Aufgabe 1

Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen.

(a) Wie bestimmen Sie die Nullstelle einer linearen Funktion?

(b) Welche Möglichkeiten gibt es, die Nullstellen einer quadratischen Funktion zu bestimmen?

(c) Gegeben ist eine Funktion dritten Grades. Wie gehen Sie vor, um die Nullstellen dieser Funktion zu bestimmen?

(d) Um die Nullstellen einer Funktion vom Grad 4 zu berechnen, gehen Sie wie vor?

Aufgabe 2

Aufgabe 2.1

Gegeben sind die folgenden Funktionen. Bestimmen Sie die Nullstellen.

$$(a)\ f(x) = 5x + 10$$
$$(b)\ f(x) = x^2 - 15x$$
$$(c)\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 25$$
$$(d)\ f(x) = 4x^2 + 12x$$
$$(e)\ f(x) = -3x^2 + 15x - 18$$
$$(f)\ f(x) = -x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}$$
$$(g)\ f(x) = -0.8x^4 - 2x^3 + 5x^2$$
$$(h)\ f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$$
$$(i)\ f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$$
$$(j)\ f(x) = -5x^3 + 25x^2 - 20$$

Aufgabe 2.2

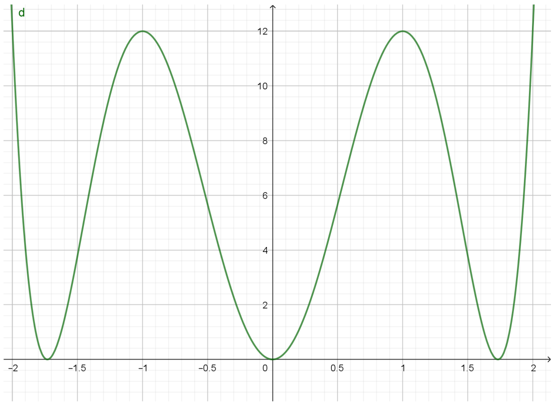
Geben Sie jeweils das Verfahren an, welches Sie verwendet haben und begründen Sie, ob dieses das sinnvollste ist.

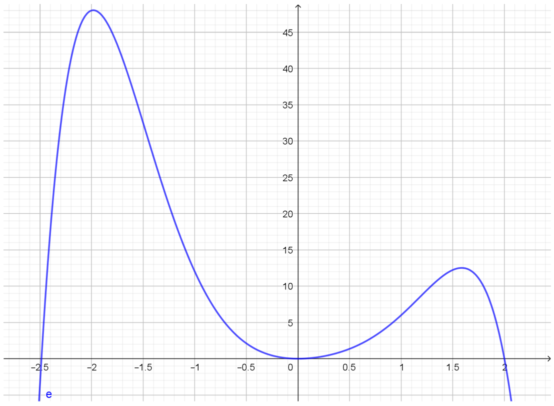
Aufgabe 3

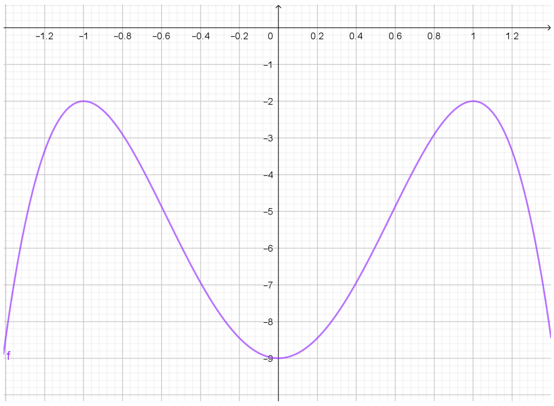
Geben Sie die erste ($f'(x)$) und zweite ($f''(x)$) Ableitung der Funktionen aus Aufgabenteil *2.1* an.

