Rīgas Tehniskā Universitāte
Elektronikas un telekomunikāciju fakultāte
Radioelektronikas institūts
Elektronikas pamatu katedra

Signālu teorijas pamati

Laboratorijas darbs Nr. 2.

Iepazīšanās ar periodisku signālu izvērsi trigonometrisku funkciju Furjē rindā

Kristaps Kaža REBMO 1
Stud. apl. Nr. 151REB070

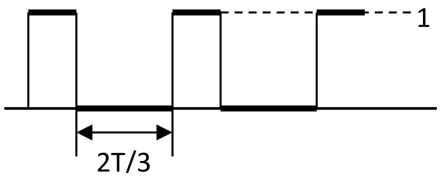
RĪGA
2017

Darba mērķis:

Iepazīties ar trigonometrisku funkciju Furjē rindas dažiem pielietojumiem un īpašībām: rindas koeficientu noteikšana, amplitūdu spektrs, Beseļa nevienādība, periodisku signālu sintēze, izmantojot trigonometriskas funkcijas.

Uzdevums un darba izpildes kārtība

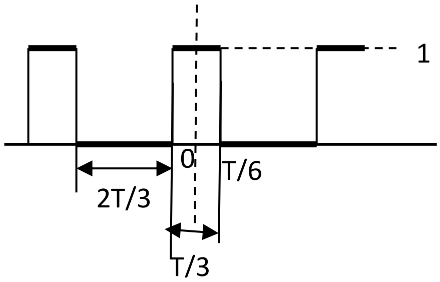
Dots signāls:



Kontinuālus signālus ar ierobežotu vidējo jaudu, kuri ierobežoti laika intervālā t ∈[t0 , t0 + T] var aprakstīt kā trigonometrisku funkciju rindu

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

Tiek pieņemts, ka signāla periods ir 1 sekunde un koordinātu sākums ir tieši pa vidu signālam ar līmeni 1 V, līdz ar to tā ir pāra funkcija, jo s(t)=s(-t) un Furjē rindas bn koeficienti vienādi ar nulli.



Rindas koeficientu aprēķinam izmantoju vispārīgo formulu:

$$\mathrm{dk} = \frac{1}{\mathrm{P}_k} * \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{t0}}^{\mathrm{t0+T}} \mathrm{s(t)} * \varphi\mathrm{k}\,(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

un ievietojot tajā ϕ(t) vietā attiecīgās trigonometriskās funkcijas un to vidējās jaudas:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{a}_0 = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{t0}}^{\mathrm{t0+T}} \mathrm{s(t)dt} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{\frac{-T}{6}}^{\frac{T}{6}} \mathrm{s(t)dt} = \frac{1}{T} * \left(\frac{T}{6} + \frac{T}{6}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Tā ir signāla vidējā vērtība – līdzkomponente. Pārējie rindas locekļi ir aprēķināmi pēc formulas: $a_n = \frac{2}{T}\int_{\mathrm{t0}}^{\mathrm{t0+T}} \mathrm{s(t)} * \cos(\mathrm{n} * \frac{2\pi}{\mathrm{T}}\,\mathrm{t})\mathrm{dt}$

$$a_n = \frac{2}{T} * 2 \int_0^{\frac{T}{6}} \cos\left(\frac{n\,2\,\pi}{T}\,t\right) dt = \frac{4T}{n\,2\,\pi T} \int_0^{\frac{T}{6}} \cos\left(\frac{n2\pi}{T}\,t\right) d\left(\frac{n2\pi}{T}\,t\right) = = \frac{2}{n\,\pi} * \sin(n\,2\,\pi\,t)\Big|_0^{\frac{T}{6}} =$$

$$= \frac{2}{n\,\pi} * \sin\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)$$

Līdzkomponentes un pirmo četru, atšķirīgu no nulles, harmoniku amplitūdas:

Ja n=1 $a_1 = 0.551$

Ja n=2 $a_2 = 0.276$

Ja n=3 $a_3 = 0$

Ja n=4 $a_4 = -0.138$

Ja n=5 $a_5 = -0.110$

Furjē rindā saliekot: $S(t) = \frac{1}{3} + 0{,}551 * \cos\frac{2\pi}{T}\,t + 0{,}276 * \cos\frac{2*2\pi}{T}\,t - 0{,}138 * \cos\frac{4*2\pi}{T}\,t - 0{,}110 * \cos\frac{5*2\pi}{T}t$

Tagad pēc formulas aprēķinam kompleksu eksponentfunkciju Furjē rindu:

$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} C_n\, e^{\frac{jn2\pi}{T}t}$,kur $\frac{1}{2} C_n = \frac{1}{T} \int_{t0}^{t0+T} s(t) * e^{-\frac{jn2\pi}{T}t}\, dt$

$$\frac{1}{2} C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{6}}^{\frac{T}{6}} 1 * e^{-\frac{jn2\pi}{T}t}\, dt = -\frac{1}{2n\pi j}\left(e^{-\frac{jn2\pi}{6}} - e^{\frac{jn2\pi}{6}}\right)$$

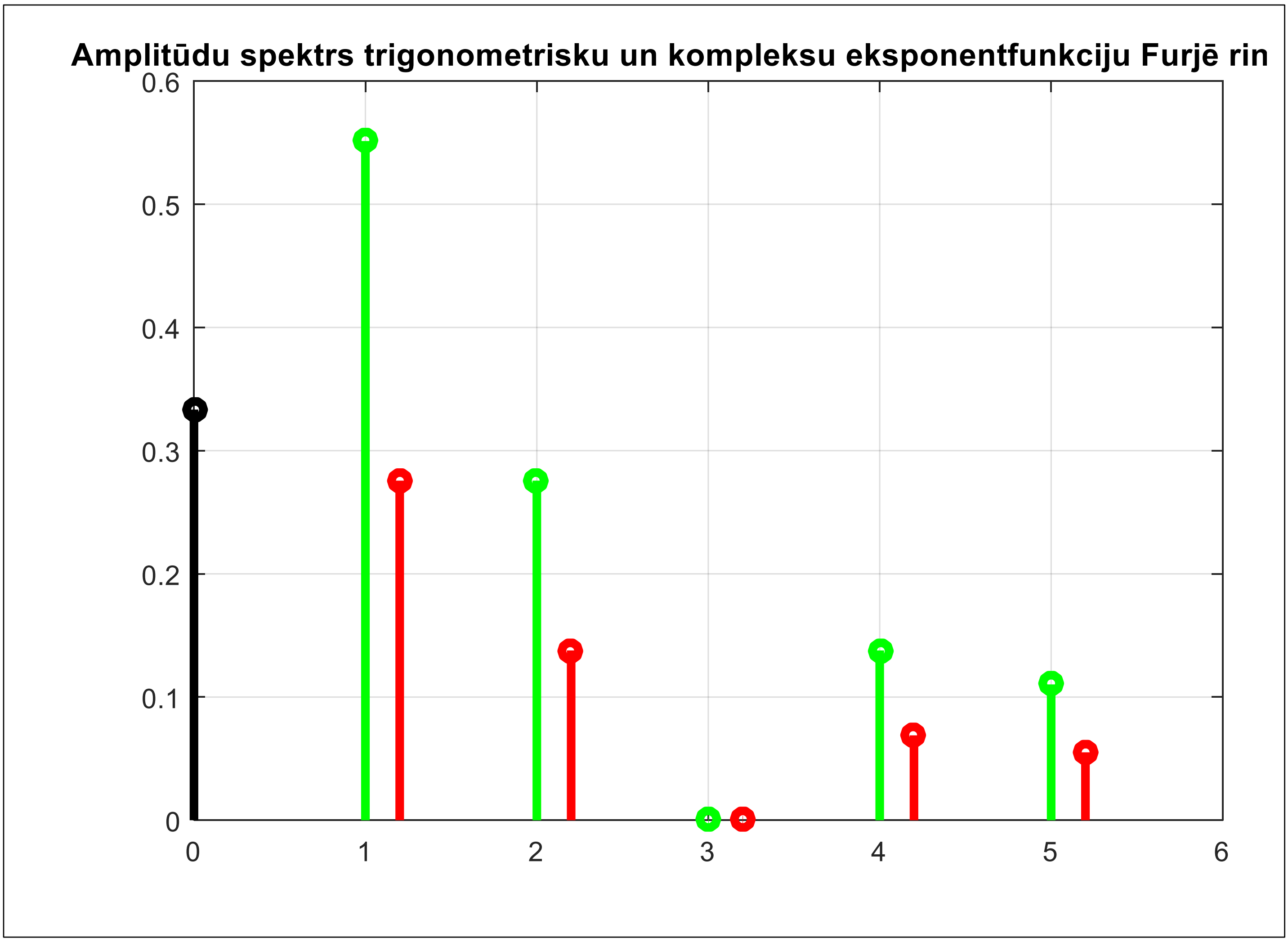
Pielietojot programmu Matlab tika iegūti koeficienti, kuri ir Furjē rindas kosinusi:

```
stem(0,1/3,'o','LineWidth',3,'color','black')
title('Amplitūdu spektrs trigonometrisku un kompleksu
eksponentfunkciju Furjē rindām.');
hold on; grid on;
for n=1:7;
 n
 S=(1/(pi*n))*2*sin(pi*n/3)
 stem(n,abs(S),'o','LineWidth',3,'color','Green')
 c=-1/(2*pi*n*1i)*(exp(-1i*2*pi*1/6*n)-exp(1i*2*pi*1/6*n))
 stem(n+0.2,abs(c),'o','LineWidth',3,'color','Red')
 c*2
end;
```

