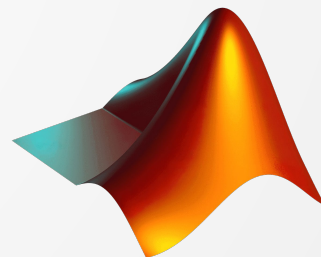




UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ

Métodos Numéricos para Construção de Superfícies 3D

Alan dos Reis Lima, Cizé Lucas Gomes Lima, Pedro Victor Fontenele Felix



Sumário

1. Introdução

- a. Ideia geral
- b. Amostragem de Funções
- c. Geração de Superfícies 3D

2. Técnicas de amostragem de Funções

- a. Amostragem Uniforme de Grade
- b. Amostragem Adaptativa
- c. Amostragem por Hipercubo Latino

3. Técnicas de Geração de Superfícies 3D

- a. Superfícies com Grade de Triângulos
- b. Superfícies de Bézier

4. Referências



Introdução

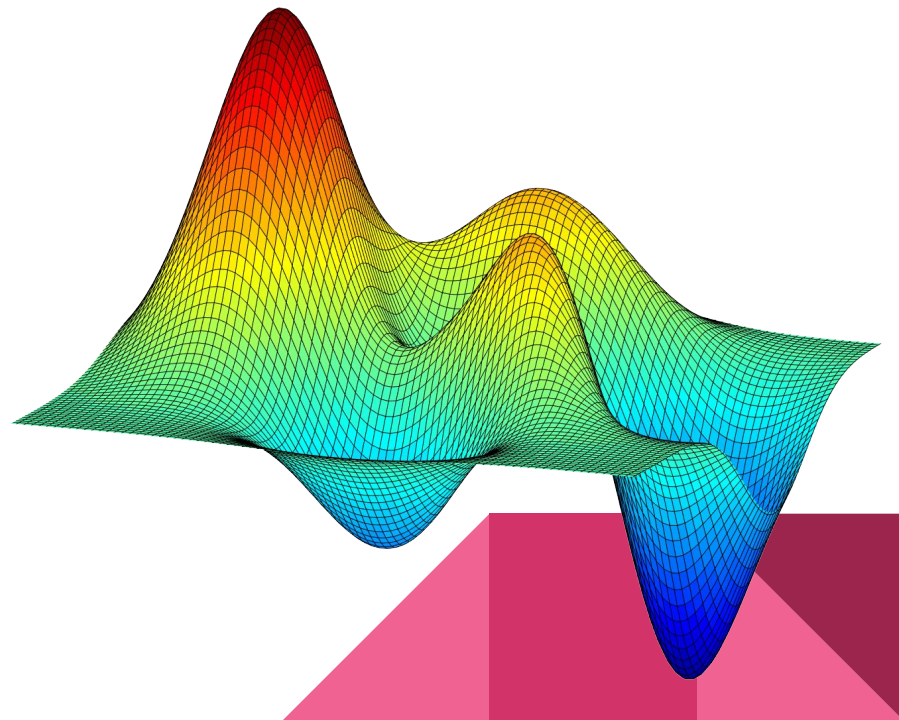
Ideia Geral

Uma superfície é uma forma geométrica do **espaço \mathbb{R}^3** com **comprimento e largura** mas sem espessura, **descrita por um conjunto contínuo de pontos**.

Funções de 2 variáveis do tipo **$z = f(x,y)$** são visualizadas através de superfícies

Como são geradas?

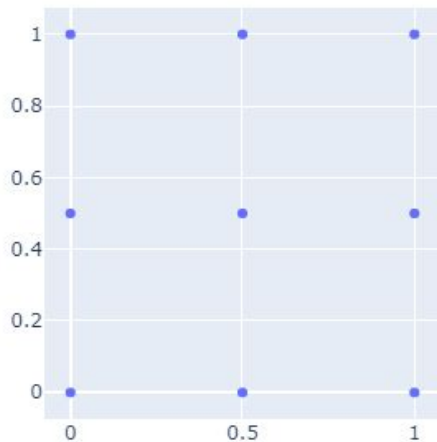
- 1) A **função é amostrada** em determinados pontos para obter seu **comportamento**;
- 2) Esses **pontos de amostragem são interpolados** para obtermos a **forma completa da superfície**.



