

1 Grundwissen

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

Um diese Funktion (oder auch *Kurve*) untersuchen zu können, müssen wir auf Informationen aus vergangenen Lernabschnitten aber auch auf neues Wissen zurückgreifen. Nachfolgend werden die entsprechenden Informationen in Kurzform nochmal dargestellt.

Symmetrie

- Eine Funktion heißt **achsensymmetrisch**, wenn gilt: es kommen nur gerade Exponenten in dem Funktionsterm $f(x)$ vor.

a_0 gilt als Glied mit Geradem Exponenten.

In diesem Fall bedeutet das außerdem, dass $f(x) = f(-x)$ für alle zulässigen x . Die Funktion nennt man dann auch gerade.

- Eine Funktion heißt **punktsymmetrisch**, wenn gilt: es kommen nur ungerade Exponenten in dem Funktionsterm $f(x)$ vor.

Im Funktionsterm gibt es kein a_0 .

In diesem Fall heißt das, dass $f(x) = -f(-x)$ für alle zulässigen x . Eine solche Funktion wird auch ungerade genannt.

- Enthält der Funktionsterm $f(x)$ sowohl gerade als auch ungerade Exponenten, so ist sie **nicht symmetrisch**.

Verhalten für große x-Werte

Um das Verhalten für große x-Werte zu bestimmen, betrachten wir und lediglich den *charakteristischen Summanden*, also den Summanden, mit der höchsten Potenz ($a_n x^n$).

Das Verhalten kann dann wie folgt angegeben werden:

$a_n \backslash n$	gerade	ungerade
positiv	$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \infty$ $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$	$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$
negativ	$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$	$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \infty$ $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$

Schnittstelle mit der y-Achse

Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, setzen wir für x Null (0) in den Funktionsterm ein. Wir bestimmen also

$$f(0) = a_0$$

So erhalten wir $S(0|a_0)$. Ist $f(0) = a_0 = 0$, so verläuft der Graph durch den Ursprung.

Nullstellen

Die Nullstellen sind die Stellen, an denen der Funktionswert Null ist, der Funktionsgraph also die x-Achse schneidet.

Um die Nullstellen zu bestimmen, setzen wir

$$f(x) = 0$$

Wir merken uns:

- $a_1 x + a_0 \Rightarrow$ Null setzen und nach x umformen ($a_1 x + a_0 = 0 \Rightarrow x = \frac{a_0}{a_1}$)
- $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Rightarrow$ Anwenden der **pq-Formel**
Beachte: a_2 muss den Wert 1 haben (also muss gegebenenfalls : a_2 gerechnet werden).
- $a_2 x^2 + a_0 \Rightarrow$ Null setzen und nach x umformen ($a_2 x^2 + a_0 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$)

- Funktionen mit Grad 3 und Höher \Rightarrow NST ausprobieren (meist $-2, -1, 0, 1, 2$); Dann mit **Polynomdivision** den Grad reduzieren
 $(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) : (x - NST) = p(x)$
NST des Ergebnisses $p(x)$ bestimmen

Monotonieverhalten

Wird noch nachgereicht.

Extremstellen

Notwendige Bedingung Ist x_0 eine Extremstelle, dann muss $f'(x) = 0$ sein.

1. *Hinreichende Bedingung* $\circ f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \rightarrow f(x_0)$ ist lokales Minimum
 $\circ f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \rightarrow f(x_0)$ ist lokales Maximum

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann verwende nachfolgende Bedingung.

2. *Hinreichende Bedingung* $f'(x)$ hat an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel.
 \circ Von $+$ nach $- \rightarrow f(x_0)$ ist lokales Minimum
 \circ Von $-$ nach $+$ $\rightarrow f(x_0)$ ist lokales Maximum

Krümmungsverhalten und Wendestellen

Wird nachgereicht

Schaubild

Zeichne die Nullstellen, die Extrempunkte und die Wendepunkte in das Koordinatensystem.

Verbinde die Punkte entsprechen der Information, die du über die Symmetrie, das Randverhalten (Verhalten für große x-Werte), die Monotonie und das Krümmungsverhalten erhalten hast.

So erhältst du den ungefähren Verlauf der Funktion.