bbs.eins.mainz

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der beiden Geraden. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt S.

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, also existiert entweder einen oder keinen Schnittpunkt. Um diesen zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$2 + 5r = 5 + 2t \qquad \Rightarrow r = \frac{3+2t}{5}$ (*)

$5 + 3r = 1 + 7t \qquad \Rightarrow 5 + 3(\frac{3+2t}{5}) = 1 + 7t$

$\Rightarrow 5 + \frac{9+6t}{5} = 1 + 7t \qquad | *5$

$\Leftrightarrow 25 + 9 + 6t = 5 + 35t$

$\Leftrightarrow 25 + 9 + 6t = 5 + 35t \qquad | -5; -6t$

$\leftrightarrow 29 = 29t \qquad | : 29$

$\Leftrightarrow t = 1 \qquad \xrightarrow{mit(*)} r = \frac{3+2*1}{5} = 1$

Mit den berechneten Werten für r und t können wir nun den Schnittpunkt bestimmen:

$2 + 5 * \underbrace{1}_{r} = 7 = 5 + 2 * \underbrace{1}_{t}$

$5 + 3 * \overbrace{1} = 8 = 1 + 7 * \overbrace{1}$

Damit ergibt sich als Schnittpunkt S(7|8).

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind linear abhängig, Die Geraden sind also entweder gleich oder parallel Schnittpunkt. Wir setzen $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$-4 - 2r = 6t \qquad \Rightarrow -4 - 2(-2 - 3t) = 6t$ I

$1 - r = 3 + 3t$

Mit I: $6t = 6t \Rightarrow 0 = 0$

Wir haben eine wahre Aussage bzw. unendlich viele Lösungen. Somit sind g und h gleich.

(c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, also existiert entweder einen oder keinen bbs.eins.mainz

Schnittpunkt. Um diesen zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ll} 1+9r=4-3t & \Rightarrow t=1-3r \; (*) \\ 3-3r=3+2t & \Rightarrow 1-r=5-2(1-3r) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow 3-3r=5-2+6r & \\ \Leftrightarrow 3-3r=3+6r & \mid -3;+3r \\ \Leftrightarrow 0=9r & \mid :9 \\ \Leftrightarrow r=0 & \xrightarrow{mit(*)} t=1-3*0=1 \end{array}$$

Mit den berechneten Werten für r und t können wir nun den Schnittpunkt bestimmen:

$$1+9*\underbrace{0}_{r}=1=4-3*\underbrace{1}_{t}$$
$$3-3*\overbrace{0}=3=5-2*\overbrace{1}$$

Damit ergibt sich als Schnittpunkt S(1|3).

Die Gerade g geht durch den Punkt (2|-3) und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Die Gerade h startet mit dem Stützvektor $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und geht durch den Punkt (0|5).
Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der beiden Geraden und berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt S.

Zunächst müssen wir die Geradengleichungen g und h aufstellen.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, also existiert entweder einen oder keinen Schnittpunkt. Um diesen zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ll} 2-r=-5+5t & \Rightarrow r=7-5t \; (*) \\ -3+4r=3+2t & \Rightarrow -3+4(7-5t)=3+2t \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow -3+28-20t=3+2t & \\ \Leftrightarrow 25-20t=3+2t & \mid -3;+20t \\ \Leftrightarrow 22=22t & \mid :22 \\ \Leftrightarrow t=1 & \xrightarrow{mit(*)} r=7-5*\underbrace{1}_{t}=2 \end{array}$$

Mit den berechneten Werten für r und t können wir nun den Schnittpunkt bestimmen:

$2 - \underbrace{2}_{r} = 0 = -5 + 5 * \underbrace{1}_{t}$

$-3 + 4 * \overbrace{2}^{r} = 5 = 3 + 2 * \overbrace{1}^{t}$

Damit ergibt sich als Schnittpunkt S(0|5).