bbs.eins.mainz
Berufsbildende Schule Technik

2 Quadratische Funktionen faktorisieren

Haben wir eine quadratische Funktion gegeben, kann es für das weitere Vorgehen hilfreich sein, wenn man diese faktorisiert.
Wir überführen also

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

zu

$$f(x) = d \cdot (x - x_{N1})(x - x_{N2})$$

Um dies zu tun, können wir verschiedene Vorgehen verwenden:

- Differenz von Quadraten
- Vollständiges Quadrat
- Gruppieren
- Teilen und Schieben
- Nullstellen bestimmen

> Vorsicht!
> Die Faktorisierung einer quadratischen Funktion ist nur möglich, wenn die

2.1 Differenz von Quadraten (3. Binomische Formel)

Hat unsere quadratische Funktion die Form

$$f(x) = x^2 - c; \pm\sqrt{c} \in \mathbb{Z}$$

Dann handelt es sich um die Differenz von Quadraten auch bekannt als die ausmultiplizierte dritte binomische Formel.

$$\Rightarrow \ f(x) = (x + \sqrt{c}) \cdot (x - \sqrt{c})$$

2.2 Vollständiges Quadrat (1. und 2. Binomische Formel)

Hat die quadratische Funktion hingegen die Form

$$f(x) = ax^2 \pm bx + c$$

und für die Koeffizienten gilt $b = 2ad$ und $c = d^2$ entspricht das

$$f(x) = ax^2 \pm 2adx + d^2$$

Klar erkennbar ist die erste bzw. zweite binomische Formel

$$f(x) = (ax + d)^2$$

oder

$$f(x) = (ax - d)^2$$

2.3 Gruppieren

Wir sind konfrontiert mit einer quadratischen Gleichung der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$. Um gut gruppieren zu können betrachten wir die Koeffizienten a, b und c.
Es müssen die Fragen geklärt werden, welche zwei Zahlen z_1 und z_2 ergeben

- bei Multiplikation $* \Rightarrow a \cdot c$
- bei Addition $+ \Rightarrow b$

Dieser Schritt ist mit Abstand der schwierigste an diesem Vorgehen.

> Dabei kann es passieren, dass es **keine solchen zwei Zahlen** gibt. In diesem Fall müssen wir die **Nullstellen bestimmen**.

Haben wir diese zwei Zahlen gefunden, schreiben wir unsere Funktion neu.

$$f(x) = ax^2 + z_1x + z_2x + c$$

Hierbei sollten wir die Reihenfolge von z_1 und z_2 so wählen, dass sie mit a bzw. mit c einen gemeinsamen Teiler t_1, t_2 haben.
Diesen gemeinsamen Teiler klammern wir in beiden Fällen aus und erhalten:

$$f(x) = t_1x(\underbrace{\frac{a}{t_1}}_{k_1}x + \underbrace{\frac{z_1}{t_1}}_{k_2}) + t_2(\underbrace{\frac{z_2}{t_2}}_{k_1}x + \underbrace{\frac{c}{t_2}}_{k_2})$$
$$= t_1x(k_1x + k_2) + t_2(k_1x + k_2)$$

Die beiden Klammerausdrücke sind gleich und ermöglichen uns ein erneutes ausklammern.

$$f(x) = (t_1x + t_2)(k_1x + k_2)$$

Schauen wir uns folgendes **Beispiel** an:

$$f(x) = 5x^2 + 30x - 80$$

$$\boxed{\begin{array}{l} *:\ 5 \cdot (-80) = -400 \\ +:\ 30 \\ \Rightarrow z_1 = 40; z_2 = -10 \end{array}}$$

$$f(x) = 5x^2 + \underbrace{40}_{z_1}x \underbrace{-10}_{z_2}x - 80$$
$$f(x) = 5x(x+8) - 10(x+8)$$
$$f(x) = (5x-10)(x+8)$$

Wir schauen uns noch ein **Beispiel** an:

$$f(x) = x^2 + 6x - 40$$

$$\boxed{\begin{array}{l} *:\ 1 \cdot (-40) = -40 \\ +:\ 6 \\ \Rightarrow z_1 = 10; z_2 = -4 \end{array}}$$

$$f(x) = x^2 + \underbrace{-4}_{z_2}x \underbrace{10}_{z_1}x - 40$$
$$f(x) = x(x-4) + 10(x-4)$$
$$f(x) = (x+10)(x-4)$$

2.4 Teilen und Schieben

Auch diesmal haben wir wieder eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ gegeben.
Die ersten Schritte entsprechen denen, die wir beim Gruppieren anwenden.

