Aufgabe 1 — / 4 Pkt.

Beschreiben Sie das **Verhalten** der folgenden Funktionen **für große bzw. kleine x-Werte**.

(a) $f(x) = 5x^3 + 500x^2 - 30$
$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$
$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

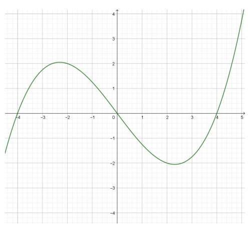
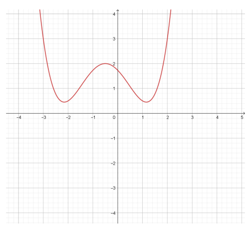
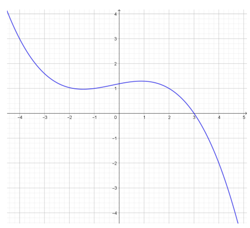
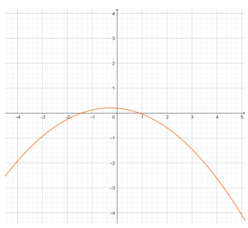
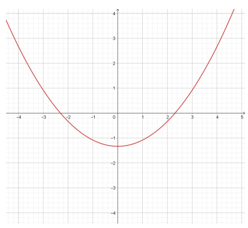
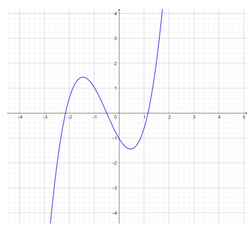
(b) $f(x) = -0.2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$
$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$
$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

(c) $f(x) = -10x^7 + 8x^5 - 6x^3 + 1$
$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$
$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

(d) $f(x) = 25x^4 + 20x^3 - 14x + 500$
$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$
$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

Aufgabe 2 — / 6 Pkt.

Ordnen Sie die Graphen der Ableitungsfunktionen $f'(x)$ den richtigen Ausgangsgraphen für $f(x)$ zu.
Begründen Sie ihre Entscheidung in Stichpunkten.

Ausgangsgraph von $f(x)$		
(a) 	(b) 	(c) 
Graph der Ableitungsfunktion $f'(x)$		
(1) 	(2) 	(3) 

(a) $\to$ (2): Hochpunkt im Intervall [-3,-2] und Tiefpunkt im Intervall [2,3] bei (a)
$\Rightarrow$ Nullstelle im Intervall [-3,-2] sowie in [2,3] bei (2)

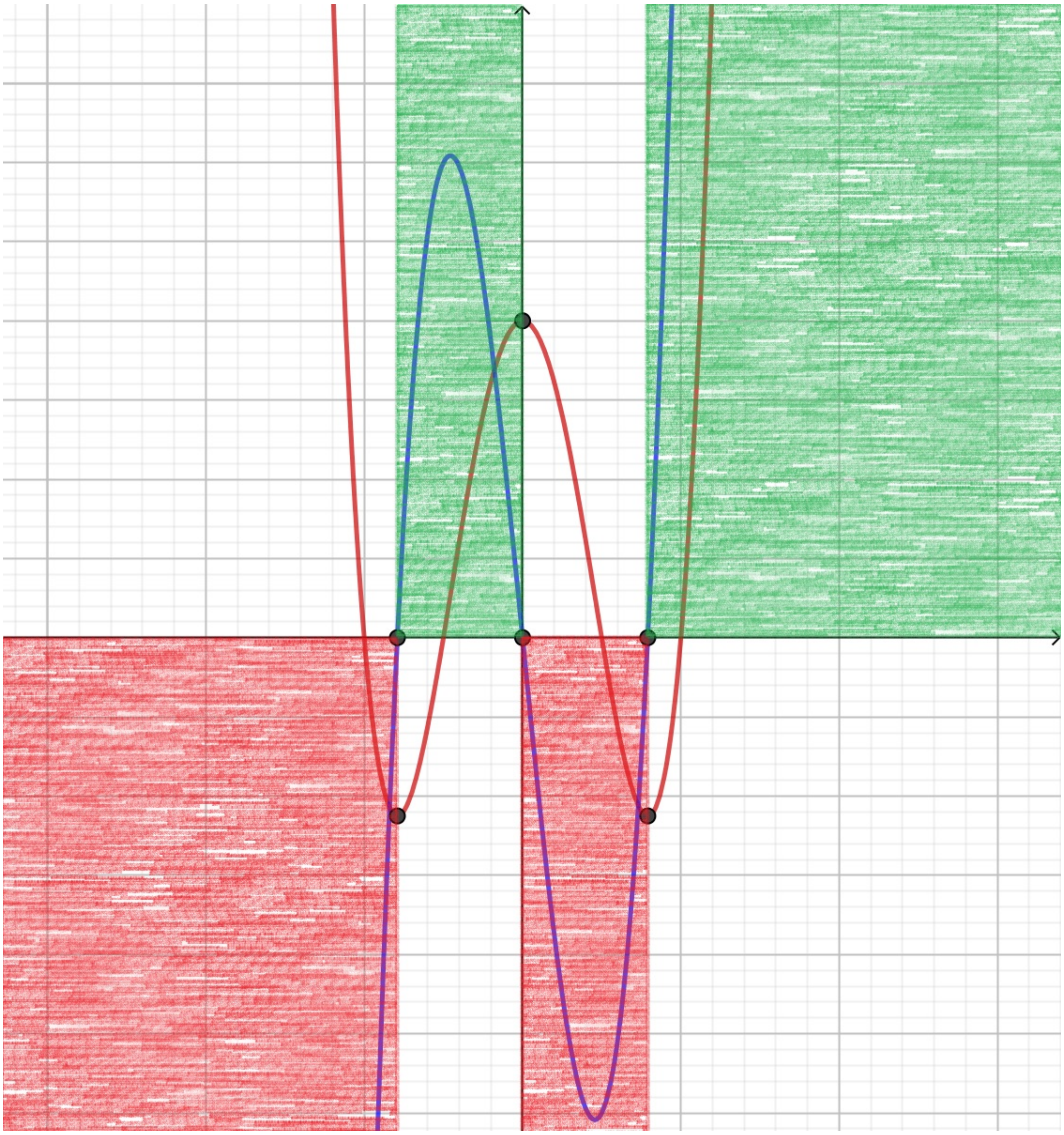
(b) $\rightarrow$ (3): Tiefpunkte im Intervall [-3,-2] und [1,2]; Hochpunkt in [-1,0] bei (b)
$\Rightarrow$ Nullstelle in den Intervallen [-3,-2] sowie [-1,0] und [1,2]