Técnicas de amostragem de Funções

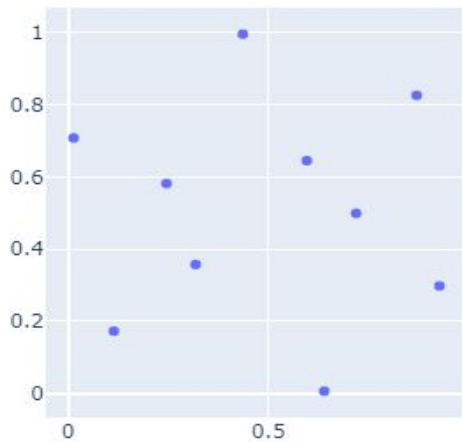
1) Amostragem Uniforme de Grade

Pontos uniformemente espaçados na direção x e y (ou u e v) são gerados



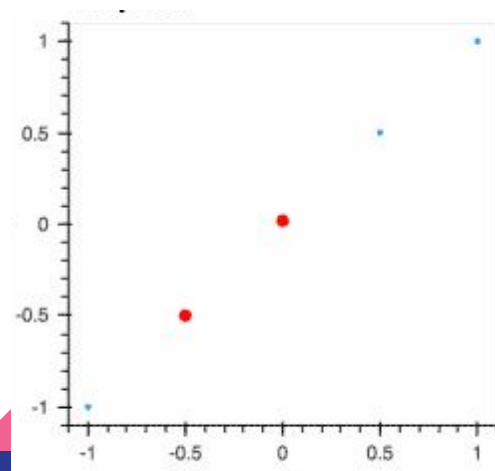
2) Amostragem por Hipercubo Latino

O Domínio da função é dividido em intervalos iguais e um ponto é aleatoriamente escolhido dentro de cada um deles



3) Amostragem Adaptativa

Os pontos são distribuídos em maior quantidade onde os valores da função mudam com maior rapidez



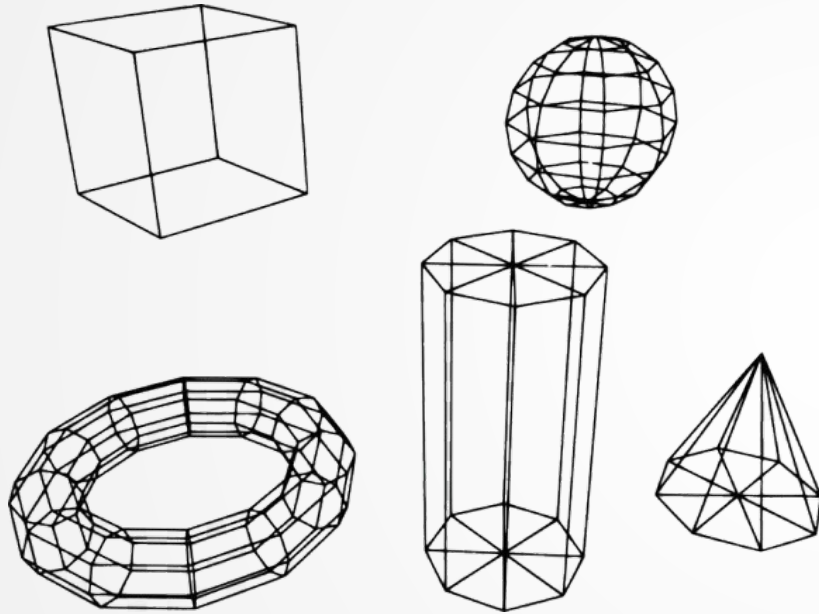
Malhas de Triângulos

Malhas de Triângulos (Mesh Triangulation)

As malhas de triângulos são estudadas por suas aplicações na computação gráfica. São uma das representações de dados espaciais mais utilizadas, pois possibilitam a manipulação e visualização de superfícies de alta complexidade, além de apresentarem diversas vantagens, como suporte direto em software e hardware e maior velocidade e simplicidade. A transformação de conjuntos de dados espaciais distintos, entre eles modelos de terrenos, conjuntos de pontos tridimensionais e dados volumétricos, em malhas triangulares é amplamente estudado.

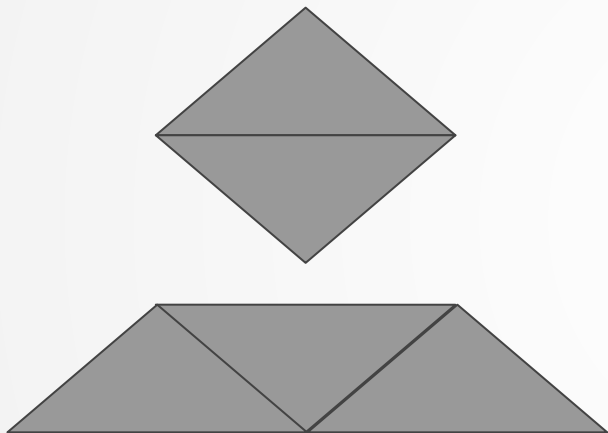


Malhas poligonais



Malhas poligonais são amplamente utilizadas para modelos geométricos, devido ao fato de serem flexíveis e suportadas pela maioria dos pacotes de modelagem e visualização. Uma malha poligonal é uma superfície ou objeto tridimensional representado por meio de um conjunto de polígonos

