

Begrifflichkeiten

Einschlägiger Index bezeichnet die Zeilennummer in der Funktionstabelle. Dabei ist zu beachten, dass die Variablenbelegung die Binärcodierung der Zeilennummer ist.

Geben wir die Variablenbelegung für die 1-Zeilen mit \wedge an, so nennt man diese **Minterme**.

Die **disjunktiven Normalform** (DNF) entspricht der durch Disjunktion (\vee) miteinander verknüpften Minterme.

8 Vereinfachen von Darstellungsformen

Wir wollen die Frage diskutieren, welche Möglichkeiten es gibt, gegebene Schaltfunktionen zu vereinfachen um so wenig Gatter wie nötig zu verwenden und ein möglichst schnelles Schaltnetz aufzubauen.

Hierzu benötigen wir die Begriffe **DNF** (disjunktive Normalform) die man auch als **SOP** (Sum of Products) bezeichnet.

Schauen wir uns zunächst ein Beispiel an und vereinfachen dieses mit Hilfe der Booleschen Algebra.

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2x_3 \\ &= \underbrace{(\overline{x_1} + x_1)}_{=1} x_2x_3 \\ &= x_2x_3 \end{aligned}$$

Irgendwie muss man auch ohne die boolesche Algebra die vereinfachte Funktion aufstellen können, oder? Betrachten wir dazu die nachfolgende Funktionstabelle mit drei Eingabevariablen x_1, x_2 und x_3 .

i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Ihre Aufgabe

Versuchen Sie die dazugehörige Schaltfunktion

$$F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2x_3$$

zu vereinfachen.

Eine Regel, der man ganz intuitiv Beachtung schenkt lautet wie folgt:

Resolutionsregel Sind in einer **SOP** zwei Summanden vorhanden, bei der sich nur eine Eingabevariable komplementär ($x_1 \Leftrightarrow \overline{x_1}$) verhält, kann man beide Summanden streichen und durch den gemeinsamen Teil der Summanden ersetzen.

Ist die Schaltfunktion, die zu vereinfachen ist, komplexer, reicht ein einfaches Betrachten manchmal nicht aus.

Mit Hilfe der sogenannten **K-Map** kann man mögliche Zusammenfassungen schnell erkennen.

Prinzipiell ist die **K-Map** einfach nur eine andere Darstellungsform der Funktionstafel unserer Schaltfunktion F . Diese ist wie auch die Funktionstafel abhängig von der Anzahl der Eingabevariablen.

Bei drei Eingabevariablen: (2×4)

		$x_2 x_3$			
		00	01	11	10
x_1	0				
	1				

Bei vier Eingabevariablen: (4×4)

			$x_3 x_4$			
			00	01	11	10
$x_1 x_2$	00					
	01					
	11					
	10					

Bei der Zeilen- bzw. Spaltenzählung ist zu beachten, dass sich von einer zur nächsten Zeile bzw. Spalte jeweils nur **eine** Variable ändern darf. Innerhalb der *K-Map* werden die Zellen mit einer 1 befüllt, deren Belegung bei der Funktion auch eine 1 als Ausgabe haben.

Ihre Aufgabe

Erstellen sie zu vorne angegebener Funktionstabelle die entsprechende **K-Map**.

8.1 Überdeckung der Einsen

Betrachten wir die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4$$

Ihre Aufgabe

Befüllen Sie die dazugehörige **K-Map**.

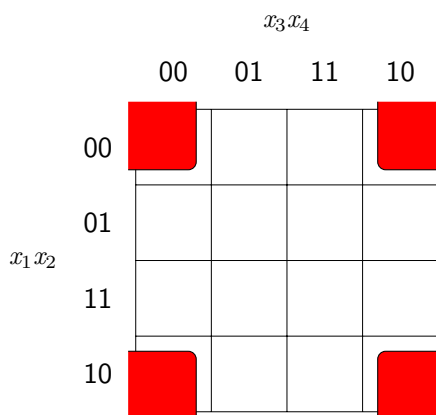
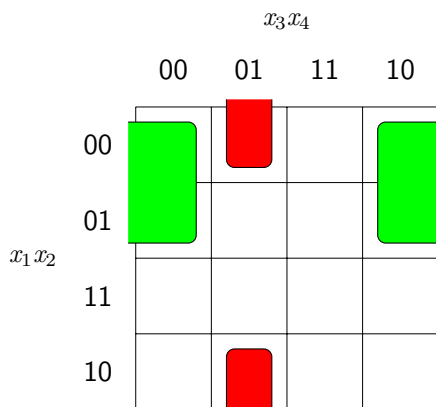
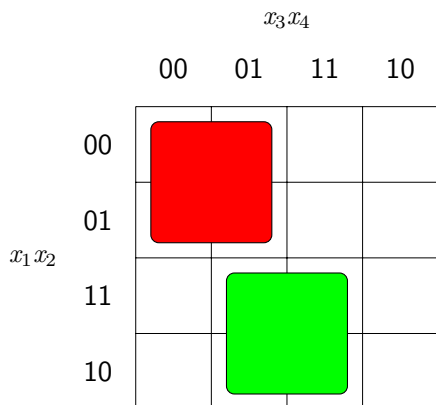
			$x_3 x_4$			
			00	01	11	10
$x_1 x_2$	00					
	01					
	11					
	10					

Unser Ziel ist es, die Schaltfunktion zu vereinfachen, dafür versuchen wir nun, so viele 1en wie möglich¹ zu überdecken. Dabei sind folgende Überdeckungen zulässig:

- + zwei nebeneinander/übereinander liegende 1en
- + vier zusammenhängende 1en
- + zwei bzw. vier über die Außenkanten nebeneinander/übereinander liegende 1en
- + zwei oder vier in den Ecken befindliche 1en

			$x_3 x_4$			
			00	01	11	10
$x_1 x_2$	00					
	01					
	11					
	10					

¹Die Anzahl muss immer einer 2er Potenz entsprechen.

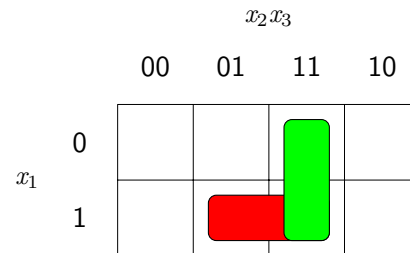


Ihre Aufgabe

Versuchen Sie für die zu Beginn von 8.1 aufgestellt **K-Map** eine entsprechende Überdeckung der 1en zu finden.

8.2 Vereinfachen mit Hilfe der Überdeckung

Mit Hilfe dieser Überdeckung können wir nun die Schaltfunktion aufstellen. Dabei verwenden wir nur die Belegung der Eingabevariablen, die für den überdeckten 1er-Block konstant bleibt.



Hieraus ergibt sich $f(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 + x_1x_3$.

Ihre Aufgabe

Erstellen Sie mit Hilfe der zuletzt aufgestellten K-Map die vereinfachte Funktion zu der zu Beginn von 8.1 genannten Funktion.