

# 1 Zufallsexperiment

Ein Zufallsexperiment ist ein Prozess mit unbekanntem Ausgang, der sich beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholen lässt

## Beispiele:

- Ein Würfel wird geworfen
- Passanten werden befragte, welche Partei sie zur Zeit wählen würden
- Sie nutzen die Straßenbahn-Linie 51 in Mainz ohne Fahrschein

## 1.1 Merkmale eines Zufallsexperiments

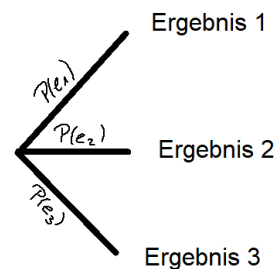
Bei einem Zufallsexperiment lassen sich alle möglichen Ausgänge auflisten. Diese nennt man Ergebnisse (mit der Abkürzung:  $e_1, e_2, \dots$ ).

Nimmt man alle möglichen Ausgänge oder Ergebnisse zusammen, so nennt man diese Menge Ergebnismenge (geschrieben mit:  $S = e_1, e_2, \dots$ ).

Betrachtet man jeden Ausgang einzeln, so kann jedem einzelnen eine Zahl zwischen 0 und 1 zugeordnet werden. Dieses gibt das Maß für die Möglichkeit des Auftretens an. Man bezeichnet dieses Maß auch als Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses/Ereignisses (Formal:  $P(e \dots) = \dots$ ).

Der Wahrscheinlichkeitswert von "1" heißt, dass das Ergebnis sicher eintritt. Beträgt die Wahrscheinlichkeit hingegen "0", heißt das, dass das Ergebnis auf keinen Fall eintritt. Addiert man die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse, ergibt dies "1".

### 1.1.1 Darstellung eines Zufallsexperiments als Baumdiagramm



Um ein Zufallsexperiment zu visualisieren gibt es diverse Möglichkeiten. Eines davon ist

das Baumdiagramm. Dabei wird mit einem Ausgangsknoten begonnen, von welchem so viele Äste abgehen, wie es mögliche Ergebnisse gibt.

### 1.1.2 Tabellarische Darstellung der Ergebnisse mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten

Es besteht auch die Möglichkeit, für ein Experiment mit einer endlichen Zahl an Ergebnissen eine Tabelle aufzustellen.

Ergebnisse $e_i$	$e_1$	$e_2$	$\dots$	$e_n$
$P(e_i)$				

### 1.1.3 Darstellung als Diagramm am Beispiel "Schwarzfahren in Berlin"



Die Darstellung von Ergebnissen und ihren zugehörigen Wahrscheinlichkeiten nennt man auch Wahrscheinlichkeitsverteilung.

## 1.2 Ereignis und Gegenereignis

Mehrere Ergebnisse kann man zu **Ereignissen** zusammenfassen (geschrieben:  $A_1 = \{e_1, \dots\}$ ).

*Beispiel:* Beim Roulette-Spiel besteht das Ereignis „gerade Zahl“ aus den Ergebnissen  $A_{\text{gerade}} = \{2, 4, 6, \dots\}$ .

Als **Gegenereignis** eines Ereignisses bezeichnet man alle Ereignisse, die nicht zum Ereignis gehören (Formal:  $\overline{A}$ ).

*Beispiel:* Das Gegenereignis zu „gerade Zahl“ beim Roulette ist  $\overline{A_{\text{gerade}}} = \{0, 1, 3, \dots, 35\}$ .

Häufig wird die Ergebnismenge zu **zwei** Ereignissen zusammengefasst (z.B.  $S = \{\text{Sie werden erwischt; Sie werden nicht erwischt}\}$ ;  $S = \{\text{SPD Wähler, kein SPD Wähler}\}$ ;  $S = \{\text{blond; nicht blond}\}$ ).

Auch zu Ereignissen gibt es Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

## 1.3 Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit

Es gibt zwei Möglichkeiten für die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses:

- „Laplace“-Wahrscheinlichkeit
- Empirische Wahrscheinlichkeit

## 1.4 Laplace-Wahrscheinlichkeit

Sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich, lässt sich die Wahrscheinlichkeit durch den folgen-

den Quotienten bestimmen:

$$P(A_{\dots}) = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse zum Ereignis}}{\text{Anzahl möglicher Ergebnisse}}$$

*Beispiel:* Wahrscheinlichkeit einen Bauer aus einem gut gemischten Kartenspiel zu ziehen:

$$P(\text{Bauer}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125$$

## 1.5 Empirische Wahrscheinlichkeit

Will man z.B. die Wahrscheinlichkeit einer Zwillingsgeburt bestimmen, nutzt man Daten aus der Vergangenheit und bestimmt die relative Häufigkeit von Zwillingsgeburten.

