bbs.eins.mainz Berufsbildende Schule Technik	Vorbereitung Mathematik	Name: Lösung Datum:
HBF IT 18A - V	_____ von _____ Punkten erreicht: _____%	**Note:**

Allgemeines
- Bei der Bearbeitung ist ein **nachvollziehbarer, vollständiger Rechenweg** aufzuschreiben.
- Die Bewertung der Klassenarbeit ist nur bei **gut lesbarer Schrift** möglich.
- Die Lösungen müssen mit dokumentenechtem Stift (**Kugelschreiber** oder **Fine-Liner** - keine rote Mine) erstellt werden.
- Runden Sie ihre Ergebnisse auf **2 Nachkommastellen.** Wurzelausdrücke müssen nicht berechnet werden (z.B. $\sqrt{10}$).

- **Zugelassene Hilfsmittel**: Taschenrechner (nicht graphikfähig / programmierbar)
- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten

Aufgabe 1

Gegeben ist die nachfolgende Funktion:

$$f(x) = -0,5x^3 + 2x^2 + 3x - 4$$

(a) **Geben** Sie den charakteristischen Summanden sowie den y-Achsenabschnitt an.

(b) **Treffen** Sie eine Aussage über das Verhalten der Funktion für große x-Beträge.
Hinweis: Nutzen Sie die Notation $f(x) \xrightarrow{x\to-\infty}$ und $f(x) \xrightarrow{x\to\infty}$

(c) **Endscheiden** und **begründen** Sie, ob der Funktionsgraph symmetrisch ist.

(d) Wie müsste die Funktion verändert werden, um eine Symmetrie zu erhalten?

Aufgabe 2

Beschreiben Sie das **Verhalten** der folgenden Funktionen **für große x-Beträge**.

(a) $f(x) = 5x^3 + 500x^2 - 30$

(b) $f(x) = -0.2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$

(c) $f(x) = -10x^7 + 8x^5 - 6x^3 + 1$

(d) $f(x) = 25x^4 + 20x^3 - 14x + 500$

Aufgabe 3

(I) **Überführen** Sie die in Polynomform gegebene Funktion in die Linearfaktorform.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ (b) $g(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

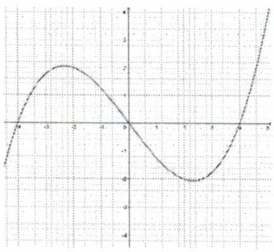
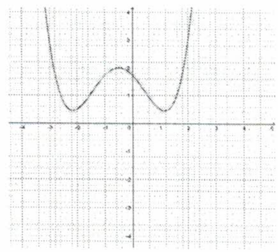
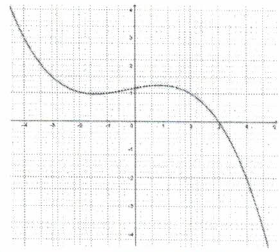
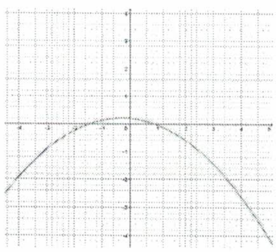
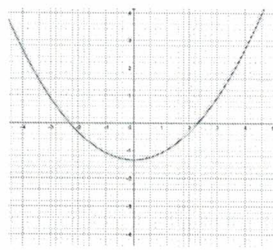
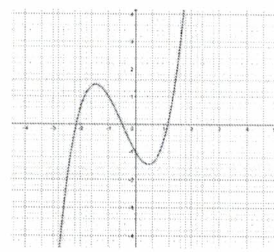
Hinweis: Sie benötigen die Nullstellen.

(II) **Überführen** Sie $\mathbf{f(x) = (x^2 - 3)(x + 2)^2}$ in die Polynomform.

Aufgabe 4

Ordnen Sie die Graphen der Steigungsfunktionen den richtigen Ausgangsgraphen für $f(x)$ zu.

Begründen Sie ihre Entscheidung in Stichpunkten.

Ausgangsgraph von $f(x)$		
(a) 	(b) 	(c) 
Graph der Steigungsfunktion		
(1) 	(2) 	(3) 

Aufgabe 5

Bestimmen Sie jeweils die Steigungsfunktion der nachfolgenden Funktionen.

(I) $f(x) = 4x^4 + 5x^2 - 2x$

(II) $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x + 3$

(III) $h(x) = 0.5x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 3x$

Berechnen Sie zudem jeweils die Steigung des Funktionsgraphen an den Stellen $x_0 = 2$, $x_0 = -1$ und $x_0 = 0,5$.

Aufgabe 1

$f(x) = -0{,}5x^3 + 2x^2 + 3x - 4$

a) charakteristischer Summand: $a_n x^n = -0{,}5x^3$

y-Achsenabschnitt: $a_0 = -4$

b) $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$ $\qquad$ $a_n < 0$ und n unger.

