Mathe Wochenpläne

Leon Winter

HBF IT 18a

bbs.eins.mainz
Berufsbildende Schule Technik

Wochenplan Nr.: 1 Zeitraum: 08.11.2019 - 14.11.2019

Pflicht: Sie bearbeiten *pro Teil* jeweils **eine Aufgabe**.
Wahl: Zur Vertiefung und Festigung stehen ihnen die übrigen Aufgaben zur Verfügung.

Teil 1: Ermitteln Sie die Definitionsmenge sowie die *Nullstellen* der gebrochenrationalen Funktion.
Begründen Sie zudem, ob es sich bei den Nullstellen um *Lückenstellen* handelt.

(I) $f(x) = \frac{-x^2+2x+4}{x-2{,}5}$	(II) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{(x-2)(x-3)}$
(III) $f(x) = \frac{x^2-2x}{2x+4}$	

Teil 2: Untersuchen Sie die nachfolgende Funktion auf *Definitionslücken*.
Definieren sie außerdem, um welche Art von Definitionslücke es sich handelt. Mit Begründung!
Hinweis: Polstelle oder hebbare Definitionslücke.

(I) $f(x) = \frac{x^2+9}{x+2}$	(II) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-6x+9}$
(III) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-x-6}$	

Teil 3: Bestimmen Sie den ganzrationalen und den gebrochenrationalen Teil der nachfolgenden Funktion.
Hinweis: Führen Sie eine Polynomdivision durch.

(I) $f(x) = \frac{x^2+4x-12}{x-3}$	(II) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-6x+9}$
(III) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-6x+9}$	

Teil 4: Untersuchen Sie jeweils das Verhalten der Funktion in Umgebung der Polstelle. **Berechnen** Sie dazu den ganzrationalen Teil der Funktion.

Nutzen Sie hierfür folgende Schreibweise: Sei x_P die berechnete Polstelle der Funktion $f(x)$. Dann gilt

$f(x) \xrightarrow{x \uparrow x_P} \ldots$	oder	$f(x) \xrightarrow{x \downarrow x_P} \ldots$
für die Annäherung von $-\infty$		bzw. für die Annäherung von ∞

(I) $f(x) = \frac{3x-3}{x-1}$	(II) $f(x) = \frac{x^2-2x-15}{x-5}$
(III) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-x-6}$	

Teil 5: Geben Sie jeweils eine gebrochenrationale Funktion $f(x)$ an, die folgende Bedingung erfüllt:

(I) $f(x)$ hat eine Nullstelle bei $x = 1$	(II) $f(x)$ hat eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x = 3$
(III) $f(x)$ besitzt bei $x = 1$ eine Nullstelle und eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel bei $x = 3$	

Begründen Sie ihre Angabe.

WP1

Teil 1:

(1) $f(x) = \frac{-x^2+2x+4}{x-2{,}5}$

Definitionsmenge $(q(x)=0)$

$x-2{,}5=0$

$\Leftrightarrow x = 2{,}5$ $\Rightarrow$ Polstelle, da $p(2{,}5) \neq 0$

$D = \mathbb{R} \setminus \{2{,}5\}$

$p(x) = -x^2+2x+4 \overset{!}{=} 0$

$x^2 \underbrace{-2x}_{p} \underbrace{-4}_{q} = 0$

pq-Formel: $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2+4}$

$x_1 = 1+\sqrt{5}$
$x_2 = 1-\sqrt{5}$

Teil 2:

(1) $f(x) = \frac{x^2+9}{x+2}$

$q(x) = x+2 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow x+2=0$

$\Leftrightarrow x = -2$

$p(-2) = (-2)^2+9 = 13 \neq 0$

$\rightarrow x=-2$ ~~ist~~ die Polstelle

Teil 3:

(1) $f(x) = \frac{x^2+4x-12}{x-3}$

$$
\begin{array}{l}
x^2+4x-12 : (x-3) = x+7 \\
-(x^2-3x) \\
\hline
\quad 7x-12 \\
\quad -(7x-21) \\
\hline
\qquad 33
\end{array}
$$

$\Rightarrow f(x) = x+7 + \boxed{\frac{33}{x-3}}$

$f(x) = \frac{2x+2}{x^2-6x+9}$

$\hookrightarrow$ Da der Nennergrad $n_N > n_Z$ Zählergrad wissen wir es existiert kein ganzrationaler Teil.

