Gegeben ist eine Funktion $f(x)$. Um die markanten Stellen zu bestimmen gilt folgendes:

- Nullstelle: $f(x) = 0 \Rightarrow x_{NST}$
- Extremstelle: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_E$
  + x_E ist HOP, wenn $f''(x) < 0$
  + x_E ist TIP, wenn $f''(x) > 0$
- Wendestelle: $f''(x) = 0 \Rightarrow x_W$

Um die zugehörigen Punkte zu berechnen, wird die Stelle in die Ausgangsfunktion eingesetzt:

- $f(x_{NST})$ gibt die Koordinaten der Nullstellen
- $f(x_E)$ gibt die Koordinaten der Extrempunkte
- $f(x_W)$ gibt die Koordinaten der Wendepunkte

Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremstellen sowie deren genaue Charakteristika (HOP/TIP) sowie die Wendestellen der angegebenen Funktionen.
Skizzieren Sie die Funktion mit Hilfe der berechneten Stellen.

(a) $f(x) = -\frac{1}{20}x^3 + 15x$

(b) $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x$

(c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

(d) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

(e) $f(x) = -x^4 + 24x^2 - 80$

(f) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$

(a) $\mathbf{f(x) = -\frac{1}{20}x^3 + 15x}$
$\Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{20}x^2 + 15$
$\Rightarrow f''(x) = -\frac{6}{20}x$

(1) Nullstellen $\Rightarrow f(x) = 0$

$-\frac{1}{20}x^3 + 15x = 0$ $\Rightarrow x$ ausklammern
$x(-\frac{1}{20}x^2 + 15) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = 0$ oder $-\frac{1}{20}x^2 + 15 = 0$
$-\frac{1}{20}x^2 + 15 = 0$ $|+\frac{1}{20}x^2$
$15 = \frac{1}{20}x^2$ $|\cdot 20$
$300 = x^2$ $|\sqrt{}$
$x_2 \sim 17,32$ und $x_3 = -17,32$

Nullstellen: $N_1(-17,32|0), N_2(0|0)$ und $N_3(17,32|0)$

---

(2) Extremstellen $\Rightarrow f'(x) = 0$

$-\frac{3}{20}x^2 + 15 = 0$ $|+\frac{3}{20}x^2$
$15 = \frac{3}{20}x^2$ $|\cdot 20$
$300 = 3x^2$ $|: 3$
$100 = x^2$ $|\sqrt{}$
$x_4 = 10$ und $x_5 = -10$

(3) Art der Extremstelle bestimmen $\Rightarrow f''(x_4)$ und $f''(x_5)$

$f''(10) = -\frac{6}{20} * 10 = -\frac{60}{20} < 0$ $\Rightarrow$ x_4 ist HOP
$f''(-10) = -\frac{6}{20} * (-10) = \frac{60}{20} > 0$ $\Rightarrow$ x_5 ist TIP
Die dazugehörigen Punkte bestimmt man mit $f(x_4)$ bzw. $f(x_5)$.
$f(x_4) = -\frac{1}{20} * 10^3 + 15 * 10 = 100$
$f(x_5) = -\frac{1}{20} * (-10)^3 + 15 * (-10) = -100$
So ergeben sich $T(-10|-100)$ und $H(10|100)$

---

(4) Wendestellen $\Rightarrow f''(x) = 0$

$-\frac{6}{20}x = 0$ $|\cdot 20$
$-6x = 0$ $|: (6)$
$\Rightarrow$ $x_6 = 0$

Den dazugehörigen Punkt bestimmt man mit $f(x_6)$.