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

c) Nein, der Graph ist nicht symmetrisch, da die Funktion sowohl gerade wie auch ungerade Exponenten aufweist.

d) Punktsymmetrie: Man entfernt die Terme mit Geradem Exponent. ($2x^2$ und -4)

↳ $f(x) = -0{,}5x^3 + 3x$ ist Punktsymmetrisch

Achsensymmetrie: Man entfernt die Terme mit ungeradem Exponent ($-0{,}5x^3$ und $3x$)

↳ $f(x) = 2x^2 - 4$ ist Achsensymmetrisch

Aufgabe 2

a) $f(x) = 5x^3 + 500x^2 - 30$ $a_n > 0$, n ungerade

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

b) $f(x) = -0{,}2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$ $a_n < 0$, n gerade

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

c) $f(x) = -10x^7 + 8x^5 - 6x^3 + 1$ $a_n < 0$, n ungerade

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

d) $f(x) = 25x^4 + 20x^3 - 14x + 500$ $a_n > 0$, n gerade

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

Aufgabe 3

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$0 = x^3 - 3x^2 + 4 \quad \rightarrow \quad x_1 = -1$

Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 3x^2 + 4 : (x+1) = x^2 - 4x + 4 \\
-(x^3 + x^2) \\
\hline
\quad -4x^2 + 4 \\
-(-4x^2 - 4x) \\
\hline
\quad\quad 4x + 4 \\
\quad -(4x + 4) \\
\hline
\quad\quad 0
\end{array}
$$

$$0 = \underbrace{(x^2 - 4x + 4)}_{\text{pq-Formel}} \cdot (x+1)$$

$p = -4 \quad q = 4$

$$x_{2/3} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 4}$$

$= 2 \pm \sqrt{0} \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_3 = 2$ doppelte Nullstelle

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1) \cdot (x-2)^2$$

b) $g(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

Substitution: $z = x^2$

$g_z(z) = z^2 - 4z + 4$

$0 = \underbrace{z^2 - 4z + 4}_{\text{pq-Formel}}$

$p = -4 \quad q = 4$

$z_{1/2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 4}$

$= 2 \pm \sqrt{0}$

$\Rightarrow z_1 = z_2 = 2$

Rücksubstitution: wir setzen für z wieder x^2 ein

$z_1 = x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2$ ist Nullstelle

$x^2 = 2 \quad | \sqrt{}$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$

$z_2 = x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2$ ist Nullstelle

$x^2 = 2 \quad | \sqrt{}$

$x_{3/4} = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow x_1 = x_3 = \sqrt{2}$ doppelte Nullstelle

$x_2 = x_4 = -\sqrt{2}$ doppelte Nullstelle

$\Rightarrow g(x) = (x - \sqrt{2})^2 (x + \sqrt{2})^2$

(II) $f(x) = (x^2-3)(x+2)^2$ | Potenz ausrechnen 1. bin. Formel

$= (x^2-3)(x^2+4x+4)$ | Klammern ausmult.

$= x^4+4x^3+4x^2-3x^2-12x-12$ | Zusammenfassen

$= \underline{\underline{x^4+4x^3+x^2-12x-12}}$

Aufgabe 4

(a) gehört zu (2)

↳ Ausgangsgraph hat zunächst <u>positive</u> Steigung Steigungswechsel bei $x \approx -2{,}5$, anschließend <u>negative</u> Steigung.
Erneuter Steigungswechsel bei $x \approx 2{,}5$, danach wieder <u>positive</u> Steigung.
Ausgangsgraph hat <u>ungeraden</u> Grad => Steigungsgraph hat <u>geraden</u> Grad.

(b) gehört zu (3)

↳ Ausgangsgraph hat für $-\infty < x < -2{,}25$ und $-0{,}5 < x < 1{,}125$ eine <u>negative</u> Steigung und für $-2{,}25 < x < -0{,}5$ und für $1{,}125 < x < \infty$ eine <u>positive</u> Steigung.
Entsprechend muss der Steigungsgraph erst unter, dann über, dann unter und anschließend über der x-Achse verlaufen.

(c) gehört zu (1)

↳ Der Ausgangsgraph fällt bis $x \approx -1{,}5$, hat also eine negative Steigung.
Ab dieser Stelle bis $x \approx 1$ steigt der Graph, hat also eine positive Steigung um anschließend ab $x \approx 1$ wieder zu fallen. Die Steigung wird also negativ.

Aufgabe 5

(I) $f(x) = 4x^4 + 5x^2 - 2x$

$f'(x) = 16x^3 + 10x - 2$

$f'(2) = 146$

$f'(-1) = -28$

$f'(0{,}5) = 5$

(II) $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x + 3$

$g'(x) = -x^2 - 2$

$g'(2) = -6$

$g'(-1) = -3$

$g'(0{,}5) = -2{,}25$

(III) $h(x) = 0{,}5x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 3x$

$h'(x) = 1{,}5x^2 + \frac{2}{3}x - 3$

$h'(2) = 4{,}\overline{3}$

$h'(-1) = -2{,}17$

$h'(0{,}5) = -2{,}29$