BBS I Mainz, Höhere Berufsfachschule IT-Systeme
Grundstufe - Mathematik
Wochenplan Ganzrationale Funktionen

bbs.eins.mainz
Berufsbildende Schule Technik

Wochenplan Nr.: 14 Erledigt: Zeitraum: 08.04 - 15.04

Pflicht: Sie bearbeiten *pro Teil* jeweils **eine Aufgabe**.
Wahl: Zur Vertiefung und Festigung stehen ihnen die übrigen Aufgaben zur Verfügung.

Teil 1: Skizzieren Sie den Funktionsgraphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades mit folgenden Eigenschaften:

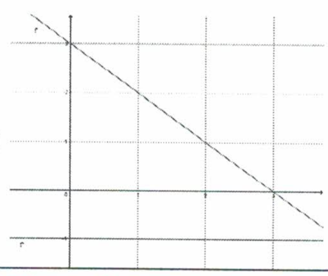
(I) Der Graph hat in $H(-2|1)$ einen Hochpunkt und in $T(2|-3)$ einen Tiefpunkt.

(II) Der Graph ist punktsymmetrisch und hat den Tiefpunkt $T(-2|-4)$.

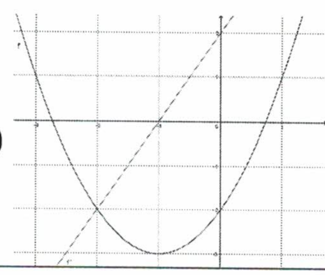
(III) Der Graph besitzt keine Extremstelle und schneidet die y-Achse bei 5.

Teil 2: Die Abbildungen zeigen jeweils die Graphen f' und f'' zu einer ganzrationalen Funktion f. Argumentieren Sie mit Hilfe der Graphen, an welchen Stellen f eine Extremstelle hat. Treffen Sie zudem eine Aussage darüber, ob es sich um einen Hoch- oder einen Tiefpunkt handelt.

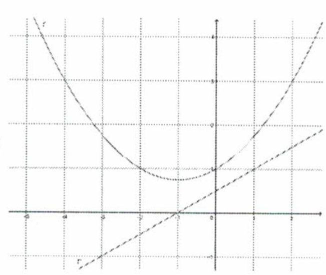
(I)



(II)



(III)



Teil 3: An welchen Stellen hat der Graph der reellen Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 1$

(I) eine waagrechte Tangente

(II) eine Tangente mit der Steigung -2

(III) eine Tangente mit der Steigung 6

Teil 4: Untersuchen Sie die Funktion f auf Extrempunkte des Graphen. Skizzieren Sie den Graphen.

(I) $f(x) = x^2 - 5x + 5$

(II) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

(III) $f(x) = 3x^5 - 10x^3 - 45x$

Zusatzaufgabe

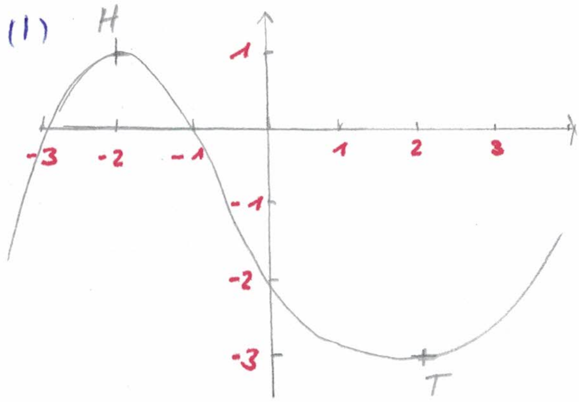
Teil 5: Die Steighöhe h eines im luftleeren Raum senkrecht nach oben geworfenen Gegenstandes lässt sich angenähert durch die Funktion $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$ mit v_0 in $\frac{m}{s}$; t in s, $g = 9,81\frac{m}{s^2}$ beschreiben. Dabei ist v_0 die Abwurfgeschwindigkeit.

a) Berechnen Sie die maximal erreichte Höhe des Gegenstandes, wenn $v_0 = 12\frac{m}{s}$ ist.

