

#### Aufstellen von Geraden

Um eine Gerade ( $g : \vec{x} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + r * \underbrace{\vec{u}}_{\text{Richtungsvektor}}$ ) aufzustellen benötigt man zwei Informationen:

- (a) **Zwei** Punkte (A und B)
- (b) den **Stützvektor**  $\vec{p}$  sowie einen **weiteren Punkt** B
- (c) den **Richtungsvektor**  $\vec{u}$  sowie einen **weiteren Punkt** A
- (d) den **Stützvektor**  $\vec{p}$  und den **Richtungsvektor**  $\vec{u}$

**(a)** Hat man **zwei** Punkte  $A(a_1|a_2|a_3)$  und  $B(b_1|b_2|b_3)$ , müssen wir aus diesen den *Stütz-* sowie den *Richtungsvektor* aufstellen. Dies tun wir wie folgt:

$$\vec{p} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor}} \quad \vec{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow g : \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

**(b)** Hat man den **Stützvektor**  $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$  und **einen** Punkt  $B(b_1|b_2|b_3)$  müssen wir daraus den *Richtungsvektor* bestimmen. Dies tun wir wie folgt:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} b_1 - p_1 \\ b_2 - p_2 \\ b_3 - p_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}} \Rightarrow g : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

**(c)** Hat man den **Richtungsvektor**  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  und **einen** Punkt  $a(a_1|a_2|a_3)$  benötigt man nur noch den *Stützvektor*. Diesen erhält man wie folgt:

$$\vec{p} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor}} \Rightarrow g : \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

(d) Hat man den **Stützvektor**  $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$  und den **Richtungsvektor**  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  muss man diese nur noch in die Geradengleichung einsetzen:

$$\Rightarrow g : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Ein weiterer Punkt auf der Geraden

Gegeben ist eine Gerade der Form  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ .

Um einen weiteren Punkt auf dieser Geraden zu bestimmen, wählt man für den Parameter  $r \in \mathbb{R}$  einen Wert und bestimmt den entsprechenden Punkt P.

*Beispiel:*

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Wir wählen  $r = 2$  und erhalten

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Da aber nach einem Punkt gesucht ist, müssen wir zu dem erhaltenen Vektor  $\vec{P}$  noch den Punkt P (8|3|-8) angeben.

Punktprüfung

Gegeben ist eine Gerade der Form  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  sowie ein Punkt P( $P_1|P_2|P_3$ ).

Um zu prüfen, ob der Punkt P auf der gegebenen Gerade g liegt, setzen wir  $\vec{P} = g$  und bestimmen die jeweiligen Werte für r.

*Beispiel:* Gegeben ist  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$  und der Punkt P (6|0| -2).

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 6 = 4 + 2r \\ \Rightarrow 0 = -3 + 3r \\ -2 = 2 - 5r \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6 = 4 + 2r & -4 \\ 2 = 2r & : 2 \quad \Rightarrow r = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 0 = -3 + 3r & +3 \\ 3 = 3r & : 3 \quad \Rightarrow r = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} -2 = 2 - 5r & -2 \\ -4 = -5r & : 5 \quad \Rightarrow r = \frac{4}{5} \end{array}$$

Für  $r$  haben wir zweimal den Wert 1 und einmal den Wert  $\frac{4}{5}$ . Daher können wir folgern, dass der Punkt P nicht auf der Geraden  $g$  liegt.

Erhalten wir hingegen **dreimal den gleichen Wert** für  $r$  berechnet, so liegt der Punkt P auf der Geraden  $g$ .

#### Lage von Geraden

Wir haben die zwei Geradengleichungen gegeben.

$$g : \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} \quad \text{und} \quad h : \vec{x} = \vec{q} + t\vec{v}$$

Für die gegenseitige Lage dieser zwei Geraden gilt folgendes:  $g$  und  $h \dots$

+ ... haben **genau einen** Schnittpunkt, wenn die Vektorgleichung bzw. das dazugehörige Gleichungssystem  $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$  **eine** Lösung besitzt.

+ ... sind **gleich**, wenn die Vektorgleichung bzw. das dazugehörige Gleichungssystem  $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$  **unendlich viele** Lösungen besitzt.

+ ... haben **keinen** Schnittpunkt, wenn die Vektorgleichung bzw. das dazugehörige Gleichungssystem  $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$  **keine** Lösungen besitzt.

Sind ferner die Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  ...

○<sub>1</sub> ... linear **abhängig**, so sind  $g$  und  $h$  **parallel**

○<sub>2</sub> ... linear **unabhängig**, so sind  $g$  und  $h$  zueinander **windschief**

**Beispiel:** Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3.5 \\ -1.5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0.5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die gegenseitige Lage der beiden Geraden zu prüfen, müssen wir  $g = h$  setzen und das Gleichungssystem lösen.

$$\begin{array}{rcl} -6 + 3.5r = 2 - 0.5t & \text{I} & \\ 6 - 1.5r = -3 + 3t & \text{II} & \\ 10 = 8 + r & | -8 & \Rightarrow r = 2 \quad (*) \end{array}$$

Wir setzen nun (\*) in die Gleichungen **I** und **II** ein und bestimmen jeweils  $t$ .

$$\begin{array}{l|l} \text{I} \xrightarrow{\text{mit}(*)} & \text{II} \xrightarrow{\text{mit}(*)} \\ -6 + 3.5 \cdot 2 = 2 - 0.5t & 6 - 1.5 \cdot 2 = -3 + 3t \\ \Leftrightarrow -6 + 7 = 2 - 0.5t & | -2 \\ \Leftrightarrow -1 = -0.5t & | : (-0.5) \\ \Rightarrow t = 2 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} \Leftrightarrow 6 - 3 = -3 + 3t & | +3 \\ \Leftrightarrow 6 = 3t & | : 3 \\ \Rightarrow t = 2 & \end{array}$$

