Geradengleichung aufstellen

Aufgabe 1

(a) Geben Sie die Gerade durch $A(4|2|-1)$ und $B(10|-8|9)$ an.

Wir benötigen einen **Stützvektor**. Hierfür wählen wir den Ortsvektor zu einem der beiden Punkte. Der Richtungsvektor muss dann von unserem gewählten Punkt ausgehen.

Stützvektor: $\vec{0A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Die zugehörige Geradengleichung lautet:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Gerade mit dem **Richtungsvektor** $\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$ so, dass diese durch den Punkt $B(10|-8|9)$ verläuft.

Da wir den **Richtungsvektor** bereits gegeben haben, benötigen wir nur noch den **Stützvektor**. Für diesen verwenden wir den angegebenen Punkt. So ergibt sich die Geradengleichung:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(c) Geben Sie eine Gerade an, die durch den Punkt $C(4|0|1)$ geht und den **Stützvektor** $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ hat.

Da wir den Stützvektor gegeben haben, benötigen wir noch den **Richtungsvektor**. Dieser muss von dem Punkt ausgehen, der uns durch den Stützvektor gegeben ist. Somit gilt

$$\vec{SC} = \vec{B} - \vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die Geradengleichung $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Punktprüfung und weiterer Punkt auf einer Geraden

Aufgabe 2

(a) Gegeben ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

∘ Geben Sie zwei Punkte auf der Geraden an. Prüfen Sie zudem, ob die Punkte $P_1(7|9|1)$ und $P_2(3|1|0)$ auf g liegen.

Hierfür wählen wir für r zwei Werte.

$r = -2$	$r = 3$
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2) * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\underline{A(3\|1\|1)}$	$\underline{B(8\|11\|1)}$

Für die Punktprüfung setzen wir die Punkte mit der Geradengleichung gleich und prüfen, ob es eine Lösung gibt.

$P_1(7\|9\|1)$	$P_2(3\|1\|0)$
$\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
$7 = 5 + r \quad \| - 5$	$3 = 5 + r \quad \| - 3$
$9 = 5 + 2r \quad \| - 5$	$1 = 5 + 2r \quad \| - 5$
$1 = 1 + 0r$	$0 = 1 + 0r \quad ↯$
$2 = r$	
$4 = 2r \quad \| : 2 \qquad \Rightarrow r = 2$	
$1 = 1$ Wahre Aussage!	
Der Punkt P_1 liegt auf g.	Der Punkt P_2 liegt nicht auf g.

(b) Gegeben ist $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie einen Punkt auf der Geraden an.

Um einen Punkt zu bestimmen, wählen wir für r einen Werte.

$r = 2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\underline{A(2|5|2)}$

Grundlagen Vektorrechnung - Geradengleichung

Aufgabe 3

Das Dreieck ist gegeben durch die Punkte $A(2|0|3), B(1|-1|5)$ und $C(3|-2|0)$.

(a) Bestimmen Sie den Winkel im Punkt C.

Um den Winkel im Punkt C zu bestimmen, benötigen wir die von C ausgehenden Vektoren $\vec{CA}$ und $\vec{CB}$.

Zusätzlich benötigen wir die Länge der Vektoren.

$$\vec{CA} = \vec{A} - \vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Länge

$$\vec{CB} = \vec{B} - \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Länge

Mit der Umkehrfunktion

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}\right) = \left(\frac{a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} * \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right)$$

bestimmen wir den Winkel im Punkt C.

$$\arccos\left(\frac{(-1) * (-2) + 2 * 1 + 3 * 5}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} * \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2}}\right) = \arccos\left(\frac{19}{\sqrt{14} * \sqrt{30}}\right) = \underline{22{,}01^\circ}$$

(b)

Bitte beachten: Die im Unterricht angegebene Aufgabe war falsch (bzw. die Strecke lag nicht auf der Geraden g. Es folgt eine verbesserte Variante!)

Wir bezeichnen den Mittelpunkt zwischen A und B mit M. Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{MC}$ auf $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ liegt.

Zunächst bestimmen wir den Mittelpunkt zwischen den Punkten A und B. Hierfür betrachten wir jede Punktkoordinate einzeln.

$$M = (m_1|m_2|m_3) = \left(\frac{a_1+b_1}{2}|\frac{a_2+b_2}{2}|\frac{a_3+b_3}{2}\right) = (-1.5|1.5|4)$$

Da eine Strecke immer Teil einer Geraden ist, werden wir zur Lösung der Aufgabe zeigen, dass die Gerade h, welche durch die Punkte M und C verläuft, mit der Geraden g gleich ist.
Zunächst stellen wir also die Geradengleichung durch M und C auf.

Stützvektor $0\vec{M} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ 4 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor $\vec{MC} = \vec{C}\vec{M} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ -3.5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 4.5 \\ -3.5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Bleibt zu zeigen, dass die Geraden g und h gleich sind. Hierfür setzen wir $g = h$ und lösen das entstehende System.

I $\quad 12 - 9r = -1.5 + 4.5t$

II $\quad -9 + 7r = 1.5 + 3.5t$

III $\quad -8 + 8r = 4 - 4t \qquad | - 4 \,| : (-4)$

$\xrightarrow{(*)} t = 3 - 2r$

Wir setzen nun (*) in die Gleichungen I und II ein.

