bbs.eins.mainz

Allgemeines Vorgehen zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von Geraden im 2-dimensionalen

Sollen zwei Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + t\vec{v}$ im 2-dimensionalen auf ihre gegenseitige Lage untersucht werden, betrachten wir zunächst die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$...

linear abhängig,	linear unabhängig,
dann sind g und h	dann haben g und h
+ parallel, wenn $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$ **keine** Lösung besitzt.	+ keinen Schnittpunkt (sie sind *windschief*), wenn $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$ **keine** Lösung besitzt.
+ gleich, wenn $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$ **unendlich viele** Lösungen besitzt.	+ einen Schnittpunkt S, wenn $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$ **eine** Lösung besitzt.

S. 64 Nr. 3 c & d Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

(c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig. Die Geraden können also einen oder keinen Schnittpunkt S haben. Um dies zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{ll} 7 + r = 2 + t & \Rightarrow r = -7 \\ 3 = 5 + t & \Rightarrow t = -2 \end{array} \right.$$

Den Schnittpunkt der beiden Geraden bestimmen wir nun, indem wir die ermittelten Werte für r und t in die dazugehörigen Geradengleichungen einsetzen.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Geraden schneiden sich also im Punkt S(0|3).

(d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig $(\vec{u} = -\frac{3}{5}\vec{v})$. Die bbs.eins.mainz

Geraden können also entweder parallel oder gleich sein.
Um dies zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem nach r und t.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + 3r &= 2 - 5t \\ 3 + 6r &= 5 - 10t \Rightarrow r = \tfrac{2-10t}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1 + 3(\tfrac{2-10t}{6}) = 2 - 5t \mid -1; +5t \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{2-10t}{2} + 5t = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - 5t + 5t = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 = 1 \\ \Rightarrow\ & \text{Wir erhalten eine wahre Aussage} \end{aligned}$$

Die Geraden g und h sind also **gleich**.

Da $g = h$ müssen wir keinen Schnittpunkt mehr berechnen.

S. 64 Nr. 8 Die Gerade f geht durch den Punkt A(3|8|0) und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Gerade h geht durch den Punkt B(-2|3|1) und hat den Stützvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Überprüfen Sie, ob sich die Geraden g und h schneiden. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes.

Zunächst müssen wir die Geradengleichungen für g und h bestimmen.
Für g können wir wie bekannt vorgehen. So ergibt sich die folgende Geradengleichung:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Geradengleichung von h aufzustellen müssen wir folgendes beachten: Wir kennen den Stützvektor $\vec{s}$ sowie einen weiteren Punkt, nicht aber den Richtungsvektor. Diesen müssen wir noch bestimmen. Hierfür berechnen wir $\vec{B} - \vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten damit $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von sind linear unabhängig. Die Geraden können also **einen** oder **keinen** Schnittpunkt S haben. Um dies zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

I	$2+2r=2-5t$	
II	$8+5r=1+2t$	
III	$0=t$	$\Rightarrow t=0$
I'	$2+2r=2$	$\Rightarrow r=0$
II'	$8+5r=1$	$\Rightarrow r=-\frac{7}{5}$
III	$0=t$	

Wir erhalten für r zwei unterschiedliche Werte. Somit hat das Gleichungssystem **keine** Lösung $\Rightarrow$ g und h schneiden sich nicht. Sie sind also *windschief*.