3.（1）$\vdash (\mathrm{A} \to \exists \mathrm{vB}) \to \exists \mathrm{v}(A \to B)$

方案 2：只需证 $\mathrm{A} \to \exists \mathrm{vB} \vdash \neg\forall \mathrm{v}\neg(A \to B)$，反证法证之。

①$\mathrm{A} \to \exists \mathrm{vB}; \forall \mathrm{v}\neg(A \to B) \vdash \forall v\neg(A \to B)$ 前提

② $\forall v\neg(A \to B) \to \neg(A \to B)$ 定理

③ $\mathrm{A} \to \exists \mathrm{vB}; \forall \mathrm{v}\neg(A \to B) \vdash \neg(A \to B)$ ①②rmp

④ $\neg A \to (A \to B)$ 定理

⑤ $\neg(A \to B) \to A$ ④逆否

⑥ $\mathrm{A} \to \exists \mathrm{vB}; \forall \mathrm{v}\neg(A \to B) \vdash A$ ③⑤rmp

⑦ $\mathrm{A} \to \exists \mathrm{vB}; \forall \mathrm{v}\neg(A \to B) \vdash \exists vB$

⑧ $B \to (A \to B)$ 定理

⑨ $\neg(A \to B) \to \neg B$ ⑧逆否

⑩ $\mathrm{A} \to \exists \mathrm{vB}; \forall \mathrm{v}\neg(A \to B) \vdash \neg B$ ③⑨rmp

⑪ $\mathrm{A} \to \exists \mathrm{vB}; \forall \mathrm{v}\neg(A \to B) \vdash \forall v\neg B$，$v$ 在 A 中无自由出现，根据全称推广

即 $\mathrm{A} \to \exists \mathrm{vB}; \forall \mathrm{v}\neg(A \to B) \vdash \neg\exists vB$

⑫ $\mathrm{A} \to \exists \mathrm{vB} \vdash \neg\forall \mathrm{v}\neg(A \to B)$，⑦⑪及反证法的已证定理

//

3.（2）$\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$

方案 2：只需证 $\vdash A \to (\exists v(A \to B) \to \exists vB)$

①$(A \to B) \to (A \to B)$ 定理

② $A \to ((A \to B) \to B)$ ①前件交换

③ $((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ 定理

④ $A \to (\neg B \to \neg(A \to B)$ ②④传递

⑤ $\forall v(A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ ④定理全称化

⑥ $\forall vA \to \forall v(\neg B \to \neg(A \to B))$ ⑤+公理+rmp

⑦ $A \to \forall vA$　　公理（v 在 A 无自由出现）

⑧ $A \to \forall v(\neg B \to \neg(A \to B))$ ⑥⑦传递

⑨ $\forall v(\neg B \to \neg(A \to B)) \to (\forall v\neg B \to \forall v\neg(A \to B))$ 公理

⑩ $A \to (\forall v\neg B \to \forall v\neg(A \to B))$ ⑧⑨传递

⑪ $(\forall v\neg B \to \forall v\neg(A \to B)) \to (\neg\forall v\neg(A \to B) \to \neg\forall v\neg B)$ 定理

⑫ $A \to (\neg\forall v\neg(A \to B) \to \neg\forall v\neg B)$ ⑩⑪传递

即 $A \to (\exists v(A \to B) \to \exists vB)$

//

4.(2) $\forall x(A \to B) \dashv\vdash \exists xA \to B$，且 x 在 B 中无自由出现。

方案 1：根据替换原理的定理只需证 $\forall x(\neg B \to \neg A) \dashv\vdash \neg B \to \forall x\neg A$，由于 x 在 $\neg B$ 中无自由出现，故直接可由 4.（1）的证明方法即可得。

方案 2：先证 $\forall x(A \to B) \vdash \exists xA \to B$

只需证：$\forall x(A \to B), \exists xA \vdash B$，记 $\Gamma = \{\forall x(A \to B), \exists xA\}$

