bbs.eins.mainz

Beschreiben Sie das **Verhalten** der folgenden Funktionen **für große bzw. kleine x-Werte**.

Beachten Sie die Schreibweise $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty}$ / $f(x) \xrightarrow{x \to \infty}$

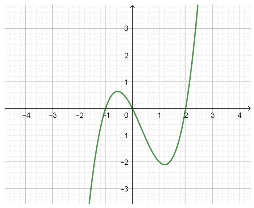
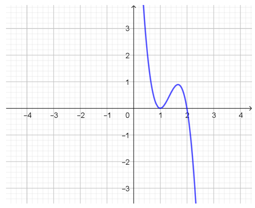
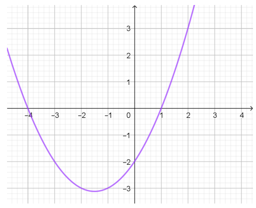
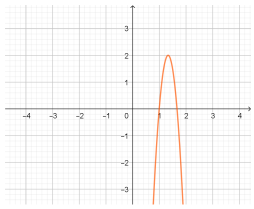
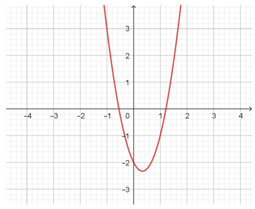
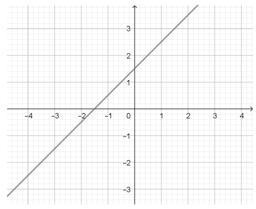
(a) $f(x) = 3x^6 - 18x^4 + 27x^2$
betrachte $3x^6$
a_n positiv und n gerade:
$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$
$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

(b) $f(x) = -0.9x^7 + 10x^3$
betrachte $-0.9x^7$
a_n negativ und n ungerade:
$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$
$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

(c) $f(x) = -5x^4 + 20x^3 - 12x^2 + 8$
betrachte $-5x^4$
a_n negativ und n gerade:
$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$
$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

(d) $f(x) = 0.8x^5 - 5x^3 - x$
betrachte $0.8x^5$
a_n positiv und n ungerade:
$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$
$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

Ordnen Sie die Graphen der Ableitungsfunktionen $f'(x)$ den richtigen Ausgangsgraphen für $f(x)$ zu.
Begründen Sie ihre Entscheidung in Stichpunkten.

<table>
<tr><td colspan="3">Ausgangsgraph von $f(x)$</td></tr>
<tr><td>(a)
</td><td>(b)
</td><td>(c)
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Graph der Ableitungsfunktion $f'(x)$</td></tr>
<tr><td>(1)
</td><td>(2)
</td><td>(3)
</td></tr>
</table>

Ausgangsgraph (a) gehört zum Ableitungsgraph (2)

- Ausgangsgraph ist eine Funktion 3. Grades und hat Extrempunkte bei $x = 0.5$ und ca. $x = 1.2$. Der Ableitungsgraph (b) ist 2. Grades und hat Nullstellen bei $x = 0.5$ und $x = 1.2$ (Wir wissen, $f(x)$ ist Extrempunkt wenn $f'(x) = 0$)
  Die Steigung vor dem ersten Extrempunkt $x < 0.5$ ist positiv (Ableitungsgraph oberhalb der x-Achse), für $0.5 < x < 1.2$ ist die Steigung negativ (Ableitungsgraph unterhalb der x-Achse) und die Steigung nach dem zweiten Extrempunkt $1.2 < x$ ist wieder positiv (Ableitungsgraph oberhalb der x-Achse).

Ausgangsgraph (b) gehört zu Ableitungsgraph (1)

