bbs.eins.mainz Berufsbildende Schule Technik	**1. Kursarbeit Mathematik**	Name:	
		Datum:	Wesc
BGY 16 – ma3	____ von ____ Punkten erreicht: ____ %	**Note:**	

Allgemeines

- Bei der Bearbeitung ist ein **nachvollziehbarer, vollständiger Rechenweg** aufzuschreiben.
- Die Lösungen müssen mit dokumentenechten Stiften (**Kugelschreiber** oder **Fine-Liner**) (keine rote Mine) erstellt werden.
- Lediglich zeichnerische Lösungen dürfen in **Bleistift** erstellt werden.
- Die Bewertung des Tests ist nur bei **gut lesbarer Schrift** möglich.
- Runden Sie ihre Ergebnisse auf **2 Nachkommastellen.** Wurzelausdrücke müssen nicht berechnet werden (z.B. $\sqrt{10}$).
- **Zugelassene Hilfsmittel**: Taschenrechner (nicht graphikfähig / programmierbar), Zeichenmaterial

Aufgabe 1

/ 4 x 3 = 12 Pkt.

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung.
Vereinfachen Sie soweit möglich (ausklammern).

(a) $f(x) = 20 \cdot x^2 \cdot e^{-0,2x}$

(b) $f(x) = -25xe^{-2x^3} + \frac{1}{4}e^{-2x^3}$

(c) $f(x) = \frac{1}{4}e^{3x^2+4x} + e$

(d) $f(x) = 20e^{-2x} - 5e^{-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x-4}$

Aufgabe 2

/ 4 + 8 (4x2) + 6 = 18 Pkt.

In einer Kaffeetasse, die bis oben gefüllt ist, kann die Abkühlung durch die Funktion $T(m) = 70 \cdot e^{-0,045m}$ beschrieben werden.
Dabei beschreibt *m* die Zeit in Minuten und *T(m)* die Temperatur des Kaffees in °C nach *m* Minuten.

(a) **Berechnen** Sie, welche Temperatur der Kaffee nach 5, 10, 20 bzw. 30 Minuten erreicht hat.

(b) **Bestimmen** Sie, wann die Temperatur des Kaffees noch 60°C, 50°C, 40°C bzw. 30°C beträgt.

(c) **Berechnen** Sie die Geschwindigkeit der Temperaturabnahme (in °C pro Minute) nach einer Minute, nach fünf Minuten, nach zehn Minuten und nach 30 Minuten.
Was fällt bezüglich der Geschwindigkeit auf?

Aufgabe 3 / 4 + 2 + 6 + 4 + 4 = 20 Pkt.

Gegen ist die Funktion f mit $f(x) = 5 \cdot \frac{e^x - 2}{e^{2x}}$.

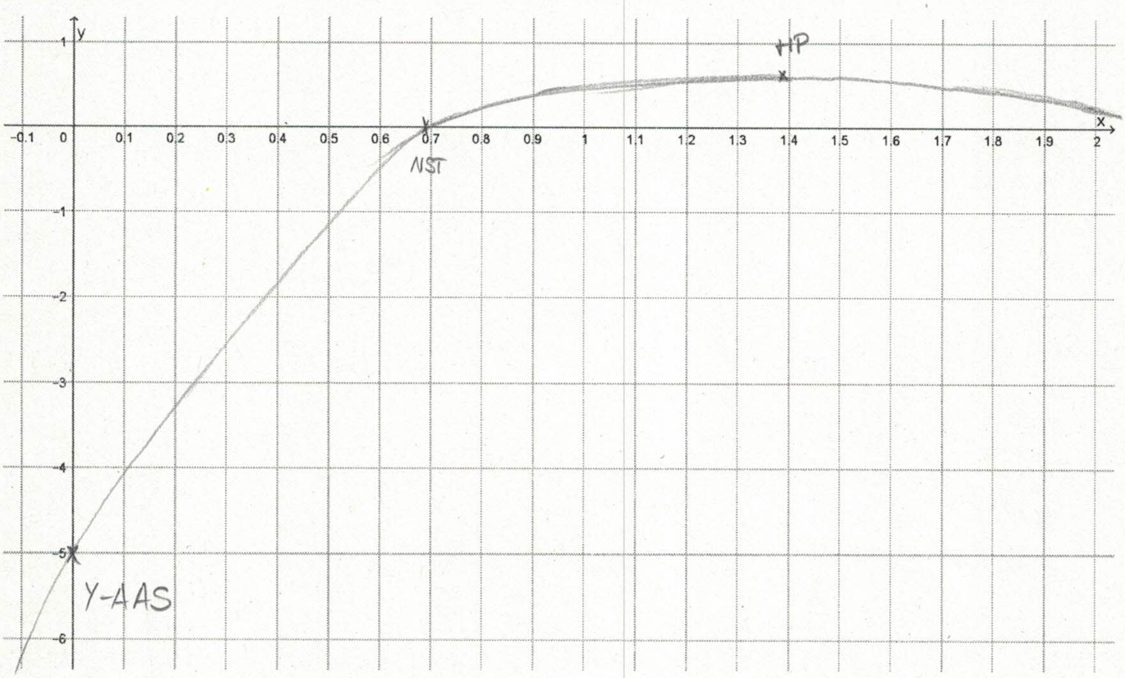
(a) **Bestimmen** Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen an.

