RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE
ELEKTRONIKAS UN TELEKOMUNIKĀCIJU FAKULTĀTE
RADIOELEKTRONIKAS INSTITŪTS
ELEKTRONIKAS PAMATU KATEDRA

Signālu teorijas pamati

Laboratorijas darbs № 2

Iepazīšanās ar periodisku signālu izvērsi trigonometrisku funkciju Furjē rindā

ETF 2. kurss REBM01
Andrejs Cvetkovs
151REB191

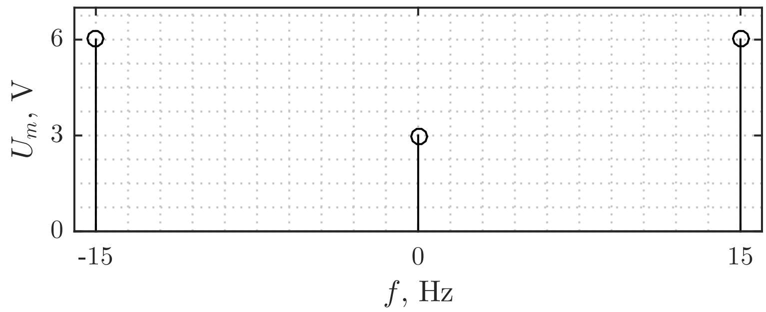
Rīga, 2017

Mājas darbs

2. mājas darbs, 2. variants; $b = 9$, $y = 5$, $a = c = x = z = 1$.

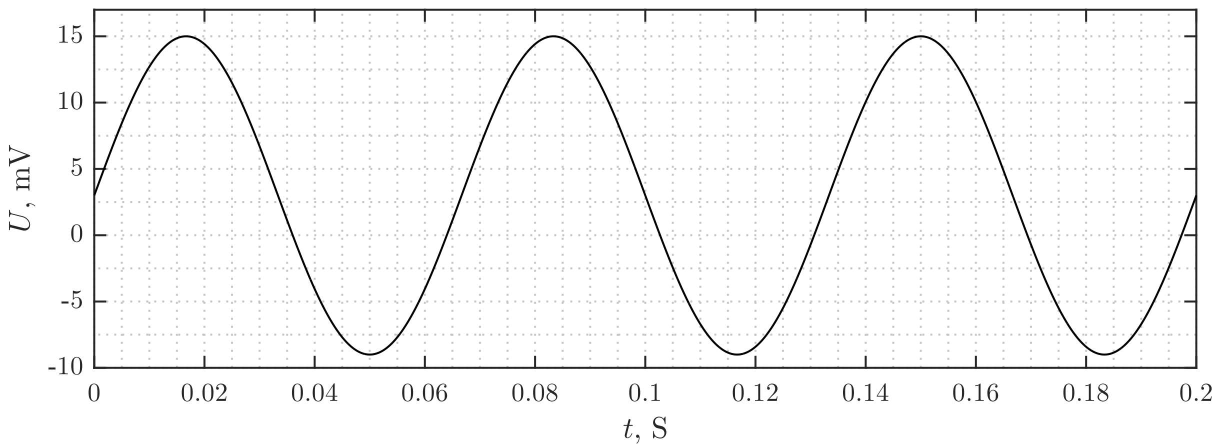
1. uzdevums

Uzzīmēt signāla laika diagrammu pēc divpusīgā amplitūdu spektra, noteikt tā vidējo jaudu:



Att. 1. Signāla amplitūdu spektrs

No amplitūdas spektra ir redzams, ka signāla līdzkomponente ir vienāda ar 1 mV. 6 mV vērtības pie -15 un 15 Hz divpusīgajā (komplekso eksponentu) spektrā nozīmē, ka signālā ir viena harmonika ar amplitūdu $6 \times 2 = 12$ mV un frekvenci 15 Hz:

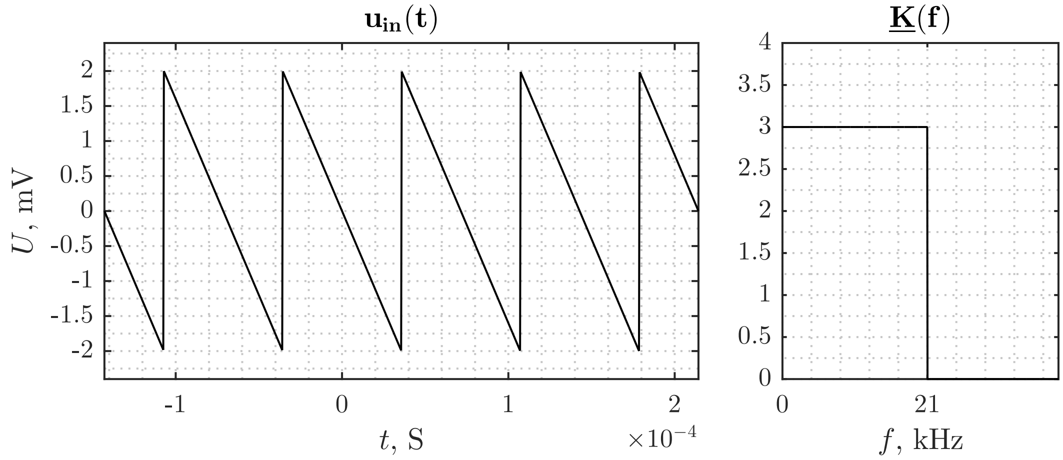


Att. 2. Signāla laika diagramma

$$P_v = \frac{1}{T}\int_0^T \left(3 \times 10^{-3} + 12 \times 10^{-3} \times \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)^2 \mathrm{d}t = 81\,\mu\mathrm{W} \cdot \Omega$$

2. uzdevums

Noteikt izejas signālu, ja periodisks spriegums tiek laizts caur ķēdi ar zināmu frekvenču pārvades koeficientu:



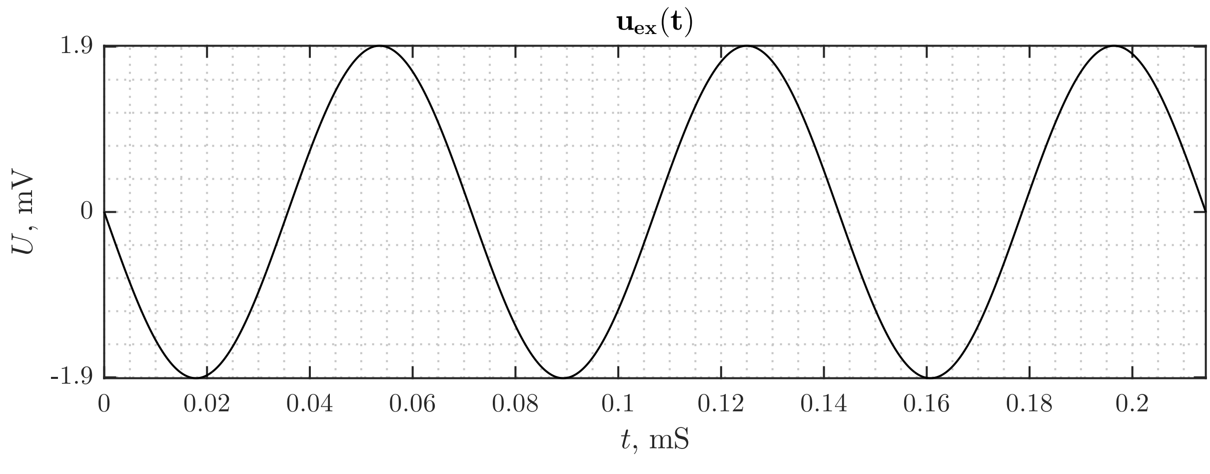
Att. 3. Ieejas signāls un ķēdes frekvenču pārvades koeficients

Izejas signāla spektrs ir vienāds ar ieejas signāla spektra un frekvenču pārvades koeficienta reizinājumu. Pārvades koeficienta atkarība no frekvences ir taisnstūra impulss, kas nozīmē ka reizināšanas rezultātā ieejas signāla spektra daļā līdz 21 kHz trīsreiz palielināsies, bet viss pārējais tiks nogriezts. Ieejas signāls ir periodisks zāģveida signāls, tā spektru var atrast izvērsot to Furjē rindā. Ieejas signāla periods ir 1/14 ms, frekvence – 14 kHz, līdzkomponente ir vienāda ar nulli. No tā var secināt, ka līdz izejai tiks tikai signāla pirmā harmonika ar frekvenci 14 kHz, jo otrā 28 kHz harmonika jau pārsniegs frekvenču pārvedes koeficienta 21 kHz robežfrekvenci.

$$C_{1\,in} = 14 \times 10^3 \int_{-\frac{1}{14\times 10^3}}^{\frac{1}{14\times 10^3}} -28 \times 10^3 \times t \times \sin\left(14 \times 10^3 \times 2\pi \times t\right) \mathrm{d}t = -0.637$$

$$C_{1\,ex} = C_{1\,in} \times 3 = -1.91$$

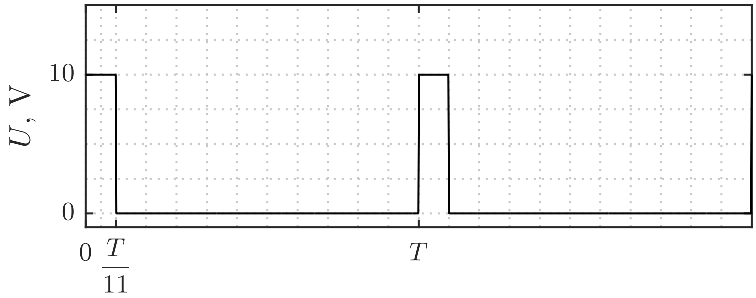
$$u_{ex}(t) = -1.91 \times \sin\left(14 \times 10^3 \times 2\pi \times t\right), \text{ mV}$$



Att. 4. Izejas signāla laika diagramma

3. uzdevums

Pārbaudīt Beseļa nevienādību periodiskam spriegumam uz $1\,\Omega$ rezistora, ņemot vērā pirmās 4 harmonikas.