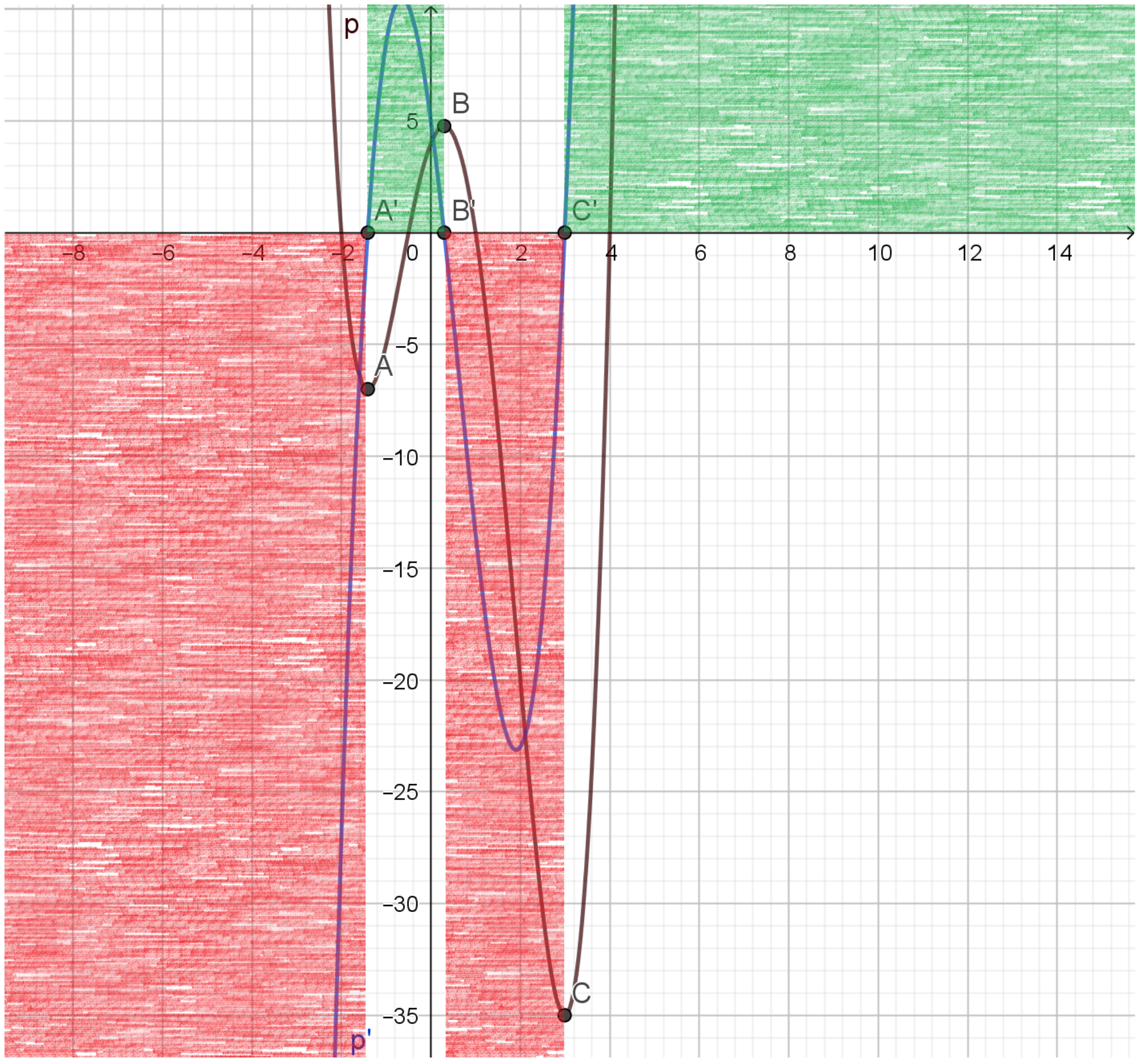
- Ausgangsgraph ist eine Funktion 3. Grades und hat Extrempunkte bei ca. $x = 1$ und ca. $x = 1.75$. Der Ableitungsgraph (b) ist 2. Grades und hat Nullstellen bei ungefähr $x = 1$ und $x = 1.75$ (Wir wissen, $f(x)$ ist Extrempunkt wenn $f'(x) = 0$)
  Die Steigung vor dem ersten Extrempunkt $x < 1$ ist negativ (Ableitungsgraph unterhalb der x-Achse), für $1 < x < 1.75$ ist die Steigung positiv (Ableitungsgraph oberhalb der x-Achse) und die Steigung nach dem zweiten Extrempunkt $1.75 < x$ ist wieder negativ (Ableitungsgraph unterhalb der x-Achse).

Ausgangsgraph (c) gehört zu Ableitungsgraph (3)

- Ausgangsgraph ist eine Funktion 2. Grades und hat einen Extrempunkt bei ca. $x = -1.5$. Der Ableitungsgraph (b) ist linear, also 1. Grades und hat genau eine Nullstellen bei ungefähr $x = -1.5$ (Wir wissen, $f(x)$ ist Extrempunkt wenn $f'(x) = 0$)

Die Steigung vor dem Extrempunkt $x < -1.5$ ist negativ (Ableitungsgraph unterhalb der x-Achse), nach dem Extrempunkt $-1.5 < x$ ist positiv (Ableitungsgraph oberhalb der x-Achse).

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion zu gegebenem Funktionsgraphen.
Tun Sie dies im gleichen Koordinatensystem.
Beschreiben Sie ihr Vorgehen in Stichpunkten.



Bestimmen Sie rechnerisch die **Nullstellen** der Funktionen:

(a) $f(x) = x^3 - 4.5x^2 + 5x$

$0 = x^3 - 4.5x^2 + 5x$ | x in jedem Term vorhanden $\Rightarrow$ **x ausklammern**.

$0 = \underbrace{x}_{=0 \text{ oder}} * \underbrace{(x^2 - 4.5x + 5)}_{=0}$ | Ein Produkt $a * b = 0$, wenn ein Faktor $a = 0$ oder $b = 0$.

