

Rückblick

Bisher haben wir uns die durchschnittliche Änderungsrate als Sekantensteigung mit Hilfe des Differenzenquotienten angeschaut.

Der Differenzenquotient

$$m_{[x_0; x_1]} = D(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

gibt die **Steigung der Sekante** durch die Punkte $P_0(x_0|f(x_0))$ und $P_1(x_1|f(x_1))$ an.

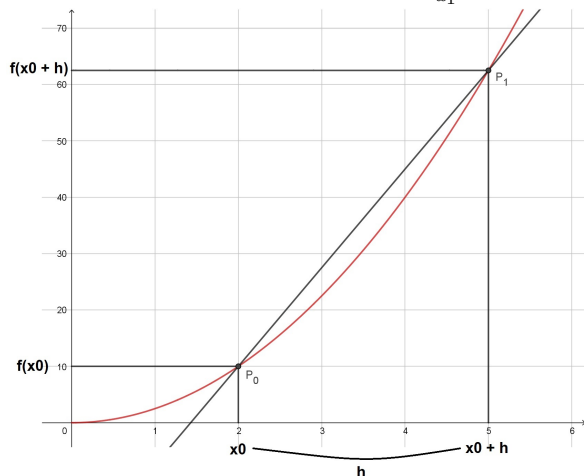
Man nennt diesen Quotienten auch **Differenzenquotient**.

7.1 Die momentane Änderungsrate an der Stelle x_0

In gewissen Situationen kann es sinnvoll sein, die Änderungsrate zu einem bestimmten Zeitpunkt zu bestimmen.

Um dies zu tun, nutzen wir den bekannten *Differenzenquotienten*.

Zusätzlich zu dem geforderten Zeitpunkt x_0 , wählen wir einen weiteren Punkt $x_1 = x_0 + h$ und erhalten so das Intervall $I = [x_0; x_0 + h]$.

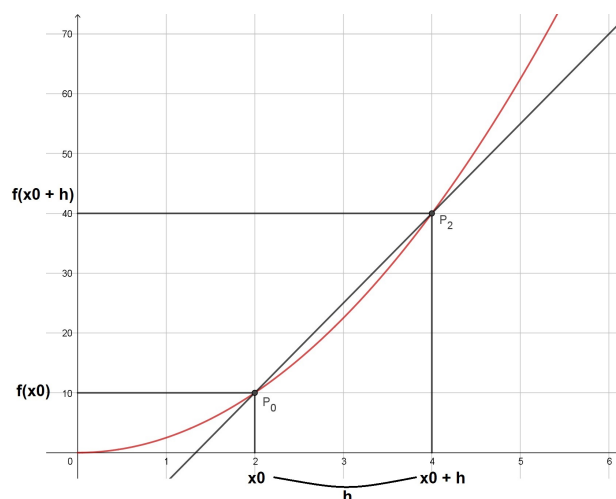


Die eingezeichnete Sekante hat die Steigung

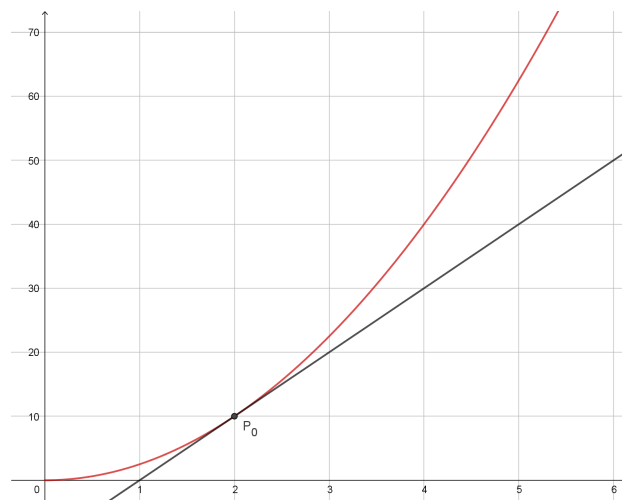
$$m_{[x_0; x_0+h]} = D(x_0; x_0+h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Was passiert, wenn wir an h rütteln?

Schieben wir nun h in Richtung von x_0 , also so, dass das Intervall immer kleiner wird¹.



Schieben wir nun h immer näher an x_0 ran¹, so wird aus unserer Sekante die Tangente im Punkt $(x_0|f(x_0))$.

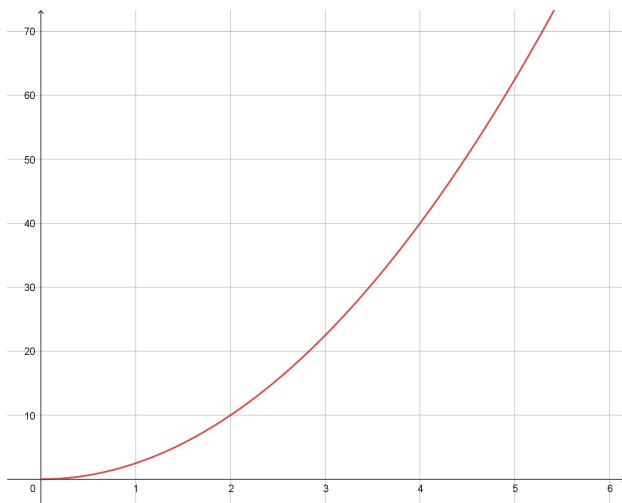


¹ $h \rightarrow 0$.

