t=0} = f(x) \ , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x)$$

Пусть

$$u_n = e^{-\sqrt{n}} e^{nt} \cos nx, \quad f_n = e^{-\sqrt{n}} \cos nx, \quad \varphi_n = n e^{-\sqrt{n}} \cos nx \ .$$

Легко проверить, что u_n — решение поставленной задачи с $f = f_n$, $\varphi = \varphi_n$, и, кроме того, функции $u_n(t,x) \to \infty$ при $n \to \infty$ и $t > 0$, в то время как $f_n(x), \varphi_n(x)$ и все их производные сходятся к 0 при $n \to \infty$. Таким образом, малое изменение начальных данных (по сравнению с нулевыми) приводит к большому (по сравнению с нулевым) изменению решения.

Аналогичное свойство выполняется и для обратной задачи теплопроводности, то есть для задачи определения истории изменения температуры тела по известному значению температуры в настоящий момент времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \quad u|_{t=0} = f(x), \ t < 0 \ .$$

Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно взять

$$u_n = e^{-\sqrt{n}} e^{-n^2 t} \sin nx \ , \quad f_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \sin nx.$$

В дальнейшем нас, прежде всего, будет интересовать вопрос о корректности постановки той или иной задачи для различных типов уравнений и систем.

2.1.5 Примеры решения задач к параграфу 2.1

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. Используя обозначения параграфа 2.1.2 имеем $A = 1$, $B = 0$, $C = y$, $D = E = 0$. Тип уравнения зависит от знака выражения $B^2 - AC$. В нашем примере $B^2 - AC = -y$. Поэтому, при $y > 0$ получаем эллиптическое уравнение, при $y < 0$ — гиперболическое, а при $y = 0$ — параболическое. Рассмотрим сначала случай $y < 0$. Для того, чтобы найти замену переменных запишем уравнения (2.9)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sqrt{-y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \sqrt{-y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0\ . \tag{2.16}$$

Это уравнения с частными производными первого порядка, однако, методы их решения изучаются в курсе "Обыкновенные дифференциальные уравнения". Для их решения записываются обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\sqrt{-y}}, \qquad \frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\sqrt{-y}}.$$

Решения этих уравнений представляют в виде, разрешенном относительно произвольных постоянных, то есть в виде

$$c_1 = x + 2\sqrt{-y}, \qquad c_2 = x - 2\sqrt{-y}, \tag{2.17}$$

откуда получаем решения уравнений (2.16) как произвольные функции от правых частей равенств (2.17). Поскольку нас интересуют какие-нибудь из этих решений, выберем

$$\varphi_1(x,y) = x + 2\sqrt{-y}, \qquad \varphi_2(x,y) = x - 2\sqrt{-y}\ .$$

Совершим теперь замену переменных $\xi = x + 2\sqrt{-y}$, $\eta = x - 2\sqrt{-y}$ и по формулам (2.7) найдем коэффициенты преобразованного уравнения. Замена переменных выбрана так, что $\overline{A} = 0$, $\overline{C} = 0$.

$$\overline{B} = A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 1\cdot 1\cdot 1 - y\cdot(-y)^{-1/2}\cdot(-y)^{-1/2} = 2\ ,$$

$$\overline{D} = A\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\xi}{\partial x} + E\frac{\partial\xi}{\partial y} = 1\cdot 0 + y\cdot\frac{-1}{2}(-y)^{-3/2} = \frac{1}{2}(-y)^{-1/2} = \frac{2}{\xi - \eta}\ ,$$

$$\overline{E} = A\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + D\frac{\partial\eta}{\partial x} + E\frac{\partial\eta}{\partial y} = 1\cdot 0 + y\cdot\frac{1}{2}(-y)^{-3/2} = \frac{-1}{2}(-y)^{-1/2} = \frac{-2}{\xi - \eta}.$$

Подставляя полученные коэффициенты в (2.6) получим канонический вид дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi} - \frac{\partial v}{\partial\eta}\right) = 0, \quad \xi > \eta\ .$$

Пусть теперь $y > 0$. Возьмем любое из уравнений (2.16), например, первое. Его решение запишется в виде $\varphi(x,y) = x + 2i\sqrt{y}$, где $i^2 = -1$. Теперь следует сделать замену $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{y}$. Новые переменные подобраны так, что $\overline{A} = \overline{C}$ и $\overline{B} = 0$. Вычисляя по формулам (2.7), получим $\overline{A} = 1$, $\overline{D} = 0$, $\overline{E} = -\frac{1}{\eta}$. Таким образом, уравнение приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial v}{\partial\eta} = 0, \quad \eta > 0\ .$$

Пример 2. Привести к каноническому виду

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

.

Решение. Здесь $A = y^2,\ B = xy,\ C = x^2$, поэтому $B^2 - AC = 0$, следовательно уравнение параболического типа. Запишем уравнение (2.10):

$$y^2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + xy\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Для его решения имеем

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy},$$

откуда $c = 1/2(x^2 - y^2)$ и, следовательно, $\xi = 1/2(x^2 - y^2)$. Вторую функцию для замены переменных выбираем произвольно, например, возьмем $\eta = 1/2(x^2 + y^2)$. Вычислим новые коэффициенты по формулам (2.7). Тогда в новых переменных уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} + \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)}\frac{\partial v}{\partial\xi} - \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)}\frac{\partial v}{\partial\eta} = 0.$$

2.1.6 Задачи к параграфу 2.1

1. Являются ли приведенные ниже равенства дифференциальными уравнениями с частными производными:

$$\text{а)}\quad \sin^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) + \cos^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) - u = 0\ ,$$

$$\text{б)}\quad \sin^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) - \cos^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) - u = 0\ ,$$

$$\text{в)}\quad \ln\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big| + \ln\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big| - \ln\Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big| + u - \sin(xy) = 0\ .$$

2. Определить порядок уравнений:

$$\text{а)}\quad \sin^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) + \cos^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 5e^x\ ,$$

$$\text{б)}\quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(u^2\Big) - 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 + y^2)u\ ,$$

$$\text{в)}\quad \Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)^2 = u^7 - x^3y^6\ .$$

3. Определить, какие из следующих уравнений являются линейными однородны-

ми, линейными неоднородными, квазилинейными, нелинейными

$$\text{а)}\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2+\frac{\partial u}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)^2=0\ ,$$

$$\text{б)}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2=0\ ,$$

$$\text{в)}\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u^7-x^3y^6\ ,$$

$$\text{г)}\quad \frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-x^3y^2u+\sin(x+y)=0\ ,$$

$$\text{д)}\quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(x\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(y\frac{\partial u}{\partial y}\Big)=u\ ,$$

$$\text{е)}\quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(u\frac{\partial u}{\partial x}\Big)-u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)^2+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 (yu)}{\partial x^2}+u=0\ .$$

4. Привести к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными и определить тип уравнения:

$$\text{а)}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(3+\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0\ ,$$

$$\text{б)}\quad x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$\text{в)}\quad (1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0\ .$$

5. Доказать, что при переходе к полярным координатам (r,φ) оператор Лапласа $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ преобразуется к виду:

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\ .$$

6. Привести к каноническому виду и затем, путем введения новой функции $w(\xi,\eta)$ по формуле $v(\xi,\eta)=e^{\lambda\xi+\mu\mu}w(\xi,\eta)$, так подобрать константы λ,μ, чтобы коэффициенты при первых производных w в гиперболическом и эллиптическом случаях были равны нулю, а в параболическом случае равнялся нулю один из коэффициентов при первой производной w и коэффициент при самой w.

$$\text{а)}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+u=0\ ,$$

$$\text{б)}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0\ ,$$

$$\text{в)}\quad 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u+x=0\ .$$

7. Показать, что конусы $(t-t_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ являются характеристическими поверхностями для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

2.2 ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

2.2.1 Задача Коши и краевые задачи для уравнения колебания струны

Рассмотрим ***уравнение колебания струны***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ . \tag{2.18}$$

Здесь $u(t,x)$ — величина отклонения точки с координатой x струны в момент времени t от положения покоя. Предполагается, что в состоянии покоя струна совпадает с осью x. Очевидно, что это уравнение относится к гиперболическим уравнениям.

Положим $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. Легко видеть, что прямые $x \pm at = const$ являются характеристиками уравнения (2.18). В новых переменных уравнение перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0 \ .$$

Отсюда, интегрируя, получим, что

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \Theta(\eta) \ ,$$

где $\Theta(\eta)$ — произвольная функция. После повторного интегрирования, учитывая, что интеграл от произвольной функции — произвольная функция, имеем

$$v = \Theta_1(\xi) + \Theta_2(\eta) \ ,$$

или в старых переменных

$$u(t,x) = \Theta_1(x - at) + \Theta_2(x + at) \ . \tag{2.19}$$

Легко проверить путем подстановки в уравнение, что для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций Θ_1, Θ_2 формула (2.19) дает решение уравнения (2.18). Формула (2.19) называется ***формулой Даламбера.***

Таким образом, чтобы получить форму струны в различные моменты времени, достаточно изобразить графики функций $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x)$, затем сместить их графики на величину at соответственно вправо и влево и полученные смещенные графики сложить.

Найдем теперь решение уравнения (2.18), удовлетворяющее условиям Коши:

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{2.20}$$

считая, что струна не ограничена, то есть $|x| < \infty$. Первое из этих условий задает начальную форму струны, второе — скорости точек струны в начальный момент времени. Поэтому эти условия называют ***начальными.*** Другое название этих условий было дано выше — ***условия Коши***.

В решении (2.19) надо так подобрать функции Θ_1 и Θ_2, чтобы удовлетворить (2.20):

$$\Theta_1(x) + \Theta_2(x) = \varphi_0(x) \ , \tag{2.21}$$

$$-a\Theta_1'(x) + a\Theta_2'(x) = \varphi_1(x) \ . \tag{2.22}$$

Интегрируя равенство (2.22), находим

$$-\Theta_1(x) + \Theta_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_0^x \varphi_1(\xi)\,d\xi + c\ .$$

Из этого равенства и (2.21) получаем:

$$\begin{aligned}\Theta_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \varphi_1(\xi)\,d\xi - \frac{c}{2}\ ,\\ \Theta_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \varphi_1(\xi)\,d\xi + \frac{c}{2}\ .\end{aligned} \tag{2.23}$$

Подставляя (2.23) в (2.19), имеем

$$u(t,x) = \frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\xi)\,d\xi\ . \tag{2.24}$$

Путем подстановки (2.24) в (2.18), (2.20) легко проверяется, что формула (2.24) дает решения задачи Коши (2.18), (2.20), если $\varphi_0 \in C^2(-\infty,\infty),\ \varphi_1 \in C^1(-\infty,\infty)$.

Можно заключить теперь, что задача Коши поставлена корректно если рассматривать ее на конечном промежутке времени $[0,T]$. Действительно, показано, что решение существует при гладких начальных данных. Единственность следует из того, что, если решение существует, то, согласно приведенному выше выводу, оно должно иметь вид (2.24). Ясно также, что если $\overline{\varphi_0}$ и $\overline{\varphi_1}$ таковы, что $|\varphi_0-\overline{\varphi_0}| < \varepsilon/2,\ |\varphi_1-\overline{\varphi_1}| < \varepsilon/(2T)$, то из (2.24) следует, что $|u-\overline{u}| < \varepsilon$, где $\overline{u}$ — решение задачи Коши с начальными данными $\overline{\varphi_0},\overline{\varphi_1}$. Таким образом, имеет место непрерывная зависимость от начальных условий.

Формула (2.24) также называется ***формулой Даламбера*** для решения задачи Коши.

Рассмотрим теперь струну длины l, закрепленную на концах отрезка. Задача о колебании такой струны записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le l,\ t \ge 0\ , \tag{2.25}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad 0 \le x \le l\ , \tag{2.26}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \tag{2.27}$$

Условия (2.27) заданы на концах струны и описывают закон движения крайних (граничных) точек струны. Поэтому их называют ***краевыми*** или ***граничными.*** Решение Даламбера (2.19) годится и теперь, однако определение Θ_1,Θ_2 по формулам (2.23) возможно не всегда из-за того, что φ_0,φ_1 определены лишь при $x \in [0,l]$, а величины $x \pm at$ могут принимать значения вне этого промежутка. Значит, для построения решения надо продолжить эти функции или, что эквивалентно, функции $\varphi_0(x),\varphi_1(x)$ на всю прямую. Физически, это сводится к нахождению такого начального возмущения бесконечной струны, чтобы движение ее участка $[0,l]$ было таким же, как если бы этот участок был закреплен на концах.

Из граничных условий имеем:

$$\Theta_1(-at) + \Theta_2(at) = 0 \ , \qquad \Theta_1(l - at) + \Theta_2(l + at) = 0 \ ,$$

или, обозначая at через x,

$$\Theta_1(-x) = -\Theta_2(x) \ , \qquad \Theta_2(l + x) = -\Theta_1(l - x) \ . \tag{2.28}$$

Так как при $x \in (0, l)$ функции Θ_1 и Θ_2 определены (см. формулы (2.23)), то первое из этих равенств позволяет доопределить Θ_1 на промежутке $[-l, 0]$, второе — Θ_2 для $x \in (l, 2l)$. Значит, обе функции могут быть определены на промежутке длины $2l$. Далее из (2.28) имеем

$$\Theta_2(2l + x) = -\Theta_1(l - (l + x)) = -\Theta_1(-x) = \Theta_2(x) \ ,$$
$$\Theta_1(x) = -\Theta_2(-x) = -\Theta_2(l - (l + x)) = \Theta_1(2l + x) \ ,$$

то есть функции периодические с периодом $2l$.

Так как $\varphi_0 = \Theta_1(x) + \Theta_2(x)$, $\varphi_1 = a(\Theta_2'(x) - \Theta_1'(x))$, то они также периодические и, кроме того,

$$\varphi_0(-x) = \Theta_1(-x) + \Theta_2(-x) = -\Theta_2(x) - \Theta_1(x) = -\varphi_0(x) \ .$$

Дифференцируя первое из равенств (2.28), получим, что $\Theta_2'(x) = \Theta_1'(-x)$. Поэтому

$$\varphi_1(-x) = a(\Theta_2'(-x) - \Theta_1'(-x)) = a(\Theta_1'(x) - \Theta_2'(x)) = -\varphi_1(x),$$

то есть функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ следует продолжить сначала нечетным образом на промежуток $(-l, 0)$, а затем периодическим образом с периодом $2l$. Для непрерывности производных второго порядка функции $u(t, x)$ следует потребовать выполнение условий

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = \varphi_1(0) = \varphi_1(l) = \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0 \ ,$$

которые называют ***условиями согласования начальных и граничных данных***.

Действительно, рассмотрим, например, границу $x = 0$. Из (2.27) следует, что на ней $u = \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Тогда в силу (2.26) должны выполняться равенства $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = 0$. Если же принять во внимание (2.25) и (2.26), то $\varphi_0''(0) = 0$, то есть начальные и граничные данные должны быть согласованы.

Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, легко доказать, что решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x > 0 \ ,$$
$$u|_{x=0} = 0 \ , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \ , \quad u|_{t=0} = \varphi_0(x)$$

задается также формулой Даламбера, функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ при этом следует доопределить нечетным образом на отрицательные значения аргументов. В частности, в области, где $x - at < 0$ формула примет вид

$$u(t, x) = \frac{\varphi_0(at + x) - \varphi_0(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{at-x}^{at+x} \varphi_1(\xi)\, d\xi \ . \tag{2.29}$$

Замечание. Было отмечено, что функция определенная формулой (2.24) является решением задачи Коши, если φ_0, φ_1 гладкие. Если же φ_0, φ_1 не дифференцируемы достаточное число раз, то нельзя говорить о решении задачи, так как функцию $u(t,x)$, определенную формулой (2.24), нельзя подставить в уравнение. При решении некоторых конкретных физических задач может оказаться, что функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ не удовлетворяют условиям гладкости. Тогда нельзя утверждать, что существует решение. В этом случае приходится вводить понятие обобщенного решения. Для этого отметим, что, если немного изменить начальные условия φ_0, φ_1, заменив их дифференцируемыми функциями, то этим новым функциям уже будет соответствовать решение уравнения. Заметим также, что непрерывная зависимость от начальных данных была доказана без предположения о дифференцируемости φ_0, φ_1. Поэтому может оказаться, что при некоторых φ_0, φ_1 нет решения, однако есть функция, к которой можно приблизиться с помощью последовательности решений уравнения колебания с немного сглаженными начальными условиями. Полученные таким предельным переходом функции называются ***обобщенными решениями.***

Определение 2.2.1 *Функция $u(t,x)$ называется* ***обобщенным решением*** *задачи (2.18), (2.20), если она является пределом равномерно сходящейся последовательности функций $u_n(t,x)$, таких, что $u_n(t,x)$ удовлетворяет уравнению (2.18) и*

$$u_n|_{t=0} = \varphi_{0n}(x), \quad \left.\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_{1n}(x) \ ,$$

а $\varphi_{0n}(x), \varphi_{1n}(x)$ — гладкие функции, равномерно сходящиеся к $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ соответственно.

