Rückblick

Bisher haben wir uns die durchschnittliche Änderungsrate als Sekantensteigung mit Hilfe des Differenzenquotienten angeschaut.

Der Differenzenquotient

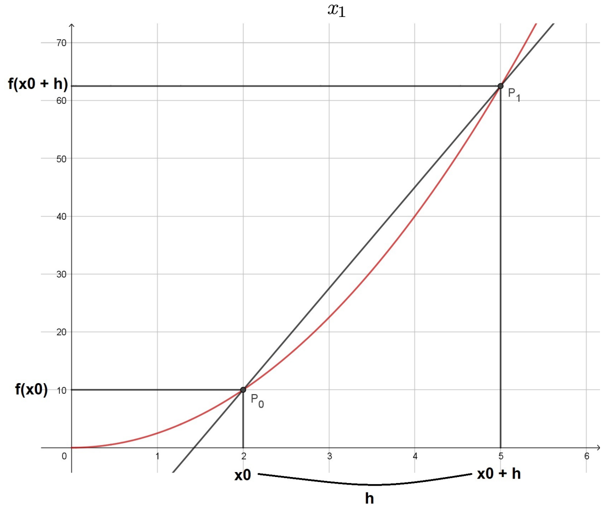
$$m_{[x_0;x_1]} = D(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

gibt die **Steigung der Sekante** durch die Punkte $P_0(x_0|f(x_0))$ und $P(x_1|f(x_1))$ an.

Man nennt diesen Quotienten auch **Differenzenquotient**.

7.1 Die momentane Änderungsrate an der Stelle x_0

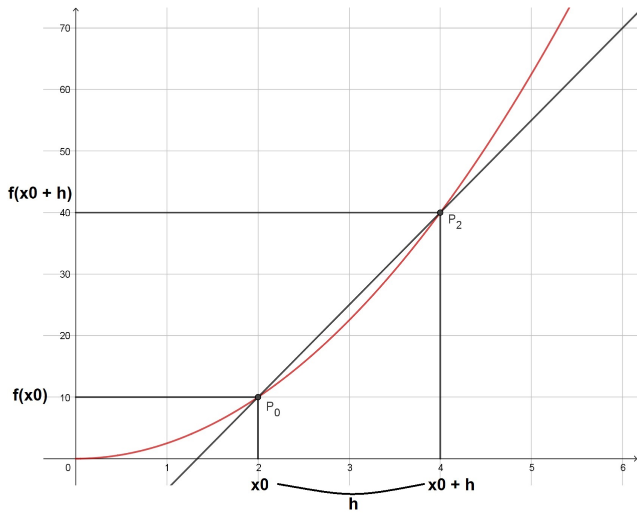
In gewissen Situationen kann es sinnvoll sein, die Änderungsrate zu einem bestimmten Zeitpunkt zu bestimmen.
Um dies zu tun, nutzen wir den bekannten *Differenzenquotienten*.
Zusätzlich zu dem geforderten Zeitpunkt x_0, wählen wir einen weiteren Punkt $x_1 = x_0 + h$ und erhalten so das Intervall $I = [x_0; \underbrace{x_0 + h}_{x_1}]$.



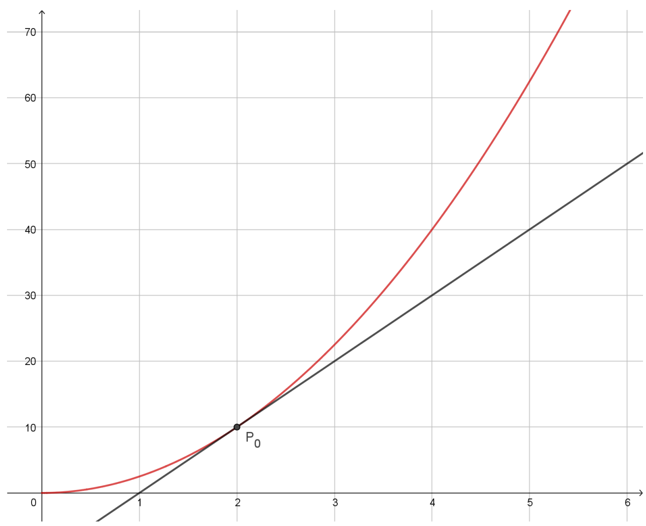
Die eingezeichnete Sekante hat die Steigung

$$m_{[x_0;x_0+h]} = D(x_0; x_0 + h) = \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$$

`Was passiert, wenn wir an h rütteln?`
Schieben wir nun h in Richtung von x_0, also so, dass das Intervall immer kleiner wird[1].



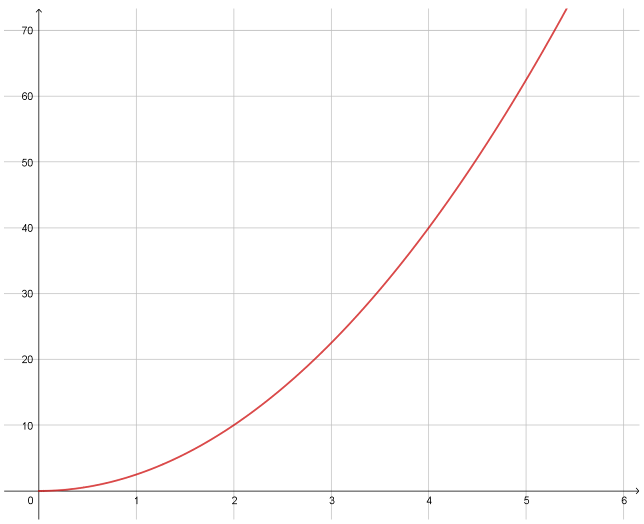
Schieben wir nun h immer näher an x_0 ran[1], so wird aus unserer Sekante die Tangente im Punkt $(x_0|f(x_0))$.



