bbs.eins.mainz

Allgemeines Vorgehen zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von Geraden im 2-dimensionalen

Sollen zwei Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + t\vec{v}$ im 2-dimensionalen auf ihre gegenseitige Lage untersucht werden, betrachten wir zunächst die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$...

linear abhängig,	linear unabhängig,
dann sind g und h + parallel, wenn $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$ **keine** Lösung besitzt. + gleich, wenn $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$ **unendlich viele** Lösungen besitzt.	dann haben g und h + keinen Schnittpunkt (sie sind *windschief*), wenn $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$ **keine** Lösung besitzt. + einen Schnittpunkt S, wenn $\vec{p} + r\vec{u} = \vec{q} + t\vec{v}$ **eine** Lösung besitzt.

S. 64 Nr. 3 c & d Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.

(c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig. Die Geraden können also einen oder keinen Schnittpunkt S haben. Um dies zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{ll} 7 + r = 2 + t & \Rightarrow r = -7 \\ 3 = 5 + t & \Rightarrow t = -2 \end{array} \right.$$

Den Schnittpunkt der beiden Geraden bestimmen wir nun, indem wir die ermittelten Werte für r und t in die dazugehörigen Geradengleichungen einsetzen.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Geraden schneiden sich also im Punkt S(0|3).

(d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig $(\vec{u} = -\frac{3}{5}\vec{v})$. Die

Geraden können also entweder parallel oder gleich sein.
Um dies zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem nach r und t.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$1 + 3r = 2 - 5t$$
$$3 + 6r = 5 - 10t \Rightarrow r = \frac{2-10t}{6}$$

$$\begin{aligned}
& 1 + 3\left(\tfrac{2-10t}{6}\right) = 2 - 5t \mid -1; +5t \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{2-10t}{2} + 5t = 1 \\
\Leftrightarrow\ & 1 - 5t + 5t = 1 \\
\Leftrightarrow\ & 1 = 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Wir erhalten eine wahre Aussage
Die Geraden g und h sind also **gleich**.

Da $g = h$ müssen wir keinen Schnittpunkt mehr berechnen.

S. 64 Nr. 8 Die Gerade f geht durch den Punkt A(3|8|0) und hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Gerade h geht durch den Punkt B(-2|3|1) und hat den Stützvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Überprüfen Sie, ob sich die Geraden g und h schneiden. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes.

Zunächst müssen wir die Geradengleichungen für g und h bestimmen.
Für g können wir wie bekannt vorgehen. So ergibt sich die folgende Geradengleichung:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Geradengleichung von h aufzustellen müssen wir folgendes beachten: Wir kennen den Stützvektor $\vec{s}$ sowie einen weiteren Punkt, nicht aber den Richtungsvektor. Diesen müssen wir noch bestimmen. Hierfür berechnen wir $\vec{B} - \vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten damit $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von sind linear unabhängig. Die Geraden können also **einen** oder **keinen** Schnittpunkt S haben. Um dies zu bestimmen, setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

$$\begin{array}{lll}
\text{I} & 2+2r=2-5t & \\
\text{II} & 8+5r=1+2t & \\
\text{III} & 0=t & \Rightarrow t=0 \\
\hline
\text{I'} & 2+2r=2 & \Rightarrow r=0 \\
\text{II'} & 8+5r=1 & \Rightarrow r=-\frac{7}{5} \\
\text{III} & 0=t &
\end{array}$$

Wir erhalten für r zwei unterschiedliche Werte. Somit hat das Gleichungssystem **keine** Lösung $\Rightarrow$ g und h schneiden sich nicht. Sie sind also *windschief*.