Aufgabe 1 3 + 2 + 2 = 7 Pkt.

Bestimmen Sie jeweils die Geradengleichung mit Hilfe der gegebenen Informationen.

(a) Gegeben: $A(7|9|-3)$ und $B(2|-1|4)$

Da wir zwei Punkte gegeben haben, wählen wir zunächst einen Punkt für unseren **Stützvektor** aus und bestimmen diesen entsprechend $\vec{OA}$. Zusätzlich benötigen wir noch den **Richtungsvektor** - dieser geht von dem eben gewählten Punkt A aus. Hierfür verwenden wir den Stützvektor sowie den Ortsvektor zum Punkt B.

$$\vec{p} = 0\vec{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir die Geradengleichung aufstellen: $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$

(b) Gegeben: $A(9|2|-3)$ und der Stützvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Da wir den **Stützvektor** haben, benötigen wir noch den Richtungsvektor. Hierfür verwenden wir den **Stützvektor** sowie den Ortsvektor zum Punkt A.

$$\vec{u} = \vec{PA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Für die Geradengleichung folgt also $g_b : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

(c) Gegeben: $A(4|2|-9)$ und der Richtungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zunächst müssen wir den Punkt A noch durch seinen Ortsvektor zum **Stützvektor** umwandeln.

$$0\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir nun alle Informationen, die wir für die Geradengleichung benötigen.

Diese Informationen setzen wir nur in die allgemeine Form ein und erhalten:

$$g_c : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 22 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 $2 + 4 + 3 = 9$ Pkt.

(a) Bestimmen Sie zwei Punkte, welche auf der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegen.

Um nun zwei weitere Punkte auf der Gerade zu bestimmen, wählen wir $r = 2$ bzw. $r = -1$ und setzen diese Werte in die Geradengleichung ein.

$r = 2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Der dazugehörige Punkt ist $P(3|11|-5)$.

$r = -1$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der dazugehörige Punkt ist $Q(9|-4|-2)$.

(b) Verläuft die Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ durch den Punkt $A(7|9|1)$.

Prüfen sie zudem, ob $B(-1,5|-5|9,5)$ auf der Geraden g liegt.

Um zu prüfen, ob ein gegebener Punkt auf einer Gerade liegt, bestimmen wir den Ortsvektor zu besagtem Punkt und setzen diesen mit der Geradengleichung gleich ($0\vec{A} = g$). Dann bestimmen wir für welchen Wert von r die einzelnen Koordinaten erfüllt sind.

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I	$7 = 7 - 2r$	$\Rightarrow 2r = 0$	$r = 0$
II	$9 = 1 + 5r$	$\Rightarrow 5r = 8$	$r = \frac{8}{5}$
III	$1 = -3 - r$	$\Rightarrow -r = 4$	$r = -4$

Wir sehen $r = \overbrace{0}^{nachI} \neq \overbrace{\frac{8}{5}}^{nachII} \neq \overbrace{-4}^{nachIII}$. Somit können wir folgern, dass die Geraden g nicht durch den Punkt A verläuft.

Bleibt die Frage zu klären, ob der Punkt $B(-1,5|-5|9,5)$ auf der Geraden liegt. Das Vorgehen ist das Gleiche.

$$0\vec{B} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -5 \\ 9,5 \end{pmatrix}$$

I	$-1,5 = 7 - 2r$	$\Rightarrow 2r = 8,5$	$r = 4,25$
II	$-5 = 1 + 5r$	$\Rightarrow 5r = -6$	$r = -\frac{6}{5}$
III	$9,5 = -3 - r$	$\Rightarrow r = -12,5$	

Wir sehen $r = \overbrace{4,25}^{nachI} \neq \overbrace{-\frac{6}{5}}^{nachII} \neq \overbrace{-12,5}^{nachIII}$. Somit können wir folgern, dass B nicht auf der Geraden g liegt.