Wir betrachten erneut die Koeffizienten a, b und c.
Es müssen die Fragen geklärt werden, welche zwei Zahlen z_1 und z_2 ergeben

- bei Multiplikation $* \Rightarrow a \cdot c$
- bei Addition $+ \Rightarrow b$

Dieser Schritt ist mit Abstand der schwierigste an diesem Vorgehen.

> Dabei kann es passieren, dass es **keine solchen zwei Zahlen** gibt. In diesem Fall müssen wir die **Nullstellen bestimmen**.

Unter Verwendung der beiden Zahlen schreiben wir nun

$$f(x) = (\_x + \frac{z_1}{a})(\_x + \frac{z_2}{a})$$

Lässt sich z_1 bzw. z_2 ganzzahlig durch a teilen, so erhält x den Koeffizienten 1.
Ist dies nicht der Fall, erhält x den Koeffizienten a und die Zahl z_1 oder z_2 bleibt erhalten.

1. Möglichkeit: z_1 lässt sich nicht ganzzahlig durch a teilen, z_2 aber schon
$f(x) = (ax + z_1)(x + \underbrace{d}_{\frac{z_2}{a}})$

2. Möglichkeit: z_1 lässt sich ganzzahlig durch a teilen, z_2 aber nicht
$f(x) = (x + \underbrace{d}_{\frac{z_1}{a}})(ax + z_2)$

3. Möglichkeit: z_1 und z_2 lassen sich ganzzahlig durch a teilen, dann wird a als Leitkoeffizient eingeführt.
$f(x) = a(x + \underbrace{d}_{\frac{z_1}{a}})(x + \underbrace{e}_{\frac{z_2}{a}})$

Wir betrachten das gleiche **Beispiel** wie eben:

$$f(x) = 5x^2 + 30x - 80$$

$$\boxed{\begin{aligned} &*:\ 5\cdot(-80) = -400\\ &+:\ 30\\ &\Rightarrow z_1 = 40; z_2 = -10 \end{aligned}}$$

$$f(x) = (x + \tfrac{40}{5})(x + \tfrac{-10}{5})$$
$$f(x) = 5(x+8)(x-2)$$

Wir schauen uns noch ein **Beispiel** an:

$$f(x) = x^2 + 6x - 40$$

$$\boxed{\begin{aligned} &*:\ 1\cdot(-40) = -40\\ &+:\ 6\\ &\Rightarrow z_1 = 10; z_2 = -4 \end{aligned}}$$

$$f(x) = (x + \tfrac{10}{1})(x + \tfrac{-4}{1})$$
$$f(x) = (x+10)(x-4)$$

2.5 Nullstellen bestimmen

Lässt sich die gegebene quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ nicht mit einer der obigen Verfahren faktorisieren, müssen wir die Nullstellen bestimmen. Hierfür verwenden wir die **pq-Formel**.

> Gegeben: $f(x) = x^2 + px + q$
> Dann erfüllen folgende zwei Zahlen
>
> $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
>
> die Gleichung $f(x) = 0$.
>
> Zu beachten ist, dass der **Leitkoeffizient** (Zahl vor x^2) **1 ist**.

Ist unsere quadratische Funktion nicht von der Form $f(x) = x^2 + px + q$, so müssen wir diese durch Teilen in die entsprechende Form überführen.

Wir betrachten das gleiche **Beispiel** wie eben.

$$f(x) = 5x^2 + 30x - 80 \qquad |:5$$
$$f(x) = x^2 + \underbrace{6}_{p}x \underbrace{-16}_{q} \qquad |\text{pq-Formel}$$

$$x_{1,2} = -\tfrac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 + 16}$$

$$x_1 = -\tfrac{6}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 + 16} \qquad x_2 = -\tfrac{6}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 + 16}$$
$$x_1 = -3 + \sqrt{9+16} \qquad x_1 = -3 - \sqrt{9+16}$$

$$x_1 = -3 + 5 = 2 \qquad x_2 = -3 - 5 = -8$$

Mit diesen Nullstellen können wir faktorisieren ($f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$) und erhalten:

$$f(x) = (x-2)(x+8)$$

Wir betrachten zudem das nachfolgende **Beispiel**.

$$f(x) = x^2 + \underbrace{6}_{p}x \underbrace{-40}_{q} \qquad |\text{pq-Formel}$$

$$x_{1,2} = -\tfrac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 + 40}$$

$$x_1 = -\tfrac{6}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 + 40} \qquad x_2 = -\tfrac{6}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 + 40}$$
$$x_1 = -3 + \sqrt{9+40} \qquad x_1 = -3 - \sqrt{9+40}$$

$$x_1 = -3 + 7 = 4 \qquad x_2 = -3 - 7 = -10$$

Mit diesen Nullstellen können wir faktorisieren ($f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$) und erhalten:

$$f(x) = (x-4)(x+10)$$