Wir erhalten **eine** Lösung. Um **den** Schnittpunkt zu berechnen, setzen wir die Werte von  $r$  bzw.  $t$  in die entsprechenden Geradengleichungen ein.

$$\begin{aligned} -6 + 3.5 \cdot 2 &= \underbrace{1}_{=p_1} = 2 - 0.5 \cdot 2 \\ 6 - 1.5 \cdot 2 &= \underbrace{3}_{=p_2} = -3 + 3 \cdot 2 \\ 10 + 0 \cdot 2 &= \underbrace{10}_{=p_3} = 8 + 1 \cdot 2 \end{aligned}$$

So ergibt sich ein Schnittpunkt bei SP (1|3|10)

Erhalten wir hingegen **keine** eindeutige Lösungen für  $r$  und  $t$ , können wir daraus schließen, dass sich  $g$  und  $h$  **keinen** Schnittpunkt haben. Für eine genauere Aussage über die Lage müssen wir uns das Verhältnis der Richtungsvektoren anschauen.

Dies tun wir anhand eines **Beispiels**.

Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Um die gegenseitige Lage der beiden Geraden zu prüfen, müssen wir  $g = h$  setzen und das Gleichungssystem lösen.

$$1 + 2r = 2 + 0t \Rightarrow r = \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$2 + 0r = 3 + 1t \Rightarrow t = -1 \quad (**)$$

$$1 + r = 4 - 1t \quad |$$

Wir prüfen mit |, ob unsere berechneten Werte von  $r$  (\*) und  $t$  (\*\*) korrekt sind.

$$| \xrightarrow{\text{mit } (*) / (**)} 1 + \overbrace{\frac{1}{2}}^r = 1.5 \neq 3 = 4 - 1 * \overbrace{1}^t$$

Wir erhalten also **keine** Lösung für  $r$  und  $t$ .

Daher betrachten wir nun die Richtungsvektoren  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Zu klären ist die Frage: Existiert eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$ , so dass  $a * \vec{u} = \vec{v}$ ?

$$2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$0a = 1 \quad \nexists$$

$$1a = -1 \Rightarrow a = -1$$

Es ergeben sich unterschiedliche bzw. widersprüchliche Werte für  $a$ , damit können wir folgern, dass es **kein** solches  $a$  gibt.  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  also linear **unabhängig** und somit  $g$  und  $h$  **windschief** sind.

Sich schneidende/Gleiche/Parallele/Windschiefe Geraden aufstellen

Gegeben ist eine Gerade mit folgender Form  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ .

Gesucht ist jeweils eine Gerade ...

- + ... $h$ , die  $g$  **einen** gemeinsamen Schnittpunkt hat
- + ... $i$ , die **gleich**  $g$  ist
- + ... $j$ , die **parallel** zu  $g$  verläuft
- + ... $k$ , die zur Geraden  $g$  **windschief** ist

*h hat **einen** gemeinsamen Schnittpunkt mit  $g$ :*

Als gemeinsamen Schnittpunkt wählen wir den Stützvektor von  $g$ . Dieser wird auch Stützvektor von  $h$ . Nun müssen wir noch gewährleisten, dass die Richtungsvektoren linear **unabhängig** sind. Dafür ändern wir lediglich ein Vorzeichen im Richtungsvektor  $\vec{u}$  von  $g$  und erhalten so den Richtungsvektor  $\vec{v}$  von  $h$ .

$$\Rightarrow h : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

*i ist **gleich**  $g$ :*

Als einen gemeinsamen Punkt wählen wir den Stützvektor von  $g$ . Dieser wird auch Stützvektor von  $i$ . Nun müssen wir noch gewährleisten, dass die Richtungsvektoren linear **abhängig** sind. Dafür ändern wir die einzelnen Komponenten des Richtungsvektors  $\vec{u}$  von  $g$  im gleichen Verhältnis und erhalten so den Richtungsvektor  $\vec{v}$  von  $i$ .

$$\Rightarrow i : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 * u_1 \\ 2 * u_2 \\ 2 * u_3 \end{pmatrix}$$

*j ist **parallel** zu  $g$ :*

Für den Stützvektor von  $j$  benötigen wir einen Punkt, der nicht auf  $g$  liegt. Hierfür können wir eine Komponente des Stützvektors  $\vec{p}$  von  $g$  ändern.

Da die Richtungsvektoren bei **parallelen** Geraden linear **abhängig** sind, können wir den Richtungsvektor  $\vec{u}$  von  $g$  oder ein Vielfaches davon als Richtungsvektor  $\vec{v}$  von  $j$  verwenden.

$$\Rightarrow j : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 + 2 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + w * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

*j ist **windschief** zu  $g$ :*

Für den Stützvektor von  $j$  benötigen wir einen Punkt, der nicht auf  $g$  liegt. Hierfür können wir eine Komponente des Stützvektors  $\vec{p}$  von  $g$  ändern.

Da die Richtungsvektoren bei **windschiefen** Geraden linear **unabhängig** sind, ändern wir eine Komponente des Richtungsvektors  $\vec{u}$  von  $g$  und erhalten den Richtungsvektor  $\vec{v}$  von  $i$  verwenden.

$$\Rightarrow j : \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 - 1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 4 * u_3 \end{pmatrix}$$