Teil 4:

(1) $f(x) = \frac{3x-3}{x-1}$

Lückenstelle: $q(x) = x-1 \overset{!}{=} 0$
$\Leftrightarrow x=1$

$\lim\limits_{x \uparrow 1} \frac{3x-3}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x \uparrow 1} 3x-3}{\lim\limits_{x \uparrow 1} x-1} = \frac{0^-}{0^-} = 0$

$\lim\limits_{x \downarrow 1} \frac{3x-3}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x \downarrow 1} 3x-3}{\lim\limits_{x \downarrow 1} x-1} = \frac{0^+}{0^+} = 0$

$\Rightarrow$ hebbare Definitionslücke

Teil 5:

(1) Nullstelle bei $x=1 \Rightarrow p(1)=0$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+3}$

BBS I Mainz Höhere Berufsfachschule IT-Systeme
Oberstufe - Mathematik
Wochenplan Gebrochenrationale Funktionen

bbs.eins.mainz
Berufsbildende Schule Technik

Wochenplan Nr.: 2

Zeitraum: 29.11.2019 - 06.12.2019

Pflicht: Sie bearbeiten *pro Teil* jeweils **eine Aufgabe**.
Wahl: Zur Vertiefung und Festigung stehen ihnen die übrigen Aufgaben zur Verfügung.

Teil 1: Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f(x)$ in direkter Umgebung um die Definitionslücke.

Nutzen Sie hierfür folgende Schreibweise: Sei x_P die berechnete Polstelle der Funktion $f(x)$. Dann gilt

$f(x) \xrightarrow{x \uparrow x_P} \dots$ für die Annäherung von $-\infty$ oder $f(x) \xrightarrow{x \downarrow x_P} \dots$ bzw. für die Annäherung von ∞

(I) $f(x) = \frac{-x^2+2x+4}{x-2{,}5}$

(II) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{(x-2)(x-3)}$

(III) $f(x) = \frac{x^2-2x}{2x+4}$

Teil 2: Treffen Sie eine Aussage über die Asymptote.

(I) $f(x) = \frac{x^2+9}{x+2}$

(II) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-6x+9}$

(III) $f(x) = \frac{x^4-x^3-2x+5}{x^2-x-6}$

Teil 3: Berechnen Sie den ganzrationalen und den gebrochenrationalen Teil der nachfolgenden Funktion.
Hinweis: Führen Sie eine Polynomdivision durch.

(I) $f(x) = \frac{9x^4+2x^3-5x+4}{x^2-3x}$

(II) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^4-2x^3+5}{x^3-6x+9}$

(III) $f(x) = \frac{x^8-9x^7+3x^4-4x}{x^3-6x^2+9}$

Teil 4: Bestimmen Sie die Asymptote $A_f(x)$ der gebrochenrationalen Funktion $f(x)$.

(I) $f(x) = \frac{3x-3}{x-1}$	(II) $f(x) = \frac{x^2-2x-15}{x-5}$
(III) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-x-6}$	

Teil 5: Untersuchen Sie das Verhalten der gebrochenrationalen Funktion $f(x)$ für $x \to \pm\infty$.

(I) $f(x) = \frac{1{,}5x^3+2x^2-4x+5}{x+4}$	(II) $f(x) = \frac{4x^4+3x^2-5}{2x^2+1{,}5}$
(III) $f(x) = \frac{9x^5+3x^3+4x}{3x-5}$	

WP2

Teil 1.

