bbs.eins.mainz Berufsbildende Schule Technik	4. Klassenarbeit Mathematik	Name: Musterlösung
		Datum:
HBF IT 18A - B	______ von ______ Punkten erreicht: ______%	**Note:**

Allgemeines

- Bei der Bearbeitung ist ein **nachvollziehbarer, vollständiger Rechenweg** aufzuschreiben.
- Die Bewertung der Klassenarbeit ist nur bei **gut lesbarer Schrift** möglich.
- Die Lösungen müssen mit dokumentenechten Stift (**Kugelschreiber** oder **Fine-Liner** - keine rote Mine) erstellt werden.
- Runden Sie ihre Ergebnisse auf **2 Nachkommastellen**. Wurzelausdrücke müssen nicht berechnet werden (z.B. $\sqrt{10}$).

- **Zugelassene Hilfsmittel**: Taschenrechner (nicht graphikfähig / programmierbar)
- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten

Aufgabe 1

/ **40 Pkt.**

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch:

notwendige Ableitungen:
$f'(x)$
$f''(x)$ $f'''(x)$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1,5$$

a) Symmetrieeigenschaften (mit kurzer Begründung)s (1)

b) Achsenabschnittspunkte (Nullstellen, Schnittpunkt mit y-Achse) (11)

c) Globalverlauf (Verhalten für große x-Beträge) mit Skizze (2)
$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} ?$ und $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} ?$

d) Extrempunkte (notwendige und hinreichende Bedingung) (11)

e) Wendepunkte (notwendige und hinreichende Bedingung), eventuell vorliegender Sattelpunkt. (8)

f) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion mit Hilfe der charakteristischen Punkte. Nutzen Sie zudem eine Wertetabelle im Bereich $-3 \leq x \leq 3$. (4)

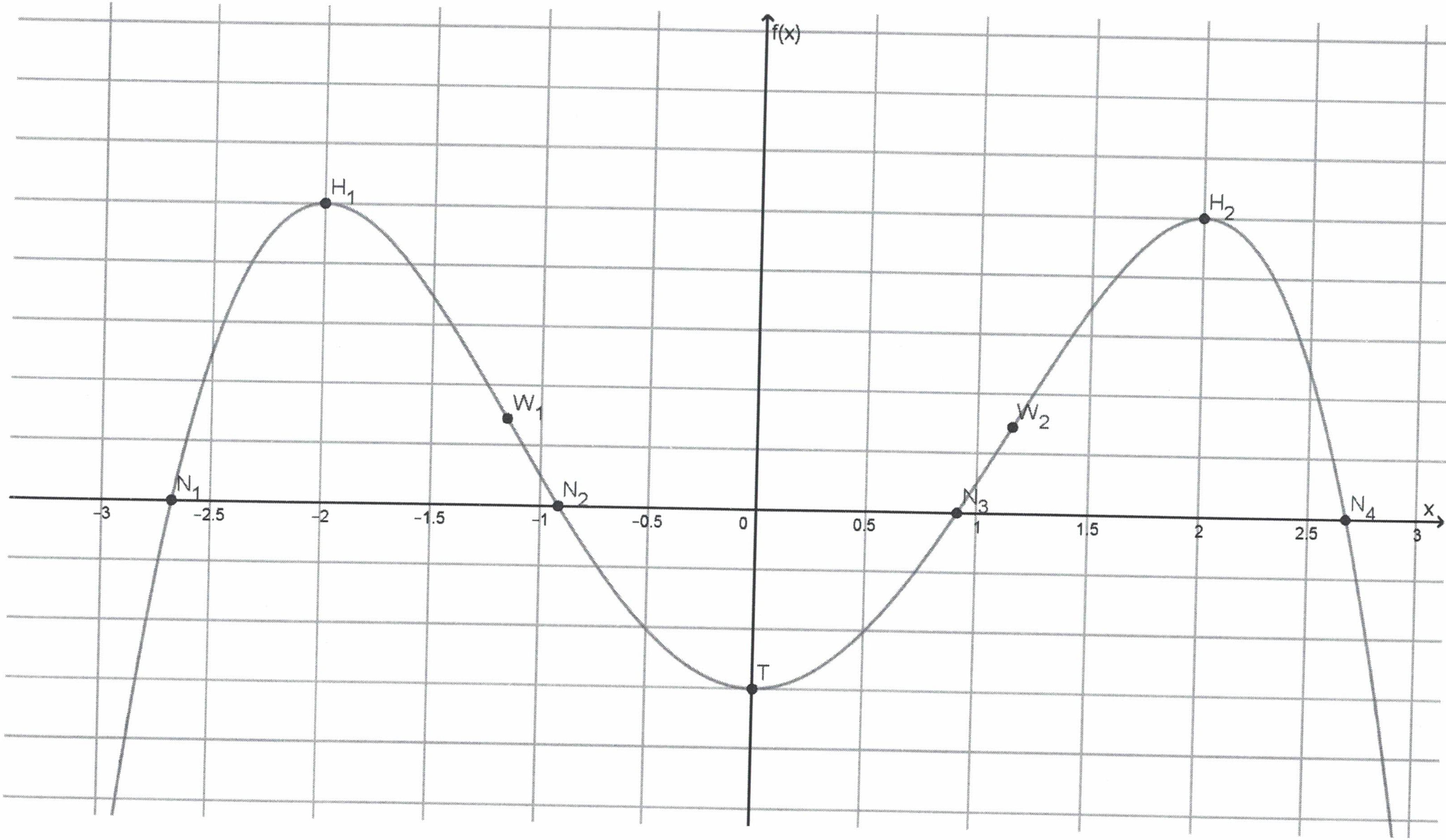
Skalieren Sie das Koordinatensystem entsprechend.

