1 Quadratische Ergänzung

Die Quadratische Ergänzung ist ein Vorgehen, das wir verwenden, um unter Anwendung der binomischen Formel einen überschaubaren Funktionsterm zu erhalten.

Im allgemeinen wissen wir, dass sich die ersten zwei binomischen Formeln wie folgt auflösen:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Haben wir also eine quadratische Funktion gegeben, die kein vollständiges Quadrat ist, schreiben wir diese zunächst so um, dass die Grundform der binomischen Formel erkennbar wird.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a(x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{d}\, x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{e}\,) \\
&= a(x^2 + dx + e) \\
&= a(x^2 + 2 \cdot \boxed{} \cdot x + \qquad\quad + e) \\
&= a(\underbrace{x^2 + 2 \cdot \boxed{} \cdot x + \boxed{}^2}\, \underbrace{- \boxed{}^2 + e}) \\
&= a[(x + \boxed{})^2 + (e - \boxed{})] \\
&= a(x + \boxed{})^2 + a(e - \boxed{})
\end{aligned}$$

Um das Vorgehen ein bisschen zu verdeutlichen, werden wir uns nachfolgend ein **Beispiel** anschauen:

$$\begin{aligned}
f(x) \quad &= 5x^2 + 30x + 10 \\
&= 5 \cdot (x^2 + 6x + 2) \\
&= 5 \cdot (x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + \qquad\quad + 2) \\
&= 5 \cdot (x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 + 2) \\
&= 5 \cdot (\underbrace{x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2}\, \underbrace{-3^2 + 2}_{-7}) \\
&= 5 \cdot (x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2) + 5 \cdot (-7) \\
&= 5 \cdot (x+3)^2 - 35
\end{aligned}$$

Nutzen Sie die quadratische Ergänzung um die folgende quadratische Funktion umzuformen:

$$f(x) = 3x^2 - 30x + 102$$

$$f(x) = 7x^2 + 42x - 7$$