Um von einer Parametergleichung der Form $E : \vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u} + s * \vec{v}$ auf die Koordinatengleichung derselben Ebene $E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ gehen wir wie folgt vor:

Zunächst überführen wir die Parametergleichung in ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + r \cdot u_1 + s \cdot v_1 \\ x_2 &= p_2 + r \cdot u_1 + s \cdot v_2 \\ x_3 &= p_3 + r \cdot u_3 + s \cdot v_3 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem versuchen wir mittels dem Gauß-Eliminations-Verfahren in Dreiecks-Form zu überführen, wobei wir Gleichungen für r bzw. für s wollen.

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + r \cdot u_1 + s \cdot v_1 \\ ex_1 + x_2 &= p_2' + r \cdot u_2' \\ E : \mathbf{a} \cdot x_1 + \mathbf{b} \cdot x_2 + \mathbf{c} \cdot x_3 &= \mathbf{d} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + r \cdot u_1 + s \cdot v_1 \\ ex_1 + x_2 &= p_2' \qquad + s \cdot v_2' \\ E : \mathbf{a} \cdot x_1 + \mathbf{b} \cdot x_2 + \mathbf{c} \cdot x_3 &= \mathbf{d} \end{aligned}$$

Ein alternatives Vorgehen wäre, die Gleichungen nach den Parametern r und s umzuformen und diese schrittweise in die restlichen Gleichungen einzusetzen.

Hinweis: Dieses Vorgehen macht genau dann Sinn, wenn eine der Gleichungen nur einen Parameter (r oder s) enthält.

S. 72 Nr. 2 a-c

Gesucht ist die Koordinatengleichung der Ebene E mit nur ganzzahligen Koeffizienten.

(a) Gegeben ist die Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wir gehen wie oben erwähnt vor:

I $\quad x_1 = 1 + r + s$

II $\quad x_2 = 2 \qquad + 2s$

III $\quad x_3 = \quad + r + 3s$

III - I

III' $\quad x_3 - x_1 = -1 + 2s$

III' -II

III'' $\quad x_3 - x_1 - x_2 = -3 \qquad |\cdot(-1)$

$\Rightarrow \boxed{E_a : x_1 + x_2 - x_3 = 3}$

Die **alternative Vorgehensweise** mit Umformung nach r und s sähe so aus:

I $\quad x_1 = 1 + r + s$

II $\quad x_2 = 2 \quad + 2s \qquad |(-2); (:2)$

III $\quad x_3 = \quad + r + 3s$

II' $\quad \frac{1}{2}x_2 - 1 = s$

II' in III einsetzen

III' $\quad x_3 = \quad + r + 3 * (\frac{1}{2}x_2 - 1)$

$x_3 = \quad +r + \frac{3}{2}x_2 - 3 \qquad |(-\frac{3}{2}x_2); (+3)$

$-\frac{3}{2}x_2 + x_3 + 3 = r$

II' & III' in I einsetzen

I' $\quad x_1 = 1 \underbrace{-\frac{3}{2}x_2 + x_3 + 3}_{r} + \underbrace{\frac{1}{2}x_2 - 1}_{s}$

$x_1 = -x_2 + x_3 + 3 \qquad |(+x_2); (-x_3)$

$E_a : x_1 + x_2 - x_3 = 3$

(b) Gegeben ist die Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Das Vorgehen wie in (a) führt auch in diesem Fall zu einem schnellen Ergebnis:

I $\quad x_1 = 4 + r + s$

II $\quad x_2 = 9 + 2r \qquad |(-9); (:2)$

III $\quad x_3 = 1 \quad + 3s \qquad |(-1); (:3)$

2·I - II

I' $\quad 2x_1 - x - 2 = -1 + 2s$

3·I' - 2·III

I'' $\quad 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5$

$\Rightarrow E_b : 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5$

- -

Auch hier gehen können wir **alternativ** wie folgt vorgehen:

I $\quad x_1 = 4 + r + s$

II $\quad x_2 = 9 + 2r \qquad |(-9); (:2)$

III $\quad x_3 = 1 \quad + 3s \qquad |(-1); (:3)$

II' $\quad \frac{1}{2}x_2 - \frac{9}{2} = r$

III' $\quad \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} = s$

II' & III' in I einsetzen

I' $\quad x_1 = 4 + \underbrace{\frac{1}{2}x_2 - \frac{9}{2}}_{r} + \underbrace{\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}}_{s}$

$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{6} \qquad |(\cdot 6)$

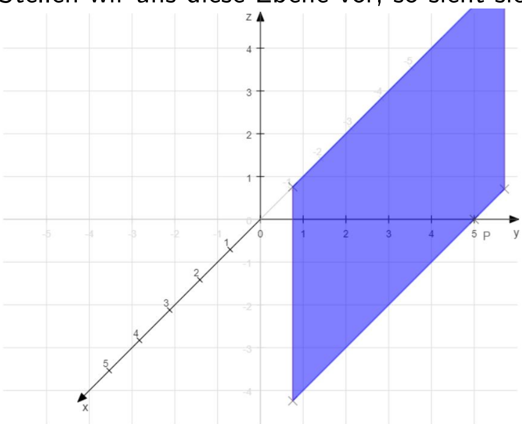
I' $\quad 6x_1 = 3x_2 + 2x_3 - 5 \qquad |(-3x_2); (-2x_3);$

$E_b: 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5$

(c) Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Man erkennt, dass die Koordinate x_2 unabhängig von den Parametern r und s immer den Wert 5 annimmt.

Stellen wir uns diese Ebene vor, so sieht sie so aus:



Die Ebene E hat also keinen Schnittpunkt mit der x_1x_3-Ebene.