Поскольку

$$u_n(t,x) = \frac{\varphi_{0n}(x-at) + \varphi_{0n}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_{1n}(\xi)\, d\xi \ ,$$

переходя в этом равенстве к пределу с учетом равномерной сходимости, получим, что обобщенное решение также определяется формулой (2.24).

До сих пор находилось решение только однородного уравнения колебания струны. Покажем как, умея решать однородное уравнение можно получить решение неоднородного уравнения. Пусть, например, необходимо решить задачу Коши

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x) \ , \\ &u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \ . \end{aligned} \tag{2.30}$$

Заметим, прежде всего, что если u_1 и u_2 решения задач

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f(t,x) \ , \\ &u_1|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \ , \\ &u_2|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \ , \end{aligned} \tag{2.32}$$

то решение задачи (2.30) $u = u_1 + u_2$. Этот факт проверяется подстановкой данного выражения для u в уравнение и начальные условия (2.30).

Решение задачи (2.32) задается формулой Даламбера. Поэтому, для того, чтобы решить задачу (2.30) достаточно научиться находить решение задачи (2.31).

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\ , \\ &u_3|_{t=\tau} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_3}{\partial t}\right|_{t=\tau} = f(\tau, x)\ . \end{aligned} \tag{2.33}$$

Ее решение зависит не только от t и x, но и от параметра τ, то есть $u_3 = u_3(t, x, \tau)$. Покажем, что функция $u_1(t,x) = \int\limits_0^t u_3(t,x,\tau)\,d\tau$ является решением задачи (2.31).

Действительно,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = u_3(t,x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial u_3(t,x,\tau)}{\partial t}\,d\tau = \int\limits_0^t \frac{\partial u_3(t,x,\tau)}{\partial t}\,d\tau.$$

Здесь воспользовались тем, что согласно первому начальному условию в задаче (2.33) выполняется равенство $u_3(t,x,t) = 0$. Тогда

$$u_1|_{t=0} = \int\limits_0^0 u_3(t,x,\tau)\,d\tau = 0, \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = \int\limits_0^0 \left.\frac{\partial u_3(t,x,\tau)}{\partial t}\right|_{t=0} d\tau = 0.$$

Имеем далее с учетом второго начального условия в задаче (2.33) и самого дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial u_3(t,x,t)}{\partial t} + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 u_3(t,x,\tau)}{\partial t^2}\,d\tau = f(t,x) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 u_3(t,x,\tau)}{\partial t^2}\,d\tau =$$

$$= f(t,x) + a^2 \int\limits_0^t \frac{\partial^2 u_3(t,x,\tau)}{\partial x^2}\,d\tau = f(t,x) + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_0^t u_3(t,x,\tau)\,d\tau = a^2 \frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x).$$

Таким образом, функция $u_1(t,x) = \int\limits_0^t u_3(t,x,\tau)\,d\tau$ удовлетворяет не только начальным условиям, но и дифференциальному уравнению, то есть является решением задачи (2.31).

Решить задачу (2.33) не сложно. Достаточно сделать замену $t_1 = t - \tau$. Тогда, учитывая, что $\dfrac{\partial}{\partial t_1} = \dfrac{\partial}{\partial t}$, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_3}{\partial {t_1}^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\ , \\ &u_3|_{t_1=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_3}{\partial t_1}\right|_{t_1=0} = f(\tau, x)\ . \end{aligned}$$

Согласно формуле Даламбера

$$u_3(t_1, x, \tau) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at_1}^{x+at_1} f(\tau, \xi)\,d\xi$$

или, возвращаясь к старым переменным,

$$u_3(t,x,\tau) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi.$$

Следовательно,

$$u_1(t,x) = \int\limits_0^t u_3(t,x,\tau)\, d\tau = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi\, dt.$$

Для решения $u(t,x)$ задачи (2.30) теперь имеем

$$u(t,x) = \frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi\, dt.$$

Описанная схема решения неоднородного уравнения может быть перенесена на другие уравнения. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, а L — линейный оператор, определенный на некотором линейном пространстве гладких функций от x и преобразующий их в функции от x. Тогда, если задачи

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = Lu_2\ , \quad u_2|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = Lu_3, \quad u_3|_{t=\tau} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_3}{\partial t}\right|_{t=\tau} = f(\tau,x)$$

имеют решение, то решение $u(t,x)$ задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(t,x)\ , \quad u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)\ ,$$

представимо в виде

$$u(t,x) = u_2(t,x) + \int\limits_0^t u_3(t,x,\tau)\, d\tau.$$

При этом функция $u_1(t,x) = \int\limits_0^t u_3(t,x,\tau)\, d\tau$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = Lu_1 + f(t,x)\ , \quad u_1|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\ .$$

Аналогично, если разрешимы задачи

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = Lu_2\ , \quad u_2|_{t=0} = \varphi_0(x),$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = Lu_3, \quad u_3|_{t=\tau} = f(\tau,x)\ ,$$

то решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(t,x)\ , \quad u|_{t=0} = \varphi_0(x)\ ,$$

представимо в виде $u(t,x) = u_2(t,x) + \int\limits_0^t u_3(t,x,\tau)\, d\tau$, а функция $u_1(t,x) = \int\limits_0^t u_3(t,x,\tau)\, d\tau$ является решением задачи

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = Lu_1 + f(t,x)\ , \quad u_1|_{t=0} = 0\ .$$

2.2.2 Нелинейные уравнения. Обобщенные решения. Условия на разрывах

Задача построения и даже определения существования решения значительно усложняется, если от рассмотрения линейных уравнений и систем уравнений перейти к изучению нелинейных уравнений. В частности, для систем квазилинейных гиперболических уравнений еще не до конца создана строгая математическая теория. Не существует даже теорем, устанавливающих существование и единственность решения, вернее эти теоремы доказаны для частных случаев.

Поясним трудности, которые встречаются при построении теории нелинейных дифференциальных уравнений на примере простейшего квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.34}$$

(напомним, что квазилинейность означает линейное вхождение в уравнение производных).

Прежде всего напомним, как в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений решалось уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \ .$$

Сначала через каждую точку $(0, x_0)$ проводилась кривая, удовлетворяющая уравнению $dx/dt = a(t,x)$. Обозначим эту кривую $x = X(t, x_0)$.

Тогда вдоль кривой уравнение записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dX}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du(t,X)}{dt} = 0 \ ,$$

то есть вдоль кривой функция u принимает постоянное значение и поэтому

$$u(t, X(t,x_0)) = u_0(x_0).$$

Если нас интересует решение в виде $u = u(t,x)$, то необходимо разрешить равенство $x = X(t,x_0)$ относительно x_0, то есть получить $x_0 = X^{-1}(t,x) = x_0(t,x)$ [1]. Тогда $u(t,x) = u_0(x_0(t,x))$. Кривая $x = X(t,x_0)$ называлась **характеристикой**.

Точно так же следует поступить при решении задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ u|_{t=0} = u_0(x) \ . \tag{2.35}$$

Рассмотрим кривую $dx/dt = u(t,x)$, проходящую через точку $t = 0, \ x = x_0$. Для того, чтобы определить эту кривую, надо, конечно, знать функцию $u(t,x)$, которая нам неизвестна. Однако предположим, что эта функция и кривая $x = X(t,x_0)$ найдены. Тогда вдоль кривой $du/dt = 0$, то есть $u = const = u_0(x_0)$. Значит, вдоль решения задачи $dx/dt = u(t,x), \quad x|_{t=0} = x_0$ правая часть постоянная и равна $u_0(x_0)$, то есть $dX/dt = u_0(x_0)$ и значит $X(t,x_0) = x_0 + tu_0(x_0), \quad u(t,X(t,x_0)) = u_0(x_0)$. Следовательно, для уравнения (2.34) характеристики — это прямые линии.

Для систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка доказана теорема существования, согласно которой, если начальные данные непрерывно дифференцируемы, решение задачи Коши существует и является

[1] Здесь $X^{-1}(t,x)$ означает обратную к $X(t,x)$ функцию при фиксированном значении t.

непрерывно дифференцируемым, причем решение существует в любом интервале $0 \le t \le T$, где T — любое фиксированное число.

Для квазилинейных систем, в частности, уже для простейшего уравнения дело может обстоять иначе. Пусть, например, $u_0(x)$ — монотонно убывающая, гладкая функция. Возьмем две точки x_0^1, x_0^2 такие, что $x_0^1 < x_0^2$. Тогда $u_0(x_0^1) > u_0(x_0^2)$.

Рассмотрим характеристики, выходящие из точек x_0^1, x_0^2.

$$x = x_0^1 + u_0(x_0^1)t, \; x = x_0^2 + u_0(x_0^2)t \; .$$

Так как $(u_0(x_0^1))^{-1} < u_0(x_0^2)^{-1}$, то угловой коэффициент прямой, выходящей из точки x_0^1 (считая угол между осью x и характеристикой), меньше чем угловой коэффициент прямой, выходящей из точки x_0^2. Следовательно, эти прямые пересекутся. В точке A пересечения прямых с одной стороны $u(A) = u_0(x_0^1)$, с другой $u(A) = u_0(x_0^2)$, то есть решение терпит разрыв и, значит, для произвольного промежутка времени $[0, T]$ непрерывного решения не существует. Следовательно, не для любых, даже очень гладких начальных данных существует непрерывное решение.

В связи с этим встает вопрос каким-то образом обобщить понятие решения, чтобы в понятие решения включить, в частности, такие разрывные решения.

Пусть $\varphi(t, x)$ — произвольная гладкая функция, отличная от нуля только на ограниченном множестве. Перепишем уравнение (2.34) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0 \; ,$$

умножим его на $\varphi(t, x)$ и проинтегрируем по области $R_2^+ = \{(t, x), \; t \ge 0, |x| < \infty\}$. После интегрирования по частям, учитывая ограничение на функцию $\varphi(t, x)$, получим

$$\iint\limits_{R_2^+} \left(u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dxdt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(0, x)u_0(x)dx = 0 \; . \tag{2.36}$$

Заметим, что если для любой функции φ, удовлетворяющей описанным выше условиям, справедливо (2.36) с функцией $u(t, x)$, имеющей непрерывные производные, то, интегрируя (2.36) по частям, имеем

$$-\iint\limits_{R_2^+} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} \right) \varphi dxdt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(0, x) \left(u_0(x) - u(0, x) \right) dx = 0 \; . \tag{2.37}$$

Отсюда, выбирая сначала φ так, что $\varphi(0, x) = 0$, получаем, что для любой функции φ первое слагаемое равно нулю. Из того, что φ произвольно, можно сделать вывод о том, что равно нулю выражение, стоящее в скобке в первом интеграле, то есть функция $u(t, x)$ является решением уравнения. Пусть теперь $\varphi(0, x) \ne 0$. Так как $u(t, x)$ — решение уравнения (2.34), первый интеграл в левой части (2.37) равен 0. Поэтому при любом значении $\varphi(0, x)$ равен нулю второй интеграл в левой части (2.37), откуда следует, что $u(0, x) = u_0(x)$. Таким образом, доказано, что для гладких функций $u(t, x)$ всякая функция, удовлетворяющая (2.35), удовлетворяет (2.36) и наоборот. Однако в соотношении (2.36) функция u не дифференцируется и поэтому можно говорить о подстановке в (2.36) даже разрывных функций.

Определение 2.2.2 ***Обобщенным решением*** *задачи (2.35) называется функция $u(t, x)$, удовлетворяющая уравнению (2.36) при любой гладкой функции $\varphi(t, x)$, отличной от нуля только на ограниченном множестве.*

При определении обобщенного решения надо еще договориться о том, какой допускается класс функций $u(t,x)$. Будем рассматривать такие функции $u(t,x)$, которые в ограниченной части полуплоскости $t \geq 0$ имеют только конечное число точек и линий разрыва, вне этих точек и линий они обладают непрерывными производными. Потребуем, кроме того, чтобы на линии разрыва существовали левые и правые предельные значения.

Выведем соотношения, которым должны удовлетворять левые и правые предельные значения $u(t,x(t)-0) = u_-$, $u(t,x(t)+0) = u_+$ на линии $x = x(t)$, если $x = x(t)$ — линия разрыва функции $u(t,x)$.

Пусть D — область полуплоскости $t > 0$, внутри которой есть только одна линия разрыва функции $u(t,x)$. Эта линия делит D на две части D_1 и D_2. Поскольку в этих частях разрыва функции $u(t,x)$ нет, в них уравнение выполняется в обычном смысле, то есть выполнено уравнение (2.34) и, значит,

$$\iint\limits_{D_i} \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} \right) dx\,dt = 0, \quad i = 1, 2 \ .$$

Если выбрать функцию φ так, что вне области D она тождественно равна 0, то в силу (2.36)

$$\iint\limits_{D_1} \left(u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx\,dt + \iint\limits_{D_2} \left(u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx\,dt = 0 \ ,$$

следовательно,

$$\iint\limits_{D_1} \left[\left(u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}\right)^2 \right) \right] dx\,dt +$$
$$+ \iint\limits_{D_2} \left[\left(u\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}\right)^2 \right) \right] dx\,dt = 0 \ ,$$

или применяя формулу Грина

$$\int\limits_{\Gamma_-} -\varphi u\,dx + \varphi\frac{u^2}{2}\,dt - \int\limits_{\Gamma_+} -\varphi u\,dx + \varphi\left(\frac{u^2}{2}\right) dt = 0 \ ,$$

где Γ — линия разрыва, Γ_- означает, что значения функции берутся при стремлении к Γ слева, Γ_+ — справа. Последнее равенство можно переписать в виде:

$$0 = \int\limits_{\Gamma} \varphi \left[(u_+ - u_-)\,dx + \left(\frac{u_-^2}{2} - \frac{u_+^2}{2} \right) dt \right] =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi \left[x'(t)(u_+ - u_-) + \frac{1}{2}(u_-^2 - u_+^2) \right] dt \ .$$

В силу произвольности φ имеем что $x'(t)(u_+ - u_-) = 0.5(u_+^2 - u_-^2)$. Отсюда следует $x'(t) = 0.5(u_+ + u_-)$ — условие на линии разрыва ***(условие Гюгонио)***.

Покажем, что для разрывных решений задание начальных условий еще не обеспечивает единственности решения.

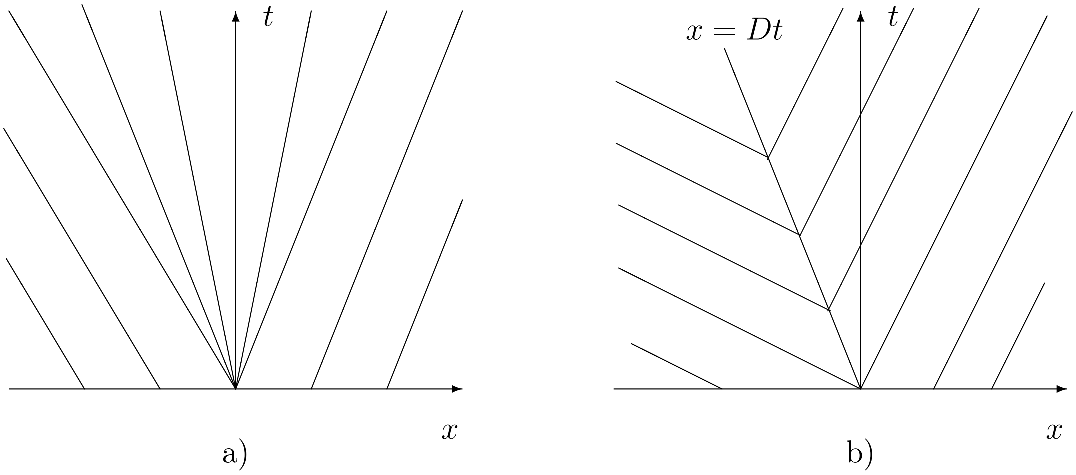

Рис. 2.1 Характеристики a) для решения u_1, b) для решения u_2 ($u_- < u_+$).

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения (2.34) ***(задачу о распаде разрыва):***

$$u_0(x) = \begin{cases} u_-, & \text{при } x < 0\ , \\ u_+, & \text{при } x \geq 0\ , \end{cases}$$

u_-, u_+ — константы, $u_- < u_+$. Пусть $D = \dfrac{u_- + u_+}{2}$ и

$$u_1 = \begin{cases} u_-, & x < u_- t\ , \\ x/t, & u_- t \leq x \leq u_+ t\ , \\ u_+, & x > u_+ t\ , \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} u_-, & x < Dt\ , \\ u_+, & x \geq Dt\ . \end{cases}$$

Легко проверить, что обе функции являются решением поставленной задачи Коши.