Triangulação

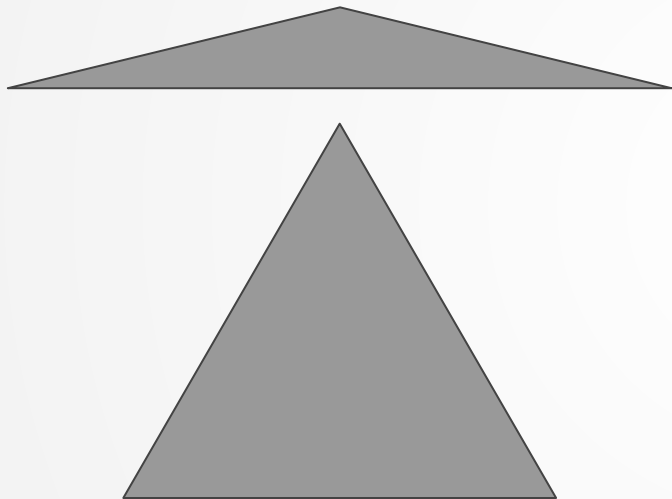


É uma decomposição de uma superfície em triângulos, e tem as seguintes propriedades:

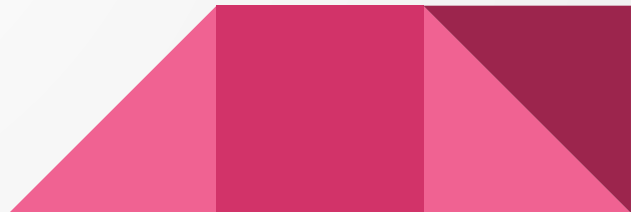
1. Qualquer aresta é aresta de exatamente dois triângulos;
2. Qualquer vértice, V , é o vértice de pelo menos três triângulos, e todos os triângulos tendo V como vértice se dispõem em um ciclo em seu redor;



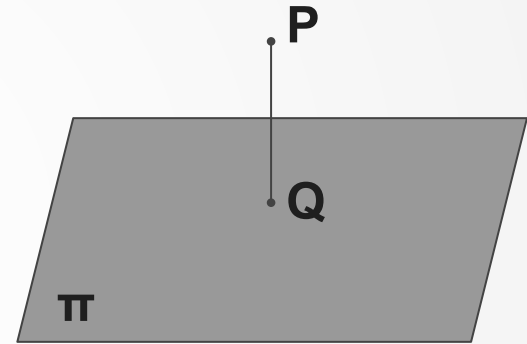
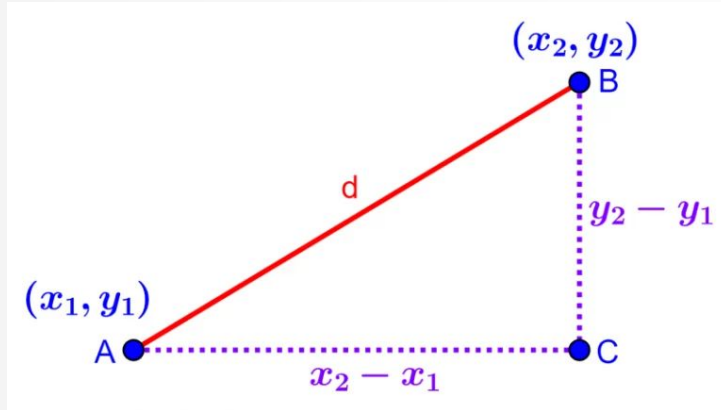
Qualidade dos Triângulos



