第 3 章课后部分参考答案

1.

（11）$\vdash [(A\to B)\to C]\to[(A\to C)\to C]$

1）$\neg C\to(C\to B)$ 定理 3

2）$A\to[\neg C\to(C\to B)]$ 1）定理 2

3）$\neg C\to[A\to(C\to B)]$ 2）定理 6

4）$[A\to(C\to B)]\to[(A\to C)\to(A\to B)]$ A_2

5）$\neg C\to[(A\to C)\to(A\to B)]$ 3）4）定理 7

6）$[(A\to C)\to(A\to B)]\to[\neg(A\to B)\to\neg(A\to C)]$ 定理 12

7）$\neg C\to[\neg(A\to B)\to\neg(A\to C)]$ 5）6）定理 7

8）$[\neg C\to\neg(A\to B)]\to[\neg C\to\neg(A\to C)]$ 7）A_2+r_{mp}

9）$[(A\to B)\to C]\to[\neg C\to\neg(A\to B)]$ 定理 12

10）$[(A\to B)\to C]\to[\neg C\to\neg(A\to C)]$ 9）8）定理 7

11）$[\neg C\to\neg(A\to C)]\to[(A\to C)\to C]$ A3

12）$[(A\to B)\to C]\to[(A\to C)\to C)]$ 10）11）定理 7

//

（12）$\vdash [[(A\to B)\to C]\to D]\to[(B\to D)\to(A\to D)]$

1）$\neg(A\to B)\to[(A\to B)\to C)]$ 定理 3

2）$\{\neg(A\to B)\to[(A\to B)\to C)]\}\to\{\neg[(A\to B)\to C]\to(A\to B)\}$ 定理 13

3）$\neg[(A\to B)\to C]\to(A\to B)$ 1）2）r_{mp}

4）$\neg D\to\{\neg[(A\to B)\to C]\to(A\to B)\}$ 3）定理 2

5）$\{\neg D\to\neg[(A\to B)\to C]\}\to[\neg D\to(A\to B)]$ 4）A_2+r_{mp}

6）$(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ 定理 12

7） $\neg D \to [(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)]$ 6）定理 2

8） $[\neg D \to (A \to B)] \to [\neg D \to (\neg B \to \neg A)]$ 7） $A_2 + r_{mp}$

9） $\{\neg D \to \neg[(A \to B) \to C]\} \to [\neg D \to (\neg B \to \neg A)]$ 5）8）定理 7

10） $\{[(A \to B) \to C] \to D\} \to \{\neg D \to \neg[(A \to B) \to C]\}$ 定理 12

11） $\{[(A \to B) \to C] \to D\} \to \{\neg D \to (\neg B \to \neg A)\}$ 10）9）定理 7

12） $\{\neg D \to (\neg B \to \neg A)\} \to [(\neg D \to \neg B) \to (\neg D \to \neg A)]$ A_2

13） $[(B \to D) \to (\neg D \to \neg B)] \to$

$\{[(\neg D \to \neg B) \to (\neg D \to \neg A)] \to [(B \to D) \to (\neg D \to \neg A)]\}$ 定理 7

14） $[(B \to D) \to (\neg D \to \neg B)]$ 定理 12

15） $[(\neg D \to \neg B) \to (\neg D \to \neg A)] \to$ $[(B \to D) \to (\neg D \to \neg A)]$ 13）14） r_{mp}

16） $[(\neg D \to \neg A) \to (A \to D)]$ A_3

17） $(B \to D) \to [(\neg D \to \neg A) \to (A \to D)]$ 16） 定理 2

18） $[(B \to D) \to (\neg D \to \neg A)] \to [(B \to D) \to (A \to D)]$ 17） $A_2 + r_{mp}$

19） $[(\neg D \to \neg B) \to (\neg D \to \neg A)] \to [(B \to D) \to (A \to D)]$ 15）18） 定理 7

20） $\{\neg D \to (\neg B \to \neg A)\} \to [(B \to D) \to (A \to D)]$ 12）19） 定理 7

21） $[[(A \to B) \to C] \to D] \to [(B \to D) \to (A \to D)]$ 11）20） 定理 7

//

（13） $\vdash (A \to C) \to \{(B \to C) \to [[(A \to B) \to B] \to C]\}$

1） $[\neg A \to (A \to B)] \to \{[(A \to B) \to B] \to (\neg A \to B)\}$ 定理 7

2） $\neg A \to (A \to B)$ 定理 3

3） $[(A \to B) \to B] \to (\neg A \to B)$ 1）2） r_{mp}

4） $\neg A \to \{[(A \to B) \to B] \to B\}$ 3） 定理 6

5） $\{[(A \to B) \to B] \to B\} \to \{\neg B \to \neg[(A \to B) \to B]\}$ 定理 12

6） $\neg A \to \{\neg B \to \neg[(A \to B) \to B]\}$　4）5）定理 7

7） $\neg C \to \{\neg A \to [\neg B \to \neg[(A \to B) \to B]]\}$　6）定理 2

8） $(\neg C \to \neg A) \to \{\neg C \to [\neg B \to \neg[(A \to B) \to B]]\}$　7） $A_2 + r_{mp}$

