Aufgabe 1

/ 1 + 4 + 6 + 4 = 15 Pkt.

Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = -6x^3 + 24x^2 - 30x + 12$

(a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge von f an.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

(b) Berechnen Sie die Nullstellen des Graphen.

Hierfür muss $f(x) = 0$

Also: $-6x^3 + 24x^2 - 30x + 12 = 0 \mid$ Nullstelle $x_1 = 1$ raten.

Wir müssen also eine Polynomdivision mit $(x - 1)$ durchführen.

$$\Big(-6x^3 + 24x^2 - 30x + 12\Big) : \Big(x - 1\Big) = -6x^2 + 18x - 12$$

$$\begin{array}{l}
\;\;6x^3 - 6x^2 \\
\hline
\qquad 18x^2 - 30x \\
\quad - 18x^2 + 18x \\
\hline
\qquad\qquad - 12x + 12 \\
\qquad\qquad\;\; 12x - 12 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Für das Ergebnis der Polynomdivision $-6x^2 + 18x - 12$ müssen wir nun noch die Nullstellen bestimmen. Also $-6x^2 + 18x - 12 = 0$. Um diese zu bestimmen, können wir die pq-Formel anwenden. Hierfür müssen wir zunächst den Koeffizienten -6 von x^2 eliminieren.

$$-6x^2 + 18x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 \underbrace{-3}_{p} x + \underbrace{2}_{q} = 0$$

Damit folgt:

$$x_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2} \qquad x_3 = \frac{3}{2} - \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2}$$

$$x_2 = 2 \qquad x_3 = 1$$

(c) Berechnen Sie die Extremstellen und die dazugehörigen Punkte von f.

Überprüfen Sie auch, um was für eine Extremstelle es sich handelt.

Wir bestimmen zunächst die Extremstellen - für diese gilt: $f'(x) = 0$. Wir benötigen also die

1. Ableitung.

$f'(x) = -18x^2 + 48x - 30$.

Wie eben erwähnt sind die Nullstellen der 1. Ableitung die Extremstellen der Ausgangsfunktion. Um die Nullstellen (mit pq-Formel) zu bestimmen, müssen wir den Koeffizienten -18 von x^2 wieder eliminieren.

$-18x^2 + 48x - 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 \underbrace{-\frac{8}{3}}_{p} x + \underbrace{\frac{5}{3}}_{q} = 0$

Damit folgt:

$x_2 = \frac{\frac{8}{3}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{-8}{3}}{2}\right)^2 - \frac{5}{3}}$

$x_2 = \frac{8}{6} + \sqrt{\left(\frac{-8}{6}\right)^2 - \frac{5}{3}}$

$\boxed{x_4 = \frac{5}{3}}$

$x_3 = \frac{\frac{8}{3}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{-8}{3}}{2}\right)^2 - \frac{5}{3}}$

$x_3 = \frac{8}{6} - \sqrt{\left(\frac{-8}{6}\right)^2 - \frac{5}{3}}$

$\boxed{x_5 = 1}$

Wir kennen die Extremstellen. Als nächstes müssen wir herausfinden, ob es sich um einen HOP oder TIP handelt. Dafür berechnen wir $f''(x_4)$ bzw. $f''(x_5)$.

Zunächst bestimmen wir die 2. Ableitung: $f''(x) = -36x + 48$.

$f''(x_4) = -12 < 0 \Rightarrow$ x_4 ist HOP .

$f''(x_5) = 12 > 0 \Rightarrow$ x_5 ist TIP

Bleibt noch der letzte Schritt. Wir bestimmen den entsprechenden Punkt. Dafür setzen wir x_4 bzw. x_5 in die Ausgangsfunktion $f(x)$ ein.

$f(x_4) = \frac{8}{9} \Rightarrow \boxed{HOP(\frac{5}{3}|\frac{8}{9})}$

$f(x_4) = 0 \Rightarrow \boxed{TIP(1|0)}$

(d) Untersuchen Sie die Funktion f auf Wendestellen. Geben Sie ebenfalls an, ob es sich um eine LR (Links-Rechts) oder eine RL (Rechts-Links) Wendestelle handelt. Geben Sie die entsprechenden Punkte an.

