**Aufgabe 1** 3 + 2 + 2 = 7 Pkt.

Bestimmen Sie jeweils die Geradengleichung mit Hilfe der gegebenen Informationen.

**(a)** Gegeben: $A(7|9|-3)$ und $B(2|-1|4)$

Da wir zwei Punkte gegeben haben, wählen wir zunächst einen Punkt für unseren **Stützvektor** aus und bestimmen diesen entsprechend $\vec{OA}$. Zusätzlich benötigen wir noch den **Richtungsvektor** - dieser geht von dem eben gewählten Punkt A aus. Hierfür verwenden wir den Stützvektor sowie den Ortsvektor zum Punkt B.

$$\vec{p} = 0\vec{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir die Geradengleichung aufstellen: $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$

**(b)** Gegeben: $A(9|2|-3)$ und der Stützvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Da wir den **Stützvektor** haben, benötigen wir noch den Richtungsvektor. Hierfür verwenden wir den **Stützvektor** sowie den Ortsvektor zum Punkt A.

$$\vec{u} = \vec{PA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Für die Geradengleichung folgt also $g_b : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

**(c)** Gegeben: $A(4|2|-9)$ und der Richtungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zunächst müssen wir den Punkt A noch durch seinen Ortsvektor zum **Stützvektor** umwandeln.

$$0\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir nun alle Informationen, die wir für die Geradengleichung benötigen.

Diese Informationen setzen wir nur in die allgemeine Form ein und erhalten:

$$g_c : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 22 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2** $2 + 4 + 3 = 9$ Pkt.

**(a)** Bestimmen Sie zwei Punkte, welche auf der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegen.

Um nun zwei weitere Punkte auf der Gerade zu bestimmen, wählen wir $r = 2$ bzw. $r = -1$ und setzen diese Werte in die Geradengleichung ein.

$r = 2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Der dazugehörige Punkt ist $P(3|11|-5)$ .

$r = -1$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der dazugehörige Punkt ist $Q(9|-4|-2)$ .

**(b)** Verläuft die Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ durch den Punkt $A(7|9|1)$.

Prüfen sie zudem, ob $B(-1,5|-5|9,5)$ auf der Geraden $g$ liegt.

Um zu prüfen, ob ein gegebener Punkt auf einer Gerade liegt, bestimmen wir den Ortsvektor zu besagtem Punkt und setzen diesen mit der Geradengleichung gleich ($0\vec{A} = g$). Dann bestimmen wir für welchen Wert von $r$ die einzelnen Koordinaten erfüllt sind.

$$O\vec{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | $7 = 7 - 2r$ | $\Rightarrow 2r = 0$ | $r = 0$ |
| II | $9 = 1 + 5r$ | $\Rightarrow 5r = 8$ | $r = \frac{8}{5}$ |
| III | $1 = -3 - r$ | $\Rightarrow -r = 4$ | $r = -4$ |

Wir sehen $r = \overbrace{0}^{nach I} \neq \overbrace{\frac{8}{5}}^{nach II} \neq \overbrace{-4}^{nach III}$. Somit können wir folgern, dass die Geraden $g$ nicht durch den Punkt $A$ verläuft.

Bleibt die Frage zu klären, ob der Punkt $B(-1,5|-5|9,5)$ auf der Geraden liegt. Das Vorgehen ist das Gleiche.

$$0\vec{B} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -5 \\ 9,5 \end{pmatrix}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | $-1,5 = 7 - 2r$ | $\Rightarrow 2r = 8,5$ | $r = 4,25$ |
| II | $-5 = 1 + 5r$ | $\Rightarrow 5r = -6$ | $r = -\frac{6}{5}$ |
| III | $9,5 = -3 - r$ | $\Rightarrow r = -12,5$ | |

Wir sehen $r = \overbrace{4,25}^{nachI} \neq \overbrace{-\frac{6}{5}}^{nachII} \neq \overbrace{-12,5}^{nachIII}$. Somit können wir folgern, dass $B$ nicht auf der Geraden $g$ liegt.

