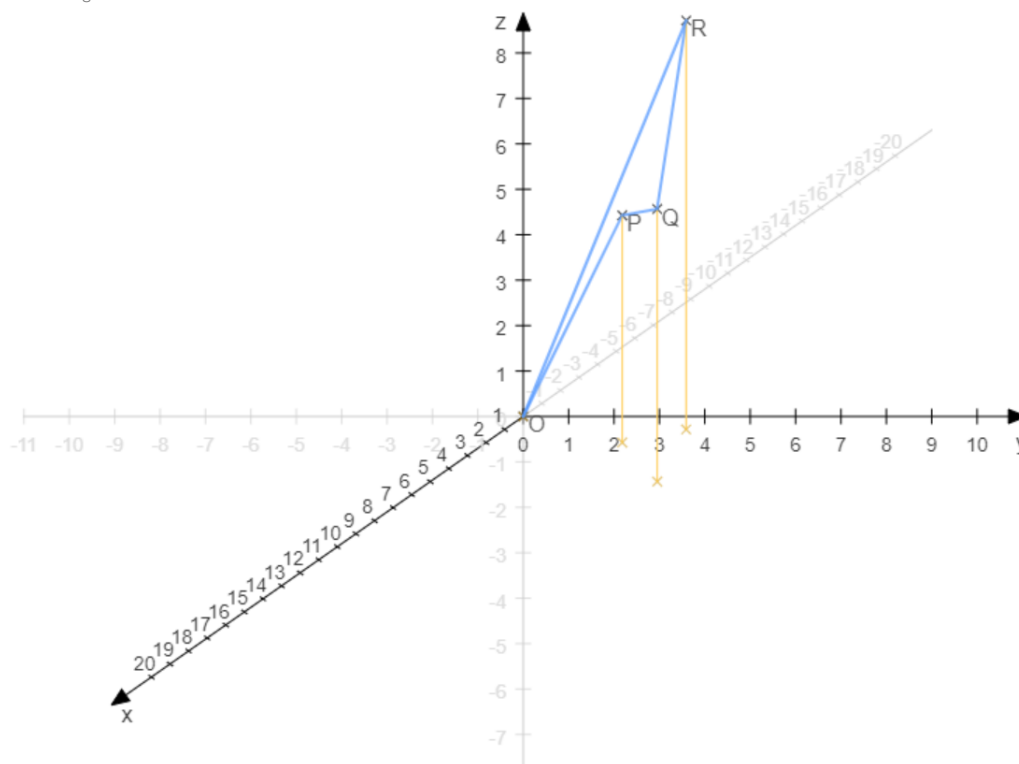


S. 102 Aufgabe 11



Gegeben war das Viereck mit den Eckpunkten O (0 | 0 | 0), P (2 | 3 | 5), Q (5 | 5 | 6) und R (1 | 4 | 9).

Zur Berechnung der Länge der Seiten benötigen wir die Verbindungsvektoren.

Da die Formel $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ sich auf den eingeschlossenen Winkel bezieht, benötigen wir jeweils die einschließenden Verbindungsvektoren.¹

Es gilt: $\vec{OP} = \vec{P} - \vec{O}$.

$$\begin{array}{llll} \vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} & \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{QR} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} & \vec{RO} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} \\ \vec{PO} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} & \vec{QP} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} & \vec{RQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} & \vec{OR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Da innerhalb der Längenberechnung die Koordinatenwerte quadriert werden gilt $|\vec{OP}| = |\vec{PO}|$. Es genügt also jeweils einmal die Länge zu berechnen.

Wir berechnen also zunächst die Längen der einzelnen Seiten.

$$|\vec{OP}| = \sqrt{4 + 9 + 25} \approx 6,16$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{9 + 4 + 1} \approx 3,74$$

$$|\vec{QR}| = \sqrt{16 + 1 + 9} \approx 5,1$$

$$|\vec{RO}| = \sqrt{1 + 16 + 81} \approx 9,9$$

[1] Siehe hierzu (*) auf der Rückseite.

Um nun den Winkel zu berechnen, benötigen wir zum einen die oben erwähnte Formel bzw. deren Umkehrfunktion.

Diese geht wie folgt: $\alpha = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$$\angle ROP = \arccos \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OR}}{|\vec{OP}| \cdot |\vec{OR}|} = \arccos \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 9}{6,16 \cdot 9,9} \approx 14,65^\circ$$

Bei der Berechnung des Winkels $\angle OPQ$ ist zu beachten, dass wir den Außenwinkel benötigen. Die uns bekannte Formel aber immer den eingeschlossenen Winkel berechnet. Wir rechnen also $360^\circ - \angle OPQ$. (*)

$$360^\circ - \angle OPQ = 360^\circ - \arccos \frac{\vec{PO} \cdot \vec{PQ}}{|\vec{PO}| \cdot |\vec{PQ}|} = 360^\circ - \arccos \frac{3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-5)}{6,16 \cdot 3,74} \approx 222,45^\circ$$

$$\angle PQR = \arccos \frac{\vec{QP} \cdot \vec{QR}}{|\vec{QP}| \cdot |\vec{QR}|} = \arccos \frac{(-3) \cdot (-4) + (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 3}{3,74 \cdot 5,1} \approx 54,80^\circ$$

$$\angle QRO = \arccos \frac{\vec{RQ} \cdot \vec{RO}}{|\vec{RQ}| \cdot |\vec{RO}|} = \arccos \frac{4 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-9)}{5,1 \cdot 9,9} \approx 67,89^\circ$$

In den uns bekannten Vierecken beträgt die Winkelsumme 360° .² Um also zu prüfen, ob wir uns auch nicht verrechnet haben, addieren wir einfach alle Winkel zusammen.

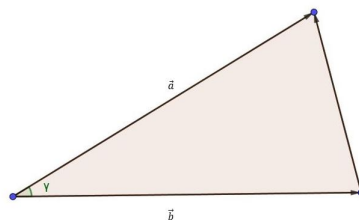
$$14,65^\circ + 222,45^\circ + 54,80^\circ + 67,89^\circ = 359,79^\circ$$

Da wir die Längen und auch die Winkel auf zwei Nachkommastellen gerundet haben erhalten wir hier nicht ganz 360° . Dennoch sehen wir, dass wir ziemlich nah dran sind!

[2] Dass es Vierecke gibt, bei denen die Aussage nicht stimmt, zeigt Aufgabe 12 auf Seite 102.

Wann genau das der Fall ist und wie man das prüft lernen wir im Laufe des Halbjahres.

(*) Wir erinnern uns an die Formel zur Berechnung des Winkel zwischen zwei Vektoren.



Ist γ der von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel, so lässt sich der dazugehörige \cos wie folgt bestimmen

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Um daraus den Winkel γ zu bestimmen, verwenden wir die Umkehrfunktion $\arccos \hat{=} \cos^{-1}$.

$$\gamma = \arccos \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \arccos \frac{a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} * \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$