1 Grundwissen

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $x \in \mathbb{R}$.
Um diese Funktion (oder auch *Kurve*) untersuchen zu können, müssen wir auf Informationen aus vergangenen Lernabschnitten aber auch auf neues Wissen zurückgreifen. Nachfolgend werden die entsprechenden Informationen in Kurzform nochmal dargestellt.

1.1 Defintionsbereich

Als Definitionsbereich kann man die Menge von Zahlen (x-Werte) bezeichnen, welche man in die Funktion $f(x)$ einsetzen darf.
Man schreibt: $\mathbb{D} =$

1.2 Wertebereich

Zum Wertebereich zählen alle möglichen y-Werte, die die Funktion annehmen kann.
Man schreibt auch $\mathbb{W} =$

1.3 Symmetrie

· Eine Funktion heißt **achsensymmetrisch**, wenn gilt: es kommen nur gerade Exponenten in dem Funktionsterm $f(x)$ vor.

a_0 gilt als Glied mit Geradem Exponenten.

In diesem Fall bedeutet das außerdem, dass $f(x) = f(-x)$ für alle zulässigen x. Die Funktion nennt man dann auch gerade.

· Eine Funktion heißt **punktsymmetrisch**, wenn gilt: es kommen nur ungerade Exponenten in dem Funktionsterm $f(x)$ vor.

Im Funktionsterm gibt es kein a_0.

In diesem Fall heißt das, dass $f(x) = -f(x)$ für alle zulässigen x. Eine solche Funktion wird auch ungerade genannt.

· Enthält der Funktionsterm $f(x)$ sowohl gerade als auch ungerade Exponenten, so ist sie **nicht symmetrisch**.

1.4 Verhalten für große x-Werte

Um das Verhalten für große x-Werte zu bestimmen, betrachten wir und lediglich den *charakteristischen Summanden*, also den Summanden, mit der höchsten Potenz ($a_n x^n$).
Das Verhalten kann dann wie folgt angegeben werden:

a_n \ n	gerade	ungerade
positiv	$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$ $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$	$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$ $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$
negativ	$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$ $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$	$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$ $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

1.5 Achsenschnitte

Nullstellen

Die Nullstellen sind die Stellen, an denen der Funktionswert Null ist, der Funktionsgraph also die x-Achse schneidet.
Um die Nullstellen zu bestimmen, setzen wir

$$f(x) = 0$$

Wir merken uns:

- $a_1 x + a_0 \Rightarrow$ Null setzen und nach x umformen $(a_1 x + a_0 = 0 \Rightarrow x = \frac{a_0}{a_1})$
- $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Rightarrow$ Anwenden der **pq-Formel**

Beachte: a_2 muss den Wert 1 haben (also muss gegebenenfalls : a_2 gerechnet werden).

- $a_2x^2 + a_0 \Rightarrow$ Null setzen und nach x umformen ($a_2x^2 + a_0 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$)
- Funktionen mit Grad 3 und Höher $\Rightarrow$ NST ausprobieren (meist $-2, -1, 0, 1, 2$); Dann mit **Polynomdivision** den Grad reduzieren
  $(a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0) : (x - NST) = p(x)$
  NST des Ergebnisses $p(x)$ bestimmen

1.5.1 Schnittstelle mit der y-Achse

Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, setzen wir für x Null (0) in den Funktionsterm ein. Wir bestimmen also

$$f(0) = a_0$$

So erhalten wir $S(0|a_0)$. Ist $f(0) = a_0 = 0$, so verläuft der Graph durch den Ursprung.

1.6 Extremstellen

Notwendige Bedingung Ist x_0 eine Extremstelle, dann muss $f'(x) = 0$ sein.

1. Hinreichende Bedingung
∘ $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \rightarrow f(x_0)$ ist lokales Minimum
∘ $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \rightarrow f(x_0)$ ist lokales Maximum

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann verwende nachfolgende Bedingung.

2. Hinreichende Bedingung $f'(x)$ hat an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel.
∘ Von $+$ nach $- \rightarrow f(x_0)$ ist lokales Minimum
∘ Von $-$ nach $+ \rightarrow f(x_0)$ ist lokales Maximum

1.7 Krümmungsverhalten und Wendestellen

Für das *Krümmungsverhalten* eines Funktionsgraphen gilt folgendes:
∘ Ist $f'(x)$ streng monoton *steigend*, so ist der Funktionsgraph von f **rechtsgekrümmt**.
∘ Ist f' streng monoton *fallend*, so ist der Funktionsgraph von f **linksgekrümmt**.
Das Krümmungsverhalten gibt man jeweils vor, zwischen und nach den Wendepunkten $[x_{W_1}, x_{W_2}]$ an.
Das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen ändert sich an einer *Wendestelle*. Für eine solche gilt:
Notwendige Bedingung Ist x_0 eine Wendestelle, dann muss $f''(x_0) = 0$ sein.

1. Hinreichende Bedingung
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 eine Wendestelle.
2. Hinreichende Bedingung
$f''(x_0) = 0$ und $f''(x)$ hat an der Stelle x_0 einen **Vorzeichenwechsel**.

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, aber $f'''(x_0) \neq 0$, dann bezeichnet man x_0 als Sattelstelle.
Ein **Sattelpunkt** ist ein besonderer Wendepunkt, in dem die Tangente am Graphen waagerecht ist.

1.8 Schaubild

Zeichne die Nullstellen, die Extrempunkte und die Wendepunkte in das Koordinatensystem. Verbinde die Punkte entsprechen der Information, die du über die Symmetrie, das

Randverhalten (Verhalten für große x-Werte), die Monotonie und das Krümmungsverhalten erhalten hast.
So erhältst du den ungefähren Verlauf des Funktionsgraphen.

Monotonieverhalten (Zusatz)

Betrachtest du eine Funktion, so ist es bisweilen interessant zu wissen, wie die verschiedenen Funktionswerte zueinander stehen. Dies interessiert uns meist in einem bestimmten Intervall (z.B. zwischen x_0 und x_1). Wir definieren also ein Intervall $I = [x_0, x_1]$, als die Menge der x-Werte, für die gilt: $x_0 \leq x \leq x_1$.
Um eine Aussage über das Monotonieverhalten treffen zu können, ist es zwingend notwendig, dass die Funktion auf dem entsprechenden Intervall I definiert ist.

f heißt **streng monoton steigend** auf I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:
$\circ f(x_1) < f(x_2)$.
Entsprechend heißt f **streng monoton fallend** auf I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:
$\circ f(x_1) > f(x_2)$.

2 Kurvendiskussion 101

Wirst du mit einer ganzrationalen Funktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ konfrontiert und sollst diese skizzieren, führst du die folgenden Schritte der **Kurvendiskussion** aus.

1. Definitions- und Wertebereich angeben
2. Ableitungen bilden $(f'(x), f''(x), f'''(x))$
3. Symmetrie bestimmen
   $\underbrace{f(x) = f(-x)}_{achsensymmetrisch}$ oder $\underbrace{f(x) = -f(-x)}_{punktsymmetrisch}$
4. Verhalten für große x-Werte (Wo kommt die Funktion her, wo geht sie hin)
5. Nullstellen und die dazugehörigen Punkte bestimmen
   $f(x) = 0$
6. Extremstellen und die dazugehörigen Punkte
   $f'(x) = 0$
7. Wendestellen (ggf. Sattelstelle) und die dazugehörigen Punkte
   $f''(x) = 0$
8. Übertragen der Punkte in das Koordinatensystem.
   Skizzieren des Funktionsgraphen anhand der Schritte (2.), (3.), (6.) und (8.) und der eingetragenen Punkte.