

第3章课后部分习题参考解答(3)

6.

(1)

1) $\neg A \rightarrow A, \neg A \mid \neg A$ 公理

2) $\neg A \rightarrow A, \neg A \mid \neg A \rightarrow A$ 公理

3) $\neg A \rightarrow A, \neg A \mid A$ 1) 2) \rightarrow 消去

4) $\neg A \rightarrow A, A \mid A$ 公理

5) $\neg A \rightarrow A \mid A$ 3) 4) 假设消除

////////////////////////////////////

(2)

先证 $\vdash \neg(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$

只需证: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)), A \wedge B \mid C$

1) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)), A \wedge B \mid A$ 公理+ \wedge 消除

2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)), A \wedge B \mid A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 公理

3) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)), A \wedge B \mid B \rightarrow C$ 1) 2) \rightarrow 消去

4) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)), A \wedge B \mid B$ 公理+ \wedge 消除

5) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)), A \wedge B \mid C$ 3) 4) \rightarrow 消去

再证: $\vdash (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

只需证: $(A \wedge B \rightarrow C), A, B \mid C$

1) $(A \wedge B \rightarrow C), A, B \mid A$ 公理

2) $(A \wedge B \rightarrow C), A, B \mid B$ 公理

3) $(A \wedge B \rightarrow C), A, B \mid A \wedge B$ 1) 2) \wedge 引入

4) $(A \wedge B \rightarrow C), A, B \mid A \wedge B \rightarrow C$ 公理

5) $(A \wedge B \rightarrow C), A, B \mid C$ 3) 4) \rightarrow 消去

(3)

先证 $((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

1) $((A \vee B) \rightarrow C), A \vdash A$ 公理

2) $((A \vee B) \rightarrow C), A \vdash A \vee B$ 1) \vee 引入

3) $((A \vee B) \rightarrow C), A \vdash A \vee B \rightarrow C$ 公理

4) $((A \vee B) \rightarrow C), A \vdash C$ 2) 3) \rightarrow 消去

5) $((A \vee B) \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$ 4) \rightarrow 引入

6) $((A \vee B) \rightarrow C) \vdash B \rightarrow C$ 同理可得

7) $((A \vee B) \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ 5) 6) \wedge 引入

再证 $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$

只需证: $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B \vdash C$

1) $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B; A \vdash A$ 公理

2) $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B; A \vdash A \rightarrow C$ 公理+ \wedge 消除

3) $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B; A \vdash C$ 1) 2) \rightarrow 消去

4) $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B; B \vdash C$ 同理可得

5) $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B \vdash A \vee B$ 公理

6) $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B \vdash C$ 3) 4) 5) \vee 消除

////////////////////////////////////

(5)

先证 $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \wedge \neg B$

1) $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ PC 已证定理

2) $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash \neg A$ 公理

3) $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash A \rightarrow B$ 1) 2) \rightarrow 消除

4) $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash \neg(A \rightarrow B)$ 公理

- 5) $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg\neg A$ 3) 4) \neg 引入
- 6) $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$ 5) $\neg\neg$ 消除
- 7) $\neg(A \rightarrow B), B \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ ND 中已证定理
- 8) $\neg(A \rightarrow B), B \vdash B$ 公理
- 9) $\neg(A \rightarrow B), B \vdash A \rightarrow B$ 7) 8) \rightarrow 消除
- 10) $\neg(A \rightarrow B), B \vdash \neg(A \rightarrow B)$ 公理
- 11) $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg B$ 9) 10) \neg 引入
- 12) $\neg(A \rightarrow B) \vdash A \wedge \neg B$ 6) 11) \wedge 引入
- 13) $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \wedge \neg B$ 12) \rightarrow 引入

再证: $\vdash (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

- 1) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash A \wedge \neg B$ 公理
- 2) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash A$ 1) \wedge 消除
- 3) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$ 公理
- 4) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash B$ 2) 3) \rightarrow 消除
- 5) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash \neg B$ 1) \wedge 消除
- 6) $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$ 4) 5) \neg 引入
- 7) $\vdash (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$ 6) \rightarrow 引入

