Wir erinnern uns an die drei Ableitungsregeln, die hier notwendig sind.

Produktregel Gegeben ist eine Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, mit $u(x)$ und $v(x)$ differenzierbar in x. Dann gilt für die Ableitung von $f(x)$ folgendes:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Kettenregel Gegeben ist eine verkettete Funktion der Form $f(x) = u(v(x))$, mit $u(x)$ und $v(x)$ differenzierbar in x. Dann gilt für die Ableitung von $f(x)$ folgendes:

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Quotientenregel Gegeben ist eine die Funktion der Form $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, mit $u(x)$ und $v(x)$ differenzierbar in x und $v(x) \neq 0$. Dann gilt für die Ableitung von $f(x)$ folgendes:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Aufgabe 1 Leiten Sie mit Hilfe der Kettenregel ab und vereinfachen Sie das Ergebnis (falls möglich).

(a) $f(x) = (2+3x)^3$
$f'(x) = 3(2+3x)^2 \cdot 3 = 9(2+3x)^2$

(b) $f(x) = (2x-3)^5$
$f'(x) = 5(2x-3)^4 \cdot 2 = 10(2x-3)^4$

(c) $f(x) = \sqrt{3x-4} = (3x-4)^{\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{1}{2}(3x-4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-4}}$

(d) $f(x) = (x+4x^3)^{-3}$
$f'(x) = (-3)(x+4x^3)^{-4} \cdot (1+12x^2) = \frac{-3-36x^2}{(x+4x^3)^4}$

(e) $f(x) = (x - x^4)^{-2}$
$f'(x) = (-2)(x - x^4)^{-3} \cdot (1 - 4x^3) = \frac{8x^3-2}{(x-x^4)^3}$

(f) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1} = (x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$

(g) $f(x) = (x^2 + x)^{\frac{3}{2}}$
$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2 + x)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = \frac{(6x+3)\sqrt{x^2+x}}{2}$

(h) $f(x) = (1 - \sqrt{x})^4$
$f'(x) = 4(1 - \sqrt{x})^3 \cdot (-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) = \frac{-2(1-\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie mit Hilfe der Produktregel die Ableitung von:

(a) $f(x) = x(2 + 3x)$
$f'(x) = 1 \cdot (2 + 3x) + x \cdot 3x = 3x^2 + 3x + 2$

(b) $f(x) = \sqrt{1 - x}(x^2 + 3x) = (1 - x)^{\frac{1}{2}}(x^2 + 3x)$
$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) \cdot (x^2 + 3x) + (1 - x)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x + 3) =$
$\frac{x^2+3x+2(1-x)(2x+3)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-3x^2+x+6}{2\sqrt{1-x}}$

(c) $f(x) = (2x - 3)(x^2 + x)$
$f'(x) = 2 \cdot (x^2 + x) + (2x - 3) \cdot (2x + 1)$

(d) $f(x) = (x + 1)(x^2 + 3x^3)$
$1 \cdot (x^2 + 3x^3) + (x + 1) \cdot (2x + 9x^2)$

bbs.eins.mainz

Aufgabe 3 Nutzen Sie zur Ableitung die Quotientenregel.

(a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

(b) $f(t) = \frac{2t+1}{4t^2-5}$

$f'(x) = \frac{2(4t^2-5)-(2t+1)(8t)}{(4t^2-5)^2} = \frac{-8t^2+8t-10}{(4t^2-5)^2}$

(c) $f(a) = \frac{2a+a^3}{3a-4}$

$f'(x) = \frac{(2+3a^2)(3a-4)-(2a+a^3)\cdot 3}{(3a-4)^2} =$

$\frac{8a^3-12a^2+4a-8}{(3a-4)^2}$

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)-(\sqrt{x+1})\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$

$\frac{(x^2+1)-2x(x+1)}{(\sqrt{x+1})(x^2+1)^2}$

(e) $f(x) = \frac{3x^2-1}{15-x^2}$

$f'(x) = \frac{6x(12-x^2)-(3x^2-1)(-2x)}{(15-x^2)^2} =$

$\frac{6x^3-6x^2+70x}{(15-x^2)^2}$

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x-1)-\sqrt{x}\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)-x}{\sqrt{x}(x-1)^2} =$

$\frac{-1}{\sqrt{x}(x-1)^2}$

(g) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$

$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-1)-(x^2+x+1)(2x)}{(x^2-1)^2}$

$\frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}$

(h) $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$

$f'(x) = \frac{-2x(x+2)-(1-x^2)\cdot 1}{(x+2)^2} =$

$\frac{-x^2-4x-1}{(x+2)^2}$

(k) $f(x) = \frac{2x-3}{4x+1}$

$f'(x) = \frac{2\cdot(4x+1)-(2x-3)\cdot 4}{(4x+1)^2} =$

$\frac{14}{(4x+1)^2}$

(l) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-\sqrt{x})-(\sqrt{x}+1)\cdot(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})}{(1-\sqrt{x})^2} =$

$\frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$