bbs.eins.mainz Berufsbildende Schule Technik	4. Klassenarbeit Mathematik	Name: Musterlösung Datum:
HBF IT 18A - A	____ von ____ Punkten erreicht: ____%	**Note:**

Allgemeines

- Bei der Bearbeitung ist ein **nachvollziehbarer, vollständiger Rechenweg** aufzuschreiben.
- Die Bewertung der Klassenarbeit ist nur bei **gut lesbarer Schrift** möglich.
- Die Lösungen müssen mit dokumentenechten Stift (**Kugelschreiber** oder **Fine-Liner** - keine rote Mine) erstellt werden.
- Runden Sie ihre Ergebnisse auf **2 Nachkommastellen**. Wurzelausdrücke müssen nicht berechnet werden (z.B. $\sqrt{10}$).

- **Zugelassene Hilfsmittel**: Taschenrechner (nicht graphikfähig / programmierbar)
- **Bearbeitungszeit**: 90 Minuten

Aufgabe 1

/ **40 Pkt.**

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1,5$$

Ableitungen
$f'(x)$
$f''(x)$
$f'''(x)$

a) Symmetrieeigenschaften (mit kurzer Begründung)s (1)

b) Achsenabschnittspunkte (Nullstellen, Schnittpunkt mit y-Achse) (21)

c) Globalverlauf (Verhalten für große x-Beträge) mit Skizze (2)

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} ?$ und $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} ?$

d) Extrempunkte (notwendige und hinreichende Bedingung) (11)

e) Wendepunkte (notwendige und hinreichende Bedingung), eventuell vorliegender Sattelpunkt. (8)

f) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion mit Hilfe der charakteristischen Punkte. (4)
Nutzen Sie zudem eine Wertetabelle im Bereich $-3 \leq x \leq 3$.

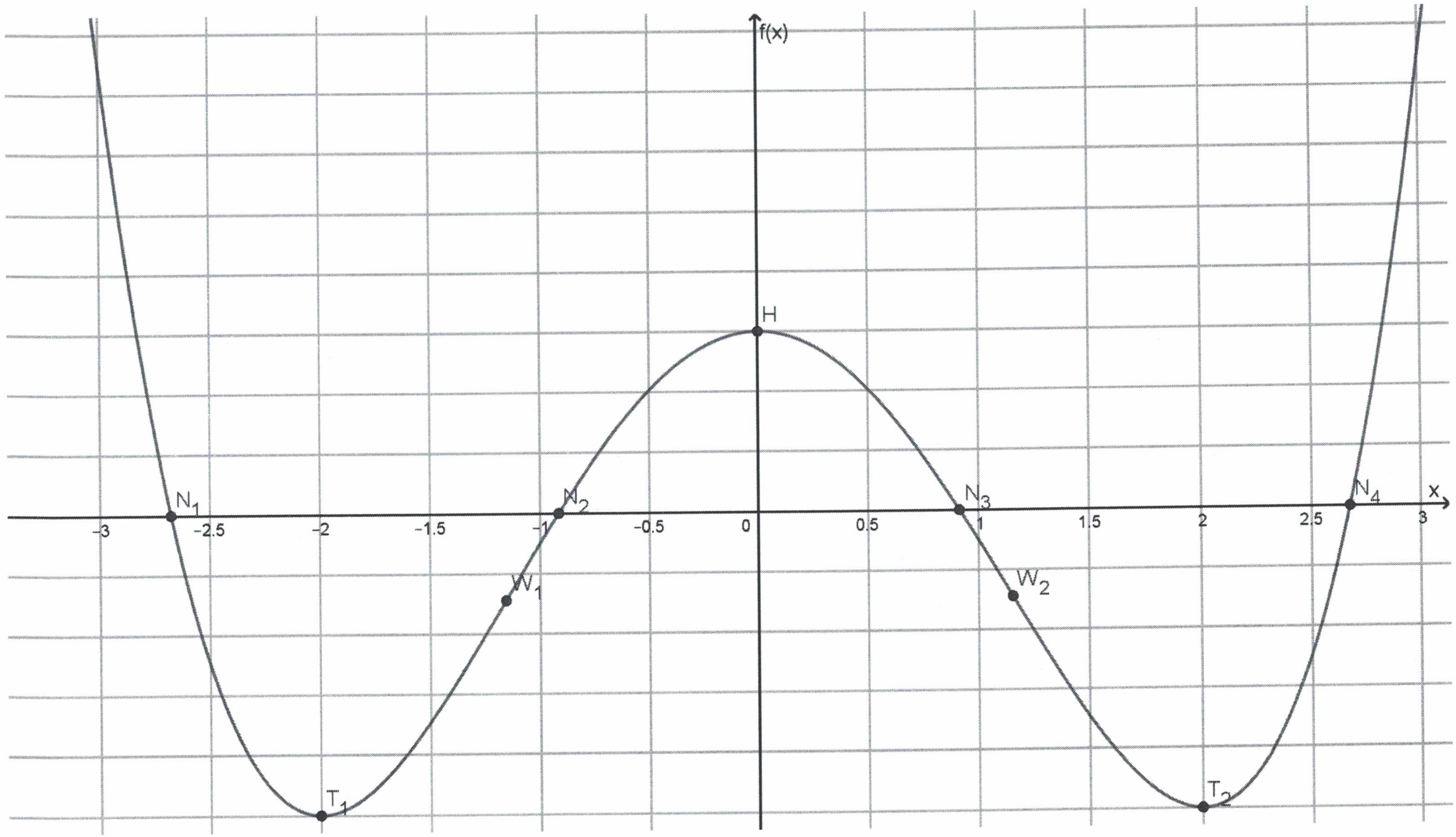
Skalieren Sie das Koordinatensystem entsprechend.

