

Beschreiben Sie das **Verhalten** der folgenden Funktionen **für große bzw. kleine x-Werte**.

Beachten Sie die Schreibweise $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \infty$ / $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$

(a) $f(x) = 3x^6 - 18x^4 + 27x^2$

betrachte $3x^6$

a_n positiv und n gerade:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \infty$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

(b) $f(x) = -0.9x^7 + 10x^3$

betrachte $-0.9x^7$

a_n negativ und n ungerade:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \infty$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$$

(c) $f(x) = -5x^4 + 20x^3 - 12x^2 + 8$

betrachte $-5x^4$

a_n negativ und n gerade:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \infty$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$$

(d) $f(x) = 0.8x^5 - 5x^3 - x$

betrachte $0.8x^5$

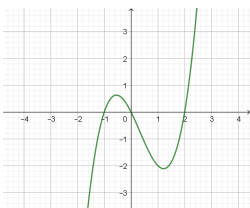
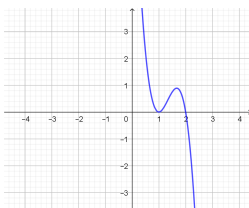
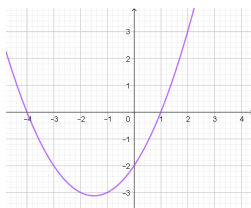
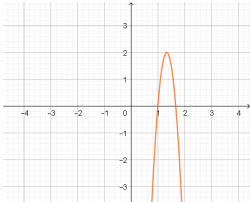
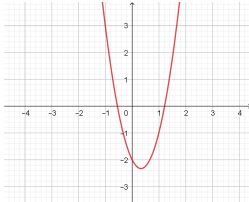
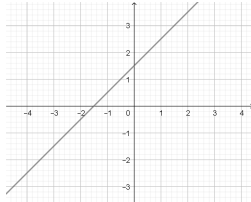
a_n positiv und n ungerade:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \infty$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

Ordnen Sie die Graphen der Ableitungsfunktionen $f'(x)$ den richtigen Ausgangsgraphen für $f(x)$ zu.

Begründen Sie ihre Entscheidung in Stichpunkten.

Ausgangsgraph von $f(x)$		
(a) 	(b) 	(c) 
Graph der Ableitungsfunktion $f'(x)$		
(1) 	(2) 	(3) 

Ausgangsgraph (a) gehört zum Ableitungsgraph (2)

- Ausgangsgraph ist eine Funktion 3. Grades und hat Extrempunkte bei $x = 0.5$ und ca. $x = 1.2$. Der Ableitungsgraph (b) ist 2. Grades und hat Nullstellen bei $x = 0.5$ und $x = 1.2$ (Wir wissen, $f(x)$ ist Extrempunkt wenn $f'(x) = 0$)

Die Steigung vor dem ersten Extrempunkt $x < 0.5$ ist positiv (Ableitungsgraph oberhalb der x-Achse), für $0.5 < x < 1.2$ ist die Steigung negativ (Ableitungsgraph unterhalb der x-Achse) und die Steigung nach dem zweiten Extrempunkt $1.2 < x$ ist wieder positiv (Ableitungsgraph oberhalb der x-Achse).

Ausgangsgraph (b) gehört zu Ableitungsgraph (1)

- Ausgangsgraph ist eine Funktion 3. Grades und hat Extrempunkte bei ca. $x = 1$ und ca. $x = 1.75$. Der Ableitungsgraph (b) ist 2. Grades und hat Nullstellen bei ungefähr $x = 1$ und $x = 1.75$ (Wir wissen, $f(x)$ ist Extrempunkt wenn $f'(x) = 0$)

Die Steigung vor dem ersten Extrempunkt $x < 1$ ist negativ (Ableitungsgraph unterhalb der x-Achse), für $1 < x < 1.75$ ist die Steigung positiv (Ableitungsgraph oberhalb der x-Achse) und die Steigung nach dem zweiten Extrempunkt $1.75 < x$ ist wieder negativ (Ableitungsgraph unterhalb der x-Achse).