g) Untersuchen Sie die Funktion auf ihr Krümmungsverhalten (rechts- bzw. linksgekrümmt). Markieren Sie die Intervalle in ihrer Zeichnung. (3)

Zusatzaufgabe

/ **4 Pkt.**

Bestimmen Sie die Funktion der Wendetangente im Wendepunkt $WP(-1,15|0,72)$.



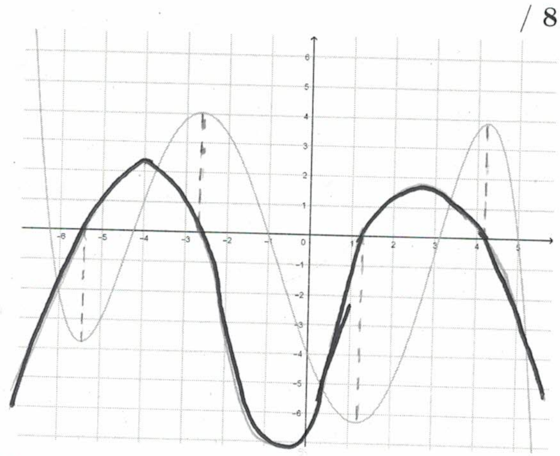
f(x)
x
H1
H2
W1
W2
N1
N2
N3
N4
T
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Aufgabe 2

/ 8 Pkt.

a) Geben Sie anhand des Graphen möglichst große Intervalle an, in denen die dargestellte Funktion rechts- bzw. linksgekrümmt ist. (4)

b) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion $f'(x)$ in das nebenstehende Koordinatensystem. (4)



Aufgabe 1

B

$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1{,}5$

a) Achsensymmetrisch, da alle Exponenten gerade sind. (1)

b) y-AAS: $f(0) = -\frac{1}{4}\cdot 0^4 + 2\cdot 0^2 - 1{,}5 = -1{,}5$ (0,5)

$S_y(0|-1{,}5)$ (0,5)

Nullstellen: $f(x) = 0$

$0 = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1{,}5$ Substitution: $z = x^2$

$\Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{4}z^2 + 2z - 1{,}5 \quad | \cdot (-4)$ (2)

$\Leftrightarrow 0 = z^2 \underbrace{-8z}_{p} \underbrace{+6}_{q} \quad |$ pq-Formel

$z_{1/2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 6} = 4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 6} = 4 \pm \sqrt{16-6}$

$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{10}$ (2)

$z_1 = 4 + \sqrt{10} \approx 7{,}16$

$z_2 = 4 - \sqrt{10} \approx 0{,}84$

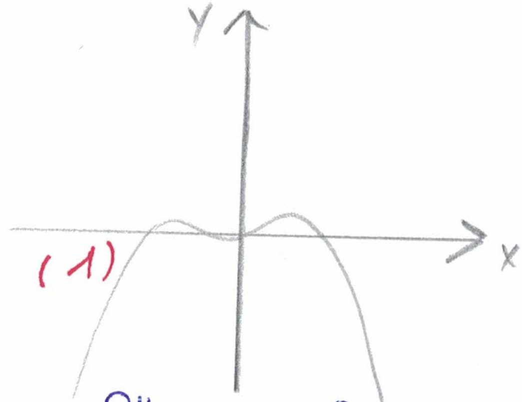
Rücksubstitution $x^2 = z$

$x^2 = 7{,}16 \quad | \sqrt{\ }$ $\qquad x^2 = 0{,}84 \quad | \sqrt{\ }$ (2)