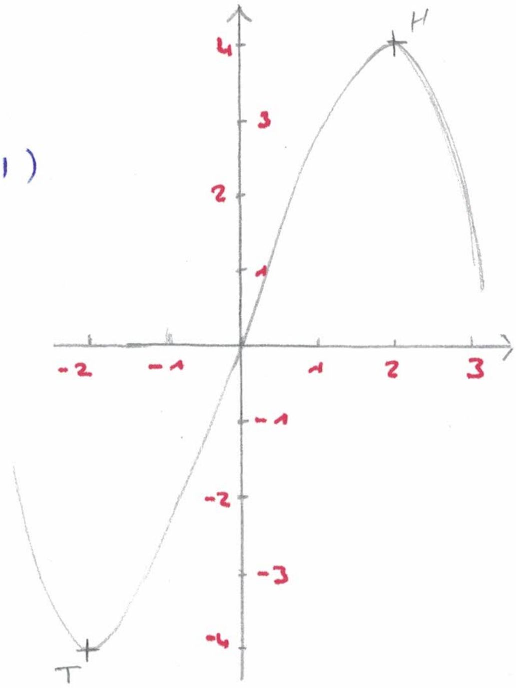
b) Wie Lange dauert es, bis der Gegenstand wieder die Ausgangshöhe erreicht?

Teil 1

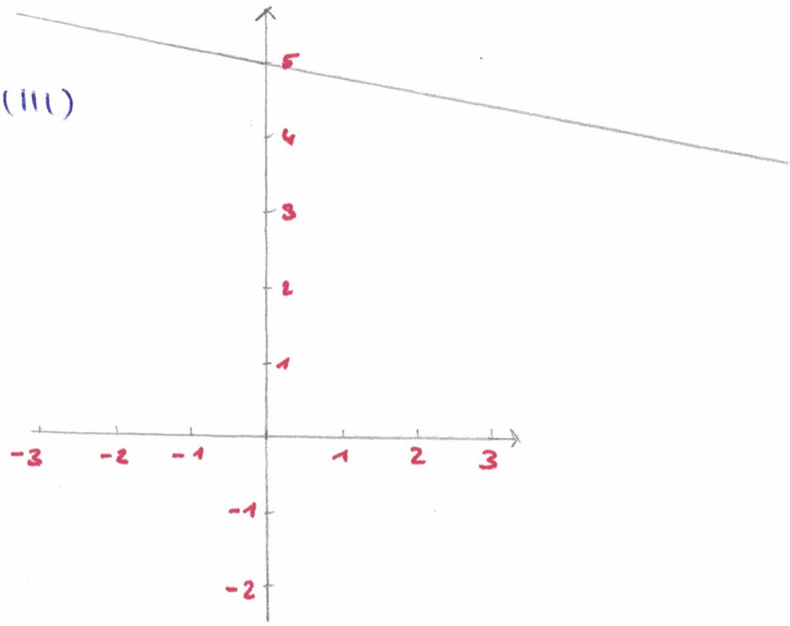
(I)



(II)



(III)



Teil 2

(I) Da f' bei $x=3$ die x-Achse schneidet, hat der Graph an dieser Stelle eine Extremstelle.
Da f'' an dieser Stelle (bzw. immer) negativ, also <0 ist, handelt es sich um einen Hochpunkt.

(II) Der Graph besitzt ~~zwei~~ Extrempunkte, einen bei $x \approx -2{,}8$ und einen bei $x \approx 0{,}8$, da f' an diesen Stellen Nullstellen besitzt.
Da f'' bei $x \approx -2{,}8$ negativ, <0, ist ist der Punkt ein Hochpunkt.
Mit $f'' > 0$ bei $x \approx 0{,}8$ ist dies entsprechend ein Tiefpunkt.

(III) Der Graph von f hat keine Extremstellen, da der Graph von f' keine Nullstelle besitzt.