Für die Wendestelle einer Funktion gilt: x_W ist Wendestelle, wenn $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$.

Wir bestimmen also die Nullstellen der 2. Ableitung.

$f''(x) = -36x + 48 \Rightarrow -36x + 48 = 0 \mid +36x$

$48 = 36x \;|: 36$

$x_6 = \frac{4}{3}$.

Nun kennen wir die Wendestelle. Da wir auch die Art der Wendestelle angeben können, tun wir dies. Hierfür benötigen wir die 3. Ableitung. Es gilt:

Ist x_W eine Wendestelle. Dann können wir mit der 3.Ableitung sagen:

$f'''(x_W) < 0 \Rightarrow x_w$ ist LR-Wendestelle.

$f'''(x_W) > 0 \Rightarrow x_w$ ist RL-Wendestelle.

$f'''(x) = -36$ also immer < 0, egal welchen x-Wert man einsetzt.

$\Rightarrow f'''(x_6) < 0 \Rightarrow$ x_6 ist eine LR-Wendestelle .

Der Punkt hat die folgenden Koordinaten:

$f(x_6) = \frac{4}{9} \Rightarrow$ $W_{LR}(\frac{4}{3}|\frac{4}{9})$.

Aufgabe 2 $/ \; 2 + 2 + 2 + 2 = 8$ Pkt.

Erläutern Sie, welche Aussagen über eine Funktion $f(x)$ anhand der gegebenen Bedingungen möglich sind.

(a) $f'(5) = 0, f''(5) < 0$

$f(x)$ hat bei $x = 5$ eine Extremstelle, genauer einen Hochpunkt (HOP).

(b) $f(\frac{3}{4}) = 0, \; f'(2) = 0, \; f''(2) = 0, \; f'''(2) \neq 0$

$x = \frac{3}{4}$ ist eine Nullstelle von $f(x)$. Zudem ist $x = 2$ eine Sattelstelle der Funktion.

(c) $f'(0,5) = 0, f''(3) = 0$

$f(x)$ besitzt eine Extremstelle bei $x = 0,5$.

(d) $f'(4) = 0, f''(4) > 0$

Wir wissen, dass $x = 4$ eine Extremstelle, genauer ein Tiefpunkt (TIP), der Funktion $f(x)$ ist.

Aufgabe 3 $/ \; 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ Pkt.

Geben Sie für die angegebenen Eigenschaften einer Funktion f jeweils die zugehörigen Bedingungen an, die erfüllt sein müssen.

(a) $x_E = 2,5$ ist ein Extrempunkt.

$f'(2,5) = 0$

(b) Die Funktion hat bei $x_N = -\frac{1}{7}$ eine Nullstelle.

$f(-\frac{1}{7}) = 0$

(c) An der Stelle $x_{HOP} = -3$ hat f ein relatives Maximum (Hochpunkt). Bei $x_{TIP} = 4$ wird dann das relative Minimum (Tiefpunkt) erreicht.

$f'(-3) = 0; f''(-3) < 0$

$f'(4) = 0; f''(4) > 0$

(d) Die Wendestelle von f befindet sich bei $x_W = 0,75$. Es handelt sich um eine L-R-Wendestelle.

$f''(0,75) = 0; f'''(0,75) < 0$

(e) $x_{TIP-W} = \frac{3}{5}$ ist sowohl Tief- als auch Wendepunkt.

Diese Aufgabe wurde nicht gewertet, da sie fehlerhaft formuliert wurde.

$f'(\frac{3}{5}) = 0$ und $f''(\frac{3}{5}) > 0$ für Tiefpunkt. Aber $f''(\frac{3}{5}) = 0$ für Wendestelle.

Diese Eigentschaften könnten so <u>nie</u> gleichzeitig auftreten.

