6 Ganzrationale Funktionen

Spricht man von **ganzrationalen Funktionen**, meint man immer eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 x^0$$

Dabei besteht jeder Summand aus $a_n \cdot x^n$ und n ist eine natürliche Zahle, also $n \in \mathbb{N}$.

Vorsicht!
In einer ganzrationalen Funktion müssen nicht alle Exponenten bis Null (0) vorkommen.

6.1 Begrifflichkeiten

Grad

Als **Grad n** einer Funktion bezeichnet man den größten vorkommenden Exponenten.

Beispiel: $f(x) = 3x^4 + 5x^2 - 3$

Diese Funktion hat den Grad $n = 4$. Wegen $3x^{4}$.

Koeffizient

Mit dem Begriff **Koeffizient** a_n bezeichnet man immer den **Faktor vor** dem x^n.

Beispiel: $f(x) = -4x^3 + 3x^1 - 1 \cdot x^0$ hat die Koeffizienten: $a_3 = -4$; $a_1 = 3$; $a_0 = -1$

$f(x) = 2\,x^4 + 1 \cdot x^3 - 4\,x^1$ hat die Koeffizienten $a_4 = 2$; $a_3 = 1$; $a_1 = -4$.

Charakteristischer Summand

Bei einer ganzrationalen Funktion bezeichnet man den Summanden, der den größten Exponenten hat, als **charakteristischen Summanden**.

Beispiel: Wir betrachten die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 3x^2 - 6x$.

Der charakteristische Summand ist $-\frac{1}{3}x^4$. Setzt sich also zusammen aus dem x-Term und seinem Koeffizienten.

Absolutglied

Im Polynom einer ganzrationalen Funktion bezeichnet der Koeffizient a_0 das **Absolutglied**.
An ihm kann auch der *y-Achsenabschnitt* einer ganzrationalen Funktion abgelesen werden.

Beispiel: Die Funktionsgleichung $f(x) = x^4 - 2x^2 - 6$ lässt folgende Aussage zu.
Das Absolutglied ist -6. Das bedeutet, der Funktionsgraph schneidet die y-Achse bei -6.

Bei der Funktionsgleichung $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4x$ hingegen ist kein Absolutglied vorhanden.
Das bedeutet, das Absolutglied hat den Wert 0.
Somit schneidet der Funktionsgraph die y-Achse im Ursprung, also bei 0.

6.2 Prototypen

Eine ganzrationale Funktion kann in unterschiedlicher Form auftreten. Diese bezeichnen wir als Prototypen.

Polynomform

Der oben bereits erwähnte Prototyp

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

wird Polynom genannt und dementsprechend heißt diese Darstellung **Polynomform**.

Die Faktorform (FF)

Wie auch bei den quadratischen Funktionen kann eine ganzrationale Funktion als Produkt aus unterschiedlichen Faktoren dargestellt werden.

Im allgemeinen gilt für die Faktorform nur, dass sie **aus mindestens zwei Faktoren** besteht. Wobei einer die Form $(x - N_1)$ erfüllen muss.

$$f_{FF}(x) = a \cdot (x - N_1) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0)$$

bis hin zu

$$f_{FF}(x) = a \cdot (x - N_1)(x - N_2) \cdot \ldots \cdot (x - N_k) \cdot (b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b)$$

Ist 0 eine Nullstelle der ganzrationalen Funktion, so ist x ein Faktor in unserer Darstellung.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = 5(x-3)(x^2+2x-3)$ ist in Faktorform gegeben.
Auch $f(x) = 3x(x-1)(x+2)$ ist sogar in Linearfaktorform.

