S. 101 Aufgabe 7d

Gegeben waren die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Gesucht: Der eingeschlossene Winkel α

Zur Berechnung des eingeschlossenen Winkels verwenden wir die bekannte Formel $cos(\alpha) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$.

$$\cos\alpha = \frac{1*5+3*0+1*3}{\sqrt{1^2+3^2+1^2} * \sqrt{5^2+0^2+3^2}} = \frac{8}{\sqrt{11} * \sqrt{34}} = 0,413$$

Da wir den Winkel berechnen wollen, müssen wir die Umkehrfunktion $\arccos \mathrel{\widehat{=}} \cos^{-1}$ verwenden.

$$\alpha = \arccos 0,413 = 65,56^\circ$$

S. 101 Aufgabe 8a

Gegeben waren die Eckpunkte A (2|1), B(5|-1) und C(4|3) eines Dreiecks.
Gesucht: Die Seitenlängen sowie die Winkel innerhalb des Dreiecks.

Die obige Formel bezieht sich auf den eingeschlossenen Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Daher benötigen wir jeweils die einschließenden Verbindungsvektoren.[1]

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da innerhalb der Längenberechnung die Koordinatenwerte quadriert werden gilt $|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$. Es genügt also jeweils einmal die Länge zu berechnen.

Wir berechnen also zunächst die Längen der einzelnen Seiten.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \qquad |\vec{BC}| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \qquad |\vec{CA}| = \sqrt{4+4} = \sqrt{16}$$

Um nun den Winkel zu berechnen, benötigen wir zum einen die oben erwähnte Formel bzw. deren Umkehrfunktion. Diese lautet wie folgt: $\alpha = \arccos \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$

$$\angle CAB = \arccos \frac{\vec{AC} * \vec{AB}}{|\vec{AC}| * |\vec{AB}|} = \arccos \frac{3*2+2*(-2)}{\sqrt{13} * \sqrt{16}} \approx 78,7^\circ$$

$$\angle ABC = \arccos \frac{\vec{BA} * \vec{BC}}{|\vec{BA}| * |\vec{BC}|} = \arccos \frac{(-3)*(-1)+2*4}{\sqrt{13}\sqrt{17}} \approx 42,3^\circ$$

$$\angle BCA = \arccos \frac{\vec{CB} * \vec{CA}}{|\vec{CB}| * |\vec{CA}|} = \arccos \frac{(-2) * 1 + (-2) * (-4)}{\sqrt{17}\sqrt{8}} \approx 59°$$

[1] Siehe hierzu (*) auf der Rückseite.

S.103 Aufgabe 19 a + b

Wir wissen, zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal (im Zeichen $\vec{a} \perp \vec{b}$), wenn ihr Skalarprodukt, also $\vec{a} * \vec{b}) = 0$ ist.

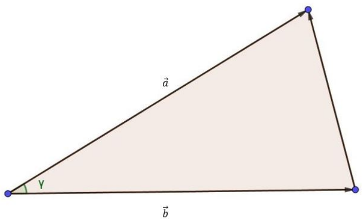
(a) Gegeben waren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a} * \vec{b} = (-1) * 6 + 2 * 3 = (-6) + 6 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

(b) Gegeben waren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a} * \vec{b} = 2 * 1 + (-1) * (-2) + 1 * (-3) = 2 + 2 - 3 = 1 \Rightarrow \vec{a} \not\perp \vec{b}$$

(*) Wir erinnern uns an die Formel zur Berechnung des Winkel zwischen zwei Vektoren.



Ist γ der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel, so lässt sich der dazugehörige $\cos$ wie folgt bestimmen

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \frac{a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} * \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Um daraus den Winkel γ zu bestimmen, verwenden wir die Umkehrfunktion $\arccos \widehat{=} cos^{-1}$.

$$\gamma = \arccos \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \arccos \frac{a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} * \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$