bbs.eins.mainz

Quotientenregel Wir erinnern uns an die Regel, die wir anwenden, wenn eine mit einer gebrochen-rationalen Funktion konfrontiert werden.

Dabei hat die Funktion folgende Form: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Die dazugehörige Ableitung wird nach der unten stehenden Regel gebildet!

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Beachten Sie, dass sich die Potenz im Nenner durch das ^{2} immer verdoppelt.
Beispiel: Im Nenner von $f(x)$ steht $(x-3)^2$. Dann findet sich im Nenner von $f'(x)$ der Ausdruck $(x-3)^4$.

Aufgabe 1 Leiten Sie die nachfolgenden Funktionen mit Hilfe der Quotientenregel ab. Vereinfachen Sie das Ergebnis, falls möglich.
Wir definieren zunächst $u(x), u'(x)$ und $v(x), v'(x)$.

(a) $f(x) = \frac{2x}{(x+2)^2}$

$u(x) = 2x$ $\quad u'(x) = 2$ $\quad v(x) = (x+2)2$ $\quad v'(x) = 2(x+2) \cdot 1$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{2}^{u'(x)} \overbrace{(x+2)^2}^{v(x)} - \overbrace{2x}^{u(x)} \overbrace{2(x+1)}^{v'(x)}}{\underbrace{[(x+2)^2]^2}_{v^2(x)}} = \frac{2(x+2)^2 - 4x(x+2)}{(x+2)^4}$$

(b) $f(x) = \frac{x^2-x}{x+1}$

$u(x) = x^2 - x$ $\quad u'(x) = 2x-1$ $\quad v(x) = x+1$ $\quad v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x)}{(x+1)^2}$$

(c) $f(x) = \frac{2x^2-3}{x^3}$

$u(x) = 2x^2 - 3$ $\quad u'(x) = 4x$ $\quad v(x) = x^3$ $\quad v'(x) = 3x^2$

$$f'(x) = \frac{4x \cdot x^3 - (2x^2-3)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{4x^4 - 3x^2(2x^2-3)}{x^6}$$

(d) $f(x) = \frac{18x}{(x^2+3)^3}$

$u(x) = 18x \qquad u'(x) = 18 \qquad v(x) = (x^2+3)^3 \qquad v'(x) = 3(x^2+3)^2 \cdot 2x$

$= 6x(x^2+3)^2$

$f'(x) = \frac{18(x^2+3)^3 - 18x \cdot 6x(x^2+3)^2}{[(x^2+3)^3]^2} = \frac{18(x^2+3)^3 - 108x^2(x^2+3)^2}{(x^2+3)^6}$

(e) $f(x) = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$

$u(x) = -2x^2 - 2 \qquad u'(x) = -4x \qquad v(x) = (x^2-1)^2 \qquad v'(x) = 2(x^2-1) \cdot 2x$

$= 4x(x^2-1)$

$f'(x) = \frac{-4x(x^2-1)^2 - (-2x^2-2) \cdot 4x(x^2-1)}{[(x^2-1)^2]^2} = \frac{-4x(x^2-1)^2 - 4x(-2x^2-2)(x^2-1)}{(x^2-1)^4}$

(f) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}$

$u(x) = x^2 + 2x \qquad u'(x) = 2x+2 \qquad v(x) = x^2 + 2x + 1 \qquad v'(x) = 2x+2$

$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+2x+1) - (x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$