Характеристики для решений u_1 и u_2 изображены на рисунке 2.1

Пусть $u = u_\delta(t,x)$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t} + u_\delta \frac{\partial u_\delta}{\partial x} = 0, \quad u_\delta|_{t=0} = u_\delta^0,$$

причем $\lim\limits_{\delta \to 0} u_\delta^0 = u_0(x)$ всюду, кроме $x = 0$. Предположим, кроме того, что u_δ^0 — монотонно возрастающая функция, например,

$$u_\delta^0 = u_- + \frac{u_+ - u_-}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{\delta} \right).$$

Тогда характеристики для $u_\delta(t,x)$ имеют вид, изображенный на рисунке 2.2.

Если дополнительно потребовать от обобщенного решения, чтобы предел классических (то есть гладких) решений являлся решением, то сравнивая картины характеристик видим, что "истинным" решением следует признать u_1, а не u_2. Решение u_2 называют ***неустойчивым решением***, так как сглаживание начальной функции приводит к решению далекому от u_2, то есть нет непрерывной зависимости от начальных данных. Причина неустойчивости u_2 в том, что на линии разрыва пересекаются не характеристики, выходящие из точек оси $t = 0$ (и, следовательно, несущие

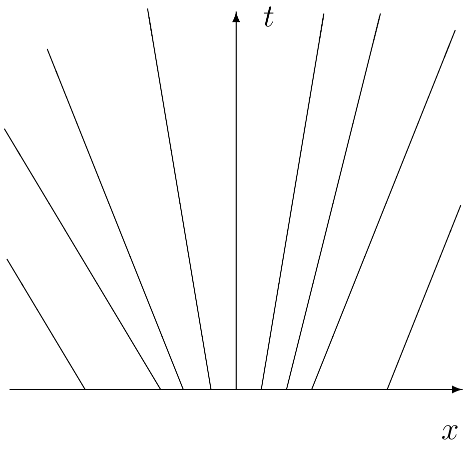

Рис. 2.2 Характеристики для решения u_δ $(u_- < u_+)$

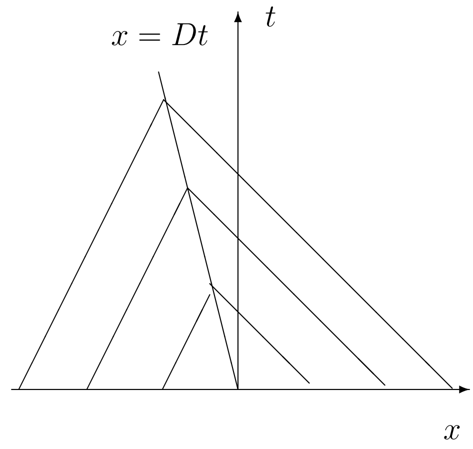

Рис. 2.3 Характеристики для решения u_2 $(u_+ < u_-)$

начальные данные), а характеристики, выходящие из точек линии $x = Dt$. В этом смысле говорят, что разрыв "придуман", а не вызван пересечением характеристик, несущих начальные данные. Такой разрыв называют ***неустойчивым разрывом***.

Если же $u_- > u_+$, то u_2 имеет характеристики, изображенные на рисунке 2.3. В этом случае не существует непрерывного решения при сглаженном начальном условии (см. начало параграфа). Поэтому в этом случае "истинным" решением будет u_2, а разрыв называют ***устойчивым.***

Ясно, что для более сложного уравнения и начальных условий проведение подобного анализа решений становится чрезвычайно сложной проблемой.

2.2.3 Примеры решения задач к параграфу 2.2

Пример 1. Найти решение задачи Коши

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=x^2} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=x^2} = x.$$

Решение. Найдем сначала общее решение дифференциального уравнения. Для этого приведем его к каноническому виду. Для нахождения замены переменных составляем уравнения

$$x^2\frac{\partial \varphi}{\partial x} \pm xy\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

решения которых имеют вид $\varphi_1(x,y) = xy,\ \varphi_2(x,y) = y/x$. Отсюда следует замена переменных $\xi = xy,\ \eta = y/x$. В новых переменных уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2\eta}\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0.$$

Если ввести функцию $w = \dfrac{\partial v}{\partial \xi}$, то уравнение перепишется в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{w}{2\eta} = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Переменная ξ входит в это уравнение как параметр, поэтому общее решение уравнения вместо произвольной константы будет содержать произвольную функцию от ξ. Решая уравнение, получим

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = w(\xi, \eta) = \frac{C(\xi)}{\sqrt{\eta}}.$$

Отсюда, интегрируя по ξ и учитывая, что интеграл от произвольной функции — произвольная функция, получим

$$v(\xi, \eta) = \frac{F(\xi)}{\sqrt{\eta}} + G(\eta),$$

где F, G — произвольные функции.

Имеем теперь

$$u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \sqrt{\frac{x}{y}} F(xy) + G\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.38}$$

Это и есть общее решение исходного уравнения.

Теперь следует так подобрать функции F и G, чтобы удовлетворить условиям, заданным на кривой $y = x^2$. Для этого найдем прежде всего производную $\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -0.5x^{0.5}y^{-1.5}F(xy) + x^{1.5}y^{-0.5}F'(xy) + x^{-1}G'\left(\frac{y}{x}\right)$$

и затем запишем равенства, означающие, что функция u и полученная производная на кривой $y = x^2$ удовлетворяют заданным условиям Коши. В результате получим

$$u(x, x^2) = x^{-0.5}F(x^3) + G(x) = 0\ , \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial u(x, x^2)}{\partial y} = -0.5x^{-2.5}F(x^3) + x^{0.5}F'(x^3) + x^{-1}G'(x) = x. \tag{2.40}$$

Продифференцировав равенство (2.39) по x, имеем

$$G'(x) = 0.5x^{-1.5}F(x^3) - 3x^{1.5}F'(x^3).$$

Подставляя полученное значение $G'(x)$ в (2.40) получим $F'(x^3) = -0.5x^{0.5}$ или это же равенство можно записать другим способом: $F'(x) = -0.5x^{1/6}$. После интегрирования находим F и затем из (2.39) определяем G:

$$F(x) = -\frac{3}{7}x^{7/6} + c, \qquad G(x) = \frac{3}{7}x^3 - cx^{-1/2}.$$

Осталось подставить полученные функции в (2.38), чтобы найти решение задачи Коши

$$u(x, y) = \frac{3}{7}(y^3x^{-3} - x^{5/3}y^{2/3})\ .$$

Непосредственно подстановкой легко проверить, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению и условиям на кривой $y = x^2$.

Пример 2. Найти решение задачи Коши для системы телеграфных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial x} + C\dfrac{\partial V}{\partial t} + GV = 0, \\ \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} + L\dfrac{\partial I}{\partial t} + RI = 0, \end{cases} \qquad |x| < \infty,\ t \geq 0,$$

$$I(0, x) = \sqrt{\frac{C}{L}}F(x), \quad V(0, x) = f(x), \quad |x| < \infty$$

при условии что $CR = GL$ и коэффициенты постоянны.

Решение. Получим сначала одно уравнение. Для этого умножим первое уравнение на L и продифференцируем его по t. Второе уравнение продифференцируем по x и вычтем из полученного второго уравнения первое. Тогда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + R\frac{\partial I}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - GL\frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{2.41}$$

Если из первого телеграфного уравнения выразить $\dfrac{\partial I}{\partial x}$ и подставить его в (2.41), получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (CR + GL)\frac{\partial V}{\partial t} + GRV. \tag{2.42}$$

Введем новую функцию $u(t, x)$ по формуле $V(t, x) = e^{\frac{-R}{L}t}u(t, x)$. Тогда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = e^{\frac{-R}{L}t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = e^{\frac{-Rt}{L}}\Big(\frac{-R}{L}u + \frac{\partial u}{\partial t}\Big), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = e^{\frac{-Rt}{L}}\Big(\frac{R^2}{L^2}u - 2\frac{R}{L}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big). \tag{2.43}$$

Подставляя эти выражения в (2.42), и, учитывая, что из равенства $CR = GL$ следует $\dfrac{CR^2}{L} = GR$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{1}{CL}}. \tag{2.44}$$

Из определения функции u и начального условия для V имеем

$$u(0, x) = V(0, x) = f(x). \tag{2.45}$$

Из (2.43) следует

$$\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \frac{\partial V(0, x)}{\partial t} + \frac{R}{L}u(0, x) = \frac{\partial V(0, x)}{\partial t} + \frac{R}{L}f(x). \tag{2.46}$$

В свою очередь, из первого телеграфного уравнения и начальных условий

$$\frac{\partial V(0, x)}{\partial t} = -\frac{1}{C}\frac{\partial I(0, x)}{\partial x} - \frac{G}{C}V(0, x) = -\sqrt{\frac{1}{CL}}F'(x) - \frac{G}{C}f(x)$$

Подставляя это выражение в (2.46), и, учитывая, что из равенства $CR = GL$ следует $\dfrac{R}{L} = \dfrac{G}{C}$, получим

$$\frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = -\sqrt{\frac{1}{CL}}F'(x) = -aF'(x). \tag{2.47}$$

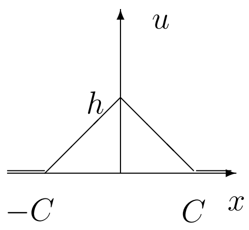

Рис. 2.4

Таким образом, для функции $u(t,x)$ получилась задача (2.44),(2.45),(2.47). Применяя для ее решения формулу Даламбера, получим

$$
\begin{aligned}
V(t,x) = e^{\frac{-R}{L}t}u(t,x) = e^{\frac{-R}{L}t}\left(\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}(-aF'(\xi)\,d\xi\right) = \\
= e^{\frac{-R}{L}t}\left(\frac{f(x-at)+F(x-at)}{2} + \frac{f(x+at)-F(x+at)}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

Если из первого телеграфного уравнения выразить $\dfrac{\partial I}{\partial x}$, получим, учитывая выражения для u из (2.48) и равенство $CR = GL$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial x} = -C\frac{\partial V}{\partial t} - GV = -Ce^{\frac{-Rt}{L}}\left(\frac{-R}{L}u + \frac{\partial u}{\partial t}\right) - Ge^{\frac{-Rt}{L}}u = -Ce^{\frac{-Rt}{L}}\frac{\partial u}{\partial t} + e^{\frac{-Rt}{L}}u\left(\frac{CR}{L} - G\right) = \\
= -Ce^{\frac{-Rt}{L}}\frac{\partial u}{\partial t} = Cae^{\frac{-Rt}{L}}\left(\frac{f'(x-at)+F'(x-at)}{2} - \frac{f'(x+at)-F'(x+at)}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Проинтегрируем это равенство по x. Тогда

$$
I(t,x) = \sqrt{\frac{C}{L}}e^{\frac{-Rt}{L}}\left(\frac{f(x-at)+F(x-at)}{2} - \frac{f(x+at)-F(x+at)}{2}\right) + g(t).
$$

Из начального условия для значения тока следует, что $g(0) = 0$. Подставляя найденные значения тока I и напряжения V во второе уравнение системы, получим, что $Lg'(t) + Rg(t) = 0$. Решая полученную задачу Коши для функции g, убеждаемся, что $g(t) \equiv 0$. Поэтому

$$
I(t,x) = \sqrt{\frac{C}{L}}e^{\frac{-Rt}{L}}\left(\frac{f(x-at)+F(x-at)}{2} - \frac{f(x+at)-F(x+at)}{2}\right).
$$

Пример 3. Начальная форма неограниченной струны изображена на рисунке 2.4, начальная скорость струны равна 0. Изобразить струну в моменты времени $t_k = \frac{kC}{4a}$, где $k = 0, 1, 2, 3, 5$.

Решение. Форма струны в момент времени t определяется формулой Даламбера. Так как начальная скорость равна нулю, имеем

$$
u(t,x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x-at) + \frac{1}{2}\varphi(x+at),
$$

где $\varphi_0(x)$ — функция, график которой изображен на на рисунке 2.4. Таким образом, функция является суммой двух бегущих волн $\frac{1}{2}\varphi_0(x-at)$ и $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$. В начальный

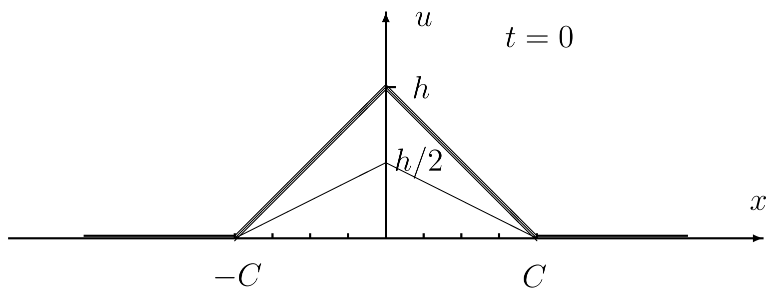

Рис. 2.5 Форма струны в момент времени $t = 0$.

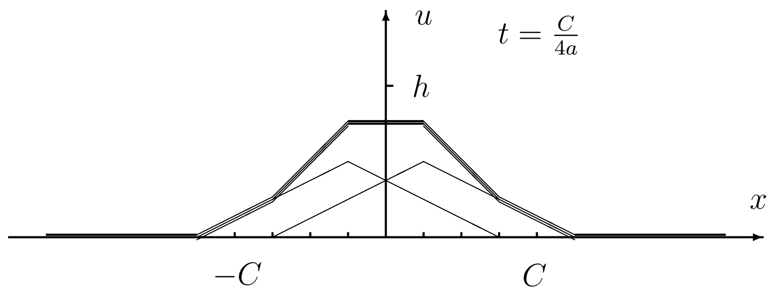

Рис. 2.6 Форма струны в момент времени $t = \frac{C}{4a}$.

момент времени они совпадают и равны $\frac{1}{2}\varphi_0(x)$ (рисунок 2.5, тонкие линии). Прямая волна $\frac{1}{2}\varphi_0(x - at)$ движется вдоль оси $0x$ вправо со скоростью a, обратная волна $\frac{1}{2}\varphi_0(x + at)$ движется влево с той же скоростью a. Для того, чтобы изобразить форму струны достаточно нарисовать графики бегущих волн (рисунки 2.5-2.9, тонкие линии) и затем их сложить (рисунки 2.5-2.9, толстые линии).

2.2.4 Задачи к параграфу 2.2

1. Начальная форма полуограниченной струны изображена на рисунке 2.10, начальная скорость струны равна 0. Изобразить струну в моменты времени $t_k = \frac{kC}{2a}$, где $k = 2, 3, 4, 7$.

2. Начальная форма неограниченной струны изображена на рисунке 2.11, начальная скорость струны равна 0. В какой момент времени при $t > 0$ отклонение струны будет максимальным? Чему равна величина этого отклонения?

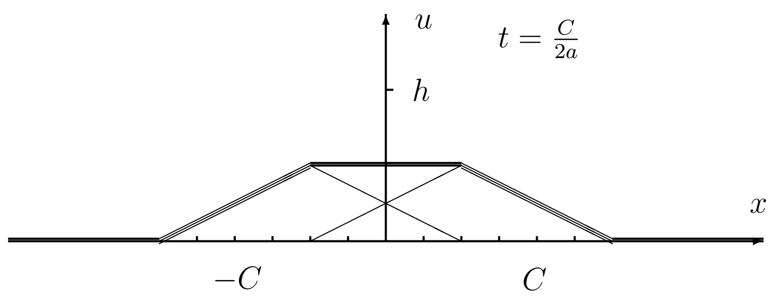

Рис. 2.7 Форма струны в момент времени $t = \frac{C}{2a}$.

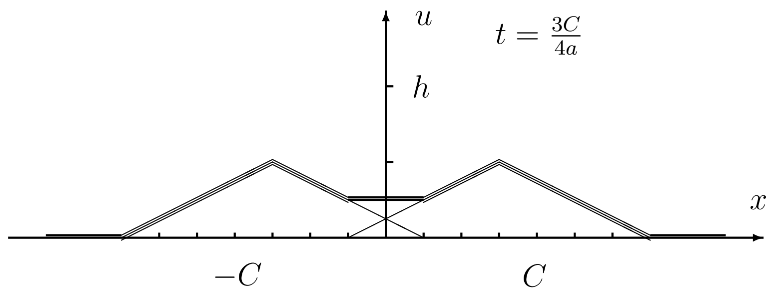

Рис. 2.8 Форма струны в момент времени $t = \frac{3C}{4a}$.

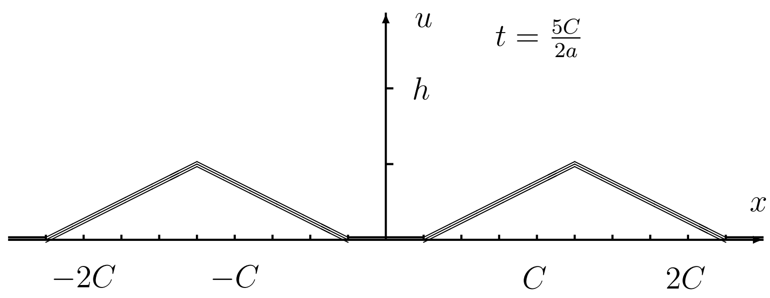

Рис. 2.9 Форма струны в момент времени $t = \frac{5C}{4a}$.