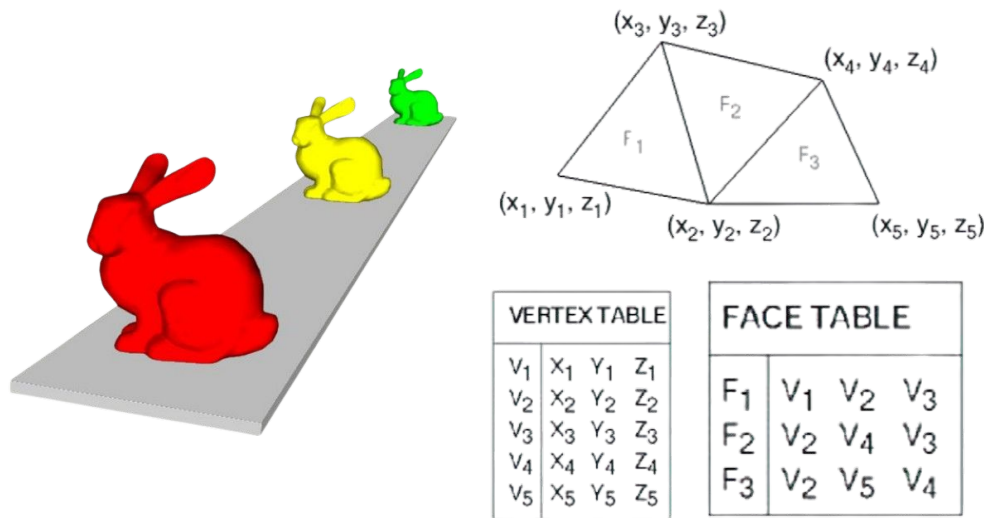
A qualidade dos triângulos é analisada medindo o menor ângulo (entre 0° e 60°) de cada triângulo que compõe a malha. Os triângulos com essa característica são melhores porque são menos propensos a erros numéricos, que podem ser causados pela dificuldade em medir um triângulo com altura muito pequena



Distância entre dois pontos e Distância de ponto a plano



Como armazenar a descrição de um objeto em termos das faces que descrevem sua superfície?



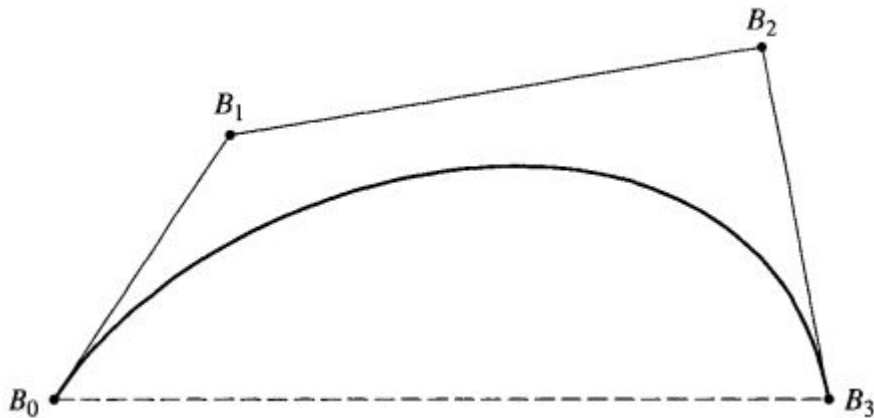
Softwares que implementam o sistema de Malha de Triângulos (Mesh Triangulation)

- Blender: Ele utiliza malhas de triângulos para representar superfícies 3D em todos os aspectos do fluxo de trabalho, desde a modelagem até a renderização.
- Cinema 4D: Cinema 4D fornece ferramentas robustas para criar e gerenciar malhas trianguladas, incluindo a triangulação de polígonos e a geração de malhas de alta resolução.
- Unity: Unity utiliza malhas trianguladas para renderização e física dos modelos 3D no ambiente do jogo.
- Unreal Engine: Unreal Engine utiliza malhas trianguladas para renderização e física dos modelos 3D.
- MeshLab: MeshLab oferece ferramentas para a triangulação de malhas, simplificação e reparação de geometria.

Superfície de Bézier

Curvas de Bézier

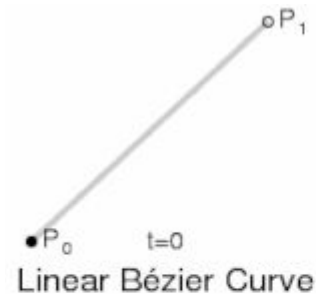
Uma curva de Bézier é definida por um conjunto de pontos de controle. A posição da curva é uma combinação ponderada desses pontos, o que dá a ela uma forma suave e flexível.



