bbs.eins.mainz

# 1 Grundwissen

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $x \in \mathbb{R}$.
Um diese Funktion (oder auch *Kurve*) untersuchen zu können, müssen wir auf Informationen aus vergangenen Lernabschnitten aber auch auf neues Wissen zurückgreifen. Nachfolgend werden die entsprechenden Informationen in Kurzform nochmal dargestellt.

## 1.1 Defintionsbereich

Als Definitionsbereich kann man die Menge von Zahlen (x-Werte) bezeichnen, welche man in die Funktion $f(x)$ einsetzen darf.
Man schreibt: $\mathbb{D} =$

## 1.2 Wertebereich

Zum Wertebereich zählen alle möglichen $y$-Werte, die die Funktion annehmen kann.
Man schreibt auch $\mathbb{W} =$

## 1.3 Symmetrie

· Eine Funktion heißt **achsensymmetrisch**, wenn gilt: es kommen nur gerade Exponenten in dem Funktionsterm $f(x)$ vor.

$a_0$ gilt als Glied mit Geradem Exponenten.

In diesem Fall bedeutet das außerdem, dass $f(x) = f(-x)$ für alle zulässigen $x$. Die Funktion nennt man dann auch gerade.

· Eine Funktion heißt **punktsymmetrisch**, wenn gilt: es kommen nur ungerade Exponenten in dem Funktionsterm $f(x)$ vor.

Im Funktionsterm gibt es kein $a_0$.

In diesem Fall heißt das, dass $f(x) = -f(x)$ für alle zulässigen $x$. Eine solche Funktion wird auch ungerade genannt.

· Enthält der Funktionsterm $f(x)$ sowohl gerade als auch ungerade Exponenten, so ist sie **nicht symmetrisch**.

## 1.4 Verhalten für große x-Werte

Um das Verhalten für große x-Werte zu bestimmen, betrachten wir und lediglich den *charakteristischen Summanden*, also den Summanden, mit der höchsten Potenz ($a_n x^n$).
Das Verhalten kann dann wie folgt angegeben werden:

| n / $a_n$ | gerade | ungerade |
|---|---|---|
| positiv | $f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$<br>$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ | $f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$<br>$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ |
| negativ | $f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$<br>$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$ | $f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$<br>$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$ |

## 1.5 Achsenschnitte

### Nullstellen

Die Nullstellen sind die Stellen, an denen der Funktionswert Null ist, der Funktionsgraph also die x-Achse schneidet.
Um die Nullstellen zu bestimmen, setzen wir

$$f(x) = 0$$

Wir merken uns:

- $a_1 x + a_0 \Rightarrow$ Null setzen und nach $x$ umformen ($a_1 x + a_0 = 0 \Rightarrow x = \frac{a_0}{a_1}$)
- $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Rightarrow$ Anwenden der **pq-Formel**
  **Beachte:** $a_2$ muss den Wert 1 haben (also

muss gegebenenfalls : $a_2$ gerechnet werden).

- $a_2x^2 + a_0 \Rightarrow$ Null setzen und nach $x$ umformen ($a_2x^2 + a_0 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$)
- Funktionen mit Grad 3 und Höher $\Rightarrow$ NST ausprobieren (meist $-2, -1, 0, 1, 2$); Dann mit **Polynomdivision** den Grad reduzieren
  $(a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0) : (x - NST) = p(x)$
  NST des Ergebnisses $p(x)$ bestimmen

### 1.5.1 Schnittstelle mit der y-Achse

Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, setzen wir für $x$ Null $(0)$ in den Funktionsterm ein. Wir bestimmen also

$$f(0) = a_0$$

So erhalten wir $S(0|a_0)$. Ist $f(0) = a_0 = 0$, so verläuft der Graph durch den Ursprung.

## 1.6 Extremstellen

***Notwendige Bedingung*** Ist $x_0$ eine Extremstelle, dann muss $f'(x) = 0$ sein.

***1. Hinreichende Bedingung***
∘ $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ $f(x_0)$ ist lokales Minimum
∘ $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ $f(x_0)$ ist lokales Maximum

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann verwende nachfolgende Bedingung.

