ECOLE NATIONALE DES SCIENCES
APPLIQUEE D'AGADIR

les bornes du Call et du Put - Les grecques

Finance et Ingénierie Décisionnelle

DJANAME PAG-YENDU

Contents

List of Figures

Chapter 1

Les Bornes

Hypothèse

Nous travaillerons sous condition d'absence d'opportunité d'arbitrage

I Les bornes supérieures

I.1 Call

Une option d'achat est majorée par la valeur du sous-jacent a t_0 (S_0):

$$C <= S_0 \tag{1.1}$$

Démonstration : Supposons So <C et construisons une opportunité d'arbitrage. Vendre une option d'achat du sous-jacent, acheter le sous-jacent a t_0. Si l'option est dans la monnaie livré le sous-jacent et encaisser la différence entre C et So , si l'option est hors la monnaie vendre le sous-jacent a S_t sur le marché spot et on encaisse $C + S_t - S_0$

I.2 Put

Une option de vente est majorée par le Strike K actualisée a t=0

$$P <= K \exp(-rt) \tag{1.2}$$

t=T pour un put européen
Démonstration :Stratégie d'arbitrage pour K<P.
Vendre un put, Si l'option est dans la monnaie acheté au strike K et le vendre sur le marché spot :$P - K + St$, Si l'option est hors de la monnaie on encaisse P

II Les bornes inférieures

II.1 Call

Une option d'achat est minoré par :

$$C >= S_0 - K \exp(-rt) \tag{1.3}$$

Démonstration:*Stratégie d'arbitrage pour* $C <= S_0 - K\exp(-rt)$
Vendre à découvert le sous-jacent a to, encaisser So , acheter un Call à –C, A maturité si l'option est dans la monnaie acheté a K et remboursé et le Payoff($K < St$) est$So - Kexp(-rt)\check{}C > 0$, si l'option est hors de monnaie le Payoff ($K > St$), est $So - Stexp(-rt)\check{}C > 0$

II.2 Put

Une option de vente est minoré par :

$$P >= K\exp(-rt) - S_0 \tag{1.4}$$

Démonstration:*Stratégie d'arbitrage pour* $P <= K\exp(-rt) - S_0$
Acheter un put a –P et acheter le sous-jacent a So si A maturité si l'option est dans la monnaie vendre a K et le Payoff($K > St$) , est $-P-So+Kexp(-rt) > 0$, si l'option est hors de monnaie le Payoff($K < St$), est $Stexp(-rt)\check{}P - So > 0$

III Parité Call-Put

On peut maintenant montrer une relation importante liant C et P. On considère les portefeuilles suivants : Portefeuille A : une option d'achat européenne et un montant de liquidités égal à $K\exp(-rT)$, Portefeuille B : une option de vente européenne et une action sous-jacente. La valeur de ces deux portefeuilles au temps T vaut $max(S_T, K)$. Puisque les options sont européenne elles ne peuvent être exercées avant la date d'échéance.
Les portefeuilles doivent par conséquent avoir la même valeur aujourd'hui, d'où $C + K\exp(-rT) = P + S_0$.
Cette relation exprime le fait que la valeur d'un call (put) européen, caractérisé par un certain prix d'exercice et une date d'échéance, peut être déduite de la valeur d'un put (call) européen doté des mêmes caractéristiques (prix d'exercice, date d'échéance, action sous-jacent).

$$C + K\exp(-rT) = P + S_0 \tag{1.5}$$

Remarque : La relation de parité est indépendante du modèle du prix du sous-jacent, elle ne permet pas de donner un prix aux options.

Chapter 2

Les Grecques

Les grecques sont des indicateurs de risques pris par celui qui a acheté ou vendu des options. Elles détaillent ces risques par origine : le prix du sous-jacent, la volatilité implicite, le temps et le taux d'intérêt. Elles découlent des principaux modèles d'évaluation d'option, notamment de celui de Black Scholes. Ces indicateurs calculent l'impact sur le prix de l'option d'une variation des paramètres qui le forment

I Rappel sur le modèle de Black-Scholes

Les expressions de calculs données par le modèle de Black-Scholes est donnés par
Call C $= S_0\Phi(d_1) - K\exp(-rt)\Phi(d_2)$
Put P $= K\exp(-rt)\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1)$
Avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
$d_1 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{t}}\ln(\dfrac{S_0}{K} + (r + \dfrac{\sigma^2}{2})t)$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$
Pour les calculs nous rappelons que:
$d_1^2 = d_2^2 + 2\ln(\dfrac{S\exp(rT)}{K})$ et $\phi(d_2) = \phi(d_1)\dfrac{S\exp(rT)}{K}$ Avec ϕ la fonction densité de la loi normale centrée réduite
En effet

