bbs.eins.mainz
Berufsbildende Schule Technik

Wochenplan Nr.: 11 Erledigt: Zeitraum: 10.12 - 16.12

Die Aufgaben gliedern sich nach folgender Schwierigkeitsstufe.
(I) Grundlagen (II) Forstgeschritten (III) Experte

Pflicht: Sie bearbeiten *pro Teil* jeweils **eine Aufgabe** vom Schwierigkeitsgrad ihrer Wahl.
Wahl: Zur Vertiefung und Festigung stehen ihnen die übrigen Aufgaben zur Verfügung.

Teil 1: Markieren Sie die Nullstellen der Funktion. Schreiben Sie die Funktion gegebenenfalls um.

(I) $f(x) = (x - 2)(x - \frac{1}{3})(x - 4,5)$

(II) $f(x) = 7(x - 2)(x + 3)(x - 3)$

$(x-(-3))$

$(x-0)$

(III) $f(x) = \frac{1}{4}x(x + 2)(x - 4)(x + 0,5)$

$(x-(-2))$ $(x-(-0,5))$

Erläutern Sie, welchen Vorteil diese Darstellung im Bezug auf die Nullstellen hat.

Teil 2: Erklären Sie an einer der ganzrationalen Funktionen genau, wie Sie Vorgehen um die Nullstellen der Funktionen zu bestimmen.

(I) $f(x) = (x - 2)(x^2 - 6x + 9)$

(II) $f(x) = (x + 3)(x^3 - 3,5x^2 - 9,5x + 30)$

(III) $f(x) = (x - 2)(5x^4 - 10x^2 + 2)$

Bestimmen Sie alle Nullstellen zu einer der Funktionen.

Teil 3: Überführen Sie eine der Funktionen in die Faktorform.

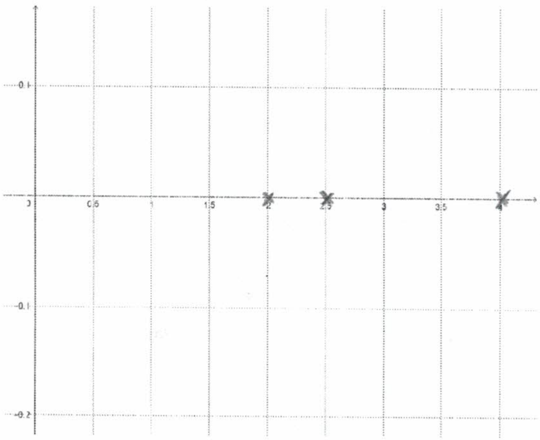
(I) $f(x) = 0,5x^3 - 6x + 8$

(II) $f(x) = x^3 + 0,5x^2 - 13x - 20$

(III) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 24x - 36$

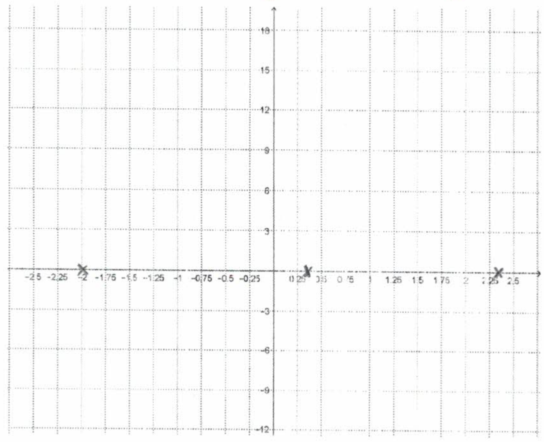
Teil 4: Markieren Sie die Nullstellen der Funktion im Koordinatensystem.

(I) $f(x) = 0,25(x - 2,5)(x - 2)(x - 4)$



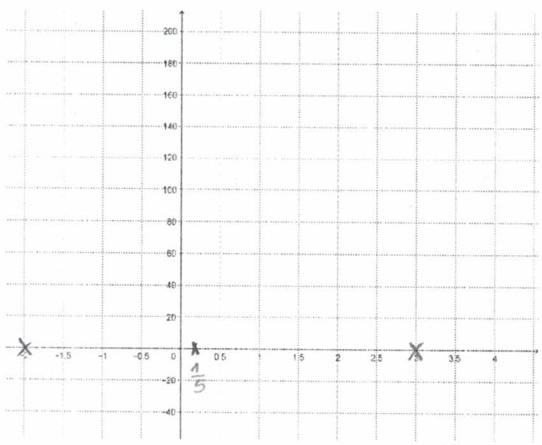
$(x-(-2))^2$

(II) $f(x) = (x - \frac{1}{3})(x + 2)^2(x - \frac{7}{3})$



$(x-(-2))$

(III) $f(x) = 2.5(x - \frac{1}{5})(x + 2)(x - 3)^3$



Teil 5: Geben Sie zu einer Funktionen aus <u>*Teil 4*</u> das *Charakteristische Polynom* und das *Absolutglied* an.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für große x-Beträge.

