Министерство образования и науки Российской Федерации

Алтайский государственный технический
университет им. И.И.Ползунова

А. С. КИРКИНСКИЙ

Л И Н Е Й Н А Я   А Л Г Е Б Р А
И
А Н А Л И Т И Ч Е С К А Я   Г Е О М Е Т Р И Я

Барнаул   2015

УДК 51(075.8)

Киркинский А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие.– Изд. 2–е, стереотипное.–Алт. гос. техн. ун-т им И.И.Ползунова. Барнаул, 2015. – 256 с. (Электронный ресурс).

Учебное пособие содержит материал 1 семестра курса математики в техническом университете. Здесь излагаются основы линейной алгебры и аналитической геометрии. Пособие рекомендуется для студентов направления «Программная инженерия» и других направлений и специальностей, требующих хорошей математической подготовки.

В то же время подробность изложения и наличие большого числа примеров и задач с решениями позволяют использовать пособие для дистанционной формы обучения и для самостоятельного изучения математики. Приводятся упражнения для самостоятельной работы и образцы тестов для компьютерного контроля текущих знаний. Для всех упражнений и тестов имеются ответы.

Первое издание пособия было опубликовано в 2006 году, в издательстве «Академический проект» (Москва). Первому изданию был присвоен гриф «Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области техники и технологии», получена рецензия Научно-методического совета по математике Министерства образования Российской Федерации.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическая наука возникла в глубокой древности из практических потребностей людей. Сегодня математика — огромная система знаний, пронизывающая остальные науки. В чём причина такого развития?

Мы хотим лучше узнать мир, в котором живём. Объекты, явления, процессы окружающего нас мира имеют пространственные и количественные характеристики. Людям всегда будут нужны методы для их изучения.

Историю развития математики можно условно разбить на 4 этапа. Первый этап — до V века до н. э. К этому времени в Древней Греции уже сложились теоретические представления, которые можно назвать математикой. Эти представления были очень тесно связаны с практическими задачами. Уточнялись понятие числа, способы записи чисел; устанавливались законы арифметических действий. Люди научились измерять простейшие площади и объёмы.

Второй этап длился более 2000 лет — до начала XVII века. В это время развивалась математика, примерно соответствующая курсу современной средней школы. Ещё в III веке до н. э. появились «Начала» Евклида. Изложение геометрии здесь было таким стройным, что и сейчас считается прекрасным примером математической теории. В Китае, Индии, Средней Азии изучались методы решения уравнений, составляющие в те времена содержание алгебры. Серьёзным стимулом для развития математики весь этот период была астрономия. Её задачи привели и к созданию основ тригонометрии (II век, Греция), и к появлению логарифмов (начало XVI века, Англия).

Третий этап — XVII–XVIII века. Самая важная черта этого периода — переход от изучения постоянных величин к изучению переменных величин и функций. В работах Р. Декарта впервые x и y в уравнении предложено рассматривать не как неизвестные, а как переменные. Декарт вводит на плоскости систему координат — и уравнение, связывающее x и y, приобретает геометрический смысл. Так возникла аналитическая геометрия.

Важнейшее открытие XVII века — создание Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления. Это и другие достижения математиков XVII–XVIII веков привели к построению к 1800 году теории, которая сейчас называется математическим анализом и составляет основу вузовского курса высшей математики.

Следующий этап в развитии математики — появление совсем новых идей. Важнейшими примерами являются создание Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии, возникновение теории групп и других алгебраических теорий, успехи теории функций комплексной переменной. Уже в XX веке развитие математической логики привело к созданию теоретического аппарата для расчёта самых различных вычислительных систем. Эти и многие другие направления составляют науку, которая называется современной математикой.

Предлагаемый курс алгебры и аналитической геометрии сложился в результате многолетней работы со студентами Алтайского государственного технического университета, обучающимися по направлению «Информатика и вычислительная техника». Выбор разделов, характер изложения ориентированы на студентов, математическое образование для которых является важной составляющей высшего инженерного образования. В то же время степень подробности, количество разобранных примеров позволяют рекомендовать его всем студентам вузов, обучающимся по направлениям и специальностям в области техники и технологии, использовать пособие для дистанционной формы обучения или для самостоятельного изучения предмета.

Дадим несколько советов начинающему читателю, особенно важных для студентов дистанционной или заочной формы обучения. Весь материал пособия разбит на 8 глав. Изучение каждой главы рассчитано примерно на 2 недели. Нужно внимательно читать текст, рассматривать все примеры, разбираться в доказательствах. Основным содержанием математики является смысл понятий и методов, который можно раскрыть для себя только в процессе изучения доказательств. Возможно, какие-то места будут сначала непонятны. Это не страшно — далее приводятся примеры, они помогут разобраться. Кроме того, продвигаясь вперёд, рассматривая сложные (и не сразу понятные) вопросы, вы ещё и ещё раз встретите разъяснение более простых — и освоите их неизбежно. Строгость математики совсем не противоречит возможности сделать её идеи понятными для внимательного читателя. Рассказать как можно проще, подробно провести доказательство, отказаться от излишних обобщений, рассмотреть частный случай — все эти приёмы использованы и дают возможность изучать курс самостоятельно.

Частичной заменой преподавателя послужит большое число (около 230) разобранных примеров и задач с решениями. Каждое понятие, метод, теорема поясняются примерами. Их цель — максимально иллюстрировать теорию. Кроме того, иногда в примерах содержится уточнение основного текста.

Теоремы и примеры нумеруются внутри каждой главы. Формулы и рисунки не нумеруются — они лишь сопровождают текст. В формулах используются буквы латинского и греческого алфавитов. Чтобы их правильно читать и писать, алфавиты приводятся ниже, сразу после Предисловия.

Обратите внимание на символ $\Leftrightarrow$, используемый в формулировках теорем. Он служит сокращением слов «необходимо и достаточно», или «тогда и только тогда». Возможно, его применение упрощает понимание логики теоремы. Доказательство теоремы $A \Leftrightarrow B$ разбивается на 2 этапа: $A \Rightarrow B$ (из A следует B), $B \Rightarrow A$ (из B следует A).

В каждой главе приведены упражнения для самостоятельной работы — это тренировка, самоконтроль. Каждая глава заканчивается образцом теста. Такие тесты могут использоваться для текущего контроля знаний студентов, обучающихся по дистанционной форме. Задания в тестах проще других упражнений, но для их выполнения должно отводиться ограниченное время. Ответы к упражнениям и тестам находятся в конце пособия.

Пособие содержит весь материал, предусмотренный программой. Более подробное изложение, развитие изученных понятий и методов можно найти в литературе, список которой имеется в конце книги.

Автором подготовлено и издаётся учебное пособие «Математический анализ», также имеющее гриф Министерства образования Российской Федерации. Структура этих пособий, стиль и характер изложения очень похожи.

В заключение пожелаем читателю успеха. Помните: многие трудности в изучении математики связаны с непониманием того, что она очень интересна! Занимаясь математикой, мы не только имеем возможность глубже узнать окружающий мир, не только получаем инструмент для практических приложений, но и развиваем свою интуицию, повышаем свою культуру. Это, возможно, побочный результат, но никак не второстепенный.

Латинский алфавит

A, a – a	B, b – бэ	C, c – цэ	D, d – дэ	E, e – e
F, f – эф	G, g – жэ	H, h – аш	I, i – и	J, j – жи
K, k – ка	L, l – эль	M, m – эм	N, n – эн	O, o – o
P, p – пэ	Q, q – ку	R, r – эр	S, s – эс	T, t – тэ
U, u – у	V, v – вэ	W, w – дубль-вэ	X, x – икс	Y, y – игрек
Z, z – зэт				

Греческий алфавит

A, α – альфа	B, β – бета	Γ, γ – гамма	Δ, δ – дельта
E, ε – эпсилон	Z, ζ – дзета	H, η – эта	Θ, θ – тэта
I, ι – йота	K, κ – каппа	Λ, λ – лямбда	M, μ – мю
N, ν – ню	Ξ, ξ – кси	O, o – омикрон	Π, π – пи
P, ρ – ро	Σ, σ – сигма	T, τ – тау	Υ, υ – ипсилон
Φ, φ – фи	X, χ – хи	Ψ, ψ – пси	Ω, ω – омега

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Множества и отображения

Математическое понятие ***«множество»*** формировалось постепенно из наших общих представлений о совокупности, наборе каких-либо предметов. Оно не имеет строгого определения. В математике более сложные объекты определяются, объясняются через более простые. Поэтому некоторые самые основные понятия не определяются, их смысл поясняется на примерах.

Пример 1. Можно рассматривать

а) множество книг, стоящих на полке;

б) множество букв в слове «книга»;

в) множество всех треугольников на плоскости, и т. д.

Множества мы будем обычно обозначать заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, M, N, \ldots$. Множество состоит из ***элементов***. Запись

$$a \in M, \quad b \notin M$$

означает, что a — элемент множества M (a принадлежит M), а b не является элементом M.

Множество можно задать перечислением элементов:

$$M = \{\text{ а, и, г, к, н }\}.$$

Другой способ задания — с помощью свойства, характеризующего элементы множества:

$$N = \{x \,|\, x \text{ — буква, входящая в слово «книга»}\}.$$

Вертикальную черту | в задании множества можно рассматривать как сокращение слов «таких, что ...». Легко заметить, что множества M и N в нашем примере ***равны***: $M = N$, т. е. состоят из одних и тех же элементов.

Множество A называется ***подмножеством*** (частью) множества B, если каждый элемент A принадлежит также и множеству B. Используется запись:

$$A \subseteq B.$$

Заметим, что само множество тоже является своим подмножеством: $B \subseteq B$.

Множество, в котором нет ни одного элемента, называется ***пустым*** и обозначается знаком $\varnothing$. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Пример 2. Перечислим все подмножества множества $M = \{a, b, c\}$. Их 8 штук: $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

Перейдём к определению действий (операций) над множествами.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из элементов, входящих и в A, и в B:

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B. Можно записать так:

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ или } x \in B\},$$

имея в виду «неразделительное или», т. е. в $A \cup B$ входят и элементы $A \cap B$.

Разностью $A \setminus B$ называется множество тех элементов A, которые не входят в B:

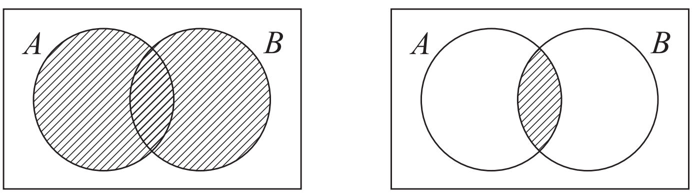
$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A, x \notin B\}.$$

Дополнением к множеству A называется множество $\overline{A}$, состоящее из элементов, не входящих в A:

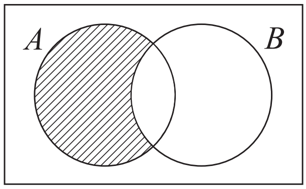
$$\overline{A} = \{x \,|\, x \notin A\}.$$

Конечно, в $\overline{A}$ нельзя включать любые предметы, не являющиеся элементами A. Работая, например, с числовыми множествами, глупо было бы включать в дополнение деревья в лесу или книги на полке. Поэтому всегда считают, что все множества, участвующие в решении данной задачи, являются подмножествами некоторого общего, ***универсального*** множества U. Тогда дополнение $\overline{A}$ можно определить так: $\overline{A} = U \setminus A$.

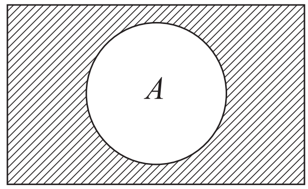
Операции над множествами можно наглядно проиллюстрировать с помощью ***диаграмм Эйлера–Венна***:



Объединение A∪B Пересечение A∩B



Разность A∖B



Дополнение $\overline{\mathrm{A}}$

Пример 3. Пусть A — множество чётных целых чисел, B — множество целых чисел, делящихся на 5. Требуется определить множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$. В качестве универсального множества будем рассматривать множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$.

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ чётно и } x \text{ делится на } 5\} = \\ = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ делится на } 10\};$$

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ чётно или } x \text{ делится на } 5\} = \\ = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ оканчивается на } 0, 2, 4, 5, 6 \text{ или } 8\};$$

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ чётно и не делится на } 5\} = \\ = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ оканчивается на } 2, 4, 6 \text{ или } 8\};$$

$$B \setminus A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ делится на } 5 \text{ и нечётно }\} = \\ = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ оканчивается на } 5\};$$

$\overline{A} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ нечётно }\}$ — множество нечётных чисел.

Рассмотрим ещё одну операцию над множествами. ***Декартовым произведением*** множеств A и B называется множество

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

Элементами $A \times B$ являются ***упорядоченные*** пары элементов, первый — из A, второй — из B. Обратите внимание на запись: мы употребляем круглые скобки, когда важен порядок элементов: $(2, 3)$ и $(3, 2)$ — это разные упорядоченные пары. Если же порядок не важен, то будем писать фигурные скобки: $\{2, 3\} = \{3, 2\}$, так как это множество, состоящее из чисел 2 и 3.

Пример 4. Найдём декартово произведение множеств $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}.$$

Теперь рассмотрим важнейшее в математике понятие отображения. Пусть имеются два множества: A, B. ***Отображением*** множества A во множество B называется правило f, позволяющее для каждого элемента a множества A найти соответствующий ему, вполне определённый элемент $f(a)$ множества B:

$$f : A \to B.$$

Множество A называется ***областью определения*** отображения f. Вместо слова «отображение» можно употреблять термин «функция» — это то же самое. В школьном курсе математики изучаются в основном функции, определённые на числовых множествах:

$$f : D \to \mathbb{R},$$

где область определения D является подмножеством множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Мы будем рассматривать и другие ситуации.

Пример 5. Пусть T — множество треугольников, S — множество окружностей на плоскости; $s(t)$ — окружность, описанная около треугольника t. Получаем отображение

$$s : T \to S,$$

сопоставляющее каждому треугольнику описанную около него окружность.

Обратим внимание: любое отображение $f : A \to B$ удовлетворяет двум обязательным требованиям.

Для каждого элемента a из A можно найти его значение $f(a)$:

$$\forall a \in A \quad \exists b \in B : \ f(a) = b.$$

Значение $f(a)$ определяется единственным образом:

$$\forall a \in A \quad f(a) = b_1, \ f(a) = b_2 \ \Rightarrow \ b_1 = b_2.$$

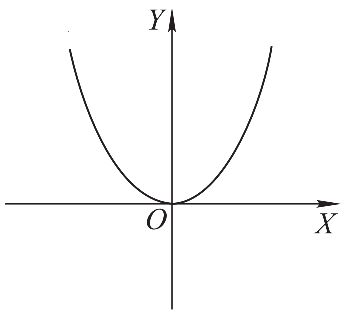
Здесь мы использовали логические символы, которые могут оказаться неизвестными читателю. Эти символы очень удобны, мы будем часто ими пользоваться, поэтому разъясним их подробно. Знак $\forall$ называется ***квантором всеобщности***, служит в этой книге сокращением слов «для всех», или «для любого», «любой». Знак $\exists$ называется ***квантором существования***, служит сокращением слова «существует». В математической логике кванторы являются важными понятиями и изучаются глубоко, однако мы будем пока считать их лишь удобными сокращениями слов. Знак $\Rightarrow$ означает логическое следование, хорошо соответствует выражению «если ..., то ...».

Множество $\{ f(a) \,|\, a \in A\}$ называется ***областью значений*** отображения f. Если $f(a) = b$, то говорят, что b является ***образом*** a при отображении f (или значением функции f на аргументе a).

Множество упорядоченных пар

$$\{(a, b) | f(a) = b\}$$

называется ***графиком*** отображения f. Ясно, что график — это подмножество декартова произведения $A \times B$.



Пример 6. Рассмотрим отображение $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, возводящее каждое действительное число в квадрат: $g(x) = x^2$. График g — это подмножество в декартовом произведении $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. С помощью декартовой системы координат каждую упорядоченную пару чисел (x, y) можно изобразить точкой на плоскости. Тогда график функции $g(x) = x^2$, т. е. множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$, изображается параболой.

Рассмотрим свойства, которыми могут обладать отображения. Отображение $f : A \to B$ называется ***инъективным***, если

$$f(a_1) = b,\ f(a_2) = b \ \Rightarrow\ a_1 = a_2.$$

Другими словами, инъективное отображение переводит разные элементы в разные:

$$a_1 \neq a_2 \ \Rightarrow\ f(a_1) \neq f(a_2).$$

Отображение $f : A \to B$ называется ***сюръективным*** (или отображением A на B), если

$$\forall b \in B\ \exists a \in A:\ f(a) = b.$$

При сюръективном отображении любой элемент B является образом некоторого элемента $a \in A$. Отображение называется ***биективным***, если оно является инъективным и сюръективным. При биективном отображении каждому $b \in B$ соответствует определённый $a \in A$, поэтому используется двусторонняя стрелка:

$$f:\ A \leftrightarrow B.$$

В этом случае говорят, что между множествами A и B установлено ***взаимно однозначное соответствие***.

Рассмотренное в примере 6 отображение $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, возводящее каждое число в квадрат, не является инъективным, так как $3^2 = (-3)^2 = 9$. Не является g и сюръективным, так как отрицательные числа не могут быть квадратами действительных чисел.

В примере 5 отображение является сюръективным и не является инъективным, так как в любую окружность можно вписать много различных треугольников.

Пример 7. Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ — множество натуральных чисел, $M = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ — множество чётных натуральных чисел. Рассмотрим отображение $\alpha : \mathbb{N} \to M$, действующее по правилу: $\alpha(n) = 2n$. Если $n_1 \neq n_2$, то $2n_1 \neq 2n_2$, поэтому α инъективно. Любое чётное число из M является образом некоторого натурального $n \in \mathbb{N}$. Значит, α — сюръективно и, следовательно, биективно:

$$\alpha : \mathbb{N} \leftrightarrow M.$$

Каждому натуральному $n \in \mathbb{N}$ соответствует одно чётное, и наоборот: каждому чётному числу соответствует одно натуральное. Между множествами $\mathbb{N}, M$ установлено взаимно однозначное соответствие.

Введём понятие мощности множества. Если множество состоит из конечного числа элементов: $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, то его ***мощностью*** называется число n (число элементов). Распространим понятие мощности на бесконечные множества. Множества A, B называются ***равномощными***, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Как видно из примера 7, бесконечное множество может иметь одинаковую мощность со своим подмножеством. Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется ***счётным***. Можно сказать, что это «самая маленькая» бесконечная мощность. В следующем пункте мы увидим, что множество действительных чисел не является счётным. Его мощность называется мощностью ***континуума***.

Как мы убедились, при работе с мощностью бесконечных множеств интуиция нас подводит. Здесь нужно придерживаться строгих определений. Однако в начале XX века математики обнаружили ещё более существенные трудности. Их назвали ***парадоксами теории множеств***. Расскажем об одном из них.

Будем говорить, что множество A ***плохое***, если оно является элементом самого себя. (Не подмножеством, а именно элементом!) Таково, например, ***множество всех множеств***. Остальные множества (т. е. те, для которых $A \notin A$) назовем ***хорошими***. Пусть P — ***множество всех хороших множеств***. Хорошее оно или плохое? Допустим, P плохое, т. е. $P \in P$. Но P, по определению, состоит только из хороших множеств. Получили противоречие. Допустим, P хорошее. Так как P — множество всех хороших множеств, то $P \in P$, и получаем, что P — плохое. В любом случае получается противоречие.

Пути разрешения парадоксов теории множеств не являются простыми. В частности, нельзя рассматривать в качестве множеств такие необозримые объекты как множество всех множеств.

1.2. Числовые множества

Понятие о числе, сейчас для нас очень привычное, вырабатывалось очень медленно. На протяжении веков люди учились считать предметы. Число было свойством совокупности (множества) предметов и лишь постепенно стало отвлечённым понятием. Так возникли ***натуральные*** числа.

Будем всегда обозначать буквой $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Новой ступенью стало введение отрицательных чисел. Система чисел расширилась — люди стали использовать ***целые*** числа:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Необходимость измерения различных величин привела к следующему этапу в развитии понятия числа. Часто бывает, что выбранная единица не укладывается в измеряемой величине целое число раз. Тогда приходится делить единицу — так возникли ***простые дроби*** — числа вида $\frac{m}{n}$, где m, n — целые. Вместе с целыми числами дроби образуют множество ***рациональных*** чисел:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m,\ n \in \mathbb{Z}\ ;\ n \neq 0 \right\}.$$

Следует отметить, что дробные числа люди стали использовать гораздо раньше, чем отрицательные.

В дальнейшем выяснилось, что не всякую, например, длину можно выразить простой дробью. Ещё в V веке до н. э. греческие ученые обнаружили ***несоизмеримые*** отрезки. Например, если a — сторона какого-либо квадрата, b — его диагональ, то отношение $\frac{b}{a}$ не равно никакому рациональному числу. Действительно, по теореме Пифагора: $b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Поэтому $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2$. Но рационального числа с таким свойством нет, докажем это.

Теорема 1. Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

Доказательство. Допустим, что такое число существует. Тогда его можно записать в виде несократимой дроби: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Отсюда следует, что $m^2 = 2n^2$ и, значит, m^2 — чётное число. Тогда число m — тоже обязательно чётное: пусть $m = 2k$. Получаем $4k^2 = 2n^2$, или $2k^2 = n^2$. Но это значит, что n — тоже чётное число, а это противоречит тому, что мы взяли несократимую дробь. Противоречие вызвано неверным предположением о существовании рационального числа. Теорема доказана.

Итак, рациональных чисел стало не хватать. Но строгое определение более общего понятия ***действительного*** числа было дано только в 70-х годах XIX века немецкими математиками Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором. Мы здесь лишь напомним способ представления рациональных и иррациональных чисел ***десятичными дробями.***

Любую простую дробь $\dfrac{m}{n}$ можно, выполняя деление, представить в десятичной записи. При этом получается либо конечная десятичная дробь: $\dfrac{3}{4} = 0,75$, либо ***бесконечная периодическая*** десятичная дробь: $\dfrac{5}{6} = 0,8333\ldots = 0,8(3)$. Дроби с периодом 9 не рассматриваются, так как, например, $0,4999\ldots = 0,5$. Верно и обратное: любую периодическую десятичную дробь можно представить в виде $\dfrac{m}{n}$.

Расширим множество рациональных чисел, добавив ***иррациональные*** числа, которые записываются бесконечными ***непериодическими*** десятичными дробями. Полученное множество называется множеством ***действительных*** чисел:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{бесконечные непериодические дроби}\}.$$

Пока нам достаточно тех сведений о действительных числах, которые изучаются в школе. В частности, мы будем изображать действительные числа точками координатной прямой. Это возможно, так как между множеством $\mathbb{R}$ и множеством точек прямой можно установить взаимно однозначное соответствие. Прямая линия в этом случае называется ***числовой прямой***.

Между числовыми множествами имеются отношения включения:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Рассмотрим вопрос о мощности этих множеств.

Теорема 2. $\mathbb{Q}$ — счётное множество.

Доказательство. Чтобы доказать, что множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$ равномощны, нужно построить между ними взаимно однозначное соответствие. Для этого расположим все рациональные числа в виде таблицы.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \rightarrow & \dfrac{1}{1} & \rightarrow & \dfrac{1}{2} & & \dfrac{1}{3} & \rightarrow & \dfrac{1}{4} & & \ldots \\
 & & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
 & & -\dfrac{1}{1} & & -\dfrac{1}{2} & & -\dfrac{1}{3} & & -\dfrac{1}{4} & & \ldots \\
 & & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 & & \dfrac{2}{1} & & \dfrac{2}{3} & & \dfrac{2}{5} & & \dfrac{2}{7} & & \ldots \\
 & & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
 & & -\dfrac{2}{1} & & -\dfrac{2}{3} & & -\dfrac{2}{5} & & -\dfrac{2}{7} & & \ldots \\
 & & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
 & & \dfrac{3}{1} & & \dfrac{3}{2} & & \dfrac{3}{4} & & \dfrac{3}{5} & & \ldots \\
 & & & \swarrow & & & & & & & \\
 & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

Обратите внимание: в таблице все рациональные числа встречаются и ни одно не повторено дважды. Теперь, двигаясь по стрелкам, будем нумеровать числа в таблице: первое — 0, второе — 1, третье — $\frac{1}{2}$, четвёртое — (-1) и т. д. Получается, что каждое рациональное число имеет определённый номер и каждому номеру (т. е. натуральному числу) соответствует вполне определённое рациональное число. Требуемое взаимно однозначное отображение $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}$ построено.

Теорема 3. Множество $\mathbb{R}$ не является счётным.

Доказательство. Докажем, что даже множество действительных чисел интервала $(0, 1)$ не является счётным. Если изображать числа (в том числе и рациональные) бесконечными десятичными дробями (возможно, с периодом 0), а дроби с периодом 9 не использовать, то каждому числу из интервала $(0, 1)$ взаимно однозначно соответствует бесконечная десятичная дробь вида $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, причём некоторое $b_i \neq 0$.

Проводя рассуждение «от противного», предположим, что все такие числа можно занумеровать (т. е. построить взаимно однозначное соответствие с $\mathbb{N}$):

1 число: $0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \ldots$

2 число: $0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \ldots$

3 число: $0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \ldots$

. . . .

Здесь буквы a с двойными индексами обозначают цифры в десятичной записи чисел. Подчеркнём, что мы расположили в столбик ***все*** числа на интервале $(0, 1)$, и каждое получило номер. Построим ещё одно число:

$$0, a'_{11} a'_{22} a'_{33} a'_{44} \ldots$$

по следующему правилу: a'_{11} — любая цифра, кроме a_{11}, a'_{22} — любая цифра, только не a_{22}, и т. д. Тогда новое число не содержится в нашем списке: от первого числа оно отличается первой цифрой после запятой, от второго — второй цифрой после запятой и т. д. Получено противоречие с предположением. Теорема доказана.

Выражаясь нестрого, мы доказали, что действительных чисел «значительно больше», чем рациональных. Можно сказать, что «почти вся» числовая прямая — это иррациональные числа. Хотя, конечно, рациональных чисел тоже «много»: между любыми двумя точками на числовой прямой имеется бесконечное множество рациональных чисел.

1.3. Алгебраические операции и алгебраические системы

Расширим понятие декартова произведения — будем рассматривать декартово произведение нескольких множеств. Для нас важен случай, когда сомножители одинаковы:

$$A^n = A \times A \times \ldots \times A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A\}.$$

Итак, A^n состоит из ***упорядоченных наборов*** элементов A.

Пусть A — непустое множество. Отображение

$$f : A^n \to A$$

называется n-местной ***алгебраической операцией*** на A.

Пример 8. Сложение — двухместная алгебраическая операция на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$:

$$+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

На одном множестве можно рассматривать несколько алгебраических операций. ***Алгебраической системой*** называется множество вместе с введёнными на нём алгебраическими операциями:

$$< \ A; \quad f_1^{n_1}, \quad f_2^{n_2}, \quad \ldots, \quad f_s^{n_s} \ >.$$

Множество $A \neq \varnothing$ называется основным множеством алгебраической системы; $f_i^{n_i}$ — n_i-местная алгебраическая операция на A.

Изучение алгебраических систем, а значит и алгебраических операций, т. е. действий с элементами множества, является предметом ***алгебры***. Для алгебры важны не сами элементы основного множества, а свойства операций. Это некоторый новый объект: мы рассматривали множества, но свойства операций $\cap, \cup, \setminus$ не изучали. Мы рассматривали числа, но операции сложения, умножения пока даже не упоминали. В нашу задачу не входит подробное изучение алгебраических систем. Мы лишь познакомимся с важнейшими из них, рассмотрим примеры.

Группой называется алгебраическая система

$$< G \,;\, \circ >$$

с одной 2-местной операцией $\circ$, обладающей свойствами:

1) $\forall x, y, z \in G \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. Это свойство называется ***ассоциативностью*** операции $\circ$.

2) $\exists e \in G : \forall x \in G \quad e \circ x = x \circ e = x$. Такой элемент e называется ***нейтральным*** элементом операции $\circ$.

3) $\forall x \in G \; \exists y \in G : \quad x \circ y = y \circ x = e$. Такой элемент y называется ***обратным*** для элемента x.

Указанные 3 свойства называются ***аксиомами группы***.

Пример 9. Рассмотрим множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с операцией сложения, хорошо нам известной:

$$< \mathbb{Z}; + > .$$

Это группа, так как:

1) сложение обладает свойством ассоциативности:

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

2) существует нейтральный элемент — число 0:

$$x + 0 = x;$$

3) для любого целого числа x существует целое $(-x)$:

$$x + (-x) = 0.$$

Правда, для операции сложения такой элемент чаще называется не обратным, а противоположным.

Пример 10. Множество положительных действительных чисел

$$\mathbb{R}^+ = \{ \, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \, \}$$

с операцией умножения чисел образует группу. Действительно, произведение двух положительных действительных чисел снова является положительным действительным числом. Поэтому умножение — это алгебраическая операция на множестве $\mathbb{R}^+$. Аксиомы группы выполнены:

1) умножение ассоциативно: $(xy)z = x(yz)$;

2) существует нейтральный элемент — число 1:

$$x \cdot 1 = x;$$

3) для любого $x \in \mathbb{R}^+$ существует обратное число x^{-1}:

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Очень часто приходится рассматривать алгебраические системы с двумя двухместными операциями. По аналогии с арифметическими действиями их обычно называют «сложение» и «умножение». Будем писать эти слова в кавычках, чтобы подчеркнуть: операции могут быть заданы различными способами, важно лишь выполнение определённых свойств.

Кольцом называется алгебраическая система с двумя двухместными операциями

$$< K; \ +, \cdot >,$$

если выполнены следующие требования (аксиомы кольца):

1) $\forall x, y, z \in K \quad (x+y)+z = x+(y+z)$, т. е. «сложение» ассоциативно;

2) $\exists 0 \in K : \ \forall x \quad x+0 = 0+x = x$, 0 — нейтральный элемент для «сложения»;

3) $\forall x \in K \ \exists(-x) \in K : \ \ x+(-x) = 0$, т. е. для любого элемента существует обратный относительно «сложения». Заметим, что первые 3 условия означают, что кольцо относительно операции «сложение» образует группу;

4) $\forall x, y \in K \quad x+y = y+x$, это свойство называется ***коммутативностью*** «сложения»;

5) $\forall x, y, z \in K \quad (xy)z = x(yz)$, т. е. «умножение» ассоциативно;

6) $\forall x, y, z \in K \ x(y+z) = xy+xz, (y+z)x = yx+zx$. Это свойство называется ***дистрибутивностью*** «умножения» относительно «сложения».

Пример 11. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с обычными операциями сложения и умножения чисел образует кольцо $< \mathbb{Z};\ +, \cdot >$.

Действительно, все 6 условий выполнены. Более того, умножение чисел коммутативно: $xy = yx$, поэтому говорят, что $< \mathbb{Z};\ +, \cdot >$ — коммутативное кольцо.

Ещё один важный тип алгебраических систем — поля. ***Полем*** называется коммутативное кольцо с единицей 1 (нейтральный элемент для «умножения»), в котором любой ненулевой элемент x имеет обратный $x^{-1} : \ xx^{-1} = \ 1$. Другими словами, поле — это алгебраическая система

$$< P;\ +, \cdot >,$$

в которой выполнены аксиомы кольца 1) – 6), и, кроме того, условия:

7) $\forall x, y, \in P \quad xy = yx$, т. е. «умножение» коммутативно;

8) $\exists 1 \in P : \forall x \in P \quad x \cdot 1 = x$, т. е. в поле существует единица, нейтральный элемент относительно «умножения»;

9) $\forall x \neq 0 \ \exists x^{-1} : \ xx^{-1} = 1$, т. е. любой элемент, кроме 0 (нейтральный элемент для «сложения», нуль), имеет обратный.

Пример 12. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения чисел образует поле. Все аксиомы поля выполнены, мы ими пользуемся, работая с действительными числами.

Пример 13. Кольцо целых чисел $< \mathbb{Z};\ +, \cdot >$, рассмотренное в примере 11, не является полем. Ясно, что это кольцо коммутативно и имеет единицу, но последняя аксиома не выполняется. Например, не существует целого числа x такого, что $2 \cdot x = 1$, т. е. для числа 2 нет обратного.

Во всех примерах алгебраических систем, которые мы рассмотрели, основное множество состоит из чисел. Такие примеры выбраны только потому, что числа и действия с ними хорошо знакомы читателю. В дальнейшем мы познакомимся и с другими важными алгебраическими системами.

1.4. Метод математической индукции

Как известно, математические утверждения (теоремы) должны быть обоснованы, доказаны. Мы сейчас познакомимся с одним из методов доказательства — методом математической индукции.

В широком смысле ***индукция*** — это способ рассуждений, позволяющий переходить от частных утверждений к общим. Обратный переход, от общих утверждений к частным, называется ***дедукцией***. Дедукция всегда приводит к правильным выводам. Например, нам известен общий результат: все целые числа, оканчивающиеся на нуль, делятся на 5. Отсюда, конечно, можно сделать вывод, что и любое конкретное число, оканчивающееся на 0, например 180, делится на 5. В то же время индукция может привести к неверным выводам. Например, замечая, что число 60 делится на числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$, мы не вправе сделать вывод о том, что 60 делится вообще на любое число.

Метод математической индукции позволяет во многих случаях строго доказывать справедливость общего утверждения $P(n)$, в формулировку которого входит натуральное число n. Применение метода включает 3 этапа.

1) ***База индукции***: проверяем справедливость утверждения $P(n)$ для $n = 1$ (или для другого, частного значения n, начиная с которого предполагается справедливость $P(n)$).

2) ***Предположение индукции***: предполагаем, что $P(n)$ справедливо при $n = k$.

3) ***Шаг индукции***: используя предположение, доказываем, что $P(n)$ справедливо для $n = k + 1$.

В результате можно сделать вывод о справедливости $P(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, для $n = 1$ утверждение верно (база индукции). А следовательно, верно и для $n = 2$, так как переход от $n = 1$ к $n = 2$ обоснован (шаг индукции). Применяя шаг индукции снова и снова, получаем справедливость $P(n)$ для $n = 3, 4, 5, \ldots$, т. е. справедливость $P(n)$ для всех n.

Пример 14. Сумма первых n нечётных натуральных чисел равна n^2 :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Доказательство проведём методом математической индукции.

1) База: при $n = 1$ слева только одно слагаемое, получаем: $1 = 1$. Утверждение верно.

2) Предположение: предполагаем, что для некоторого k справедливо равенство:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

3) Шаг индукции: докажем, что утверждение верно для $n = k+1$, т. е.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2.$$

По предположению, сумма первых k слагаемых в левой части равенства равна k^2. Значит, то, что требуется доказать, можно записать так:

$$k^2 + (2k+1) = (k+1)^2,$$

но это очевидно.

Пример 15. Доказать, что для любого натурального n число $n^3 + 5n$ делится на 6.

Доказательство. База индукции имеется: при $n = 1$ число $n^3 + 5n = 6$ делится на 6. Предполагаем, что для некоторого k число $k^3 + 5k$ делится на 6. Используя это, постараемся доказать, что тогда и $(k+1)^3 + 5(k+1)$ делится на 6. Проведём преобразования:

$$(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 =$$
$$= (k^3 + 5k) + (3k^2 + 3k) + 6 = (k^3 + 5k) + 3k(k+1) + 6.$$

Первое слагаемое в этой сумме делится на 6 по предположению, второе слагаемое тоже делится на 6, так как из чисел k, $k+1$ одно обязательно чётно. Значит, вся сумма делится на 6, что и требовалось доказать.

В качестве ещё одного примера докажем теорему о числе подмножеств конечного множества.

Теорема 4. Множество, состоящее из n элементов, имеет 2^n различных подмножеств.

Доказательство. Применим индукцию по числу n. Если множество $A = \{a\}$ состоит из одного элемента, то его подмножества — это $\varnothing, \{a\}$. Их 2, поэтому теорема при $n = 1$ верна (база индукции). Предполагаем, что любое множество из k элементов имеет 2^k подмножеств. Рассмотрим множество

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}.$$

Все его подмножества разделим на 2 вида. К первому виду отнесём подмножества, не содержащие a_{k+1}. По предположению, таких подмножеств 2^k. Остальные подмножества содержат a_{k+1}, их количество также равно 2^k, потому что каждое из них получается добавлением a_{k+1} к одному из подмножеств первого вида. Всего подмножеств множества A имеется:

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1},$$

что и требовалось доказать.

1.5. Задачи с решениями

1. Задать перечислением элементов множество

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ нечётно, } 5 < x \leq 13\}.$$

Решение. Найдём все нечётные натуральные числа, удовлетворяющие требуемому неравенству. Учитываем, что $x > 5$, т. е. $5 \notin A$ и $x \leq 13$, т. е. $13 \in A$. Значит,

$$A = \{7, 9, 11, 13\}.$$

2. Задать с помощью определяющего свойства множества:

$$A = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots\right\}, \quad B = \{1, 11, 21, 31, \ldots\}.$$

Решение. Множество A состоит из рациональных чисел вида $\dfrac{m}{n}$, где $n = m + 1$, причём в числителях встречаются все натуральные числа. Форма задания множества может быть различной:

$$A = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid m \in \mathbb{N},\ n = m + 1\right\} = \left\{\frac{m}{m+1} \mid m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Множество B состоит из натуральных чисел, которые при делении на 10 дают в остатке 1. Каждое такое число можно представить в виде $10k + 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ Возможны, например, такие формы записи:

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \text{ делится на } 10\} = \{10k + 1 \mid k \in \mathbb{N} \text{ или } k = 0\}.$$

3. Найти число элементов (мощность) множеств:

$$A = \{\, x \in \mathbb{N} \mid (2x^2 - 9x + 4)(x - 3) = 0\},$$

$$B = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid (2x^2 - 9x + 4)(x - 3) = 0\},$$

$$C = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 < 0\},$$

$$D = \{\, x \in \mathbb{N} \mid \sin x \leq 2\}.$$

Решение. Множество A состоит из натуральных ($x \in \mathbb{N}$) корней уравнения $(2x^2 - 9x + 4)(x - 3) = 0$. Ясно, что $x = 3$ — один из них. Чтобы найти другие, решим квадратное уравнение $2x^2 - 9x + 4 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}; \quad x_1 = 4,\ x_2 = \frac{1}{2}.$$

Корень $x_2 = \dfrac{1}{2}$ не является натуральным числом, поэтому не входит во множество A. Значит, $A = \{3, 4\}$, состоит из 2 элементов.

Множество B состоит из рациональных корней того же уравнения. Так как $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, то $B = \left\{3,\ 4,\ \frac{1}{2}\right\}$, состоит из 3 элементов.

Неравенство $x^2 + 1 < 0$, определяющее множество C, не может быть выполнено ни при каком $x \in \mathbb{R}$. Поэтому $C = \varnothing$ — пустое множество, число элементов 0. Так как для любого x выполнено неравенство $\sin x \leq 1$, а тем более и $\sin x \leq 2$, то множество D состоит из всех натуральных чисел: $D = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Это бесконечное, а более точно — счётное множество.

4. Задать с помощью перечисления элементов множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = \{3, 7, 2, 4, 1\}$, $B = \{5, 2, 8, 3\}$.

Решение. Пользуясь только определениями операций объединения, пересечения, разности множеств, получаем:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}, \quad A \cap B = \{2, 3\},$$

$$A \setminus B = \{1, 4, 7\}, \quad B \setminus A = \{5, 8\}.$$

Мы расположили числа в каждом множестве в порядке возрастания лишь для удобства, порядок перечисления элементов не важен.

5. Задать каким-либо способом множества $A \cup B, A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$, если $A = (-3, 5),\ B = [-5, 3]$.

Решение. Множества A, B являются подмножествами множества действительных чисел $\mathbb{R}$ и называются ***промежутками***. Их можно задать с помощью неравенств:

$$A = (-3, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\},$$

$$B = [-5, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 3\}.$$

Промежуток A не включает свои концы — числа -3 и 5. Такой промежуток называется ***интервалом***. Промежуток B содержит концы и называется ***отрезком***.

Объединение $A \cup B$ и пересечение $A \cap B$ являются ***полуинтервалами***:

$$A \cup B = [-5, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 5\},$$

$$A \cap B = (-3, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 3\}.$$

По определению разности множеств находим также:

$$A \setminus B = (3, 5), \quad B \setminus A = [-5, -3].$$

6. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, если $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ делится на } 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ не делится на } 14\}$.

Решение. Заметим, что хотя бы одно из условий, определяющих множества A, B, выполняется для любого целого числа: если x делится на

7, то $x \in A$, а если x не делится на 7, то, конечно, x не делится на 14 и поэтому $x \in B$. Итак, $\forall x \in \mathbb{Z}$ обязательно выполнено хотя бы одно из включений $x \in A$, $x \in B$. Поэтому $A \cup B = \mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел. Далее, чтобы найти пересечение $A \cap B$, рассмотрим числа, которые одновременно и делятся на 7, и не делятся на 14. Это следующие числа: $\pm 7, \pm 21, \pm 35, \ldots$ Поэтому

$$A \cap B = \{\pm 7, \pm 21, \pm 35, \ldots\} = \{7k \mid k - \text{нечётное целое}\}.$$

7. Пусть T — множество всех треугольников на плоскости. Рассмотрим его подмножества:

$$T_1 = \{x \in T \mid x \text{ равнобедренный}\},$$
$$T_2 = \{x \in T \mid x \text{ равносторонний}\},$$
$$T_3 = \{x \in T \mid x \text{ прямоугольный}\}.$$

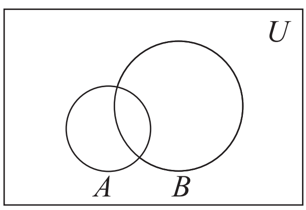
Найти множества $T_1 \cap T_2$, $T_1 \cup T_2$, $T_1 \cap T_3$, $T_2 \setminus T_1$, $T_3 \setminus T_2$, $T_2 \cap T_3$.

Решение. Найдём $T_1 \cap T_2$. Так как любой равносторонний треугольник является также и равнобедренным, то $T_2 \subseteq T_1$, и поэтому $T_1 \cap T_2 = T_2$. По этой же причине $T_1 \cup T_2 = T_1$. Пересечение $T_1 \cap T_3$ состоит из прямоугольных равнобедренных треугольников (с углами $90°, 45°, 45°$). Разность $T_2 \setminus T_1 = \varnothing$, так как $T_2 \subseteq T_1$. Разность $T_3 \setminus T_2$ состоит из прямоугольных треугольников, которые не являются равносторонними. Однако все прямоугольные треугольники не являются равносторонними. Поэтому $T_3 \setminus T_2 = T_3$ и $T_2 \cap T_3 = \varnothing$.

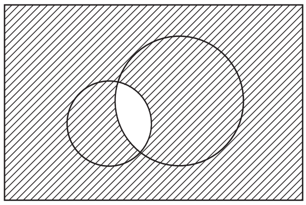
8. С помощью диаграмм Эйлера–Венна проверить, что для любых множеств A, B справедливы соотношения (***законы де Моргана***):

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

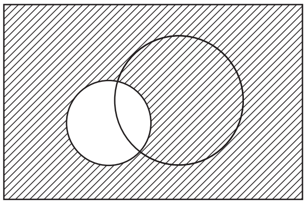
Решение. Рассмотрим только первое равенство. Построим диаграмму Эйлера–Венна, изобразив множества A, B кругами. Считаем, что A, B есть подмножества некоторого универсального множества U, изображаемого прямоугольником.

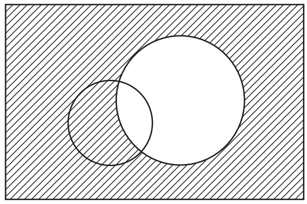


Отметим штриховкой на диаграмме множество $\overline{A \cap B}$ — дополнение к пересечению A и B:

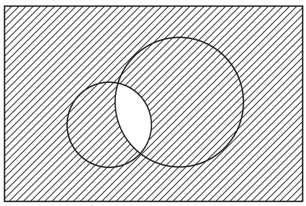


Теперь — снова графически — выполним действия в правой части равенства. Сначала построим дополнения множеств A и B:





Строим объединение $\overline{A} \cup \overline{B}$:



Последняя диаграмма совпадает с диаграммой множества $\overline{A \cap B}$. Поэтому $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, что и требовалось доказать.

9. Используя определения операций, доказать, что для любых множеств A, B, C справедливо соотношение:

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

Решение. Возьмём $x \in A \cap (B \setminus C)$. Тогда $x \in A$ и $x \in (B \setminus C)$. Значит, $x \in B$, $x \notin C$. Отсюда следует, что $x \in A \cap B$, $x \notin A \cap C$. Поэтому $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. Итак, любой элемент множества $A \cap (B \setminus C)$ содержится и во множестве $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$, т. е.

$$A \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

Докажем обратное включение. Пусть $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. Тогда $x \in A \cap B$ (т. е. $x \in A$ и $x \in B$) и $x \notin A \cap C$. Из соотношений $x \in A$, $x \notin A \cap C$ следует, что $x \notin C$. Но $x \in B$. Поэтому $x \in (B \setminus C)$. Вместе с условием $x \in A$ это позволяет заключить, что $x \in A \cap (B \setminus C)$. Итак, любой элемент множества в правой части равенства является элементом и левой части, т. е.

$$(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subseteq A \cap (B \setminus C).$$

Полученные нами два включения и означают равенство множеств.

10. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Рассмотрим множество

$$\alpha = \{(a, b) \in A^2 \mid a + b \in A\}.$$

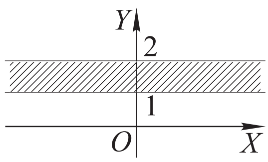
Требуется задать α перечислением его элементов. Является ли α графиком какого-либо отображения $A \to A$?

Решение. Всего в декартовом произведении $A \times A$ имеется 25 упорядоченных пар чисел. Во множество α входят те из них, у которых сумма элементов есть число из A. Поэтому

$$\alpha = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}.$$

Графиком α не является, так как нарушены оба условия определения: 1) число 5 не является первым элементом ни одной пары; 2) в α содержатся пары $(1, 2)$ и $(1, 3)$, что для графика отображения невозможно.

11. Является ли множество $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2\}$ графиком какого-либо отображения?



Решение. Элементы α соответствуют точкам плоскости, у которых вторая координата (т. е. ордината y) удовлетворяет неравенству $1 \leq y \leq 2$. На плоскости эти точки образуют полосу шириной 1, параллельную оси OX.

Первое требование, предъявляемое к графику, выполнено: $\forall x\, \exists y \ : \ (x, y) \in \alpha$. Однако второе условие не выполнено: $(2, 1) \in \alpha$, $(2, \dfrac{3}{2}) \in \alpha$. Поэтому графиком отображения α не является.

12. Проверить, что множество $\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b - a = 3\}$ является графиком отображения $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Исследовать это отображение на инъективность и сюръективность.

Решение. Множество α можно записать так:

$$\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | \ b = a + 3\} = \{(a, a + 3) | \ a \in \mathbb{N}\}.$$

Ясно, что $\forall a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{N} : b = a + 3$, т. е. первое условие выполнено. Если известно число a — первый элемент в паре, то $b = a + 3$ находится однозначно. Значит, и второе условие выполнено. Итак, α — график отображения $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(a) = a + 3$.

Проверим инъективность. Если $f(a_1) = b$, $f(a_2) = b$ (т. е. $a_1 + 3 = b$, $a_2 + 3 = b$), то ясно, что $a_1 = a_2$. Поэтому f инъективно. Сюръективность не выполняется. Например, в α нет ни одной пары вида $(a, 1)$, т. е. 1 не является образом какого-либо элемента при отображении f.

13. Исследовать на сюръективность и инъективность функцию (отображение) f, определённую на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ формулой $y = 5x + 3$.

Решение. Проверим инъективность: если $f(x_1) = f(x_2)$, т. е $5x_1 + 3 = = 5x_2 + 3$, то ясно, что $x_1 = x_2$. Значит, f — инъективна. Проверим сюръективность: $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}:\ y = 5x + 3$. Действительно, прообразом любого $y \in \mathbb{R}$ является число $\dfrac{y-3}{5}$. Итак, функция f является инъективной и сюръективной, т. е. биективной.

14. Будет ли множество положительных действительных чисел $\mathbb{R}^+$ равномощным множеству всех действительных чисел $\mathbb{R}$?

Решение. Рассмотрим показательную функцию $y = 2^x$. Её область определения $\mathbb{R}$. При любом x значение $2^x > 0$, все значения положительны. Любое положительное число y является значением показательной функции, т. е. она задает отображение $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^+$(сюръективное). Если $x_1 \neq x_2$, то и $2^{x_1} \neq 2^{x_2}$, т. е. отображение инъективное. Следовательно, функция $y = 2^x$ задает биективное отображение (взаимно однозначное соответствие) между множествами $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^+$. Поэтому они равномощны.

15. Записать рациональное число $\dfrac{7}{22}$ в виде десятичной дроби.

Решение. Выполним деление «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{7\ \ } & 22 \\ \cline{2-2}
-70 & 0,318\ldots \\
\underline{66\ } & \\
-40 & \\
\underline{22\ } & \\
-180 & \\
\underline{176\ } & \\
4 &
\end{array}
$$

На очередном шаге процесса деления в остатке второй раз оказалось число 4. Значит, далее цифры частного будут повторяться:

$$\frac{7}{22} = 0,3181818\ldots$$

16. Записать рациональное число $0,1322\ldots$ в виде обыкновенной дроби.

Решение. Представим наше число в следующем виде:

$0,1322\ldots = 0,13 + 2(0,001 + 0,0001 + 0,00001 + \ldots)$.

Выражение в скобке представляет собой сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Как известно из школьного курса, эту сумму можно вычислить по формуле:

$$a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1-q}.$$

Поэтому:

$$0,1322\ldots = 0,13 + 2\frac{0,001}{1-0,1} = 0,13 + \frac{0,002}{0,9} =$$

$$= \frac{13}{100} + \frac{2}{900} = \frac{117+2}{900} = \frac{119}{900}.$$

Перейдя обратно, к десятичной дроби, можно проверить правильность наших вычислений.

17. Методом математической индукции доказать формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Решение. Разделив обе части равенства на a, получим более простую формулу

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

которую и будем доказывать.

База индукции: при $n = 1$ в левой части только одно слагаемое, формула имеет вид: $1 = 1$. Предполагая, что формула справедлива для $n = k$, проведём вычисления:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} + q^k = \frac{1-q^k}{1-q} + q^k =$$

$$= \frac{1-q^k+q^k-q^{k+1}}{1-q} = \frac{1-q^{k+1}}{1-q},$$

т. е. формула справедлива для $n = k+1$. Следовательно, она справедлива для любого натурального n.

1.6. Упражнения для самостоятельной работы

1. Задать перечислением элементов множество

$$A = \{\, x \in \mathbb{R}\,|(x^2-4)(x^2+4)(x^2-5) = 0\}.$$

2. Задать с помощью определяющего соотношения множества

$$A = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\},\ B = \{-8, -16, -24, \ldots\}.$$

3. Найти число элементов (мощность) множеств

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \le 7\},\ B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^3 = 0,25\}.$$

4. Найти множества $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$, если

$$A = \{a, b, c, d, e, f, \},\ B = \{b, c, f, h\}.$$

5. Найти множества $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$, если

$$A = (-\infty, 3],\ B = (0, 7).$$

6. Найти множества $A \cup B, A \cap B$, если

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ не делится на } 7\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ делится на } 14\}.$$

7. С помощью диаграмм Эйлера–Венна доказать равенства, справедливые для любых множеств A, B, C.

$$\text{а)}(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

$$\text{б)}A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad \text{в)}A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

8. Используя определения операций объединения, пересечения, дополнения, разности, доказать соотношения алгебры множеств:
а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

в) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$; г) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

9. Доказать, что соотношение $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ выполняется тогда и только тогда, когда $C \subseteq A$.

10. Доказать или опровергнуть соотношения:
а) $A \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C$; б) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$;
в) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$; г) $\overline{A} \cap B \subseteq C \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B} \cup C$.

11. Является ли графиком некоторого отображения $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ каждое из следующих подмножеств $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$? Если является, то будет ли соответствующее отображение инъективным и сюръективным?
а) $\alpha = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), \ldots\}$;
б) $\beta = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), \ldots\}$;
в) $\gamma = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), \ldots\}$;
г) $\delta = \{(m, n) \,|\, m + n = 10\}$.

12. Каждое из данных подмножеств в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ изобразить графически. Является ли оно графиком отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Будет ли соответствующее отображение инъективным и сюръективным?
а) $\alpha = \{(x, y) \,|\, y = \sin x\}$; б) $\beta = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$;
в) $\gamma = \{(x, y) \,|\, y = x^3\}$; г) $\delta = \{(x, y) \,|\, y = 1\}$.

13. Исследовать на сюръективность и инъективность следующие функции, отображающие $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$:
а) $f_1(x) = |x|$; б) $f_2(x) = 5^x$;

в) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } \ x \ne 0, \\ 0\,, \text{ если } \ x = 0; \end{cases}$ г) $f_4(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x\ , \text{ если } \ \cos x \ne 0, \\ \\ 0\ , \text{ если } \ \cos x = 0. \end{cases}$

14. Являются ли равномощными следующие множества? Почему?
а) $A = \mathbb{N} \cap [1,5]$ и $B = \mathbb{N} \cap [4,11]$; б) $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$; в) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
г) $[1,5]$ и $[4,11]$; д) $(0,1)$ и $\mathbb{R}$; е) $\mathbb{Z}$ и $[0,1]$.

15. Какие из перечисленных ниже чисел являются иррациональными?
а) $3,514444444\ldots$; б) $-2,131131113\ldots$; в) $0,378$.

16. Записать рациональные числа в виде десятичных дробей:
а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{8}{3}$; в) $\frac{3}{7}$.

17. Записать рациональные числа в виде обыкновенных дробей:
а) $0,53333\ldots$; б) $0,128$; в) $0,252525\ldots$

18. Методом математической индукции доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$
а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

19. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ \ldots + \ \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

20. Доказать, что для любого натурального $n \geq 2$
а) число $2^{2^n} - 6$ делится на 10; б) число $7^n + 3n - 1$ делится на 9.

1.7. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Для любых множеств A, B множество $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ равно
1) A; 2) B; 3) $\varnothing$. Указать номер правильного ответа.

2. Пусть $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $B = \{2k+1 \,|\, k \in A\}$. Найти наибольшее число, которое является элементом множества $A \setminus (A \setminus B)$.

3. Пусть $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x^2 \leq 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 7 \leq x < 20\}$. Найти число элементов множества $\alpha = \{(a,b) \,|\, a \in A, b \in B, a > b\}$.

4. Является ли множество $\alpha = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),\ldots\}$ графиком отображения $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$? Указать номер правильного ответа:

1) α — график биективного отображения; 2) α — график сюръективного, но не инъективного отображения; 3) α — график инъективного, но не сюръективного отображения; 4) α не является графиком отображения.

5. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана формулой $f(x) = kx + b$. Найти такое число k, чтобы f не являлось сюръективным отображением.

6. Сколько рациональных чисел содержится в следующем списке?

$$2; \quad -\frac{2}{3}\,; \qquad 3\sqrt{2}; \quad 2,35353535\ldots; \quad 1,010010001\ldots;$$

$$\frac{4}{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2}; \quad -12,38\,; \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}}\right)^6; \quad \left(\sqrt{3}\right)^5.$$

ГЛАВА 2

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Самый важный для приложений раздел алгебры — линейная алгебра. Основными инструментами линейной алгебры являются матрицы, определители, линейные пространства. Для изучения этих понятий нам почти не потребуется вспоминать школьный курс математики.

2.1. Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица, состоящая из чисел. Например:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4,5 \\ 5,7 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

В общем виде любую матрицу удобно записывать так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}.$$

Здесь a_{ij} — обозначение числа, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбика. Числа a_{ij} называются ***элементами*** матрицы. Особенно часто мы будем работать с ***квадратными*** матрицами, у которых $m = n$. Это число называется ***порядком*** квадратной матрицы. Можно рассматривать и матрицы, состоящие из одной строки ($m = 1$) или из одного столбца ($n = 1$).

Пример 1.

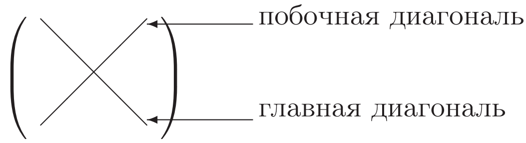
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Здесь A — квадратная матрица второго порядка ($m = n = 2$), B — матрица-строка, C — матрица-столбец. В матрице $A: a_{11} = 0,\ a_{12} = 2,$ $a_{21} = 1,\ a_{22} = -3$. В матрице $C:\ a_{11} = 8,\ a_{21} = -3,\ a_{31} = 3$.

Матрицу любого размера, состоящую только из нулей, будем называть ***нулевой*** и обозначать буквой O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ составляют так называемую ***главную диагональ***. Другая диагональ называется побочной.



Квадратная матрица называется диагональной, если все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю. На главной диагонали могут быть любые числа. Если все они равны 1, то такая диагональная матрица называется ***единичной***. Будем всегда обозначать её буквой E. Итак,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ — единичная, } D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ —}$$

произвольная диагональная матрица.

Научимся выполнять простые действия с матрицами.

1) Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число, нужно все её элементы умножить на это число. Например:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Сложение матриц. Складывать можно только матрицы одинакового размера. Сложение выполняется поэлементно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+5 & 3+1 \\ 4+(-4) & (-3)+7 & 1+4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Правило сложения матриц в общем виде можно записать так:

$$\text{если} \quad A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{ij})_{m\times n}, \text{ то } \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}\,.$$

3) Умножение матриц.

Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times k}$, т. е. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Произведением AB называется матрица $C = (c_{ij})_{m\times k}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Чтобы разобраться в этой формуле и запомнить её, возьмём i-ю строчку матрицы A и j-й столбик B (они должны быть равной длины). Перемножим первые элементы строчки и столбика, вторые элементы, и так далее. Затем все полученные произведения сложим:

$$c_{ij} = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Пример 2.

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(-2)+3\cdot 3+4\cdot 1 & 2\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot 5 \\ (-1)(-2)+2\cdot 3+3\cdot 1 & (-1)\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 23 \\ 11 & 17 \end{pmatrix}.$$

б) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ — не имеет смысла, так как длина строки первой матрицы не равна длине столбца второй. А вот если переставить сомножители, то умножение возможно:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 4+4\cdot 7 & 2\cdot 5+4\cdot 1 & 2\cdot 1+4\cdot 3 \\ 5\cdot 4+1\cdot 7 & 5\cdot 5+1\cdot 1 & 5\cdot 1+1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 14 & 14 \\ 27 & 26 & 8 \end{pmatrix}.$$

в) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot(-2)+7\cdot 4 & 4\cdot 3+7\cdot(-1) \\ 1\cdot(-2)+8\cdot 4 & 1\cdot 3+8\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 30 & -5 \end{pmatrix}.$

г) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 4+3\cdot 1 & (-2)\cdot 7+3\cdot 8 \\ 4\cdot 4+(-1)\cdot 1 & 4\cdot 7+(-1)\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}.$

Последние два пункта показывают, что умножение матриц не коммутативно: $AB \neq BA$. Хотя в некоторых частных случаях произведения получаются одинаковыми. Например: $AE = EA = A$ для любой матрицы A. Это свойство матрицы E объясняет, почему именно она называется единичной — при умножении чисел аналогичным свойством обладает число 1.

4) Транспонирование матриц.

Для любой матрицы A символом A^T будем обозначать матрицу, у которой первой, второй, …строками являются первый, второй, …столбцы матрицы A. Итак,

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для квадратной матрицы можно сказать, что транспонирование — это отражение относительно главной диагонали.

Пример 3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$

Теорема 1. Действия сложения и умножения матриц обладают следующими свойствами (для любых матриц A, B, C, с которыми эти действия можно выполнить):

$(A + B) + C = A + (B + C)$ — ассоциативность сложения;

$A + B = B + A$ — коммутативность сложения;

$(AB)C = A(BC)$ — ассоциативность умножения;

$A(B + C) = AB + AC$ — дистрибутивность.

Доказательство теоремы 1 мы не приводим. Советуем читателю проверить эти свойства для квадратных матриц второго порядка: возьмите матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

и убедитесь, используя известные свойства сложения и умножения чисел, что результат вычислений в левой части каждого равенства совпадает с результатом вычислений в правой части. Вы тем самым не только докажете теорему 1 в частном случае, для матриц 2-го порядка, но и проверите своё умение выполнять действия с матрицами.

Следствие. Множество квадратных матриц одного порядка n с операциями сложения и умножения матриц образует кольцо $\langle M_n;\ +\ ,\ \cdot\ \rangle$.

Действительно, в теореме 1 утверждается справедливость четырёх аксиом кольца (см. раздел 1.3). Кроме этого, нулевая матрица является нейтральным элементом для сложения. Противоположным элементом для матрицы $A = (a_{ij})$ является, очевидно, матрица $-A = (-a_{ij})$. Итак, все аксиомы кольца выполняются.

2.2. Определители

Определитель — это число, которое по специальным правилам вычисляется для каждой квадратной матрицы. Определитель матрицы A будем обозначать так: $|\ A\ |$.

Иногда определитель обозначают символом $detA$ и называют ***детерминантом***, но мы будем пользоваться русским термином.

Определителем матрицы 2-го порядка называется число, которое записывается и вычисляется так:

$$| A |= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Пример 4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 10 = 11.$

Определителем матрицы 3-го порядка называется число, которое записывается и вычисляется следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим внимательно эту формулу и сделаем такие наблюдения:

1) В формуле используются определители 2-го порядка; значит, предполагается, что их мы вычислять уже умеем.

2) В формуле каждый элемент первой строчки умножается на определитель, который получится, если вычеркнуть строчку и столбик, где этот элемент стоит. Такой определитель будем называть ***минором*** соответствующего элемента a_{ij} и обозначать M_{ij}.

3) Перед произведением элемента a_{12} и минора M_{12} взят знак «$-$». Чтобы сформулировать и запомнить правило знаков, вводится понятие алгебраического дополнения. ***Алгебраическим дополнением*** элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Другими словами, алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} — это минор M_{ij}, взятый со знаком «$+$», если $i+j$ — чётное число, или со знаком «$-$», если $i + j$ — нечётное число.

Используя эти понятия, формулу для определителя 3-го порядка можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Пример 5. В определителе $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ найти алгебраические дополнения к элементам a_{32}, a_{33} и вычислить определитель.

Решение. Найдём алгебраические дополнения:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 5 - 4(-2)) = -13,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10.$$

Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (14 - 5) - 3(28 + 15) - 2(4 + 6) = 9 - 129 - 20 = -140.$$

Перейдём теперь к общему случаю. ***Определителем квадратной матрицы*** порядка n называется число, которое записывается и вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Эта формула называется ***разложением определителя по первой строке***. Заметим, что в ней алгебраические дополнения вычисляются как определители порядка $n-1$. Такой подход использует принцип математической индукции: зная, как вычисляются определители 3-го порядка, можно вычислять определители 4-го порядка, и так далее: формула позволяет переходить к более высоким порядкам.

Рассмотрим свойства определителей. Они потребуются нам много раз.

Свойство 1. Определитель можно вычислить, разлагая его по 1-му столбцу:

$$|\, A \,| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1} =$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1}M_{n1}.$$

Доказательство (его можно пропустить при первом чтении этого раздела, рассмотреть сначала более лёгкие доказательства других свойств). Применим индукцию по порядку определителя n.

База индукции. Для $n = 2$ свойство справедливо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21}.$$

Предположение индукции. Предположим, что свойство 1 справедливо для определителей, порядок которых меньше n.

Шаг индукции. Используя предположение, докажем свойство 1 для определителя $\mid A \mid$ порядка n. По определению,

$$\mid A \mid = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}.$$

По предположению индукции, каждый минор M_{1j} можно разложить по первому столбцу:

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{1j}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \cancel{a_{2j}} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \cancel{\ldots} & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \cancel{a_{nj}} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21}(M_{1j})_{21} - a_{31}(M_{1j})_{31} + \ldots + (-1)^n a_{n1}(M_{1j})_{n1}.$$

Здесь, например, $(M_{1j})_{21}$ — определитель, который получится, если в $|A|$ вычеркнуть сначала 1-ю строку и j-й столбик, а затем 2-ю строку и 1-й столбик.

