SCHRITT 14 Ich kann die Formel von Bernoulli anwenden.

Hier lernst du, mit welcher Wahrscheinlichkeit beim 10-maligen Werfen einer Münze genau 6-mal „Zahl" auftritt.

DAS BRAUCHST DU WIEDER

> **Tipp**
> n! (sprich: „n Fakultät") bedeutet, dass man das Produkt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ bildet.

Allgemein: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Beispiele: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$; $3! =$ ________ $6! =$ ________

DARUM GEHT'S

Du weißt, dass man beim Werfen eines Würfels insgesamt sechs verschiedene Ergebnisse hat. Doch du hast auch die Unterscheidung in nur zwei Ergebnisse, zum Beispiel „6" (= Treffer) und „nicht 6" (= Niete), kennengelernt. Wenn bei einem solchen Zufallsexperiment die Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer, wie beim Würfel, immer die gleiche bleibt, spricht man von einem **Bernoulli-Experiment**.
Mehrere, voneinander unabhängige und nacheinander ausgeführte Bernoulli-Experimente werden zu einer Bernoulli-Kette zusammengefasst. Du kannst dann mit der **Bernoulli-Formel** die Wahrscheinlichkeit für k Treffer bei n Versuchen berechnen:

$$\mathbf{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

mit p: Trefferwahrscheinlichkeit und
(1 – p): Wahrscheinlichkeit einer Niete

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Möglichkeiten an, k Treffer auf n Versuche zu verteilen. Das sind beim Baumdiagramm alle Pfade, die zu k Treffern führen.

> **Tipp**
> $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
> lies: „n über k"
> Einige Taschenrechner können den Binomialkoeffizienten direkt berechnen: nCr.
> (Das r entspricht k.)

> **Tipp**
> $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
> $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

> **Erklärfilm**
> Die Formel von Bernoulli
> p5cn9z

Bernoulli-Experiment

Diese Strategie verwendest du immer dann, wenn nach der Wahrscheinlichkeit einer ganz bestimmten Trefferzahl gefragt ist.

SO GEHT'S

○ 1 **Beispiel**
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei 6-maligem Würfeln 2-mal „1" oder „6" erscheint.

Notiere die Zufallsgröße und alle Daten des Zufallsexperiments:

X : Anzahl der Einsen und Sechsen
Es liegt eine Bernoulli-Kette vor:
$n = 6$; $k = 2$; $p =$ konstant

Schreibe die Ergebnisse von Treffer und Niete und deren Wahrscheinlichkeiten auf:

$T = \{1; 6\}$; $P(T) = p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$N = \{2; 3; 4; 5\}$; $P(N) = (1 - p) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten für 2 Treffer:

$\text{Anzahl} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}$
$= \frac{30}{2} = 15$

Berechne die Wahrscheinlichkeit:

$P(X = 2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$
$= 15 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{16}{81} \approx 0{,}3292$

Du bist dran
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei 5-maligem Würfeln 3-mal eine gerade Zahl erscheint.

○ **2** Berechne ohne Taschenrechner: $\binom{3}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{2}, \binom{4}{1}, \binom{5}{2}$

> **Tipp**
> Mit vielen Taschenrechnern kannst du mit den Befehlen *binompdf* oder *binomialpdf* die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X = k)$ direkt berechnen.

○ **3** Es ist eine Bernoulli-Kette mit $n = 10$ Versuchen und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}6$ gegeben. Lies aus dem Taschenrechner die Wahrscheinlichkeit für k Treffer ab.
a) $k = 3$ **b)** $k = 5$ **c)** $k = 7$

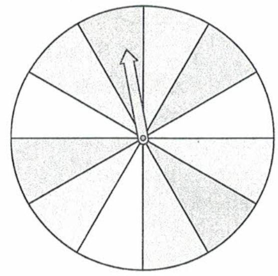
○ **4** In einer Lieferung von 100 LED-Leuchten sind durchschnittlich 2 % defekt.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Lieferung zwei LED-Leuchten defekt sind?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Lieferung nur eine LED-Leuchte defekt ist?
c) Untersuche, was wahrscheinlicher ist: In der Lieferung sind fünf LED-Leuchten oder keine defekt.

◒ **5** Überprüfe, ob eine Bernoulli-Kette vorliegt. Nenne gegebenenfalls die Zufallsgröße und gib, soweit vorhanden, die Größen n und p an.
a) Ein Basketballspieler, der zu 70 % trifft, macht 20 Trainingswürfe.
b) Zwei Würfel werden 20-mal geworfen. Es wird festgehalten, wie oft ein Pasch (d.h. gleiche Augenzahl) aufgetreten ist.
c) Jeweils fünf Schülerinnen aus 10 Klassen werden gefragt, ob sie mit nur einem Elternteil leben.