Aufgabe 4 / (2 + 2 + 2 + 2) + (2 + 2 + 2 + 2) = 16 Pkt.

Erläutern Sie, welche Bedingungen für eine Funktion f erfüllt sein müssen, damit diese an der Stelle x die folgende Eigenschaft hat.

(1.) (a) eine Nullstelle
$f(x) = 0$

(b) eine Extremstelle (im Allgemeinen)
$f'(x) = 0$

(c) eine Wendestelle (im Allgemeinen)
$f''(x) = 0$

(d) eine Sattelstelle
$f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$, außerdem $f'''(x) \neq 0$

(2.) (a) x ist ein Hochpunkt
$f(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

(b) x ist ein Tiefpunkt
$f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$

(c) x ist eine LR-Wendestelle
$f''(x) = 0$ und $f'''(x) < 0$

(d) x ist eine RL-Wendestelle
$f''(x) = 0$ und $f'''(x) > 0$

Aufgabe 5 / 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 10 = 21 Pkt.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -0,8x^4 - 2x^3 + 5x^2$
Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch.
Skizzieren Sie den Funktionsgraphen in das vorgegebene Koordinatensystem.
Benennen Sie die Punkte entsprechend (z.B. HOP, TIP, WP_{LR}, WP_{RL} usw.).
Wir übertragen die berechneten Punkte in das Koordinatensystem und benennen diese entsprechend.

1. Definitions- und Wertebereich
   Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
   Wertebereich: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

2. Ableitungen bestimmen ($f'(x), f''(x)$ und $f'''(x)$)

$$\begin{aligned} f(x) &= -0,8x^4 - 2x^3 + 5x^2 \\ f'(x) &= -3,2x^3 - 6x^2 + 10x \\ f''(x) &= -9,6x^2 - 12x + 10 \\ f'''(x) &= -19,2x - 12 \end{aligned}$$

3. Symmetrien Die Funktion besitzt sowohl gerade als auch ungerade Exponenten $\Rightarrow$
   Keine Symmetrien

4. Verhalten für große x-Werte
   $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$
   $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

5. Nullstellen $(f(x) = 0)$
   $0 = -0,8x^4 - 2x^3 + 5x^2 \Leftrightarrow 0 = x^2(-0,8x^2 - 2x + 5)$
   $x_1 = x_2 = 0$
   Nun müssen wir noch die Nullstellen von $0 = (-0,8x^2 - 2x + 5)$ bestimmen. Hierfür werden wir die pq-Formel an. Zunächst muss unsere Gleichung aber in die richtige Form bringen.
   $0 = -0,8x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow 0 = x^2 + \underbrace{\frac{5}{2}}_{p} x \underbrace{- \frac{25}{4}}_{q}$

   $x_3 = \frac{\frac{5}{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}}$

   $x_3 = \frac{5}{4} + \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{4}}$

   $x_3 = \frac{5+\sqrt{125}}{4}$

   $x_4 = \frac{\frac{5}{2}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}}$

   $x_4 = \frac{5}{4} - \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{4}}$

   $x_4 = \frac{5-\sqrt{125}}{4}$

6. Extremstellen $(f'(x) = 0)$
   $-3,2x^3 - 6x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow x(-3,2x^2 - 6x + 10) = 0$
   $\Rightarrow x_5 = 0$
   Um die weiteren Extremstellen (mit pq-Formel) zu bestimmen, bringen wir die Gleichung in die korrekte Form. $-3,2x^2 - 6x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \underbrace{\frac{15}{8}}_{p} x \underbrace{- \frac{25}{8}}_{q}$

   Damit folgt:

   $x_6 = -\frac{\frac{15}{8}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{15}{8}}{2}\right)^2 + \frac{25}{8}}$