①$\Gamma \vdash \exists xA$ 前提

②$\Gamma; A \vdash \forall x(A \to B)$ 前提

③$\forall x(A \to B) \to (A \to B)$ 定理

④$\Gamma; A \vdash A \to B$ ②③rmp

⑤$\Gamma; A \vdash B$

⑥$\Gamma \vdash B$，①⑤及 x 在 B 中无自由出现，存在消除

再证 $\exists xA \to B \vdash \forall x(A \to B)$

由于 x 在 B 中无自由出现故只需证：$\exists xA \to B \vdash A \to B$

①$\exists xA \to B \vdash A \to \exists xA$ 定理

②$\exists xA \to B \vdash \exists xA \to B$ 前提

③ $\exists xA \to B \vdash A \to B$ 传递

④ $\exists xA \to B \vdash \forall x(A \to B)$，全称推广

/////////////////////////
4.(4) $\exists x(A \vee B) \dashv\vdash \exists xA \vee \exists xB$

只需证：$\exists x(\neg A \to B) \dashv\vdash \forall x\neg A \to \exists xB$

先证 $\exists x(\neg A \to B) \vdash \forall x\neg A \to \exists xB$

方案 1：只需证 $\neg\forall x\neg(\neg A \to B) \vdash \forall x\neg A \to \exists xB$

只需证 $\neg\forall x\neg(\neg A \to B), \forall x\neg A \vdash \neg\forall x\neg B$，用反证法。

① $\neg\forall x\neg(\neg A \to B), \forall x\neg A, \forall x\neg B \vdash \forall x\neg A$ 前提

② $\neg\forall x\neg(\neg A \to B), \forall x\neg A, \forall x\neg B \vdash \neg A$ ①全称消去定理

③ $\neg\forall x\neg(\neg A \to B), \forall x\neg A, \forall x\neg B \vdash \neg B$ 同理②

④ $(\neg A \to B) \to (\neg A \to B)$ 定理

⑤ $\neg A \to ((\neg A \to B) \to B)$ ④前件交换

⑥ $((\neg A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))$ 定理

⑦ $\neg A \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))$ ⑤⑥传递

⑧ $\neg\forall x\neg(\neg A \to B), \forall x\neg A, \forall x\neg B \vdash \neg(\neg A \to B)$ ②③⑦rmp

⑨ $\neg\forall x\neg(\neg A \to B), \forall x\neg A, \forall x\neg B \vdash \forall x\neg(\neg A \to B)$ ⑧全称推广

⑩ $\neg\forall x\neg(\neg A \to B), \forall x\neg A, \forall x\neg B \vdash \neg\forall x\neg(\neg A \to B)$ 前提

⑪ $\neg\forall x\neg(\neg A \to B), \forall x\neg A \vdash \neg\forall x\neg B$ ⑨⑩反证法定理

方案 2：只需证 $\exists x(\neg A \to B), \forall x\neg A \vdash \exists xB$，这个可用存在消除法证，较简单略。

再证 $\forall x\neg A \to \exists xB \vdash \exists x(\neg A \to B)$

只需证 $\forall x\neg A \to \exists xB \vdash \neg\forall x\neg(\neg A \to B)$，反证法证明。

① $\forall x\neg A \to \exists xB; \forall x\neg(\neg A \to B) \vdash \forall x\neg(\neg A \to B)$ 前提

② $\forall x\neg A \to \exists xB; \forall x\neg(\neg A \to B) \vdash \forall x\neg(\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to B)$ 定理

③ $\forall x\neg A \to \exists xB; \forall x\neg(\neg A \to B) \vdash \neg(\neg A \to B)$ ①②rmp

④ $\neg A \to (A \to B)$ 定理

⑤ $A \to (\neg A \to B)$ ④前件交换

⑥ $\neg(\neg A \to B) \to \neg A$ ⑤逆否

⑦ $\forall x\neg A \to \exists xB; \forall x\neg(\neg A \to B) \vdash \neg A$ ③⑥rmp