$f(x_6) = -\frac{1}{20} * 0^3 + 15 * 0 = 0$

So ergibt sich $W(0|0)$

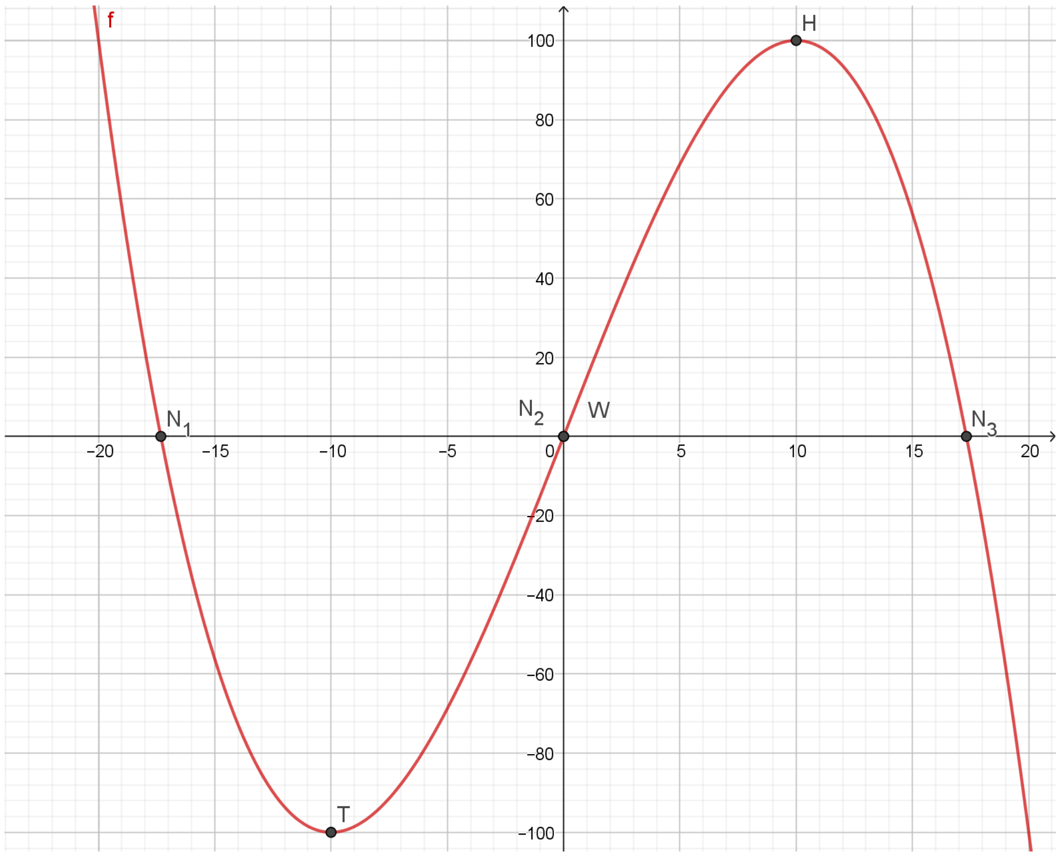
(5) Verhalten für große x-Werte

Betrachte dafür: $-\frac{1}{20}x^3$

$-\frac{1}{20}x^3 \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$-\frac{1}{20}x^3 \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

Der Funktionsgraph sieht wie folgt aus:



(b) $\mathbf{f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x}$
$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{9}x^2 - \frac{2}{6}x - 2$
$\Rightarrow f''(x) = \frac{6}{9}x - \frac{2}{6}$

(1) Nullstellen $\Rightarrow f(x) = 0$

$\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x = 0$ $\Rightarrow x$ ausklammern
$x(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x - 2) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = 0$ oder $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x - 2 = 0$

$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x - 2 = 0$ $|\cdot 9$
$\underbrace{x^2 - \frac{9}{6}}_{p} x \underbrace{-18}_{q} = 0$ |pq-Formel

$x_{2,3} = -\frac{-\frac{9}{6}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{9}{6}}{2}\right)^2 + 18}$ $|x_2, x_3$ bestimmen

$x_2 = -\frac{-\frac{9}{6}}{2} + \sqrt{\left(\frac{-\frac{9}{6}}{2}\right)^2 + 18} = 5,06$

und $x_3 = -\frac{-\frac{9}{6}}{2} - \sqrt{\left(\frac{-\frac{9}{6}}{2}\right)^2 + 18} = -3,56$