Proof. $d_1^2 = \dfrac{\ln(\dfrac{S}{K})^2 + T(r + \dfrac{\sigma^2}{2})^2 + 2\ln(\dfrac{S}{K})T(r + \dfrac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2 T}$
$d_2^2 = \dfrac{\ln(\dfrac{S}{K})^2 + T(r - \dfrac{\sigma^2}{2})^2 - 2\ln(\dfrac{S}{K})T(r - \dfrac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2 T}$
$d_1^2 - d_2^2 = \dfrac{T((r + \dfrac{\sigma^2}{2})^2 - (r - \dfrac{\sigma^2}{2})^2)}{\sigma^2} + \dfrac{2\ln(\dfrac{S}{K})T((r + \dfrac{\sigma^2}{2}) - (r - \dfrac{\sigma^2}{2}))}{\sigma^2 T}$
$d_1^2 - d_2^2 = 2rT + 2\ln(\dfrac{S}{K})$ car $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
$d_1^2 - d_2^2 = 2ln(\dfrac{S\exp(rT)}{K})$ $\square$

Proof. $\phi(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{-d_2^2}{2})$=$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{-d_1^2+2ln(\frac{S\exp(rT)}{K})}{2})$

$\phi(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{-d_1^2}{2})\frac{S\exp(rT)}{K}$

$\phi(d_2) = \phi(d_1)\frac{S\exp(rT)}{K}$

□

II Le Delta

le Delta(Δ) traduit la variation du prix de l'option par rapport au petite variation du prix du sous-jacent

on définit donc Δ=$\frac{\partial C}{\partial S}$ $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) + S\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} - K\exp(-rT)\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial S}$

$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) + S\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S} - K\exp(-rT)\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial S}$

$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) + S\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S} - K\exp(-rT)\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial d_2}\frac{\partial d_2}{\partial S}$

$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) + S\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - K\exp(-rT)\phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}$

$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) + S\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - K\exp(-rT)\phi(d_1)\frac{S\exp(rT)}{K}\frac{\partial d_2}{\partial S}$

$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1)$

Respectivement pour un Put : $\Delta(P) = \frac{\partial P}{\partial S} = \Phi(d_1) - 1$

$0 <= \Delta(C) <= 1$ de même $-1 <= \Delta(P) <= 0$

II.1 Interprétation

$\Delta(C) > 0$ nous montre que le Call est une fonction croissante du prix du sous-jacent, de même $\Delta(P) < 0$ nous montre que le Put est une fonction décroissante du prix du sous-jacent

le $|\Delta|$<1 implique que la variation n'explose pas pour une certain petite variation. Δ montre a quelle point varie le sous-jacent des qu'on varie sensiblement le S.

A la monnaie (S=K) le delta est de 0.5 pour un call et -0.5 pour un put. Ce chiffre correspond a la probabilité de voir le call finir dans la monnaie a maturité (S>K). le delta d'une option est de 0,80, alors la probabilité que l'option expire dans la monnaie à l'échéance s'élève à 80 Le fonctionnement du delta pour les options put est identique, sauf que le delta du put est toujours négatif (-).

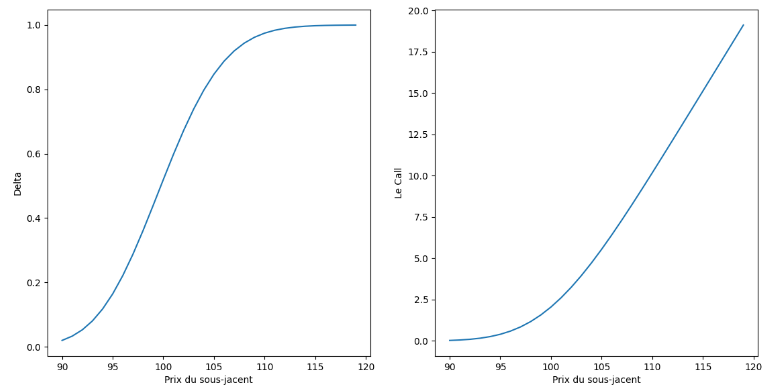

Figure 2.1: Delta pour un Call

Paramètres: Strike:K=105, la volatilité constante: 0.05, taux sans risque:r=0.05, maturité: T=1