$x_1 = -2{,}68 \quad x_2 = 2{,}68$ (1) $\qquad x_3 = -0{,}92 \quad x_4 = 0{,}92$ (1)

$N_1(-2{,}68|0)$ (0,5) $\quad N_2(2{,}68|0)$ (0,5) $\quad N_3(-0{,}92|0)$ (0,5) $\quad N_4(0{,}92|0)$ (0,5)

c) $a_n x^n = -\frac{1}{4}x^4$



$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$ (0,5)

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$ (0,5)

(1)

d) $f'(x) = -x^3 + 4x = x(-x^2+4)$ (1) $\quad f''(x) = -3x^2 + 4$ (1)

Extremstelle: $f'(x) = 0$ notwendige Bedingung

$0 = x(-x^2+4) \quad \Rightarrow x_5 = 0$ (1)

$0 = -x^2 + 4 \quad | + x^2$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$ (2)

$x_6 = 2 \quad x_7 = -2$

(1) (1)

$f''(x_E) \neq 0$ hinreichende Bedingung

$f''(0) = -3 \cdot 0^2 + 4 = 4 > 0 \rightarrow$ TIP

$f''(2) = -3 \cdot 2^2 + 4 = -8 < 0 \rightarrow$ HOP (1,5)

$f''(-2) = -3(-2)^2 + 4 = -8 < 0 \rightarrow$ HOP

Punkte? $f(x_E) = y$

$f(0) = -1{,}5$

$f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 1{,}5 = 2{,}5$ (1)

$f(-2) = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^2 - 1{,}5 = 2{,}5$

$T(0 | -1{,}5)$ $\quad H_1(+2 | 2{,}5)$ $\quad H_2(-2 | 2{,}5)$

(0,5) (0,5) (0,5)

e) Wendepunkte: $f''(x) = 0$ notwendige Bedingung

$f''(x) = -3x^2 + 4$ $\qquad$ $f'''(x) = -6x$ (1)

$0 = -3x^2 + 4 \quad | +3x^2$

$3x^2 = 4 \quad | :3$

$x^2 = \frac{4}{3} \quad | \sqrt{}$ $\qquad$ (2)

$x_8 = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (1) $\qquad x_9 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ (1)

$f'''(x_W) \neq 0$ $\qquad$ hinreichende Bedingung

$f'''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} < 0 \;\rightarrow$ LR

$f'''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -6 \cdot \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) > 0 \;\rightarrow$ RL $\qquad$ (1)

Punkte?

$f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^4 + 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 - 1{,}5 = 0{,}72$

$f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^4 + 2\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 - 1{,}5 = 0{,}72$ $\qquad$ (1)

$W_1\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \,\middle|\, 0{,}72\right)$ (0,5) $\qquad W_2\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \,\middle|\, 0{,}72\right)$ (0,5)

g) rechtsgekrümmt auf $\left[-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right]$ (1)

linksgekrümmt auf $\left[-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right]$ (1)

rechtsgekrümmt auf $\left[\sqrt{\frac{4}{3}}, \infty\right]$ (1)

Zusatzaufgabe

WP$(-1{,}15 \mid 0{,}72)$

Gesucht: Wendetangente $y_W = mx + b$

Lösung $m \mathrel{\hat{=}}$ Steigung $\mathrel{\hat{=}} f'(x_W)$

$$f'(-1{,}15) = -(-1{,}15)^3 + 4 \cdot (-1{,}15)$$

$$= -3{,}08 \qquad (1)$$

$$y_W = f(-1{,}15) = 0{,}72$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}72 = -3{,}08 \cdot (-1{,}15) + b \qquad (1{,}5)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}72 = 3{,}54 + b \qquad | -3{,}54$$

$$\Leftrightarrow \quad b = -2{,}82$$

$$\Rightarrow \quad y_4 = -3{,}08x - 2{,}82 \qquad (1{,}5)$$

Aufgabe 2

a) linksgekrümmt $[-\infty; -4]$

rechtsgekrümmt $[-4; -0{,}5]$

linksgekrümmt $[-0{,}5; 2{,}75]$

rechtsgekrümmt $[2{,}75; \infty]$