(c) Bestimmen Sie einen Punkt, der auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegt.

Ist $A(\frac{8}{3}|\frac{4}{3}|\frac{10}{3})$ einer der Punkte von g?

Zunächst bestimmen wir einen weiteren Punkt auf der Geraden. Hierfür wählen wir $r = 3$ und setzen dies in die Geradengleichung ein.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Der dazugehörige Punkt ist $P(1|16|-6)$.

Prüfen wir nun, ob der Punkt A auf der Geraden liegt. Wir setzen also den Ortsvektor von A mit der Gerade gleich und prüfen die Werte für r.

I	$\frac{8}{3} = 7 - 2r$	$\Rightarrow 2r = \frac{13}{3}$	$r = \frac{13}{6}$
II	$\frac{4}{3} = 1 + 5r$	$\Rightarrow 5r = \frac{1}{3}$	$r = \frac{1}{5}$
III	$\frac{10}{3} = -3 - r$	$\Rightarrow -r = \frac{19}{3}$	$\Rightarrow r = -\frac{19}{3}$

Wir sehen $r = \overbrace{\frac{13}{6}}^{nachI} \neq \overbrace{\frac{1}{3}}^{nachII} \neq \overbrace{-\frac{19}{3}}^{nachIII}$. Somit können wir folgern, dass A nicht auf der Geraden g liegt.

Aufgabe 3 $2 + 3 + (1 + 2 + 4) = 12$ Pkt.

Das Dreieck ABC ist gegeben durch die Punkte $A(5|2|0)$, $B(3|0|4)$ und $C(0|-1|-3)$.

(a) Welchen Abstand hat der Eckpunkt A vom Eckpunkt B?

Um den Abstand zweier Punkte zu berechnen, benötigen wir zunächst den Verbindungsvektor zwischen diesen beiden Punkten. Dieser ist: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Für den Abstand verwenden wir die uns bekannte Formel: $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. So ergibt sich für die Punkte A und B:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24} \sim 4{,}89$$

(b) In welchem Winkel stehen die Vektoren im Punkt B zueinander?

Da wir den Winkel im Punkt B berechnen wollen, benötigen wir die Vektoren, die von diesem Punkt ausgehen.

$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$

Für den Winkel können wir die uns bekannte Formel anwenden:

$$\gamma = \arccos \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \arccos \frac{a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} * \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Mit den beiden Vektoren ergibt sich so:

$$\gamma = \arccos \frac{2 * (-3) + 2 * (-1) + (-4) * (-7)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} * \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-7)^2}} = \arccos \frac{-6 - 2 + 28}{\sqrt{24} * \sqrt{59}} \sim 57{,}89°$$

(c) Lösen Sie jeweils die Unterpunkte:

(1) Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt M zwischen B und C

Der Mittelpunkt entspricht der Hälfte der Summe der beiden Punkte. Somit gilt für $M = (\frac{3+0}{2}|\frac{0+(-1)}{2}|\frac{4+(-3)}{2}) =$ (1,5|-0,5|0,5)

(2) Bestimmen Sie die Gerade, die durch die Punkte M und A verläuft

Um die Gerade zu bestimmen benötigen wir den Stütz- und den Ortsvektor. Also Stützvektor wählen wir den Ortsvektor zu M und stellen damit den Richtungsvektor zu A auf.

$\vec{p} = 0\vec{M} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $\vec{u} = \vec{MA} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$

Daraus lässt sich die Geradengleichung aufstellen: $\Rightarrow$ $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$

(3) Zeigen sie rechnerisch, dass die Strecke $\overline{MA}$ auf der Geraden

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegt.

Um dies zu zeigen, setzen wir die Geraden $g = h$ und lösen das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 1,5 + 3,5t = -2 + 14r & \\ \text{II} & -0,5 + 2,5t = -3 + 10r & \\ \text{III} & 0,5 - 0,5t = 1 - 2r & \mid -0,5 \mid : (-0,5) \\ & \Rightarrow t = 4r - 1 & \end{array}$$

Wir müssen das Ergebnis nun in eine der anderen Gleichungen einsetzen.

