Was wir bei ganzrationalen Funktionen schon bestimmen können

- Symmetrie
- Verhalten für große x-Beträge
- y-Achsenabschnitt
- Nullstellen

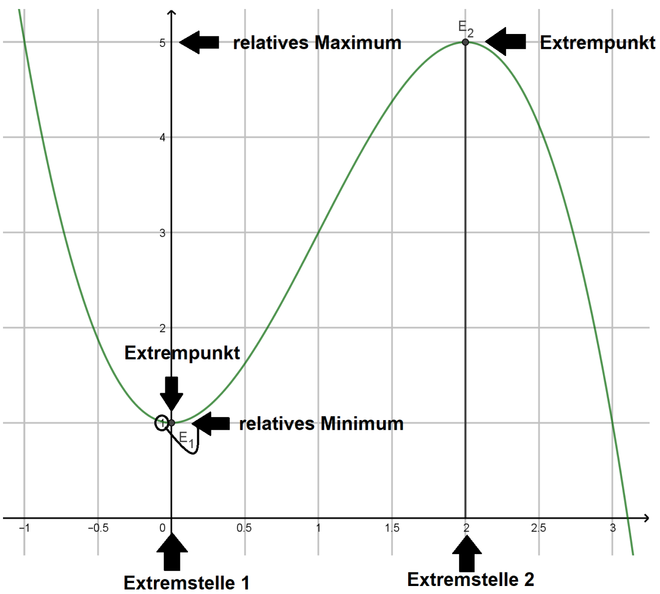
Begrifflichkeiten

relatives Maximum bezeichnet den y-Wert des Punktes, der in direkter Umgebung zu der Stelle x_{max} am **größten** ist.

relatives Minimum bezeichnet den y-Wert des Punktes, der in direkter Umgebung zu der Stelle x_{min} am **kleinsten** ist.

Extremstelle bezeichnet die Stelle x_{max}/x_{min}, an der der **größte/kleinste** y-Wert in direkter Umgebung erreicht wird.

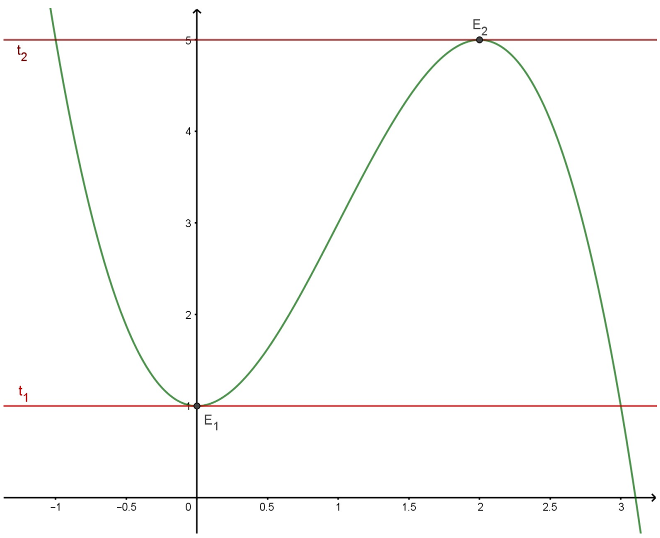
Extrempunkt wird ein Punkt $E(x_E|y_E)$ genannt, der entweder relatives Maximum oder relatives Minimum ist.



7.4 Extremstellen

Sollen wir den Graphen einer ganzrationalen Funktion $f(x)$ zeichnen, benötigen wir zusätzlich zu den oben genannten Informationen noch weitere markante Stellen und die dazugehörigen Punkte.
Die Rede ist von der **Extremstelle $\mathbf{x_E}$**. Natürlich kann eine Funktion auch keine oder mehr als eine Extremstelle besitzen.

Um diese zu bestimmen, benötigen wir die erste Ableitung $f'(x)$ der Funktion.
Wir erinnern uns daran, dass die Steigung des Funktionsgraphen am Hoch- bzw. Tiefpunkt 0 ist, also weder steigt noch fällt.



Die erste Ableitung $\mathbf{f'(x)}$ entspricht der **Steigungsfunktion**.
Um also herauszufinden, für welche $x - Stellen$ die Funktion ein **relatives Maximum/Minimum** besitzt, bestimmen wir die **Nullstellen** der **ersten Ableitung**.
Vorsicht! Zu beachten ist, die berechnete Nullstelle der ersten Ableitung ist nur dann eine Extremstelle, wenn die **zweite Ableitung** an dieser Stelle (also $f''(x_E)$) nicht 0 it.

x_E ist eine Extremstelle von $f(x)$, wenn

- **notwendige Bedingung:**
  $f'(x_E) = 0$

und

- **hinreichende Bedingung:**
  $f''(x_E) \neq 0$

Haben wir die Extremstelle x_E bestimmt, setzen wir diese in die Ausgangsfunktion $f(x)$ ein, um die x- und y-Koordinaten zu bestimmen.

Beispiel: $f(x) = x^3 + 0,5x^2 - 3,5x - 3$

Zunächst bestimmen wir die erste Ableitung: $f'(x) = 3x^2 + x - 3,5$
Anschließend die zweite Ableitung: $f''(x) = 6x + 1$.

Um nun die Nullstellen mit Hilfe der pq-Formel zu bestimmen, bringen wir die Funktion durch ausklammern in die entsprechende Form $\Rightarrow f'(x) = 3(x^2 + \underbrace{\frac{1}{3}}_{p}\ x \underbrace{-\frac{7}{6}}_{q})$.

$$x_{1/2} = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{7}{6}}$$
$$x_{1/2} = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{7}{6}}$$
$$x_{1/2} = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{43}{36}}$$

$$x_1 = -\frac{1}{6} + \sqrt{\frac{43}{36}} = \frac{-1 + \sqrt{43}}{6}$$
$$x_2 = -\frac{1}{6} - \sqrt{\frac{43}{36}} = -\frac{1 + \sqrt{43}}{6}$$

Um sicher zu gehen, dass es sich hierbei auch wirklich um Extremstellen handelt, setzen wir die x-Stellen in die zweite Ableitung ein.

$$f''(x_1) = 6 \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{43}}{6}\right) + 1$$
$$= -1 + \sqrt{43} + 1 \neq 0$$

$$f''(x_2) = 6 \cdot \left(-\frac{1 + \sqrt{43}}{6}\right) + 1$$
$$= -1 - \sqrt{43} + 1 \neq 0$$

Bei x_1 und x_2 handelt es sich also offensichtlich um Extremstellen. Wir berechnen nun die dazugehörigen y-Koordinaten und erhalten so die Punkte.

$$f(x_1) = (\frac{-1 + \sqrt{43}}{6})^3 + 0,5 \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{43}}{6}\right)^2$$
$$- 3,5 \cdot \left(\frac{-1 + \sqrt{43}}{6}\right) - 3$$
$$= -5,02$$

$$f(x_2) = (-\frac{1 + \sqrt{43}}{6})^3 + 0,5 \cdot \left(-\frac{1 + \sqrt{43}}{6}\right)^2$$
$$- 3,5 \cdot \left(-\frac{1 + \sqrt{43}}{6}\right) - 3$$
$$= 0,2$$

Unsere Extrempunkte sind $E_1(\frac{-1+\sqrt{43}}{6}| - 5,02)$ und $E_2(-\frac{1+\sqrt{43}}{6}|0,2)$.