***2. Hinreichende Bedingung*** $f'(x)$ hat an der Stelle $x_0$ einen Vorzeichenwechsel.
∘ Von $+$ nach $-$ $\rightarrow$ $f(x_0)$ ist lokales Minimum
∘ Von $-$ nach $+$ $\rightarrow$ $f(x_0)$ ist lokales Maximum

## 1.7 Krümmungsverhalten und Wendestellen

Für das *Krümmungsverhalten* eines Funktionsgraphen gilt folgendes:
∘ Ist $f'(x)$ streng monoton *steigend*, so ist der Funktionsgraph von f **linksgekrümmt**.
∘ Ist $f'$ streng monoton *fallend*, so ist der Funktionsgraph von $f$ **rechtsgekrümmt**.
Das Krümmungsverhalten gibt man jeweils vor, zwischen und nach den Wendepunkten $[x_{W_1}, x_{W_2}]$ an.
Das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen ändert sich an einer *Wendestelle*. Für eine solche gilt:
***Notwendige Bedingung*** Ist $x_0$ eine Wendestelle, dann muss $f''(x_0) = 0$ sein.

***1. Hinreichende Bedingung***
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist $x_0$ eine Wendestelle.

Wenn $f'''(x_0) = 0$, dann bezeichnet man $x_0$ als Sattelstelle.

***2. Hinreichende Bedingung***
$f''(x_0) = 0$ und $f''(x)$ hat an der Stelle $x_0$ einen **Vorzeichenwechsel**.

## 1.8 Schaubild

Zeichne die Nullstellen, die Extrempunkte und die Wendepunkte in das Koordinatensystem.
Verbinde die Punkte entsprechen der Information, die du über die Symmetrie, das Randverhalten (Verhalten für große x-Werte), die Monotonie und das Krümmungsverhalten

erhalten hast.
So erhältst du den ungefähren Verlauf des Funktionsgraphen.

### Monotonieverhalten (Zusatz)

Betrachtest du eine Funktion, so ist es bisweilen interessant zu wissen, wie die verschiedenen Funktionswerte zueinander stehen. Dies interessiert uns meist in einem bestimmten Intervall (z.B. zwischen $x_0$ und $x_1$). Wir definieren also ein Intervall $I = [x_0, x_1]$, als die Menge der x-Werte, für die gilt: $x_0 \leq x \leq x_1$. Um eine Aussage über das Monotonieverhalten treffen zu können, ist es zwingend notwendig, dass die Funktion auf dem entsprechenden Intervall $I$ definiert ist.

$f$ heißt **streng monoton steigend** auf $I$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:
$\circ f(x_1) < f(x_2)$.
Entsprechend heißt $f$ **streng monoton fallend** auf $I$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:
$\circ f(x_1) > f(x_2)$.

## 2 Kurvendiskussion 101

Wirst du mit einer ganzrationalen Funktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ konfrontiert und sollst diese skizzieren, führst du die folgenden Schritte der **Kurvendiskussion** aus.

1. Definitions- und Wertebereich angeben
2. Ableitungen bilden $(f'(x), f''(x), f'''(x))$
3. Symmetrie bestimmen
   $\underbrace{f(x) = f(-x)}_{achsensymmetrisch}$ oder $\underbrace{f(x) = -f(-x)}_{punktsymmetrisch}$
4. Verhalten für große x-Werte (Wo kommt die Funktion her, wo geht sie hin)
5. Nullstellen und die dazugehörigen Punkte bestimmen
   $f(x) = 0$
6. Extremstellen und die dazugehörigen Punkte
   $f'(x) = 0$
7. Wendestellen (ggf. Sattelstelle) und die dazugehörigen Punkte
   $f''(x) = 0$
8. Übertragen der Punkte in das Koordinatensystem.
   Skizzieren des Funktionsgraphen anhand der Schritte (2.), (3.), (6.) und (8.) und der eingetragenen Punkte.