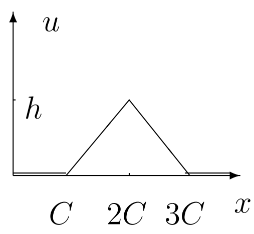

Рис. 2.10

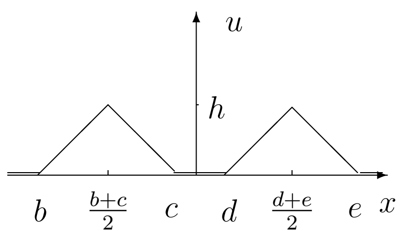

Рис. 2.11

3. Привести к каноническому виду и найти общие решения уравнений:

$$\text{а) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ ,$$

$$\text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ y > 0 \ .$$

4. Найти решения задач Коши:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ u\,|_{y=0} = 3x^2, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0;$

б) $4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1-y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{2y}{1+y^2}\left(2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$

$u|_{y=0} = \sin x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = x^2.$

5. Найти решение задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ t > 0, \ x > 0, \ u|_{t=0} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \ u|_{x=0} = g(t) \ .$$

6. Решить задачу Гурса с данными на характеристиках в области $at \geq |x|$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ u|_{x=at} = f_1(t), \ u|_{x=-at} = f_2(t), \ f_1(0) = f_2(0) \ .$$

2.3 ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

2.3.1 Постановка задач для уравнения теплопроводности

В этой главе будет изучаться ***уравнение теплопроводности***[2]*:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(t,x) \ , \tag{2.49}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}, \quad a = const.$

Основными для этого уравнения являются следующие задачи:

1) ***Задача Коши.*** Найти функцию $u(t,x) \in C([0,T] \times R^n)$, имеющую непрерывные производные по t и вторые производные по x при $t > 0$, удовлетворяющую уравнению (2.49) и начальному условию $u|_{t=0} = g(x)$.

2) ***Первая краевая задача или задача Дирихле.*** Пусть Ω — ограниченная в R^n область с границей $\partial\Omega$. Требуется найти функцию $u(t,x) \in C([0,T] \times (\Omega \cup \partial\Omega))$, имеющую непрерывную производную по t и вторые непрерывные производные по x при $x \in \Omega, \ t \in (0,T)$, удовлетворяющую уравнению (2.49), начальному условию

$$u|_{t=0} = g(x), \quad x \in \Omega \tag{2.50}$$

[2]Другое, часто используемое, название для этого уравнения — ***уравнение диффузии.***

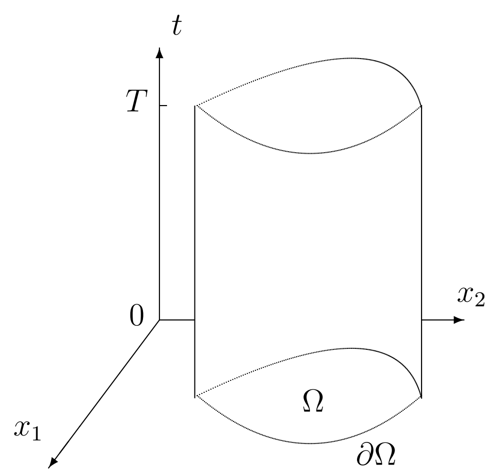

Рис. 2.12 Область, в которой ищется решение краевых задач.

и граничному (краевому) условию

$$u(t,x) = h(t,x) \text{ при } x \in \partial\Omega, \quad t \in (0,T) \ .$$

На рисунке 2.12 изображена область, в которой ищется решение краевой задачи для случая $n = 2$. Она представляет собой цилиндр в пространстве переменных (t,x). При этом задано значение решения на нижнем основании (начальное условие) и на боковой поверхности цилиндра (граничное условие).

3) ***Вторая краевая задача или задача Неймана.*** Найти функцию $u(t,x)$ такую, что она и ее первые производные по пространственным переменным принадлежат пространству $C([0,T] \times (\Omega \cup \partial\Omega))$, у функции u существуют непрерывные производные по t и вторые производные по x, если $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$, функция $u(t,x)$ удовлетворяет (2.49), (2.50) и граничному условию:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = h(t,x), \quad \text{где } N \text{ – нормаль к } \partial\Omega,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T) \ .$$

4) ***Третья краевая задача.*** Эта задача формулируется как и предыдущая, однако граничное условие заменяется на условие вида:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial N} + \beta u = h(t,x) \text{ при } x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Первая краевая задача описывает распределение температуры внутри тела, если известна начальная температура тела и температура точек границы тела. Для второй краевой задачи, в отличие от первой, на границе задается тепловой поток, третья же получается при описании процессов теплообмена тела с внешней средой, температура которой известна.

2.3.2 Принцип максимума, теорема единственности

В основе доказательства единственности и непрерывной зависимости решения от входных данных лежат априорные оценки. К таким оценкам для уравнения теплопроводности относится принцип максимума.

Рассмотрим сначала принцип максимума для первой краевой задачи.

Теорема 2.3.1 (Принцип максимума для первой краевой задачи) *Пусть*

$$M = \max\left(\max_{\substack{x\in\partial\Omega\\ t\in[0,T]}} h(t,x),\ \max_{x\in\Omega\cup\partial\Omega} g(x)\right)\ ,$$

$$m = \min\left(\min_{\substack{x\in\partial\Omega\\ t\in[0,T]}} h(t,x),\ \min_{x\in\Omega\cup\partial\Omega} g(x)\right)\ .$$

Тогда, если $u(t,x)$ решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u, \quad u|_{t=0} = g(x), \quad u|_{x\in\partial\Omega} = h(t,x), \quad t\in(0,T)\ ,$$

то $m \le u(t,x) \le M$, то есть решение первой краевой задачи принимает наибольшее и наименьшее значения либо на нижнем основании, либо на боковой поверхности цилиндра.

Доказательство. Пусть v — функция, имеющая ту же гладкость, что и решение первой краевой задачи и v принимает максимальное значение в точке (x_0, t_0), лежащей либо внутри, либо на верхнем основании цилиндра. Заметим тогда, что

$$\left.\left(\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\Delta v\right)\right|_{t_0,x_0} \ge 0,$$

так как в точке максимума $\dfrac{\partial v}{\partial t} \ge 0, \quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial {x_i}^2} \le 0.$

Если взять функцию $u_\varepsilon = u + \varepsilon|x|^2$, где $\varepsilon > 0,\ |x|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2$, то

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - a^2\Delta u_\varepsilon = -2a^2 n\varepsilon < 0,$$

и в силу замечания, сделанного выше, u_ε не может принимать максимальное значение внутри цилиндра либо на его верхнем основании. Значит

$$u_\varepsilon \le M + \varepsilon \max_{x\in\Omega\cup\partial\Omega} |x|^2\ .$$

Тогда

$$u \le M + \varepsilon(\max_{x\in\Omega\cup\partial\Omega} |x|^2 - |x|^2)\ .$$

Отсюда, при $\varepsilon \to 0$ имеем $u \le M$.

Для доказательства второй половины неравенства введем функции $w = -u$. Тогда w является решением задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2\Delta w = 0, \quad w|_{t=0} = -g, \quad w|_{x\in\partial\Omega} = -h$$

и в силу доказанного выше

$$w \le \max(\max(-g), \max(-h)) = -\min(\min g, \min h) = -m\ ,$$

то есть $-u \le -m$ и, следовательно, $m \le u$.

Применяя принцип максимума, легко доказать единственность решения первой краевой задачи.

Пусть, например, имеется два решения u_1 и u_2 задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f, \quad u|_{t=0} = g, \quad u|_{x\in\partial\Omega} = h \ . \tag{2.51}$$

Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ является решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x\in\partial\Omega} = 0$$

и, согласно принципу максимума, $u = 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению принципа максимума для задачи Коши.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать только ограниченные решения задачи Коши.

Теорема 2.3.2 (Принцип максимума для задачи Коши) *Пусть u — ограниченное решение задачи*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u, \quad u|_{t=0} = g \ .$$

Тогда

$$m = \inf_{x\in R^n} g(x) \le u \le \sup_{x\in R^n} g(x) = M \ .$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $u_\varepsilon = u - \varepsilon(|x|^2 + 2a^2tn)$. Тогда u_ε удовлетворяет уравнению теплопроводности. Так как функция u ограничена, то u_ε стремится к $-\infty$ при $|x| \to \infty$, значит, $u_\varepsilon(t,x) < M$ при достаточно больших $|x|$. Применим теорему 2.3.1 к цилиндру $(t,x) : \{|x| \le R, \ t \in [0,T]\}$, где R выбрано так, что $u_\varepsilon(t,x) \le M$ при $R \le |x|$. Тогда, учитывая, что $u_\varepsilon(0,x) \le u(0,x) \le M$, имеем $u_\varepsilon(t,x) = u(t,x) - \varepsilon(|x|^2 + 2a^2tn) \le M$ внутри цилиндра. Так как в силу выбора R это же неравенство выполнено и вне цилиндра, получаем, что оно справедливо всюду и в силу произвольности ε имеем $u(t,x) \le M$.

Вторая часть неравенства доказывается так же как в теореме 2.3.1.

Аналогично тому, как это было сделано выше для первой краевой задачи, легко доказать, что если в классе ограниченных решений задача Коши $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f$, $u|_{t=0} = g(x)$ имеет решение, то оно единственно.

2.3.3 Решение задачи Коши

Получим явную формулу для решения задачи Коши для однородного ($f \equiv 0$) уравнения теплопроводности, используя преобразование Фурье. Нам потребуются следующие факты из теории преобразования Фурье. Если $f(x) \in L_1(R^n)$, то существует интеграл

$$(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} f(x) e^{-ix\xi} dx = \overline{f}(\xi) \ .$$

Здесь используется обозначение $x\xi = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\xi_j$, i – мнимая единица. Переход к функции $\overline{f}(\xi)$ называется ***преобразованием Фурье*** функции $f(x)$. Зная функцию $\overline{f}(x)$, легко найти функцию $f(x)$. Для этого следует воспользоваться так называемым ***обратным преобразованием Фурье***: $f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} \overline{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$.

Предположим, что однородная задача Коши (2.49)(2.50) имеет решение, причем само решение и все его производные обращаются в 0 при $|x| \to \infty$.

Положим в уравнении (2.49) $f = 0$, умножим полученное уравнение на $(2\pi)^{-n/2}e^{-ix\xi}$ и проинтегрируем по x

$$(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-ix\xi}\,dx - (2\pi)^{-n/2}a^2 \int\limits_{R^n} \Delta u e^{-ix\xi}\,dx = 0\ . \tag{2.52}$$

Если обозначить через $\overline{u}$ преобразование Фурье функции u, то из (2.52) следует, что

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - a^2 \sum_{j=1}^{n} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2} e^{-ix\xi}\,dx = 0\ . \tag{2.53}$$

В каждом слагаемом суммы дважды произведем интегрирование по частям с учетом того, что $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \to 0$ при $|x| \to \infty$. После простых преобразований получим

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + a^2|\xi|^2\overline{u} = 0\ , \tag{2.54}$$

$$\overline{u}|_{t=0} = \overline{g}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} g(x)e^{-ix\xi}\,dx\ . \tag{2.55}$$

Таким образом, функция $\overline{u}$ является решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Цель применения преобразования Фурье заключается в данном случае в том, чтобы задачу Коши для дифференциального уравнения в частных производных свести к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Решая задачу Коши (2.54), (2.55), имеем

$$\overline{u}(t,\xi) = \overline{g}(\xi)e^{-a^2|\xi|^2 t}\ .$$

Для нахождения u применяется теперь обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} \overline{u}(t,\xi)e^{ix\xi}\,d\xi = \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n}\left((2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} g(y)e^{-iy\xi}e^{-a^2|\xi|^2 t}\,dy\right)e^{ix\xi}\,d\xi = \\
&= (2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} g(y)e^{-i(y-x)\xi}e^{-a^2|\xi|^2 t}dy\,d\xi = \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n}\left((2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} e^{-a^2|\xi|^2 t}e^{-i(y-x)\xi}\right)d\xi g(y)dy\ .
\end{aligned}$$

Для вычисления внутреннего интеграла воспользуемся тем, что преобразование Фурье функции $e^{-|x|^2/2}$ совпадает с ней самой. Введем новые переменные z_j по формуле $z_j = \sqrt{2ta^2}\xi_j$, тогда $d\xi_j = \left(\sqrt{2a^2t}\right)^{-1} dz_j$ и

$$(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} e^{-a^2|\xi|^2 t}e^{-i(y-x)\xi}d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} e^{-|z|^2/2}e^{-i(y-x)z/\sqrt{2a^2t}}\,dz(2a^2t)^{-n/2} = (2a^2t)^{-n/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\ .$$

Таким образом, имеем

$$u(t,x) = (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int\limits_{R^n} g(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}}\, dy \ .$$

Полученная формула требует обоснования, так как она выведена в предположении существования решения задачи Коши, обладающего определенными свойствами. Кроме того, при ее выводе пользовались, например, без обоснования правомерности возможностью дифференцирования интеграла по параметру.

Справедлива следующая теорема, которую примем без доказательства.

Теорема 2.3.3 *Пусть $g(x)$ — непрерывная и ограниченная функция. Тогда функция*

$$u(t,x) = (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} g(y)\, dy \tag{2.56}$$

бесконечно дифференцируема при $t > 0$, ограничена, удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0$ и $u(t,x) \to g(x)$ при $t \to +0$.

Формула (2.56) называется ***формулой Пуассона.***

2.3.4 Простейшие краевые задачи и неоднородное уравнение теплопроводности

Решение неоднородного уравнения теплопроводности легко получить аналогично тому, как это делалось для волнового уравнения.

Пусть требуется решить задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(t,x), \quad u|_{t=0} = 0 \ .$$

Решение этой задачи получается по схеме, описанной в пункте 2.2.1. Рассмотрим для этого вспомогательную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v = 0, \quad v|_{t=\tau} = f(\tau, x) \ .$$

Пусть $v = v(t,x,\tau)$ — решение этой задачи. Согласно теореме 2.3.3 оно имеет вид:

$$v = \left(4\pi a^2 (t-\tau)\right)^{-n/2} \int\limits_{R^n} f(\tau, y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 (t-\tau)}}\, dy \ .$$

Покажем, что

$$u(t,x) = \int\limits_0^t v(t,x,\tau)\, d\tau \ .$$

Действительно, $u(0,x) = \int\limits_0^0 v\, d\tau = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v(t,x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial v(t,x,\tau)}{\partial t}\, d\tau = f(t,x) + \int\limits_0^t a^2 \Delta v\, d\tau =$$

$$= f(t,x) + a^2 \Delta \int\limits_0^t v\, d\tau = f(t,x) + a^2 \Delta u \ .$$

Всюду в этой главе точка x принадлежала n-мерному пространству. В этом пункте предположим, что $n = 1$ и рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{x=0} = 0, \quad x > 0 \ , \quad t > 0 \ ,$$

где $\varphi(x)$ ограниченная непрерывная функция и $\varphi(0) = 0$. Продолжим функцию φ нечетным образом на область отрицательных значений x и покажем, что тогда решение этой задачи имеет вид

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \, dy \ .$$

Согласно предыдущему параграфу функция $u(t,x)$, определенная этой формулой, удовлетворяет уравнению и начальному условию. Поэтому достаточно установить, что эта функция удовлетворяет краевому условию.

Действительно

$$u(t,0) = \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{y^2}{4a^2 t}} \, dy \ .$$

Функция $\varphi(y)$ — нечетная, $e^{-y^2/(4a^2 t)}$ — четная, значит под интегралом стоит нечетная функция и, так как интеграл вычисляется в симметричных пределах, он равен 0.

Полученную формулу для u можно преобразовать, используя нечетность функции $\varphi(y)$:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \, dy + \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \, dy \right) = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \left(\int\limits_{0}^{\infty} -\varphi(y) e^{-\frac{|x+y|^2}{4a^2 t}} \, dy + \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \, dy \right) = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(y) \left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{|x+y|^2}{4a^2 t}} \right) \, dy \ . \end{aligned}$$

Для решения задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad x > 0, \ t > 0$$

заметим, что если $\varphi(x)$ продолжить четным образом, то формула Пуассона

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \, dy$$

по-прежнему дает решением поставленной задачи. Это следует из рассуждений, аналогичных предыдущим, и того, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \right|_{x=0}$$

нечетная функция.