Ausgangsgraph (c) gehört zu Ableitungsgraph (3)

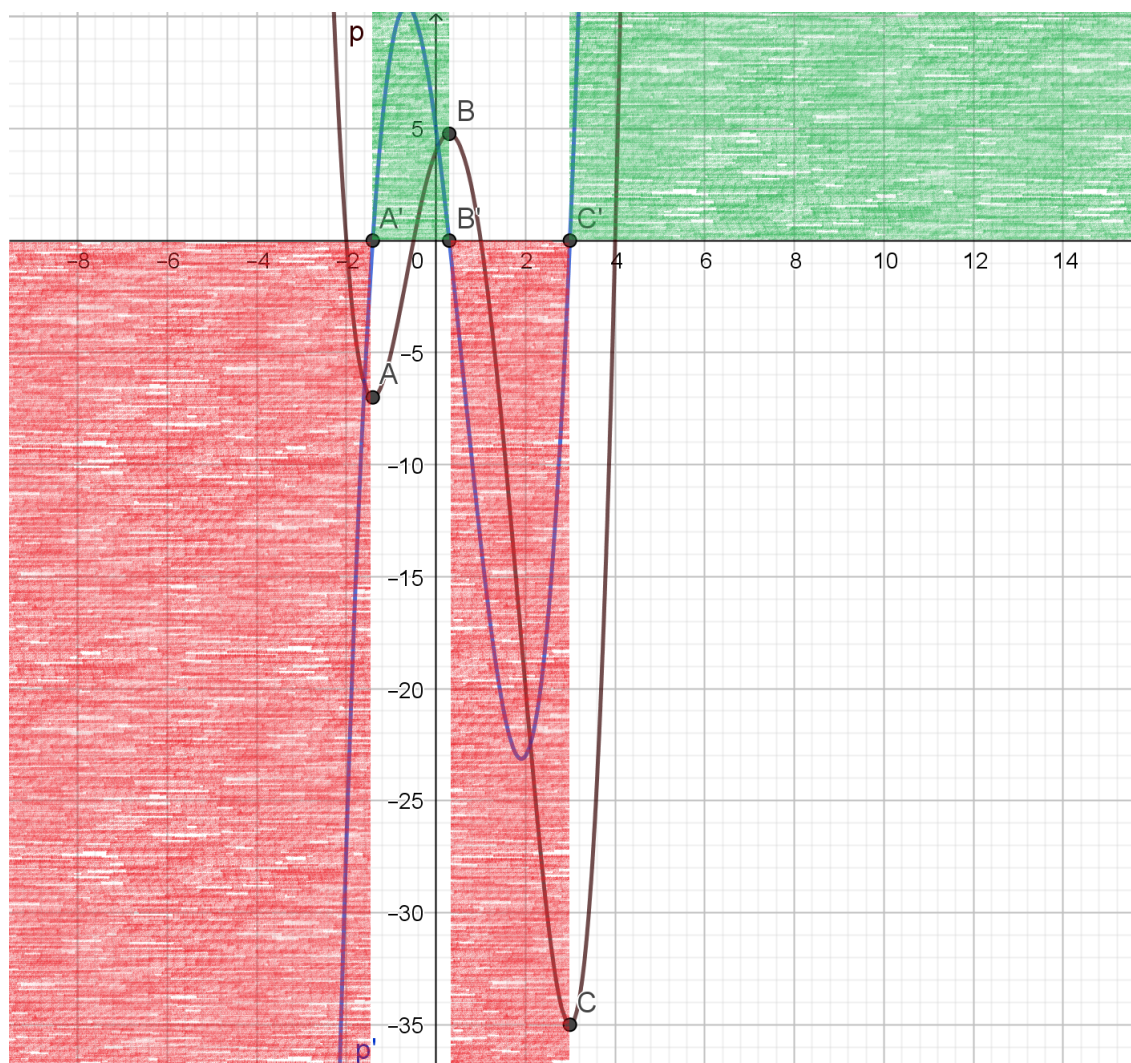
- Ausgangsgraph ist eine Funktion 2. Grades und hat einen Extrempunkt bei ca. $x = -1.5$. Der Ableitungsgraph (b) ist linear, also 1. Grades und hat genau eine Nullstellen bei ungefähr $x = -1.5$ (Wir wissen, $f(x)$ ist Extrempunkt wenn $f'(x) = 0$)

Die Steigung vor dem Extrempunkt $x < -1.5$ ist negativ (Ableitungsgraph unterhalb der x-Achse), nach dem Extrempunkt $-1.5 < x$ ist positiv (Ableitungsgraph oberhalb der x-Achse).

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion zu gegebenem Funktionsgraphen.

Tun Sie dies im gleichen Koordinatensystem.

Beschreiben Sie ihr Vorgehen in Stichpunkten.