9） $\{\neg C \to [\neg B \to \neg[(A \to B) \to B]]\} \to$

$\{(\neg C \to \neg B) \to [\neg C \to \neg[(A \to B) \to B]\}$　A_2

10） $(\neg C \to \neg A) \to \{(\neg C \to \neg B) \to [\neg C \to \neg[(A \to B) \to B]]\}$　8）9）定理 7

11） $[\neg C \to \neg[(A \to B) \to B]] \to [[(A \to B) \to B] \to C]$　A_3

12） $(\neg C \to \neg B) \to \{[\neg C \to \neg[(A \to B) \to B]] \to$

$[[(A \to B) \to B] \to C]\}$　11）定理 2

13） $\{(\neg C \to \neg B) \to [\neg C \to \neg[(A \to B) \to B]]\} \to$

$\{(\neg C \to \neg B) \to [[(A \to B) \to B] \to C]\}$　12） $A_2 + r_{mp}$

14） $(\neg C \to \neg A) \to \{(\neg C \to \neg B) \to [[(A \to B) \to B] \to C]\}$　10）13）定理 7

15） $(A \to C) \to (\neg C \to \neg A)$　定理 12

16） $(A \to C) \to \{(\neg C \to \neg B) \to [[(A \to B) \to B] \to C]\}$　14）15）定理 7

17） $(\neg C \to \neg B) \to \{(A \to C) \to [[(A \to B) \to B] \to C]\}$　16）定理 6

18） $(B \to C) \to (\neg C \to \neg B)$　定理 12

19） $(B \to C) \to \{(A \to C) \to [[(A \to B) \to B] \to C]\}$　17）18）定理 7

20） $(A \to C) \to \{(B \to C) \to [[(A \to B) \to B] \to C]\}$　19）定理 6

//

（14） $\vdash (A \to C) \to \{(B \to C) \to [[(B \to A) \to A] \to C]\}$

1） $(B \to C) \to \{(A \to C) \to [[(B \to A) \to A] \to C]\}$

由上题的已证结论

2） $(A \to C) \to \{(B \to C) \to [[(B \to A) \to A] \to C]\}$　1）定理 6

//////////////////////////////////////
6.
(2)

先证$(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$

只需证：$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash C$

①$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash A$

$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash B$ $\wedge$消除

②$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash A \to (B \to C)$ 公理

③$(A \to (B \to C)), A \wedge B \vdash C$ ①②$\to$消除

再证：$(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$

只需证：$(A \wedge B \to C), A, B \vdash C$

①$(A \wedge B \to C), A, B \vdash A$

$(A \wedge B \to C), A, B \vdash B$ 公理

②$(A \wedge B \to C), A, B \vdash A \wedge B$ ①$\wedge$引入

③$(A \wedge B \to C), A, B \vdash A \wedge B \to C$ 公理

④$(A \wedge B \to C), A, B \vdash C$ ②③$\to$消除
///////////////////
(3)
先证$((A \vee B) \to C) \to (A \to C) \wedge (B \to C)$

①$((A \vee B) \to C), A \vdash A$ 公理

$((A \vee B) \to C), A \vdash A \vee B$ $\vee$引入

②$((A \vee B) \to C), A \vdash A \vee B \to C$ 公理

③$((A \vee B) \to C), A \vdash C$ ①②$\to$消除

④$((A \vee B) \to C) \vdash A \to C$ ③$\to$引入

⑤$((A \vee B) \to C) \vdash B \to C$ 同理④可得

⑥ $((A \vee B) \to C) \vdash (A \to C) \wedge (B \to C)$ ④⑤$\wedge$引入

再证 $A \to C) \wedge (B \to C) \to ((A \vee B) \to C)$

只需证： $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash C$

① $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash A$ 公理

$A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash A \to C$ $\wedge$消除

② $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; A \vdash C$ ①$\to$消除

③ $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B; B \vdash C$ 同理②可得

④ $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash A \vee B$ 公理

⑤ $A \to C) \wedge (B \to C), A \vee B \vdash C$ ②③④$\vee$消除

///////////////////

(4)

① $\{A \to B, \neg(B \to C) \to \neg A\} \vdash \neg(B \to C) \to \neg A$ 公理

② $\{A \to B, \neg(B \to C) \to \neg A\} \vdash (\neg(B \to C) \to \neg A) \to (A \to (B \to C))$ 已证定理

③ $\{A \to B, \neg(B \to C) \to \neg A\} \vdash A \to (B \to C)$ ①②$\to$消除

④ $\{A \to B, \neg(B \to C) \to \neg A\} \vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 已证定理

⑤ $\{A \to B, \neg(B \to C) \to \neg A\} \vdash (A \to B) \to (A \to C)$ ③④$\to$消除