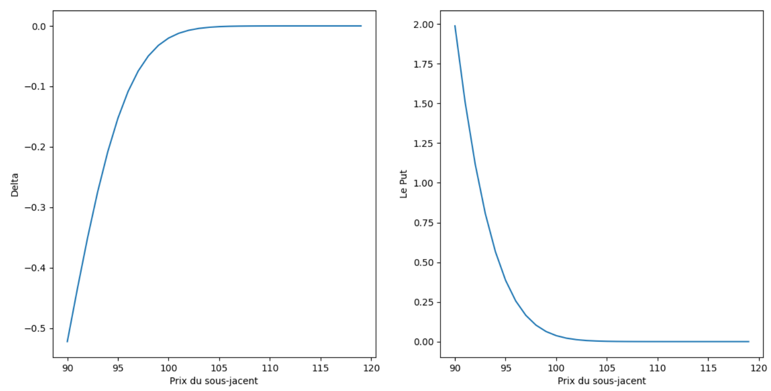

Figure 2.2: Delta pour un Put

Paramètres: Strike:K=95, la volatilité constante: 0.05, taux sans risque:r=0.05, maturité: T=1

III le Gamma

Le Gamma exprime la sensibilité du Delta à une petite variation du prix du sous-jacent

On définit ainsi: $\Gamma = \dfrac{\partial \Delta}{\partial S} = \dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2}$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$\Gamma(C) = \Gamma(P) = \dfrac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$ Le Gamma (Γ) est une fonction positive

III.1 Interprétation

Le gamma représente la convexité du prix d'une option en fonction du cours du sous-jacent.
En pratique, le Gamma est très important, car la stratégie est traditionnellement de se positionner en delta-neutre sur un portefeuille, et c'est alors le gamma, et donc les fluctuations de grande amplitude du cours, qui vont être responsable de l'évolution d'un portefeuille.

Paramètres: Strike:K=105, la volatilité constante: 0.05, taux sans risque:r=0.05, maturité: T=1

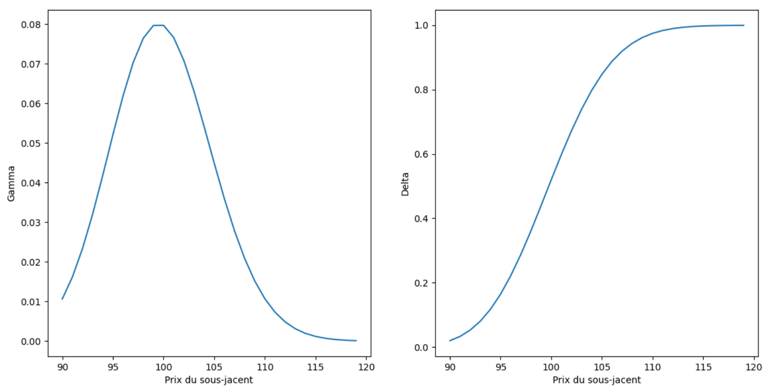

Figure 2.3: Gamma pour un Call

IV Le Vega

Le Vega illustre le comportement du prix de l'option face au petite variation de la volatilité implicite.il représente la sensibilité du prix par rapport à la volatilité implicite. en effet:

$\nu = \dfrac{\partial C}{\partial \sigma} = S\dfrac{\partial \Phi(d_1)}{\partial \sigma} - K\exp(-rT)\dfrac{\partial \Phi(d_2)}{\partial \sigma}$

$\nu = S\phi(d_1)\dfrac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K\exp(-rT)\phi(d_2)\dfrac{\partial(d_1 - \sigma\sqrt{T})}{\partial \sigma}$

$\nu = S\phi(d_1)\dfrac{\partial d_1}{\partial \sigma} - S\phi(d_1)(\dfrac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T})$

$\nu = S\phi(d_1)\sqrt{T}$

Pour un Put:$\nu(P) = \nu(C) = S\phi(d_1)\sqrt{T}$ le vega est une fonction positive, alors le le prix d'une option est une fonction croissante de la volatilité
Paramètres: Prix du sous-jacent=100, Strike:K=105, taux sans risque:r=0.05, maturité: T=1