Gesucht Definitionslücke

(II) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{(x-2)(x+3)}$

$f_1 = \frac{x-3}{x-3}$

$f_2 = \frac{x-2}{x-2}$

$(x-2)(x-3) = 0 \iff x_1 = 2 \quad x_2 = 3$

$\lim_{x \uparrow 2} f_1(x) = \frac{-1}{-1} = 1$ $\qquad$ $\lim_{x \uparrow 3} f_2(x) = \frac{1}{1} = 1$

$\lim_{x \downarrow 2} f_1(x) = \frac{-1}{-1} = 1$ $\qquad$ $\lim_{x \downarrow 3} f_2(x) = \frac{1}{1} = 1$

$x \rightarrow 2$ $\qquad$ $x \Rightarrow 3$

Teil 2.

(I) $f(x) = \frac{x^2+9}{x+2}$ $\quad$ $n_Z = n_N + 1$, $2 = 2$ $\quad$ > Schiefe Asymptote

(II) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-6x+9}$ $\quad$ $n_Z < n_N$, $1 < 2$ $\quad$ > x-Achse ist waagerechte Asymptote

(III) $f(x) = \frac{x^4-x^3-2x+5}{x^2-x-6}$ $\quad$ $n_Z < n_N$, $3 < 4$ $\quad$ > x-Achse waagerecht

Teil 3. Polynomdivision

(I) $f(x) = \frac{9x^4+2x^3-5x+4}{x^2-3x}$

$$
\begin{array}{l}
9x^4+2x^3-5x+4 : (x^2-3x) = \underbrace{9x^2+29x+87}_{\text{ganzrationaler Teil}} \\
-(9x^4-27x^3) \\
\quad 29x^3-5x \\
\quad -(29x^3-87x^2) \\
\qquad 87x^2-5x \\
\qquad -(87x^2-261x) \\
\qquad\quad \left.\frac{256x+4}{x^2-3x}\right\} \text{gebrochenrationaler Teil}
\end{array}
$$

$\rightarrow$ $gat(x) = 9x^2+29x+87$

$gbt(x) = \frac{256x+4}{x^2-3x}$

Teil 4:

(III) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-x-6}$

$$x^2-x : x^2-x-6 = 1$$
$$\underline{-(x^2-x-6)}$$
$$6$$

$\hookrightarrow A_f(x)=1$

(II) $f(x) = \frac{x^2-2x-15}{x-5}$

$$x^2-2x-15 : (x-5) = x+3$$
$$\underline{-(x^2-5x)}$$
$$3x-15$$
$$\underline{-(3x-15)}$$
$$0$$

$\hookrightarrow A_f(x) = x+3$

teil 5:

(I) $f(x) = \frac{1{,}5x^3+2x^2-4x+5}{x+4}$

$$1{,}5x^3+2x^2-4x+5 : (x+4) = 1{,}5x^2-4x+12$$
$$\underline{-(1{,}5x^3+6x^2)}$$
$$-4x^2-4x$$
$$\underline{-(-4x^2-16x)}$$
$$12x-5$$
$$\underline{-(12x-48)}$$
$$-43$$

$\hookrightarrow A_f(x)$

$A_f(x) = 1{,}5x^2-4x+12$

$a_nx^n \hat{=} 1{,}5x^2 \qquad a_n>0$, n gerade

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

bbs.eins.mainz
Berufsbildende Schule Technik

Wochenplan Nr.: 3 Zeitraum: 13.12.2019 - 19.12.2019

Pflicht: Sie bearbeiten **drei** Teile ihrer Wahl.
Wahl: Zur Vertiefung und Festigung stehen ihnen die übrigen Teile zur Verfügung.

Teil 1: Mit $f(x) = \frac{4x^2-4}{x^2-4}$ ist eine gebrochenrationale Funktion gegeben.

