bbs.eins.mainz

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der beiden Geraden. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt S.

(a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, also existiert entweder einen oder keinen Schnittpunkt. Um diesen zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$2 + 5r = 5 + 2t \qquad \Rightarrow r = \frac{3+2t}{5}$ (*)
$5 + 3r = 1 + 7t \qquad \Rightarrow 5 + 3(\frac{3+2t}{5}) = 1 + 7t$

$\Rightarrow 5 + \frac{9+6t}{5} = 1 + 7t \qquad | *5$
$\Leftrightarrow 25 + 9 + 6t = 5 + 35t$
$\Leftrightarrow 25 + 9 + 6t = 5 + 35t \qquad | -5; -6t$
$\leftrightarrow 29 = 29t \qquad | : 29$
$\Leftrightarrow t = 1 \qquad \xrightarrow{mit(*)} r = \frac{3+2*1}{5} = 1$

Mit den berechneten Werten für r und t können wir nun den Schnittpunkt bestimmen:

$2 + 5 * \underbrace{1}_{r} = 7 = 5 + 2 * \underbrace{1}_{t}$
$5 + 3 * \overbrace{1} = 8 = 1 + 7 * \overbrace{1}$

Damit ergibt sich als Schnittpunkt S(7|8).

(b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind linear abhängig, Die Geraden sind also entweder gleich oder parallel Schnittpunkt. Wir setzen $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$-4 - 2r = 6t \qquad \Rightarrow -4 - 2(-2 - 3t) = 6t$ I
$1 - r = 3 + 3t$

Mit I: $6t = 6t \Rightarrow 0 = 0$

Wir haben eine wahre Aussage bzw. unendlich viele Lösungen. Somit sind g und h gleich.

(c) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, also existiert entweder einen oder keinen Schnittpunkt. Um diesen zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$1 + 9r = 4 - 3t \qquad \Rightarrow t = 1 - 3r$ (*)
$3 - 3r = 3 + 2t \qquad \Rightarrow 1 - r = 5 - 2(1 - 3r)$

$\Rightarrow 3 - 3r = 5 - 2 + 6r$
$\Leftrightarrow 3 - 3r = 3 + 6r \qquad | -3; +3r$

bbs.eins.mainz

$\Leftrightarrow 0 = 9r \quad | : 9$

$\Leftrightarrow r = 0 \quad \xrightarrow{mit(*)} t = 1 - 3 * 0 = 1$

Mit den berechneten Werten für r und t können wir nun den Schnittpunkt bestimmen:

$1 + 9 * \underbrace{0}_{r} = 1 = 4 - 3 * \underbrace{1}_{t}$

$3 - 3 * \overbrace{0} = 3 = 5 - 2 * \overbrace{1}$

Damit ergibt sich als Schnittpunkt S(1|3).

Die Gerade g geht durch den Punkt (2|-3) und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Die Gerade h startet mit dem Stützvektor $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und geht durch den Punkt (0|5).
Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der beiden Geraden und berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt S.

Zunächst müssen wir die Geradengleichungen g und h aufstellen.

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, also existiert entweder einen oder keinen Schnittpunkt. Um diesen zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$2 - r = -5 + 5t \qquad \Rightarrow r = 7 - 5t$ (*)

$-3 + 4r = 3 + 2t \qquad \Rightarrow -3 + 4(7 - 5t) = 3 + 2t$

$\Rightarrow -3 + 28 - 20t = 3 + 2t$

$\Leftrightarrow 25 - 20t = 3 + 2t \quad | -3; +20t$

$\Leftrightarrow 22 = 22t \quad | : 22$

$\Leftrightarrow t = 1 \quad \xrightarrow{mit(*)} r = 7 - 5 * \underbrace{1}_{t} = 2$

Mit den berechneten Werten für r und t können wir nun den Schnittpunkt bestimmen:

$2 - \underbrace{2}_{r} = 0 = -5 + 5 * \underbrace{1}_{t}$

$-3 + 4 * \overbrace{2} = 5 = 3 + 2 * \overbrace{1}$

Damit ergibt sich als Schnittpunkt S(0|5).