⑥ $\{A \to B, \neg(B \to C) \to \neg A\} \vdash (A \to B)$ 公理

⑦ $\{A \to B, \neg(B \to C) \to \neg A\} \vdash A \to C$ ⑤⑥$\to$消除

//////////////////////

(5)

先证 $\vdash \neg(A \to B) \to A \wedge \neg B$

① $\neg(A \to B), \neg A \vdash A \to B$ 由定理 $\neg A \to (A \to B)$ 及$\to$消除

② $\neg(A \to B), \neg A \vdash \neg(A \to B)$ 公理

③ $\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A$ ①②$\neg$引入

④ $\neg(A\rightarrow B)\vdash A$ ③$\neg\neg$消除

⑤ $\neg(A\rightarrow B), B\vdash A\rightarrow B$ 由定理 $B\rightarrow(A\rightarrow B)$ 及 $\rightarrow$ 消除

⑥ $\neg(A\rightarrow B), B\vdash\neg(A\rightarrow B)$ 公理

⑦ $\neg(A\rightarrow B)\vdash\neg B$ ⑤⑥$\neg$引入

⑧ $\vdash\neg(A\rightarrow B)\rightarrow A\wedge\neg B$ ④⑦$\wedge$引入

再证：$\vdash(A\wedge\neg B)\rightarrow\neg(A\rightarrow B)$

① $A\wedge\neg B, A\rightarrow B\vdash A$ $\wedge$消除

② $A\wedge\neg B, A\rightarrow B\vdash A\rightarrow B$ 公理

③ $A\wedge\neg B, A\rightarrow B\vdash B$ ①②$\rightarrow$消除

④ $A\wedge\neg B, A\rightarrow B\vdash\neg B$ $\wedge$消除

⑤ $A\wedge\neg B\vdash\neg(A\rightarrow B)$ ③④$\neg$引入

//////////////////////

(6)

① $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C), A\vdash A$ 公理

② $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C), A\vdash A\vee C$ ①$\vee$引入

③ $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C), B; C\vdash C$ 公理

④ $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C), B; C\vdash A\vee C$ ③$\vee$引入

⑤ $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C), B;\neg B\vdash A\vee C$ 由 B，$\neg B$ 及$\neg$消除

⑥ $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C), B\vdash\neg B\vee C$ $\wedge$消除

⑦ $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C), B\vdash A\vee C$ ④⑤⑥$\vee$消除

⑧ $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C)\vdash A\vee B$ $\wedge$消除

⑨ $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C)\vdash A\vee C$ ②⑦⑧$\vee$消除

/////////////////////

7）

先证：$\vdash (A \wedge B) \to A \wedge (\neg A \vee B)$

①$A \wedge B \vdash A$　$\wedge$消除

②$A \wedge B \vdash B$　$\wedge$消除

③$A \wedge B \vdash \neg A \vee B$　②$\vee$引入

④$A \wedge B \vdash A \wedge (\neg A \vee B)$　①③$\wedge$引入

再证：$\vdash A \wedge (\neg A \vee B) \to (A \wedge B)$

①$A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash A$　$\wedge$消除

$A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash \neg A$　公理

②$A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash B$　①$\neg$消除

③$A \wedge (\neg A \vee B); B \vdash B$　公理

④$A \wedge (\neg A \vee B) \vdash \neg A \vee B$　$\wedge$消除

⑤$A \wedge (\neg A \vee B) \vdash B$　②③④$\vee$消除

⑥$A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A$　$\wedge$消除

⑦$A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A \wedge B$　⑤⑥$\wedge$引入

////////////////////

（8）

先证$\vdash B \to ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A)$

只需证：$B, (A \leftrightarrow B) \vdash A$及$B, A \vdash A \leftrightarrow B$（显然）

①$B, (A \leftrightarrow B) \vdash B \to A$　$\leftrightarrow$消除

②$B, (A \leftrightarrow B) \vdash B$　公理

③$B, (A \leftrightarrow B) \vdash A$　①②$\to$消除

再证$\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \to B$

①$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \to (A \leftrightarrow B)$　$\leftrightarrow$消除

② $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A$ 公理

③ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \leftrightarrow B$ ①② $\rightarrow$消除

④ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \rightarrow B$ ③ $\leftrightarrow$消除

⑤ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash B$ ②④ $\rightarrow$消除

下面证$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \vdash B$也成立。

⑥ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 已证定理

⑦ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg A$ 公理

⑧ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash A \rightarrow B$ ⑥⑦ $\rightarrow$消除

⑨ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$ 已证定理

⑩ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg B$ 公理

⑪ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash B \rightarrow A$ ⑨⑩ $\rightarrow$消除

⑫ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash A \leftrightarrow B$ ⑧⑪ $\leftrightarrow$引入

⑬ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow A$ $\leftrightarrow$消除

⑭ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash A$ ⑫⑬ $\rightarrow$消除

⑮ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg A$ 公理

⑯ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \vdash \neg\neg B$ ⑭⑮ $\neg$引入

⑰ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \vdash B$ ⑯ $\neg\neg$消除

⑱ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A \vdash B$ ⑤⑰假设消除