Teil 1

In der Faktorform bzw. in der Linearfaktorform kann ich die Nullstellen der Funktion direkt ablesen.

Teil 2

(I) $f(x) = (x-2)(x^2-6x+9)$

- ich bestimme die Nullstellen von $(x-2)$ <u>und</u> von (x^2-6x+9)

$\rightarrow$ bei $x-2$ durch umstellen

$\rightarrow$ bei x^2-6x+9 mit der pq-Formel

(II) $f(x) = (x+3)(x^3-3{,}5x^2-9{,}5x+30)$

- ich bestimme die Nullstellen von $(x+3)$ <u>und</u> von $(x^3-3{,}5x^2-9{,}5x+30)$

$\rightarrow$ bei $x+3$ durch umstellen

$\rightarrow$ bei $x^3-3{,}5x^2-9{,}5x+30$ rate ich zunächst eine Nullstelle x_N.
Dann führe ich mit $(x-x_N)$ eine Polynomdivision durch (erhalte damit f_2).
Anschließend bestimme ich mit der pq-Formel noch die Nullstellen von f_2.

(III) $f(x) = (x-2)(5x^4 - 10x^2 + 2)$

- ich bestimme die Nullstellen von $(x-2)$ <u>und</u> von $(5x^4 - 10x^2 + 2)$

-> bei $x-2$ durch umstellen

-> für $5x^4 - 10x^2 + 2$ nutze ich das Substitutionsverfahren und erhalte bis zu vier weitere Nullstellen

---

(I) $0 = (x-2)(x^2 \underbrace{-6}_{p}x \underbrace{+9}_{q})$

$\Rightarrow x-2=0$

$x_1 = 2$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$x_{2/3} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 9}$

$= 3 \pm \sqrt{\underbrace{9-9}_{=0}}$

$\Rightarrow x_2 = x_3 = 3$

(II) $0 = (x+3)(x^3 - 3{,}5x^2 - 9{,}5x + 30)$

$\Rightarrow x+3=0$

$x_1 = -3$

$x^3 - 3{,}5x^2 - 9{,}5x + 30 = 0 \quad \rightarrow x_2 = -3$

$x^3 - 3{,}5x^2 - 9{,}5x + 30 : (x+3) = x^2 \underbrace{-6{,}5}_{p}x \underbrace{+10}_{q}$

$-(x^3 + 3x^2)$

$-6{,}5x^2 - 9{,}5x$

$-(-6{,}5x^2 - 19{,}5x)$

$10x + 30$

$-(10x + 30)$

0

$x_{3/4} = -\frac{-6{,}5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6{,}5}{2}\right)^2 - 10}$

$= \frac{13}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{-13}{4}\right)^2 - 10}$

$= \frac{13}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$

$\Rightarrow$

$x_3 = \frac{13}{4} + \frac{3}{4}$

$= \frac{16}{4} = 4$

$x_4 = \frac{13}{4} - \frac{3}{4}$

$= \frac{10}{4} = 2{,}5$

(III) $0 = (x-2)(5x^4 - 10x^2 + 2)$

$\Rightarrow \cancel{x} - 2 = 0$ $\qquad 5x^4 - 10x^2 + 2 = 0 \qquad z = x^2$

$x = 2$

$$5z^2 \underbrace{-10}_{p}z \underbrace{+2}_{q} = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{10}{2}\right)^2 - 2}$$

$$= 5 \pm \sqrt{23}$$

$z_1 = 5 + \sqrt{23} \qquad z_2 = 5 - \sqrt{23}$

weil $z = x^2$

$x^2 = 5 + \sqrt{23} \qquad x^2 = 5 - \sqrt{23}$

$x_{2/3} = \pm\sqrt{5 + \sqrt{23}} \qquad x_{4/5} = \pm\sqrt{5 - \sqrt{23}}$

$x_2 = 3{,}13 \quad x_3 = -3{,}13 \quad x_4 = 0{,}45 \quad x_5 = -0{,}45$

Teil 3

> Hinweis: Für die Faktorform bestimmen wir die Nullstellen und setzen diese in das Grundgerüst ein.