(a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

(b) Bestimmen Sie die Pol- und Lückenstellen der Funktion!

(c) Treffen Sie eine Aussage über das Verhalten der Funktionswerte in der Umgebung der Pol- und Lückenstellen.

(d) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte für große x-Beträge.
Nutzen Sie die Asymptotenfunktion.

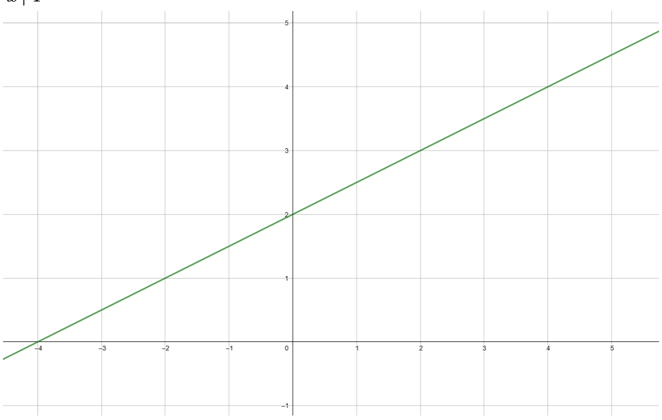
(e) Untersuchen Sie die Funktion auf mögliche Extremstellen.

(f) Zeichen Sie den Graphen der Asymptote, sowie alle berechneten Punkte in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie den Graphen.

Teil 2: Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{0{,}5x^2-8}{x-4}$.

(a) Bestimmen Sie die Lückenstelle der Funktion und zeigen Sie, dass keine Polstelle vorhanden ist.

(b) Nachfolgend dargestellt ist der Funktionsgraph von $f(x)$. Markieren Sie den Wert des Grenzwertterms $\lim\limits_{x \uparrow 4} f(x)$ im Koordinatensystem und weisen Sie diesen rechnerisch mit dem $\lim$ nach.



(c) Begründen Sie mit Hilfe des Graphen oder des faktorisierten Funktionsterms, dass es bei der Polynomdivision keinen Rest gibt.

Teil 3: Die Funktion $f(x) = \frac{x^2+4x}{x-2}$ gibt eine gebrochenrationale Funktion an.

(a) Geben Sie die Nullstellen der Funktion an.

(b) Bestimmen Sie die Pol- und Lückenstellen.

(c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte in unmittelbarer Umgebung zur Pol-/Lückenstelle.

(d) Geben Sie den Asymptotenterm an.
Nutzen Sie diesen um eine Aussage über das Verhalten der Funktionswerte für große x-Beträge zu machen.

(e) Bestimmen Sie die zwei Extrempunkte des Funktionsgraphen.

(f) Zeichnen Sie die Nullstellen, den Pol, die Extrempunkte sowie den Asymptotengraphen in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie unter Verwendung des Grenzverhaltens den Graphen.

Teil 4: Eine gebrochenrationale Funktion lässt sich durch den folgenden Term beschreiben $\frac{x^3-2x^2+x}{x^2+2x+1}$.

(a) Finden Sie alle Nullstellen der Funktion.

(b) Geben Sie die Pol- und Lückenstellen der Funktion an.

(c) Machen Sie eine Aussage über das Verhalten der Funktion in unmittelbarer Umgebung der Pol- und Lückenstellen.

(d) Nutzen Sie den Asymptotenterm um eine Aussage über das Grenzverhalten der Funktionsterme für große x-Beträge zu machen.

(e) Bestimmen Sie die erste Ableitung $f'(x)$.
Nutzen Sie diese um die Extremstellen der Funktion zu berechnen.

(f) Skizzieren Sie mit Hilfe des Asymptotengraphen sowie den berechneten Pol-/Lückenstellen und den Graphen der Funktion.

Teil 5: Bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgaben.

