

4 Nullstellen bestimmen

Betrachtet man **quadratischen Funktionen** $f(x)$, so begegnen uns verschiedene Typen von quadratischen Funktionen.

Wollen wir die Nullstellen bestimmen, so müssen wir die Funktion gleich Null setzen ($= 0$) und anschließend den Wert für x bestimmen, für den die Gleichung erfüllt ist.

Nachfolgenden sind verschiedene Verfahren aufgeführt, die zur Lösung dieser Fragestellung hilfreich sein können.

4.1 $f(x) = x^2 - c$ / $f(x) = -x^2 + c$

Hat unsere Funktion die Form $f(x) = x^2 - c$, dann wollen wir folgendes tun:

$$\begin{array}{lcl} f(x) = x^2 - c & | & = 0 \\ x^2 - c = 0 & | & + c \\ x^2 = c & | & \sqrt{} \\ x = \pm\sqrt{c} \end{array}$$

Wir haben also durch **Nullsetzen** und **nach x umformen** bestimmt, dass $x = \pm\sqrt{c}$ die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - c$ sind.

Hat unsere Funktion die Form $f(x) = -x^2 + c$, dann wollen wir folgendes tun:

$$\begin{array}{lcl} f(x) = -x^2 + c & | & = 0 \\ -x^2 + c = 0 & | & + x^2 \\ c = x^2 & | & \sqrt{} \\ \pm\sqrt{c} = x \end{array}$$

Wir haben also durch **Nullsetzen** und **nach x umformen** bestimmt, dass $x = \pm\sqrt{c}$ auch die Nullstellen der Funktion $f(x) = -x^2 + c$ sind.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 - 9$

$$\begin{array}{lcl} 0 = x^2 - 9 & | & + 9 \\ 9 = x^2 & | & \sqrt{} \\ \pm\sqrt{9} = \pm 3 = x \end{array}$$

4.2 $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bei Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ gibt es abhängig von den Parameterwerten von a , b und c verschiedene Vorgehensweisen.

$$f(x) = x^2 + px + q$$

Ist der Koeffizient von x^2 eine **1**, so können wir die pq-Formel anwenden. Diese liefert uns die Nullstellen der Funktion.

pq-Formel

Ist eine Funktion der Form $f(x) = x^2 + px + q$ gegeben, so liefert

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

die Nullstellen der Funktion.

Beispiel: Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 3$. Wir setzen $f(x) = 0$ und bestimmen mit Hilfe der pq-Formel die Nullstellen.

$$0 = x^2 \underbrace{-5}_{p} x \underbrace{+3}_{q}$$

pq-Formel

$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 3}$$

$$x_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right) - 3}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} + \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right) - 3} = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5}{2} - \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right) - 3} = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

Haben wir eine Funktion $f(x) = x^2 + bx + c$ gegeben und für die Koeffizienten b und c gilt: \sqrt{c} ist eine ganze Zahl und $b = \pm 2 \cdot \sqrt{c}$, dann haben wir die 1. oder 2. Binomische Formel gegeben.

Ist $f(x) = x^2 + bx + c$, prüft man:

- Ist \sqrt{c} eine Ganze Zahl?
- Wenn ja, dann prüfe wir ob $b = \pm 2 \cdot \sqrt{c}$
 - Ist beides erfüllt, dann ist

$$x = (\text{Setze hier das Vorzeichen von } b \text{ ein}) \sqrt{c}$$
 eine doppelte Nullstelle.

$$f(x) = (x \pm \sqrt{c})^2$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Hat unser x^2 einen Koeffizienten $a \neq 0$, so können wir **nicht** die pq-Formel anwenden.

Um dennoch die Gleichung $0 = ax^2 + bx + c$ lösen zu können bleiben uns diverse Möglichkeiten.

Zunächst können wir die Funktion faktorisieren, sie also in die bekannte Linearfaktorform $f(x) = a \cdot (x - x_{N_1}) \cdot (x - x_{N_2})$ überführen.

Produkt ist Null (PIN)

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. In Zeichen:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0$$

\Leftrightarrow - Genau dann wenn

Vorsicht: Eine Funktion lässt sich nur Faktorisieren, wenn sie Nullstellen hat.

Zum Faktorisieren von Funktionen wenden Sie eines der Verfahren aus dem Skript *Quadratischen Funktionen faktorisieren*.

Für Beispiele schlagen Sie in eben genanntem Skript nach.

Alternativ können Sie auch den Koeffizienten a ausklammern und im Anschluss die pq-Formel anwenden. $f(x) = ax^2 + bx + c$ wird durch ausklammern von a zu $f(x) = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$. Auf den Klammerausdruck können Sie nun die pq-Formel anwenden.

4.3 $f(x) = ax^2 + bx$

Ist in unserer Funktion Konstante c vorhanden, können wir zunächst Faktorisieren indem wir das **kleinste gemeinsame Vielfache** von ax^2 und bx ausklammern (mindestens x).

Dann wird mit einem Produkt konfrontiert, für welches wir die oben erwähnte Regel anwenden (*Produkt ist Null*). **Beispiel:**

$$f(x) = 15x^2 + 5x \quad | 5x \cdot ()$$

$$f(x) = 5x \cdot (3x + 1)$$

$$0 = 5x \cdot (3x + 1) \Leftrightarrow 5x = 0 \text{ oder } 3x + 1 = 0$$

$$5x = 0 \quad | : 5$$

$$x_1 = 0$$

$$3x + 1 = 0 \quad | - 1$$

$$3x = -1 \quad | : 3$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$