7.5 Wendestellen

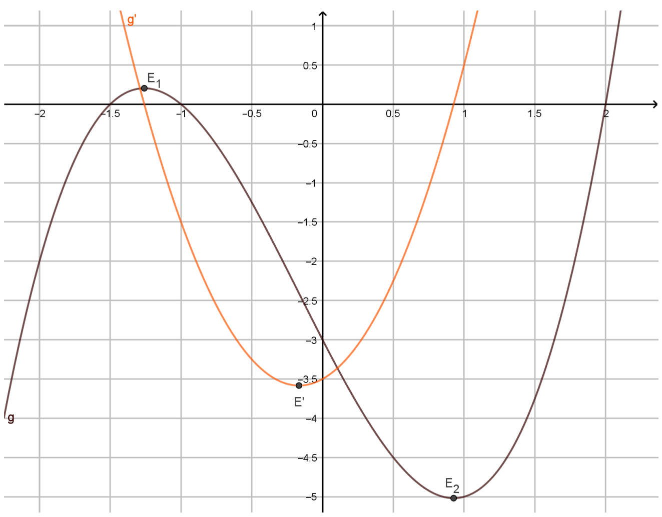
Skizzieren wir den Graphen einer ganzrationalen Funktion, so kann dieser links- aber auch eine rechtsgekrümmt verlaufen. Wenn wir ihn zeichnen, zeichnen wir in diesem Abschnitt eine nach oben (linksgekrümmt) oder nach unten (rechtsgekrümmt) geöffnete Parabel. Zwischen einer Links- und einer Rechtskrümmung ändert der Graph seine **Krümmungsrichtung**. Der Punkt, an dem dies geschieht, bezeichnet man als **Wendepunkt**.

Rechnerische Bestimmung der Wendestellen

Wir haben bereits herausgefunden, dass man mit der ersten Ableitung $f'(x)$ die Extremstellen[1] der Funktion bestimmen kann.

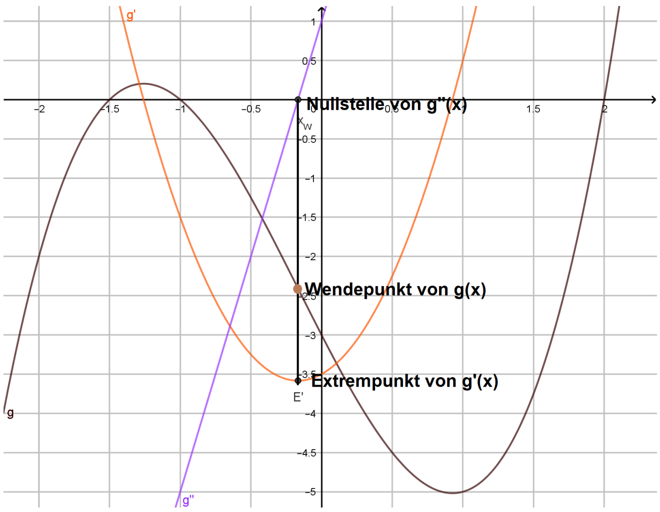
Betrachten wir uns die Graphen von $f(x)$, kann man vermuten, dass die Wendestelle zwischen zwei Extrempunkten (zwischen Hoch- und Tiefpunkt bzw. zwischen Tief- und Hochpunkt) liegt.

Schauen wir uns den Ableitungsgraphen $f'(x)$ an, sehen wir, dass zwischen dessen Nullstellen wieder ein Extrempunkt liegt.



Um also diese Stelle bestimmen zu können, müssen wir die Extremstelle der ersten Ableitung berechnen. Hierfür bestimmen wir die Nullstellen der Ableitung der ersten Ableitung - also die Nullstellen der zweiten Ableitung $f''(x)$.

Haben wir diese berechnet, müssen wir mit der dritten Ableitung prüfen, ob es sich auch wirklich um eine Wendestelle handelt. Dies ist nur der Fall, wenn $f''(x_W)$ an der Stelle x_W das Vorzeichen wechselt.



x_W ist eine Wendestelle von $f(x)$, wenn

- **notwendige Bedingung:**
  $f''(x_W) = 0$

und

- **hinreichende Bedingung:**
  $f''(x_W)$ hat Vorzeichenwechsel
  - von „+“ nach „-“
    x_W ist Wendestelle mit L-R-Übergang
  - „-“ nach „+“
    x_W ist Wendestelle mit R-L-Übergang

  oder
  $f'''(x_W) \neq 0$

[1] Hoch- bzw. Tiefpunkt.