   $x_6 = -\frac{15}{16} + \sqrt{\left(\frac{15}{16}\right)^2 + \frac{25}{8}}$

   $x_6 = \frac{-15+5*\sqrt{41}}{16} = 1,06$

   $x_7 = -\frac{\frac{15}{8}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{15}{8}}{2}\right)^2 + \frac{25}{8}}$

   $x_7 = -\frac{15}{16} - \sqrt{\left(\frac{15}{16}\right)^2 + \frac{25}{8}}$

   $x_7 = \frac{-15-5*\sqrt{41}}{16} = -2,94$

   Bleibt noch zu sagen, ob es sich jeweils um einen HOP oder TIP handelt. Dafür bestimmen wir $f''(x_5), f''(x_6)$ und $f''(x_7)$.
   $f''(x_5) = 10 > 0 \Rightarrow x_5$ ist TIP.
   $f''(x_6) = -13,62 < 0 \Rightarrow x_6$ ist HOP.
   $f''(x_7) = -37,63 < 0 \Rightarrow x_7$ ist HOP.

   Zuletzt müssen wir noch die Punkte berechnen. Wir setzen also x_5, x_6 und x_7 in $f(x)$ ein.
   $f(x_5) = 0 \Rightarrow TIP(0|0)$

$f(x_6) = 2,23 \Rightarrow$ $HOP_1(\frac{-15+5*\sqrt{41}}{16}|2,23)$

$f(x_7) = 34,27 \Rightarrow$ $HOP_2(\frac{-15-5*\sqrt{41}}{16}|34,27)$

7. Wendestellen ($f''(x) = 0$)

   Wir können wieder die pq-Formel anwenden, müssen dafür aber die Gleichung in die richtige Form bringen.

   $-9,6x^2 - 12x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \underbrace{\frac{5}{4}}_{p} x \underbrace{- \frac{25}{24}}_{q} = 0$

   Damit ergibt sich dann:

   $x_8 = -\frac{\frac{5}{4}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{5}{4}}{2}\right)^2 + \frac{25}{24}}$

   $x_8 = -\frac{\frac{5}{4}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{5}{4}}{2}\right)^2 + \frac{25}{24}}$

   $x_8 = \frac{-15+5*\sqrt{33}}{24} = 0,57$

   $x_9 = -\frac{\frac{5}{4}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{5}{4}}{2}\right)^2 + \frac{25}{24}}$

   $x_9 = -\frac{5}{8} - \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \frac{25}{24}}$

   $x_9 = \frac{-15-5*\sqrt{33}}{24} = -1,82$

   Als nächstes bestimmen wir, ob es sich um eine LR- oder eine RL-Wendestelle handelt. Dafür setzen wir x_8 bzw. x_9 in $f'''(x)$ ein.

   $f'''(x_8) = -22,94 < 0 \Rightarrow x_8$ ist LR-Wendestelle.

   $f'''(x_9) = 23,14 > 0 \Rightarrow x_9$ ist eine RL-Wendestelle.

   Nun benötigen wir noch die Koordinaten der entsprechenden Punkte. Dafür setzen wir x_8 bzw. x_9 in die Ausgangsfunktion $f(x)$ ein.

