

Allgemeines Vorgehen zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von Geraden

Sollen zwei Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{q} + t\vec{v}$ auf ihre gegenseitige Lage untersucht werden, betrachten wir zunächst die Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} . Sind \vec{u} und \vec{v} ...

linear abhängig,

dann sind g und h

+ **parallel**, wenn

$$\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$$

keine Lösung besitzt.

+ **gleich**, wenn

$$\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$$

unendlich viele Lösungen besitzt.

linear unabhängig,

dann haben g und h

+ **keinen** Schnittpunkt (sie sind *windschief*), wenn

$$\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$$

keine Lösung besitzt.

+ **einen** Schnittpunkt S , wenn

$$\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$$

eine Lösung besitzt.

S. 64 Nr. 3 c & d Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h . Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S .

(c) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind **linear unabhängig**. Die Geraden können also **einen** oder **keinen** Schnittpunkt S haben. Um dies zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} 7 + r = 2 + t \\ 3 = 5 + t \end{array} \right. \Rightarrow r = -7 \quad \Rightarrow t = -2$$

Den Schnittpunkt der beiden Geraden bestimmen wir nun, indem wir die ermittelten Werte für r und t in die dazugehörigen Geradengleichungen einsetzen.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Geraden schneiden sich also im Punkt $S(0|3)$.

(d) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$ sind **linear abhängig** ($\vec{u} = -\frac{3}{5}\vec{v}$). Die

Geraden können also entweder **parallel** oder **gleich** sein.

Um dies zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem nach r und t .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$1 + 3r = 2 - 5t$$

$$3 + 6r = 5 - 10t \Rightarrow r = \frac{2-10t}{6}$$

$$\begin{aligned} & 1 + 3\left(\frac{2-10t}{6}\right) = 2 - 5t \quad | -1; +5t \\ \Leftrightarrow & \frac{2-10t}{2} + 5t = 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 5t + 5t = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1$$

$$\Rightarrow \text{Wir erhalten eine wahre Aussage}$$

Die Geraden g und h sind also **gleich**.

Da $g = h$ müssen wir keinen Schnittpunkt mehr berechnen.

S. 64 Nr. 8 Die Gerade f geht durch den Punkt $A(3|8|0)$ und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Gerade h geht durch den Punkt $B(-2|3|1)$ und hat den Stützvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Überprüfen Sie, ob sich die Geraden g und h schneiden. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes.

Zunächst müssen wir die Geradengleichungen für g und h bestimmen.

Für g können wir wie bekannt vorgehen. So ergibt sich die folgende Geradengleichung:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Geradengleichung von h aufzustellen müssen wir folgendes beachten: Wir kennen den **Stützvektor \vec{s}** sowie **einen weiteren Punkt**, nicht aber den **Richtungsvektor**. Diesen müssen wir

noch bestimmen. Hierfür berechnen wir $\vec{B} - \vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Wir erhalten damit } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren von sind **linear unabhängig**. Die Geraden können also **einen** oder **keinen** Schnittpunkt S haben. Um dies zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$$\begin{array}{llll} \text{I} & 2 + 2r = 2 - 5t & & \\ \text{II} & 8 + 5r = 1 + 2t & & \\ \text{III} & 0 = t & \Rightarrow t = 0 & \\ \hline \text{I}' & 2 + 2r = 2 & \Rightarrow r = 0 & \\ \text{II}' & 8 + 5r = 1 & \Rightarrow r = -\frac{7}{5} & \\ \text{III} & 0 = t & & \end{array}$$

Wir erhalten für r zwei unterschiedliche Werte. Somit hat das Gleichungssystem keine Lösung $\Rightarrow g$ und h schneiden sich nicht. Sie sind also *windschief*.