Att. 5. Signāla laika diagramma

Beseļa nevienādība apgalvo, ka ja signāls ir izvērsts Furjē rindā ar ierobežotu harmoniku skaitu, tad rindas summārā jauda nevar pārsniegt signāla jaudu:

$$P_S \geq \left(\frac{C_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{4} C_n^2$$

Izvērst doto signālu Furjē rindā ir vienkāršāk, nobīdot laika atskaites sākumu par $\frac{T}{22}$:

$$\frac{C_0}{2} = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{22}}^{\frac{T}{22}} 10\,\mathrm{d}t = 2\times\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{\frac{T}{22}} 10\,\mathrm{d}t = \frac{20}{T}\times t\Big|_0^{\frac{T}{22}} = \frac{10}{11}$$

$$C_n = 2\times\frac{2}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{22}} 10\times\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\times t\right)\mathrm{d}t = \frac{20}{\pi n}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\times t\right)\Big|_0^{\frac{T}{22}} = \frac{20}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{11}\right)$$

$$C_1 = 1.794;\quad C_2 = 1.721;\quad C_3 = 1.604;\quad C_4 = 1.448$$

Četru harmoniku Furjē rindas jauda:

$$P_{\mathcal{F}} = \left(\frac{10}{11}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1.794^2 + 1.721^2 + 1.604^2 + 1.448^2\right) = 6.25\,\mathrm{W}$$

Signāla vidējā jauda:

$$P_S = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{22}}^{\frac{T}{22}} 10^2\,\mathrm{d}t = 9.091\,\mathrm{W}$$

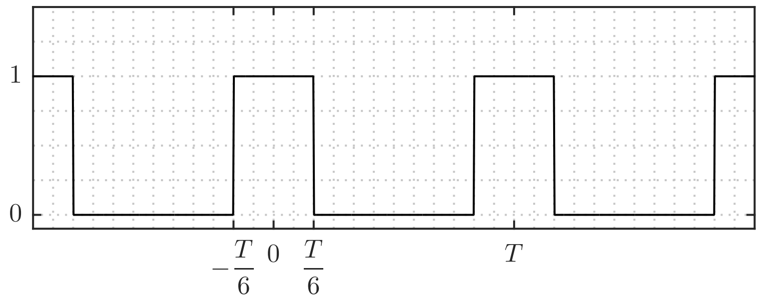
Ir redzams, ka Beseļa nevienādība izpildās:

$$9.091\,\mathrm{W} > 6.25\,\mathrm{W};\qquad P_S > P_{\mathcal{F}}$$

Laboratorijas darba aprēķini

1. Taisnstūra signāls

Laboratirijas darba a daļas uzdevums 3. variantam bija pirmo četru atšķirīgo no nulles harmoniku noteikšana taisnstūra signālam, kura impulsa platums ir vienāds ar vienu trešdaļu no tā perioda:



Att. 6. Taisnstūra signāls

$$\frac{C_0}{2} = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{6}}^{\frac{T}{6}} 1\,\mathrm{d}t = 2\times\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{\frac{T}{6}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\times t\Big|_0^{\frac{T}{6}} = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

$$C_n = 2\times\frac{2}{T}\int\limits_{0}^{\frac{T}{6}} 1\times\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\times t\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi n}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\times t\right)\Big|_0^{\frac{T}{6}} = \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

$$C_1 = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\pi}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \approx 0.551$$

$$C_2 = \frac{2}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{\pi}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.276$$

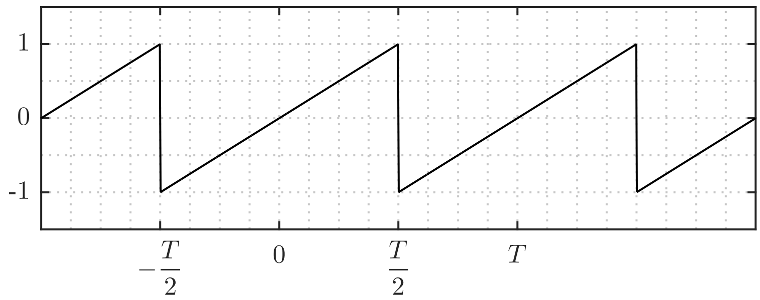
$$C_3 = \frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right) = \frac{2}{3\pi}\times 0 = 0$$

$$C_4 = \frac{2}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2\pi}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx -0.138$$

$$C_5 = \frac{2}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{2}{5\pi}\times\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{5\pi} \approx -0.11$$