Teil 3

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 1$

(I) waagrechte Tangente $\Rightarrow$ Steigung der Tangente ist 0 also ist Steigung des Graphen an dieser Stelle auch 0 $\Rightarrow f'(x) = 0$

$f'(x) = 2x^2 - 4x$

$0 = 2x^2 - 4x = x(2x - 4)$

$\underline{\underline{x_1 = 0}}$

$2x - 4 = 0 \quad | +4$

$2x = 4 \quad | :2$

$\underline{\underline{x_2 = 2}}$

(II) Tangente mit Steigung -2 $\Rightarrow$ Graph hat an dieser Stelle auch Steigung -2 also $f'(x) = -2$

$-2 = 2x^2 - 4x \quad | +2$

$0 = 2x^2 - 4x + 2 \quad | :2$

$0 = x^2 - 2x + 1$ pq-Formel / 2. bin. Formel

$\underline{\underline{x_1 = x_2 = +1}}$

(III) Tangente mit Steigung 6 $\Rightarrow$ auch der Funktionsgraph hat an dieser Stelle die Steigung 6, also $f'(x) = 6$

$$6 = 2x^2 - 4x \quad | +6$$

$$0 = 2x^2 - 4x - 6 \quad | :2$$

$$0 = x^2 \underbrace{-2}_{p}x \underbrace{-3}_{q} \qquad \text{pq-Formel}$$

$$x_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3}$$

$$\underline{\underline{x_1}} = 1 + \sqrt{4} \;\underline{\underline{= 3}}$$

$$\underline{\underline{x_2}} = 1 - \sqrt{4} \;\underline{\underline{= -1}}$$

<u>Teil 4</u> Extrempunkt $\Rightarrow f'(x) = 0$

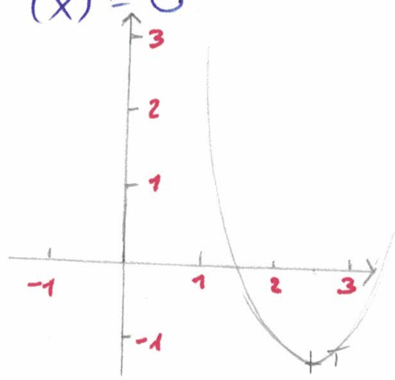
(1) $f(x) = x^2 - 5x + 5$

$$f'(x) = 2x - 5$$

$$0 = 2x - 5 \quad | +5$$

$$5 = 2x \quad | :2$$

$$\frac{5}{2} = x$$



$f''(x) = 2 \qquad f''\left(\frac{5}{2}\right) = 2 > 0$ also TP

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 5 = -\frac{5}{4}$$

(11) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

$f'(x) = 4x^3 - 8x = x(4x^2 - 8)$

$0 = x(4x^2 - 8)$ $\qquad$ $x_1 = 0$

$0 = 4x^2 - 8 \quad | +8$

$8 = 4x^2 \quad | :4$

$2 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm\sqrt{2} = x$ $\qquad$ $x_2 = -\sqrt{2} \quad x_3 = \sqrt{2}$

$f''(x) = 12x^2 - 8$

$f''(-\sqrt{2}) = 12 \cdot (-\sqrt{2})^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow$ TiP

$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 8 = -8 < 0 \Rightarrow$ HoP

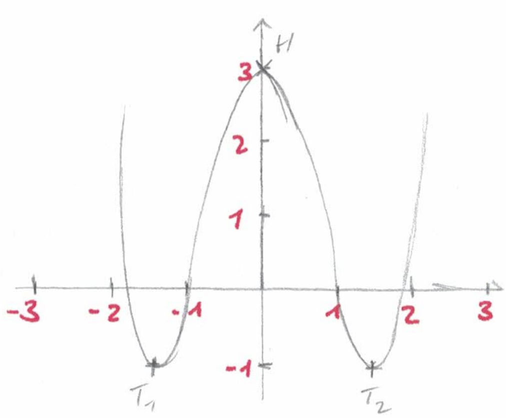
$f''(\sqrt{2}) = 12 \cdot (\sqrt{2})^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow$ TiP

Punkte für Skizze bestimmen:

$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 4 \cdot (-\sqrt{2})^2 + 3 = -1$ $\qquad$ $T_1(-\sqrt{2} \mid -1)$

$f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^2 + 3 = 3$ $\qquad$ $H_1(0 \mid 3)$