Подставим разложения $M_{12}, M_{13}, \ldots, M_{1n}$ в исходную формулу для $|A|$:

$$\begin{aligned} |A| = a_{11}M_{11} - a_{12}[a_{21}(M_{12})_{21} - a_{31}(M_{12})_{31} + \ldots + (-1)^n a_{n1}(M_{12})_{n1}]+ \\ +a_{13}[a_{21}(M_{13})_{21} - a_{31}(M_{13})_{31} + \ldots + (-1)^n a_{n1}(M_{13})_{n1}]- \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ +(-1)^{n+1}a_{1n}[a_{21}(M_{1n})_{21} - a_{31}(M_{1n})_{31} + \ldots + (-1)^n a_{n1}(M_{1n})_{n1}]. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые, собирая их в последней формуле «по столбцам». Будем пользоваться тем, что $(M_{ij})_{kl} = (M_{kl})_{ij}$.

$$\begin{aligned} |A| = a_{11}M_{11} - a_{21}[a_{12}(M_{21})_{12} - a_{13}(M_{21})_{13} + \ldots + (-1)^n a_{1n}(M_{21})_{1n}]+ \\ +a_{31}[a_{12}(M_{31})_{12} - a_{13}(M_{31})_{13} + \ldots + (-1)^n a_{1n}(M_{31})_{1n}]- \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ +(-1)^{n+1}a_{n1}[a_{12}(M_{n1})_{12} - a_{13}(M_{n1})_{13} + \ldots + (-1)^n a_{1n}(M_{n1})_{1n}]. \end{aligned}$$

Так как каждая из скобок является разложением соответствующего минора по 1-й строке, то получаем требуемое равенство:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}.$$

Пример 6. Доказать, что

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}.$$

Решение. Применим метод математической индукции. Так как $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$, то база индукции имеется. Допустим, что для определителей порядка $n-1$ утверждение справедливо. Разложим Δ_n по первому столбцу и, используя предположение, вычислим:

$$\Delta_n = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(a_{22}a_{33}\dots a_{nn}) = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Замечание. Матрица, у которой ниже главной диагонали все элементы равны 0, называется ***треугольной***. В примере 6 показано, что определитель любой треугольной матрицы равен произведению элементов на главной диагонали. В частности, $\mid E \mid = 1$.

Свойство 2. При транспонировании матрицы величина её определителя не меняется.

Доказательство. Проведём доказательство методом математической индукции по порядку определителя n. Для $n = 2$ свойство легко проверяется:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Предположим, что свойство 2 справедливо для определителей, порядок которых меньше n. Пусть A — матрица порядка n. Будем обозначать M_{ij} — миноры матрицы A, N_{ij} — миноры матрицы A^T. Например:

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{\dots} & \cancel{a_{1j}} & \cancel{\dots} & \cancel{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \cancel{a_{2j}} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \cancel{\dots} & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \cancel{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad N_{j1} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \cancel{a_{12}} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cancel{\dots} & \dots & \dots & \dots \\ \cancel{a_{1j}} & \cancel{a_{2j}} & \cancel{\dots} & \cancel{a_{nj}} \\ \cancel{\dots} & \dots & \dots & \dots \\ \cancel{a_{1n}} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теперь заметим, что определители $(n-1)$-го порядка M_{1j} и N_{j1} переходят друг в друга при транспонировании. Значит, по предположению индукции, они равны: $M_{1j} = N_{j1}$.

Разложим определитель $|A|$ по первой строке, а определитель $|A^T|$ по первому столбцу:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ \dots \ + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n},$$

$$\left|A^T\right| = a_{11}N_{11} - a_{12}N_{21} + \ \dots \ + (-1)^{n+1}a_{1n}N_{n1}.$$

Так как мы уже знаем, что $M_{11} = N_{11}, M_{12} = N_{21}, \dots, M_{1n} = N_{n1}$, то отсюда получаем $|A| = |A^T|$, что и требовалось.

Замечание. Свойство 2 позволяет все свойства строк определителя переносить и на столбцы. Дальнейшие свойства будем рассматривать для строк, хотя они справедливы и для столбцов.

Свойство 3. Если в определителе поменять местами 2 строки, то он сменит знак.

Доказательство. Сначала индукцией по порядку определителя n докажем утверждение для соседних строк. Пусть

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разложим каждый определитель по 1-му столбцу, обозначая M_{ij} — миноры $|A|$, а N_{j1} — миноры $|B|$.

$$|A| = a_{11}M_{11} + \ldots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \\ +(-1)^{i+2}a_{i+1,1}M_{i+1,1} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1},$$

$$|B| = a_{11}N_{11} + \ldots + (-1)^{i+1}a_{i+1,1}N_{i1} + \\ +(-1)^{i+2}a_{i1}N_{i+1,1} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}.$$

По предположению индукции каждое слагаемое в разложении $|B|$ (кроме i-го и $(i+1)$-го) отличается лишь знаком от соответствующего слагаемого в разложении $|A|$. (Например, N_{11} — определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из M_{11} перестановкой соседних строк. Значит, по предположению, $N_{11} = -M_{11}$). Далее, $M_{i1} = N_{i+1,1}$ — это просто один и тот же определитель. Поэтому слагаемые $(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}$ и $(-1)^{i+2}a_{i1}N_{i+1,1}$ отличаются лишь знаком. Аналогично $(-1)^{i+2}a_{i+1,1}M_{i+1,1} = -(-1)^{i+1}a_{i+1,1}N_{i1}$. Следовательно, $|B| = -|A|$.

Теперь попробуем переставить i-ю и j-ю строки в определителе

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Сначала поднимем j-ю строку на место i-й — для этого потребуется $j-i$ перестановок с соседней строкой. Затем i-ю строку опустим на j-е место

— для этого нужно ещё $j-i-1$ перестановок. Всего потребуется $(j-i)+$ $+(j-i-1)=2(j-i)-1$, т. е. нечётное число перестановок. При каждой такой перестановке знак определителя меняется. Значит, после нечётного числа перестановок он будет изменён.

Следствие. Если в определителе есть 2 одинаковые строки, то он равен нулю. Действительно, переставляя одинаковые строки, мы ничего не меняем. С другой стороны, определитель должен сменить знак, т. е. $|A|=-|A|$. Значит $|A|=0$.

Свойство 4. Определитель можно вычислить, разлагая его по любой строке:

$$|A|=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\ \ldots\ +(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}.$$

Доказательство. Переставим i-ю строку на место 1-й, не меняя порядка остальных строк (1-я строка становится 2-й и т. д.). Получим определитель

$$|B|=(-1)^{i-1}|A|.$$

Разложим $|B|$ по первой строке. Заметим, что вычёркивая 1-ю строку и j-й столбец, мы получаем минор M_{ij} определителя $|A|$. Поэтому

$$|B|=a_{i1}M_{i1}-a_{i2}M_{i2}+\ldots+(-1)^{n+1}a_{in}M_{in}.$$

Следовательно,

$$|A|=(-1)^{i+1}|B|=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\ldots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in},$$

что и требовалось доказать.

Свойство 2 показывает, что определитель можно вычислить, разлагая его не только по любой строке, но и по любому столбцу. Какой же способ выбрать? Конечно, наиболее простой. Обычно разлагают по строке (или столбцу), где имеется больше всего нулей.

Пример 7. Вычислим определитель 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot A_{13}+0\cdot A_{23}+0\cdot A_{33}+2\cdot A_{43}=3\cdot M_{13}-2\cdot M_{43}=$$

$$=3\cdot\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=3\left((-3)\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)-$$

$$-2\left(2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right)=3(39+12)-2(-26-12+17)=195.$$

Мы стали вычислять определитель, разлагая его по 3-му столбцу, потому что в нём 2 нуля, и нам не пришлось вычислять A_{23} и A_{33}. Миноры 3-го порядка вычислялись с помощью разложения по строкам: M_{13} — по 3-й строке, M_{43} — по 1-й строке. Заметим также, что при вычислении A_{43} мы сменили знак перед минором, так как $4 + 3 = 7$ — число нечётное.

Свойство 5. Сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю, т. е. при $i \neq j$

$$a_{i1}A_{j1} + \ \ldots \ + a_{in}A_{jn} = 0.$$

Доказательство. Возьмём произвольный определитель $|A|$ и заменим в нём j-ю строку так, чтобы она совпадала с i-й. Полученный определитель равен 0, так как имеет одинаковые строки:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-я строка} \\ \\ \leftarrow j\text{-я строка} \\ \\ \\ \end{array}$$

Разложим определитель по j-й строке:

$$0 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}.$$

Алгебраические дополнения здесь те же, что в $|A|$, так как при их вычислении изменённая j-я строчка вычёркивается. Мы доказали требуемую формулу.

Свойство 6. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Доказательство. Прибавим к элементам i-й строки определителя $|A|$ элементы его j-й строки, умноженные на λ; полученный определитель обозначим $|B|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \ldots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разложим $|B|$ по i-й строке:

$$|B| = (a_{i1} + \lambda a_{j1})\, A_{i1} + (a_{i2} + \lambda a_{j2})\, A_{i2} + \ldots + (a_{in} + \lambda a_{jn})\, A_{in} = \\ = (a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}) + \lambda\,(a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \ldots + a_{jn}A_{in}).$$

После проведённых преобразований первая скобка равна $|A|$, так как представляет собой разложение $|A|$ по i-й строке, вторая скобка равна нулю по свойству 5. Поэтому $|B| = |A|$, что и требовалось.

Замечание. Свойство 6 особенно часто используется при вычислении определителей, так как позволяет получать нули среди элементов, а это сильно облегчает вычисление.

Пример 8.

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & 2 & -4 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -(-3)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \\ = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 39 = 117.$$

Здесь мы прибавили к 1-й строке 3-ю строку, умноженную на -2, и получили 3 нуля в 1-й строке. Разложили по первой строке. В полученном определителе 3-го порядка сделали преобразование столбцов: к 1-му столбцу прибавили 3-й, умноженный на -2. Затем разложили по 1-й строке и легко вычислили полученный определитель второго порядка.

Свойство 7. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей:

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Это свойство мы доказывать не будем, лишь поясним на примере.

Пример 9. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-8 & 6-6 \\ 20+4 & 8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 24 & 11 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11,$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7, \quad |AB| = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 24 & 11 \end{vmatrix} = 77.$$

Итак, $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Все основные свойства определителей мы рассмотрели.

2.3. Обратная матрица

Пусть A — квадратная матрица. ***Обратной*** к ней называется такая матрица A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (единичная).

По свойству 7 определителей $\left|AA^{-1}\right| = |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = |E| = 1$, поэтому $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$. Значит, если $|A| = 0$, то для такой матрицы обратную найти невозможно. Матрицы A, у которых $|A| = 0$, называются ***вырожденными***. Если же $|A| \neq 0$, то матрица называется ***невырожденной***.

Научимся находить обратную для невырожденной матрицы. Для этого построим матрицу A^*, составленную из алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}, т. е. минор с учётом знака.

Теорема 2. Если A — невырожденная квадратная матрица, $|A| = \Delta \neq 0$, то для неё существует обратная матрица, которую можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot (A^*)^T.$$

Доказательство. Заметим сначала, что все действия в этой формуле нам известны: нужно составить матрицу A^* из алгебраических дополнений, транспонировать её, а затем умножить на число $\dfrac{1}{\Delta}$. Проверим, что таким образом построенная матрица является обратной к A. Чтобы не писать громоздких формул, проверку проведём только для матриц 3-го порядка. Возьмём $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ так, чтобы $|A| = \Delta \neq 0$. Построим A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} (A^*)^T = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Проверим, что $AA^{-1} = E$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix}.$$

Пришлось «разорвать» матрицу, она не помещается в строке.

Рассмотрим внимательно элементы полученной матрицы. Сначала рассмотрим левый верхний элемент — он равен определителю матрицы A:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = |A| = \Delta,$$

так как это — формула разложения определителя по 1-й строке. Аналогично этому и другие элементы, стоящие на главной диагонали, равны $\Delta:$ $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \Delta$ (формула разложения по 2-й строке), $a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = \Delta$ (формула разложения по 3-й строке).

Все остальные элементы полученной матрицы равны 0 по свойству 5 (раздел 2.2), так как каждый из них есть сумма произведений элементов какой-нибудь строки на алгебраические дополнения к элементам другой строки. Например, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$, так как элементы 1-й строки умножаются на алгебраические дополнения к элементам 2-й строки. Итак,

$$AA^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Если умножать в другом порядке, то тоже получим E: $A^{-1}A = E$. Не будем это делать подробно — все рассуждения те же самые, только вместо свойств строк определителей используются свойства столбцов. Теорема доказана.

Замечание. Для невырожденной матрицы A имеется только одна обратная матрица A^{-1} — та, которую мы построили. Действительно, если B — какая-либо другая матрица со свойством: $AB = E$, то $B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}$, т. е. $B = A^{-1}$.

2.4. Ранг матрицы

В разделах 2.2, 2.3 рассматривались только квадратные матрицы. Здесь мы откажемся от этого требования. Пусть A — матрица размером $m \times n$. Возьмём число k ($k \leq m,\ k \leq n$) и отметим в матрице A какие-либо k строк и какие-либо k столбцов. Из элементов, стоящих на их пересечениях, составим определитель. Он называется ***минором k-го порядка*** матрицы A.

Пример 10. $A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{array} \end{array}$, $M = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$

Здесь M — минор 2-го порядка матрицы A. Конечно, миноров 2-го порядка в этой матрице много. Миноры 1-го порядка — это просто элементы матрицы, их в нашем примере 12. Миноров 3-го порядка — 4 штуки (строки нужно включать все, а из столбцов один не включать).

Если существует минор порядка r, не равный нулю, а все миноры больших порядков равны нулю, то число r называется ***рангом матрицы***:

$$r = r(A) = rang(A).$$

Пример 11. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. Здесь $r(A) = 1$, так как легко заметить, что все миноры 2-го порядка равны 0.

б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Здесь $r(B) = 2$, так как есть минор 2-го порядка, не равный нулю (например, в левом верхнем углу: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$), а любой минор 3-го порядка равен 0, так как содержит нулевую строчку.

Заметим, что подсчитать ранг матрицы из примера 10 не так просто — нужно вычислять миноры 3-го порядка. И только убедившись, что все они равны 0, можно будет сделать вывод: $r(A) = 2$. Мы научимся вычислять ранг более простым способом. Рассмотрим сначала матрицы специального вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $a_{11},\ a_{22}, \dots,\ a_{kk}$ — не равные нулю числа, то такую матрицу будем называть ***матрицей трапециевидной формы***. Последние нулевые строки могут и отсутствовать.

Пример 12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матрицы трапециевидной формы. В последней из них $k = 1$ и форма трапеции не угадывается.

Однако это — частный случай матрицы трапециевидной формы. Матрица $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ не имеет трапециевидной формы, так как в ней $a_{22} = 0$.

Теорема 3. Ранг матрицы трапециевидной формы равен числу её ненулевых строк.

Доказательство. Как и в примере 11, б), рассмотрим минор порядка k, стоящий в левом верхнем углу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots\, a_{kk} \neq 0.$$

В то же время любой минор большего порядка (если такой в этой матрице найдётся) равен нулю, так как содержит нулевую строку. Значит, $r(A) = k$. Теорема доказана.

Теперь научимся приводить любую матрицу к трапециевидной форме, не меняя её ранга. Для этого используются так называемые ***элементарные преобразования***:

1) перестановка строк;

2) прибавление к элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;

3) перестановка столбцов;

4) преобразование столбцов, аналогичное указанному в пункте 2).

С этими преобразованиями мы уже встречались, изучая свойства определителей. Вспомним, что преобразования 2) и 4) не меняют величину определителя, а перестановки строк или столбцов могут лишь изменить знак. В частности, если определитель не равен нулю, то и после таких преобразований он не будет равен нулю. На основе этих рассуждений можно было бы доказать следующую теорему, но мы приводим её без доказательства.

Теорема 4. Элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы.

А теперь научимся с помощью элементарных преобразований приводить любую матрицу к трапециевидной форме. Ранг при этом не меняется, а у трапециевидной матрицы он вычисляется очень просто. Значит, у нас будет метод вычисления ранга матрицы.

Возьмём любую матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Если $a_{11} = 0$, то переставим строки или столбцы так, чтобы на месте $(1, 1)$ стоял ненулевой элемент. Если же $a_{11} \neq 0$, то добьёмся, чтобы остальные элементы первого столбика стали равными 0. Для этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на $-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$. К третьей строке прибавим первую, умноженную на $-\dfrac{a_{13}}{a_{11}}$. И так далее — изменим все строки, начиная со второй:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Здесь знак $\sim$ означает, что у новой матрицы такой же ранг, как и у A. Далее, поступая аналогично, добиваемся, чтобы на месте $(2,2)$ стоял ненулевой элемент, а все элементы второго столбика ниже него были равны 0. Продолжая эти действия, приведём матрицу к трапециевидной форме. Заметим, что описанный алгоритм не использует преобразования столбцов типа 4).

Эти рассуждения фактически являются доказательством следующей теоремы.

Теорема 5. Любую матрицу можно привести к трапециевидной форме, используя элементарные преобразования строк и перестановку столбцов.

Пример 13. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}^{\times 3} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}^{\times \frac{11}{2}\ \times\left(-\frac{5}{2}\right)} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили трапециевидную матрицу с двумя ненулевыми строками. Значит, $r(A) = 2$.

2.5. Системы линейных уравнений

Многие практические задачи сводятся к решению систем алгебраических уравнений 1-й степени, или, как их обычно называют, систем линейных уравнений. Мы научимся решать любые такие системы, не требуя даже, чтобы число уравнений совпадало с числом неизвестных.

В общем виде система линейных уравнений записывается так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Здесь числа a_{ij} — коэффициенты системы, b_i — свободные члены, x_i — символы неизвестных. Очень удобно ввести матричные обозначения: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — основная матрица системы, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — матрица-столбец свободных членов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матрица-столбец неизвестных. Тогда систему можно записать так: $AX = B$ или, подробнее:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если в левой части этого равенства выполнить умножение матриц по обычным правилам и приравнять элементы полученного столбца к элементам B, то мы придём к первоначальной записи системы.

Пример 14. Запишем одну и ту же систему линейных уравнений двумя разными способами:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 5x + \ y = 11; \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Набор чисел t_1, t_2, …, t_n называется ***решением*** системы уравнений, если при подстановке t_1 вместо x_1, t_2 вместо x_2 и т. д. все уравнения превращаются в верные равенства. В матричной записи решение системы представляет собой числовую матрицу-столбец: $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$. Система линейных уравнений называется ***совместной***, если у неё есть хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если решений нет. В примере 14 система совместна, столбик $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ является её решением:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + (-2) \\ 10 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Это решение можно записать и без матриц: $x = 2$, $y = 1$.

Систему уравнений будем называть ***неопределённой***, если она имеет более одного решения, и ***определённой***, если решение единственно.

Пример 15. Система $\begin{cases} 2x - \ \ y = 3, \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$ является неопределённой. Например, $T_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ являются её решениями. Читатель может найти и много других решений этой системы.

Научимся решать системы линейных уравнений сначала в частном случае. Систему уравнений $AX = B$ будем называть ***крамеровской***, если её основная матрица A — квадратная и невырожденная. Другими словами, в крамеровской системе число неизвестных совпадает с числом уравнений и $|A| \neq 0$.

Теорема 6 *(правило Крамера).* Крамеровская система линейных уравнений имеет единственное решение, задаваемое формулами:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $\Delta = |A|$ — определитель основной матрицы, Δ_i — определитель, полученный из Δ заменой i-го столбика столбиком свободных членов.

Доказательство проведём для $n = 3$, так как в общем случае рассуждения аналогичны.

Итак, имеется крамеровская система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \qquad \Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Допустим сначала, что решение системы существует, т. е. имеются числа t_1, t_2, t_3 такие, что $\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13}t_3 = b_1, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3 = b_2, \\ a_{31}t_1 + a_{32}t_2 + a_{33}t_3 = b_3. \end{cases}$ Умножим первое равенство на A_{11} (алгебраическое дополнение к элементу a_{11}), второе равенство — на A_{21}, третье — на A_{31} и сложим полученные равенства:

$$t_1 (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) + t_2 (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) + \\ + t_3 (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}.$$

Первая скобка в левой части равна Δ, так как представляет собой разложение Δ по 1-му столбцу. Две другие скобки равны 0, так как алгебраические дополнения к элементам 1-го столбца умножаются на элементы другого столбца (см. свойство 5 определителей). Правая часть равенства представляет собой разложение определителя Δ_1 по первому столбцу:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}.$$

Следовательно, мы получили: $t_1 \cdot \Delta = \Delta_1$, т. е. $t_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$. Если умножить уравнения исходной системы на алгебраические дополнения к элементам 2-го или 3-го столбцов, то в точности так же получим формулы

$$t_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad t_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Итак, если решение существует, то его можно найти по указанным формулам. Поэтому ясно, что другого решения быть не может, решение единственно.

Проверим теперь, что числа $\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ действительно являются решением системы. Подставим эти числа, например, в левую часть 1-го уравнения и проведём преобразования, разлагая определитель Δ_i по i-му столбцу:

$$a_{11}\frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12}\frac{\Delta_2}{\Delta} + a_{13}\frac{\Delta_3}{\Delta} =$$

$$= \frac{a_{11}}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}) + \frac{a_{12}}{\Delta}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}) +$$

$$+\frac{a_{13}}{\Delta}(b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}) =$$

$$= \frac{b_1}{\Delta}(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) + \frac{b_2}{\Delta}(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}) +$$

$$+\frac{b_3}{\Delta}(a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}) = \frac{b_1}{\Delta}\cdot\Delta + \frac{b_2}{\Delta}\cdot 0 + \frac{b_3}{\Delta}\cdot 0 = b_1.$$

Мы использовали основное определение: $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \Delta$, а также свойство 5:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0, \quad a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0.$$

Итак, при замене x_1, x_2, x_3 числами $\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ первое уравнение превращается в верное равенство. Аналогично можно проверить это и для остальных уравнений. Значит, числа $\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \frac{\Delta_3}{\Delta}$ являются решением системы, система совместна.

Теорема доказана.

Замечание. Крамеровские системы можно решать и по-другому, с помощью обратной матрицы. Запишем такую систему в матричном виде: $AX = B$. По теореме Крамера, существует решение $T : AT = B$. Так как $|A| \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножаем матричное равенство на A^{-1} слева: $A^{-1}AT = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}AT = ET = T$, то получаем:

$$T = A^{-1}B.$$

Такой способ решения будем называть ***матричным***. Ещё раз подчеркнём, что он годится только для крамеровских систем — в других случаях обратной матрицы не существует. Разобранные примеры применения матричного метода и метода Крамера читатель найдёт ниже.

Изучим, наконец, общий случай — систему m линейных уравнений с n неизвестными. Для её решения применяется ***метод Гаусса***, который мы рассмотрим подробно.

Для произвольной системы уравнений $AX = B$ выпишем ***расширенную*** матрицу. Так называется матрица, которая получится, если к основной матрице A справа дописать столбец свободных членов B:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Заметим: не только для системы уравнений можно выписать такую матрицу, но и наоборот: зная матрицу, можно восстановить систему. Как говорят, системе уравнений однозначно соответствует матрица.

Как и при вычислении ранга, с помощью элементарных преобразований строк и перестановок столбцов будем приводить нашу матрицу к трапециевидной форме. При этом, конечно, соответствующая матрице система уравнений изменится, но будет равносильна исходной (т. е. будет иметь те же решения). В самом деле, перестановка или сложение уравнений не изменят решений. Перестановка столбцов — тоже: уравнения $x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4$ и $x_1 + 7x_3 + 3x_2 = 4$, конечно, равносильны. Нужно только записывать, какой неизвестной соответствует данный столбец. Столбец свободных членов не переставляем — его обычно в матрице отделяют от других пунктиром. Возникающие в матрице нулевые строки можно не писать. В результате этой работы возможны 3 варианта.

Случай 1. Полученная матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1r} & \ldots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2r} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{rr} & \ldots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b \end{array}\right),$$

где $b \neq 0$. Соответствующая система уравнений несовместна, так как содержит уравнение: $0 = b$. Значит, несовместна и исходная система.

Заметим, что в этом случае ранг основной матрицы (он равен r) меньше, чем ранг расширенной матрицы ($r + 1$).

Случай 2. Возможно, что $r = n$, т. е. ранг основной (и расширенной) матрицы совпадает с количеством неизвестных. В этом случае матрица приобретает такую трапециевидную форму:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{nn} & d_n \end{array}\right).$$

Из уравнения, соответствующего последней ненулевой строке, можно найти значение одной из неизвестных. Затем, поднимаясь вверх, по очереди найдём значения всех остальных неизвестных. Значит, в этом случае система имеет единственное решение.

Случай 3. Пусть, наконец, $r < n$. Матрица принимает вид:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1r} & \ldots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2r} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & c_{rr} & \ldots & c_{rn} & d_r \end{array}\right).$$

В этом случае система имеет бесконечно много решений. Неизвестные, соответствующие первым r столбцам, назовём ***базисными***, а остальные — ***свободными***. Свободные неизвестные могут принимать любые значения. Значения базисных неизвестных однозначно определяются через значения свободных, начиная с последнего уравнения и поднимаясь вверх. В результате получаются формулы, выражающие базисные неизвестные через значения свободных неизвестных, — это и есть ***общее решение*** системы уравнений.

Пример 16. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 7, \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 14x_4 = 9, \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 11x_4 = 18. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу и приведем её к трапециевидной форме. Знак $\sim$ теперь будет означать не только совпадение рангов, но и равносильность соответствующих систем уравнений.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 11 & 14 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 11 & 18 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \overset{2}{\sim}
$$

$$
\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \overset{3}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \overset{4}{\sim}
$$

$$
\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \end{array}.
$$

Поясним выполненные действия.

Действие 1. Ко 2-й строке прибавили 1-ю, умножив её на (-2). К 3-й и 4-й строкам прибавили 1-ю, умножив её на (-3). Цель этих операций — получить нули в первом столбике, ниже главной диагонали.

Действие 2. Так как на диагональном месте $(2,2)$ оказался 0, пришлось переставить 2-й и 3-й столбики. Чтобы запомнить эту перестановку, написали сверху обозначения неизвестных.

Действие 3. К 3-й строке прибавили 2-ю, умножив её на (-2). К 4-й строке прибавили 2-ю. Цель — получить нули во втором столбике, ниже главной диагонали.

Действие 4. Нулевые строчки можно убрать.

Итак, матрица приведена к трапециевидной форме. Её ранг $r = 2$. Неизвестные x_1, x_3 — базисные; x_2, x_4 — свободные. Придадим свободным неизвестным произвольные значения:

$$x_2 = \alpha, \quad x_4 = \beta.$$

Здесь α, β могут быть любыми числами. Теперь из последнего уравнения новой системы

$$x_3 + x_4 = -3$$

находим x_3: $x_3 = -3 - \beta$. Поднимаясь вверх, из первого уравнения

$$x_1 + 3x_3 + 2x_2 + 4x_4 = 5$$

находим $x_1 : x_1 = 5 - 3(-3 - \beta) - 2\alpha - 4\beta = 14 - 2\alpha - \beta$.

Записываем общее решение:

$$x_1 = 14 - 2\alpha - \beta, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = -3 - \beta, \quad x_4 = \beta.$$

Можно записывать общее решение в виде матрицы-столбца:

$$X = \begin{pmatrix} 14 - 2\alpha - \beta \\ \alpha \\ -3 - \beta \\ \beta \end{pmatrix}.$$

При конкретных значениях α и β можно получать частные решения. Например, при $\alpha = 0,\ \beta = 1$ получим: $X = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ — одно из решений системы.

Замечание. В алгоритме метода Гаусса мы видели (случай 1), что несовместность системы уравнений связана с несовпадением рангов основной и расширенной матриц. Приведём без доказательства следующую важную теорему.

Теорема 7 ***(теорема Кронекера–Капелли).*** Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы системы.

2.6. Задачи с решениями

1. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $AB - BA$.

Решение. По правилам действий с матрицами:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) + (-4)(-2) & 3 \cdot 5 + (-4)(-3) \\ 2(-1) + 5(-2) & 2 \cdot 5 + 5(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 27 \\ -12 & -5 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 10 & 4 + 25 \\ -6 - 6 & 8 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 29 \\ -12 & -7 \end{pmatrix},$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 5 & 27 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 29 \\ -12 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Найти определитель матрицы $3B^2 - 2A$, если

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -22 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-20 & -12-4 \\ 15+5 & -20+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -16 \\ 20 & -19 \end{pmatrix},$$

$$3B^2 - 2A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -11 & -16 \\ 20 & -19 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -9 & -22 \\ 15 & -25 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -33+18 & -48+44 \\ 60-30 & -57+50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -4 \\ 30 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -15 & -4 \\ 30 & -7 \end{vmatrix} = (-15)(-7) - 30(-4) = 105 + 120 = 225.$$

3. Вычислить произведение матриц AB, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+9+4 & 2+3-1 & 0+6-5 \\ 0+15-8 & 0+5+2 & 0+10+10 \\ 3-6-16 & 6-2+4 & 0-4+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 20 \\ -19 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

4. Доказать равенство $(AB)^T = B^T A^T$ для любых квадратных матриц 2-го порядка.

Решение. Возьмём матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Проведём вычисления:

$$(AB)^T = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix};$$

$$B^TA^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} & b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} \\ b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} & b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}.$$

Результат получился одинаковый, что и требовалось доказать.

5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель, разлагая его, например, по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-16 - 8) - 2(56 + 4) + 5(14 - 2) = -72 - 120 + 60 = -132.$$

6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & 9 \\ 7 & -8 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & -5 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Прежде чем разлагать по какой-либо строке или столбцу, применим свойство 6, чтобы упростить вычисления:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & 9 \\ 7 & -8 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & -5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 2 \quad \times(-3) \quad \times 5 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 \\ 7 & -6 & 0 & 15 \\ 1 & 7 & 0 & -5 \\ 14 & -17 & 0 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -6 & 15 \\ 1 & 7 & -5 \\ 14 & -17 & 15 \end{vmatrix}.$$

Теперь легко получить нули в последнем столбце:

$$\begin{vmatrix} 7 & -6 & 15 \\ 1 & 7 & -5 \\ 14 & -17 & 15 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \times 3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 0 \\ 1 & 7 & -5 \\ 17 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-5) \begin{vmatrix} 10 & 15 \\ 17 & 4 \end{vmatrix} = 5(40 - 255) = -1075.$$

7. Вычислить определитель n-го порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 5 & \ldots & 5 \\ 5 & 7 & 5 & \ldots & 5 \\ 5 & 5 & 7 & \ldots & 5 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 5 & 5 & 5 & \ldots & 7 \end{vmatrix}$.

Решение. Не меняя величины определителя, приведём его к треугольному виду. Для этого сначала вычтем 1-ю строку из всех остальных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Затем к 1-му столбцу прибавим каждый из последующих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7+5(n-1) & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов на главной диагонали: $\Delta = (7+5(n-1)) \cdot 2^{n-1} = (5n+2) \cdot 2^{n-1}$.

8. Найти обратные для матриц $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Решение. Способ вычисления обратной матрицы указан в теореме 2. Так как $|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -6+8 = 2 \neq 0$, то A_1^{-1} существует. Построим матрицу A_1^*, не забывая о правиле знаков для алгебраических дополнений: $A_1^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. После этого вычисляем обратную матрицу:

$$A_1^{-1} = \frac{1}{|A_1|} \cdot (A_1^*)^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка. $A_1^{-1} A_1 = \begin{pmatrix} -0,5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Так как $|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 0$, то A_2^{-1} не существует.

9. Найти обратную для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Найдём алгебраические дополнения ко всем элементам.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=8,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=12,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=-6,$$
$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=4,$$
$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=-6,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=4.$$

Итак, $A^* = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -6 \\ -4 & -4 & 4 \\ -4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^*\right)^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -6 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1,5 \\ -1,5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проведите проверку самостоятельно.

10. Решить матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим обе части уравнения слева на матрицу A^{-1}. Получим: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}AX = EX = X$, то отсюда находим решение: $X = A^{-1}B$. Найдём A^{-1}:

$$|A|=1,\quad A^*=\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -7 \\ 31 & 18 \end{pmatrix}.$

Проверка: $AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13 & -7 \\ 31 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = B.$

11. Решить матричное уравнение $XA = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Здесь для того, чтобы найти X, мы должны умножить уравнение на A^{-1} ***справа*** (вспомним: умножение матриц не коммутативно, результат зависит от порядка сомножителей): $XAA^{-1} = BA^{-1}$, $XE = BA^{-1}$, $X = BA^{-1}$. Найдём A^{-1}:

$$|A| = -1,\quad A^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\quad A^{-1} = -\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\quad X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

12. Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ к трапециевидной форме, найти её ранг.

Решение. Используя элементарные преобразования, можно было бы сразу получить нули в 1-ом столбце. Однако удобнее сначала переставить первую и вторую строки — тогда можно обойтись без дробей:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \quad \times(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \updownarrow \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 3.$$

13. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Решение. Чтобы получит удобную для нас единицу в левом верхнем углу можно не переставлять строки и столбцы, а, например, вычесть из 1-й строки последнюю:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 16 \\ 0 & 2 & 27 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = 3.$$

14. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases}$$

Решение. Найдём определитель основной матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 22.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система крамеровская. Найдём определители Δ_i, i=1, 2, 3 (см. раздел 2.5):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -17 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -17 & -4 \end{vmatrix} = 22,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 9 & -17 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -9 & -17 \end{vmatrix} = 44,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 16 \\ 0 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 16 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = -44.$$

Значит, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -2.$

15. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Умножая слева на A^{-1}, получим: $X = A^{-1}B$. Найдём A^{-1}.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 0 \\ 11 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 10 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 10 & -11 & 13 \\ -5 & 7 & -11 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ -1 & -11 & 7 \\ 8 & 13 & -11 \end{pmatrix}.$$

Находим решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ -1 & -11 & 7 \\ 8 & 13 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 45 \\ -30 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

16. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -2, \\ 5x_1 - 7x_2 - x_3 - x_4 = -10. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу и приведём её к трапециевидной форме, используя элементарные преобразования строк и, если потребуется, перестановку столбцов:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & -5 & -2 \\ 3 & -5 & -2 & -4 & -2 \\ 5 & -7 & -1 & -1 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 4 \\ 0 & 8 & 14 & 24 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -5 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 11 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \end{array}\right) \end{array}.$$

Последним действием переставлены 3-й и 4-й столбцы — для того, чтобы на месте $(3, 3)$ стоял ненулевой элемент.

Итак, ранг матрицы равен 3, а неизвестных 4. Поэтому одна из них свободная. Неизвестные x_1, x_2, x_4 — базисные, x_3 — свободная. Пусть $x_3 = \alpha$ — любое число. Последнее уравнение преобразованной системы имеет вид: $2x_4 = -8$. Отсюда $x_4 = -4$. Поднимаясь вверх, рассматриваем следующее уравнение: $4x_2 + 11x_4 + 7x_3 = 4$. Отсюда

$$x_2 = \frac{1}{4}(4 - 11x_4 - 7x_3) = \frac{1}{4}(4 + 44 - 7\alpha) = 12 - \frac{7}{4}\alpha.$$

Наконец, из первого уравнения находим x_1:

$$x_1 = -2 + 3x_2 + 5x_4 + 3x_3 = -2 + 3\left(12 - \frac{7}{4}\alpha\right) - 20 + 3\alpha = 14 - \frac{9}{4}\alpha.$$

Общее решение системы имеет вид: $X = \begin{pmatrix} 14 - \frac{9}{4}\alpha \\ 12 - \frac{7}{4}\alpha \\ \alpha \\ -4 \end{pmatrix}.$

17. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 10x_3 = 5, \\ 2x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 11, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 10 & 5 \\ 2 & -8 & 12 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 9 & -2 & -6 \\ 2 & -8 & 12 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 9 & -2 & -6 \\ 0 & -26 & 16 & 23 \\ 0 & -13 & 8 & 15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 9 & -2 & -6 \\ 0 & -13 & 8 & 15 \\ 0 & -26 & 16 & 23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 9 & -2 & -6 \\ 0 & -13 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

Ранг основной матрицы равен 2, ранг расширенной матрицы равен 3. Последняя строка соответствует несовместному уравнению: $0 = -7$. Система несовместна.

18. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & -1 & 10 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & -1 & 10 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -1 \\ 0 & -10 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right)_{\times 2} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -10 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -18 & -54 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матрица приведена к трапециевидной форме. Ранг равен числу неизвестных, поэтому свободных неизвестных нет. Из последнего уравнения

$6x_3 = 18$ находим $x_3 = 3$. Поднимаемся вверх: $x_2 - x_3 = -5$, отсюда $x_2 = x_3 - 5 = -2$. Наконец, из первого уравнения находим: $x_1 = 2 - 2x_2 - x_3 =$ $= 2 + 4 - 3 = 3$. Ответ: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2.7. Упражнения для самостоятельной работы

1. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицы:

а) A^2; б) AB ; в) $BA - 2B$; г) C^2; д) DC ; е) $(3C + CD)^T$.

2. Найти определитель произведения матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ на транспонированную матрицу A^T.

3. Вычислить определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & -2 \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 10 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & -5 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \text{е)} \begin{vmatrix} 30 & 15 & 22 & 29 \\ 54 & 22 & 48 & 84 \\ 66 & 20 & 63 & 144 \\ 58 & 23 & 49 & 93 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

5. Вычислить определители n-го порядка:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & \ldots & 2 & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -2 & -2 & -2 & \ldots & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

в) $|\, a_{ij} \,|$, если $a_{ij} = \min(i, j)$; г) $|\, a_{ij} \,|$, если $a_{ij} = \max(i, j)$.

6. Найти обратные матрицы для матриц:

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\quad \text{б)}\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix};\quad \text{в)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Решить матричные уравнения: а) $AX = B$; б) $XA = B$.

8. Вычислить ранги матриц:

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & -2 & -8 \\ -6 & 9 & 3 & 12 \end{pmatrix};\quad \text{б)}\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix};\quad \text{в)}\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)}\ \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 & -7 & 5 \\ 2 & 3 & -5 & 26 & -4 \\ 3 & -4 & 8 & -9 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -12 & 2 \end{pmatrix};\quad \text{д)}\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

9. Решить системы уравнений методом Крамера или матричным методом:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 3x - 5y + 7z = 10, \\ 2x - 3y + 2z = 7, \\ x + 4y - 4z = 9; \end{cases}\qquad \text{б)}\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = -4; \end{cases}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = -9, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 13; \end{cases}\qquad \text{г)}\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 15, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 22. \end{cases}$$

10. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 12, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}\qquad \text{б)}\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 13, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 15; \end{cases}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 + 9x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 11, \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 9; \end{cases}\qquad \text{г)}\ \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 10x_1 - 4x_2 - 16x_3 + 10x_4 = 22, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{д)}\ \begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2; \end{cases}\qquad \text{е)}\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 5x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$$

2.8. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Вычислить определитель матрицы $AB - A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$. В ответе указать сумму элементов, расположенных на главной диагонали A^{-1}.

3. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + y + 2z = 5, \\ y - 3z = -6, \\ x + 2y - z = 1. \end{cases}$ В ответе указать значение x.

6. Исследовать систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

Указать номер правильного ответа:

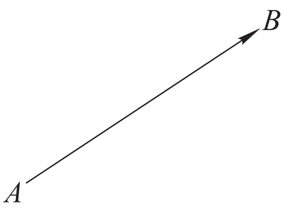
1) несовместная; 2) совместная и определённая; 3) совместная и неопределённая.

ГЛАВА 3

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Для изучения свойств геометрических фигур на плоскости и в трёхмерном пространстве математиками были созданы простые математические модели. Затем оказалось, что эти модели легко можно обобщить и рассматривать n-мерные пространства. При этом сложность рассуждений почти не увеличивается. Многомерные линейные пространства применяются уже не только в геометрии, но во многих областях математики и её приложениях. В качестве начального примера мы рассмотрим векторы на плоскости. Более обстоятельно векторная алгебра изучается в следующей, 4-й главе.

3.1. Векторы на плоскости

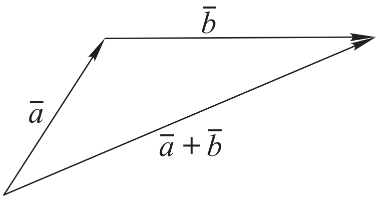


Направленный отрезок называется ***вектором***. Точка A — начало вектора, точка B — конец вектора. Такой вектор будем обозначать символом $\overline{AB}$. Если не обязательно указывать начало и конец, то можно обозначать вектор одной буквой: $\bar{a}$, $\bar{b}$ и т. д.

Расстояние между началом и концом называется ***длиной*** (или ***модулем***) вектора и обозначается так: $|\overline{AB}|$. Если начало и конец совпадают, то вектор называется ***нулевым*** и обозначается $\bar{0}$. Ясно, что $|\bar{0}| = 0$. Направление нулевого вектора не определено, его можно считать параллельным любому другому вектору.

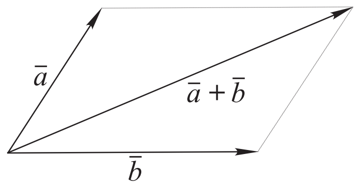
Будем считать, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны, если у них одинаковые длина и направление. Другими словами, если отложить эти векторы из одной точки, то они полностью совпадут. При таком понимании равенства векторов говорят, что изучаются ***свободные*** векторы. В других случаях вектор можно переносить вдоль своего направления (***скользящий*** вектор), или точка приложения для вектора фиксируется (***связанный***). Мы будем рассматривать только свободные векторы.

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на параллельных прямых. Обозначение: $\bar{a} \,||\, \bar{b}$. Направления коллинеарных векторов могут совпадать ($\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$) или быть противоположными ($\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$).

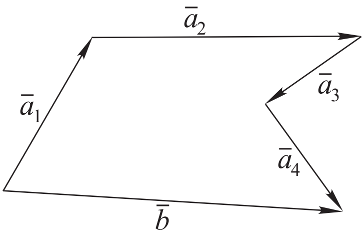


Обозначим: $\overline{\overline{\mathbb{R}^2}}$ — множество всех векторов на плоскости. Теперь введём операции: сложение векторов и умножение вектора на число.

Пусть $\bar a$, $\bar b$ — два вектора. Отложим вектор $\bar b$ из конца вектора $\bar a$. Тогда вектор, идущий из начала $\bar a$ в конец $\bar b$, называется ***суммой*** векторов $\bar a$, $\bar b$ (сложение по «правилу треугольника»).



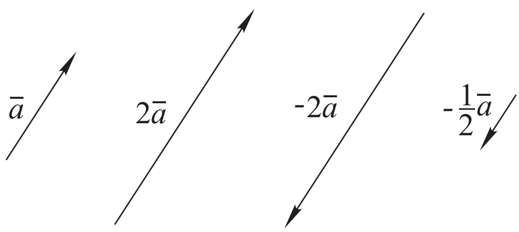
Можно отложить $\bar a$, $\bar b$ из одной точки и построить параллелограмм. Тогда суммой $\bar a + \bar b$ является вектор диагонали, выходящий из общего начала (сложение по «правилу параллелограмма»).



Конечно, оба способа сложения приводят к одинаковому результату. Правило треугольника удобнее, когда нужно сложить несколько векторов:

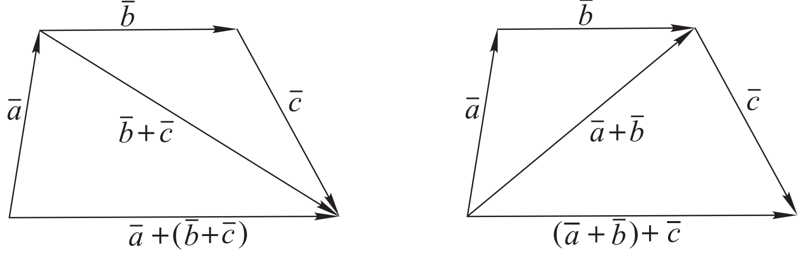
$$\bar b = \bar a_1 + \bar a_2 + \bar a_3 + \bar a_4.$$

Пусть теперь $\bar a$ — вектор, α — действительное число. ***Произведением вектора на число*** называется вектор $\alpha\bar a$, длина которого $|\alpha\bar a| = |\alpha| \cdot |\bar a|$, а направление зависит от знака α: если $\alpha > 0$, то $\alpha\bar a \uparrow\uparrow \bar a$, если $\alpha < 0$, то $\alpha\bar a \uparrow\downarrow \bar a$. Если $\alpha = 0$, то $\alpha\bar a = \bar 0$.

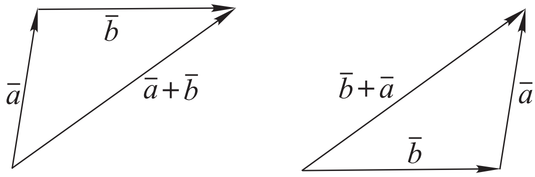


Рассмотрим основные свойства введённых операций.

1) $\bar a+(\bar b+\bar c) = (\bar a+\bar b)+\bar c$, т. е. сложение векторов ассоциативно. Поясним это свойство на рисунке.



2) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$. Коммутативность очевидна.



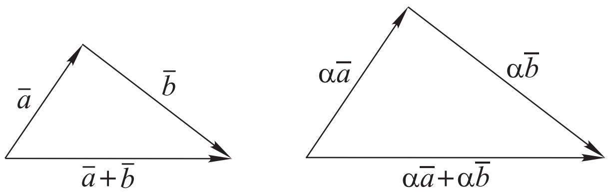
3) Нулевой вектор $\bar{0}$ является нейтральным элементом для сложения:

$$\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}.$$

4) Противоположным к $\bar{a}$ является вектор $(-1)\cdot\bar{a}=-\bar{a}$, имеющий одинаковую с $\bar{a}$ длину и противоположное направление:

$$\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}.$$

5) $\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$. Требуемое равенство следует из подобия треугольников.



6) $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$. Это равенство легко проверить, если рассмотреть 2 случая: числа α и β имеют одинаковые знаки или разные знаки. Действительно, при сложении одинаково направленных векторов их длины складываются, а при сложении противоположно направленных векторов длина их суммы равна разности длин.

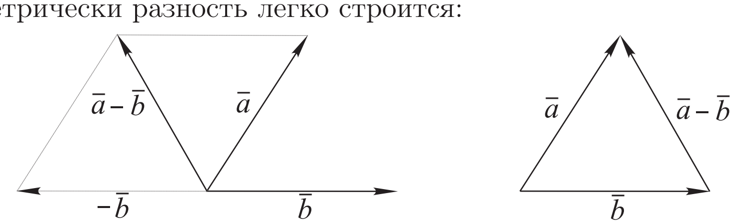
7) $\alpha(\beta\bar{a})=(\alpha\beta)\bar{a}$. Непосредственно из определения умножения на число следует, что векторы в левой и правой частях равенства имеют и одинаковое направление, и одинаковую длину.

8) $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$. Очевидно.

Замечание. С помощью основных операций сложения векторов и умножения вектора на число можно определить ещё одно полезное действие — ***вычитание*** векторов. ***Разностью*** векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ называется вектор

$$\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b}).$$

Геометрически разность легко строится:



Таким образом, в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, одна диагональ изображает сумму $\bar{a}+\bar{b}$, а другая — разность $\bar{a}-\bar{b}$ (или $\bar{b}-\bar{a}$, в зависимости от выбранного направления).

Векторы $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, ..., $\bar{b}_n$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа α_1, α_2, ..., α_n такие, что

$$\alpha_1\bar{b}_1+\alpha_2\bar{b}_2+\ldots+\alpha_n\bar{b}_n=\bar{0},$$

причём не все α_i равны 0. Если же это соотношение возможно ***только*** при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, то векторы $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, ..., $\bar{b}_n$ называются ***линейно независимыми***.

Теорема 1. Два вектора линейно зависимы $\Leftrightarrow$ они коллинеарны.

Доказательство. « $\Rightarrow$ ». Пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ линейно зависимы, т. е. $\alpha_1\bar{a}+\alpha_2\bar{b}=\bar{0}$ и, например, $\alpha_2\neq 0$. Тогда $\bar{b}=-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\bar{a}$. Значит, $\bar{a}\,||\,\bar{b}$.

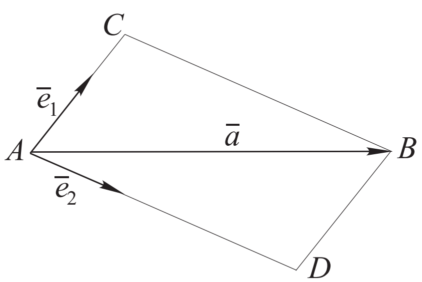
« $\Leftarrow$ ». Пусть $\bar{a}\,||\,\bar{b}$. Тогда справедливо равенство: $\bar{b}=\pm\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a}$. Действительно, направления совпадают (берём «+», если $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$, и «−», если $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$). Длины тоже равны: $\left|\pm\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\,\bar{a}\right|=\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\cdot|\bar{a}|=|\bar{b}|$. Получили линейную зависимость: $\pm\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a}-\bar{b}=\bar{0}$. Теорема доказана.

Замечание. Ясно, что два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на некоторое число:

$$\bar{a}\,||\,\bar{b}\quad\Leftrightarrow\quad\exists\lambda\in\mathbb{R}:\ \bar{a}=\lambda\bar{b}.$$

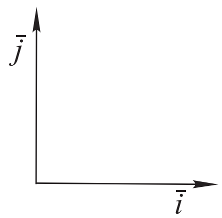
Теорема 2. Если $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ — неколлинеарные векторы, то любой вектор $\bar{a}\in\overline{\mathbb{R}^2}$ можно представить в виде ***линейной комбинации*** векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, т. е. в виде

$$\bar{a}=\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2.$$



Доказательство получим с помощью рисунка. Проведём из конца вектора $\bar{a}=\overline{AB}$ прямые, параллельные $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Ясно, что $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{AD}$. Но $\overline{AC}\,||\,\bar{e}_1$, поэтому существует число α_1 такое, что $\overline{AC}=\alpha_1\bar{e}_1$. Аналогично, $\exists\alpha_2$: $\overline{AD}=\alpha_2\bar{e}_2$. Получаем: $\overline{AB}=\bar{a}=\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что любые 3 (или большее количество) вектора на плоскости линейно зависимы. Два неколлинеарных вектора $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ на плоскости называются ***базисом***. Числа α_1 , α_2 такие, что $\bar{a}=\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2$ называются ***координатами*** вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$.



Наиболее удобно работать с базисом, состоящим из перпендикулярных друг другу векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, длины которых равны 1. Такой базис называется ***ортонормированным***. Каждый вектор может быть записан как своим разложением по базису, так и в виде координатной строки:

$$\bar{a} = \alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Конечно, здесь допущена некоторая вольность: в левой части равенства направленный отрезок, а справа — пара чисел. Однако такая запись удобна и не приведёт нас к ошибке.

Получим правила действий с векторами в координатной форме. Пусть $\bar{a} = (\alpha_1,\ \alpha_2)$, $\bar{b} = (\beta_1,\ \beta_1)$. Тогда

$$\bar{a}+\bar{b} = (\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j})+(\beta_1\bar{i}+\beta_2\bar{j}) = (\alpha_1+\beta_1)\bar{i}+(\alpha_2+\beta_2)\bar{j} = (\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2).$$

Итак,

$$(\alpha_1,\ \alpha_2) + (\beta_1,\ \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2).$$

Аналогично выполняется умножение вектора на число:

$$\lambda\bar{a} = \lambda(\alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j}) = (\lambda\alpha_1)\bar{i} + (\lambda\alpha_2)\bar{j} = (\lambda\alpha_1,\ \lambda\alpha_2).$$

3.2. Понятие линейного пространства

В математике часто приходится работать с объектами, которые можно складывать и умножать на числа, причём так, что свойства этих операций аналогичны свойствам действий с векторами на плоскости. Чтобы получить общие подходы для такой работы, вводится понятие линейного пространства.

Линейным пространством над полем действительных чисел называется множество L, на котором определены операции сложения и умножения на произвольное действительное число:

$$x \in L,\ y \in L \ \Rightarrow\ x + y \in L,$$
$$x \in L,\ \alpha \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \alpha x \in L,$$

так, что выполнены требования (они называются аксиомами линейного пространства):

1) $\forall x, y, z \in L \qquad (x + y) + z = x + (y + z)$;
2) $\forall x, y \in L \qquad x + y = y + x$;
3) $\exists \bar{0} \in L :\ \ \forall x \in L \qquad x + \bar{0} = x$;

$$\begin{array}{lll}
4) & \forall x \in L \quad \exists\,(-x) \in L: & x + (-x) = \bar{0}; \\
5) & \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in L & \alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y; \\
6) & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in L & (\alpha + \beta)\,x = \alpha x + \beta x; \\
7) & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in L & \alpha\,(\beta x) = (\alpha\beta)\,x; \\
8) & \forall x \in L \quad 1 \cdot x = x\,. &
\end{array}$$

Наглядный пример линейного пространства — множество $\overline{\mathbb{R}^2}$ векторов на плоскости с операциями, введёнными в разделе 3.1 (действительно, справедливость всех аксиом 1–8 мы проверили).

Элементы произвольного линейного пространства часто также называют ***векторами***, это не приведёт нас к путанице. В отличие от векторов элементы поля $\mathbb{R}$, т. е. действительные числа, называют ***скалярами***. Рассмотрим ещё раз приведённые 8 аксиом. Первые две из них говорят о том, что сложение должно быть ассоциативным и коммутативным. Аксиома 3 требует существования в L нейтрального элемента — нуля. Чтобы не смешивать его с действительным числом 0, нуль в пространстве L обозначают $\bar{0}$. В аксиоме 4 говорится о существовании противоположного элемента. Свойства 5 и 6 — это дистрибутивность умножения на число относительно различных сложений. Свойство 7 можно назвать ассоциативностью умножения на число. Наконец, свойство 8 требует, чтобы умножение на число 1 не изменяло элемент пространства.

Получим простые следствия из аксиом 1–8, которые позволят нам применять при работе с элементами линейных пространств некоторые привычные правила. Обратите внимание: каждый шаг при доказательстве этих следствий это использование какой-либо аксиомы.

Следствие 1. Нейтральный элемент в любом линейном пространстве L только один.

Доказательство. Допустим, $\bar{0}_1$, $\bar{0}_2$ — нейтральные элементы. Тогда

$$\bar{0}_1 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2 + \bar{0}_1 = \bar{0}_2.$$

Мы воспользовались коммутативностью.

Следствие 2. Противоположный элемент для вектора x существует только один.

Доказательство. Допустим, что $x + y = \bar{0}$, $x + z = \bar{0}$, т. е. y, z — противоположные элементы для x. Тогда

$$y + (x + z) = y + \bar{0} = y,$$
$$(y + x) + z = (x + y) + z = \bar{0} + z = z.$$

Но левые части совпадают (по аксиоме ассоциативности). Поэтому $y = z$.

Единственность противоположного элемента позволяет ввести ***вычитание***:

$$x_1 - x_2 = x_1 + (-x_2),$$

причём ясно, что $(x_1 - x_2) + x_2 = x_1 + ((-x_2) + x_2) = x_1$.

Следствие 3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha\bar{0} = \bar{0}$.

Доказательство. Пусть $x \in L$. Тогда $\alpha x = \alpha(x + \bar{0}) = \alpha x + \alpha\bar{0}$. Перенесём αx из правой части в левую с обратным знаком. Это привычное действие выполнимо в линейном пространстве — надо лишь прибавить к обеим частям равенства противоположный вектор $(-\alpha x)$:

$$\alpha x - \alpha x = \alpha x + (-\alpha x) = \alpha\bar{0} + \alpha x + (-\alpha x) = \alpha\bar{0}.$$

Отсюда следует, что $\alpha\bar{0} = \bar{0}$.

Следствие 4. $\forall x \in L \quad 0x = \bar{0}$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha x = (\alpha + 0)x = \alpha x + 0x$. Переносим αx в левую часть и получаем: $0x = \alpha x - \alpha x = \bar{0}$.

Следствие 5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in L \quad (-\alpha)x = \alpha(-x) = -\alpha x$.

Доказательство. Так как $\alpha x + (-\alpha)x = (\alpha + (-\alpha))x = \bar{0}$, то элемент $(-\alpha)x$ — противоположный для αx. Аналогично проверяется, что $\alpha(-x)$ также является противоположным для αx.

Пример 1. Пусть M_{mn} — множество матриц размером $m \times n$. Сложение таких матриц, умножение на число определены выше. Роль нейтрального элемента играет нулевая матрица. Ясно, что все аксиомы выполнены. Значит, M_{mn} с указанными операциями является линейным пространством.

Пример 2. Пусть $F(x)$ — множество всех функций, определённых на некотором множестве действительных чисел и принимающих действительные значения. Результат сложения двух функций — снова функция:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Аналогично определяется умножение функции на число:

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

Аксиомы легко проверяются. В частности, нейтральным элементом является функция $0(x)$, все значения которой равны 0. Итак, $F(x)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Введём понятие линейного подпространства. Подмножество L_1 линейного пространства L называется ***линейным подпространством***, если оно замкнуто относительно операций пространства L, т. е. $\forall x, y \in L$

$$x \in L_1,\ y \in L_1 \ \Rightarrow\ x + y \in L_1,$$

$$x \in L_1,\ \alpha \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \alpha x \in L_1.$$

Из этих условий следует, что $\bar{0}$ содержится в любом подпространстве. Действительно, по следствию 4, $0x = \bar{0}$ $(\forall x \in L)$. Значит, если $x \in L_1$, то $0x = \bar{0}$ также входит в L_1.

Кроме того, подпространство содержит противоположный элемент для каждого своего элемента: если $x \in L_1$, то $-x \in L_1$, так как, по следствию 5, $-x = (-1)x$.

Остальные аксиомы выполняются для всех элементов L, а значит, в частности, и для элементов L_1. Поэтому подпространство L_1 само является линейным пространством.

Пример 3. Является ли линейным пространством множество D_n диагональных матриц порядка n относительно обычных операций сложения матриц и умножения на число? Так как D_n — подмножество в линейном пространстве M_n всех матриц порядка n, то аксиомы выполнены, нужно проверить лишь замкнутость относительно операций. Но сумма диагональных матриц — снова диагональная матрица, произведение диагональной матрицы на число — тоже является диагональной матрицей. Итак, D_n — линейное пространство (подпространство в M_n).

3.3. Базис и размерность пространства

Пусть L — линейное пространство над $\mathbb{R}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Вектор $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называются коэффициентами.

Конечная система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется ***линейно зависимой***, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \bar{0}. \qquad (*)$$

Если же из равенства (*) следует, что все $\alpha_i = 0$, то тогда система $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется ***линейно независимой***. Бесконечная система векторов называется линейно зависимой, если в ней существует конечная линейно зависимая подсистема.

Пример 4. Рассмотрим множество

$$\mathbb{R}^3 = \{\, (a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R} \,\},$$

состоящее из упорядоченных троек действительных чисел. Операции сложения и умножения на число определяются поэлементно — так же, как и для матриц. (Фактически $\mathbb{R}^3$ — множество матриц-строк). В полученном линейном пространстве найдём примеры линейно зависимых и линейно независимых систем. Рассмотрим $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (3, 2, 5)$, $x_3 = (8, 8, 16)$. Тогда x_1, x_2, x_3 — линейно зависимые, так как $2x_1 + 2x_2 - x_3 = \bar{0}$. В то же время векторы $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ линейно независимы: из соотношения $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \bar{0}$ следует, что

$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Лемма 1. Система векторов линейно зависима $\Leftrightarrow$ один из них линейно выражается через остальные (т. е. является их линейной комбинацией).

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — линейно зависимы, т. е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \bar{0}$, причём $\exists i : \alpha_i \neq 0$. Тогда

$$\alpha_i x_i = -\alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_{i-1} x_{i-1} - \alpha_{i+1} x_{i+1} - \ldots - \alpha_n x_n.$$

Значит,

$$x_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} x_1 - \ldots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} x_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} x_{i+1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} x_n,$$

что и требовалось.

Обратно: предположим, что $x_i = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n$. Тогда $-x_i + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n = \bar{0}$, т. е. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы.

Лемма 2. Система векторов линейно зависима $\Leftrightarrow$ какой-либо из них линейно выражается через предыдущие.

Доказательство. Пусть $\alpha x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \bar{0}$. Обозначим α_k — последний ненулевой коэффициент. Значит $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = \bar{0}$ и $x_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} x_1 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} x_{k-1}$, т. е. x_k линейно выражается через предыдущие. В обратную сторону доказательство содержится в лемме 1.

Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется ***базой*** линейного пространства L, если она линейно независима и любой вектор $x \in L$ линейно выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Замечание. Из леммы 1 следует, что база — это максимальная линейно независимая система. Если в пространстве существует конечная база, то оно называется ***конечномерным***.

Теорема 3. Все базы в конечномерном линейном пространстве L состоят из одного и того же числа векторов. Это число называется ***размерностью*** пространства L.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — база в L. Допустим, что имеется другая база, с бо́льшим числом векторов: $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $m \geq n$. Рассмотрим систему векторов:

$$x_1, e_1, e_2, \ldots, e_n.$$

Так как $e_1, \ldots, e_n$ — база, то x_1 выражается через $e_1, \ldots, e_n$. По лемме 1, эта система линейно зависима. По лемме 2, какой-то вектор e_i линейно выражается через предыдущие. Вычеркнем его:

$$x_1, e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n.$$

Через эти векторы линейно выражается любой вектор из L, в частности x_2. Действительно, в его записи через базу $e_1, e_2, \ldots, e_n$ можно заменить e_i на линейную комбинацию $x_1, e_1, \ldots, e_{i-1}$. Значит, система

$$x_2, x_1, e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n$$

линейно зависима. По лемме 2, какой-либо вектор e_j линейно выражается через предыдущие. Вычеркнем его, добавим впереди x_3 и продолжим те же рассуждения. (Заметим, что вычёркиваются векторы только из $e_1, \ldots, e_n$, так как никакой вектор x_i не может быть выражен через предыдущие, потому что $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейно независимы). После n шагов получим систему

$$x_n,\ x_{n-1},\ \ldots,\ x_2,\ x_1,$$

через которую выражается любой вектор пространства. Если $m > n$, то это противоречит тому, что $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — линейно независимы. Значит, $m = n$. Теорема доказана.

База линейного пространства, записанная в определённом порядке, называется ***базисом*** (или ***координатной системой***).

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в L, x — произвольный элемент L. Тогда x можно представить в виде линейной комбинации, или, как говорят, ***разложить по базису***:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Заметим, что такое разложение единственно: если

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n,$$

то $(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = \bar{0}$, и поэтому $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$, так как $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы.

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются ***координатами*** вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Координатную строку вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будем обозначать так:

$$[x]_e = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

Как связаны между собой координаты x в разных базисах? Пусть $e'_1, \ldots, e'_n$ — другой базис в L. Каждый из векторов e'_i можно разложить по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\begin{aligned} e'_1 &= s_{11}e_1 + s_{12}e_2 + \ldots + s_{1n}e_n, \\ e'_2 &= s_{21}e_1 + s_{22}e_2 + \ldots + s_{2n}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n &= s_{n1}e_1 + s_{n2}e_2 + \ldots + s_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Матрица $S = (s_{ij})$ называется ***матрицей перехода*** от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$.

Теорема 4. $\forall x \in L$ справедливо:

$$[x]_e = [x]_{e'} \cdot S.$$

(Здесь в правой части равенства — умножение матрицы-строки длины n на квадратную матрицу $n \times n$).

Доказательство. Обозначим:

$$[x]_e = (\alpha_1,\ \alpha_2\ ,\dots,\ \alpha_n), \quad [x]_{e'} = (\beta_1,\ \beta_2\ ,\dots,\ \beta_n).$$

Проведём вычисления:

$$\begin{aligned} x = \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \dots + \beta_n e'_n = \beta_1(s_{11}e_1 + s_{12}e_2 + \dots + s_{1n}e_n) + \\ + \beta_2(s_{21}e_1 + s_{22}e_2 + \dots + s_{2n}e_n) + \dots + \beta_n(s_{n1}e_1 + s_{n2}e_2 + \dots + s_{nn}e_n) = \\ = (\beta_1 s_{11} + \beta_2 s_{21} + \dots + \beta_n s_{n1})e_1 + \dots + (\beta_1 s_{1n} + \beta_2 s_{2n} + \dots + \beta_n s_{nn})e_n. \end{aligned}$$

Значит, $[x]_e = (\beta_1 s_{11} + \beta_2 s_{21} + \dots + \beta_n s_{n1},\ \dots\ ,\ \beta_1 s_{1n} + \beta_2 s_{2n} + \dots + \beta_n s_{nn})$.

