1 Vereinfachen von Schaltnetzen - DNF

Wir wollen die Frage diskutieren, welche Möglichkeiten es gibt, gegebene Schaltfunktionen zu vereinfachen um so wenig Gatter wie nötig zu verwenden und ein möglichst schnelles Schaltnetz aufzubauen.
Wir haben im letzten Block die Darstellung mittels **DNF** (disjunktive Normalform) bzw. **KNF** (konjunktive Normalform) und der dazugehörigen *SOP* (Sum of Products) bzw. *POS* (Product of Sums).
Wir betrachten zunächst ein Beispiel und vereinfachen dieses mit Hilfe der Boolschen Algebra (siehe zugehöriges Skript in Ilias).

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \\ &= \underbrace{\left(\overline{x_1} + x_1\right)}_{=1} x_2 x_3 \\ &= x_2 x_3 \end{aligned}$$

Betrachten wir die nachfolgende Funktionstabelle mit drei Eingabevariablen x_1, x_2 und x_3.

i	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Ihre Aufgabe

Versuchen Sie die dazugehörige Schaltfunktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 x_3$$

zu vereinfachen.
Die dazugehörige Regel besagt folgendes:

> **Resolutionsregel** Sind in einer *SOP* zwei Summanden vorhanden, die sich in nur einer Eingabevariable komplementär ($x_1 \Leftrightarrow \overline{x_1}$) unterscheiden, kann man beide Summanden durch den gemeinsamen Teil der Summanden ersetzen.

Ist die Schaltfunktion, die zu vereinfachen ist, komplexer, reicht ein einfaches Betrachten manchmal nicht aus. Hier kann man sich mit der **K-Map** helfen. Diese ist quasi eine grafische Darstellung der Funktionstafel unserer Schaltfunktion f. Abhängig von der Anzahl der Eingabevariablen.
Bei drei Eingabevariablen: (2 x 4)

$x_2 x_3$

x_1	00	01	11	10
0				
1				

Bei vier Eingabevariablen: (4 x 4)

$x_3 x_4$

$x_1 x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Bei der Zeilen- bzw. Spaltenzählung ist zu beachten, dass sich von einer zur nächsten Zeile bzw. Spalte jeweils nur **eine** Variable ändert.
Innerhalb der *K-Map* werden die Zellen mit einer

1 befüllt, deren Belegung bei der Funktion auch 1 als Ausgabe haben.

Ihre Aufgabe

Erstellen sie zu vorne angegebener Funktionstabelle die entsprechende **K-Map**.

1.1 Überdeckung der Einsen

Betrachten wir die Funktion

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\ \overline{x_2}\ x_3\ x_4 + x_1\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}\ x_4 + x_1\ x_2\ x_3\ x_4 + \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}\ x_4 + \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3\ x_4$

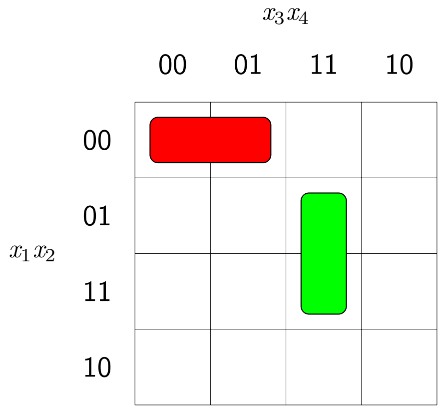
Ihre Aufgabe

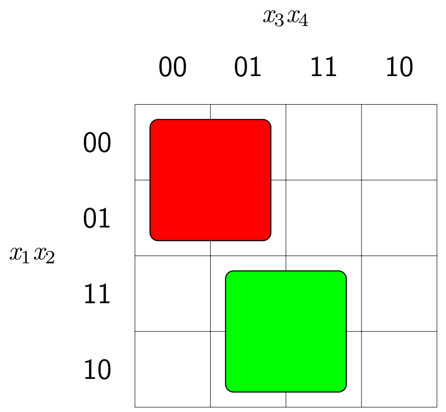
Befüllen Sie die dazugehörige **K-Map**.

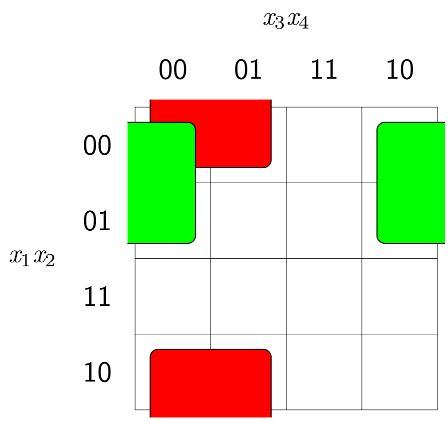
x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Unser Ziel ist es, die Schaltfunktion zu vereinfachen, dafür versuchen wir nun, so viele 1en wie möglich (aber die Anzahl muss immer einer 2er Potenz entsprechen) zu überdecken. Dabei sind folgende Überdeckungen zulässig:

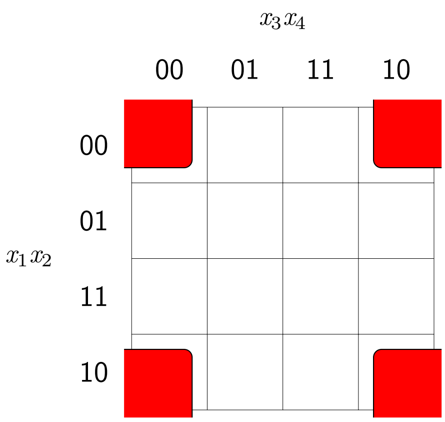
+ zwei nebeneinander/übereinander liegende 1en
+ vier zusammenhängende 1en
+ zwei bzw. vier über die Außenkanten nebeneinander/übereinander liegende 1en
+ zwei oder vier in den Ecken befindliche 1en







W. Oberschelp/G. Vossen Rechneraufbau und Rechnerstrukturen 10. Auflage (72-75)

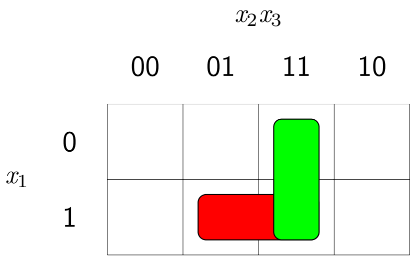


Ihre Aufgabe

Versuchen Sie für die zu Beginn dieses Kapitels aufgestellt **K-Map** eine entsprechende Überdeckung der 1en zu finden.

1.2 Vereinfachen mit Hilfe der Überdeckung

Mit Hilfe dieser Überdeckung können wir nun die Schaltfunktion aufstellen. Dabei verwenden wir nur die Belegung der Eingabevariablen, die für den überdeckten 1er-Block konstant bleibt.



Hieraus ergibt sich $f(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 + x_1x_3$.

Ihre Aufgabe

Erstellen Sie mit Hilfe der zuletzt aufgestellten K-Map die vereinfachte Funktion zu der zu Beginn von 1.1 genannten Funktion.