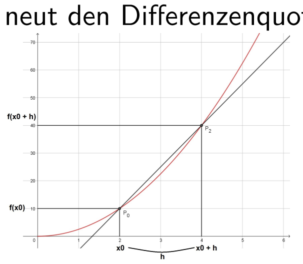
[1] $h \to 0$.

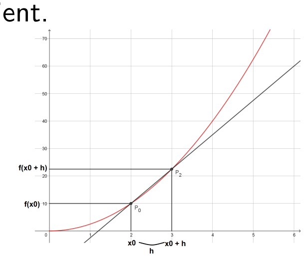
Beispiel 1: Momentangeschwindigkeit an einer bestimmten Stelle

Beobachtet man ein Auto beim Losfahren, so kann man zu verschiedenen Zeitpunkten messen, wie viel Strecke bereits zurückgelegt wurde.
Dieser Weg-Zeit-Zusammenhang lässt sich sowohl über eine Funktion $f(x) = 2,5x^2$ wie auch über einen Graphen darstellen.



Wir wollen jetzt versuchen die Geschwindigkeit an der Stelle $x_0 = 2$ zu berechnen.
Zunächst wählen wir ein $h = 3$ und berechnen den Differenzenquotient, also die Steigung der Sekante.
Anschließend setzen wir $h = 2$ und berechnen erneut den Differenzenquotient.





h	$D(2;2+h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$
3	$D(2;5) = \frac{f(5)-f(2)}{3} = \frac{62,5-10}{3} = 17,5$
2	$D(2;4) = \frac{f(4)-f(2)}{2} = \frac{40-10}{2} = 15$
1	$D(2;3) = \frac{f(3)-f(2)}{1} = \frac{22,5-10}{1} = 12,5$

h	$D(2;2+h)$
0,5	$D(2;2,5) = \frac{f(2,5)-f(2)}{0,5} \approx \ldots \approx 11,26$
0,1	$D(2;2,1) = \frac{f(2,1)-f(2)}{0,1} \approx \ldots = 10,3$
0,01	$D(2;2,01) = \frac{f(2,01)-f(2)}{0,01} \approx 10,03$
0,001	$D(2;2,001) = \frac{f(2,001)-f(2)}{0,001} \approx 10,003$

Die Steigung an der Stelle $x_0 = 2$ beträgt nach Runden 10.

— — — — — — — — — — — — —

Die Annäherung über diverse Einzelrechnungen kann sehr zeitaufwendig sein. Wir nutzen also für die Bestimmung der *momentanen Änderungsrate* bzw. der **Steigung im Punkt** $(\mathbf{x_0}|\mathbf{f(x_0)})$ ein Konstrukt das **Grenzwert (Limes)** genannt wird.

> *Dieses Konstrukt haben wir schon beim Verhalten für große x-Beträge kennengelernt. Dort haben wir aber $x \to \pm\infty$ genutzt.*

`Wie funktioniert das mit dem Grenzwert?`
Im Prinzip kann man sich das mit dem Grenzwert so vorstellen, dass der 'Zielwert' für die 'wandernde' Variable eingesetzt wird.
Wenn wir beispielsweise die Funktion $f(x) = 3x^2+3$ haben und wissen wollen, wie die Funktion verläuft, wenn sich x an 0 annähert.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 3x^2 + 3 = 3 \cdot 0^2 + 3 = 3$$

— — — — — — — — — — — — —

7.1.1 Die momentane Änderungsrate mit der h-Methode

Genau dieses Prinzip machen wir uns also zur Bestimmung der momentanen Änderungsrate zu nutzen.
Zusätzlich zu der Stelle x_0, an der wir die Steigung bestimmen wollen, wählen wir einen zweiten allge-

meinen Punkt $x = x_0 + h$.
Diese zwei Werte setzen wir in den Differenzenquotienten ein und setzen den Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0}$ davor.

Der Differenzialquotient

$$\lim_{h \to 0} D(x_0; x_0 + h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

gibt die **Steigung der Tangente** im Punkt $(\mathbf{x_0}|\mathbf{f}(\mathbf{x_0}))$ an.

Diesen *Grenzwert des Differenzenquotienten* bezeichnet man als **Differenzialquotient**.

Am Beispiel von eben wollen wir versuchen, den Grenzwert anzuwenden.
Die Funktion lautet: $f(x) = 2,5x^2$. Wir suchen die Steigung an der Stelle $x_0 = 2$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} D(2; 2 + h) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2,5 \cdot (2 + h)^2 - 2,5 \cdot 2^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2,5 \cdot ((2 + h)^2 - 2^2)}{h}
\end{aligned}$$

Wir können jetzt aber nicht einfach für $h = 0$ einsetzen, da wir sonst durch 0 teilen würden.
Teilen durch 0 ist <u>nicht</u> möglich.
Wir müssen also versuchen, das h aus dem Nenner zu kürzen.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{2,5 \cdot (4 + 4h + h^2 - 4)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2,5 \cdot (4h + h^2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2,5 \cdot \cancel{h}(4 + h)}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h \to 0} 2,5(4 + h)
\end{aligned}$$

Jetzt können wir für $h = 0$ einsetzen und erhalten für die Steigung des Graphen an der Stelle $x_0 = 2$

$$\lim_{h \to 0} D(2; 2 + h) = 10$$