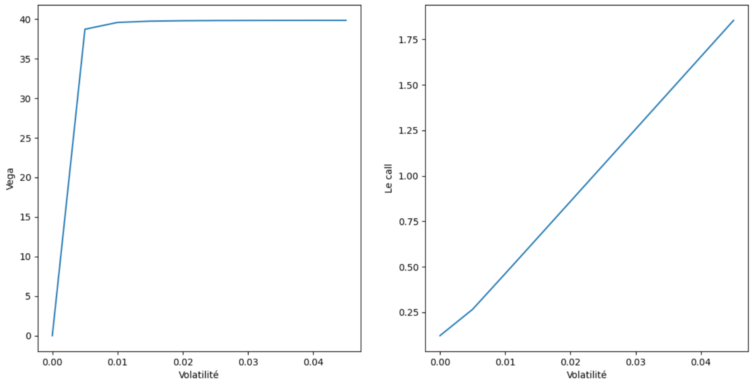

Figure 2.4: Vega pour un Call

V Le Thêta

Le thêta communément appelé l'effet temps d'une option représente la sensibilité de l'option par rapport au temps C'est la sensibilité au petite variation de la maturité.

Ainsi $\Theta = -\dfrac{\partial C}{\partial T}$

$-\Theta = \dfrac{\partial C}{\partial T} = S\dfrac{\partial \Phi(d_1)}{\partial T} - K\Phi(d_2)\dfrac{\partial \exp(-rT)}{\partial T} + K\exp(-rT)\dfrac{\partial \Phi(d_2)}{\partial T}$

$-\Theta = S\phi(d_1)\dfrac{\partial d_1}{\partial T} + Kr\exp(-rT)\Phi(d_2) + K\exp(-rT)\phi(d_2)\dfrac{\partial(d_1 - \sigma\sqrt{T})}{\partial T}$

$\Theta(C) = -\dfrac{\partial C}{\partial T} = -Kr\exp(-rT)\Phi(d_2) - S\phi(d_1)\dfrac{\sigma}{2\sqrt{T}} < 0$

Pour un Put $\Theta(P) = Kr\exp(-rT)\Phi(-d_2) - S\phi(d_1)\dfrac{\sigma}{2\sqrt{T}}$

V.1 Interprétation

Le thêta est le coût du temps qui passe sur un portefeuille d'options. Il évalue combien le passage du temps influe sur la valeur d'une option. Une position longue d'options (gamma positive) aura un impact croissant sur le prix de l'option.

Paramètres: Prix du sous-jacent=100, Strike:K=105, la volatilité constante: 0.05, taux sans risque:r=0.05

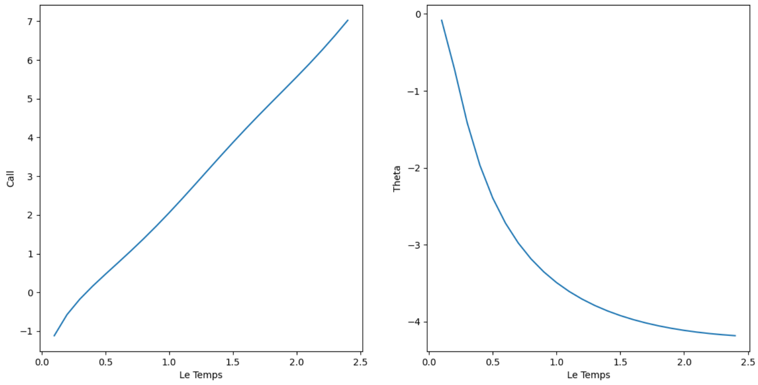

Figure 2.5: Thêta pour un Call

VI Rho

Le Rho est un indicateur représente la sensibilité du prix de l'option par rapport aux petites variation du taux sans risque

en effet: $\mathcal{R} = \dfrac{\partial C}{\partial r}$

$\mathcal{R} = S\phi(d_1)\dfrac{\partial d_1}{\partial r} + KT\exp(-rT)\Phi(d_2) + K\exp(-rT)\phi(d_2)\dfrac{\partial(d_1 - \sigma\sqrt{T})}{\partial r}$

$\mathcal{R}(C) = KT\exp(-rT)\Phi(d_2) > 0$

Pour un Put on a : $\mathcal{R}(P) = -KT\exp(-rT)\Phi(-d_2) < 0$

<u>Paramètre:</u> Prix du sous-jacent=100, Strike:K=105, la volatilité constante: 0.05, maturité=1an

