BBS I Mainz, Höhere Berufsfachschule IT-Systeme
Grundstufe - Mathematik
Wochenplan Ganzrationale Funktionen

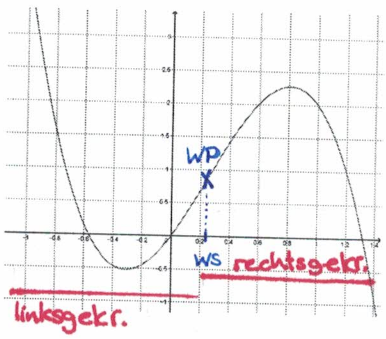
bbs.eins.mainz
Berufsbildende Schule Technik

Wochenplan Nr.: 15 Erledigt: Zeitraum: 15.04 - 21.04

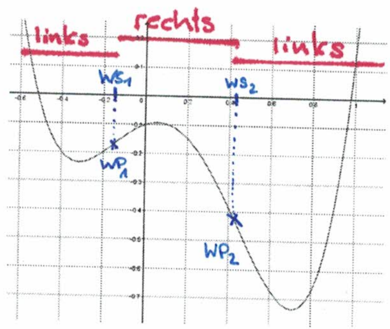
Pflicht: Sie bearbeiten *pro Teil* jeweils **eine Aufgabe.**
Wahl: Zur Vertiefung und Festigung stehen ihnen die übrigen Aufgaben zur Verfügung.

Teil 1: Markieren Sie die Wendestelle sowie den dazugehörigen Wendepunkt im Graphen und geben Sie an, um welchen Typ von Wendepunkt es sich handelt.
Markieren Sie zudem die Intervalle, in denen der Graph der Funktion $f(x)$ linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt ist.

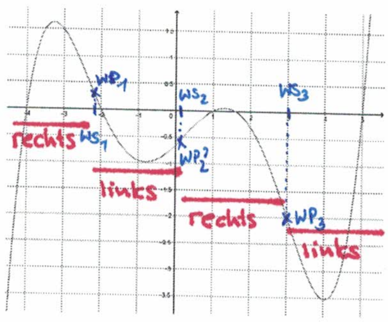
(I)



(II)



(III)



Teil 2: Ermitteln Sie die Wendepunkte und geben Sie die Intervalle an, in denen der Graph von $f(x)$ eine Linkskurve bzw. eine Rechtskurve ist.
Kontrollieren Sie ihr Ergebnis mit GeoGebra.

(I) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$

(II) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3$

(III) $f(x) = x^3(\frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3})$

Teil 3: Begründen oder **widerlegen** Sie folgende Aussagen:

- Der Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad 4 kann drei Wendepunkte haben.
- Der Graph einer Ganzrationalen Funktion von Grad 5 hat immer 4 Extremstellen.
- Der Graph einer ganzrationalen Funktion von ungeradem Grad hat immer den Ursprung als Wendepunkt

Teil 4: Untersuchen Sie die Funktionen im Hinblick auf Wendestellen.

(I) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$	(II) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 3x$
(III) $f(x) = -x^6 + 6x^4 - 9x^2 + 4$	

Zusatzaufgabe

Teil 5: Von der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 40x - \frac{3}{2}$ kennen Sie bereits den Tiefpunkt $TP(5|4,75)$.

a) Bestimmen Sie zunächst weitere Extrempunkt

b) Untersuchen Sie die Funktion auf Wende- bzw. Sattelpunkte.

c) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten, das Globalverhalten sowie die Achsenschnittpunkte.

d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

Teil 2 Wendestelle: $f''(x) = 0$

(I) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$

$f'(x) = -2x + 2$

$f''(x) = -2$

Keine Wendestelle, da $f''(x)$ niemals 0 wird.
Dauerhaft rechtsgekrümmt (nach unten geöffnete Parabel)

