4 Nullstellen bestimmen

Betrachtet man **quadratischen Funktionen** $\mathbf{f(x)}$, so begegnen uns verschiedene Typen von quadratischen Funktionen.
Wollen wir die Nullstellen bestimmen, so müssen wir die Funktion gleich Null setzen ($=0$) und anschießend den Wert für $\mathbf{x}$ bestimmen, für den die Gleichung erfüllt ist.

Nachfolgenden sind verschiedene Verfahren aufgeführt, die zur Lösung dieser Fragestellung hilfreich sein können.

4.1 $\mathbf{f(x) = x^2 - c \;/\; f(x) = -x^2 + c}$

Hat unsere Funktion die Form $\underline{f(x) = x^2 - c}$, dann wollen wir folgendes tun:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - c && \mid = 0 \\ x^2 - c &= 0 && \mid + c \\ x^2 &= c && \mid \sqrt{} \\ x &= \pm\sqrt{c} \end{aligned}$$

Wir haben also durch **Nullsetzen** und **nach $\mathbf{x}$ umformen** bestimmt, dass $x = \pm\sqrt{c}$ die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - c$ sind.

Hat unsere Funktion die Form $\underline{f(x) = -x^2 + c}$, dann wollen wir folgendes tun:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + c && \mid = 0 \\ -x^2 + c &= 0 && \mid + x^2 \\ c &= x^2 && \mid \sqrt{} \\ \pm\sqrt{c} &= x \end{aligned}$$

Wir haben also durch **Nullsetzen** und **nach $\mathbf{x}$ umformen** bestimmt, dass $x = \pm\sqrt{c}$ auch die Nullstellen der Funktion $f(x) = -x^2 + c$ sind.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 - 9$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 9 && \mid + 9 \\ 9 &= x^2 && \mid \sqrt{} \\ \pm\sqrt{9} = \pm 3 &= x \end{aligned}$$

4.2 $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$

Bei Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ gibt es abhängig von den Parameterwerten von a, b und c verschiedene Vorgehensweisen.

$\mathbf{f(x) = x^2 + px + q}$

Ist der Koeffizient von x^2 eine $\mathbf{1}$, so können wir die pq-Formel anwenden. Diese liefert und die Nullstellen der Funktion.

pq-Formel
Ist eine Funktion der Form $f(x) = x^2 + px + q$ gegeben, so liefert

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

die Nullstellen der Funktion.

Beispiel: Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 3$. Wir setzen $f(x) = 0$ und bestimmen mit Hilfe der pq-Formel die Nullstellen.

$$0 = x^2 \underbrace{-5}_{p} x \underbrace{+3}_{q}$$

pq-Formel

$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 3}$$

$$x_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right) - 3}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} + \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right) - 3} \qquad = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$
$$x_2 = \frac{5}{2} - \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right) - 3} \qquad = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

$\mathbf{f(x) = x^2 + bx + c}$

Haben wir eine Funktion $f(x) = x^2 + bx + c$ gegeben und für die Koeffizienten b und c gilt: $\sqrt{c}$ ist eine ganze Zahl und $b = \pm 2 \cdot \sqrt{c}$, dann haben wir die 1. oder 2. Binomische Formel gegeben.

Ist $f(x) = x^2 + bx + c$, prüft man:

- Ist $\sqrt{c}$ eine Ganze Zahl?
  - Wenn ja, dann prüfe wir ob $b = \pm 2 \cdot \sqrt{c}$
    - Ist beides erfüllt, dann ist $x = \left(\text{Setze hier das Vorzeichen von b ein}\right)\ \sqrt{c}$ eine doppelte Nullstelle. $f(x) = (x \pm \sqrt{c})^2$

$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$

Hat unser x^2 einen Koeffizienten $a \neq 0$, so können wir **nicht** die pq-Formel anwenden.
Um dennoch die Gleichung $0 = ax^2 + bx + c$ lösen zu können, bleiben uns diverse Möglichkeiten.
Zunächst können wir die Funktion faktorisieren, sie also in die bekannte Linearfaktorform $f(x) = a \cdot (x - x_{N_1}) \cdot (x - x_{N_2})$ überführen.

Produkt ist Null (PIN)
Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. In Zeichen:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0$$

$\Leftrightarrow$ - Genau dann wenn

Vorsicht: Eine Funktion lässt sich nur Faktorisieren, wenn sie Nullstellen hat.

Zum Faktorisieren von Funktionen wenden Sie eines der Verfahren aus dem Skript *Quadratischen Funktionen faktorisieren*.
Für Beispiele schlagen Sie in eben genanntem Skript nach.

Alternativ können Sie auch den Koeffizienten a ausklammern und im Anschluss die pq-Formel anwenden. $f(x) = ax^2 + bx + c$ wird durch ausklammern von a zu $f(x) = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a}x\ \frac{c}{a})$. Auf den Klammerausdruck können Sie nun die pq-Formel anwenden.

4.3 $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx}$

Ist in unserer Funktion die Konstante c vorhanden, können wir zunächst Faktorisieren indem wir das **kleinste gemeinsame Vielfache** von ax^2 und bx ausklammern (mindestens x).
Dann sind wird mit einem Produkt konfrontiert, für welches wir die oben erwähnte Regel anwenden (*Produkt ist Null*). **Beispiel:**

$$\begin{aligned} f(x) &= 15x^2 + 5x && |5x \cdot (\dots) \\ f(x) &= 5x \cdot (3x+1)6 \\ 0 &= 5x \cdot (3x+1) && \Leftrightarrow 5x = 0 \text{ oder } 3x+1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x &= 0 && |:5 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x+1 &= 0 && |-1 \\ 3x &= -1 && |:3 \\ x_2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$