(a) Bestimmen Sie die Stelle des Graphen mit waagrechter Tangente: $f(x) = \frac{4x^2}{x^2+1}$.

(b) Bestimmen Sie die Steigung des Graphen an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ für $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{1+x^2}$

(c) Berechnen Sie die erste Ableitung von $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x^2-4}$ und $g(x) = \frac{5x+2x^3}{(x-1)^2}$

WP3

Aufgabe 1:

$f(x) = \frac{4x^2-4}{x^2-4}$

a) Nullstellen heißt $f(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow p(x) = 4x^2-4 \overset{!}{=} 0$

$4x^2-4 \overset{!}{=} 0 \quad |+4$

$4x^2=4 \quad |:4$

$x^2=1 \quad |\sqrt{\ }$

$\underline{\underline{x_1=1}} \qquad \underline{\underline{x_2=-1}}$

b) Pol-/Lückenstelle heißt $q(x) \overset{!}{=} 0$

$x^2-4 \overset{!}{=} 0 \quad |+4$

$x^2=4 \quad |\sqrt{\ }$

$\underline{\underline{x_3=2}} \qquad \underline{\underline{x_4=-2}}$

Polstelle x_p heißt $p(x_p) \neq 0 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 2$ ist Polstelle

Lückenstelle x_L heißt $p(x_L) = 0 \Rightarrow$ da keine $\underline{\underline{\text{Nullstelle}}}$

c) Verhalten am Polstelle heißt $\lim\limits_{x \uparrow x_p} f(x) \,/\, \lim\limits_{x \downarrow x_p} f(x)$

$x_3 = -2$

$$\lim_{x \uparrow x_3} \frac{4x^2-4}{x^2-4} = \frac{\lim\limits_{x \uparrow x_3} 4x^2-4}{\lim\limits_{x \downarrow x_3} x^2-4} = \frac{12}{0^+} \longrightarrow \infty$$

$$\lim_{x \downarrow x_3} \frac{4x^2-4}{x^2-4} = \frac{\lim\limits_{x \downarrow x_3} 4x^2-4}{\lim\limits_{x \downarrow x_3} x^2-4} = \frac{12}{0^-} \longrightarrow -\infty$$

$x_4 = 2$

$$\lim_{x \uparrow x_4} \frac{4x^2-4}{x^2-4} = \frac{\lim\limits_{x \uparrow x_4} 4x^2-4}{\lim\limits_{x \uparrow x_4} x^2-4} = \frac{12}{0^-} \longrightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow x_4} \frac{4x^2-4}{x^2-4} = \frac{\lim_{x\downarrow x_4} 4x^2-4}{\lim_{x\downarrow x_4} x^2-4} = \frac{12}{0^+} \longrightarrow \infty$$

d) Asymptotenfunktion $A_f(x) = gat(x)$ gat= ganzrationalerteil

→ Polynomdivision

$$4x^2-4 : x^2-4 = 4$$
$$\underline{-(4x^2-16)}$$
$$12$$

$\Rightarrow A_f(x) = 4$

Verhalten von f(x) für große x-Beträge heißt

$$\lim_{x\to\pm\infty} A_f(x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} A_f(x) = \lim_{x\to-\infty} 4 = \text{bleibt bei } \underline{4} = \lim_{x\to\infty} 4 = \lim_{x\to\infty} A_f(x)$$

e) Mögliche Extremstellen $= f'(x) \overset{!}{=} 0$

$$f(x) = \frac{4x^2-4}{x^2-4} \qquad (4x^2-4)(x^2-4)^{-1}$$ (Produkt und Kettenregel)

$$f'(x) = 8x(x^2-4)^{-1} + (4x^2-4)\cdot(-1)\cdot(x^2-4)^{2}\cdot(2x)$$

$$= \frac{8x}{x^2-4} + \frac{-8x^3+8x}{(x^2-4)^2} = \frac{8x(x^2-4) - 8x^3+8x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-24x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-24x}{(x^2-4)^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow -24x \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x=0$$