(II) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3$

$f'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2$

$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x = x(20x^2 - 12x + 6)$

$0 = x(20x^2 - 12x + 6) \Rightarrow x_1 = 0$

$0 = 20x^2 - 12x + 6 \quad |:20$

$0 = x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{10}$ pq-Formel

$x_{1/2} = -\frac{-\frac{3}{5}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{3}{5}}{2}\right)^2 - \frac{3}{10}}$

$= \frac{3}{10} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{10}\right)^2 - \frac{3}{10}}$

$= \frac{3}{10} \pm \sqrt{-\frac{21}{100}}$ ↯

$f''(-1) = 20\cdot(-1)^3 - 12\cdot(-1)^2 + 6\cdot(-1) = -38$ „−"

$f''(1) = 20\cdot(1)^3 - 12\cdot(1)^2 + 6\cdot 1 = 14$ „+"

→ Rechts-Links-Wechsel

(III) $f(x) = x^3\left(\frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$

$f'(x) = 4x^4 + x^3 + x^2$

$f''(x) = 16x^3 + 3x^2 + 2x \quad = x(16x^2 + 3x + 2)$

$0 = x(16x^2 + 3x + 2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

$0 = 16x^2 + 3x + 2 \quad | :16$

$0 = \underbrace{x^2 + \frac{3}{16}}_{p}x + \underbrace{\frac{1}{8}}_{q}$ pq-Formel

$x_{1/2} = -\frac{\frac{3}{16}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{3}{16}}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}}$

$= -\frac{3}{32} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{32}\right)^2 - \frac{1}{8}} \quad = -\frac{3}{32} \pm \sqrt{-\frac{119}{1024}}$ ↯

$f''(-1) = 16 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -15$ „ − “

↓

$f''(1) = 16 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 21$ „ + “

Rechts-Links-Wechsel

Teil 3

(I) Die Aussage ist falsch. Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat in der zweiten Ableitung Grad 2. Somit kann diese höchstens zwei Nullstellen und somit zwei Wendestellen besitzen

(II) Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: $f(x) = x^5$ $\quad f'(x) = 5x^4$ hat eine Extremstelle bei $x = 0$

(III) Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$

$f''(x) = 6x + 6$

$0 = 6x + 6 \quad | -6$

$-6 = 6x \quad | :6$

$-1 = x_1$

Besitzt bei $x_1 = -1$ eine Wendestelle trotz ungeraden Grads.

Teil 4

(I) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$f''(x) = 6x - 4$

$0 = 6x - 4 \quad | +4$

$4 = 6x \quad | :6$

$x_1 = \frac{4}{6}$

$f'''(x) = 6$

$f'''(\frac{4}{6}) = 6 > 0 \Rightarrow$ RL-Wechsel

(II) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + 3x$

$f'(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 4x + 3$

$f''(x) = 3x^2 - \frac{6}{4}x - 4$

$0 = 3x^2 - \frac{6}{4}x - 4 \quad | :3$

$0 = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{4}{3}$ pq-Formel

$x_{1/2} = -\frac{-\frac{1}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{4}{3}}$

$x_1 = 1{,}43 \qquad x_2 = -0{,}93$

$f'''(x) = 6x - \frac{6}{4}$

$f'''(1{,}43) = 7{,}08 > 0 \Rightarrow$ RL

$f'''(-0{,}93) = -7{,}08 < 0 \Rightarrow$ LR

(III) $f(x) = -x^6 + 6x^4 - 9x^2 + 4$

$f'(x) = -6x^5 + 24x^3 - 18x$

$f''(x) = -30x^4 + 72x^2 - 18$

$0 = -30x^4 + 72x^2 - 18$ | Substitution $z := x^2$

$0 = -30z^2 + 72z - 18$ | : -30

$0 = z^2 - 2,4z + 0,6$ pq-Formel

$z_{1/2} = -\frac{-2,4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2,4}{2}\right)^2 - 0,6}$