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 1,5 + 3,5 * (4r - 1) = 1,5 + 14r - 3,5 = & -2 + 14r \\ & \Rightarrow 0 = 0 & \text{Wir haben eine wahre Aussage.} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{II} & -0,5 + 2,5(4r - 1) = -0,5 + 10r - 2,5 = & -3 + 10r \\ & \Rightarrow 0 = 0 & \text{Wir haben eine wahre Aussage.} \end{array}$$

Wir erhalten für r und t unendlich viele Lösungen.

$\Rightarrow$ Die Geraden g und h sind gleich. Somit liegt die Strecke $\overline{MA}$ auf der Geraden g .

Aufgabe 4 / 3 + 3 = 6 Pkt.

Gegeben sind die Geraden

$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ | $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Wählen Sie **eine** der beiden Geraden und bestimmen sie die Geradengleichungen h_1 und h_2 so, dass der Punkt $P(3|2|-1)$ auf den Geraden liegt und die Gerade h_1 orthogonal und die Gerade h_2 parallel zu der gewählten Gerade liegt.

Zwei Geraden sind *orthogonal*, wenn das Skalarprodukt der Richtungsvektoren Null ist ($\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} * \vec{b} = 0$)

Zwei Geraden sind *parallel*, wenn die Richtungsvektoren linear abhängig sind.

Mit diesem Wissen, können wir die zwei Geraden nun aufstellen.

$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

---

h_1 orthogonal zu g und durch $P(3|2|-1)$

$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} * \vec{v} = 0$

$\Rightarrow 7 * \underbrace{v_1}_{1} + 2 * \underbrace{v_2}_{-1} - 5 * \underbrace{v_3}_{1} = 0$

$h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

h_1 orthogonal zu g und durch $P(3|2|-1)$

$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} * \vec{v} = 0$

$\Rightarrow 7 * \underbrace{v_1}_{1} + 2 * \underbrace{v_2}_{-1} - 5 * \underbrace{v_3}_{1} = 0$