Tipos de Curvas

Curva de Bézier Linear

$$\mathbf{B}(t) = (1 - t)\mathbf{B}_0 + t\mathbf{B}_1, t \in [0, 1]$$



Curva de Bézier Quadrática

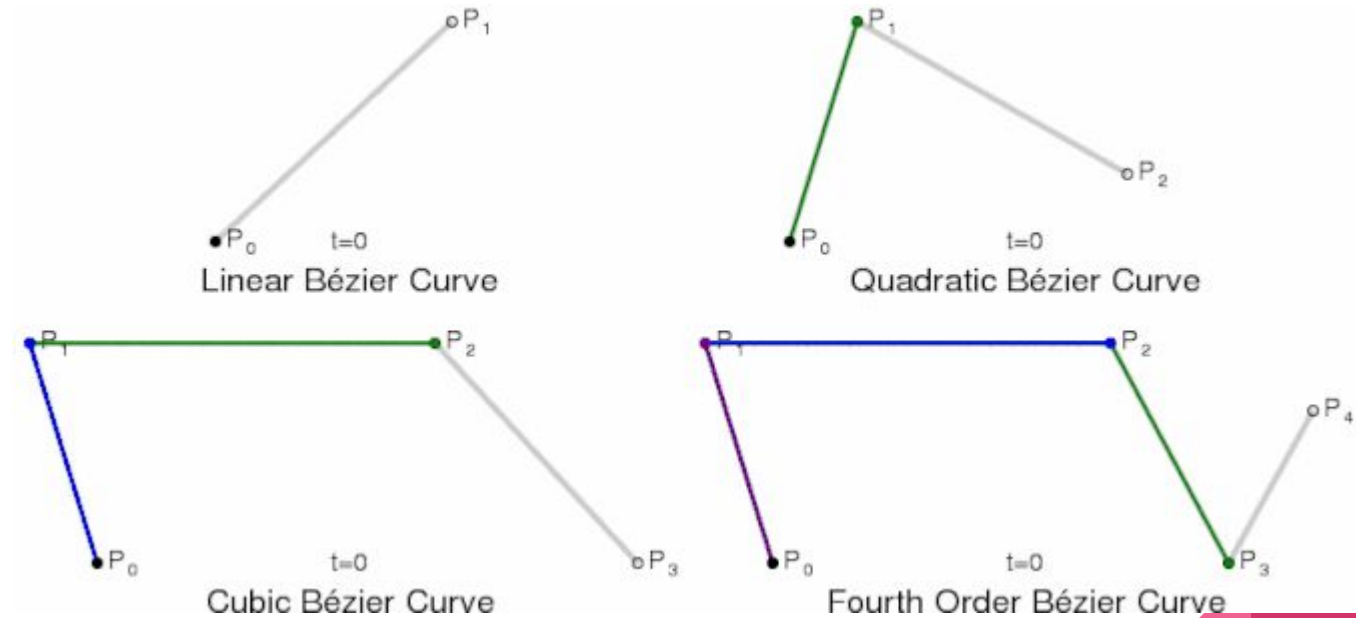
$$\mathbf{B}(t) = (1 - t)^2\mathbf{B}_0 + 2t(1 - t)\mathbf{B}_1 + t^2\mathbf{B}_2, t \in [0, 1].$$

Curva de Bézier Cúbica

$$\mathbf{B}(t) = (1 - t)^3\mathbf{B}_0 + 3t(1 - t)^2\mathbf{B}_1 + 3t^2(1 - t)\mathbf{B}_2 + t^3\mathbf{B}_3, t \in [0, 1].$$



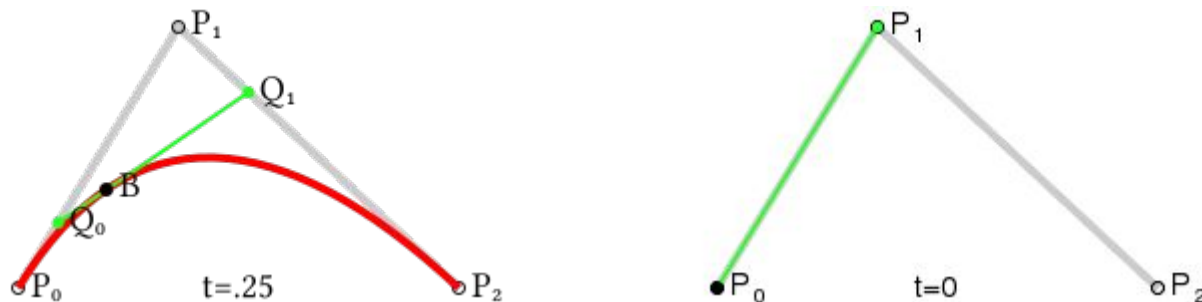
Tipos de Curvas



Exemplo de como se forma:

Para curvas de Bézier quadráticas, pode-se construir pontos intermediários Q_0 e Q_1 tais que, conforme t varia de 0 a 1:

- O ponto $Q_0(t)$ varia de P_0 a P_1 e descreve uma curva de Bézier linear.
- O ponto $Q_1(t)$ varia de P_1 a P_2 e descreve uma curva de Bézier linear.
- O ponto $B(t)$ é interpolado linearmente entre $Q_0(t)$ a $Q_1(t)$ e descreve uma curva de Bézier quadrática.