С другой стороны,

$$[x]_{e'} \cdot S = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= (\beta_1 s_{11} + \beta_2 s_{21} + \dots + \beta_n s_{n1},\ \dots\ ,\ \beta_1 s_{1n} + \beta_2 s_{2n} + \dots + \beta_n s_{nn}).$$

Сравнивая полученные выражения, видим: $[x]_e = [x]_{e'}S$.

Следствие. Матрицей перехода от базиса $e'_1,\ e'_2,\ \dots,\ e'_n$ к базису $e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n$ является S^{-1}. В частности, матрица перехода всегда невырождена.

Доказательство. Пусть S — матрица перехода от $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1,\ e'_2,\ \dots,\ e'_n$; T — матрица обратного перехода. Тогда, по теореме 4:

$$\forall x \in L \quad [x]_e = [x]_{e'}S, \quad [x]_{e'} = [x]_e T.$$

Отсюда следует: $[x]_e = [x]_e TS$. В частности, при $x = e_1$ имеем: $(1, 0, \dots, 0) = (1, 0, \dots, 0)TS$, и, проводя умножение в правой части, видим, что первая строка матрицы TS имеет вид $(1, 0, \dots, 0)$. Аналогично, при $x = e_2$: $(0, 1, 0, \dots, 0) = (0, 1, 0, \dots, 0)TS$, и после умножения получаем, что вторая строка TS имеет вид $(0, 1, 0, \dots, 0)$. Продолжая эти действия, убедимся, что $TS = E$ — единичная матрица. Поэтому $T = S^{-1}$.

3.4. Важные примеры линейных пространств

Обобщая пример 4 раздела 3.3, рассмотрим множество

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\},$$

состоящее из строк длины n. Определим сложение строк и умножение строки на число так, как это сделано для матриц:

$$(a_1,\ a_2, \dots,\ a_n) + (b_1,\ b_2, \dots,\ b_n) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, \dots,\ a_n + b_n),$$
$$\lambda(a_1,\ a_2, \dots,\ a_n) = (\lambda a_1,\ \lambda a_2, \dots,\ \lambda a_n).$$

Полученное линейное пространство имеет размерность n, так как векторы $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ образуют, очевидно, базис.

Значение этого примера состоит в том, что любое n-мерное линейное пространство, как говорят, ***изоморфно*** $\mathbb{R}^n$, т. е. операции в них обладают одними и теми же свойствами. Уточним сказанное. Пусть L — n-мерное линейное пространство над $\mathbb{R}$. Пусть v_1, v_2, $\ldots$, v_n — какой-либо базис в L. Тогда каждый элемент $x \in L$ однозначно записывается в виде: $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$. Координатную строку $[x]_v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ можно рассматривать как элемент $\mathbb{R}^n$. Мы получаем взаимно однозначное (биективное) отображение:

$$\varphi: \quad L \to \mathbb{R}^n, \;\; \varphi(x) = [x]_v \,,$$

обладающее, как легко заметить, свойствами:

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_1), \quad \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x).$$

Такое отображение называется ***изоморфизмом***. Пространства, между которыми установлен изоморфизм, с точки зрения алгебры считаются неотличимыми. Это связано с тем, что алгебра изучает свойства алгебраических операций и не изучает свойства элементов множества, образующего пространство. Вспомните: в определении линейного пространства ничего не говорится о природе множества, требуемые восемь свойств — это свойства операций сложения и умножения на число. Итак, справедлива

Теорема 5. Любое n-мерное линейное пространство изоморфно пространству строк $\mathbb{R}^n$.

В начале главы мы рассмотрели линейное пространство $\overline{\mathbb{R}^2}$ направленных отрезков на плоскости. В теореме 2 было доказано, что любые 2 неколлинеарных вектора образуют в нём базис, т. е. $\overline{\mathbb{R}^2}$ имеет размерность 2. Переход от направленных отрезков к координатной записи векторов — это фактически использование изоморфизма линейных пространств $\overline{\mathbb{R}^2}$ и $\mathbb{R}^2$ (пространство строк длины 2).

Ещё одним важным примером линейного пространства является пространство решений однородной системы линейных уравнений. Рассмотрим систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{array}\right.$$

Такая система называется ***однородной***. Удобно записывать её в матричном виде:

$$AX = \bar{0}, \text{ где } A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 6. Решения однородной системы уравнений образуют линейное пространство.

Доказательство. Решения системы — это столбцы чисел, т. е. матрицы размером $n \times 1$. Сложение и умножение на число для них определены и обладают всеми требуемыми свойствами. Проверить нужно лишь замкнутость множества решений относительно этих операций. Но это легко: если X_1, X_2 — решения, т. е. $AX_1 = \bar{0}$, $AX_2 = \bar{0}$, то и $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$. Значит, $X_1 + X_2$ — решение. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то $A(\lambda X_1) = \lambda(AX_1) = \lambda\bar{0} = \bar{0}$. Значит, λX_1 — тоже решение.

Теорема 7. Если в однородной системе уравнений n неизвестных, ранг основной матрицы равен r, то размерность пространства решений равна $n - r$.

Доказательство. Будем решать систему уравнений $AX = 0$ методом Гаусса. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — базисные неизвестные, $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — свободные.

Дадим свободным неизвестным значения: $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = 0, \ldots,$ $x_n = 0$, найдём соответствующие значения базисных. Полученное решение обозначим C_1.

Затем, полагая $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1, \ldots, x_n = 0$, найдём C_2.

Поступая аналогично, построим $n - r$ решений:

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} c_{21} \\ \vdots \\ c_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad C_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{n-r,1} \\ \vdots \\ c_{n-r,r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ образуют базис в пространстве решений. Допустим, что $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_{n-r} C_{n-r} = \bar{0}$. Выполняя действия в левой части, получаем:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 c_{11} + \ldots + \alpha_{n-r} c_{n-r,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 c_{1r} + \ldots + \alpha_{n-r} c_{n-r,r} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-r} = 0$, т. е. $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ линейно независимы. Пусть теперь C — произвольное решение: $C = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Но тогда $C = \beta_{r+1}C_1 + \beta_{r+2}C_2 + \ldots + \beta_n C_{n-r}$. Действительно, и в левой, и в правой части последнего равенства мы имеем решения, соответствующие одинаковым значениям свободных неизвестных: $x_{r+1} = \beta_{r+1}, \ldots, x_n = \beta_n$. Значит, совпадают и значения базисных неизвестных. Теорема доказана.

Следствие. Однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $r < n$, т. е. ранг основной матрицы меньше числа неизвестных.

Доказательство. Если $r = n$, то свободных неизвестных нет, а значит система имеет единственное решение — нулевое. Если $r < n$, то есть свободные неизвестные, поэтому существуют ненулевые решения.

Базис пространства решений однородной системы уравнений называется ***фундаментальной системой решений.***

Пример 5. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем матрицу системы, приведём её к трапециевидной форме. Нулевой столбец свободных членов можно не писать.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -11 & -8 & -14 \\ 0 & -11 & -8 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -11 & -8 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $n = 4$, $r = 2$, то система имеет ненулевые решения, размерность пространства решений $n - 2 = 2$. Неизвестные x_1, x_2 — базисные; x_3, x_4 —

свободные. Полагая $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, находим: $x_2 = -\dfrac{8}{11}$. Из первого уравнения находим x_1: $\quad x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = \dfrac{16}{11} - 3 = -\dfrac{17}{11}$.

Аналогично, полагая $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, находим: $x_2 = -\dfrac{14}{11}$. Из первого уравнения: $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = \dfrac{28}{11} - 4 = -\dfrac{16}{11}$.

Итак, фундаментальная система состоит из двух решений:

$$C_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{17}{11} \\ -\dfrac{8}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{16}{11} \\ -\dfrac{14}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение можно записать так: $X = \alpha C_1 + \beta C_2$, где α, β — произвольные действительные числа.

3.5. Линейные преобразования конечномерных пространств

3.5.1. Определение, примеры, свойства

Пусть L — линейное пространство над полем действительных чисел. Рассмотрим отображение $\mathcal{A}$ пространства L в себя:

$$\mathcal{A} : L \to L.$$

Отображение $\mathcal{A}$ называется ***линейным преобразованием*** пространства L, если выполнены два условия:

$$1)\ \forall x, y \in L \quad \mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y),$$

$$2)\ \forall x \in L,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}(x).$$

Пример 6. Пусть $\mathcal{O}$ — отображение пространства L в себя, переводящее все элементы в нулевой вектор: $\mathcal{O}(x) = \bar{0}\,(\forall x \in L)$. Ясно, что условия 1), 2) выполнены, $\mathcal{O}$ — ***нулевое преобразование***.

Пример 7. Пусть $\mathcal{E}(x) = x$ $(\forall x \in L)$, т. е. отображение $\mathcal{E}$ переводит каждый вектор в себя. Условия 1), 2) выполнены, поэтому $\mathcal{E}$ — линейное преобразование (оно называется ***тождественным***, или ***единичным***).

Пример 8. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в L, т. е. размерность L равна 3. Как мы знаем, любой вектор x можно разложить по базису:

$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Рассмотрим отображение, переводящее x в вектор $\alpha_1 e_1$:

$$\mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \alpha_1 e_1.$$

Проверим выполнение условий. Пусть $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) = \\ = \mathcal{A}((\alpha_1+\beta_1)e_1 + (\alpha_2+\beta_2)e_2 + (\alpha_3+\beta_3)e_3) = (\alpha_1+\beta_1)e_1 = \\ = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_1 = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y).\end{aligned}$$

Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{A}(\gamma x) = \mathcal{A}(\gamma\alpha_1 e_1 + \gamma\alpha_2 e_2 + \gamma\alpha_3 e_3) = \gamma\alpha_1 e_1 = \gamma\mathcal{A}(x)$. Условия 1), 2) выполнены. $\mathcal{A}$ — линейное преобразование, оно называется ***проецированием*** (на e_1).

Пример 9. Пусть e_1, e_2 — базис в L, т. е. L — двухмерное линейное пространство. Рассмотрим произвольную матрицу размером 2×2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Определим отображение:

$$\mathcal{A}\left(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\right) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = (2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1 - 5\alpha_2).$$

Легко проверить, что условия 1), 2) выполнены. Итак, любая квадратная матрица позволяет построить новый пример линейного преобразования.

Замечания. Если $\mathcal{A}$ — линейное преобразование L, то $\mathcal{A}(\bar{0}) = \bar{0}$, т. е. нулевой вектор всегда переходит в себя. Действительно, для любого $x \in L$ имеем:

$$\mathcal{A}(\bar{0}) = \mathcal{A}(0x) = 0\mathcal{A}(x) = \bar{0}.$$

Линейное преобразование полностью определяется образами базисных векторов. Если $\mathcal{A}(e_1) = x_1, \ldots, \mathcal{A}(e_n) = x_n$, то, раскладывая любой x по базису, найдем его образ:

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_1\mathcal{A}(e_1) + \ldots + \alpha_n\mathcal{A}(e_n) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Образы базисных векторов можно задать произвольно. Другими словами, для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ существует линейное преобразование $\mathcal{A}$, такое, что $\mathcal{A}(e_1) = x_1, \ldots, \mathcal{A}(e_n) = x_n$.

3.5.2. Матрица линейного преобразования

Пусть L — линейное пространство; $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в L, $\mathcal{A}$ — линейное преобразование L. Как и любые другие, векторы

$\mathcal{A}(e_1)$, $\mathcal{A}(e_2)$, $\ldots$, $\mathcal{A}(e_n)$ можно разложить по базису:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{A}(e_1) & = & a_{11}e_1 & + & a_{12}e_2 & + & \ldots & + & a_{1n}e_n, \\ \mathcal{A}(e_2) & = & a_{21}e_1 & + & a_{22}e_2 & + & \ldots & + & a_{2n}e_n, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mathcal{A}(e_n) & = & a_{n1}e_1 & + & a_{n2}e_2 & + & \ldots & + & a_{nn}e_n. \end{array}$$

Здесь a_{ij} — числа, коэффициенты разложений. Возникающая матрица $A = (a_{ij})$ называется ***матрицей линейного преобразования*** $\mathcal{A}$ ***в базисе*** $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Найдём матрицы линейных преобразований, рассмотренных в примерах 6–9.

Пример 6 (продолжение). Пусть $\mathcal{O}(x) = \bar{0}$ $(\forall x \in L)$. Тогда

$$\begin{array}{c} \mathcal{O}(e_1) = \bar{0} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{O}(e_n) = \bar{0} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n. \end{array}$$

Получаем нулевую матрицу $O = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 7 (продолжение). Пусть $\mathcal{E}(x) = x$ $(\forall x \in L)$. Тогда

$$\begin{array}{c} \mathcal{E}(e_1) = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n, \\ \mathcal{E}(e_2) = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{E}(e_n) = e_n = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 1 \cdot e_n. \end{array}$$

Получаем, что $\mathcal{E}$ имеет единичную матрицу E.

Пример 8 (продолжение). Для линейного преобразования, заданного равенством $\mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = \alpha_1 e_1$, имеем:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}(e_1) & = & e_1 & = & 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3, \\ \mathcal{A}(e_2) & = & \bar{0} & = & 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3, \\ \mathcal{A}(e_3) & = & \bar{0} & = & 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3. \end{array}$$

Значит, матрицей проецирования на e_1 является $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 9 (продолжение).

$$\mathcal{A}(e_1) = (1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = (2, 1) = 2e_1 + e_2,$$
$$\mathcal{A}(e_2) = (0, 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = (3, -5) = 3e_1 - 5e_2.$$

Следовательно, матрица преобразования $\mathcal{A}$ — это определяющая его матрица $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Итак, каждому линейному преобразованию соответствует матрица (в данном базисе). Пример 9 наглядно показывает, что и наоборот, зная матрицу, можно построить преобразование. Получаем взаимно однозначное соответствие:

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A_e.$$

Индекс e здесь напоминает, что в построении матрицы участвует некоторый фиксированный базис e_1, e_2, $\ldots$, e_n.

Теорема 8. Если линейное преобразование $\mathcal{A} : L \to L$ имеет матрицу A_e, то координаты любого вектора $x \in L$ преобразуются по правилу:

$$[\mathcal{A}(x)]_e = [x]_e \cdot A_e.$$

Доказательство. Пусть $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, $A_e = (a_{ij})$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1\mathcal{A}(e_1) + x_2\mathcal{A}(e_2) + \ldots + x_n\mathcal{A}(e_n) = \\ = x_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n) + x_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n) + \ldots + \\ + x_n(a_{n1}e_1 + \ldots + a_{nn}e_n) = \\ = (x_1a_{11} + x_2a_{21} + \ldots + x_na_{n1})e_1 + (x_1a_{12} + x_2a_{22} + \ldots + x_na_{n2})e_2 + \ldots + \\ + (x_1a_{1n} + \ldots + x_na_{nn})e_n.\end{aligned}$$

Значит, координатная строка вектора $\mathcal{A}(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}(x_1a_{11} + x_2a_{21} + \ldots + x_na_{n1},\ \ x_1a_{12} + x_2a_{22} + \ldots + x_na_{n2}, \ldots, \\ \ldots,\ x_1a_{1n} + x_2a_{2n} + \ldots + x_na_{nn}).\end{aligned}$$

Но эту же строку получим в результате умножения $(x_1, \ldots, x_n)A_e$. Теорема доказана.

3.5.3. Действия с линейными преобразованиями

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — линейные преобразования пространства L. Их ***суммой*** называется отображение $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, такое, что

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) \quad (\forall x \in L).$$

Их ***произведением*** называется отображение $\mathcal{AB}$, такое, что

$$(\mathcal{AB})(x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x)) \quad (\forall x \in L).$$

Если $\beta \in \mathbb{R}$, то произведением $\mathcal{A}$ на число β называется отображение:

$$(\beta\mathcal{A})(x) = \beta \cdot \mathcal{A}(x) \quad (\forall x \in L).$$

Теорема 9. Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — линейные преобразования, то $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$, $\beta\mathcal{A}$ — тоже линейные преобразования.

Доказательство. В каждом случае нужно проверить выполнение условий 1), 2) определения линейного преобразования. Выполним это, например, для $\mathcal{AB}$.

$$\begin{aligned}(\mathcal{AB})(x+y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x+y)) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x)+\mathcal{A}(y)) = \\ = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x)) + \mathcal{B}(\mathcal{A}(y)) = (\mathcal{AB})(x) + (\mathcal{AB})(y);\end{aligned}$$

$$(\mathcal{AB})(\alpha x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\alpha x)) = \mathcal{B}(\alpha\mathcal{A}(x)) = \alpha\mathcal{B}(\mathcal{A}(x)) = \alpha(\mathcal{AB})(x).$$

Аналогично проводится проверка для $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\beta\mathcal{A}$.

Теорема 10. Зафиксируем базис в L. Если A, B — матрицы линейных преобразований $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, то матрицами преобразований $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{AB}$, $\beta\mathcal{A}$ являются $A+B$, AB, βA соответственно.

Доказательство проведём для $\mathcal{AB}$ (остальное — проще). Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Как всегда, когда нужно построить матрицу линейного преобразования, находим образы базисных векторов:

$$\begin{aligned}(\mathcal{AB})(e_1) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(e_1)) = \mathcal{B}(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n) = \\ = a_{11}\mathcal{B}(e_1) + a_{12}\mathcal{B}(e_2) + \ldots + a_{1n}\mathcal{B}(e_n) = \\ = a_{11}(b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + \ldots + b_{1n}e_n) + a_{12}(b_{21}e_1 + b_{22}e_2 + \ldots + b_{2n}e_n) + \ldots + \\ + a_{1n}(b_{n1}e_1 + b_{n2}e_2 + \ldots + b_{nn}e_n) = \\ = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1})e_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots + a_{1n}b_{n2})e_2 + \ldots + \\ + (a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \ldots + a_{1n}b_{nn})e_n.\end{aligned}$$

В результате видим, что первая строка матрицы преобразования $\mathcal{AB}$ совпадает с первой строкой произведения матриц AB. Аналогично проверяется равенство других строк.

3.5.4. Изменение матрицы преобразования при переходе к другому базису

Пусть $\mathcal{A}$ — линейное преобразование пространства L, $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ — базисы в L. (Можно для краткости обозначить эти базисы e и e', не забывая, конечно, что каждый из них состоит из n векторов). Как связаны между собой матрицы преобразования $\mathcal{A}$ в различных базисах?

Теорема 11. Если S — матрица перехода от базиса e к базису e', то

$$A_{e'} = SA_eS^{-1}.$$

Доказательство. Понятие матрицы перехода изучалось в разделе 3.3. Там же доказано, что $[x]_e = [x]_{e'} S$. Значит, и $[\mathcal{A}(x)]_e = [\mathcal{A}(x)]_{e'} S$. В теореме 8 установлено правило преобразования координат вектора под действием $\mathcal{A}$:

$$[x]_e A_e = [\mathcal{A}(x)]_e\,, \quad [x]_{e'} A_{e'} = [\mathcal{A}(x)]_{e'}\,.$$

Отсюда получаем: $[x]_e A_e = [\mathcal{A}(x)]_e = [\mathcal{A}(x)]_{e'} S = [x]_{e'} A_{e'}S$.

С другой стороны: $[x]_e A_e = [x]_{e'} SA_e$. Поэтому

$$[x]_{e'} A_{e'}S = [x]_{e'} SA_e$$

для любого вектора x. Отсюда легко заключить, что $A_{e'}S = SA_e$. (Например, подставляя вместо x базисные векторы $e'_1, \ldots, e'_n$.) Умножая последнее равенство на S^{-1} справа, получим требуемое: $A_{e'} = SA_eS^{-1}$. Теорема доказана.

Замечание. Матрицы A, B называются ***подобными***, если существует невырожденная матрица C, такая, что

$$A = CBC^{-1}.$$

Используя этот термин, можно сказать, что матрицы линейного преобразования в различных базисах подобны.

3.6. Собственные векторы и собственные значения

Рассмотрим квадратную матрицу $A = (a_{ij})$. Составим для неё определитель следующего вида:

$$|A - xE| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Кроме чисел этот определитель содержит переменную величину x. Поэтому, вычисляя определитель по обычным правилам, мы получим не число, а ***многочлен*** от x. Он называется ***характеристическим многочленом*** матрицы A.

Теорема 12. Если матрицы A и B подобны, то их характеристические многочлены совпадают.

Доказательство. Пусть $A = SBS^{-1}$. Пользуясь свойствами действий с матрицами, вычислим:

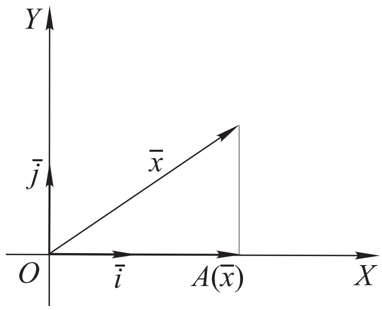
$$A - xE = SBS^{-1} - xSES^{-1} = SBS^{-1} - S(xE)S^{-1} = S(B - xE)S^{-1}.$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей, а $|S| \cdot \left|S^{-1}\right| = 1$, то получаем требуемое:

$$|A - xE| = \left|S(B - xE)S^{-1}\right| = |S| \cdot |B - xE| \cdot \left|S^{-1}\right| = |B - xE|.$$

Следствие. Так как матрицы линейного преобразования в разных базисах подобны, то их характеристические многочлены совпадают. Значит, можно говорить о ***характеристическом многочлене линейного преобразования.*** Его корни называются ***характеристическими числами.*** Множество корней такого многочлена называется ***спектром линейного преобразования.***

Пример 10. Пусть $\overline{\mathbb{R}^2}$ — линейное пространство векторов на плоскости, рассмотренное выше. Выберем на плоскости произвольную точку O (начало координат) и отложим из неё векторы ортонормированного базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$. Через каждый вектор проведём прямую — координатную ось.



Рассмотрим линейное преобразование $\mathcal{A} : \overline{\mathbb{R}^2} \to \overline{\mathbb{R}^2}$, $\mathcal{A}$ — проецирование на ось OX. Найдем матрицу $\mathcal{A}$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$:

$$\mathcal{A}(\bar{i}) = \bar{i} = 1 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j},$$
$$\mathcal{A}(\bar{j}) = \bar{0} = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j}.$$

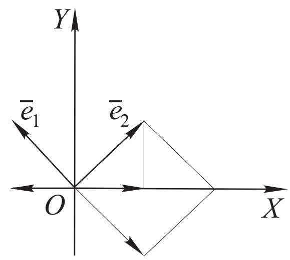
Значит, $A_{\bar{i},\bar{j}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен:

$\left|A_{\bar{i},\bar{j}} - xE\right| = \begin{vmatrix} 1 - x & 0 \\ 0 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x.$ Его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

Теперь возьмём другой базис в том же пространстве: $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ — векторы единичной длины, расположенные под углом 45° к осям.

Найдём матрицу того же преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе:



$$\mathcal{A}(\bar{e}_1) = \frac{1}{2}\left(\bar{e}_1 + (-\bar{e}_2)\right) = \frac{1}{2}\,\bar{e}_1 - \frac{1}{2}\,\bar{e}_2\ ,$$

$$\mathcal{A}(\bar{e}_2) = \frac{1}{2}\left(-\bar{e}_1 + \bar{e}_2\right) = -\frac{1}{2}\,\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\,\bar{e}_2\ .$$

Значит, $A_e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Характеристический многочлен:

$$|A_e - xE| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - x & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - \frac{1}{4} = x^2 - x,$$

его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Этот пример иллюстрирует доказанную выше теорему 12 и следствие из неё.

Перейдём к определению основного в этом разделе понятия. Ненулевой вектор $b \in L$ называется ***собственным вектором*** линейного преобразования $\mathcal{A}$, если

$$\mathcal{A}(b) = \lambda b,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$. Действительное число λ называется ***собственным значением*** (или собственным числом). Говорят также, что собственный вектор b относится к собственному значению λ.

Замечания. Нулевой вектор собственным не считается, хотя, конечно, $\mathcal{A}(\bar{0}) = \lambda\bar{0} = \bar{0} \quad (\forall\lambda)$.

Если вектор $b \in L$ собственный, то $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ вектор αb тоже является собственным, относящимся к тому же самому собственному значению:

$$\mathcal{A}(\alpha b) = \alpha\mathcal{A}(b) = \alpha \cdot \lambda \cdot b = \lambda \cdot (\alpha b).$$

Пример 10 (продолжение). Найдём собственные векторы преобразования, рассмотренного в нашем примере. Так как $\mathcal{A}(\bar{i}) = \bar{i}$, то $\bar{i}$ — собственный вектор, относящийся к собственному значению 1. Так как $\mathcal{A}(\bar{j}) = \bar{0}$, то $\bar{j}$ — собственный вектор, относящийся к собственному значению 0. Обратим внимание: собственные значения совпали с характеристическими числами $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Это не случайное совпадение, так как справедлива

Теорема 13. Действительные корни характеристического многочлена и только они являются собственными значениями линейного преобразования.

Доказательство проведём для случая трёхмерного пространства, т. е. для $n = 3$.

Пусть λ — собственное значение линейного преобразования $\mathcal{A}$. Докажем, что λ — корень характеристического многочлена.

Пусть b — собственный вектор $\mathcal{A}$, относящийся к собственному значению λ. Зафиксируем в пространстве базис: e_1, e_2, e_3. Тогда если $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$, то $\mathcal{A}(b) = \lambda b$, т. е. $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)A_e = (\lambda\beta_1, \lambda\beta_2, \lambda\beta_3)$, где $A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ — матрица $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2, e_3.

Выполняя умножение матриц, заменяем матричное равенство тремя скалярными (числовыми) равенствами:

$$\begin{cases} \beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{21} + \beta_3 a_{31} = \lambda\beta_1, \\ \beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{22} + \beta_3 a_{32} = \lambda\beta_2, \\ \beta_1 a_{13} + \beta_2 a_{23} + \beta_3 a_{33} = \lambda\beta_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \beta_1 (a_{11} - \lambda) + \beta_2 a_{21} + \beta_3 a_{31} = 0, \\ \beta_1 a_{12} + \beta_2 (a_{22} - \lambda) + \beta_3 a_{32} = 0, \\ \beta_1 a_{13} + \beta_2 a_{23} + \beta_3 (a_{33} - \lambda) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 (a_{11} - \lambda) + x_2 a_{21} + x_3 a_{31} = 0, \\ x_1 a_{12} + x_2 (a_{22} - \lambda) + x_3 a_{32} = 0, \\ x_1 a_{13} + x_2 a_{23} + x_3 (a_{33} - \lambda) = 0. \end{cases}$$

Эта однородная система имеет ненулевое решение: $x_1 = \beta_1$, $x_2 = \beta_2$, $x_3 = \beta_3$. Значит, как мы знаем из раздела 3.4, её ранг $r < 3$, т. е. определитель основной матрицы равен 0:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Транспонирование не меняет величины определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а это означает, что λ — характеристическое число.

Обратно, пусть λ — характеристическое число. Требуется доказать, что существует вектор $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, такой, что $\mathcal{A}(b) = \lambda b$. Проводя приведённые выше рассуждения в обратном порядке, получим, что рассмотренная система уравнений имеет ненулевое решение $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, которое и является искомым. Теорема доказана.

Пример 11. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\mathcal{A}$, заданного в некотором базисе двухмерного линейного пространства матрицей $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдём характеристические числа:

$$|A - xE| = \begin{vmatrix} 17 - x & 6 \\ 6 & 8 - x \end{vmatrix} = (17 - x)(8 - x) - 36 =$$

$$= 136 - 8x - 17x + x^2 - 36 = x^2 - 25x + 100 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = 5$. По теореме 13, эти числа и являются собственными значениями преобразования $\mathcal{A}$.

Находим собственный вектор для $\lambda_1 = 20$.

$$(\beta_1, \beta_2)\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = (20\beta_1, 20\beta_2),$$

$$\begin{cases} 17\beta_1 + 6\beta_2 = 20\beta_1, \\ 6\beta_1 + 8\beta_2 = 20\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\beta_1 + 6\beta_2 = 0, \\ 6\beta_1 - 12\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Ранг системы $r = 1$, одна неизвестная — свободная. Полагая, например, $\beta_2 = 1$, найдём $\beta_1 = 2$. Итак, $b = (2, 1)$ — собственный вектор, относящийся к собственному значению 20.

Аналогично находим собственный вектор для $\lambda_2 = 5$.

$$(\beta_1, \beta_2)\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = (5\beta_1, 5\beta_2), \quad \begin{cases} 17\beta_1 + 6\beta_2 = 5\beta_1, \\ 6\beta_1 + 8\beta_2 = 5\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12\beta_1 + 6\beta_2 = 0, \\ 6\beta_1 + 3\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Полагая $\beta_2 = 2$, найдём $\beta_1 = -1$. Вектор $(-1, 2)$ — собственный, относящийся к собственному значению 5.

При изучении какого-либо линейного преобразования иногда удаётся выбрать базис в пространстве так, чтобы матрица преобразования имела наиболее простой вид — была диагональной.

Теорема 14. Линейное преобразование $\mathcal{A}$ имеет в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ диагональную матрицу $\Leftrightarrow$ базис состоит из собственных векторов $\mathcal{A}$.

Доказательство. « $\Rightarrow$ ».

Пусть $A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Вычислим образы базисных векторов:

$$\mathcal{A}(e_1) = (1, 0, \ldots, 0)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1, 0, \ldots, 0) = \lambda_1 e_1,$$

$$\mathcal{A}(e_2) = (0, 1, \ldots, 0)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (0, \lambda_2, \ldots, 0) = \lambda_2 e_2,$$

и так далее. Получим, что все e_i — собственные векторы.

« $\Leftarrow$ ».

Пусть e_i — собственный вектор, относящийся к собственному значению λ_i. Строим матрицу преобразования как обычно:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e_1) &= \lambda_1 e_1 = \lambda_1 e_1 + 0e_2 + \ldots + 0e_n, \\ \mathcal{A}(e_2) &= \lambda_2 e_2 = 0e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + 0e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{A}(e_n) &= \lambda_n e_n = 0e_1 + 0e_2 + \ldots + \lambda_n e_n, \end{aligned}$$

т. е. $A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ — диагональная.

Теорема доказана. Однако осталось неясным — для каких же преобразований такой базис существует? Приведём достаточное условие существования базиса из собственных векторов (не являющееся необходимым).

Теорема 15. Собственные векторы, относящиеся к различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство проведём методом математической индукции. Пусть $e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_m$ — собственные векторы преобразования $\mathcal{A}$, относящиеся к различным собственным значениям $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_m$.

База индукции: при $m = 1$ теорема справедлива, так как один ненулевой вектор представляет собой линейно независимую систему.

Предположение индукции: будем считать, что для наборов, содержащих менее m собственных векторов, теорема справедлива.

Шаг индукции: докажем, что $e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_m$ линейно независимы. Допустим, что $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m = \bar{0}$. Применим преобразование $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m) = \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + \alpha_m \lambda_m e_m = \bar{0}.$$

Умножим первое равенство на λ_m и вычтем из второго:

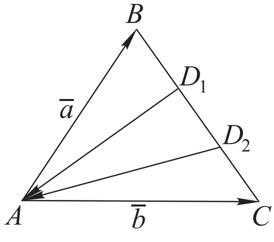
$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)e_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m)e_2 + \ldots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)e_{m-1} = \bar{0}.$$

По предположению, $e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_{m-1}$ линейно независимы, поэтому все коэффициенты здесь равны 0. Но λ_i — различны, поэтому $\alpha_i = 0\ (\forall i)$, а это и означает линейную независимость.

Следствие. Если линейное преобразование имеет ***простой спектр*** (т. е. все характеристические числа действительны и различны), то существует базис пространства, состоящий из собственных векторов.

3.7. Задачи с решениями

1. В треугольнике ABC сторона BC разделена на 3 равные части точками D_1, D_2. Выразить векторы $\overline{D_1A}$, $\overline{D_2A}$ через векторы $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$.



Решение. Сделаем чертёж.

Так как $\overline{BC} = \bar{b} - \bar{a}$, то $\overline{BD_1} = \frac{1}{3}(\bar{b} - \bar{a})$, $\overline{BD_2} = \frac{2}{3}(\bar{b} - \bar{a})$. Поэтому $\overline{AD_1} = \overline{AB} + \overline{BD_1} = \bar{a} + \frac{1}{3}(\bar{b} - \bar{a}) = \frac{2}{3}\bar{a} + \frac{1}{3}\bar{b}$. Значит, $\overline{D_1A} = -\frac{2}{3}\bar{a} - \frac{1}{3}\bar{b}$.

Аналогично: $\overline{AD_2} = \overline{AB} + \overline{BD_2} = \bar{a} + \dfrac{2}{3}(\bar{b} - \bar{a}) = \dfrac{1}{3}\bar{a} + \dfrac{2}{3}\bar{b}$, $\overline{D_2A} = -\dfrac{1}{3}\bar{a} - \dfrac{2}{3}\bar{b}$.

2. Какими должны быть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, чтобы выполнялись соотношения: а) $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$; б) $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$; в) $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$?

Решение. а) Заметим, что $|\bar{a}+\bar{b}|, |\bar{a}-\bar{b}|$ — длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}$. Диагонали равны только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником. Значит, $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$ в том случае, если векторы $\bar{a}, \bar{b}$ перпендикулярны.

б) Каждый из векторов $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}, \dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$ имеет единичную длину. Они равны только тогда, когда совпадают их направления. Так как $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \uparrow\uparrow \bar{a}$, $\dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \uparrow\uparrow \bar{b}$, то получаем, что $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$.

в) Сторона треугольника всегда меньше суммы двух других его сторон. Требуемое равенство достигается только в случае, если треугольник ***вырожденный,*** т. е. его стороны параллельны. Если $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, то $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$. Если же $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$, то $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}| - |\bar{b}|$ (при условии $|\bar{a}| \geq |\bar{b}|$), или $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{b}| - |\bar{a}|$ (при условии $|\bar{b}| \geq |\bar{a}|$).

3. Проверить, что векторы $\bar{e}_1 = 3\bar{i} - 5\bar{j}$, $\bar{e}_2 = 5\bar{i} - 8\bar{j}$ образуют базис на плоскости, разложить вектор $\bar{x} = \bar{i} - 3\bar{j}$ по этому базису.

Решение. Координаты векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ не пропорциональны: $\dfrac{3}{5} \neq \dfrac{-5}{-8}$. Поэтому $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ не коллинеарны, а значит — линейно независимы. На плоскости любые 2 линейно независимых вектора образуют базис. Поэтому $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ — базис.

Разложить вектор $\bar{x}$ по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ означает: найти числа α, β такие, что

$$\bar{x} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2.$$

Или, в координатной форме,

$$(1, -3) = \alpha(3, -5) + \beta(5, -8) = (3\alpha + 5\beta, -5\alpha - 8\beta).$$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 1, \\ -5\alpha - 8\beta = -3. \end{cases}$ Решая её, например, по методу Крамера, находим:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{7}{1} = 7, \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{1} = -4.$$

Итак, $\bar{x} = 7\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2$.

4. Является ли линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ множество матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где α, $\beta \in \mathbb{R}$, если операции сложения и умножения на число заданы как обычные матричные действия?

Решение. Сумма матриц указанного вида уже не является матрицей такого вида: $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, поэтому сложение матриц не является алгебраической операцией на данном множестве, линейного пространства не получается.

5. Является ли линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ множество строк $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, где n_i — целые числа, если сложение строк и умножение строки на число определяются поэлементно?

Решение. Сумма двух строк снова является строкой целых чисел. Сложение обладает всеми требуемыми свойствами. Однако умножение на действительное число может вывести из данного множества:

$$(1, 1, \ldots, 1) \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right).$$

Поэтому рассматриваемое множество с такими операциями не образует линейного пространства.

6. Являются ли линейно зависимыми элементы $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (3, 5, 1)$, $x_3 = (5, 9, 7)$ пространства $\mathbb{R}^3$?

Решение. По определению, линейная зависимость означает, что $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \bar{0}$, где хотя бы одно из чисел α_i не равно нулю. Запишем последнее равенство подробнее:

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(3, 5, 1) + \alpha_3(5, 9, 7) = (0, 0, 0).$$

Значит: $\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 7\alpha_3 = 0. \end{cases}$ Как мы знаем, однородная система уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг её матрицы строго меньше числа неизвестных. Подсчитаем ранг:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг равен 2, а неизвестных 3. Поэтому существует ненулевое решение, т. е. элементы x_1, x_2, x_3 линейно зависимы. Хотя это не требуется в условии задачи, мы найдём саму линейную зависимость. Для этого найдём какое-либо ненулевое решение системы уравнений. Придадим свободной неизвестной α_3 любое ненулевое значение; например, $\alpha_3 = 1$. Тогда, поднимаясь вверх, находим: $\alpha_2 = -1$, $\alpha_1 = -2$. Итак, $-2x_1 - x_2 + x_3 = \bar{0}$. Легко проверить правильность наших вычислений, подставляя сюда x_i.

7. Являются ли линейно зависимыми элементы $\sin x$, $\cos x$ пространства функций $F(x)$?

Решение. Предположим, что существуют числа α_1, α_2 такие, что

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = \bar{0}.$$

Здесь $\bar{0}$ — функция, тождественно равная нулю. В частности, функция $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x$ должна принимать значение 0 при $x = 0$ и при $x = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\alpha_1 \sin 0 + \alpha_2 \cos 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_1 \sin \frac{\pi}{2} + \alpha_2 \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0.$$

Итак, ненулевых α_1, α_2 с указанными свойствами не существует. Функции $\sin x$, $\cos x$ линейно независимы.

8. В пространстве M_2 матриц размером 2×2 с действительными коэффициентами найти какой-либо базис, определить размерность пространства.

Решение. Рассмотрим матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Они линейно независимы. Действительно, если

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то, выполняя действия в левой части, получим: $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Любая матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2$ линейно выражается через указанные матрицы: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, эти 4 матрицы образуют базис в M_2. Пространство M_2 четырёхмерно.

9. Пусть e_1, e_2, e_3 — некоторый базис в трёхмерном линейном пространстве L. Найти координаты вектора $x = 2e_1 + e_2 + 4e_3$ в базисе, образованном векторами

$$e_1' = e_1 + 3e_2 + 2e_3, \quad e_2' = 2e_1 - 2e_2 - 5e_3, \quad e_3' = -3e_1 + 4e_3.$$

Решение. Матрицей перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e'_1, e'_2, e'_3 является матрица $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. По теореме 4 (раздел 3.3): $[x]_e = [x]_{e'} \cdot S$. Поэтому $[x]_{e'} = [x]_e \cdot S^{-1}$. Значит, нам нужно найти матрицу обратного перехода S^{-1}. Примеры вычислений обратной матрицы есть в разделе 2.6.

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -12 & -11 \\ 7 & 10 & 9 \\ -6 & -9 & -8 \end{pmatrix}.$$

Находим координаты x в базисе e'_1, e'_2, e'_3:

$$[x]_{e'} = [x]_e \cdot S^{-1} = (2, 1, 4) \begin{pmatrix} -8 & -12 & -11 \\ 7 & 10 & 9 \\ -6 & -9 & -8 \end{pmatrix} = (-33, -50, -45).$$

Сделаем проверку: $-33e'_1 - 50e'_2 - 45e'_3 = -33(e_1 + 3e_2 + 2e_3) - -50(2e_1 - 2e_2 - 5e_3) - 45(-3e_1 + 4e_3) = 2e_1 + e_2 + 4e_3 = x$.

10. Доказать, что элементы $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$, $u_3 = (1, 4, 5)$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$. Найти матрицу перехода от этого базиса к базису $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$. Какие координаты имеет вектор $x = 2v_1 + 3v_2 - 2v_3$ в базисе u_1, u_2, u_3?

Решение. Пространство $\mathbb{R}^3$ трёхмерно, поэтому 3 вектора образуют базис, если они линейно независимы. Проверим линейную независимость u_1, u_2, u_3 — как и в примерах выше. Допустим, что

$$\alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(1, 2, 3) + \alpha_3(1, 4, 5) = (0, 0, 0),$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу полученной системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 3, поэтому система имеет только нулевое решение: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Значит, u_1, u_2, u_3 линейно независимы.

Для построения матрицы перехода S от базиса u_1, u_2, u_3 к базису v_1, v_2, v_3 разложим векторы v_1, v_2, v_3 по базису u_1, u_2, u_3:

$$\begin{aligned} v_1 &= s_{11}u_1 + s_{12}u_2 + s_{13}u_3, \\ v_2 &= s_{21}u_1 + s_{22}u_2 + s_{23}u_3, \\ v_3 &= s_{31}u_1 + s_{32}u_2 + s_{33}u_3. \end{aligned}$$

Или подробнее:

$$\begin{aligned}(1,1,1) &= s_{11}(1,1,1) + s_{12}(1,2,3) + s_{13}(1,4,5),\\ (0,1,1) &= s_{21}(1,1,1) + s_{22}(1,2,3) + s_{23}(1,4,5),\\ (0,0,1) &= s_{31}(1,1,1) + s_{32}(1,2,3) + s_{33}(1,4,5).\end{aligned}$$

В матричной форме то же самое запишется так:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_{11}&s_{12}&s_{13}\\s_{21}&s_{22}&s_{23}\\s_{31}&s_{32}&s_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&5\end{pmatrix}.$$

Отсюда находим матрицу перехода $S = (s_{ij})$:

$$S = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&5\end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&-2&1\\-1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Так как $[x]_u = [x]_v S$, то теперь можно найти координаты вектора x в базисе u_1, u_2, u_3:

$$[x]_u = (2,3,-2)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \left(4,\ -\frac{9}{2},\ \frac{5}{2}\right).$$

Подставляя известные нам векторы, можно сделать проверку:

$$4u_1 - \frac{9}{2}u_2 + \frac{5}{2}u_3 = (2,5,3) = 2v_1 + 3v_2 - 2v_3.$$

11. Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases}3x_1 + 2x_2 + \ \ 5x_3 = 0,\\ 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ 3x_3 = 0,\\ \ \ x_1 - 4x_2 + \ \ \ x_3 = 0,\\ 7x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 0.\end{cases}$$

Решение. Приведём матрицу системы уравнений к трапециевидной форме с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 7 & 7 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 7 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 14 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 35 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 14 & 2 \\ 0 & 35 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Неизвестные x_1, x_2 — базисные, x_3 — свободная. Полагая $x_3 = 1$, находим $x_2 = -\frac{1}{7}$, $x_1 = 4x_2 - x_3 = -\frac{4}{7} - 1 = -\frac{11}{7}$. Фундаментальная система состоит из одного решения $\begin{pmatrix} -\frac{11}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$, пространство решений одномерно.

12. Являются ли линейными преобразованиями следующие отображения пространства $\mathbb{R}^3$ в себя:

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + 5x_3,\ x_3,\ x_2 + 2x_3),$$
$$\mathcal{B}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2,\ 2x_3,\ x_2 + 5)\,?$$

Решение. Проверим выполнение условий, определяющих линейное преобразование (см. 3.5.1). Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ — произвольные элементы $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, x_3 + y_3) =$$
$$= (2x_1 + 2y_1 - x_2 - y_2 + 5x_3 + 5y_3,\, x_3 + y_3,\, x_2 + y_2 + 2x_3 + 2y_3) =$$
$$= (2x_1 - x_2 + 5x_3,\, x_3,\, x_2 + 2x_3) + (2y_1 - y_2 + 5y_3,\, y_3,\, y_2 + 2y_3) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y).$$

Проверим второе условие. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{A}(\alpha x) = \mathcal{A}(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (2\alpha x_1 - \alpha x_2 + 5\alpha x_3,\, \alpha x_3,\, \alpha x_2 + 2\alpha x_3) =$$
$$= \alpha(2x_1 - x_2 + 5x_3,\, x_3,\, x_2 + 2x_3) = \alpha\mathcal{A}(x).$$

Оба условия выполнены, $\mathcal{A}$ — линейное преобразование. Сделаем такую же проверку для отображения $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{B}(x+y) = \mathcal{B}(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = (x_1+y_1-x_2-y_2, 2x_3+2y_3, x_2+y_2+5) \neq$$
$$\neq (x_1 - x_2,\, 2x_3,\, x_2 + 5) + (y_1 - y_2,\, 2y_3,\, y_2 + 5) = \mathcal{B}(x) + \mathcal{B}(y).$$

Первое условие не выполнено, поэтому $\mathcal{B}$ не является линейным преобразованием.

13. Найти матрицу преобразования $\mathcal{A}$ из предыдущего примера в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

Решение. Найдём образы базисных векторов, каждый из них разложим по базису:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(e_1) &= \mathcal{A}(1,0,0) = (2,0,0) = 2e_1 + 0e_2 + 0e_3,\\
\mathcal{A}(e_2) &= \mathcal{A}(0,1,0) = (-1,0,1) = -e_1 + 0e_2 + e_3,\\
\mathcal{A}(e_3) &= \mathcal{A}(0,0,1) = (5,1,2) = 5e_1 + e_2 + 2e_3.
\end{aligned}$$

Следовательно, матрица преобразования имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

14. Доказать, что отображение $M_2 \to M_2$ пространства M_2 всех квадратных матриц размером 2×2, заданное формулой

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a+b \\ 2c & c+d \end{pmatrix},$$

является линейным преобразованием. Найти матрицу этого преобразования в базисе, образованном элементами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ — произвольные матрицы из M_2, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1+2a_2 & a_1+a_2+b_1+b_2 \\ 2c_1+2c_2 & c_1+c_2+d_1+d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1+b_1 \\ 2c_1 & c_1+d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 & a_2+b_2 \\ 2c_2 & c_2+d_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \mathcal{A}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha a_1 & \alpha a_1+\alpha b_1 \\ 2\alpha c_1 & \alpha c_1+\alpha d_1 \end{pmatrix} = \alpha\mathcal{A}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Оба условия выполнены, $\mathcal{A}$ — линейное преобразование.

Найдем образы базисных элементов, каждый из них разложим по базису.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\
\mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\
\mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\\
\mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Итак, матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Линейное преобразование $\mathcal{A}$ пространства L имеет в некотором базисе e_1, e_2, e_3 матрицу $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого же преобразования в базисе

$$e_1' = e_1 - e_2 + e_3, \quad e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3, \quad e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3.$$

Решение. По теореме 11: $A_{e'} = SA_eS^{-1}$, где S — матрица перехода от базиса e к базису e'. По определению матрицы перехода находим:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу S^{-1}.

$$|S| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$S^* = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычисляем матрицу $A_{e'}$:

$$A_{e'} = SA_eS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -10 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -13 & -3 \\ 8 & 9 & 0 \\ 50 & 31 & 13 \end{pmatrix}.$$

16. Найти образ вектора $x = (3, 5, -2)$, $x \in \mathbb{R}^3$, при преобразовании $\mathcal{A}$, которое задано в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Числа 3, 5, -2 являются координатами вектора x в базисе e_1, e_2, e_3. Поскольку вектор x и матрица преобразования $\mathcal{A}$ заданы в одном и том же базисе, то по формуле теоремы 8 находим:

$$[\mathcal{A}(x)]_e = [x]_e \cdot A_e = (3, 5, -2)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = (5, 16, 6).$$

17. В какой вектор отображается вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x \in \mathbb{R}^3$, при преобразовании $\mathcal{B}(\mathcal{A} + 2\mathcal{B})$, если преобразования $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ заданы:

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (2x_2,\ 0,\ x_2 + x_3),$$
$$\mathcal{B}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3,\ x_3,\ x_1 + x_2).$$

Решение. Пользуемся определениями операций над преобразованиями (см. 3.5.3):

$$(\mathcal{B}(\mathcal{A} + 2\mathcal{B}))(x) = (\mathcal{A} + 2\mathcal{B})(\mathcal{B}(x)) = (\mathcal{A} + 2\mathcal{B})(x_1 - x_3, x_3, x_1 + x_2) =$$
$$= \mathcal{A}(x_1 - x_3, x_3, x_1 + x_2) + 2\mathcal{B}(x_1 - x_3, x_3, x_1 + x_2) =$$
$$= (2x_3, 0, x_1 + x_2 + x_3) + 2(-x_2 - x_3, x_1 + x_2, x_1) = (-2x_2, 2x_1 + 2x_2, 3x_1 + x_2 + x_3).$$

18. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\mathcal{A}\colon L \to L$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -1 \\ -3 & -9 & -3 \\ 5 & 25 & 7 \end{pmatrix}$. Можно ли построить базис пространства L, состоящий из собственных векторов? Какой диагональной матрице подобна матрица A?

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -7 & -1 \\ -3 & -9-\lambda & -3 \\ 5 & 25 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -9-\lambda & -3 \\ 25 & 7-\lambda \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 5 & 7-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -9-\lambda \\ 5 & 25 \end{vmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)(-63 + 9\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 75) + 7(-21 + 3\lambda + 15) - (-75 + 45 + 5\lambda) =$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 12) + 7(3\lambda - 6) - (5\lambda - 30) =$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda + 12 - \lambda^3 - 2\lambda^2 - 12\lambda + 21\lambda - 42 - 5\lambda + 30 = -\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda = 0.$$

Значит, $\lambda_1 = 0$; λ_2 и λ_3 являются корнями квадратного уравнения $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$. Решая уравнение, находим: $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$.

Мы нашли собственные значения. В данном случае мы уже сейчас, не находя собственных векторов, можем ответить на вопросы, поставленные в условии задачи. По теореме 15, собственные векторы, соответствующие λ_1, λ_2, λ_3, линейно независимы. Три линейно независимых собственных вектора в трёхмерном пространстве, очевидно, образуют базис. Матрица A подобна диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

которая является матрицей того же самого преобразования в базисе, состоящем из собственных векторов.

Найдём собственный вектор b_1, относящийся к собственному значению $\lambda_1 = 0$. Обозначим $b_1 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ и используем определение собственного вектора:

$$\mathcal{A}(b_1) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 1 & -7 & -1 \\ -3 & -9 & -3 \\ 5 & 25 & 7 \end{pmatrix} = \lambda_1 b_1 = (0, 0, 0).$$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} \beta_1 - 3\,\beta_2 + \ \ 5\,\beta_3 = 0, \\ -7\,\beta_1 - 9\,\beta_2 + 25\,\beta_3 = 0, \\ -\beta_1 - 3\,\beta_2 + \ \ 7\,\beta_3 = 0. \end{cases}$ Решим её методом Гаусса, преобразуя матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -7 & -9 & 25 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -30 & 60 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -30 & 60 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $\beta_3 = 1$ (свободная неизвестная), найдём $\beta_2 = \dfrac{-60\beta_3}{-30} = 2$, $\beta_1 = 3\beta_2 - 5\beta_3 = 1$. Итак, $b_1 = (1, 2, 1)$. Аналогично находим $b_2 = (2, 1, 1)$, $b_3 = (1, 3, 1)$.

Можно сделать проверку наших вычислений. Матрица $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ является матрицей перехода от старого базиса к базису b_1, b_2, b_3. Поэтому должно выполняться равенство:

$$SAS^{-1} = A_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.8. Упражнения для самостоятельной работы

1. В треугольнике ABC обозначим: $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$. Выразить через $\bar{a}$, $\bar{b}$ векторы, совпадающие с медианами треугольника: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$.

2. В ромбе $ABCD$ обозначим диагонали: $\overline{AC} = \bar{a}$, $\overline{BD} = \bar{b}$. Выразить через $\bar{a}$, $\bar{b}$ векторы, совпадающие со сторонами ромба: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.

3. Являются ли линейными подпространствами следующие подмножества в $\mathbb{R}^n$:

а) $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$;

б) $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1\}$;

в) $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n\}$?

4. Являются ли линейными подпространствами следующие подмножества в $\overline{\mathbb{R}^2}$:

а) множество векторов, координаты которых равны между собой;

б) множество векторов, модули которых меньше 1;

в) множество векторов, у которых первая координата равна 0?

5. Разложить вектор $\bar{c} = 8\bar{i} + 11\bar{j}$ по базису, образованному векторами $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{v} = -3\bar{i} + 2\bar{j}$.

6. Разложить элемент $x = (12, 10, -2)$, $x \in \mathbb{R}^3$, по базису, образованному элементами $e_1 = (2, 3, -1)$, $e_2 = (4, 1, 5)$, $e_3 = (0, 2, -2)$.

7. Найти линейную зависимость между элементами $\mathbb{R}^3$: $p_1 = (-1, 5, 4)$, $p_2 = (4, 2, 4)$, $p_3 = (8, -7, -2)$.

8. Являются ли линейно независимыми:

а) строки $(2, -1, 0, 3)$, $(3, 2, 1, 1)$ в пространстве $\mathbb{R}^4$?

б) пары $(1, 3)$, $(1, 1)$, $(1, 7)$ в пространстве $\mathbb{R}^2$?

в) функции x, x^2, x^3 в пространстве функций $F(x)$?

9. В линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ даны два базиса: $e_1 = (2, 1)$, $e_2 = (-1, 1)$ и $f_1 = (0, 1)$, $f_2 = (2, 3)$. Найти матрицу перехода S от базиса f_1, f_2 к базису e_1, e_2. Найти координаты вектора $x = e_1 - e_2$ в базисе f_1, f_2.

10. Доказать, что тройка векторов $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 3)$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. Найти матрицу перехода S от этого базиса к базису $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 0, 2)$. Найти координаты вектора $5v_1 + 3v_2 + v_3$ в базисе u_1, u_2, u_3.

11. Найти координаты вектора x в базисе e'_1, e'_2, e'_3, если известно его разложение по базису e_1, e_2, e_3:

а) $x = e_1 - 2e_2 + 2e_3$,

$$e'_1 = e_1 + e_2 - e_3,\ \ e'_2 = 2e_1 - e_2,\ \ e'_3 = e_1 - e_2 + e_3;$$

б) $x = 2e_1 + 3e_2 - e_3$,

$$e'_1 = e_1 - 2e_2 - 3e_3,\ \ e'_2 = 2e_1 + e_2 - 5e_3,\ \ e'_3 = 3e_1 - 2e_2 - 8e_3.$$

12. Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x + 5y + 2z = 0, \\ x + 4y + 7z = 0. \end{cases}$

13. Является ли линейным преобразованием отображение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

а) $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_3,\ x_2 + 2x_1,\ x_1 + 3x_2 - 5x_3)$;

б) $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3,\ x_2 + 1,\ 2x_3)$;

в) $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 2x_3,\ x_1 - x_2,\ x_3^2)$;

г) $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_3,\ x_1 - 2x_2 - x_3,\ x_2 - 4x_3)$?

Для линейных преобразований найти матрицы в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

14. Является ли линейным преобразованием пространства M_2 всех квадратных матриц размером 2×2:

а) транспонирование;

б) отображение $\mathcal{A}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c + a & d + b \end{pmatrix}$;

в) отображение $\mathcal{B}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$?

15. Найти матрицы линейных преобразований, рассмотренных в предыдущем упражнении, в базисе, образованном элементами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Линейное преобразование $\mathcal{A}$ пространства L имеет в некотором базисе $e_1,\ e_2,\ e_3$ матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого преобразования в базисе:

а) $e_2,\ e_3,\ e_1$;

б) $e_1' = e_1 - 4e_2 - 3e_3,\ e_2' = e_1 - 5e_2 - 3e_3,\ e_3' = -e_1 + 6e_2 + 4e_3$.

17. Найти образ вектора $4e_1 - 3e_2 + 2e_3$ при линейном преобразовании $\mathcal{A}$, если

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

18. Найти образ вектора $(2, -3, 1) \in \mathbb{R}^3$ при преобразовании $(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathcal{B}$, если $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1,\ 2x_2,\ x_1), \quad \mathcal{B}(x_1, x_2, x_3) = (3x_3,\ 2x_1 + x_3,\ x_2).$$

19. Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных в некотором базисе матрицей A:

а) $A = \begin{pmatrix} 16 & 45 \\ -6 & -17 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.9. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. При каком λ элементы линейного пространства $\mathbb{R}^3$ $\quad x_1 = (3, -2, 5)$, $x_2 = (-4, 2, 1)$, $x_3 = (2, -4, \lambda)$ будут линейно зависимыми?

2. Линейное пространство образовано матрицами, имеющими 2 строки и 3 столбца. Сложение и умножение на число задаются обычным для матриц способом. Чему равна размерность пространства?

3. Найти размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ \ \ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - \ \ x_4 = 0. \end{cases}$

4. При каком α отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $\mathcal{A}(x_1, x_2) = (2x_2 + \alpha,\ 3x_1 + 2x_2)$, будет линейным преобразованием?

5. Линейное преобразование $\mathcal{A}$ задано в базисе e_1, e_2 матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Найти образ вектора $e_1 + 2e_2$, в ответе указать сумму его координат.

6. Линейное преобразование $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задано матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, вектор $(\beta, 1)$ — собственный для $\mathcal{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda = 2$. Найти β.

ГЛАВА 4

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

В этой главе мы возвращаемся к более конкретному понятию: вектор — направленный отрезок. Будем рассматривать направленные отрезки, расположенные не только на плоскости, но и в обычном трёхмерном пространстве. В математике, физике и их приложениях понятие вектора используется очень широко. Векторами изображаются, например, скорость и сила. С другой стороны, величины, определяемые лишь числом (и не имеющие направления), называются ***скалярами***. Примеры скалярных величин: масса, объём.

4.1. Векторы в трёхмерном пространстве

4.1.1. Линейное пространство направленных отрезков $\overline{\mathbb{R}^3}$

Основные понятия для векторов в трёхмерном пространстве вводятся так же, как это сделано для векторов на плоскости в разделе 3.1. Определения длины вектора, равных векторов, коллинеарных векторов, суммы векторов и произведения вектора на число не отличаются от аналогичных определений для векторов на плоскости.

Теорема 1. Множество $\overline{\mathbb{R}^3}$ направленных отрезков в трёхмерном пространстве с операциями сложения и умножения на число образует линейное пространство над полем действительных чисел.

Доказательство должно содержать проверку 8 аксиом линейного пространства. Такая проверка была проведена в разделе 3.1 для векторов на плоскости. Но в точности те же рассуждения справедливы и для векторов из $\overline{\mathbb{R}^3}$.

Линейные пространства $\overline{\mathbb{R}^2}$, $\overline{\mathbb{R}^3}$ являются хорошими, наглядными примерами. С их помощью мы сможем лучше освоить наиболее важные понятия общей теории линейных пространств.

Векторы $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_k$ из $\overline{\mathbb{R}^3}$ называются ***компланарными***, если они параллельны одной и той же плоскости. Заметим, что 2 вектора всегда компланарны: если их отложить из одной точки, то через неё и концы векторов всегда можно провести плоскость.

Теорема 2. Три вектора в $\overline{\mathbb{R}^3}$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$ они компланарны.

Доказательство. « $\Rightarrow$ ». Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ линейно зависимы, т. е.

$$\exists\, \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 : \quad \alpha_1\bar{a}+\alpha_2\bar{b}+\alpha_3\bar{c}=\bar{0}$$

и, например, $\alpha_3 \neq 0$. Тогда $\bar{c} = \left(-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_3}\right)\bar{a} + \left(-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)\bar{b}$. Так как любые 2 вектора компланарны, то можно считать, что $\bar{a}$, $\bar{b}$ лежат в одной плоскости. Ясно, что $\bar{c}$ также лежит в этой плоскости.

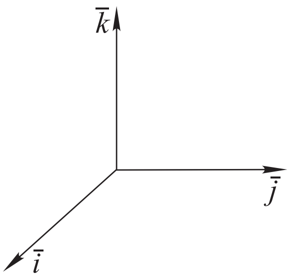
« $\Leftarrow$ ». Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны. Рассмотрим векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$. Если они коллинеарны, то они линейно зависимы: $\alpha_1\bar{a}+\alpha_2\bar{b}=\bar{0}$. (Здесь по крайней мере одно из чисел $\alpha_1,\ \alpha_2$ не равно 0 . А если $\bar{a}$, $\bar{b}$ — ненулевые, то оба $\alpha_1,\ \alpha_2$ не равны 0.) Получаем линейную зависимость:

$$\alpha_1\bar{a}+\alpha_2\bar{b}+0\bar{c}=\bar{0}.$$

Если же $\bar{a}$, $\bar{b}$ не коллинеарны, то, по теореме 2 из раздела 3.1, они образуют базис на плоскости, где лежат $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Поэтому $\bar{c}$ можно представить так: $\bar{c}=\alpha_1\bar{a}+\alpha_2\bar{b}$, т. е. $\alpha_1\bar{a}+\alpha_2\bar{b}-\bar{c}=\bar{0}$, что и требовалось.

Теорема 3. Три любых некомпланарных вектора образуют базис в пространстве $\overline{\mathbb{R}^3}$.

Доказательство проводится в точности так же, как доказательство теоремы 2 из раздела 3.1. Разница лишь в том, что рисунок должен быть не плоским, а пространственным — вместо параллелограмма получается параллелепипед.



Наиболее удобным является ортонормированный базис. Возьмём три попарно перпендикулярных вектора, длина каждого равна 1. Обозначим векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Приведённый рисунок нужно, конечно, представлять себе не плоским, а пространственным.

Теперь каждый вектор можно записывать как в виде линейной комбинации базисных векторов, так и в виде координатной строки:

$$\bar{a}=\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3).$$

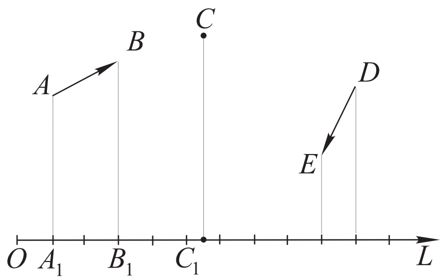
Как и в пространстве $\overline{\mathbb{R}^2}$, действия с векторами в $\overline{\mathbb{R}^3}$ можно проводить в координатной форме: если $\bar{a}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, $\bar{b}=(\beta_1,\ \beta_1,\ \beta_3)$, то

$$\bar{a}+\bar{b}=(\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \alpha_3+\beta_3)\,, \quad \lambda\bar{a}=(\lambda\alpha_1,\ \lambda\alpha_2,\ \lambda\alpha_3).$$

Другими словами, линейное пространство направленных отрезков $\overline{\mathbb{R}^3}$ изоморфно линейному пространству $\mathbb{R}^3$, состоящему из строк длины 3.

4.1.2. Скалярные проекции

Прямая линия, на которой выбраны начальная точка, положительное направление и указан масштаб, называется ***осью***. ***Проекцией точки*** C на ось называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось. ***Проекцией вектора*** $\overline{AB}$ на ось L называется число $\text{Пр}_L\overline{AB}$, равное $\pm|\overline{A_1B_1}|$, где A_1, B_1 — проекции точек A, B соответственно; знак «+» берётся, если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси, знак «−» берётся, если эти направления противоположны.



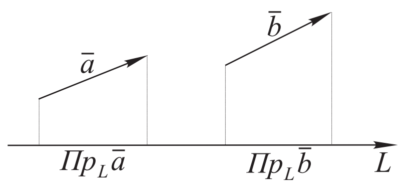
Здесь $\text{Пр}_L\overline{AB} = 2$, $\text{Пр}_L\overline{DE} = -1$.

Заметим, что в примере 11 раздела 3.6 мы уже встречались с проекциями, но там проекцией вектора снова являлся вектор. Здесь же мы рассматриваем ***скалярные проекции***, т. е. проекция является числом.

Укажем некоторые простые свойства проекций.

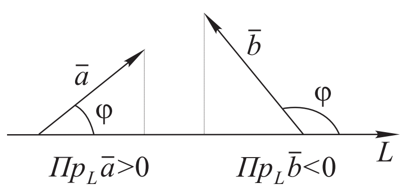
1) Если два вектора равны, то равны и их проекции:

$$\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow \text{Пр}_L\bar{a} = \text{Пр}_L\bar{b}.$$



2) $\text{Пр}_L\bar{a} = |\,\bar{a}\,| \cdot \cos\varphi$, где φ — угол между вектором $\bar{a}$ и осью L.