(b) Schreiben Sie $f(x)$ **quotientenfrei**.

(c) **Zeigen Sie**, dass f die Ableitung $f'(x) = 20 \cdot e^{-2x} - 5 \cdot e^{-x}$ besitzt.
Bestimmen Sie zudem die Art sowie die Lage der Extrempunkte.

(d) Der Graph besitzt einen Wendepunkt W. **Berechnen** Sie diesen und **bestimmen** seine Steigung.

(e) **Übertragen** Sie die berechneten Punkte in das Koordinatensystem.
Skizzieren Sie anschließend den Graphen mit Hilfe der markierten Punkte.



Viel Erfolg!

Aufgabe 1

a) $f(x) = 20x^2 e^{-0,2x}$

$f'(x) = 40x e^{-0,2x} + 20x^2 \cdot (-0,2) \cdot e^{-0,2x}$

1,25 1,25

$= 40x e^{-0,2x} - 4x^2 e^{-0,2x}$

$= 4x e^{-0,2x} (10 - x)$ 0,5

b) $f(x) = -25x e^{-2x^3} + \frac{1}{4} e^{-2x^3}$

$= -25 e^{-2x^3} - 25x \cdot (-6x^2) e^{-2x^3} + \frac{1}{4} \cdot (-6x^2) e^{-2x^3}$

1,25 1,25

$= -25 e^{-2x^3} + 150x^3 e^{-2x^3} - \frac{3}{2} x^2 e^{-2x^3}$

$= e^{-2x^3} (-25 + 150x^3 - \frac{3}{2} x^2)$ 0,5

c) $f(x) = \frac{1}{4} e^{3x^2+4x} + e$

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot (6x+4) e^{3x^2+4}$

2 1

d) $f(x) = 20 e^{-2x} - 5 e^{-\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x - 4}$

1,5 1,5

$f'(x) = -40 e^{-2x} - 5 \cdot (-x^2 + \frac{2}{3}) e^{-\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x - 4}$

Aufgabe 2

gegeben: $T(m) = 70e^{-0{,}045m}$

a) $T(5) = 55{,}90°$ (1)

$T(10) = 44{,}63°$ (1)

$T(20) = 28{,}46°$ (1)

$T(30) = 18{,}15°$ (1)

b) $T(m) = 70 \cdot e^{-0{,}045m} \quad | : 70$

$\frac{T(m)}{70} = e^{-0{,}045m} \quad | \ln$

$\ln\left(\frac{T(m)}{70}\right) = -0{,}045m \quad | : (-0{,}045)$

$m = \frac{-\ln\left(\frac{T(m)}{70}\right)}{0{,}045}$

$m_{60} = \frac{-\ln\left(\frac{60}{70}\right)}{0{,}045} = \underline{\underline{3{,}43}}$ (2)

$m_{50} = \frac{-\ln\left(\frac{50}{70}\right)}{0{,}045} = \underline{\underline{7{,}48}}$ (2)

