1 Ableitungsregeln

Im Verlauf unseres kurzen mathematische Vergnügens werden wir des öfteren mit dem Begriff **ableiten** oder auch **Ableitung** konfrontiert.
Nachfolgend werden die verschiedenen Ableitungsregeln kurz erläutert und an einem Beispiel demonstriert.

Für die nachfolgenden Regeln betrachten wir die Funktionen g und h. Diese sind auf einem Intervall I definiert und an der Stelle $x \in I$ differenzierbar.
Konstanten bezeichnen wir im nachfolgenden mit $c \in \mathbb{R}$.

1.1 Potenzregelregel

$f(x) = c \cdot x^n$ mit $c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ ist in x differenzierbar, dann gilt:

$$f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Sonderfall: Steht unser x im Nenner eines Bruchs, so bietet sich folgendes Vorgehen an:

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \xrightarrow{umformen} f(x) = x^{-3}$$

$$\xrightarrow{ableiten} f'(x) = -3 \cdot x^{\overbrace{-4}^{-3-1}}$$

$$\xrightarrow{umformen} f'(x) = \frac{-3}{x^4}$$

Beispiel:

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = 4x^3$$

1.2 Summenregel

$f(x) = g(x) + h(x)$ ist in x differenzierbar, dann gilt:

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Als kleine Merkregel führen wir an:
Summen werden gliedweise abgeleitet! (Jeder Summand für sich!)

Beispiel:

$$f(x) = 3x^2 + 4x$$

$$f'(x) = 6x + 4$$

1.3 Faktorregel

$f(x) = c \cdot g(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$ ist in x differenzierbar, dann gilt:

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Unsere Merkregel für die Faktorregel:
Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten!

Beispiel:

$$f(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2$$

1.4 Kettenregel

Betrachten wir $f(x) = g(x) \circ h(x) = g(h(x))$ und sowohl $g(x)$ als auch $h(x)$ sind differenzierbar in x, so bezeichnet man $f(x)$ auch als Verkettung der beiden Funktionen g und h. Dann gilt die folgende Ableitungsregel:

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Im Allgemeinen können wir diese Regel auch formulieren als *äußere Ableitung* mal *innere Ableitung*.

Beispiel:

$$f(x) = \underbrace{(\overbrace{x^2 - 3x}^{h(x)})^4}_{g(x)}$$

$$f'(x) = \underbrace{4(x^2 - 3x)^3}_{g'(h(x))} \cdot \underbrace{(2x - 3)}_{h'(x)}$$

1.5 Produktregel

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ ist in x differenzierbar, dann gilt:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Prinzipiell können wir uns für diese Ableitung auch schnell merken: (uv)' = u'v + uv'

Beispiel:

$$f(x) = \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{(x^3 + x)}_{h(x)}$$

$$f'(x) = \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{(x^3 + x)}_{h(x)} + \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{(3x^2 + 1)}_{h'(x)}$$

1.6 Quotientenregel

Sind $g(x)$ und $h(x)$ differenzierbar und $h(x) \neq 0$, so ist auch $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ differenzierbar. Die entsprechende Ableitungsregel lautet wie folgt:

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

Prinzipiell können wir uns für diese Ableitung auch schnell merken: (uv)' = u'v + uv'

Beispiel:

$$f(x) = \frac{\overbrace{(x^3 + 2x)}^{g(x)}}{\underbrace{x^2}_{h(x)}}$$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(3x^2 + 2)}^{g'(x)} \cdot \overbrace{x^2}^{h(x)} - \overbrace{(x^3 + 2x)}^{g(x)} \cdot \overbrace{2x}^{h'(x)}}{\underbrace{(x^2)^2}_{h(x)}}$$