第 3 章课后部分习题参考解答(2)

2.（1）

只需证：$B \to A \vdash \neg A \to \neg B$

只需证：$B \to A \vdash \neg\neg B \to \neg\neg A$（由 $(\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg B)$ 即 A3 可知）

只需证：$B \to A, \neg\neg B \vdash \neg\neg A$

1）$\neg\neg B$　前提
2）$\neg\neg\neg\neg B \to \neg\neg B$ 1）+定理 2

3）$(\neg\neg\neg\neg B \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg\neg\neg B)$ A3

4）$\neg B \to \neg\neg\neg B$ 2）3）rmp

5）$(\neg B \to \neg\neg\neg B) \to (\neg\neg B \to B)$ A3

6）$\neg\neg B \to B$ 4）5）rmp
7）B 1）6）rmp

//此处由 $\neg\neg B$ 演绎 B 的过程也可直接调用定理 4：$\neg\neg B \vdash B$

8）$B \to A$　前提
9）A　　7）8）rmp

10）$\neg\neg\neg A \to \neg A$ 同理 1）至 6）+演绎定理 //$\neg\neg\neg A \vdash \neg A$

11）$(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$ A3

12）$A \to \neg\neg A$　10）11）rmp　//也可以直接调用定理
13）$\neg\neg A$ 9）12）rmp
////////////////////////////////////
（2）

只需证：$A \to B, B \to C, A \vdash C$，显然。

////////////////////////////////////
（3）

只需证：$(A \to B) \to A \vdash A$

1) $\neg A \to (A \to B)$ 定理

2) $(A \to B) \to A$ 前提

3) $\neg A \to A$　 1)2)传递

4) $(\neg A \to A) \to A$ 定理

5) A
////////////////////////////////////

（4）

只需证：$\neg(A \to B), B \vdash A$

1) $B \to (A \to B)$

2) B
3) $A \to B$

4) $\neg(A \to B) \to ((A \to B) \to A)$ 定理

5) $\neg(A \to B)$ 前提

6) A
//////////////////////////////////////
3.(1)

1) $\neg B \to (B \to A)$ 定理 3

2) $\neg A \to (\neg B \to (B \to A))$ 1)+定理 2

3) $(\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to (B \to A))$ 2)+A2+r_{mp}

4) $(\neg A \to (B \to A)) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to A))$ A2

5) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to A))$ 3)4)+定理 7

6) $(\neg A \to A) \to A$ 定理 8

7) $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to A) \to A)$ 6)+定理 2

8) $((\neg A \to B) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to B) \to A)$ 7)+A2+r_{mp}

⑨ $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ 5)8)+定理 7

//即反证法的形式化定理描述//
(2)

1) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ $A3'$

2) $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 1)+定理 6

3) $B \to (\neg A \to B)$ A1

4) $B \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 3)2)+定理 7

5) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ 4)+定理 6

//由于在 PC 中证明定理 6，7 只用到了公理 A1，A2，未使用 A3，故定理 6，7 仍可以在 PC' 中直接调用。//
//////////////////////////
4.
(1)

1） $A \to (B \to C)$ 假设已证定理

2) $B \to (A \to C)$ 1)+定理 6

3） B 假设已证定理

4) $(A \to C)$ 2)3) r_{mp}

///或直接用 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 来证明//

(2)

1) $\Gamma ; \neg A \vdash B$ 假设

2) $\Gamma \vdash \neg A \to B$ 1)演绎定理

3) $\Gamma \vdash \neg A \to \neg B$ 由 $\Gamma ; \neg A \vdash \neg B$ 同理 2)

4) $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ 上面习题已证定理

5) $\Gamma \vdash A$ ②③④ r_{mp} //此题就是我们常用的反证法一般性证明过程。

//////////////////////////////
5.

证明：若 $(\neg A \to B) \to (A \to \neg B)$ 为 PC 的定理，则根据 PC 的可靠性知 $(\neg A \to B) \to (A \to \neg B)$ 应为重言式，而指派 $\alpha(A) = T, \alpha(B) = T$ 使得 $\alpha((\neg A \to B) \to (A \to \neg B)) = F$，矛盾。