⑧ $\forall x\neg A \to \exists xB; \forall x\neg(\neg A \to B) \vdash \forall x\neg A$ ⑦全称推广

⑨ $\forall x\neg A \to \exists xB; \forall x\neg(\neg A \to B) \vdash \forall x\neg A \to \exists xB$ 前提

⑩ $\forall x\neg A \to \exists xB; \forall x\neg(\neg A \to B) \vdash \exists xB$

⑪ $B \to (A \to B)$ 公理

⑫ $\neg(\neg A \to B) \to \neg B$ ⑪逆否

⑬ $\forall x\neg A \to \exists xB; \forall x\neg(\neg A \to B) \vdash \neg B$ ③⑫rmp

⑭ $\forall x\neg A \to \exists xB; \forall x\neg(\neg A \to B) \vdash \forall x\neg B$ ⑬全称推广

即 $\forall x\neg A \to \exists xB; \forall x\neg(\neg A \to B) \vdash \neg\exists xB$

⑮ $\forall x\neg A \to \exists xB \vdash \neg\forall x\neg(\neg A \to B)$，⑩⑭反证法

//

4.(5)

证明： $P(Oscar) \veebar G(Oscar)$

$$= (P(Oscar) \vee G(Oscar)) \wedge (\neg P(Oscar) \vee \neg G(Oscar))$$

记 $\Gamma = \{P(Sam), G(Clyde), L(Clyde, Oscar),$

$P(Oscar) \vee G(Oscar), \neg P(Oscar) \vee \neg G(Oscar), L(Oscar, Sam)$

需证 $\Gamma \vdash \exists x\exists y(G(x) \wedge P(y) \wedge L(x, y))$，考虑反证法：

记 $\Gamma' = \Gamma \bigcup \{\forall x\forall y(\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee \neg L(x, y))\}$

$= \Gamma \bigcup \{\forall x \forall y(L(x,y) \to (G(x) \to \neg P(y)))\}$

$= \Gamma; \forall x \forall y(L(x,y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$

① $\Gamma' \vdash \forall x \forall y(L(x,y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$

② $\Gamma' \vdash L(Clyde, Oscar) \to (G(Clyde) \to \neg P(Oscar)))$

③ $\Gamma' \vdash L(Clyde, Oscar)$

④ $\Gamma' \vdash G(Clyde) \to \neg P(Oscar)$

⑤ $\Gamma' \vdash G(Clyde)$

⑥ $\Gamma' \vdash \neg P(Oscar)$

⑦ $\Gamma' \vdash L(Oscar, Sam) \to (G(Oscar) \to \neg P(Sam)))$

⑧ $\Gamma' \vdash L(Oscar, Sam)$

⑨ $\Gamma' \vdash G(Oscar) \to \neg P(Sam)$

⑩ $\Gamma' \vdash P(Sam) \to \neg G(Oscar)$

⑪ $\Gamma' \vdash P(Sam)$

⑫ $\Gamma' \vdash \neg G(Oscar)$

⑬ $\Gamma' \vdash P(Oscar) \vee G(Oscar)$

⑭ $\Gamma' \vdash \neg G(Oscar) \to P(Oscar)$

⑮ $\Gamma' \vdash P(Oscar)$

⑯ $\Gamma \vdash \neg \forall x \forall y(L(x,y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$，⑥⑮反证法

即 $\Gamma \vdash \exists x \exists y(G(x) \wedge P(y) \wedge L(x,y))$

//

4.(6)

证明： $E(x) \veebar O(x) = (E(x) \vee O(x)) \wedge (\neg E(x) \vee \neg O(x))$

记 $\Gamma = \{\forall x(N(x) \to (E(x) \vee O(x)) \wedge (\neg E(x) \vee \neg O(x)))$，