**(c)** Bestimmen Sie einen Punkt, der auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegt.

Ist $A(\frac{8}{3}|\frac{4}{3}|\frac{10}{3})$ einer der Punkte von $g$?

Zunächst bestimmen wir einen weiteren Punkt auf der Geraden. Hierfür wählen wir $r = 3$ und setzen dies in die Geradengleichung ein.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Der dazugehörige Punkt ist $P(1|16|-6)$.

Prüfen wir nun, ob der Punkt $A$ auf der Geraden liegt. Wir setzen also den Ortsvektor von $A$ mit der Gerade gleich und prüfen die Werte für $r$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | $\frac{8}{3} = 7 - 2r$ | $\Rightarrow 2r = \frac{13}{3}$ | $r = \frac{13}{6}$ |
| II | $\frac{4}{3} = 1 + 5r$ | $\Rightarrow 5r = \frac{1}{3}$ | $r = \frac{1}{5}$ |
| III | $\frac{10}{3} = -3 - r$ | $\Rightarrow -r = \frac{19}{3}$ | $\Rightarrow r = -\frac{19}{3}$ |

Wir sehen $r = \overbrace{\frac{13}{6}}^{nachI} \neq \overbrace{\frac{1}{3}}^{nachII} \neq \overbrace{-\frac{19}{3}}^{nachIII}$. Somit können wir folgern, dass $A$ nicht auf der Geraden $g$ liegt.

**Aufgabe 3** $2 + 3 + (1 + 2 + 4) = 12$ Pkt.

Das Dreieck $ABC$ ist gegeben durch die Punkte $A(5|2|0)$, $B(3|0|4)$ und $C(0|-1|-3)$.

**(a)** Welchen Abstand hat der Eckpunkt $A$ vom Eckpunkt $B$?

Um den Abstand zweier Punkte zu berechnen, benötigen wir zunächst den Verbindungsvektor zwischen diesen beiden Punkten. Dieser ist: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Für den Abstand verwenden wir die uns bekannte Formel: $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. So ergibt sich für die Punkte A und B:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24} \sim \boxed{4{,}89}$$

**(b)** In welchem Winkel stehen die Vektoren im Punkt $B$ zueinander?

Da wir den Winkel im Punkt B berechnen wollen, benötigen wir die Vektoren, die von diesem Punkt ausgehen.

$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$

Für den Winkel können wir die uns bekannte Formel anwenden:

$$\gamma = \arccos \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \arccos \frac{a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} * \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Mit den beiden Vektoren ergibt sich so:

$$\gamma = \arccos \frac{2 * (-3) + 2 * (-1) + (-4) * (-7)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} * \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-7)^2}} = \arccos \frac{-6 - 2 + 28}{\sqrt{24} * \sqrt{59}} \sim \boxed{57{,}89^\circ}$$

**(c)** Lösen Sie jeweils die Unterpunkte:

(1) Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt $M$ zwischen $B$ und $C$

Der Mittelpunkt entspricht der Hälfte der Summe der beiden Punkte. Somit gilt für $M = (\frac{3+0}{2}|\frac{0+(-1)}{2}|\frac{4+(-3)}{2}) =$ $\boxed{(1{,}5|\text{-}0{,}5|0{,}5)}$

(2) Bestimmen Sie die Gerade, die durch die Punkte $M$ und $A$ verläuft

Um die Gerade zu bestimmen benötigen wir den Stütz- und den Ortsvektor. Also Stützvektor wählen wir den Ortsvektor zu M und stellen damit den Richtungsvektor zu A auf.

$\vec{p} = 0\vec{M} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $\vec{u} = \vec{MA} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$

Daraus lässt sich die Geradengleichung aufstellen: $\Rightarrow$ $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 3,5 \\ 2,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$

(3) Zeigen sie rechnerisch, dass die Strecke $\overline{MA}$ auf der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegt.