$m_{40} = \frac{-\ln\left(\frac{40}{70}\right)}{0{,}045} = \underline{\underline{12{,}44}}$ (2)

$m_{30} = \frac{-\ln\left(\frac{30}{70}\right)}{0{,}045} = \underline{\underline{18{,}83}}$ (2)

c) $T'(m) = -0{,}045 \cdot 70 \cdot e^{-0{,}045m}$

$T'(1) = -3{,}01$ (4)

$T'(5) = -2{,}52$

$T'(10) = -2{,}01$

$T'(30) = -0{,}82$

Je kälter der Kaffee desto langsamer kühlt er ab. ②

Aufgabe 3

gegeben: $f(x) = 5 \cdot \frac{e^x - 2}{e^{2x}}$

a) Schnittpunkte:

x-Achse: $0 = 5 \cdot \frac{e^x - 2}{e^{2x}} \quad | \cdot e^{2x}$

$0 = 5(e^x - 2) \quad | : 5$

$0 = e^x - 2 \quad | + 2$

$2 = e^x \quad | \ln$

$x = \ln(2) = \underline{\underline{0{,}69}}$ (1,5)

$X(0{,}69 | 0)$ (0,5)

y-Achse: $f(0) = 5 \cdot \frac{e^0 - 2}{e^{2 \cdot 0}}$

$= 5 \cdot \frac{1 - 2}{1}$

$= 5 \cdot (-1)$

$= -5$ (1,5)

$Y(0 | -5)$ (0,5)

b) Quotientenfrei heißt ohne Bruch

$f(x) = 5 \cdot \frac{e^x - 2}{e^{2x}} = 5 \cdot (e^x - 2) e^{-2x}$ ②

c) z.Z: $f'(x) = 20e^{-2x} - 5e^{-x}$

Beweis

$$f(x) = 5 \cdot \overbrace{e^{-2x}}^{u} \overbrace{(e^x - 2)}^{v}$$

$$f'(x) = 5 \cdot \underbrace{(-2) \cdot e^{-2x}}_{u'} \underbrace{(e^x - 2)}_{v} + \underbrace{5 \cdot e^{-2x}}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'}$$

$$= -10\, e^{-2x} (e^x - 2) + 5 \cdot e^{-x}$$

$$= -10e^{-x} + 20e^{-2x} + 5e^{-x}$$

$$= 20e^{-2x} - 5e^{-x}$$

$$f'(x) = \underbrace{5e^{-x}}_{\text{nie } 0} \underbrace{(4e^{-x} - 1)}_{= 0} \overset{!}{=} 0$$

$$4e^{-x} - 1 = 0 \qquad | + 1$$

$$4e^{-x} = 1 \qquad | : 4$$

$$e^{-x} = \frac{1}{4} \qquad | \ln$$

$$-x = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \qquad | \cdot (-1)$$

$$x = -\ln\left(\frac{1}{4}\right) = 1{,}38$$

$$f''(x) = -5e^{-x}(4e^{-x} - 1) + 5e^{-x} (-4) e^{-x}$$

$$= -5e^{-x}(4e^{-x} - 1) - 20e^{-2x}$$

$$= -5e^{-x}((4e^{-x} - 1) + 4e^{-x}) = -5e^{-x}(8e^{-x} - 1)$$

$f''(1{,}39) = -5 \cdot e^{-1{,}39}(8e^{-1{,}39} - 1) = -1{,}23 < 0 \Rightarrow HP$

$f(1{,}39) = 0{,}62$

$\Rightarrow HP(1{,}39 | 0{,}62)$

d) $f''(x) = \underbrace{-5e^{-x}}_{\text{nie } 0} \underbrace{(8e^{-x} - 1)}_{=0} = 0$

$$8e^{-x} - 1 = 0 \quad |+1$$
$$8e^{-x} = 1 \quad |:8$$
$$e^{-x} = \frac{1}{8} \quad |\ln$$
$$-x = \ln(1/8) \quad |\cdot(-1)$$
$$x = -\ln(1/8) = 2{,}08$$

$f(2.08) = 0{,}47 \qquad \Rightarrow WP(2{,}08 | 0{,}47)$

$f'(2{,}08) = -0{,}31$