RĪGA
2017

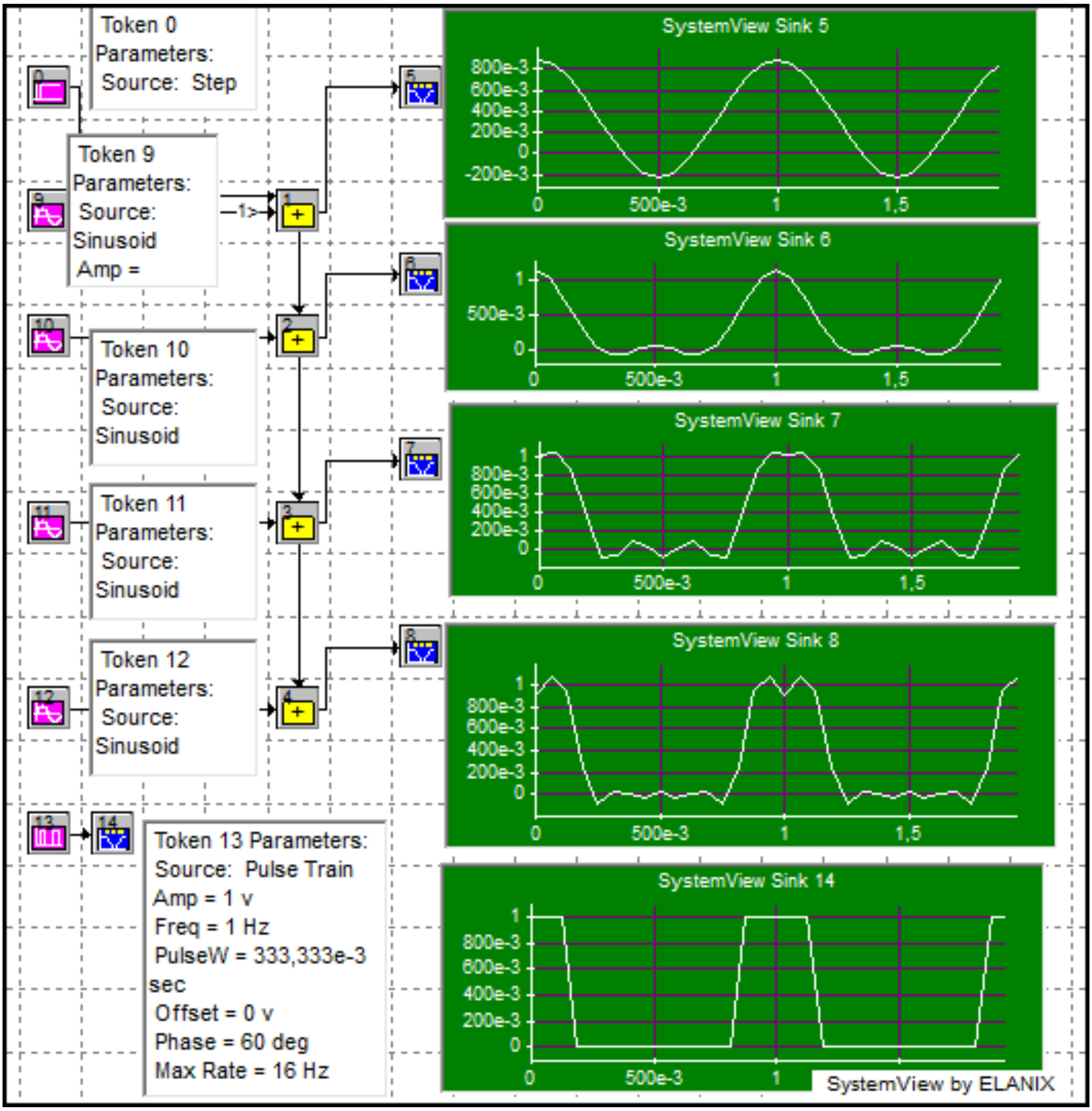
Rezultātu apkopojums tabulā:

n	a_n	C_n	$2 * C_n$
1	0.551	0.2757	0.5513
2	0.276	0.1378	0.2757
3	0	1.2994e-17	2.5988e-17
4	-0.138	-0.0689	-0.1378
5	-0.110	-0.0551	-0.1103



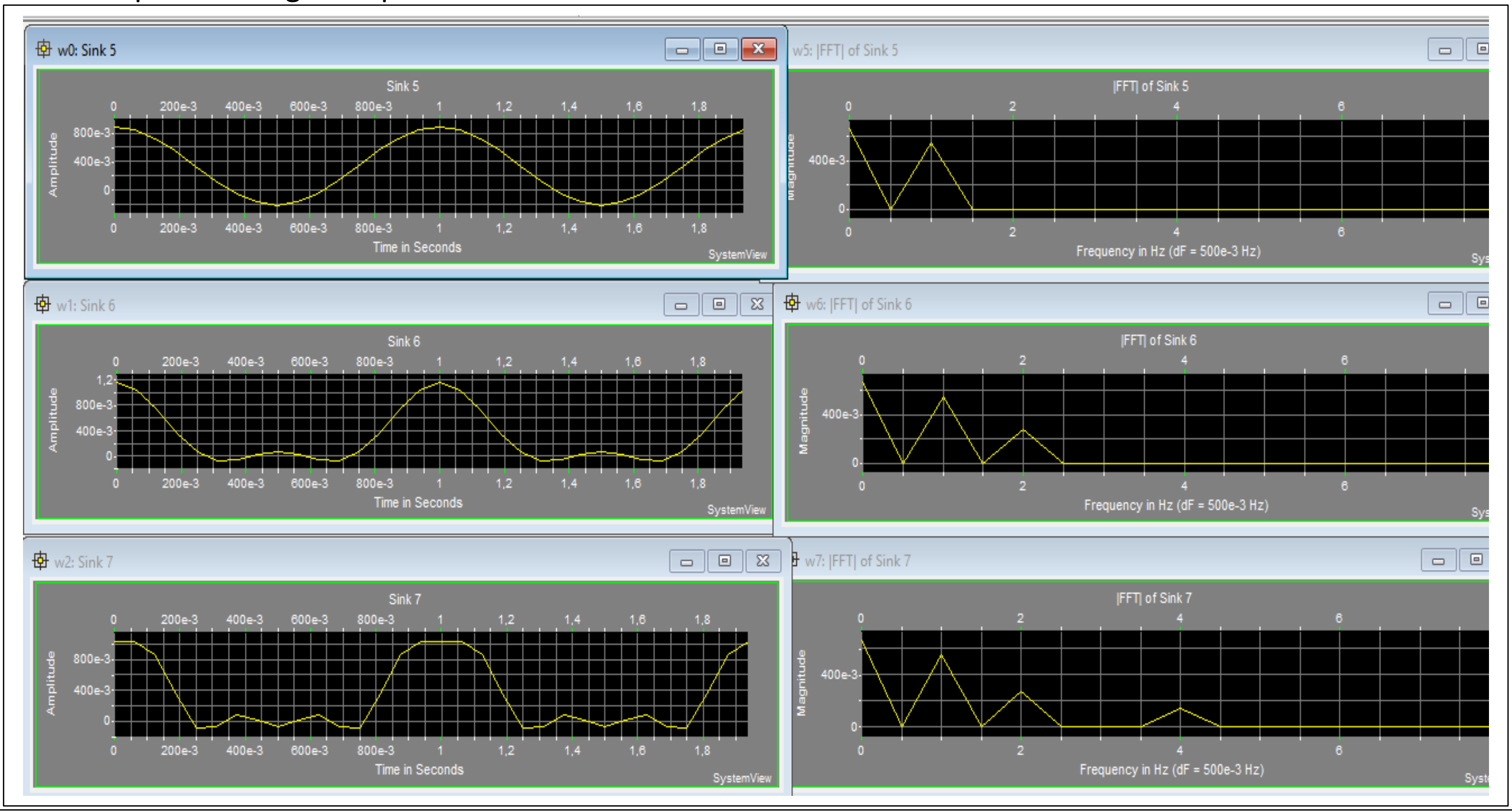
RĪGA
2017

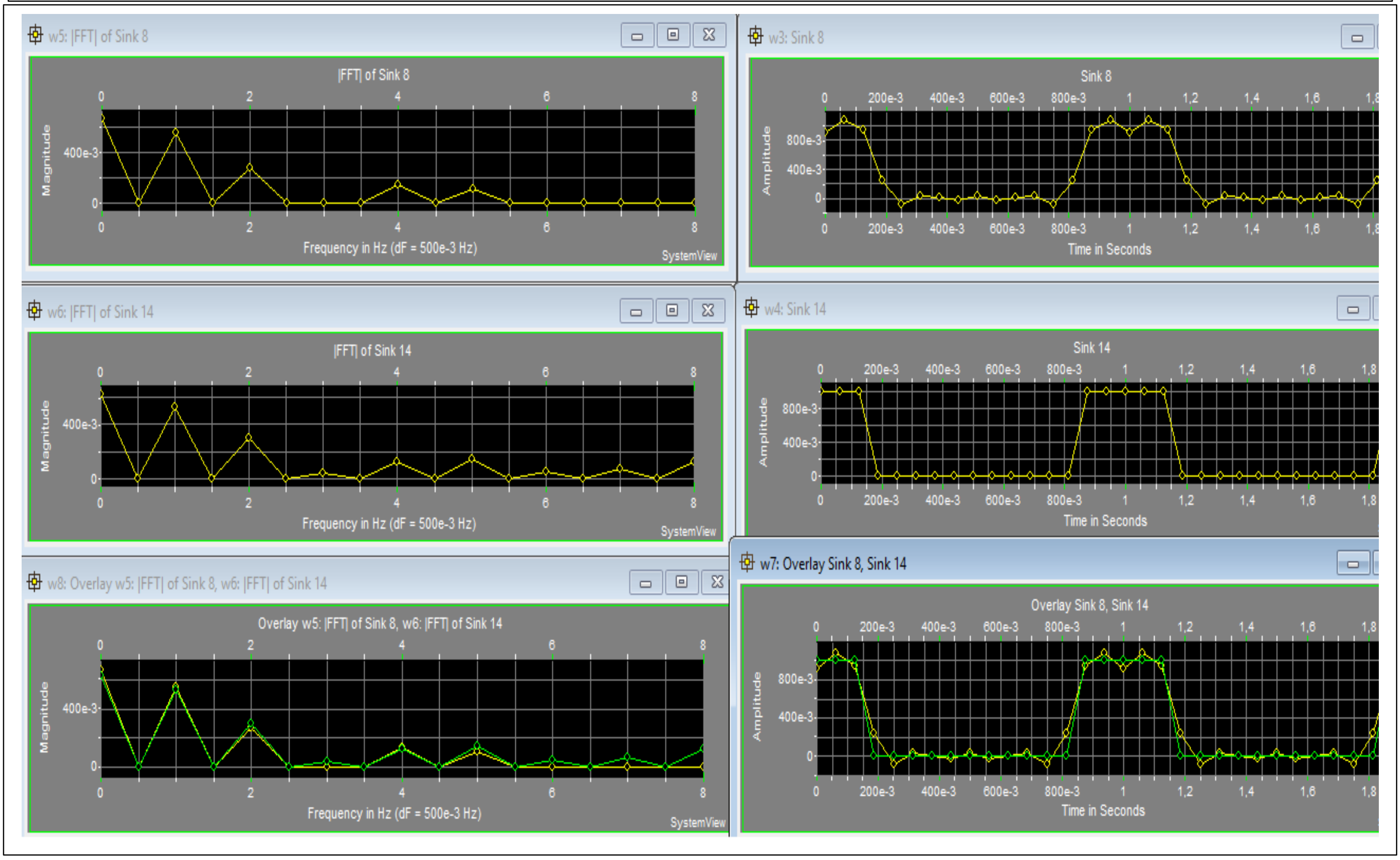
Ar System View izveidoju shēmu (galvenie parametri ir redzami attēlā):