*Beispiel:*

Häufigkeit von Zwillingsgeburten bei Menschen

Weltweit ist im Schnitt jede 40. Geburt eine Zwillingsgeburt. Hierbei gibt es

Quelle: Wikipedia<sup>1</sup>

$$\Rightarrow P(\text{Zwilling}) = 1 : 40 = 0,025$$

Zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit wird das Zufallsexperiment häufig durchgeführt und die relative Häufigkeit wird bestimmt. Dabei „pendelt“ sich die Wahrscheinlichkeit dann ein.

## 1.6 Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment kann sich auch aus mehreren einzelnen Experimenten zusammensetzen.

*Beispiel:* Zweimaliger Wurf einer Münze.

Die Ergebnisse lassen sich nun entweder

<sup>1</sup><https://de.wikipedia.org/wiki/Zwillinge>

durch Zahlen oder Buchstabenpaare darstellen:

$$\begin{aligned} A_1 &= (K, K), & A_2 &= (K, Z) \\ A_3 &= (Z, K), & A_4 &= (Z, Z) \end{aligned}$$

Häufig werden bei zweistufigen Experimenten die Ergebnisse nach der Anzahl des Auftretens eines bestimmten Ausgangs zu Ereignissen zusammengefasst.

*Beispiel:* Zwei Freunde spielen in einer ruhigen Mathestunde ein Spiel.

„Du gibst mit einem Euro und wirfst anschließend dreimal eine Münze!“

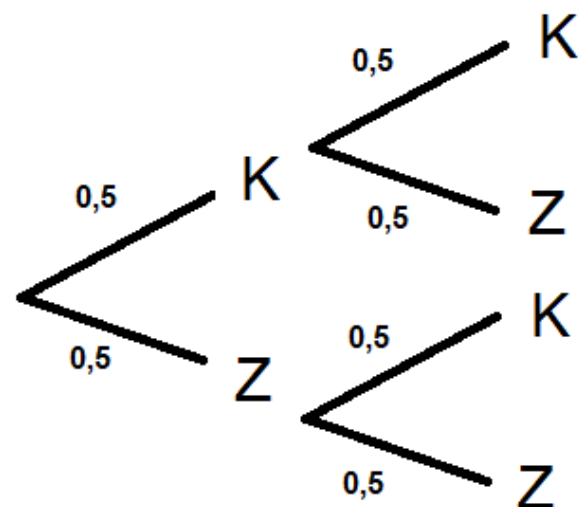
Pro geworfener 'Zahl' gibt es 50 Cent zurück. Wird dreimal 'Zahl' geworfen, gibt es 3 Euro zurück!

Da für die Rückzahlung lediglich die 'Zahl-Würfe' relevant sind, fasst man die möglichen Ergebnisse zu Ereignissen zusammen:

- $A_0 = K, K, K$
- $A_1 = (Z, K, K), (K, Z, K), (K, K, Z)$
- $A_2 = (Z, Z, K), (Z, K, Z), (K, Z, Z)$
- $A_3 = Z, Z, Z$

### 1.6.1 Darstellung als Baumdiagramm

Auch mehrstufige Zufallsexperimente lassen sich in einem Baumdiagramm darstellen. Dazu werden ausgehend vom Startpunkt so viele Äste gezeichnet, wie es Ergebnisse gibt. Von jedem möglichen eintretenden Ergebnis werden erneut so viele Äste wie mögliche Ergebnisse gezeichnet.



## 1.7 Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

Für die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten gibt es **zwei wichtige Regeln**. Diese simplen Regeln sollte man sich gut einprägen, da vieles Weitere auf Ihnen aufbaut.

**Pfadregel** (Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses)

Multipliziere die "Wahrscheinlichkeit entlang des Pfades, der dieses Ereignis beschreibt!"

**Additionsregel** (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses)

Addiere die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu einem Ereignis gehören!