(I) $f(x) = 0{,}5x^3 - 6x + 8$

$$= 0{,}5\underbrace{(x^3 - 12x + 16)}_{\text{Nullstellen finden}}$$

$\to$ rate: $x_1 = 2$

$$x^3 \quad - 12x + 16 : (x-2) = x^2 \underbrace{+2}_{p}x \underbrace{-8}_{q} \quad \leftarrow \text{pq-Formel}$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline \quad 2x^2 - 12x \\ \quad -(2x^2 - 4x) \\ \hline \qquad -8x + 16 \\ \qquad -(-8x + 16) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$x_{2/3} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 8}$$

$$= -1 \pm \sqrt{9}$$

$x_2 = 2 = x_1 \qquad x_3 = -4$

$\Rightarrow f(x) = 0{,}5(x-2)\cdot(x-2)\cdot(x+4)$

$= 0{,}5(x-2)^2(x+4)$

(II) $f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 - 13x - 20$ → rate: $\boxed{x_1 = 4}$

$$x^3 + 0{,}5x^2 - 13x - 20 : (x-4) = x^2 + \underbrace{4{,}5x}_{p} \underbrace{+5}_{q}$$

$$\begin{array}{l}
-(x^3 - 4x^2) \\
\hline
\quad 4{,}5x^2 - 13x \\
\quad -(4{,}5x^2 - 18x) \\
\hline
\qquad 5x - 20 \\
\qquad -(5x - 20) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$x_{2/3} = -\frac{4{,}5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4{,}5}{2}\right)^2 - 5}$$

$$= -\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$$

$$\boxed{x_2} = -\frac{9}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{8}{4} = \boxed{-2} \qquad \boxed{x_3} = -\frac{9}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{10}{4} = \boxed{-2{,}5}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-4)\cdot(x+2)\cdot(x+2{,}5)$$

(III) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 24x - 36$ → rate: $\boxed{x_1 = -1}$

$$x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 24x - 36 : (x+1) = x^3 - 7x^2 + 12x - 36$$

$$\begin{array}{l}
-(x^4 + x^3) \\
\hline
\quad -7x^3 + 5x^2 \\
\quad -(-7x^3 - 7x^2) \\
\hline
\qquad 12x^2 - 24x \\
\qquad -(12x^2 + 12x) \\
\hline
\qquad\quad -36x - 36 \\
\qquad\quad -(-36x - 36) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

↳ rate weitere Nullstelle

$\boxed{x_2 = 6}$

$$x^3 - 7x^2 + 12x - 36 : (x-6) = x^2 \underbrace{-x}_{p} \underbrace{+6}_{q}$$

$$-(x^3 - 6x^2)$$

$$-x^2 + 12x$$

$$-(-x^2 + 6x)$$

$$6x - 36$$

$$-(6x - 36)$$

$$0$$

$$x_{3/4} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 6}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{23}{4}} \quad ↯$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)\cdot(x-6)\cdot(x^2 - x + 6)$$

Teil 5

(I) $f(x) = 0{,}25\,(x - 2{,}5)(x-2)(x-4)$

charakteristischer Summand

↳ $a_n x^n$

Absolutglied

↳ a_0

$a_n = 0{,}25 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}25$

$n = 3 \quad = 1 + 1 + 1$

$\rightarrow \quad 0{,}25\,x^3$

$a_0 = 0{,}25 \cdot (-2{,}5) \cdot (-2) \cdot (-4)$

$= -5$

(II) $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2)^2 \left(x - \frac{7}{3}\right)$

$a_n = 1 \cdot 1^2 \cdot 1 = 1$

$n = 4 \quad = 1 + 2\cdot 1 + 1$

$\rightarrow \quad x^4$

$a_0 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2^2 \left(-\frac{7}{3}\right)$

$= \frac{28}{9}$

(III) $f(x) = 2{,}5\left(x - \frac{1}{5}\right)(x+2)(x-3)^3$

$a_n = 2{,}5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1^3 = 2{,}5$

$n = 5$ $= 1 + 1 + 3 \cdot 1$

$\Rightarrow$ $2{,}5\,x^5$

$a_0 = 2{,}5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 2 \cdot (-3)^3$

$= 27$

Verhalten für große x-Beträge

Hierfür benötigen wir ausschließlich den charakteristischen Summanden. (CS)

(I) CS: $0{,}25\,x^3$ a_n positiv, n ungerade

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

(II) CS: x^4 a_n positiv, n gerade

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

(III) CS: $2{,}5\,x^5$ a_n positiv, n ungerade

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$