2. Zāģveida signāls

Laboratirijas darba b daļas uzdevumā bija jāatrod zāģveida signāla pirmo triju harmoniku amplitūdas:



Att. 7. Zāģveida signāls

$$\frac{C_0}{2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2t \, \mathrm{d}t = t^2 \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} = 0$$

$$C_n = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2t \times \sin\left(2n\pi \times t\right) \mathrm{d}t = \frac{2 \times \left(\sin\left(n\pi\right) - n\pi \times \cos\left(n\pi\right)\right)}{n^2 \times \pi^2}$$

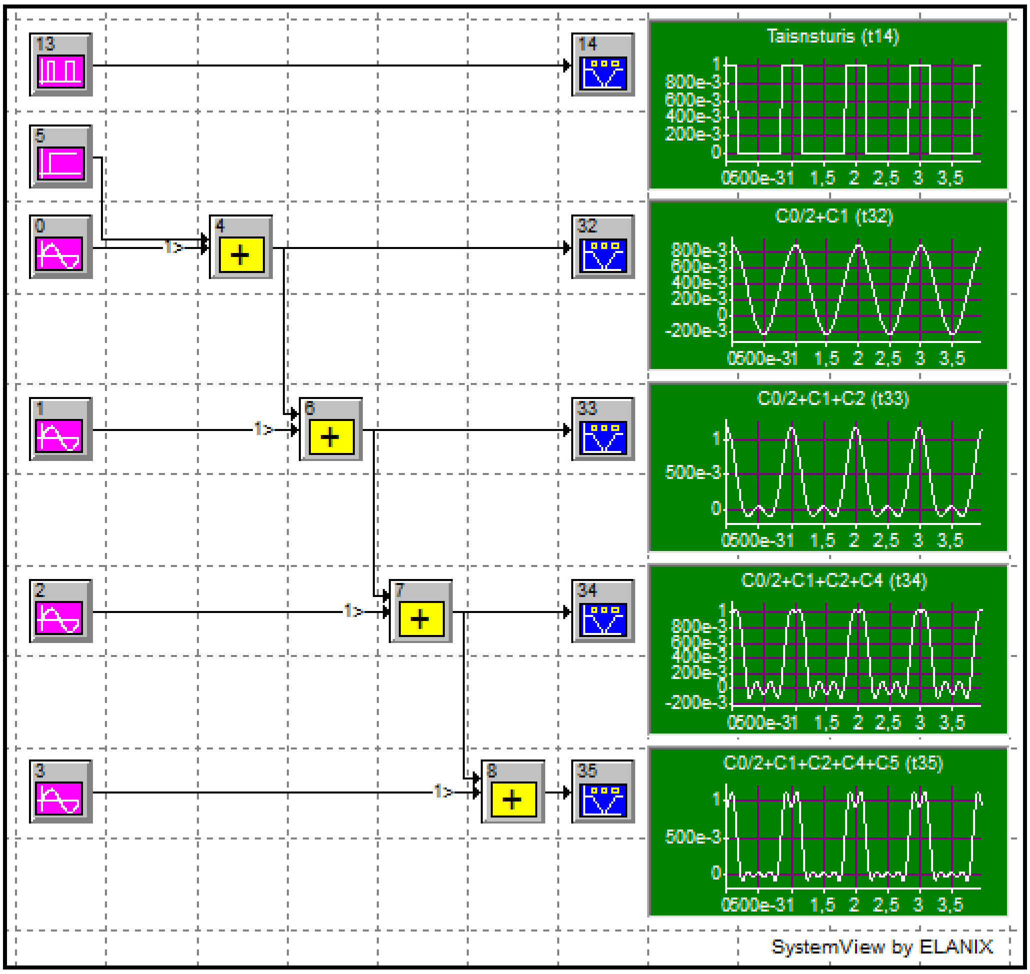
Furjē rindas koeficienti n var būt tikai veseli skaitļi, tātad C_n izteiksmi var vienkāršot:

$$C_n = \frac{-2 \times (-1)^n}{n\pi}$$
$$C_1 = \frac{2}{\pi} \approx 0.637$$
$$C_2 = -\frac{1}{\pi} \approx -0.318$$
$$C_3 = \frac{2}{3\pi} \approx 0.212$$

Eksperimentālā daļa

1. Taisnstūra signāls

Taisnstūra signāla iegūšanai tika sastādīta sekojoša sistēma:

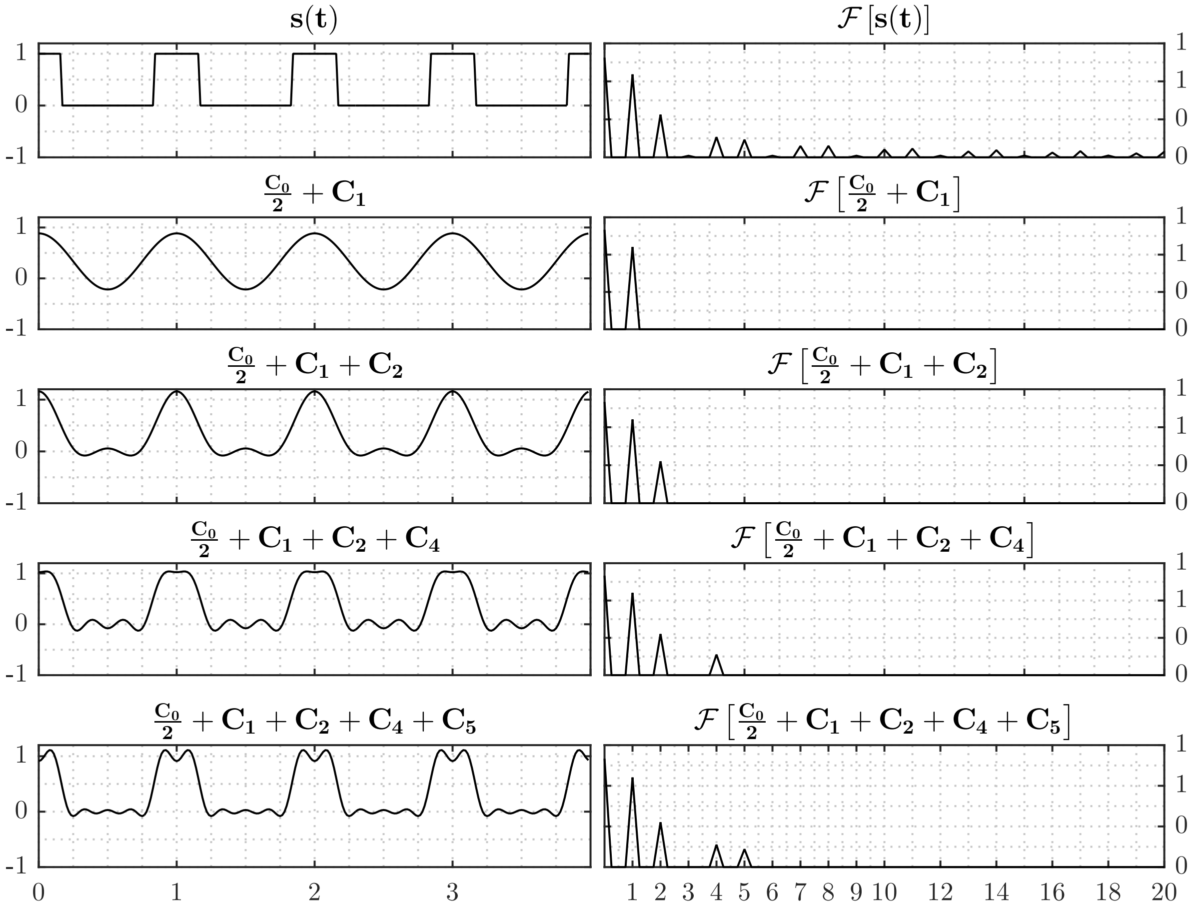


Att. 8. SystemView sistēma signāla veidošanai

Trigonometrisku funkciju Furjē rinda tiek veidota no sinusoidālu svārstību ģeneratoriem, līdzkomponente tiek iegūta ar vienības lēciena funkciju. Rezultātu salīdzināšanai atsevišķs signāls tiek veidots ar *Pulse Train* avotu.

Šajā laboratorijas darbā signālu spektru iegūšanai tiek lietotas ātrās Furjē transformācijas, tādēļ nolašu skaitam ir jābūt vienādam ar divnieka pakāpi. Šeit bija izvēlēta 64 Hz diskretizācijas frekvence un tika ņemtas 256 nolases, tādēļ modelēšanas ilgums ir vienāds ar 3.984 sekundēm, kas ļauj apskatīt gandrīz četrus 1 Hz taisnstūra signāla periodus.