(c) $\rightarrow$ (1): Tiefpunkt im Intervall [-2,-1] und Hochpunkt ungefähr bei $x = 1$ bei (c)
$\Rightarrow$ Nullstelle im Intervall [-2,-1] und ungefähr bei $x = 1$ bei (1)

Aufgabe 3

/ 8 Pkt.

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion zu gegebenem Funktionsgraphen.
Tun Sie dies im gleichen Koordinatensystem.
Beschreiben Sie ihr Vorgehen in Stichpunkten.



(1) Markiere die Hoch- bzw. Tiefpunkte des Funktionsgraphen

(2) Übertrage diese auf die x-Achse

(3) Betrachte die Steigung links / zwischen / rechts der Hoch- bzw. Tiefpunkte

   (a) Steigung positiv $\Rightarrow$ Ableitungsgraph oberhalb der x-Achse

   (b) Steigung negativ $\Rightarrow$ Ableitungsgraph unterhalb der x-Achse

(4) Skizziere den Ableitungsgraphen entsprechend der Markierungen innerhalb der bestimmten Bereiche (oberhalb oder unterhalb der x-Achse)

Aufgabe 4 / 16 Pkt.

(a) Bestimmen Sie rechnerisch die **Nullstellen** der Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ Wir raten eine Nullstelle. $x_0 = 3$

$$f(3) = 3^3 + 3^2 - 9 * 3 + 9 = 27 - 9 - 27 + 9 = 0$$

Um die weiteren Nullstellen zu bestimmen, nutzen wir die Polynomdivision und berechnen

$$\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 \quad - x^2 - 9x + 9 \right) : \left(x - 3 \right) = x^2 + 2x - 3 \\
\underline{- x^3 + 3x^2} \\
\qquad\quad 2x^2 - 9x \\
\qquad \underline{- 2x^2 + 6x} \\
\qquad\qquad\quad - 3x + 9 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\quad 3x - 9} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Nun müssen wir nur noch das Ergebnis der Polynomdivision $x^2 + 2x - 3 = 0$ setzen. Hierfür können wir die pq-Formel verwenden.

> Bei der pq-Formel ($x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ muss unsere Ausgangsfunktion folgende Form haben:
>
> $$f(x) = x^2 + px + q$$

In unserem Fall haben wir $x^2 + \underbrace{2}_{p} x \underbrace{-3}_{q}$. Diese Werte ($p = 2, q = -3$) setzen wir in die Formel ein. Damit ergibt sich

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = -1 \pm \sqrt{4}$$

$\Rightarrow x_1 = -1 - \sqrt{4} = -3$ und $x_2 = -1 + \sqrt{4} = 1$

(b) Ermitteln Sie rechnerisch die **Extrempunkte** der Funktion $f(x)$.

Um die Extrempunkte zu bestimmen, benötigen wir zunächst die Ableitungsfunktion $f'(x) = 3x^2 - 2x - 9$.
Wir wissen, dass die Extrempunkte (also Hoch- bzw. Tiefpunkt) die Steigung 0 haben. Da die Ableitungsfunktion $f'(x)$ auch die Steigungsfunktion der Ausgangsfunktion $f(x)$ ist, müssen wir also nur noch **Nullstellen der Ableitungsfunktion** berechnen.
Zunächst bringen wir $f'(x)$ in die entsprechende Form (für die pq-Formel).

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 9| : 3$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2 \underbrace{-\frac{2}{3}}_{p} \underbrace{-3}_{q}$$

Mit der pq-Formel ergeben sich dann die folgenden Nullstellen:

$$x_{1,2} = -\frac{-\frac{2}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{2}{3}}{2}\right)^2 - (-3)}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} + \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3} = \frac{1+2\sqrt{7}}{3}; \;\Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} - \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3} = \frac{1-2\sqrt{7}}{3}$$

Da nach den Extrempunkten gefragt ist, müssen wir nun noch x_1 und x_2 in die Ausgangsfunktion $f(x)$ einsetzen, um die Koordinaten der Extrempunkte zu bestimmen.
$f(x_1) = f(\frac{1+2\sqrt{7}}{3}) = (\frac{1+2\sqrt{7}}{3})^3 - (\frac{1+2\sqrt{7}}{3})^2 - 9 * (\frac{1+2\sqrt{7}}{3}) + 9 = -5.05$
$f(x_2) = f(\frac{1-2\sqrt{7}}{3}) = (\frac{1-2\sqrt{7}}{3})^3 - (\frac{1-2\sqrt{7}}{3})^2 - 9 * (\frac{1-2\sqrt{7}}{3}) + 9 = 16.9$
Damit liegen die Extrempunkte bei H($\frac{1-2\sqrt{7}}{3}$|16.9) und T($\frac{1+2\sqrt{7}}{3}$|-5.05)