Bestimmen Sie rechnerisch die **Nullstellen** der Funktionen:

(a) $f(x) = x^3 - 4.5x^2 + 5x$

$$0 = x^3 - 4.5x^2 + 5x \quad | \ x \text{ in jedem Term vorhanden} \Rightarrow \mathbf{x \text{ ausklammern.}}$$

$$0 = \underbrace{x}_{=0 \text{ oder}} * \underbrace{(x^2 - 4.5x + 5)}_{=0} \quad | \ \text{Ein Produkt } a * b = 0, \text{ wenn ein Faktor } a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

$$x = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 4.5x + 5 \\ \underbrace{\quad}_p \quad \underbrace{\quad}_q \end{array} \right. \quad | \text{ pq-Formel}$$

$$x_{1,2} = -\frac{-4.5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4.5}{2}\right)^2 - 5}$$

$$x_1 = \frac{4.5}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4.5}{2}\right)^2 - 5} \quad x_2 = \frac{4.5}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4.5}{2}\right)^2 - 5}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 2.5$$

(b) $f(x) = x^2 - 1$

$$0 = x^2 - 1 \quad | \ x \text{ nur in einem Term vorhanden. Nach } x \text{ umformen.}$$

$$1 = x^2 \quad | \ \sqrt{\quad}$$

$$x_1 = +\sqrt{1} \quad x_2 = -\sqrt{1}$$

Ermitteln Sie rechnerisch die **Extrempunkte** der Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 + x^2 - 40x$

Wir bestimmen zunächst die Ableitung. Wir wissen, x ist ein Extrempunkt, wenn $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = x^3 + 7x^2 + 2x - 40 \quad | \ \text{Um die Extremstellen zu berechnen, setzen wir } f'(x) = 0$$

$$0 = x^3 + 7x^2 + 2x - 40 \quad | \ \text{Haben wir eine Funktion 3. Grades, so versuchen wir eine Nullstelle zu raten. Meist } -2; -1; 0; 1 \text{ oder } 2.$$

In unserem Fall ist $x = 2$ eine Nullstelle. Wir führen also die Polynomdivision mit $f'(x) : (x - 2)$ durch.

$$\begin{array}{r} (x^3 + 7x^2 + 2x - 40) : (x - 2) = x^2 + 9x + 20 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ 9x^2 + 2x \\ \underline{-9x^2 + 18x} \\ 20x - 40 \\ \underline{-20x + 40} \\ 0 \end{array}$$

Unser Ergebnis $x^2 + \underbrace{9}_p x + \underbrace{20}_q$ ist eine quadratische Funktion auf die wir die pq-Formel anwenden können.

$$x_1 = -\frac{9}{2} + \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 - 20}$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = -\frac{9}{2} - \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 - 20}$$

$$x_2 = -5$$

Um die Extrempunkte zu berechnen, setzen wir die errechneten x-Werte in $f(x)$ ein. So ergibt sich

$$f(-5) = 89.58$$

$$(-5|89.58)$$

$$f(-4) = 90.67$$

$$(-4|90.67)$$

$$f(0) = -53.33$$

$$(0|-53.33)$$

(b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 0,75x^2 - 2,5x$

Wir bestimmen wieder die Ableitung. *Denn wir wissen, x ist ein Extrempunkt, wenn $f'(x) = 0$.*

$$f'(x) = x^2 + 1,5x - 2,5$$

| Um die Extremstellen zu berechnen, setzen wir $f'(x) = 0$

$$0 = x^2 + \underbrace{1,5}_p x \underbrace{-2,5}_q$$

| Wir haben eine quadratische Funktion, also nutzen wir die pq-Formel.

$$x_1 = -\frac{1,5}{2} + \sqrt{\left(-\frac{1,5}{2}\right)^2 - (-2,5)}$$

$$x_2 = -\frac{1,5}{2} - \sqrt{\left(-\frac{1,5}{2}\right)^2 - (-2,5)}$$

$$x_1 = -\frac{1,5}{2} + \sqrt{\left(-\frac{1,5}{2}\right)^2 + 2,5}$$

$$x_2 = -\frac{1,5}{2} - \sqrt{\left(-\frac{1,5}{2}\right)^2 + 2,5}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2,5$$

Um die Extrempunkte zu berechnen, setzen wir die errechneten x-Werte in $f(x)$ ein. So ergibt sich

$$f(-2,5) = 5.73$$

$$(-2,5|5.73)$$

$$f(1) = -1.42$$

$$(1|-1.42)$$

(c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x$

Wir bestimmen zunächst die Ableitung. *Denn wir wissen, x ist ein Extrempunkt, wenn $f'(x) = 0$.*

$$f'(x) = x - 4$$

| x ist nur in einem Term vorhanden, daher nach x umformen.

$$4 = x$$

| Wir haben also bei $x = 4$ einen Extrempunkt.

Um diesen Extrempunkt zu berechnen, setzen wir den errechneten x-Wert in $f(x)$ ein. Damit folgt

$$f(4) = -8$$

$$(4|-8)$$