$= 1,2 \pm \sqrt{(1,2)^2 - 0,6}$

$z_1 = 2,12$ $z_2 = 0,28$ Rücksubstitution

$x^2 = 2,12$ $|\sqrt{\ }$ $x^2 = 0,28$ $|\sqrt{\ }$

$x_1 = \sqrt{2,12}$ $x_2 = -\sqrt{2,12}$ $x_3 = \sqrt{0,28}$ $x_4 = -\sqrt{0,28}$

$f'''(x) = -120x^3 + 144x$

$f'''(\sqrt{2,12}) = -160,74 < 0 \Rightarrow$ LR

$f'''(-\sqrt{2,12}) = 160,74 > 0 \Rightarrow$ RL

$f'''(\sqrt{0,28}) = 58,42 > 0 \Rightarrow$ RL

$f'''(-\sqrt{0,28}) = -58,42 < 0 \Rightarrow$ LR

Teil 5 Zusatzaufgabe

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 40x - \frac{3}{2}$ $TP_1(5|4{,}75)$

$f'(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$

$f''(x) = 3x^2 - 6x - 18 = 3(x^2 - 2x - 6)$

a) Extrempunkte: $f'(x) = 0$

1. NST $x_1 = 5$ (wegen Tiefpunkt) also Polynomdivision mit $x - 5$

$\Rightarrow$ $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 : x - 5 = \underbrace{x^2 + 2x - 8}_{\text{pq-Formel}}$

$$\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 - 18x + 40 \\ -(x^3 - 5x^2) \\ \hline \quad 2x^2 - 18x \\ \quad -(2x^2 - 10x) \\ \hline \qquad -8x + 40 \\ \qquad -(-8x + 40) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$p = 2 \quad q = -8$

$x_{2/3} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 8}$

$= -1 \pm \sqrt{9}$

$x_2 = -1 + 3 = 2$

$x_3 = -1 - 3 = -4$

Extremstelle prüfen: $f''(x_2) \neq 0$ $f''(x_3) \neq 0$

$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 18 = -18 < 0$ HoP

$f''(-4) = 3 \cdot (-4)^2 - 6 \cdot (-4) - 18 = 54 > 0$ TiP

Punkte:

$f(2) = 38{,}5$ $HP(2|38{,}5)$

$f(-4) = -177{,}5$ $TP_2(-4|-177{,}5)$

b) Wendestelle : $f''(x) = 0$

$0 = 3(x^2 - 2x - 6)$

pq-Formel

$p = -2 \quad q = -6$

$x_{4/5} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 6}$

$= 1 \pm \sqrt{1+6}$

$x_4 = 1 + \sqrt{7} = 3{,}65$

$x_5 = 1 - \sqrt{7} = -1{,}65$

Typ der Wendestelle: $f'''(x_4) \neq 0$ $\quad f'''(x_5) \neq 0$

$f'''(x_4) = 6 \cdot 3{,}65 - 2 = 19{,}9 > 0$ RL-Wechsel

$f'''(x_5) = 6 \cdot (-1{,}65) - 2 = -11{,}9 < 0$ LR-Wechsel

Punkte:

$f(3{,}65) = 20{,}42$ $\quad W_1(3{,}65 | 20{,}42)$ $\quad f(-1{,}65) = -85{,}42$ $\quad W_2(-1{,}65 | -85{,}42)$

c) Symmetrie: Keine Symmetrie, da sowohl gerade wie auch ungerade Exponenten vorhanden sind.

Verhalten: $a_n x^n = \frac{1}{4} x^4$ $\quad a_n$ positiv, n gerade

$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

Achsenschnittpunkte:

y-AAs: $f(0) = -\frac{3}{2}$ $\quad Y_{AS}(0 | -\frac{3}{2})$

Nullstellen:

$$0 = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 40x - \frac{3}{2}$$

- ohne Rechnung, mit Geogebra

$x_6 = -6{,}14$ $x_7 = 0{,}04$

$N_1(-6{,}14 | 0)$ $N_2(0{,}04 | 0)$