Vektorgrundlagen

Wir haben zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} cb_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gegeben und erinnern uns an die verschiedenen Operationen, die wir mit diesen Vektoren ausführen können:

Länge eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Skalarprodukt zweier Vektoren: $\vec{a} * \vec{b} = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3$

Winkel α zwischen zwei Vektoren: Hier ist zu beachten, dass die Formel immer den Winkel $\alpha < 90°$ angibt. Außerdem müssen beide Vektoren von dem selben Punkt ausgehen.
z.B. Das Ergebnis für den Winkel zwischen $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ wäre sinnvoll, wohingegen der Winkel zwischen $\vec{AB}$ und $\vec{CA}$ falsch wäre.

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \frac{a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} * \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Da wir den Winkel benötigen, muss noch die Umkehrfunktion ($\arccos$) angewendet werden.

$$\gamma = \arccos \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \arccos \frac{a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} * \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Aufstellen von Geraden

Um eine Gerade ($g : \vec{x} = \underbrace{\vec{p}}_{Stützvektor} + r * \underbrace{\vec{u}}_{Richtungsvektor}$) aufzustellen benötigt man zwei Informationen:

(a) **Zwei** Punkte (A und B)

(b) den **Stützvektor** $\vec{p}$ sowie einen **weiteren Punkt** B

(c) den **Richtungsvektor** $\vec{u}$ sowie einen **weiteren Punkt** A

(d) den **Stützvektor** $\vec{p}$ und den **Richtungsvektor** $\vec{u}$

(a) Hat man **zwei** Punkte $\mathbf{A(a_1|a_2|a_3)}$ und $\mathbf{B(b_1|b_2|b_3)}$, müssen wir aus diesen den *Stütz-* sowie den *Richtungsvektor* aufstellen. Dies tun wir wie folgt:

$$\vec{p} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{Stützvektor} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{Richtungsvektor} \quad \Rightarrow \mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \mathbf{r} * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

(b) Hat man den **Stützvektor** $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ und **einen** Punkt $\mathbf{B(b_1|b_2|b_3)}$ müssen wir daraus den *Richtungsvektor* bestimmen. Dies tun wir wie folgt:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 - p_1 \\ b_2 - p_2 \\ b_3 - p_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{Richtungsvektor} \quad \Rightarrow \mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \mathbf{r} * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

(c) Hat man den **Richtungsvektor** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und **einen** Punkt $\mathbf{a(a_1|a_2|a_3)}$ benötigt man nur noch den *Stützvektor*. Diesen erhält man wie folgt:

$$\vec{p} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{Stützvektor} \quad \Rightarrow \mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \mathbf{r} * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

(d) Hat man den **Stützvektor** $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ und den **Richtungsvektor** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ muss man diese nur noch in die Geradengleichung einsetzen:

$$\Rightarrow \mathbf{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \mathbf{r} * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Ein weiterer Punkt auf der Geraden

Gegeben ist eine Gerade der Form $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

Um einen weiteren Punkt auf dieser Geraden zu bestimmen, wählt man für den Parameter $r \in \mathbb{R}$ einen Wert und bestimmt den entsprechenden Punkt P.

Beispiel:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Wir wählen $r = 2$ und erhalten

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Da aber nach einem Punkt gesucht ist, müssen wir zu dem erhaltenen Vektor $\vec{P}$ noch den Punkt P (8|3|-8) angeben.

Punktprüfung

Gegeben ist eine Gerade der Form $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ sowie ein Punkt P$(P_1|P_2|P_3)$.

Um zu prüfen, ob der Punkt P auf der gegebenen Gerade g liegt, setzen wir $\vec{P} = g$ und bestimmen die jeweiligen Werte für r.

Beispiel: Gegeben ist $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und der Punkt P $(6|0|-2)$.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{matrix} 6 = 4 + 2r \\ 0 = -3 + 3r \\ -2 = 2 - 5r \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 6 &= 4 + 2r && |-4 \\ 2 &= 2r && |:2 \quad \Rightarrow r = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -3 + 3r && |+3 \\ 3 &= 3r && |:3 \quad \Rightarrow r = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 &= 2 - 5r && |-2 \\ -4 &= -5r && |:5 \quad \Rightarrow r = \tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

Für r haben wir zweimal den Wert 1 und einmal den Wert $\frac{4}{5}$. Daher können wir folgern, dass der Punkt P nicht auf der Geraden g liegt.

Erhalten wir hingegen **dreimal den gleichen Wert** für r berechnet, so liegt der Punkt P auf der Geraden g.

Lage von Geraden

Wir haben die zwei Geradengleichungen gegeben.

$g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + t\vec{v}$

Für die gegenseitige Lage dieser zwei Geraden gilt folgendes: g und h ...

+ ... haben genau einen Schnittpunkt, wenn die Vektorgleichung bzw. das dazugehörige Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$ **eine** Lösung besitzt.
+ ... sind gleich, wenn die Vektorgleichung bzw. das dazugehörige Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$ **unendlich viele** Lösungen besitzt.

+ ... haben keinen Schnittpunkt, wenn die Vektorgleichung bzw. das dazugehörige Gleichungssystem $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$ **keine** Lösungen besitzt.
  Sind ferner die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ...
  - $\circ_1$ ... linear abhängig, so sind g und h parallel
  - $\circ_2$ ... linear unabhängig, so sind g und h zueinander windschief

Beispiel: Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3.5 \\ -1.5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0.5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die gegenseitige Lage der beiden Geraden zu prüfen, müssen wir $g = h$ setzen und das Gleichungssystem lösen.