Действительно, если отложить $\bar{a}$ из какой-либо точки оси, то равенство следует из определения косинуса как отношения прилежащего катета к гипотенузе в прямоугольном треугольнике. Заметим, что если угол φ — острый, то $\cos\varphi$ и $\text{Пр}_L\bar{a}$ положительны, а если угол φ — тупой, то и $\cos\varphi$, и $\text{Пр}_L\bar{a}$ отрицательны.



3) $\text{Пр}_L(\alpha\bar{a}) = \alpha\text{Пр}_L\bar{a}$.

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$. Тогда

$$\text{Пр}_L(\alpha\bar{a}) = |\,\alpha\bar{a}\,|\,\cos\varphi = \alpha|\,\bar{a}\,|\,\cos\varphi = \alpha\text{Пр}_L\bar{a}.$$

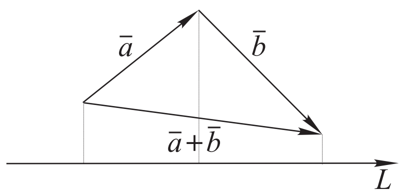
Если же $\alpha < 0$, то

$$\text{Пр}_L(\alpha\bar{a}) = |\,\alpha\bar{a}\,|\,\cos(\pi-\varphi) = (-\alpha)\cdot|\bar{a}\,|\cdot(-\cos\varphi) = \alpha|\,\bar{a}\,|\,\cos\varphi = \alpha\text{Пр}_L\bar{a}.$$

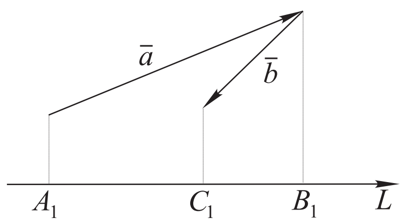
Мы воспользовались тем, что при умножении $\bar{a}$ на отрицательное число угол, образуемый вектором с осью, изменяется на π (т. е. на $180°$).

4) $\text{Пр}_L(\bar{a}+\bar{b}) = \text{Пр}_L\bar{a} + \text{Пр}_L\bar{b}$.

Если проекции векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ положительны, то свойство очевидно:



Если, например, $\text{Пр}_L\bar{a} > 0$, $\text{Пр}_L\bar{b} < 0$, то также воспользуемся рисунком и вычислим

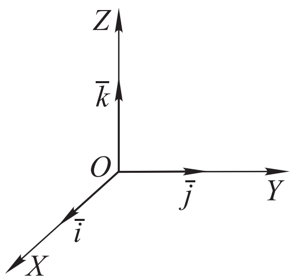


$$\text{Пр}_L\bar{a}+\text{Пр}_L\bar{b} = |\overline{A_1B_1}\,|+(-|\overline{B_1C_1}|) = |\overline{A_1B_1}|-|\overline{B_1C_1}| = |\overline{A_1C_1}| = \text{Пр}_L(\bar{a}+\bar{b}).$$

Замечание. Можно говорить о проекции вектора не на ось, а на некоторый другой вектор $\bar{c}$. Однако и в этом случае рассматривают ось вектора $\bar{c}$ (т. е. прямую, на которой лежит $\bar{c}$, с тем же направлением) и проецируют на эту ось: $\text{Пр}_{\bar{c}}\bar{a} = \text{Пр}_L\bar{a}$.

Правила действий с векторами в координатной форме теперь можно вывести и из свойств проекций, так как координаты вектора равны его проекциям на базисные векторы: если $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, то

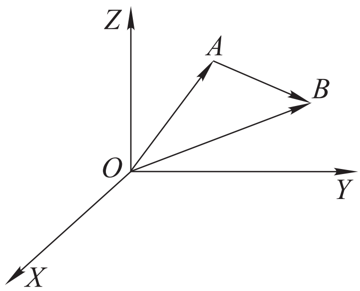
$$\alpha_1 = \text{Пр}_{\bar{i}}\bar{a}, \quad \alpha_2 = \text{Пр}_{\bar{j}}\bar{a}, \quad \alpha_3 = \text{Пр}_{\bar{k}}\bar{a}.$$



Построим в пространстве декартову прямоугольную систему координат, очень важную для нас в дальнейшем.

Выберем в пространстве произвольную точку O (***начало координат***) и отложим из неё векторы ортонормированного базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Через каждый вектор проведём прямую. Так как начальная точка выбрана, направление и масштаб заданы базисными векторами, то получаем ***координатные оси***. Такая система координат позволяет задавать положение любой точки в пространстве тройкой чисел. Точнее, ***координатами точки*** A называются координаты вектора $\overline{OA}$: запись $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ означает, что точка A имеет координаты α_1, α_2, α_3, т. е. $\overline{OA} = \alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k}$. Если оси рассматривать как числовые прямые, то числа α_1, α_2, α_3 являются проекциями точки A. Проекция на ось OX называется ***абсциссой*** точки A, проекция на ось OY — ***ордината*** точки, проекция на OZ — ***аппликата*** точки.

Пусть в пространстве даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Какие координаты имеет вектор $\overline{AB}$? Обозначим их (x, y, z).



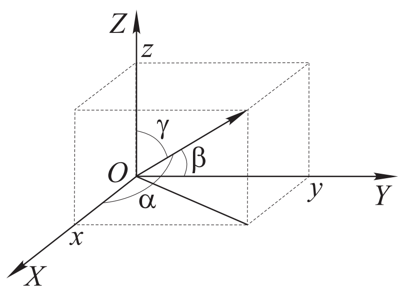
По правилу сложения векторов: $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$. В координатной форме: $(x_1, y_1, z_1) + (x, y, z) = (x_2, y_2, z_2)$. Значит:

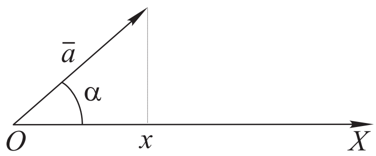
$$\overline{AB} = (x, y, z) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

Получили простое правило: чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты его начала.

Научимся решать и обратную задачу: как, зная координаты вектора, определить его длину и направление?

Пусть $\bar{a} = (x, y, z)$. Так как $|\bar{a}|$ — диагональ в прямоугольном параллелепипеде, то, используя теорему Пифагора, легко получить формулу: $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Направление вектора $\bar{a}$ удобно задавать с помощью углов α, β, γ, которые образует $\bar{a}$ с осями OX, OY, OZ соответственно. Косинусы этих углов называются ***направляющими косинусами*** вектора $\bar{a}$.





Рассматривая прямоугольный треугольник с углом α и гипотенузой $|\bar{a}\,|$, видим: $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\bar{a}\,|}$. Аналогично:

$$\cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}\,|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}\,|}.$$

Заметим, что всегда выполнено:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1.$$

Пример 1. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если известны его начало $A(3,-2,5)$ и конец $B(1,0,6)$.

Решение. Найдём координаты $\overline{AB}$, вычитая из координат B координаты A:

$$\overline{AB} = (1-3,\;\; 0-(-2),\;\; 6-5) = (-2,2,1).$$

Найдём длину вектора (модуль): $|\overline{AB}| = \sqrt{4+4+1} = 3$. Его направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Найти длину вектора $2\bar{a}+3\bar{b}$, если $\bar{a} = (-1,\,4)$, $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$.

Решение. Так как вектор $\bar{a}$ задан двумя координатами, то ясно, что задача плоская, $\bar{a},\ \bar{b} \in \mathbb{R}^2$. Найдём координаты вектора $2\bar{a}+3\bar{b}$:

$$2(-1,4)+3(3,-2) = (-2,8)+(9,-6) = (7,2).$$

Теперь найдём длину: $|2\bar{a}+3\bar{b}| = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$.

4.2. Скалярное произведение

До сих пор мы только складывали векторы и умножали их на числа. Введём ещё одно действие.

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ называется число, равное произведению длины одного вектора на длину другого и на косинус угла между ними:

$$(\bar{a},\ \bar{b}) = \ |\bar{a}\,|\cdot|\bar{b}\,|\cdot\cos(\bar{a}^\wedge\bar{b}).$$

Вместо обозначения $(\bar{a},\ \bar{b})$ в литературе иногда используется точка, которую можно и не писать: $(\bar{a},\ \bar{b}) = \bar{a}\ \cdot\ \bar{b} = \bar{a}\,\bar{b}$. Однако мы будем пользоваться круглыми скобками.

Рассмотрим свойства скалярного произведения.

1) $(\bar{a},\ \bar{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ векторы $\bar{a},\ \bar{b}$ перпендикулярны.

Действительно, если $\bar{a}$, $\bar{b}$ — ненулевые, то $(\bar{a},\ \bar{b}) = 0$ означает, что $\cos(\bar{a}^\wedge\bar{b}) = 0$, т. е. $\bar{a}$, $\bar{b}$ перпендикулярны. Если же хотя бы один из векторов нулевой, то он не имеет направления и не будет ошибкой считать его перпендикулярным любому вектору.

2) $(\bar{a},\ \bar{a}) \geq 0$, причём если $\bar{a} \neq \bar{0}$, то $(\bar{a},\ \bar{a}) > 0$.

Действительно, $(\bar{a},\ \bar{a}) = |\bar{a}\,|\,|\bar{a}\,|\ \cos 0 =\ |\bar{a}\,|^2 > 0$, кроме случая $\bar{a} = \bar{0}$.

3) $(\bar{a},\ \bar{b}) = (\bar{b},\ \bar{a})$.

Коммутативность скалярного произведения очевидна.

4) $(\lambda\bar{a},\ \bar{b}) = \lambda(\bar{a},\ \bar{b})$, т. е. числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения.

Доказательство. Пользуемся определением скалярного произведения и свойствами проекций:

$$(\lambda\bar{a},\ \bar{b}) =\ |\lambda\bar{a}|\ |\bar{b}\,|\cos(\lambda\bar{a}^\wedge\bar{b}) = |\bar{b}\,|\text{Пр}_{\bar{b}}(\lambda\bar{a}) = \lambda|\bar{b}\,|\text{Пр}_{\bar{b}}(\bar{a}) = \\ = \lambda|\bar{b}\,|\,|\bar{a}\,|\ \cos(\bar{a}^\wedge\bar{b}) = \lambda(\bar{a},\ \bar{b}).$$

5) $(\bar{a} + \bar{b},\ \bar{c}) = (\bar{a},\ \bar{c}) + (\bar{b},\ \bar{c})$.

Доказательство. Используем свойства проекций:

$$(\bar{a} + \bar{b},\ \bar{c}) =\ |\bar{a} + \bar{b}| \cdot |\bar{c}\,| \cdot \cos((\bar{a} + \bar{b})^\wedge\bar{c}) = |\bar{c}\,|\text{Пр}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = \\ = |\bar{c}\,|(\text{Пр}_{\bar{c}}\bar{a} + \text{Пр}_{\bar{c}}\bar{b}) =\ |\bar{c}\,| \cdot |\bar{a}\,| \cdot \cos(\bar{a}^\wedge\bar{c}) +\ |\bar{c}\,| \cdot |\bar{b}\,|\cos(\bar{b}^\wedge\bar{c}) = \\ = (\bar{a},\ \bar{c}) + (\bar{b},\ \bar{c}).$$

Замечание. Свойства показывают, что при вычислении скалярного произведения линейных комбинаций можно действовать по обычным правилам раскрытия скобок.

Пример 3. Найти $(\bar{a} + 3\bar{b},\ 2\bar{a} - \bar{b})$, если $|\bar{a}\,| = 3$, $|\bar{b}\,| = 4$, угол между $\bar{a}$, $\bar{b}$ равен $60°$.

Решение. Проведём вычисления, используя свойства 3), 4), 5):

$$(\bar{a} + 3\bar{b},\ 2\bar{a} - \bar{b}) = (\bar{a},\ 2\bar{a} - \bar{b}) + (3\bar{b},\ 2\bar{a} - \bar{b}) = \\ = (\bar{a},\ 2\bar{a}) + (\bar{a},\ -\bar{b}) + (3\bar{b},\ 2\bar{a}) + (3\bar{b},\ -\bar{b}) = \\ = 2(\bar{a},\ \bar{a}) - (\bar{a},\ \bar{b}) + 6(\bar{b},\ \bar{a}) - 3(\bar{b},\ \bar{b}) = \\ = 2(\bar{a},\ \bar{a}) + 5(\bar{a},\ \bar{b}) - 3(\bar{b},\ \bar{b}) = 2 \cdot |\bar{a}\,| \cdot |\bar{a}\,|\ + 5\ |\bar{a}\,|\ |\bar{b}\,|\ \cos 60° - 3\ |\bar{b}\,|\ |\bar{b}\,|\ = \\ = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 4 \cdot 4 = 18 + 30 - 48 = 0.$$

Научимся вычислять скалярное произведение векторов, заданных своими координатами в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Пусть $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$.

Проводим вычисления, используя свойства 3), 4), 5):

$$(\bar{a},\ \bar{b}) = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k},\quad x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) =$$
$$= x_1x_2(\bar{i},\ \bar{i}) + x_1y_2(\bar{i},\ \bar{j}) + x_1z_2(\bar{i},\ \bar{k}) + y_1x_2(\bar{j},\ \bar{i}) + y_1y_2(\bar{j},\ \bar{j}) +$$
$$+ y_1z_2(\bar{j},\ \bar{k}) + z_1x_2(\bar{k},\ \bar{i}) + z_1y_2(\bar{k},\ \bar{j}) + z_1z_2(\bar{k},\ \bar{k}).$$

Так как ясно, что $(\bar{i}, \bar{i}) = (\bar{j}, \bar{j}) = (\bar{k}, \bar{k}) = 1,\ (\bar{i}, \bar{j}) = (\bar{i}, \bar{k}) = (\bar{j}, \bar{k}) = 0$, то окончательно получаем:

$$(\bar{a},\ \bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

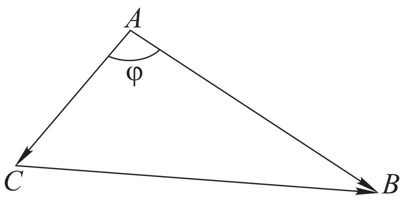
Пример 4. Найти скалярное произведение векторов

$$\bar{a} = (3,\ -4,\ 1), \quad \bar{b} = 2\bar{i} + 4\bar{k}.$$

Решение. Применяем только что полученную формулу:

$$(\bar{a},\ \bar{b}) = 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 6 + 4 = 10.$$

Пример 5. Найти косинус угла при вершине A в треугольнике ABC, если его вершины находятся в точках $A(1, -2)$, $B(4, -6)$, $C(3, 0)$.



Решение. Так как каждая из вершин задана двумя координатами, то треугольник лежит на координатной плоскости XOY. Можно считать, что третья координата $z = 0$ для всех точек. Рассмотрим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, вычислим их координаты:

$\overline{AB} = (4-1,\ -6-(-2)) = (3, -4), \quad \overline{AC} = (3-1,\ 0-(-2)) = (2, 2).$

По определению скалярного произведения:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \cos\varphi.$$

Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{AB},\ \overline{AC})}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{3 \cdot 2 + (-4) \cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{-2}{5 \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Скалярное произведение можно применять для вычисления работы. Как известно из курса физики, работа P по перемещению материальной точки под действием постоянной силы $\overline{F}$ равна

$$P = \left|\overline{F}\right| |\bar{s}| \cdot \cos\left(\overline{F}^\wedge \bar{s}\right),$$

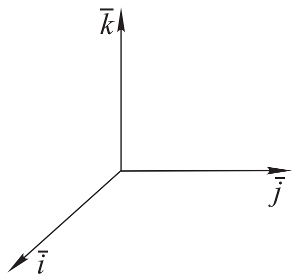
где $\bar{s}$ — вектор перемещения. Поэтому $P = \left(\overline{F},\ \bar{s}\right)$.

Пример 6. Найти работу силы $\overline{F} = (-5,\ -2,\ 1)$ по перемещению материальной точки из положения $A(3,0,2)$ в положение $B(1,2,5)$.

Решение. Вектор перемещения $\bar{s} = \overline{AB} = (-2,\ 2,\ 3)$. Вычисляем работу с помощью скалярного произведения.

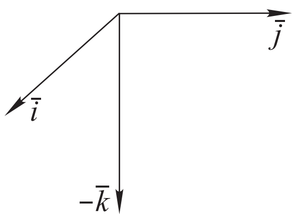
$$P = \left(\overline{F},\ \bar{s}\right) = (-5)(-2) + (-2)\cdot 2 + 1\cdot 3 = 10 - 4 + 3 = 9.$$

4.3. Векторное произведение



Напомним, что в качестве основного базиса в пространстве $\overline{\mathbb{R}^3}$ мы выбрали векторы $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$, взаимно расположенные так, как показано на рисунке.

Отметим особенность такого расположения. Если посмотреть из конца 3-го вектора ($\bar{k}$), то поворот от 1-го ко 2-му (от $\bar{i}$ к $\bar{j}$) виден как поворот против часовой стрелки. Такая тройка векторов называется ***правой***.



Примером ***левой*** тройки может служить тройка $\bar{i},\ \bar{j},\ -\bar{k}$.

Здесь из конца 3-го вектора поворот от 1-го ко 2-му виден как поворот по часовой стрелке. Заметим, что любые правые ортонормированные базисы можно совместить друг с другом, поворачивая их в пространстве. Но правый и левый базисы совместить с помощью поворотов нельзя.

Мы выбрали в качестве базиса правую тройку, поэтому и соответствующая система координат называется правой. Говорят ещё, что в пространстве выбрана ***правая ориентация***.

Определим теперь ещё одно действие с векторами — векторное произведение.

Пусть $\bar{a},\ \bar{b}$ — векторы из $\overline{\mathbb{R}^3}$. Их ***векторным произведением*** называется новый вектор, обозначаемый $[\bar{a},\ \bar{b}]$, такой, что:

1) $\left|\,[\bar{a},\ \bar{b}]\,\right| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b})$;

2) $[\bar{a},\ \bar{b}]$ перпендикулярен и $\bar{a}$, и $\bar{b}$;

3) векторы $\bar{a},\ \bar{b},\ [\bar{a},\ \bar{b}]$ образуют правую тройку.

Обратим внимание: названия действий с векторами имеют содержательный смысл: скалярное произведение векторов — это скаляр (число), векторное произведение — вектор. В пункте 1) определения задается длина этого вектора, в пунктах 2), 3) определяется направление (если, конечно, вектор $[\bar{a},\ \bar{b}]$ ненулевой). Иногда вместо $[\bar{a},\ \bar{b}]$ для векторного произведения используется обозначение $\bar{a}\times\bar{b}$.

Изучим свойства векторного произведения.

1) Длина векторного произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Действительно, по определению, $|[\bar{a},\ \bar{b}]| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\hat{\ }\bar{b})$. Но из элементарной геометрии известно, что по этой же формуле вычисляется площадь параллелограмма.

2) $[\bar{a},\ \bar{b}] = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Действительно, синус угла между коллинеарными векторами равен 0.

3) $[\bar{b},\ \bar{a}] = -[\bar{a},\ \bar{b}]$. Это свойство называется ***антикоммутативностью***.

Проверим, что вектор $-[\bar{a},\ \bar{b}]$ удовлетворяет всем пунктам определения векторного произведения векторов $\bar{b}$ и $\bar{a}$. Его длина

$$|-[\bar{a},\ \bar{b}]| = |[\bar{a},\ \bar{b}]| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\hat{\ }\bar{b}) = |[\bar{b},\ \bar{a}]|.$$

Ясно, что $-[\bar{a},\ \bar{b}]$ перпендикулярен и $\bar{a}$, и $\bar{b}$. Далее, тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $[\bar{a},\ \bar{b}]$ правая (по определению $[\bar{a},\ \bar{b}]$). Значит, тройка $\bar{b}$, $\bar{a}$, $[\bar{a},\ \bar{b}]$ — левая. Но тогда тройка $\bar{b}$, $\bar{a}$, $-[\bar{a},\ \bar{b}]$ — правая, что и требовалось.

4) $[\lambda\bar{a},\ \bar{b}] = \lambda[\bar{a},\ \bar{b}], \quad [\bar{a},\ \lambda\bar{b}] = \lambda[\bar{a},\ \bar{b}]$.

Докажем первое соотношение; второе из него легко получить, используя антикоммутативность. Пусть $\lambda > 0$. Тогда $|[\lambda\bar{a},\ \bar{b}]| = |\lambda\bar{a}|\ |\bar{b}|\sin(\lambda\bar{a}\hat{\ }\bar{b}) = |\lambda[\bar{a},\ \bar{b}]|$. Далее, так как $\lambda\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}$, то $[\lambda\bar{a},\ \bar{b}] \uparrow\uparrow [\bar{a},\ \bar{b}]$ и $\lambda[\bar{a},\ \bar{b}] \uparrow\uparrow [\bar{a},\ \bar{b}]$. Поэтому у векторов $[\lambda\bar{a},\ \bar{b}]$ и $\lambda[\bar{a},\ \bar{b}]$ совпадают и длины, и направления. Следовательно, $[\lambda\bar{a},\ \bar{b}] = \lambda[\bar{a},\ \bar{b}]$.

Если $\lambda < 0$, то оба вектора $[\lambda\bar{a},\ \bar{b}]$, $\lambda[\bar{a},\ \bar{b}]$ имеют равные длины и противоположное направление по сравнению с $[\bar{a},\ \bar{b}]$. Поэтому они равны.

5) $[\bar{a}+\bar{b},\ \bar{c}] = [\bar{a},\ \bar{c}] + [\bar{b},\ \bar{c}]$. Доказательство этого свойства опускаем.

Выведем формулу для вычисления векторного произведения векторов, заданных своими координатами. Пусть $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$. Тогда, используя свойства, вычисляем:

$$\begin{aligned}
[\bar{a},\ \bar{b}] &= [x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k},\quad x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}] = \\
&= x_1x_2[\bar{i},\ \bar{i}] + x_1y_2[\bar{i},\ \bar{j}] + x_1z_2[\bar{i},\ \bar{k}] + y_1x_2[\bar{j},\ \bar{i}] + y_1y_2[\bar{j},\ \bar{j}] + y_1z_2[\bar{j},\ \bar{k}] + \\
&+ z_1x_2[\bar{k},\ \bar{i}] + z_1y_2[\bar{k},\ \bar{j}] + z_1z_2[\bar{k},\ \bar{k}] = x_1y_2[\bar{i},\ \bar{j}] + x_1z_2[\bar{i},\ \bar{k}] - y_1x_2[\bar{i},\ \bar{j}] + \\
&+ y_1z_2[\bar{j},\ \bar{k}] - z_1x_2[\bar{i},\ \bar{k}] - z_1y_2[\bar{j},\ \bar{k}].
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что $[\bar{i},\ \bar{j}] = \bar{k}$. Действительно, $|\bar{k}| = |\bar{i}|\cdot|\bar{j}|\cdot\sin 90^\circ = 1$, вектор $\bar{k}$ перпендикулярен $\bar{i}$ и $\bar{j}$, тройка $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — правая. Аналогично: $[\bar{i},\ \bar{k}] = -\bar{j}$. Минус здесь поставлен потому, что тройка $\bar{i}$, $\bar{k}$, $\bar{j}$ — левая, значит, $\bar{i}$, $\bar{k}$, $-\bar{j}$ — правая. Наконец, $[\bar{j},\ \bar{k}] = \bar{i}$ (тройка $\bar{j}$, $\bar{k}$, $\bar{i}$ — правая).

Продолжаем вычисления:

$$[\bar{a},\ \bar{b}] = x_1y_2\bar{k} - x_1z_2\bar{j} - y_1x_2\bar{k} + y_1z_2\bar{i} + z_1x_2\bar{j} - z_1y_2\bar{i} = \\ = (y_1z_2 - z_1y_2)\bar{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\bar{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\bar{k}.$$

Требуемая формула получена. Однако её можно записать в более удобном, хорошо запоминающемся виде. Заметим, что выражение $(y_1z_2 - z_1y_2)$ можно представить в виде определителя:

$$y_1z_2 - z_1y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Поэтому можно записать:

$$[\bar{a},\ \bar{b}] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k}.$$

Полученное выражение является разложением по 1-й строке «формального определителя»

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Вспомните формулу разложения определителя по строке и убедитесь, что так оно и есть. Определитель мы назвали «формальным» потому, что в его первой строке — не числа, а векторы. Но ***по форме*** и способу вычисления — похоже на определитель. Окончательно получим:

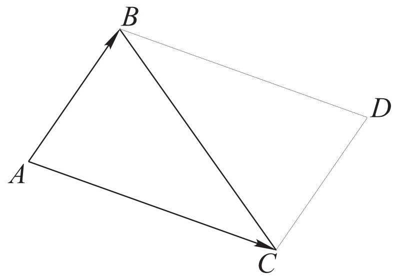
$$[\bar{a},\ \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 7. Найти векторное произведение векторов $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$.

Решение.

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \bar{k} = 5\bar{i} + 13\bar{j} + 7\bar{k}.$$

Пример 8. Найти площадь треугольника, если его вершины находятся в точках $A(1, -3, 1)$, $B(-2, 0, 5)$, $C(4, -3, 2)$.



Решение. Построим параллелограмм на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. Очевидно, площадь треугольника в 2 раза меньше площади параллелограмма. А эта площадь равна модулю (длине) векторного произведения векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. Реализуем этот план решения задачи. Найдём координаты векторов: $\overline{AB} = (-3, 3, 4)$, $\overline{AC} = (3, 0, 1)$. Найдём их векторное произведение:

$$[\overline{AB},\ \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\bar{i} + 15\bar{j} - 9\bar{k}.$$

Наконец, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}|[\overline{AB},\ \overline{AC}]| = \dfrac{1}{2}\sqrt{9+225+81} = \dfrac{1}{2}\sqrt{315}.$

В механике используется величина $\left[\overline{AM}_0,\ \overline{F}\right]$, называемая ***моментом силы*** $\overline{F}$, приложенной к точке M_0, относительно точки A.

Пример 9. Найти момент силы $\overline{F} = (3,\ 0,\ 1)$ относительно точки $A(2, 2, -5)$, если сила приложена к точке $M_0(2, 1, 1)$.

Решение. $\overline{AM}_0 = (0,\ -1,\ 6)$. Момент силы вычисляем с помощью векторного произведения:

$$\left[\overline{AM}_0,\ \overline{F}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 18\bar{j} + 3\bar{k}.$$

4.4. Смешанное произведение

В операции смешанного произведения участвуют 3 вектора. ***Смешанным произведением*** векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число

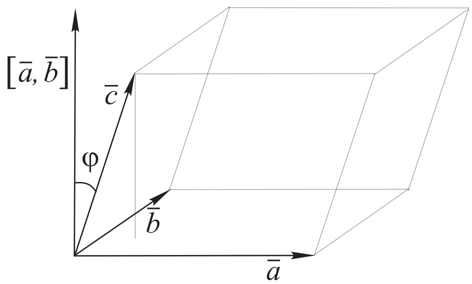
$$([\bar{a},\ \bar{b}],\ \bar{c}),$$

т. е. сначала вычисляется векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, затем полученный вектор скалярно умножается на $\bar{c}$.

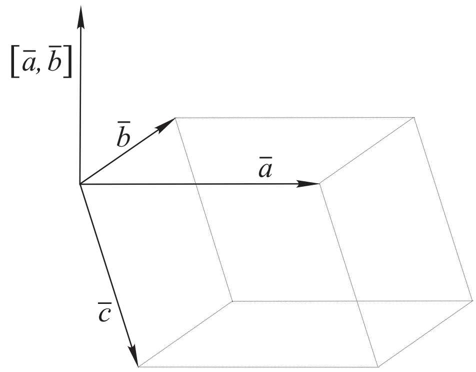
Рассмотрим свойства новой операции.

1) Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ с точностью до знака равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, причём положительно, если $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — правая тройка и отрицательно, если левая.

Доказательство сопроводим рисунком.



Тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — правая.



Тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — левая.

Как известно, объём параллелепипеда V вычисляется как произведение площади основания на высоту. Основание — параллелограмм, построенный на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, его площадь равна $|[\bar{a},\ \bar{b}]|$. Высоту находим из прямоугольного треугольника: $H = |\bar{c}| \cos\varphi$, где φ — угол между высотой и ребром $\bar{c}$. Итак, $V = |[\bar{a},\ b]|\ |\bar{c}| \cdot \cos\varphi$. В случае правой тройки φ является одновременно и углом между $\bar{c}$ и $[\bar{a},\ \bar{b}]$. Поэтому $V = |[\bar{a},\ \bar{b}]|\ |\bar{c}|\ \cos\varphi = ([\bar{a},\ \bar{b}],\ \bar{c})$. В случае левой тройки угол между $\bar{c}$ и $[\bar{a},\ \bar{b}]$ равен $\pi - \varphi$. Поэтому

$$V = |[\bar{a},\ \bar{b}]|\ |\bar{c}|\ \cos\varphi = -|[\bar{a},\ \bar{b}]|\ |\bar{c}|\ \cos(\pi - \varphi) = -([\bar{a},\ \bar{b}],\ \bar{c}),$$

что и требовалось доказать.

2) $([\bar{a},\ \bar{b}],\ \bar{c}) = 0\ \Leftrightarrow$ векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны.

Действительно, если $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны, то $[\bar{a},\ \bar{b}]$ перпендикулярен плоскости, где все они лежат. Значит, $([\bar{a},\ \bar{b}],\ \bar{c}) = 0$. Если же $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ некомпланарны, то соответствующий параллелепипед имеет ненулевой объём, т. е. $([\bar{a},\ \bar{b}],\ \bar{c}) \neq 0$.

3) Циклические перестановки не меняют смешанного произведения:

$$([\bar{a},\ \bar{b}],\ \bar{c}) = ([\bar{c}, \bar{a}],\ \bar{b}) = ([\bar{b},\ \bar{c}],\ \bar{a}).$$

Действительно, объём параллелепипеда не меняется, ориентация тройки при циклической перестановке сохраняется.

4) $([\bar{a},\ \bar{b}],\ \bar{c}) = (\bar{a},\ [\bar{b},\ \bar{c}])$.

Доказательство. Используем коммутативность скалярного произведения и только что доказанное свойство 3):

$$(\bar{a},\ [\bar{b}, \bar{c}]) = ([\bar{b},\ \bar{c}],\ \bar{a}) = ([\bar{a},\ \bar{b}],\ \bar{c}),$$

что и требовалось. Это свойство позволяет не писать квадратные скобки внутри круглых и обозначить смешанное произведение так:

$$(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}).$$

(Используется также обозначение $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$).

5) При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак.

Это свойство очевидно, так как меняется ориентация тройки векторов.

Выведем формулу для вычисления $(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c})$, если векторы заданы своими координатами. Пусть

$$\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},\quad \bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k},\quad \bar{c}=x_3\bar{i}+y_3\bar{j}+z_3\bar{k}.$$

Используя формулы для скалярного и векторного произведения (см. 4.2, 4.3), получим:

$$\begin{aligned}(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}) &= ([\bar{a},\ \bar{b}],\ \bar{c}) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\bar{k},\quad x_3\bar{i}+y_3\bar{j}+z_3\bar{k}\right) = \\ &= x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Пример 10. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах

$$\bar{a}=\bar{i}+\bar{k},\quad \bar{b}=(3,\ 2,\ 1),\quad \bar{c}=(2,\ -3,\ 2).$$

Решение. Вычислим смешанное произведение:

$$(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c})=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0\end{vmatrix}=0-6=-6.$$

Значит, объём $V=|-6|=6$.

Пример 11. Являются ли компланарными векторы

$$\bar{a}=(2,\ 7,\ 4),\quad \bar{b}=(3,\ -2,\ 1),\quad \bar{c}=(0,\ 2,\ 5)\,?$$

Решение.

$$\begin{aligned}(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c})=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix} &= -2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -2\end{vmatrix}= \\ &= -2\cdot(-10)+5(-25)=20-125=-105\neq 0.\end{aligned}$$

Векторы не компланарны.

4.5. Геометрическая терминология для пространства $\mathbb{R}^n$

В разделе 3.4 предыдущей главы мы рассматривали пространство $\mathbb{R}^n$, элементы которого — упорядоченные наборы из n чисел:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Было показано, что любое n-мерное линейное пространство в определённом смысле похоже на $\mathbb{R}^n$ (точнее — изоморфно $\mathbb{R}^n$). Ясно, что $\mathbb{R}^n$ является обобщением нашего трёхмерного пространства $\mathbb{R}^3$. С другой стороны, для $\mathbb{R}^3$ построено изоморфное ему линейное пространство $\overline{\mathbb{R}^3}$, которое служит для $\mathbb{R}^3$ хорошей геометрической интерпретацией. Но при $n > 3$ элементы $\mathbb{R}^n$ нельзя изобразить направленными отрезками, нет хорошего геометрического представления. Здесь мы попытаемся перенести некоторые понятия, изученные нами в $\mathbb{R}^3$, на более общий случай пространства $\mathbb{R}^n$.

Важнейшим понятием является скалярное произведение. Конечно, нельзя определить его так же, как в $\mathbb{R}^3$: не введено понятие длины n-мерного вектора, неясно, что такое угол между n-мерными векторами. Однако обобщение возможно.

Скалярным произведением элементов

$$\bar{x} = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n), \quad \bar{y} = (y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n)$$

линейного пространства $\mathbb{R}^n$ называется число

$$(\bar{x},\ \bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ \ldots + x_ny_n.$$

Ясно, что это определение обобщает понятие скалярного произведения в $\mathbb{R}^3$. Легко проверить и справедливость тех же свойств:

1) $(\bar{x},\ \bar{x}) \geq 0$, причём если $\bar{x} \neq \bar{0}$, то $(\bar{x},\ \bar{x}) > 0$;
2) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;
3) $(\lambda\bar{x},\ \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$;
4) $(\bar{x} + \bar{y},\ \bar{z}) = (\bar{x},\ \bar{z}) + (\bar{y},\ \bar{z})$.

Теперь можно ввести понятие перпендикулярности: векторы $\bar{x},\ \bar{y}\ \in \mathbb{R}^n$ называются ***перпендикулярными***, если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Модулем (или ***длиной***) вектора $\bar{x} = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ называется число

$$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ \ldots + x_n^2}.$$

Аналогом нашего основного базиса $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ является базис

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= (1,\ 0,\ \ldots\ ,\ 0), \\ \bar{e}_2 &= (0,\ 1,\ \ldots\ ,\ 0), \\ \ldots &\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \bar{e}_n &= (0,\ 0,\ \ldots\ ,\ 1). \end{aligned}$$

Ясно, что модуль каждого из этих векторов равен 1 и они попарно перпендикулярны, поэтому $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ldots,\ \bar{e}_n$ — ортонормированный базис.

Введём, наконец, понятие угла между n-мерными векторами. В $\mathbb{R}^3$ для вычисления угла использовалась формула: $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{x},\ \bar{y})}{|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|}$. Однако чтобы использовать эту формулу для определения угла в $\mathbb{R}^n$, нужно убедиться, что выражение в правой части не может быть по абсолютной величине больше 1.

Теорема 4 (*неравенство Коши–Буняковского*).

Для любых векторов $\bar{x},\ \bar{y} \in \mathbb{R}^n \quad |(\bar{x},\ \bar{y})| \ \leq\ |\bar{x}|\cdot|\bar{y}|$.

Доказательство. Пусть λ — некоторое действительное число. Проведём вычисления:

$$(\bar{x}+\lambda\bar{y},\quad \bar{x}+\lambda\bar{y}) = (\bar{x},\ \bar{x}) + 2\lambda(\bar{x},\ \bar{y}) + \lambda^2(\bar{y},\ \bar{y}).$$

Здесь мы использовали свойства скалярного произведения. Рассмотрим полученное выражение как функцию (квадратный трёхчлен) от λ. Другими словами, считаем, что $\bar{x},\ \bar{y}$ — данные нам векторы (и значит, $(\bar{x},\ \bar{x})$, $(\bar{x},\ \bar{y})$, $(\bar{y},\ \bar{y})$ — данные, фиксированные числа), а λ может принимать любые значения. По свойству скалярного произведения $(\bar{x}+\lambda\bar{y},\quad \bar{x}+\lambda\bar{y}) \geq 0$ для любого λ. Значит, для любого λ

$$(\bar{x},\ \bar{x}) + 2\lambda(\bar{x},\ \bar{y}) + \lambda^2(\bar{y},\ \bar{y}) \geq 0,$$

т. е. график этой функции (парабола) лежит выше оси абсцисс (возможно, касаясь её). Поэтому дискриминант квадратного трёхчлена не может быть положительным:

$$D = (2(\bar{x},\ \bar{y}))^2 - 4\cdot(\bar{x},\ \bar{x})\cdot(\bar{y},\ \bar{y}) \leq 0.$$

Отсюда:

$$(\bar{x},\ \bar{y})^2 \leq (\bar{x},\ \bar{x})\cdot(\bar{y},\ \bar{y}),\quad |(\bar{x},\ \bar{y})| \ \leq\ \sqrt{(\bar{x},\ \bar{x})}\cdot\sqrt{(\bar{y},\ \bar{y})},\quad |(\bar{x},\ \bar{y})| \ \leq\ |\bar{x}|\cdot|\bar{y}|,$$

что и требовалось.

Итак, доказано, что всегда $\left|\dfrac{(\bar{x},\ \bar{y})}{|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|}\right| \leq 1$. Поэтому существует угол φ такой, что $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{x},\ \bar{y})}{|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|}$. Этот угол и называется ***углом между векторами*** $\bar{x},\ \bar{y}$.

Пример 12. Найти угол между векторами $\bar{x} = (1, 0, 1, 0)$, $\bar{y} = (1, 1, 1, 1)$ в пространстве $\mathbb{R}^4$.

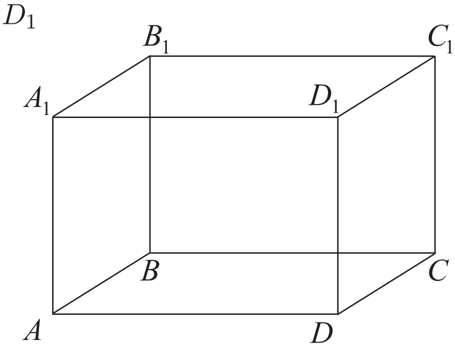
Решение.

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{x},\ \bar{y})}{|\bar{x}|\ \cdot\ |\bar{y}|} = \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1}{\sqrt{1+0+1+0}\cdot\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $\varphi = 45^\circ$.

4.6. Задачи с решениями

1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ обозначим $\bar{a} = \overline{AA_1}$, $\bar{b} = \overline{AB}$, $\bar{c} = \overline{AD}$. Выразить через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ диагонали параллелепипеда $\overline{AC_1}$, $\overline{A_1C}$ и диагонали граней $\overline{B_1C}$, $\overline{DC_1}$.



Решение. Сделаем чертёж. Пользуясь правилом сложения векторов, получаем:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \bar{b} + \bar{c},$$
$$\overline{AC_1} = \overline{AA_1} + \overline{AC} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}.$$

Из того же треугольника AA_1C получаем: $\overline{A_1C} = \overline{AC} - \overline{AA_1} = \bar{b} + \bar{c} - \bar{a}$.

Чтобы найти $\overline{B_1C}$, заметим, что $\overline{B_1C} = \overline{A_1D}$, так как у этих векторов совпадают и длины, и направления. Поэтому

$$\overline{B_1C} = \overline{A_1D} = \overline{AD} - \overline{AA_1} = \bar{c} - \bar{a}.$$

Аналогично: $\overline{DC_1} = \overline{AB_1} = \overline{AA_1} + \overline{AB} = \bar{a} + \bar{b}$.

2. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если его начало и конец находятся в точках $A(7, 6)$, $B(2 - 6)$.

Решение. Так как каждая точка задана двумя координатами, то рассматривается вектор на плоскости. Находим его координаты, вычитая из координат точки B (конца вектора) координаты точки A (начала вектора): $\overline{AB} = (2-7, -6-6) = (-5, -12)$. Находим длину: $|\overline{AB}\,| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$, направляющие косинусы: $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$, $\cos\beta = -\dfrac{12}{13}$.

3. Найти координату z вектора $\bar{a} = (1, -3, z)$, если известно, что она отрицательна, а модуль $|\bar{a}\,| = \sqrt{91}$. Где окажется конец вектора $\bar{a}$, если его отложить из точки $M(5, -2, 1)$?

Решение. По условию, $|\bar{a}| = \sqrt{1 + 9 + z^2} = \sqrt{91}$. Значит, $z^2 = 81$, т. е. $z = -9$. Поэтому $\bar{a} = (1, -3, -9)$. Если $\bar{a} = \overline{MN}$, где $N(x_N, y_N, z_N)$, то $(1, -3, -9) = (x_N - 5, y_N - (-2), z_N - 1)$. Поэтому $x_N = 6$, $y_N = -5$, $z_N = -8$.

4. Найти расстояние между точками $A(5, -2, 4)$ и $B(-1, 0, 6)$.

Решение. Расстояние равно длине вектора $\overline{AB}$. Найдём:

$$\overline{AB} = (-6, 2, 2), \quad |\overline{AB}| = \sqrt{36 + 4 + 4} = \sqrt{44}.$$

5. При каких p, q векторы $\bar{a} = (2, p, -1)$, $\bar{b} = q\bar{i} + 9\bar{j} + 3\bar{k}$ будут коллинеарными?

Решение. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ коллинеарны в том и только том случае, когда существует число λ: $\bar{a} = \lambda\bar{b}$. В координатной записи: $(a_x, a_y, a_z) = (\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z)$. Другими словами, координаты должны быть пропорциональны: $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$. В нашем упражнении: $\dfrac{2}{q} = \dfrac{p}{9} = \dfrac{-1}{3}$. Отсюда находим: $p = -3$, $q = -6$.

6. Найти скалярное произведение векторов $5\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{a} + 3\bar{b}$, если известно:

$$|\bar{a}| = 2, \quad |\bar{b}| = 1, \quad (\bar{a}\,{}^\wedge\bar{b}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Решение. Пользуемся свойствами скалярного произведения:

$$(5\bar{a} - 2\bar{b},\ \bar{a} + 3\bar{b}) = (5\bar{a},\ \bar{a}) + (5\bar{a},\ 3\bar{b}) + (-2\bar{b},\ \bar{a}) + (-2\bar{b},\ 3\bar{b}) =$$
$$= 5(\bar{a},\ \bar{a}) + 15(\bar{a},\ \bar{b}) - 2(\bar{b},\ \bar{a}) - 6(\bar{b},\ \bar{b}) = 5(\bar{a},\ \bar{a}) + 13(\bar{a},\ \bar{b}) - 6(\bar{b},\ \bar{b}).$$

Вычислим отдельно:

$$\bar{a}^2 = (\bar{a},\ \bar{a}) = |\bar{a}|\ |\bar{a}|\ \cos 0 = 4;$$
$$\bar{b}^2 = (\bar{b},\ \bar{b}) = |\bar{b}|\ |\bar{b}|\ \cos 0 = 1;$$
$$(\bar{a},\ \bar{b}) = |\bar{a}|\ |\bar{b}|\ \cos\frac{2\pi}{3} = 2 \cdot 1 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1.$$

Подставляя в полученное выше выражение, находим:

$$(5\bar{a} - 2\bar{b},\ \bar{a} + 3\bar{b}) = 5 \cdot 4 + 13(-1) - 6 \cdot 1 = 1.$$

7. Найти косинус угла φ между векторами $\bar{p} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{q} = \bar{a} - 3\bar{b}$, если известно, что $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, а векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ перпендикулярны.

Решение. Вычислим скалярное произведение $(\bar{p},\ \bar{q})$, учитывая, что $(\bar{a},\ \bar{b}) = 0$:

$$(\bar{p},\ \bar{q}) = (\bar{a} + 2\bar{b},\ \bar{a} - 3\bar{b}) = (\bar{a},\ \bar{a}) - 3(\bar{a},\ \bar{b}) + 2(\bar{b},\ \bar{a}) - 6(\bar{b},\ \bar{b}) =$$
$$= (\bar{a},\ \bar{a}) - 6(\bar{b},\ \bar{b}) = 9 - 6 \cdot 4 = -15.$$

Найдём теперь длины векторов $\bar{p}$, $\bar{q}$:

$$|\bar{p}|^2 = (\bar{p},\ \bar{p}) = (\bar{a} + 2\bar{b},\ \bar{a} + 2\bar{b}) = (\bar{a},\ \bar{a}) + 4(\bar{b},\ \bar{b}) = 9 + 4 \cdot 4 = 25,$$
$$|\bar{q}|^2 = (\bar{q},\ \bar{q}) = (\bar{a} - 3\bar{b},\ \bar{a} - 3\bar{b}) = (\bar{a},\ \bar{a}) + 9(\bar{b},\ \bar{b}) = 9 + 9 \cdot 4 = 45.$$

Поэтому $|\bar{p}| = 5$, $|\bar{q}| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Находим косинус угла:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{p},\ \bar{q})}{|\bar{p}|\ |\bar{q}|} = \frac{-15}{5 \cdot 3\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

8. Определить, при каком значении α перпендикулярны векторы

$$\bar{p} = 3\bar{i} - 5\bar{j} + \bar{k}, \quad \bar{q} = 2\bar{i} + \alpha\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Решение. Векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда $(\bar{p},\ \bar{q}) = 0$. Так как $\bar{p}$, $\bar{q}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то скалярное произведение вычисляется как сумма произведений соответствующих координат:

$$(\bar{p},\ \bar{q}) = 3 \cdot 2 + (-5) \cdot \alpha + 1 \cdot 4 = 6 - 5\alpha + 4 = 10 - 5\alpha = 0.$$

Поэтому $\alpha = 2$.

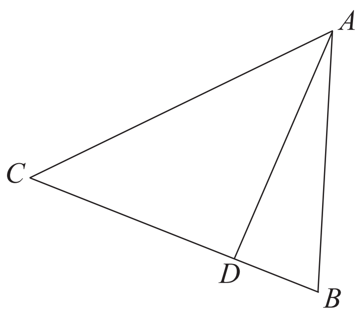
9. Найти проекцию вектора $\bar{a} = (7,\ -3,\ -8)$ на вектор $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$.

Решение. Так как $\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$, то, вычисляя $\cos\varphi$ через скалярное произведение, получим:

$$\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi = |\bar{a}| \cdot \frac{(\bar{a},\ \bar{b})}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|} = \frac{(\bar{a},\ \bar{b})}{|\bar{b}|} = \frac{7 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + (-8)(-2)}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{27}{3} = 9.$$

10. Найти высоту AD треугольника ABC, если его вершины находятся в точках $A(4,-2)$, $B(6,12)$, $C(-2,6)$.

Решение. Так как каждая точка задана двумя координатами, то треугольник ABC расположен на плоскости XOY. Поэтому и векторы, лежащие в этой плоскости, можно либо задавать двумя координатами, либо считать, что третья координата равна 0.



Сделаем схематический чертёж. Как известно, площадь треугольника можно вычислить по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\overline{BC}| \ \cdot\ |\overline{AD}|.$$

Значит, чтобы найти $|\overline{AD}|$, нам нужно найти $|\overline{BC}|$ и S. Основание $|\overline{BC}|$ найти легко:

$$\overline{BC} = (-2-6,\ 6-12) = (-8,\ -6);$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{64+36} = 10.$$

Площадь S найдём с помощью векторного произведения: $S = \dfrac{1}{2}|[\overline{AB},\ \overline{AC}]|$. Так как

$$\overline{AB} = (6-4,\ 12-(-2)) = (2,\ 14) = (2,\ 14,\ 0),$$
$$\overline{AC} = (-2-4,\ 6-(-2)) = (-6,\ 8) = (-6,\ 8,\ 0),$$

то

$$[\overline{AB},\ \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 14 & 0 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 14 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}\bar{k} = (16+84)\,\bar{k} = 100\bar{k}.$$

Значит, $S = \dfrac{1}{2}|100\bar{k}| = 50$. Находим высоту: $|\overline{AD}| = \dfrac{2S}{|\overline{BC}|} = \dfrac{2 \cdot 50}{10} = 10$.

11. Найти вектор $\bar{x}$, перпендикулярный данным векторам $\bar{a} = (-2,\ 1,\ 1)$, $\bar{b} = (4,\ 0,\ 3)$, если длина $\bar{x}$ равна $\sqrt{5}$.

Решение. Вычислим векторное произведение:

$$[\bar{a},\ \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\bar{i} + 10\bar{j} - 4\bar{k}.$$

Этот вектор, как известно, перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Найдём его длину: $|[\bar{a},\ \bar{b}]| = \sqrt{9 + 100 + 16} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Видим, что $[\bar{a},\ \bar{b}]$ в 5 раз длиннее требуемого. Поэтому $\bar{x} = \dfrac{1}{5}[\bar{a},\ \bar{b}] = \dfrac{3}{5}\bar{i} + 2\bar{j} - \dfrac{4}{5}\bar{k}$. Ясно, что есть ещё один вектор с таким свойством: $-\bar{x} = -\dfrac{3}{5}\bar{i} - 2\bar{j} + \dfrac{4}{5}\bar{k}$. Оба вектора удовлетворяют всем требованиям задачи.

12. Лежат ли точки $M_1(1, 0, 4)$, $M_2(-3, 1, 2)$, $M_3(2, 2, 5)$, $M_4(1, 3, 4)$ в одной плоскости?

Решение. Рассмотрим 3 вектора:

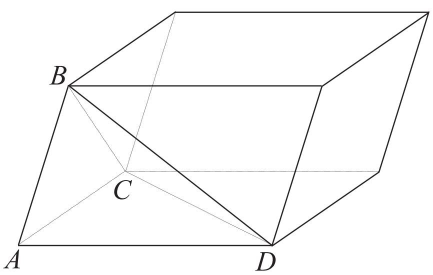
$$\overline{M_1M_2} = (-4,\ 1,\ -2), \quad \overline{M_1M_3} = (1,\ 2,\ 1), \quad \overline{M_1M_4} = (0,\ 3,\ 0).$$

Точки M_i лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, $\overline{M_1M_4}$ компланарны. Для проверки компланарности используем смешанное произведение:

$$(\overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3},\ \overline{M_1M_4}) = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2) = 6.$$

Так как $(\overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3},\ \overline{M_1M_4}) \neq 0$, то векторы не компланарны. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 не лежат в одной плоскости.

13. Найти объём пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(2, -1, 0)$, $B(4, 1, 1)$, $C(2, 2, 3)$, $D(1, 3, 1)$.



Решение. Сделаем чертёж, построив параллелепипед на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Как известно из школьного курса геометрии, объём параллелепипеда вычисляется по формуле: $V_1 = S_1 \cdot H$, где S_1 — площадь основания, H — высота. Объём пирамиды $ABCD$ можно вычислить по формуле: $V_2 = \dfrac{1}{3}S_2 \cdot H$, где S_2 — площадь основания пирамиды, H — высота. Так как высота у пирамиды и параллелепипеда общая, а площади оснований различаются в

2 раза: $S_2 = \dfrac{1}{2}S_1$, то получаем: $V_2 = \dfrac{1}{6}V_1$, т. е. объём пирамиды в 6 раз меньше объёма параллелепипеда.

Объём параллелепипеда найдём с помощью смешанного произведения.

$$\overline{AB} = (2,\ 2,\ 1), \quad \overline{AC} = (0,\ 3,\ 3), \quad \overline{AD} = (-1,\ 4,\ 1).$$

$$(\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2(-9) - 3 = -21.$$

Значит $V_1 = |-21| = 21$. Поэтому объём пирамиды $V_2 = \dfrac{1}{6}V_1 = \dfrac{21}{6} = 3,5$.

4.7. Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти длину и направляющие косинусы вектора $3\bar{a} - 2\bar{b}$, если

$$\bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}, \quad \bar{b} = 7\bar{j} + 3\bar{k}.$$

2. Дан вектор $\bar{a} = (-3,\ 2,\ -6)$. Найти вектор $\bar{x}$, коллинеарный данному, направленный в противоположную сторону, если его модуль равен 21.

3. В треугольнике ABC найти длины всех сторон, косинусы внутренних углов и площадь. Вершины треугольника находятся в точках:

а) $A(3,-1,7)$, $B(5,0,5)$, $C(8,2,11)$;

б) $A(7,6)$, $B(9,4)$, $C(4,2)$ (треугольник лежит в плоскости XOY).

4. Разложить вектор $\bar{x}$ по базису, образованному векторами $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3$:

а) $\bar{x} = -9\bar{i} - 8\bar{j} - 4\bar{k}$; $\quad \bar{e}_1 = (3,-1,2), \bar{e}_2 = (-2,5,-1), \bar{e}_3 = (0,2,3)$;

б) $\bar{x} = (8,4,-1)$; $\quad \bar{e}_1 = (1,5,4), \bar{e}_2 = (3,0,1), \bar{e}_3 = (2,-2,-3)$.

5. Найти вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = 3\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ и удовлетворяющий условию: $(\bar{x},\ \bar{a}) = -38$.

6. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} + 2\bar{b}$, если известно, что $|\bar{a}| = 2,\ |\bar{b}| = 3$, угол между векторами $\bar{a},\ \bar{b}$ составляет 120°.

7. Найти проекцию вектора $\bar{p}$ на направление вектора $\bar{q}$, если

а) $\bar{p} = (3,-5)$, $\quad \bar{q} = (4,3)$;

б) $\bar{p} = 3\bar{i} - \bar{j} + 7\bar{k}$, $\quad \bar{q} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$.

8. Пусть $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$, причём $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$. Вычислить

$$(\bar{a},\bar{b}) + (\bar{b},\bar{c}) + (\bar{c},\bar{a}).$$

9. Вычислить длину вектора $6\bar{p} - \bar{q}$, если $|\bar{p}| = 2\sqrt{2},\ |\bar{q}| = 3$, а угол между векторами $\bar{p},\ \bar{q}$ равен 45°.

10. Найти векторное произведение векторов $\bar{p} = 5\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{q} = 3\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$.

11. Найти вектор $\bar{x}$, перпендикулярный векторам $\bar{a} = (2,-2,-6)$, $\bar{b} = (0,1,3)$, если известно, что он составляет с осью OY тупой угол, а его длина равна длине $\bar{b}$.

12. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{j} - \bar{k}$. Найти вектор $\bar{x}$, если $\bar{x} \perp \bar{a}$, $\bar{x} \perp \bar{b}$, $(\bar{x}, \bar{c}) = 2$.

13. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах:
а) $\bar{p} = 4\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{q} = -2\bar{i} + \bar{j}$; б) $\bar{p} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{q} = 3\bar{i} + 5\bar{j} + 2\bar{k}$.

14. Найти длину медианы AM и высоты AD в треугольнике ABC, если известно, что $\overline{AB} = 5\bar{i} + 2\bar{j}$, $\overline{BC} = 2\bar{i} - 4\bar{j}$.

15. Найти длину высоты CD в треугольнике, вершины которого находятся в точках $A(2,7)$, $B(5,3)$, $C(6,8)$.

16. Найти смешанное произведение векторов

$$\bar{a} = (7,\ 0,\ 1), \quad \bar{b} = (-2,\ 4,\ 4), \quad \bar{c} = (1,\ 5,\ 1).$$

17. Будут ли компланарны векторы

$$\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}, \quad \bar{b} = 7\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}, \quad \bar{c} = \bar{i} - 9\bar{j} + 18\bar{k}?$$

18. Вычислить объём пирамиды, вершины которой находятся в точках

$$A(1,1,1), B(4,2,-1), C(-3,1,4), D(2,6,0).$$

19. Найти высоту AK треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(4,-2,7)$, $B(1,-1,6)$, $C(7,7,1)$, $D(3,0,4)$.

4.8. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, чтобы

$$\bar{a} + \bar{b} \parallel \bar{a} - \bar{b}?$$

Указать номер правильного ответа: 1) $|\bar{a}| = |\bar{b}|$; 2) $\bar{a}$, $\bar{b}$ перпендикулярны; 3) $\bar{a} \parallel \bar{b}$; 4) только если $\bar{a}$, $\bar{b}$ нулевые.

2. Найти $\cos\alpha + \cos\gamma$, где α и γ — углы, образованные вектором $8\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$ с осями OX, OZ.

3. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} + \bar{b}$ и $2\bar{a}$, если $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, угол между векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ равен $\dfrac{\pi}{3}$.

4. Найти проекцию на ось OY вектора $\overline{AB}$, если его начало и конец находятся в точках $A(4,-2,1)$, $B(7,1,3)$.

5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\bar{a} = 4\bar{i} + \bar{k}, \quad \bar{b} = 3\bar{j} + \bar{k}.$$

6. Найти смешанное произведение векторов

$$\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}, \quad \bar{b} = 4\bar{i} - 2\bar{k}, \quad \bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}.$$

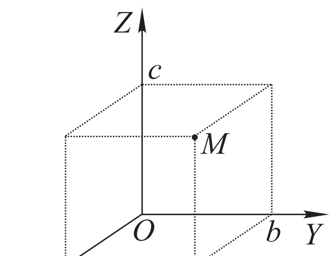
ГЛАВА 5

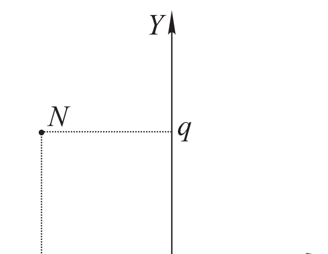
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Аналитическая геометрия как наука, как новый раздел математики, появилась в 1637 году, когда французский философ и математик Рене Декарт опубликовал свой труд **«Геометрия»**. В основе этой науки лежат идеи использования координатного метода и понятия уравнения линии или поверхности. Оказалось, что многие геометрические задачи можно перевести на алгебраический язык и решать методами алгебры.

5.1. Координатный метод. Уравнения линий и поверхностей

Идея координатного метода состоит в том, чтобы указывать положение точки на плоскости или в пространстве с помощью чисел. Наиболее простой и удобной является ***декартова прямоугольная система координат***. В разделе 4.1 мы уже работали с такими координатами. Напомним, что положение точки на плоскости задаётся двумя числами — абсциссой и ординатой, положение точки в пространстве — тремя числами — абсциссой, ординатой и аппликатой.





Здесь точка M имеет абсциссу a, ординату b, аппликату c (обозначение: $M(a, b, c)$). Точка $N(p, q)$ имеет абсциссу p, ординату q. Координатные оси являются числовыми прямыми, начало координат O — нулевая точка на каждой из них. Заметим, что абсцисса p точки N отрицательна. Отрицательные части осей OX, OY, OZ в пространстве не изображены на рисунке, однако они существуют — любая из координат может быть как положительной, так и отрицательной.

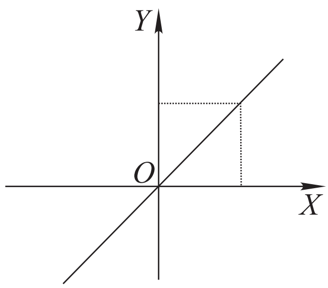
Кроме декартовой прямоугольной используются и другие системы координат. Одной из них посвящён раздел 5.6 этой главы.

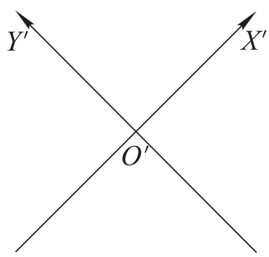
Развитие координатного метода приводит к важнейшему понятию уравнения (линии или поверхности). Пусть на плоскости выбрана система координат. Равенство $F(x,\ y) = 0$, содержащее переменные x, y, называется ***уравнением линии*** L на плоскости, если координаты любой точки линии удовлетворяют этому равенству, и, наоборот, любая точка, координаты которой удовлетворяют равенству, лежит на линии L. Другими словами,

$$F(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ M(x, y) \in L.$$

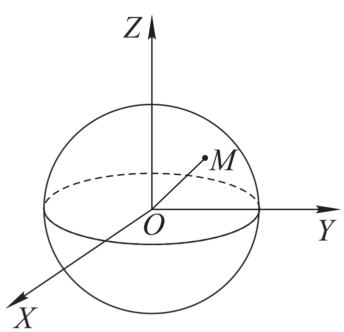
Аналогично вводится понятие уравнения поверхности в пространстве. Пусть в пространстве задана система координат $OXYZ$. Слова: «равенство $F(x, y, z) = 0$ является ***уравнением поверхности*** P» означают, что для любых чисел x, y, z равенство $F(x, y, z) = 0$ справедливо тогда и только тогда, когда точка $M(x, y, z)$ лежит на поверхности P.

Пример 1. Рассмотрим прямую линию на плоскости, делящую угол между осями OX и OY пополам. Её уравнение в системе координат XOY имеет вид: $x - y = 0$ (или $x = y$). Действительно, на этой прямой лежат те и только те точки, координаты которых равны. Заметим, что в какой–либо другой системе координат (например, $X'O'Y'$ на рисунке) ***та же самая*** линия будет иметь ***другое*** уравнение.





Пример 2. Уравнение сферы, центр которой совпадает с началом координат и радиус равен 1, имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



Действительно, точка $M(x, y, z)$ лежит на сфере тогда и только тогда, когда длина вектора $\overline{OM}$ равна 1. Как мы знаем, координаты точки M и координаты вектора $\overline{OM}$ совпадают. Поэтому $\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$. Итак, $M(x, y, z)$ лежит на сфере тогда и только тогда, когда $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$. Обычно полученное уравнение заменяют равносильным ему, возводя в квадрат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Из множества всех линий и поверхностей выделим так называемые ***алгебраические*** линии и поверхности. Сначала дадим определение алгебраического уравнения. ***Алгебраическим уравнением*** от переменных x, y называется уравнение вида

$$a_1x^{k_1}y^{l_1} + a_2x^{k_2}y^{l_2} + \ldots + a_mx^{k_m}y^{l_m} = 0,$$

где a_i — действительные числа, показатели степени k_i, l_i — неотрицательные целые числа. Максимальное значение суммы $k_i + l_i$ называется ***степенью*** уравнения. Кривая на плоскости, которая в некоторой декартовой системе координат задаётся алгебраическим уравнением n-й степени, называется ***алгебраической кривой n-го порядка.***

В точности так же определяются алгебраические уравнения от 3 переменных, задающие алгебраические поверхности.

Замечание. При изменении декартовой прямоугольной системы координат (сдвиг начала координат, поворот осей) уравнение алгебраической линии (или поверхности), конечно, изменится, но останется алгебраическим, причём той же самой степени. Оставим пока это замечание без подробных пояснений.

Пример 3.

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ — алгебраическое уравнение 2-й степени; значит сфера — алгебраическая поверхность 2-го порядка;
2) $x - y = 0$ — алгебраическое уравнение 1-й степени;
3) $3x^2y + 2xy + 3x - 5 = 0$ — алгебраическое уравнение 3-й степени;
4) $x^2 + 3xyz + z^2 - 1 = 0$ — алгебраическое уравнение 3-й степени;
5) $y - \sin x = 0$ — уравнение не является алгебраическим (синусоида не является алгебраической кривой).

В этой главе будут изучены алгебраические кривые и поверхности 1-го порядка. Кривые и поверхности второго порядка рассмотрим позднее.

Иногда бывает удобно для задания кривой выражать координаты её точек через вспомогательную переменную, так называемый ***параметр***:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Каждому значению $t \in [\alpha, \beta]$ соответствует точка плоскости с координатами $(\varphi(t), \psi(t))$. Можно представлять себе кривую как траекторию движения точки, рассматривая параметр t как время.

Особенно полезен ***параметрический способ задания*** для кривых в трёхмерном пространстве. Здесь кривую, вообще говоря, нельзя задать одним уравнением. Если кривая есть пересечение двух поверхностей, то её можно задать системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

где уравнения $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ задают поверхности, пересекающиеся по данной кривой. Однако параметрический способ во многих случаях удобнее.

Пример 4. Параметрические уравнения

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

задают окружность радиуса R с центром в точке $O(0, 0)$. Можно исключить параметр, возведя оба уравнения в квадрат и затем сложив их. Получим $x^2 + y^2 = 1$ — алгебраическое уравнение, определяющее окружность.

Примером пространственной кривой, заданной параметрически, может служить ***винтовая линия***: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$. Если параметр t рассматривать как время, то точка, координаты которой меняются по указанному закону, будет двигаться по цилиндру радиуса a, «наматывая» на его поверхность винтовую линию.

В завершение раздела сформулируем 2 основные задачи аналитической геометрии.

Первая задача: по заданным геометрическим свойствам кривой (или поверхности) составить её уравнение в выбранной системе координат.

