Wir wissen, um die Extremstelle einer ganzrationalen Funktion $f(x)$ zu bestimmen, berechnen wir $f'(x) = 0$.
Erfüllt die so errechnete Stelle x_E die Bedingung $f''(x) \neq 0$, so wissen wir, dass es sich um eine Extremstelle handelt.

7.4.1 Art der Extremstelle

Haben wir eine Extremstelle x_E der Funktion bestimmt, können wir mit Hilfe der zweiten Ableitung $f''(x)$ bestimmen, ob es sich bei x_E um einen Hoch- oder einen Tiefpunkt handelt.

Hochpunkt $\mathbf{x_H}$: Der Graph der Ausgangsfunktion $f(x)$ steigt bis zum Hochpunkt (die Ableitung ist positiv). Nach dem Hochpunkt fällt der Graph (die Ableitung ist also negativ).
Das bedeutet an der Stelle x_H wechselt der Graph der Ableitungsfunktion $f'(x)$ von positiv zu negativ und fällt somit.

Tiefpunkt $\mathbf{x_T}$: Der Graph der Ausgangsfunktion $f(x)$ fällt bis zum Tiefpunkt (die Ableitung ist entsprechend negativ). Nach dem Tiefpunkt steigt der Graph wieder an (die Ableitung ist also positiv).
Das bedeutet an der Stelle x_tT wechselt der Graph der Ableitungsfunktion $f'(x)$ von negativ zu positiv und steigt entsprechend.

Wir versuchen das Ganze an einem Beispiel zu behandeln. Auf den vorherigen Seiten haben wir uns bereits mit folgender Funktion beschäftigt: $f(x) = x^3 + 0,5x^2 - 3,5x - 3$.

Die Extremstellen hatten wir bereits bestimmt:
$x_1 = \frac{-1+\sqrt{43}}{6}$ und $x_2 = -\frac{1+\sqrt{43}}{6}$.

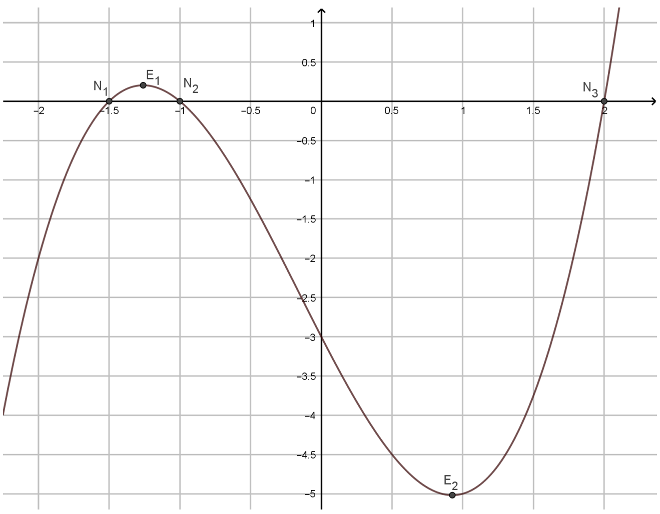
Wir müssen also herausfinden, welche Steigung der Ableitungsgraph hat. Hierfür nutzen wir die zweite Ableitung $f''(x)$, um die Steigung zu bestimmen.

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= 6 \cdot \frac{-1+\sqrt{43}}{6} + 1 \\ &= -1 + \sqrt{43} + 1 \\ &= \sqrt{43} > 0 \end{aligned}$$

Die Steigung an der Extremstelle x_1 ist positiv, also handelt es sich bei x_1 um einen Tiefpunkt.

$$\begin{aligned} f''(x_2) &= 6 \cdot \left(-\frac{1+\sqrt{43}}{6}\right) + 1 \\ &= -1 - \sqrt{43} + 1 \\ &= -\sqrt{43} < 0 \end{aligned}$$

Die Steigung an der Extremstelle x_2 ist negativ, also handelt es sich bei x_1 um einen Hochpunkt.



Ist x_E eine Extremstelle von $f(x)$ und

- $f''(x_E) < 0$, dann ist x_E ein **Hochpunkt**.
- $f''(x_E) > 0$, dann ist x_E ein **Tiefpunkt**.