

6 Ganzrationale Funktionen

Spricht man von **ganzrationalen Funktionen**, meint man immer eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 x^0$$

Dabei besteht jeder Summand aus $a_n \cdot x^n$ und n ist eine natürliche Zahle, also $n \in \mathbb{N}$.

Vorsicht!

In einer ganzrationalen Funktion müssen nicht alle Exponenten bis Null (0) vorkommen.

6.1 Begrifflichkeiten

Grad

Als **Grad n** einer Funktion bezeichnet man den größten vorkommenden Exponenten.

Beispiel: $f(x) = 3x^4 + 5x^2 - 3$

Diese Funktion hat den Grad $n = 4$. Wegen $3x^4$.

Koeffizient

Mit dem Begriff **Koeffizient** a_n bezeichnet man immer den **Faktor vor** dem x^n .

Beispiel: $f(x) = -4x^3 + 3x^1 - 1 \cdot x^0$ hat die Koeffizienten: $a_3 = -4$; $a_1 = 3$; $a_0 = -1$

$f(x) = 2x^4 + 1x^3 - 4x^1$ hat die Koeffizienten $a_4 = 2$; $a_3 = 1$; $a_1 = -4$.

Charakteristischer Summand

Bei einer ganzrationalen Funktion bezeichnet man den Summanden, der den größten Exponenten hat, als **charakteristischen Summanden**.

Beispiel: Wir betrachten die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 3x^2 - 6x$.

Der charakteristische Summand ist $-\frac{1}{3}x^4$. Setzt sich also zusammen aus dem x -Term und seinem Koeffizienten.

Absolutglied

Im Polynom einer ganzrationalen Funktion bezeichnet der Koeffizient a_0 das **Absolutglied**.

An ihm kann auch der *y-Achsenabschnitt* einer ganzrationalen Funktion abgelesen werden.

Beispiel: Die Funktionsgleichung $f(x) = x^4 - 2x^2 - 6$ lässt folgende Aussage zu.

Das Absolutglied ist -6 . Das bedeutet, der Funktionsgraph schneidet die y -Achse bei -6 .

Bei der Funktionsgleichung $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4x$ hingegen ist kein Absolutglied vorhanden.

Das bedeutet, das Absolutglied hat den Wert 0 . Somit schneidet der Funktionsgraph die y -Achse im Ursprung, also bei 0 .

6.2 Prototypen

Eine ganzrationale Funktion kann in unterschiedlicher Form auftreten. Diese bezeichnen wir als Prototypen.

Polynomform

Der oben bereits erwähnte Prototyp

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

wird Polynom genannt und dementsprechend heißt diese Darstellung **Polynomform**.

Die Faktorform (FF)

Wie auch bei den quadratischen Funktionen kann eine ganzrationale Funktion als Produkt aus unterschiedlichen Faktoren dargestellt werden.

Im allgemeinen gilt für die Faktorform nur, dass sie **aus mindestens zwei Faktoren** besteht. Wobei einer die Form $(x - N_1)$ erfüllen muss.

$$f_{FF}(x) = a \cdot (x - N_1) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0)$$

Beispiel: Die Funktion $f(x) = 5(x - 3)(x^2 + 2x - 3)$ ist in Faktorform gegeben.

Linearfaktorform (LFF)

Eine Sonderform der Faktorform ist eine Darstellung, die als Produkt der 'Nullstelle-Polynome' (oder auch Linearfaktoren) dargestellt wird.

$$f_{LFF}(x) = a \cdot (x - N_1) \cdot (x - N_2) \cdot \dots \cdot (x - N_{n-1}) \cdot (x - N_n)$$

Die Darstellung f_{LFF} wird, wie bereits bei quadratischen Funktionen eingeführt, **Linearfaktorform** genannt.

Zu Beachten ist, dass diese Sonderform ausschließlich aus linearen Faktoren der Form $(x - N_i)$ (also nur 1 als Exponent an x) besteht.

Dabei können wir an den einzelnen 'Nullstellen-Polynome' (Linearfaktoren) direkt die Nullstellen der Funktion ablesen.

Beispiel:

$$f(x) = (x - \underbrace{2}_{N_1}) \cdot (x - \underbrace{1}_{N_2}) \cdot (x - \underbrace{(-3)}_{N_3})$$

Polynomform \Leftrightarrow Faktorform

(L)FF \Rightarrow PF

Haben wir eine ganzrationale Funktion in **Faktorform** $f(x) = a(x - N_1) \cdot \dots \cdot (x - N_{n-1}) \cdot (x - N_n)$ gegeben und möchten diese **in die Polynomform** überführen, so multiplizieren wir die Faktoren aus und erhalten so die gewünschte Form.

Beispiel: $f(x) = 0,5(x - 3)(x + 2)(x - 1)$

$$\begin{aligned} f_{FF}(x) &= 0,5(x - 3) \underbrace{(x + 2)(x - 1)}_{\text{ausmultiplizieren}} \\ &= 0,5(x - 3)(x^2 - x + 2x - 2) \\ &= 0,5 \underbrace{(x - 3)(x^2 + x - 2)}_{\text{ausmultiplizieren}} \\ &= 0,5 \cdot (x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6) \\ &= 0,5 \underbrace{(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)}_{\text{ausmultiplizieren}} \\ &= 0,5x^3 - x^2 - 2,5x + 3 \\ \Rightarrow f_{PF}(x) &= 0,5x^3 - x^2 - 2,5x + 3 \end{aligned}$$

PF \Rightarrow FF

Haben wir eine ganzrationale Funktion in **Poly-nomform** $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0$ gegeben und wollen diese **in die Faktorform** überführen, klammern wir zunächst den Koeffizienten des charakteristischen Summanden aus und bestimmen im Anschluss die Nullstellen des Klammerausdrucks. Im Anschluss setzen wir die berechneten Nullstellen in das Gerüst der Faktorform ein.