Вторая задача: по заданному уравнению изучить геометрические свойства объекта.

5.2. Простейшие задачи аналитической геометрии

Прежде чем приступить к изучению алгебраических кривых и поверхностей 1-го порядка, рассмотрим некоторые простые, часто встречающиеся задачи.

А) Вычисление расстояния между точками. Пусть в пространстве задана система координат и имеются 2 точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти расстояние между ними. Ясно, что это расстояние равно длине вектора $\overline{M_1M_2}$. Координаты вектора $\overline{M_1M_2}$ мы умеем вычислять:

$$\overline{M_1M}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Поэтому его длина

$$\left|\overline{M_1M}_2\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Аналогично, расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости равно $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Расстояние между точками M_1, M_2 можно обозначать и без черты сверху: $|M_1M_2|$.

Пример 5. Найти длины сторон треугольника ABC, если его вершины находятся в точках $A(3, 0, 2)$, $B(5, -1, 4)$, $C(2, 1, 0)$.

Решение. $|AB| = \sqrt{(5-3)^2 + (-1-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$. Аналогично $|AC| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$, $|BC| = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29}$.

Б) Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Разделить M_1M_2 в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$ означает: найти на этом отрезке точку $M(x, y, z)$ так, чтобы $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Найдём координаты точки M. Для этого рассмотрим векторы

$$\overline{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1), \qquad \overline{MM_2} = (x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z).$$

Эти векторы коллинеарны, одинаково направлены. Поэтому существует число $\lambda > 0$ такое, что $\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}$. Но тогда $\left|\overline{M_1M}\right| = \lambda \cdot \left|\overline{MM_2}\right|$, поэтому $\lambda = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Получаем:

$$(x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(x_2 - x,\, y_2 - y,\, z_2 - z).$$

Сравним первые координаты: $(x - x_1) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}(x_2 - x)$. Отсюда найдём x:

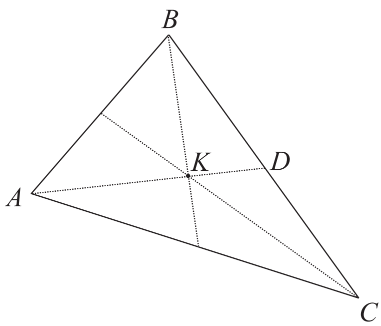
$$\lambda_2 x - \lambda_2 x_1 = \lambda_1 x_2 - \lambda_1 x, \quad \lambda_2 x + \lambda_1 x = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1, \quad x = \frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Аналогично: $y = \dfrac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad z = \dfrac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Формулы для плоской задачи, конечно, такие же.

Пример 6. Найти точку пересечения медиан в треугольнике с вершинами $A(2, -3), B(0, 5), C(4, 1)$.

Решение. Как известно из школьной геометрии, точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $2 : 1$, считая от вершины.



В нашем случае: $\dfrac{|AK|}{|KD|} = \dfrac{2}{1}$. Найдём сначала координаты точки D. По определению медианы: $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{1}{1}$. По формулам деления отрезка получаем:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0+4}{2} = 2,$$
$$y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Итак, $D(2, 3)$. Опять применяем формулы деления отрезка для отыскания координат точки K:

$$x_K = \frac{x_A + 2x_D}{2+1} = \frac{2+4}{3} = 2, \quad y_K = \frac{y_A + 2y_D}{2+1} = \frac{-3+6}{3} = 1.$$

Ответ: $K(2, 1)$.

В) Пересечение линий. Рассмотрим задачу: найти точки пересечения двух кривых на плоскости. Допустим, что известны уравнения, задающие эти кривые (в некоторой системе координат):

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0.$$

Так как точка пересечения лежит на каждой кривой, то она удовлетворяет каждому уравнению, т. е. удовлетворяет системе уравнений. Обратно, любое решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x,\ y) = 0, \\ f_2(x,\ y) = 0 \end{cases}$$

определяет координаты точки пересечения кривых.

Пример 7. Найти точки пересечения окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$ и прямой $y = 2x$.

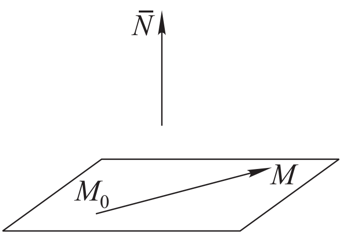
Решение. Координаты точек пересечения удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1, \\ y = 2x. \end{cases}$$

Исключая y, получаем: $x^2 + (2x-1)^2 = 1$, или $x^2 + 4x^2 - 4x + 1 = 1$. Отсюда $5x^2 - 4x = 0$. Это уравнение имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{4}{5}$. Соответствующие значения $y : y_1 = 0$, $y_2 = \dfrac{8}{5}$. Итак, линии пересекаются в двух точках: $O(0,0)$, $M\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$.

5.3. Плоскости в трёхмерном пространстве

Уточним прежде всего понятие «плоскость» с помощью определения, хорошо согласованного с нашими интуитивными представлениями.



Пусть $\overline{N}$ — некоторый ненулевой вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка. ***Плоскостью*** P называется множество точек M таких, что векторы $\overline{M_0M}$ и $\overline{N}$ перпендикулярны:

$$P = \{M \mid \overline{M_0M} \quad \text{перпендикулярен} \quad \overline{N}\}.$$

Таким образом, чтобы задать плоскость, нужна точка M_0, через которую эта плоскость проходит, и вектор $\overline{N}$, перпендикулярный к плоскости, — он называется ***вектором нормали***.

Теорема 1. Плоскости и только они являются поверхностями 1-го порядка в трёхмерном пространстве.

Доказательство. Пусть P — плоскость, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка плоскости, $\overline{N} = (A, B, C)$ — вектор нормали. Запишем условия того, что некоторая (***текущая***) точка $M(x, y, z)$ лежит на плоскости:

$$M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \overline{N} \Leftrightarrow (\overline{M_0M}, \overline{N}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Последнее соотношение (полученное как результат вычисления скалярного произведения в координатной форме) есть уравнение плоскости. Ясно, что это — уравнение первой степени.

Обратно, рассмотрим произвольное уравнение 1-й степени:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Здесь хотя бы одно из чисел A, B, C не равно 0. Возьмём произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют данному уравнению:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Вычтем это равенство из общего уравнения:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Получили уравнение, равносильное исходному. Но из первой части доказательства видно, что это уравнение задаёт плоскость, проходящую через $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (A, B, C)$. Итак, уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ задаёт плоскость. Теорема доказана.

Замечание. Подчеркнём важную роль, которую играет вектор нормали при работе с плоскостью. Если дано уравнение, то вектор нормали известен. Обратно, если известен вектор нормали, то, зная хотя бы одну точку плоскости, можно написать её уравнение.

Пример 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5, 0, -1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (3, -2, 7)$.

Решение. Так как вектор нормали известен, то записываем уравнение в виде:

$$3x - 2y + 7z + D = 0.$$

Подберём D так, чтобы точка $M_0(5, 0, -1)$ лежала на плоскости: $3{\cdot}5 - 2{\cdot}0 + 7(-1) + D = 0$. Отсюда $D = -8$. Итак, получили уравнение:

$$3x - 2y + 7z - 8 = 0.$$

Заметим, что можно и сразу записать уравнение в виде:

$$3(x - 5) - 2(y - 0) + 7(z + 1) = 0$$

и, после раскрытия скобок, получить то же самое.

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения плоскости. Если $D = 0$, то точка $O(0, 0, 0)$ удовлетворяет уравнению. Значит, плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат.

Если $A = B = 0$, т. е. уравнение имеет вид $Cz + D = 0$, или $z = -\dfrac{D}{C}$, то вектор нормали коллинеарен вектору $\bar{k} = (0, 0, 1)$. Поэтому плоскость перпендикулярна оси OZ, а значит параллельна плоскости XOY. Координатная плоскость XOY имеет уравнение $z = 0$.

Аналогично, $x = 0$ — уравнение координатной плоскости YOZ; $x = a$ — уравнение плоскости, параллельной YOZ; $y = 0$ — уравнение плоскости XOZ; $y = b$ — уравнение плоскости, параллельной XOZ.

Если равна нулю только одна из координат вектора нормали, то нормаль перпендикулярна, а плоскость, следовательно, параллельна соответствующей оси. Например, плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси OY (возможно, содержит эту ось).

Вопросы о взаимном расположении плоскостей решаются с помощью вектора нормали. Пусть две плоскости заданы своими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (\text{плоскость} \quad P_1),$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (\text{плоскость} \quad P_2).$$

Запишем в краткой, символической форме условия параллельности и перпендикулярности плоскостей:

$$P_1 \parallel P_2 \;\Leftrightarrow\; \overline{N_1} \parallel \overline{N_2} \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$
$$P_1 \perp P_2 \;\Leftrightarrow\; \overline{N_1} \perp \overline{N_2} \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

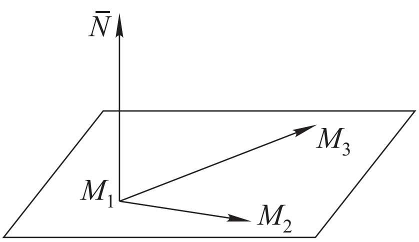
Угол между плоскостями равен углу между векторами нормали и находится с помощью скалярного произведения (см. раздел 4.2).

Пример 9. Найти угол между плоскостями $2x - 2y + z - 5 = 0$, $x - z + 7 = 0$.

Решение. Найдём косинус угла φ между векторами нормали $\overline{N}_1 = (2,\ -2,\ 1)$ и $\overline{N}_2 = (1,\ 0,\ -1)$:

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{N}_1, \overline{N}_2)}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|} = \frac{2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1(-1)}{\sqrt{4+4+1} \cdot \sqrt{1+0+1}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Используя таблицы или калькулятор, можно найти φ.



Как известно, через любые 3 точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость. Научимся решать эту важную задачу в общем виде, а затем рассмотрим пример.

Пусть точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой. Мы помним, что главное для записи уравнения плоскости — найти вектор нормали, т. е. какой-нибудь вектор, перпендикулярный плоскости. В качестве такого вектора можно взять векторное произведение:

$$\overline{N} = [\,\overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3}\,],$$

так как векторное произведение, по определению, перпендикулярно каждому из сомножителей (см. раздел 4.3). Вычисляя координаты $\overline{N}$, получим

$$\overline{N} = \left(\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},\ - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right).$$

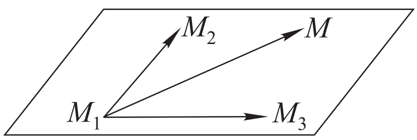
В качестве точки плоскости для записи уравнения можно взять любую из точек M_1, M_2, M_3. Возьмём, например, M_1:

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (x - x_1) - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (y - y_1) +$$
$$+ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} (z - z_1) = 0.$$

Левую часть равенства можно записать как определитель 3-го порядка. Получаем уравнение в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приведём другой способ вывода уравнения плоскости, проходящей через 3 данные точки.



Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная (текущая) точка. Ясно, что M лежит на плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, $\overline{M_1M}$ компланарны. Условие компланарности векторов записывается с помощью смешанного произведения:

$$(\overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3},\ \overline{M_1M}) = 0.$$

Или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

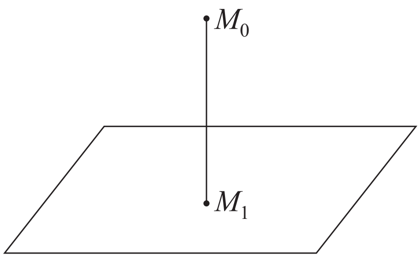
Заметим, что получено то же самое уравнение, так как перестановка строк, как мы знаем, может лишь изменить знак определителя. Но если определитель равен 0, то он не меняется.

Пример 10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки

$$M_1(3,-1,1),\ M_2(0,2,1),\ M_3(-3,4,-2).$$

Решение. Можно воспользоваться готовой, только что выведенной формулой. Однако можно действовать и непосредственно, по одному из изложенных методов. Найдём координаты векторов: $\overline{M_1M_2} = (-3,3,0)$, $\overline{M_1M_3} = (-6,5,-3)$. Вычисляем вектор нормали: $\overline{N} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -6 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$ $= -9\bar{i} - 9\bar{j} + 3\bar{k}$. Теперь можно записать уравнение плоскости: $-9(x-3) - 9(y+1) + 3(z-1) = 0$, или $-9x - 9y + 3z + 15 = 0$. Окончательно получаем: $3x + 3y - z - 5 = 0$. (Проверьте, что точки M_1, M_2, M_3 лежат на этой плоскости.)

Решим ещё одну задачу о плоскости. Найдём расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.



Обозначим через $M_1(x_1,y_1,z_1)$ — основание перпендикуляра, опущенного из M_0 на плоскость. Тогда вектор $\overline{M_1M_0}$, очевидно, коллинеарен вектору нормали $\overline{N} = (A,B,C)$. Вычислим их скалярное произведение:

$$(\overline{N},\ \overline{M_1M_0}) = \pm\left|\overline{N}\right| \cdot \left|\overline{M_1M_0}\right|$$

(так как косинус угла равен ± 1, в зависимости от совпадения или несовпадения направлений векторов). С другой стороны, в координатной форме:

$$(\overline{N},\ \overline{M_1M_0}) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1).$$

Так как точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ лежит на плоскости, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, и, раскрывая скобки, получаем:

$$(\overline{N},\ \overline{M_1M_0}) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D.$$

Сравнивая два полученных выражения для $(\overline{N}, \overline{M_1M_0})$, находим расстояние d от точки до плоскости:

$$d = \left|\overline{M_1M_0}\right| = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\left|\overline{N}\right|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

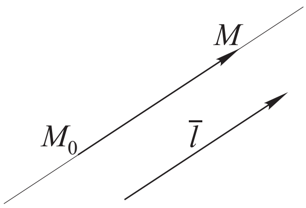
Знак $\pm$ мы заменили абсолютной величиной, поскольку расстояние — величина всегда положительная.

5.4. Прямые в трёхмерном пространстве

Прямую в пространстве мы будем определять как ***линию пересечения двух непараллельных плоскостей***. Следовательно, прямую можно задать системой двух уравнений 1-й степени

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Такая система называется ***общими уравнениями*** прямой. Более удобными являются так называемые канонические уравнения, которые мы сейчас выведем.



Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — какая-либо точка на прямой, $\bar{l} = (a, b, c)$ — ненулевой вектор, параллельный прямой. Текущая точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой в том и только в том случае, если векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{l}$ коллинеарны. В координатной записи коллинеарность векторов означает пропорциональность координат:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Такая система уравнений и называется ***каноническими уравнениями*** прямой. Вектор $\bar{l} = (a, b, c)$ называется ***направляющим*** вектором прямой.

Пример 11. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(3, 5, -2)$, $M_2(7, -1, 0)$.

Решение. В качестве направляющего можно взять, очевидно, вектор $\overline{M_1M_2} = (4, -6, 2)$. Точку можно взять любую, например M_1. Получаем уравнения:

$$\frac{x - 3}{4} = \frac{y - 5}{-6} = \frac{z + 2}{2}.$$

Замечание. В качестве направляющего вектора прямой не может выступать нулевой вектор (он не имеет направления), но одна или даже две координаты направляющего вектора могут быть равны 0. В этом случае допускается, например, запись вида:

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 4}{0} = \frac{z - 2}{5}.$$

Эти уравнения задают прямую, проходящую через точку $(3, 4, 2)$ параллельно вектору $2\bar{i} + 5\bar{k}$. Ординаты всех точек этой прямой одинаковы и равны 4. Поэтому её уравнения можно записать и так:

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{z - 2}{5}, \quad y = 4.$$

Пример 12. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(-2,\ 1,\ -3)$ перпендикулярно плоскости XOY.

Решение. Ясно, что в качестве направляющего вектора этой прямой можно взять вектор $\bar{k} = (0,\ 0,\ 1)$. Поэтому канонические уравнения запишутся следующим образом:

$$\frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{1},$$

или, в другой записи:

$$x = -2, \quad y = 1.$$

Другими словами, эта прямая состоит из точек, у которых $x = -2$, $y = 1$, а z может быть любым числом.

Ещё один распространённый способ задания прямой — параметрический. Переход от канонических уравнений к параметрическим обычно осуществляется так:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} = t.$$

Теперь выразим x, y, z через параметр t:

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

Такая система уравнений и называется ***параметрическими уравнениями*** прямой. Здесь $\bar{l} = (a, b, c)$ — направляющий вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — какая-либо точка на прямой.

Переход от общих уравнений к каноническим (или параметрическим) покажем на примере.

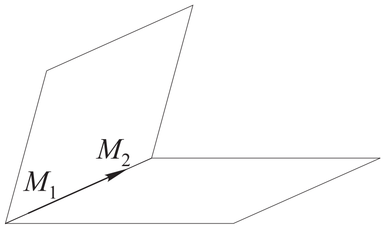
Пример 13. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 11 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдём на данной прямой какие-либо 2 точки, или, на языке алгебры, какие-либо 2 частных решения системы уравнений. Решаем систему, как в разделе 2.5, методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -10 & 8 & 20 \end{array}\right).$$

Матрица приведена к трапециевидной форме, неизвестная z является свободной. Полагая $z = 0$, поднимаясь снизу вверх, найдём сначала $y = -2$, а затем $x = 3$.

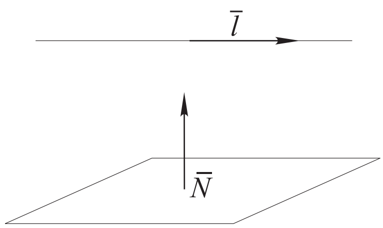


Нашли точку $M_1(3,-2,0)$. Аналогично полагая, например, $z=5$, найдём $y=2$, $x=1$. Получим точку $M_2(1,2,5)$. Ясно, что вектор $\overline{M_1M_2}=(-2,\ 4,\ 5)$ является направляющим для нашей прямой. Её канонические уравнения можно записать, например, так:

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{5}.$$

Замечание. Направляющий вектор прямой лежит в каждой из плоскостей, поэтому перпендикулярен векторам нормали $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$. Значит, в качестве направляющего вектора можно взять векторное произведение $[\overline{N}_1,\overline{N}_2]$.

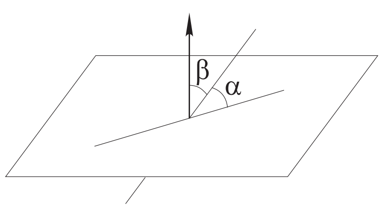
Итак, для прямой важную информацию несет направляющий вектор, так же как для плоскости — вектор нормали. С их помощью решаются задачи о взаимном расположении двух прямых, прямой и плоскости, задачи на построение прямых и плоскостей с заданными свойствами.



Пример 14. Являются ли параллельными прямая $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z+1}{1}$ и плоскость $4x+2y-4z+1=0$?

Решение. Прямая и плоскость параллельны, если направляющий вектор прямой $\overline{l}$ и вектор нормали плоскости $\overline{N}$ перпендикулярны. В нашем случае $\overline{l}=(3,-4,1)$, $\overline{N}=(4,2,-4)$. Их скалярное произведение $(\overline{l},\overline{N})=3\cdot4+(-4)\cdot2+1\cdot(-4)=0$, поэтому $\overline{l}$ и $\overline{N}$ перпендикулярны, т. е. прямая и плоскость параллельны.

Пример 15. Найти угол между прямой $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{0}$ и плоскостью $2x+y-2z-3=0$.

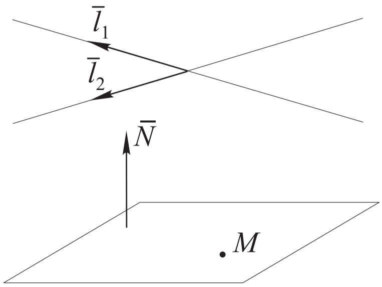


Решение. Угол между прямой и плоскостью — это угол α между прямой и её проекцией на плоскость. Ясно, что $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\beta$, где β — угол между прямой и вектором нормали плоскости. (Здесь мы рассматриваем острые углы).

В нашем примере $\overline{l}=(3,4,0)$, $\overline{N}=(2,1,-2)$. Находим (как в 4.2) угол β между $\overline{l}$ и $\overline{N}$:

$$\cos\beta=\frac{(\overline{l},\overline{N})}{|\overline{l}|\,|\overline{N}|}=\frac{10}{5\cdot3}=\frac{2}{3}.\qquad \text{Значит, } \alpha=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{2}{3}.$$

Пример 16. Через точку $M(2,0,-3)$ провести плоскость, параллельную двум прямым: $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{0}$, $\quad\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+4}{-1}$.



Решение. Найдём вектор нормали $\overline{N}$ искомой плоскости. Он должен быть перпендикулярен направляющим векторам $\bar l_1$ и $\bar l_2$ данных прямых. Поэтому в качестве $\overline{N}$ можно взять векторное произведение:

$$\overline{N}=[\bar l_1,\ \bar l_2]=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 4 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=\bar i+4\bar j+14\bar k.$$

Значит, уравнение плоскости имеет вид:

$$x+4y+14z+D=0.$$

Точка M должна лежать на плоскости. Поэтому $2+4\cdot 0+14(-3)+D=0$. Отсюда $D=40$. Итак, уравнение плоскости найдено:

$$x+4y+14z+40=0.$$

5.5. Прямые на плоскости

В этом разделе мы рассматриваем геометрические задачи на некоторой плоскости. Удобно считать, что рассматриваемая плоскость есть координатная плоскость XOY, задаваемая в пространстве уравнением $z=0$. Тогда 3-я координата у точек и у векторов не пишется, так как она всегда равна 0. Поэтому положение точки будем задавать двумя числами: абсциссой и ординатой. Векторы определяются своими координатами в базисе $\bar i$, $\bar j$. Уравнение $F(x,y)=0$ задаёт на плоскости некоторую линию.

Теорема 2. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида

$$Ax+By+D=0.$$

Обратно, каждое уравнение такого вида (кроме случая $A=B=0$) задаёт прямую. Вектор $\overline{N}=(A,B)$ перпендикулярен прямой (он называется ***вектором нормали*** этой прямой).

Доказательство. Считаем, что наша плоскость в пространстве задана уравнением $z=0$. Тогда любая прямая на ней есть пересечение плоскости $z=0$ и некоторой другой плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Поэтому она задаётся системой уравнений

$$\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0,\\ z=0,\end{cases}$$

очевидно, равносильной одному уравнению $Ax+By+D=0$.

Обратное рассуждение. Точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $Ax + By + D = 0$, а значит и системе уравнений указанного вида, лежат в пересечении двух плоскостей. Поэтому такие точки образуют прямую линию.

Возьмём две точки на прямой, заданной уравнением $Ax+By+D=0$: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Тогда справедливы равенства:

$$Ax_1 + By_1 + D = 0, \quad Ax_2 + By_2 + D = 0.$$

Вычитая одно из другого, получим

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0,$$

т. е. скалярное произведение $(\overline{N},\ \overline{M_1M_2}) = 0$. Значитб вектор $\overline{N} = (A, B)$ перпендикулярен прямой. Теорема доказана.

Уравнение $Ax + By + D = 0$ называется ***общим уравнением*** прямой на плоскости.

Замечание. Подчеркнём глубокую аналогию между уравнением плоскости и общим уравнением прямой. В обоих случаях коэффициенты при неизвестных являются координатами вектора нормали. Заметим также, что для прямой в трёхмерном пространстве понятие «вектор нормали» не рассматривается. Имеется бесконечно много векторов, имеющих разные направления и перпендикулярных данной прямой в пространстве.

Пример 17. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(3, -5)$, перпендикулярно вектору $\overline{N} = (2, 7)$.

Решение. Так как $\overline{N}$ можно взять в качестве вектора нормали, то уравнение имеет вид: $2x + 7y + D = 0$. Подберём D так, чтобы точка M лежала на прямой: $2 \cdot 3 + 7(-5) + D = 0$, отсюда $D = 29$. Итак, получили уравнение:

$$2x + 7y + 29 = 0.$$

Пример 18. Найти расстояние от точки $M(1, -3)$ до прямой $4x + 3y - 15 = 0$.

Решение. Мы подробно решили такую же задачу для расстояний от точки до плоскости (см. раздел 5.3). Теперь воспользуемся аналогичной формулой без её вывода:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В нашем примере: $d = \dfrac{|4 \cdot 1 + 3(-3) - 15|}{\sqrt{16 + 9}} = \dfrac{|-20|}{5} = 4.$

Теперь, используя аналогию с пространственным случаем, выведем каноническое уравнение прямой. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — какая-либо точка на прямой, $\bar{l} = (a, b)$ — ненулевой вектор, параллельный прямой. Тогда, как и в разделе 5.4,

$$M(x,y) \text{ лежит на прямой } \Leftrightarrow \quad \overline{M_0M} \parallel \bar{l} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}.$$

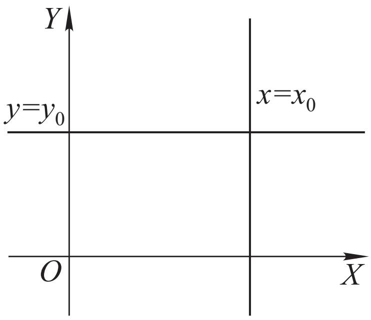
Уравнение $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}$ называется ***каноническим уравнением*** прямой, вектор $\bar{l} = (a,b)$ — ***направляющий***.

Пример 19. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2,7)$, $M_2(5,3)$.

Решение. Так как из условий легко найти направляющий вектор: $\bar{l} = \overline{M_1M_2} = (3,-4)$, то проще записать каноническое уравнение:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-7}{-4}.$$

Замечание. Общее и каноническое уравнения прямой легко преобразуются одно в другое. Например, если прямая задана уравнением $Ax + By + D = 0$, то преобразуем так: $Ax = -By - D$, $\dfrac{x}{B} = \dfrac{y + D/B}{-A}$. Получим каноническое уравнение. Если вектор нормали $\overline{N} = (A,B)$, то направляющим можно взять вектор $\bar{l} = (B,-A)$.

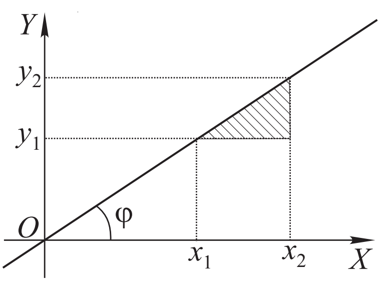


Все замечания, сделанные в разделе 5.4 относительно записи канонического уравнения, остаются справедливыми. В частности, если направляющий вектор $\bar{l} = (0,b)$, т. е. $\bar{l} \parallel \bar{j}$, то уравнение $\dfrac{x-x_0}{0} = \dfrac{y-y_0}{b}$ принято записывать в виде: $x = x_0$ (параллельная оси OY, или «вертикальная» прямая). Аналогично, уравнение «горизонтальной» (параллельной OX) прямой имеет вид: $y = y_0$.

Ещё одна форма записи уравнения прямой на плоскости — ***уравнение с угловым коэффициентом***:

$$y = kx + b.$$

Конечно, это частный случай общего уравнения: его можно записать в виде: $kx - y + b = 0$. Вектор $(k,-1)$ является вектором нормали. Ясно, что при любом k этот вектор не коллинеарен $\bar{i}$, т. е. прямая не вертикальна.



Докажем, что угловой коэффициент k равен тангенсу угла между прямой и осью OX. Возьмём точки (x_1,y_1), (x_2,y_2) на прямой. Тогда, из прямоугольного треугольника (на рисунке заштрихован), получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{kx_2+b-kx_1-b}{x_2-x_1} = k.$$

Ещё раз подчеркнём, что вертикальная прямая не имеет углового коэффициента: тангенс угла $\frac{\pi}{2}$ не существует.

Очевидно: прямые параллельны в том и только том случае, когда $k_1 = k_2$. Условие перпендикулярности прямых получим, рассмотрев векторы нормали $\overline{N}_1 = (k_1,\ -1)$, $\overline{N}_2 = (k_2,\ -1)$:

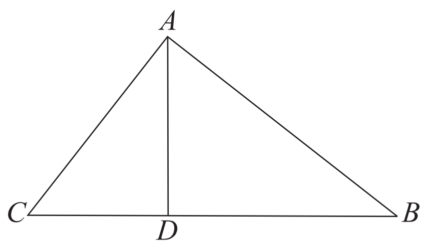
$$\text{Прямые перпендикулярны} \ \Leftrightarrow \quad (\overline{N}_1, \overline{N}_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 k_2 + 1 = 0.$$

Итак, условие перпендикулярности: $k_1 k_2 = -1$.

Мы рассмотрели 3 способа задания прямой на плоскости. Несложными преобразованиями от одного из них можно переходить к другому. Решая задачу, выбираем наиболее удобный для этой задачи способ.

Пример 20. Найти уравнение высоты AD в треугольнике ABC, если $A(2,4)$, $B(0,-3)$, $C(1,3)$.

Решение. В данном случае проще всего найти вектор нормали — им может служить, например, $\overline{BC} = (1,6)$. Записываем общее уравнение прямой:



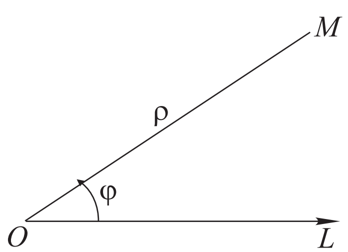
$$x + 6y + d = 0.$$

Подберём d так, чтобы точка A лежала на прямой: $2 + 6 \cdot 4 + d = 0$, $d = -26$. Итак, уравнение AD имеет вид: $x + 6y - 26 = 0$.

5.6. Полярная система координат

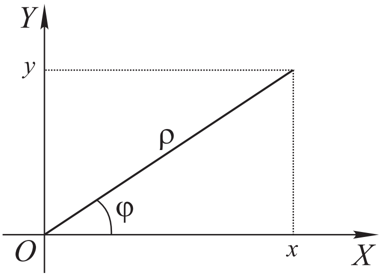
Кроме декартовой прямоугольной системы координат есть и другие способы задать положение точки на плоскости или в пространстве. Здесь мы рассмотрим полезную для многих задач ***полярную систему координат*** на плоскости.

Говорят, что на плоскости выбрана полярная система координат, если указана точка O (***полюс***) и луч L, выходящий из точки O (***полярная ось***).



Полярными координатами точки M называются ***полярный радиус*** ρ — расстояние от точки M до полюса O, и ***полярный угол*** φ — угол между полярной осью L и вектором $\overline{OM}$. Положительное направление отсчёта угла — против часовой стрелки. Заметим, что полярный радиус не может быть отрицательным (так как это расстояние). Угол φ можно рассматривать в пределах: $-\pi < \varphi \leq \pi$. Для полюса O угол не определён, а $\rho = 0$.

Часто бывает удобным рассматривать на плоскости и полярную систему координат, и декартову прямоугольную.



Они называются ***согласованными***, если полюс совпадает с началом декартовой системы, а полярная ось — с положительным направлением оси OX. Одну и ту же точку можно задать декартовыми координатами и полярными координатами: $M(x, y)$, $M(\rho, \varphi)$, причём в случае согласованных систем имеется связь:

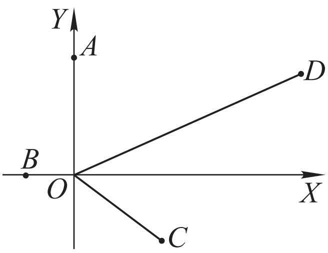
$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Эти формулы легко доказать, рассматривая прямоугольные треугольники на чертеже. Они позволяют переходить от одной системы координат к другой. Можно записать и формулы обратного перехода, выражающие полярные координаты через декартовы:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\,.$$

Пример 21. Построить точки, заданные полярными координатами:

$$A\left(3, \frac{\pi}{2}\right),\ B\,(1, \pi),\ C\left(2, -\frac{\pi}{4}\right),\ D\left(4, \frac{\pi}{6}\right).$$



Решение. Для наглядности рассмотрим на плоскости полярную систему координат, согласованную с декартовой прямоугольной. Построим точки, в соответствии с определением полярных координат. Например, точка A имеет полярный угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, что соответствует положительному направлению оси OY. Точку строим на расстоянии $\rho = 3$ от полюса. Декартовы координаты точек A, B очевидны: $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$. Декартовы координаты точек C, D найдём по формулам перехода:

$$x_C = \rho\cos\varphi = 2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad y_C = \rho\sin\varphi = 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

Итак, $C(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Аналогично $x_D = \rho\cos\varphi = 4\cdot\cos\dfrac{\pi}{6} = 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $y_D = \rho\sin\varphi = 4\cdot\sin\dfrac{\pi}{6} = 4\cdot\dfrac{1}{2} = 2$. Поэтому $D(2\sqrt{3}, 2)$.

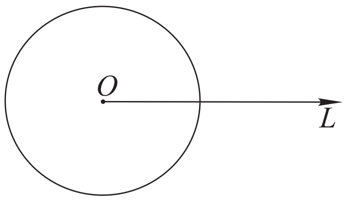
Уравнение кривой в полярных координатах в общем случае записывается так:

$$F(\rho, \varphi) = 0\ .$$

Однако удобнее, если это возможно, выразить ρ как функцию от аргумента φ:

$$\rho = f(\varphi)\ .$$

Пример 22. Написать в полярных координатах уравнение окружности с радиусом 1 и центром в точке O (т. е. в полюсе).



Решение. Очевидно: точка $M(\rho,\varphi)$ лежит на окружности тогда и только тогда, когда $\rho = 1$. Поэтому уравнение данной окружности имеет вид: $\rho = 1\,.$

К такому же уравнению придём, если возьмём уравнение окружности в декартовой системе (согласованной с нашей полярной) и применим формулы перехода. В декартовых координатах уравнение данной окружности: $x^2 + y^2 = 1$. Подставляя $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получим: $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 1$, $\rho^2 = 1$. Так как $\rho \geq 0$, то это равносильно уравнению $\rho = 1$.

Пример 23. Построить кривую, заданную в полярной системе координат уравнением

$$\rho = 1 + \cos\varphi\,.$$

Решение. Мы советуем всегда рассматривать полярную систему координат согласованной с более привычной декартовой прямоугольной системой.

Возьмём несколько значений φ, для которых легко вычислить $\cos\varphi$, найдём соответствующие значения ρ:

$\rho\,(0) = 1 + \cos 0 = 2;$ $\quad\rho\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 + \cos\dfrac{\pi}{6} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,85;$

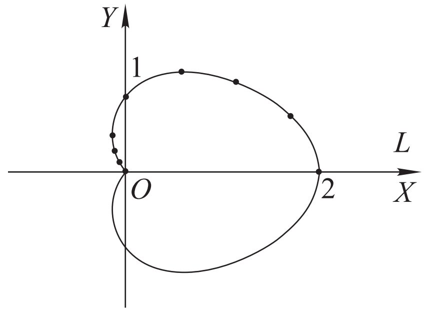
$\rho\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + \cos\dfrac{\pi}{4} = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 1,7;$ $\quad\rho\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos\dfrac{\pi}{3} = 1 + \dfrac{1}{2} = 1,5;$

$\rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 + \cos\dfrac{\pi}{2} = 1;$ $\quad\rho\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 1 + \cos\dfrac{2\pi}{3} = 1 - \dfrac{1}{2} = 0,5;$

$\rho\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 1 + \cos\dfrac{3\pi}{4} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}3;$ $\quad\rho\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 1 + \cos\dfrac{5\pi}{6} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}15;$

$\rho\,(\pi) = 1 + \cos\pi = 0.$

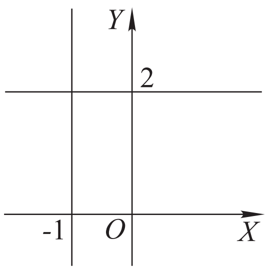
Построим найденные 9 точек на чертеже (рисунок на следующей странице). Далее, можно было бы продолжать выбирать $\pi < \varphi < 2\pi$, вычислять $\rho(\varphi)$, находить точки. Воспользуемся, однако, тем, что $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, а значит, $\rho(-\varphi) = \rho(\varphi)$. Выбирая отрицательные углы (от полярной оси по часовой стрелке), будем получать точки, симметричные найденным относительно оси OX. Соединяя все найденные точки плавной кривой, получим так называемую ***кардиоиду***.



5.7. Задачи с решениями

1. На плоскости выбрана декартова прямоугольная система координат. Какое множество точек задаёт уравнение $(x+1)(y-2)=0$?

Решение. Произведение равно 0 только в том случае, если хотя бы один сомножитель равен 0. Уравнение $x+1=0$ задаёт множество точек у которых абсцисса $x=-1$, а ордината y может быть любой. Изображая такие точки на чертеже, видим, что они образуют прямую линию, параллельную оси OY. Аналогично, уравнение $y-2=0$ задаёт прямую, параллельную оси OX, проходящую через точку $(0,2)$. Координаты любой из точек этих двух прямых удовлетворяют уравнению



$$(x+1)(y-2)=0\ .$$

И наоборот, любая точка, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, лежит на одной из этих прямых.

2. Вывести уравнение множества точек плоскости, равноудалённых от точек $A(3,2)$, $B(0,5)$.

Решение. Будем работать в той же системе координат, в которой задано положение точек A, B. Пусть $M(x,y)$ — какая-либо (текущая) точка нашего множества. Тогда $|AM|=|BM|$ по условию. Используем формулу для расстояния между точками:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+(y-5)^2}.$$

Упростим полученное уравнение:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=x^2+(y-5)^2,$$
$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=x^2+y^2-10y+25,$$
$$-6x+6y-12=0.$$

Разделив обе части уравнения на -6, получим наиболее простую запись:

$$x-y+2=0.$$

3. Найти точку пересечения линий, заданных уравнениями

$$5x+4y+2=0, \quad 2x-y-7=0.$$

Решение. Координаты точки, лежащей на каждой из линий, должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} 5x+4y+2=0, \\ 2x-y-7=0. \end{cases}$$

Решим систему линейных уравнений, например, методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 5 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 6 & -16 \\ 2 & -1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 6 & -16 \\ 0 & -13 & 39 \end{array}\right),$$

$$-13y=39,\ y=-3;\ x+6y=-16,\ x=-16-6y=-16+18=2.$$

Легко проверить, что точка $A(2,-3)$ лежит на обеих линиях.

4. На прямой, заданной уравнением $3x-8y-4=0$, найти точку, равноудалённую от точек $A(11,-6)$, $B(-3,8)$.

Решение. Пусть $M(x,y)$ — искомая точка. Тогда её координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} 3x-8y-4=0, \\ \sqrt{(x-11)^2+(y+6)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-8)^2}. \end{cases}$$

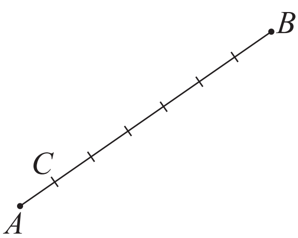
Упростим второе уравнение:

$$x^2-22x+121+y^2+12y+36=x^2+6x+9+y^2-16y+64,$$
$$-28x+28y+84=0, \quad -x+y+3=0\,.$$

Решая систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x-8y-4=0, \\ -x+y+3=0, \end{cases}$ найдём: $x=4$, $y=1$. Точка M найдена: $M(4,1)$.

5. Отрезок между точками $A(-2,5,0)$, $B(-9,-2,7)$ разделён на 7 равных частей. Найти точку деления, ближайшую к A.

Решение. Каждая из точек задана тремя координатами — значит, отрезок расположен в пространстве. Пусть $C(x,y,z)$ — искомая точка.



По условию, $|AB|=7|AC|$. Поэтому $\dfrac{|AC|}{|CB|}=\dfrac{1}{6}$, точка C делит отрезок в отношении $1:6$. Находим координаты C по формулам деления отрезка в данном отношении (см.5.2):

$$x=\frac{\lambda_2 x_A+\lambda_1 x_B}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{6x_A+x_B}{7}=$$
$$=\frac{6\cdot(-2)+(-9)}{7}=-3,$$

$$y = \frac{6y_A + y_B}{7} = \frac{6 \cdot 5 + (-2)}{7} = 4\,, \quad z = \frac{6z_A + z_B}{7} = \frac{7}{7} = 1.$$

Точка $C(-3, 4, 1)$ найдена.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, -2, 1)$, $M_2(4, 2, 3)$ и параллельной вектору $\bar{a} = 5\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$.

Решение. Имеем два вектора, параллельных искомой плоскости: вектор $\bar{a}$ и вектор $\overline{M_1M_2} = (3,\ 4,\ 2)$. Рассмотрим их векторное произведение $\overline{N} = [\bar{a},\ \overline{M_1M_2}]$. Вектор $\overline{N}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\overline{M_1M_2}$ (см. 4.3), а значит перпендикулярен и плоскости, т. е. может быть взят в качестве вектора нормали. Найдём $\overline{N}$:

$$\overline{N} = [\bar{a}, \overline{M_1M_2}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4\bar{i} - \bar{j} + 8\bar{k}.$$

Зная вектор нормали и какую-нибудь точку на плоскости (возьмём, например, M_1), записываем уравнение плоскости:

$$-4(x-1) + (-1)(y+2) + 8(z-1) = 0.$$

После упрощений получим уравнение $4x + y - 8z + 6 = 0$.

7. При каких значениях параметра α плоскости $4x + \alpha y - 8z + 5 = 0$, $\alpha x + y - 4z - 3 = 0$ параллельны? Перпендикулярны?

Решение. Рассмотрим векторы нормалей: $\overline{N}_1 = (4,\ \alpha,\ -8)$, $\overline{N}_2 = (\alpha,\ 1,\ -4)$. Плоскости параллельны, если $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ коллинеарны:

$$\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{\alpha} = \frac{\alpha}{1} = \frac{-8}{-4} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 2.$$

Плоскости перпендикулярны, если $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ перпендикулярны:

$$\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{N}_1, \overline{N}_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot \alpha + \alpha \cdot 1 + (-8)(-4) = 0.$$

Из уравнения $5\alpha + 32 = 0$ находим $\alpha = -6,4$.

8. Найти расстояние от точки $M(2, -5, -3)$ до плоскости, заданной уравнением $3y - 4z + 1 = 0$.

Решение. Вычислим расстояние по формуле, выведенной в разделе 5.3:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|0 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) + (-4)(-3) + 1|}{\sqrt{0 + 9 + 16}} =$$

$$= \frac{|-2|}{5} = 0,4.$$

9. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(3,-2,1), M_2(1,-6,1)$.

Решение. В качестве направляющего вектора прямой возьмём, например, $\overline{M_2M_1} = (2,\ 4,\ 0)$. Используя координаты точки M_1, лежащей на прямой, запишем канонические уравнения: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{0}$. Введём параметр t: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{0} = t$. Отсюда легко получить параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = 2t+3, \\ y = 4t-2, \\ z = 1. \end{cases}$$

10. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-10}{3} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z+7}{-4}$ и плоскости $3x-5y+5z-7=0$.

Решение. Как всегда, при необходимости найти точку пересечения нужно решать систему уравнений. В данном случае удобнее перейти к параметрическим уравнениям прямой: $\dfrac{x-10}{3} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z+7}{-4} = t$, т. е.

$$x = 3t+10, \quad y = 2t+6, \quad z = -4t-7.$$

Чтобы решить систему уравнений $\begin{cases} x = 3t+10, \\ y = 2t+6, \\ z = -4t-7, \\ 3x-5y+5z-7=0, \end{cases}$ подставим в последнее уравнение выражения x, y, z и найдём значение параметра t, соответствующее искомой точке:

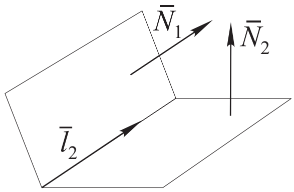
$$3(3t+10)-5(2t+6)+5(-4t-7)-7=0,$$
$$-21t-42=0, \quad t=-2.$$

Отсюда $x = 3t+10 = 4$, $y = 2t+6 = 2$, $z = -4t-7 = 1$.

11. Найти косинус острого угла между прямыми

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{5} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+3y-z+2=0, \\ x+y+z-1=0. \end{cases}$$

Решение. Угол между прямыми, конечно, равен углу между их направляющими векторами. Для прямой, заданной каноническими уравнениями, этот вектор известен: $\bar{l}_1 = (3,\ -5,\ 5)$. Найдём направляющий вектор $\bar{l}_2$ второй прямой, заданной общими уравнениями. Так как $\bar{l}_2$ параллелен каждой из пересекающихся плоскостей, то он перпендикулярен



каждому вектору нормали. Поэтому в качестве направляющего вектора можно взять векторное произведение:

$$\bar{l}_2 = [\overline{N}_1, \overline{N}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Косинус угла φ между векторами $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$ находим как обычно, с помощью скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{l}_1, \bar{l}_2)}{|\bar{l}_1|\,|\bar{l}_2|} = \frac{3\cdot 4 + (-5)(-2) + 5(-2)}{\sqrt{9+25+25}\,\sqrt{16+4+4}} = \frac{12}{\sqrt{59}\,\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{6}{59}}\,.$$

Так как косинус получился положительный, то найден острый угол. Тупой угол между этими же прямыми имеет косинус $-\sqrt{\dfrac{6}{59}}$.

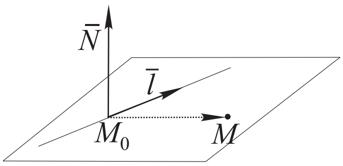
12. Найти проекцию точки $M(9,3,8)$ на плоскость $8x - 2y + z - 5 = 0$.

Решение. Проекция точки — это пересечение плоскости и перпендикулярной к ней прямой, проведённой через данную точку. Найдём уравнения этой прямой. Ясно, что в качестве направляющего вектора можно взять вектор нормали к плоскости $\overline{N} = (8,\ -2,\ 1)$. Канонические уравнения перпендикуляра имеют вид: $\dfrac{x-9}{8} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-8}{1}$. Для отыскания пересечения с плоскостью удобнее записать эти уравнения в параметрической форме: $\begin{cases} x = 8t+9, \\ y = -2t+3, \\ z = t+8. \end{cases}$ Решая систему этих уравнений совместно с уравнением плоскости, найдём точку пересечения:

$$8(8t+9) - 2(-2t+3) + (t+8) - 5 = 0,$$
$$69t + 69 = 0, \quad t = -1\,.$$

Находим координаты проекции: $x = 1,\ y = 5,\ z = 7$.

13. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-3}{1}$ и данную точку $M(-1,1,2)$.



Решение. Рассмотрим точку $M_0(1,-1,3)$, лежащую на нашей прямой. Ясно, что вектор $\overline{M_0M} = (-2,\ 2,\ -1)$ параллелен плоскости. Также параллелен плоскости и направляющий вектор прямой $\bar{l} = (1,\ 4,\ 1)$. В качестве вектора нормали к плоскости возьмём векторное произведение:

$$\overline{N} = [\overline{M_0M},\ \bar{l}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6\bar{i} + \bar{j} - 10\bar{k}.$$

Зная вектор нормали и какую-либо точку плоскости (например, M_0), запишем уравнение плоскости: $6(x-1)+(y+1)-10(z-3)=0$. После упрощений получим: $6x+y-10z+25=0$.

14. Найти угловой коэффициент и какой-либо направляющий вектор прямой, заданной на плоскости общим уравнением: $4x+2y-5=0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $y=kx+b$:

$$2y=-4x+5, \quad y=-2x+2,5.$$

Следовательно, угловой коэффициент $k=-2$. Так же легко преобразовать уравнение и к каноническому виду: $4x=-2y+5$, $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2,5}{4}$. Значит, вектор $\bar{l}=(-2,\ 4)$ является направляющим.

15. Написать уравнение прямой на плоскости, проходящей через начало координат и образующей с осью OX угол 30°.

Решение. Так как дан угол наклона прямой, то проще всего написать уравнение с угловым коэффициентом: $k=\operatorname{tg}30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+b$. По условию, прямая проходит через точку $(0,0)$. Поэтому $b=0$, уравнение имеет вид: $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.

16. Через точку $M(1,-7)$ провести прямую, перпендикулярную прямой

$$3x-5y+1=0.$$

Решение. Вектор $\overline{N}=(3,\ -5)$ является вектором нормали для данной прямой. Значит, для перпендикуляра он — направляющий. Запишем каноническое уравнение перпендикуляра: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+7}{-5}$. Задача решена. Если требуется, можно преобразовать это уравнение к любому другому виду.

17. Найти угол α между прямыми $y=3x$, $y=-2x+5$.

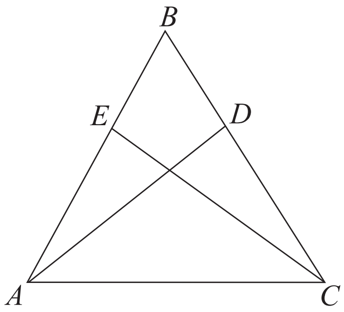
Решение. Запишем уравнения прямых в общем виде:

$$3x-y=0, \quad 2x+y-5=0.$$

Ясно, что $\overline{N}_1=(3,\ -1)$, $\overline{N}_2=(2,\ 1)$ — векторы нормалей. Угол между ними совпадает с углом между прямыми, так как это углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому $\cos\varphi=\cos(\overline{N}_1{}^\wedge\overline{N}_2)=\dfrac{(\overline{N}_1\overline{N}_2)}{|\overline{N}_1||\overline{N}_2|}=$ $=\dfrac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}=45^\circ$.

18. В треугольнике ABC известны уравнения высот AD: $7x-2y-1=0$ и CE: $2x-7y-6=0$, а также вершина $B(3,-4)$. Найти уравнения всех сторон треугольника.

Решение. Сделаем чертёж (см. следующую страницу). Так как $CE\perp AB$, то вектор нормали $\overline{N}_1=(2,\ -7)$ можем взять в качестве направляющего вектора прямой AB. Поэтому уравнение AB запишется так:



$\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{-7}$. Аналогично, используя вектор нормали $\overline{N}_2 = (7,\,-2)$ прямой AD в качестве направляющего для BC, запишем уравнение BC: $\dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y+4}{-2}$. Чтобы записать уравнение стороны AC, найдём координаты точек A и C. Координаты A найдём, решая совместно уравнения AB и AD: $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{-7}, \\ 7x - 2y - 1 = 0. \end{cases}$

После простых преобразований: $\begin{cases} -7x - 2y = -13, \\ 7x - 2y = 1. \end{cases}$ Складывая уравнения, получаем: $-4y = -12$, т. е. $y = 3$. Теперь находим $x = \dfrac{1}{7}(1 + 2y) = 1$. Итак, $A(1, 3)$. Аналогично найдём точку C, решая совместно уравнения стороны BC и высоты CE:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y+4}{-2}, \\ 2x - 7y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 7y = 22, \\ 2x - 7y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = -2. \end{cases}$$

Зная координаты вершин A, C, найдём каноническое уравнение стороны AC. Направляющий вектор $\overline{AC} = (-4-1,\,-2-3) = (-5,\,-5)$. Поэтому уравнение AC имеет вид: $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y-3}{-5}$, или, что то же самое, $x - y + 2 = 0$.

19. Кривая задана в декартовой системе координат уравнением

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2x) = y^2.$$

Записать уравнение этой кривой в полярной системе координат, согласованной с данной декартовой.

Решение. Если системы координат согласованы, то между декартовыми и полярными координатами каждой точки имеется связь: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Подставим эти выражения в уравнения кривой, проведём преобразования:

$$(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - 2\rho\cos\varphi) = \rho^2\sin^2\varphi\,,$$
$$\rho^2(\rho^2 - 2\rho\cos\varphi) = \rho^2\sin^2\varphi\,,$$
$$\rho^2 - 2\rho\cos\varphi = 1 - \cos^2\varphi\,,$$
$$(\rho - \cos\varphi)^2 = 1.$$

Извлекая корень, получим: $\rho - \cos\varphi = -1$ или $\rho - \cos\varphi = 1$. Первое уравнение задаёт одну точку: $\rho = 0$, второе уравнение — кардиоиду, она построена в примере 23 раздела 5.6.

5.8. Упражнения для самостоятельной работы

1. Какие из точек $M_1(0,1,-2)$, $M_2(-2,1,0)$, $M_3(5,-1,3)$, $M_4(-6,\sqrt{6},-2)$, $M_5(6,\sqrt{2},3)$ лежат на поверхности, заданной уравнением $x^2-4y^2=3z^2$?

2. Какие множества точек на плоскости задают следующие уравнения:
а) $x=0$; б) $x^2-y^2=0$; в) $(y-3)(y-5)=0$?

3. Вывести уравнение множества точек на плоскости, равноудалённых от точек $A(-2,1), B(4,3)$.

4. Найти точки пересечения линии $2x+5y+30=0$ с осями координат.

5. Найти точки пересечения линий, заданных уравнениями $2x-y+5=0, \quad x^2+y^2=25$.

6. Найти периметр треугольника на плоскости, если его вершины находятся в точках $A(6,2),\ B(3,-2),\ C(5,2)$.

7. Найти расстояния от начала координат до середин сторон треугольника с вершинами $A(-8,1),\ B(2,7),\ C(-4,3)$.

8. Отрезок между точками $A(3,2),\ B(11,7)$ разделен на 5 равных частей. Найти координаты точек деления.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3,-2,-4)$, и параллельной плоскости:
а) $y=5$; б) $2x+y+3z-8=0$; в) $z+7=0$.

10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2,1,4)$, если известно, что вектор $\bar{c}=3\bar{i}+2\bar{k}$ ей перпендикулярен.

11. Написать уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $M_1(-2,1,0)$, $M_2(6,-7,-2)$, $M_3(3,2,1)$.

12. Найти угол между плоскостями $2x-6y-4z+5=0$, $3x-9y-6z-1=0$.

13. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3,-3,0)$ параллельно прямой $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{4}$.

14. Найти канонические уравнения линии пересечения плоскостей

$$2x+3y+z=0, \quad x+y-z+2=0.$$

15. При каких значениях параметров $\alpha,\ \beta$ прямая $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+5}{7}=\dfrac{z+1}{0}$ и плоскость $\alpha x+3y+\beta z-7=0$ будут
а) параллельны ? б) перпендикулярны ?

16. Найти проекцию точки $M(0,0,-11)$ на прямую $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{5}$. Чему равно расстояние от точки M до данной прямой?

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые

$$\frac{x}{5}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{2}, \quad \frac{x+3}{5}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{2}.$$

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ и точку $(3,1,-2)$.

19. Найти расстояние от прямой $\dfrac{x-5}{7}=\dfrac{y+3}{-4}=\dfrac{z-7}{4}$ до параллельной ей плоскости $y+z=2$.

20. Найти угловой коэффициент прямой, заданной на плоскости каноническим уравнением: $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{5}$.

21. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(6,-3)$: а) параллельно прямой $2x+3y=5$; б) перпендикулярно этой же прямой.

22. Найти точку пересечения высот в треугольнике, вершины которого находятся в точках $A(-5,4), B(-3,8), C(4,7)$.

23. В четырёхугольнике с вершинами $A(5,6)$, $B(8,-1)$, $C(-7,2)$, $D(-1,8)$ найти точку пересечения диагоналей AC и BD.

24. Из точек пересечения прямой $x+5y-10=0$ с осями координат восстановлены перпендикуляры к этой прямой. Найти их уравнения.

25. Найти точку, симметричную точке $M(5,-2)$ относительно прямой $x-2y+1=0$.

26. Найти уравнение биссектрисы острого угла, образованного прямыми $3x-4y-5=0$ и $x+1=0$.

27. Кривая задана в декартовой прямоугольной системе координат уравнением $(x^2+y^2)^2=2xy$. Записать уравнение этой кривой (называемой ***лемнискатой***) в полярной системе координат, согласованной с данной декартовой. Построить лемнискату по точкам.

5.9. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Найти расстояние между точками $A(2,-4,-5)$, $B(3,-12,-1)$.

2. При каком α вектор $6\bar{i}-2\bar{j}+\alpha\bar{k}$ параллелен плоскости $x+2y+2z-3=0$?

3. Плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ проходит через точку $M(2,3,0)$ перпендикулярно вектору $\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$. Найти её уравнение, в ответе указать величину $\dfrac{D}{A}$.

4. Найти косинус острого угла между прямыми
$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+1}{-2}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-8}{\sqrt{2}}.$$

5. Найти угловой коэффициент прямой, лежащей на плоскости XOY и проходящей через точки $A(3,7)$, $B(1,-3)$.

6. Найти ординату точки пересечения прямых
$$3x-5y+1=0, \quad 2x+y-8=0.$$

ГЛАВА 6

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

Оглянемся назад: после первой, вводной, темы мы занимались линейной алгеброй (главы 2 и 3). Затем применяли построенный алгебраический аппарат к геометрическим задачам (главы 4 и 5). Но подробно изучить мы смогли только прямые и плоскости, то есть ***линейные*** объекты, задаваемые уравнениями 1-й степени. Для работы с более сложными линиями и поверхностями нам потребуются новые алгебраические понятия и методы.

Кроме того, важным направлением алгебры является изучение уравнений n-й степени с одним неизвестным:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Выражение в левой части этого уравнения называется ***многочленом*** от переменной x. Изучению многочленов и расширению, обобщению понятия числа посвящается эта глава.

6.1. Поле комплексных чисел

Во введении мы проследили, как происходило развитие понятия числа: от натуральных чисел к целым, рациональным, действительным числам. Сделаем ещё один шаг, от действительных чисел перейдём к комплексным.

6.1.1. Определения

Пусть a, b — действительные числа, i — некоторый символ. Комплексным числом называется выражение вида

$$a + bi.$$

Замечание. Можно было бы использовать любой другой значок, например $\square$, и записывать комплексные числа так: $a + b\square$. Мы пользуемся общепринятыми обозначениями. Сначала, возможно, будет непривычно рассматривать числа $2 + 3i$, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}i$ и так далее. Однако подумайте: переход от целых чисел к дробям был не менее трудным: одно число стали писать выше, другое ниже, между ними — черта... Теперь нам это кажется естественной записью.

Введём алгебраические операции на множестве комплексных чисел. ***Сложение*** и ***умножение*** чисел определяются так:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Пояснение — почему именно так нужно определить умножение — сделаем после того, как рассмотрим основные свойства введённых операций.

Теорема 1. Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ с операциями сложения и умножения образует поле.

Доказательство. Нужно проверить, что выполняются 9 аксиом поля (смотри раздел 1.3). Большинство из них проверяются просто, с использованием соответствующих свойств сложения и умножения действительных чисел.

1) Коммутативность сложения:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i=(c+di)+(a+bi).$$

2) Ассоциативность сложения:

$$[(a+bi)+(c+di)]+(e+fi)=(a+c+e)+(b+d+f)i=(a+bi)+[(c+di)+(e+fi)].$$

3) Существование нейтрального элемента для сложения:

$$(a+bi)+(0+0i)=(a+bi).$$

Число $0+0i$ будем называть нулём и обозначать 0.

4) Существование противоположного элемента:

$$(a+bi)+(-a-bi)=0+0i=0.$$

5) Коммутативность умножения:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i=(c+di)(a+bi).$$

6) Ассоциативность умножения:

$$\text{если}\quad z_1=a+bi,\quad z_2=c+di,\quad z_3=e+fi,\quad \text{то}\quad (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3).$$

Вычислив обе части равенства, можно убедиться, что результаты совпадают.

7) Дистрибутивность:

если $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $z_3=e+fi$, то $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

Действительно,

$$(a+bi)[(c+di)+(e+fi)] = (a+bi)[(c+e)+(d+f)i] =$$
$$= (ac+ae-bd-bf)+(ad+af+bc+be)i,$$
$$(a+bi)(c+di)+(a+bi)(e+fi) = (ac-bd)+(ad+bc)i+(ae-bf)+(be+af)i =$$
$$= (ac-bd+ae-bf)+(ad+bc+be+af)i.$$

Результат, как видим, получился одинаковый.

8) Существование нейтрального элемента для умножения:

$$(a+bi)(1+0i) = (a\cdot 1 - b\cdot 0) + (a\cdot 0 + b\cdot 1)i = a+bi.$$

Число $1+0i = 1$ — единица.

9) Существование обратного элемента:

$$\forall\, z \neq 0 \quad \exists\, z^{-1}:\ zz^{-1} = 1.$$

Действительно, пусть $a+bi \neq 0+0i$. Тогда

$$(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) +$$
$$+\left(\frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right)i = 1.$$

Поэтому число $\dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$ является обратным для $a+bi$. Теорема доказана.

Пусть $z = a+bi$. Действительные числа a, b называются ***действительной*** и ***мнимой частями*** комплексного числа z. Используются обозначения:

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z.$$

Если $b = 0$, то $z = a+0i = a$ — действительное число. Поэтому множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является частью множества комплексных чисел $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Заметим: $i^2 = (0+1i)(0+1i) = -1+0i = -1$. Используя это свойство числа i, а также свойства операций, доказанные в теореме 1, можно выполнять действия с комплексными числами по обычным правилам, заменяя i^2 на -1.

Пример 1. Вычислить $z_1 = (2+i)(1-2i)(3+4i)$, $z_2 = \dfrac{4-i}{1+2i}$.

Решение. $z_1 = (2+i)(1-2i)(3+4i) =$

$$= (2-4i+i-2i^2)(3+4i) = (4-3i)(3+4i) = 12+16i-9i-12i^2 = 24+7i.$$

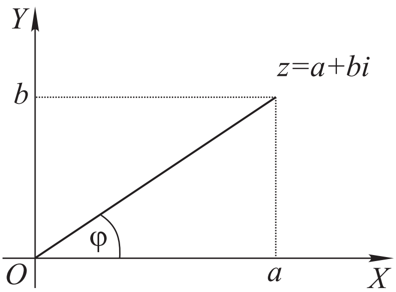
Для выполнения деления умножим числитель и знаменатель на $1-2i$:

$$z_2 = \frac{4-i}{1+2i} = \frac{(4-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{4-8i-i-2}{1+4} = \frac{2}{5} - \frac{9}{5}\,i.$$

Замечание. Отношения $\leq$, $\geq$ («меньше», «больше») для комплексных чисел не определяются.

6.1.2. Тригонометрическая форма записи

Запись $z = a + bi$ называется ***алгебраической*** формой записи комплексного числа. Рассмотрим плоскость с выбранной декартовой системой координат.



Будем изображать число z точкой с координатами (a, b). Тогда действительные числа $a = a + 0i$ будут изображаться точками оси OX — она называется ***действительной*** осью. Ось OY называется ***мнимой*** осью, её точки соответствуют числам вида bi, которые иногда называют ***чисто мнимыми***. Вся плоскость называется ***комплексной плоскостью***. Число $r = \sqrt{a^2+b^2}$ называется ***модулем*** числа z:

$$|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Полярный угол φ называется ***аргументом*** числа z:

$$\varphi = \arg z.$$

Аргумент определяется с точностью до слагаемого $2k\pi$; значение, для которого $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется ***главным значением*** аргумента. Числа r, φ являются полярными координатами точки z. Ясно, что $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, и мы получаем:

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая запись называется ***тригонометрической*** формой записи комплексного числа.

Пример 2. Записать в тригонометрической форме число $z = 1 + i$.

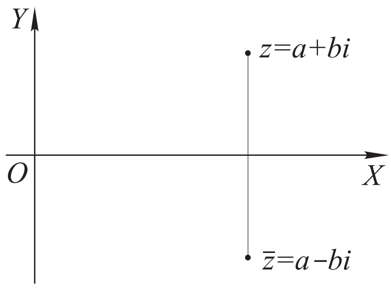
Решение. Вычислим модуль и аргумент числа $1+i$:

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1.$$

Число z лежит в 1-й четверти, поэтому $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

6.1.3. Сопряжённые числа



Комплексное число

$$\bar{z} = a - bi$$

называется ***сопряжённым*** числу $z = a + bi$. Ясно, что $|\bar{z}| = |z|$, $\arg \bar{z} = -\arg z$. Легко проверяются свойства:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Докажем, например, второе из них:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd) - (ad+bc)i,$$
$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{a+bi} \cdot \overline{c+di} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd) - (ad+bc)i.$$

Получили $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, что и требовалось.

Замечание. Сумма и произведение сопряжённых чисел есть числа действительные:

$$z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a,$$
$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + bai - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

6.1.4. Возведение в степень и извлечение корней

Теорема 2. При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Вычислим произведение:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Получили число $z_1 z_2$ в тригонометрической форме:

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1|\,|z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2,$$

что и требовалось.

