1 Die Kurvendiskussion

Vor geraumer Zeit haben wir uns mit Funktionen und der Untersuchung ebendieser beschäftigt. Wir erinnern uns noch, dass Funktionen verwendet werden um Entwicklungen bzw. Zusammenhänge zu modellieren.
Unser Gehirn verlegt aber bekanntlich unnötige Informationen in die hinterste Ecke. Daher nachfolgend nochmal eine kurze Auffrischung zur Kurvendiskussion.

1.1 Das Ziel

Bei der Kurvendiskussion wollen wir die charakteristischen Merkmale einer Funktion bestimmen, um mit diesen Informationen die modellierten Zusammenhänge bzw. die Entwicklungen in einem Graph darzustellen, zu analysieren und zu interpretieren.

1.2 Die Methodik

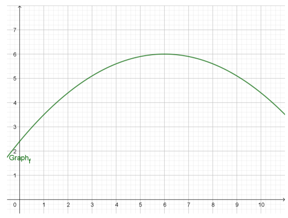
Um also die charakteristischen Merkmale herauszuarbeiten, machen wir uns die bekannten Zusammenhänge zwischen dem Funktionsterm und dem Graph zunutze.
Besonderen Nutzen können wir aber von den Zusammenhängen zwischen der Funktion und ihren Ableitungsfunktionen ziehen.

2 Rund um die Ableitung

2.1 Die Ableitung der Stelle

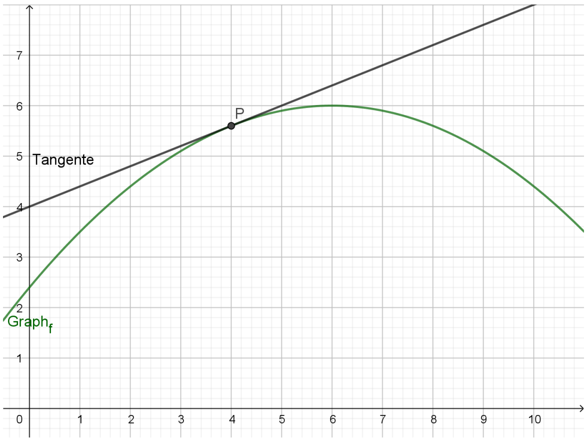
Ganz Klar ist, wir benötigen den Funktionswert an einer Stelle um den Graphen skizzieren zu können. Manchmal ist es aber auch hilfreich die Steigung an genau diesem Punkt zu kennen.

Wir betrachten die Funktion $y = -0,1x^2 + 1,2x + 2,4$. *Sie modelliert die Entwicklung der Anmeldungen von Kindern in Kindertagesstätten in Kiel (x: in Jahren, 0 = 2010, y: Anzahl Kinder)*



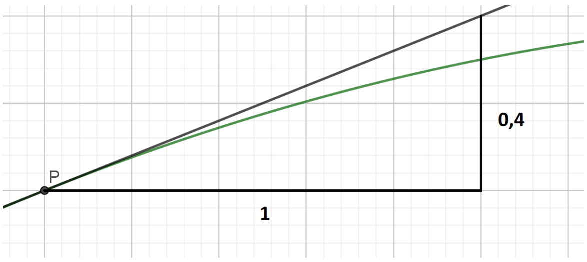
Die Stadtverwaltung kann erkennen, dass *2014* insgesamt **5.600 Kinder** zu betreuen waren.
Für eine bessere Planung wüssten sie aber gerne auch, wie die momentane Wachstumstendenz in diesem Jahr ist.

Wir erinnern uns, dass sich die momentane Wachstumstendenz als Steigung der Tangente durch den entsprechenden Punkt verstehen lässt. Wir legen also eine Tangente an den Punkt.



Schauen wir uns die Tangente in dem Punkt genauer an, können wir mittels dem Steigungsdreieck die Steigung der Tangente und somit die Steigung des Graphen in diesem

Punkt ermitteln.



Die Steigung der Tangente lässt sich durch die Seitenlängen das Steigungsdreieck ermitteln: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,4}{1} = 0,4$
Daraus können wir Schlussfolgern, dass die momentane Wachstumstendenz bei **400 Kindern** pro Jahr liegt.

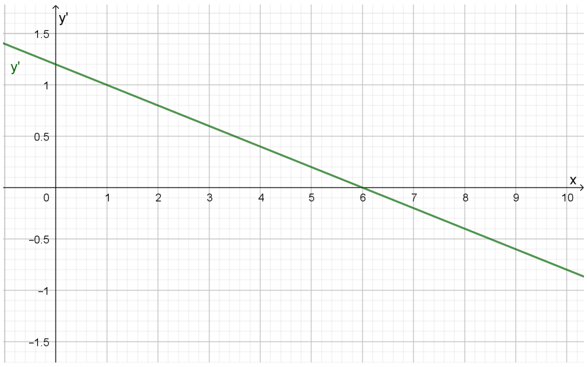
Welche Schlussfolgerung können Sie daraus ziehen?