Nullstellen: $N_1(-3,56|0), N_2(0|0)$ und $N_3(5,06|0)$

(2) Extremstellen $\Rightarrow f'(x) = 0$

$\frac{3}{9}x^2 - \frac{2}{6}x - 2 = 0$ $|\cdot 9$
$3x^2 - \frac{18}{6}x - 18 = 0$ $|: 3$
$x^2 \underbrace{-1}_{p} x \underbrace{-6}_{q} = 0$ |pq-Formel

$x_{4,5} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 6}$

$x_4 = -\frac{-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 6} = -2$

und $x_5 = -\frac{-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 6} = 3$

(3) Art der Extremstelle bestimmen $\Rightarrow f''(x_4)$ und $f''(x_5)$

$f''(-2) = \frac{6}{9} * (-2) - \frac{2}{6} = -\frac{5}{3} < 0$ $\Rightarrow$ x_4 ist HOP
$f''(3) = \frac{6}{9} * 3 - \frac{2}{6} = \frac{5}{3} > 0$ $\Rightarrow$ x_5 ist TIP

Die dazugehörigen Punkte bestimmt man mit $f(x_4)$ bzw. $f(x_5)$.
$f(x_4) = \frac{1}{9} * (-2)^3 - \frac{1}{6} * (-2)^2 - 2 * (-2) = \frac{22}{9}$
$f(x_5) = \frac{1}{9} * 3^3 - \frac{1}{6} * 3^2 - 2 * 3 = -4,5$

So ergeben sich $T(3|-4,5)$ und $H(-2|\frac{22}{9})$

(4) Wendestellen $\Rightarrow f''(x) = 0$

$\frac{6}{9}x - \frac{2}{6} = 0$ $|+\frac{2}{6}$
$\frac{6}{9}x = \frac{2}{6}$ $|\cdot 9$
$6x = \frac{18}{6}$ $|: 6$
$x = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $x_6 = \frac{1}{2}$

Den dazugehörigen Punkt bestimmt man mit $f(x_6)$.

$f(x_6) = \frac{1}{9} * \frac{1}{2}^3 - \frac{1}{6} * \frac{1}{2}^2 - 2 * \frac{1}{2} = 1$

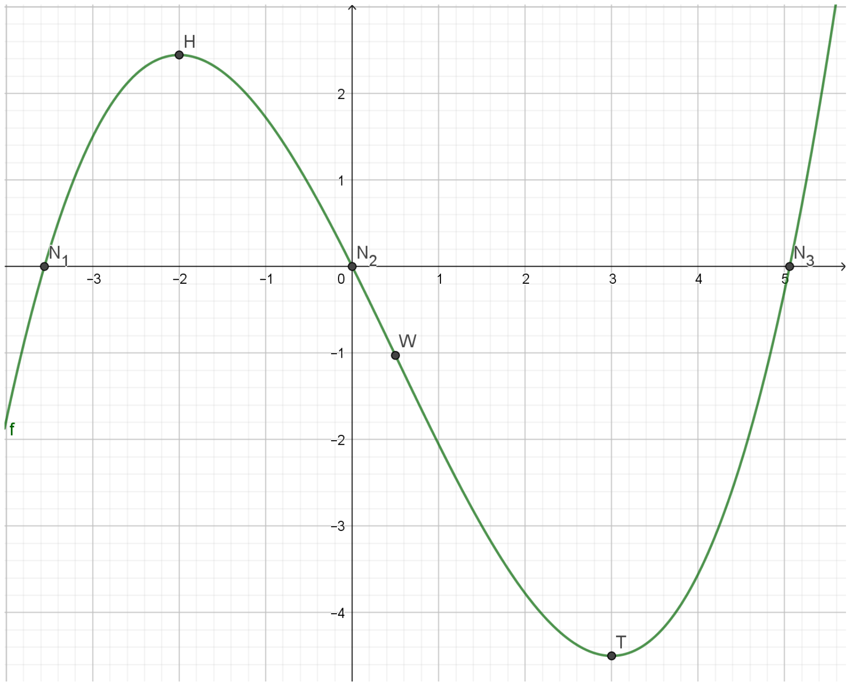
So ergibt sich $W(\frac{1}{2}|-1)$.

