Berechnen Sie die Steigung für die nachfolgenden Funktionen an den Stellen $x_0 = -2 x_0 = 0$ und $x_0 = -4$

(a) $f(x) = -2x^2$

$x_0 = -2$

$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2)*(-2+h)^2-(-2)*(-2)^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2)*(4-4h+h^2)-(-2)*4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-8)-8h-2h^2+8}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{8h-2h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 8-2h$$
= 8

$x_0 = 0$

$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2)*h^2-(-2)*0^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2)h^2-0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2)h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (-2)h$$
= 0

$x_0 = -4$

$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2)*(-4+h)^2-(-2)*(-4)^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2)*(16-8h+h^2)-(-2)*16}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-32)+16h-2h^2+32}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{16h-2h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 16-2h$$
= 16

(b) $f(x) = 3x^2 + 4$

$x_0 = -2$

$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3*(-2+h)^2+4]-[3*(-2)^2+4]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3*(4-4h+h^2)+4]-[3*4+4]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[12-12h+3h^2+4]-[12+4]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-12)h+3h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (-12)+3h$$
= -12

$x_0 = 0$

$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3*h^2+4]-[3*0^2+4]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3*h^2+4]-4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{3h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 3h$$
= 0

$x_0 = -4$

$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3*(-4+h)^2+4]-[3*(-4)^2+4]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3*(16-8h+h^2)+4]-[3*16+4]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[48-24h+3h^2+4]-[48+4]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-24)h+3h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (-24)+3h$$
= -24

(c) $f(x) = \frac{x^2}{3}$

$x_0 = -2$

$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(-2+h)^2}{3}-\frac{(-2)^2}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4-4h+h^2}{3}-\frac{4}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4-4h+h^2-4}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4h+h^2}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{3h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4+h}{3}$$
$$= \frac{4}{3}$$

$x_0 = 0$

$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(0+h)^2}{3}-\frac{0^2}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{3}-\frac{0}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2-0}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{3h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{3}$$
$$== \frac{8}{3}$$

$x_0 = -4$

$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(-4+h)^2}{3}-\frac{(-4)^2}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{16-8h+h^2}{3}-\frac{16}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{16-8h+h^2-16}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{8h+h^2}{3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{8h+h^2}{3h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{8+h}{3}$$