Нетрудно теперь заметить, что выражение для $u(t,x)$ преобразуется следующим образом:

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{1}{4\pi a^2 t}} \int\limits_0^\infty \varphi(y) \left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{|x+y|^2}{4a^2 t}} \right) dy \ .$$

2.3.5 Применение метода разделения переменных (Фурье) к решению краевых задач

Одним из распространенных методов решения краевых задач для уравнений с частными производными является так называемый метод разделения переменных, который часто встречается под названием метода Фурье.

Основная идея этого метода, которая будет проиллюстрирована ниже на различных примерах, состоит в том, что решение данной краевой задачи для уравнения в частных производных сводится к решению вспомогательных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений или для уравнений в частных производных, но с меньшим числом независимых переменных. Для этого решения исходного уравнения в частных производных записываются в виде произведений решений вспомогательных задач. Затем, линейные комбинации этих решений, взятые со специально подобранными коэффициентами, образуют решение исходной краевой задачи.

2.3.5.1 Задача о распространении тепла в стержне

Рассмотрим сначала задачу о распространении тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре. Задача состоит в отыскании решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.57}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \tag{2.58}$$

и при начальном условии

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \ . \tag{2.59}$$

Попытаемся сначала найти не равное тождественно нулю решение уравнения (2.57), удовлетворяющее условиям (2.58), причем будем искать это решение в виде

$$u(t,x) = X(x)T(t) \ ,$$

где $X(x)$ — функция одного переменного x, а $T(t)$ — функция зависящая только от t.

Подставляя функцию $u(t,x)$ в (2.57), имеем $a^2 X'' T = T' X$. Разделив это равенство на $a^2 T X$ (тем самым разделяем переменные), получим

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \ . \tag{2.60}$$

Равенство (2.60) должно выполняться при всех $t > 0$ и $x \in (0, l)$. Так как правая часть этого равенства зависит только от x, а левая — от t, фиксируя, например, x и меняя t или наоборот, убеждаемся, что правая и левая части при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение. Обозначим это значение через $-\lambda$ (знак минус выбран только для удобства последующих выкладок). Тогда из (2.60) получим

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \ , \tag{2.61}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \ . \tag{2.62}$$

Из граничных условий (2.58) имеем

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

Поскольку $T(t) \not\equiv 0$ (иначе решение $u(t,x)$ было бы тождественно равно нулю), получаем

$$X(0) = X(l) = 0 \ . \tag{2.63}$$

Таким образом, для нахождения функции $X(x)$ получилась следующая задача, носящая название ***задачи Штурма-Лиувилля***: найти те значения параметра λ, при которых существует нетривиальное решение уравнения (2.62), удовлетворяющее краевым условиям (2.63). Те значения параметра λ, при которых существует ненулевое решение задачи (2.62), (2.63), называются ***собственными числами***, а сами решения — ***собственными функциями*** задачи Штурма-Лиувилля.

Для нахождения решения задачи Штурма-Лиувилля предположим сначала, что $\lambda < 0$. Тогда общее решение уравнения (2.62) имеет вид:

$$X(x) = c_1 e^{-x\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{x\sqrt{-\lambda}} \ .$$

Из граничных условий имеем $c_1 + c_2 = 0, \ \ c_1 e^{-l\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{l\sqrt{-\lambda}} = 0$, откуда следует, что $c_1 = c_2 = 0$, значит $X(x) \equiv 0$ и $\lambda < 0$ не может быть собственным числом [3].

В случае, когда $\lambda = 0$, решение уравнения (2.62) имеет вид $X(x) = c_1 + c_2 x$ и из граничных условий следует, что $c_1 = c_2 = 0$ и, следовательно, $X(x) \equiv 0$.

При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (2.62) имеет вид:

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x \ . \tag{2.64}$$

Из условия $X(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$. Из условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_2 \sin l\sqrt{\lambda} = 0$. Если $c_2 = 0$, получается тривиальное решение $X(x) \equiv 0$. Таким образом, следует считать, что $c_2 \neq 0$. Тогда $\sin l\sqrt{\lambda} = 0$, откуда $\sqrt{\lambda} = k\pi/l$, где k — любое целое положительное число.

Итак, собственные числа задачи Штурма-Лиувилля (2.62), (2.63) $\lambda_k = (k\pi/l)^2$, $k = 1, 2, \ldots$, а соответствующие им собственные функции $X_k(x) = \sin(k\pi x/l)$ определяются с точностью до произвольного множителя, который выберем равным 1.

При $\lambda = \lambda_k$ решение уравнения (2.61) имеет вид:

$$T_k(t) = a_k e^{-a^2\lambda_k t} = a_k e^{-a^2k^2\pi^2t/l^2} \ .$$

Таким образом, функции

$$u_k(t,x) = X_k T_k = a_k e^{-a^2k^2\pi^2t/l^2} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

[3]То, что $\lambda < 0$ не является собственным числом, можно было получить, используя свойства оператора Штурма-Лиувилля, который рассматривался в параграфе 1.5. Кроме того, из свойств этого оператора следует, что его собственные функции, которые являются собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля, попарно ортогональны.

удовлетворяют уравнению (2.57) и граничным условиям (2.58) при любых постоянных значениях a_k.

Так как уравнение (2.57) линейное и однородное, всякая конечная сумма решений уравнения также будет решением, удовлетворяющим граничным условиям.

Это же утверждение, очевидно, справедливо и для бесконечной суммы, то есть ряда, если он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и один раз по t.

Итак, пусть

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-a^2k^2\pi^2t/l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\ . \tag{2.65}$$

Осталось так подобрать коэффициенты a_k, чтобы удовлетворить начальному условию (2.59). Полагая в (2.65) $t=0$, получим:

$$u(0,x)=\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{l}\ . \tag{2.66}$$

Эта формула представляет собой разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам на интервале $(0,l)$. Из математического анализа известно, что коэффициенты этого разложения определяются по формулам

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\ . \tag{2.67}$$

Таким образом, решение задачи (2.57)-(2.59) определяется по формуле (2.65), где коэффициенты вычисляются по формуле (2.67) (предполагается, что ряд сходится и возможно его почленное дифференцирование).

Покажем, что если $\varphi(x)$ непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную производную, причем $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, то ряд сходится равномерно и абсолютно и его можно почленно дифференцировать любое число раз по x и t при $t>0$. В силу условий, наложенных на функцию $\varphi(x)$, равномерная и абсолютная сходимость ряда (2.66) является следствием известной теоремы из теории тригонометрических рядов. Поскольку при $t\geq 0$

$$0<e^{-a^2k^2\pi^2t/l^2}\leq 1\ ,$$

а при $t>0$ и достаточно больших k

$$0<\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2e^{-a^2k^2\pi^2t/l^2}<1,\quad 0<\frac{k\pi}{l}e^{-a^2k^2\pi^2t/l^2}<1\ ,$$

члены ряда (2.65) при $t=0$ и ряды, получаемые из (2.65) почленным дифференцированием по t или x при $t>0$ и больших k мажорируются членами ряда (2.66). Отсюда следует, что все эти ряды также сходятся абсолютно и равномерно. Тогда из теории рядов следует, что функция $u(t,x)$ непрерывна при $t\geq 0$ и дифференцируема при $t>0$, причем ряд можно дифференцировать почленно. Аналогично проверяется существование производных любого порядка при $t>0$.

В дальнейшем при применении метода разделения переменных ограничимся формальной процедурой построения решения, не выясняя условий сходимости получаемых рядов.

2.3.5.2 Неоднородные уравнения с неоднородными граничными условиями

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x) \ . \tag{2.68}$$

Решение задачи (2.68),(2.58),(2.59) будем искать в виде

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \ , \tag{2.69}$$

где $X_k(x)$ — собственные функции соответствующей задачи Штурма-Лиувилля, которая получается при решении однородного уравнения. В нашем случае функции $X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$.

Предположим, что функция $f(t,x)$ такова, что разлагается в ряд по функциям $X_k(x)$, то есть

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \ . \tag{2.70}$$

Здесь $f_k(t)$ — коэффициенты Фурье функции $f(t,x)$, которые, как известно, находятся по формуле

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \ . \tag{2.71}$$

Подставляя ряды (2.69), (2.70) в уравнение (2.68) и полагая, что ряд можно почленно дифференцировать, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k'(t) + \left(\tfrac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) - f_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = 0 \ . \tag{2.72}$$

Отсюда, в силу линейной независимости функций $\sin \frac{k\pi x}{l}$ следует, что функции $T_k(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$T_k'(t) + \left(\tfrac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) - f_k(t) = 0 \ . \tag{2.73}$$

Из начального условия следует, что

$$\varphi(x) = u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) \ ,$$

откуда заключаем, что

$$T_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = a_k \ . \tag{2.74}$$

Решая обыкновенные дифференциальные уравнения (2.73) с начальными условиями (2.74), получим:

$$T_k(t) = a_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_k(\tau)\, d\tau \ .$$

Подставляя это выражение в (2.69), имеем окончательно

$$u(t,x) \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l} \ + \ \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^t e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau \, \sin\frac{k\pi x}{l} \quad .$$

Рассмотрим теперь случай, когда граничные условия неоднородные, то есть требуется найти решение уравнения (2.68), удовлетворяющее условию (2.59), и такое, что

$$u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,l) = \mu_2(t) \ .$$

Эта задача легко сводится к предыдущей в случае гладких функций $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$. Действительно, введем новую функцию $v(t,x)$ такую, что $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$. Гладкую функцию $w(t,x)$ подберем так, чтобы она удовлетворяла тем же граничным условиям, что и функция $u(t,x)$. Таких функций существует бесконечно много. Например, можно взять $w(t,x) = \mu_1(t) + x\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)/l$. Тогда для функции $v(t,x)$ получается следующая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial w}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f(t,x)\right) \ ,$$
$$v(t,0) = v(t,l) = 0, \ v(0,x) = \varphi(x) - w(0,x) \ .$$

2.3.5.3 Задача о колебании прямоугольной пластины

Метод разделения переменных может применяться не только для параболических, но и для уравнений других типов. Функции могут зависеть от произвольного (не обязательно двух) числа аргументов.

Рассмотрим, например, задачу о колебании прямоугольной мембраны, закрепленной по периметру. Если предположить, что в положении равновесия мембрана находится в плоскости Oxy, и $u(t,x,y)$ — величина отклонения точки с координатой x, y в момент времени t от положения равновесия, то эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.75}$$

с граничными условиями

$$u|_{x=0} = 0, \ u|_{x=l} = 0, \ u|_{y=0} = 0, \ u|_{y=q} = 0 \tag{2.76}$$

и начальными условиями

$$u|_{t=0} = f(x,y), \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x,y) \ . \tag{2.77}$$

Будем искать нетривиальное решение уравнения (2.75), удовлетворяющее условиям (2.76), в виде $u(t,x,y) = T(t)v(x,y)$. Подставляя эту функцию в (2.75) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\frac{1}{v} \ .$$

Рассуждая как и ранее, получим, что равенство возможно только в том случае, когда обе части равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $-\lambda$. Тогда получим два уравнения:

$$T'' + a^2\lambda T = 0 \ , \tag{2.78}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda v = 0 \ . \tag{2.79}$$

Из граничных условий следует, что

$$v|_{x=0} = 0, \ v|_{x=l} = 0, \ v|_{y=0} = 0, \ v|_{y=q} = 0 \ . \tag{2.80}$$

Таким образом, как и ранее пришли к задаче Штурма- Лиувилля (2.79),(2.80). Для того, чтобы определить знак λ, при котором могут существовать нетривиальные решения, умножим уравнение (2.79) на $v(x,y)$ и проинтегрируем по прямоугольнику:

$$\int\limits_0^q \int\limits_0^l v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) dxdy + \lambda \int\limits_0^q \int\limits_0^l v^2\, dxdy = 0$$

Учитывая граничные условия (2.80), и тождества

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \ \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

получаем, что

$$\lambda \int\limits_0^q \int\limits_0^l v^2\, dxdy = \int\limits_0^q \int\limits_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dxdy -$$

$$- \int\limits_0^q \int\limits_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dxdy =$$

$$= \int\limits_0^q \int\limits_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dxdy - \int\limits_0^q \left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} dy - \int\limits_0^l \left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=q} dx =$$

$$= \int\limits_0^q \int\limits_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dxdy \ ,$$

откуда следует, что $\lambda \geq 0$. Заметим, что собственное число λ не равно 0, так как если $\lambda = 0$, то интеграл в правой части равен нулю, откуда следует, что частные производные функции $v(x,y)$ равны нулю, то есть $v(x,y) \equiv const$. Но так как на границе прямоугольника $v = 0$, то $v(x,y) \equiv 0$, что невозможно.

Для решения задачи Штурма-Лиувилля (2.79), (2.80) снова применим метод Фурье. Пусть $v(x,y) = X(x)Y(y)$. Подставляя это выражение в (2.79) имеем после деления на XY:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = -\frac{X''(x)}{X(x)} \ ,$$

откуда получаем два уравнения:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \ Y''(y) + \nu Y(y) = 0 \ , \tag{2.81}$$

где $\nu = \lambda - \mu$. Из граничных условий (2.80) следует, что

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0,\ Y(0) = 0,\ Y(q) = 0\ . \tag{2.82}$$

Полученные задачи Штурма-Лиувилля уже решались:

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\ \nu_n = \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2,\ k, n = 1, 2, \ldots$$
$$\lambda_{kn} = \pi^2\left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{q^2}\right),\ X_k = \sin\frac{k\pi x}{l},\ Y_n = \sin\frac{n\pi y}{q}\ .$$

Тогда

$$v_{kn} = \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{q}\ . \tag{2.83}$$

Из уравнения (2.78) следует, что

$$T_{kn}(t) = a_{kn}\cos a\sqrt{\lambda_{kn}}t + b_{kn}\sin a\sqrt{\lambda_{kn}}t\ .$$

Следовательно, частное решение уравнения (2.75), удовлетворяющее граничным условиям (2.76), имеет вид:

$$u_{kn}(t, x, y) = \left(a_{kn}\cos a\sqrt{\lambda_{kn}}t + b_{kn}\sin a\sqrt{\lambda_{kn}}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{q}\ .$$

Как и ранее составим теперь ряд:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{kn}\cos a\sqrt{\lambda_{kn}}t + b_{kn}\sin a\sqrt{\lambda_{kn}}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{q}\ . \tag{2.84}$$

В случае равномерной сходимости этого ряда и рядов, получающихся из него двукратным почленным дифференцированием, очевидно, сумма также будет удовлетворять уравнению (2.75) и граничным условиям (2.76).

Подберем теперь соответствующим образом коэффициенты a_{kn} и b_{kn}, для того, чтобы удовлетворить начальным условиям.

Первое из условий (2.77) дает:

$$u|_{t=0} = f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}\sin\frac{n\pi y}{q}\Big)\sin\frac{k\pi x}{l}\ . \tag{2.85}$$

Если обозначить выражение в скобке через $A_k(y)$, то (2.85) перепишется в виде

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}A_k(y)\sin\frac{k\pi x}{l}\ ,$$

то есть $A_k(y)$ — коэффициенты разложения функции $f(x, y)$ в ряд Фурье по синусам и, следовательно,

$$A_k(y) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x, y)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\ .$$

Учитывая, что

$$A_k(y) = \sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}\sin\frac{n\pi y}{q}\ ,$$

получаем, что a_{kn} — коэффициенты разложения функции $A_k(y)$ по синусам, то есть

$$a_{kn} = \frac{2}{q}\int\limits_0^q A_k(y)\sin\frac{n\pi y}{q}\,dy = \frac{4}{lq}\int\limits_0^q\int\limits_0^l f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dxdy\ .$$

Второе начальное условие и выражение (2.84) дают:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a\sqrt{\lambda_{kn}}b_{kn}\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{k\pi x}{l}\ ,$$

откуда, рассуждая как это было сделано выше, получаем:

$$b_{kn} = \frac{4}{alq\sqrt{\lambda_{kn}}}\int\limits_0^q\int\limits_0^l g(x,y)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dxdy\ .$$

2.3.6 Примеры решения задач к параграфу 2.3

Пример 1. Найти решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9u = 4\sin 2t\cos 3x - 9x^2 - 2, \tag{2.86}$$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(t,\pi)}{\partial x} = 2\pi, \tag{2.87}$$

$$u(0,x) = x^2 + 2, \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0. \tag{2.88}$$

Решение. Совершим замену зависимой переменной u таким образом, чтобы для новой функции граничные условия были однородными. Для этого подберем сначала какую-нибудь функцию, которая удовлетворяет тем же граничным условиям, что и функция u. В качестве такой функции можно взять, например, $w = x^2$, которая, очевидно, удовлетворяет граничным условиям (2.87). Пусть теперь $u = v + x^2$. Найдем, каким условиям должна удовлетворять функция v. Для этого подставим функцию $u = v + x^2$ в (2.86), (2.87), (2.88). В результате получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 9v = 4\sin 2t\cos 3x, \tag{2.89}$$

$$\frac{\partial v(t,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v(t,\pi)}{\partial x} = 0, \tag{2.90}$$

$$v(0,x) = 2, \quad \frac{\partial v(0,x)}{\partial t} = 0. \tag{2.91}$$

Таким образом, для нахождения функции v получили задачу (2.89), (2.90), (2.91). Главное отличие этой задачи от задачи (2.86), (2.87), (2.88) — однородность граничных условий. Будем искать функцию v в виде

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t). \tag{2.92}$$

В качестве функций X_k выберем собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, соответствующей (2.89), (2.90). Для их нахождения подставим в однородное уравнение (2.89) и условия (2.90) вместо функции v функцию $X(x)T(t)$, считая, что X и T не равны нулю тождественно. В результате получим

$$XT'' - X''T - 9XT = 0, \quad X'(0)T(t) = X'(\pi)T(t) = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{T'' - 9T}{T} = \frac{X''}{X}, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

В первом равенстве справа стоит функция, зависящая только от t, а слева — от x, причем t и x независимы. Такое возможно тогда и только тогда, когда правая и левая чести этого равенства константы. Обозначим эту константу $-\lambda$. В результате получим задачу Штурма-Лиувилля, то есть задачу о нахождении таких чисел λ и соответствующих им ненулевых функций X, которые удовлетворяют условиям

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{2.93}$$

$$X'(0) = X'(\pi) = 0. \tag{2.94}$$

Рассмотрим несколько случаев. Пусть $\lambda < 0$. Тогда решение дифференциального уравнения (2.93) имеет вид

$$X = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

Требование выполнения условий (2.94) приводит к равенствам

$$\sqrt{-\lambda}(-C_1 + C_2) = 0, \quad \sqrt{-\lambda}(-C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi}) = 0,$$

из которых следует что $C_1 = C_2 = 0$, то есть $X \equiv 0$.