(5) Verhalten für große x-Werte

Betrachte dafür: $\frac{1}{9}x^3$

$\frac{1}{9}x^3 \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$ $\frac{1}{9}x^3 \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

Der Funktionsgraph sieht wie folgt aus:



(c) $\mathbf{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$\Rightarrow f''(x) = 6x - 12$

(1) Nullstellen $\Rightarrow f(x) = 0$

$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ $\Rightarrow x$ ausklammern

$x(x^2 - 6x + 9) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = 0$ oder $x^2 - 6x + 9 = 0$

$x^2 \underbrace{-6}_{p} x + \underbrace{9}_{q} = 0$ |pq-Formel

$x_{2,3} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 9}$ $|x_2, x_3$ bestimmen

$x_2 = -\frac{-6}{2} + \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 9} = 3$

und $x_3 = -\frac{-6}{2} - \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 9} = 3$

Nullstellen: $N_1(0|0)$ und $N_2(3|0)$

(2) Extremstellen $\Rightarrow f'(x) = 0$

$3x^2 - 12x + 9 = 0$ $|: 3$

$x^2 \underbrace{-4}_{p} x + \underbrace{3}_{q} = 0$ |pq-Formel

$x_{3,4} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3}$ $|x_3, x_4$ bestimmen

$x_3 = -\frac{-4}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} = 3$

und $x_4 = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} = 1$

(3) Art der Extremstelle bestimmen $\Rightarrow f''(x_3)$ und $f''(x_4)$

$f''(3) = 6 * 3 - 12 = 6 > 0$ $\Rightarrow$ x_3 ist TIP

$f''(1) = 6 * 1 - 12 = -6 < 0$ $\Rightarrow$ x_5 ist HOP

Die dazugehörigen Punkte bestimmt man mit $f(x_3)$ bzw. $f(x_4)$.

$f(x_3) = 3^3 - 6 * 3^2 + 9 * 3 = 0$

$f(x_4) = 1^3 - 6 * 1^2 + 9 * 1 = 4$

So ergeben sich $T(3|0) = N_2(3|0)$ und $H(1|4)$

(4) Wendestellen $\Rightarrow f''(x) = 0$

$6x - 12 = 0$ $\quad |+12$

$6x = 12$ $\quad |: 2$

$x = 2$ $\quad \Rightarrow x_5 = 2$

Den dazugehörigen Punkt bestimmt man mit $f(x_5)$.

$f(x_5) = 2^3 - 6 * 2^2 + 9 * 2 = 2$

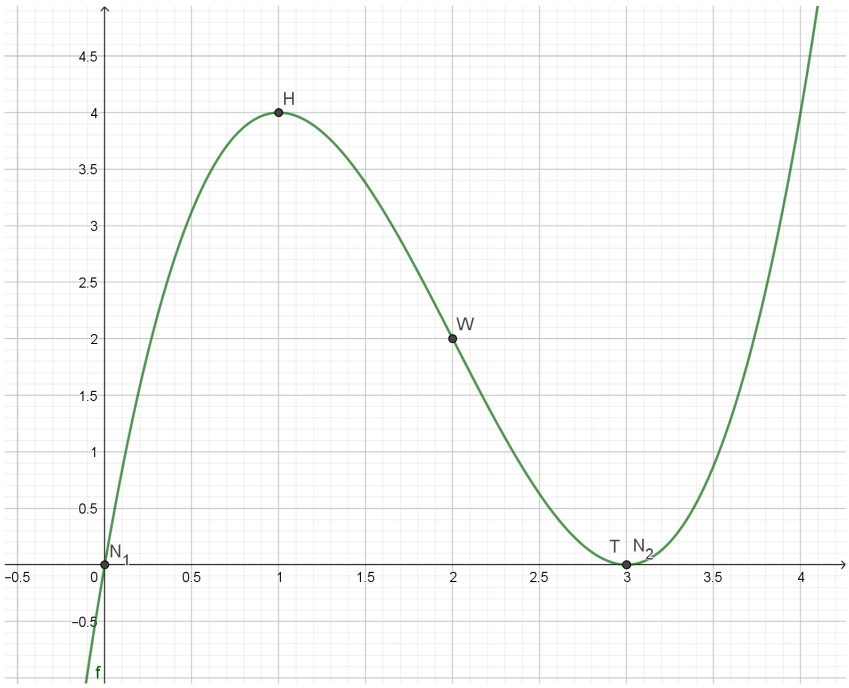
So ergibt sich $W(2|2)$.