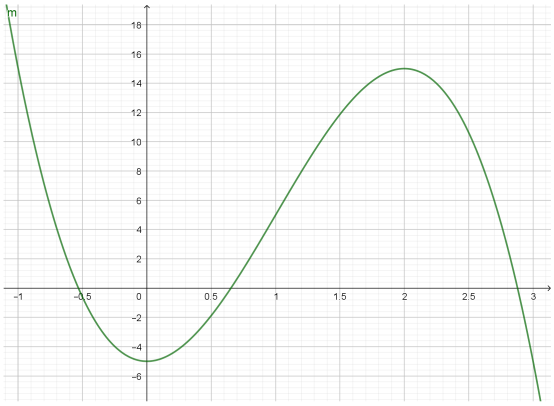
Aufgabe 4

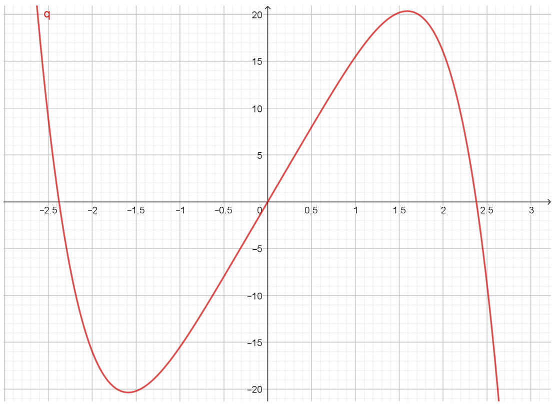
Markieren Sie die markanten Stellen in den nachfolgenden Funktionsgraphen.
Beschriften Sie die Stellen entsprechend ($N, HOP, TIP, WP_{LR}, WP_{RL}$).

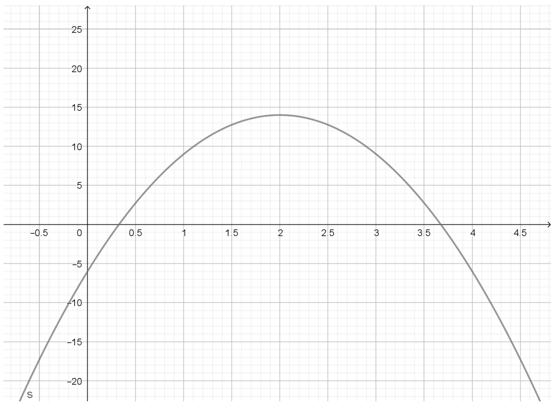












Aufgabe 5

Aufgabe 5.1 Erläutern Sie, wie die ...

(a) Extremstelle x_E

(b) Wendestelle x_W

einer Funktion bestimmt werden kann.

- -

Aufgabe 5.2

Erläutern Sie, wie Sie entscheiden können, ob es sich bei x_E um einen Hoch- (HOP) oder

Tiefpunkt (TIP) handelt.

Aufgabe 5.3

Beschreiben Sie, woran Sie erkennen können, ob es sich bei x_W um...

(a) einen fallenden Wendepunkt (RL)

(b) einen steigenden Wendepunkt (LR)

handelt.

Aufgabe 6

Gegeben sind die folgenden Funktionen

$$
\begin{aligned}
&(a)\ f(x) = 3x^6 - 18x^4 + 27x^2\\
&(b)\ f(x) = -5x^3 + 15x^2 - 5\\
&(c)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + 16x\\
&(d)\ f(x) = -5x^2 + 20x - 6\\
&(e)\ f(x) = 7x^4 - 14x^2 + 9\\
&(f)\ f(x) = 10x^3 - 14x^2 + 3x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.1

Berechnen Sie, wann die Funktion ein *Extremwert* erreicht.
Geben Sie ebenfalls das zugehörige *relative Maximum* bzw. *relative Minimum* an.

Aufgabe 6.2

Bestimmen Sie, um was für eine Extremstelle es sich handelt.

Aufgabe 6.3

Geben Sie jeweils die Stelle mit der kleinsten bzw. größten Steigung an.
Bestimmen Sie den dazugehörigen Punkt.

Aufgabe 6.4

Stellen Sie fest, um welche Art von Wendestelle es sich handelt.

Aufgabe 7

Gegeben sind die folgenden Funktionen mit den entsprechenden markanten Stellen.

