1 Grundwissen

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $x \in \mathbb{R}$.
Um diese Funktion (oder auch *Kurve*) untersuchen zu können, müssen wir auf Informationen aus vergangenen Lernabschnitten aber auch auf neues Wissen zurückgreifen. Nachfolgend werden die entsprechenden Informationen in Kurzform nochmal dargestellt.

Symmetrie

· Eine Funktion heißt **achsensymmetrisch**, wenn gilt: es kommen nur gerade Exponenten in dem Funktionsterm $f(x)$ vor.

a_0 gilt als Glied mit Geradem Exponenten.

In diesem Fall bedeutet das außerdem, dass $f(x) = f(-x)$ für alle zulässigen x. Die Funktion nennt man dann auch gerade.

· Eine Funktion heißt **punktsymmetrisch**, wenn gilt: es kommen nur ungerade Exponenten in dem Funktionsterm $f(x)$ vor.

Im Funktionsterm gibt es kein a_0.

In diesem Fall heißt das, dass $f(x) = -f(x)$ für alle zulässigen x. Eine solche Funktion wird auch ungerade genannt.

· Enthält der Funktionsterm $f(x)$ sowohl gerade als auch ungerade Exponenten, so ist sie **nicht symmetrisch**.

Verhalten für große x-Werte

Um das Verhalten für große x-Werte zu bestimmen, betrachten wir und lediglich den *charakteristischen Summanden*, also den Summanden, mit der höchsten Potenz ($a_n x^n$).

Das Verhalten kann dann wie folgt angegeben werden:

a_n \ n	gerade	ungerade
positiv	$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$ $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$	$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$ $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$
negativ	$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$ $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$	$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$ $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$

Schnittstelle mit der y-Achse

Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, setzen wir für x Null (0) in den Funktionsterm ein. Wir bestimmen also

$$f(0) = a_0$$

So erhalten wir $S(0|a_0)$. Ist $f(0) = a_0 = 0$, so verläuft der Graph durch den Ursprung.

Nullstellen

Die Nullstellen sind die Stellen, an denen der Funktionswert Null ist, der Funktionsgraph also die x-Achse schneidet.
Um die Nullstellen zu bestimmen, setzen wir

$$f(x) = 0$$

Wir merken uns:

- $a_1 x + a_0 \Rightarrow$ Null setzen und nach x umformen ($a_1 x + a_0 = 0 \Rightarrow x = \frac{a_0}{a_1}$)
- $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \Rightarrow$ Anwenden der **pq-Formel**
  Beachte: a_2 muss den Wert 1 haben (also muss gegebenenfalls : a_2 gerechnet werden).
- $a_2 x^2 + a_0 \Rightarrow$ Null setzen und nach x umformen ($a_2 x^2 + a_0 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$)

- Funktionen mit Grad 3 und Höher $\Rightarrow$ NST ausprobieren (meist $-2, -1, 0, 1, 2$); Dann mit **Polynomdivision** den Grad reduzieren
  $(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) : (x - NST) = p(x)$
  NST des Ergebnisses $p(x)$ bestimmen

Monotonieverhalten

Betrachtest du eine Funktion, so ist es bisweilen interessant zu wissen, wie die verschiedenen Funktionswerte zueinander stehen. Dies interessiert uns meist in einem bestimmten Intervall (z.B. zwischen x_0 und x_1). Wir definieren also ein Intervall $I = [x_0, x_1]$, als die Menge der x-Werte, für die gilt: $x_0 \leq x \leq x_1$. Um eine Aussage über das Monotonieverhalten treffen zu können, ist es zwingend notwendig, dass die Funktion auf dem entsprechenden Intervall I definiert ist.

f heißt **streng monoton steigend** auf I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:
$\circ f(x_1) < f(x_2)$.
Entsprechend heißt f **streng monoton fallend** auf I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:
$\circ f(x_1) > f(x_2)$.

Extremstellen

Notwendige Bedingung Ist x_0 eine Extremstelle, dann muss $f'(x) = 0$ sein.

1. Hinreichende Bedingung
$\circ$ $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ $f(x_0)$ ist lokales Minimum
$\circ$ $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ $f(x_0)$ ist lokales Maximum

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, dann verwende nachfolgende Bedingung.

2. Hinreichende Bedingung $f'(x)$ hat an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel.
$\circ$ Von $+$ nach $-$ $\rightarrow$ $f(x_0)$ ist lokales Minimum
$\circ$ Von $-$ nach $+$ $\rightarrow$ $f(x_0)$ ist lokales Maximum

Krümmungsverhalten und Wendestellen

Für das *Krümmungsverhalten* eines Funktionsgraphen gilt folgendes:
$\circ$ Ist $f'(x)$ streng monoton *steigend*, so ist der Funktionsgraph von f **linksgekrümmt**.
$\circ$ Ist f' streng monoton *fallend*, so ist der Funktionsgraph von f **rechtsgekrümmt**.
Das Krümmungsverhalten gibt man vor, zwischen und nach den Wendepunkten an.

Das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen ändert sich an einer *Wendestelle*. Für eine solche gilt: ***Notwendige Bedingung*** Ist x_0 eine Wendestelle, dann muss $f''(x_0) = 0$ sein.

1. Hinreichende Bedingung
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 eine Wendestelle.

Wenn $f'''(x_0) = 0$, dann verwende nachfolgende Bedingungen.

2. Hinreichende Bedingung
$f''(x_0) = 0$ und $f''(x)$ hat an der Stelle x_0 einen **Vorzeichenwechsel**.

Schaubild

Zeichne die Nullstellen, die Extrempunkte und die Wendepunkte in das Koordinatensystem.
Verbinde die Punkte entsprechen der Information, die du über die Symmetrie, das Randverhalten (Verhalten für große x-Werte), die Monotonie und das Krümmungsverhalten erhalten hast.
So erhältst du den ungefähren Verlauf des Funktionsgraphen.

2 Kurvendiskussion 101

Wirst du mit einer ganzrationalen Funktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ konfrontiert und sollst diese skizzieren, führst du die folgenden Schritte der **Kurvendiskussion** aus.

1. Ableitungen bilden $(f'(x), f''(x), f'''(x))$
2. Symmetrie bestimmen
3. Verhalten für große x-Werte (Wo kommt die Funktion her, wo geht sie hin)
4. Nullstellen und deren Koordinaten bestimmen
   $f(x) = 0$
5. Extremstellen und die dazugehörigen Punkte
   $f'(x) = 0$
6. Monotonieverhalten
   Betrachte das Verhalten zwischen den Extrempunkten.
7. Wendestellen und die dazugehörigen Punkte
   $f''(x) = 0$
8. Krümmungsverhalten
9. Übertragen der Punkte in das Koordinatensystem.
   Skizzieren des Funktionsgraphen anhand der Schritte (2.), (3.), (6.) und (8.) und der eingetragenen Punkte.