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4 \cdot (\sqrt{2})^2 + 3 = -1$ $\qquad$ $T_2(\sqrt{2} \mid -1)$



(III) $f(x) = 3x^5 - 10x^3 - 45x$

$f'(x) = 15x^4 - 30x^2 - 45 = 15(x^4 - 2 \cdot x^2 - 3)$

$0 = 15(x^4 - 2x^2 - 3)$ (Substitution) $z := x^2$

$0 = z^2 \underbrace{-2}_{p} z \underbrace{-3}_{q}$ pq - Formel

$z_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3}$

$z_1 = 1 + \sqrt{4}$ $z_2 = 1 - \sqrt{4}$

$= 3$ $= -1$ Rücksubstitution

$x^2 = 3 \quad | \sqrt{}$ $x^2 = -1$ ↯

$x_1 = \sqrt{3}$ $x_2 = -\sqrt{3}$

$f''(x) = 60x^3 - 60x$

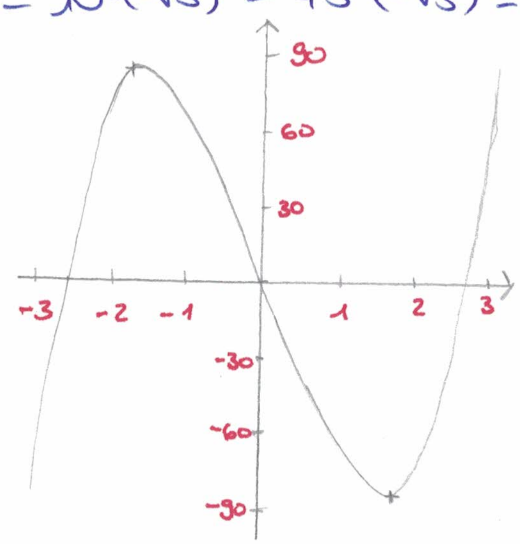
$f''(\sqrt{3}) = 60(\sqrt{3})^3 - 60 \cdot (\sqrt{3}) = 207{,}85 > 0 \Rightarrow$ TIP

$f''(-\sqrt{3}) = 60 \cdot (-\sqrt{3})^3 - 60(-\sqrt{3}) = -207{,}85 < 0 \Rightarrow$ HOP

Punkte für Skizze:

$f(\sqrt{3}) = 3 \cdot (\sqrt{3})^5 - 10 \cdot (\sqrt{3})^3 - 45(\sqrt{3}) = -83{,}14$ $T_1(\sqrt{3} | -83{,}14)$

$f(-\sqrt{3}) = 3 \cdot (-\sqrt{3})^5 - 10 \cdot (-\sqrt{3})^3 - 45 \cdot (-\sqrt{3}) = 83{,}14$ $H_1(-\sqrt{3} | 83{,}14)$



Teil 5 Zusatzaufgabe

$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ $\qquad g = 9{,}81 \frac{m}{s}$

a) $v_0 = 12 \frac{m}{s}$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit lassen wir die Einheiten weg.

$h(t) = 12t - 4{,}905t^2$

Um die maximale Höhe zu bestimmen benötigen wir die Extremstellen. $h'(t) = 0$

$h'(t) = 12 - 9{,}81t$

$0 = 12 - 9{,}81t \quad | + 9{,}81t$

$9{,}81t = 12 \quad | : 9{,}81$

$\underline{\underline{t = 1{,}22}}$

A: Nach 1,22 Sekunden erreicht der geworfene Gegenstand seinen höchsten Punkt.

b) Um den Zeitpunkt der Ausgangshöhe zu bestimmen benötigen wir die Nullstellen. $h(t) = 0$

$0 = 12t - 4{,}905t^2 = t(12 - 4{,}905t) \quad \Rightarrow t = 0$

Startzeitpunkt

$0 = 12 - 4{,}905t \quad | + 4{,}905t$

$4{,}905t = 12 \quad | : 4{,}905$

$\underline{\underline{t = 2{,}45}}$

A: Nach 2,45 Sekunden hat der geworfene Gegenstand wieder seinen Ausgangspunkt erreicht.