(5) Verhalten für große x-Werte

Betrachte dafür: x^3

$x^3 \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$ $\qquad$ $x^3 \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

Der Funktionsgraph sieht wie folgt aus:



(d) $\mathbf{f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30}$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 8x - 11$

$\Rightarrow f''(x) = 6x + 8$

(1) Nullstellen $\Rightarrow f(x) = 0$

$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$ Nullstelle raten $x_1 = -2$

$f(-2) = (-2)^3 + 4 * (-2)^2 - 11 * (-2) - 30 = 0$

Polynomdivision $f(x) : \underbrace{(x+2)}_{(x-NST)}$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 + 4x^2 - 11x - 30\big) : \big(x + 2\big) = x^2 + 2x - 15 \\
-x^3 - 2x^2 \\
\hline
\qquad 2x^2 - 11x \\
\quad -2x^2 - 4x \\
\hline
\qquad\qquad -15x - 30 \\
\qquad\qquad\;\; 15x + 30 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x + 2) * (x^2 + 2x - 15) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x + 2 = 0}_{x_1=-2}$ oder $x^2 + 2x - 15 = 0$

$x^2 + \underbrace{2}_{p} x \underbrace{-15}_{q} = 0$ |pq-Formel

$x_{2,3} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 15}$ $|x_2, x_3$ bestimmen

$x_2 = -\frac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 15} = 3$

und $x_3 = -\frac{2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 15} = -5$

Nullstellen: $N_1(-5|0), N_2(-2|0)$ und $N_3(3|0)$

---

(2) Extremstellen $\Rightarrow f'(x) = 0$

$3x^2 + 8x - 11 = 0$ $|: 3$

$x^2 + \underbrace{\frac{8}{3}}_{p} x \underbrace{-\frac{11}{3}}_{q} = 0$ |pq-Formel

$x_{3,4} = -\frac{\frac{8}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{8}{3}}{2}\right)^2 + \frac{11}{3}}$ $|x_4, x_5$ bestimmen bbs.eins.mainz

$$x_5 = -\frac{\frac{8}{3}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{8}{3}}{2}\right)^2 + \frac{11}{3}} = 1$$

und $$x_5 = -\frac{\frac{8}{3}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{8}{3}}{2}\right)^2 + \frac{11}{3}} = -\frac{11}{3}$$

(3) Art der Extremstelle bestimmen $\Rightarrow f''(x_4)$ und $f''(x_5)$

$f''(1) = 6 * 1 + 8 = 14 > 0$ $\Rightarrow$ x_3 ist TIP

$f''(-\frac{11}{3}) = 6 * (-\frac{11}{3}) + 8 = -14 < 0$ $\Rightarrow$ x_5 ist HOP

Die dazugehörigen Punkte bestimmt man mit $f(x_3)$ bzw. $f(x_4)$.