Следствие. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Эта формула называется ***формулой Муавра***. Для её доказательства достаточно применить теорему 2 к произведению $zz\ldots z = z^n$.

Пример 3. Вычислить $(i\sqrt{3}-1)^6$.

Решение. Запишем число $-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$\left|-1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}.$$

Это число изображается точкой во 2-й четверти, поэтому $\varphi = \dfrac{2\pi}{3} = 120^\circ$. Значит

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Применим формулу Муавра:

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^6 = 2^6\left(\cos\frac{12\pi}{3} + i\sin\frac{12\pi}{3}\right) = 64(1+i\cdot 0) = 64.$$

Научимся теперь извлекать корни, т. е. решать уравнение $z^n = w$, где $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ — данное число, $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — неизвестная. Подставим эти выражения в уравнение:

$$|z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Отсюда следует, что $|z|^n = |w|$, $n\varphi = \alpha + 2\pi k$. Выразим теперь искомые величины $|z|$, φ:

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}, \quad \varphi = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}, \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Окончательно формула для извлечения коней имеет вид:

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Здесь $\sqrt[n]{|w|}$ — ***арифметическое*** значение корня, т. е. положительное действительное число. Среди значений $\sqrt[n]{w}$ различными являются только n, соответствующие значениям $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1$.

Пример 4. Решить уравнение $z^4 = 3i$.

Решение. Запишем число $3i$ в тригонометрической форме:

$$3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда

$$z = \sqrt[4]{3i} = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}\right).$$

При $k = 0$ получим: $z_1 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$,

при $k = 1$ получим: $z_2 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$,

при $k = 2$ получим: $z_3 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$,

при $k = 3$ получим: $z_4 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)$.

Найдено 4 различных корня. Подстановка других значений k не даст новых решений. Например, при $k = 4$:

$$z = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{17\pi}{8} + i\sin\frac{17\pi}{8}\right) = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) = z_1.$$

Пример 5. Решить квадратное уравнение:

$$x^2 - 6x + 34 = 0.$$

Решение. Дискриминант здесь отрицателен: $D = b^2 - 4ac = 36 - 136 = -100$. Раньше в таких случаях мы говорили: уравнение решений не имеет. Но теперь мы умеем извлекать квадратные корни из отрицательных чисел:

$$\sqrt{D} = \sqrt{-100} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{-1} = \pm 10i.$$

По формуле для корней квадратного уравнения получим: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{6 \pm 10i}{2} = 3 \pm 5i$. Легко сделать проверку: подставить любое из двух найденных чисел в уравнение и убедиться, что это корни.

6.2. Кольцо многочленов над полем $\mathbb{C}$

Многочленом от переменной z над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется выражение вида:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n.$$

Здесь комплексные числа a_0, a_1, …, a_n — коэффициенты многочлена $f(z)$. Если $a_0 \neq 0$, то целое неотрицательное число n называется ***степенью*** многочлена. Используется обозначение: $n = \deg f(z)$ (от английского слова **degree** — степень). В этом случае слагаемое $a_0 z^n$ называется ***старшим членом*** $f(z)$.

Многочлены $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$, $g(z) = b_0 z^n + \ldots + b_{n-1} z + b_n$ называются равными, если коэффициенты при одинаковых степенях z совпадают: $a_0 = b_0$, …, $a_n = b_n$. Множество всех многочленов от z над полем $\mathbb{C}$ будем обозначать символом $\mathbb{C}[z]$.

Определим действия ***сложения*** и ***умножения*** многочленов. Чтобы сложить два многочлена, нужно в выражении

$$f(z) + g(z) = (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n) + (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m)$$

привести подобные члены, представив его как некоторый новый многочлен. Ясно, что степень $f(z) + g(z)$ равна наибольшей из степеней $f(z)$, $g(z)$. Чтобы вычислить произведение многочленов $f(z)$, $g(z)$, нужно раскрыть скобки по обычным правилам и в полученном выражении привести подобные:

$$f(z)g(z) = (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n)(b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m) =$$
$$= a_0 b_0 z^{m+n} + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z^{m+n-1} + \ldots + a_n b_m.$$

Степень произведения многочленов, как видим, равна сумме степеней сомножителей:

$$\deg(f(z)g(z)) = \deg f(z) + \deg g(z).$$

В качестве частного случая рассмотрим многочлены степени 0, или ***константы***:

$$f(z) = a_0,$$

любое комплексное число можно рассматривать как многочлен нулевой степени. Исключение составляет число 0: это тоже многочлен, но степень его не определена. Действительно, нельзя считать, что степень многочлена 0 равна 0: из соотношения

$$\deg(f(z) \cdot 0) = \deg 0 = \deg f(z) + \deg 0$$

мы получили бы противоречие. (Чтобы избежать здесь противоречия, иногда полагают $\deg 0 = -\infty$ («минус бесконечность»). Подумайте над этим, оставим этот подход без дальнейших комментариев).

Пример 6. Выражения z^3, $z^3 - iz^2 + 5z - 3$, $2z^3 - 1$ являются многочленами 3-й степени. Константы 2, -8, $3i + 4$ — многочлены нулевой степени. Выражения $x^2 - 5x + 3$, $x^2 + 1$ — многочлены 2-й степени от x. Обозначение переменной, конечно, не влияет на суть самого понятия.

Замечание. Каждый многочлен $f(z)$ можно рассматривать как отображение множества $\mathbb{C}$ в себя:

$$f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Возможно, такой подход более содержателен — иногда удобнее работать с отображениями (функциями), чем с абстрактными выражениями определенного вида. В частности, при работе с константами иногда пишут

$f(z) \equiv a_0$, чтобы подчеркнуть, что имеется в виду не уравнение, а многочлен, тождественно равный a_0. Другими словами, отображение, сопоставляющее каждому комплексному числу число a_0. Нас, однако, как всегда в алгебре, в первую очередь будут интересовать не сами многочлены, а свойства введённых операций.

Теорема 3. Множество $\mathbb{C}[z]$ с введёнными операциями $+$ и $\cdot$ образует кольцо.

Доказательство состоит в непосредственной проверке 6 свойств кольца (см.1.3). Все они выполнены. Более того, в кольце $\mathbb{C}[z]$ умножение коммутативно: $f(z) \cdot g(z) = g(z) \cdot f(z)$, и существует единичный элемент: многочлен нулевой степени 1, обладающий свойством $f(z) \cdot 1 = f(z)$. Таким образом, $\mathbb{C}[z]$ не является полем только лишь потому, что не для всякого ненулевого многочлена существует обратный. Действительно, если $\deg f(z) > 0$, то не существует многочлена $g(z)$ такого, что $f(z) \cdot g(z) \equiv 1$.

Замечание. Рассматривая многочлены с действительными или только с рациональными коэффициентами, мы в точности так же получили бы кольца $\mathbb{R}[z]$ или $\mathbb{Q}[z]$.

6.3. Делимость многочленов. Алгоритм Евклида

Сначала научимся делить многочлен на другой многочлен с остатком. Используем, для наглядности, аналогию с делением в кольце целых чисел: «разделить 13 на 5 с остатком» означает представить число 13 в виде:

$$13 = 5 \cdot 2 + 3,$$

где 2 — неполное частное, 3 — остаток, который, конечно, меньше делителя: $3 < 5$. Аналогичные действия можно выполнять в кольце многочленов.

Теорема 4 ***(о делении многочленов с остатком).*** Для любых многочленов $f(z)$ и $g(z)$ существуют многочлены $h(z)$, $r(z)$, такие, что:

$$f(z) = g(z) \cdot h(z) + r(z), \quad \deg r(z) < \deg g(z).$$

Многочлены $h(z)$ (неполное частное) и $r(z)$ (остаток) определяются единственным образом.

Доказательство. Пусть $\deg f(z) = n$, $\deg g(z) = k$. Если $n < k$, то $h(z) \equiv 0$, $r(z) = f(z)$ удовлетворяют всем необходимым требованиям:

$$f(z) = 0 \cdot g(z) + f(z), \quad \deg f(z) < \deg g(z).$$

(Как и с числами: если 5 разделить на 7, то получится 0 и 5 в остатке).

Если же $n \geq k$, то поступаем так же, как при делении целых чисел «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \\ a_0 z^n + \dfrac{a_0 b_1}{b_0} z^{n-1} + \ldots \end{array} & b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \ldots + b_k \\ \cline{1-1}\cline{2-2}
c_0 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} & \dfrac{a_0}{b_0} z^{n-k} + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Одночлен $\dfrac{a_0}{b_0}z^{n-k}$ подобран так, чтобы после умножения на $g(z)$ и вычитания из $f(z)$ получился многочлен степени, меньшей n. Если $n-1<k$, то $r(z)=c_0z^{n-1}+\ldots+c_{n-1}$, и процесс деления закончен. Если же $n-1\geq k$, то продолжаем действовать аналогично. Так как после каждого вычитания степень многочлена уменьшается, то на некотором шаге получим многочлен $r(z)$, $\deg r(z)<k$, т. е. остаток.

Проверим единственность неполного частного и остатка. Допустим,

$$f(z)=g(z)\cdot h_1(z)+r_1(z),\quad f(z)=g(z)\cdot h_2(z)+r_2(z),$$

причём степени $r_1(z)$, $r_2(z)$ строго меньше степени $g(z)$. Тогда $g(z)\cdot(h_1(z)-h_2(z))=r_2(z)-r_1(z)$. Так как степень многочлена в правой части строго меньше степени $g(z)$, то такое равенство возможно лишь при $h_1(z)-h_2(z)=0$. Но тогда и $r_2(z)-r_1(z)=0$, т. е. $h_1(z)=h_2(z)$, $r_2(z)=r_1(z)$.

Пример 7. Разделить многочлен $2z^4-6z^3+z^2-5$ на многочлен z^2+3z-2.

Решение. Действуем по алгоритму, указанному в доказательстве теоремы:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} 2z^4-6z^3+z^2-5 \\ 2z^4+6z^3-4z^2 \end{array} & z^2+3z-2 \\ \cline{1-1}\cline{2-2}
-\begin{array}{l} -12z^3+5z^2-5 \\ -12z^3-36z^2+24z \end{array} & 2z^2-12z+41 \\ \cline{1-1}
-\begin{array}{l} 41z^2-24z-5 \\ 41z^2+123z-82 \end{array} & \\ \cline{1-1}
-147z+77 &
\end{array}
$$

Итак, неполное частное равно $2z^2-12z+41$, остаток равен $-147z+77$:

$$2z^4-6z^3+z^2-5=(z^2+3z-2)(2z^2-12z+41)+(-147z+77).$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда деление возможно без остатка. Будем говорить, что многочлен $f(z)$ ***делится*** на $g(z)$, (или: $g(z)$ является делителем $f(z)$), если существует многочлен $h(z)$ такой, что

$$f(z) = g(z) \cdot h(z).$$

Пример 8. Многочлен $z^2 - 1$ делится на многочлен $z + 1$, так как

$$z^2 - 1 = (z+1)(z-1).$$

Замечание. Константа $a \neq 0$ является делителем любого многочлена. Например, $3z + 5$ делится на 7. Действительно, $(3z+5) = 7 \cdot \left(\frac{3}{7}\,z + \frac{5}{7}\right)$.

Многочлен $d(z)$ называется ***наибольшим общим делителем*** многочленов $f(z)$ и $g(z)$, если выполнены условия:

1) $d(z)$ является делителем $f(z)$ и $g(z)$ (т. е. это ***общий*** делитель);

2) если какой-либо $h(z)$ делит $f(z)$ и $g(z)$, то $h(z)$ делит и $d(z)$ (т. е. это ***наибольший*** общий делитель).

Употребляется запись

$$d(z) = \text{НОД}(f(z), g(z)).$$

Замечание. $\text{НОД}(f(z), g(z))$ находится с точностью до постоянного множителя: если $d(z) = \text{НОД}(f(z), g(z))$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, то и $c \cdot d(z) = \text{НОД}(f(z), g(z))$. Если же $\text{НОД}(f(z), g(z)) = a \in \mathbb{C}$, то многочлены $f(z)$ и $g(z)$ называются ***взаимно простыми***.

Укажем алгоритм, позволяющий находить НОД двух многочленов (***алгоритм Евклида***). Пусть $\deg f(z) \geq \deg g(z)$. Пользуясь теоремой о делении с остатком, запишем ряд соотношений:

$$\begin{array}{ll}
f(z) = g(z) \cdot h_1(z) + r_1(z), & \deg r_1(z) < \deg g(z); \\
g(z) = r_1(z) \cdot h_2(z) + r_2(z), & \deg r_2(z) < \deg r_1(z); \\
r_1(z) = r_2(z) \cdot h_3(z) + r_3(z), & \deg r_3(z) < \deg r_2(z); \\
\multicolumn{2}{c}{\dotfill}
\end{array}$$

Здесь мы сначала $f(z)$ разделили на $g(z)$, получив в остатке $r_1(z)$; затем $g(z)$ разделили на $r_1(z)$, получив в остатке $r_2(z)$; затем каждый $r_i(z)$ делим на $r_{i+1}(z)$, обозначая остаток через $r_{i+2}(z)$. Так как степени остатков строго убывают, то на некотором шаге остаток будет равен 0. Окончание алгоритма Евклида запишется так:

$$\begin{aligned}
r_{k-2}(z) &= r_{k-1}(z) \cdot h_k(z) + r_k(z); \\
r_{k-1}(z) &= r_k(z) \cdot h_{k+1}(z).
\end{aligned}$$

Теорема 5. Последний не равный 0 остаток $r_k(z)$ в алгоритме Евклида является $\text{НОД}(f(z), g(z))$.

Доказательство. Сначала докажем, что $r_k(z)$ является общим делителем $f(z)$, $g(z)$. Поднимаясь вверх по записи алгоритма, последовательно убеждаемся, что $r_k(z)$ делит многочлены $r_{k-1}(z)$, $r_{k-2}(z)$,…, $r_1(z)$, $g(z)$, $f(z)$.

Теперь проверим, что $r_k(z)$ — наибольший общий делитель. Действительно, если $d(z)$ — какой-либо общий делитель $f(z)$ и $g(z)$, то, опускаясь вниз по записи алгоритма, видим, что $d(z)$ делит многочлены $r_1(z)$, $r_2(z)$, …, $r_k(z)$. Поэтому $r_k(z) = \text{НОД}(f(z), g(z))$.

Пример 9. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f(z) = z^4 + z^3 - 3z^2 - 4z - 1, \quad g(z) = z^3 + z^2 - z - 1.$$

Решение. Применим алгоритм Евклида:

1)
$$\begin{array}{rl} -\begin{array}{r} z^4 + z^3 - 3z^2 - 4z - 1 \\ z^4 + z^3 - z^2 - z \phantom{{}-1} \end{array} & \begin{array}{|c} z^3 + z^2 - z - 1 \\ \hline z \end{array} \\ \hline -2z^2 - 3z - 1 & \end{array},$$

$$r_1(z) = -2z^2 - 3z - 1;$$

2)
$$\begin{array}{rl} -\begin{array}{r} z^3 + \phantom{\frac{3}{2}}z^2 - \phantom{\frac{1}{2}}z - 1 \\ z^3 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z \phantom{{}-1} \end{array} & \begin{array}{|c} -2z^2 - 3z - 1 \\ \hline -\frac{1}{2}z + \frac{1}{4} \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} -\frac{1}{2}z^2 - \frac{3}{2}z - 1 \\ -\frac{1}{2}z^2 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4} \end{array} & \\ \hline -\frac{3}{4}z - \frac{3}{4} & \end{array},$$

$$r_2(z) = -\frac{3}{4}z - \frac{3}{4};$$

3)
$$\begin{array}{rl} -\begin{array}{r} -2z^2 - 3z - 1 \\ -2z^2 - 2z \phantom{{}-1} \end{array} & \begin{array}{|c} -\frac{3}{4}z - \frac{3}{4} \\ \hline \frac{8}{3}z + \frac{4}{3} \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} -z - 1 \\ -z - 1 \end{array} & \\ \hline 0 & \end{array},$$

$$r_3(z) = 0.$$

Значит, НОД$(f(z), g(z)) = -\frac{3}{4}z - \frac{3}{4}$. Так как НОД определяется с точностью до постоянного множителя, то удобно считать, что НОД$(f(z), g(z)) = z + 1$.

Замечание Доказательство теоремы и рассмотренный пример показывают, что если многочлены $f(z)$, $g(z)$ имеют действительные (или рациональные) коэффициенты, то и НОД$(f(z), g(z))$ будет иметь действительные (рациональные) коэффициенты.

6.4. Корни многочлена. Разложение на множители

Пусть $f(z)$ — многочлен из $\mathbb{C}[z]$. Число $a \in \mathbb{C}$ называется ***корнем*** многочлена $f(z)$, если $f(a) = 0$. (Здесь $f(a)$ — значение $f(z)$ при $z = a$, т. е. число которое получится, если вместо z подставить a и выполнить требуемые действия).

Теорема 6 *(теорема Безу).* Остаток от деления $f(z)$ на $z - a$ равен $f(a)$.

Доказательство. Разделим $f(z)$ на $z - a$ с остатком:

$$f(z) = (z - a)h(z) + r(z), \quad \deg r(z) < \deg(z - a).$$

Так как $\deg(z - a) = 1$, то $\deg r(z) = 0$, или $r(z) = 0$, т. е. $r(z) \equiv c = const$. Подставляя $z = a$, найдём эту константу: $f(a) = 0 + c = c$. Теорема доказана.

Следствие. Если a — корень $f(z)$, то $f(z)$ делится на $(z - a)$.

Введём понятие кратности корня. Как мы уже знаем, если a — корень $f(z)$, то

$$f(z) = (z - a)f_1(z).$$

Если число a не является корнем $f_1(z)$, то a называется ***простым*** корнем $f(z)$. Если же $f_1(a) = 0$, то найдём натуральное число k такое, что

$$f(z) = (z - a)^k f_k(z),$$

причём $f_k(a) \neq 0$. В этом случае число k называется ***кратностью*** корня a.

Сформулируем так называемую «основную теорему алгебры». Её доказательство для нас сейчас слишком сложно и будет дано позднее, после изучения других разделов математики.

Теорема 7 *(основная теорема алгебры).* Любой многочлен степени большей 0 имеет в поле комплексных чисел хотя бы 1 корень.

Следствие 1. Любой многочлен степени n имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Доказательство. Пусть $f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n$. Если $n > 0$, то, по теореме 5, существует корень a_1. По следствию из теоремы Безу: $f(z) = (z - a_1) f_1(z)$. Если $n = 1$, то $f_1(z) = const = c_0$. Если же $n > 1$, то $\deg f_1(z) = n - 1 > 0$, а значит $f_1(z)$ имеет корень. Обозначим его a_2. По следствию из теоремы Безу, $f_1(z) = (z - a_2) f_2(z)$. Поэтому

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) f_2(z).$$

Продолжая рассуждение, получим:

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdot \ldots \cdot (z - a_n) c_0.$$

Среди корней a_1, a_2, …, a_n могут быть, конечно, одинаковые.

Следствие 2. Любой многочлен над полем $\mathbb{C}$ единственным образом разлагается в произведение линейных (т. е. 1-й степени) множителей.

Доказательство. Требуемое разложение только что получено. Старшие коэффициенты линейных множителей всегда можно считать равными 1, умножая всё произведение на c_0.

Допустим, имеется и другое разложение на линейные множители:

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n) c_0 = (z - b_1)(z - b_2) \ldots (z - b_n) c_0.$$

Тогда ясно, что b_1 — корень $f(z)$. Значит, он встречается среди a_1, …, a_n. Сокращаем одинаковые скобки и переходим к b_2. Продолжая сокращение, убедимся, что числа b_1, …, b_n — это те же корни a_1, …, a_n, записанные, возможно, в другом порядке.

Пример 10. Найти корни многочлена $f(z) = z^3 + z^2 - 5z + 3$.

Решение. Мы должны решать кубическое уравнение $f(z) = 0$. Вообще-то это трудная задача. Но в нашем примере можно заметить, что $f(1) = 0$, т. е. $z = 1$ — корень. Поэтому $f(z)$ делится на $z - 1$. Разделим:

$$\begin{array}{r|l}
z^3 + z^2 - 5z + 3 & z - 1 \\
\underline{z^3 - z^2 \phantom{{}- 5z + 3}} & \overline{z^2 + 2z - 3} \\
2z^2 - 5z + 3 & \\
\underline{2z^2 - 2z \phantom{{}+ 3}} & \\
-3z + 3 & \\
\underline{-3z + 3} & \\
0. &
\end{array}$$

Получили: $f(z) = (z - 1)(z^2 + 2z - 3)$.

Корни многочлена $z^2 + 2z - 3$, или, что то же самое, корни квадратного уравнения $z^2 + 2z - 3 = 0$, ищем по известной из школьного курса формуле: $z_{2,3} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{D}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$; здесь D — дискриминант.

Получаем $z_2 = 1$, $z_3 = -3$. Итак, наш многочлен имеет корни $z_1 = 1$, $z_2 = 1$, $z_3 = -3$. Корень -3 является простым, корень 1 — кратный, кратности 2. Справедливо разложение на множители:

$$f(z) = z^3 + z^2 - 5z + 3 = (z-1)^2(z+3).$$

Пример 11. Разложить на множители многочлен $4z^2 - 16z + 25$.

Решение. Найдём корни, решая квадратное уравнение $4z^2 - 16z + 25 = 0$.

$$z_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256-400}}{8} = \frac{16 \pm \sqrt{-144}}{8} = \frac{16 \pm 12i}{8} = 2 \pm \frac{3}{2}\, i\,.$$

Получаем разложение:

$$4z^2 - 16z + 25 = 4(z - 2 - \frac{3}{2}\, i)(z - 2 + \frac{3}{2}\, i)\,.$$

Изучим теперь вопрос о разложении на множители многочленов, все коэффициенты которых действительные числа. Конечно, построенная теория для них тоже справедлива. Ситуация, однако, меняется, если пытаться разлагать над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, т. е. на множители, которые тоже являются многочленами с действительными коэффициентами. Нам потребуется один вспомогательный результат.

Лемма. Пусть $f(z) \in \mathbb{R}[z]$, т. е. $f(z)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Если c — корень $f(z)$, то $\bar{c}$ (комплексно сопряжённое число) тоже является корнем $f(z)$.

Доказательство. Пусть $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, причём все a_i — действительные числа. По условию $f(c) = a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Вычисляя сопряжённое число к левой и правой части и пользуясь свойствами сопряжённых чисел, получим: $\overline{f(c)} = \bar{a}_0 \bar{c}^{\,n} + \bar{a}_1 \bar{c}^{\,n-1} + \ldots + \bar{a}_{n-1}\bar{c} + \bar{a}_n = 0$. Но $\bar{a}_i = a_i$, так как $a_i \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$a_0 \bar{c}^{\,n} + a_1 \bar{c}^{\,n-1} + \ldots + a_{n-1}\bar{c} + a_n = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теперь возьмём $f(z) \in \mathbb{R}[z]$ и попытаемся разложить его на множители над полем $\mathbb{R}$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — все действительные корни $f(z)$. Тогда, по теореме Безу:

$$f(z) = (z - a_1) \cdot \ldots \cdot (z - a_k) \cdot h(z),$$

причём $h(z)$ уже действительных корней не имеет, но все коэффициенты $h(z)$ — действительные (так как $h(z)$ — результат деления $f(z) \in \mathbb{R}[z]$ на $(z - a_1) \cdot \ldots \cdot (z - a_k) \in \mathbb{R}[z]$).

Если $h(z) = const$, то мы получили разложение $f(z)$ над $\mathbb{R}$ на линейные множители. Если $h(z) \neq const$, то возьмём c_1 — комплексный корень $h(z)$. По лемме $\bar{c}_1$ — тоже корень, и по теореме Безу получаем:

$$h(z) = (z - c_1)(z - \bar{c}_1)h_1(z).$$

Так как $(z - c_1)(z - \bar{c}_1) = z^2 - (c_1 + \bar{c}_1)z + c_1\bar{c}_1 = z^2 + p_1 z + q_1$ — многочлен с действительными коэффициентами, то и $h_1(z)$ тоже имеет действительные коэффициенты. Далее рассуждение можно повторить: либо $h_1(z) = const$, и разложение окончено, либо $h_1(z)$ имеет комплексно сопряжённые корни c_2, $\bar{c}_2$, а значит делится на $z^2 + p_2 z + q_2$, и т. д. Итак, доказана

Теорема 8. Любой многочлен с действительными коэффициентами разлагается над полем $\mathbb{R}$ в произведение множителей 1-й и 2-й степени:

$$f(z) = b_0(z - a_1)\ldots(z - a_k)(z^2 + p_1 z + q_1)\ldots(z^2 + p_l z + q_l),$$

где b_0 — старший коэффициент, $k + 2l = n = \deg f(z)$.

Пример 12. Рассмотрим многочлен из $\mathbb{R}[z]$:

$$f(z) = z^3 - z^2 + z - 1.$$

Его разложение над $\mathbb{R}$ имеет вид: $f(z) = (z - 1)(z^2 + 1)$.

Его разложение над $\mathbb{C}$ имеет вид: $f(z) = (z - 1)(z - i)(z + i)$.

6.5. Задачи с решениями

1. Найти сумму $z_1 + z_2$, разность $z_1 - z_2$, произведение $z_1 z_2$, частное $\dfrac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 4 - 3i$.

Решение.

$$z_1 + z_2 = 2 + 5i + 4 - 3i = 6 + 2i;$$
$$z_1 - z_2 = (2 + 5i) - (4 - 3i) = -2 + 8i;$$
$$z_1 z_2 = (2 + 5i)(4 - 3i) = 8 - 6i + 20i - 15i^2 = 23 + 14i.$$

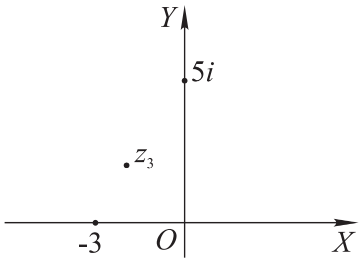
Здесь мы раскрыли скобки и воспользовались соотношением $i^2 = -1$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 5i}{4 - 3i} = \frac{(2 + 5i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{8 + 6i + 20i + 15i^2}{16 - 9i^2} = \frac{-7 + 26i}{25} = -\frac{7}{25} + \frac{26}{25}i.$$

Для выполнения деления умножили числитель и знаменатель на число, сопряжённое знаменателю.

2. Найти модули и аргументы чисел $z_1 = 5i$, $z_2 = -3$, $z_3 = -2 + 2i$, $z_4 = (1 - i)^{10}$.

Решение. Если $z = a + bi$, $\varphi = \arg z$, то $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$.



Поэтому $|z_1| = |5i| = \sqrt{5^2+0^2} = 5$. Для нахождения аргумента z_1 пользуемся геометрической интерпретацией: число $z_1 = 5i$ изображается точкой с координатами $(0,5)$. Ясно, что $\varphi = \arg z_1 = \dfrac{\pi}{2}$. Далее, $|z_2| = |-3| = 3$, $\arg(-3) = \pi$ — здесь опять проще использовать геометрическое представление, чем формулы для модуля и аргумента. Рассмотрим число z_3:

$$|z_3| = |-2+2i| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2},$$

$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{2}{-2} = -1, \quad \varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ (так как z_3 лежит в 3-й четверти). Для вычисления z_4 запишем число $1-i$ в тригонометрической форме и воспользуемся формулой Муавра:

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$(1-i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -32i.$$

Значит, $|z_4| = 32$, $\arg z_4 = -\dfrac{\pi}{2}$.

3. Найти действительную и мнимую часть числа $z = \left(2\sqrt{3}+2i\right)^5$.

Решение. Возведение в степень удобнее выполнять в тригонометрической форме:

$$\left|2\sqrt{3}+2i\right| = \sqrt{12+4} = 4, \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Так как число $2\sqrt{3}+2i$ находится в 1-й четверти, то $\varphi = \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$. Применяем формулу Муавра:

$$z = \left[4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^5 = 4^5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =$$
$$= 4^5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) = -512\sqrt{3} + 512i.$$

Значит, $\mathrm{Re}z = -512\sqrt{3}, \quad \mathrm{Im}z = 512$.

4. Найти все значения $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Пусть $z^3 = 1$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Запишем число 1 в тригонометрической форме:

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0).$$

Значит, $r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$. Отсюда получаем: $r^3 = 1$, $3\varphi = 0 + 2\pi k$, $\varphi = \dfrac{2\pi k}{3}$. Так как r — действительное число, то $r = 1$.

При $k = 0 : \varphi = 0$, $z = \cos 0 + i\sin 0 = 1$,

При $k = 1 : \varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $z = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

При $k = 2 : \varphi = \dfrac{4\pi}{3}$, $z = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Остальные значения k не дадут новых корней.

Замечание. Кубические корни из единицы, т. е. числа 1, $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность единичного радиуса.

5. Решить уравнение $z^2 - z - 3iz + 2i - 2 = 0$.

Решение: Находим корни квадратного уравнения по известной формуле: $z_{1,2} = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2}$. Знак $\pm$ перед корнем не ставим — два разных значения квадратного корня всегда отличаются знаком.

$$D = (1 + 3i)^2 - 4(2i - 2) = 1 + 6i - 9 - 8i + 8 = -2i.$$

Для извлечения корня запишем число $-2i$ в тригонометрической форме:

$$-2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-2i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right).$$

При $k = 0 : \left(\sqrt{D}\right)_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 1 - i$;

При $k = 1 : \left(\sqrt{D}\right)_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1 + i$. Подставляя в формулу, находим:

$$z_1 = \frac{1}{2}(1 + 3i + 1 - i) = 1 + i,$$

$$z_2 = \frac{1}{2}(1 + 3i - 1 + i) = 2i.$$

6. Разделить многочлен $6z^5 - 9z^4 - 7z^3 + 18z^2 - 6z + 3$ на многочлен $3z^3 - 5z + 1$ с остатком.

Решение. Выполняем деление «уголком»;

$$
\begin{array}{rl}
- \begin{array}{r} 6z^5 - 9z^4 - 7z^3 + 18z^2 - 6z + 3 \\ 6z^5 \qquad\ \ - 10z^3 + 2z^2 \qquad\qquad\ \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|l} 3z^3 - 5z + 1 \\ \hline 2z^2 - 3z + 1 \end{array} \\
- \begin{array}{r} -9z^4 + 3z^3 + 16z^2 - 6z + 3 \\ -9z^4 \qquad\quad + 15z^2 - 3z \qquad \\ \hline \end{array} & \\
- \begin{array}{r} 3z^3 + z^2 - 3z + 3 \\ 3z^3 + \qquad - 5z + 1 \\ \hline z^2 + 2z + 2. \end{array} &
\end{array}
$$

Неполное частное $2z^2 - 3z + 1$, остаток $z^2 + 2z + 2$.

7. Найти корни многочлена $f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$, если один из них известен: $x_1 = -2$.

Решение. По следствию из теоремы Безу, многочлен $f(x)$ делится на $x + 2$ без остатка.

$$
\begin{array}{rl}
- \begin{array}{r} 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 \\ 6x^3 + 12x^2 \qquad\qquad \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c} x + 2 \\ \hline 6x^2 - x - 1 \end{array} \\
- \begin{array}{r} -x^2 - 3x - 2 \\ -x^2 - 2x \qquad \\ \hline \end{array} & \\
- \begin{array}{r} -x - 2 \\ -x - 2 \\ \hline 0. \end{array} &
\end{array}
$$

Следовательно, $f(x) = (x + 2)(6x^2 - x - 1)$, и остальные корни $f(x)$ — это корни многочлена $6x^2 - x - 1$. Найдём их как обычно:

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12}; \quad x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = -\frac{1}{3}.$$

8. Найти корни многочлена $f(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$, если один из них известен: $x_1 = 1 + 2i$.

Решение. Так как $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, то вместе с x_1 его корнем является и сопряжённое число $x_2 = \overline{x_1} = 1 - 2i$. Поэтому $f(x)$ делится без остатка на многочлен

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = (x - 1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 5.$$

Выполним деление:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3-5x^2+11x-15 \\ x^3-2x^2+\ \ 5x \quad\quad \end{array} & \begin{array}{l} x^2-2x+5 \\ \hline x-3 \end{array} \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} -3x^2+\ \ 6x-15 \\ -3x^2+\ \ 6x-15 \end{array} & \\
\cline{1-1}
0. &
\end{array}
$$

Следовательно, $f(x) = (x^2 - 2x + 5)(x - 3)$, и третий корень $x_3 = 3$.

9. Разложить многочлен $f(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z$ на множители над полем $\mathbb{C}$.

Решение. Сгруппируем слагаемые так:

$$
f(z) = \left(z^4 + 4z^3 + 4z^2\right) + \left(2z^2 + 4z\right) = \left(z^2 + 2z\right)^2 + 2\left(z^2 + 2z\right) = \\
= \left(z^2 + 2z\right)\left(z^2 + 2z + 2\right) = z\,(z + 2)\left(z^2 + 2z + 2\right).
$$

Получено разложение над полем $\mathbb{R}$. Теперь нужно найти корни многочлена $z^2 + 2z + 2$.

$$
z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.
$$

Значит, $z^2 + 2z + 2 = (z + 1 - i)(z + 1 + i)$. Разложение $f(z)$ над $\mathbb{C}$ имеет вид:

$$
f(z) = z(z + 2)(z + 1 - i)(z + 1 + i).
$$

10. Разложить многочлен $f(x) = x^4 + 13x^2 + 36$ на множители

а) над полем $\mathbb{R}$; б) над полем $\mathbb{C}$.

Решение. Приравнивая многочлен к нулю, получаем биквадратное уравнение. Находим сначала x^2:

$$
x^2 = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{-13 \pm 5}{2}.
$$

Получили: $x^2 = -4$ или $x^2 = -9$. Это соответствует разложению

$$
f(x) = (x^2 + 4)(x^2 + 9).
$$

Действительных корней нет, поэтому дальнейшее разложение над $\mathbb{R}$ невозможно. А в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ имеются корни:

$$
x_{1,2} = \sqrt{-4} = \pm 2i, \quad x_{3,4} = \pm 3i.
$$

Поэтому разложение над $\mathbb{C}$ имеет вид:

$$
f(x) = (x - 2i)(x + 2i)(x - 3i)(x + 3i).
$$

6.6. Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти действительную и мнимую часть чисел:

   а) $(2-5i)(3+2i)$; б) $\dfrac{1}{1-i}$; в) $\dfrac{2-3i}{3+i}$; г) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$;

   д) $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$; е) $\dfrac{\left(i^7+2\right)^2}{i}$.

2. Найти модули и аргументы чисел:

   а) $i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-1-i$; в) $\dfrac{1-i}{1+i}$; г) $1-\sqrt{2}$;

   д) $(3i+3)^5$; е) $\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$.

3. Найти все значения корней:

   а) $\sqrt{1+i}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[4]{-1}$; г) $\sqrt[5]{1}$; д) $\sqrt[3]{2i-2}$.

4. Решить уравнения:

   а) $x^2-4x+5=0$; б) $4x^2-4x+17=0$;
   в) $z^2-2iz-5z+5i+5=0$; г) $z^2-2iz-6z=2i-8$.

5. Решить уравнения:

   а) $\overline{z}=z^2$; б) $\overline{z}=z^3$; в) $|\,z\,|-z=1+2i$.

6. Найти остаток от деления многочлена $f(z)$ на многочлен $g(z)$, если

   а) $f(z)=2z^4-5z^3+8z^2-4z+1$, $g(z)=z^2-z+2$;
   б) $f(z)=z^5-3z+1$, $g(z)=z-4$;
   в) $f(z)=z^5+5z^4-13z^3+21z^2-34z+8$, $g(z)=z^2+7z-2$.

7. Найти наибольший общий делитель многочленов $f(z)$ и $g(z)$, если

   а) $f(z)=z^2+z-2$, $g(z)=z^3+5z^2+5z-2$;
   б) $f(z)=z^6+2z^4-4z^3-3z^2+8z-5$, $g(z)=z^5+z^2-z+1$;
   в) $f(z)=z^3-3z^2+1$, $g(z)=z^4-4z^3+1$.

8. Найти все корни многочлена $f(z)$, если один из них известен:

   а) $f(z)=z^3-9z^2-z+105$, $z_1=7$;
   б) $f(z)=z^3-9z^2+19z+29$, $z_1=5-2i$;
   в) $f(z)=z^4-2z^3+18z^2-2z+17$, $z_1=i$;
   г) $f(z)=z^3-3z^2-iz^2+iz+2i+4$, $z_1=2+i$.

9. Разложить многочлен $f(z)$ на множители над полем $\mathbb{C}$:

   а) $f(z)=z^3+8$;
   б) $f(z)=z^2+4$;
   в) $f(z)=z^2-6z+10$;
   г) $f(z)=z^5-z^4+4z-4$.

10. Разложить многочлен $f(z)$ на множители над полем $\mathbb{R}$:
а) $f(z) = 4z^4 - 12z^3 + 13z^2$;
б) $f(z) = z^4 + 8z^2 + 12$;
в) $f(z) = z^6 + 27$;
г) $f(z) = z^5 - z^4 + 4z - 4$.

6.7. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Найти модуль числа $\dfrac{2+i}{2-i}$.

2. Найти $\operatorname{Re}\left(\dfrac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^4$.

3. Найти действительную часть корней квадратного уравнения
$$z^2 - 16z + 68 = 0.$$

4. Разделить многочлен x^3+2x^2+5x+6 на многочлен x^2+2 с остатком. Найти значение остатка при $x = 3$.

5. Найти действительный корень многочлена $z^3 - 6z^2 + 34z - 104$, если известен один из его комплексных корней: $z = 1 + 5i$.

6. Найти свободный член многочлена, если его старший коэффициент равен 1, а корнями являются числа 3, i, $-i$.

ГЛАВА 7

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

7.1. Основные понятия

Квадратичной формой от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется выражение вида:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Комплексные числа a_{ij} называются коэффициентами, матрица $A = (a_{ij})$ — матрицей квадратичной формы. Всегда можно считать, что $a_{ij} = a_{ji}$, т. е. матрица A — симметрическая: $A = A^T$. Поясним это на примере.

Пример 1. Квадратичную форму $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1x_2 + 3x_2x_1$ удобнее записывать так: $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_2$ и считать, что $a_{12} = a_{21} = 4$. Матрица этой квадратичной формы имеет вид: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Квадратичная форма называется ***действительной***, если $a_{ij} \in \mathbb{R}$. В примере 1 — действительная квадратичная форма.

Ранг матрицы A называется ***рангом квадратичной формы***. Если $r(A) = n$, то квадратичная форма называется ***невырожденной***.

Пример 2. Рассмотрим $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 + 10xy$. Матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$. Поэтому $f(x, y)$ — невырожденная действительная квадратичная форма.

Пример 3. Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 16x_1x_3 - 8x_2x_3$. Тогда матрица $f(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -4 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

Квадратичные формы удобно записывать в матричном виде. Пусть $X = (x_1, \ldots, x_n)$ — строка неизвестных. После транспонирования строка X превращается в столбец X^T. Если в выражении XAX^T выполнить с матрицами указанные действия, то получим квадратичную форму с матрицей A:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = XAX^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Пример 4. Квадратичная форма из примера 2 в матричном виде запишется так:

$$(x, y)\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (3x + 5y, 5x + 4y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$
$$= (3x + 5y)x + (5x + 4y)y = 3x^2 + 5yx + 5xy + 4y^2 = 3x^2 + 10xy + 4y^2.$$

Рассмотрим так называемую ***линейную замену переменных***, т. е. переход от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= s_{11}y_1 + \ldots + s_{n1}y_n, \\ x_2 &= s_{12}y_1 + \ldots + s_{n2}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= s_{1n}y_1 + \ldots + s_{nn}y_n. \end{aligned}$$

В матричной записи это преобразование запишется так: $X = YS$. Матрица $S = (s_{ij})$ называется ***матрицей линейной замены переменных***. Заметим, что матрица S строится, как говорят, не «по строкам», а «по столбцам». То есть коэффициенты, например, первой формулы: $x_1 = s_{11}y_1 + \ldots + s_{n1}y_n$ записываются в 1-й столбец S. Если S невырожденная матрица, то можно выразить $y_1, \ldots, y_n$ через $x_1, \ldots, x_n$: $Y = XS^{-1}$, т. е. S^{-1} — матрица обратной замены.

Теорема 1. При линейной замене переменных с матрицей S квадратичная форма с матрицей A переходит в квадратичную форму с матрицей SAS^T.

Доказательство. Выполним в форме $f = XAX^T$ замену переменных $X = YS$:

$$f = XAX^T = (YS)A(YS)^T = (YS)A(S^TY^T) = Y(SAS^T)Y^T,$$

что и требовалось. Здесь мы воспользовались свойством операции транспонирования: $(YS)^T = S^TY^T$. Докажем это свойство в общем виде.

Лемма. Если произведение матриц A, B определено, то

$$(AB)^T = B^TA^T.$$

Доказательство. Найдём элемент, стоящий в матрице в левой части равенства на пересечении i-й строки и j-го столбца. В матрице AB он находится на пересечении j-й строки и i-го столбца, т. е. равен произведению j-й строки A на i-й столбец B.

Аналогично, вычислим элемент, стоящий на этом же месте (i, j) в матрице в правой части. Он равен произведению i-й строки B^T на j-й столбец A^T, или, что то же самое, i-го столбца B на j-ю строку A. Получили одно и то же, значит, матрицы слева и справа совпадают. Лемма доказана.

Пример 5. Провести в квадратичной форме $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 2x_2^2$ линейную замену переменных $x_1 = y_1 - 2y_2$, $x_2 = 2y_1 - 3y_2$.

Решение. Сначала выполним задание непосредственно, а затем в матричном виде. Подставляем:

$$f = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 2x_2^2 = 3(y_1 - 2y_2)^2 + 8(y_1 - 2y_2)(2y_1 - 3y_2) - 2(2y_1 - 3y_2)^2 =$$
$$= 3(y_1^2 - 4y_1y_2 + 4y_2^2) + 8(2y_1^2 - 3y_1y_2 - 4y_1y_2 + 6y_2^2) - 2(4y_1^2 - 12y_1y_2 + 9y_2^2) =$$
$$= 11y_1^2 - 44y_1y_2 + 42y_2^2.$$

В матричном виде: в квадратичной форме

$$f = XAX^T = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

нужно сделать линейную замену переменных $X = YS$ или, подробнее,

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим новую матрицу:

$$SAS^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -18 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 \\ -22 & 42 \end{pmatrix}.$$

Оба способа привели нас, конечно, к одному результату. Понятно, что мы будем стараться применять такие линейные замены, чтобы получаемые квадратичные формы имели бы наиболее простой вид.

7.2. Приведение к каноническому виду

Квадратичная форма $f(y_1, \ldots, y_n) = YBY^T$ называется приведённой к ***каноническому виду***, если её матрица B является диагональной. Другими словами,

$$f(y_1, \ldots, y_n) = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \ldots + b_ny_n^2.$$

Теорема 2. Любую квадратичную форму можно невырожденной линейной заменой переменных привести к каноническому виду.

Доказательство проведём с помощью индукции по числу переменных n. Если $n = 1$, то форма имеет вид $f(x_1) = a_{11}x_1^2$, который уже является каноническим. Поэтому база индукции имеется. Предположение индукции: считаем, что теорема справедлива, если число неизвестных меньше n. Рассмотрим квадратичную форму от n переменных:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = XAX^T.$$

Случай 1. Некоторый диагональный коэффициент $a_{ii} \neq 0$. Например, $a_{11} \neq 0$. Сгруппируем слагаемые в $f(x_1, \ldots, x_n)$ так: сначала выпишем те из них, которые содержат x_1, затем слагаемые, не содержащие x_1. Проведём преобразования:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + f_1(x_2, \ldots, x_n) = \\ &= a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right] - \\ &\quad - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + f_1(x_2, \ldots, x_n) = \\ &= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + f_2(x_2, ..., x_n). \end{aligned}$$

Мы выделили полный квадрат, а все слагаемые, не содержащие x_1, составляют квадратичную форму $f_2(x_2, \ldots, x_n)$. Так как число переменных в форме $f_2(x_2, \ldots, x_n)$ меньше n, то, по предположению индукции, существует невырожденная линейная замена переменных, приводящая $f_2(x_2, \ldots, x_n)$ к виду:

$$f_2 = b_2y_2^2 + b_3y_3^2 + \ldots + b_ny_n^2.$$

Запишем это преобразование с помощью обратной матрицы, т. е. выражая новые переменные через старые:

$$\begin{aligned} y_2 &= s_{22}x_2 + s_{32}x_3 + \ldots + s_{n2}x_n, \\ y_3 &= s_{23}x_2 + s_{33}x_3 + \ldots + s_{n3}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= s_{2n}x_2 + s_{3n}x_3 + \ldots + s_{nn}x_n, \end{aligned}$$

причём $|S| = |s_{ij}| \neq 0$.

Рассмотрим теперь формулы замены n переменных, также выражая новые переменные через старые:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ y_2 &= \phantom{x_1 + {}} s_{22}x_2 + \ldots + s_{n2}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \phantom{x_1 + {}} s_{2n}x_2 + \ldots + s_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Это невырожденная замена, так как определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{vmatrix} = |S| \neq 0.$$

Ясно, что такое преобразование приводит $f(x_1, \ldots, x_n)$ к каноническому виду

$$a_{11}y_1^2 + b_2y_2^2 + \ldots + b_ny_n^2.$$

Случай 2. Все диагональные коэффициенты $a_{ii} = 0$. Однако какой-нибудь коэффициент не равен 0 (иначе форма — тождественный нуль). Пусть, например, $a_{12} \neq 0$. Рассмотрим линейную замену переменных:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_2, \\ x_2 &= y_1 + y_2, \\ x_3 &= \qquad\quad y_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \qquad\qquad\quad y_n. \end{aligned}$$

Так как $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, то это невырожденная замена. Квадратичная форма преобразуется так:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots = \\ &= 2a_{12}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + 2a_{13}(y_1 - y_2)y_3 + \ldots = \\ &= 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + 2a_{13}y_1y_3 - 2a_{13}y_2y_3 + \ldots \end{aligned}$$

В полученной форме слагаемое $2a_{12}y_1^2$ не может сократиться. Значит, как доказано в случае 1, эту форму можно привести к каноническому виду невырожденной линейной заменой переменных.

Итак, исходная квадратичная форма приводится к каноническому виду в результате последовательного применения двух невырожденных линейных замен. Теорема доказана.

Пример 6. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Решение. Проведём преобразования так, как в доказательстве теоремы (случай 1):

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) = \left[x_1^2 + 2x_1(2x_2+x_3) + (2x_2+x_3)^2\right] - \\
- (2x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_3 = \\
= (x_1+2x_2+x_3)^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_2x_3 = \\
= (x_1+2x_2+x_3)^2 - 3(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) + 3x_3^2 + 4x_3^2 = \\
= (x_1+2x_2+x_3)^2 - 3(x_2+x_3)^2 + 7x_3^2 = y_1^2 - 3y_2^2 + 7y_3^2.
\end{aligned}$$

Здесь невырожденная замена переменных задана формулами:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3, \\
y_2 &= x_2 + x_3, \\
y_3 &= x_3.
\end{aligned}$$

Замечание. Доказательство теоремы 2 фактически содержит ***алгоритм*** приведения квадратичной формы к каноническому виду. В примере 6 мы использовали этот алгоритм. Ясно, если квадратичная форма имеет действительные коэффициенты, то её всегда можно привести к каноническому виду линейной заменой с действительными коэффициентами. Причём можно добиться, чтобы коэффициенты в каноническом виде были $+1$ или -1.

Если же допустить замены с комплексными коэффициентами, то любую квадратичную форму можно привести к сумме квадратов. Покажем это на примере.

Пример 6 (продолжение). Мы привели квадратичную форму $f(x_1,x_2,x_3)$ к каноническому виду: $f(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 - 3y_2^2 + 7y_3^2$. Применим ещё одну линейную невырожденную замену:

$$\begin{aligned}
z_1 &= y_1, \\
z_2 &= \sqrt{3}y_2, \\
z_3 &= \sqrt{7}y_3.
\end{aligned}$$

Наша форма принимает вид: $f(z_1,z_2,z_3) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$. Применяя замену переменных с комплексными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
w_1 &= z_1, \\
w_2 &= iz_2, \\
w_3 &= z_3,
\end{aligned}$$

приведём форму к сумме квадратов:

$$f(w_1,w_2,w_3) = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2\ .$$

7.3. Закон инерции

Будем называть квадратичные формы f_1 и f_2 от одного и того же числа переменных ***эквивалентными***, если одну из них можно перевести в другую с помощью невырожденной линейной замены переменных. Применяется обозначение:

$$f_1 \underset{\mathbb{C}}{\sim} f_2,$$

где значок $\mathbb{C}$ означает, что допускаются замены с комплексными коэффициентами. Для действительных квадратичных форм запись $f_1 \underset{\mathbb{R}}{\sim} f_2$ означает, что они эквивалентны над полем $\mathbb{R}$, т. е. существует линейная замена переменных с действительными коэффициентами, переводящая одну из форм в другую. Следующая теорема даёт необходимое и достаточное условие эквивалентности над $\mathbb{C}$.

Теорема 3 (*«закон инерции»*).

$$f_1 \underset{\mathbb{C}}{\sim} f_2 \quad \Leftrightarrow \quad r(f_1) = r(f_2),$$

или словами: f_1 и f_2 эквивалентны над $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда их ранги равны.

Для доказательства нам потребуется одно свойство матриц. Рассмотрим его отдельно в виде леммы.

Лемма. Ранг произведения матриц меньше либо равен рангу каждого из сомножителей.

Доказательство леммы. Рассмотрим какой-либо, например p-й столбик матрицы AB:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dots & a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np} & \dots \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ \dots & a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \dots + a_{mn}b_{np} & \dots \end{pmatrix}.$$

Этот столбик является линейной комбинацией столбцов матрицы A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} b_{1p} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} b_{2p} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} b_{np}.$$

Итак, все столбцы матрицы AB — это линейные комбинации столбцов матрицы A.

Рассмотрим новую матрицу, присоединив к матрице A справа матрицу AB:

$$\left(A \ \vdots \ AB \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & c_{m1} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}.$$

Ранг полученной матрицы равен рангу A, потому что добавленные столбцы можно сделать нулевыми с помощью элементарных преобразований. С другой стороны, часть матрицы не может иметь ранг больший, чем ранг всей матрицы (ведь ранг — это максимальный порядок ненулевого минора), поэтому $r(AB) \le r(A)$.

Соотношение $r(AB) \le r(B)$ доказывается аналогично, нужно только рассмотреть строки AB и дописывать их к строкам B. Лемма доказана.

Следствие. Если S невырожденная квадратная матрица, то

$$r(AS) = r(SA) = r(A).$$

Доказательство. По лемме: $r(SA) \le r(A)$. Так как $A = S^{-1}(SA)$, то, опять применяя лемму, получим: $r(A) = r(S^{-1}(SA)) \le r(SA)$. Значит, $r(SA) = r(A)$.

Перейдём теперь к доказательству закона инерции.

Доказательство теоремы 3.

«⇒». Пусть $f_1 \underset{\mathbb{C}}{\sim} f_2$. Если A_1, A_2 — матрицы квадратичных форм f_1, f_2, S — матрица линейной замены переменных, переводящей f_1 в f_2, то, по теореме 1:

$$A_2 = SA_1S^T.$$

Применим следствие из леммы: $r(A_2) = r(SA_1S^T) = r(A_1)$. Итак, при невырожденной линейной замене переменных ранг квадратичной формы не меняется.

«⇐». Пусть $r(f_1) = r(f_2) = r$. В разделе 7.2 мы видели, что любую квадратичную форму можно с помощью невырожденной линейной замены над $\mathbb{C}$ привести к сумме квадратов. Так как ранг при этом не меняется, то квадратов будет ровно r. Значит,

$$f_1 \underset{\mathbb{C}}{\sim} y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_r^2, \qquad f_2 \underset{\mathbb{C}}{\sim} y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_r^2,$$

т. е. формы f_1, f_2 приводятся некоторыми невырожденными заменами с матрицами S_1, S_2 к одинаковому каноническому виду. Но тогда форма f_1 приводится к форме f_2 с помощью замены переменных с матрицей $S_2^{-1}S_1$.

Сформулируем без доказательства закон инерции для действительных квадратичных форм.

Теорема 4. Действительные квадратичные формы f_1 и f_2 эквивалентны над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые ранги и одинаковые ***положительные индексы инерции*** (так называется число положительных коэффициентов при квадратах в каноническом виде).

Пример 7. Квадратичные формы $f_1(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ и $f_2(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ не эквивалентны даже над полем $\mathbb{C}$, так как $r(f_1) = 2$, $r(f_2) = 1$.

Квадратичные формы $f_3(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2$, $f_4(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 2x_2^2$ эквивалентны над $\mathbb{C}$, так как $r(f_3) = r(f_4) = 2$, но не эквивалентны над $\mathbb{R}$: положительные индексы инерции у них разные.

7.4. Положительно определённые квадратичные формы

В этом разделе будем рассматривать только ***действительные*** квадратичные формы, т. е. $a_{ij} \in \mathbb{R}$ и переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ могут принимать значения только из множества $\mathbb{R}$.

Действительная квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется ***положительно определённой***, если при любых значениях переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0,$$

кроме случая $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (ясно, что $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$). Если же при любых значениях переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$, то форма называется ***отрицательно определённой***.

Пример 8. Квадратичная форма $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ является, очевидно, положительно определённой. Квадратичная форма $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$ не является положительно определённой, так как при $x_1 = -x_2 \neq 0$ принимает значение 0.

Теорема 5. При невырожденной линейной замене переменных положительная определённость сохраняется.

Доказательство. Запишем квадратичную форму f в матричном виде: $f = XAX^T$. Выполним линейную замену переменных с матрицей S:

$$X = YS, \quad |S| \neq 0, \quad f = (YS)A(YS)^T = Y(SAS^T)Y^T.$$

Возьмём ненулевой набор значений новых переменных $y_1, \ldots, y_n : Y \neq \bar{0}$. Тогда $X = YS \neq \bar{0}$ (если бы $X = \bar{0}$, то и $Y = XS^{-1} = \bar{0}$). Вычислим значение: $f(y_1, \ldots, y_n) = Y(SAS^T)Y^T = XAX^T = f(x_1, \ldots, x_n) > 0$, что и требовалось.

Теорема 6. Квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ положительно определена $\quad \Leftrightarrow \quad f(x_1, \ldots, x_n) \sim b_1y_1^2 + \ldots + b_ny_n^2$, где $b_i > 0$.

Доказательство.

«$\Leftarrow$». Ясно, что если $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то форма $b_1y_1^2 + \ldots + b_ny_n^2$ положительно определена. По теореме 5, тогда и $f(x_1, \ldots, x_n)$ положительно определена.

«⇒». Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ положительно определена. Приведём к каноническому виду:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \sim b_1y_1^2+\ldots+b_ny_n^2.$$

Допустим, что какой–либо из коэффициентов $b_i \le 0$. Возьмём значение $y_i = 1$, а остальные $y_j = 0$ (при $j \neq i$). Тогда $b_1y_1^2+\ldots+b_ny_n^2 = b_i \le 0$. Применяя теорему 5, видим, что тогда и исходная форма $f(x_1,\ldots,x_n)$ не является положительно определённой, а это противоречит условию. Теорема доказана.

Научимся теперь узнавать, является ли квадратичная форма положительно определённой, не приводя её к каноническому виду. Пусть форма имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Рассмотрим миноры этой матрицы, стоящие в левом верхнем углу:

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Они называются ***главными минорами***: первый из них — это коэффициент a_{11}, последний равен определителю матрицы A.

Теорема 7 *(критерий Сильвестра)*. Квадратичная форма $f(x_1,\ldots,x_n)$ положительно определена $\Leftrightarrow$ все главные миноры её матрицы положительны.

Доказательство.

«⇒». Приведём форму к каноническому виду с помощью невырожденной линейной замены переменных с матрицей S. Теоремы 5 и 6 показывают, что можно считать:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \sim y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2,$$

т. е. матрица формы преобразована в единичную:

$$SAS^T = E\ .$$

Отсюда, используя свойства определителей, получаем

$$\left|SAS^T\right| = |S|\,|A|\,\left|S^T\right| = \left|S^2\right|\,|A| = 1.$$

Поэтому $|A| = \dfrac{1}{|S|^2} > 0$, т. е. последний из главных миноров положителен.

Подставим вместо переменной x_n в форме $f(x_1,\ldots,x_n)$ число 0. Получим новую квадратичную форму от $n-1$ переменной: $f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$.

Ясно, что она тоже положительно определена. Новая форма имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Только что проведённое рассуждение показывает, что её определитель положителен. Но этот определитель — главный минор порядка $n-1$ матрицы исходной формы.

Продолжая уменьшать число переменных, постепенно докажем, что все главные миноры матрицы A положительны.

«$\Leftarrow$». Дано: все главные миноры матрицы A положительны. Будем доказывать, что квадратичная форма положительно определена методом математической индукции по числу переменных n.

База индукции: $n = 1$. Квадратичная форма имеет вид $f(x_1) = a_{11}x_1^2$. Её матрица: (a_{11}). Главный минор всего один, по условию он положителен: $a_{11} > 0$. Ясно, что тогда и $f(x_1) = a_{11}x_1^2 > 0$ при любом $x_1 \neq 0$.

Используя метод индукции, предположим, что теорема справедлива для квадратичных форм с числом переменных меньше n, и рассмотрим форму от n переменных. Запишем её следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_{nn}x_n^2 + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + \\ + 2a_{(n-1)n}x_{n-1}x_n + f_1(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Здесь в $f_1(x_1, \dots, x_{n-1})$ собраны слагаемые, не содержащие переменной x_n. Ясно, что

$$f_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

и главные миноры квадратичной формы $f_1(x_1, \dots, x_{n-1})$ — это главные миноры формы $f(x_1, \dots, x_n)$ порядков $1, 2, \dots, n-1$. По условию, они положительны. Значит, по предположению индукции, квадратичная форма $f_1(x_1, \dots, x_{n-1})$ положительно определена.

Применим теоремы 5 и 6: форму $f_1(x_1, \dots, x_{n-1})$ можно привести к сумме квадратов:

$$f_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \sim y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2.$$

Пусть это делается линейной заменой переменных с матрицей S:

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) = (y_1, \dots, y_{n-1})S, \quad |S| \neq 0.$$

Добавим к этим формулам ещё одну: $x_n = y_n$, т. е. рассмотрим линейную замену

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)S_1 \quad \text{с матрицей} \quad S_1 = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & S & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, как при этом изменится форма $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Слагаемое $a_{nn}x_n^2$ преобразуется в $a_{nn}y_n^2$. Выражение $f_1(x_1, \ldots, x_{n-1})$, как мы знаем, преобразуется к виду $y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2$. Остальные слагаемые

$$2a_{1n}x_1x_n + 2a_{2n}x_2x_n + \ldots + 2a_{(n-1)n}x_{n-1}x_n = (2a_{1n}x_1 + \ldots + 2a_{(n-1)n}x_{n-1})x_n$$

преобразуются к виду $(2b_1y_1 + 2b_2y_2 + \ldots + 2b_{n-1}y_{n-1})y_n$, где $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ — некоторые числа. Получаем:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &\sim a_{nn}y_n^2 + 2b_1y_1y_n + \ldots + 2b_{n-1}y_{n-1}y_n + y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2 = \\ &= (y_1 + b_1y_n)^2 - b_1^2y_n^2 + \ldots + (y_{n-1} + b_{n-1}y_n)^2 - b_{n-1}^2y_n^2 + a_{nn}y_n^2 = \\ &= (y_1 + b_1y_n)^2 + \ldots + (y_{n-1} + b_{n-1}y_n)^2 + cy_n^2. \end{aligned}$$

Здесь мы, перегруппировав слагаемые, выделили полные квадраты, а затем привели подобные, обозначив $c = a_{nn} - b_1^2 - \ldots - b_{n-1}^2$.

Сделаем ещё одну линейную замену переменных, обозначив

$$z_1 = y_1 + b_1y_n, \ \ldots, \ z_{n-1} = y_{n-1} + b_{n-1}y_n, \quad z_n = y_n.$$

Нетрудно и наоборот (начиная с последнего равенства) выразить $y_1, \ldots, y_n$ через $z_1, \ldots, z_n$:

$$\begin{array}{lcl} y_1 & = & z_1 - b_1z_n, \\ y_2 & = & z_2 - b_2z_n, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_{n-1} & = & z_{n-1} - b_{n-1}z_n, \\ y_n & = & z_n. \end{array}$$

Другими словами, выполняем линейную замену переменных $Y = ZS_2$ с матрицей

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ -b_1 & -b_2 & \ldots & -b_{n-1} & 1 \end{pmatrix}, \qquad |S_2| = 1 \neq 0.$$

Итак, квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ приведена к виду

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + cz_n^2.$$

Для этого выполнены две линейные невырожденные замены переменных:

$$X = YS_1 = (ZS_2)S_1 = Z(S_2S_1),$$

что равносильно линейной замене с матрицей S_2S_1. Значит, по теореме 1,

$$(S_2S_1)A(S_2S_1)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определители, получаем:

$$|S_2S_1|\,|A|\,\left|(S_2S_1)^T\right| = |A|\,|S_2S_1|^2 = c.$$

По условию, $|A| > 0$. Поэтому $c > 0$ и квадратичная форма

$$f \sim z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + cz_n^2$$

положительно определена. Теорема доказана.

Следствие. Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow$ знаки главных миноров чередуются, начиная с минуса.

Доказательство. Кроме формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ с матрицей $A = (a_{ij})$ рассмотрим квадратичную форму $-f(x_1, \ldots, x_n)$ с матрицей $-A = (-a_{ij})$.

Тогда: $f(x_1, \ldots, x_n)$ отрицательно определена $\Leftrightarrow$ $-f(x_1, \ldots, x_n)$ положительно определена $\Leftrightarrow$ главные миноры матрицы $(-a_{ij})$ положительны

$$\Leftrightarrow \quad -a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots$$

Ясно, что при умножении одной строки определителя на (-1) определитель меняет знак. Поэтому написанные неравенства равносильны следующим:

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad ...,$$

что и требовалось доказать.

Пример 9. Является ли положительно определённой квадратичная форма

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2\ ?$$

Решение. Рассмотрим матрицу данной квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Её главные миноры: $3 > 0$, $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0$. Поэтому, по критерию Сильвестра, форма положительно определена.

7.5. Евклидовы пространства и их преобразования

Линейные пространства и их линейные преобразования мы изучали в 3-й главе. Советуем читателю повторить эту тему, а также раздел 4.7, где в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ вводится скалярное произведение. Наша цель — построить теорию для исследования кривых и поверхностей 2-го порядка.

7.5.1. Понятие евклидова пространства

Пусть L — линейное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. ***Скалярным произведением*** на L называется отображение

$$(\ , \ ): \ L \times L \to \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой паре элементов L действительное число, причём так, что выполнены следующие требования (аксиомы скалярного произведения):

$$\begin{array}{lll} \forall x, y, z \in L, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} & 1) & (x, x) > 0, \quad \text{кроме случая } x = \bar{0}, \\ & 2) & (x, y) = (y, x), \\ & 3) & (x, y + z) = (x, y) + (x, z), \\ & 4) & (\lambda x, y) = \lambda (x, y). \end{array}$$

Конечномерное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется ***евклидовым пространством***.

В произвольном евклидовом пространстве L можно ввести понятие ***модуля вектора***:

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Элементы $x, y \in L$ называются ***ортогональными***, если $(x, y) = 0$. Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в пространстве называется ортонормированным, если

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Рассмотренное в разделе 4.7 евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является очень хорошим примером. Напомним: если $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — элементы $\mathbb{R}^n$, то их скалярное произведение определяется равенством:

$$(x, y) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \ldots + \alpha_n \beta_n.$$

Аксиомы 1)–4) в этом случае выполняются. Имеется удобный ортонормированный базис:

$$\begin{aligned} &e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \\ &e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &e_n = (0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Общий случай произвольного евклидова пространства L фактически сводится к тем же формулам. Действительно, пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — какой-нибудь ортонормированный базис в L. Любые $x, y \in L$ можно разложить по базису:

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n, \quad y = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n.$$

Теперь, пользуясь аксиомами скалярного произведения, легко вычислить:

$$\begin{aligned} (x, y) = (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n,\ \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n) = \\ = \sum \alpha_i \beta_j (e_i, e_j) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n, \end{aligned}$$

так как $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$, $(e_i, e_i) = 1$.

