1 Lineare Funktionen und Geraden

1.1 Grundlagen

Die allgemeine Form einer **linearen Funkion** lautet $\mathbf{y = m \cdot x + b}$. $\mathbf{m}$ gibt die Zunahme bzw. Abnahme pro Einheit an. Es wird auch als **Steigung** der Funktion bezeichnet.
Der Term $\mathbf{b}$ definiert, in welchem Wert der Graph der Funktion die y-Achse schneidet. Man bezeichnet ihn auch als **y-Achsenabschnitt**.
Mit *linearen Funktionen* werden Funktionen modelliert, dei einen gleichmäßigen Anstieg bzw. Abfall besitzen.

Wie ermittelt man m?

Um die Steigung eines gegebenen Graphen zu bestimmen, verwendet man das **Steigungsdreieck**. Dieses wird mit Hilfe zweier Punkte auf dem Graphen gezeichnet.
Generell gilt, dass sich für eine Einheit in x-Richtung (z.B. $1cm$), der Funktionswert um genau m ändert.

Das Verhältnis m der Seitenlängen im Steigungsdreieck ist immer gleich und kann durch eine Formel berechnet werden.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vorsicht: Δx und Δy sind *orientiert*. Das bedeutet, ist die Steigung negativ (Vorzeichen von m ist $-$), so muss entsprechend in negative Richtung (nach unten) gegangen werden.

Ist die *Steigung sehr klein* (z.B. bei $y = 0,01x + 2$), so muss das Steigungsdreieck entsprechend vergrößert werden, um eine angemessene Genauigkeit zu ermöglichen.

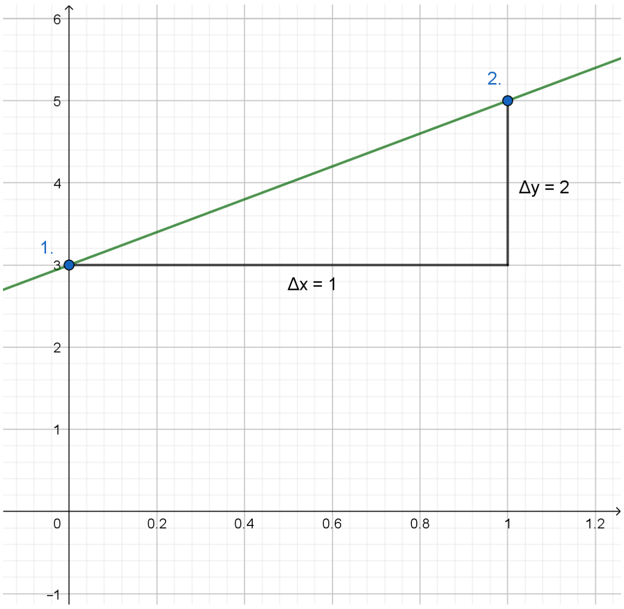
Für eine lineare Funktion $f(x) = mx + b$ gilt:

- **b** gibt den **y-Achsenabschnitt** an. Der dazugehörige Punkt hat die Koordinate $S_y(0|b)$.
- **m** gibt die **Steigung** an. Dabei gilt:
  - $m > 0$: Der Graph der Funktion steigt.
  - $m < 0$: Der Graph der Funktion fällt.
  - $m = 0$: Der Graph der Funktion verläuft parallel zur x-Achse.
- Die Steigung gibt das Verhältnis der Seiten des Steigungsdreiecks an.

Ihre Aufgabe:
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(X) = 2x + 1,5$ und tragen Sie verschiedene Steigungsdreiecke ein.

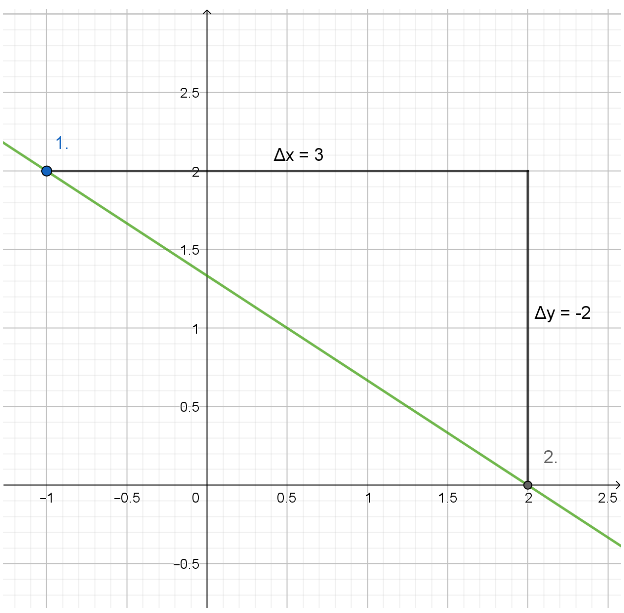
1.2 Von der Gleichung zur Gerade

(1) Um zu einer gegebenen Funktionsgleichung den Graphen zu zeichnen gehen Sie wie folgt vor:
Beispiel: $\mathbf{y = 2x + 3}$
Wir markieren zunächst den y-Achsenabschnitt (also $b = 3$) auf der y-Achse. Von diesem Punkt aus zeichnet man ein Steigungsdreieck indem man eine Einheit nach rechts und zwei (2) Einheiten nach oben geht. Dort befindet sich der nächste Punkt.



(2) Ist hingegen ein Punkt, z.B. $P(-1|2)$, und eine Steigung $m = -\frac{2}{3}(= \frac{\Delta y}{\Delta x})$ gegeben, übertragen wir zunächst den Punkt in das Koordinatensystem.

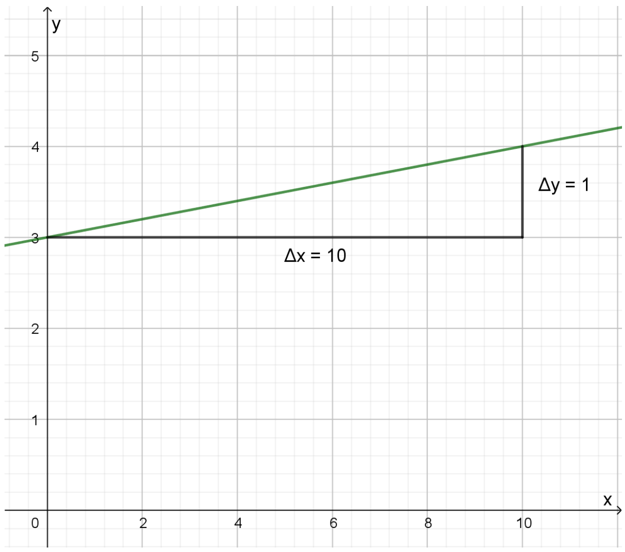
Im Anschluss bewegen wir uns *3 Einheiten* (Δx) nach rechts und dann *2 Einheiten* (Δy) nach unten (Vorzeichen $-$). So gelangen wir zu einem zweiten Punkt $Q(2|0)$. Die Gerade durch P und Q ist der Graph der Funktion.



1.3 Von der Geraden zur Gleichung

Aus dem Graphen können wir den Wert für b direkt ablesen (der Wert, an dem der Graph die y-Achse schneidet).

Um die Steigung zu bestimmen, müssen wir ein Steigungsdreieck einzeichnen und darauf den Quotienten bzw. das Verhältnis der zwei eingezeichneten Seiten bestimmen $(m = \frac{\Delta y}{\Delta x})$.



Daraus ergibt sich $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{10}$.

Für die Funktionsgleichung folgt dann

$$y = \frac{1}{10}x + 3$$

1.4 Eine Gerade durch zwei Punkte

Haben wir zwei Punkte (z.B. $P(\underbrace{3}_{x_1}|\underbrace{4}_{y_1})$ und $Q(\underbrace{7}_{x_2}|\underbrace{6}_{y_2}))$ gegeben, können wir daraus die Funktionsgleichung aufstellen, ohne zeichnen zu müssen.

Wir wissen, dass sich die Steigung als Verhältnis von Δx und Δy bestimmen lässt $(m = \frac{\Delta y}{\Delta x})$.

Wir berechnen also:

$\Delta x = x_2 - x_1 = 7 - 3 = 4$

$\Delta y = y_2 - y_1 = 6 - 4 = 2$

Für die Steigung ergibt sich: $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Anschließend müssen wir den y-Achsenabschnitt bestimmen. Hierfür setzen wir die Koordinaten eines Punktes sowie die berechnete Steigung in die allgemeine Form $y = mx + b$ ein, und bestimmen den Wert für b.

$$\begin{aligned} 6 &= \tfrac{1}{2} \cdot 7 + b \quad &|-\tfrac{1}{2} \cdot 7 \\ 2,5 &= b \end{aligned}$$

Damit haben wir die Funktion bestimmt:

$$y = \frac{1}{2} \cdot x + 2,5$$

1.5 Eine Gerade durch einen Punkt mit vorgegebener Steigung

Hat man einen Punkt $P(x_p|y_p)$ und eine Steigung m gegeben, so lässt sich die Funktionsgleichung direkt mit der Punkt-Steigungsformel aufstellen: $\mathbf{y = m \cdot (x - x_p) + y_p}$.

1.6 Die Geradengleichung in impliziter Form

Bekannt ist uns bereits die lineare Funktion der Form $y = m \cdot x + b$. Nicht immer ist die Funktion in dieser Form gegeben.

Betrachten wir das folgende **Beispiel**: Eine große Fitness-Studio-Kette möchte eine neue Filiale in Mainz eröffnen. In dieser Filiale sollen zum einen Personal-Trainer beschäftigt werden, die sich auch um die Trainingspläne der Mitglieder kümmern. Zum anderen benötigt man aber auch Service-Personal, dass sich um das Drum-Herum kümmert.

Die Personal-Trainer werden mit 16.000 € und das Service-Personal mit 4.000 € äüöplhjm nvcx vergütet. Insgesamt hat sich die Fitness-Kette eine Personalbudget von 240.000 € gesetzt.

Um ein Optimum zu erreichen, sollen alle möglichen Kombinationen der Personal-Trainer und Service-Personal sowohl in einem Graph als auch als Funktionsgleichung dargestellt werden.