$f(x_4) = 1^3 + 4 * 1^2 - 11 * 1 - 30 = -36$

$f(x_5) = (-\frac{11}{3})^3 + 4 * (-\frac{11}{3})^2 - 11 * (-\frac{11}{3}) - 30 = 14,81$

So ergeben sich $T(1|-36)$ und $H(-\frac{11}{3}|14,81)$

---

(4) Wendestellen $\Rightarrow f''(x) = 0$

$6x + 8 = 0$ $|-8$

$6x = -8$ $|: 6$

$x = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ $x_6 = -\frac{4}{3}$

Den dazugehörigen Punkt bestimmt man mit $f(x_6)$.

$f(x_5) = (-\frac{4}{3})^3 + 4 * (-\frac{4}{3})^2 - 11 * (-\frac{4}{3}) - 30 = -10,59$

So ergibt sich $W(-\frac{4}{3}|-10,59)$.

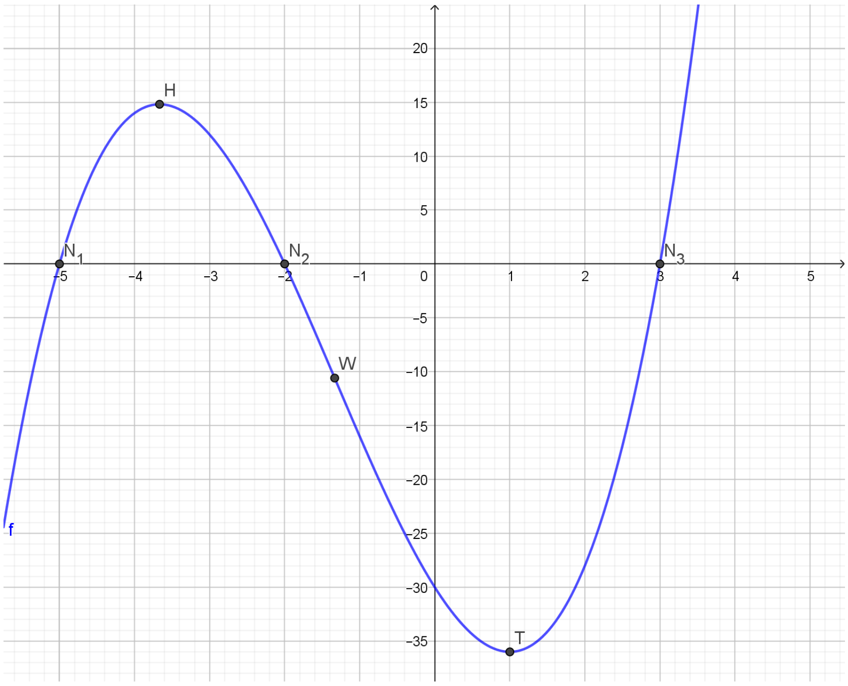
---

(5) Verhalten für große x-Werte

Betrachte dafür: x^3

$x^3 \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$ $x^3 \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

Der Funktionsgraph sieht wie folgt aus:



(e) $\mathbf{f(x) = -x^4 + 24x^2 - 80}$

$\Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 48x$

$\Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 48$

(1) Nullstellen $\Rightarrow f(x) = 0$

$-x^4 + 24x^2 - 80 = 0$ Substitution $\Rightarrow z = x^2$

$-\underbrace{z^2}_{x^2 \cdot x^2} + 24\underbrace{z}_{x^2} - 80 = 0$

$-z^2 + 24z - 80 = 0$ $|\cdot(-1)$

$z^2 \underbrace{-24}_{p} z + \underbrace{80}_{q} = 0$ |pq-Formel

$z_{1,2} = -\frac{-24}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-24}{2}\right)^2 - 80}$ $|z_1, z_2$ bestimmen