Definição Explícita

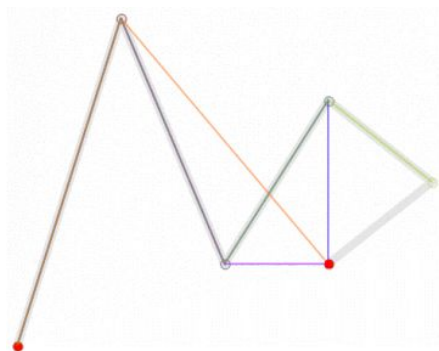
$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i, \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad 0! \equiv 1$$

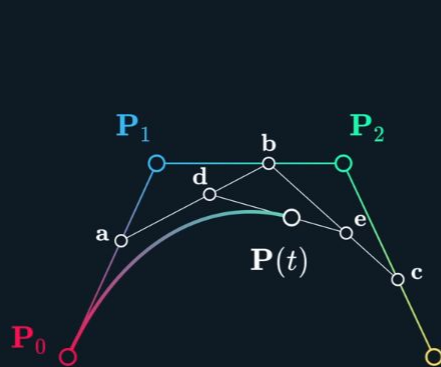
$$= (1-t)^n \mathbf{P}_0 + \binom{n}{1} (1-t)^{n-1} t \mathbf{P}_1 + \cdots + \binom{n}{n-1} (1-t) t^{n-1} \mathbf{P}_{n-1} + t^n \mathbf{P}_n, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Para $n = 5$, por exemplo:

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^5 \mathbf{P}_0 + 5t(1-t)^4 \mathbf{P}_1 + 10t^2(1-t)^3 \mathbf{P}_2 + 10t^3(1-t)^2 \mathbf{P}_3 + 5t^4(1-t) \mathbf{P}_4 + t^5 \mathbf{P}_5, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

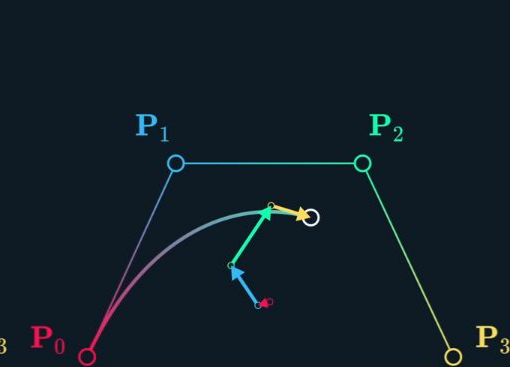
$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & & & \\ & 1 & & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$





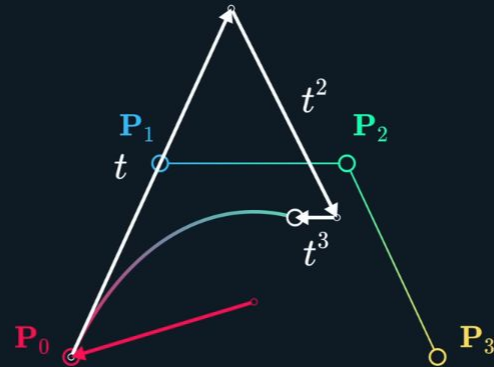
DeCasteljau

$a = \text{lerp}(P_0, P_1, t)$
 $b = \text{lerp}(P_1, P_2, t)$
 $c = \text{lerp}(P_2, P_3, t)$
 $d = \text{lerp}(a, b, t)$
 $e = \text{lerp}(b, c, t)$
 $P = \text{lerp}(d, e, t)$



Bernstein

$P = P_0(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) +$
 $P_1(3t^3 - 6t^2 + 3t) +$
 $P_2(-3t^3 + 3t^2) +$
 $P_3(t^3)$



Polynomial Coefficients

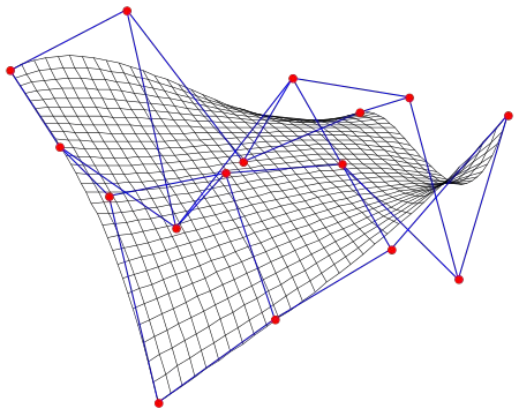
$P = P_0 +$
 $t(-3P_0 + 3P_1) +$
 $t^2(3P_0 - 6P_1 + 3P_2) +$
 $t^3(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$

Matrix form

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Superfícies de Bézier


Uma superfície de Bézier é definida por um conjunto de pontos de controle. Semelhante à interpolação em muitos aspectos, uma diferença fundamental é que a superfície não passa, em geral, pelos pontos de controle centrais; em vez disso, ela é "esticada" em direção a eles como se cada um fosse uma força atrativa.