$h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

---

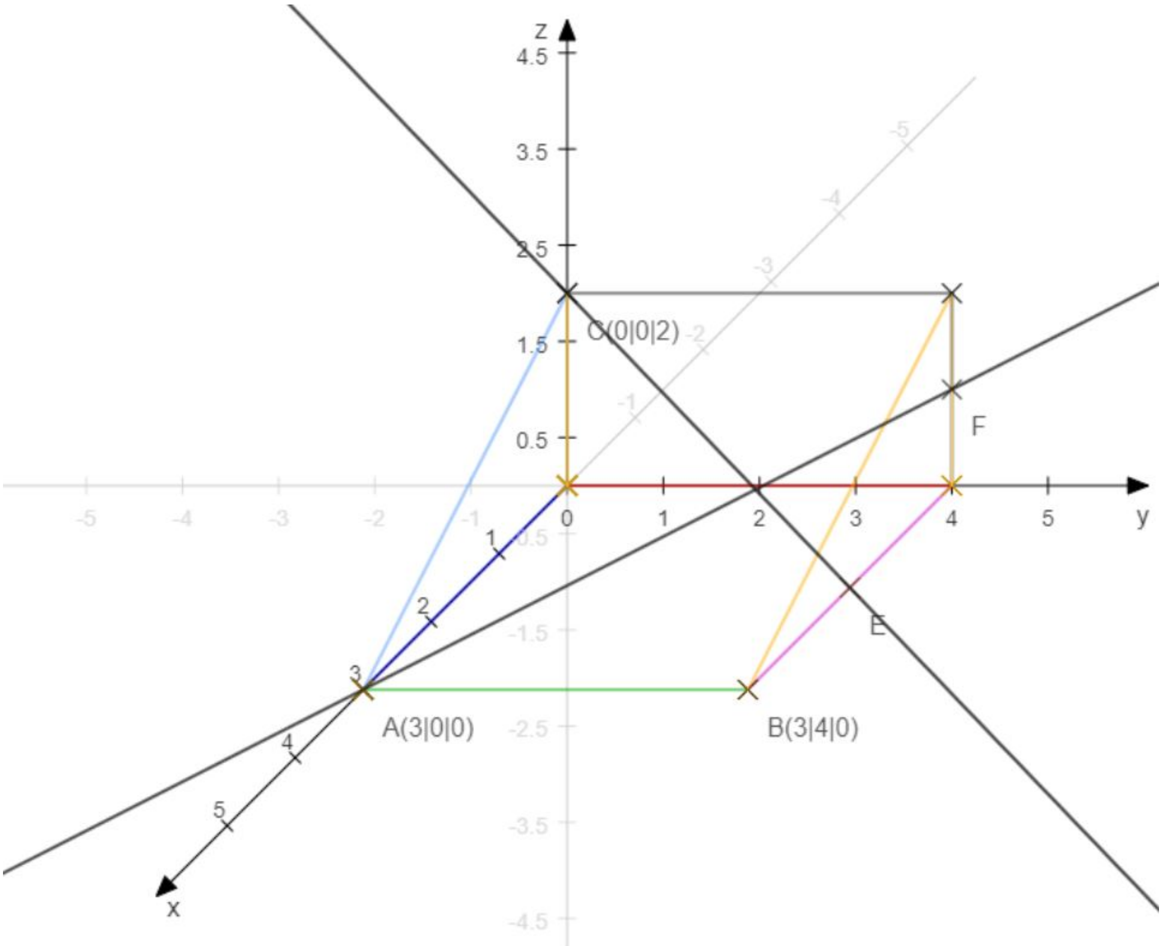
h_2 parallel zu g und durch $P(3|2|-1)$

$h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

h_2 parallel zu g und durch $P(3|2|-1)$

$h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 10 Pkt.



In der obigen Grafik sind die Punkte E und F entsprechen den Kantenmitten.
Überprüfen Sie, ob sich die Geraden g und h sich schneiden.
Wenn ja, geben Sie den Schnittpunkt an!

Zunächst müssen wir die zwei Punkte E und F bestimmen.
Wir wissen, dass sie jeweils auf der Kantenmitte liegen. Wir erinnern uns, dass wir die Mitte zwischen zwei Punkten - oder auch die Mitte des Verbindungsvektors zwischen den beiden Punkten.
So ergibt sich

$E = \left(\frac{\overbrace{(3|4|0)}^{B}+(0|4|0)}{2}\right) = \boxed{(1,5|4|0)}$ $\qquad F = \frac{(0|4|0)+(0|4|2)}{2} = \boxed{(0|4|1)}$

Die Gerade g verläuft durch A und F und die Gerade h durch C und E. Somit benötigen wir also noch die entsprechenden Richtungsvektoren: $\vec{AF} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{CE} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Es steht nun weiterhin die Frage im Raum, ob sich g und h schneiden. Um diese zu beantworten setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

I	$3 - 3r = 1,5t$	$\Rightarrow t = 2 - 2r$
II	$4r = 4t$	$\Rightarrow r = t$
III	$r = 2 - 2t \xrightarrow{mitI}$	$r = 2 - 2(2 - 2r)$
		$r = 2 - 4 + 4r$
		$r = \frac{2}{3}$

Wegen II $\Rightarrow t = \frac{2}{3}$

Wir können also folgern, dass sich g und h schneiden.

Den dazugehörigen Schnittpunkt berechnen wir, indem wir die Werte für r und t in die entsprechenden Geradengleichungen einsetzen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} * \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt ist also $S(1\frac{8}{3}|\frac{2}{3})$.