Если $\lambda = 0$, то $X = C_1 x + C_2$ и из условий (2.94) следует, что $C_1 = 0$. При этом C_2 может быть любым числом. Таким образом задача Штурма-Лиувилля имеет решение $\lambda_0 = 0,\ X_0(x) = 1$.

Пусть теперь $\lambda > 0$. В этом случае общим решением уравнения (2.93) является функция $X = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x$. Из первого условия (2.94) получаем $C_1\sqrt{\lambda} = 0$, откуда следует $C_1 = 0$. Второе условие (2.94) дает $C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$. При $C_2 = 0$ получаем нулевое решение X. Если же $C_2 \neq 0$, то $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$. Отсюда заключаем, что $\sqrt{\lambda}\pi = k\pi,\ k = 1, 2 \ldots$. Следовательно, у задачи Штурма-Лиувилля есть еще решения: $\lambda_k = k^2,\ X_k(x) = \cos kx$.

Таким образом, для нахождения v по формуле (2.92) осталось найти функции $T_k(t)$. Для этого подставим (2.92) в (2.89). Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k'' X_k - \sum_{k=0}^{\infty} T_k X_k'' - 9\sum_{k=0}^{\infty} T_k X_k = 4\sin 2t \cos 3x.$$

Учитывая, что $X_k'' = -\lambda_k X_k,\ \lambda_k = k^2$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k \big(T_k'' + (k^2 - 9)T_k\big) = 4\sin 2t \cos 3x. \tag{2.95}$$

Разложим правую часть этого равенства в ряд по X_k, то есть представим ее в виде

$$4\sin 2t \cos 3x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) X_k(x). \tag{2.96}$$

Коэффициенты a_k находятся по формуле [4]

$$a_k = \frac{\int\limits_0^\pi X_k 4\sin 2t \cos 3x\, dx}{\int\limits_0^\pi X_k^2\, dx}.$$

Подставляя разложение (2.96) в (2.95) получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k\big(T_k'' + (k^2-9)T_k\big) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)X_k(x).$$

Отсюда имеем уравнения для нахождения T_k:

$$T_k'' + (k^2-9)T_k = a_k\ . \tag{2.97}$$

Функция v должна удовлетворять начальным условиям (2.91). Подставляя (2.92) в (2.91) получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(0) = 2,\quad \sum_{k=0}^{\infty} X_k T_k'(0) = 0.$$

Отсюда, рассуждая так же, как и при нахождении коэффициентов a_k, заключаем, что $T_0(0) = 2,\ T_k(0) = 0$ при $k > 0$, $T_k'(0) = 0$ при всех k.

Таким образом, для определения T_k получили задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (2.97), зависящего от параметра k. Для его решения целесообразно рассмотреть несколько случаев.

Пусть $k = 0$. Тогда имеем $T_0'' - 9T_0 = 0,\ T_0(0) = 2,\ T_0'(0) = 0$. Общее решение этого уравнения $T_0(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$. Из начальных условий имеем

$$C_1 + C_2 = 2,\quad 3C_1 - 3C_2 = 0,$$

то есть $C_1 = C_2 = 1$ и, следовательно, $T_0(t) = e^{3t} + e^{-3t}$.

При $k = 3$ имеем задачу $T_3'' = 4\sin 2t,\ T_3(0) = T_3'(0) = 0$. Отсюда следует, что $T_3(t) = 2t - \sin 2t$.

При всех остальных значениях k получаем $T_k'' + (k^2-9)T_k = 0$, $T_k(0) = T_k'(0) = 0$, откуда следует, что $T_k(t) = 0$.

Итак, все значения T_k определены. Теперь, учитывая (2.92) и определение функции v, можно выписать решение задачи (2.86),(2.87),(2.88)

$$u(t,x) = x^2 + e^{3t} + e^{-3t} + (2t - \sin 2t)\cos 3x.$$

Пример 2. Вывести формулу для решения задачи:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0 < x, t < \infty,\\
\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} &= g(t),\quad 0 < t < \infty,\\
u(0,x) &= 0,\qquad 0 < x < \infty.
\end{aligned}$$

[4] В данном случае проще воспользоваться не общей формулой для нахождения коэффициентов a_k, а подобрать их, так как требуемое разложение в ряд имеет вид

$$4\sin 2t\cos 3x = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \dots.$$

Из этого равенства легко заметить, что $a_3 = 4\sin 2t$, а остальные коэффициенты равны нулю.

Решение. Определим сначала синус и косинус преобразования Фурье. На полупрямой $0 < x < \infty$ ***синус-преобразованием Фурье*** для функции $f(x) \in L_1(0, \infty)$ называется переход от функции $f(x)$ к функции

$$\overline{f}^{(s)}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(x) \sin(x\xi)\, dx.$$

Функцию $\overline{f}^{(s)}(\xi)$ называют ***синус-образом Фурье*** для функции $f(x)$. Переход от синус-образа к оригиналу осуществляется тем же преобразованием, то есть обратное преобразование к синус-преобразованию совпадает с ним самим:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \overline{f}^{(s)}(\xi) \sin(x\xi)\, d\xi.$$

Аналогично определяется ***косинус-преобразованием Фурье*** для функции $f(x) \in L_1(0, \infty)$

$$\overline{f}^{(c)}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(x) \cos(x\xi)\, dx.$$

Функцию $\overline{f}^{(c)}(\xi)$ называют ***косинус-образом Фурье*** для функции $f(x)$. Переход от косинус-образа к оригиналу осуществляется тем же преобразованием:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \overline{f}^{(c)}(\xi) \cos(x\xi)\, d\xi.$$

Применим косинус-преобразование Фурье, считая, что функция u и ее производные по x стремятся достаточно быстро к нулю при $x \to \infty$. Это предположение нужно для того, чтобы все интегралы, фигурирующие ниже существовали. Для применения косинус-преобразования Фурье умножим дифференциальное уравнение на $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cos(x\xi)$ и проинтегрируем по x от 0 до ∞. Используя граничное условие $\dfrac{\partial u(t,0)}{\partial x} = g(t)$, интегрируя по частям, и, учитывая, что при $x \to \infty$ функция u и ее производные по x равны нулю, получим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} \cos(x\xi)\, dx = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty u \cos(x\xi)\, dx = \frac{\partial \overline{u}^{(c)}(t,\xi)}{\partial t} = a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos(x\xi)\, dx =$$

$$= a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x\xi) \Bigg|_{x=0}^{x=\infty} + a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi \int\limits_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} \sin(x\xi)\, dx =$$

$$= -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} g(t) + a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} u\xi \sin(x\xi) \Bigg|_{x=0}^{x=\infty} - a^2 \xi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty u \cos(x\xi)\, dx =$$

$$= -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} g(t) - a^2 \xi^2 \overline{u}^{(c)}(t,\xi).$$

Таким образом, для функции $\overline{u}^{(c)}$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\overline{u}^{(c)}(t,\xi)}{dt} + a^2 \xi^2 \overline{u}^{(c)}(t,\xi) = -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} g(t). \tag{2.98}$$

Для нахождения начального условия для этого уравнения применим косинус-преобразование к начальному условию $u(0,x)=0$:

$$\overline{u}^{(c)}(0,\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty u(0,x)\cos(x\xi)\,dx=0. \tag{2.99}$$

Функция $\overline{u}^{(c)}$ может быть найдена теперь как решение задачи Коши (2.98), (2.99). Уравнение (2.98) это линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Для его решения представим $\overline{u}^{(c)}$ в виде $\overline{u}^{(c)}=vw$, где w — какое-нибудь невырожденное решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.98):

$$\frac{dw}{dt}+a^2\xi^2w=0. \tag{2.100}$$

Отсюда находим $w=e^{-a^2\xi^2t}$. Подставляя теперь $\overline{u}^{(c)}=vw$ в (2.98), имеем

$$\frac{dv}{dt}w+v\Big(\frac{dw}{dt}+a^2\xi^2w\Big)=-a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}g(t).$$

Учитывая (2.100) и вид функции w, получаем

$$\frac{dv}{dt}=-a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}g(t)e^{a^2\xi^2t},$$

откуда

$$v=C-a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t g(\tau)e^{a^2\xi^2\tau}\,d\tau.$$

Следовательно

$$\overline{u}^{(c)}=vw=\Big(C-a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t g(\tau)e^{a^2\xi^2\tau}\,d\tau\Big)e^{-a^2\xi^2t}.$$

Из условия Коши (2.99) следует, что $C=0$, поэтому имеем

$$\overline{u}^{(c)}(t,\xi)=-a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t g(\tau)e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\,d\tau.$$

Применим теперь обратное косинус-преобразование Фурье, найдем решение $u(t,x)$ исходной задачи:

$$u(t,x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \overline{u}^{(c)}(t,\xi)\cos(x\xi)\,d\xi=-\frac{2a^2}{\pi}\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_0^t g(\tau)e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\,d\tau\Big)\,d\xi=$$
$$=-\frac{2a^2}{\pi}\int\limits_0^t g(\tau)\Big(\int\limits_0^\infty e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos(x\xi)\,d\xi\Big)\,d\tau.$$

Выражение в скобках в правой части этого равенства можно упростить, если воспользоваться следующим равенством

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2\xi^2}\cos(x\xi)\,d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}. \tag{2.101}$$

Тогда
$$\int\limits_0^{\infty} e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos(x\xi)\,d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}},$$
и окончательно имеем
$$u(t,x) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau.$$

Для полноты вывода необходимо проверить формулу (2.101). Заметим, что функция $e^{-\alpha^2\xi^2}\cos(x\xi)$ как функция от ξ четная, а $e^{-\alpha^2\xi^2}\sin(x\xi)$ — нечетная. Поэтому
$$\int\limits_0^{\infty} e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos(x\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos(x\xi)\,d\xi - i\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\sin(x\xi)\,d\xi\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}e^{-ix\xi}\,d\xi$$

Дальнейшие выкладки аналогичны тем, которые были сделаны в пункте 2.3.3 при выводе формулы решения задачи Коши.

Замечание. Если бы граничное условие имело вид $u(t,0) = g(t)$, то следовало бы применить синус преобразование Фурье.

2.3.7 Задачи к параграфу 2.3

1. Используя преобразование Фурье, получить формулу для решения задачи Коши в области $|x| < \infty,\ t > 0$ $(a, b - const)$:

а) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu$,
$u\,|_{t=0} = \varphi(x)$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu + f(t,x)$,
$u\,|_{t=0} = \varphi(x)$.

2. Найти решение следующих задач

$$\begin{aligned}
&\text{а) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad 0 < x, t < \infty\\
&\quad u(0,x) = 0, \quad u(t,0) = 0;\\
&\text{б) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x, t < \infty\\
&\quad u(0,x) = 0, \quad u(t,0) = g(t);\\
&\text{в) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad 0 < x, t < \infty\\
&\quad u(0,x) = 0, \quad u(t,0) = g(t);\\
&\text{г) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad 0 < x, t < \infty\\
&\quad u(0,x) = 0, \quad \frac{du(t,0)}{dx} = 0.
\end{aligned}$$

3. Методом разделения переменных решить следующие задачи для уравнения колебания струны в области $0 < x < l,\ t > 0$:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } u(t,0) = u(t,l) = 0,\ u(0,x) = 0,\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 2\sin\frac{2\pi}{l}x + 5\sin\frac{4\pi}{l}x\ ;\\
&\text{б) } \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t,l)}{\partial x} = 0,\ u(0,x) = 1,\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \cos\frac{\pi}{l}x\ ;\\
&\text{в) } u(t,0) = t^2,\ u(t,\pi) = t^2\ (l = \pi),\ u(0,x) = \sin x,\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0\ .
\end{aligned}$$

4. Решить задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2t,\ 0 < x < 1,\ t > 0\ ,\\
&\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} = \sin 1 \sin 2t,\ u(0,x) = 0,\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = -2\cos x.
\end{aligned}$$

5. В области $0 < x < l,\ t > 0$ решить следующие задачи:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta u,\ u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0,\ u(0,x) = \sin\frac{3\pi x}{2l}\ ;\\
&\text{б) } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}\cos\frac{5\pi x}{2l},\ \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0,\ u(t,l) = 1,\ u(0,x) = 1\ .
\end{aligned}$$

6. Координаты точек однородного и изотропного параллелепипеда D удовлетворяют неравенствам: $0 \le x \le l_1,\ 0 \le y \le l_2,\ 0 \le z \le l_3$. Найти закон изменения температуры внутри параллелепипеда D, если этот параллелепипед изолирован в тепловом отношении от окружающей среды (то есть тепловой поток на поверхности параллелепипеда равен нулю) и если начальная температура точек, лежащих внутри параллелепипеда, определяется равенством $u|_{t=0} = f(x,y,z)$.

7. Найти решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ |x| < \infty,\ y > 0,\ t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0\ ,$$

$\varphi(x, y)$ — непрерывная ограниченная функция.

2.4 ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

2.4.1 Постановка задач для эллиптических уравнений

В этой главе будут рассмотрены простейшие из эллиптических уравнений: уравнения Лапласа и Пуассона.

В этом и следующем пунктах используются следующие обозначения: x, y — точки n-мерного пространства R^n, то есть, например, $x = (x_1, \dots, x_n)$; $|x|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

Пусть $f = f(x)$ — заданная функция. Тогда неоднородное уравнение

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = f(x) \tag{2.102}$$

называется ***уравнением Пуассона***. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (2.102) имеет вид

$$\Delta u = 0\ , \tag{2.103}$$

и называется ***уравнением Лапласа.*** Таким образом, уравнение Лапласа является частным случаем уравнения Пуассона.

Выше было показано, что задача Коши для уравнения Лапласа является некорректной.

Пусть Ω — ограниченная область из n-мерного евклидового пространства R^n, $\partial\Omega$ — граница области Ω, которую будем всюду в дальнейшем считать кусочно-гладкой. Обозначим через N внешнюю нормаль к $\partial\Omega$. Для уравнения Пуассона обычно формулируются следующие задачи.

Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемую в области Ω функцию $u(x)$, удовлетворяющую в Ω уравнению (2.102) и одному из условий:

1) решение $u = u(x)$ непрерывно в $\Omega \cup \partial\Omega$ и на $\partial\Omega$ принимает заданное значение, то есть

$$u|_{\partial\Omega} = g(x) \tag{2.104}$$

(первая краевая задача или задача Дирихле);

2) функция $u = u(x)$ в каждой точке границы имеет предельное значение нормальной производной [5], совпадающее с заданной функцией, то есть

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{x\in\partial\Omega} = g(x) \tag{2.105}$$

---

[5] Под предельным значением понимается $\lim\limits_{\substack{y\to x\in\partial\Omega \\ y\in\Omega}} \frac{\partial u(y)}{\partial N}$, где $N = (N_1, \dots, N_n)$ — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$ в точке x и $\frac{\partial u(y)}{\partial N} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} N_i$.

(вторая краевая задача или задача Неймана);

3) $u = u(x)$ — непрерывная в $\Omega \cup \partial\Omega$ функция, в точках границы существует предельное значение нормальной производной и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N} + a(x)u\right)\Bigg|_{x\in\partial\Omega} = g(x),$$

где $a(x), g(x)$ — заданные непрерывные функции ***(третья краевая задача)***.