Um dies zu zeigen, setzen wir die Geraden $g = h$ und lösen das Gleichungssystem:

| | | |
|---|---|---|
| I | $1,5 + 3,5t = -2 + 14r$ | |
| II | $-0,5 + 2,5t = -3 + 10r$ | |
| III | $0,5 - 0,5t = 1 - 2r$ | $\mid -0,5 \mid : (-0,5)$ |
| | $\Rightarrow t = 4r - 1$ | |

Wir müssen das Ergebnis nun in eine der anderen Gleichungen einsetzen.

| | | |
|---|---|---|
| I | $1,5 + 3,5 * (4r - 1) = 1,5 + 14r - 3,5 =$ | $-2 + 14r$ |
| | $\Rightarrow 0 = 0$ | Wir haben eine wahre Aussage. |
| II | $-0,5 + 2,5(4r - 1) = -0,5 + 10r - 2,5 =$ | $-3 + 10r$ |
| | $\Rightarrow 0 = 0$ | Wir haben eine wahre Aussage. |

Wir erhalten für $r$ und $t$ unendlich viele Lösungen.

$\Rightarrow$ Die Geraden $g$ und $h$ sind gleich. Somit liegt die Strecke $\overline{MA}$ auf der Geraden g .

**Aufgabe 4** / 3 + 3 = 6 Pkt.

Gegeben sind die Geraden

$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ | $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Wählen Sie **eine** der beiden Geraden und bestimmen sie die Geradengleichungen $h_1$ und $h_2$ so, dass der Punkt $P(3|2|-1)$ auf den Geraden liegt und die Gerade $h_1$ orthogonal und die Gerade $h_2$ parallel zu der gewählten Gerade liegt.

Zwei Geraden sind *orthogonal*, wenn das Skalarprodukt der Richtungsvektoren Null ist ($\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} * \vec{b} = 0$)

Zwei Geraden sind *parallel*, wenn die Richtungsvektoren linear abhängig sind.

Mit diesem Wissen, können wir die zwei Geraden nun aufstellen.

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

---

$h_1$ orthogonal zu $g$ und durch $P(3|2|-1)$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} * \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow 7 * \underbrace{v_1}_{1} + 2 * \underbrace{v_2}_{-1} - 5 * \underbrace{v_3}_{1} = 0$$

$$h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$h_1$ orthogonal zu $g$ und durch $P(3|2|-1)$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} * \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow 7 * \underbrace{v_1}_{1} + 2 * \underbrace{v_2}_{-1} - 5 * \underbrace{v_3}_{1} = 0$$