Definição Explícita (Curva de Bézier)

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (0)^0 \equiv 1$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad 0! \equiv 1$$


Definição Explícita (Superfícies de Bézier)

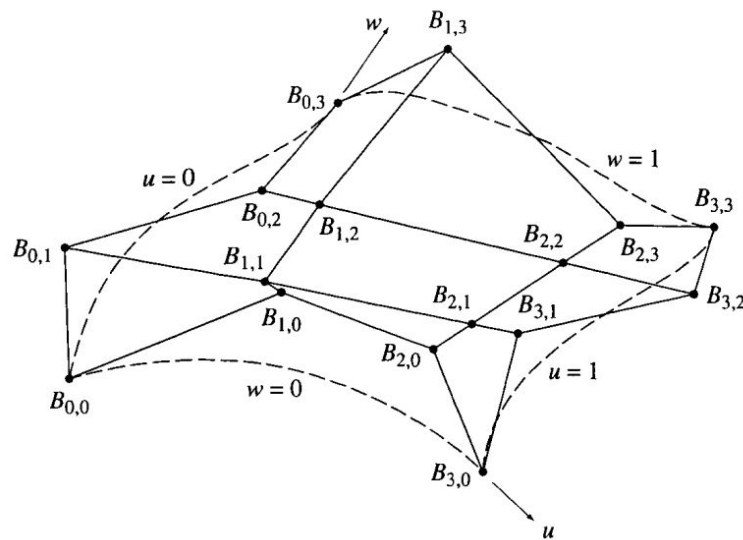
$$Q(u, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{n,i}(u) K_{m,j}(w)$$

$$J_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad (0)^0 \equiv 1$$

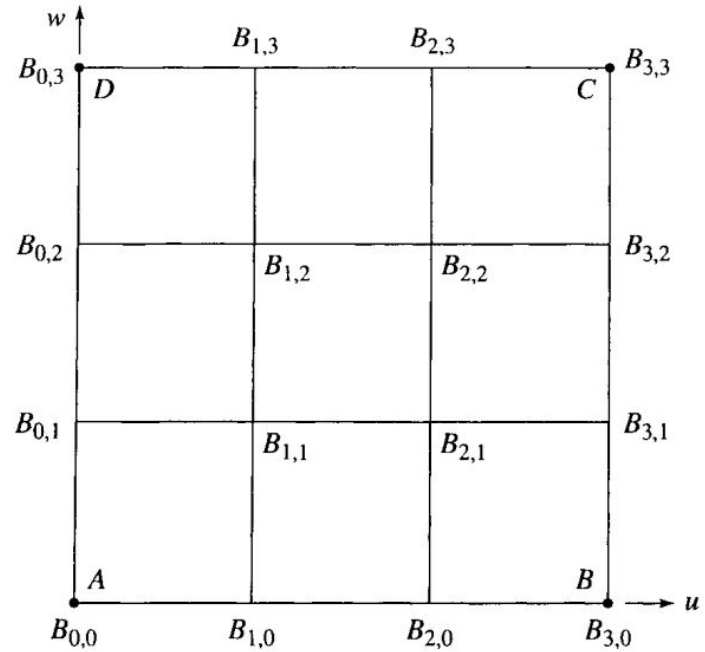
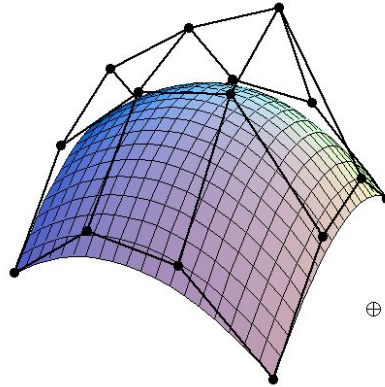
$$K_{m,j}(w) = \binom{m}{j} w^j (1-w)^{m-j}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad 0! \equiv 1$$

$$\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!}$$



A forma e suavidade de uma superfície de Bézier podem ser manipuladas ajustando os pontos de controle que influenciam os vetores tangentes e de torção, sem precisar de conhecimento matemático avançado sobre vetores.



