6 Ganzrationale Funktionen

Spricht man von **ganzrationalen Funktionen**, meint man immer eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 x^0$$

Dabei besteht jeder Summand aus $a_n \cdot x^n$ und n ist eine natürliche Zahle, also $n \in \mathbb{N}$.

Vorsicht!
In einer ganzrationalen Funktion müssen nicht alle Exponenten bis Null (0) vorkommen.

6.1 Begrifflichkeiten

Grad

Als **Grad n** einer Funktion bezeichnet man den größten vorkommenden Exponenten.

Beispiel: $f(x) = 3x^4 + 5x^2 - 3$

Diese Funktion hat den Grad $n = 4$ - wegen $\boxed{3x^{4}}$.

Koeffizient

Mit dem Begriff **Koeffizient** a_n bezeichnet man immer den **Faktor vor** dem x^n.

Beispiel: $f(x) = -4x^3 + 3x^1 - 1 \cdot x^0$ hat die Koeffizienten: $a_3 = -4; a_1 = 3; a_0 = -1$

$f(x) = 2\, x^4 + 1 \cdot x^3 - 4\, x^1$ hat die Koeffizienten $a_4 = 2; a_3 = 1; a_1 = -4$.

Charakteristischer Summand

Bei einer ganzrationalen Funktion bezeichnet man den Summanden, der den größten Exponenten hat, als **charakteristischen Summanden**.

Beispiel: Wir betrachten die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 3x^2 - 6x$.

Der charakteristische Summand ist $-\frac{1}{3}x^4$. Setzt sich also zusammen aus dem x-Term und seinem Koeffizienten.

6.2 Prototypen

Eine ganzrationale Funktion kann in unterschiedlicher Form auftreten. Diese bezeichnen wir als Prototypen.

Polynomform

Der oben bereits erwähnte Prototyp

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

wird Polynom genannt und dementsprechend heißt diese Darstellung **Polynomform**.

Faktorform

Wie auch bei den quadratischen Funktionen kann eine ganzrationale Funktion als Produkt der 'Nullstellen-Polynome' dargestellt werden.

$$f(x) = a(x - N_1)(x - N_2) \cdot \ldots \cdot (x - N_{n_1})(x - N_n)$$

Dabei geben uns die einzelnen 'Nullstellen-Polynome' Auskunft über die Nullstellen.

Beispiel: $f(x) = (x - \underbrace{2}_{N_1}) \cdot (x - \underbrace{1}_{N_2}) \cdot (x - \underbrace{(-3)}_{N_3})$

Polynomform ⇔ Faktorform

FF ⇒ PF
Haben wir eine ganzrationale Funktion in **Faktorform** $f(x) = a(x - N_1) \cdot \ldots \cdot (x - N_{n-1}) \cdot (x - N_n)$ gegeben und möchten diese **in die Polynomform** überführen, so multiplizieren wir den Faktor aus und erhalten so die gewünschte Form.

Beispiel: $f(x) = 0,5(x-3)(x+2)(x-1)$

$$\begin{aligned}
f_{FF}(x) &= 0,5(x-3)\underbrace{(x+2)(x-1)}_{ausmultiplizieren} \\
&= 0,5(x-3)(x^2 - x + 2x - 2) \\
&= 0,5\underbrace{(x-3)(x^2 + x - 2)}_{ausmultiplizieren} \\
&= 0,5 \cdot (x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6) \\
&= \underbrace{0,5(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)}_{ausmultiplizieren} \\
&= 0,5x^3 - x^2 - 2,5x + 3
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{PF}(x) = 0,5x^3 - x^2 - 2,5x + 3$$

PF $\Rightarrow$ FF

Haben wir eine ganzrationale Funktion in **Polynomform** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x^1 + a_0$ gegeben und wollen diese **in die Faktorform** überführen, klammern wir zunächst den Koeffizienten des <u>charakteristischen Summanden</u> aus und bestimmen im Anschluss die Nullstellen des Klammerausdrucks. Im Anschluss setzen wir die berechneten Nullstellen in das <u>Gerüst der Faktorform</u> ein.