Теорема 8. В любом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство проведём с помощью так называемого ***процесса ортогонализации***. Возьмём любой базис в L: $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Изменяя элементы v_i, построим ортогональный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ следующим образом.

Первый вектор не изменяем: $e_1 = v_1$.

Второй вектор ищем в виде $e_2 = \lambda e_1 + v_2$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ возьмём такое, чтобы $(e_1, e_2) = 0$:

$$(e_1, e_2) = (e_1, \lambda e_1 + v_2) = \lambda(e_1, e_1) + (e_1, v_2) = 0.$$

Значит, нужно взять $\lambda = -\dfrac{(e_1, v_2)}{(e_1, e_1)}$.

Аналогично ищем e_3: $e_3 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + v_3$,

$(e_1, e_3) = \lambda_1(e_1, e_1) + 0 + (e_1, v_3) = 0$, отсюда $\lambda_1 = -\dfrac{(e_1, v_3)}{(e_1, e_1)}$,

$(e_2, e_3) = 0 + \lambda_2(e_2, e_2) + (e_2, v_3) = 0$, отсюда $\lambda_2 = -\dfrac{(e_2, v_3)}{(e_2, e_2)}$.

Продолжая этот процесс, получим систему попарно ортогональных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Они образуют базис, так как из ортогональности следует линейная независимость. Действительно, если

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \bar{0},$$

то умножим это равенство скалярно на e_i и получим:

$$(e_i,\ \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_i(e_i, e_i) = 0, \quad \text{отсюда } \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для превращения $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в ортонормированный базис нужно ***нормировать*** e_i, т. е. заменить каждый вектор e_i на единичный вектор $\dfrac{e_i}{|e_i|}$.

7.5.2. Ортогональные матрицы

Квадратная матрица Q называется ***ортогональной***, если $Q^T Q = E$. Как мы увидим дальше, ортогональные матрицы задают такие преобразования пространства, которые не изменяют форму геометрических фигур. Поэтому мы должны изучить их свойства подробно.

Свойство 1. Определитель ортогональной матрицы равен ± 1, в частности, такая матрица невырождена.

Доказательство. Так как $Q^T Q = E$, то $\left|Q^T\right| |Q| = |Q|^2 = 1$. Значит, $|Q| = \pm 1$.

Свойство 2. Обратная к ортогональной матрица тоже ортогональна.

Доказательство. Пусть $Q^T Q = E$ или, что то же самое, $Q^{-1} = Q^T$. Транспонируя обе части, получим: $(Q^{-1})^T = Q$ или $(Q^{-1})^T Q^{-1} = E$, что и означает ортогональность матрицы Q^{-1}.

Свойство 3. Произведение ортогональных матриц — ортогональная матрица.

Доказательство. Пусть Q_1, Q_2 — ортогональные матрицы. Так как $(Q_1 Q_2)^T = Q_2^T Q_1^T$ (см. лемму в 7.1), то $(Q_1 Q_2)^T (Q_1 Q_2) = Q_2^T (Q_1^T Q_1) Q_2 =$ $= Q_2^T Q_2 = E$, что и требовалось.

Свойство 4. Матрица Q ортогональна $\Leftrightarrow$ сумма квадратов элементов любой строки равна 1, сумма произведений соответствующих элементов любых разных строк равна 0. Аналогичное свойство справедливо и для столбцов.

Доказательство следует из определения и правила умножения матриц. Записывая равенство $Q^T Q = E$ подробно, например, для матриц 2-го порядка получим:

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}^2 + q_{21}^2 & q_{11}q_{12} + q_{21}q_{22} \\ q_{12}q_{11} + q_{22}q_{21} & q_{12}^2 + q_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда и следуют требуемые соотношения.

Свойство 5. Матрица Q ортогональна $\Leftrightarrow$ линейная замена переменных $X = YQ$ преобразует сумму квадратов (т. е. квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$) снова в сумму квадратов (т. е. в форму $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$).

Доказательство. Достаточно вспомнить правило преобразования матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных: матрица A преобразуется в матрицу QAQ^T. Если $A = E$, (т. е. квадратичная форма является суммой квадратов), то и $QAQ^T = QQ^T = E$.

Пример 10. Матрица $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ при любом φ является ортогональной. Действительно, $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Теорема 9. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — ортонормированные базисы в евклидовом пространстве L. Тогда матрица перехода от одного из них к другому ортогональна.

Доказательство проведём для трёхмерного пространства. Разложим векторы e'_1, e'_2, e'_3 по базису e_1, e_2, e_3:

$$\begin{aligned} e'_1 &= q_{11}e_1 + q_{12}e_2 + q_{13}e_3, \\ e'_2 &= q_{21}e_1 + q_{22}e_2 + q_{23}e_3, \\ e'_3 &= q_{31}e_1 + q_{32}e_2 + q_{33}e_3. \end{aligned}$$

Тогда матрица $Q = (q_{ij})$ — матрица перехода. Так как e'_1, e'_2, e'_3 — ортонормированный базис, то $(e'_i, e'_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$ Подставим в каждое из этих соотношений разложение e'_i, e'_j по базису e_1, e_2, e_3 и вычислим:

$$(e'_1, e'_1) = (q_{11}e_1 + q_{12}e_2 + q_{13}e_3,\ q_{11}e_1 + q_{12}e_2 + q_{13}e_3) = \\ = q_{11}^2 + q_{12}^2 + q_{13}^2 = 1,$$

$$(e'_1, e'_2) = (q_{11}e_1 + q_{12}e_2 + q_{13}e_3,\ q_{21}e_1 + q_{22}e_2 + q_{23}e_3) = \\ = q_{11}q_{21} + q_{12}q_{22} + q_{13}q_{23} = 0.$$

Продолжая аналогичные вычисления, получим все соотношения, которые, по свойству 4, могут быть только у ортогональной матрицы.

7.5.3. Ортогональные преобразования

Пусть L — евклидово пространство, $\mathcal{A}:\ L \to L$ — линейное преобразование L (см. раздел 3.5). Преобразование $\mathcal{A}$ называется ***ортогональным***, если $\forall x \in L$

$$(\mathcal{A}(x),\ \mathcal{A}(x)) = (x,\ x).$$

Лемма. Если $\mathcal{A}$ ортогонально, то $\forall x, y \in L$

$$(\mathcal{A}(x),\ \mathcal{A}(y)) = (x,\ y).$$

Доказательство. Проведём вычисления, использующие свойства линейных преобразований и скалярного произведения:

$$(\mathcal{A}(a+b),\ \mathcal{A}(a+b)) = (\mathcal{A}(a)+\mathcal{A}(b),\ \mathcal{A}(a)+\mathcal{A}(b)) = \\ = (\mathcal{A}(a),\ \mathcal{A}(a)) + (\mathcal{A}(b),\ \mathcal{A}(b)) + 2(\mathcal{A}(a),\ \mathcal{A}(b)),$$

$$(a+b,\ a+b) = (a,\ a) + (b,\ b) + 2(a,\ b).$$

Сравнивая эти соотношения и пользуясь ортогональностью $\mathcal{A}$, получим:

$$2(\mathcal{A}(a),\ \mathcal{A}(b)) = 2(a,\ b), \quad \text{т. е. } (\mathcal{A}(a),\ \mathcal{A}(b)) = (a,\ b).$$

Теорема 10. Пусть $\mathcal{A} : L \to L$ — линейное преобразование евклидова пространства. Следующие условия эквивалентны между собой:

1) $\mathcal{A}$ ортогонально;

2) ортонормированный базис $\mathcal{A}$ переводит снова в ортонормированный базис;

3) матрица $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе ортогональна.

Доказательство проведём для трёхмерного пространства.

1) $\Leftrightarrow$ 2). Пусть $\mathcal{A}$ — ортогонально, e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в L. Тогда $(\mathcal{A}(e_i), \mathcal{A}(e_j)) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ т. е $\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \mathcal{A}(e_3)$ — тоже ортонормированный базис. (Напомним: линейная независимость вытекает из ортогональности).

Обратно, пусть $\mathcal{A}$ переводит ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 в ортонормированный базис e'_1, e'_2, e'_3. Тогда если $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, то $\mathcal{A}(x) = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \alpha_3 e'_3$. Следовательно,

$$(\mathcal{A}(x),\ \mathcal{A}(x)) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (x,\ x),$$

что и требовалось доказать.

2) $\Leftrightarrow$ 3). Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис. Найдём матрицу $\mathcal{A}$ в этом базисе (см.3.4.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, \\ \mathcal{A}(e_2) &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, \\ \mathcal{A}(e_3) &= a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3. \end{aligned}$$

Матрица $A = (a_{ij})$ одновременно является матрицей перехода от e_1, e_2, e_3 к новому базису $\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \mathcal{A}(e_3)$. Если $\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \mathcal{A}(e_3)$ — тоже ортонормированный базис, то, по теореме 9, матрица A ортогональна.

Обратно, если A ортогональна, то, используя свойство 4, получаем:

$$(\mathcal{A}(e_1),\ \mathcal{A}(e_1)) = (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3,\ a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) = \\ = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1,$$

$$(\mathcal{A}(e_1,\ \mathcal{A}(e_2)) = (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3,\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_23e_3) = \\ = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0.$$

Продолжая аналогичные вычисления, получим:

$$(\mathcal{A}(e_i),\ \mathcal{A}(e_j)) = (e_i,\ e_j) = \begin{cases} 1,\ i = j, \\ 0,\ i \neq j, \end{cases}$$

т. е. $\mathcal{A}(e_1)$, $\mathcal{A}(e_2)$, $\mathcal{A}(e_3)$ — ортонормированный базис. Теорема доказана.

Замечание. Теперь мы можем построить много примеров ортогональных преобразований. В самом деле, как мы знаем из раздела 3.4, если в пространстве выбран базис, то любая квадратная матрица A задаёт линейное преобразование. Напомним: координатная строка $\mathcal{A}(x)$ получается как произведение координатной строки x на матрицу A. Теорема 10 утверждает, что если взять ортогональную матрицу A, то и преобразование $\mathcal{A}$ будет ортогональным.

Пример 11. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$ (т. е. плоскость) и ортонормированный базис $\bar{i}, \bar{j}$. Возьмём матрицу $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Она ортогональна (проверьте!). Значит, линейное преобразование $\mathcal{A}$, которое она определяет, тоже ортогонально:

$$(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\,\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\beta, \frac{\sqrt{3}}{2}\,\alpha + \frac{1}{2}\,\beta\right),$$

$$\mathcal{A}(\alpha\,\bar{i} + \beta\,\bar{j}) = \left(\frac{1}{2}\,\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\beta\right)\bar{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\alpha + \frac{1}{2}\,\beta\right)\bar{j}.$$

7.5.4. Симметрические преобразования

Пусть L — евклидово пространство над $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ — линейное преобразование L. Преобразование $\mathcal{A}$ называется ***симметрическим*** (или самосопряженным), если $\forall x, y \in L$

$$(\mathcal{A}(x),\ y) = (x,\ \mathcal{A}(y)).$$

Пример 12. Пусть $\mathcal{A}(x) = 5x$ $(\forall x \in L)$, т. е. преобразование $\mathcal{A}$ умножает каждый элемент L на число 5. Это преобразование — симметрическое:

$$(\mathcal{A}(x), y) = (5x, y) = 5(x, y) = (x, 5y) = (x, \mathcal{A}(y)).$$

Теорема 11. Линейное преобразование $\mathcal{A} : L \to L$ является симметрическим $\Leftrightarrow$ его матрица A в ортонормированном базисе — симметрическая, т. е. $A^T = A$.

Доказательство. Опять ограничимся случаем $n = 3$.

«$\Rightarrow$». Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис. Рассмотрим $\mathcal{A}(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3$. Здесь числа a_{ij} — коэффициенты матрицы A. Вычислим:

$$(\mathcal{A}(e_1),\, e_2) = (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3,\ e_2) = a_{12}.$$

Аналогично:

$$(e_1,\, \mathcal{A}(e_2)) = (e_1,\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) = a_{21}.$$

Так как $(\mathcal{A}(e_1),\, e_2) = (e_1,\, \mathcal{A}(e_2))$, то получаем: $a_{12} = a_{21}$. В точности так же можно доказать, что $a_{ij} = a_{ji}$ $(\forall i, j)$.

«$\Leftarrow$». Дано: преобразование $\mathcal{A}$ имеет в ортонормированном базисе симметрическую матрицу A, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$. Возьмём любые элементы L : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,\ y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) = \alpha_1\mathcal{A}(e_1) + \alpha_2\mathcal{A}(e_2) + \alpha_3\mathcal{A}(e_3) = \alpha_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) +\\ + \alpha_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) + \alpha_3(a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) =\\ = (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \alpha_3 a_{31})e_1 + (\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{32})e_2 +\\ + (\alpha_1 a_{13} + \alpha_2 a_{23} + \alpha_3 a_{33})e_3.\end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(x), y) = (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \alpha_3 a_{31})\beta_1 +\\ + (\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{32})\beta_2 + (\alpha_1 a_{13} + \alpha_2 a_{23} + \alpha_3 a_{33})\beta_3.\end{aligned}$$

Аналогично, сначала вычислив $\mathcal{A}(y)$, затем получим:

$$\begin{aligned}(x,\, \mathcal{A}(y)) = \alpha_1(\beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{21} + \beta_3 a_{31}) +\\ + \alpha_2(\beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{22} + \beta_3 a_{32}) + \alpha_3(\beta_1 a_{13} + \beta_2 a_{23} + \beta_3 a_{33}).\end{aligned}$$

Раскрывая скобки в полученных выражениях и учитывая, что $a_{ij} = a_{ji}$, убедимся в их совпадении:

$$(\mathcal{A}(x),\, y) = (x,\, \mathcal{A}(y)),$$

т. е. преобразование $\mathcal{A}$ симметрическое. Теорема доказана.

Пример 13. В замечании после теоремы 10 мы напомнили о том, что любая матрица даёт нам пример линейного преобразования. В теореме 11 утверждается, что если взять симметрическую матрицу, то и преобразование будет симметрическим. Возьмём, например, $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Она задаёт симметрическое преобразование $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^2$:

$$(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = (3\alpha + 5\beta, 5\alpha + \beta),$$

или, в другой записи:

$$\mathcal{A}(\alpha\,\bar{i} + \beta\,\bar{j}) = (3\,\alpha + 5\,\beta)\bar{i} + (5\,\alpha + \beta)\bar{j}.$$

Теорема 12. Характеристические числа симметрической матрицы — действительные числа.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — симметрическая матрица 3-го порядка, λ — её характеристическое число, т. е. $|A - \lambda E| = 0$ (см. раздел 3.6). Рассмотрим однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Её определитель $|A - \lambda E| = 0$, поэтому она имеет ненулевое решение (см. раздел 3.4):

$$x_1 = t_1, \quad x_2 = t_2, \quad x_3 = t_3.$$

Так как пока не доказано, что λ — действительное число, то числа t_1, t_2, t_3 могут быть комплексными. Подставляя эти числа в систему уравнений и перенося слагаемые с λ в правую часть, получим соотношения:

$$a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13}t_3 = \lambda t_1,$$
$$a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3 = \lambda t_2,$$
$$a_{31}t_1 + a_{32}t_2 + a_{33}t_3 = \lambda t_3.$$

Умножим первое соотношение на $\overline{t_1}$ (сопряженное число к t_1), второе — на $\overline{t_2}$, третье — на $\overline{t_3}$. Полученные равенства сложим:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\overline{t_i}t_j = \lambda \sum_{i=1}^{3} t_i\overline{t_i}. \qquad (*)$$

Используем свойства сопряжённых чисел (см. 6.1.3). Сумма в правой части $(*)$ — действительное число, (так как $z\bar{z} \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{C}$). Вычислим сопряжённое число для суммы в левой части:

$$\overline{\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\overline{t_i}t_j} = \sum a_{ij}t_i\overline{\overline{t_j}} = \sum a_{ij}\overline{t_i}t_j.$$

В первом равенстве использованы свойства сопряжённых чисел и очевидные соотношения: $\overline{a_{ij}} = a_{ij}$, (так как $a_{ij} \in \mathbb{R}$), $\overline{\overline{t_j}} = t_j$. Во втором равенстве использована симметричность: $a_{ij} = a_{ji}$. В итоге получаем, что сумма в левой части равенства $(*)$ тоже действительное число, так как совпадает со своим сопряжённым. Находя λ из равенства $(*)$, получим: $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 13. Линейное преобразование $\mathcal{A}$ евклидова пространства L является симметрическим $\Leftrightarrow$ в L существует ортонормированный базис из собственных векторов $\mathcal{A}$.

План доказательства (не будем проводить подробные рассуждения. Советуем читателю повторить основные понятия и факты раздела 3.6). Утверждение «$\Leftarrow$» доказывается просто: в базисе, составленном из собственных векторов, матрица преобразования A диагональная, а значит и симметрическая. По теореме 11, тогда и $\mathcal{A}$ — симметрическое.

Рассмотрим утверждение «$\Rightarrow$». В каком-либо ортонормированном базисе $\mathcal{A}$ имеет симметрическую матрицу (теорема 11). Так как её характеристические корни действительны (теорема 13), то они являются собственными значениями $\mathcal{A}$ (теорема 13 из 3.6).

Если собственные значения различны, то собственные векторы, им соответствующие, ортогональны. Это легко доказать: пусть $\mathcal{A}(b_1) = \lambda_1 b_1$, $\mathcal{A}(b_2) = \lambda_2 b_2$, т. е. b_1, b_2 — собственные векторы $\mathcal{A}$, относящиеся к собственным значениям λ_1, λ_2 соответственно. Тогда

$$(\mathcal{A}(b_1), b_2) = (\lambda_1 b_1, b_2) = \lambda_1(b_1, b_2),$$
$$(b_1, \mathcal{A}(b_2)) = (b_1, \lambda_2 b_2) = \lambda_2(b_1, b_2).$$

Так как $\mathcal{A}$ симметрическое, то получаем $\lambda_1(b_1, b_2) = \lambda_2(b_1, b_2)$, т. е. $(b_1, b_2) = 0$.

Если же собственные значения совпадают (характеристический корень кратный), то применяется процесс ортогонализации, описанный в доказательстве теоремы 8. Он позволяет заменить, например, два линейно независимых собственных вектора, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2$, на два ортогональных собственных вектора.

После того как построен ортогональный базис из собственных векторов, его нужно нормировать, т. е. заменить каждый вектор b на вектор $\dfrac{b}{|b|}$, модуль которого равен 1.

7.6. Приведение квадратичной формы к главным осям

Перейдём от линейных преобразований сначала к матрицам, а затем к квадратичным формам.

Теорема 14. Для любой симметрической матрицы A существует ортогональная матрица Q такая, что QAQ^T — диагональная.

Доказательство (для матриц 3-го порядка). Рассмотрим $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^3$. Матрица A задаёт в этом базисе симметрическое преобразование $\mathcal{A}$. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, состоящий из собственных векторов $\mathcal{A}$ (такой существует по теореме 13). Матрица $\mathcal{A}$ в новом базисе имеет вид QAQ^{-1}, где Q — матрица перехода от одного базиса к другому (теорема 11 из 3.5.4). Так как базис состоит из собственных векторов, то матрица QAQ^{-1} — диагональная. По теореме 9 (см.7.5.2), матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису ортогональна. Поэтому Q — ортогональная матрица, т. е. $Q^{-1} = Q^T$ и матрица QAQ^T — диагональная. Теорема доказана.

Теорема 15 ***(о приведении квадратичной формы к главным осям).*** Любую квадратичную форму с действительными коэффициентами можно привести к каноническому виду с помощью линейной замены переменных с ортогональной матрицей.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма с матрицей A. Так как A — симметрическая, то, по теореме 14, существует ортогональная матрица Q такая, что QAQ^T — диагональная. Рассмотрим линейную замену переменных с матрицей $Q : X = YQ$. После преобразований форма будет иметь матрицу QAQ^T, т. е. диагональную матрицу, что и требовалось.

Теорема 16. Если квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ с матрицей A приведена к каноническому виду:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \sim b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_n y_n^2$$

с помощью линейной замены переменных с ортогональной матрицей, то числа b_i — характеристические корни матрицы A.

Доказательство. Пусть $X = YQ$ — необходимая замена переменных, Q — ортогональная матрица,

$$QAQ^T = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_n \end{pmatrix}.$$

Так как $Q^T = Q^{-1}$, то $QAQ^T = QAQ^{-1}$ — матрица, ***подобная*** матрице A. Было доказано (теорема 12 из 3.6), что характеристические корни подобных матриц совпадают. Но характеристические корни диагональной матрицы — это числа, стоящие на диагонали. Поэтому $b_1, b_2, \ldots, b_n$ являются характеристическими корнями и матрицы A.

Сформулируем ***правило***, по которому для квадратичной формы можно найти ортогональную замену переменных, приводящую форму к главным осям.

1) Решая характеристическое уравнение, найти характеристические числа матрицы квадратичной формы, т. е. собственные значения соответствующего симметрического преобразования.
2) Найти собственные векторы.
3) Если характеристические числа различны, то собственные векторы образуют ортогональный базис. Если есть кратные характеристические корни, то нужно выбрать ортогональные собственные векторы (применяется процесс ортогонализации).
4) Нормировать полученный ортогональный базис.
5) Искомая ортогональная матрица Q — это матрица перехода к построенному базису.

Пример 14. Найти ортогональную замену переменных, приводящую квадратичную форму $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2x^2$ к каноническому виду.

Решение. Будем действовать по шагам, описанным выше.

1) Составим и решим характеристическое уравнение.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3-\lambda)^2 - 25 = 0, \quad 3-\lambda = \pm 5, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 8.$$

Итак, канонический вид уже знаем: $f(x_1, x_2) \sim -2y_1^2 + 8y_2^2$.

2) Найдём собственные векторы (см. раздел 3.5).

Возьмём $\lambda = -2$. Пусть $b_1 = (\beta_1,\, \beta_2)$ — собственный вектор, т. е.

$$(\beta_1, \beta_2) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = (-2\beta_1, -2\beta_2).$$

Это равенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} 3\beta_1 + 5\beta_2 = -2\beta_1, \\ 5\beta_1 + 3\beta_2 = -2\beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\beta_1 + 5\beta_2 = 0, \\ 5\beta_1 + 5\beta_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta_1 = -\beta_2\,.$$

Можно взять, например, вектор $b_1 = (1, -1)$.

Найдём собственный вектор b_2, соответствующий $\lambda_2 = 8$.

$$(\beta_1, \beta_2) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = (8\,\beta_1, 8\,\beta_2),$$

$$\begin{cases} 3\beta_1 + 5\beta_2 = 8\beta_1, \\ 5\beta_1 + 3\beta_2 = 8\beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\beta_1 + 5\beta_2 = 0, \\ 5\beta_1 - 5\beta_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ \beta_1 = \beta_2\,.$$

Возьмём $b_2 = (1, 1)$.

3) Ортогонализация не нужна, так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и векторы b_1, b_2 ортогональны (это видно и непосредственно).

4) Нормируем собственные векторы:

$$e_1 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{b_1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \ \ e_2 = \frac{b_2}{|b_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Итак, построен ортонормированный базис из собственных векторов.

5) Запишем матрицу перехода в новый базис. Её строки — координатные строки новых базисных векторов в старом базисе (см. 3.5.2).

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ – искомая ортогональная матрица.}$$

Проверка. Выполним преобразование матрицы A:

$$QAQ^T = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{8}{\sqrt{2}} & \dfrac{8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

7.7. Задачи с решениями

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти значение квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3)$ с матрицей A при $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.

Решение. Можно использовать матричную запись:

$$f(x_1, x_2, x_3) = XAX^T =$$
$$= (1, 3, 2)\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (4, 8, -9)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 10.$$

Можно перейти к функциональной записи:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 =$$
$$= 5 + 27 - 8 + 6 - 8 - 12 = 10.$$

2. Найти ранг квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3.$$

Решение. Ранг квадратичной формы — это ранг её матрицы. Рассмотрим матрицу формы f и приведём её с помощью элементарных преобразований к трапециевидной форме:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 27 & -18 \\ 0 & -18 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 27 & -18 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ранг равен 3, квадратичная форма невырождена.

3. Выполнить в квадратичной форме

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 6x_2x_3$$

линейную замену переменных с матрицей $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Способ 1. По теореме 1 (из 7.1), матрица квадратичной формы A преобразуется так:

$$SAS^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 12 & -4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \\ 21 & -13 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 15 & 25 \\ 15 & 1 & 28 \\ 25 & 28 & 1 \end{pmatrix}.$$

Способ 2. Запишем формулы замены переменных: $X = YS$, или, подробнее:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \phantom{{}-2y_2} + y_3, \\ x_2 &= - 2y_2 + 2y_3, \\ x_3 &= 2y_1 + y_2 + 3y_3. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в форму f:

$$\begin{aligned} f = {} & 2(y_1+y_3)^2 - 3(-2y_2+2y_3)^2 + (2y_1+y_2+3y_3)^2 + 4(y_1+y_3)(-2y_2+2y_3) + \\ & + 10(y_1+y_3)(2y_1+y_2+3y_3) - 6(-2y_2+2y_3)(2y_1+y_2+3y_3) = \\ & = 2y_1^2 + 4y_1y_3 + 2y_3^2 - 12y_2^2 + 24y_2y_3 - 12y_3^2 + 4y_1^2 + y_2^2 + \\ & + 9y_3^2 + 4y_1y_2 + 12y_1y_3 + 6y_2y_3 - 8y_1y_2 + 8y_1y_3 - 8y_2y_3 + 8y_3^2 + \\ & + 20y_1^2 + 10y_1y_2 + 30y_1y_3 + 20y_1y_3 + 10y_2y_3 + 30y_3^2 + 24y_1y_2 + \\ & + 12y_2^2 + 36y_2y_3 - 24y_1y_3 - 12y_2y_3 - 36y_3^2 = \\ & = 26y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 30y_1y_2 + 50y_1y_3 + 56y_2y_3. \end{aligned}$$

Результат тот же, но вычислений здесь больше.

4. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Решение. Так как не требуется, чтобы преобразование было ортогональным, можно применять любые невырожденные линейные замены переменных. Алгоритм решения задачи содержится в доказательстве теоремы 2 (раздел 7.2). Как и в случае 2 этой теоремы, в нашей форме f нет квадратов переменных. Поэтому сначала выполним замену:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_2, \\ x_2 &= y_1 + y_2, \\ x_3 &= \phantom{y_1 + y_2 + {}} y_3. \end{aligned}$$

Подставляем:

$$\begin{aligned} f = {} & (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_3 = \\ & = y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_1y_3 + y_2y_3 = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3. \end{aligned}$$

Теперь квадрат переменной есть, можно выделять полные квадраты:

$$f = (y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - y_3^2 - y_2^2 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Сделаем ещё одну невырожденную линейную замену:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \phantom{{}+y_2} + y_3, \\ z_2 &= \phantom{y_1+{}} y_2, \\ z_3 &= \phantom{y_1 + y_2 + {}} y_3. \end{aligned}$$

Форма принимает канонический вид: $f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$.

5. Являются ли квадратичные формы $f_1 = 3x_1^2 + 12x_1x_2 + 5x_2^2$, $f_2 = 2y_1^2 + 8y_1y_2 + 9y_2^2$ эквивалентными над полем $\mathbb{C}$? Над полем $\mathbb{R}$?

Решение. Применяем закон инерции. Формы f_1, f_2 эквивалентны над $\mathbb{C}$, так как их ранги, т. е. ранги матриц $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, равны. Приведём f_1, f_2 к каноническому виду:

$$\begin{aligned} f_1 &= 3(x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2) - 12x_2^2 + 5x_2^2 = 3(x_1 + 2x_2)^2 - 7x_2^2, \\ f_2 &= 2(y_1^2 + 4y_1y_2 + 4y_2^2) - 8y_2^2 + 9y_2^2 = 2(y_1 + 2y_2)^2 + y_2^2. \end{aligned}$$

Положительный индекс инерции формы f_1 равен 1, а формы f_2 равен 2, поэтому над полем $\mathbb{R}$ эти формы не эквивалентны.

6. Найти все значения λ, при которых положительно определена квадратичная форма $f = 2x_1^2 + \lambda x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

Решение. Применим критерий Сильвестра. Выпишем матрицу формы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Её главные миноры: 2, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 4$,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 2(-2\lambda) + 5(2\lambda - 4) = 6\lambda - 20.$$

По критерию Сильвестра, f положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2\lambda - 4 > 0, \\ 6\lambda - 20 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 2, \\ \lambda > \dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda > \frac{10}{3}.$$

7. Является ли ортогональным линейное преобразование $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{A}(c_1, c_2) = \left(\frac{3}{5}\,c_1 + \frac{4}{5}\,c_2,\ -\frac{4}{5}\,c_1 + \frac{3}{5}\,c_2\right)?$$

Решение. Способ 1. Запишем матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в ортогональном базисе $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ (см. 3.5.2):

$$\mathcal{A}(e_1) = \mathcal{A}(1, 0) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}\,e_1 - \frac{4}{5}\,e_2,$$

$$\mathcal{A}(e_2) = \mathcal{A}(0, 1) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}\,e_1 + \frac{3}{5}\,e_2.$$

Значит, $A_e = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Так как

$$A_e A_e^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то матрица A_e ортогональна. Следовательно, $\mathcal{A}$ — ортогональное преобразование.

Способ 2. Преобразование является ортогональным, если оно сохраняет скалярный квадрат любого вектора $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Проведём вычисления:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{A}(c_1, c_2), \mathcal{A}(c_1, c_2)) = \\
&\quad = \left(\left(\frac{3}{5}\,c_1 + \frac{4}{5}\,c_2, -\frac{4}{5}\,c_1 + \frac{3}{5}\,c_2\right), \left(\frac{3}{5}\,c_1 + \frac{4}{5}\,c_2, -\frac{4}{5}\,c_1 + \frac{3}{5}\,c_2\right)\right) = \\
&\quad = \left(\frac{3}{5}\,c_1 + \frac{4}{5}\,c_2\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\,c_1 + \frac{3}{5}\,c_2\right)^2 = c_1^2 + c_2^2 = ((c_1, c_2), (c_1, c_2)).
\end{aligned}$$

Итак, скалярный квадрат вектора $\mathcal{A}(c_1, c_2)$ равен скалярному квадрату вектора (c_1, c_2). Значит, $\mathcal{A}$ — ортогонально.

8. Является ли симметрическим линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 5x_3, 2x_1 + 3x_2, -5x_1 - x_3)?$$

Решение. Запишем матрицу преобразования в ортонормированном базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(1,0,0) &= (1, 2, -5) = e_1 + 2e_2 - 5e_3, \\
\mathcal{A}(0,1,0) &= (2, 3, 0) = 2e_1 + 3e_2, \\
\mathcal{A}(0,0,1) &= (-5, 0, -1) = -5e_1 - e_3.
\end{aligned}$$

Значит, $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ — симметрическая матрица. По теореме 11 (из 7.5.4), $\mathcal{A}$ — симметрическое преобразование.

9. Найти канонический вид, к которому можно привести квадратичную форму

$$f = -5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

ортогональной заменой переменных.

Решение. По теореме 16 (раздел 7.6), ортогональное преобразование приводит квадратичную форму к виду

$$b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2,$$

где b_1, b_2, b_3 — характеристические корни матрицы квадратичной формы. Поэтому нужно решить характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по 1-й строке:

$$(-5-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-5-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1) - 2(2 - 2\lambda - 2) + 2(2 - 2 + 2\lambda) = 0,$$

$$10\lambda - 5\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda + 4\lambda = 0,$$

$$-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 18\lambda = 0,$$

$$\lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 18) = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2}, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -6.$$

Значит, канонический вид формы мы нашли:

$$f = 3y_1^2 - 6y_2^2$$

(порядок характеристических корней, обозначения новых переменных не важны).

10. Привести квадратичную форму

$$f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

к каноническому виду с помощью ортогональной замены переменных. Записать матрицу этой замены.

Решение. Применим алгоритм (5 шагов), построенный в разделе 7.6.

1) Найдём характеристические числа матрицы квадратичной формы.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычтем из 1-й строки 2-ю и разложим по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & \lambda-4 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - (\lambda-4)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(4-\lambda)(-3\lambda+\lambda^2-4)+(4-\lambda)(\lambda-4)=0,$$

$$(4-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-8)=0,$$

$$\lambda_1=4, \quad \lambda_{2,3}=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}, \quad \lambda_2=4, \quad \lambda_3=-2.$$

2) Найдём собственные векторы:

$$\lambda_1=\lambda_2=4; \quad (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}=(4\beta_1,4\beta_2,4\beta_3),$$

$$\begin{cases} 3\beta_1-\beta_2+2\beta_3=4\beta_1, \\ -\beta_1+3\beta_2+2\beta_3=4\beta_2, \\ 2\beta_1+2\beta_2=4\beta_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta_1-\beta_2+2\beta_3=0, \\ -\beta_1-\beta_2+2\beta_3=0, \\ 2\beta_1+2\beta_2-4\beta_3=0. \end{cases}$$

Матрица системы уравнений имеет ранг 1: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
β_2, β_3 — свободные неизвестные. Чтобы найти линейно независимые собственные векторы, т. е. фундаментальную систему решений, полагаем сначала $\beta_2=1$, $\beta_3=0$ (тогда $\beta_1=-1$), затем $\beta_2=0$, $\beta_3=1$ (тогда $\beta_1=2$). Получили линейно независимые собственные векторы $\bar{b}_1=(-1,\,1,\,0)$, $\bar{b}_2=(2,\,0,\,1)$, относящиеся к собственному значению $\lambda=4$.

Пусть теперь $\lambda=\lambda_3=-2$. Находим собственный вектор:

$$(\beta_1,\,\beta_2,\,\beta_3)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}=(-2\beta_1,-2\beta_2,-2\beta_3),$$

$$\begin{cases} 3\beta_1-\beta_2+2\beta_3=-2\beta_1, \\ -\beta_1+3\beta_2+2\beta_3=-2\beta_2, \\ 2\beta_1+2\beta_2=-2\beta_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\beta_1-\beta_2+2\beta_3=0, \\ -\beta_1+5\beta_2+2\beta_3=0, \\ 2\beta_1+2\beta_2+2\beta_3=0; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $\beta_3=2$ (свободная неизвестная), найдём:

$$\beta_2=-1, \quad \beta_1=5\beta_2+2\beta_3=-5+4=-1.$$

Итак, $\bar{b}_3 = (-1,\ -1,\ 2)$ — собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = -2$.

3) Проведем ортогонализацию полученного базиса

$$\bar{b}_1 = (-1,\ 1,\ 0), \quad \bar{b}_2 = (2,\ 0,\ 1), \quad \bar{b}_3 = (-1,\ -1,\ 2).$$

Заметим, что $\bar{b}_3$ ортогонален $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$. Это неудивительно, ведь они относятся к различным собственным числам. А вот $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ не ортогональны. Поступим, как в теореме 8 (пункт 7.5.1). Заменим вектор $\bar{b}_2$ на вектор $k\bar{b}_1+\bar{b}_2$ так, чтобы он был ортогонален $\bar{b}_1$: $0 = (\bar{b}_1, k\bar{b}_1 + \bar{b}_2) = k(\bar{b}_1, \bar{b}_1) + (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$,

$$k = -\frac{(\bar{b}_1, \bar{b}_2)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)} = -\frac{(-2)}{2} = 1.$$

Конечно, новый вектор $k\bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 = (1,\ 1,\ 1)$ тоже является собственным, относится к $\lambda = 4$.

4) Нормируем полученный ортогональный базис:

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{b}_1}{|\bar{b}_1|} = \frac{\bar{b}_1}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$
$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{b}_1 + \bar{b}_2}{|\bar{b}_1 + \bar{b}_2|} = \frac{\bar{b}_1 + \bar{b}_2}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$
$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{b}_3}{|\bar{b}_3|} = \frac{\bar{b}_3}{\sqrt{6}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

5) Запишем матрицу перехода от исходного ортонормированного базиса к ортонормированному базису из собственных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Итак, линейная замена переменных $X = YQ$ с ортогональной матрицей Q приводит квадратичную форму f к каноническому виду:

$$f \sim 4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2.$$

Проверка.

$$QAQ^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7.8. Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти значение квадратичной формы с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

2. Выполнить в квадратичной форме

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$$

линейную замену переменных $X = YS$, если $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Привести квадратичную форму к каноническому виду:
а) $f(x, y) = 3x^2 + 9xy + 5y^2$;
б) $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2x_3$;
в) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - 2x_2x_3$.

4. Являются ли эквивалентными над $\mathbb{C}$ квадратичные формы

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$$
$$f_2 = 9y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 + 10y_1y_2 + 8y_1y_3 + 6y_2y_3?$$

5. Существует ли линейная замена переменных с действительными коэффициентами, преобразующая квадратичную форму

$$f_1 = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$$

в квадратичную форму $f_2 = y_1^2 - 2y_2^2 + y_3^2 + 2y_1y_2 + 4y_1y_3 + 2y_2y_3$?

Указание: вычислите положительный индекс инерции каждой формы.

6. Являются ли квадратичные формы

$$f_1 = -3x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3,$$
$$f_2 = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3,$$
$$f_3 = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3$$

положительно определёнными? Отрицательно определёнными?

7. Какие из матриц A, B, C, D, E являются ортогональными?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Пусть L — подпространство в $\mathbb{R}^4$, образованное линейными комбинациями векторов $u = (1, 0, -1, 0)$, $v = (2, 1, -3, 2)$. Найти какой–либо ортонормированный базис в пространстве L.

9. Линейное преобразование $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^2$ задано в базисе $e_1 = (5, 5)$, $e_2 = (10, 0)$ матрицей $A = \begin{pmatrix} -0{,}2 & 1{,}6 \\ -0{,}8 & 1{,}4 \end{pmatrix}$. Является ли $\mathcal{A}$ ортогональным? Симметрическим?

10. В пространстве $\mathbb{R}^2$ найти ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$, если $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{A}(x, y) = (2x + y, x + 2y).$$

11. Найти канонический вид, к которому можно привести данную квадратичную форму с помощью линейной замены переменных с ортогональной матрицей:

а) $f(x, y) = x^2 + 10xy + y^2$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

12. Найти ортогональную замену переменных, приводящую данную квадратичную форму к каноническому виду

а) $f(x, y) = 2x^2 + 4xy - y^2$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_2 - 12x_2x_3$;

в) $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8x_2x_3$;

г) $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

7.9. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Найти ранг квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

2. Найти положительный индекс инерции квадратичной формы

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2.$$

3. Какое из высказываний о квадратичной форме

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

является истинным?

1) f положительно определена;

2) f отрицательно определена;

3) f не является положительно или отрицательно определённой.

4. Найти канонический вид, к которому приводится квадратичная форма

$$f(x, y) = 5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2$$

с помощью ортогональной замены переменных. В ответе указать сумму коэффициентов при квадратах новых переменных.

5. При каком положительном t матрица $\begin{pmatrix} 0,6 & t \\ -t & 0,6 \end{pmatrix}$ является ортогональной?

6. Найти матрицу квадратичной формы, получаемой из

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$$

линейной заменой переменных $x_1 = 3y_1 + y_2$, $x_2 = 2y_1 - y_2$. В ответе указать элемент, стоящий в правом верхнем углу матрицы.

ГЛАВА 8

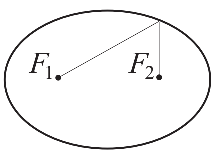
КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ 2-ГО ПОРЯДКА

В разделе 5.1 были сформулированы две основные задачи аналитической геометрии. Здесь мы изучим некоторые кривые на плоскости, решая первую задачу: по геометрическим свойствам кривой будем составлять её уравнение. При изучении поверхностей, наоборот, будем устанавливать их геометрические свойства, форму по известному уравнению. Кроме того, проведём исследование общего уравнения 2-й степени от 2 и 3 переменных.

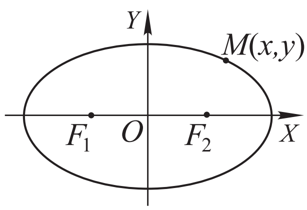
8.1. Вывод уравнений эллипса, гиперболы, параболы

8.1.1. Эллипс

Эллипсом называется множество точек на плоскости, таких, что сумма расстояний от каждой до двух данных точек (***фокусов***) есть величина постоянная.



Это определение позволяет построить эллипс. Возьмём на плоскости любые 2 точки F_1 и F_2 — фокусы. Возьмём нитку, длина которой больше расстояния между фокусами. Концы нитки закрепим в точках F_1 и F_2. Затем с помощью острия карандаша натянем нитку и, удерживая её в натянутом положении, нарисуем линию на плоскости. Это и есть эллипс. Действительно, сумма расстояний от любой точки линии до фокусов равна длине нитки, то есть постоянна.



Чтобы вывести уравнение эллипса, нужно выбрать на плоскости систему координат. В разных системах координат уравнения будут разными, выберем такую систему, чтобы уравнение имело наиболее простой вид. Ось OX проведём через фокусы F_1 и F_2. Середину отрезка F_1F_2 выберем в качестве начала координат O. Ось OY — через начало O перпендикулярно оси OX. Если обозначить расстояние $|F_1F_2| = 2c$, то в такой системе координат фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Постоянную сумму расстояний от произвольной точки эллипса $M(x, y)$ до фокусов (длину нитки) обозначим $2a$. Тогда, по определению, $2a > 2c$ и $|MF_1| + |MF_2| = 2a$.

Вычисляя расстояние между точками через координаты точек, получим:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Чтобы упростить уравнение, проведём преобразования. Один из корней перенесём в другую часть равенства, затем возведём в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

После сокращений получим:

$$2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx,$$
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Ещё раз возведём в квадрат и проведём сокращения:

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$
$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2.$$

Перенесём члены с x и y в левую часть, остальные — в правую:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2,$$

или, разделив обе части уравнения на $a^4 - a^2c^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Так как $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$ и можно ввести обозначение: $a^2 - c^2 = b^2$. Полученное уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

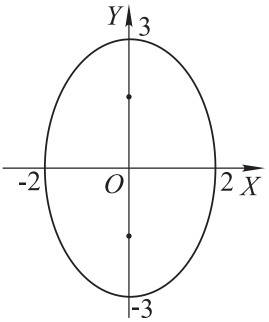
называется ***каноническим уравнением эллипса***.

Заметим, что из уравнения следует: если точка (x, y) лежит на эллипсе, то и точки $(x, -y)$, $(-x, y)$ также лежат на эллипсе. Значит, координатные оси являются ***осями симметрии*** эллипса.

Точки пересечения с осями координат называются ***вершинами*** эллипса. Пересечения с осью OX: $y = 0$, значит $x = \pm a$. Пересечения с осью OY: $x = 0$, значит $y = \pm b$. Итак, вершины эллипса имеют координаты $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$.

Числа a, b называются ***полуосями*** эллипса. В нашем построении $a > b$. Однако в случае $a < b$ уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ также будем считать каноническим. Разница лишь в том, что фокусы эллипса расположены на оси OY.

Пример 1. Построить эллипс $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, указать его фокусы.



Решение. Так как $a=2$, $b=3$, то $a<b$ и фокусы находятся на оси OY. Вершины эллипса имеют координаты $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,3)$, $(0,-3)$. Полуоси a, b и ***межфокусное расстояние*** $2c$ связаны в этом случае соотношением: $c^2=b^2-a^2$. Поэтому $c^2=9-4=5$, $c=\sqrt{5}$. Фокусы находятся в точках $(0,\ \pm\sqrt{5})$.

Если полуоси эллипса равны, то $c=0$, фокусы совпадают и эллипс превращается в окружность:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \quad \text{или} \quad x^2+y^2=a^2, \quad a - \text{радиус}.$$

Характеристикой «вытянутости» эллипса, отличия его от окружности, служит ***эксцентриситет***:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Здесь c — половина межфокусного расстояния, a — большая полуось. Так как $\varepsilon^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=1-\dfrac{b^2}{a^2}$, то $0<\varepsilon<1$. Чем ближе ε к нулю, тем более эллипс похож на окружность.

Если a — большая полуось, то прямые

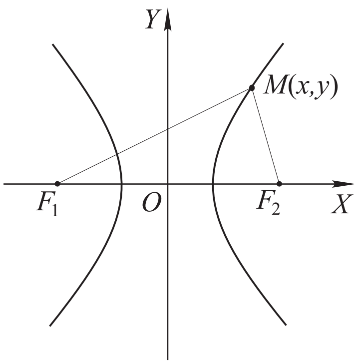
$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$$

называются ***директрисами*** эллипса. Свойство, связанное с директрисами, будет рассмотрено в 8.1.4.

Укажем (без доказательства) так называемое ***оптическое свойство*** эллипса: если в один из фокусов поместить источник света, то все лучи после отражения от эллипса, пройдут через второй фокус.

8.1.2. Гипербола

Гиперболой называется множество точек на плоскости, таких, что положительная разность расстояний от каждой из них до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная. Чтобы вывести уравнение гиперболы, выберем декартову прямоугольную систему координат так же, как и для эллипса: ось OX проведём через фокусы F_1, F_2, начало координат — в середине отрезка F_1F_2. Расстояние между F_1 и F_2 обозначим $2c$, тогда фокусы имеют координаты: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Постоянную положительную разность расстояний от точек гиперболы до фокусов обозначим $2a$. Заметим, что $2c>2a$, так как длина стороны треугольника всегда больше разности длин двух других его сторон. Поэтому $c>a$.



Возьмём произвольную точку $M(x, y)$ на гиперболе. Тогда

$$|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a,$$

так как величина в левой части равенства может быть и отрицательной. Преобразования, которые нужно провести, очень похожи на преобразования при выводе уравнения эллипса:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a,$$
$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2,$$
$$2cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} - 2cx,$$
$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2x^2 - 2cxa^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$
$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4,$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1.$$

Так как $c > a$, то можно обозначить: $c^2 - a^2 = b^2$. Получаем ***каноническое уравнение гиперболы***:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Как и в случае эллипса, уравнение показывает, что гипербола симметрична относительно осей OX и OY.

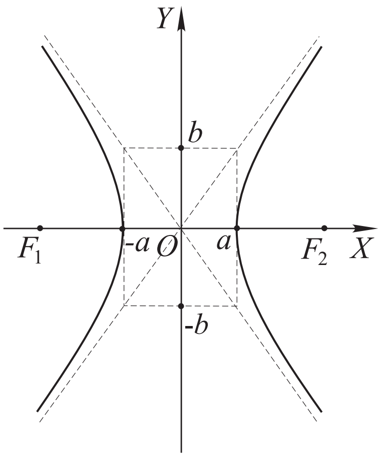
Числа a и b называются полуосями гиперболы, причём a — ***действительная полуось***, b — ***мнимая полуось***. Эти названия связаны с тем, что ось OX (то есть прямая $y = 0$) пересекает гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точках $(a, 0)$, $(-a, 0)$ (они называются ***вершинами*** гиперболы). В то же время ось OY (то есть прямая $x = 0$) не пересекает гиперболу: уравнение $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ не имеет действительных корней.

Уравнение $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ также считается каноническим уравнением гиперболы. Фокусы такой гиперболы расположены на оси OY, b — действительная полуось, a — мнимая полуось.

Как и для эллипса, вводится понятие «эксцентриситет»: $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где a — действительная полуось. Для гиперболы $c > a$, поэтому $\varepsilon > 1$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами гиперболы.

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются ***асимптотами*** гиперболы.



Асимптоты определяют характер гиперболы при удалении от начала координат. Можно доказать, что если точка гиперболы неограниченно удаляется от начала координат, то расстояние от неё до одной из асимптот стремится к нулю. Асимптоты позволяют более точно изображать гиперболу. Для этого берут прямоугольник с вершинами (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$, $(-a, -b)$ и проводят прямые, продолжающие его диагонали. Уравнения этих прямых: $y = \pm\frac{b}{a}x$, то есть это и есть асимптоты. Затем рисуют гиперболу, начиная от вершин и приближаясь к асимптоте по мере удаления от начала координат.

Пример 2. Преобразовать уравнение гиперболы

$$4x^2 - 25y^2 - 32x - 50y - 61 = 0$$

к каноническому виду. Найти полуоси, эксцентриситет, фокусы, уравнения асимптот и директрис. Сделать чертёж.

Решение. Группируем слагаемые, содержащие одну переменную:

$$4(x^2 - 8x) - 25(y^2 + 2y) - 61 = 0.$$

Дополняем выражения в скобках до ***полных квадратов***:

$$4(x^2 - 8x + 16 - 16) - 25(y^2 + 2y + 1 - 1) - 61 = 0,$$
$$4(x^2 - 8x + 16) - 64 - 25(y2 + 2y + 1) + 25 - 61 = 0,$$
$$4(x - 4)^2 - 25(y + 1)^2 = 100,$$
$$\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

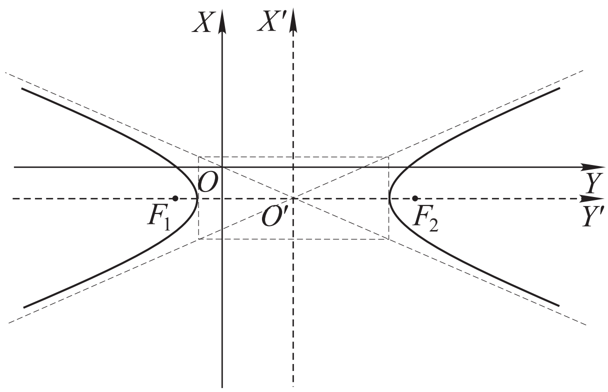
Сделаем замену переменных:

$$x' = x - 4, \quad y' = y + 1.$$

Геометрически эта замена представляет собой ***параллельный перенос*** (или ***сдвиг***) координатных осей. Начало новой системы координат находится в точке $x = 4$, $y = -1$. В новой системе гипербола имеет каноническое уравнение:

$$\frac{x'^2}{25} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

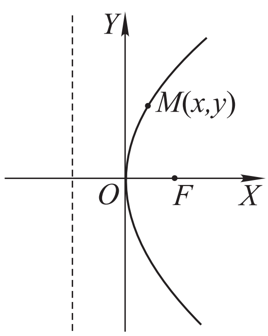
Получаем: $a = 5$ — действительная полуось, $b = 2$ — мнимая полуось. Так как $c^2 = a^2 + b^2$, то $c = \sqrt{29}$ и фокусы находятся в точках $F_1(-\sqrt{29}, 0)$, $F_2(\sqrt{29}, 0)$ (в новой системе координат). Эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{29}}{5}$. Асимптоты имеют уравнения $y' = \pm\dfrac{2}{5}x'$ или, в старой системе, $y + 1 = \pm\dfrac{2}{5}(x - 4)$. Директрисы имеют уравнения $x' = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$; то есть $x' = \pm\dfrac{25}{\sqrt{29}}$, или, в старой системе координат $x = 4 \pm \dfrac{25}{\sqrt{29}}$. Сделаем чертёж:



Известно оптическое свойство гиперболы: если в фокус поместить источник света, то после отражения от гиперболы луч кажется выпущенным из другого фокуса.

8.1.3. Парабола

Параболой называется множество точек на плоскости, равноудалённых от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы).



Выберем систему координат. Ось OX проведём через фокус перпендикулярно директрисе. Начало координат O возьмём на равных расстояниях от фокуса и директрисы. Если расстояние от фокуса до директрисы обозначить p, то координаты фокуса $F\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$, уравнение директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$.

Чтобы вывести уравнение параболы, возьмём, как обычно, произвольную точку $M(x, y)$ и запишем условие того, что она лежит на параболе.

Расстояние от M до директрисы равно $x + \dfrac{p}{2}$. Поэтому

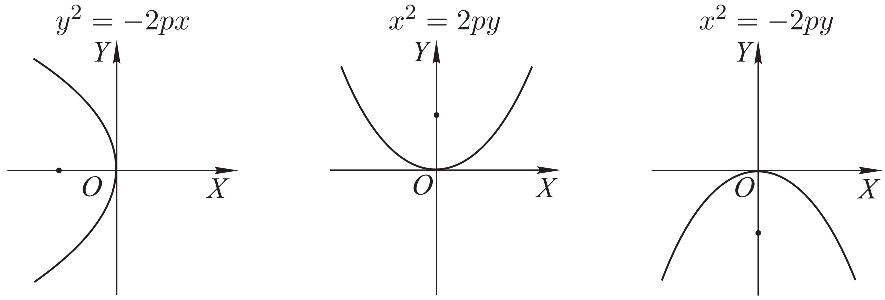
$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат, затем упростим:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

$$y^2 = 2px.$$

Это уравнение — ***каноническое уравнение параболы***. Кроме того, каноническими называют ещё 3 вида уравнений параболы. Сопроводим их соответствующими рисунками.



Пример 3. Преобразовать уравнение параболы

$$y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$$

к каноническому виду. Найти фокус и уравнение директрисы. Сделать чертёж.

Решение. Группируем члены, содержащие y, выделяем полный квадрат:

$$(y^2 + 4y + 4) - 4 + 4x - 8 = 0,$$

$$(y + 2)^2 + 4(x - 3) = 0.$$

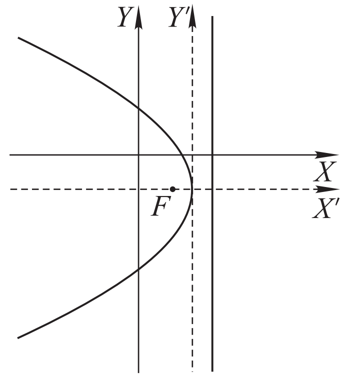
Сделаем замену переменных (или, с точки зрения геометрии, параллельный перенос):

$$x' = x - 3, \quad y' = y + 2.$$

Получаем каноническое уравнение параболы:

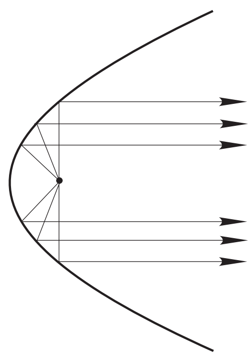
$$y'^2 = -4x'.$$

Расстояние от фокуса до директрисы $p = 2$. Сделаем чертёж:



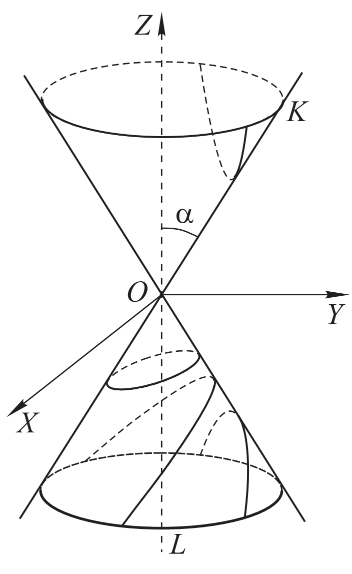
Координаты фокуса в старой системе координат $F(2,-2)$; уравнение директрисы $x' = 1$ или $x = 4$.

Парабола имеет оптическое свойство: если источник света поместить в фокус, то все лучи после отражения от параболы будут параллельны его оси. Это свойство широко применяется в оптике и технике — например, при изготовлении прожекторов или автомобильных фар.



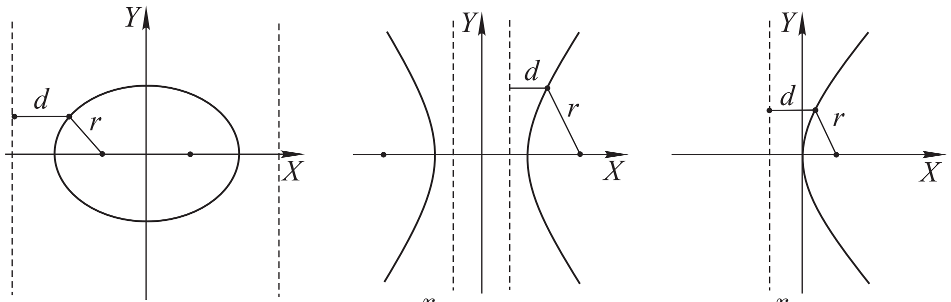
8.1.4. Конические сечения

Возьмём прямую линию L в пространстве и точку O на ней. Рассмотрим также другую прямую K, проходящую через O под углом α к L. Будем вращать прямую K вокруг L так, чтобы угол α оставался неизменным. Поверхность, которая образуется при таком вращении, называется ***прямым круговым конусом***. Пересечём эту поверхность плоскостью, образующей с осью L угол φ. Если угол $\varphi = 90°$, т. е. секущая плоскость перпендикулярна L, то в сечении получается окружность. Если $\alpha < \varphi < 90°$, то можно доказать, что сечение — эллипс. При $\alpha = \varphi$ получается парабола. Если же $\varphi < \alpha$, то в сечении будет гипербола. Поэтому эллипс, гиперболу и параболу иногда называют ***коническими сечениями***.



Конические сечения обладают ещё одним общим свойством, которое сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Для любого конического сечения отношение расстояния от произвольной точки до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.



$\dfrac{r}{d} = \varepsilon < 1$ $\qquad$ $\dfrac{r}{d} = \varepsilon > 1$ $\qquad$ $\dfrac{r}{d} = 1$

Доказательство. Для параболы доказательство не требуется, свойство выполнено по определению.

Рассмотрим эллипс, заданный каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, и точку $M(x, y)$ на нём. Выберем какой-либо фокус, например $F_1(-c, 0)$. Тогда ближайшая к нему директриса имеет уравнение $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ и расстояние от $M(x, y)$ до неё равно $x + \dfrac{a}{\varepsilon}$. Используя соотношения, справедливые для эллипса:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}, \quad b^2 = a^2 - c^2,$$

вычислим отношение расстояний:

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{x + \dfrac{a}{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \dfrac{b^2x^2}{a^2}}}{x + \dfrac{a^2}{c}} =$$

$$== \frac{\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \dfrac{c^2x^2}{a^2}}}{x + \dfrac{a^2}{c}} = \frac{\sqrt{a^2 + 2cx + \dfrac{c^2x^2}{a^2}}}{x + \dfrac{a^2}{c}} =$$

$$= \frac{a + \dfrac{cx}{a}}{x + \dfrac{a^2}{c}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\dfrac{a^2}{c} + x}{x + \dfrac{a^2}{c}} = \frac{c}{a} = \varepsilon.$$

Для гиперболы проверка проводится аналогично.

8.2. Исследование общего уравнения 2-й степени от двух переменных

8.2.1. Геометрическое представление ортогональных преобразований

Общее уравнение 2-й степени от двух переменных имеет вид:

$$a_{11}x_2 + 2a_{12}xy + a_{22}y_2 + bx + cy + d = 0,$$

где хотя бы одно из чисел a_{ij} не равно 0. Наша цель — построить на плоскости такую систему координат, чтобы это уравнение имело наиболее простой вид. Это значит, что нам нужно выбрать новый базис и новое начало координат. Новый базис должен быть ортогональным (мы хотим работать в прямоугольной декартовой системе координат) и, более того, ортонормированным. Действительно, если длины базисных векторов изменятся, то изменится масштаб, и, например, эллипс может превратиться в окружность.

Линейное преобразование, которое переводит ортонормированный базис снова в ортонормированный базис является ортогональным (теорема 10 из 7.5.3). Линейная замена переменных, соответствующая переходу от одного ортонормированного базиса к другому, имеет ортогональную матрицу. Постараемся выяснить геометрический смысл таких преобразований.

Теорема 2. Ортогональное преобразование плоскости есть либо поворот, либо поворот с последующей осевой симметрией.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — ортогональное преобразование плоскости. Было доказано, что ортонормированный базис $\bar{i}, \bar{j}$ переходит снова в ортонормированный базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. Изображая единичный вектор $\bar{e}_1$ произвольно, для $\bar{e}_2$ получаем две возможности:

Разложим векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, чтобы найти матрицу преобразования $\mathcal{A}$.

В первом случае:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \cos\varphi \cdot \bar{i} + \sin\varphi \cdot \bar{j}, \\ \bar{e}_2 &= -\sin\varphi \cdot \bar{i} + \cos\varphi \cdot \bar{j}, \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Преобразование $\mathcal{A}$ является поворотом на угол φ против часовой стрелки.

Во втором случае:

$$\bar{e}_1 = \cos\varphi \cdot \bar{i} + \sin\varphi \cdot \bar{j}, \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$
$$\bar{e}_2 = \sin\varphi \cdot \bar{i} - \cos\varphi \cdot \bar{j},$$

Преобразование является поворотом на угол φ и последующим отражением (симметрией) относительно оси, проходящей через начало координат параллельно вектору $\bar{e}_1$.

Теорема 3. Если линейная замена переменных

$$(x, y) = (x', y')S$$

имеет ортогональную матрицу S, то новая система координат $X'OY'$ получена из XOY поворотом на некоторый угол, либо поворотом с последующей осевой симметрией.

Доказательство. Мы используем свойства ортогональных матриц, рассмотренные в 7.5.2. Обозначим $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$. Так как $s_{11}^2 + s_{12}^2 = 1$, то $|s_{11}| < 1$; значит, существует угол φ такой, что $\cos\varphi = s_{11}$. Ясно, что тогда $s_{12} = \pm\sin\varphi$. Так как аналогичное условие выполняется для столбца: $s_{11}^2 + s_{21}^2 = 1$, то и $s_{21} = \pm\sin\varphi$. Из равенства $s_{21}^2 + s_{22}^2 = 1$ получаем: $s_{22} = \pm\cos\varphi$. Учтём ещё одно соотношение в ортогональной матрице: $s_{11}s_{21} + s_{12}s_{22} = 0$. В результате получим 4 возможности:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Матрица S_1 определяет поворот системы координат на угол φ. Так как

$$S_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin(-\varphi) \\ -\sin(-\varphi) & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

то S_2 определяет поворот на угол $-\varphi$ (то есть по часовой стрелке). Заметим, что $|S_1| = |S_2| = 1$.

Представим матрицу S_3 в виде произведения:

$$S_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ задаёт симметрию относительно оси абсцисс:

$$(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (x, -y).$$

В точности так же $S_4 = S_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Значит, S_3, S_4 определяют поворот с последующей симметрией.

8.2.2. Классификация уравнений 2-й степени

Рассмотрим квадратичную форму

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

образованную слагаемыми 2-й степени в общем уравнении

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + bx + cy + d = 0.$$

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ — определитель её матрицы.

Теорема 4. Если $\Delta > 0$, то уравнение называется уравнением ***эллиптического типа*** и определяет эллипс или 1 точку.

Если $\Delta < 0$, то уравнение — ***гиперболического типа***, определяет гиперболу или 2 пересекающиеся прямые.

Если $\Delta = 0$, то уравнение — ***параболического типа***, определяет параболу, или 2 параллельные прямые, или 1 прямую.

Кроме того, при любом Δ уравнение может задавать пустое множество.

Доказательство. По теореме 15 из раздела 7.6, существует линейная замена переменных

$$\begin{array}{l} x = q_{11}x' + q_{21}y', \\ y = q_{12}x' + q_{22}y', \end{array} \quad \text{или} \quad (x, y) = (x', y')Q$$

с ортогональной матрицей Q, приводящая квадратичную форму к каноническому виду:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2.$$

Напомним, что Q — матрица перехода от ортонормированного базиса системы координат XOY к ортонормированного базису, построенному из собственных векторов линейного преобразования, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Числа λ_1, λ_2 — характеристические числа этой матрицы. Так как

$$QAQ^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

то, учитывая, что $|Q| = \pm 1$, получаем:

$$|QAQ^T| = |Q||A||Q|^T = |Q|^2 \cdot \Delta = \Delta = \lambda_1\lambda_2.$$

В новой системе координат исходное общее уравнение приобретает вид:

$$\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + b_1 x' + c_1 y' + d = 0.$$

Случай 1. Пусть $\Delta = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

Преобразуем уравнение, ***выделяя полные квадраты***:

$$\lambda_1 \left({x'}^2 + 2\frac{b_1}{2\lambda_1}x' + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 \right) +$$
$$+ \lambda_2 \left({y'}^2 + 2\frac{c_1}{2\lambda_2}y' + \left(\frac{c_1}{2\lambda_2}\right)^2 \right) + d - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{c_1^2}{4\lambda_2} = 0.$$

Обозначим $d_1 = d - \dfrac{b_1^2}{4\lambda_1} - \dfrac{c_1^2}{4\lambda_2}$ и сделаем замену переменных:

$$x'' = x' + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{c_1}{2\lambda_2}.$$

В новой системе координат уравнение имеет вид:

$$\lambda_1 {x''}^2 + \lambda_2 {y''}^2 + d_1 = 0.$$

Подслучай 1.1. $\Delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$, т. е. знаки λ_1, λ_2 одинаковы; уравнение эллиптического типа.