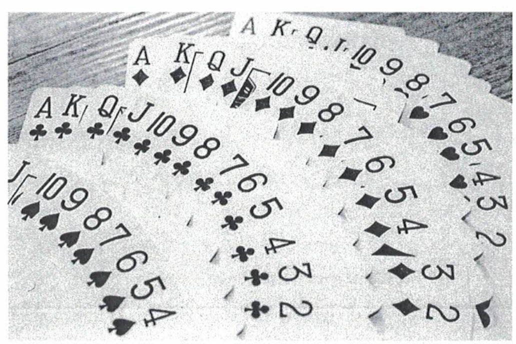
◒ **6** Ein Dodekaeder wird 10-mal geworfen. Gib für die Ereignisse jeweils die Größen k, p und $P(X = k)$ an.
A: 3-mal die Zahl „8"
B: 7-mal eine gerade Zahl
C: 5-mal eine durch 3 teilbare Zahl
D: 6-mal eine Primzahl

◒ **7** Ein Glücksrad ist in 12 Sektoren eingeteilt, davon sind 5 rot und 4 blau gefärbt, 3 sind weiß.
a) Begründe, dass man die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl von Treffern auf „Weiß" als Bernoulli-Experiment betrachten kann, obwohl das Rad drei Farben hat.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei 5 Drehungen genau 2-mal weiß zu treffen.
c) Gib ein Ereignis A und B an, für das die Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(A) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^7; \; P(B) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$



● **8** Aus einem Pokerkartenspiel mit 52 Karten werden Karten gezogen und wieder zurückgelegt. Gib für die Wahrscheinlichkeiten jeweils ein mögliches Ereignis an.
a) $P(A) = \binom{10}{6} \cdot 0{,}5^6 \cdot 0{,}5^4$
b) $P(B) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^7$
c) $P(C) = \binom{5}{1} \cdot \frac{4}{52} \cdot \left(\frac{48}{52}\right)^4$



TIPPS ZUM LÖSEN DER AUFGABEN 7 UND 8

7 c) Betrachte in den beiden Formeln jeweils die Trefferwahrscheinlichkeit p, sie verrät dir, welches Ergebnis des Glücksrads als Treffer gewertet wird. **8** Betrachte in den drei Formeln jeweils die Trefferwahrscheinlichkeit p, sie verrät dir, welche Kartentypen von der Anzahl her als Treffer in Frage kommen.

SCHRITT 15

Ich kann die Binomialverteilung darstellen und interpretieren.

Hier lernst du, wie du die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Anzahlen an Einsen beim 5-maligen Würfeln berechnen und in einem Histogramm darstellen kannst.

→ Bernoulli-Formel (in Schritt 14)

DAS BRAUCHST DU WIEDER

Allgemein: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

Beispiele: $n = 5$; $p = 0{,}4$;

$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}2304$

$P(X = 1) =$ ____________

$n = 7$; $p = \frac{1}{3}$;

$P(X = 4) =$ ____________

$P(X = 5) =$ ____________

$P(X = 0) =$ ____________

DARUM GEHT'S

Du weißt bereits, wie du die einzelnen Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ für k Treffer mit der Treffer-Wahrscheinlichkeit p einer Bernoulli-Kette der Länge n berechnest.
Man bezeichnet diese Wahrscheinlichkeiten kurz mit $\mathbf{B_{n;p}(k)}$.
Die dazugehörige Verteilung einer Zufallsgröße X heißt **Binomialverteilung**.
Man sagt auch: X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p.
Du kannst die Binomialverteilung anschaulich in einem Histogramm darstellen.

Binomialverteilung

Bei diesem Vorgehen berechnest du für jeden Treffer k ($k = 0, 1, \dots, n$) die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$. Die Ergebnisse kannst du wie Funktionswerte in ein Histogramm eintragen.

SO GEHT'S

Tipp
Du musst die Wahrscheinlichkeit für jeden Treffer k getrennt berechnen. Bei einem Histogramm trägst du die Anzahl k der Treffer auf der waagerechten Achse und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten auf der senkrechten Achse ein.

Erklärfilm
Graph und Erwartungswert der Binomialverteilung
p5cn9z

○ 1 **Beispiel**

Beim Werfen eines Würfels betrachtet man das Erscheinen der Augenzahl 5 oder 6 als Treffer. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für alle Treffer k beim 6-maligen Würfeln. Trage die Ergebnisse in eine Tabelle ein und stelle die Werte in einem Histogramm dar.

