Die Einwohnerzahl Berlins lässt sich für den Zeitraum von 1990 bis 2010 durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 5x^2 + 40x + 3437$ beschreiben.
Hierbei gilt x: in Jahren, wobei $0 = 1990$. $f(x)$ beschreibt die Einwohnerahlen in Tausend pro Jahr.
0 = Stand 1990 (3.437 Tausend Einwohner)

(a) Bestimmen Sie die Extremstellen und die relativen Maxima bzw. relativen Minima.
Interpretieren Sie die Werte situationsbezogen!

Wir erinnern uns, für die **Extremstellen** benötigen wir die **Nullstellen der ersten Ableitung**.
$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 10x + 40$

$0 = \frac{1}{2}x^2 - 10x + 40 \qquad |\cdot 2$

$0 = x^2 \underbrace{-20}_{p} x + \underbrace{80}_{q} \qquad$ |pq-Formel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -\underbrace{\frac{-20}{2}}_{-10} \pm \sqrt{\left(\underbrace{\frac{-10}{2}}_{-10}\right)^2 - 80}$$

$x_1 = 10 + \sqrt{100 - 80}$ $\qquad$ $x_2 = 10 - \sqrt{100 - 80}$

$x_1 = 10 + 2\sqrt{5}$ $\qquad$ $x_2 = 10 - 2\sqrt{5}$

Für die **relativen Maxima bzw. relativen Minima** setzen wir die *Extremstellen in die **Ausgangsfunktion** ein.*
So ergibt sich:
$f(x_1) = \frac{1}{6}(10 + 2\sqrt{5})^3 - 5(10 + 2\sqrt{5})^2 + 40(10 + 2\sqrt{5}) + 3437$
$f(x_1) = 3473,85 \Rightarrow$ Relatives Minimum ist $3473,85$

$f(x_2) = \frac{1}{6}(10 - 2\sqrt{5})^3 - 5(10 - 2\sqrt{5})^2 + 40(10 - 2\sqrt{5}) + 3437$
$f(x_2) = 3533,48 \Rightarrow$ relatives Maximum bei $3533,48$

Mitte 1995 war die Einwohnerzahl Berlins mit 3533,48 Tausend am Höchsten. Knapp 7 Jahre später, um Mai 2002 hatte sie mit 3473,85 Tausend am niedrigsten.

(b) Bestimmen Sie den Wendepunkt und den Ableitungswert an Wendepunkt.
Interpretieren Sie diesen situationsbezogen!

Für den **Wendepunkt** benötigen wir die **Nullstelle der zweiten Ableitung**.
$f''(x) = x - 10$

$0 = x - 10 \qquad |+10$

$x_W = 10$

Zunächst müssen wir noch den zugehörigen y-Wert bestimmen, da nach dem Wendepunkt gefragt ist. Somit setzen wir x_W in die Ausgangsfunktion ein.

$f(10) = \frac{1}{6} \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^2 + 40 \cdot 10 + 3437 = 3503,\bar{6}$

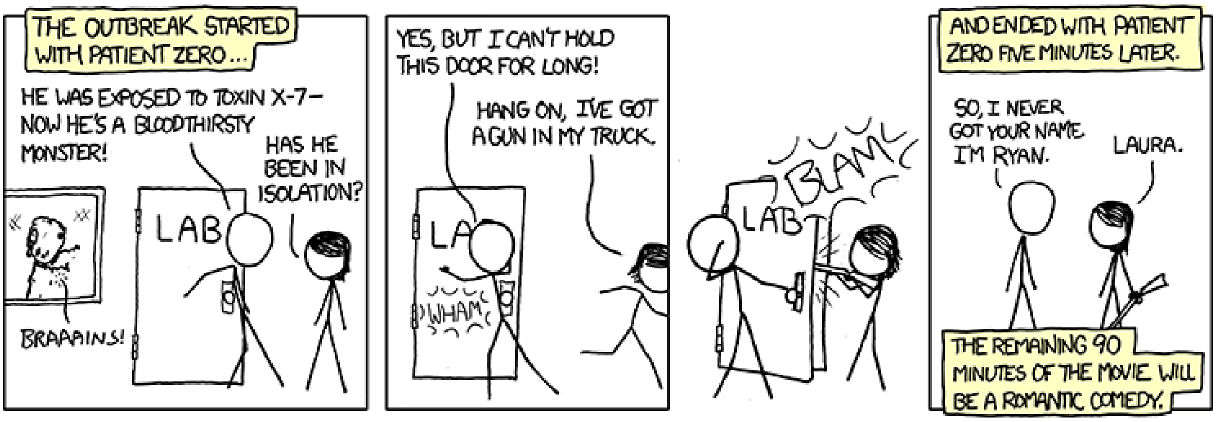
Unser **Wendepunkt** ist also $(10|3503,\bar{6})$

Bleibt uns noch der Wert der Ableitung, also $f'(10)$, zu bestimmen.
$f'(10) = \frac{1}{2} \cdot 10^2 - 10 \cdot 10 + 40 = 10$

Nach 2000 zogen weniger Menschen aus Berlin fort als in den Jahren zuvor. Die Zahl der "Abwanderer" war somit 2000 am Höchsten.

(c) Ermitteln Sie die weiteren Informationen aus den Schritten der Kurvendiskussion.
Skizzieren Sie auf Grundlage der bestimmten Informationen den Graphen der Funktion. Nutzen Sie dabei eine angemessene Skalierung für das Koordinatensystem!


y
x



https://xkcd.com/734/

Die Zombieapokalypse ist ausgebrochen. Die Entwicklung der Infizierten kann mit

$$f(x) = -x^4 + 12x^3$$

modelliert werden.
Dabei gibt x die vergangenen Tage an. Der Beginn des Ausbruchs entspricht also $x = 0$ und y gibt die infizierten Personen in Tausend an.
Es wird vermutet, dass nach dem Ausbruch entsprechende Gegenmaßnahmen gestartet wurden.

(a) Bestimmen Sie Hoch-, Tief und Sattelpunkte, falls vorhanden!

(b) Bestimmen Sie den/die Wendepunkt/e und interpretieren Sie diesen/diese in Bezug auf die Situation!

(c) Skizzieren Sie einen Funktionsgraph auf Basis ihrer gewonnen Daten.

(d) Wird keine Gegenmaßnahme eingeleitet, würde sich die Infektionsdynamik ab Tag $x = 6$ nicht mehr ändern. Bestimmen Sie die Infektionsdynamik an besagter Stelle und bestimmen Sie zudem die Anzahl der Infizierten nach 12 Tagen.

Bei einer ausgebrochenen Grippewelle kann die Entwicklung der Anzahl der Erkrankten mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2$ modelliert werden.
Wie gewohnt entspricht $x = 0$ dem Beginn der Grippewelle und y gibt die Anzahl der Erkrankten in Tausend an.

(a) Führen Sie eine klassische Kurvendiskussion durch und skizzieren Sie den Funktionsgraphen in ein entsprechendes Koordinatensystem.
Markieren Sie die charakteristischen Stellen des Funktionsgraphen!

(b) Es kann zu verschieden intensiven Ausbrüchen kommen. Diese werden durch einen Parameter in das Modell integriert. Die dazugehörige Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + tx^2$$

Bestimmen Sie die Extrem- und Wendestelle(n) in Abhängigkeit von t.
Beschreiben Sie zusätzlich den Einfluss des Parameters auf die Entwicklung der Anzahl der Erkrankten.