Если во всех перечисленных выше случаях решение ищут не внутри ограниченной области Ω, а вне ее, то говорят о ***внешних*** краевых задачах, в отличие от рассмотренных выше ***внутренних*** задач. При рассмотрении внешних задач на решение налагается так называемое условие регулярности на бесконечности. В случае $n = 2$ требуют, чтобы решение было ограниченным при стремлении модуля аргумента к бесконечности. Если же $n > 2$, то требуют, чтобы при $|x| \to \infty$ решение стремилось к нулю не медленнее чем $|x|^{2-n}$.

Функции, удовлетворяющие в некоторой области уравнению Лапласа, называют ***гармоническими*** в этой области.

Можно рассматривать обобщения сформулированных выше задач, когда, например, на части границы области задается условие Дирихле, на другой части — Неймана, на третьей — третье краевое условие.

В предыдущем разделе изучалось уравнение теплопроводности, которое описывало нестационарное распределение тепла в теле. Если же температура установилась, то есть не меняется со временем, то производная по t равна нулю и однородное уравнение теплопроводности превращается в уравнение Лапласа. Таким образом, рассмотренные внутренние задачи описывают, в частности, стационарное распределение тепла в теле. При этом в случае первой краевой задачи известна температура границы. Во второй краевой задаче на границе задается тепловой поток, третья краевая задача соответствует процессу теплообмена с внешней средой, температура которой известна.

2.4.2 Единственность решения задач Дирихле и Неймана

Получим, прежде всего, простые формулы, на основании которых можно будет вывести важные свойства гармонических функций и решения уравнения Пуассона.

Пусть Ω — область в R^n с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а $u(x)$ и $v(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые в Ω функции, имеющие непрерывные производные в $\Omega \cup \partial\Omega$.

Запишем тождество:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + v\Delta u$$

и проинтегрируем его по Ω. Тогда, согласно формуле Гаусса-Остроградского, имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega} v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial N(x)}\, dS_x = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int\limits_{\Omega} v\Delta u\, dx, \tag{2.106}$$

где dS элемент площади поверхности $\partial\Omega$, индекс x обозначает интегрирование по переменной x. Полученную формулу иногда называют ***формулой Грина***.

Сформулируем и докажем теперь некоторые свойства решений уравнений (2.102), (2.103).

Лемма 2.4.1 *Пусть $u_1(x), u_2(x)$ удовлетворяют уравнению (2.102) и граничному условию (2.105). Тогда $u_1(x) - u_2(x) = const$ для всех $x \in \Omega$.*

Доказательство. Заметим, что $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ является решением уравнения (2.103), причем $\left.\dfrac{\partial u}{\partial N}\right|_{x\in\partial\Omega} = 0$. Подставляя эту функцию в формулу (2.106) и выбирая в ней $v(x) = u(x)$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = 0 \ ,$$

откуда следует, что во всех точках области Ω производные первого порядка функции $u(x)$ равны 0, то есть, $u(x) = const$.

Доказанная лемма означает, что любые два решения задачи (2.102), (2.105) могут отличаться только на константу.

Лемма 2.4.2 *Для того, чтобы задача Неймана для уравнения (2.102) имела решение, необходимо выполнение равенства:*

$$\int\limits_{\partial\Omega} g(x)\, dS_x = \int\limits_{\Omega} f(x)\, dx \ . \tag{2.107}$$

Доказательство. Утверждение следует из формулы (2.106), если в ней положить $v \equiv 1$. В частности, если $u(x)$ — гармоническая в области Ω функция, имеющая непрерывные производные в $\Omega \cup \partial\Omega$, то $\int\limits_{\partial\Omega} \dfrac{\partial u(x)}{\partial N(x)}\, dS_x = 0$.

Замечание. Можно доказать, что если функции g, f непрерывны, то выполнение равенства (2.107) является достаточным условием для существования решения задачи Неймана для уравнения (2.102).

Лемма 2.4.3 *Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — два решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (2.102), (2.104), имеющие непрерывные производные в $\Omega\cup\partial\Omega$. Тогда $u_1(x) = u_2(x)$.*

Доказательство. Функция $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ является решением уравнения (2.103), причем $u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0$. Подставляя эту функцию в формулу (2.106) и выбирая в ней $v(x) = u(x)$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = 0 \ ,$$

откуда следует, что во всех точках области Ω производные первого порядка функции $u(x)$ равны 0, то есть, $u(x) \equiv const$. Но, так как на границе $\partial\Omega$ функция $u(x) = 0$, получаем, что $u(x) \equiv 0$.

Замечание. Лемму 2.4.3 нельзя рассматривать как утверждение о единственности решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Дело в том, что по определению решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона является непрерывной функцией в $\Omega \cup \partial\Omega$, а лемма доказана в предположении непрерывной дифференцируемости решения в $\Omega \cup \partial\Omega$. На самом деле теорема единственности справедлива, однако ее доказательство является более сложным и опирается на некоторые дополнительные свойства гармонических функций.

Сформулируем их без доказательства.

Теорема 2.4.1 (теорема о среднем) *Пусть $u(x)$ — гармоническая в некоторой области функция и замкнутый шар с центром в точке x радиуса R лежит в этой области. Тогда справедливы формулы:*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=R} u(y)\, dS_y = \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|y-x|\le R} u(y)\, dy \ , \tag{2.108}$$

где ω_n — площадь единичной сферы в n-мерном пространстве [6].

Заметим, что $\omega_n R^{n-1}$ — площадь сферы радиуса R в n-мерном пространстве, а $\dfrac{\omega_n R^n}{n}$ — объем шара. Поэтому первый интеграл в формуле (2.108) — является средним значением функции u на сфере радиуса R с центром в точке x, а второй интеграл — среднее значение этой же функции на шаре радиуса R с центром в точке x. Таким образом, теорема означает, что значение гармонической функции в центре сферы (шара) равно среднему значению этой функции на сфере (в шаре).

Теорема 2.4.2 (принцип максимума) *Пусть $u(x)$ — гармоническая в области Ω функция, $M = \sup\limits_{x\in\Omega} u(x)$, $m = \inf\limits_{x\in\Omega} u(x)$. Тогда, если $u(x)$ — отличная от постоянной, то ни в одной точке внутри этой области она не может принимать ни значение M, ни m.*

Заметим теперь, что если $u(x)$ отличная от постоянной гармоническая в ограниченной области Ω и непрерывная в $\Omega \cup \partial\Omega$ функция, то она принимает свое наибольшее и наименьшее значение в $\Omega \cup \partial\Omega$. Но, так как согласно принципу максимума внутри Ω эти значения приниматься не могут, свое наибольшее и наименьшее значение функция $u(x)$ принимает только на границе области.

Теперь легко получить теорему единственности решения задачи Дирихле.

Теорема 2.4.3 *Если задача Дирихле (2.102), (2.104) имеет решение, то оно единственно.*

Доказательство. Действительно, если бы существовали два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ одной и той же задачи Дирихле, то их разность была бы гармонической функцией, принимающей на границе нулевое значение. Но, так как наибольшее и наименьшее значение функция принимает на границе, получаем, что функция тождественно равна нулю, то есть $u_1(x) = u_2(x)$.

2.4.3 Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кольце и круге

В качестве примера применения метода разделения переменных для эллиптических уравнений рассмотрим сначала следующую задачу (здесь, в отличии от всех предыдущих частей этого параграфа, x и y скалярные величины):

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad r < x^2 + y^2 < R \ , \tag{2.109}$$

$$u|_{\rho=r} = \Phi_1(\varphi), \qquad u|_{\rho=R} = \Phi_2(\varphi) \ , \tag{2.110}$$

[6] $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$, $\omega_4 = 2\pi^2$. В общем случае $\omega_n = 2\pi^{n/2}\Gamma^{-1}(n/2)$, где $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$ — гамма-функция Эйлера.

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и φ — полярные координаты, $\Phi_1(\varphi), \Phi_2(\varphi)$ — заданные функции от φ, которые, очевидно, должны быть периодическими с периодом 2π.

Запишем уравнение (2.109) в полярных координатах:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{2.111}$$

и найдем нетривиальное решение этого уравнения вида $u = X(\rho)Y(\varphi)$. Подставляя эту функцию в (2.111), и, разделяя переменные, получим

$$\frac{Y''(\varphi)}{Y(\varphi)} = -\frac{\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho)}{X(\rho)} = -\lambda\ . \tag{2.112}$$

Для функции $Y(\varphi)$, которая должна быть периодической с периодом 2π, получаем уравнение $Y'' + \lambda Y = 0$. Если $\lambda < 0$, то решение этого уравнения запишется в виде линейной комбинации экспонент и не будет периодическим. При $\lambda = 0$ получается периодическая функция $Y \equiv const$. При $\lambda > 0$ решение имеет вид

$$Y(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi$$

и будет периодическим с периодом 2π только в том случае, когда $\sqrt{\lambda} = n$ — целое число. Итак, $\lambda_n = n^2,\ n = 0, 1, 2, \dots$.

Для нахождения функции $X(\rho)$ из (2.112) имеем теперь

$$\rho^2 X_n'' + \rho X_n' - n^2 X_n = 0\ . \tag{2.113}$$

Это линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. При $n = 0$ его линейно независимые решения: 1 и $\ln\rho$; при $n \neq 0$: ρ^n и ρ^{-n}. Общее решение уравнения (2.113) получается как линейная комбинация этих линейно независимых решений.

Решение уравнения (2.111) запишется теперь в виде (см. параграф 2.3.5)

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n Y_n = \alpha_0 \ln\rho + \beta_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(\alpha_n\rho^n + \beta_n\rho^{-n})\cos n\varphi + (\gamma_n\rho^n + \delta_n\rho^{-n})\sin n\varphi\right]. \tag{2.114}$$

где $\alpha_0, \beta_0, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ — постоянные, которые определяются из краевых условий (2.110):

$$\Phi_1(\varphi) = \alpha_0\ln r + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n})\cos n\varphi + (\gamma_n r^n + \delta_n r^{-n})\sin n\varphi\right]\ , \tag{2.115}$$

$$\Phi_2(\varphi) = \alpha_0\ln R + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(\alpha_n R^n + \beta_n R^{-n})\cos n\varphi + (\gamma_n R^n + \delta_n R^{-n})\sin n\varphi\right]\ . \tag{2.116}$$

Если ввести обозначения:

$$\begin{gathered} \alpha_0\ln r + \beta_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad \alpha_0\ln R + \beta_0 = \frac{A_0}{2}\ , \\ \alpha_n r^n + \beta_n r^{-n} = a_n, \qquad \alpha_n R^n + \beta_n R^{-n} = A_n\ , \\ \gamma_n r^n + \delta_n r^{-n} = b_n, \qquad \gamma_n R^n + \delta_n R^{-n} = B_n\ , \end{gathered} \tag{2.117}$$

то равенства (2.115), (2.116) перепишутся в виде

$$\Phi_1(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \ ,$$

$$\Phi_2(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \ .$$

Эти соотношения являются разложениями в ряды Фурье функций $\Phi_1(\varphi), \Phi_2(\varphi)$, и, следовательно, позволяют найти коэффициенты $a_0, a_n, b_n, A_0, A_n, B_n$, после чего коэффициенты $\alpha_0, \beta_0, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ находят путем решения системы уравнений (2.117).

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad x^2 + y^2 < R \ , \tag{2.118}$$

$$u|_{\rho=R} = \Phi(\varphi) \ , \tag{2.119}$$

где, как и ранее $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и φ — полярные координаты, $\Phi(\varphi)$ — заданная периодическая функции от φ с периодом 2π.

Как и для случая задачи в кольце, уравнение (2.118) перепишем в полярных координатах после чего будем искать нетривиальное решение этого уравнения в виде $u = X(\rho)Y(\varphi)$. Разделяя как и ранее переменные, получим те же значения для λ_n, Y_n и такое же уравнение для X_n. Отличие от задачи в кольце состоит в том, что из за того, что решение задачи в круге должно быть ограниченным, следует взять только ограниченные решения для X_n, то есть отбросить решения $\ln\rho, \rho^{-n}$. В результате получим

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n Y_n = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \tag{2.120}$$

В том случае, когда ряд можно почленно дифференцировать, сумма ряда удовлетворяет уравнению (2.111). Для определения коэффициентов воспользуемся граничным условием (2.119). В результате получим

$$u(R, \varphi) = \Phi(\varphi) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \tag{2.121}$$

Если функцию $\Phi(\varphi)$ представить в виде ряда Фурье

$$\Phi(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

и сравнить эту формулу с (2.121), получим $\alpha_0 = \dfrac{a_0}{2}$, $R^n\alpha_n = a_n$, $R^n\beta_n = b_n$. Так как коэффициенты Фурье находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\theta)\, d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\theta) \sin n\theta\, d\theta, \ n = 1, 2 \ldots ,$$

легко теперь выразить коэффициенты $\alpha_0,\ \alpha_n,\ \beta_n$. Подставляя выражения для этих коэффициентов в (2.120), получим

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\theta)\,d\theta+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left[\left(\frac{1}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\theta)\cos n\theta\,d\theta\right)\cos n\varphi+\left(\frac{1}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\theta)\sin\theta\,d\theta\right)\sin n\varphi\right]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\theta)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^n}(\cos n\theta\cos n\varphi+\sin n\theta\sin n\varphi)\right]\,d\theta=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\theta)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\varphi-\theta)\right]\,d\theta.\quad(2.122)$$

Преобразуем теперь выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части равенства (2.122). Обозначим $r=\dfrac{\rho}{R}$. Заметим, что $r<1$. Так как $\cos n(\varphi-\theta)=\dfrac{e^{in(\varphi-\theta)}+e^{-in(\varphi-\theta)}}{2}$, где $i^2=-1$, имеем

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\varphi-\theta)=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\left(e^{in(\varphi-\theta)}+e^{-in(\varphi-\theta)}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(re^{i(\varphi-\theta)}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(re^{-i(\varphi-\theta)}\right)^n\right]=\frac{1}{2}\left[1+\frac{re^{i(\varphi-\theta)}}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}+\frac{re^{-i(\varphi-\theta)}}{1-re^{-i(\varphi-\theta)}}\right].$$

Последнее равенство написано на основании того, что каждая сумма представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателями $re^{i(\varphi-\theta)}$ и $re^{-i(\varphi-\theta)}$ соответственно. Приводя теперь правую часть последнего равенства к общему знаменателю, получим

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\varphi-\theta)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{re^{i(\varphi-\theta)}}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}+\frac{re^{-i(\varphi-\theta)}}{1-re^{-i(\varphi-\theta)}}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\left(1-re^{i(\varphi-\theta)}\right)\left(1-re^{-i(\varphi-\theta)}\right)+re^{-i(\varphi-\theta)}+re^{i(\varphi-\theta)}-2r^2}{\left(1-re^{i(\varphi-\theta)}\right)\left(1-re^{-i(\varphi-\theta)}\right)}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-re^{i(\varphi-\theta)}-re^{-i(\varphi-\theta)}+r^2}=\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}.$$

Осталось подставить теперь полученное равенство в (2.122) и в результате получить формулу, дающую решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа внутри круга, которую называют ***интегралом Пуассона***

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\theta)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}\,d\theta.\quad(2.123)$$

Интеграл Пуассона получен в предположении $\rho < R$. При $\rho = R$ он теряет смысл. Однако можно доказать, что если $\Phi(\varphi)$ непрерывная функция, то интеграл Пуассона удовлетворяет уравнению Лапласа внутри круга и

$$\lim_{\substack{\rho\to R-0,\\ \varphi\to\varphi_0}} u(\rho,\varphi) = \Phi(\varphi_0).$$

Таким образом, функция

$$u(\rho,\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi(\theta)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}\,d\theta & \text{при } \rho < R, \\ \Phi(\varphi) & \text{при } \rho = R \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа внутри круга, непрерывна в объединении круга и окружности, то есть является решением задачи (2.118),(2.119).

Замечание. Интеграл Пуассона можно записать, использую декартовы координаты. Пусть требуется найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге (здесь снова возвращаемся к обозначениям, когда x, y — вектора),

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = 0,\ x_1^2+x_2^2 < R^2, \quad u(x) = g(x) \text{ при } x_1^2+x_2^2 = R^2. \tag{2.124}$$

Если $x = (x_1, x_2)$ — точка внутри круга, (ρ,φ) ее полярные координаты, а $y = (y_1, y_2)$ — точка на окружности и (R,θ) ее полярные координаты, то справедливы равенства $|x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2} = \rho$, $|y| = \sqrt{y_1^2+y_2^2} = R$. Кроме того, заметим, что угол между векторами x и y равен $\varphi-\theta$. Пользуясь связью между длиной вектора и скалярным произведением, а также тем, что скалярное произведение двух векторов равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, имеем

$$|x-y|^2 = (x-y, x-y) = (x,x) - 2(x,y) + (y,y) = |x|^2 - 2|x||y|\cos(\varphi-\theta) + |y|^2 = \\ = \rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi-\theta) + R^2,$$

где (x, y) означает скалярное произведение векторов x и y. Осталось только заметить, что элемент длины окружности $dS_y = Rd\theta$. Поэтому из (2.123) получаем формулу для решения задачи (2.124)

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^2}g(y)\,dS_y \tag{2.125}$$

Ее также называют интегралом Пуассона.