Beispiel 1: Momentangeschwindigkeit an einer bestimmten Stelle

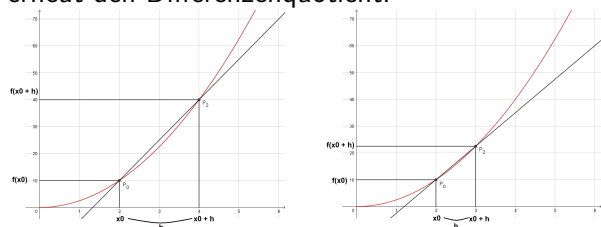
Beobachtet man ein Auto beim Losfahren, so kann man zu verschiedenen Zeitpunkten messen, wie viel Strecke bereits zurückgelegt wurde.

Dieser Weg-Zeit-Zusammenhang lässt sich sowohl über eine Funktion $f(x) = 2,5x^2$ wie auch über einen Graphen darstellen.



Wir wollen jetzt versuchen die Geschwindigkeit an der Stelle $x_0 = 2$ zu berechnen.

Zunächst wählen wir ein $h = 3$ und berechnen den Differenzenquotient, also die Steigung der Sekante. Anschließend setzen wir $h = 2$ und berechnen erneut den Differenzenquotient.



h	$D(2; 2+h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$
3	$D(2; 5) = \frac{f(5)-f(2)}{3} = \frac{62,5-10}{3} = 17,5$
2	$D(2; 4) = \frac{f(4)-f(2)}{2} = \frac{40-10}{2} = 15$
1	$D(2; 3) = \frac{f(3)-f(2)}{1} = \frac{22,5-10}{1} = 12,5$

h	$D(2; 2+h)$
0,5	$D(2; 2,5) = \frac{f(2,5)-f(2)}{0,5} \approx \dots \approx 11,26$
0,1	$D(2; 2,1) = \frac{f(2,1)-f(2)}{0,1} \approx \dots = 10,3$
0,01	$D(2; 2,01) = \frac{f(2,01)-f(2)}{0,01} \approx 10,03$
0,001	$D(2; 2,001) = \frac{f(2,001)-f(2)}{0,001} \approx 10,003$

Die Steigung an der Stelle $x_0 = 2$ beträgt nach Runden 10.

Die Annäherung über diverse Einzelrechnungen kann sehr zeitaufwendig sein. Wir nutzen also für die Bestimmung der *momentanen Änderungsrate* bzw. der **Steigung im Punkt** $(x_0|f(x_0))$ ein Konstrukt das **Grenzwert (Limes)** genannt wird.

Dieses Konstrukt haben wir schon beim Verhalten für große x-Beträge kennengelernt. Dort haben wir aber $x \rightarrow \pm\infty$ genutzt.

Wie funktioniert das mit dem Grenzwert? Im Prinzip kann man sich das mit dem Grenzwert so vorstellen, dass der 'Zielwert' für die 'wandernde' Variable eingesetzt wird.

Wenn wir beispielsweise die Funktion $f(x) = 3x^2 + 3$ haben und wissen wollen, wie die Funktion verläuft, wenn sich x an 0 annähert.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 + 3 = 3 \cdot 0^2 + 3 = 3$$

7.1.1 Die momentane Änderungsrate mit der h-Methode

Genau dieses Prinzip machen wir uns also zur Bestimmung der momentanen Änderungsrate zu nutzen.

Zusätzlich zu der Stelle x_0 , an der wir die Stei-

gung bestimmen wollen, wählen wir einen zweiten allgemeinen Punkt $x = x_0 + h$.

Diese zwei Werte setzen wir in den Differenzenquotienten ein und setzen den Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0}$ davor.

Der Differenzialquotient

$$\lim_{h \rightarrow 0} D(x_0; x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

gibt die **Steigung der Tangente** im Punkt $(x_0 | f(x_0))$ an.

Diesen Grenzwert des Differenzenquotienten bezeichnet man als **Differenzialquotient**.

Am Beispiel von eben wollen wir versuchen, den Grenzwert anzuwenden.

Die Funktion lautet: $f(x) = 2,5x^2$. Wir suchen die Steigung an der Stelle $x_0 = 2$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} D(2; 2 + h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2,5 \cdot (2 + h)^2 - 2,5 \cdot 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2,5 \cdot ((2 + h)^2 - 2^2)}{h} \end{aligned}$$

Wir können jetzt aber nicht einfach für $h = 0$ einsetzen, da wir sonst durch 0 teilen würden.

Teilen durch 0 ist nicht möglich.

Wir müssen also versuchen, das h aus dem Nenner zu kürzen.

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2,5 \cdot (4 + 4h + h^2 - 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2,5 \cdot (4h + h^2)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2,5 \cdot h(4 + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2,5(4 + h) \end{aligned}$$

Jetzt können wir für $h = 0$ einsetzen und erhalten für die Steigung des Graphen an der Stelle $x_0 = 2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} D(2; 2 + h) = 10$$