Damit ergibt sich die Ebene $E: x_2 = 5$

Wir wissen, die Koordinatengleichung einer Ebene hat folgende Form $E: \mathbf{a}x_1 + \mathbf{b}x_2 + \mathbf{c}x_3 = \mathbf{d}$.

Um die Koordinatengleichung aufzustellen, setzen wir jeweils die gegebenen Punkte in die Gleichung ein und erhalten das dazugehörige lineare Gleichungssystem LGS (bestehend aus drei Gleichungen).

Unter Anwendung des *Gauß-Eliminations-Algorithmus* formen wir das LGS um und erhalten drei Gleichungen in Abhängigkeit der übrigen Unbekannten. Für diese Unbekannte wählen wir einen festen Wert und erhalten damit die übrigen drei Werte und können die Koordinatengleichung angeben.

Siehe hierzu: S.71 Beispiel 3

S. 72 Nr. 5

Die Punkte A, B und C legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene.

(a) $A(0|2|-1), B(6|-5|0), C(1|0|1)$

Wir setzen also die Punkte in die Koordinatengleichung und erhalten folgendes LGS.

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & & + & 2b & - & c & = & d \\ \text{II} & 6a & - & 5b & & & = & d \\ \text{III} & a & & & + & c & = & d \end{array}$$

$\mathbf{III + I}$

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & & + & 2b & - & c & = & d \\ \text{II} & 6a & - & 5b & & & = & d \\ \text{III'} & a & + & 2b & & & = & 2d \end{array}$$

$\mathbf{5 \cdot III' + 2 \cdot II}$

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & & + & 2b & - & c & = & d \\ \text{II} & 6a & - & 5b & & & = & d \\ \text{III} & 17a & & & & & = & 12d \Rightarrow \boxed{a = \frac{12}{17}d} \end{array}$$

a in II einsetzen

$$\begin{array}{lrcrcrcll} \text{I} & & + & 2b & - & c & = & d & \\ \text{II} & 6 \cdot \frac{12}{17}d & - & 5b & & & = & d & \mid -\frac{72}{17}d \\ & - & 5b & & & = & -\frac{55}{17}d & \mid : (-5) & \\ & & b & & & = & \frac{11}{17}d & \Rightarrow \boxed{b = \frac{11}{17}d} & \end{array}$$

b in I einsetzen

$$\begin{array}{lcrcrcll} \text{I} & + & 2 \cdot \left(\frac{11}{17}d\right) & - & c & = & d & \mid -\frac{22}{17}d \\ & & & - & c & = & -\frac{5}{17}d & \mid \cdot(-1) \\ & & & & c & = & \frac{5}{17}d & \Rightarrow \boxed{c = \frac{5}{17}d} \end{array}$$

Wir wissen nun: $\boxed{a = \frac{12}{17}d}$, $\boxed{b = \frac{11}{17}d}$ und $\boxed{c = \frac{5}{17}d}$.

Die Unbekannten a, b und c sind abhängig von d. Wir wählen also nun $\boxed{d = 17}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{a = 12}$, $\boxed{b = 11}$ und $\boxed{c = 5}$

Damit ergibt sich die Koordinatengleichung: $\boxed{E: 12x_1 + 11x_2 + 5x_3 = 17}$

(b) $A(7|2|-1), B(4|1|3), C(1|3|2)$

Auch diesmal setzen wir die bekannten Punkte wieder in die Koordinatengleichung ein, wenden den Gauß-Algorithmus an und stellen so drei Variablen in Abhängigkeit der vierten Variablen dar.

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{I} & 7a & + & 2b & - & c & = & d \\
\text{II} & 4a & + & b & + & 3c & = & d \\
\text{III} & a & + & 3b & + & 2c & = & d
\end{array}$$

$\mathbf{I - 7 \cdot III}$

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{I'} & & - & 19b & - & 15c & = & -6d \\
\text{II} & 4a & + & b & + & 3c & = & d \\
\text{III} & a & + & 3b & + & 2c & = & d
\end{array}$$

$\mathbf{II - 4 \cdot III}$

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{I'} & & - & 19b & - & 15c & = & -6d \\
\text{II'} & & - & 11b & - & 5c & = & -3d \\
\text{III} & a & + & 3b & + & 2c & = & d
\end{array}$$

$\mathbf{I' - 3 \cdot II'}$

$$\begin{array}{lrcrcrcll}
\text{I'} & & & 14b & & & = & 3d & \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{14}d} \\
\text{II'} & & - & 11b & - & 5c & = & -3d & \\
\text{III} & a & + & 3b & + & 2c & = & d &
\end{array}$$

b in II' einsetzen

$$\begin{array}{lrrcll}
\text{II'} & -\ 11 \cdot \left(\frac{3}{14}d\right) & -\ 5c & = & -3d & |+\frac{33}{14}d \\
 & & -\ 5c & = & -\frac{9}{14}d & |:(-5) \\
 & & c & = & \frac{9}{70}d & \Rightarrow \boxed{c = \frac{9}{70}d}
\end{array}$$

b und c in III einsetzen

$$\begin{array}{lrrrcll}
\text{III} & a + & 3 \cdot \left(\frac{3}{14}d\right) & +\ 2 \cdot \left(\frac{9}{70}d\right) & = & d & |(-\frac{9}{14}d);(-\frac{18}{70}d) \\
 & a & & & = & \frac{1}{10}d & \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{10}d}
\end{array}$$

Wir wissen nun: $a = \frac{1}{10}d$, $b = \frac{3}{14}d$ und $c = \frac{9}{70}d$.

Man erkennt, die Variablen a, b und c sind nur von d abhängig. Wir wählen also nun $d = 70$.

$\Rightarrow$ $a = 7$, $b = 15$ und $c = 9$

Damit ergibt sich die Koordinatengleichung: $E : 7x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 70$