Формула (2.125), полученная для функций двух переменных, допускает обобщение на n-мерный случай:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n}g(y)\,dS_y, \tag{2.126}$$

где, как и ранее, ω_n — площадь единичной сферы в n-мерном пространстве.

2.4.4 Примеры решения задач к параграфу 2.4

Пример 1. Показать, что если $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ — неотрицательная гармоническая в шаре $|x| < R$ функция, то справедлива оценка

$$R^{n-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \le u(x) \le R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)\ . \tag{2.127}$$

Решение. Для доказательства воспользуемся интегралом Пуассона (2.126). Заметим, прежде всего, что при $|y| = R$ и $|x| < R$ выполняются неравенства

$$R - |x| \le |x - y| \le R + |x|.$$

Поэтому,

$$\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}} \le \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n} \le \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}.$$

Так как функция $u \ge 0$, из интеграла Пуассона следует

$$\frac{1}{\omega_n R}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}\int\limits_{|y|=R} u(y)\,dS_y \le \frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}u(y)\,dS_y = u(x) \le$$

$$\le \frac{1}{\omega_n R}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}\int\limits_{|y|=R} u(y)\,dS_y.$$

Осталось теперь заметить, что по теореме о среднем для гармонических функций

$$\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|y|=R} u(y)\,dS_y = R^{n-2}u(0).$$

Пример 2. Доказать, что если $v(x)$ — гармоническая во всем пространстве, ограниченная сверху или снизу функция, то она равна константе.

Решение. Предположим для определенности, что гармоническая во всем пространстве функция $v(x)$ ограничена сверху. Это означает, что существует такая константа C, что $v(x) \le C$. Тогда функция $u(x) = C - v(x)$ является гармонической во всем пространстве неотрицательной функцией. Согласно утверждению из примера 1 при любом $R > 0$ для нее выполняется оценка (2.127). Выбирая произвольное фиксированное значение x, и, переходя в неравенстве (2.127) к пределу при $R \to \infty$, получаем с учетом того, что

$$\lim_{R\to\infty} R^{n-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}} = \lim_{R\to\infty} R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}} = 1,$$

$u(0) \le u(x) \le u(0)$. Из произвольности выбора x отсюда заключаем, что $u(x) = const$. Значит $v(x) = const$.

Пример 3. Найти гармоническую функцию, зависящую от $|x|$, то есть найти такую функцию $v(\rho)$, зависящую от одной переменной ρ, что функция $u(x) = v(|x|)$ является гармонической в некоторой области.

Решение. Пусть $u(x) = v(|x|),\ |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(|x|)\frac{x_i}{|x|},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = v''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + v'(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right)\ .$$

Отсюда следует, что уравнение Лапласа превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение для функции v:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} = v'' + \frac{n-1}{|x|} v' = 0 \ .$$

Решая это уравнение, получаем:

$$u(x) = v(|x|) = \begin{cases} c_1 + c_2 |x|^{2-n}, & n > 2 \ , \\ c_1 + c_2 \ln|x|, & n = 2 \ , \end{cases}$$

которая является гармонической при $x \neq 0$.

2.4.5 Задачи к параграфу 2.4

1. Пусть $u(x_1, \ldots, x_n)$ — гармоническая функция. Являются ли гармоническими функции:

а) $u(x_1 + x_1^*, \ldots, x_n + x_n^*)$, где $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ постоянный вектор ;
б) $u(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \ \lambda = const$;
в) $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ n = 2$;
г) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

2. Найти гармоническую внутри единичного круга функцию, удовлетворяющую условию $u|_{r=1} = f(\varphi)$, где:

$$\text{а) } f(\varphi) = \cos^2\varphi; \quad \text{б) } f(\varphi) = \sin^3\varphi; \quad \text{в) } f(\varphi) = \sin^6\varphi + \cos^6\varphi \ .$$

3. Существует ли гармоническая внутри круга радиуса R с центром в начале координат функция такая, что $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = f(\varphi)$, где:

$$\text{а) } f(\varphi) = \cos\varphi; \text{ б) } f(\varphi) = \cos^2\varphi; \text{ в) } f(\varphi) = \cos 2\varphi \ .$$

4. Найти функцию, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что

$$u|_{r=1} = u_1 = const, \ u|_{r=2} = u_2 = const \ .$$

5. Тонкая пленка натянута на проволочный каркас, который проецируется на плоскости Oxy в прямоугольник со сторонами $x = 0, x = l, y = 0, y = m$. Отклонение точек каркаса от плоскости Oxy задается следующими условиями

$$u(0, y) = 0, \ u(l, y) = 0, \ u(x, 0) = \varphi(x), \ u(x, m) = \psi(x).$$

Найти форму поверхности, по которой расположится пленка.

Указание. Функция, задающая поверхность, является гармонической. Для ее нахождения применить метод разделения переменных.

6. Решить предыдущую задачу, если в ней условия при $x = 0$ и $x = l$ заменить на следующие: $u(0, y) = g(y), \; u(l, y) = f(y)$.

7. Пусть $u(x_1, x_2)$ — гармоническая функция. Имеют ли точки самопересечения линии уровня этой функции в области ее гармоничности?

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Каждый студент должен выполнить по одной задаче из всех заданий. Номер задачи совпадает с номером студента в списке группы. Решение задач следует оформить в отдельной тетради или на отдельных листах в соответствии с требованиями стандарта АлтГТУ.

I. Найти **все** решения интегрального уравнения или показать, что решение не существует.

$$1.\ \ y(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos x \sin t\, y(t)\, dt = \sin x.$$

$$2.\ \ y(x) - \frac{2e}{e^2-1}\int\limits_0^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{2} y(t)\, dt = 1.$$

$$3.\ \ y(x) - \frac{24}{7}\int\limits_0^{1} (1-x^2)(1-1.5t) y(t)\, dt = x.$$

$$4.\ \ y(x) - \int\limits_0^{1} (1+x)\cos 2\pi t\, y(t)\, dt = x.$$

$$5.\ \ y(x) - \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} t\, y(t)\, dt = \cos^2 x.$$

$$6.\ \ y(x) - 4\int\limits_0^{1} x t^2 y(t)\, dt = 0.$$

$$7.\ \ y(x) + \int\limits_0^{1} e^x t y(t)\, dt = 0.$$

$$8.\ \ y(x) - \int\limits_0^{1} (2x - t) y(t)\, dt = \cos 2\pi x.$$

9. $y(x) - \int\limits_0^1 (1+2xt)y(t)\,dt = -\dfrac{1}{6}(x+3).$

10. $y(x) - \int\limits_{-1}^1 \big(1.5xt + x^2(t-1)\big)\,y(t)\,dt = 0.$

11. $y(x) - \dfrac{4}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos^2(x-t)\,y(t)\,dt = \sin 2x.$

12. $y(x) + \int\limits_0^1 (x-\sqrt{t})y(t)\,dt = \dfrac{5}{3}x + \sqrt{x} - \dfrac{1}{6}.$

13. $y(x) - \int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos t\, y(t)\,dt = \sin x.$

14. $y(x) - \int\limits_0^{2\pi} |\pi - t| \sin x\, y(t)\,dt = x.$

15. $y(x) - 2\int\limits_0^1 \arccos t\, y(t)\,dt = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

16. $y(x) - 0.5\int\limits_{-1}^1 (5tx^3 + 4t^2x)y(t)\,dt = x.$

17. $y(x) - \int\limits_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2t + 3xt)y(t)\,dt = 0.$

18. $y(x) + 6\int\limits_0^1 (x^2 - 2xt)y(t)\,dt = 0.$

19. $y(x) - \int\limits_{-\pi}^{\pi} (x^2\cos t + x\sin t)y(t)\,dt = \cos x.$

20. $y(x) + \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (x^2\cos t + x\sin t)y(t)\,dt = \cos x.$

21. $y(x) + 5\int\limits_0^1 (x^2 - 2xt)y(t)\,dt = 1.$

22. $y(x) + 6\int\limits_0^{\ln 2} e^{x+t}y(t)\,dt = e^{2x}.$

$$23.\quad y(x) - 12\int\limits_0^1 (x^2t^2 + 2xt)y(t)\,dt = 1.$$

$$24.\quad y(x) + \int\limits_0^1 (x^2t - 2xt^2)y(t)\,dt = x^2.$$

$$25.\quad y(x) - 3\int\limits_0^1 (x^2 - 4x^3t)y(t)\,dt = x.$$

$$26.\quad y(x) + \int\limits_{-1}^1 (x - 5x^3t)y(t)\,dt = 1.$$

$$27.\quad y(x) + 5\int\limits_0^{\pi} \sin(x - t)y(t)\,dt = 0.$$

$$28.\quad y(x) + \int\limits_0^{\pi} \cos(x - t)y(t)\,dt = 0.$$

$$29.\quad y(x) + 4\int\limits_0^2 (x - t)y(t)\,dt = x^2.$$

$$30.\quad y(x) - 8\int\limits_{-2}^2 (x^3 - t^3)y(t)\,dt = 1.$$

II. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду.

$$1.\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$2.\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$3.\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$4.\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$5.\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$6.\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

8. $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 9\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x} - 4\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\dfrac{\partial u}{\partial x} - 4\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

11. $16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 8\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

12. $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\dfrac{\partial u}{\partial x} - 12\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

14. $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 12\dfrac{\partial u}{\partial x} - 4\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

15. $16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 16\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

18. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 10\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

19. $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 10\dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

20. $25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 15\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

21. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} + 15\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

22. $25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 20\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

23. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} + 20\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

24. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} - 25\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

25. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 36\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

26. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6\dfrac{\partial u}{\partial x} - 6\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

27. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 36\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 12\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

28. $36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 18\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

29. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 14\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 49\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 14\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

30. $36\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 18\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

III. Привести уравнение к каноническому виду и определить тип уравнения.

1. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sqrt{xy}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 0.5\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad x > 0,\ y > 0.$

2. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

3. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \neq 0, y \neq 0.$

4. $xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{2y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad x > 0,\ y > 0.$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \operatorname{ctg} x\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x \neq 0.$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0.$

8. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x < 0,\ y > 0.$

9. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0\ y > 0.$

10. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0,\ y > 0.$

11. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0,\ y < 0.$

12. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

13. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

14. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

15. $4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{2x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + (2-\cos^2 x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

17. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial x} + ye^{y/x} = 0.$

18. $xy^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + x^3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

19. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1+y^2)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y(1+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

20. $e^{2x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e^{x+y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + e^{2y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xu = 0.$

21. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 4x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0..$

22. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^{x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

23. $y^4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

24. $y^4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

25. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + (5-4\cos^2 x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

26. $x^{-2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + x^2(2-\cos^2 x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \neq 0.$

27. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial x} + ye^{xy} = 0.$

28. $x^2y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x^2y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

29. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y(1+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

$$30.\ e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2e^{x+y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + e^{2y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - yu = 0.$$

IV. Найти решение задачи методом разделения переменных (Фурье).

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$

$$u|_{t=0} = -\cos 3x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0.$$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$

$$u|_{t=0} = 2\cos x - 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0.$$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2},$

$$u|_{t=0} = 1 + 2\cos 2x - 4\cos 4x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi/2} = 0.$$

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$

$$u|_{t=0} = \cos\pi x - \cos 3\pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 4\cos\pi x + 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0.$$

5. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6u, \quad t > 0, \quad 0 < x < 0.5,$

$$u|_{t=0} = 5 + 2\cos 2\pi x - \cos 10\pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0.5} = 0.$$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 3\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2},$

$$u|_{t=0} = \cos x - \cos 3x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u|_{x=\pi/2} = 0.$$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, \quad t > 0, \quad 0 < x < 3,$

$$u|_{t=0} = 2\cos(1/2)\pi x - \cos(5/2)\pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u|_{x=3} = 0.$$

8. $\dfrac{\partial u}{\partial t} + 2u = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2},$

$$u|_{t=0} = \cos x - \cos 9x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u|_{x=\pi/2} = 0.$$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$

$$u|_{t=0} = \cos(\pi/2)x - \cos(3\pi/2)x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 4\cos(\pi/2)x + \cos(5\pi/2)x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

10. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6u, \quad t > 0, \quad 0 < x < 0.5,$

$$u|_{t=0} = 2\cos \pi x - \cos 5\pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u|_{x=0.5} = 0.$$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2},$

$$u|_{t=0} = 5\sin 3x - 3\sin 5x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi/2} = 0.$$

12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7u, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$

$$u|_{t=0} = \sin(3/2)x - \sin(5/2)x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0.$$

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2,$

$$u|_{t=0} = 3\sin(3/4)\pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 5\sin(7/4)\pi x, \quad u|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=2} = 0.$$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$

$$u|_{t=0} = -\sin(5/2)x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 7\sin(9/2)x, \quad u|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0.$$

15. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 13u, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2,$

$$u|_{t=0} = 25\sin(3/4)\pi x - 24\sin(1/4)\pi x, \quad u|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=2} = 0.$$

16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$

$$u|_{t=0} = \sin x - \sin 3x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$

$$u|_{t=0} = 2\sin x - \sin 4x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

18. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2},$

$$u|_{t=0} = \sin 2x - \sin 4x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi/2} = 0.$$

19. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$

$$u|_{t=0} = \sin \pi x - \sin 3\pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 4\sin \pi x + \sin 2\pi x, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

20. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6u, \quad t > 0, \quad 0 < x < 0.5,$

$$u|_{t=0} = 2\sin 2\pi x - \sin 4\pi x, \quad u|_{x=0} = u|_{x=0.5} = 0.$$

21. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2},$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin 2x - \sin 4x, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi/2} = 0.$$

22. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad u|_{t=0} = x(x-1), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$

23. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 3,$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} x^2/3, & 0 \le x \le 1.5, \\ 3 - x, & 1.5 < x \le 3, \end{cases} \qquad u|_{x=0} = u|_{x=3} = 0.$$

24. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 3, \quad u|_{t=0} = x(x-3), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=3} = 0.$

25. $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2},$

$$u|_{t=0} = \cos x - \cos 5x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u|_{x=\pi/2} = 0.$$

26. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u, \quad t > 0, \quad 0 < x < 0.5,$

$$u|_{t=0} = 9\cos \pi x - \cos 9\pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u|_{x=0.5} = 0.$$

27. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2},$

$$u|_{t=0} = 1 + \cos 2x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos 2x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi/2} = 0.$$

28. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$

$$u|_{t=0} = x(x-1), \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

29. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 2\cos x - 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0.$$

30. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$

$$u|_{t=0} = 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -\cos 3x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0.$$

Литература

1. *Бицадзе, А.В.* Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. - М.: Наука, 1982.-336 с.
2. *Бицадзе,* Сборник задач по уравнениям математической физики / А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко. - М.: Наука, 1977.-224 с.
3. *Будак, Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по уравнениям математической физики /Б.М. Будак, , А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.-688 с.
4. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики / С.К. Годунов. - М.: Наука, 1979.-391 с.
5. *Гюнтер, Н.М.* Курс вариационного исчисления / Н.М. Гюнтер. - СПб.: Лань, 2009. - 320с.
6. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. - Спб.:Невский Диалект, 2004. - 816 с.
7. *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 572 с.
8. *Емельянов, В.М.* Уравнения математической физики. Практикум по решению задач / В.М. Емельянов, Е.А. Рыбакина. - СПб.:Лань, 2008. - 213 с.
9. *Кошляков Н.С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов - М.: Наука, 1977.-736 с.
10. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Интегральные уравнения. -М.: Наука, 1976.-215 с.
11. *Люстерник, Л.А.* Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. - СПб.: Лань, 2009. - 272 с.
12. *Садовничий В.А.* Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986. - 368 с.
13. *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Из-во МГУ, 2004.-799 с.
14. *Треногин, В.А.* Функциональный анализ / В.А. Треногин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 488 с.
15. *Треногин, В.А.* Задачи и упражнения по функциональному анализу / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 240 с.
16. *Эльсгольц, Л.Э.* Вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. - М.: ЛКИ, 2008. - 208 с.

Предметный указатель

Оглавление

Подписано в печать - 06.05.2010.
Печать – цифровая. Усл.п.л. 15,81.
Тираж 50 экз. Заказ 2010 - 227

Отпечатано в типографии АлтГТУ,
656038, г. Барнаул, пр-т Ленина, 46
тел.: (8–3852) 36–84–61

Лицензия на полиграфическую деятельность
ПЛД №28–35 от 15.07.97 г.