Representação Matricial

$$Q(u, w) = [U][N][B][M]^T[W]$$

$$[U] = [u^n \quad u^{n-1} \quad \dots \quad 1]$$

$$[W] = [w^m \quad w^{m-1} \quad \dots \quad 1]^T$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{0,0} & \dots & B_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,0} & \dots & B_{n,m} \end{bmatrix}$$



Representação Matricial (Exemplo)

Para o caso específico de uma superfície Bézier bicúbica 4 x 4:

$$Q(u, w) = [u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$
$$\begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,0} & B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^3 \\ w^2 \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Implementação

Repositório GitHub:

The screenshot shows a GitHub repository interface. At the top, the repository name 'Seminario-Construcao-Superficies3D' is displayed as 'Public'. Navigation buttons include 'Pin', 'Unwatch' (1), 'Fork' (0), and 'Star' (0). Below this, a bar shows 'main' branch, '1 Branch', and '0 Tags'. A search bar 'Go to file' and 'Add file' button are present. The file list includes: 'Bezier' (README updated), '._pycache_' (first commit), 'triangulacaoDePontos' (README updated), '(The Morgan Kaufmann Series in Computer Gr...' (Plotting of functions via Bezier surfaces finalized), '.gitignore' (README updated), and 'README.md' (README updated). The 'README' file is selected, showing the title 'Métodos Numéricos para construção de superfícies 3D'. The content describes Python scripts used in a seminar at UFC campus Sobral on 17/09/2024. It lists techniques: Uniform Grid Sampling, Triangulated Surface Plots, and Bézier Surface. The right sidebar shows repository statistics: 'About' (Methods for 3D surface construction), 'Releases' (No releases published), 'Packages' (No packages published), 'Languages' (Python 100.0%), and 'Suggested workflows' (Pylint).

Seminario-Construcao-Superficies3D Public

main 1 Branch 0 Tags

Go to file Add file Code

CizeLucas README atualizado e estrutura dos arquivos alterados 80e913d · now 3 Commits

File	Description	Time
Bezier	README atualizado e estrutura dos arquivos alterados	now
._pycache_	first commit	2 days ago
triangulacaoDePontos	README atualizado e estrutura dos arquivos alterados	now
(The Morgan Kaufmann Series in Computer Gr...	Plotagem de funcoes via Superficies Bezier finalizada	21 minutes ago
.gitignore	README atualizado e estrutura dos arquivos alterados	now
README.md	README atualizado e estrutura dos arquivos alterados	now

README

Métodos Numéricos para construção de superfícies 3D

Scripts Python utilizados no seminário de apresentado no dia 17/09/2024 na Universidade Federal do Ceará - UFC campus Sobral

Técnicas utilizadas:

- Amostragem Uniforme de Grade de funções (Uniform Grid Sampling OR Regular Sampling)
- Superfícies por Triangulação (Triangulated Surface Plots)
- Superfícies de Bézier (Bézier Surface)

About Métodos Numéricos para construção de superfícies 3D - Seminário da disciplina de Variáveis Complexas - Prof.: Juan - UFC Sobral

Readme Activity 0 stars 1 watching 0 forks

Releases No releases published [Create a new release](#)

Packages No packages published [Publish your first package](#)

Languages Python 100.0%

Suggested workflows Based on your tech stack

Pylint [Configure](#)



Referências:

Amostragem de Funções:

<https://github.com/bayertom/sampling>

<https://github.com/python-adaptive/adaptive?tab=readme-ov-file>

<https://github.com/sparks-baird/self-driving-lab-demo/blob/main/notebooks/escience/1.0-traditional-doe-vs-bayesian.ipynb>

Superfícies por Triangulação:

<https://www.dpi.inpe.br/gilberto/livro/introd/cap7-mnt.pdf>

https://www.facom.ufu.br/~backes/publi_peq/tcc_esqueleto3D.pdf

https://ubibliorum.ubi.pt/bitstream/10400.6/3632/1/Tese_ASilva%272010.pdf

Bibliotecas utilizadas:

<https://numpy.org/>

<https://matplotlib.org/>



<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.spatial.Delaunay.html>

Curvas de Bézier:

<https://www.youtube.com/watch?v=aVwxzDHniEw>

Superfícies de Bézier:

https://en.wikipedia.org/wiki/Bézier_surface

<https://www.youtube.com/watch?v=0JYGNH3ZKS8>

<https://www.gamedeveloper.com/programming/curved-surfaces-using-b-zier-patches>

Rogers, David F., An introduction to NURBS : with historical perspective / David F. Rogers.

ISBN-13:978-1-55860-669-2 ISBN- 10:1-55860-669-6



Obrigado pela Atenção!