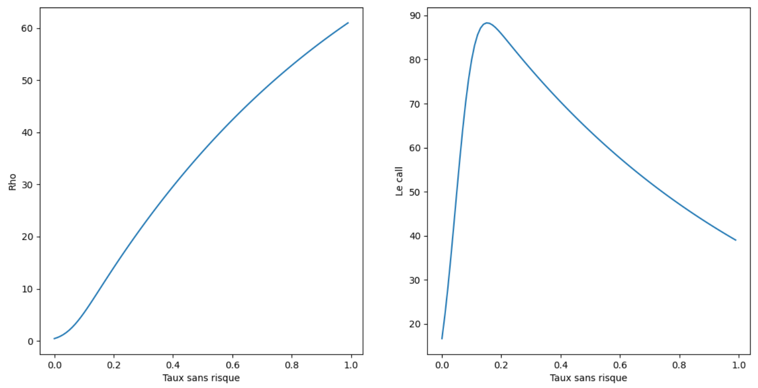

Figure 2.6: Rho pour un Call

VII Implémentation sur Python sous PyQt5:

Call

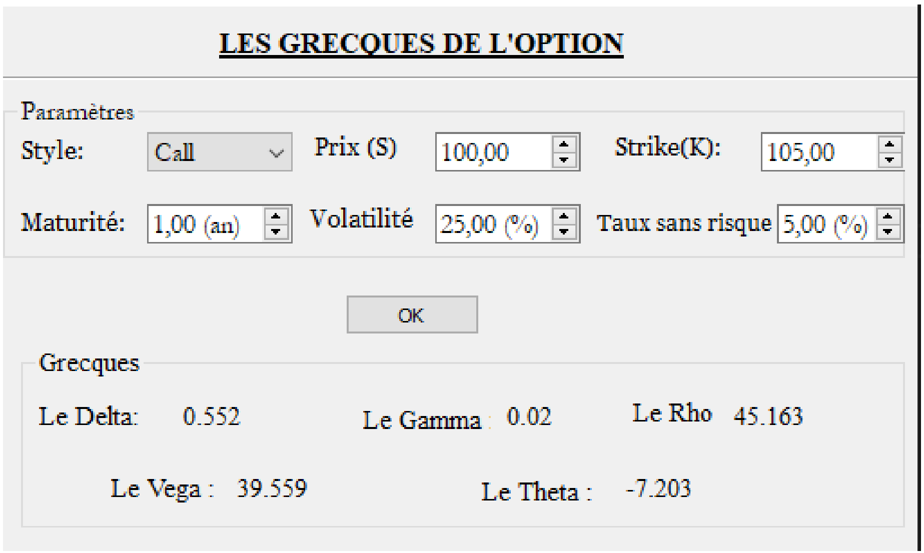

Figure 2.7: Exemple de calcul des grecques pour un Call

Put

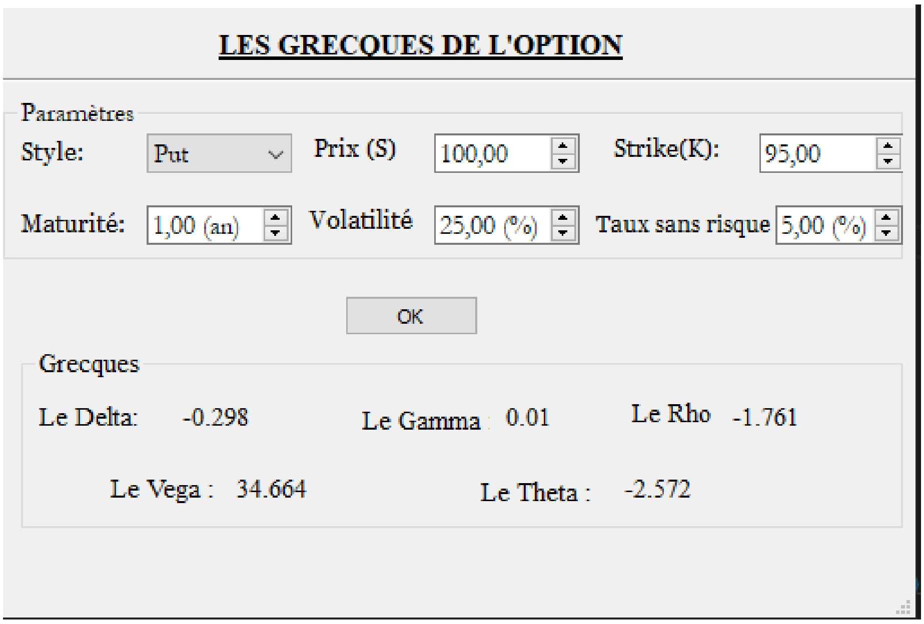

Figure 2.8: Exemple de calcul des grecques pour un Put