$-6 + 3.5r = 2 - 0.5t$ I

$6 - 1.5r = -3 + 3t$ II

$10 = 8 + r \quad |-8 \quad \Rightarrow r = 2 \quad (*)$

Wir setzen nun (*) in die Gleichungen **I und II** ein und bestimmen jeweils t.

$$\text{I} \xrightarrow{mit(*)} \begin{aligned} & -6+3.5*2 = 2-0.5t \\ & \Leftrightarrow -6+7 = 2-0.5t \quad &|-2 \\ & \Leftrightarrow -1 = -0.5t \quad &|:(-0.5) \\ & \Rightarrow t = 2 \end{aligned}$$

$$\text{II} \xrightarrow{mit(*)} \begin{aligned} & 6-1.5*2 = -3+3t \\ & \Leftrightarrow 6-3 = -3+3t \quad &|+3 \\ & \Leftrightarrow 6 = 3t \quad &|:3 \\ & \Rightarrow t = 2 \end{aligned}$$

Wir erhalten **<u>eine</u>** Lösung. Um den Schnittpunkt zu berechnen, setzen wir die Werte von r bzw. t in die entsprechenden Geradengleichungen ein.

$$-6+3.5*2 = \underbrace{1}_{=p_1} = 2-0.5*2$$
$$6-1.5*2 = \underbrace{3}_{=p_2} = -3+3*2$$
$$10+0*2 = \underbrace{10}_{=p_3} = 8+1*2$$

So ergibt sich ein Schnittpunkt bei SP $(1|3|10)$

Erhalten wir hingegen **<u>keine</u>** eindeutige Lösungen für r und t, können wir daraus schließen, dass sich g und h keinen Schnittpunkt haben. Für eine genauere Aussage über die Lage müssen wir uns das Verhältnis der Richtungsvektoren anschauen.

Dies tun wir anhand eines **Beispiels**.

Gegeben sind die Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Um die gegenseitige Lage der beiden Geraden zu prüfen, müssen wir $g = h$ setzen und das Gleichungssystem lösen.

$$\begin{aligned} & 1+2r = 2+0t \quad && \Rightarrow r = \tfrac{1}{2} \quad && (*) \\ & 2+0r = 3+1t \quad && \Rightarrow t = -1 \quad && (**) \\ & 1+r = 4-1t && && \text{I} \end{aligned}$$

Wir prüfen mit I, ob unsere berechneten Werte von r (*) und t (**) korrekt sind.

$$\text{I} \xrightarrow{mit(*)/(**)} 1 + \overbrace{\frac{1}{2}}^{r} = 1.5 \neq 3 = 4 - 1 * \overbrace{1}^{t}$$

Wir erhalten also **<u>keine</u>** Lösung für r und t.

Daher betrachten wir nun die Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

bbs.eins.mainz

Zu klären ist die Frage: *Existiert eine Zahl* $a \in \mathbb{R}$, *so dass* $\mathbf{a * \tilde{u} = \tilde{v}}$*?*

$2a = 0 \quad \Rightarrow a = 0$

$0a = 1 \quad \lightning$

$1a = -1 \quad \Rightarrow a = -1$

Es ergeben sich unterschiedliche bzw. widersrpüchliche Werte für r, damit können wir folgern, dass es **kein** solches a gibt. $\vec{u}$ und $\vec{v}$ also linear unabhängig und somit g und h windschief sind.

Sich schneidende/Gleiche/Parallele/Windschiefe Geraden aufstellen

Gegeben ist eine Gerade mit folgender Form $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist jeweils eine Gerade ...

+ ...h, die g einen gemeinsamen Schnittpunkt hat
+ ...i, die gleich g ist
+ ...j, die parallel zu g verläuft
+ ...k, die zur Geraden g windschief ist

h hat einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g:

Als gemeinsamen Schnittpunkt wählen wir den Stützvektor von g. Dieser wird auch Stützvektor von h. Nun müssen wir noch gewährleisten, dass die Richtungsvektoren linear unabhängig sind. Dafür ändern wir lediglich ein Vorzeichen im Richtungsvektor $\vec{u}$ von g und erhalten so den Richtungsvektor $\vec{v}$ von h.

$$\Rightarrow h : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

i ist gleich g:

Als einen gemeinsamen Punkt wählen wir den Stützvektor von g. Dieser wird auch Stützvektor von i. Nun müssen wir noch gewährleisten, dass die Richtungsvektoren linear abhängig sind. Dafür ändern wir die einzelnen Komponenten des Richtungsvektors $\vec{u}$ von g im gleichen Verhältnis und erhalten so den Richtungsvektor $\vec{v}$ von i.

$$\Rightarrow i : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 * u_1 \\ 2 * u_2 \\ 2 * u_3 \end{pmatrix}$$

j ist parallel zu g:
Für den Stützvektor von j benötigen wir einen Punkt, der nicht auf g liegt. Hierfür können wir eine Komponente des Stützvektors $\vec{p}$ von g ändern.
Da die Richtungsvektoren bei parallelen Geraden linear abhängig sind, können wir den Richtungsvektor $\vec{u}$ von g oder ein Vielfaches davon als Richtungsvektor $\vec{v}$ von j verwenden.

$$\Rightarrow i : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 + 2 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + w * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

j ist windschief zu g:
Für den Stützvektor von j benötigen wir einen Punkt, der nicht auf g liegt. Hierfür können wir eine Komponente des Stützvektors $\vec{p}$ von g ändern.
Da die Richtungsvektoren bei windschiefen Geraden linear unabhängig sind, ändern wir eine Komponente des Richtungsvektors $\vec{u}$ von g und erhalten den Richtungsvektor $\vec{v}$ von i verwenden.

$$\Rightarrow j : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 - 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 4 * u_3 \end{pmatrix}$$