Aufgabe 1 / 4 Pkt.

(a) Geben Sie die Ebene in Parameterform an. (Allgemein)
Markieren Sie auch *Stütz-* und *Spannvektoren*.

$$E : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}}_{Stützvektor} + r \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{Spannvektor} + s \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{Spannvektor}$$

(b) Wie sieht eine Ebene in Koordinatenform aus? (Allgemein)

$$E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

Aufgabe 2 / 6 Pkt.

Überführen Sie die Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ in die Koordinatenform.
Wir stellen das Gleichungssystem auf:

I $\quad x_1 = 1 - 5r + 3s$
II $\quad x_2 = 2 + 3r - 5s$
III $\quad x_3 = 3 - r + 4s$

Es gibt zwei Möglichkeiten dies in die Koordinatenform zu überführen. Zunächst gehen wir mit dem Gauß-Algorithmus vor.
Wir möchten also die Dreiecksform auf der rechten Seite des Gleichzeichens erhalten.

$3 * III + II$
I $\quad x_1 = 1 - 5r + 3s$
II $\quad x_2 = 2 + 3r - 5s$
III' $\quad x_2 + 3x_3 = 11 + 7s$

$5II + 3I$
I $\quad x_1 = 1 - 5r + 3s$
II' $\quad 3x_1 + 5x_2 = 13 - 16s$
III' $\quad x_2 + 3x_3 = 11 + 7s$

$16III' + 7II'$
I $\quad x_1 = 1 - 5r + 3s$
II' $\quad 3x_1 + 5x_2 = 13 - 16s$
III" $\quad 21x_1 + 51x_2 + 48x_3 = 267$

---

bbs.eins.mainz

Wir sehen, dass III' bereits die Koordinatenform hat.

$E: 21x_1 + 51x_2 + 48x_3 = 267 \Leftrightarrow E: 7x_1 + 17x_2 + 16x_3 = 89$

Die alternative Vorgehensweise ist das Umformen nach r bzw. s und anschließende einsetzen.

I $\quad x_1 = 1 - 5r + 3s$

II $\quad x_2 = 2 + 3r - 5s$

III $\quad x_3 = 3 - r + 4s \qquad |-x_3; +r \qquad \Rightarrow r = 3 + 4s - x_3$

r in II einsetzen

II' $\quad x_2 = 2 + 3\underbrace{(3 + 4s - x_3)}_{r} - 5s$

$x_2 = 2 + 9 + 12s - 3x_3 - 5s$

$x_2 = 11 + 7s - 3x_3 \qquad |+3x_3; -11$

$x_2 + 3x_3 - 11 = 7s \qquad |: 7$

$\frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3 - \frac{11}{7} = s$

Da in $r = 3 + 4s - x_3$ noch ein s vorkommt, müssen wir s zunächst hier einsetzen.

$$r = 3 + 4\underbrace{\left(\frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3 - \frac{11}{7}\right)}_{s} - x_3 = 3 + \frac{4}{7}x_2 + \frac{12}{7}x_3 - \frac{44}{7} - x_3$$

$\Rightarrow r = -\frac{23}{7} + \frac{4}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_3$

Jetzt können wir r und s in I einsetzen!

$$\text{I'} \quad x_1 = 1 - 5\underbrace{\left(-\frac{23}{7} + \frac{4}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_3\right)}_{r} + 3\underbrace{\left(\frac{1}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3 - \frac{11}{7}\right)}_{s}$$

$$x_1 = 1 + \underbrace{\frac{115}{7} - \frac{20}{7}x_2 - \frac{25}{7}x_3}_{-5r} + \underbrace{\frac{3}{7}x_2 + \frac{9}{7}x_3 - \frac{33}{7}}_{3s}$$

$x_1 = \frac{89}{7} - \frac{17}{7}x_2 - \frac{16}{7}x_3$

Es ergibt sich also:

$E: x_1 + \frac{17}{7}x_2 + \frac{16}{7}x_3 = \frac{89}{7} \Leftrightarrow E: 7x_1 + 17x_2 + 16x_3 = 89$

Aufgabe 3 / 5 + (2) Pkt.

Gegeben ist die Ebene $E: 7x_1 + 17x_2 + 16x_3 = 89$.

Geben Sie die Parameterform der Ebene E an.

Wir formen nach einer der Koordinaten um!

$E: 7x_1 + 17x_2 + 16x_3 = 89 \qquad |-17x_2; -16x_3$

$7x_1 = 89 - 17x_2 - 16x_3 \qquad |: 7$

$x_1 = \frac{89}{7} - \frac{17}{7}x_2 - \frac{16}{7}x_3$

Damit haben wir eine der drei Gleichungen, die uns durch die Parameterform gegeben ist. Es fehlen also noch die anderen zwei.

bbs.eins.mainz

$$\begin{array}{rccccccc} x_1 = & \frac{89}{7} & - & \frac{17}{7} & x_2 & - & \frac{16}{7} & x_3 \\ x_2 = & 0 & + & 1 & x_2 & + & 0 & x_3 \\ x_3 = & \underbrace{0}_{\vec{p}} & + & \underbrace{0}_{\vec{u}} & \underbrace{x_2}_{s} & + & \underbrace{1}_{\vec{v}} & \underbrace{x_3}_{t} \end{array}$$

Damit haben wir alle Vektoreintragungen für die Parametergleichung. Es folgt:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{89}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{-17}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{-16}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(*) Prüfen Sie außerdem, ob $A(\underbrace{7}_{x_1} | \underbrace{-8}_{x_2} | \underbrace{11}_{x_3})$ bzw. $B(\underbrace{-6}_{x_1} | \underbrace{1}_{x_2} | \underbrace{-4}_{x_3})$ Punkte auf E sind.

Um dies zu prüfen, setzen wir die durch die Koordinaten gegebenen Punkte in die Koordinatengleichung $E : 7x_1 + 17x_2 + 16x_3 = 89$ ein und prüfen, ob die Gleichung erfüllt ist.

$A(7\|-8\|11)$	$B(-6\|1\|-4)$
$7 * 7 + 17 * (-8) + 16 * 11 = 89$	$7 * (-6) + 17 * 1 + 16 * (-4) = -89 \neq 89$
$\Rightarrow$ A liegt auf E.	$\Rightarrow$ B liegt nicht auf E.