Beispiel: $f(x) = x^3 + 0,5x^2 - 3,5x - 3$
Im vergangenen Abschnitt haben wir bereits die erste und zweite Ableitung bestimmt.
$f'(x) = 3x^2 + x - 3,5$
$f''(x) = 6x + 1$

Um nun die Nullstellen der zweiten Ableitung zu bestimmen, setzen wir diese gleich Null (0) und formen anschließend nach x um.

$$\begin{aligned} 0 &= 6x + 1 && \mid -1 \\ -1 &= 6x && \mid :6 \\ -\frac{1}{6} &= x \end{aligned}$$

Wir wissen nun, $x_W = -\frac{1}{6}$ ist eine mögliche Wendestelle von $f(x)$. Um dies zu verifizieren, haben wir zwei Möglichkeiten.

Entweder wir untersuchen, ob $f''(x)$ bei x_W einen Vorzeichenwechsel hat. Hierfür bestimmen wir den Funktionswert für ein $x_1 < x_w < x_2$.

$x_1 = -1$
$f''(-1) = 6 \cdot (-1) + 1$
$= -5$

$x_2 = 0$
$f''(0) = 6 \cdot 0 + 1$
$= 1$

Wir sehen, $f''(x)$ hat bei x_w einen Vorzeichenwechsel. Da wir von „-“ nach „+“ wechseln, handelt es sich um eine Wendestelle mit R-L-Übergang.

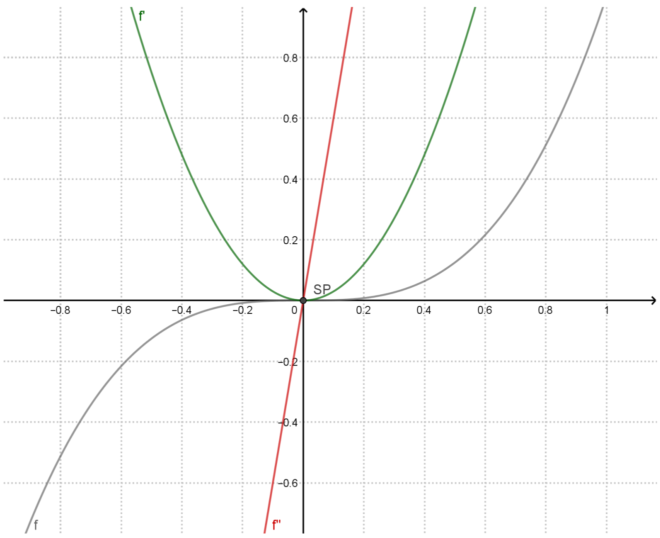
Alternativ können wir auch mit der dritten Ableitung $f'''(x)$ arbeiten.
$f'''(x) = 6$, somit ist $f'''(x_W) = 6 > 0$ und daher eine Wendestelle mit R-L-Übergang.
Vorsicht! Die Prüfung über die dritte Ableitung ist nicht sicher.
Eine x-Stelle x_W kann auch Wendestelle sein, obwohl $f'''(x_W) = 0$.

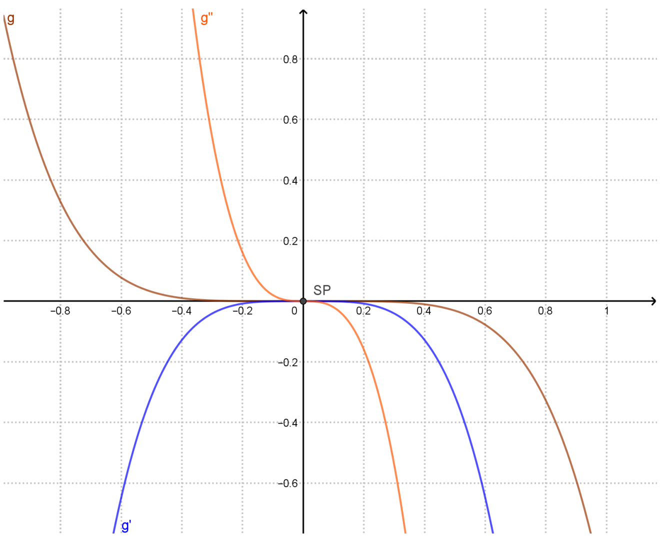
7.6 Sattelstelle

Nun kann es passieren, dass wir eine Wendestelle berechnen, die bereits eine Extremstelle war. Das bedeutet

$$f'(x_S) = 0 \wedge f''(x_s) = 0$$

Eine solche Stelle nennen wir **Sattelstelle**.





Ist $\mathbf{f'(x_S) = 0}$ und $\mathbf{f''(x_S) = 0}$, dann ist x_S weder Extrem- noch Wendestelle.

In diesem Fall bezeichnen wir x_S als **Sattelstelle**.