	Funktion	x_N	x_E	x_W
(a)	$f(x) = 6x^2 + 9$		$x_{TIP} = 0$	
(b)	$f(x) = 2x^2 - x + 4$		$x_{TIP} = 0,25$	
(c)	$f(x) = 2x^5 + 3x^4 - x^3 - 9x^2 - 15x$	$x_{N_1} = -1,73$	$x_{HOP} = -1,11$	$x_{W_{RL}} = 0,6$
		$x_{N_2} = 0$	$x_{TIP} = 1,19$	
		$x_{N_3} = 1,73$		
(d)	$f(x) = -x^3 + x^2 + 8x$	$x_{N_1} = -2,37$	$x_{TIP} = -1,33$	$x_{W_{LR}} = 0,33$
		$x_{N_2} = 0$	$x_{HOP} = 2$	
		$x_{N_3} = 3,37$		
(e)	$f(x) = -20x^4 + 24x^2$	$x_{N_1} = -1,1$	$x_{HOP_1} = -0,77$	$x_{W_{RL}} = -0,45$
		$x_{N_2} = 0$	$x_{TIP} = 0$	$x_{W_{LR=0.45}}$
		$x_{N_3} = 1,1$	$x_{HOP_2} = 0,77$	
(f)	$f(x) = x^3 - 12x - 16$	$x_{N_1} = -2$	$x_{HOP} = -2$	$x_{W_{RL}} = 0$
		$x_{N_2} = 4$	$x_{TIP} = 2$	
(g)	$f(x) = x^3 - 4,5x^2 + 6,75x - 3,38$	$x_{N_1} = 1,5$		$x_{W_{RL}} = 1,5$

Aufgabe 7.1

Bestimmen Sie die Koordinaten für die Nullstellen.

Aufgabe 7.2

Bestimmen Sie jeweils das *relative Maximum* und das *relative Minimum* .

Aufgabe 7.3

Berechnen Sie den Punkt, an dem sich das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen ändert.

Aufgabe 8

Übertragen Sie die angegebenen Punkte in ein entsprechend skaliertes Koordinatensystem.

(a) Die Funktion $f(x) = 3x^6 - 18x^4 + 27x^2$ erreicht bei $x = -1$ und $x = 1$ den relativ gesehenen größten Wert $y = 12$. Bei $x = -1,12$, $x = 0$ und $x = 1,12$ den relativ kleinsten Wert $y = 0$.

Bei $P(-1,45|4,96)$ und $Q(0,53|6,28)$ wechselt der Graph von einer *Linkskrümmung* zu einer *Rechtskrümmung*. Im gegensatz ändert sich die Krümmung von *rechts* zu *links* bei $R(-0,53|6,28)$ und $S(1,45|4,96)$.

(b) Das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x) = -5x^3 + 15x^2 - 5$ wechselt für $W(1|5)$ von *linksgekrümmt* zu *rechtsgekrümmt*.

Ein *relatives Maximum* hat $f(x)$ bei $H(2|15)$. Das *relative Minimum* hingegen liegt in $T(0|-5)$.

(c) Für den Graph der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + 16x$ gilt $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$. Im Verlauf erreicht er bei $A(-1,59|-20,36)$ sein *relatives Minimum*. Wohingegen das *relative Maximum* dann bei $B(1,59|20,36)$ liegt.
Auf dem Intervall $[-\infty, 0)$ ist der Graph *linksgekrümmt* und auf $(0, \infty]$ entsprechend *rechtsgekrümmt*.

- -

(d) Der Graph der Funktion $f(x) = -5x^2 + 20x - 6$ verläuft auf $[-\infty, \infty]$ *rechtgekrümmt* und erreicht mit $A(2, 14)$ sein *relatives Maximum*.

- -

(e) Untersuchen wir den Graph der Funktion $f(x) = 7x^4 - 14x^2 + 9$, können wir die *relativen Minima* bei $A(-1|2)$ und $C(1, 2)$. Das *relative Maximum* wird an der Stelle $x_E = 0$ erreicht.
Der Graph ändert sein Krümmungsverhalten zunächst bei $x_{W_1} = -0,58$ und dann wieder bei $x_{W_2} = 0,58$.