$z_1 = \frac{24}{2} + \sqrt{\left(\frac{-24}{2}\right)^2 + 80} = 20$

und $z_2 = \frac{24}{2} - \sqrt{\left(\frac{-24}{2}\right)^2 + 80} = 4$

Rücksubstitution $\Rightarrow z = x^2$

$x_1^2 = z_1 = 20$ $|\sqrt{\ }$

$x_{1_1} = \sqrt{20} = 4,47$

$x_{1_2} = \sqrt{20} = -4,47$

$x_2^2 = z_2 = 4$ $|\sqrt{\ }$

$x_{2_1} = \sqrt{4} = 2$

$x_{2_2} = \sqrt{4} = -2$

Nullstellen: $N_1(-4,47|0), N_2(-2|0), N_3(2|0)$ und $N_4(4,47|0)$

(2) Extremstellen $\Rightarrow f'(x) = 0$

$-4x^3 + 48x = 0$ $\Rightarrow x$ ausklammern

$x(-4x^2 + 48) = 0$ $\Leftrightarrow x_5 = 0$ oder $-4x^2 + 48 = 0$

$-4x^2 + 48 = 0$ $| +4x^2$

$48 = 4x^2$ $|: 4$

$12 = x^2$ $|\sqrt{\ }$

$x_6 = 3,46$ und $x_7 = -3,46$

(3) Art der Extremstelle bestimmen $\Rightarrow f''(x_5), f(x_6)$ und $f''(x_7)$

$f''(0) = -12 * 0^2 + 48 = 48 > 0$ $\Rightarrow$ x_5 ist TIP

$f''(3,46) = -12 * (3,46)^2 + 48 = -95,66 < 0$ $\Rightarrow$ x_6 ist HOP

$f''(-3,46) = -12 * (-3,46)^2 + 48 = -95,66 < 0$ $\Rightarrow$ x_7 ist HOP

Die dazugehörigen Punkte bestimmt man mit $f(x_5), f(x_6)$ bzw. $f(x_7)$.

$f(x_5) = -0^4 + 24 * 0^2 - 80 = -80$
$f(x_6) = -3,46^4 + 24 * (3,46)^2 - 80 = 64$
$f(x_7) = -(-3,46)^4 + 24 * (-3,46)^2 - 80 = 64$

So ergeben sich $T(0|-80)$ und $H_1(-3,46|64)$ und $H_2(3,46|64)$

(4) Wendestellen $\Rightarrow f''(x) = 0$

$-12 * x^2 + 48 = 0 \quad |+12x^2$
$48 = 12x^2 \quad |:12$
$4 = x^2 \quad |\sqrt{}$
$x_8 = 3,46 = N_3$ und
$x_9 = -3,46 = N_2$

Die dazugehörigen Punkte haben wir in (1) bereits bestimmt.

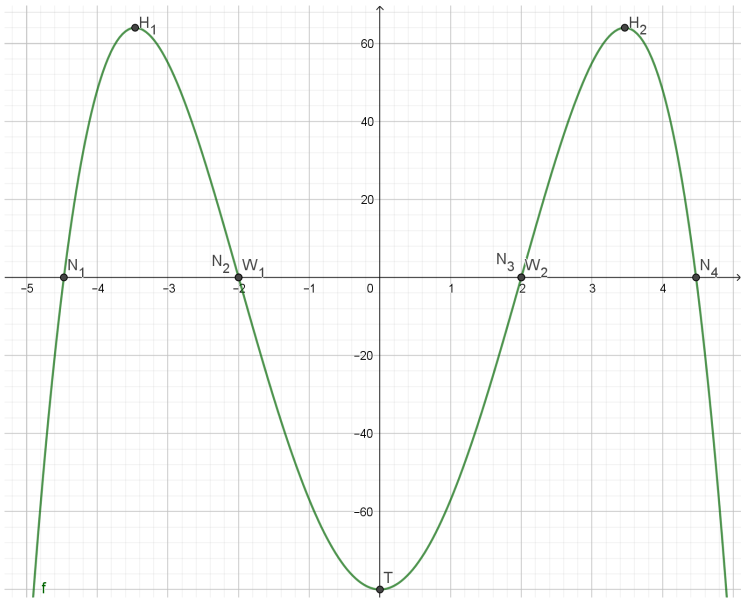
So ergibt sich $W_1(-3,46|0)$ und $W_2(3,46|0)$

