

1 Schaltfunktionen und Booleschen Funktionen

Wir wollen die Frage diskutieren, wie sich ein Rechner oder genauer die Elemente eines Rechners Verhalten.

Dabei hängt die Art, wie der Output vom Input bestimmt wird, offensichtlich vom Aufbau des Rechners ab; ferner gilt, ein Rechner arbeitet *deterministisch*, d.h. er reagiert in **eindeutiger Weise** auf einen bestimmten Input.

Unter der Annahme, dass Input und Output aus Daten bzw. Dualfolgen bestehen, lässt sich folgende Definition aufstellen:

Definition D1.1

Sind $n, m \in \mathbb{N}$. Dann heißt $\mathcal{F} : B^n \rightarrow B^m$ **Schaltfunktion**.

Input für einen Rechner ist also ein Bit- n -Tupel. Der Output einer solchen Schaltfunktion (\mathcal{F}) ist dann wieder ein Bit- m -Tupel.

Hat eine solche Funktion lediglich eine Bit-Ausgabe (also $n = 1$), so wird die Funktion mit f bezeichnet. Dieser Unterscheidung liegt ein wichtiger Spezialfall zugrunde, der wie folgt definiert ist:

Definition D1.2

Eine Schaltfunktion $f : B^n \rightarrow B$ heißt (n -stellige) **Boolesche Funktion**.

Man merke sich also, eine Schaltfunktion $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ ist die n -stellige Verkettung einzelner *Boolescher Funktionen* f_i .

1.1 Einschlägiger Index

Betrachten wir die nachfolgende Funktionstabelle zu $f : B^3 \rightarrow B$

i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Mit i bezeichnen wir die Zeilennummer und mit $i_1 \dots i_n$ bezeichnen wir die Ziffernfolge der Dualdarstellung von i .

Definition D1.3

i heißt *einschlägiger* Index zu f , falls $f(i_1, \dots, i_n) = 1$ ist.

1.2 Minterm

Für die Belegung der i -ten Zeile dieser Funktionstabelle

Definition D1.4

Sei i ein Index von $f : B^n \rightarrow B$ und $(i_1 \dots i_n)$ die Dualdarstellung von i . Dann heißt die Funktion $m_i : B^n \rightarrow B$ definiert durch

$$m_i(x_1, \dots, x_n) := x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$$

i -ter **Minterm** von f . Dabei gilt

$$x_j^{i_j} = \begin{cases} x_j & i_j = 1 \\ \bar{x}_j & i_j = 0 \end{cases}$$

Ihre Aufgabe

Bestimmen Sie die Minterme für die oben angegebene Funktionstabelle.

Hinweis: Die *einschlägigen* Indizes sind 3, 5 und 7.

1.3 Sum Of Products (SOP)

Mit Hilfe der oben genannten Minterme können wir eine Boolesche Funktion nun wie folgt beschreiben:

Satz S1.1

Jede Boolesche Funktion $f : B^n \rightarrow B$ ist eindeutig darstellbar als Summer der Minterme ihrer einschlägigen Indizes. Ist $I \subseteq \{0, \dots, 2^n - 1\}$ die Menge der einschlägigen Indizes von f , so gilt

$$f = \sum_{i \in I} m_i$$

Die hier angegebene Darstellung heißt auch *disjunktive Normalform* (DNF) einer Booleschen Funktion.

Ihre Aufgabe

Geben Sie zu oben genannter Funktion die SOP an.

1.4 Maxterme

Eine alternative Darstellung der eben erwähnten DNF benötigt ein anderes Konstrukt.

Definition D1.5

Sei i ein Index von $f : B^n \rightarrow B$, und sei m_i der i -te Minterm von f . Dann heißt die Funktion $M_i : B^n \rightarrow B$ definiert durch

$$M_i(x_1, \dots, x_n) := \overline{m_i(x_1, \dots, x_n)}$$

i -ter *Maxterm* von f .

Mit dieser Definition lässt sich in Anlehnung an die Definition der Minterme folgendes festhalten: Ein Maxterm M_i nimmt genau dann den Wert 0 an, wenn das Argument (x_1, \dots, x_n) die Dualdarstellung von i ist.

Ihre Aufgabe

Bestimmen Sie die Maxterme für die oben angegebene Funktionstabelle.

Hinweis: Die *nicht einschlägigen* Indizes sind 0, 1, 2, 4 und 6.

1.5 Product Of Sums (POS)

Mit dieser Feststellung lässt sich für eine Boolesche Funktion folgendes sagen:

Satz S1.2 Jede Boolesche Funktion $f : B^n \rightarrow B$ ist eindeutig darstellbar als das Produkt der Maxterme ihrer nicht einschlägigen Indizes.

Die hier genannte Darstellung wird auch *konjunktive Normalform* (KNF) von f genannt.

Ihre Aufgabe

Geben Sie zur oben dargestellten Funktion die POS an.

1.6 Overview

Offensichtlich ist die DNF zu bevorzugen, wenn die Anzahl der einschlägigen Indizes kleiner ist als die Anzahl der nicht einschlägigen; Ansonsten verwenden Sie die KNF.