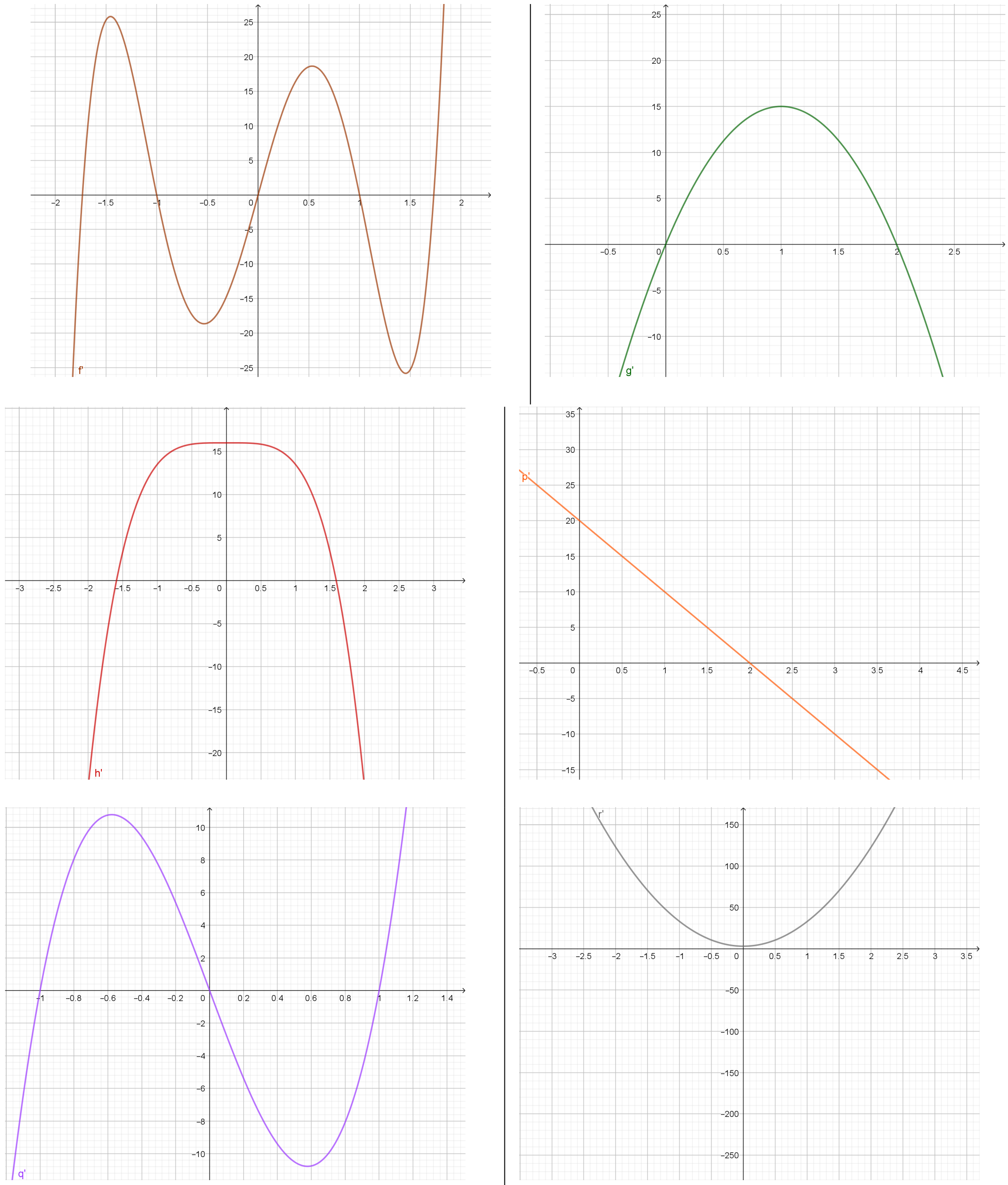
- -

(f) Für den Graphen der Funktion $f(x) = 10x^3 + 3x - 196$ gilt, dass sich das Krümmungsverhalten auf der y-Achse bei einem Wert von $y = -196$ ändert.

Aufgabe 9

Aufgabe 9.1

Markieren Sie in den nachfolgenden Graphen der **ersten Ableitung** die Wendestelle der Ausgangsfunktion.



Hinweis: Die zugehörigen Ausgangsfunktionen sind die aus *Aufgabe 4*.

Aufgabe 10

Aufgabe 10.1

Erläutern Sie, in welcher Beziehung die Ausgangsfunktion und die erste Ableitung an einer Extremstelle zueinander stehen.

Aufgabe 10.2

Beschreiben Sie, wie die Schlussfolgerung über die Art der Extremstelle zustande kommt.

Aufgabe 10.3

Fassen Sie kurz die markantestes Eigenschaft des Wendepunktes der Ausgangsfunktion in der ersten Ableitungsfunktion zusammen.

Aufgabe 10.4

Geben Sie eine knappe Begründung dafür, dass die notwendige Bedingung einer Wendestelle $f''(x) = 0$ ist. Erläutern Sie außerdem wie dieser Umstand mit der ersten Ableitung zusammenhängt.

Aufgabe 10.5

Skizzieren in Worten (eine Graphik kann als Unterstützung verwendet werden), wieso der Wert der dritten Ableitung für die Wendestelle x_W eine Aussage über die Art der Wendestelle zulässt.