I* $\quad 12 - 9r = -1.5 + 4.5 * (3 - 2r)$

$\quad 12 - 9r = \underbrace{-1.5 + 13.5}_{12} - 9r \qquad | - 12| + 9r$

$\quad 0 = 0 \qquad \Rightarrow$ Wahre Aussage!

II* $\quad -9 + 7r = 1.5 + (-3.5) * (3 - 2r)$

$\quad -9 + 7r = \underbrace{1.5 - 10.5}_{-9} + 7r \qquad | + 9| - 7r$

$\quad 0 = 0 \qquad \Rightarrow$ Wahre Aussage!

Da wir nur wahre Aussasgen erhalten, wenn wir das Gleichungssystem lösen, können wir folgern, dass es **unendlich viele** Lösungen für das Gleichungssystem gibt, unsere Geraden also gleich.

Geraden so aufstellen, dass sie sich schneiden

Aufgabe 4

Gegeben ist die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie zwei verschiedene Geraden h_1 und h_2, die beide durch den Punkt $P(2|0|1)$ gehen und orthogonal zu g liegen.

Zunächst bestimmen wir den **Stützvektor** auf. Da sowohl h_1 als auch h_2 durch den Punkt $P(2|0|1)$ gehen sollen, wählen wir dessen Ortsvektor als Stützvektor.

$$\vec{p_1} = 0\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{p_2} = 0\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erinnern uns:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal ($\vec{a} \perp \vec{b}$), wenn ihr Skalarprodukt Null ist ($\vec{a} * \vec{b} = 0$).

Zwei Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{q} + t * \vec{v}$ sind orthogonal zueinander, wenn ihre Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal zueinander sind ($\vec{u} * \vec{v} = 0$).

Wir benötigen zur Lösung zwei **verschiedene** Richtungsvektoren.

Gesucht: Richtungsvektor $\vec{u}$, der orthogonal zu $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

$$\vec{u} * \vec{w} = u_1 * \underbrace{2}_{w_1} + u_2 * \underbrace{(-2)}_{w_2} + u_3 * \underbrace{1}_{w_3} = 0$$

$$\vec{u} * \vec{w} = 1 * \underbrace{2}_{w_1} + 1 * \underbrace{(-2)}_{w_2} + 0 * \underbrace{1}_{w_3} = 2 - 2 = 0$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Richtungsvektor $\vec{v}$, mit $\vec{v} \neq \vec{u}$ und der ist orthogonal zu $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{v} * \vec{w} = v_1 * \underbrace{2}_{w_1} + v_2 * \underbrace{(-2)}_{w_2} + v_3 * \underbrace{1}_{w_3} = 0$$

$$\vec{v} * \vec{w} = \frac{1}{2} * \underbrace{2}_{w_1} + 0 * \underbrace{(-2)}_{w_2} + (-1) * \underbrace{1}_{w_3} = 1 - 1 = 0$$

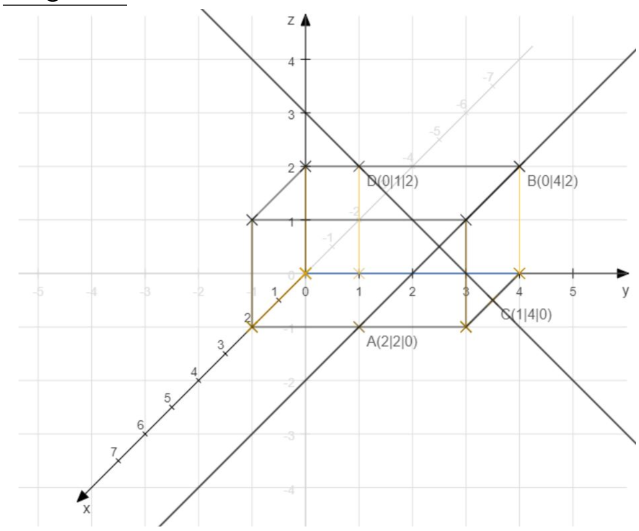
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir haben somit zwei verschiedene Richtungsvektoren und können die Geradengleichungen aufstellen:

$$h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lage von Geraden

Aufgabe 5



Frage: Schneiden sich die dargestellten Geraden?
Zunächst stellen wir die Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u}$ durch A und B; $h : \vec{x} = \vec{q} + t * \vec{v}$ durch C und D auf.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{D} - \vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da wir wissen wollen, ob sich die Geraden schneiden, setzen wir $g = h$.

I $\quad 2 - 2r = 1 - 1t \quad | -1 \,|: (-1)$

$\quad -1 + 2r = t$

II $\quad 2 + 2r = 4 - 3t$

(*) $\quad 0 + 2r = 0 + 2t \quad \Rightarrow r = t$

Wir setzen nun (*) zunächst in I ein.

I $\quad -1 + 2t = t \quad | -t \,| +1$

$\quad t = 1$

$\quad \Rightarrow r = 1$

Anschließend prüfen wir mit II, ob unsere errechneten Werte für r und t stimmen.

II $\quad 2 + 2 * 1 = 4 \neq 1 = 4 - 3 * 1 \quad ↯$

$\Rightarrow$ Wir erhalten einen Widerspruch. Die Geraden haben somit **<u>keinen</u>** Schnittpunkt.