g) Untersuchen Sie die Funktion auf ihr Krümmungsverhalten (rechts- bzw. linksgekrümmt).
Markieren Sie die Intervalle in ihrer Zeichnung. (3)

Zusatzaufgabe

/ **4 Pkt.**

Bestimmen Sie die Funktion der Wendetangente im Wendepunkt $WP(1,15|-0,72)$.

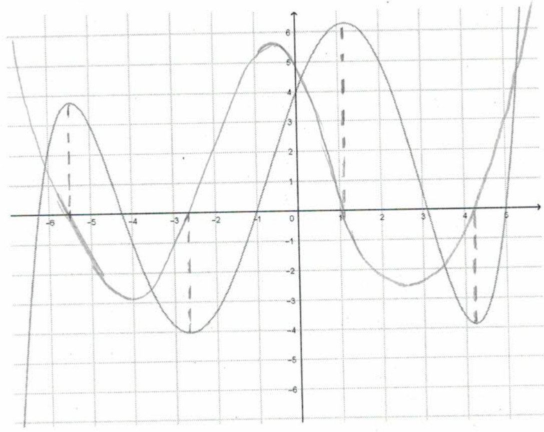

f(x)
x
H
N_1
N_2
N_3
N_4
T_1
T_2
W_1
W_2
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Aufgabe 2

/ 8 Pkt.

a) Geben Sie anhand des Graphen möglichst große Intervalle an, in denen dargestellte Funktion rechts- bzw. linksgekrümmt ist. (4)

b) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion $f'(x)$ in das nebenstehende Koordinatensystem. (4)



A

Aufgabe 1

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1,5$

a) Achsensymmetrisch, da alle Exponenten gerade sind. (1)

b) y-AAS: $f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 1,5 = 1,5$ (0,5)

$S_y(0 \mid 1,5)$ (0,5)

Nullstellen: $f(x) = 0$

$0 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1,5$ Substitution: $z = x^2$

$0 = \frac{1}{4}z^2 - 2z + 1,5 \quad | \cdot 4$ (2)

$0 = z^2 \underbrace{-8}_{p}z \underbrace{+6}_{q} \quad$ | pq-Formel

$z_{1/2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 6} = 4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 6} = 4 \pm \sqrt{16-6}$

$z_{1/2} = 4 \pm \sqrt{10}$

(2)

$z_1 = 4 + \sqrt{10} \approx 7,16$

$z_2 = 4 - \sqrt{10} \approx 0,84$

Rücksubstitution: $x^2 = z$ (2)

$x^2 = 7,16 \quad | \sqrt{}$

$x^2 = 0,84 \quad | \sqrt{}$

$x_1 = -2,68 \quad x_2 = 2,68$ (1)