Если $d_1 = 0$, то такое уравнение определяет одну точку: $x'' = 0$, $y'' = 0$.

Если $d_1 \neq 0$, то запишем уравнение в виде:

$$\frac{{x''}^2}{\left(-\dfrac{d_1}{\lambda_1}\right)} + \frac{{y''}^2}{\left(-\dfrac{d_1}{\lambda_2}\right)} = 1.$$

Знаменатели имеют одинаковые знаки. Если они оба отрицательны, то уравнению не удовлетворяет ни одна точка. Если оба знаменателя положительны, то, обозначая $\left(-\dfrac{d_1}{\lambda_1}\right) = a^2$, $\left(-\dfrac{d_1}{\lambda_2}\right) = b^2$, получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{{x''}^2}{a^2} + \frac{{y''}^2}{b^2} = 1.$$

В частности, при $a = b$ это окружность.

Подслучай 1.2. $\Delta = \lambda_1\lambda_2 < 0$, т. е. знаки λ_1, λ_2 разные; уравнение гиперболического типа.

Если $d_1 = 0$, то запишем уравнение $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0$ в виде: $y'' = \pm\sqrt{-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}x''$. Очевидно, оно определяет 2 пересекающиеся прямые.

Если $d_1 \neq 0$, то уравнение можно записать так:

$$\frac{x''^2}{\left(-\dfrac{d_1}{\lambda_1}\right)} - \frac{y''^2}{\left(-\dfrac{d_1}{\lambda_2}\right)} = 1.$$

Здесь знаменатели имеют одинаковые знаки. Если они положительны, то получаем каноническое уравнение гиперболы: $\dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2} = 1$. Если оба знаменателя отрицательны, то получается также гипербола, но расположенная по-другому: $\dfrac{y''^2}{b^2} - \dfrac{x''^2}{a^2} = 1$.

Случай 2. Пусть $\Delta = \lambda_1\lambda_2 = 0$, то есть одно из чисел λ_1, λ_2 равно 0. (Оба числа не могут быть равны 0, так как ранги матриц $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ совпадают.)

Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$. Уравнение имеет вид:

$$\lambda_1 x'^2 + b_1 x' + c_1 y' + d = 0.$$

Если $c_1 = 0$, то после выделения полного квадрата и параллельного переноса получим уравнение $\lambda_1 x''^2 + d_1 = 0$. Оно определяет:

– прямую $x'' = 0$, если $d_1 = 0$.
– пустое множество, если λ_1 и d_1 имеют одинаковые знаки.
– 2 параллельные прямые $x'' = \pm\sqrt{-\dfrac{d_1}{\lambda_1}}$, если λ_1 и d_1 имеют разные знаки.

Пусть теперь $c_1 \neq 0$. Преобразуем уравнение:

$$\lambda_1\left(x'^2 + 2\frac{b_1}{2\lambda_1}x' + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2\right) - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} + c_1 y' + d = 0.$$

Обозначим $d - \dfrac{b_1^2}{4\lambda_1} = d_1$. Тогда получим

$$\lambda_1\left(x' + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + c_1\left(y' + \frac{d_1}{c_1}\right) = 0.$$

После замены переменных и параллельного переноса получаем уравнение:

$$\lambda_1 x''^2 = -c_1 y'',$$

которое, с помощью обозначения $2p = -\dfrac{c_1}{\lambda_1}$, превращается в каноническое уравнение параболы. Теорема доказана.

Пример 4. Привести уравнение

$$40x^2 + 25y^2 - 20xy + 20x - 50y - 11 = 0$$

к каноническому виду. Построить кривую.

Решение. Найдём ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $40x^2 + 25y^2 - 20xy$ к каноническому виду. Чтобы найти собственные числа решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 40-\lambda & -10 \\ -10 & 25-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 - 65\lambda + 900 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{65 \pm \sqrt{4225-3600}}{2} = \frac{65 \pm 25}{2},$$
$$\lambda_1 = 45, \qquad \lambda_2 = 20.$$

Заметим, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то есть это уравнение — эллиптического типа и определяет (по теореме 4) эллипс, одну точку или пустое множество.

Найдём собственные векторы:

1) $\lambda_1 = 45, \qquad (\beta_1,\ \beta_2)\begin{pmatrix} 40 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix} = (45\beta_1,\ 45\beta_2),$

$$\begin{cases} 40\beta_1 - 10\beta_2 = 45\beta_1, \\ -10\beta_1 + 25\beta_2 = 45\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5\beta_1 - 10\beta_2 = 0, \\ -10\beta_1 - 20\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть $\beta_2 = 1$ (свободная неизвестная). Тогда $\beta_1 = -2$. Нормируя, получаем собственный вектор $\bar{e}_1 = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

2) $\lambda_2 = 20, \qquad (\beta_1,\ \beta_2)\begin{pmatrix} 40 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix} = (20\beta_1,\ 20\beta_2),$

$$\begin{cases} 40\beta_1 - 10\beta_2 = 20\beta_1, \\ -10\beta_1 + 25\beta_2 = 20\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20\beta_1 - 10\beta_2 = 0, \\ -10\beta_1 + 5\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть $\beta_2 = 2$ (свободная неизвестная). Тогда $\beta_1 = 1$. Нормируя, получаем собственный вектор $\bar{e}_2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Матрица перехода Q из исходного базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$ в базис $\bar{e}_2$, $\bar{e}_1$ — искомая матрица необходимой нам замены переменных:

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad (x,\ y) = (x',\ y')\,Q, \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y', \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Мы переставили векторы $\bar{e}_2$, $\bar{e}_1$ в базисе для того, чтобы $|Q| = 1$, т. е. чтобы не применять симметрию, использовать лишь поворот осей.

Сделаем замену переменных:

$$\frac{40}{5}\left(x' - 2y'\right)^2 + \frac{25}{5}\left(2x' + y'\right)^2 - \frac{20}{5}\left(x' - 2y'\right)\left(2x' + y'\right) + \frac{20}{\sqrt{5}}\left(x' - 2y'\right) - \\ - \frac{50}{\sqrt{5}}\left(2x' + y'\right) - 11 = 0,$$

$$20{x'}^2 + 45{y'}^2 - \frac{80}{\sqrt{5}}x' - \frac{90}{\sqrt{5}}y' - 11 = 0.$$

Выделим полные квадраты:

$$20\left({x'}^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{5}\right) - 16 + 45\left({y'}^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{5}\right) - 9 - 11 = 0,$$

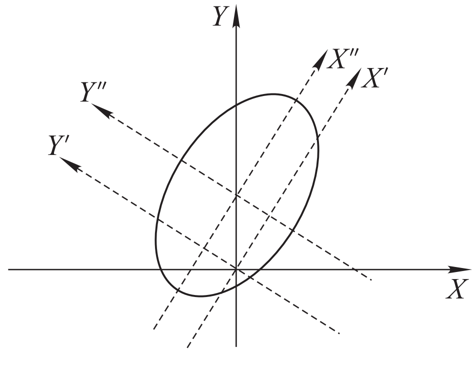
$$20\left(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 45\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36.$$

После параллельного переноса: $x'' = x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $y'' = y' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, получаем каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{{x''}^2}{\left(\dfrac{9}{5}\right)} + \dfrac{{y''}^2}{\left(\dfrac{4}{5}\right)} = 1$.

Его полуоси $a = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $b = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Центр находится в точке $x' = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, что соответствует точке $(0, 1)$ в системе XOY. Можно найти и все прочие параметры эллипса. Связь координат старой и новой систем задаётся формулами:

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y'' = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Сделаем чертёж:



8.3. Классификация поверхностей 2-го порядка

Поверхность 2-го порядка — это поверхность, заданная в декартовой прямоугольной системе координат алгебраическим уравнением 2-й степени:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0.$$

Как и в разделе 8.2, мы будем упрощать уравнение, переходя к новой системе координат. Таким образом будут найдены все возможные ***канонические*** уравнения поверхностей 2-го порядка. Форму этих поверхностей изучим в разделе 8.4.

Переход к новой системе координат будем проводить с помощью линейной замены переменных с ортогональной матрицей и с помощью параллельного переноса. Аналогично случаю плоскости можно доказать, что ортогональная замена переменных в пространстве приводит к повороту системы координат относительно некоторой оси и, возможно, отражению относительно плоскости.

Итак, по теореме 15 из раздела 7.6, квадратичная форма

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

приводится к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$ с помощью ортогональной замены переменных. Числа λ_1, λ_2, λ_3 — характеристические числа матрицы квадратичной формы $A = (a_{ij})$. В новой системе координат уравнение поверхности приобретает вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + d_1x' + d_2y' + d_3z' + c = 0.$$

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Ранг матрицы A равен 3, т. е. все числа $\lambda_i \neq 0$.

Выделяя полные квадраты и проводя параллельный перенос, получим уравнение:

$$\lambda_1 x''^{\,2} + \lambda_2 y''^{\,2} + \lambda_3 z''^{\,2} + e = 0.$$

Подслучай 1.1. Числа λ_i имеют одинаковые знаки. Имеются 3 возможности.

1.1.1. Свободный член $e = 0$. Тогда уравнение определяет одну точку: $x'' = y'' = z'' = 0$.

1.1.2. Знак e совпадает со знаком λ_i. Тогда очевидно, что уравнение не определяет ни одной точки.

1.1.3. Знак e противоположен знаку λ_i. В этом случае уравнение можно записать так:

$$\frac{x''^2}{\left(-\dfrac{e}{\lambda_1}\right)} + \frac{y''^2}{\left(-\dfrac{e}{\lambda_2}\right)} + \frac{z''^2}{\left(-\dfrac{e}{\lambda_3}\right)} = 1.$$

Так как знаменатели положительны, то обозначим их через a^2, b^2, c^2. Опуская штрихи, получим уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задаётся этим уравнением, называется ***эллипсоидом***.

Подслучай 1.2. Пусть среди λ_i есть числа разных знаков. Можно считать, например, что $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3<0$ (если отрицательных чисел два, то, умножая уравнение на -1, придём опять к этому случаю).

Рассмотрим все имеющиеся возможности.

1.2.1. $e<0$. Уравнение можно записать в виде:

$$\frac{x''^2}{\left(-\frac{e}{\lambda_1}\right)}+\frac{y''^2}{\left(-\frac{e}{\lambda_2}\right)}-\frac{z''^2}{\left(\frac{e}{\lambda_3}\right)}=1.$$

Обозначая знаменатели a^2, b^2, c^2 и опуская штрихи, получаем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задаётся таким уравнением, называется ***однополостным гиперболоидом***.

1.2.2. $e=0$. Записывая уравнение в виде: $\dfrac{x''^2}{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)}+\dfrac{y''^2}{\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)}-\dfrac{z''^2}{\left(-\frac{1}{\lambda_3}\right)}=0$ и упрощая, получим: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$. Это ***коническая поверхность***, или ***конус***.

1.2.3. $e>0$. Аналогично предыдущему, уравнение можно записать так:

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{e}{\lambda_1}\right)}+\frac{y''^2}{\left(\frac{e}{\lambda_2}\right)}-\frac{z''^2}{\left(\frac{e}{-\lambda_3}\right)}=-1.$$

Все знаменатели положительны, поэтому, после переобозначений, имеем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Поверхность, заданная таким уравнением, называется ***двуполостным гиперболоидом***. Случай, когда все $\lambda_i\neq 0$, полностью рассмотрен.

Случай 2. Ранг матрицы A равен 2, то есть одно из λ_i равно 0. Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Выделяя полные квадраты в уравнении

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + d_1 x' + d_2 y' + d_3 z' + c = 0$$

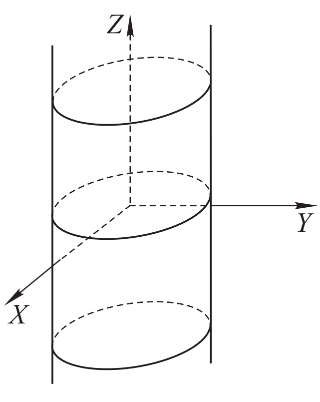
и выполняя параллельный перенос, получим:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d_3 z' + e = 0.$$

Подслучай 2.1. $d_3 = 0$. Уравнение

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + e = 0$$

задаёт в пространстве ***цилиндрическую*** поверхность. Заметим, что можно рассматривать это уравнение и как уравнение линии на плоскости XOY. Это может быть эллипс, гипербола, точка или 2 пересекающиеся прямые (см. случай 1 в теореме 4, раздел 8.2). Тогда в пространстве получается соответственно ***эллиптический цилиндр***, ***гиперболический цилиндр***, прямая или 2 пересекающиеся плоскости.



Например, уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ задаёт в пространстве эллиптический цилиндр (см. рисунок). Эллипс, расположенный в плоскости XOY, называется ***направляющей*** этого цилиндра. Поверхность образована прямыми, проходящими через точки эллипса параллельно оси OZ. Поэтому эти прямые называются ***образующими*** цилиндра. Аналогично можно построить и гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Подслучай 2.2. $d_3 \neq 0$. Запишем уравнение в виде

$$\frac{x''^2}{\left(\dfrac{d_3}{\lambda_1}\right)} + \frac{y''^2}{\left(\dfrac{d_3}{\lambda_2}\right)} + \left(z' + \frac{e}{d_3}\right) = 0$$

и проведём ещё один сдвиг: $z'' = z' + \dfrac{e}{d_3}$. Рассмотрим знаки чисел λ_1, λ_2.

2.2.1. Знаки λ_1, λ_2 одинаковы. Тогда, опуская штрихи и обозначая a^2, b^2 положительные знаменатели, можно записать уравнение в одном из видов:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -z.$$

Поверхность, заданная таким уравнением, называется ***эллиптическим параболоидом***.

2.2.2. Знаки λ_1, λ_2 различны. Аналогичные преобразования приводят к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Поверхность, заданная таким уравнением, называется ***гиперболическим параболоидом***.

Случай 3. Ранг матрицы A равен 1. Например, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. После сдвига по оси OX' уравнение имеет вид:

$$\lambda_1 x''^2 + d_2 y' + d_3 z' + e = 0.$$

Если $d_2 = d_3 = e = 0$, то уравнение задаёт плоскость $x'' = 0$.

Если $d_2 = d_3 = 0$, $e \neq 0$, то получается либо пустое множество (если знаки λ_1, e одинаковы), либо пара параллельных плоскостей

$$x'' = \pm\sqrt{-\frac{e}{\lambda_1}},$$

если знаки λ_1, e различны.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел d_2, d_3 не равно 0. Например, $d_3 \neq 0$. Сделаем поворот вокруг оси $O'X''$ (при этом координата x'' не меняется):

$$\begin{aligned} y' &= \cos\varphi \cdot y'' + \sin\varphi \cdot z'', \\ z' &= -\sin\varphi \cdot y'' + \cos\varphi \cdot z''. \end{aligned}$$

Подставляем в уравнение:

$$\lambda_1 x''^2 + d_2(\cos\varphi \cdot y'' + \sin\varphi \cdot z'') + d_3(-\sin\varphi \cdot y'' + \cos\varphi \cdot z'') + e = 0,$$

$$\lambda_1 x''^2 + y''(d_2\cos\varphi - d_3\sin\varphi) + z''(d_2\sin\varphi + d_3\cos\varphi) + e = 0.$$

Подберём такой угол φ, чтобы коэффициент при y'' был равен 0:

$$d_2\cos\varphi - d_3\sin\varphi = 0, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{d_2}{d_3}.$$

После такого поворота уравнение имеет вид: $\lambda_1 x''^2 + bz'' + e = 0$. Выполним ещё один сдвиг — по оси Z'' (т. е. замену переменных $x''' = x''$, $y''' = y''$, $z''' = z'' + \dfrac{e}{b}$) и получим уравнение

$$\lambda_1 x'''^2 + bz''' = 0.$$

На плоскости $X'''O'''Z'''$ оно задаёт параболу. Значит, это параболический цилиндр. Его направляющая — парабола, а образующие параллельны оси $O'''Y'''$.

8.4. Построение поверхностей

Мы приступаем к изучению формы поверхностей второго порядка, определённых в предыдущем разделе своими каноническими уравнениями. Напомним, что это вторая из двух основных задач аналитической геометрии: зная уравнение поверхности, изучить её геометрические свойства.

Метод, который мы будем применять, называется ***методом сечений***: пересекая поверхность плоскостями, параллельными координатным плоскостям, будем рассматривать линии пересечения и по их виду делать выводы о форме поверхности.

8.4.1. Эллипсоид

Каноническое уравнение эллипсоида:

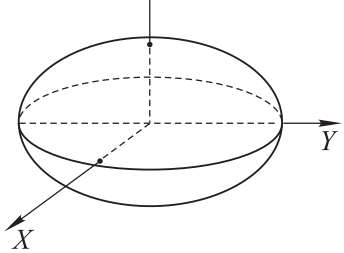
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Отметим симметрию поверхности: если точка (x, y, z) лежит на эллипсоиде, то и все точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ тоже лежат на эллипсоиде. Значит, поверхность симметрична относительно любой из координатных плоскостей.

Пересечём эллипсоид плоскостью $z = h$. Получим линию

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}\,,\text{ или } \frac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

Это эллипс, полуоси которого убывают с увеличением $|h|$.



При $h = c$ эллипс превращается в точку, при $h > c$ плоскость $z = h$ не пересекает эллипсоид. Эллипсы получаются и при сечении эллипсоида плоскостями $x = h$, $y = h$. Используя эти данные, изображаем поверхность. Числа a, b, c называются полуосями эллипсоида. Если две полуоси равны, то получается ***эллипсоид вращения***. Например, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ — эллипсоид, образованный при вращении эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (лежит в плоскости XOZ) вокруг оси OZ. Если $a = b = c$, то эллипсоид превращается в ***сферу***.

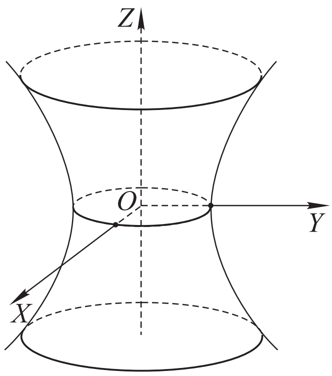
8.4.2. Однополостный гиперболоид

Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

В пересечении с плоскостью $z = h$ имеем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)} = 1.$$



Мы опять получили эллипсы. Но теперь при $h = 0$ эллипс имеет наименьшие размеры. При возрастании h его полуоси увеличиваются. Рассмотрим пересечение поверхности координатной плоскостью $x = 0$: $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Это уравнение определяет гиперболу. Также гипербола, очевидно, получится при пересечении плоскостью $y = 0$. Рассмотренные сечения уже позволяют представить себе поверхность однополостного гиперболоида. При $a = b$ её можно получить, вращая гиперболу $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг оси OZ. Возьмём ещё сечение плоскостью $x = h \quad (0 < h < a)$:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}, \qquad \frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{h^2}{a^2}\right)} = 1.$$

При увеличении h вершины этой гиперболы будут сближаться, при $h = a$ получим:

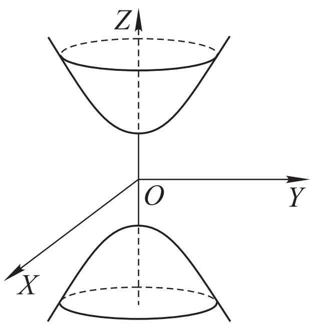
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

то есть уравнение, задающее 2 пересекающиеся прямые. Используя это рассуждение, можно доказать, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходят 2 прямые, целиком лежащие на его поверхности.

8.4.3. Двуполостный гиперболоид

Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



Из уравнения следует, что $|z| \geq c$. Пересечениями поверхности с плоскостями $z = h$, $|h| > c$, являются эллипсы: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1$, или

$$\frac{x^2}{a^2\left(\dfrac{h^2}{c^2} - 1\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(\dfrac{h^2}{c^2} - 1\right)} = 1,$$

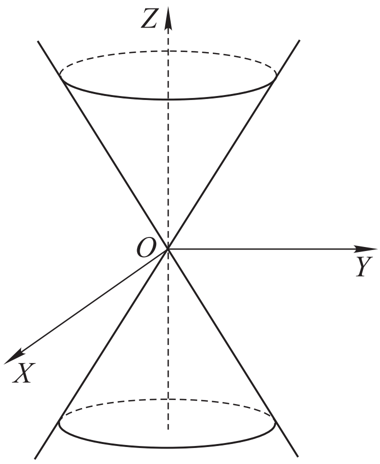
полуоси которых увеличиваются с ростом $|h|$. Сечением плоскостью $x = 0$ является гипербола:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad \text{или} \qquad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

фокусы которой лежат на оси OZ. При $a = b$ двуполостный гиперболоид можно получить, вращая эту гиперболу вокруг оси OZ.

8.4.4. Конус

Каноническое уравнение: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

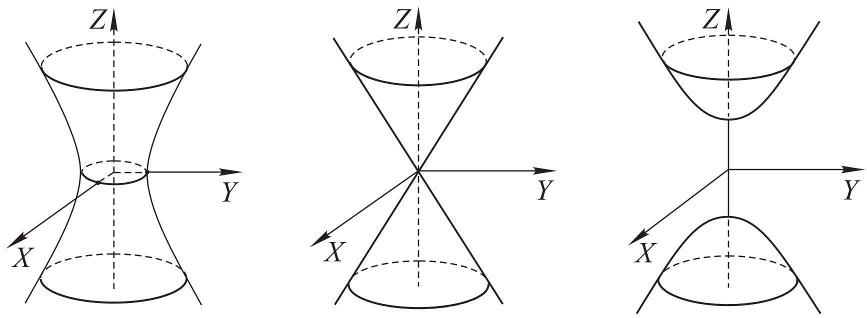


В сечениях плоскостями $z = h$ получаются эллипсы, полуоси которых увеличиваются с ростом $|h|$. Только при $h = 0$ получается одна точка — вершина конуса. Если $a = b$, то эти эллипсы являются окружностями и конус называется ***прямым круговым***. Пересекая конус плоскостью $x = 0$, получим две пересекающиеся прямые $y = \pm\dfrac{b}{c}z$. Другие сечения конической поверхности мы рассматривали в пункте 8.1.4, изучая кривые 2-го порядка.

Замечание. Обратим внимание: однополостный, двуполостный гиперболоиды и конус задаются похожими уравнениями. Можно рассмотреть более общее уравнение, включающее все 3 возможности:

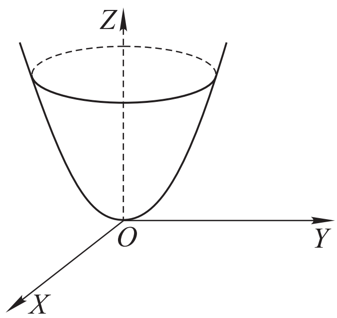
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = h.$$

Проследим, как меняется поверхность при изменении h. При $h > 0$ это однополостный гиперболоид. Уменьшая h, мы уменьшаем размеры наименьшего эллипса в его сечении. Гиперболы приближаются к своим асимптотам, их вершины сближаются. При $h = 0$ гиперболоид превращается в конус. Дальнейшее уменьшение h приводит к «разрыву», снова появляются гиперболы, но теперь их вершины – на оси OZ.



8.4.5. Эллиптический параболоид

Каноническое уравнение: $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z.$



Ясно, что $z \geq 0$, то есть плоскости $z = h$ при $h < 0$ не пересекают поверхность. Плоскости $z = h$ при положительных h пересекают поверхность по эллипсам:

$$\frac{x^2}{a^2 h} + \frac{y^2}{b^2 h} = 1.$$

Их полуоси возрастают с ростом h. Плоскость $x = 0$ пересекает поверхность по параболе $\dfrac{y^2}{b^2} = z$. Также парабола получается и при сечении другой координатной плоскостью, $y = 0 : \ \dfrac{x^2}{a^2} = z$. При $a = b$ поверхность является параболоидом вращения, её можно получить, вращая параболу вокруг своей оси.

Эллиптический параболоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -z$ симметричен рассмотренному относительно плоскости XOY.

8.4.6. Гиперболический параболоид

Каноническое уравнение:

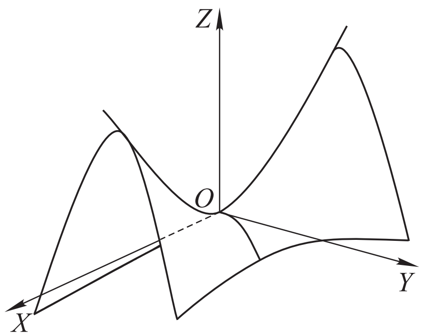
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Рассмотрим сечение плоскостью $y = 0$. Получается парабола $\dfrac{x^2}{a^2} = z$, её ветви направлены вверх, вершина в точке $(0,\,0,\,0)$.

Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Это опять парабола:

$$-\frac{y^2}{b^2} = z - \frac{h^2}{a^2}.$$

Её ветви направлены вниз, вершина смещена по оси OZ на величину $\dfrac{h^2}{a^2}$, то есть находится в точке $\left(h,\,0,\,\dfrac{h^2}{a^2}\right)$. Заметим, что эта точка лежит на параболе $\dfrac{x^2}{a^2} = z$.



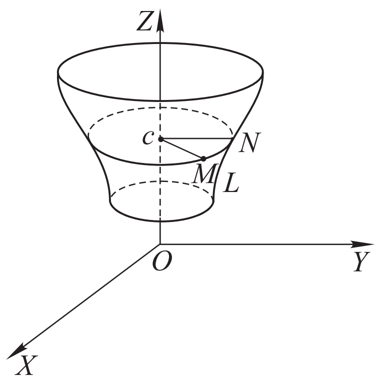
Теперь, изменяя h, видим, что поверхность гиперболического параболоида состоит из парабол, расположенных в плоскостях $x = h$, вершины которых находятся на параболе $\dfrac{x^2}{a^2} = z$.

Плоскости $z = h$ пересекают гиперболический параболоид по гиперболам, расположение ветвей которых зависит от знака h: при $h > 0$ действительная ось гиперболы параллельна OX, при $h < 0$ действительная ось параллельна OY. Плоскость $z = 0$ пересекает поверхность по двум прямым $y = \pm\dfrac{b}{a}\,x$.

Гиперболический параболоид иногда называют ***седловидной*** поверхностью.

8.4.7. Поверхности вращения

Мы встречали поверхности вращения — как частные случаи поверхностей 2-го порядка.



Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть в плоскости YOZ имеется кривая L, заданная уравнением $f(y, z) = 0$. Выведем уравнение поверхности, образованной при вращении кривой L вокруг оси OZ. Возьмём точку $M(x, y, z)$ на поверхности, проведём через неё плоскость, перпендикулярную OZ. Пусть она пересекает ось OZ в точке $C(0,\,0,\,z)$, линию L в точке $N(0,\,y_N,\,z)$. Тогда $|CM| = |CN|$. Или в координатах: $\sqrt{x^2 + y^2} = |y_N|$, то есть

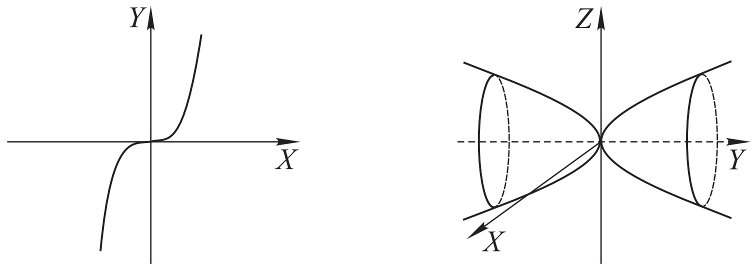
$y_N = \pm\sqrt{x^2+y^2}$. Так как точка $N(0,\, y_N,\, z)$ лежит на кривой L, то получаем: $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\, z) = 0$. Это уравнение задаёт рассматриваемую поверхность вращения.

Пример 5. Составить уравнение поверхности, образованной при вращении кривой $y = x^3$ вокруг оси OY.

Решение. Не изменяя переменную y (так как вокруг оси OY совершается вращение), заменим в уравнении кривой переменную x на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$:

$$y = \left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^3.$$

После возведения в квадрат: $y^2 = (x^2+z^2)^3$.



8.5. Задачи с решениями

1. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(a,\, b)$ и радиусом R.

Решение. Если $M(x, y)$ — произвольная точка окружности, то расстояние $|MC| = R$. В координатной форме получаем уравнение:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R,$$

или проще:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2.$$

2. Составить уравнение окружности, если точки $A(8,-4)$ и $B(6,0)$ являются концами одного из диаметров.

Решение. Центр окружности C делит отрезок AB пополам. Поэтому координаты центра: $x_c = \dfrac{8+6}{2} = 7, \quad y_c = \dfrac{-4+0}{2} = -2.$

Так как радиус окружности $r = |AB| = |BC|$, то

$$r = \sqrt{(7-6)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{5}.$$

Значит, уравнение окружности имеет вид:

$$(x-7)^2+(y+2)^2 = 5.$$

3. Составить уравнение окружности, проходящей через точки

$$A(4,2),\ B(1,3),\ C(6,2).$$

Решение. Найдём центр окружности — он равноудалён от точек A, B, C. Поэтому центр находится на пересечении перпендикуляров, проведённых через середины отрезков AB и AC.

Построим перпендикуляры. Середина отрезка AB имеет координаты $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$. Вектор $\overline{AB} = (-3,\ 1)$. Поэтому общее уравнение прямой, проходящей через точку $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$, перпендикулярно $\overline{AB}$, имеет вид (см. раздел 5.5):

$$-3\left(x - \frac{5}{2}\right) + \left(y - \frac{5}{2}\right) = 0.$$

Аналогично, середина AC имеет координаты $(5,0)$. Вектор $\overline{AC} = (2,-4)$. Поэтому перпендикуляр, проведённый к отрезку AC через его середину, имеет уравнение $2(x-5) - 4y = 0$.

Найдём точку пересечения:

$$\begin{cases} -3\left(x - \frac{5}{2}\right) + \left(y - \frac{5}{2}\right) = 0, \\ 2\,(x-5) - \quad 4y \quad = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -6x + 2y = -10, \\ 2x - 4y = \ \ 10. \end{cases}$$

Отсюда $x = 1$, $y = -2$.

Найдём радиус окружности — расстояние от центра до любой данной точки: $r = \sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2} = 5$. Итак, уравнение окружности:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

4. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси OX симметрично относительно начала координат, если известна его малая полуось $b = \sqrt{5}$ и точка эллипса $M\left(\sqrt{3},\ -2\right)$.

Решение. Из условия следует, что эллипс в данной системе координат имеет каноническое уравнение: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Подставляя известную полуось b и координаты точки M, найдём a: $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2} + \dfrac{(-2)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = 1$, $\dfrac{3}{a^2} + \dfrac{4}{5} = 1$, $\dfrac{3}{a^2} = \dfrac{1}{5}$, $\quad a^2 = 15$. Уравнение эллипса имеет вид: $\dfrac{x^2}{15} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

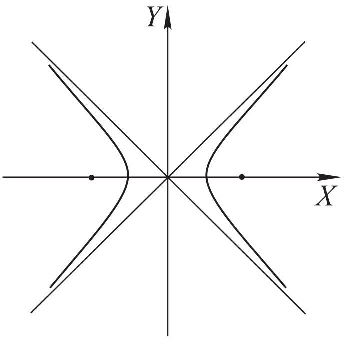
5. Найти эксцентриситет эллипса, фокусы которого находятся в точках $F_1(-3,-5)$, $F_2(5,1)$, а малая полуось $b = 12$.

Решение. Найдём межфокусное расстояние:

$$|F_1F_2| = \sqrt{(-3-5)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

Значит, его половина $c = 5$. Так как полуоси связаны с параметром c соотношением $a^2 = b^2 + c^2$, то $a^2 = 144 + 25 = 169$. Значит, $a = 13$. Находим эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$.

6. Составить уравнение гиперболы, если её вершины лежат на оси OX симметрично относительно начала координат, расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2, а одна из асимптот имеет уравнение $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$.



Решение. Из условия следует, что гипербола в данной системе координат имеет каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. В такой системе координат асимптоты гиперболы имеют уравнения: $y = \pm\frac{b}{a}x$. Поэтому $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Расстояние от фокуса до ближайшей вершины равно $c - a$. Учитывая, что $c^2 - a^2 = b^2$, $c - a = 2$, находим полуоси:

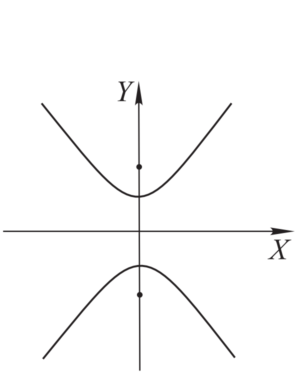
$$\begin{cases} b^2 = \frac{5a^2}{4}, \\ (a+2)^2 - a^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 4a + 4 = \frac{5}{4}a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5a^2 - 16a - 16 = 0.$$

Решим квадратное уравнение: $a = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 320}}{10} = \frac{16 \pm 24}{10}$. Так как $a > 0$, то $a = 4$. Отсюда $b = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$. Искомое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

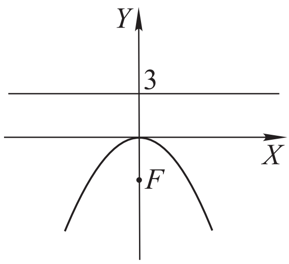
7. Найти фокусы и эксцентриситет гиперболы, заданной уравнением

$$y^2 - x^2 = 2.$$



Решение. Каноническое уравнение данной гиперболы имеет вид: $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$. Её действительная ось — ось OY, на ней расположены вершины и фокусы. Так как $c^2 = a^2 + b^2 = 2 + 2 = 4$, то $c = 2$ и фокусы имеют координаты: $F_1(0, 2)$, $F_2(0, -2)$. Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

8. Составить уравнение параболы и найти её фокус, если вершина находится в начале координат, а директриса имеет уравнение $y = 3$.



Решение. Так как директриса параллельна оси OX, а вершина — в начале координат, то парабола в такой системе координат имеет каноническое уравнение:

$$x^2 = -2py.$$

Вершина параболы находится на расстоянии 3 от директрисы, значит параметр $p = 6$. Уравнение параболы имеет вид: $x^2 = -12y$. Фокус находится в точке $F(0, -3)$.

9. С помощью поворота осей координат на угол 45° привести уравнение гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ к каноническому виду.

Решение. Поворот осей координат задаёт матрица $S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

В нашем случае $\varphi = 45°$, поэтому $S = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Формулы преобразования координат имеют вид:

$$(x,\ y) = (x', y')S = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y',\ \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right).$$

Подставляя эти выражения в уравнение гиперболы $xy = 1$, получим:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x' - y'\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x' + y'\right) = 1, \text{ или } \quad \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1.$$

10. Привести уравнение кривой 2-го порядка

$$9x^2 + 16y^2 - 54x + 32y - 47 = 0$$

к каноническому виду. Сделать чертёж.

Решение. Так как квадратичная форма $9x^2 + 16y^2$ в левой части уравнения находится в каноническом виде, то поворот делать не нужно. Выделим полные квадраты:

$$9(x^2 - 6x + 9) - 81 + 16(y^2 + 2y + 1) - 16 - 47 = 0,$$

$$9(x - 3)^2 + 16(y + 1)^2 = 144,$$

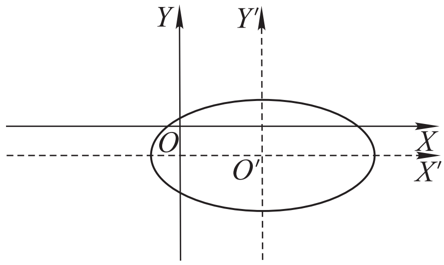
$$\frac{(x - 3)^2}{16} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1.$$

Сделаем замену переменных, соответствующую переносу начала координат в точку $O'(3, -1)$:

$$x' = x - 3, \quad y' = y + 1.$$

Получили каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{9} = 1$.

Начертим обе системы координат, так как в новой системе $X'O'Y'$ эллипс изобразить проще.



Если требуется найти, например, фокусы эллипса или уравнения его директрис, то также лучше сделать это в новой системе координат, а затем перейти в старую, используя формулы перехода.

11. Привести уравнение кривой 2-го порядка

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y - \sqrt{5} = 0$$

к каноническому виду. Сделать чертёж.

Решение. Найдём ортогональную замену переменных, приводящую квадратичную форму $x^2 - 4xy + 4y^2$ к главным осям. Сначала решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 5\lambda = 0; \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5.$$

Так как $\lambda_1\lambda_2 = 0$, то уравнение — параболического типа, определяет или параболу, или две параллельные прямые, или одну прямую (теорема 4, пункт 8.2.2).

Найдём собственные векторы (так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то они будут ортогональны).

$$1)\ \lambda_1 = 0, \quad (\beta_1,\ \beta_2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = (0, 0),$$

$$\begin{cases} \beta_1 - 2\beta_2 = 0, \\ -2\beta_1 + 4\beta_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \beta_1 - 2\beta_2 = 0.$$

Пусть $\beta_2 = 1$ (свободная неизвестная). Тогда $\beta_1 = 2$. Нормируя, находим единичный собственный вектор: $\bar{e}_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

2) $\lambda_2 = 5, \quad (\beta_1,\ \beta_2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = (5\beta_1,\ 5\beta_2)\,,$

$$\begin{cases} \beta_1 - 2\beta_2 = 5\beta_1, \\ -2\beta_1 + 4\beta_2 = 5\beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -4\beta_1 - 2\beta_2 = 0.$$

Пусть $\beta_2 = 2$ (свободная неизвестная). Тогда $\beta_1 = -1$. Нормируя, находим ещё один единичный собственный вектор $\bar{e}_2 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Матрица перехода от старого базиса к базису $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ — искомая ортогональная матрица замены переменных:

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}\,x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\,y', \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\,y'. \end{aligned}$$

Выполним замену переменных. Заранее известно, как будет преобразована квадратичная форма:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = 5{y'}^2.$$

Поэтому подставлять выражения для x, y можно только в слагаемые первой степени:

$$5{y'}^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(2x' - y'\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') - \sqrt{5} = 0.$$

Раскрывая скобки и сокращая, получим:

$$5{y'}^2 + \frac{5x'}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} = 0,$$
$$5{y'}^2 + \sqrt{5}(x' - 1) = 0.$$

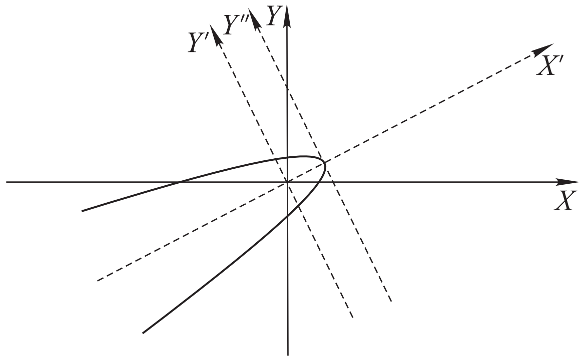
Сделаем ещё одну замену переменных — параллельный перенос:

$$x'' = x' - 1, \quad y'' = y'.$$

Получим каноническое уравнение параболы:

$${y''}^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}x''.$$

На чертеже изобразим все 3 системы координат.



12. Установить вид кривой пересечения конуса $\dfrac{x^2}{8} = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{4}$ и плоскости $y + 2 = 0$, найти вершины кривой.

Решение. Координаты точек линии пересечения удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{8} = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{4}, \\ y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{z^2}{4} = \dfrac{(-2)^2}{2}, \\ y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{z^2}{8} = 1, \\ y + 2 = 0. \end{cases}$$

Получили гиперболу в плоскости $y+2 = 0$, параллельной плоскости XOZ. Её действительная полуось $a = 4$, параллельна оси OX. Поэтому вершины гиперболы находятся в точках $(\pm 4, -2, 0)$.

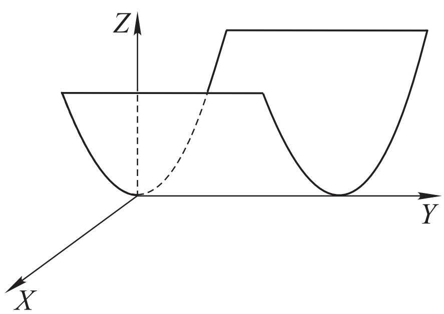
13. Установить вид кривой, лежащей в пересечении гиперболического параболоида $y^2 - x^2 = 4z$ и плоскости $x - 6 = 0$; найти параметры кривой.

Решение. Координаты точек линии пересечения удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 4z, \\ x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 36 = 4z, \\ x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4(z + 9), \\ x = 6. \end{cases}$$

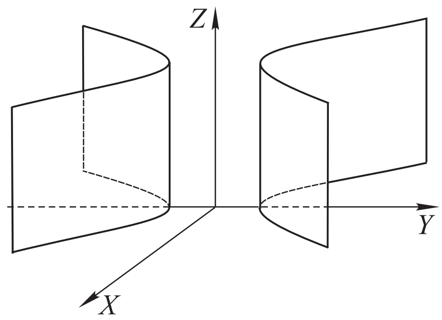
После сдвига по оси OZ получим каноническое уравнение параболы с параметром $p = 2$. Её вершина находится в точке $(6, 0, -9)$.

14. Построить поверхность, заданную уравнением $x^2 - 8z = 0$.



Решение. Так как в запись уравнения не входит переменная y, то это цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси OY. Строим в плоскости XOZ направляющую, заданную тем же уравнением $x^2 = 8z$. Это каноническое уравнение параболы. Через каждую точку параболы проведём прямую, параллельную оси OY. Такие прямые целиком лежат на поверхности, «образуют» её, поэтому и называются образующими. Построенная поверхность называется ***параболическим цилиндром***.

15. Построить поверхность, заданную уравнением $8y^2 - 5x^2 - 40 = 0$.



Решение. Легко записать уравнение в каноническом виде: $\dfrac{y^2}{5} - \dfrac{x^2}{8} = 1$. Так как переменной z нет, то это цилиндрическая поверхность. Строим в плоскости XOY гиперболу $\dfrac{y^2}{5} - \dfrac{x^2}{8} = 1$ (её вершины находятся на оси OY). Через каждую точку гиперболы проводим прямую, параллельную оси OZ. Получаем ***гиперболический цилиндр.***

16. Построить поверхность, заданную уравнением

$$9x^2 + 4y^2 + 36z^2 - 18x + 16y - 11 = 0.$$

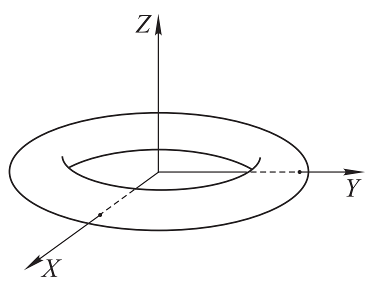
Решение. Так как уравнение не содержит произведений переменных, то для его преобразования к каноническому виду поворот осей не требуется, достаточно сделать параллельный перенос. Выделим полные квадраты:

$$9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(y^2 + 4y + 4) - 16 + 36z^2 - 11 = 0,$$
$$9(x - 1)^2 + 4(y^2 + 2)^2 + 36z^2 = 36,$$
$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} + z^2 = 1.$$

Получили каноническое уравнение эллипсоида, центр которого находится в точке $(1, -2, 0)$, полуоси $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

17. Построить поверхность, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8\sqrt{x^2 + y^2} - 15.$$



Решение. Заметим, что переменные x и y входят в уравнение только в составе суммы квадратов $x^2 + y^2$. Значит, это поверхность вращения. Вокруг оси OZ вращается линия, уравнение которой получим, заменяя $\sqrt{x^2 + y^2}$ на одну из переменных, например, x:

$$x^2 + z^2 = 8x - 15.$$

Выделяем полный квадрат:

$$(x^2 - 8x + 16) + z^2 = 1,$$
$$(x - 4)^2 + z^2 = 1.$$

Получили окружность в плоскости XOZ. При её вращении вокруг оси OZ получается поверхность, которая называется ***тор***.

18. Определить вид поверхности, заданной уравнением 2-й степени

$$x^2 + 4xy - 8yz + z^2 = 20.$$

Решение. Запишем матрицу квадратичной формы, входящей в уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогональной замены переменных найдём характеристические корни:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$
$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$
$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 16) - 2(2 - 2\lambda) = 0,$$
$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 16 - 4) = 0.$$

Значит, $\lambda_1 = 1$. Корни λ_2, λ_3 найдём, решая квадратное уравнение $\lambda^2 - \lambda - 20 = 0$. Получим $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -4$ (порядок корней не важен). Следовательно, после замены переменных, уравнение поверхности запишется так: $x'^2 + 5y'^2 - 4z'^2 = 20$, или в каноническом виде:

$$\frac{x'^2}{20} + \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{5} = 1.$$

Эта поверхность — однополостный гиперболоид. В условии задачи не требуется определять его положение в пространстве. Для этого нужно было бы для каждого λ найти собственный вектор, построить ортонормированный базис из собственных векторов. В системе координат, связанной с этим базисом, однополостный гиперболоид и задаётся найденным каноническим уравнением.

8.6. Упражнения для самостоятельной работы

1. Составить уравнение окружности, если она проходит через точку $(4, -2)$, а её центр находится в точке $(2, -7)$.

2. Найти уравнение окружности, проходящей через точки

$$A(2, 2), B(4, -2), C(-2, -10).$$

3. Составить уравнение эллипса, центр которого находится в начале координат, один из фокусов — в точке $F_1(2, 0)$, а эксцентриситет равен $\frac{1}{3}$.

4. Найти полуоси эллипса, фокусы которого находятся в точках $F_1(3, -1)$, $F_2(-5, -7)$, а расстояние между директрисами равно 18.

5. Найти уравнение гиперболы, если известны координаты центра $O(0, 0)$, одного из фокусов $F(7, 0)$ и одной из вершин $A(6, 0)$.

6. Найти фокусы гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{41} - \frac{y^2}{31} = -2$.

7. Найти уравнение гиперболы, если её фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$, а эксцентриситет в $1,75$ раза больше, чем эксцентриситет этого эллипса.

8. Найти эксцентриситет гиперболы, у которой асимптоты взаимно перпендикулярны.

9. Найти уравнение гиперболы, если известна одна её точка $M(6\sqrt{2}, -3)$ и уравнения асимптот $y = \pm\frac{x}{2}$.

10. Найти вершину A, фокус F и уравнение директрисы d параболы $y^2 - 6x + 14y + 61 = 0$.

11. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если она симметрична относительно оси OX и проходит через точку $(-2, 4)$. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

12. Привести уравнение кривой к каноническому виду. Записать формулы преобразования координат. Сделать чертёж.

а) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$; б) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 32y - 79 = 0$;
в) $x^2 - 6x - 10y - 11 = 0$; г) $9x^2 + y^2 + 18x - 4y + 4 = 0$.

13. Привести уравнение кривой к каноническому виду. Записать формулы преобразования координат. Сделать чертёж.

а) $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 12$;
б) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 82x - 24y + 15 = 0$.

14. Найти полуоси эллипса, по которому плоскость $z - 3 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{12} = 1$.

15. Найти координаты вершин гиперболы, лежащей в пересечении однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}-\frac{z^2}{25}=1$ и плоскости $x+3=0$.

16. Найти параметр и координаты вершины параболы, лежащей в пересечении эллиптического параболоида $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=8x$ и плоскости $y-8=0$.

17. Построить поверхность, заданную уравнением:

а) $x^2+z^2-6x-2z+9=0$;

б) $y^2+8z+40=0$;

в) $x^2-y^2=5$.

18. Составить уравнение поверхности, образованной при вращении гиперболы $\frac{y^2}{4}-z^2=1$ вокруг оси OY.

19. Привести к каноническому виду уравнение поверхности 2-го порядка

$$4xy+4xz=\sqrt{2}.$$

Какую поверхность оно задаёт?

8.7. Образец теста

(для дистанционной формы обучения)

1. Найти радиус окружности $x^2+y^2+4x-10y-35=0$.

2. Найти эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

3. Фокусы гиперболы находятся в точках $(0,\pm 3)$, а её вершины — в точках $(0,\pm 2)$. Чему равно положительное число x, если точка $M(x,5\sqrt{7})$ лежит на гиперболе?

4. Поверхность $y^2=4x$ пересекается с плоскостью $z=5$ по параболе. Найти фокус этой параболы. В ответе указать сумму всех координат фокуса.

5. Найти большую полуось эллипса, лежащего в пересечении эллипсоида $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}=1$ и плоскости $x=5$.

6. Уравнение $5x^2-6xy+5y^2+8=0$ определяет:

1) эллипс; 2) гиперболу; 3) параболу; 4) прямую линию; 5) пустое множество. Указать номер правильного ответа.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ И ТЕСТАМ

Ответы к упражнениям

Глава 1

1. $A = \{2,\ -2,\ \sqrt{5},\ -\sqrt{5}\}$. **2.** $A = \{\, n^2 \mid n \in N\,\}$, $B = \{\, -8n \mid n \in N\,\}$.

3. Мощность A равна 10, B — счётное, мощность C равна 1.

4. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, h\}$, $A \cap B = \{b, c, f\}$, $A \smallsetminus B = \{a, d, e\}$, $B \smallsetminus A = \{h\}$.

5. $A \cup B = (-\infty,\ 7)$, $A \cap B = (0,\ 3]$, $A \smallsetminus B = (-\infty,\ 0]$, $B \smallsetminus A = (3,\ 7)$.

6. $A \cup B = \mathbb{Z} \smallsetminus \{\, \pm 7,\ \pm 21,\ \pm 35,\ \pm 49,\ \dots\,\}$, $A \cap B = \varnothing$.

10. а) Верно; б) неверно; в) неверно; г) верно. **11.** а) График инъективного, но не сюръективного отображения; б) не является; в) график биективного отображения; г) не является.

12. а) График не инъективного и не сюръективного отображения; б) не является; в) график биективного отображения; г) график не инъективного и не сюръективного отображения. **13.** а) Не инъективное, не сюръективное; б) инъективное, не сюръективное; в) биективное; г) сюръективное, не инъективное.

14. а) Нет; б) да; в) да; г) да; д) да; е) нет. **15.** Только б).

16. а) $0,375$; б) $2,666\ldots$; в) $0,428571428571\ldots$. **17.** а) $\dfrac{8}{15}$; б) $\dfrac{16}{125}$; в) $\dfrac{25}{99}$.

Глава 2

1. а) $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -14 & 14 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 20 & -16 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 10 & -6 & 10 \\ -5 & 9 & -20 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -6 & 6 & -12 \\ 15 & -5 & 5 \\ -8 & 6 & -11 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -4 & 23 & -9 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -14 & 5 \end{pmatrix}$.

2. 827. **3.** а) 10; б) -86; в) -142; г) 0; д) -864; е) 12.

4. а) a^4; б) $(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$.

5. а) $(-1)^{n-1}(n-1)$; б) $\dfrac{3^n + (-1)^n}{2}$; в) 1; г) $(-1)^{(n+1)}n$.

6. а) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$; б) не существует; в) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

7. а) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & -3 & 0 \\ 35 & 31 & -24 \\ -22 & -18 & 16 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 12 & -17 & 7 \\ 4 & 9 & -7 \\ 48 & -57 & 19 \end{pmatrix}$.

8. а) 1; б) 2; в) 3; г) 3; д) 2.

9. а) $x = 5$, $y = 1$, $z = 0$; б) $x_1 = -2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$; в) $x_1 = 4$, $x_2 = -7$, $x_3 = 11$; г) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

10. а) $x_1 = 7\alpha$, $x_2 = -7\alpha - 1$, $x_3 = 2 + 3\alpha$, $x_4 = \alpha$ (α — любое); б) $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -2, x_4 = 1$; в) несовместна; г) $x_1 = \frac{1}{5}(2\alpha - 17\beta - 9)$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, $x_4 = 5\beta + 4$; д) $x_1 = 2 - \frac{3}{2}\alpha - \beta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = -1$, $x_4 = \beta$; е) $x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2\alpha$, $x_3 = 3 - 2\alpha$, $x_4 = \alpha$.

Глава 3

1. $\overline{AD} = \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$, $\overline{BE} = \frac{1}{2}\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$, $\overline{CF} = -\frac{1}{2}\bar{a} - \bar{b}$.

2. $\overline{AB} = \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$, $\overline{BC} = \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$, $\overline{CD} = \frac{1}{2}\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$, $\overline{DA} = -\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$.

3. а) Да; б) нет; в) нет. **4.** а) Да; б) нет; в) да. **5.** $\bar{c} = 7\bar{u} + 2\bar{v}$.

6. $x = 10e_1 - 2e_2 - 9e_3$. **7.** $4p_1 - 3p_2 + 2p_3 = \bar{0}$. **8.** а) Да; б) нет; в) да.

9. $S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2,5 & -0,5 \end{pmatrix}$, $x = -4,5f_1 + 1,5f_2$.

10. $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1,5 & 1 & 0,5 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $3,5u_1 - u_2 + 2,5u_3$.

11. а) $x = -0,5e_1' + 1,5e_3'$; б) $x = -26e_1' - 13e_2' + 18e_3'$.

12. а) $C_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) система имеет только нулевое решение; в) $C_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; г) $C_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. а) Да, $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$; б) нет; в) нет; г) да, $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

14. а) Да; б) да; в) да.

15. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -6 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \\ 3 & 9 & 12 \end{pmatrix}$. **17.** $16e_1 - 30e_2 - 8e_3$.

18. $(15, -11, -11)$. **19.** а) $\lambda_1 = -2$, $e_1 = (1, 3)$; $\lambda_2 = 1$, $e_2 = (2, 5)$; б) $\lambda = 5$, все векторы — собственные; в) $\lambda_1 = 2$, $e_1 = (1, 1, 1)$; $\lambda_2 = -2$, $e_2 = (-1, 1, -1)$; $\lambda_3 = 4$, $e_3 = (1, 2, 2)$; г) $\lambda = -1$, $e = (1, 1, -1)$; д) $\lambda_1 = 1$, $e_1 = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 0)$, α, β — любые числа; $\lambda_2 = -1$, $e_2 = (1, 0, -1)$;

Глава 4

1. $\left|3\overline{a} - 2\overline{b}\right| = 7$, $\cos\alpha = \dfrac{6}{7}$, $\cos\beta = -\dfrac{2}{7}$, $\cos\gamma = \dfrac{3}{7}$. **2.** $\overline{x} = (9, -6, 18)$.

3. а) $|AB| = 3$, $|AC| = 5\sqrt{2}$, $|BC| = 7$, $\cos A = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$, $\cos B = \dfrac{4}{21}$, $\cos C = \dfrac{9}{7\sqrt{2}}$, $S = \dfrac{5\sqrt{17}}{2}$; б) $|AB| = 2\sqrt{2}$, $|AC| = 5$, $|BC| = \sqrt{29}$, $\cos A = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$, $\cos B = \dfrac{3}{\sqrt{58}}$, $\cos C = \dfrac{23}{5\sqrt{29}}$, $S = 7$.

4. а) $\overline{x} = -5\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2 + \overline{e}_3$; б) $\overline{x} = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_3$. **5.** $\overline{x} = -6\overline{i} + 6\overline{j} - 2\overline{k}$.

6. 13. **7.** а) $-0,6$; б) 5. **8.** $-1,5$. **9.** 15. **10.** $-9\overline{i} - 17\overline{j} + 11\overline{k}$.

11. $(0, -3, 1)$. **12.** $(34, -12, -14)$. **13.** а) 12; б) $\sqrt{531}$;

14. $|AM| = 6$, $|AD| = \dfrac{12}{\sqrt{5}}$. **15.** 3,8. **16.** -126. **17.** Да. **18.** 1. **19.** 3.

Глава 5

1. M_2, M_4. **2.** а) Прямая (ось OY); б) две пересекающиеся прямые: $y = x$, $y = -x$; в) две параллельные прямые $y = 3$, $y = 5$.

3. $3x + y - 5 = 0$. **4.** $(0, -6)$, $(-15, 0)$. **5.** $(0,\ 5)$, $(-4, -3)$. **6.** $6 + 2\sqrt{5}$.

7. Расстояния равны 5, $\sqrt{26}$, $2\sqrt{10}$. **8.** $C_1(4, 6; 3)$, $C_2(6, 2; 4)$, $C_3(7, 8; 5)$, $C_4(9, 4; 6)$.

9. а) $y + 2 = 0$; б) $2x + y + 3z + 8 = 0$; в) $z + 4 = 0$. **10.** $3x + 2z - 2 = 0$.

11. $x + 3y - 8z - 1 = 0$. **12.** 0 (плоскости параллельны).

13. $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{4}$. **14.** $\dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$.

15. а) $\alpha = -10,5$, β — любое; б) $\alpha = \dfrac{6}{7}$, $\beta = 0$.

16. $(-2, -6, -5)$, $d = \sqrt{76}$. **17.** $x + y - z + 1 = 0$. **18.** $8x - 9y - 22z - 59 = 0$.

19. $\sqrt{2}$. **20.** 2,5. **21.** а) $2x + 3y = 3$; б) $\dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y+3}{3}$.

22. $(-4, 11)$. **23.** $(2, 5)$. **24.** $5x - y + 2 = 0$, $5x - y - 50 = 0$.

25. $(1,6)$. **26.** $y-2x=0$. **27.** $\rho=\sqrt{\sin 2\varphi}$.

Глава 6

1. а) $16-11i$; б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$; в) $\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i$; г) -8; д) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$; е) $-4-3i$.

2. а) $|z|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arg z=\frac{\pi}{2}$; б) $|z|=\sqrt{2}$, $\arg z=-\frac{3\pi}{4}$; в) $|z|=1$, $\arg z=-\frac{\pi}{2}$; г) $|z|=\sqrt{2}-1$, $\arg z=\pi$; д) $|z|=972\sqrt{2}$, $\arg z=-\frac{3\pi}{4}$; е)$|z|=1$, $\arg z=\frac{2\pi}{3}$.

3. а) $z_1=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$, $z_2=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8})$; б) $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_3=-i$; в) $z_{1,2,3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $z_1=1$, $z_2=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, $z_3=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$, $z_4=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$, $z_5=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$; д) $z_1=1+i$, $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $z_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. а) $x_{1,2}=2\pm i$; б) $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm 2i$; в) $z_1=i+3$, $z_2=i+2$; г) $z_1=5+3i$, $z_2=1-i$.

5. а) 0, 1, $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; б) 0, 1, -1, i, $-i$; в) $z=\frac{3}{2}-2i$.

6. а) $3z-1$; б) 1013; г) 0. **7.** а) $z+2$; б) z^3-z+1; в) 1.

8. а) 7, 5, -3; б) $5\pm 2i$, -1; в) $\pm i$, $1\pm 4i$; г) $2+i$, 2, -1.

9. а) $(z+2)(z-1-\sqrt{3}i)(z-1+\sqrt{3}i)$; б) $(z-2i)(z+2i)$; в) $(z-3-i)(z-3+i)$; г) $(z-1)(z-1-i)(z-1+i)(z+1-i)(z+1+i)$.

10. а) $z^2(4z^2-12z+13)$; б) $(z^2+2)(z^2+6)$; в) $(z^2+3)(z^2+3z+3)(z^2-3z+3)$; г) $(z-1)(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)$.

Глава 7

1. 15. **2.** $f\sim -8y_1^2-15y_2^2-2y_3^2-16y_1y_2+24y_1y_3+30y_2y_3$.

3. а) $3x'^2-\frac{7}{4}y'^2$, где $x'=x+\frac{3}{2}y$, $y'=y$;
б) $4y_1^2-y_2^2+\frac{25}{4}y_3^2$, где $y_1=x_1+\frac{1}{2}x_2$, $y_2=x_2-\frac{5}{2}x_3$, $y_3=x_3$;
в) $z_1^2-z_2^2$, где $z_1=\frac{1}{2}x_1-x_2+\frac{1}{2}x_3$, $z_2=-\frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3$.

4. Нет. **5.** Нет.

6. f_1 не является положительно или отрицательно определённой; f_2 отрицательно определена; f_3 положительно определена. **7.** B, D, E.

8. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $e_2 = -\frac{5}{\sqrt{22}}u + \frac{2}{\sqrt{22}}v = \left(-\frac{1}{\sqrt{22}}, \frac{2}{\sqrt{22}}, -\frac{1}{\sqrt{22}}, \frac{4}{\sqrt{22}}\right)$. **9.** $\mathcal{A}$ ортогонально, так как $A_{\bar{i},\bar{j}} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$ — ортогональная матрица. Симметрическим не является. **10.** $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

11. а) $f \sim 6y_1^2 - 4y_2^2$; б) $f \sim 2y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$.

$$\textbf{12.}\ \text{а)}\ f \sim 3x'^2 - 2y'^2,\ (x, y) = (x', y')\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} f \sim 9y_2^2 - 9y_3^2,\ (x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} f \sim 5y_1^2 + 5y_2^2 - 3y_3^2,\ (x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} f \sim y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2,\ (x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-4}{\sqrt{45}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & \frac{5}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Глава 8

1. $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 29$. **2.** $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 50$.

3. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$. **4.** $a = \sqrt{45}$, ; $b = \sqrt{20}$. **5.** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{13} = 1$.

6. $(0, \pm 12)$. **7.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **8.** $\varepsilon = \sqrt{2}$. **9.** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$.

10. $A(2, -7)$, $F(\frac{7}{2}, -7)$, $d : x = \frac{1}{2}$. **11.** $y^2 = -8x$, $F(-2, 0)$, $x - 2 = 0$.

12. а) Окружность $x'^2+y'^2=4$, $x'=x-4$, $y'=y+1$;
б) гипербола $\dfrac{x'^2}{16}-\dfrac{y'^2}{9}=1$; $x'=x-3$, $y'=y+1$;
в) парабола $x'^2=10y'$; $x'=x-3$, $y'=y+2$;
г) эллипс $x'^2+\dfrac{y'^2}{9}=1$; $x'=x+1$, $y'=y-2$.

13. а) эллипс $\dfrac{x'^2}{12}+\dfrac{y'^2}{2}=1$; $x=\dfrac{1}{\sqrt5}x'+\dfrac{2}{\sqrt5}y'$, $y=-\dfrac{2}{\sqrt5}x'+\dfrac{1}{\sqrt5}y'$;
б) гипербола $\dfrac{x''^2}{1}-\dfrac{y''^2}{4}=1$; $x=\dfrac45x''+\dfrac35y''-\dfrac15$, $y=\dfrac35x''-\dfrac45y''+\dfrac{18}{5}$.

14. 1, $\sqrt2$. **15.** $\left(-3,\pm\sqrt{\dfrac32},\ 0\right)$. **16.** $p=16$, $(\dfrac12,8,0)$.

17. а) Прямой круговой цилиндр $(x-3)^2+(z-1)^2=1$, образующие параллельны оси OY; б) параболический цилиндр $y^2=-8(z-5)$, образующие параллельны оси OX; в) гиперболический цилиндр, образующие параллельны оси OZ.

18. Двуполостный гиперболоид $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=-1$.

19. Гиперболический цилиндр $2y^2-2z^2=1$, образующие параллельны оси OX.

Ответы к тестам

Задание	1	2	3	4	5	6
Глава 1	1	9	6	3	0	6
Глава 2	−35	5	2	5	−2	3
Глава 3	34	6	1	0	16	−3
Глава 4	3	1	30	3	13	−20
Глава 5	9	−1	−5	0,6	5	2
Глава 6	1	−1	8	11	4	−3
Глава 7	2	1	3	8	0,8	6
Глава 8	8	0,75	12	6	1,5	5

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979. 512 с.
2. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Высш. шк., 1998. 320 с.
3. *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре /Под ред. Д.В. Беклемишева. М.: Наука, 1987. 496 с.
4. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1988. 222 с.
5. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1984. 294 с.
6. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1988. 223 с.
7. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Физматлит, 1998. 224 с.
8. *Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах. М.: Высш. шк., 1985. 120 с.
9. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 432 с.
10. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975. 400 с.
11. *Погорелов А.В.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1978. 208 с.
12. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984. 336 с.
13. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа/Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича, М.: Наука, 1993. 478 с.