$\forall x(N(x) \to (E(x) \leftrightarrow G(x)))$， $\neg\forall x(N(x) \to G(x))\}$

需证 $\Gamma \vdash \exists x(N(x) \wedge O(x))$，采用反证法

①$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x))$

② $\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \neg N(x) \vee \neg O(x)$

③$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash N(x) \to \neg O(x)$

④$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash N(x)$

⑤$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \neg O(x)$

⑥$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \forall x(N(x) \to E(x) \veebar O(x))$

⑦$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash (N(x) \to E(x) \veebar O(x)$

⑧$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash E(x) \veebar O(x)$

⑨$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \neg O(x) \to E(x)$

⑩$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash E(x)$

⑪ $\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \forall x(N(x) \to (G(x) \leftrightarrow E(x)))$

⑫ $\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash G(x) \leftrightarrow E(x)$

⑬$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash E(x) \to G(x)$

⑭ $\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash G(x)$

⑮$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) \vdash N(x) \to G(x)$

⑯$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) \vdash \forall x(N(x) \to G(x))$

⑰$\Gamma; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) \vdash \neg\forall x(N(x) \to G(x))$

⑱$\Gamma \vdash \neg\forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x))$

即 $\Gamma \vdash \exists x(N(x) \wedge O(x))$

//

4.(7)

证：由于结论中有全称化的形式及变元 y 不在前提中自由出现，故考虑用全称推广来做，故只须证：

$\exists x[P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))]$,

$\forall x\forall y[P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))] \vdash D(y)\to\neg Q(y)$

下面记此处的前提为 Γ.

1） $\Gamma\vdash\exists x[P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))]$, 前提

2） $\Gamma, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y)) \vdash\forall x\forall y[P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))]$

3） $\Gamma, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))$，

由 2)+公理+rmp

4） $\Gamma, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash P(x)$ （容易证 $A\wedge B)\vdash A$）

5） $\Gamma, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash Q(y)\to\neg L(x,y)$，3）、4）rmp

6） $\Gamma, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash L(x,y)\to\neg Q(y)$

7） $\Gamma, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash\forall y(D(y)\to L(x,y))$，同理 4）

8） $\Gamma, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash D(y)\to L(x,y)$，同理 3）

9） $\Gamma, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash D(y)\to\neg Q(y)$，6）、8）传递

10） $\Gamma\vdash D(y)\to\neg Q(y)$，由 1）、9)及存在消除定理

11） $\Gamma\vdash\forall y(D(y)\to\neg Q(y))$，全称推广

//////////////////////////////////////

5.(1) $P_1^{(1)}(v_1)\not\models_T \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)$

证明：令 $D=R$， $P_1^{(1)}(v_1)$： $v_1<5$

在指派 $s(v_1)=3$ 下公式 $P_1^{(1)}(v_1)$ 为真，但是公式 $\forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)$ 为假。

///////////////////////////////////////

5.(2) $\not\models_T P_1^{(1)}(v_1)\to\forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)$

证明：直接由 1）即可得。

///////////////////////////////////////

5.(3) $\models_T \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1)\to\forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))$（要求从语义角度来证明）

证明：$\models_T \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1)\to\forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))$（注意$\forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)$中的约束变元与$\exists v_1$中的$v_1$没有关系，完全可以把$\forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)$中的$v_1$看作是另一个变元符号）

iff 对任意的结构U和指派s，有$\models_U \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1)\to\forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))[s]$成立

iff $\exists d'\in D,$ 使得$\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$或$\models_U \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)[s]$

1）若$\exists d'\in D,$ 使得$\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$成立，那么原命题得证。

2）若不存在$d'\in D,$ 使得$\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$成立，即对$\forall d\in D,$ 均有$\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d)]$成立，

即有：$\models_U \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)[s]$成立

综合 1）、2）知$\models_U \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1)\to\forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))[s]$成立。