$$h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

---

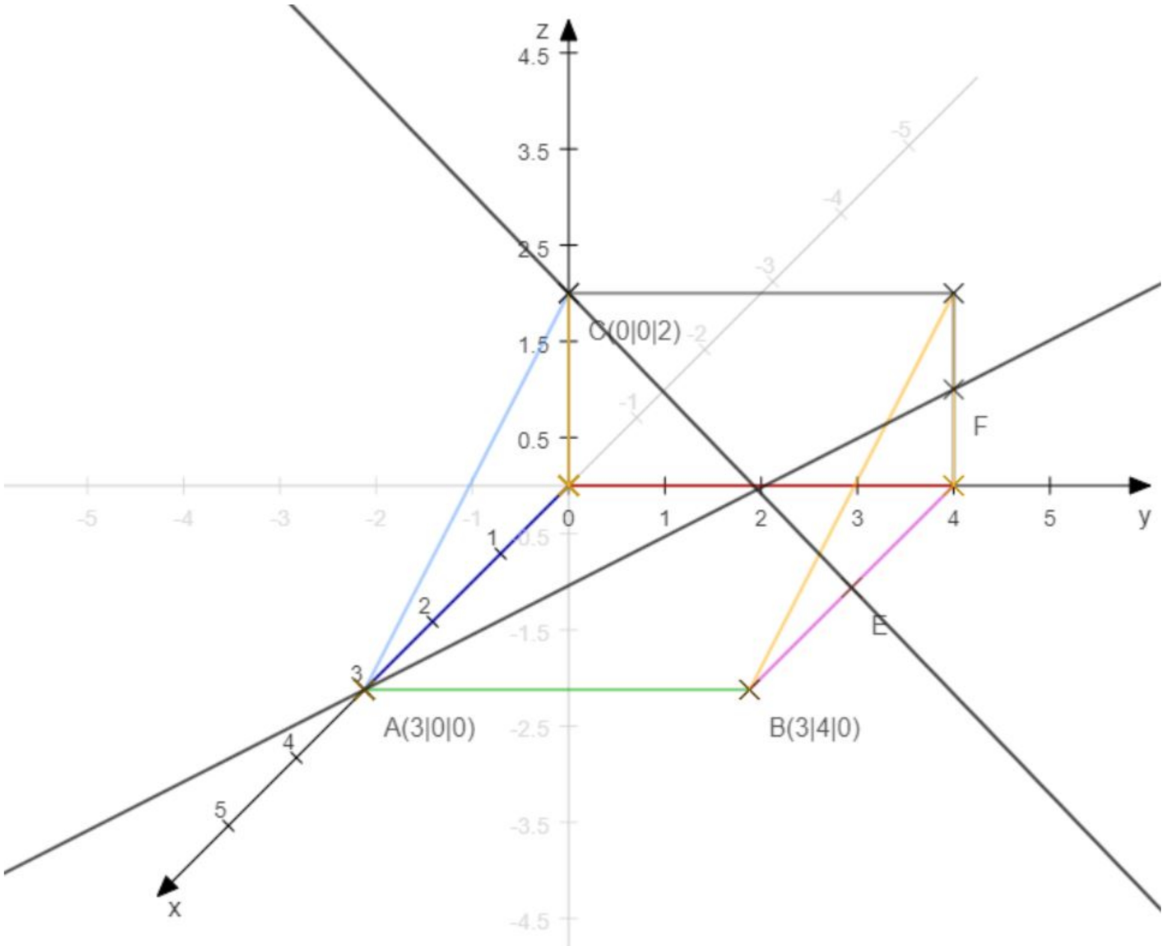
$h_2$ parallel zu $g$ und durch $P(3|2|-1)$

$$h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$h_2$ parallel zu $g$ und durch $P(3|2|-1)$

$$h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 5** / 10 Pkt.




In der obigen Grafik sind die Punkte $E$ und $F$ entsprechen den Kantenmitten.
Überprüfen Sie, ob sich die Geraden $g$ und $h$ sich schneiden.
Wenn ja, geben Sie den Schnittpunkt an!

Zunächst müssen wir die zwei Punkte $E$ und $F$ bestimmen.
Wir wissen, dass sie jeweils auf der Kantenmitte liegen. Wir erinnern uns, dass wir die Mitte zwischen zwei Punkten - oder auch die Mitte des Verbindungsvektors zwischen den beiden Punkten.
So ergibt sich

$$E = (\frac{\overbrace{(3|4|0)}^{B} + (0|4|0)}{2}) = (1,5|4|0) \qquad F = \frac{(0|4|0)+(0|4|2)}{2} = (0|4|1)$$

Die Gerade $g$ verläuft durch A und F und die Gerade $h$ durch C und E. Somit benötigen wir also noch die entsprechenden Richtungsvektoren: $\vec{AF} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{CE} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Es steht nun weiterhin die Frage im Raum, ob sich $g$ und $h$ schneiden. Um diese zu beantworten setzen wir $g = h$ und lösen das Gleichungssystem.

| | | |
|---|---|---|
| I | $3 - 3r = 1,5t$ | $\Rightarrow t = 2 - 2r$ |
| II | $4r = 4t$ | $\Rightarrow r = t$ |
| III | $r = 2 - 2t \xrightarrow{mitI}$ | $r = 2 - 2(2 - 2r)$ |
| | | $r = 2 - 4 + 4r$ |
| | | $r = \frac{2}{3}$ |

Wegen II $\Rightarrow t = \frac{2}{3}$

Wir können also folgern, dass sich $g$ und $h$ schneiden.

Den dazugehörigen Schnittpunkt berechnen wir, indem wir die Werte für $r$ und $t$ in die entsprechenden Geradengleichungen einsetzen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} * \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt ist also $S(1\frac{8}{3}|\frac{2}{3})$ .