

Aufgabe 1

/ 4 Pkt.

(a) Geben Sie die Ebene in Parameterform an. (Allgemein)

Markieren Sie auch *Stütz-* und *Spannvektoren*.

$$E : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{\text{Spannvektor}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\text{Spannvektor}}$$

(b) Wie sieht eine Ebene in Koordinatenform aus? (Allgemein)

$$E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

Aufgabe 2

/ 6 Pkt.

Überführen Sie die Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ in die Koordinatenform.

Wir stellen das Gleichungssystem auf:

$$\text{I} \quad x_1 = 1 - 5r + 3s$$

$$\text{II} \quad x_2 = 2 + 3r - 5s$$

$$\text{III} \quad x_3 = 3 - r + 4s$$

Es gibt zwei Möglichkeiten dies in die Koordinatenform zu überführen. Zunächst gehen wir mit dem Gauß-Algorithmus vor.

Wir möchten also die Dreiecksform auf der rechten Seite des Gleichzeichens erhalten.

$$3 * \text{III} + \text{II}$$

$$\text{I} \quad x_1 = 1 - 5r + 3s$$

$$\text{II} \quad x_2 = 2 + 3r - 5s$$

$$\text{III}' \quad x_2 + 3x_3 = 11 + 7s$$

$$5\text{II} + 3\text{I}$$

$$\text{I} \quad x_1 = 1 - 5r + 3s$$

$$\text{II}' \quad 3x_1 + 5x_2 = 13 - 16s$$

$$\text{III}' \quad x_2 + 3x_3 = 11 + 7s$$

$$16\text{III}' + 7\text{II}'$$

$$\text{I} \quad x_1 = 1 - 5r + 3s$$

$$\text{II}' \quad 3x_1 + 5x_2 = 13 - 16s$$

$$\text{III}'' \quad 21x_1 + 51x_2 + 48x_3 = 267$$

Wir sehen, dass III' bereits die Koordinatenform hat.

$$E : 21x_1 + 51x_2 + 48x_3 = 267 \Leftrightarrow E : 7x_1 + 17x_2 + 16x_3 = 89$$

Die alternative Vorgehensweise ist das Umformen nach r bzw. s und anschließende einsetzen.

$$I \quad x_1 = 1 - 5r + 3s$$

$$II \quad x_2 = 2 + 3r - 5s$$

$$III \quad x_3 = 3 - r + 4s \quad | -x_3; +r \Rightarrow r = 3 + 4s - x_3$$

r in II einsetzen

$$II' \quad x_2 = 2 + 3 \underbrace{(3 + 4s - x_3)}_r - 5s$$

$$x_2 = 2 + 9 + 12s - 3x_3 - 5s$$

$$x_2 = 11 + 7s - 3x_3 \quad | +3x_3; -11$$

$$x_2 + 3x_3 - 11 = 7s \quad | :7$$

$$\frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3 - \frac{11}{7} = s$$

Da in $r = 3 + 4s - x_3$ noch ein s vorkommt, müssen wir s zunächst hier einsetzen.

$$r = 3 + 4 \underbrace{\left(\frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3 - \frac{11}{7} \right)}_s - x_3 = 3 + \frac{4}{7}x_2 + \frac{12}{7}x_3 - \frac{44}{7} - x_3$$

$$\Rightarrow r = -\frac{23}{7} + \frac{4}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_3$$

Jetzt können wir r und s in I einsetzen!

$$I' \quad x_1 = 1 - 5 \underbrace{\left(-\frac{23}{7} + \frac{4}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_3 \right)}_r + 3 \underbrace{\left(\frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3 - \frac{11}{7} \right)}_s$$

$$x_1 = 1 + \underbrace{\frac{115}{7} - \frac{20}{7}x_2 - \frac{25}{7}x_3}_{-5r} + \underbrace{\frac{3}{7}x_2 + \frac{9}{7}x_3 - \frac{33}{7}}_{3s}$$

$$x_1 = \frac{89}{7} - \frac{17}{7}x_2 - \frac{16}{7}x_3$$

Es ergibt sich also:

$$E : x_1 + \frac{17}{7}x_2 + \frac{16}{7}x_3 = \frac{89}{7} \Leftrightarrow E : 7x_1 + 17x_2 + 16x_3 = 89$$

Aufgabe 3

/ 5 + (2) Pkt.

Gegeben ist die Ebene $E : 7x_1 + 17x_2 + 16x_3 = 89$.

Geben Sie die Parameterform der Ebene E an.

Wir formen nach einer der Koordinaten um!

$$E : 7x_1 + 17x_2 + 16x_3 = 89 \quad | -17x_2; -16x_3$$

$$7x_1 = 89 - 17x_2 - 16x_3 \quad | :7$$

$$x_1 = \frac{89}{7} - \frac{17}{7}x_2 - \frac{16}{7}x_3$$

Damit haben wir eine der drei Gleichungen, die uns durch die Parameterform gegeben ist. Es fehlen also noch die anderen zwei.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{89}{7} - \frac{17}{7} x_2 - \frac{16}{7} x_3 \\ x_2 &= 0 + 1 x_2 + 0 x_3 \\ x_3 &= \underbrace{0}_{\vec{p}} + \underbrace{0}_{\vec{u}} \underbrace{x_2}_s + \underbrace{1}_{\vec{v}} \underbrace{x_3}_t \end{aligned}$$

Damit haben wir alle Vektoreintragungen für die Parametergleichung. Es folgt:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{89}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{-17}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{-16}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(*) Prüfen Sie außerdem, ob $A(\underbrace{7}_{x_1} | \underbrace{-8}_{x_2} | \underbrace{11}_{x_3})$ bzw. $B(\underbrace{-6}_{x_1} | \underbrace{1}_{x_2} | \underbrace{-4}_{x_3})$ Punkte auf E sind.

Um dies zu prüfen, setzen wir die durch die Koordinaten gegebenen Punkte in die Koordinatengleichung $E : 7x_1 + 17x_2 + 16x_3 = 89$ ein und prüfen, ob die Gleichung erfüllt ist.

$A(7 -8 11)$	$B(-6 1 -4)$
$7 * 7 + 17 * (-8) + 16 * 11 = 89$	$7 * (-6) + 17 * 1 + 16 * (-4) = -89 \neq 89$
$\Rightarrow A$ liegt auf E .	$\Rightarrow B$ liegt <u>nicht</u> auf E .