///

7.（1）$\Gamma;\mathrm{A}\models_T \mathrm{B}$ 当且仅当$\Gamma\models_T \mathrm{A}\to\mathrm{B}$

证明：充分性$\Rightarrow$：若$\Gamma\models_T \mathrm{A}\to\mathrm{B}$，则需证$\Gamma;\mathrm{A}\models_T \mathrm{B}$。

只需证对任意的使得Γ中的公式A_i及公式A为真的U,S必有$\models_U B[S]$。

而由$\Gamma\models_T \mathrm{A}\to\mathrm{B}$，则必有$\models_U (A\to B)[S]$，即$\not\models_U A[S]$或$\models_U B[S]$，而$U,S$使得$A$为真，故必有$\models_U B[S]$。

必要性$\Leftarrow$：若$\Gamma;\mathrm{A}\models_T \mathrm{B}$，则需证$\Gamma\models_T \mathrm{A}\to\mathrm{B}$。

只需证对任意的使得Γ中的公式A_i为真的U,S必有$\models_U (A\to B)[S]$。

①若$\not\models_U A[S]$，则显然有$\models_U (A\to B)[S]$成立。

②若$\models_U A[S]$，则由$\Gamma;\mathrm{A}\models_T \mathrm{B}$及在$U,S$的作用下$\Gamma$中的公式$A_i$为真，从而有$\models_U B[S]$，所以$\models_U (A\to B)[S]$。

///

7.(2) $\models_T \mathrm{A}$当且仅当$\models_T \forall v\mathrm{A}$（$v$为任一变元）

证明：不妨设变元v在A中自由出现。

必要性$\Rightarrow$：若$\models_T \mathrm{A}$，需证$\models_T \forall v\mathrm{A}$。

由$\models_{\mathrm{T}}$ A知对任意的U,S及对$\forall d\in D$有$\models_{\mathrm{U}}$ $\mathrm{A}[S(v\mid d)]$（假设变元v在A中自由出现），即$\models_{\mathrm{U}}$ $\forall \mathrm{vA}[S]$，所以$\models_{\mathrm{T}}$ $\forall \mathrm{vA}$。

充分性$\Leftarrow$：若$\models_{\mathrm{T}}$ $\forall \mathrm{vA}$，需证$\models_{\mathrm{T}}$ A。

即需证对任意的U,S有$\models_{\mathrm{U}}$ $\mathrm{A}[S(v\mid d)]$，$\forall d\in D$

由$\models_{\mathrm{T}}$ $\forall \mathrm{vA}$知对任意的U,S有$\models_{\mathrm{U}}$ $\forall \mathrm{vA}[S]$，即对$\forall d\in D$有：

$\models_{\mathrm{U}}$ $\mathrm{A}[S(v\mid d)]$

//

7.（3）$\forall \mathrm{v}(\mathrm{A}\rightarrow \mathrm{B}),\forall \mathrm{vA}\models_{\mathrm{T}} \forall \mathrm{vB}$

证明：只需证对任意的U,S若$\models_{U}\forall \mathrm{v}(\mathrm{A}\rightarrow \mathrm{B})[S]$且$\models_{U}\forall \mathrm{vA}[S]$，则必有$\models_{U}\forall \mathrm{vB}[S]$。

由$\models_{U}\forall \mathrm{v}(\mathrm{A}\rightarrow \mathrm{B})[S]$知对任意$d\in D$，有$\models_{U}$ $(\mathrm{A}\rightarrow \mathrm{B})[S(v\mid d)]$，即有$\not\models_{U}\mathrm{A}[S(v\mid d)]$或$\models_{U}\mathrm{B}[S(v\mid d)]$，又由$\models_{U}\forall \mathrm{vA}[S]$知任意$d\in D$，有$\models_{U}\mathrm{A}[S(v\mid d)]$，综上$\models_{U}\mathrm{B}[S(v\mid d)]$，即$\models_{U}\forall \mathrm{vB}[S]$。