(5) Verhalten für große x-Werte

Betrachte dafür: $-x^4$

$-x^4 \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$ $\qquad$ $-x^4 \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

Der Funktionsgraph sieht wie folgt aus:



(f) $\mathbf{f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2$

(1) Nullstellen $\Rightarrow f(x) = 0$

$\frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2 = 0$ Substitution $\Rightarrow z = x^2$

$\frac{1}{8}\underbrace{z^2}_{x^2 \cdot x^2} \underbrace{z}_{x^2} + 2 = 0$

$\frac{1}{8}z^2 - z + 2 = 0$ $|\cdot 8$

$z^2 \underbrace{-8}_{p} z + \underbrace{16}_{q} = 0$ |pq-Formel

$z_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 16}$ $|z_1, z_2$ bestimmen

$z_1 = \frac{8}{2} + \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 16} = 4$

und $z_2 = \frac{8}{2} - \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 16} = 4 = z_1$

Rücksubstitution $\Rightarrow z = x^2$

$x_1^2 = z_1 = 4$ $|\sqrt{}$

$x_1 = \sqrt{4} = 2$

$x_2 = \sqrt{4} = -2$

Nullstellen: $N_1(-2|0)$ und $N_2(2|0)$

(2) Extremstellen $\Rightarrow f'(x) = 0$

$\frac{1}{2}x^3 - 2x = 0$ $\Rightarrow x$ ausklammern

$x(\frac{1}{2}x^2 - 2) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_3 = 0$ oder $\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$

$\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$ $| +2$

$\frac{1}{2}x^2 = 2$ $|\cdot 2$

$x^2 = 4$ $|\sqrt{}$

$x_4 = 2 = N_2$ und

$x_5 = -2 = N_1$

(3) Art der Extremstelle bestimmen $\Rightarrow f''(x_3), f''(x_4)$ und $f''(x_5)$

$f''(0) = \frac{3}{4}0^2 - 2 = -2 < 0$ $\Rightarrow$ x_3 ist HOP

$f''(2) = \frac{3}{4}2^2 - 2 = 1 > 0$ $\Rightarrow$ x_4 ist TIP

$f''(-2) = \frac{3}{4} * (-2)^2 - 2 = 1 > 0$ $\Rightarrow$ x_5 ist TIP

Die dazugehörigen Punkte bestimmt man mit $f(x_3), f(x_4)$ bzw. $f(x_5)$.

$f(x_3) = \frac{1}{8}0^4 - 0^2 + 2 = 2$
$f(x_4) = \frac{1}{8} \cdot 2^4 - 2^2 + 2 = 0$
$f(x_5) = \frac{1}{8} \cdot (-2)^4 - (-2)^2 + 2 = 0$
So ergeben sich $H(0|2)$ und $T_1(-2|0)$ und $T_2(2|0)$

(4) Wendestellen $\Rightarrow f''(x) = 0$

$\frac{3}{4}x^2 - 2 = 0$ $|+2$
$\frac{3}{4}x^2 = 2$ $|\cdot 4$
$3x^2 = 8$ $|:3$
$x^2 = \frac{8}{3}$ $|\sqrt{}$
$x_6 = 1,63$ und $x_7 = -1,63$
Die dazugehörigen Punkte bestimmt man mit $f(x_6)$ bzw. $f(x_7)$.
$f(x_6) = \frac{1}{8} \cdot (1,63)^4 - (1,63)^2 + 2 = \frac{2}{9} = \frac{1}{8} \cdot (-1,63)^4 - (-1,63)^2 + 2 = f(x_7)$
So ergibt sich $W_1(-1,63|\frac{2}{9})$ und $W_2(1,63|\frac{2}{9})$

(5) Verhalten für große x-Werte

Betrachte dafür: $\frac{1}{8}x^4$
$\frac{1}{8}x^4 \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$ $\frac{1}{8}x^4 \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

Der Funktionsgraph sieht wie folgt aus: