bbs.eins.mainz Berufsbildende Schule Technik	Vorbereitung Mathematik	Name: Musterlösung Datum:
HBF IT 18A - V	_____ von _____ Punkten erreicht: _____%	**Note:**

Allgemeines
- Bei der Bearbeitung ist ein **nachvollziehbarer, vollständiger Rechenweg** aufzuschreiben.
- Die Bewertung der Klassenarbeit ist nur bei **gut lesbarer Schrift** möglich.
- Die Lösungen müssen mit dokumentenechten Stift (**Kugelschreiber** oder **Fine-Liner** - keine rote Mine) erstellt werden.
- Runden Sie ihre Ergebnisse auf **2 Nachkommastellen**. Wurzelausdrücke müssen nicht berechnet werden (z.B. $\sqrt{10}$).

- **Zugelassene Hilfsmittel**: Taschenrechner (nicht graphikfähig / programmierbar)
- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten

Aufgabe 1 / **32 Pkt.**

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 2x^3 - 4x$$

a) Symmetrieeigenschaften (mit kurzer Begründung)

b) Achsenabschnittspunkte (Nullstellen, Schnittpunkt mit y-Achse)

c) Globalverlauf (Verhalten für große x-Beträge) mit Skizze
$f(x) \xrightarrow{x\to} -\infty?$ $f(x) \xrightarrow{x\to} \infty?$

d) Extrempunkte (notwendige und hinreichende Bedingung)

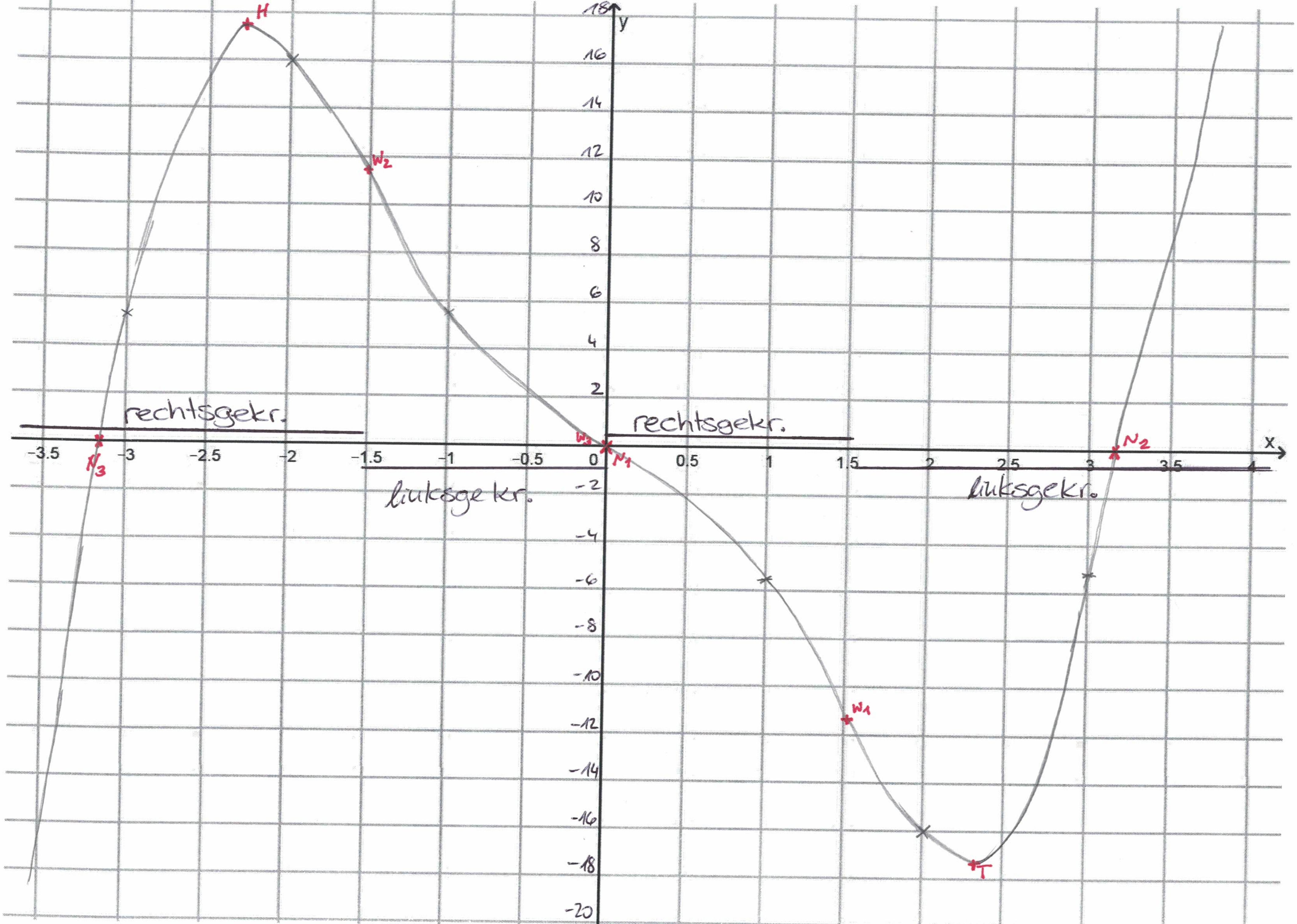
e) Wendepunkte (notwendige und hinreichende Bedingung), eventuell vorliegender Sattelpunkt.

f) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion mit Hilfe der charakteristischen Punkte.
Nutzen Sie zudem eine Wertetabelle im Bereich $-2 \leq x \leq 2$.

Skalieren Sie das Koordinatensystem entsprechend.

g) Untersuchen Sie die Funktion auf ihr Krümmungsverhalten (rechts- bzw. linksgelrümmt).
Markieren Sie die Intervalle in ihrer Zeichnung.

Nutzen Sie die

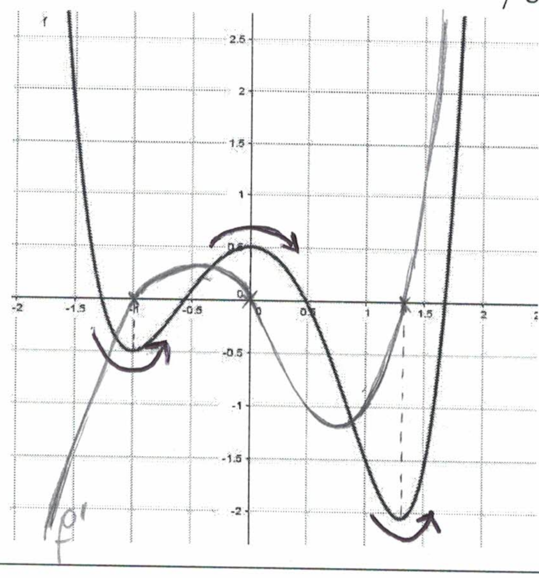


y
x
H
W_2
W_3
N_1
W_1
T
N_2
N_3
rechtsgekr.
rechtsgekr.
linksgekr.
linksgekr.

Aufgabe 2 / 8 Pkt.

a) Geben Sie anhand des Graphen möglichst große Intervalle, in denen dargestellte Funktion rechts- bzw links-gekrümmt ist.

b) Skizzieren Sie den Graphen der Ableiungsfunktion $f'(x)$ in das nebenstehende Koordinatensystem.



Aufgabe 1

$$f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 2x^3 - 4x = x\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 4\right)$$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{5}{4}x^4 - 6x^2 - 4$$

$$f''(x) = 5x^3 - 12x$$

$$f'''(x) = 15x^2 - 12$$

a) Symmetrie: Punktsymmetrisch zum Ursprung, da alle Exponenten ungerade (5, 3 und 1)

b) Achsenabschnittspunkte:

y-AAS: $f(0) = 0$ $\qquad Y_s(0|0)$

Nullstellen: $f(x) = 0$

$$0 = \frac{1}{4}x^5 - 2x^3 - 4x = x\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 4\right)$$

$\Rightarrow x_1 = 0 \qquad N_1(0|0)$

weitere NST mit Substitution: $z := x^2$

$$0 = \frac{1}{4}z^2 - 2z - 4 \qquad | \cdot 4$$

$$0 = z^2 \underbrace{-8}_{p}z \underbrace{-16}_{q} \qquad \text{pq-Formel}$$

$$z_{1/2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 + 16}$$

$$= 4 \pm \sqrt{32}$$

$$z_1 = 4 + \sqrt{32} \approx 9{,}66$$

$$z_2 = 4 - \sqrt{32} \approx -1{,}66$$ $\leftarrow$ keine mögliche NST, da negativ

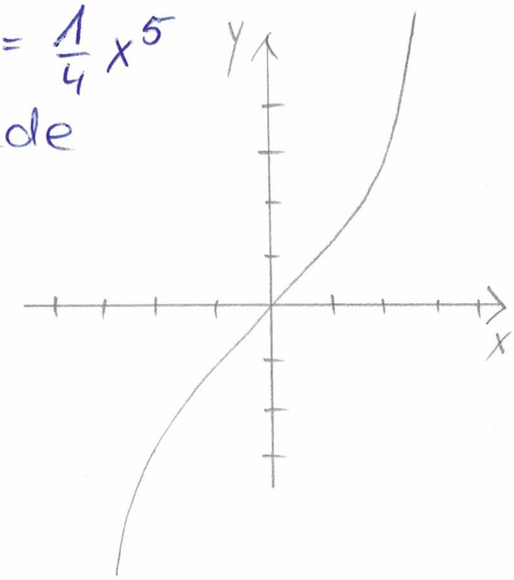
Rücksubstitution $z = x^2$

$x^2 = 9{,}66 \quad | \sqrt{\ }$

$x_2 = 3{,}11 \qquad x_3 = -3{,}11$

$N_2(3{,}11 | 0) \qquad N_3(-3{,}11 | 0)$

c) <u>Globalverlauf</u>: $a_n x^n = \frac{1}{4} x^5$



a_n positiv, n ungerade

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

d) <u>Extrempunkte</u>: $f'(x) = 0$

$0 = \frac{5}{4} x^4 - 6x^2 - 4 \qquad | \cdot \frac{4}{5}$

$0 = x^4 - \frac{24}{5} x^2 - \frac{16}{5}$

NST mit Substitution: $z := x^2$

$0 = z^2 \underbrace{- \frac{24}{5}}_{p} z \underbrace{- \frac{16}{5}}_{q}$ pq-Formel

$z_{1/2} = -\frac{-\frac{24}{5}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{24}{5}}{2}\right)^2 + \frac{16}{5}}$

$= \frac{12}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}}$

$= \frac{12}{5} \pm \sqrt{\frac{224}{25}}$

$$z_1 = \frac{12}{5} + \sqrt{\frac{224}{25}} \approx 5{,}39$$

$$z_2 = \frac{12}{5} - \sqrt{\frac{224}{25}} \approx -0{,}59$$ ← keine mögliche NST, da negativ

Rücksubstitution: $z = x^2$

$$x_{4/5} = \pm\sqrt{5{,}39}$$

$x_4 = 2{,}32 \qquad x_5 = -2{,}32$

Art der Extremstelle: (hinreichende Bedingung)

$$f''(x_4) = 5\cdot(2{,}32)^3 - 12\cdot(2{,}32) = 34{,}59 > 0$$

↳ TIP

$$f(x_4) = \frac{1}{4}\cdot(2{,}32)^5 - 2\cdot(2{,}32)^3 - 4\cdot(2{,}32)$$

$$= -17{,}45$$

$T(2{,}32 \mid -17{,}45)$

$$f''(x_5) = 5\cdot(-2{,}32)^3 - 12\cdot(-2{,}32) = -34{,}59 < 0$$

↳ HOP

$$f(x_5) = \frac{1}{4}(-2{,}32)^5 - 2\cdot(-2{,}32)^3 - 4\cdot(-2{,}32)$$

$$= 17{,}45$$

$H(-2{,}32 \mid 17{,}45)$

e) Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$0 = 5x^3 - 12x = \underline{x}\,(5x^2 - 12)$$

↳ $x_6 = 0$

$0 = 5x^2 - 12 \quad | +12$

$12 = 5x^2 \quad | :5$

$\frac{12}{5} = x^2 \quad | \sqrt{}$

$x_7 = \sqrt{\frac{12}{5}} \approx 1{,}55 \qquad x_8 = -\sqrt{\frac{12}{5}} \approx -1{,}55$

Typ der Wendestelle: (hinreichende Bedingung)

$f'''(x_7) = 15 \cdot (1{,}55)^2 - 12 = 24 > 0$

$\Rightarrow$ RL - Wechsel

$f(x_7) = \frac{1}{4} \cdot (1{,}55)^5 - 2 \cdot (1{,}55)^3 - 4 \cdot (1{,}55)$

$= -11{,}4$

$W_1 (1{,}55 | -11{,}4)$

$f'''(x_8) = 15 \cdot (-1{,}55)^2 - 12 = 24 > 0$

$\Rightarrow$ RL - Wechsel

$f(x_8) = \frac{1}{4} (-1{,}55)^5 - 2 \cdot (-1{,}55)^3 - 4 \cdot (-1{,}55)$

$= 11{,}4$

$W_2 (-1{,}55 | 11{,}4)$

$f'''(x_6) = 15 \cdot (0)^2 - 12 = -12 < 0$

$\Rightarrow$ LR - Wechsel

$f(x_6) = \frac{1}{4} \cdot (0)^5 - 2 \cdot (0)^3 - 4 \cdot 0 = 0$

$N_1 = W_3 (0 | 0)$

Da $f'''(x_6) \neq 0$, $f'''(x_7) \neq 0$ und $f'''(x_8) \neq 0$ liegt keine Sattelstelle vor f)

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	16	5,75	0	-5,75	-16

Aufgabe 2

Linksgekrümmt auf $(-\infty; -0{,}5)$

rechtsgekrümmt auf $(-0{,}5; 0{,}75)$

linksgekrümmt auf $(0{,}75; \infty)$