Linearfaktorform (LFF)

Eine Sonderform der Faktorform ist eine Darstellung, die als Produkt der 'Nullstelle-Polynome' (oder auch Linearfaktoren) dargestellt wird.

$$f_{LFF}(x) = a \cdot (x - N_1) \cdot (x - N_2) \cdot \ldots \cdot (x - N_{n-1}) \cdot (x - N_n)$$

Die Darstellung f_{LFF} wird, wie bereits bei quadratischen Funktionen eingeführt, **Linearfaktorform** genannt.
Zu Beachten ist, dass diese Sonderform ausschließlich aus linearen Faktoren der Form $(x - N_i)$ (also nur 1 als Exponent an x) besteht.
Dabei können wir an den einzelnen 'Nullstellen-Polynome' (Linearfaktoren) direkt die Nullstellen der Funktion ablesen.

Beispiel:

$$f(x) = (x - \underbrace{2}_{N_1}) \cdot (x - \underbrace{1}_{N_2}) \cdot (x - \underbrace{(-3)}_{N_3})$$

Polynomform ⇔ Faktorform

(L)FF ⇒ PF

Haben wir eine ganzrationale Funktion in **Faktorform** $f(x) = a(x - N_1) \cdot \ldots \cdot (x - N_{n-1}) \cdot (x - N_n)$ gegeben und möchten diese **in die Polynomform** überführen, so multiplizieren wir die Faktoren aus und erhalten so die gewünschte Form.

Beispiel: $f(x) = 0,5(x-3)(x+2)(x-1)$

$$\begin{aligned} f_{FF}(x) &= 0,5(x-3)\underbrace{(x+2)(x-1)}_{ausmultiplizieren} \\ &= 0,5(x-3)(x^2 - x + 2x - 2) \\ &= 0,5\underbrace{(x-3)(x^2+x-2)}_{ausmultiplizieren} \\ &= 0,5 \cdot (x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6) \\ &= \underbrace{0,5(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)}_{ausmultiplizieren} \\ &= 0,5x^3 - x^2 - 2,5x + 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{PF}(x) = 0,5x^3 - x^2 - 2,5x + 3$$

PF ⇒ FF

Haben wir eine ganzrationale Funktion in **Polynomform** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x^1 + a_0$ gegeben und wollen diese **in die Faktorform** überführen, klammern wir zunächst den **größten gemeinsamen Teiler** aller Summanden aus (*dies kann ausschließlich der Leitkoeffizient, also der Koeffizient des charakteristischen Summanden, sein, aber auch ein gesamter Term* bx^c) und bestimmen im Anschluss die Nullstellen des Klammerausdrucks.
Im Anschluss setzen wir die berechneten Nullstellen in das Gerüst der Faktorform ein.

Beispiel: Wir betrachten die einzelnen Terme der Funktion $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 12x$ genauer.

Welche Zahl kommt in allen Summanden vor?

$$f(x) = 3x^3 + \underbrace{6}_{2\cdot 3}x^2 - \underbrace{12}_{4\cdot 3}x$$

Die Zahl 3 findet sich in jedem Summanden. Wir können diese also ausklammern. ***Haben die Summanden noch etwas weiteres gemeinsam? (z.B. x)***

$$\Rightarrow f(x) = 3 \cdot (\underbrace{x^3}_{x\cdot x^2} + 2\underbrace{x^2}_{x\cdot x} - 4\underbrace{x}_{x\cdot 1})$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x(x^2 + 2x - 4)$$

Diese Darstellung entspricht bereits der Faktorform. Bevor wir aber hier aufhören, prüfen wir noch, ob der 2. Faktor $\underbrace{(x^2 + 2x - 4)}_{pq-Formel}$ sich noch umschreiben lässt zu $(x - N_1)(x - N_2)$.

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-4)} \\ &= -1 \pm \sqrt{(1)^2 + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + \sqrt{5} \\ &= 1,24 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= -1 - \sqrt{5} \\ &= -3,24 \end{aligned}$$

Also wäre die Darstellung der ganzrationalen Funktion in Linearfaktorform wie folgt:

$$f_{LFF}(x) = 3x(x - 1,24)(x + 3,24)$$