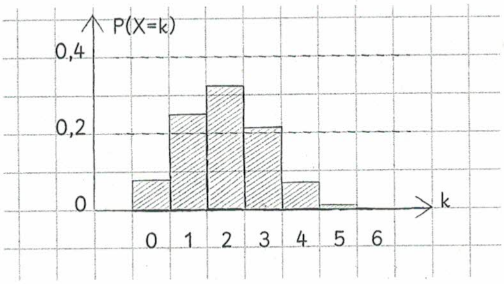
Berechne mit dem Taschenrechner die Wahrscheinlichkeiten für alle Treffer:

Treffer k	P(X = k)
0	0,0878
1	0,2634
2	0,3292
3	0,2195
4	0,0823
5	0,0165
6	0,0014

Du bist dran

Beim Werfen eines Würfels betrachtet man das Erscheinen der Augenzahl 5 oder 6 als Treffer. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für alle Treffer k beim 5-maligen Würfeln. Trage die Ergebnisse in eine Tabelle ein und stelle die Werte in einem Histogramm dar.

Trage die Werte in ein Histogramm ein:



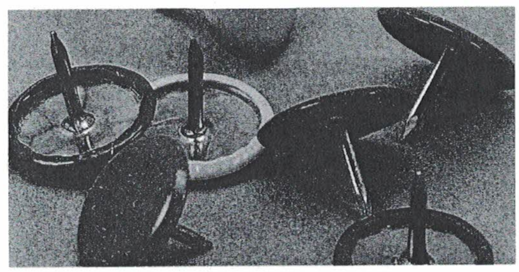
Tipp
Wähle auf der y-Achse für 0,1 einen Abstand von zwei Kästchen und runde die Wahrscheinlichkeiten zum Zeichnen auf 2 Nachkommastellen.

○ **2** Berechne mit der Formel von Bernoulli oder der entsprechenden Funktion deines Taschenrechners die Werte der Binomialverteilung.
a) $B_{4;\,0,5}(1)$ **b)** $B_{4;\,0,4}(2)$ **c)** $B_{3;\,0,8}(3)$ **d)** $B_{5;\,0,2}(0)$ **e)** $B_{5;\,0,6}(3)$

Tipp
Achte darauf, den Wert für k = 0 beim Zeichnen von Histogrammen nicht zu vergessen.

◒ **3** Zeichne ein Histogramm zu den Binomialverteilungen.
a) n = 10, p = 0,7 **b)** n = 5, p = 0,3 **c)** n = 6, p = 0,5

◒ **4** Beim Werfen eines Reißnagels hat man festgestellt, dass er mit etwa 40 % Wahrscheinlichkeit auf der glatten Fläche zu liegen kommt. Es werden 10 Reißnägel geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit für alle Anzahlen von Reißnägeln, die auf der glatten Fläche liegen, und trage die Ergebnisse in ein Histogramm ein.



◒ **5** Ein Würfel wird 6-mal geworfen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für alle Anzahlen der Ereignisse und trage die Ergebnisse in ein Histogramm ein.
a) E = {6} **b)** E = {1; 6} **c)** E: ungerade Zahl

◒ **6** Eine Münze wird 8-mal geworfen.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die Anzahlen von „Kopf" und trage sie in ein Histogramm ein.
b) Gib eine Begründung dafür an, dass das Histogramm achsensymmetrisch zu der Geraden zu x = 4 ist.

● **7** Die drei Diagramme zeigen die Binomialverteilung mit n = 5 und
A: p = 0,4; B: p = 0,5; C: p = 0,6.
Ordne den verschiedenen Trefferwahrscheinlichkeiten das richtige Diagramm zu.

Diagramm I

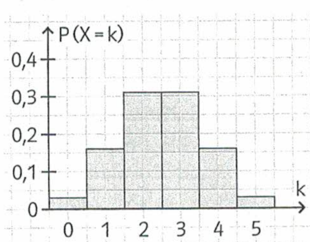


Diagramm II

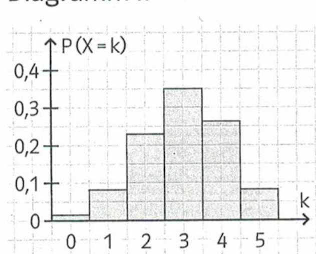
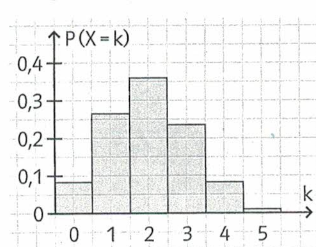


Diagramm III



TIPPS ZUM LÖSEN DER AUFGABE 7

7 Eine Binomialverteilung mit p = 0,5 ist achsensymmetrisch, je nachdem ob p größer oder kleiner 0,5 ist. Sind die Säulen tendenziell eher weiter rechts oder weiter links im Histogramm, umso mehr (p > 0,5) oder weniger (p < 0,5) Treffer sind zu erwarten.