$x = 0$

$x^2 \underbrace{-4.5}_{p} x + \underbrace{5}_{q}$ | pq-Formel

$x_{1,2} = -\frac{-4.5}{2} \pm \sqrt{(\frac{-4.5}{2})^2 - 5}$

$x_1 = \frac{4.5}{2} - \sqrt{(\frac{-4.5}{2})^2 - 5}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{4.5}{2} + \sqrt{(\frac{-4.5}{2})^2 - 5}$

$x_1 = 2$ $\qquad$ $x_2 = 2.5$

(b) $f(x) = x^2 - 1$

$0 = x^2 - 1$ | x nur in einem Term vorhanden. Nach x umformen.

$1 = x^2$ | $\sqrt{}$

$x_1 = +\sqrt{1}$ $\qquad$ $x_2 = -\sqrt{1}$

Ermitteln Sie rechnerisch die **Extrempunkte** der Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 + x^2 - 40x$

Wir bestimmen zunächst die Ableitung. *Wir wissen, x ist ein Extrempunkt, wenn $f'(x) = 0$.*

$f'(x) = x^3 + 7x^2 + 2x - 40$ | Um die Extremstellen zu berechnen, setzen wir $f'(x) = 0$

$0 = x^3 + 7x^2 + 2x - 40$ | Haben wir eine Funktion 3. Grades, so versuchen wir eine Nullstelle zu raten. Meist $-2; -1; 0; 1$ oder 2.

In unserem Fall ist $x = 2$ eine Nullstelle. Wir führen also die Polynomdivision mit $f'(x) : (x - 2)$ durch.

$$\begin{array}{l}
\big(\; x^3 + 7x^2 \;\; + 2x - 40\big) : \big(x - 2\big) = x^2 + 9x + 20 \\
\underline{-\,x^3 + 2x^2} \\
\qquad\quad 9x^2 \;\; + 2x \\
\qquad \underline{-\,9x^2 + 18x} \\
\qquad\qquad\quad 20x - 40 \\
\qquad\qquad \underline{-\,20x + 40} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Unser Ergebnis $x^2 + \underbrace{9}_{p} x + \underbrace{20}_{q}$ ist eine quadratische Funktion auf die wir die pq-Formel anwenden können.

bbs.eins.mainz

$x_1 = -\frac{9}{2} + \sqrt{(-\frac{9}{2})^2 - 20}$ | $x_2 = -\frac{9}{2} - \sqrt{(-\frac{9}{2})^2 - 20}$

$x_1 = -4$ | $x_2 = -5$

Um die Extrempunkte zu berechnen, setzen wir die errechneten x-Werte in $f(x)$ ein. So ergibt sich

$\mathbf{f(-5)} = 89.58$ (-5|89.58)

$\mathbf{f(-4)} = 90.67$ (-4|90.67)

$\mathbf{f(0)} = -53.33$ (0|-53.33)

(b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 0,75x^2 - 2,5x$

Wir bestimmen wieder die Ableitung. *Denn wir wissen, x ist ein Extrempunkt, wenn $f'(x) = 0$.*

$f'(x) = x^2 + 1.5x - 2.5$ | Um die Extremstellen zu berechnen, setzen wir $f'(x) = 0$

$0 = x^2 + \underbrace{1.5}_{p}x \underbrace{-2.5}_{q}$ | Wir haben eine quadratische Funktion, also nutzen wir die pq-Formel.

$x_1 = -\frac{1.5}{2} + \sqrt{(-\frac{1.5}{2})^2 - (-2.5)}$ | $x_2 = -\frac{1.5}{2} - \sqrt{(-\frac{1.5}{2})^2 - (-2.5)}$

$x_1 = -\frac{1.5}{2} + \sqrt{(-\frac{1.5}{2})^2 + 2.5}$ | $x_2 = -\frac{1.5}{2} - \sqrt{(-\frac{1.5}{2})^2 + 2.5)}$

$x_1 = 1$ | $x_2 = -2.5$

Um die Extrempunkte zu berechnen, setzen wir die errechneten x-Werte in $f(x)$ ein. So ergibt sich

$\mathbf{f(-2.5)} = 5.73$ (-2.5|5.73)

$\mathbf{f(1)} = -1.42$ (1|-1.42)

(c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x$

Wir bestimmen zunächst die Ableitung. *Denn wir wissen, x ist ein Extrempunkt, wenn $f'(x) = 0$.*

$f'(x) = x - 4$ | x ist nur in einem Term vorhanden, daher nach x umformen.

$4 = x$ | Wir haben also bei $x = 4$ einen Extrempunkt.

Um diesen Extrempunkt zu berechnen, setzen wir den errechneten x-Wert in $f(x)$ ein. Damit folgt

$f(4) = -8$

(4|-8)