Die Einheit des Ableitungswerts ist die Bedeutung einer Einheit auf der y-Achse geteilt durch die Bedeutung einer Einheit auf der x-Achse. Ein Ableitungswert bei einer Zeitreihe bedeutet also die momentane Änderungsdynamik zum Zeitpunkt x in „Einheit auf der y-Achse" pro „Zeiteinheit au der x-Achse".

2.2 Die Ableitungsfunktion

Wir erinnern uns noch dunkel daran, dass jede Funktion f eine passende Ableitungsfunktion f' besitzt. Diese gibt uns für jede Stelle den Wert der Ableitung an.
Bei ganzrationalen Funktionen kann man die Gleichung durch die Ableitungsregeln bestimmen: $f(x) = a \cdot x^n \rightarrow f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

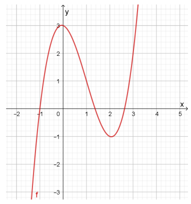
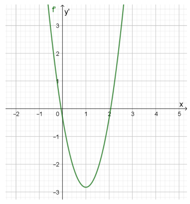
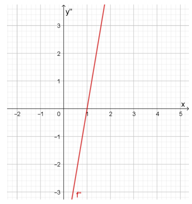
Schauen wir uns die Funktion $y = -0,1x^2 + 1,2x + 2,4$ und deren Ableitungsfunktion aus dem letzten Beispiel an. Die Ableitungsfunktion hat laut obiger Regel die Form $y' = -0,2x + 1,2$. Dementsprechend sieht der Graph dann so aus:



Am Graphen können wir ablesen, dass die Ableitungsfunktion für $x = 4$ den Wer $f'(4) = 0,4$ hat. ***Außerdem*** *können wir ablesen, dass die Funktion an der Stelle $x = 6$ eine Extremstelle vom Typ Hochpunkt besitzt.*

2.3 Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitungsfunktion

Um das alter Wissen noch einmal aufzufrischen und eine Übersicht zu haben, finden Sie in der nachfolgenden Tabelle die entsprechenden Zusammenhänge mit einer kurzen Erläuterung.

			
Extremstelle Typ Hochpunkt bei x_{HP}	Punkt mit höchstem Funktionswert für eine Umgebung von x_{HP}	Nullstelle bei x_{HP} - ($f'(x_{HP} = 0)$) und Ableitungsgraph ist fallend an der Stelle x_{HP}	$f''(x_{HP} < 0)$
Extremstelle Typ Tiefpunkt bei x_{TP}	Punkt mit niedrigstem Funktionswert für eine Umgebung von x_{TP}	Nullstelle bei x_{TP} - ($f'(x_{TP} = 0)$) und Ableitungsgraph ist an der Stelle x_{TP} steigend	$f''(x_{TP} < 0)$
Sattelstelle bei x_{SP}	Wechsel im Krümmungsverhalten, kein Wechsel im Steigungsverhalten	Doppelte Nullstelle bei x_{SP} $f'(x_{SP} = 0)$	Nullstelle bei x_{SP} $f''(x_{SP} = 0)$
Fallend über Intervall $[a;b]$	Für alle x_0, x_1 aus $[a,b]$ gilt: Wenn $x_0 < x_1$ dann ist $f(x_0) > f(x_1)$	Graph verläuft unterhalb der x-Achse $f'(x) < 0$	
Steigend über Intervall $[a;b]$	Für alle x_0, x_1 aus $[a,b]$ gilt: Wenn $x_0 < x_1$ dann ist $f(x_0) < f(x_1)$	Graph verläuft oberhalb der x-Achse $f'(x) > 0$	
Wendepunkt bei x_{WP}	Wechsel beim Krümmungsverhalten	Punkt mit höchstem/niedrigsten Ableitungswert $f(x_{WP})'$ für eine Umgebung von x_{WP}	Nullstelle bei x_0 $f''(x_0) = 0$

3 Elemente der Kurvendiskussion

3.1 Definitionsbereich

3.2 y-Achsenabschnitt

3.3 Nullstellen

3.4 Extremstellen - relative Minima/Maxima und Sattelstelle

3.5 Wendestelle

3.6 Verhalten für große x-Beträge - Grenzwert

4 Parameter in einer Funktionsgleichung