Teil 2:

a) $q(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$

$$p(4) = 0{,}5\cdot 4^2 - 8 = 0{,}5\cdot 16 - 8 = 8-8=0$$

$\Rightarrow x_p = x_n \Rightarrow x=4$ also eine hebbare Lückenstelle

b) $f_1(x) = 0{,}5x^2 - 8 : x-4$ weil $x=4$ auch eine Nullstelle ist

$$\begin{array}{l} 0{,}5x^2 - 8 : x-4 = \underline{0{,}5x+2} \\ -(0{,}5x^2 - 2x) \\ \quad 2x-8 \\ \quad -(2x-8) \\ \quad\quad 0 \end{array}$$

$\rightarrow f_1(x) = 0{,}5x + 2$

Teil 3:

a) $p(x) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(x+4)=0 \Leftrightarrow x_1 = 0$
$x_2 = -4$

b) $q(x) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x_3 = 2 \Rightarrow$ Polstelle

$p(2) = 2^2 + 4 \cdot 2 = 4+8 = 12 \neq 0$

c) $\lim\limits_{x \uparrow 2} f(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\uparrow 2} x^2+4x}{\lim\limits_{x\uparrow 2} x-2} = \dfrac{12}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \downarrow 2} f(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\downarrow 2} x^2+4x}{\lim\limits_{x\downarrow 2} x-2} = \dfrac{12}{0^+} = \infty$

d) $A_f(x) = \text{ganzrat}(x)$

$$\begin{array}{l} x^2+4x : x-2 = \underbrace{x+6}_{\rightarrow A_f(x)} \\ -(x^2-2x) \\ \quad 6x \\ \quad -(6x-12) \\ \quad\quad 12 \end{array}$$

$A_f(x) = \underline{x+6}$

d.h. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} x+6 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} x+6 = \infty$

e) $f'(x) \overset{!}{=} 0$ $\qquad f(x) = (x^2+4x)(x-2)^{-1}$

$$f'(x) = (2x+4)(x-2)^{-1} + (x^2+4x)\cdot(-1)(x-2)^{-2}\cdot 1$$

$$= \frac{2x+4}{x-2} + \frac{(x^2+4x)(-1)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(2x+4)(x-2)}{(x-2)^2} + \frac{-x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x+4x-8-x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x-8}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^2 \underbrace{-4}_{p}x \underbrace{-8}_{q} = 0$$

pq-Formel

$$x_{1/2} = \frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2+8} = 2 \pm \sqrt{4+8}$$

$$x_1 = 2+\sqrt{12}$$
$$x_2 = 2-\sqrt{12}$$

$f(x_1) = 14{,}93 \qquad f(x_2) = 1{,}07$

$H(5{,}46/14{,}93) \qquad T(-1{,}46/1{,}07)$

Teil 4:

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2+x}{x^2+2x+1}$$

a) x^3-2x^2+x

$$x(x^2-2x+1) = 0$$

pq-Formel $= -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2-1}$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1$

b) pq-Formel

x^2+2x+1

$= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2-1}$

$x_4 = -1$

$x_5 = -1$

c) $\lim\limits_{x \uparrow -1} f(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \uparrow -1} x^3 - 2x^2 - x}{\lim\limits_{x \uparrow -1} x^2 + 2x + 1} = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \downarrow -1} f(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \downarrow -1} x^3 - 2x^2 - x}{\lim\limits_{x \downarrow -1} x^2 + 2x + 1} = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$

d) $A_{f(x)} = \text{gat}(x)$

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 - x : (x^2 + 2x + 1) = \underbrace{x - 4}_{Af(x)} \\
-(x^3 + 2x^2 + x^2) \\
\hline
\quad 4x^2 \\
\quad -(4x^2 - 8x - 4) \\
\hline
\qquad 8x + 4
\end{array}
$$