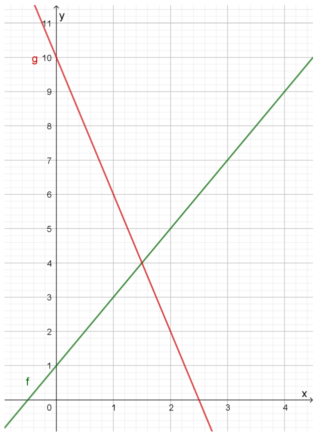
$$\begin{aligned} 240.000 &= 16.000x + 4.000y \quad &|-16.000x \\ 4.000y &= -16.000x + 240.000 \quad &|: 4.000 \\ y &= -4x + 6.000 \quad &\rightarrow \text{Graph} \end{aligned}$$

2 Schnittpunkt zweier Geraden

Unter bestimmten Umständen kann es notwendig sein, den Schnittpunkt zweier Gerade zu bestimmen. Zum Beispiel, wenn wir zwei Handy-Tarife vergleichen und wissen wollen, ab welcher Anzahl verbrauchter Einheiten (Gesprächsminuten oder SMS) sich der Tarif mit dem höheren Grundpreis lohnt.

Das Vorgehen erkunden wir beispielhaft mit Hilfe von $y_f = 2x + 1$ und $y_g = -4x + 10$.

Es ist möglich, die **Lösung zeichnerisch** zu bestimmen.



Koordinaten des Schnittpunkts: $SP(1,5|4)$

Um die **Lösung rechnerisch** zu bestimmen, setzen wir die Funktionen gleich und ermitteln die Lösung für x.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= -4x + 10 && |+4x \\ 6x + 1 &= 10 && |-1 \\ 6x &= 9 && |:6 \\ x &= 1,5 \end{aligned}$$

Wir benötigen nun noch die passende y-Koordinate. $2 \cdot 1,5 + 1 = 4$.
Also $SP(1,5|4)$.

3 Modellieren mit linearen Funktionen

Wie bereits zu Beginn zuvor erwähnt, werden lineare Funktionen verwendet, um Entwicklung mit gleichmäßiger Veränderung widerzuspiegeln.

Betrachten wir das Fahrrad-Verleihsystem „MVG Mein Rad“. Dieses bietet mehrere Tarife, darunter auch
Normaltarif: Keine Grundgebühr, $1,45$ € pro halbe Stunde
Tarif Silber: 25 € Grundgebühr, $0,85$ € pro halbe Stunde

Quelle: https://www.mainzer-mobilitaet.de/tickets-tarife/fuer-radfahrer/details/tarif/mvgmeinrad-mietradeln-fuer-freibewegliche.html

Fragestellung:

(a) Was kosten 50 Stunden in den einzelnen Tarifen?

(b) Wann ist der eine Tarif günstiger als der andere?

(c) Sie überlegen sich ein Fahrrad für knapp 120 € kaufen. Wie lange könnten Sie für das Geld mit dem *Tarif Silber* fahren?

3.1 Der Modellierungsprozess

3.1.1 Aufstellen des Modells

Zunächst müssen wir die Preise der jeweiligen Tarife mit Variablen belegen, hierzu wählen wir y_N für den Normaltarif und y_S für den Tarif Silber.
Die Kosten beider Tarife sind abhängig von der Dauer, die ein Fahrrad geliehen wird, wobei immer eine halbe Stunde abgerechnet wird. Daher integrieren wir die Variable x für diese halbe Stunde Ausleihzeit.
Nun ist es uns möglich anhand der Tarifauskunft eine lineare Funktion aufzustellen.

$y_N = 1,45 \cdot x$
$y_S = 0,85 \cdot x + 25$

3.1.2 Mit dem Modell arbeiten

Wollen wir nun schauen, wie wir das Modell nutzen können, um die Fragestellungen zu beantworten.
(a) Wir haben die Ausleihzeit für eine halbe Stunde mit x modelliert und sollen nun die Kosten nach 50 Stunden berechnen. Daher setzen wir für $x = 2 \cdot 50 = 100$ ein - eine Stunde $\widehat{=}$ zwei halbe Stunden.
$y_N = 1,45 \cdot 100 = 145$
$y_S = 0,85 \cdot 100 + 25 = 85 + 25 = 110$

Antwort: ______________________________

____

____

(b) Übersetzung in das Modell: $y_N = y_S$.
Wir ersetzen nun y_N bzw. y_S durch die Funktionsterme.

$$\begin{aligned} 1,45 \cdot x &= 0,85 \cdot x + 25 && |-0,85 \cdot x \\ 0,6 \cdot x &= 25 && |: 0,6 \\ x &= 41,6 \end{aligned}$$

Antwort: ______________________________

____

____

(c) Übersetzung in das Modell: $120 = y_S$.

$$\begin{aligned} 120 &= 0,85 \cdot x + 25 && |-25 \\ 95 &= 0,85 \cdot x && |: 0,85 \\ x &= 111,76 \end{aligned}$$

Antwort: ______________________________

____

____