RĪGA
2017

Izmantojot Sink Calulator režīmu Spectrum – /FFT/ ieguvu novēroto signālu amplitūdu spektrus - signāla spektrālā blīvuma absolūtās vērtības.





RĪGA
2017

Amplitūdu spektra salīdzinājums ar mājās veiktiem aprēķiniem.

Harmonikas numurs	System view dati		Aprēķinātā amplitūda	Atšķirība no aprēķinātās amplitūdas
	1 sec			
	Hz	Amplitūda		
0	0,000	0,666	0,333	0,333
1	0,985	0,551	0,551	0
2	1,969	0,276	0,276	0
3	2,954	0	0	0
4	3,938	0,138	0,138	0
5	4,923	0,110	0,110	0

Secinājumi

Šajā laboratorijas darbā mēs iepazināmies ar to kā parastu signālu iespējams izvērst ar trigonometrisku funkciju Furjē rindā. Šādā veidā ir iespējams aprakstīt jeb kuru signālu. Mums mājas darbā bija dots taisnstūra veida signāls. Mēs to pēc formulas izvērsām Furjē rindā, aprēķinot harmonikas un funkcijas līdzkomponenti. Tā kā mūsu signālu var aprakstīt kā pāra funkciju s(t)=s(-t), lai iegūtu 5 pirmās harmonikas, mums jāintegrē tikai signāla reizinājums ar cos(nt2pi/T). Iegūtās harmonikas saskaitot un attēlojot grafiski ir redzams, ka jo lielāks harmoniku skaits tiek saskaitīts – šajā gadījumā 5, jo iegūtais grafiks aiz vien vairāk līdzinās reālajam signālam. Tā kā harmonikas ir bezgalīgi daudz, tad lai precīzāks būtu grafiks ir jāņem pēc iespējas vairāk harmoniku summas.

Savukārt apskatot amplitūdu spektru redzams, ka pirmajai harmonikai ir vislielākā amplitūda, kā rezultātā tieši šī harmonika visvairāk ietekmē signāla formu. Visas pārējās harmonikas paliek aizvien mazākas un mazākas un signāla forma izmainās daudz mazāk kā sākumā.

Kā arī var novērot, ka no pirmās līdz piektajai harmonikai eksperimentāli iegūto harmoniku amplitūdas sakrīt ar mājasdarbā iegūtajām.

RĪGA
2017