Signālu spektru iegūšanai tika izmantota *Sink Calculator* funkcija *Spectrum – |FFT|*:



Att. 9. Signālu laika diagrammas un spektri

Salīdzinot modelēšanas rezultātus ar aprēķiniem var redzēt, ka modelēšanas rezultātā iegūtās vērtības ir divreiz lielākas:

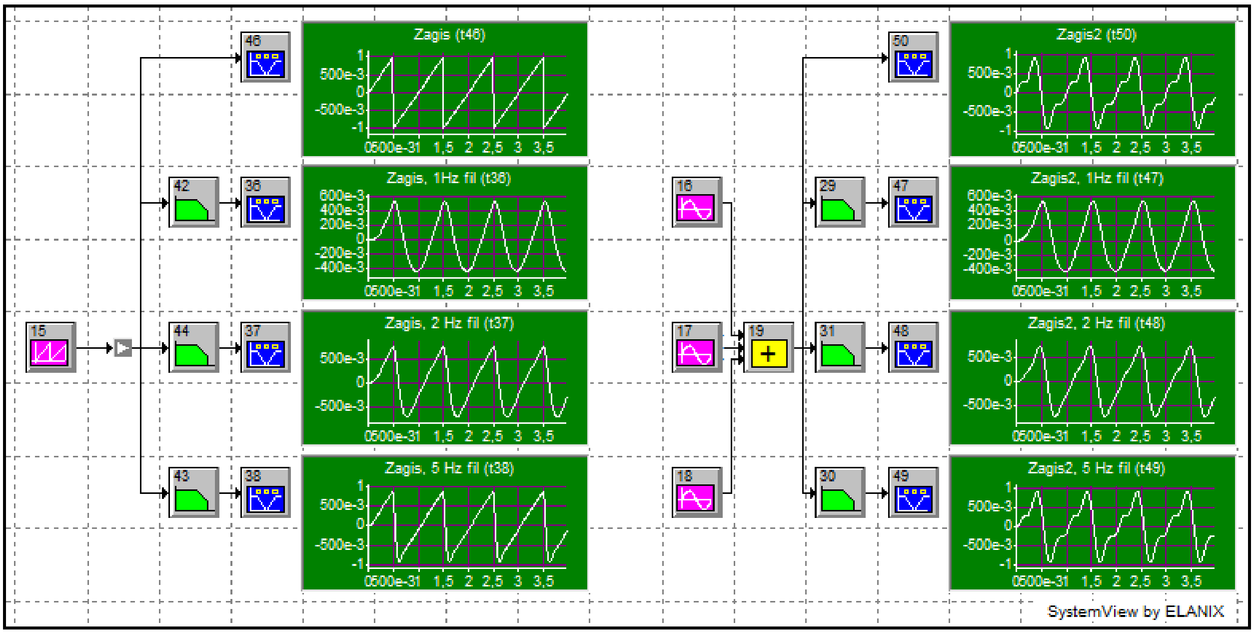
Harmonika	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Aprēķini	0.666	0.551	0.276	0	-0.138	-0.11
SystemView	1.313	1.093	0.562	0.021	0.266	0.233

Tabula 1. Modelēšanas rezultātu un aprēķinu salīdzinājums

Nelielas neprecizitātes ienes taisnstūra signāla auguma un krituma laiki, kurus varētu samazināt palielinot diskretizācijas frekvenci.

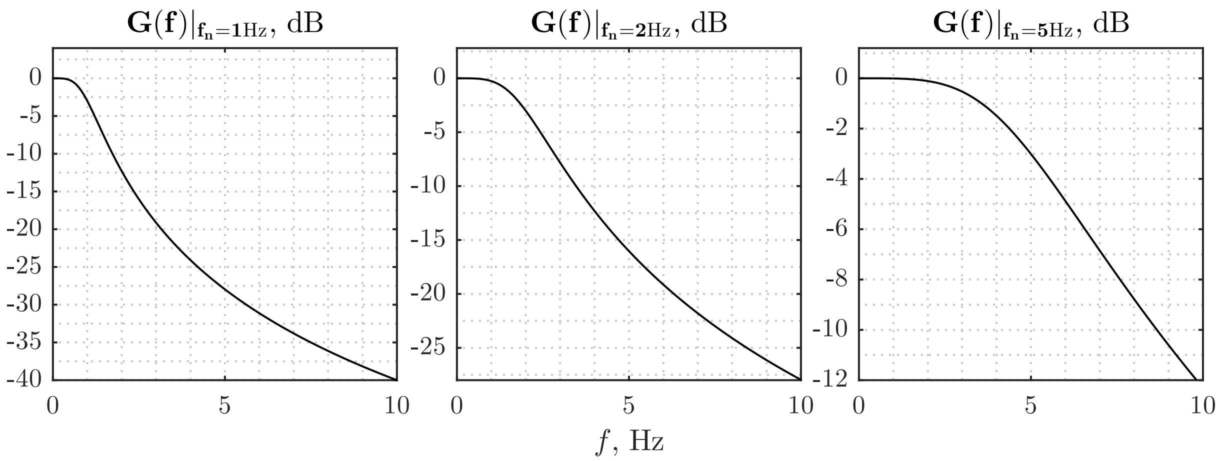
2. Zāgveida signāls

Zāģveida signāli tika iegūti un izfiltrēti ar sekojošu sistēmu:

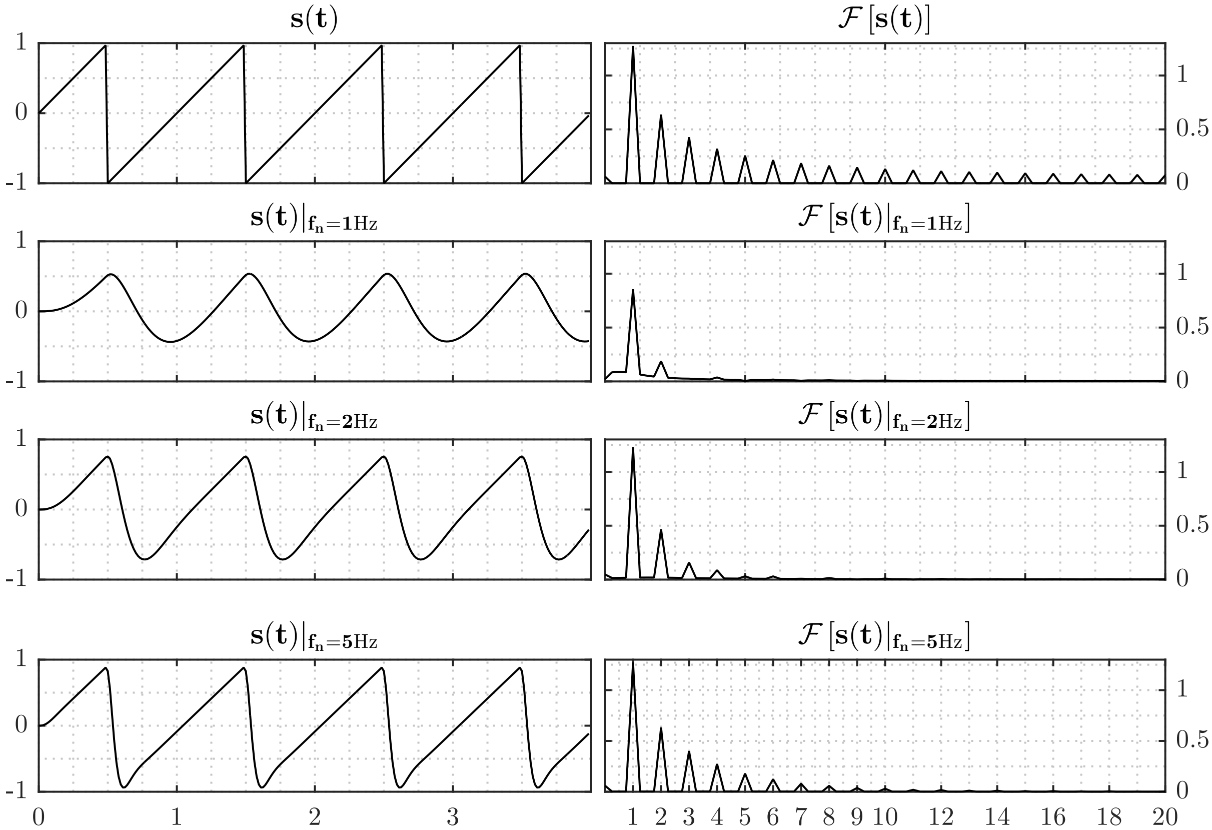


Att. 10. SystemView sistēma signāla veidošanai

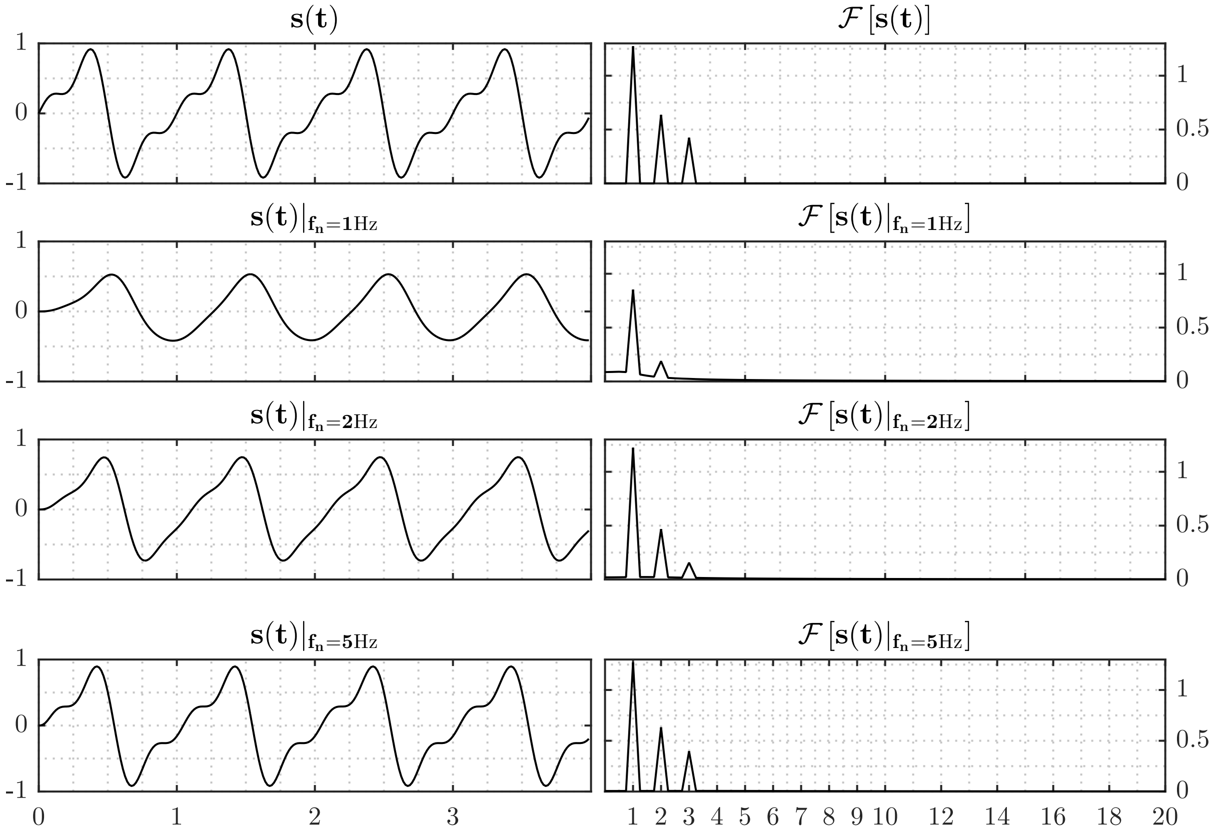
Zāģveida signāls un tā pirmo triju harmoniku summa tika laizti caur trim dažādiem Batervorta filtriem ar sekojošām amplitūdas frekvenču raksturlīknēm:



Att. 11. Batervorta filtru amplitūdas frekvenču raksturlīknes



Att. 12. Signālu laika diagrammas un spektri



Att. 13. Signālu laika diagrammas un spektri zāģveida signāla pirmo triju harmoniku summai

Secinājumi

Šajā laboratorijas darbā tika izpētītas periodisku signālu Furjē rindas. Izvērse Furjē rindā dod iespēju aprakstīt periodiskus signālus kā ortogonālu funkciju summu, visbiežāk tiek izmantotas trigonometriskas funkcijas un kompleksās eksponentfunkcijas. Izvērse trigonometrisku funkciju rindā ļauj vienkāršot dažas matemātiskās operācijas ar signāliem (piemēram diferencēšanu un integrēšanu), kā arī iegūt signāla spektru – tā sastāvdaļu parametru kopu, kas raksturo to frekvenču apgabalā.