$x_3 = -0,92 \quad x_4 = 0,92$ (1)

$N_1(-2,68 \mid 0)$ (0,5) $\quad N_2(2,68 \mid 0)$ (0,5) $\quad N_3(-0,92 \mid 0)$ (0,5) $\quad N_4(0,92 \mid 0)$ (0,5)

c) $a_n x^n = \frac{1}{4}x^4$

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$ (0,5) (0,5) (0,5)

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$ (0,5)

d) $f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2-4)$ (1) $f''(x) = 3x^2\ 4$ (1)

Extremstelle: $f'(x) = 0$ notwendige Bedingung

$0 = x(x^2-4) \quad \Rightarrow x_5 = 0$ (1)

$0 = x^2 - 4 \quad | +4$ (2)

$4 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$

$x_6 = -2$ (1) $x_7 = 2$ (1)

$f''(x_E) \neq 0$ hinreichende Bedingung

$f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 \to$ HOP

$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8 > 0 \to$ TIP (1,5)

$f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 > 0 \to$ TIP

Punkte? $f(x_E) = y$

$f(0) = 1,5$

$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 1,5 = -2,5$ (1)

$f(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 1,5 = -2,5$

$H(0|1,5)$ (0,5) $T_1(-2|-2,5)$ (0,5) $T_2(2|-2,5)$ (0,5)

e) Wendestelle : $f''(x) = 0$ notwendige Bedingung

$f''(x) = 3x^2 - 4$ $\qquad$ $f'''(x) = 6x$ (1)

$0 = 3x^2 - 4 \quad | +4$

$4 = 3x^2 \quad | :3$

$x^2 = \frac{4}{3} \quad | \sqrt{\ }$ $\qquad$ (2)

$x_8 = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (1) $\qquad$ $x_9 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ (1)

$f'''(x_W) \neq 0$ hinreichende Bedingung

$f'''(\sqrt{\frac{4}{3}}) = 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} > 0 \rightarrow$ RL

$f'''(-\sqrt{\frac{4}{3}}) = 6 \cdot (-\sqrt{\frac{4}{3}}) < 0 \rightarrow$ LR $\qquad$ (1)

Punkte?

$f(\sqrt{\frac{4}{3}}) = \frac{1}{4}(\sqrt{\frac{4}{3}})^4 - 2 \cdot (\sqrt{\frac{4}{3}})^2 + 1{,}5 = -0{,}72$

$f(-\sqrt{\frac{4}{3}}) = \frac{1}{4}(-\sqrt{\frac{4}{3}})^4 - 2 \cdot (-\sqrt{\frac{4}{3}})^2 + 1{,}5 = -0{,}72$ $\qquad$ (1)

$W_1(-\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -0{,}72)$ (0,5) $\qquad$ $W_2(\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -0{,}72)$ (0,5)

g) linksgekrümmt auf $[-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}]$ (1)

rechtsgekrümmt auf $[-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}]$ (1)

linksgekrümmt auf $[\sqrt{\frac{4}{3}}, \infty]$ (1)

Zusatzaufgabe

$W(1{,}15 \mid -0{,}72)$

Gesucht: Wendetangente $y_w = mx + b$

Lösung $m \mathrel{\hat{=}} \text{Steigung} \mathrel{\hat{=}} f'(x_w)$

$$f'(1{,}15) = (1{,}15)^3 - 4 \cdot (1{,}15)$$

$$= -3{,}08 \qquad (1)$$

$$y_w = f(1{,}15) = -0{,}72$$

$$\Rightarrow -0{,}72 = -3{,}08 \cdot 1{,}15 + b \qquad (1{,}5)$$

$$\Leftrightarrow -0{,}72 = -3{,}54 + b \quad \mid +3{,}54$$

$$\Leftrightarrow b = 2{,}82$$

$$\Rightarrow y_4 = -3{,}08x + 2{,}82 \qquad (1{,}5)$$

Aufgabe 2

a) rechtsgekrümmt $[-\infty; -4]$

linksgekrümmt $[-4; -0{,}5]$

rechtsgekrümmt $[-0{,}5; 2{,}5]$

linksgekrümmt $[2{,}5; \infty]$