////////////////////////////////////
(6)

- 1) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), A \vdash A$ 公理
- 2) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), A \vdash A \vee C$ 1) \vee 引入
- 3) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; C \vdash C$ 公理
- 4) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; C \vdash A \vee C$ 3) \vee 引入

- 5) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \vdash B$ 公理
- 6) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \vdash \neg B$ 公理
- 7) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \vdash A \vee C$ 5) 6) \neg 消除
- 8) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)$ 公理
- 9) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash \neg B \vee C$ 8) \wedge 消除
- 10) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash A \vee C$ 4) 7) 9) \vee 消除
- 11) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee B$ 8) \wedge 消除
- 12) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee C$ 2) 10) 11) \vee 消除

$$13) \vdash \neg(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \rightarrow (A \vee C)$$

////////////////////////////////////
(7)

先证: $\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow A \wedge (\neg A \vee B)$

- 1) $A \wedge B \vdash A$ 公理+ \wedge 消除
- 2) $A \wedge B \vdash B$ 公理+ \wedge 消除
- 3) $A \wedge B \vdash \neg A \vee B$ 2) \vee 引入
- 4) $A \wedge B \vdash A \wedge (\neg A \vee B)$ 1) 3) \wedge 引入

再证: $\vdash \neg A \wedge (\neg A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$

- 1) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A$ 公理+ \wedge 消除
- 2) $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash A$ 公理+ \wedge 消除
- 3) $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash \neg A$ 公理
- 4) $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash B$ 2) 3) \neg 消除
- 5) $A \wedge (\neg A \vee B); B \vdash B$
- 6) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash \neg A \vee B$ 公理+ \wedge 消除

7) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash B$ 4) 5) 6) \vee 消除

8) $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A \wedge B$ 1) 7) \wedge 引入

////////////////////////////////////

(8)

先证 $\vdash B \rightarrow ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A)$

只需证: $B, A \leftrightarrow B \vdash A$ 及 $B, A \vdash A \leftrightarrow B$

1) $B, A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$ 公理+ \leftrightarrow 消除

2) $B, A \leftrightarrow B \vdash B$ 公理

3) $B, A \leftrightarrow B \vdash A$ 1) 2) \rightarrow 消除

4) $B, A \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 已证定理

5) $B, A \vdash B$ 公理

6) $B, A \vdash A \rightarrow B$ 4) 5) \rightarrow 消除

7) $B, A \vdash B \rightarrow A$ 同理 6)

8) $B, A \vdash A \leftrightarrow B$ 6) 7) \leftrightarrow 引入

再证 $\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \rightarrow B$

1) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A$ 公理

2) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \rightarrow (A \leftrightarrow B)$ 公理+ \leftrightarrow 消除

3) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \leftrightarrow B$ 1) 2) \rightarrow 消除

4) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \rightarrow B$ 3) \leftrightarrow 消除

5) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash B$ 1) 4) \rightarrow 消除

6) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理

7) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg A$ 公理

8) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash A \rightarrow B$ 6) 7) \rightarrow 消除

- 9) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$ 定理
- 10) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg B$ 公理
- 11) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid B \rightarrow A$ 9) 10) \rightarrow 消除
- 12) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid A \leftrightarrow B$ 8) 11) \leftrightarrow 引入
- 13) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid (A \leftrightarrow B) \rightarrow A$ 公理及 \leftrightarrow 消除
- 14) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid A$ 12) 13) \rightarrow 消除
- 15) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg A$ 公理
- 16) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \mid \neg \neg B$ 14) 15) \neg 引入
- 17) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \mid B$ $\neg \neg$ 消除
- 18) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A \mid B$ 5) 17) 假设消除
- 19) $\mid \neg((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \rightarrow B$ 18) \rightarrow 引入