Furjē rindas var izmantot arī signālu veidošanai, tādā veidā jebkuru periodisku signālu var izveidot, saslēdzot vairākus harmonisku svārstību ģeneratorus. Tas, cik tuvu ģenerētais signāls atbilst nepieciešamajam ir atkarīgs no rindas elementu skaita. Vislābāko rezultātu sasniegšanai ir nepieciešama bezgalīgi gara funkciju rinda, kas nodrošina bezgalīgi mazu vidējo kvadrātisko kļūdu, tomēr parasti pietiekamu precizitāti var sasniegt arī ar ierobežota garuma rindu. Bezgalīgi maza vidējā kvadrātiskā kļūda tomēr nenozīmē, ka rindas summa būs pilnīgi identiska nepieciešamajam signālam: piemēram, izmantojot trigonometrisku funkciju rindu lai aprakstīt signālu ar lēcienveida izmaiņām lēcienu momentos parādās uzviļņojumi, kuru platums samazinās ar rindas elementu skaita palielināšanu.

Laboratorijas darbā tika izmantoti Barervorta filtri, kuru īpašība ir plata amplitūdas frekvenču raksturlīkne caurlaides joslas robežās. Šāda veida filtri laiž cauri tās harmonikas, kuru frekvence atrodas caurlaides joslas robešās, un nelaiž pārējās. Šeit caur zemfrekvences filtriem tika laizts zāģveida signāls un tā pirmo triju harmoniku summa. Abos gadījumos izejas signāli bija gandrīz vienādi tad, kad filtra nogriešanas frekvence nepārsniedza trešās harmonikas frekvenci.