   $f(x_8) = 1,18 \Rightarrow$ $W_{LR}(\frac{-15+5*\sqrt{33}}{24}|1,18)$

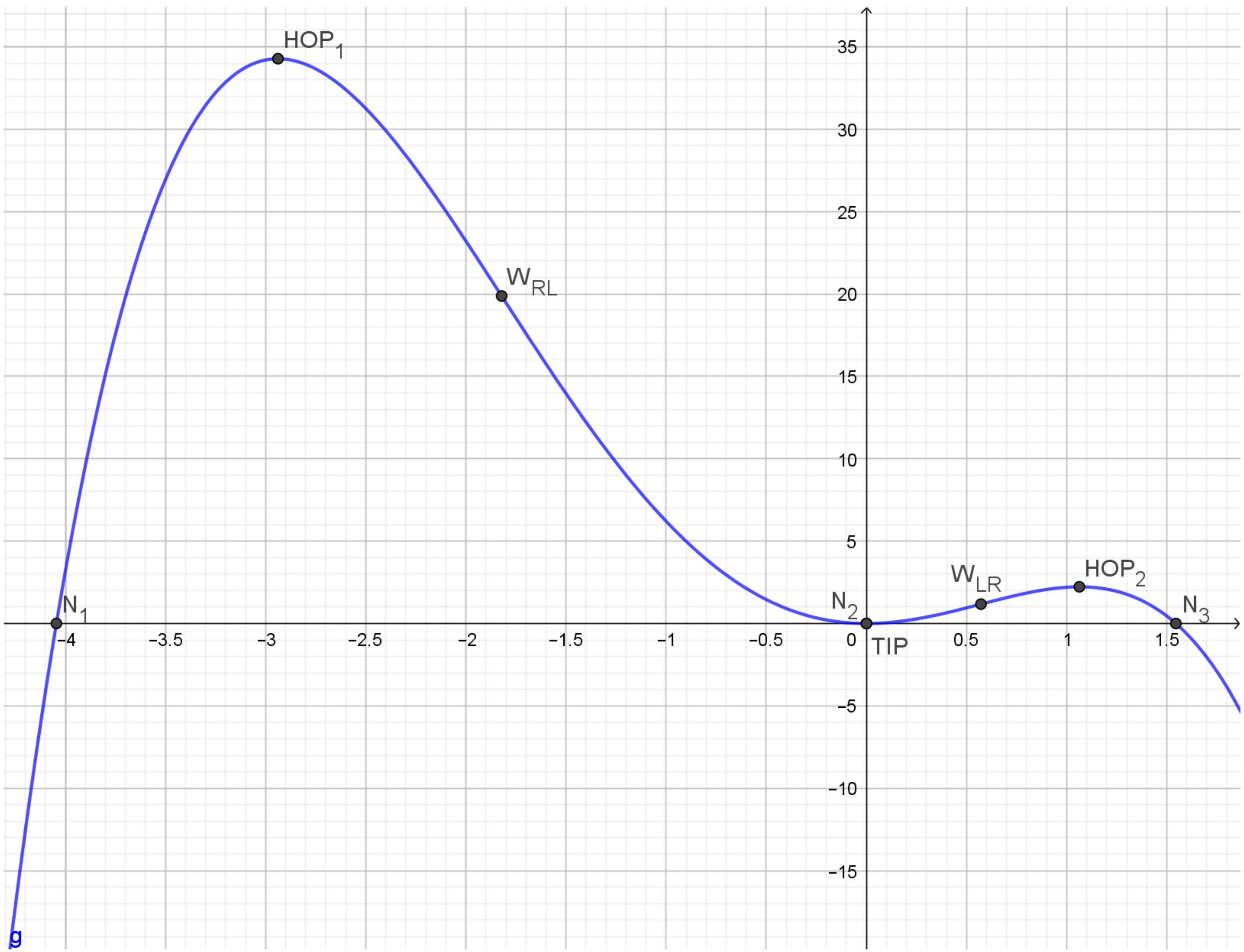
   $f(x_9) = 19,88 \Rightarrow$ $W_{RL}(\frac{-15-5*\sqrt{33}}{24}|19,88)$

Zunächst übertragen wir alle berechneten Punkte in das Koordinatensystem.

Im Anschluss nutzen wir unser Wissen über das Verhalten der Funktion für große x-Werte und skizzieren, wo der Graph herkommt bzw. wo er hingeht.

An den Extrempunkten wissen wir, dass es in der näheren Umgebung der höchste bzw. tiefste Punkte ist. Also ähnelt unser Graph an Hochpunkten einer nach unten geöffneten Parabel und an Tiefpunkten einer nach oben geöffnete Parabel.

An den Wendpunkten müssen wir das Krümmungsverhalten des Graphen ändern.


HOP1
W_RL
N1
N2
TIP
W_LR
HOP2
N3
g
35
30
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−4
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5